NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMVS VIII.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCXC.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCXCIV.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCXC.

Avec une Planche.

HISTOIRE. Pag.

NOVA

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS. TOMVS VIII.

Cum VII. Tabulis aeri incisis.

MATHEMATICA ET PHYSICO - MATHEMATICA.

PHYSICA.

TO-

ASTRONOMICA ET METEOROLOGICA.

Errata.

Pag. 6.	lin. 13.	loco	*amborum*	lege	*ambarum*
— 10.	— pen.	—	*habeat*	—	*habet*
— 18.	— 10	—	$\int \frac{u^{m+n} \partial x}{\int u^m \partial x . \int u^n \partial x}$	—	$\frac{\int u^{m+n} \partial x}{\int u^m \partial x . \int u^n \partial x}$
— 19.	— 1	—	$\nu - \lambda$	—	$\nu \lessgtr \lambda$
— 20.	— pen.	—	*iuuenimus*	—	*inuenimus*
— 36.	— 15.	—	$\frac{\alpha}{1}$	—	$\frac{1}{\alpha}$
— 84.	— 22.	—	*admmittat*	—	*admittat*
— 85.	— 8.	—	Q ∂ C	—	R ∂ C
— 90.	— 7.	—	O P	—	C P
— 104.	— 5.	—	*infinitae*	—	*infinite*
— 109.	— 22.	—	*igit*	—	*igitur*
— 117.	— 13.	—	*ſymtomata*	—	*ſymptomata*
— 256.	— 4.	inferne deleatur *quisque*			
— 322.	— ult.	loco	*cryſtalliſabis*	lege	*cryſtalliſabilis*
— 327.	— 8.	—	*fuudum*	—	*fundum*
— 333.	— 7.	—	*pellucitate*	—	*pelluciditate,*
— 336.	— 25.	—	*conſcentus*	—	*conſecutus*
— 366.	— 26.	—	*Fig. 5*	—	*Fig. 6*

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES

SCIENCES.

HISTOIRE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES SCIENCES
ANNÉE MDCCXC.

L'Académie Impériale des Sciences avoit propoſé en 1787 un Prix ſur un ſujet de Mathématique pure. Le terme du concours fut d'abord fixé jusqu'au 1 Juin 1789 & enſuite prolongé jusqu'à la fin de cette même année. La queſtion propoſée étoit énoncée en ces termes:

Si les fonctions arbitraires, auxquelles on parvient par l'intégration des équations à trois ou pluſieurs variables, repréſentent des courbes ou ſurfaces quelconques, ſoit algébriques ou tranſcendantes, ſoit méchaniques, diſcontinües, ou produites par un mouvement volontaire de la main; ou ſi ces fonctions renferment ſeulement des courbes continues repréſentées par une équation algébrique ou tranſcendante?

L'Académie ne reçut que trois réponſes déſignées comme il ſuit:

N°. 1. Mémoire écrit en allemand avec la dévise: *Juvat graves componere lites.*

N°. 2. Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires, qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles, avec la dévise: *Nulli quae subdita legi.*

N°. 3. De functionibus arbitrariis calculi integralis Dissertio, avec la dévise: *Sic vnum quidquid paulatim protrahit aetas in medium.* —— *Lucret.* *v.* 1387.

Mrs. les Commissaires nommés pour examiner ces trois pieces furent unanimément d'accord que la seconde, avec la dévise: *Nulli quae subdita legi*, discute avec beaucoup de justesse & de pénétration le sujet proposé, & qu'elle mérite le prix. Quant à la piece latine avec la dévise: *Sic vnum quidquid paulatim protrahit aetas in medium*, dont le résultat est d'accord avec celui de la piece françoise, on ne lui a trouvé d'autre défaut que celui d'être trop abstraite, l'Auteur n'ayant pas jugé à propos de développer suffisamment ses idées. Cependant comme elle est très digne d'éloges, il fut décidé de lui accorder les honneurs de l'accessit.

L'Académie en ayant fait son rapport à son illustre chef, S. A. Madame la Princesse de Daschkaw fixa la publication de cette adjudication au 29 Novembre, & ayant convoqué pour ce jour une assemblée extraordinaire, à laquelle furent invités tous les membres honoraires, ainsi que les académiciens ordinaires & les adjoints, Madame la Princesse ordonna que le Secrétaire ouvrit le billet cacheté qui s'étoit trouvé joint à la piece victorieuse. Ce qui étant fait, on on y trouva le nom de l'auteur, M. Arbogaſt Profeſſeur de Mathématique à Colmar en Alſace.

Le billet de la piece qui a mérité l'acceſſit, fut dépoſé aux archives, jusqu'à ce qu'il plut à ſon auteur de ſe nommer, & l'Académie a appris dans la ſuite que c'eſt M. Antoine-Marie de Lorgna, Colonel des Ingénieurs au ſervice de la Republique de Veniſe, & Profeſſeur de Mathématique à l'École militaire de Verone, Aſſocié externe de l'Académie depuis 1776. Quant au billet de la piece allemande No. I. comme elle n'a point ſatisfait à la queſtion de l'Académie, il fut brulé en préſence de toute l'aſſemblée.

Après cet acte de publication, Mrs. les Académiciens Krafft, Fuſs & Schubert propoſérent chacun & lurent des nouvelles queſtions phyſico-mathématiques, pour être ſoumiſes au choix de Madame la Princeſſe de Daſchkaw, laquelle en ayant trouvé deux également intéreſſantes, elle décida que l'une & l'autre fuſſent propoſées à la fois pour les prix de deux années conſécutives. L'Académie publia en conſéquence de cette déciſion un nouveau programme, qui fut imprimé & diſtribué le 10 Février 1791. Ces queſtions ſont

I. Pour l'année 1793.

Donner une théorie plus parfaite que celles qui exiſtent jusqu'à préſent, de la pouſſée des terres & de la force qu'elle exerce contre les revêtemens de maçonnerie. Développer mieux qu'on ne l'a fait jusqu'ici les principes phyſiques relatifs à cet objet, & les conſéquences de la théorie qui réſultent de la ténacité des terres, de leur diverſe humidité, auſſi bien que de la cohéſion & de la fermeté des matieres employées pour les revêtemens, en rapportant des expériences &

des obſervations pratiques, faites ou à faire, d'où l'on puiſſe déduire des hypothèſes, qui s'accordent mieux avec la nature que celles, dont on a fait uſage jusqu'à préſent.

II. Pour l'année 1794.

D'après les obſervations de l'aiguille magnétique, tant anciennes que modernes, définir l'état magnétique de notre globe terraqué; c'eſt à dire, fixer les poſitions des pôles magnétiques de la terre, calculer leurs forces, leurs mouvemens, & en déduire, pour le commencement du 19^e ſiecle, une carte magnétique de la terre, conforme aux obſervations faites en terre ferme & ſur mer, & ſemblable à celle qu'Edmund Halley a conſtruite pour le commencement du 18^e ſiecle; enſuite de la comparaiſon de ces deux cartes, & d'autres encore, s'il en exiſte qui ſoient dignes d'attention, déduire toutes les loix qui concernent les méridiens magnétiques & les variations, que toutes ces lignes, leurs courbures & fléchiſſures doivent éprouver par la ſucceſſion des temps, en formant des concluſions qui ſoient d'accord avec les expériences, & en les appliquant aux uſages nautiques.

Les pieces rélatives aux queſtions de ces deux années doivent être envoyées au concours avant le 1er Janvier de l'année pour laquelle elles ſont deſtinées. Chaque Prix eſt de cent Ducats d'Hollande en eſpéces, & les conditions d'ailleurs réquiſes ſont ſuffiſament indiquées dans toutes les feuilles périodiques, ainſi que dans les programmes que l'Académie publie annuellement.

L'Académie s'étoit encore engagée par un programme extraordinaire publié le 3 Novembre 1788, d'adjuger un Prix de de cinquante Ducats que M. le Comte Apollos de Mouſſin-Pouſchkin avoit dépoſés & promis à celui qui auroit le mieux réſolu le Problème Phyſico-chymique ſuivant:

Déterminer par une ſuite d'expériences, quel eſt le rôle que les airs factices, ou l'électricité, ou encore ces airs factices combinés avec l'électricité, jouent dans la minéraliſation, & conſtater par ces expériences, ſi le principe électrique contient un véritable phlogiſtique ou non?

Les mémoires devoient être envoyés au concours avant le 1er Juin de l'année 1790: mais comme ce terme échû l'Académie n'avoit encore reçu aucune réponſe à cette question, M. le Comte de Mouſſin-Pouſchkin jugea à propos de la retirer entièrement, & d'employer ſon prix à l'encouragement d'un jeune Phyſicien qui aura le plus contribué à l'avancement & aux progrés des connoiſſances Phyſico-chymiques.

Le Général Major d'Artillerie & Chevalier Euler, que ſon devoir appelloit au commencement de cette année en Finlande, avoit prié Madame la Princeſſe de Daſchkaw de lui accorder quelques uns des inſtrumens aſtronomiques ſurnuméraires qui ſe trouvent à l'Obſervatoire de l'Académie, pour pouvoir déterminer pendant le ſéjour qu'il feroit dans ce Gouvernement, la poſition géographique des lieux les plus notables & les plus importans qui s'y trouvent. Madame la Princeſſe & toute l'Académie acquieſcerent avec empreſſement à cette démande. M. Euler partit en conſéquence muni d'une bonne pendule ainſi que de tous les inſtrumens néceſſaires pour faire de pareilles obſervations, & l'Académie reçut déja de lui le 27 Mai un journal des obſervations, qu'il avoit faites avec ſoin à Wilmanſtrand,

ſtrand, & dont il fut fait uſage enſuite au département géographique. Mais la guerre ſurvenue en Finlande empecha le Général Euler de continuer ſes obſervations, pour déterminer encore d'autres poſitions, & l'obligea de renvoyer les inſtrumens.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw enviſageant la néceſſité de former des traducteurs ſuffiſamment verſés en toutes les Sciences, pour inſtruire & éclairer la nation par des bons ouvrages traduits dans la langue du païs & répandre ainſi toutes les connoiſſances utiles parmi les perſonnes qui n'entendent pas les langues étrangeres, elle établit au commencement de cette année un nouvel Inſtitut, où les jeunes élèves ſortis du Gymnaſe académique puſſent ſe perfectionner & s'exercer dans de bonnes traductions. Elle munit cet Inſtitut d'un réglement conforme à ſon but & en confia la Direction à M. le Conſeiller de Cour Protaſſof.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw ayant, par ſon économie, épargné une ſomme de 40000 roubles, elle obtint de Sa Majeſté l'Impératrice la permiſſion, de placer cet argent à la banque Imperiale en capital permanent, dont les interêts doivent être deſtinés à aggrandir le Gymnaſe & à le mettre ſur un meilleur pied.

Les cours publics que Mrs. les Académiciens de la nation donnerent pendant les mois d'été, eurent encore cette année-ci tout le ſuccès que Madame la Princeſſe de Daſchkaw s'en étoit promis en les établiſſant. M. le Conſeiller de Cour Kotelnikov enſeigna les mathématiques, M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski l'hiſtoire naturelle, & M. le Conſeiller de Cour Socolof la chymie expérimentale. Les deux premiers donne-

donnerent leurs leçons dans le grande ſalle du Gymnaſe, & le dernier dans le laboratoire chymique. Tous les trois eurent la ſatisfaction d'avoir un nombreux Auditoire.

L'Académie reçut au mois d'Août une lettre de la Société phyſique de Dantzig, datée du 2 de ce mois, qui mande que, feu M. le Docteur de Wolff lui ayant legué non ſeulement un obſervatoire aſtronomique très bien fourni en toutes ſortes d'inſtrumens, mais encore un capital ſuffiſant pour l'entretien & l'augmentation de ces inſtrumens, ainſi que pour le ſalaire d'un aſtronome, ſous condition que la Société pour engager un aſtronome s'adreſſat à l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg & à trois autres Académies voiſines: la Société, pour ſe conformer aux voeux & à cette derniere volonté de ſon généreux Teſtateur, prie l'Académie de lui indiquer un ſujet verſé en cette Science, à qui elle pût offrir la nouvelle place d'Aſtronome. L'Académie lui fit répondre qu'elle ne connoît actuellement en Ruſſie aucun aſtronome habile, qui ne fut déja employé, ou qui voulut s'expatrier, mais qu'elle ne doute pas que les autres Académies, celles de Stockholm & de Berlin en particulier, ne lui en trouvent qui puiſſent occuper cette place avec honneur, aſſurant au reſte la Société, qu'elle prend un vive part à la réuſſite de ſa récherche & qu'elle fait de voeux ſincères pour que le choix tombe ſur quelqu'un qui rempliſſe dignement ſes vües.

M. Zacharof, éléve de l'Académie & un de ceux qui avoient été envoyés à l'univerſité de Göttingue, en revint vers le commencement de cette année & préſenta pour être ſoumis au jugement de l'Académie: *Specimen chemicum de differentia et affinitate acidi nitroſi cum aliis corporibus*: Mrs. les

Académiciens Pallas, Géorgi, & Socoloff, ayant été nommés pour examiner cet écrit, ils en firent un rapport favorable, & recommendérent ce jeune chymiste à la bienveuillance de Mad. la Princesse de Daschkaw, pour être encouragé & employé à l'Académie.

M. le Conseiller de Cour Hermann, associé pensionaire de l'Académie, établi en Perme, où il est Directeur de la fabrique d'acier à Pyschminsk près de Yecathérinenbourg, s'étant rendu à St. Pétersbourg où ses affaires l'appelloient, Madame la Princesse de Daschkaw, pour recompenser les soins qu'il a eu de communiquer à l'Académie ses observations & recherches minéralogiques, le nomma Académicien ordinaire & le fit introduire en cette qualité dans la séance académique du 11 Février, où il lut un mémoire sur la maniére dont on fait l'acier des mines de fer de la Sibérie, inséré au Tome VI^e de ces nouveaux Actes. Comme la minéralogie demande que celui qui la cultive, soit à portée de profiter des traveaux de la métallurgie qui se pratiquent aux miniéres en grand, Madame la Princesse de Daschkaw consentit que M. Hermann, en acceptant la place d'Académicien ordinaire qui lui a été offerte, puisse retourner & séjourner en Sibérie aussi longtemps que la direction qui lui y est confiee par des Ordres particuliers de Sa Majesté l'exige. Elle l'encouragea d'y continuer ses observations sur les montagnes & leurs miniéres & de les communiquer à l'Académie, lui assurant au reste la continuation de sa pension académique & lui promettant en outre une gratification annuelle, si les envois qu'il fera pour le Cabinet d'histoire naturelle de l'Académie seront considérables. Enfin il fut aretté, que depuis le jour qu'il sera de retour à St. Pétersbourg, pour s'y domicilier, la pension & la gratification ne pouvant plus avoir lieu alors, il commencera

cera à toucher les appointemens d'Académicien ordinaire fixés par le réglement.

Le 1 Mars, Madame la Princesse de Daschkaw donna à M. le Conseiller de Cour & Chevalier Stritter à Moscou une gratification de deux cent roubles, qui lui sera continuée annuellement en recompense des mémoires précieux qu'il fournit pour la Bibliothéque ancienne russe.

De même à M. Krestinin, Correspondant de l'Académie & citoyen d'Archangel, pour avoir enrichi cette même Bibliothèque ainsi que le Journal académique publié en langue russe sous le titre: Новыя Ежемѣсячныя Сочиненїя, de divers articles intéressans, une gratification de cent roubles, avec l'expectance à la premiere pension académique, qui deviendra vacante.

Le 3 de Mai: en considération de la recommandation de Mrs. les Académiciens, & nommément de Mrs. Pallas, Géorgi & Socoloff, comme il a été dit ci-dessus, Madame la Princesse de Daschkaw nomma M. Jacques Zacharof, Adjoint de l'Académie pour la chymie, & le fit introduire en cette qualité à la séance académique le 24 du même mois.

Le 17 Mai, M. l'Apoticaire Lowitz n'ayant joui jusqu'à présent que de la demi-pension académique de cent roubles, Madame la Princesse de Daschkaw pour recompenser son assiduité & l'encourager encore d'avantage à poursuivre ses découvertes chymiques, trouva bon de le gratifier de la pension académique entiere, c'est à dire de deux cent roubles. Le 7 Octobre elle le proposa à l'Académie pour être nommé Adjoint en chymie, avec les appointemens ordinaires, & M.

Lowitz fut reçu unanimément en cette qualité. Le 18 du même mois il fut introduit à la Séance académique & y prit place.

La penſion vacante par cette promotion fut là deſſûs accordée par Madame la Princeſſe de Daſchkaw à M. le Correſpondant Kreſtinin à Archangel.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw fit encore cette année-ci une abſence de quelques mois pour ſe rendre à ſes terres, où ſes affaires domeſtiques l'appelloient. Après avoir en attendant partagé l'adminiſtration des affaires de l'Académie entre ſes divers départemens, elle partit le 26 Juin & revint en Octobre.

L'Académie publia dans le cours de cette année:

Noua Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tome VI^{e}. qui comprend 25 mémoires de Mathématiques & de Phyſique, avec l'hiſtoire de l'année 1788, ſuivie de trois mémoires étrangers.

Le troiſieme volume de la traduction ruſſe de l'hiſtoire naturelle du Comte de Buffon: Исторїя Естественная Графа де Бюффона.

Le ſixieme volume de l'ancienne Bibliotheque ruſſe: Продолженїе древней Россїйской Вивлїоѳики.

Le ſixieme volume des annales du R. P. Nicon: Руская лѣтопись по Никоновскому списку.

Le ſecond volume du Dictionaire de l'Académie Impériale Ruſſe: Словарь Россїйской Академїи.

Les

Les Tomes V et VI. de la collection des articles divers qui ont été imprimés dans les différentes fortes d'almanachs que l'Académie publie: Собранїе сочиненїй выбранныхъ изъ Мѣсяцослововъ на разные годы.

Outre plufieurs traductions & ouvrages pour l'inftruction & l'utilité de la nation.

L'Académie fit en cette année plufieurs pertes, que nous allons encore indiquer ici fuivant l'ordre chronologique.

M. Jean Hyacinthe de Magellan, Gentilhomme Portugais, domicilié à Londres, de la Société Royale des Sciences de Londres, Correfpondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris & membre de celle de Berlin: il fut reçu Affocié externe le 13 Octobre 1778, & obtint la penfion académique en 1783. Mort à Islington en Angleterre le 27 Janvier.

M. Jacques André Mallet, Citoyen de Genève & Profeffeur d'aftronomie: En 1768 l'Académie l'invita à venir faire l'obfervation du paffage de la Planète Venus devant le disque du Soleil, & il fe rendit pour cet effet en 1769 à Ponoï en Lapponie. Reçu au nombre des affociés externes le 29 Décembre 1776: décédé à Genève le 13 Février.

M. Jean Jacques Ferber, Confeiller fupérieur des mines & Membre ordinaire de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruffe. Madame la Princeffe de Dafchkaw l'engagea en 1784 comme Académicien ordinaire en Minéralogie. Il prit fon congé en 1786 & fut gratifié en 1787 de la penfion académique de 200 roubles: il entra enfuite au fervice de S. M. le Roi de Pruffe qui le nomma Confeiller fupérieur des mines & Académicien ordinaire de fon Académie des Sciences & Belles-Lettres à Berlin. Il fit divers voyages minéralogiques & mourut à Berne le 6 Avril, dans fa 47 année, ayant été né à Carlscrone le 29 Août 1748.

M. Benjamin Francklin à Philadelphie: Membre des principales Académies de l'Europe & fondateur de celle de l'Amerique: reçu au nombre des Affociés externes le 2 Novembre 1789, & décedé le 6 Avril., dans fa 86 année.

M. Jean Gesner, Chanoine & Profeffeur de Mathématiques à Zuric en Suiffe: membre de plufieurs Académies: reçu au nombre des affociés externes le 5 Mars 1764. Mort le 25 Avril, dans fa 81^e^ année.

M. Michel Gollovin, Confeiller de Cour: Elève de l'Académie & difciple du célébre Mathématicien Leonhard Euler. Après avoir été Adjoint ordinaire en Mathématiques depuis 1775, il quitta l'Académie en 1786 & s'engagea comme Profeffeur de l'École nationale. Il mourut le 8 Juin.

M. Pierre Jonas Bergius, Docteur en Medécine, Profeffeur d'Hiftoire naturelle & de Pharmacie, Affeffeur du College Royal de Medécine à Stockholm & Membre de plufieurs Académies. Il fut reçu au nombre des Affociés externes le 29 Décembre 1776 & mourut à Stockholm le 29 Juin agé de 60 ans.

Le Prince Tfcherbatov, Confeiller privé, Senateur & Chambellan-actuel. Préfident du Collège des Finances & Chevalier de l'Ordre de Ste. Anne. On a de lui une Hiftoire de Ruffie en fept Tomes faifant 15 volumes in 4^to^. Il fut reçu au nombre des Affociés honoraires le 29 Décembre 1776, & muorut à Moscou le 12 Décembre 1790.

OU-

OUVRAGES,

Machines & inventions, productions de la nature & de l'art, antiquités & curiosités, présentés ou communiqués à l'Académie, l'année 1790.

Le Lundi 7 Janvier, Madame la Princesse de Daschkaw, dirigeant l'Académie, a envoyé huit belles & grandes pieces de différentes mines de cuivre, qui se trouvent dans les minières de Pogodiaschin à l'Oural de Verchoturie, dont elle a fait présent au Cabinet académique.

M. Le Conseiller de Cour & Chevalier Euler, Secrétaire perpétuel des Conférences académiques, a lu une lettre adressée à Mrs. de l'Académie, par M. Achard, Directeur de la Classe de Physique expérimentale de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse, datée de Berlin le 16 Décembre 1789. Ce savant chymiste envoie son ouvrage intitulé *Recherches sur les propriétés des alliages métalliques*, & anonce une *Botanique tinctoriale*, qu'il a entreprise, & de laquelle il continuera de s'occuper, s'il peut se promettre l'approbation & le suffrage de l'Académie. Le Secrétaire a été chargé de remercier M. Achard de son présent ainsi que de ses offres, en l'assurant que l'Académie a toujours fait un grand cas de ses recherches chymiques, & qu'elle ne recevra pas moins favorablement celles qu'il lui promet.

Le 11 Janvier, M. le Conseiller de Collèges & Chevalier Pallas a remis pour la Bibliotheque un exemplaire de la la ſuite du vocabulaire polyglotte publié par Orde de Sa Majeſté l'Impératrice: *Linguarum totius orbis vocabularia comparatiua, AVGVSTISSIMAE cura collecta. Sectionis primae linguas Europae et Aſiae complexae, Pars ſecunda.*

Le même Académicien a préſenté le commencement du manuſcrit du ſecond volume des voyages du défunt Académicien Güldenſtädt.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée d'Irkoutzk le 12 Décembre 1789, qui envoie les obſervations météorologiques que ſon fils a faites à Tigiga dans le Gouvernement d'Irkoutzk, avec un extrait de ſa lettre qui contient quelques détails ſur la pèche des balaines près de Tſcheiwytka, & ſur les nations Tſchuktſches & Koraikes.

M. l'Académicien Zoujef a expoſé, avec une déſcription méthodique, une belle collection de ſables de diverſes couleurs, à demi pétrifiés & coupés en tablettes, qui ſe trouvent dans une montagne près de Bogorodtzk[2] dans le Gouvernement de Toula, & dont il fait préſent au Cabinet de l'Académie.

Le 25 Janvier. M. le Prof. Géorgi a communiqué une lettre de M. de Morveau, Avocat Général honoraire au Parlement de Dijon, datée du 7 Octobre, qui lui envoie pour être préſenté à l'Academie & dépoſé à ſa Bibliotheque: *Mémoire de nomenclature chimique propoſée par Mrs. de Morveau Lavoiſier, Bertholet & Fourcroit, avec un nouveau Syſtème de caractères chimiques adaptés à cette nomenclature, par Mrs. Haſſenfratz & Adet*; un volume in 8vo.

Le

Le 11 Février. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé sept pieces de minéraux & fossiles avec leurs étiquettes, dont elle a fait présent au Cabinet de l'Académie.

Le 18 Février. Madame la Princesse de Daschkaw a communiqué une lettre de M. Herschel datée de Slough près de Windsor du 25 Janvier, qui remercie l'Académie de l'avoir reçu au nombre de ses membres externes.

Le Secrétaire a lu une lettre du R. P. Joseph Costantia, datée de Verceil le 23 Janvier & addressée à Messieurs de l'Académie: il y donne une notice de ses ouvrages en partie publiés & en partie prèts à paroître au jour, entre lesquels se trouve un traité de l'influence des planètes sur la terre, qui ne mérite aucune attention.

Le 22 Février. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Chirurgien Major Fries datée d'Oustiug-vélikoi le 20 Janvier, qui envoie des extraits des observations météorologiques faites à Oustiug en 1787, 1788 & 1789 réduites en formes de tables.

Le 25 Février. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Hacquet adressée à l'Académie & datée de Léopol le 1 Octobre 1789, qui envoie le IV^e^ & dernier volume de son Oryctographie Carniolienne, ainsi que le 1^e^ volume de la nouvelle collection des mémoires de la Société rurale à Lublana dont il est le Secrétaire, publiés l'un & l'autre en allemand & intitulés, comme il suit:

1.) Oryctographia carniolica oder physikalische Erdbeschreibung des Herzogthums Krain 4^ter^ Theil 1789 4^to^.

2.) Neue Sammlung nützlicher Unterrichte herausgegeben von der Gesellschafft des Ackerbaues im Herzogthum Krain, 4to 1 Theil Laybach 1779.

L'Académie a reçu ce présent avec remercimens.

Le 1 Mars. Le Secrétaire a présenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Paris:

1.) Histoire de l'Académie Royale des Sciences: Année 1786 avec les mémoires de Mathématiques & de Physique pour la même année.

1.) Connoissance des temps à l'usage des Astronomes & des Navigateurs pour l'année commune 1791.

& de la part des auteurs, Mrs. Rozier, Mongez le jeune, & de la Métherie: *Observations sur la Physique sur l'Histoire naturelle & sur les Arts.* Année 1788. Juin — Décembre, en tout sept Cahiers.

M. le Conseiller de Cour Hermann a distribué une annonce: *Nachricht für die Freunde der Mineralogie*, dans laquelle il offre aux amateurs de la Minéralogie, par voie de prénumeration, une collection de plus de cent pieces de roches diverses de l'Oural.

Le 8 Mars. Le Secrétaire a communiqué une lettre de M. l'Assesseur Kielow, Agent de la Russie à Augsbourg, qui envoie de la part du Méchanicien Stöschel, pour être présenté à l'Académie: *Nachricht von dem Katoptrischen Zirckel, als eine Zugabe zu Hrn. Branders Beschreibung des Spiegelquadranten.*

Le

Le 8 Mars. Il a auſſi préſenté & diſtribué à Mrs. les Académiciens, de la part de M. Gülich à Pforzheim, pluſieurs exemplaires de l'annonce du 5^{e} volume de ſon ouvrage ſur les couleurs, qui aura pour titre: *Gründliche Vorſchrifften Tuſche von allen möglichen Farben zu machen, und ſolche nicht nur zur Mahlerey, ſondern auch zur Druckerey und Färberey auf Kottum, Leinwand, Seyden, Papier, Leder, Holtz, Bein und Federn nützlich anzuwenden.*

Le 15 Mars. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de S. E. Mr. le Grand-Chambellan de Schouvalof le 12^{me} volume des mémoires de Pierre le Grand: Дѣянія Петра Великаго.

Le 1 Avril. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté la continuation de la déſcription des animaux marins de l'Océan Septentrional, envoiée par M. Fomin d'Archangel. Cette déſcription a été inſérée dans le Journal de l'Académie Новыя Ежемѣсячныя Сочиненія.

M. le Conſeiller de Collèges Pallas a communiqué & lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée d'Irkutzk' le 16 Janvier, qui envoie avec une courte notice deux deſſins d'une tête de Rhinoceros foſſile ſans machoire inférieure, qu'on a trouvée à une profondeur de 4 toiſes, à Graninofstſchina, village ſitué ſur le chemin de Yakoutzk' à 30 verſtes d'Irkoutzk' & à une diſtance à peu près égale du fleuve Angara. La gravure de cette tête foſſile ſe trouve à la ſuite de cette Hiſtoire. Table *.

Le 8 Avril; le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à Mrs. les Académiciens par M. de St. Maz au palais épiscopal

 de

de St. Dié en Lorraine, datée du 17 Mars, qui donne avis de la vente d'une Bibliothèque des plus précieuſes en manuſcripts & éditions très rares, où ſe trouve entr'autres un manuſcript des Commentaires de Jules Céſar en 400 feuilles *in folio* très bien conſervé & enrichi de beaucoup de figures qui repréſentent les guerres de ſon temps.

M. le Conſeiller de Collèges Roumovski a lu une lettre de M. Mechain, datée de Paris le 13 Décembre 1789, qui communique diverſes nouvelles aſtronomiques, entr'autres les dernieres obſervations des immerſions & émerſions des Satellites de Jupiter, & une détermination plus exacte des temps de revolution du 6^{me} & 7^{me} Satellite de Saturne.

Le 19 Avril. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoié avec un catalogue, diverſes pierres précieuſes, cryſtalliſations, agates, cornalines, ainſi que des oeufs, des cocos de mer & autres productions de la nature, dont M. le Chevalier de Britto, Vice-Admiral de la flotte portugaiſe a fait préſent au muſée académique.

Le 22 Avril. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait remettre pour la Bibliothèque académique un exemplaire relié de la ſeconde partie du Tome I. de la Flora Roſſica. La 1^{re} partie avoit été préſentée le 17 Janvier 1785. Voyez le Tome III. des *Noua Acta*, Partie hiſtorique pag. 25.

Le 29 Avril. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. l'Apoticaire Lowitz: *Experimentorum chemicorum de Carbonibus eorumque proprietatibus et vſibus variis continuatio*, inſéré dans la partie hiſtorique des Noua Acta Tom. VI. pag. 57.

Le

Le 3 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de l'auteur pour être placé à la Bibliothèque académique. *Grammaire turque d'une toute nouvelle méthode, pour apprendre cette langue en peu de ſemaines avec un vocabulaire enrichi d'anecdotes utiles & agréables, dédié à S. M. l'Impératrice, par M. Preindt.* 8vo *à Berlin* 1790.

Le 17 Mai. M. l'Académicien Fuſs a préſenté de la part de l'auteur, M. Pfaff, Prof. de Mathématiques à Helmſtädt: *Summations-Methode nebſt andern damit zuſammenhängenden analytiſchen Bemerkungen*, imprimé en 8vo.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée d'Irkoutzk' le 20 Mars, qui envoie une carte de l'isle de Japon, deſſinée par le marchand Japonois Da-i-ko-kù kov-da. Cette carte diffère en pluſieurs points de celle de Kämpfer, & les détails en ſont plus exacts. À cet envoi furent joints trois paquets de ſémences pour le jardin botanique.

Le 24 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait remettre de la part de M. le Comte de Caſſini: *Extrait des obſervations aſtronomiques & phyſiques faites par Ordre de Sa Majeſté* (le Roi de France) *à l'Obſervatoire royal, en l'année* 1788.

Le 27 Mai. Le Secrétaire a préſenté le journal des obſervations aſtronomiques faites à Wilmanſtrandt en Finlande, par M. le General-Major d'Artillerie Euler. Voyés ci-deſſus pag. 7.

Le 21 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée d'Irkoutzk' le 18 Avril, qui envoie les obſervations thermomètriques, que ſon fils, le le Juge-Provincial, a faites à Guijiguirsk pendant le dernier ſemeſtre de 1789.

Le 5 Juillet. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. l'Apoticaire Lowitz: *Materia alba in epidermide Betulae albae recens detecta & examini chemico ſubiecta.* Cet écrit a été inſeré dans le 6^me^ Tome des *Noua Acta*, partie hiſtorique pag. 48.

Le 23 Août. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Prince Beloſelski, Chambellan actuel & Miniſtre plénipotentiaire de S. M. l'Impératrice à Turin. *Dianyologie ou tableau philoſophique de l'entendement, in 8^vo^ à Dresden* 1790.

Le 6 Septembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé une lettre de M. Caſanova, Bibliothécaire de M. le Comte de Waldſtein, réſident à Dux en Bohème, qui ſoumet à l'approbation de l'Académie une feuille imprimée contenant des recherches ſur le Problème de la duplication du cube.

Enſuite une lettre de M. Flaugergues de Viviers en Vivarais, qui envoie pour être ſoumis à l'examen de l'Académie, 1. *Quelques obſervations aſtronomiques faites dans ces dernieres années à Viviers*, en manuſcrit. 2. *La Solution d'un Problème de Méchanique*, auſſi en manuſcrit & 3. Un mémoire imprimé *ſur le mouvement & la figure des Ondes.* Les deux premiers manuſcrits ſe trouvent inſerés à la ſuite de cette hiſtoire.

Le 9 Septembre. M. l'Académicien Géorgi a remis & lu l'extrait d'une lettre reçue de M. le Conſeiller des mines Crell à Helmſtädt, datée du $\frac{2}{23}$ Août 1790, concernant la découverte de M. de Ruprecht, qui pretend avoir retiré par des

des procédés chymiques des vrais régules métalliques de plusieurs terres, d'où M. Crell croît pouvoir conjecturer, que toute terre est de nature métallique, ou qu'il n'y a proprement plus de terres.

Le 30 Septembre. M. le Conseiller de Cour Ozeretskovski a remis de la part de S. E. Mr. le Comte Besbarodko un coffre cachété & adressé à l'Académie, qui s'est trouvé contenir: Six pieces quarrées d'habillemens usités aux isles Aléoutes, artistement tissûs d'une laine très fine & entrelassés des courroies de peau de loutre. Ensuite un sac tissû de paille, dans lequel se trouve un image peinte sur du bois, une autre sur du cuir, un idole de fer & trois monnoyes espagnoles d'argent, enfilées à des rubans. Le tout des isles Aléoutes & envoyé par ordre de S. M. l'Impératrice, pour être déposé au Musée académique.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. Lamey, datée de Mannheim le 14 Août, qui envoie de la part de l'Académie Electorale Palatine des Sciences & Belles-Lettres, dont il est le Secrétaire perpétuel: *Historia et Commentationes Academiae Electoralis Scientiarum et elegantiorum litterarum Theodoro - Palatinae Tom. VI.* en deux volumes, dont le premier contient les mémoires de Physique & l'autre ceux de l'Histoire. Ensuite le nouveau Programme des prix proposés par cette Académie pour l'année 1791, & une brochure in 8vo intitulée *Rémarques sur une dissertation de M. Monnet, sur les montagnes & les terreins à mines en général.*

Le 11 Octobre. Le Secrétaire a remis de la part de la Société Electorale météorologique de Mannheim, le huitième volu-

volume de sa collection intitulée: *Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae. Observationes anni* 1788. 4^{to}.

Le 21 Octobre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé en présent pour être déposé au cabinet d'Histoire naturelle, deux coquilles qu'elle a apportées de Smolensk & dans lesquelles doivent s'engendrer des perles: ensuite deux phioles, avec des cerises quadruples & doubles à une seule tige conservées dans de l'esprit de vin, que lui a présenté M. le Colonel de Bohl, qui assure avoir des cérisiers, où ces monstruosités sont fort communes.

Le 28 Octobre. Le Secrétaire a remis une lettre imprimée de M. le Docteur en Médecine Vizcayno, adressée au Président & aux membres de l'Académie & datée de Complutum ou Alcala de Henares en Espagne le 13 Septembre, qui envoie une dissertation de sa façon, imprimée sous le titre *Praelectio academica simpliciores & salubriores comprehendens de febribus notiones* 4^{to} *Compluti* 1790.

Le 1 Novembre. Le Secrétaire a présenté de la part de l'auteur M. le Baron de Mohrenheim 1.) *Wienersche Beyträge zur practischen Arzneykunde, Wund-Arzney-Kunst und Geburthshulfe, Dessau* 1782. deux volumes in 8^{vo}. 2.) *Beobachtungen verschiedener chirurgischer Vorfälle, Dessau* 1783. deux volumes in 8^{vo}.

Le 15 Novembre. M. le Conseiller de Cour Ozeretskovski a présenté de la part du Correspondant, M. Krestinin à Archangel: Чертежъ Ежегодныхъ Историческихъ записокъ служащихъ основаніемъ къ продолженію Исторіи города Архангельскаго отъ 1780 года. M. Krestinin annonce dans

dans ce plan une hiſtoire d'Archangel depuis l'année 1584 jusqu'en 1780, à laquelle il travaille, & qu'il ſe propoſe d'envoyer à l'Académie.

Le 29 Novembre. Aſſemblée convocquée pour la publication de l'adjudication du Prix de Mathématique. Voyez ci-deſſus, p. 4.

Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie de Toulouſe: *Hiſtoire & Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Inſcriptions & Belles-Lettres de Toulouſe. Tom. I. II. III.* trois volumes in 4^{to}.

Le 2 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Hermann, datée de Cathérinenbourg le 27 Octobre, qui envoie avec ſa diſſertation, imprimée au VII^e Tome des *Noua Acta* pag. 302. une caiſſe contenant deux échantillons du Schoerl rouge, qu'on trouve à Sarapoulskoi, dont les uns ſont taillés & polis en facettes, & les autres crus.

Le 20 Décembre. M. l'Académicien Krafft a lu une lettre de M. Dsivovitſch, Secrétaire du Lieutenant-Général Comte de Balmain, datée de la forterèſſe de St. George ſur la ligne Caucaſe du 22 Avril, qui communique quelques notices des monts Caucaſes, dont le plus haut eſt appellé l'Elbrouſſe, & particulierement de la montagne nommée Swiſtoun (Свистунъ) ou le ſiffleur, qui eſt une eſpèce de Baromètre indiquant le bon & le mauvais temps par un ſifflement moins ou plus fort.

Le 23 Décembre. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a rapporté avoir reçu des lettres de Tobolsk', qui apprennent, que fur une plaine à fept verftes de là fe trouve une caverne profonde, laquelle depuis peu a commencé à jetter du feu: qu'une pareille éruption s'eft auffi manifeftée fur une colline dans la voifinage, & qu'on a envoyé à Tobolsk' des cendres qui ont été ramaffées autour de ces nouveaux volcans.

Le Secrétaire a continué de préfenter chaque mois les obfervations météorologiques que M. le Confeiller de Cour & Chevalier Stritter a faites à Moscou, pendant le cours de l'année.

OB-

OBSERVATIONS astronomiques.

Par
M. *FLAUGERGUES*,
à Viviers en Vivarais.

Ces obſervations ont été faites à un obſervatoire ſitué dans le Fauxbourg St. Jacques de la ville de Viviers, capitale du Vivarais. La latitude de cet Obſervatoire eſt de 44°. 29′. 6″. & ſa longitude de 2°. 20′. 50″. à l'eſt du méridien de l'Obſervatoire de Paris. J'ai employé pour ces obſervations un téleſcope Grégorien de ſeize pouces de longueur, groſſiſſant environ quarante fois, & une excellente pendule reglée par des hauteurs correſpondantes du ſoleil, priſes avec un Sextant à lunette de trois pieds de rayon.

I.

Obſervation du paſſage de Mercure au devant du Soleil le 3 May 1786.

	Tems vray.
Contact intérieur de la ſortie à -	$20^h. 45'. 22''.$
Contact extérieur à - - -	20. 48. 29.

 II.

II.

Obſervation de l'occultation de Jupiter par la Lune, le 29 Octobre 1787.

	Tems vray.
Immerſion du premier bord à - -	$21^h. 22'. 11''.$
Immerſion du ſecond bord à - -	21. 23. 12.

III.

Obſervation de l'occultation de l'étoile 2 α, à la ſerre auſtrale de l'écreviſſe, par la Lune, le 11 May 1788.

	Tems vray.
Immerſion à - - - - -	$10^h. 5'. 36.$

IV.

Obſervation de l'éclipſe de Soleil, du 3 Juin 1788.

	Tems vray.
Commencement de l'éclipſe à - -	$19^h. 26'. 36''.$
Immerſion de la tâche A à - - -	19. 31. 38.
Immerſion du milieu de la tâche B à -	19. 34. 30.
Immerſion du milieu de la tâche C à -	19. 35. 5.
Immerſion du milieu de la tâche D à -	20. 30. 22.
Emerſion du milieu de la tâche A à -	20. 31. 30.
Emerſion du milieu de la tâche B à -	20. 36. 10.
Emerſion du milieu de la tâche C à -	20. 37. 13.
Emerſion du milieu de la tâche D à -	21. 17. 30.
Fin de l'éclipſe à - - - -	21. 25. 41.

V.

Obſervation de l'occultation de ι 8, par la Lune, le 18 Octobre 1788.

	Tems vray.
Emerſion à - - - - -	$11^h. 46'. 29''.$

VI.

VI.

Obſervations des Phaſes de l'anneau de Saturne, pendant l'année 1789.

Premiere diſparition	- -	Entre le 5 & le 7 May.
Premiere réapparition	- -	Le 28 Aouſt à $10^h. \frac{1}{2}$ ſoir
Seconde diſparition	- -	Le 6 Octobre
Seconde réapparition	- -	Le 29 Janvier 1790, à $6^h. \frac{1}{4}$ ſoir

VII.

Obſervation de l'éclipſe de Lune, du 2 Novembre 1789.

Tems vray.	
À $11^h. 48'. 30''$.	Tout Schikardus dans l'ombre.
12. 3. 31.	L'ombre touche Tycho.
12. 5. 15.	L'ombre à mare humorum.
12. 51. 55.	L'ombre à mare foecunditatis.
12. 57. 2.	Tout Petavius dans l'ombre.
12. 58. 26.	Mare humorum hors de l'ombre.
13. 11. 50.	Capuanus hors de l'ombre.
13. 25. 29.	Tycho hors de l'ombre.
13. 27. 6.	Mare nectaris hors de l'ombre.

VIII.

Obſervation du paſſage de Mercure ſur le disque du Soleil, le 5 Novembre 1789.

	Tems vray.
Premiere apparence de ☿ ſur le ☉ à - -	$1^h. 27'. 3''$.
Contact intérieur à - - - -	1. 28. 40.

IX.

Obſervation de l'occultation de $\varkappa$ ♎, par la Lune, le 5 Mars 1790.

	Tems vray.
Immerſion à - - - - -	$17^h. 58'. 31''$.

X.

Obſervation de l'occultation de β ♏, par la Lune, le 2 Avril 1790.

	Tems vray.
Emerſion à - - - - - -	$11^h. 30'. 28''$.

XI.

Obſervation de l'éclipſe de Lune du 28 Avril 1790.

	Tems vray.
Commencement de l'éclipſe à - -	$10^h. 27'. 59''$.
Immerſion totale à - - - -	11. 26. 16.
Commencement de l'émerſion à - - -	13. 3. 36.
Fin de l'éclipſe à - - - -	14. 0. 43.

SO-

SOLUTION D'UN PROBLÈME de Méchanique.

Par le même.

Déterminer la nature de la courbe, que décrit un corps qui est mû horizontalement par l'action d'une force accélératrice constante & soulevé en même tems par une force décroissante, dans un milieu qui résiste comme le quarré de la vitesse.

Solution.

Soit AB la courbe cherchée, & la droite horizontale AD son axe. Ayant mené les deux ordonnées infiniment proches PM & $p\,m$, perpendiculaires à cette ligne AD, soit tirée du point M la perpendiculaire $M\,r$ sur la ligne $p\,m$. Soit prise ensuite sur la ligne PM prolongée, la partie ME pour représenter la force accélératrice simple verticale, & soit décomposée cette force ME en deux autres MF, MG, l'une dirigée suivant le petit côté $M\,m$ de la courbe AB, & l'autre perpendiculaire à cette même direction, ou dirigée suivant la normale au point M. Pareillement par le point M soit menée la ligne horizontale MH, pour représenter la force accélératrice constante qui agit dans ce sens, & soit décomposée cette force en deux autres MI, MK, la premiere dirigée suivant le petit côté $M\,m$ de la courbe & l'autre suivant la nor- Tab. I. Fig. 8.

normale au point M. Cela fait nommons A P, x, P M, y, & l'arc A M, s; nous aurons $Mr = Pp = \partial x$, $rm = \partial y$, $Mm = \partial s$: nommons de plus π, la force accélératrice conſtante qui pouſſe horizontalement le corps, Φ l'éffort de la force verticale au point M, n l'intenſité de la réſiſtance & enfin v la viteſſe, avec laquelle le corps parcourt le petit côté M m, de la courbe A B.

Cela poſé, les triangles ſemblables M r m, E F M donneront les proportions

$$Mm : mr :: ME : MF \text{ \& } Mm : Mr :: ME : EF (= MG), \text{ ou}$$
$$\partial s : \partial y :: \Phi : MF = \frac{\Phi \partial y}{\partial s} \text{ \& } \partial s ; \partial x :: \Phi : MG = \frac{\Phi \partial x}{\partial s},$$

donc l'effort de la force Φ au point M, pour pouſſer le corps ſuivant M m, eſt égal à $\frac{\Phi \partial y}{\partial s}$, & l'effort de la force Φ, perpendiculaire à cette direction, ou à la courbe au point M, eſt égal à $\frac{\Phi \partial x}{\partial s}$.

Pareillement les triangles ſemblables M r m, M I H donnent les proportions

$$Mm : Mr :: MH : MI \text{ \& } Mm : mr :: MH : IH (= MK), \text{ ou}$$
$$\partial s : \partial x :: \pi : MI = \frac{\partial x}{\partial s} \text{ \& } \partial s : \partial y :: \pi : MK = \frac{\pi \partial y}{\partial s},$$

donc l'effort de la force π au point M, pour pouſſer le corps ſuivant M m, eſt égal à $\frac{\pi \partial x}{\partial s}$, & l'éffort de la même force perpendiculairement à cette courbe à ce point eſt égal à $\frac{\pi \partial y}{\partial s}$.

Il eſt évident que les deux forces M I & M F agiſſent dans le même ſens, par conſéquent la force accélératrice, par laquelle le corps eſt pouſſé ſuivant M m, eſt égale à la ſomme de ces deux forces, moins la reſiſtance que le corps éprouve

de

de la part du milieu, laquelle résistance est égale, par l'hypothèse, à $n v^2$, donc la force accélératrice suivant $M m$ est égale a $\frac{\phi \partial y}{\partial s} + \frac{\pi \partial x}{\partial s} - n v^2$. On aura donc, par le principe des forces accélératrices, l'équation

$$\left(\frac{\phi \partial y}{\partial s} + \frac{\pi \partial x}{\partial s} - n v^2\right) . \partial s = v \partial v, \text{ ou}$$

$$2 v \partial v = 2 \phi \partial y + 2 \pi \partial x - 2 n v v \partial s.$$

Puisque par l'hypothèse la force M E diminue continuellement, tandis que la force M H est constante, la courbe A B est concave à l'égard de l'axe. De plus les forces normales MG, MK agissant dans des sens opposés, la résultante de ces forces est égale à leur différence, & comme cette résultante doit fair équilibre à la force centrifuge du corps, elle doit agir dans le sens M K, & être, par conséquent, égale à MK — MG, ou à $\frac{\pi \partial y}{\partial s} - \frac{\pi \partial x}{\partial s}$. On aura donc l'équation $\frac{\pi \partial y}{\partial s} - \frac{\phi \partial x}{\partial s} = \frac{v^2}{\frac{\partial s^3}{-\partial x \partial y}}$, d'où l'on tire

$$v^2 = \frac{\phi \partial s^2}{\partial \partial y} - \frac{\pi \partial y \partial s^2}{\partial x \partial \partial y}.$$

Si l'on différencie cette équation, on aura

$$2 v \partial v = - \frac{2 \phi \partial s . \partial \partial s}{\partial \partial y} + \frac{\partial \phi . \partial s^2}{\partial \partial y} - \frac{\phi \partial s^2 \partial^3 y}{\partial \partial y^2}$$
$$+ \frac{2 \pi \partial y \partial s . \partial \partial s}{\partial x \partial \partial y} + \frac{\pi \partial s^2 \partial \partial y}{\partial x \partial \partial y} + \frac{\pi \partial y \partial s^2 \partial^3 y}{\partial x \partial \partial y^2},$$

ou en reduisant

$$2 v \partial v = 2 \phi \partial y + \frac{\partial \phi \partial s^2}{\partial \partial y} - \frac{\phi \partial s^2 \partial^3 y}{\partial \partial y^2} - \frac{2 \pi \partial y^2}{\partial x}$$
$$+ \frac{\pi \partial s^2}{\partial x} + \frac{\pi \partial y \partial s^2 \partial^3 y}{\partial x \partial \partial y^2}.$$

Égalant cette valeur de $2 v \partial v$ avec celle que donne le principe des forces accélératrices, & substituant pour v^2 sa valeur

$\frac{\Phi \partial s^2}{\partial \partial y} - \frac{\pi \partial y \partial s^2}{\partial x \partial \partial y}$, on aura, toute reduction faite, l'équation

$$\frac{\partial \Phi \partial s^2}{\partial \partial y} - \frac{\Phi \partial s^2 \partial^3 y}{\partial \partial y^2} - \frac{\pi \partial s^2}{\partial x} + \frac{\pi \partial y \partial s^2 \partial^3 y}{\partial x \partial \partial y^2} = - \frac{2 n \Phi \partial s^3}{\partial \partial y} + \frac{2 n \pi \partial y \partial s^3}{\partial x \partial \partial y}.$$

Divisant chaque terme de cette équation par ∂s^2 & le multipliant par $\partial \partial y$, elle deviendra

$$\partial \Phi - \frac{\Phi \partial^3 y}{\partial \partial y} - \frac{\pi \partial \partial y}{\partial x} + \frac{\pi \partial y . \partial^3 y}{\partial x \partial \partial y} = - 2 n \Phi \partial s + \frac{2 n \pi \partial y}{\partial x} \partial s,$$

ou bien

$$\frac{\partial^3 y}{\partial \partial y} = \frac{\partial \Phi - \frac{\pi \partial \partial y}{\partial x}}{\Phi - \frac{\pi \partial y}{\partial x}} + 2 n \partial s.$$

Or $\partial \Phi - \frac{\pi \partial \partial y}{\partial x}$ est la différentielle de $\Phi - \frac{\pi \partial y}{\partial x}$ (en supposant ∂x constante). Integrant donc cette équation, elle deviendra

$$\log. \partial \partial y = \log. (\Phi - \frac{\pi \partial y}{\partial x}) + 2 n s + \log. c.$$

Multipliant le terme $2 n s$ par $\log. b$ (b étant le nombre dont le logarithme est $= 1$) & mettant, pour la constante c, la quantité $f \partial x^2$, afin que l'équation soit homogène en différentielles, l'équation précédente se changera en celle-ci :

$$\log. \partial \partial y = \log. (\Phi - \frac{\pi \partial y}{\partial x}) + 2 n s . \log. b + \log. f \partial x^2,$$

qui, en repassant aux nombres, se change en celle-ci:

$$\partial \partial y = (\Phi - \frac{\pi \partial y}{\partial x}) . b^{2 n s} f \partial x^2,$$

& cette équation

$$\partial \partial y = (\Phi - \frac{\pi \partial y}{\partial x}) . b^{2 n s} . f \partial x^2,$$

est l'équation différentielle qui exprime la nature de la courbe décrite par le corps, & qu'il falloit déterminer.

J'ai

J'ai trouvé une méthode pour trouver, au moyen des ſuites infinies, une équation de la courbe précédente exprimée en termes finis; mais cette méthode eſt trop longue pour pouvoir être rapportée ici. Je la reſerve pour un Mémoire que je me propoſe d'avoir l'honneur de préſenter à l'Académie Impériale de Pétersbourg, ſi ce foible eſſai a le bonheur de lui plaire.

EXTRAIT

de quelques lettres de M. le Baron de *Paccassi*, Correspondant de l'Académie à Vienne, adressées dans le cours de cette année à M. l'Académicien *Fuss*.

(Traduit de l'Allemand.).

Ayant été occupé depuis quelque temps de la Théorie des Comètes, je suis tombé sur une méthode très commode de déterminer, par des essais, l'orbite d'une comète, & je vais vous la communiquer en abrêgé.

I.

Soit T le tems entre la premiere & la troisième observation, C une quantité constante dont le logarithme est $= 0,7564990$, & il y a

$$2 \log. T + \log. C = \log. A.$$

II.

Je nomme les rayons vecteurs R, R′, R″, & la corde entre deux observations K, & il y aura pour toute orbite parabolique

$$(R + R'') K^2 - \frac{K^4}{12 (R + R'')} = A.$$

Le second membre de cette équation pourra être négligé communément dans les calculs de la premiere position.

III.

III.

Ainſi, en prenant $R + R'' = s$, à volonté, & exprimant le tems T en minutes, pour avoir A (ſelon §. I.) on trouvera la corde $K = \sqrt{\frac{A}{R + R''}}$, & de là, ſelon la formule de Lambert, le tems

$$T = \frac{\left(\frac{1+K}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1-K}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3\, m \sqrt{2}}.$$

Quelques changemens dans la valeur adoptée pour s donneront bientôt aſſez approchamment la valeur de T.

IV.

Ayant s, on prendra à volonté $R' - R = d$, de manière cependant que $d^2 < K^2$, & on cherchera l'angle $2\,\Phi$ compris entre les deux rayons vecteurs, par la formule

$$\text{ſin.}\, \Phi = \sqrt{\frac{K^2 - (R' - R)^2}{4\, R\, R'}}.$$

V.

Ayant trouvé cet angle, on déterminera derechef le tems T, moyennant l'expreſſion

$$T^2 = \frac{s^3 - 3\, s\, R'\, R\, \text{coſ.}\, \Phi^2 - 2\, R'\, R\, \text{coſ.}\, \Phi^3 \sqrt{R'\, R}}{18\, m^2}.$$

Un petit nombre de poſitions, faites pour d, donnera très approchamment la valeur de T.

VI.

Enſuite la formule

$$2\, D = \frac{2\, R'\, R\, \text{ſin.}\, \Phi^2}{1 - 2\, \text{coſ.}\, \Phi \sqrt{R'\, R}},$$

donnera la diſtance périhélie.

VII.

Enfin le tems du périhélie sera

$$27,408257\,(R + 2D)\,\sqrt{(R - D)}.$$

Et de là on déduira facilement l'inclinaison & le lieu du noeud, soit par la Trigonométrie sphérique, au moyen de deux longitudes & latitudes héliocentriques, soit par les formules connuës données par M. *Euler*.

Cette méthode est certainement plus expéditive que la méthode ordinaire des fausses positions, & elle a de plus l'avantage que (par le §. II.) on trouve d'abord sans peine, & assez exactement, la corde de l'arc parabolique. Ainsi pour la comète de 1771 la corde de l'arc décrit depuis le 30 Avril $9^h.\ 48'.\ 42''$, jusqu'au 16 Mai $10^h.\ 54'.\ 45''$. (Observ. de Stockholm) étoit selon les calculs de M. *de Tempelhof*, $K = 0,39427$. D'après ma méthode on a

$$\begin{aligned}
\log. T &= 4,3637248,\\
\log. T^2 &= 8,7274496,\\
\log. C &= 0,7564990,\\
\hline
\log. A &= 9,4839486,\\
\log. s &= 0,2907436,\\
\hline
\log. K^2 &= 9,1932050,\\
\log. K &= 9,5966025,
\end{aligned}$$

donc $K = 0,395004$, trop grand seulement de $0,00073$.

Dans les Ephémerides de Berlin pour l'an 1777, page 135. feu M. *Lambert* a trouvé, pour la comète de 1773, la corde depuis le 15 Nov. $15^h.\ 0'$. de cette année, jusqu'au 4 Janv. 13^h. de l'année suivante, $K = 0,83923$. Mon calcul donne

log.

$$\begin{array}{rl} \log. A = & 0,4697152, \\ \log. s = & 0,5925842, \\ \hline & 9,8771310, \\ \log. K = & 9,9385655, \end{array}$$

& partant $K = 0,86809$.

Mais il faut remarquer que cette méthode demande des observations très exactes, parcequ'une petite erreur peut changer toute l'orbite. J'ai essayé de déterminer l'orbite de la comète de 1771, selon les observations rapportées dans les dissertations sur la Théorie des Comètes, qui ont concouru au prix proposé par l'Académie de Berlin. Il y auroit d'après les calculs de M. *de Tempelhof*.

$$\begin{array}{ll} s = & 1,953186 \\ K = & 0,395004 \\ d = & 0,102108 \\ R = & 0,925539 \\ R' = & 1,027647 \\ \Phi = & 11^\circ.\ 16'.\ 50''. \\ T = & 16^j,045869 \end{array}$$

J'ai mis	ce qui me donnoit.	
$s = 1,5$	$T = 15^j,9843$	$K = 0,450742$
$s = 2$	$T = 16,0198$	$K = 0,390354$
$s = 3$	$T = 16,0380$	$K = 0,318723$
$s = 4$	$T = 16,043$	$K = 0,27602$

La valeur de T, par la position $s = 4$, est assez d'accord, & cependant s a été pris trop grand de 2,046814. L'hypothèse $s = 2$ me donne $\Phi = 9^\circ.\ 42'.\ 52''$, d'où je tire (selon §. V.) $T = 16^j,0392$, & de là, selon (§. VI.) la distance périhélie 0,728578, qui devroit être 0,901658. Au reste

reste ce n'est qu'un premier essai, que je tâcherai de perfectionner, s'il obtient votre approbation.

* * *

Dans les Ephémérides de Berlin pour l'année 1782, page 185, se trouve une très belle solution du Problème de Kepler, par M. *Trembley*. J'en ai trouvé une autre solution encore plus approchante, dont voici le précis: Soit m l'anomalie moyenne, ϱ l'anomalie excentrique, e l'excentricité; & comme $m = \varrho + e \sin. \varrho$, je mets $m - \varrho = \pi$, pour avoir $m - \varrho = e \sin. \varrho$, c'est-à-dire $\pi = e \sin. (m - \pi)$. Or comme π est toujours un arc très petit, on pourra mettre

$$\sin. \pi = e \sin. (m - \pi) = e \sin. m \cos. \pi - e \cos. m \sin. \pi,$$

d'où l'on tire

$$\text{tang.}\, \pi = \frac{e \sin. m}{1 + e \cos. m}.$$

Ayant trouvé π moyennant cette expression, on aura l'anomalie excentrique $\varrho = m - \pi$.

Pour corriger l'erreur de cette approximation, je suppose que ϱ ait été trouvé trop petit de la petite quantité ω, & la correction cherchée sera

$$\omega = \frac{m - \varrho - e \sin. \varrho}{1 + e \cos. \varrho}.$$

Soit pour Mercure $m = 20$ & $e = 0,20589$, on aura

$$\begin{array}{ll} \log. (e \sin. m) & = 8,8476870 \\ \log. (1 + e \cos. m) & = 0,0768126 \\ \hline \log. \text{tang.}\, \pi & = 8,7708644 \end{array}$$

par conséquent $\pi = 3^\circ.\ 22'.\ 37''.$ & $\varrho = 16^\circ.\ 37'.\ 23''.$, où la faute n'est que de $5'',4$. Si l'on vouloit faire usage de la correction rapportée, on auroit

$m - \varrho$

$$m - \varrho = 0,05893880$$
$$e - \text{sin.}\,\varrho = 0,05889978$$
$$1 + e\,\text{cos.}\,\varrho = 1,\ 1972850$$

par conséquent

$$\log.\ \text{Num} = 5,5912873$$
$$\log.\ \text{Den} = 0,0781976$$
$$\log.\ \omega = 5,5130897$$

donc $\omega = 0,00003259$, ou bien $\omega = 6,''$ & partant $\varrho = 16^\circ.\ 37'.\ 29''$. La vraye valeur est $16^\circ.\ 37'.\ 28'',4$.

* * *

Dans les Ephémérides de Berlin se trouve une méthode de M. *Cassini*, reduite en formules par M. *Kästner*, pour déterminer l'orbite d'une Planète moyennant des oppositions ou conjonctions. Cette méthode est analogue à celle des fausses positions, telle que *La Caille* l'enseigne. J'ai pensé résoudre directement le Problème, au moins pour de petites excentricités. Voici le précis de ma méthode, accompagné d'une application.

Problème.

Déterminer l'orbite d'une planète par quatre oppositions.

Solution.

Soit t le tems entre la première & seconde observation, t' le tems entre la première & troisième & t'' celui entre la première & quatrième. Soit la différence des longitudes entre I & II $= f$, entre I & III $= g$ & entre I &

$\text{IV} = h$; l'anomalie moyenne pour $\text{I} = m$ & l'anomalie vraye $= \Phi$, l'excentricité $= e$ & le tems periodique $= T$, on aura, pour déterminer les quatre inconnues m, Φ, e & T les quatre équations suivantes :

$$\text{I.} \quad m = \Phi + 2\,e \text{ fin. } \Phi,$$
$$\text{II.} \quad m + \tfrac{a}{T} = \Phi + f + 2\,e \text{ fin. } (\Phi + f),$$
$$\text{III.} \quad m + \tfrac{b}{T} = \Phi + g + 2\,e \text{ fin. } (\Phi + g),$$
$$\text{IV.} \quad m + \tfrac{d}{T} = \Phi + h + 2\,e \text{ fin. } (\Phi + h),$$

en mettant, pour abrèger, $360\,t = a$; $360\,t' = b$; $360\,t'' = d$.

En foustrayant la I. des trois suivantes il en résulte

$$\text{V.} \; - \; - \; \tfrac{a}{T} = f + 2\,e \text{ fin. } (\Phi + f) - 2\,e \text{ fin. } \Phi,$$
$$\text{VI.} \; - \; - \; \tfrac{b}{T} = g + 2\,e \text{ fin. } (\Phi + g) - 2\,e \text{ fin. } \Phi,$$
$$\text{VII.} \; - \; - \; \tfrac{d}{T} = h + 2\,e \text{ fin. } (\Phi + h) - 2\,e \text{ fin. } \Phi.$$

Et en divisant VI & VII par V, on obtient

$$\text{VIII.} \; - \; - \; \frac{b}{a} = \frac{g + 2\,e \text{ fin. } (\Phi + g) - 2\,e \text{ fin. } \Phi}{f + 2\,e \text{ fin. } (\Phi + f) - 2\,e \text{ fin. } \Phi},$$
$$\text{IX.} \; - \; - \; \frac{d}{a} = \frac{h + 2\,e \text{ fin. } (\Phi + h) - 2\,e \text{ fin. } \Phi}{f + 2\,e \text{ fin. } (\Phi + f) - 2\,e \text{ fin. } \Phi},$$

Je mets pour abrèger les calculs

$$\tfrac{b}{a} = A;\; Af - g = M;\; 1 - A = P,$$
$$\tfrac{d}{a} = B;\; Bf - h = N;\; 1 - B = Q,$$

& je tire de la VIII.

$$2\,e = \frac{M}{\text{fin. } (\Phi + g) + P \text{ fin. } \Phi - A \text{ fin. } (\Phi + f)}.$$

En substituant cette valeur dans la IX, elle me fournit

$$\text{tag. } \Phi = \frac{M \text{ fin. } h - N \text{ fin. } g + (NA - BM) \text{ fin. } f}{PN + QM + N \text{ cof. } g - M \text{ cof. } h - (NA - BM) \text{ cof. } f}.$$

Enfin

Enfin on aura

$$T = \frac{a}{f + 2\,e\,\text{fin.}\,(\Phi + f) - 2\,e\,\text{fin.}\,\Phi},$$

$$m = \Phi + 2\,e\ \text{fin.}\ \Phi.$$

Au défaut d'autres obfervations je me fers des fuivantes, pour en faire l'application

Temps moyen	Longit. du ☉
1749. 21 Mars.	$0^s.\ 1^\circ.\ 1'.\ 19'',5$
—— 7 Août.	4, 14, 57, 30, 4
—— 10 Oct.	6, 17, 16, 53, 0
1750. 2 Mars.	11, 11, 51, 17, 9

On aura donc

$$t = 139^j;\ t' = 203^j;\ t'' = 346^j,$$

$$f = 4^s,\ 13^\circ,\ 56',\ 11'', = 2,3376261,$$

$$g = 6,\ 16,\ 15,\ 33 = 3,4253646,$$

$$h = 11,\ 10,\ 49,\ 58 = 5,9486541,$$

$l\,a = 8,2556198$	$A\,f = 3,413943$	$P = -0,460432$
$l\,b = 8,4201010$	$B\,f = 5,\ 81884$	$Q = -1,489208$
$l\,d = 8,6516811$	$M = -0,011422$	
	$N = +0,\ 12952$	

De là on tire log. tag. $\Phi = 0,8895564$, & partant $\Phi = 262^\circ, 39', 6''$. Enfuite on aura $e = -0,0168362$, par conféquent

$$\text{Log. } 2\,e\ \text{fin.}\,(\Phi + f) = (+)\ 8,3025569,$$

$$\text{Log. } 2\,e\ \text{fin.}\ \Phi = (-)\ 8,5236920,$$

$$\begin{array}{rl}
\log.\ a & = 8,2556198 \\
\log.\ \text{den} & = 0,3785977 \\ \hline
\log.\ T & = 7,8770221 \\
\log.\ (57^\circ.\ 17'.\ 44'',8) & = 5,3144251 \\ \hline
 & \ 2,5625970
\end{array}$$

donc $T = 365^j, 25571$. Il y a donc

D'après ce calcul.	D'après les tables.	Différence.
$\phi = 262^\circ, 39', 6''$	$\phi = 262^\circ, 21', 46''$	$-17', 20''$
$e = 0,0168362$	$e = 0,0168310$	0,0000052
$T = 365^j, 25571$	$T = 365^j, 25659$	0,00088

De cette manière le Calcul ne devient pas trop pénible & sera toujours plus facile que par la méthode ordinaire. Si j'en excepte M. *Euler*, personne, que je sache, a résolu directement ce Problème.

EXTRAIT DES MÉMOIRES

CONTENUS DANS CE VOLUME.

CLASSE MATHÉMATIQUE ET PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

Variae confiderationes circa feries hypergeometricas.

Auctore *L. Eulero.* pag. 3.

Ce Mémoire eft une fuite de celui qui a été inféré dans le volume précédent de nos Actes & dont nous avons donné le précis dans l'Hiftoire qui précéde le dit Volume, page 38. L'Auteur continue ici fes recherches fur le terme général des féries hypergéométriques, en confidérant particulièrement les trois produits infinis:

$$a(a+b)(a+2b)(a+3b) \text{ - - - - } [a+(i-1)b] = \Gamma : i,$$

$$a(a+2b)(a+4b)(a+6b) \text{ - - - - } [a+(2i-2)b] = \Delta : i,$$

$$(a+b)(a+3b)(a+5b) \text{ - - - - } [a+(2i-1)b] = \Theta : i,$$

dont il cherche les valeurs finies, en prenant les logarithmes, & appliquant aux féries qui en réfultent fa méthode de trouver la fomme des féries par le moyen de leur terme général, ce qui, en remontant aux nombres, lui fournit les expreffions fuivantes:

$$\Gamma : i = A\, e^{-i} (a - b + b\, i)^{\frac{a}{b} + i - \frac{1}{2}},$$

$$\Delta : i = B\, e^{-i} (a - 2\, b + 2\, b\, i)^{\frac{a}{2\,b} + i - \frac{1}{2}},$$

$$\Theta : i = C\, e^{-i} (a - b + 2\, b\, i)^{\frac{a}{2\,b} + i},$$

A, B, C, étant des conftantes introduites par l'intégration & dépendantes l'une de l'autre de manière que $B = \sqrt{k\, e}\, A$ & $C = \sqrt{\frac{A}{k}}$ & $k = \sqrt{a\, \frac{P}{Q}}$, où

$$P = \int \frac{x^{a + b - 1}\, \partial x}{\sqrt{(1 - x^{2\,b})}} \;\&\; Q = \int \frac{x^{a - 1}\, \partial x}{\sqrt{(1 - x^{2\,b})}},$$

les integrales prifes depuis le terme $x = 0$ jusqu'au terme $x = 1$.

II.

De vero valore formulae integralis $\int \partial x\, (l\, \frac{1}{x})^n$, a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extenfae.

Auctore *L. Eulero*, pag. 15.

La formule dont il s'agit, dans ce Mémoire, de trouver la vraye valeur, repréfente le terme général de la progreffion hypergéométrique de Wallis; fa valeur peut, par conféquent, être regardée comme parfaitement connue, pour tous les cas, où l'expofant n eft un nombre entier pofitif ou négatif; mais lorsque cet expofant eft un nombre fractionnaire, on fait par les recherches antérieures de M. Euler fur ce fujet, que la valeur de la formule propofée dépend de la quadrature d'une courbe algébrique d'un ordre plus ou moins élevé, felon que le dénominateur de la fraction, prife pour n, eft plus ou moins grand. C'eft donc auffi de la reduction de ces valeurs tranfcendantes à la quadrature de courbes algébrigébriques, qu'il s'agit dans ce Mémoire. Voici le précis de la méthode que l'auteur employe pour cet effet.

Il met $l\frac{1}{x} = u$, & comme la formule proposée $\int u^n \partial x$ est reductible, pour le terme d'intégration établi $x = 0$, tant à $n \int u^{n-1} \partial x$ qu'à $\frac{1}{n+1} \int u^{n+1} \partial x$, on pourra, moyennant la premiere réduction, diminuer successivement de l'unité toute fraction positive prise pour n, quelque grande qu'elle soit, & réduire l'exposant à une fraction contenue entre les limites 0 & 1; & à l'aide de la seconde réduction, on sera en état d'augmenter successivement de l'unité toute fraction négative qu'on prendroit pour n, & réduire cet exposant à une fraction renfermée entre les mêmes limites 0 & 1. Par là on obtient l'avantage de n'avoir à traiter que les fractions positives moindres que l'unité.

Ceci remarqué M. Euler considère la série

$$s = 1 + A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + \&c.$$

formée des produits des deux coëfficiens correspondans des puissances m & n développées du binome $1 + z$, savoir

$$(1+z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}$$

$$(1+z)^n = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.}$$

& ayant fait voir, dans le Mémoire qui est à la suite de celui-ci, que la somme de la série mentionnée peut être exprimée ainsi:

$$s = \frac{\int u^{m+n} \partial x}{\int u^m \partial x \int u^n \partial x},$$

il compare cette valeur avec celle qu'il avoit donnée autrefois (Acta pro A°. 1781. P. I. pag. 82.) pour la somme de de la même série, savoir:

$$s = \frac{m+n}{mn \int x^{m-1} \partial x (1-x)^{n-1}},$$

& il en déduit cette équation :

$$\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\int\partial x\sqrt[\lambda]{u^{\mu}}\,.\int\partial x\sqrt[\lambda]{u^{\nu}}=\int\partial x\sqrt[\lambda]{u^{\mu+\nu}}\int\frac{z^{\mu-1}\,\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^{\lambda})^{\lambda-\nu}}},$$

où $\mu=\lambda m$, $\nu=\lambda n$ & $z=\sqrt[\lambda]{x}$, & la derniere intégrale réductible à la quadrature du cercle, toutes les fois que $\mu+\nu=\lambda$. Et en général, quelle que soit la valeur des lettres λ, μ & ν, pourvu que μ & ν soyent moindres que λ, la valeur de cette intégrale pourra être regardée comme connue, de même que $\int\partial x\sqrt[\lambda]{u^{\mu}}$ & $\int\partial x\sqrt[\lambda]{u^{\nu}}$, desorte que la valeur de la formule proposée pourra être déterminée pour toutes les valeurs possibles de l'exposant n. Ces recherches générales sont éclaircies par plusieurs applications que M. Euler en fait, en donnant à λ successivement les valeurs 2, 3, 4 & 5, & à μ & ν, dans chaque cas, toutes les valeurs audessous de λ.

III.

Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex vnciis potestatum binomii formantur.

Auctore *L. Eulero.* pag. 32.

On a vu dans l'extrait du Mémoire précédent que M. Euler exprime la somme de la série

$$s=1+A\alpha+B\beta+C\gamma+D\delta+\text{etc.}$$

composée des produits de deux coëfficiens correspondans des puissances m^{me} & n^{me} du binome $1+z$, par la formule $s=\frac{\int u^{m+n}\,\partial x}{\int u^{m}\,\partial x\,.\int u^{n}\,\partial x}$, où $u=l\frac{1}{x}$. Il en donne, dans le présent Mé-

Mémoire une démonſtration très facile, qui, quoiqu'elle paroiſſe reſtreinte aux expoſans m & n entiers, doit pourtant, en vertu du principe de la continuité, valoir auſſi pour des expoſans fractionnaires quelconques.

Cependant comme non ſeulement cette ſérie, mais auſſi toutes les autres progreſſions, formées d'une manière ſemblable des coëfficiens de deux puiſſances differentes du Binome, ſont exprimées par la quadrature de courbes plus ou moins tranſcendantes; l'auteur expoſe ici une méthode d'exprimer les ſommes des mêmes ſéries par la quadrature de courbes algébriques, pour des expoſans fractionnaires quelconques. Les réductions, ſur lesquelles cette methode eſt fondée, étant trop nombreuſes, pour être ſuſceptibles d'extraits, nous nous contenterons de rapporter les ſéries que M. Euler a ſoumiſes à ſes recherches, avec l'expreſſion de leurs ſommes.

En mettant donc

$$\frac{1}{(1-x^b)^{\frac{a}{b}}} = 1 + A x^b + B x^{2b} + C x^{3b} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1-x^b)^{\frac{\alpha}{b}}} = 1 + \mathfrak{A} x^b + \mathfrak{B} x^{2b} + \mathfrak{C} x^{3b} + \text{etc.}$$

M. Euler donne les ſommations ſuivantes:

$$1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta}\int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{2a}}},$$

$$1 + \mathfrak{A} A + \mathfrak{B} B + \mathfrak{C} C + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta}\int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}},$$

 1 +

$$1 + \mathfrak{A}B + \mathfrak{B}C + \mathfrak{C}D + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta}\int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}},$$

$$1 + \mathfrak{A}C + \mathfrak{B}D + \mathfrak{C}E + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta}\int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}},$$

$$1 + \mathfrak{A}D + \mathfrak{B}E + \mathfrak{C}F + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta}\int \frac{x^{a+3b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{1-x^b)^{a+\alpha}}},$$

etc. etc. etc.

où $\Delta = \frac{\pi}{b\,\text{sin.}\,\frac{a\pi}{b}}$, $a > 0$ & $a + \alpha < b$.

La feconde de ces fommations étant reftreinte avec toutes les autres, comme nous venons de dire, aux cas où a eft contenu entre les limites 0 & b, M. Euler reprend la même férie, en cherchant la fomme pour les cas où a eft un nombre négatif, mais plus petit que b, & enfuite pour des valeurs négatives de a quelconques.

Enfin la fomme de la même férie peut être réduite à la quadrature de courbes algébriques plus fimples, par un procédé que l'auteur a dejà employé autrefois, dont voici le fond. En défignant par les caractères $(\frac{m}{1})$, $(\frac{m}{2})$, $(\frac{m}{3})$, etc. les coëfficiens de la m^{me} puiffance, & par $(\frac{n}{1})$, $(\frac{n}{2})$, $(\frac{n}{3})$, etc. les coëfficiens de la n^{me} puiffance du Binome $1 + z$, M. Euler a fait voir dans la 1^{re} partie des Actes pour l'année 1781, que la fomme de la férie

$$1 + (\tfrac{m}{1})(\tfrac{n}{1}) + (\tfrac{m}{2})(\tfrac{n}{2}) + (\tfrac{m}{3})(\tfrac{n}{3}) + \text{etc.}$$

eft égale au produit

$$\frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}\cdot\frac{m+n-2}{3} + \text{------} \frac{m+1}{n},$$

& il a dejà obfervé alors, que ce produit eft auffi la valeur de l'ex-l'expreſſion $\frac{1}{m \int x^m \partial x (1 - x)^{n-1}}$, l'intégrale étant priſe depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, ſans démontrer directement cette aſſertion dans le Mémoire cité. Une démonſtration de la ſommation mentionnée & pluſieurs transformations de la forme rapportée terminent le préſent Mémoire.

IV.

Exercitatio analytica.

Auctore *L. Eulero.*

Sachant que le coſinus de tout angle peut être exprimé par un produit d'un nombre infini de facteurs, ſavoir

$$\text{coſ.}\, \frac{\pi}{2n} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{9n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{25n^2}\right) (\text{etc.}$$

il ſe préſente ici une queſtion intéreſſante: comment, en ſuppoſant la valeur de ce produit inconnue, on puiſſe trouver d'une manière facile ſa valeur coſ. $\frac{\pi}{2n}$. C'eſt le ſujet de ce petit Mémoire.

Ayant pris les logarithmes & ſubſtituée à la place de chacun ſa valeur en ſérie, tout revient à ſommer les ſéries réciproques des puiſſances paires des nombres impairs, que M. Euler indique reſpectivement par A ϱ^2, B ϱ^4, C ϱ^6, etc. où $\varrho = \frac{\pi}{2}$, & en faiſant uſage des relations entre les lettres A, B, C, D, etc. que l'on trouve démontrée dans les *Opuſcula analytica*, & ailleurs, il parvient à trouver pour le produit en queſtion la valeur connue coſ. $\frac{\pi}{2n}$.

V.

Euolutio Problematis, cuius Solutio analytica eſt difficillima, dum ſynthetica per ſe eſt obuia.

Auctore *L. Eulero* pag. 73.

Parmi les Problèmes qu'on a coûtume de réſoudre par la méthode inverſe des tangentes, il y en a un grand nombre, dont une ou pluſieurs ſolutions particulieres, & ſouvent même la ſolution complette, ſont évidentes, & qui neanmoins, ſurtout lorsqu'il eſt queſtion d'une propriété du rayon oſculateur, ſont aſſez difficiles à réſoudre analytiquement, à cauſe des ſecondes différentielles qui entrent dans l'expreſſion générale de cette ligne. De cette eſpèce eſt auſſi le Problème qui fait le ſujet de ce Mémoire, où il s'agit de tracer autour d'un point donné une ligne courbe, de maniere que la diſtance du point fixe donné au centre du cercle oſculateur ſoit partout la même. On voit d'abord que toutes les courbes engendrées par le développement d'une cercle qui a le point donné pour centre, ſatisfont à la condition préſcrite. On voit auſſi qu'à cette même condition ſatisfont tous les cercles dont le centre eſt à une diſtance donnée du point fixe. Cependant la ſolution analytique complette de ce Problème, qui doit contenir toutes les deux ſolutions mentionnées, n'eſt pas ſans difficultés.

M. Euler tente ici deux moyens pour obtenir une telle ſolution complette. Dans la première ſolution il fait entrer la perpendiculaire abaiſſée du point fixe donné ſur la tangente de la courbe & la diſtance de cette ligne au point correſpondant de l'arc, ce qui, en nommant cette perpendiculaire

culaire p & sa distance au point correspondant de la courbe t, conduit à l'équation $\partial p \surd (aa - tt) - t \partial t = 0$. Dans la seconde solution M. Euler considère l'amplitude Φ de la courbe, & la perpendiculaire v abaissée du point fixe sur le rayon osculateur, & cette considération fournit l'équation $\partial \Phi \surd (aa - vv) = \partial v$. Ainsi l'une & l'autre solution générale conduit à une équation de la forme $M \partial V = 0$, laquelle, en mettant $M = 0$, produit la première, & en mettant $\partial V = 0$ la seconde solution particuliere mentionnée.

Le Mémoire est terminé par quelques objections contre un principe établi par M. de la Grange, en vertu duquel l'équation finie $M = 0$ se deduit de l'équation intégrale complette $\int M \partial V = C$, en différenciant de nouveau l'équation intégrale, en faisant varier aussi la constante C, introduite par l'intégration, & mettant zéro le coëfficient de la différentielle ∂C de cette constante regardée comme variable, d'où résulte une valeur de cette constante, qui, substituée dans l'équation intégrale, fournit l'équation $M = 0$. Il y a lieu de croire que M. Euler n'a pas bien saisi l'idée de M. de la Grange, aussi paroît-il disposé lui-même à mettre ses doutes sur le compte de quelque malentendu.

VI.

Problema geometricum ob singularia symptomata imprimis memorabile.

Auctore *L. Eulero*. pag. 87.

Le Problème dont il s'agit dans le présent Mémoire est de tracer autour d'un point donné une ligne courbe telle que

que l'aire du fecteur compris entre un arc quelconque & les deux droites tirées de fes extrémités au point donné foit proportionnelle au quarré de l'arc, c'eft-à-dire que $s^2 = 4n\Sigma$, s étant l'arc & Σ la furface du fecteur. La Spirale logarithmique préfente une folution de ce Problème, qui n'eft cependant que particuliere, parcequ'elle eft reftreinte aux valeurs de n plus grands que 2, & qu'elle ne fauroit avoir lieu que lorsque les arcs & les furfaces font comptées depuis le centre de la Spirale. Ceci a engagé M. Euler à chercher une folution générale de ce Problème, où non feulement la lettre n puiffe avoir des valeurs quelconques, mais dans laquelle le point A, qui dans la Spirale doit tomber dans le centre de la courbe, foit abfolument arbitraire. Le grand génie de l'auteur, fi fertile en expédiens, lui fournit trois méthodes différentes de réfoudre généralement ce Problême.

La première folution eft fondée fur deux propriétés très-remarquables de la courbe cherchée, qui fe préfentent d'abord fans peine: 1°.) que l'arc eft à la portion de la Normale, comprife entre la courbe & la perpendiculaire abaiffée du point fixe donné, dans le rapport $n:1$; 2°.) que le rayon ofculateur eft à la perpendiculaire mentionnée dans le même rapport. En nommant la perpendiculaire t & l'amplitude Φ, on parvient, à l'aide des propriétés fusdites à une équation différentielle du fecond degré $\partial\partial t - n\,\partial t\,\partial\Phi + t\,\partial\Phi^2 = 0$, dont l'intégrale complette eft $t = \mathrm{A}\,e^{\alpha\Phi} + \mathrm{B}\,e^{\beta\Phi}$, de forte que l'arc, la furface du fecteur & les coordonnées de la courbe peuvent être exprimées fans difficulté par la feule amplitude. Pour mieux approfondir les courbes douées de la propriété préfcrite dans le Problème, l'Auteur diftingue les trois cas $n > 2$, $n = 2$ & $n < 2$, & traite chacun féparément, parceque les courbes qui réfultent de cette triple confidération différent effentiellement entr'elles.

Le

La feconde folution, la plus facile de toutes les trois, eft fondée fur la confidération du rayon vecteur & de l'angle decrit par ce rayon, en faifant entrer dans le calcul une troifième variable qui exprime le rapport des différentielles de l'angle mentionné & du logarithme du rayon vecteur, variable par laquelle on exprime facilement les deux autres.

La troifième Solution, la plus rémarquable à caufe des difficultés qu'elles préfente, eft déduite immédiatement de l'équation fondamentale $ss = 4n\Sigma$, de laquelle, en introduifant les coordonnées x & y & la valeur $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, on déduit d'abord $s = \frac{n(y-px)}{\sqrt{(1+pp)}}$; & c'eft cette équation qui, maniée avec adreffe, conduit enfin aux mêmes valeurs de l'abfciffe & de l'ordonnée, que la première folution avoit fournies.

VII.

De curuis hyperbolicis, quae intra fuas Affymtotas fpatium finitum includunt.

Auctore *L. Eulero.* pag. 116.

On fait que toutes les courbes hyperboliques contenues dans l'équation binome $x^m y^n = 1$ renferment entre leurs Affymtotes un, ou même deux efpaces infinis. Il en eft tout autrement des Hyperboles contenues dans l'équation trinome $A x^\alpha y^\beta + B x^\gamma y^\delta = C$, parmi lesquelles il y a une infinité dont l'efpace contenu entre l'Affymtote & la courbe eft de grandeur finie. Le but de ce Mémoire eft de faire connoître les courbes douées de cette propriété & de déterminer les conditions pour les coëfficiens & les expofans de

 l'équal'équation trinome, ſous lesquelles les courbes, contenues dans cette équation, peuvent renfermer entre leurs Aſſymtotes un eſpace fini. Ces conditions ſont: 1°.) que tous les coëfficiens A, B, C, ſoyent poſitifs; 2°.) que tous les expoſans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ſoyent poſitifs; & que 3°.) ces expoſans ſoyent tels que des deux fractions $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ l'une ſoit plus grande & l'autre plus petite que l'unité.

Après avoir démontré d'une maniere qui ne laiſſe rien à déſirer, la néceſſité de ces conditions, l'Auteur paſſe à l'examen des courbes hyperboliques dont la nature eſt exprimée par l'équation $a\,x^{\alpha}\,y^{\beta} + b\,x^{\beta}\,y^{\alpha} = c$, ces courbes, en ſuppoſant $\alpha + \beta = 1$, étant douées de la propriété remarquable que l'eſpace fini contenu entre leurs Aſſymtotes, prolongés à l'infini, peut être exprimé algébriquement, & même par la forme très ſimple $\frac{c\,c}{2\,a\,b\,(\alpha - \beta)}$. Mais comme à cauſe de $\alpha + \beta = 1$, l'équation qui exprime la nature de ces lignes eſt irrationelle, pour la rendre rationelle M. Euler met $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$ & $\beta = \frac{\nu}{\lambda}$, de ſorte que cette équation, réduite à la rationalité, monte à l'ordre λ. L'application à quelques cas particuliers termine ce Mémoire.

VIII.
De curſu nauis in Sphaeroide elliptico.

Auctore *F. T. Schubert.* pag. 140.

Ce mémoire qu'on peut regarder comme la ſuite des recherches ſur la projection d'un Sphéroide elliptique, a pour objet la nature & la projection de la courbe *Loxodromique*, décrite dans la ſurface d'un Sphéroide applati, dont dependent les manieres de dreſſer les cartes hydrographiques. La ſituation de deux lieux

lieux étant donnée par leurs latitudes & longitudes, on trouve en général, que la Loxodromique décrite entre ces deux lieux coupe les cercles paralléles à l'Equateur sous des angles plus petits, dans le Sphéroide que dans la Sphère: d'où il suit, qu'au premier cas il faut diriger le vaisseau tant soit peu plus vers l'Est ou l'Ouest. La longitude de l'arc Loxodromique, ou la distance des deux lieux par mer, depend de la rectification de l'Ellipse, & l'Auteur a calculé une table pour cet effêt. Le premier but des cartes Hydrographiques étant, de représenter la Loxodromique d'une telle maniere, qu'elle coupe les Méridiens constamment sous le même angle qu'à la surface de la terre: l'Auteur trouve une *courbe*, par le moyen de laquelle on obtient non seulement ce but-là, mais encore d'autres buts très-importans pour l'usage géographique. Mais comme l'usage que les pilotes font de ces cartes, exige que le cours du vaisseau ou la Loxodromique soit représentée par une ligne droite, l'Auteur montre les régles d'une telle projection, & donne trois tables pour la Sphère, & pour deux hypothèses de l'applatissement, savoir pour la raison des axes 230 : 229 & 200 : 199. En se servant de cette table, on peut dresser les cartes hydrographiques, & resoudre tous les problèmes de la navigation, avec la même facilité que par le moyen des tables nautiques vulgaires.

IX.

Reflexions sur les Logarithmes imaginaires.

Par *F. T. Schubert*. pag. 171.

La question sur la nature des Logarithmes des nombres négatifs, ayant occasionné une dispute celèbre entre M.

M. *Leibnitz* & *Jean Bernoulli*, fut enfin décidée par M. *L. Euler* d'une maniere qui avait toujours paru fatisfaifante. Mais comme il déduit par fa méthode les formules fuivantes:

$$l(+1) = 2\lambda\pi\sqrt{-1}, \ \& \ l(-1) = (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1},$$

qui en faifant $\lambda = 0$, donnent $l(+1) = 0\sqrt{-1} = 0$, & $l(-1) = \pi\sqrt{-1}$ imaginaire, & que cette folution eft fondée fur la fuppofition que $0\sqrt{-1}$ foit $= 0$: M. *Riccati* dans les *Mémoires de la Societé Italienne* prétend de démontrer par la *Conchoide*, que le zéro imaginaire $(0\sqrt{-1})$ diffère effentiellement du zéro réel (0). M. *Schubert* tâche de repondre à ces objections, de juftifier le fentiment & les raifonnemens de M. *Euler*, & de développer le vrai fens de cette expreffion analytique $0\sqrt{-1}$.

X.

De nouis quibusdam Cauſticae Parabolae proprietatibus.

Auctore *Nicolao Fufs*. pag. 182.

L'Auteur de ce Mémoire, occupé à la folution d'un Problème par la méthode inverfe des tangentes, étoit tombé fur quelques propriétés remarquables de la Cauftique de la Parabole, qu'il préfente ici, incertain fi ces propriétés ont deja été remarquées par d'autres Géomètres, ou non. Il commence par la réfolution du Problème général des Cauftiques formées par la réflexion de rayons incidens perpendiculairement à l'axe de la courbe reflêchiffante. Il en fait l'application à la Parabole conique, en examinant foigneufement les principales propriétés dont la Cauftique de cette Parabole eft eſt douée. Parmi ces propriétés il diſtingue particulièrement les trois ſuivantes:

1°.) La ſomme de l'ordonnée & de l'arc correſpondant eſt en raiſon ſoudouble de l'abſciſſe.

2°.) En prenant les abſciſſes ſur la droite qui coupe les deux branches de la courbe & ſon axe à angles droits, la difference entre l'arc & la ligne des abſciſſes compriſe entre la courbe & la Normale correſpondante, eſt égale au triple du demi-paramètre de la Parabole génitrice.

3°.) En prolongeant la Tangente jusqu'à une perpendiculaire érigée ſur l'axe à une diſtance donnée, la demi-ſomme de cette perpendiculaire & de la Tangente eſt égale à l'arc pris du ſommet de la courbe.

L'Auteur examine dans les trois Problèmes ſuivans, par la méthode inverſe des Tangentes, ſi la Cauſtique de la Parabole eſt la ſeule courbe douée des propriétés rapportées, ou s'il y en a d'autres courbes où elles ont auſſi lieu, & il termine le Mémoire par la ſolution du Problème qui a donné la premiere occaſion à ces recherches.

XI.

Demonſtratio Theorematum quorundam analyticorum.

Auctore *Nicolao Fuſs.* pag. 201.

Feu M. Euler avoit donné dans le ſeptième volume des Commentaires de l'Académie les ſommations ſuivantes:

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots \tfrac{1}{n} = l\,\tfrac{1}{0},\\
B &= \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \tfrac{1}{n+3} + \tfrac{1}{n+4} + \cdots \tfrac{1}{2n} = l\,\tfrac{2}{1},\\
C &= \tfrac{1}{2n+1} + \tfrac{1}{2n+2} + \tfrac{1}{2n+3} + \tfrac{1}{2n+4} + \cdots \tfrac{1}{3n} = l\,\tfrac{3}{2},\\
D &= \tfrac{1}{3n+1} + \tfrac{1}{3n+2} + \tfrac{1}{3n+3} + \tfrac{1}{3n+4} + \cdots \tfrac{1}{4n} = l\,\tfrac{4}{3},\\
&\&c. \qquad\qquad \&c.
\end{aligned}$$

où la lettre n indique un nombre infiniment grand. Le R. P. Fontana ayant donné, dans la premiere partie du second Volume des Mémoires de Mathématique & de Physique de la Société Italienne, une démonstration de la seconde des sommations sus-mentionnées, fondee sur une méthode applicable à toutes les autres, mais penible & longue, M. Fuss a pris de là occasion d'essayer une autre méthode de démontrer plus facilement ces mêmes sommations. Voici le type de sa démonstration:

$$\begin{aligned}
A+B &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} \cdots \tfrac{1}{2n},\\
-A &= -1 \quad -\tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{3} \quad -\tfrac{1}{4} \quad -\tfrac{1}{5} \cdots -\tfrac{1}{n},\\
\hline
B &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{10} + \&c. = l\,2,
\end{aligned}$$

donc $B = l\,\frac{2}{1}$,

$$\begin{aligned}
A+B+C &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} \cdots \tfrac{1}{3n},\\
-A &= \quad -1 \qquad -\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{1}{3} - \cdots \tfrac{1}{n},\\
\hline
B+C &= 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{2}{9} + \&c. = l\,3,
\end{aligned}$$

donc $C = l\,3 - B = l\,\frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned}
A+B+C+D &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} \cdots \tfrac{1}{4n},\\
-A &= \quad -1 \qquad\qquad -\tfrac{1}{2} \qquad\qquad -\tfrac{1}{3} \cdots \tfrac{1}{n},\\
\hline
B+C+D &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{3}{12} + \&c. = l\,4,
\end{aligned}$$

donc

donc $D = l\,4 - (B + C) = l\,\frac{4}{3}$,
& ainſi de ſuite. C'eſt le ſujet du premier article de ce Mémoire.

Le ſecond article roule ſur le Théorème donné par feu M. Euler dans le neuvième Volume des Commentaires, où il a démontré que la ſomme de la ſerie réciproque des nombres premiers eſt infinie, mais pourtant infiniment plus petite que la ſomme de la ſérie réciproque des nombres naturels, & qu'elle en repréſente, pour ainſi dire, le logarithme. Comme M. Fontana attaque dans le même Mémoire dejà cité, le Théorème mentionné, ou plutôt une propoſition qui ſert de fondement à la démonſtration d'Euler, M. Fuſs fait voir que les objections du P. Fontana ſont nulles dans le ſens que M. Euler a donné à l'énoncé de ſon Théorème, quoiqu'elles ſoyent vrayes *in abſtracto*; & pour mieux conſtater la vérité de ce Théorème, il en donne la démonſtration ſous une forme un peu différente de celle de M. Euler, en écartant ſourtout de cette démonſtration la propoſition attaquée par M. Fontana.

Le troiſième Théorème roule ſur la ſommation de la ſérie $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} +$ &c. où les dénominateurs ſont les quarrés impairs diminués de l'unité; & le quatrième roule ſur la ſommation de la ſerie des fractions $\frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} +$ &c. dont les dénominateurs ſont les quarrés qui ſont en même tems de plus hautes puiſſances, auſſi diminués de l'unité.

Dans un Supplément l'Auteur éclaircit un malentendu de M. Fontana, concernant l'évanouiſſement des différentielles partielles d'une fonction à pluſieurs variables x, y, u, v, qui évanouit, en mettant $x = b$, $y = a$, &c. & dont M. Fon-
tana

tana prétend que toutes les différences partielles évanouissent aussi sous les mêmes conditions.

XII.

Sur les Listes des mariages, des naissances & des morts à St. Pétersbourg. Mémoire troisième, contenant la période de 1786 jusqu'en 1790.

Par Mr. *Krafft*. pag. 225.

Ce Mémoire est une suite à deux autres que l'Auteur à donnes, dans nos Actes, sur le même objet; l'ensemble de tous les trois présente une éspece de revue sur l'état de la population à St. Pétersbourg considerée dans ses principes, pour 27 années consécutives, en partant de celle de 1764, dans la quelle S. M. J. notre tres-gracieuse Souveraine a ajouté à tant d'actions bienfaisantes à Ses Peuples aussi celle d'ordonner la formation de pareilles Listes.

Dans ce troisieme Mémoire, qui embrasse la période de 1786 jusqu'en 1790, Mr. Krafft retrace d'abord le but qu'il s'étoit proposé en général dans ce genre de récherches; c'étoit 1^mo, de faire sentir par l'emploi des Tables *d'une seule ville*, combien, si l'on en avoit de semblables pour des *Provinces entieres* de la Russie, on pourroit en tirer de lumières & d'instructions, qui eussent un rapport intime à l'avantage de l'humanité & au bien-être de la population de l'Empire; 2^do de faire voir aussi, sous quels points de vûe & de quelle façon un Bureau établi exprés pour la rédaction de ces Tables, devroit les rediger & les examiner pour être à même d'en tirer de pareilles conséquences. L'auteur donne ensuite toutes

toutes les Tables rélatives à la période en queſtion, rédigées ſur le plan qu'il en avoit établi dans ſon premier Mémoire; Après quoi il paſſe aux concluſions les plus intéreſſantes qu'il en a tirées: 1.) ſur le nombre moyen des habitans de St. Pétersbourg & le rapport du nombre des nationaux à celui des étrangers; 2.) ſur la fécondité *intentionelle* ou le rapport du nombre annuel des mariages à celui de la population; 3.) ſur la fécondité *réelle*, ou le rapport du nombre annuel des naiſſances à celui des mariages; 4.) ſur la fécondité *générale*, ou le rapport du nombre annuel des naiſſances à celui de la population; 5.) ſur la mortalité *générale* ou le rapport du nombre annuel des morts à celui de la population; 6.) ſur la mortalité *ſpéciale* de chaque âge, des enfans venus morts au monde, des enfans nouveaux-nés, de l'enfance, du moyen âge & de la vieilleſſe; enfin 7.) ſur la force des maladies & l'état de la ſanté publique.

À la fin de ſon Mémoire Mr. Krafft donne un apperçu des nombres annuels des enfans, qui ont été inoculés depuis 1780 jusqu'en 1790 dans la maiſon d'inoculation établie à St. Pétersbourg l'an 1768 par la bienfaiſance de notre très-gracieuſe Souveraine. L'auteur finit par la remarque, qu'une eſpece de publicité à l'égard du nombre de ceux qui meurent annuellement dans la maiſon des Enfans-trouvés, dans les hoſpitaux & dans les priſons, intéreſſe trop l'humanité, pour ne pas la déſirer.

XIII.

De motu ſingulari progreſſiuo & rotatorio corporis cylindrici filo flexili, ex cuius altero termino ſuſpenditur, circumdati.

Auctore *Nicolao Fuſs.* pag. 256.

Le mouvement dont l'Auteur fait l'objet de ſes recherches dans ce petit mémoire, eſt celui de la roulette, connue ſous le nom d'Ariſtocrate, ou de joujou de Normandie. Il commence par le cas le plus ſimple, où la roulette, ſuspendue à ſon fil, deſcend verticalement en vertu de ſon propre poids. De là il paſſe à la conſidération du cas, où l'on a imprimé au corps encore un autre mouvement, en le projettant avec une force donnée & dans une direction donnée.

CLAS-

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

Obſeruationum de tela dicta celluloſa, continuatio ſecunda. Celluloſa muſculorum.

Auctore *C. F. Wolff.* pag. 270.

La ſubſtance glutineuſe, ou le tiſſu cellulaire, comme on l'apelle, après avoir formé les diverſes couches ſouscutanées, décrites dans la diſſertation précédente ſur cet objet, va droit aux muſcles, & produit, en les entourant, pour chacun d'eux ſa propre enveloppe. Si on prend d'une part les couches ſouscutanées, & de l'autre les muſcles, & qu'on les tire les uns des autres; la ſubſtance glutineuſe, qui joint les couches aux enveloppes des muſcles, s'étend en forme de membrane, ou lame mince, mais grande & large, qui ſe rétrécit & disparoît de nouveau, quand on laiſſe les couches ſe rapprocher aux muſcles. C'eſt la troiſieme eſpéce des parties du dit tiſſu cellulaire, celle des lames larges & grandes, que les Anatomiſtes ont pris pour naturelles, quoiqu'ils les aient produit eux mêmes. L'Auteur avoit déja fait remarquer les véſicules, qu'on fait naître en inſpirant de l'air dans la ſubſtance glutineuſe, ainſi que les filets qu'on produit en étendant une petite portion de cette ſubſtance, priſe & tirée avec la pincette.

Mais la ſubſtance glutineuſe environne non ſeulement les muſcles, elle penètre auſſi dans leur intérieur. De la ſurface interne de ces enveloppes elle s'inſinue entre les grands faisceaux, dont le muſcle eſt compoſé, & produit des enveloppes particulieres pour chaque faiſceau contenu dans l'enveloppe commune du muscle. De même elle paſſe de la ſurface intérieure de ces enveloppes particulieres, deſcend entre les fibres, & enduit chaque fibre d'une ſemblable enveloppe, mais plus déliée, plus tendre & plus belle.

M. Wolff explique par cette ſtructure pluſieurs phénomènes, qui ſe preſentent en diſſéquant les muſcles. Un muſcle non préparé, c'eſt à dire, enduit encore de ſes enveloppes, entant que la ſubſtance glutineuſe eſt tranſparente, paroît d'un rouge pâle. Mais en l'obſervant attentivement on remarque à ſa ſurface des lignes longitudinales toutes blanches & élevées. C'eſt la matiere glutineuſe, qui de la ſurface intérieure de l'enveloppe commune s'inſinue entre les faiſceaux, pour produire leurs enveloppes particulieres. Quand on diſſéque un muſcle à travers de ſes fibres, on voit paroître à chaque ſection qu'on fait une nouvelle lame blanche, qui diſtingue toujours la partie préparée du muſcle de celle qui eſt cachée encore. Ce ſont les côtés, ou parois latéraux des enveloppes particulieres qu'on ouvre, ſans le ſavoir, longitudinalement, pour découvrir un nouveau faiſceau. Si l'on diſſèque le muſcle ſelon la longueur de ſes fibres, on apperçoit des enfoncemens ou ouvertures, desquelles ſortent les faiſceaux & les fibres. Ce ſont les ouvertures de enveloppes, coupées à travers.

Les anatomiſtes n'étoient pas fort curieux de ſavoir ce que c'étoit que ces phénomènes, ni d'où ils venoient? Ils ſe contentoient de dire que c'étoit le tiſſu cellulaire. Voyoient-ils

ils ces lames blanches diftinguer les faifceaux? c'étoit encore le tiſſu cellulaire. Étoient-ce des enfoncemens dans les enveloppes coupées en travers, qu'ils remarquoient? c'étoit de même le dit tiſſu. Appercevoient-ils ces lignes blanches dans le mufcle non-préparé? c'étoit toujours le tiſſu cellulaire. Ces explications fans doute n'étoient pas bien philofophiques, lors même qu'il y auroit un tiſſu. Mais elles le font beaucoup moins, lorsque ce tiſſu n'exifte pas.

M. Wolff pourfuit la fubftance glutineufe jusqu'aux dernières fibrilles des mufcles, qu'on ne voit plus que par le microfcope. C'eft toujours une fubftance très-déliée, presque fluide & claire comme le cryftal, laquelle fe l'aiffe tirer en des filets fi fins, fi tendres, fi beaux, qu'il eft impoffible, de les deffiner avec la même délicateffe qu'ils exiftent dans la nature.

II.

Expériences fur le produit en fer de fonte d'un haut fourneau en Sibérie.

Par M. *Hermann* pag. 287.

Notre Académicien commence par rapporter les differens fentimens des auteurs fur les deux méthodes ufitées de fondre les mines de fer, comme celle des hautsfours & celle des petits fourneaux. Les premiers ont des avantages réels lorsque les mines font pauvres & rebelles, & qu'on doit produire des maffes plus grandes de fer de fonte, comme c'eft le cas furtout dans les contrées, où l'on eft obligé de transporter les mines, ou la fonte, fort loin du lieu de l'exploitation. Les autres au contraire confument moins de charbons & méritent à cet égard une attention plus grande, vû que les montagnes Ouraliennes p. e. produiſent annuellement plus de $3\frac{1}{3}$ millions de poudes de fer forgé, en y employant à peu près 20 millions de charbons de ſapin. Pour pouvoir comparer les deux méthodes avec plus d'exactitude & pour faire connoître particulierement la manière uſitée en Ruſſie, notre Académicien donne une notice de la fabrique Impériale de Kamensk, ſituée ſur la pente orientale des monts d'Oural, à la gauche de la rivière d'Iſſet, auprés de la petite riviere Kamenka, 90 verſtes de Cathérinebourg. Les mines que l'on y exploite ſont: 1.) Mine de fer ochraceuſe, 2.) Mine de fer ſablonneuſe. 3.) Mine de fer limoneuſe 4.) Hématite ſtalactitique avec de l'ochre de Manganéſe; & 5.) la mine de fer blanche. Avec une corbeille de charbons on y produit 10 poudes $31\frac{5449}{15421}$ livres de fer de fonte. On pourra juger avec plus de préciſion de ces avantages & produits par les dix tables que l'auteur y ajoute ſur le produit journalier en fer de fonte & les matériaux conſumés en l'année 1789. En 1788 la hauteur du four a été augmentée d'une arſchine: on verra en même tems par ces tables, quels ſuccès a eu cette augmentation de hauteur.

III.

Obſervations ſur différentes eſpéces de pierres de roche compoſées roulées des environs du canal de Ladoga.

Par M. *Sewerguine.* pag. 301.

L'Auteur donne une déſcription méthodique de quarante différentes combinaiſons de pierres de roche compoſées qu'il a a eu occaſion d'obſerver parmi les pierres roulées des environs du canal de Ladoga. On y trouve entr' autres de très remarquables, comme celles de Marbre & de Feldſpath, de Marbre & de Quartz, de Marbre & d'Asbeſt, de Labrador & de Quartz, de Feldſpath & de la Plombagine, de Feldſpath jaune & de Feldſpath rouge jaſpitique &c. Il contemple enſuite leur différentes apparences dans l'état de decompoſition, par lesquels le Quartz, le Mica, le Feldſpath & la Hornblende ſe diſtinguent entr'eux d'une maniere fort remarquable. Pour le Feldſpath il cite deux phénomènes très curieux: 1.) Il en a trouvé des échantillons, qui d'un coté démontrent un paſſage évident au jaſpe, tandis que de l'autre c'eſt encore du vrai Feldſpath. 2.) Les Feldſpaths des granits de Finlande s'y trouvent aſſez généralement en plaques plus ou moins rondes, ou ils tendent à cette forme.

IV.

Diſſertatio de acidi aceti cryſtalliſatione, exhibens varias eius et recens detectas methodos.

Auctore *Tob. Lowitz.* pag. 316.

M. Lowitz a fait voir dans ſon premier mémoire ſur cet objet, qu'après la diſtilation du vinaigre congelé par le froid on obtient enfin du bain d'eau avec de la poudre de charbons, moyenant la chaleur du bain de ſable, encore un acide très fort, cryſtalliſable au froid. Les cryſtaux privés de toute humidité offrent un vinaigre glacial d'une force ſurprenante, qu'une chaleur de 127 degrés rend fluide, mais qui ſe congéle de nouveau dans une température de 132 —— 135 de-

degrés & forme une maſſe entièrement ſolide ſemblable au camphre.

La beauté ſinguliere de ce produit qui, à l'égard de la diverſité admirable des qualités de ſa cryſtalliſation, ſurpaſſe tous les ſels connus tant naturels qu'artificiels, comme auſſi l'utilité que la médecine retirera probablement de cet acide extrèmement fort & volatil, presqu'entièrement déſtitué d'eau & dont l'acidité eſt eſſentiellement pénétrante, ont engagés notre Académicien à repéter ſes eſſais; ce qui l'a mis à portée de découvrir encore pluſieurs méthodes plus faciles & plus avantageuſes de préparer ce vinaigre glacial. Les trois ſuivantes ſont à ſon avis les meilleures.

1.) Pour obtenir ſous la forme de vinaigre glacial tout l'acide contenu dans le vinaigre concentré diſtillé, il faut le diſtiller fréquemment avec de la poudre de charbons. Cette diſtillation s'opere par le bain d'eau, jusqu'à ce qu'il ne paſſe plus rien, après quoi on fait ſuccéder celle du bain de ſable, où la force d'un feu plus violent fait monter encore une certaine quantité de vinaigre cryſtalliſable. On réitère cette distillation alternative du bain d'eau & de celui de ſable, jusqu'à ce qu'on s'apperçoive qu'il ne paſſe plus par le bain d'eau qu'une eau parfaitement inſipide. Si après ce procédé on expoſe tout le vinaigre obtenu du bain de ſable à un froid de 173°, l'acide qu'il contient ſe cryſtalliſera & formera le vinaigre glacial. On peut par un artifice opérer cette cryſtalliſation dans un degré de froid moins conſidérable; on n'a qu'a jetter un petit morceau de vinaigre glacial déja préparé dans le vinaigre qu'on ſe propoſe de cryſtalliſer, & qu'on aura préalablement fait refroidir; il ſe cryſtalliſera dans une température de 158°.

Cette

Cette méthode de préparer du vinaigre glacial par le moyen des charbons pulvérisés est à la vérité longue & pénible, mais le résultat en est remarquable par sa pureté. Les deux méthodes suivantes sont d'une exécution beaucoup plus facile.

2.) On prépare de l'alkali végétal ou minéral acéteux, par le moyen de l'acide vitriolique concentré au suprème degré, un bon vinaigre concentré, qu'on nomme communement vinaigre de Westendorf. Ce vinaigre exposé au froid se crystallise en vinaigre glacial. On peut aussi faire ici usage de l'artifice, dont il a déja été parlé plus haut, en jettant dans le vinaigre un morceau de vinaigre glacial tout préparé.

La gelée étant indispensablement nécessaire dans les deux méthodes précédentes, il est évident qu'on ne peut d'après elles préparer du vinaigre glacial qu'en hyver. La troisième méthode que M. Lowitz expose, fait voir qu'on peut obtenir, sans l'intervention de la gelée, un vinaigre glacial extrèmement fort, & qu'on en peut préparer dans chaque saison, même dans les contrées qui n'ont point d'hyver.

3.) Comme la préparation du vinaigre glacial exige que l'acide du vinaigre soit dégagé de toute particule aqueuse, M. Lowitz soupçonna d'abord, que leur séparation pourroit bien être opérée par un sel acéteux sec, moyennant un dissolvant dégagé d'eau. Tout occupé de cette idée il lui vint heureusement dans l'esprit que cette séparation pourroit bien être effectuée par l'alkali végétal vitriolé sursaturé, dont la préparation se fait, selon sa méthode, de la maniere suivante:

On détrempe dans une cucurbite 7 parties d'huile vitriolique avec autant d'eau, après quoi on jette avec précaution, & aussi promptement que possible, dans ce mélange encore chaud, 4 parties d'alkali végétal purifié sec. Le mélange refroidi, on décante la liqueur, & lave deux ou trois fois avec de l'eau froide les crystaux qui se sont formés, observant que ce lavage exige une grande célérité, après quoi on seche les crystaux & on les réduit en poudre très fine. On peut par le moyen de ce sel acide préparer immédiatement le vinaigre glacial le plus fort, de la manière suivante.

On fait fondre à un feu violent 3 parties d'alkali végétal ou minéral acéteux, puis on jette le sel dans un mortier de pierre pour le réduire en une poudre très fine. Cette opération doit se faire avec une grande célérité, àfin que le sel n'attire l'humidité de l'air. On y mêle 8 parties du sel vitriolique dont je viens de parler, après l'avoir fait secher encore une fois; on jette ensuite le tout dans une retorte pour en distiller à feu lent le vinaigre glacial.

En procédant de cette maniere on retirera de 300 livres de vinaigre, 7 livres de vinaigre glacial.

La transformation de l'acide du vinaigre en vinaigre glacial n'en est en effet que la concentration poussée au suprême degré. Le peu d'eau qui s'y trouve joint doit être considerée non seulement comme eau de crystallisation, mais même comme une partie constituante, sans laquelle le vinaigre glacial ne pourroit exister dans son état fluide & concret. Car plusieurs procédés prouvent que cet acide adopte une forme gazeuse & permanente, si-tôt qu'il est parfaitement dépourvu d'eau. De là la multitude innombrable de bulles

d'air,

d'air, qui ſe développent lorsque l'acide ſe coagule; auſſi eſt-il certain que le vinaigre glacial perd inſenſiblement de ſa force par de fréquentes cryſtalliſations.

V.

De ordine fibrarum muſcularium cordis. Diſſertatio X[ma]. De ſtrato ſecundo fibrarum ventriculi ſiniſtri. Pars II[da].

Auctore *C. F. Wolff.* pag. 347.

En continuant ſes recherches ſur les fibres du coeur, M. Wolff conſidere ici la ſeconde couche des fibres du ventricule gauche en général, & particulièrement des deux premiers ordres des fibres de cette couche. Il démontre leur origine, leur progrès, leur inſertion, & remarque par tout, qu'avec la plus grande différence entre les fibres de cette couche & celles de la couche extérieure il-y-a pourtant entre elles une analogie parfaite, & que toute la diſpoſition des fibres du coeur, en général très-curieuſe & intéreſſante, mérite une attention particuliere de l'Anatomiſte, qui de longtems auroit ſouhaité de connoître plus exactement la ſtructure intérieure du coeur ainſi que les divers muſcles, dont il eſt compoſé, mais qui jamais n'a oſé ſe flatter, qu'en effet on parviendroit un jour, à analyſer toutes les fibres embarraſſées de ce myſtérieux viſcère, & à démontrer leur compoſition avec cette même exactitude & la même clarté, avec laquelle on décrit ordinairement le muſcle deltoïdée, ou le grand pectoral. (*)

(*) Témoin le ſentiment & les propres travaux de feu Mr. de *Haller* ſur les fibres du coeur, dans ſes Elem. de Phyſiol. Tom. I. Liv. IV. §. XXI. pag.

Il reste encore le troisième & le quatrième ordre des fibres de la seconde couche, que l'Auteur se propose d'analyser dans la suite.

---

pag. 351. 352. Le résumé de ces travaux y est renfermé en quinze lignes, desquelles ce grand Anatomiste dit, que c'est là tout ce qu'il a pû en connoître lui même par le scalpel anatomique.

VI.

Obseruationes circa salis communis crystallisationem ope frigoris efficiendam, et depurandi Salis huius methodus noua.

Auctore *Tob. Lowitz.* pag. 364.

Selon l'opinion généralement reçue, la crystallisation du sel de cuisine ne peut s'opérer que par une évaporation continue de sa solution, & non par son refroidissement. Cependant M. Lowitz trouve par des expériences qu'il fit en hyver l'an 1791, qu'il se crystallise aussi par le refroidissement de sa solution parfaitement saturée. Le moindre froid qu'exige cette opération doit être de 168 degrés de Délisle. En ce cas le sel de cuisine se crystallise en forme de tablettes hexagones, qui sont quelque fois d'une grandeur assés considérable. L'eau de crystallisation de ces crystaux parfaitement transparens est de 49 dans la centaine. À l'air libre sec & très froid ils se réduisent, comme le sel de Glauber, en poudre farineuse. Mais la moindre température naturelle de 143° les fait refondre dans leur eau de crystallisation. Il est donc absolument impossible de les conserver dans une chambre chaude, ou pendant l'été.

Ce-

Cependant cette diſſolution diffère de celle du ſel de Glauber en ce que la derniere eſt entièrement fluide, & que l'autre ne l'eſt qu'en partie, c'eſt-à-dire que l'eau de cryſtalliſation des cryſtaux dont il eſt queſtion n'eſt pas ſuffiſante pour l'état de fluidité parfaite. C'eſt à deſſein que M. Lowitz dit fluidité parfaite, parceque dans les cryſtaux mêmes ou dans l'état concret elle s'y trouve intimement liée; c'eſt ce que prouve la diaphanéité. Cette circonſtance qui ſemble contraire aux idées qu'on a eues jusqu'apréſent de la diſſolution, peut ouvrir une carrière aux réflexions du chymiſte. La ſolution des cryſtaux du ſel de cuiſine eſt donc jointe à une précipitation ou cryſtalliſation neuve, accélerée par une partie conſidérable du ſel ſous une forme de poudre, dont les grains menus préſentent des cubes. Cette même circonſtance fournit encore un moyen nouveau de purifier le ſel de cuiſine. On procède de la maniere ſuivante.

On jette dans un paſſoire les cryſtaux de ſel de cuiſine obtenus par le froid, après avoir pris ſoin de mettre un vaſe deſſous. Les cryſtaux ſe précipitent & laiſſent paſſer une diſſolution ſaturée de ſel. Le ſel fin qui reſte dans le paſſoire, après être ſeché, eſt le ſel de table le plus fin.

VII.

Obſervations ſur les eaux martiales du Gouvernement d'Olonetz.

Par M. *Ozeretskovski.* pag. 370.

Dans ce mémoire ſe trouve d'abord une énumération des minéraux découverts dans ce Gouvernement: ils ſont pauvres en métaux. M. Ozeretskovski paſſe enſuite aux eaux martiales, dont il donne la déſcription, ainſi que des mines de fer qu'elles dépoſent & qui ſont employées à la fonte des canons. Il y a une abondance du ſchiſte pyriteux aux environs du lac d'Onega, qui ſe décompoſe en terres ferrugineuſe & vitriolique, dont les eaux martiales ſont impregnées. Elles contiennent en outre une portion de terre alumineuſe. Leur uſage ne peut point être ſalutaire; les mines de fer qui proviennent du ſchiſte décompoſé ne ſont pas de bonne qualité. La terre vitriolique dont on fabrique la couperoſe verte y eſt très abondante. Si l'on fouilloit le ſchiſte pyriteux, on découvriroit peut-être ou des ardoiſes ou des charbons de terre.

CLAS-

CLASSE D'ASTRONOMIE ET DE MÉTÉOROLOGIE.

I.

Obſeruationes nonnullae aſtronomicae Petropoli habitae.

Auctore *Stephano Rumovski*, pag. 379.

L'Auteur rapporte quelques immerſions & émerſions des Satellites de Jupiter dont il a pu faire l'obſervation pendant l'eſpace d'onze années conſécutives, & parmi lesquelles ſe trouve auſſi une occultation de l'étoile γ de la Vierge par la Lune, obſervée en 1780 le $\frac{9}{20}$ Mars. On peut conclure par ce petit nombre d'obſervations, combien peu la conſtitution de l'Atmoſphère à St. Pétersbourg ſe trouve favorable aux Aſtronomes.

II.

Déſcription d'un Météore rémarquable obſervé à St. Pétersbourg le 18 Juin 1790.

Par M. *Lowitz*, pag. 384.

Cette déſcription contient tous les détails d'un phénomène des plus brillans qui a duré depuis 7 heures & demie du du matin jusqu'à 12 heures du midi paſſées. À 10 heures avant midi il avoit atteint ſa plus grande perfection, & il étoit alors composé de douze arcs divers dont neuf étoient colorés, & de cinq parhélies bien términés & luiſans.

III.

Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année 1790.

Pag. 389.

La plus grande hauteur du Baromètre 29, 09 pouces de France, la plus petite 26, 96, le milieu arithmétique 28, 025 & la hauteur moyenne 28, 082.

Il n'y a eu ni de grands froids ni de fortes chaleurs: le plus grand froid s'eſt trouvé être de $20\frac{1}{3}$ degrés de Réaumur, & la plus grande chaleur de $18\frac{2}{3}$ degrés.

Le mois de Février a été le plus venteux, & ceux d'Août, d'Octobre & de Novembre les plus calmes. Le vent dominant s'eſt trouvé être celui du Sud-Oueſt.

Le nombre des jours entièrement ſereins n'a été que de 68, & celui des jours entièrement couverts de 116. Il a plu en 131 jours & il a neigé en 77 jours.

Le nombre des orages ne monte qu'à quatre, & il n'y a eu auſſi que quatre aurores boréales d'obſervées.

CLASSIS MATHEMATICA

ET

PHYSICO-MATHEMATICA.

VARIAE CONSIDERATIONES
CIRCA
SERIES HYPERGEOMETRICAS.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 19 *Aug.* 1776.

1.

Proposito hoc producto in infinitum excurrente:
$\frac{a(a+2b)}{(a+b)(a+b)} \cdot \frac{(a+2b)(a+4b)}{(a+3b)(a+3b)} \cdot \frac{(a+4b)(a+6b)}{(a+5b)(a+5b)} \cdot \frac{(a+6b)(a+8b)}{(a+7b)(a+7b)}$ &c. $= \frac{P}{Q}$,
constat esse

$$P = \int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}},$$

his integralibus ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensis; vbi notetur illius producti membrum indici i respondens esse

$$\frac{[a+(2i-2)b](a+2ib)}{[a+(2i-1)b][a+(2i-1)b]}.$$

§. 2. Iam occasione istius producti consideremus sequens productum indefinitum, in quo factorum numerus sit $= n$, ac ponatur

$$a(a+2b)(a+4b)(a+6b)\ldots\ldots[a+(2n-2)b] = \Delta : n,$$

siquidem hoc productum, ob a & b numeros datos, spectari potest tanquam certa functio ipsius n; ex eius igitur natura perspicuum est fore

$$\Delta : (n+1) = \Delta : n \,.\, (a+2nb),$$

similique modo

$$\Delta : (n+2) = \Delta : (n+1) \,.\, [a+(2n+2)b],$$

et ita porro.

Hinc ſi i denotet numerum infinite magnum, erit

$$\Delta : i = a\,(a + 2\,b)\,(a + 4\,b)\,(a + 6\,b)\ldots\ldots[a + (2\,i - 2)\,b],$$

vnde pariter colligitur fore

$$\Delta : (i + 1) = \Delta : i\,.\,(a + 2\,i\,b),$$

$$\Delta : (i + 2) = \Delta : i\,(a + 2\,i\,b)\,[a + (2\,i + 2)\,b],$$

$$\Delta : (i + 3) = \Delta : i\,(a + 2\,i\,b)\,[a + (2\,i + 2)\,b]\,[a + (2\,i + 4)\,b],$$

ubi factores inſuper accedentes tanquam inter ſe aequales ſpectari poterunt; quamobrem in genere ſtatui poterit $\Delta : (i + n) = \Delta : i\,(a + 2\,i\,b)^n$, vbi cum $(a + 2\,i\,b)$ ſit factor proxime ſequens, eodem iure quilibet ſequentium ſumi potuiſſet, ex quo adhuc generalius ſtatuere poterimus

$$\Delta : (i + n) = (\alpha + 2\,i\,b)^n\,\Delta : i,$$

denotante α numerum quemcunque finitum, quippe qui prae $2\,i\,b$ euaneſcit.

§. 3. In computum nunc ducamus caſum producti indefiniti, quo $n = \frac{1}{2}$, ac vocemus $\Delta : \frac{1}{2} = k$, quem valorem ope methodi interpolationum ſemper vero proxime aſſignare licet. Hinc igitur per ſuperiora erit

$$\Delta : (1 + \tfrac{1}{2}) = k\,(a + b);$$

$$\Delta : (2 + \tfrac{1}{2}) = k\,(a + b)\,(a + 3\,b),$$

$$\Delta : (3 + \tfrac{1}{2}) = k\,(a + b)\,(a + 3\,b)\,(a + 5\,b),$$

vnde in infinitum progrediendo erit

$$\Delta : (i + \tfrac{1}{2}) = k\,(a + b)\,(a + 3\,b)\,(a + 5\,b)\ldots\ldots[a + (2\,i - 1)\,b].$$

§. 4. Cum igitur ſupra iam dederimus formulam pro $\Delta : (i + n)$, poſito nunc $n = \frac{1}{2}$ habebimus quoque

$$\Delta : (i + \tfrac{1}{2}) = \Delta : i\,\sqrt{(\alpha + 2\,i\,b)},$$

ſicque pro eadem formula $\Delta : (i + \frac{1}{2})$ nacti ſumus duas diuerſas expreſſiones, ex iisque conficitur iſta aequatio:

$\Delta :$

$\Delta : i\sqrt{(a+2ib)} = k(a+b)(a+3b)(a+5b)\ldots.[a+(2i-1)b]$,
atque hinc concludere poterimus, valorem ipsius producti infiniti

$$(a+b)(a+3b)(a+5b)\ldots..[a+(2i-1)b] = \frac{\Delta : i\sqrt{(a+2ib)}}{k},$$

sicque innotescit relatio inter hoc productum et id quod supra per $\Delta : i$ expressimus. Hic autem probe notandum est factores huius producti eos ipsos esse, qui denominatorem producti initio propositi constituunt, quamobrem tam numeratorem illius producti quam denominatorem per valores modo inuentos $\Delta : i$ et $\frac{\Delta : i\sqrt{(a+2ib)}}{k}$ exprimere poterimus.

§. 5. Numerator autem producti propositi in infinitum expansus ita repraesentari potest:

$$a(a+2b)^2(a+4b)^2\ldots\ldots[a+(2i-2)b]^2(a+2ib),$$

vbi factores primus et vltimus sunt solitarii, reliqui vero omnes quadrati. Cum igitur sit

$$(\Delta : i)^2 = (a)^2(a+2b)^2(a+4b)^2(a+6b)^2\ldots..[a+(2i-2)b]^2,$$

euidens est illum numeratorem esse $\frac{(\Delta : i)^2}{a}(a+2ib)$. Pro denominatore autem per se manifestum est, eum esse aequalem quadrato producti alterius $(a+b)(a+3b)$ &c., cuius valor cum repertus sit $\frac{\Delta : i\sqrt{(a+2ib)}}{k}$, denominator erit $\frac{(\Delta : i)^2(a+2ib)}{kk}$, quamobrem his valoribus substitutis pro fractione supra exposita $\frac{P}{Q}$ affecuti sumus hanc aequationem:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{(\Delta : i)^2(a+2ib)}{a}}{\frac{(\Delta : i)^2(a+2ib)}{kk}} = \frac{kk(a+2ib)}{a(a+2ib)} = \frac{kk}{a},$$

Ex hac aequatione igitur statim innotescit verus valor formulae interpolatae $k = \Delta : \frac{1}{2}$, quandoquidem erit $\Delta : \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{aP}{Q}}$, atque hinc porro sequentes:

$$\Delta : (1 + \tfrac{1}{2}) = (a + b) \sqrt{\tfrac{a\,P}{Q}},$$
$$\Delta : (2 + \tfrac{1}{2}) = (a + b)(a + 3\,b) \sqrt{\tfrac{a\,P}{Q}},$$
$$\Delta : (3 + \tfrac{1}{2}) = (a + b)(a + 3\,b)(a + 5\,b) \sqrt{\tfrac{a\,P}{Q}}, \text{ etc.}$$

haecque interpolatio eo magis eſt notatu digna, quod ſine approximatione ſtatim verum valorem horum terminorum interpolatorum ſuppeditat.

§. 6. Quod ſi inſuper iſtud productum infinitum, in quo vtrique factores coniunguntur, contemplemur, ac ſtatuamus

$$a\,(a+b)\,(a+2\,b)\,(a+3\,b)\,\ldots\ldots[a+(i-1)\,b] = \Gamma : i, \text{ erit}$$
$$\Gamma : 2\,i = a\,(a+b)\,(a+2\,b)\,(a+3\,b)\,\ldots\ldots[a+(2\,i-1)\,b],$$

quod manifeſto eſt productum ex binis ſuperioribus, ita vt ſit $\Gamma : 2\,i = \frac{(\Delta : i)^2 \sqrt{(\alpha + 2\,i\,b)}}{k}$; vnde ſi forma $\Gamma : 2\,i$ vti voluerimus, valores amborum praecedentium ex eo aſſignare poterimus, cum ſit $\Delta : i = \sqrt{\frac{k\,.\,\Gamma : 2\,i}{\sqrt{(\alpha + 2\,i\,b)}}}$, qui eſt ipſe valor prioris producti

$$a\,(a + 2\,b)\,(a + 4\,b)\,\,(a + 6\,b), \text{ etc.}$$

alterius vero producti

$$(a + b)\,(a + 3\,b)\,(a + 5\,b) \text{ etc. valor erit } \sqrt{\frac{\Gamma : 2\,i\,(\sqrt{\alpha + 2\,i\,b})}{k}}.$$

§. 7. Hactenus igitur tria producta in infinitum excurrentia atque inter ſe affinia ſumus contemplati, quae, quoniam ea accuratius ſumus perſcrutaturi, hic denuo ob oculos exponamus

$$\text{I. } a\,(a+\ b)\,(a+2\,b)\,(a+3\,b)\,\ldots\ldots[a+(\ i-1)\,b] = \Gamma : i,$$
$$\text{II. } a(a+2\,b)\,(a+4\,b)\,(a+6\,b)\,\ldots\ldots[a+(2\,i-2)\,b] = \Delta : i,$$
$$\text{III. } (a+b)\,(a+3\,b)\,(a+5\,b)\,\ldots\ldots[a+(2\,i-1)\,b] = \Theta : i,$$

atque iam inuenimus eſſe $\Theta : i = \frac{\Delta : i \sqrt{(\alpha + 2\,i\,b)}}{k}$; tum vero tam $\Delta : i$ quam $\Theta : i$ ſequenti modo per functionem $\Gamma : 2\,i$ expreſſimus:

$$\Delta : i = \sqrt{\frac{k \cdot \Gamma : 2i}{\sqrt{(a+2ib)}}} \text{ et } \Theta : i = \sqrt{\frac{\Gamma : 2i\sqrt{(a+2ib)}}{k}},$$

quandoquidem manifeſtum eſt eſſe $\Gamma : 2i = \Delta : i \,.\, \Theta : i$; vbi meminiſſe oportet eſſe $k = \Delta : \frac{1}{2}$, quod ſcilicet ex forma ſecunda definiri debet, conſiderando ſeriem

$$a,\ a(a+2b),\ a(a+2b)(a+4b),\ a(a+2b)(a+4b)(a+6b), \text{ etc.}$$

cuius terminum indici $\frac{1}{2}$ reſpondentem deſignauimus hac littera k.

§. 8. Iam ad iſtas formas accommodemus methodum generalem ſummandi omnis generis progreſſiones per terminum earum generalem, quae ita ſe habet, vt propoſita ſerie quacunque A, B, C, D, E, etc. cuius terminus indici indefinito x reſpondens ſit $= X$, eius ſumma

$$A + B + C + D + \ldots\ldots\ldots + X,$$

quam vocemus $= S$, ſit

$$S = \int X \partial x + \tfrac{1}{2} X + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{1}{1\ldots5} \cdot \frac{1}{6} \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{1}{1\ldots7} \cdot \frac{1}{6} \frac{\partial^5 X}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

vbi fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}$, etc. ſunt numeri Bernoulliani.

Euolutio formae primae.

$$a(a+b)(a+2b)(a+3b)\ldots\ldots[a+(i-1)b] = \Gamma : i.$$

§. 9. Cum numerus factorum hic conſideretur vt infinitus, quo methodum ſummandi ad eam applicare valeamus, conſideremus eandem formam numero terminorum finito $= x$ conſtantem, ac ſtatuamus ſimili modo

$$a(a+b)(a+2b)(a+3b)\ldots\ldots\ldots[a+(x-1)b] = \Gamma : x.$$

Nunc vero vt loco huius producti ſeriem ſummandam nanciſcamur, ſumamus logarithmos, eritque

$$l\Gamma : x = la + l(a+b) + l(a+2b) + l(a+3b) \ldots\ldots l[a+(x-1)b],$$

cuius ergo ſumma cum fuerit explorata, dabit logarithmum formulae

mulae $\Gamma : x$, ideoque ipsam formulam $\Gamma : x$, in qua si deinceps statuatur $x = i$, obtinebitur formula $\Gamma : i$, quem valorem in superioribus potissimum spectauimus. Hinc igitur, comparatione cum serie generalissima instituta, erit $X = l\,[a + (x - 1)\,b]$, atque ipsa summa $S = l\,\Gamma : x$, siue erit $X = l\,(a - b + b\,x)$, vnde colligitur $\int X\,\partial x = \int \partial x\, l\,(a - b + b\,x)$.

§. 10. Cum igitur sit $\int \partial z\, l\, z = z\, l\, z - z$, atque

$$\int \partial y\, l\,(a + y) = (a + y)\, l\,(a + y) - (a + y),$$

nunc loco y scribendo $b\,x$ erit

$$\int b\,\partial x\, l\,(a + b\,x) = (a + b\,x)\, l\,(a + b\,x) - a - b\,x,$$

ideoque

$$\int \partial x\, l\,(a + b\,x) = \frac{(a + b\,x}{b}\, l\,(a + b\,x) - \frac{a}{b} - x,$$

vnde colligitur pro nostro casu fore:

$$\int X\,\partial x = \frac{(a - b + b\,x)}{b}\, l\,(a - b + b\,x) - \frac{a}{b} + 1 - x,$$

vbi in vltima parte membrum constans $\frac{a}{b} - 1$ omittere licet, quia expressio constantem quantitatem indefinitam per se postulat, quam deinceps ex indole seriei definiri oportet. Deinde vero erit $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{b}{a - b + b\,x}$; tum vero porro

$$\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = \frac{2\,b^3}{(a - b + b\,x)^3};\quad \frac{\partial^5 X}{\partial x^5} = \frac{2.\,3.\,4\,b^5}{(a - b + b\,x)^5};\ \text{etc.}$$

quibus valoribus in vsum vocatis erit

$$l\,\Gamma : x = A + (\tfrac{a}{b} - \tfrac{1}{2} + x)\, l\,(a - b + b\,x) - x + \frac{1}{1.2.3}\,\frac{1}{2}\,\frac{b}{a - b + b\,x}$$
$$- \frac{1}{3.4.5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{b^3}{(a - b + b\,x)^3} + \frac{1}{5.6.7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{b^5}{(a - b + b\,x)^5}$$
$$- \frac{1}{7.8.9} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{b^7}{(a - b + b\,x)^7} + \frac{1}{9.10.11} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{b^9}{(a - b + b\,x)^9} - \text{etc.}$$

vbi littera A constantem denotat ex indole seriei definiendam.

§. 11. Constans autem ista A ex casu quo summa seriei est cognita determinari debet, quod ergo fieri posset ex casu

casu $x = 0$, quippe summa etiam nihilo aequalis prodire debet; foret igitur hinc

$$A = (\frac{a}{b} - \frac{1}{2})\, l\,(a - b) + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a-b} - \frac{1}{3.4.5} \cdot \frac{1}{6} \frac{b^3}{(a-b)^3}$$
$$+ \frac{1}{5.6.7} \cdot \frac{1}{6} \frac{b^5}{(a-b)^5} - \text{etc.}$$

Quoniam autem haec series parum conuergit, atque adeo casu $b = a$ omnes termini fierent infiniti, hinc nihil plane lucrari licet. Sin autem vellemus sumere $x = 1$, ista summa prodire deberet $= l\,a$, vnde pariter vix quicquam pro instituto nostro concludere liceret, quia semper ad seriem infinitam perveniretur, cuius summam demum explorare oporteret, in quo quidem negotio forsitan ea, quae olim de seriebus numeros Bernoullianos inuoluentibus sum commentatus, aliquem vsum praestare possent, cui autem labori nunc immorari non vacat.

§. 12. Quia enim in praesenti instituto potissimum ad valorem $\Gamma : i$ respicimus, sufficiet statim loco x numerum infinitum statui. Sit igitur $x = i$, denotante i numerum infinite magnum, et aequatio nostra hanc induet formam:

$$l\,\Gamma : i = A + (\frac{a}{b} - \frac{1}{2} + i)\, l\,(a - b + b\,i) - i,$$

vnde constans ista A sponte determinatur, quam idcirco quasi iam cognitam spectabimus. Hinc ergo ad numeros regrediendo, vbi quidem loco A scriptum intelligamus l A, perueniemus ad hanc expressionem:

$$\Gamma : i = A\,(a - b + b\,i)^{\frac{a}{b} - \frac{1}{2} + i} \cdot e^{-i}.$$

Hic quidem conueniet potestatem exponentis i seorsim repraesentare hoc modo:

$$\Gamma : i = A\,(a - b + b\,i)^{\frac{a}{b} - \frac{1}{2}}\,(a - b + b\,i)^i \cdot e^{-i}.$$

Euolutio binarum reliquarum formularum.

§. 13. Secunda forma a prima in eo tantum difcrepat, quod loco b hic fcribi oportet $2\,b$, vnde noua euolutione carere poffumus; at vero loco conftantis A hic fcribamus B, quandoquidem nondum conftat, quemadmodum littera b in conftantem A ingrediatur. Hoc modo igitur ftatim habebimus

$$\Delta : i = \mathrm{B}\,(a - 2\,b + 2\,b\,i)^{\frac{a}{2\,b} - \frac{1}{2}}\,(a - 2\,b + 2\,b\,i)^{i}\,e^{-i}.$$

Simili modo euidens eft, ex hac fecunda forma oriri tertiam, fi modo loco a fcribatur $a + b$, vnde loco B conftantem C introducendo, habebimus

$$\Theta : i = \mathrm{C}\,(a - b + 2\,b\,i)^{\frac{a}{2\,b}}\,(a - b + 2\,b\,i)^{i}\,e^{-i}.$$

Vbi notetur litteram e hic pofitam effe pro numero cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$.

Conclufiones hinc oriundae.

§. 14. Videamus nunc quomodo iftae nouae determinationes fe refpectu relationum fupra inuentarum fint habiturae; quare cum ex his nouis valoribus fit

$$\Gamma : 2\,i = \mathrm{A}\,(a - b + 2\,b\,i)^{\frac{a}{b} - \frac{1}{2}}\,(a - b + 2\,b\,i)^{2\,i}\,e^{-2\,i},$$

quia inuenimus:

$$\Gamma : 2\,i = \Delta : i \times \Theta : i,$$

fi vbique hic valores modo inuentos fubftituamus, habebimus pro ifta aequatione primo productum:

$$\Delta : i\,.\,\Theta : i = \mathrm{B\,C}\,(a - 2\,b + 2\,b\,i)^{\frac{a}{2\,b} - \frac{1}{2}}\,(a - b + 2\,b\,i)^{\frac{a}{2\,b}}$$
$$(a - 2\,b + 2\,b\,i)^{i}\,(a - b + 2\,b\,i)^{i}.e^{-2\,i},$$

quod cum effe debeat illi valori $\Gamma : 2\,i$ aequale, fi per factores quos habeat communes vtrinque diuidamus, prodibit ifta aequatio:

$$A\,(a-b+2\,b\,i)^{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}}\,(a-b+2\,b\,i)^{i}$$
$$=B\,C\,(a-2\,b+2\,b\,i)^{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}}\,(a-2\,b+2\,b\,i)^{i}.$$

§. 15. Diuidamus hanc aequationem vtrinque per $(a-2\,b+2\,b\,i)^i$, et cum fit

$$\frac{a-b+2\,b\,i}{a-2\,b+2\,b\,i}=1+\frac{b}{a-2\,b+2\,b\,i}=1+\frac{1}{2\,i},$$

ob i numerum infinitum, per refolutionem ordinariam erit $(1+\frac{1}{2\,i})^i=e^{\frac{1}{2}}$, vnde aequatio noftra reducitur ad hanc formam:

$$A\,(a-b+2\,b\,i)^{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}}\times e^{\frac{1}{2}}=B\,C\,(a-2\,b+2\,b\,i)^{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}},$$

vbi vltimi factores quoque fe tollunt, cum fit

$$\left(\frac{a-b+2\,b\,i}{a-2\,b+2\,b\,i}\right)^{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{1}{2\,i}\right)^{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}}=1,$$

ita vt peruentum fit ad hanc fimplicem aequalitatem:

$$A\,e^{\frac{1}{2}}=B\,C.$$

§. 16. Deinde cum fupra inuenerimus effe

$$\Theta:i=\frac{\Delta\,i\,\sqrt{(\alpha+2\,i\,b)}}{k},\ \text{fiue}\ \frac{\Theta:i}{\Delta:i}=\frac{\sqrt{(\alpha+2\,i\,b)}}{k},$$

diuidamus valorem pro $\Theta:i$ inuentum per $\Delta:i$, ac reperiemus:

$$\frac{\Theta:i}{\Delta:i}=\frac{C}{B}\sqrt{(a-2b+2\,b\,i)}\left(\frac{a-b+2\,b\,i}{a-2\,b+2\,b\,i}\right)^i=\frac{C}{B}\sqrt{e(a-2b+2\,b\,i)}.$$

Erit ergo

$$\frac{\sqrt{(\alpha+2\,i\,b)}}{k}=\frac{C}{B}\sqrt{e\,(a-2\,b+2\,b\,i)},\ \text{fiue}$$
$$\frac{1}{k}=\frac{C}{B}\sqrt{\frac{e\,(a-2\,b+2\,b\,i)}{\alpha+2\,i\,b}}=\frac{C}{B}\sqrt{e},$$

fiue erit $B=C\,k\sqrt{e}$.

§. 17.

§. 17. Nacti ergo ſumus eiusmodi binas relationes inter ternas illas conſtantes A, B, C, vt ſi earum vnica eſſet cognita, ex ea binae reliquae definiri poſſent. Cum enim ſit $A = \frac{BC}{\sqrt{e}}$ et $B = Ck\sqrt{e}$, ſi conſtantem A ſpectemus vt iam cognitam, binae reliquae ſequenti modo determinabuntur: Cum ſit $B = Ck\sqrt{e}$, hic valor in priore aequatione ſubſtitutus dat $A = CCk$, vnde elicitur $C = \sqrt{\frac{A}{k}}$, hincque porro $B = \sqrt{kAe}$. Interim tamen hinc non patet, quomodo conſtans A abſolute determinari queat; ideoque recurrendum erit ad ipſam illam ſummationem ſeriei logarithmicae, quam littera A ſupra indicauimus; vbi autem loco A ſcribendum erit lA. Atque hinc tantum ſumus lucrati, vt ſi binae reliquae formae ſimili modo euoluantur per ſeries logarithmicas, conſtantes ibi adhibendae, ſcilicet lB et lC ſimul innoteſcant.

§. 18. Supereſt vt adhuc pauca addamus de valore litterae k, quam per interpolationem inueniri debere iam ſupra monuimus. Interim tamen haec littera etiam ex ipſa comparatione formularum $\Delta : i$ et $\Theta : i$ abſolute per certas quadraturas determinari poteſt. Cum enim ſit

$$k = \frac{\Delta : i}{\Theta : i}\sqrt{(a + 2ib)}, \text{ ideoque}$$

$$kk = \frac{(\Delta : i)^2 (a + 2ib)}{(\Theta : i)^2},$$

ſi loco $\Delta : i$ et $\Theta : i$ ipſa producta infinita ſubſtituamus, et, quoniam vtrumque ex i factoribus conſtat, hic autem in numeratore vnus factor $a + 2ib$ inſuper accedit, primum numeratoris factorem ſeorſim exprimamus, hoc pacto perueniemus ad ſequens productum determinatum:

$$kk = a \cdot \frac{a(a+2b)(a+2b)(a+4b)(a+4b)(a+6b)}{(a+b)(a+b)(a+3b)(a+3b)(a+5b)(a+5b)} \text{ etc.}$$

§. 19.

§. 19. Vt autem huius producti infiniti verum valorem eruamus, recordandum est, si litterae P et Q denotent sequentes formulas integrales:

$$P = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^n)^{1-\frac{m}{n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{q-1}\partial x}{(1-x^n)^{1-\frac{m}{n}}},$$

quae integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$, extendi sunt intelligenda, tum per productum infinitum fore:

$$\frac{P}{Q} = \frac{q(m+p)}{p(m+q)} \cdot \frac{(q+n)(m+p+n)}{(p+n)(m+q+n)} \cdot \frac{(q+2n)(m+p+2n)}{(p+2n)(m+q+2n)} \text{ etc.}$$

quod productum facile ad nostram formam reducitur, sumendo $q = a$, $p = a + b$, $m = b$, $n = 2b$, ita vt pro nostro casu fiat

$$P = \int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}},$$

tum vero erit $kk = \frac{aP}{Q}$, ideoque $k = \sqrt{\frac{aP}{Q}}$, sicque eundem valorem k alio modo elicuimus, quem iam supra attulimus.

§. 20. Quemadmodum autem est $k = \Delta : \frac{1}{2}$, simili modo pro binis reliquis formis poterimus assignare valores $\Gamma : \frac{1}{2}$ et $\Theta : \frac{1}{2}$. Cum enim forma Γ oriatur ex forma Δ, si in hac loco b scribatur $\frac{1}{2}b$, forma autem Θ oriatur ex Δ, si loco a scribatur $a + b$, his obseruatis erit

$$\Gamma : \tfrac{1}{2} = \sqrt{a} \frac{\int x^{a+\frac{1}{2}b-1}\partial x : \sqrt{(1-x^b)}}{\int x^{a-1}\partial x : \sqrt{(1-x^b)}} \text{ et}$$

$$\Theta : \tfrac{1}{2} = \sqrt{(a+b)} \frac{\int x^{a+2b-1}\partial x : \sqrt{(1-x^{2b})}}{\int x^{a+b-1}\partial x : \sqrt{(1-x^{2b})}}.$$

Facile autem intelligitur, valorem $\Theta : \frac{1}{2}$ aeque in nostros calculos introduci potuisse ac $\Delta : \frac{1}{2} = k$, cum sit $\Delta : \frac{1}{2} . \Theta . \frac{1}{2} = a$.

Ductis enim in se inuicem illis valoribus integralibus prodit

$$\Delta : \tfrac{1}{2} \,.\, \Theta : \tfrac{1}{2} = \sqrt{\frac{a(a+b)\int x^{a+2b-1}\,\partial x : \sqrt{(1-x^{2b})}}{\int x^{a-1}\,\partial x : (1-x^{2b})}},$$

ex notissima autem reductione talium integralium constat esse

$$\int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}} = \frac{a}{a+b}\int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}},$$

pro terminis scilicet integrationis $x = 0$ et $x = 1$, sicque perspicuum est fore $\Delta : \tfrac{1}{2} \,.\, \Theta : \tfrac{1}{2} = a$. Quemadmodum autem valor $\Gamma : \tfrac{1}{2}$ ad binos reliquos referatur, nullo modo definiri potest.

DE

DE VERO VALORE FORMVLAE INTEGRALIS $\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^n$ A TERMINO $x=0$ VSQVE AD TERMINVM $x=1$ EXTENSAE.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 30 Sept. 1776.

§. 1.

Cum haec formula exprimat aream curuae tranſcendentis, cuius abſciſſae x reſpondet applicata $=\left(l\frac{1}{x}\right)^n$; quaeſtio huc redit, vt eadem area, quatenus abſciſſae $x=1$ conuenit, vel per numeros abſolutos, vel ſaltem per quadraturas curuarum algebraicarum exhibeatur. Ac primo quidem manifeſtum eſt, quoties exponens n fuerit numerus integer, hanc formulam integralem ſiſtere terminum generalem progreſſionis hypergeometricae, cum ſit

$$\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^0 = 1,$$

$$\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^1 = 1$$

$$\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^2 = 1.\ 2,$$

$$\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^3 = 1.\ 2.\ 3$$

$$\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^4 = 1.\ 2.\ 3.\ 4,$$

atque adeo in genere

$$\int \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^n = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots\ n$$

quem autem valorem cognoſcere non datur, niſi exponens n fuerit

fuerit numerus integer positiuus; praeterea vero si exponens n fuerit numerus integer negatiuus, ex indole seriei hypergeometricae facile perspicitur valores nostrae formulae omnes fieri infinite magnos. Quaestio igitur hic potissimum complectetur casus, quibus exponens n est numerus fractus, quibus vtique valor nostrae formulae neutiquam per numeros absolutos assignari potest, sed potius quadraturas curuarum algebraicarum eo altiorum ordinum postulat, quo maior fuerit denominator fractionis pro n assumtae, quemadmodum iam olim fusius monstraui. Nuper autem se mihi obtulit alia methodus eosdem valores transcendentes inuestigandi, quam ergo hic explicare constitui; cum inde haud contemnenda incrementa in Analysin redundare videantur.

§. 2. Ante omnia igitur statuamus breuitatis gratia $l\frac{1}{x} = u$, vt sit $\partial u = -\frac{\partial x}{x}$, ideoque $\partial x = -x\,\partial u$. Hinc statim insignes reductiones ope lemmatis vulgatissimi, quo est $\int P\,\partial Q = P\,Q - \int Q\,\partial P$, deriuari possunt. Sumto enim $P = u^n$ et $\partial Q = \partial x$, ob $\partial P = n\,u^{n-1}\,\partial u = -\frac{n\,u^{n-1}\,\partial x}{x}$ et $Q = x$, hoc Lemma nobis praebet

$$\int u^n\,\partial x = x\,u^n + n\int u^{n-1}\,\partial x.$$

Deinde cum sit $u^n\,\partial x = -x^n\,\partial u$, si hic capiatur $P = -x$ et $\partial Q = u^n\,\partial u$, ob $\partial P = -\partial x$ et $Q = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$, habebimus

$$\int u^n\,\partial x = -\frac{1}{n+1}x\,u^{n+1} + \frac{1}{n+1}\int u^{n+1}\,\partial x.$$

Quare, quoniam haec integralia ita capi debent, vt euanescant posito $x = 0$, tum vero statui debet $x = 1$, notum est tum membra absoluta in his reductionibus in nihilum abire, ita vt pro hoc casu, de quo hic vnice agitur, sit $\int u^n\,\partial x = n\int u^{n-1}\,\partial x$ tum vero etiam $\int u^n\,\partial x = \frac{1}{n+1}\int u^{n+1}\,\partial x$, quae quidem posterior reductio sponte ex priori fluit.

§. 3. Quod autem formula $x u^n$ casu $x = 0$ semper euanescat, vulgo non satis directe demonstrari solet, atque adeo dubium videri queat, propterea quod posito $x = 0$ fiat $u^n = \infty$; at vero haec veritas sequenti modo rigorose ostendi potest: Namque pro casu $x = 0$ statuamus $x u^n = v$, ita vt valor huius litterae v nobis sit explorandus, quem ergo ita per fractionem repraesentemus: $v = \frac{x}{u^{-n}}$, cuius tam numerator quam denominator casu $x = 0$ euanescit, vnde per regulam communem tam loco numeratoris quam denominatoris eorum differentialia scribantur, et quia valor ipsius v idem prodire debet, erit quoque

$$v = \frac{\partial x}{- n u^{-n-1} \partial u} = \frac{+ x}{n u^{-n-1}} \left(\text{ob } \partial u = - \frac{\partial x}{x}\right).$$

Cum igitur ex priore valore sit $v = x u^n$, ex posteriori vero $v = \frac{1}{n} x u^{n+1}$, inde fiet $v^{n+1} = x^{n+1} u^{n(n+1)}$, hinc vero

$$v^n = \left(\frac{x}{n}\right)^n u^{n(n+1)},$$

quorum valorum ille per hunc diuisus dabit $v = n^n x$, haecque expressio pariter verum valorem ipsius v pro casu $x = 0$ exhibere debet, hic autem posito $x = 0$ manifesto fit $v = 0$.

§. 4. Quoniam nostra inuestigatio hic potissimum ad casus, quibus exponens n est fractio, restringitur, ope reductionis $\int u^n \partial x = n \int u^{n-1} \partial x$ omnes fractiones loco n assumtae, quantumuis fuerint magnae, continuo vnitate diminui ideoque tandem adeo infra vnitatem deprimi poterunt, ita vt intra limites 0 et 1 contineantur. Deinde vero ope alterius reductionis: $\int u^n \partial x = \frac{1}{n+1} \int u^{n+1} \partial x$, si forte exponens n fuerit fractio negatiua, tandem eius valor pariter ad fractionem inter limites 0 et 1 redigi poterit; vnde nobis hoc loco sufficiet

 eos

eos tantum casus euoluisse, quibus fractiones pro n assumtae intra limites o et 1 consistunt; haeque fractiones commode in varias classes distribuuntur, prouti denominatores harum fractionum fuerint vel 2, vel 3, vel 4, vel 5, etc.

§. 5. Cum nuper series, quae ex vnciis potestatum Binomii formantur, essem contemplatus, ostendi, si ponatur $(1+z)^m = 1 + A z + B z^2 + C z^3$, etc. tum vero etiam $(1+z)^n = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3$, etc. tum summam huius seriei $1 + A\alpha + B\beta + C\gamma +$ etc. $= s$, ita exprimi posse, vt sit $s = \int \frac{u^{m+n}\partial x}{\int u^m \partial x . \int u^n \partial x}$, quae ergo summa per valores formulae integralis propositae definitur; deinde vero etiam monstraui, eandem summam quoque hoc modo exprimi posse:

$$s = \frac{m+n}{m n \int x^{m-1}\partial x (1-x)^{n-1}},$$

vnde ergo sequitur semper fore

$$\frac{m+n}{m n}\int u^m \partial x . \int u^n \partial x = \int u^{m+n}\partial x . \int x^{m-1}\partial x (1-x)^{n-1},$$

siquidem singula haec integralia a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extendantur.

§. 6. Quoniam autem praesens nostrum institutum circa fractiones, easque vnitate minores, versatur, ponamus in genere $m = \frac{\mu}{\lambda}$ et $n = \frac{\nu}{\lambda}$, ita vt sit

$$\frac{\lambda(\mu+\nu)}{\mu\nu}\int u^{\frac{\mu}{\lambda}}\partial x . \int u^{\frac{\nu}{\lambda}}\partial x = \int u^{\frac{\mu+\nu}{\lambda}}\partial x \int x^{\frac{\mu-\lambda}{\lambda}}\partial x (1-x)^{\frac{\nu-\lambda}{\lambda}}.$$

Nunc vero vt postremam formulam integralem ab exponentibus fractis liberemus, statuamus $x = z^\lambda$, et ob $\partial x = \lambda z^{\lambda-1}\partial z$, erit

$$\int x^{\frac{\mu-\lambda}{\lambda}}\partial x (1-x)^{\frac{\nu-\lambda}{\lambda}} = \lambda \int z^{\mu-1}\partial z (1-z^\lambda)^{\frac{\nu-\lambda}{\lambda}},$$

quae

quae formula, ob $\nu - \lambda$, ita referri potest: $\lambda \int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^\lambda)^{\lambda-\nu}}}$, quod integrale pariter a $z=0$ vsque ad $z=1$ est extendendum. Facta igitur hac substitutione aequatio nostra principalis ita se habebit:

$$\tfrac{\mu+\nu}{\mu\nu}\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^\mu} . \int \partial x \sqrt[\lambda]{u^\nu} = \int \partial x \sqrt[\lambda]{u^{\mu+\nu}} \int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^\lambda)^{\lambda-\nu}}},$$

vbi ambo numeri μ et ν perpetuo nobis erunt positiui et minores quam λ. Imprimis autem hic obseruari meretur, casu quo $\mu + \nu = \lambda$ postremum integrale semper ad quadraturam circuli ita reduci posse, vt sit

$$\int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^\lambda)^\mu}} = \frac{\pi}{\lambda \sin. \frac{\mu\pi}{\lambda}}.$$

§. 7. Ex hac iam aequatione principali haud difficulter valores formulae integralis propositae pro singulis denominatoribus λ elicientur, si modo litteris μ et ν quouis casu omnes numeri denominatore λ minores successiue tribuantur, tum enim plures formabuntur aequationes, ex quibus valores formularum $\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^\mu}$ et $\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^\nu}$ definiri poterunt. Quod autem ad formulam $\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^{\mu+\nu}}$ attinet, quae nata est ex $\int u^{m+n}\partial x$, quando fuerit $m+n>1$, siue $\mu+\nu>\lambda$, quoniam vidimus esse $\int u^{m+n}\partial x = (m+n)\int u^{m+n-1}\partial x$, erit

$$\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^{\mu+\nu}} = \tfrac{\mu+\nu}{\lambda}\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^{\mu+\nu-\lambda}},$$

quae ergo formula valebit, quando $\mu+\nu>\lambda$. Denique vero omnes valores, qui ex postrema formula integrali

$$\int \frac{z^{\mu+1}\partial z}{\sqrt[\alpha]{(1-z^\lambda)^{\lambda-\nu}}}$$

nascuntur, tanquam cogniti spectari poterunt, vnde eos litteris A, B, C, D, etc. indicabimus. His igitur praenotatis pro denominatore λ ordine numeros 2, 3, 4, 5, etc. accipiamus, ideoque sequentes casus euoluamus, pro quibus in genere obseruasse iuuabit, numeros μ et ν semper inter se permutari posse, ita vt sit

$$\int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^\lambda)^{\lambda-\nu}}} = \int \frac{z^{\nu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^\lambda)^{\lambda-\mu}}}.$$

I. Euolutio casus, quo $\lambda = 2$.

§. 8. Pro hoc ergo casu aequatio nostra principalis erit

$$\tfrac{\mu+\nu}{\mu\nu}\int \partial x \sqrt{u^\mu} \cdot \int \partial x \sqrt{u^\nu} = \int \partial x \sqrt{u^{\mu+\nu}} \int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt{(1-zz)^{2-\nu}}},$$

vbi cum loco μ et ν alios numeros praeter vnitatem accipere non liceat, posito $\mu = 1$ et $\nu = 1$ pro formula postrema vnica species oritur $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$, cuius valor, vti constat, est $= \frac{\pi}{2}$, quem autem ob analogiam sequentium casuum littera A designabimus. Hinc igitur cum sit $\mu + \nu = 2$, erit

$$\int \partial x \sqrt{uu} = \int u\,\partial x = 1,$$

aequatio autem principalis induet hanc formam:

$$2\int \partial x \sqrt{u} \cdot \int \partial x \sqrt{u} = \tfrac{\pi}{2} = A,$$

vnde fit

$$\int \partial x \sqrt{u} = \sqrt{\tfrac{A}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

§. 9. Quoniam igitur inuenimus esse $\int u^{\frac{1}{2}}\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, si exponentem ipsius u continuo vnitate augeamus, per reductionem

ctionem supra ostensam, $\int u^n \partial x = n \int u^{n-1} \partial x$, impetrabimus sequentes valores:

$$\int u^{\frac{3}{2}} \partial x = \tfrac{1.3}{2.2} \sqrt{\pi},$$

$$\int u^{\frac{5}{2}} \partial x = \tfrac{1.3.5}{2.2.2} \sqrt{\pi},$$

$$\int u^{\frac{7}{2}} \partial x = \tfrac{1.3.5.7}{2.2.2.2} \sqrt{\pi},$$

et ita porro. Deinde vero regrediendo per alteram reductionem $\int u^n \partial x = \frac{1}{n+1} \int u^{n+1} \partial x$, reperiemus

$$\int u^{-\frac{1}{2}} \partial x = \sqrt{\pi}; \text{ hincque porro}$$

$$\int u^{-\frac{3}{2}} \partial x = -2 \sqrt{\pi},$$

$$\int u^{-\frac{5}{2}} \partial x = +\tfrac{2.2}{3} \sqrt{\pi},$$

$$\int u^{-\frac{7}{2}} \partial x = -\tfrac{2.2.2}{3.5} \sqrt{\pi},$$

$$\int u^{-\frac{9}{2}} \partial x = \tfrac{2.2.2.2}{3.5.7} \sqrt{\pi},$$

sicque valores nostrae formulae inuenimus pro omnibus fractionibus, quarum denominator est $= 2$.

Euolutio casus, quo $\lambda = 3$.

§. 10. Quoniam hic litterae μ et ν binos valores recipere possunt, scilicet 1 et 2, formula integralis postrema quatuor nobis suppeditat valores, quos sequenti modo indicemus:

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)}} = A, \quad \int \frac{z\, \partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)}} = B,$$

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}} = A', \quad \int \frac{z\, \partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}} = B'.$$

 In

In harum formularum prima et quarta eſt $\mu+\nu=\lambda=3$, vnde per quadraturam circuli habebimus

$$A=\frac{\pi}{3\,\text{ſin.}\,\frac{1}{3}\pi}=\frac{2\,\pi}{3\sqrt{3}} \text{ et } B'=\frac{\pi}{3\,\text{ſin.}\,\frac{2}{3}\pi}=\frac{2\,\pi}{3\sqrt{3}},$$

vnde patet eſſe $B'=A$, quod etiam inde ſequitur, quod litterae μ et ν ſunt permutabiles. Praeterea vero notetur caſu $\mu+\nu=3$ fore

$$\int\partial x\sqrt[3]{u^{\mu+\nu}}=\int u\,\partial x=1,$$

at vero caſu $\mu+\nu=4$, erit

$$\int\partial x\sqrt[3]{u^4}=\int u^{\frac{4}{3}}\partial x=\tfrac{4}{3}\int\partial x\sqrt[3]{u}.$$

§. 11. His praemonitis omnes caſus aequationis noſtrae principalis ordine euoluamus ſequenti modo:

I. Si $\mu=1$ et $\nu=2$, erit $\frac{3}{2}\int\partial x\sqrt[3]{u}\,.\int\partial x\sqrt[3]{u^2}=A.$

II. Si $\mu=2$ et $\nu=2$, erit $\frac{4}{4}\int\partial x\sqrt[3]{u^2}\,.\int\partial x\sqrt[3]{u^2}=\frac{4}{3}B\int\partial x\sqrt[3]{u}.$

III. Si $\mu=1$ et $\nu=1$, erit $2\int\partial x\sqrt[3]{u}\,.\int\partial x\sqrt[3]{u}=A'\int\partial x\sqrt[3]{u^2}.$

IV. Si $\mu=2$ et $\nu=1$, erit $\frac{3}{2}\int\partial x\sqrt[3]{u^2}\,.\int\partial x\sqrt[3]{u}=B'.$

Sicque quatuor nacti ſumus aequationes pro determinandis binis valoribus incognitis, ſcilicet $\int\partial x\sqrt[3]{u}$ et $\int\partial x\sqrt[3]{u^2}$, quos ergo pluribus modis definire licebit, quandoquidem ad hoc duae tantum aequationes ſufficiunt.

§. 12. Quo autem hic calculus facilior reddatur, ſtatuamus breuitatis gratia $\int\partial x\sqrt[3]{u}=p$ et $\int\partial x\sqrt[3]{u^2}=q$, et combinemus primo aequationem I et II, quae erunt

$$\tfrac{3}{2}pq=A \text{ et } qq=\tfrac{4}{3}Bp,$$

quarum poſterior dat $p=\frac{3qq}{4B}$, qui valor in priore ſubſtitutus dat

dat $\frac{9 q^3}{8 B} = A$, vnde reperitur $q = 2 \sqrt[3]{\frac{A B}{9}}$, ex quo porro colligitur $p = \frac{3}{B} \sqrt[3]{\frac{A^2 B^2}{81}}$, siue etiam $p = \sqrt[3]{\frac{A A}{3 B}}$, sicque pro p et q restitutis valoribus iam nacti sumus has determinationes:

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{A A}{3 B}} \text{ et } \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{A B}{9}}.$$

§. 13. Combinemus nunc primam aequationem cum tertia, et habebimus $\frac{3}{2} p q = A$ et $2 p p = A' q$. Ex posteriore fit $q = \frac{2 p p}{A'}$, qui valor in priore substitutus dat $\frac{3 p^3}{A'} = A$, vnde reperitur $p = \sqrt[3]{\frac{A A'}{3}}$, hincque

$$q = \frac{2}{A'} \sqrt[3]{\frac{A^2 A' A'}{9}} = 2 \sqrt[3]{\frac{A^2}{9 A'}},$$

sicque haec combinatio nos perducit ad hos valores:

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{A A'}{3}} \text{ et } \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{A^2}{9 A'}}.$$

§. 14. Combinemus nunc quoque primam aequationem cum quarta, et habebimus $\frac{3}{2} p q = A$ et $\frac{3}{2} p q = B'$, vnde nihil aliud sequitur, nisi $B' = A$, vti ante inuenimus. Combinemus igitur secundam cum tertia, et habebimus $q q = \frac{4}{3} B p$ et $2 p p = A' q$, ex quarum posteriore fit $q = \frac{2 p p}{A'}$, qui valor in prima substitutus dat $\frac{4 p^3}{A' A'} = \frac{4}{3} B$, vnde reperitur

$$p = \sqrt[3]{\frac{A' A' B}{3}}, \text{ ex quo fit}$$

$$q = 2 \sqrt[3]{\frac{A' B B}{9}},$$

sicque haec combinatio nobis dat hos valores:

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{A' A' B}{3}} \text{ et } \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{A' B B}{9}}.$$

§. 15.

§. 15. Quoniam aequatio quarta cum prima prorſus conuenit, ſuperfluum foret, ſecundam vel tertiam cum quarta combinare, quoniam eas iam cum prima combinauimus. Sicque pro litteris p et q omnino ternos nacti ſumus valores, quos ita coniunctim ob oculos ponamus:

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{A A}{3 B}} = \sqrt[3]{\frac{A' A}{3}} = \sqrt[3]{\frac{A' A' B}{3}} \text{ et}$$

$$\int \partial x \sqrt[3]{u^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{A B}{9}} = 2 \sqrt[3]{\frac{A^2}{9 A'}} = 2 \sqrt[3]{\frac{A' B B}{9}}.$$

Hinc igitur ſumtis cubis ſequentes nanciſcimur aequationes:

$$\frac{A A}{B} = A A' = A' A' B \text{ et}$$

$$A B = \frac{A A}{A'} = A' B B.$$

§. 16. At relatione inter hos diuerſos valores facta omnes hae aequalitates ad vnicam hanc proprietatem reuocantur, qua eſt $A = A' B$. Subſtitutis igitur ipſis formulis integralibus conſequimur hanc veritatem maxime memorabilem:

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1 - z^3)}} = \int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1 - z^3)^2}} \cdot \int \frac{z \partial z}{\sqrt[3]{(1 - z^3)}},$$

et quia A per quadraturam circuli definitur, prodibit valor huius producti:

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1 - z^3)^2}} \cdot \int \frac{z \partial z}{\sqrt[3]{(1 - z^3)}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

vnde ſi alterius harum duarum formularum valor innoteſceret, ſimul alterius valor foret cognitus; hoc enim modo ex binis valoribus A et B bini reliqui A′ et B′ ita determinantur, vt ſit $A' = \frac{A}{B}$ et B′ et A. Denique etiam operae pretium erit notaſſe hanc relationem

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} \cdot \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = \tfrac{2}{3} A = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

§. 17.

Euolutio casus quo $\lambda = 4$.

§. 17. Hic iam primo breuitatis gratia ponamus

$$\int \partial x \sqrt[4]{u^2} = q \text{ et } \int \partial x \sqrt[4]{u^3} = r;$$

praeterea vero designemus formulam integralem $\int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)^{4-\nu}}}$, per characterem (μ, ν), quandoquidem iam vidimus litteras μ et ν inter se permutari posse. Deinde aequatio principalis hoc modo repraesentetur:

$$\int \partial x \sqrt[4]{u^\mu} \cdot \int \partial x \sqrt[4]{u^\nu} = \frac{\mu\nu}{\mu+\nu} \int \partial x \sqrt[4]{u^{\mu+\nu}}\,(\mu, \nu);$$

vbi notetur si $\mu + \nu = \lambda = 4$, fore $\int \partial x \sqrt[4]{u^4} = 1$; sin autem $\mu + \nu = \lambda + \alpha = 4 + \alpha$, erit

$$\int \partial x \sqrt[4]{u^{4+\alpha}} = (1 + \tfrac{\alpha}{4}) \int u^{\frac{\alpha}{4}} \partial x = \frac{\mu+\nu}{4} \int \partial x \sqrt[4]{u^\alpha}.$$

§. 18. Tribuamus nunc litteris μ et ν successiue omnes valores minores quam 4, atque aequatio principalis nobis praebebit sequentes aequationes:

1°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 1\\ \nu = 1\end{pmatrix}$, erit $pp = \frac{1}{2} q\,(1, 1)$, vnde fit $\frac{pp}{q} = \frac{1}{2}(1, 1) = A$.

2°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 1\\ \nu = 2\end{pmatrix}$, erit $pq = \frac{2}{3} r\,(1, 2)$, vnde $\frac{pq}{r} = \frac{2}{3}(1, 2) = B$.

3°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 1\\ \nu = 3\end{pmatrix}$, erit $pr = \frac{3}{4}(1, 3) = C$.

4°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 2\\ \nu = 2\end{pmatrix}$, erit $qq = (2, 2) = D$.

5°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 2\\ \nu = 3\end{pmatrix}$, erit $qr = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} p\,(2, 3)$, vnde fit $\frac{qr}{p} = \frac{3}{2}(2, 3) = E$.

6°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 3\\ \nu = 3\end{pmatrix}$, erit $rr = \frac{9}{6} \cdot \frac{6}{4} q\,(3, 3)$, vnde fit $\frac{rr}{q} = \frac{9}{4}(3, 3) = F$.

§. 19. Hinc igitur nacti ſumus ſex aequationes, ex quibus tres noſtras incognitas p, q et r definiri oportet, quod igitur pluribus modis fieri poteſt, ſiquidem ternae aequationes ſufficiunt. Eligamus igitur eas, quae negotium facillime conficiunt, ac primo quidem quarta nobis ſtatim dat $q = \sqrt{D}$, vnde ex prima elicimus $pp = A\sqrt{D}$, ideoque

$$p = \sqrt{A\sqrt{D}} = \sqrt[4]{AAD},$$

denique ex aequatione ſexta colligimus $rr = F\sqrt{D}$, ideoque $r = \sqrt[4]{FFD}$, ſicque omnes tres formulas tranſcendentes ita determinauimus, vt ſit

$$1^\circ.\ p = \int \partial x \sqrt[4]{u} = \sqrt[4]{AAD} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(1, 1)^2 (2, 2)},$$

$$2^\circ.\ q = \int \partial x \sqrt[4]{u^2} = \int \partial x \sqrt[4]{u} = \sqrt{D} = \sqrt{(2, 2)},$$

$$3^\circ.\ r = \int \partial x \sqrt[4]{u^3} = \sqrt[4]{DFF} = \tfrac{3}{2}\sqrt[4]{(2, 2)(3, 3)^2}.$$

20. Hic iam notaſſe iuuabit, valorem formulae (μ, ν) caſu quo $\mu + \nu = \lambda$, in genere per quadraturam circuli exprimi poſſe, cum hoc caſu ſit

$$(\mu, \nu) = \frac{\mu}{\lambda \operatorname{fin.} \frac{\mu\pi}{\lambda}}.$$

Noſtro igitur caſu, quo $\lambda = 4$, erit

$$(2, 2) = \frac{\pi}{4 \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\pi} = \frac{\pi}{4},$$

deinde quoque erit

$$(1, 3) = \frac{\pi}{4 \operatorname{fin.} \frac{1}{4}\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Hinc igitur patet fore $D = \frac{\pi}{4}$ et $C = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$, ita vt hae duae littere C et D a ſola quadratura circuli pendeant.

§. 21. Quoniam has tres determinationes, nempe:

$$p = \sqrt[4]{AAD}, \quad q = \sqrt{D} \text{ et } r = \sqrt[4]{DFF},$$

ex aequationibus 1, 4 et 6^{ta} elicuimus, ſi eosdem valores in reliquis aequationibus ſubſtituamus, reperiemus egregias relationes inter litteras noſtras maiuſculas. Sic enim ſecunda aequatio $pq = Br$ dabit $AAD^3 = B^4 DFF$, quae reducitur ad hanc: $AD = BBF$; tertia vero aequatio $pr = C$ dabit $ADF = CC$; denique quinta aequatio $qr = Ep$ praebebit $D^3 FF = A^2 DE$, vnde fit $DF = AEE$. Hoc ergo modo deducti ſumus ad tres ſequentes relationes:

$$1^\circ.\ AD = BBF, \quad 2^\circ.\ ADF = CC \text{ et } 3^\circ.\ DF = AEE,$$

quarum prima ducta in ſecundam dabit $AD = BC$, at vero ſecunda ducta in tertiam producit $DF = CE$. Cum igitur ſit $AD = BC$, ex prima concluditur quoque fore $C = BF$, ita vt ternae determinationes repertae ad iſtas ternas reuocentur:

$$1^\circ.\ C = AE, \quad 2^\circ.\ C = BF, \quad 3^\circ.\ AD = BC,$$

quae reducuntur ad iſtas tres ſimpliciſſimas:

$$1^\circ.\ C = AE, \quad 2^\circ.\ C = BF, \quad 3^\circ.\ D = BE.$$

§. 22. Quodſi iam in his poſtremis aequationibus loco litterarum formulas integrales per noſtros characteres deſignatas introducamus, prouenient ſequentes relationes:

$$1^\circ.\ (1, 3) = (1, 1)(2, 3),$$

$$2^\circ.\ (1, 3) = 2(1, 2)(3, 3) \text{ et}$$

$$3^\circ.\ (2, 2) = (1, 2)(2, 3).$$

Hinc igitur per ipſas formulas integrales habebimus iſtas tres relationes maxime memorabiles:

$$1^\circ.\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \int \frac{\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} \cdot \int \frac{z\,\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)}} = \int \frac{\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} \cdot \int \frac{zz\,\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}},$$

$2^\circ.\quad \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} \cdot \int \frac{zz\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)}}$ et

$3^\circ.\quad \frac{\pi}{4} = \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} \cdot \int \frac{zz\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}},$

quarum vltimam iam dudum in medium attuli.

§. 23. Cum igitur ex ſex formulis integralibus quae hic occurrunt, binae, ſcilicet C et D, a quadratura circuli pendeant, ſi modo ex reliquis vnius valor innoteſcat, valores caeterarum inde aſſignari poterunt. Si enim praeter characteres (1, 3) et (2, 2) inſuper hunc (1, 2) tanquam cognitum ſpectemus, reliqui tres per hos ſequenti modo determinabuntur:

$$(3,3) = \frac{(1,3)}{2(1,2)};\quad (2,3) = \frac{(2,2)}{(1,2)};\quad (1,1) = \frac{(1,2)\,(1,3)}{(2,2)}.$$

Euolutio caſus quo $\lambda = 5$.

§. 24. Vocemus hic formulas tranſcendentes quaeſitas $\int u^{\frac{1}{5}}\partial x = p$, $\int u^{\frac{2}{5}}\partial x = q$, $\int u^{\frac{3}{5}}\partial x = r$, $\int u^{\frac{4}{5}}\partial x = s$. Nunc vero character (μ, ν) ſignificet hanc formulam integralem: $\int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[5]{(1-z^5)^{5-\nu}}}$, quibus poſitis ex aequatione principali decem ſequentes aequationes nanciſcemur:

1°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 1\\ \nu = 1\end{pmatrix}$, crit $pp = \frac{1}{2}q(1,1)$, vnde fit $\frac{pp}{q} = \frac{1}{2}(1,1) = A$.

2°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 1\\ \nu = 2\end{pmatrix}$, crit $pq = \frac{2}{3}r(1,2)$, ergo $\frac{pq}{r} = \frac{2}{3}(1,2) = B$.

3°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 1\\ \nu = 3\end{pmatrix}$, crit $pr = \frac{3}{4}s(1,3)$, ergo $\frac{pr}{s} = \frac{3}{4}(1,3) = C$.

4°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 1\\ \nu = 4\end{pmatrix}$, crit $ps = \frac{4}{5}(1,4) = D$.

5°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 2\\ \nu = 2\end{pmatrix}$, erit $qq = s\ (2,2)$, ergo $\frac{qq}{s} = \ (2,2) = E$.

6°.

6°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 2\\ \nu = 3\end{pmatrix}$, erit $q\,r = \frac{6}{5}(2,\,3) = \mathrm{F}$.

7°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 2\\ \nu = 4\end{pmatrix}$, erit $q\,s = \frac{8}{6}\cdot\frac{6}{5}\,p\,(2,\,4)$, ergo $\frac{q\,s}{p} = \frac{8}{5}(2,\,4) = \mathrm{G}$.

8°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 3\\ \nu = 3\end{pmatrix}$, erit $r\,r = \frac{9}{6}\cdot\frac{6}{5}\,p\,(3,\,3)$, ergo $\frac{r\,r}{p} = \frac{9}{5}(3,\,3) = \mathrm{H}$.

9°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 3\\ \nu = 4\end{pmatrix}$, erit $r\,s = \frac{12}{7}\cdot\frac{7}{5}\,q\,(3,\,4)$, ergo $\frac{r\,s}{q} = \frac{12}{5}(3,4) = \mathrm{I}$.

10°. Si $\begin{pmatrix}\mu = 4\\ \nu = 4\end{pmatrix}$, erit $s\,s = \frac{16}{8}\cdot\frac{8}{5}\,r\,(4,\,4)$, ergo $\frac{s\,s}{r} = \frac{16}{5}(4,\,4) = \mathrm{K}$.

§. 25. Quoniam igitur decem adepti ſumus aequationes, ex quibus quatuor quantitates incognitas definiri oportet: eligamus eas, quibus negotium facillime expedietur. Quarta autem aequatio ſtatim dat $s = \frac{\mathrm{D}}{p}$; ex ſexta autem fit $r = \frac{\mathrm{F}}{q}$, ita vt tantum ſuperſit binas litteras p et q elicere. Deinde vero ex prima deducimus $q = \frac{p\,p}{\mathrm{A}}$, ita vt ſit $r = \frac{\mathrm{A\,F}}{p\,p}$. Nunc igitur ex ſecunda aequatione fiet $\frac{p^5}{\mathrm{A\,A\,F}} = \mathrm{B}$, vnde fit $p = \sqrt[5]{(\mathrm{AABF})}$, quo valore inuento colligitur fore $q = \sqrt[5]{\left(\frac{\mathrm{BBFF}}{\mathrm{A}}\right)}$, $r = \sqrt[5]{\left(\frac{\mathrm{A\,F^3}}{\mathrm{B\,B}}\right)}$, denique erit $s = \frac{\mathrm{D}}{\sqrt[5]{(\mathrm{A\,A\,B\,E})}}$. Sicque omnes quatuor incognitas per quadraturas ordinarias exprimere licebit. Quodſi iam hos valores in reliquis aequationibus ſubſtituamus, orientur ſequentes aequationes: 1°. $\mathrm{C\,D} = \mathrm{A\,F}$, 2°. $\mathrm{B\,F} = \mathrm{E\,D}$, 3°. $\mathrm{D} = \mathrm{A\,G}$, 4°. $\mathrm{F} = \mathrm{B\,H}$, 5°. $\mathrm{D} = \mathrm{B\,I}$, 6°. $\mathrm{D\,D} = \mathrm{A\,F\,K}$, vnde ob $\mathrm{D} = \mathrm{A\,G}$ eruitur $\mathrm{D\,G} = \mathrm{F\,K}$.

§. 26. Ecce ergo ſex nouae prodierunt determinationes, quibus decem noſtrae litterae a ſe inuicem pendent, ita vt ex quatuor pro cognitis aſſumtis reliquae ſex definiri que-

 ant,

ant; pro cognitis autem imprimis assumi conueniet binas D et F, quippe quae per quadraturam circuli innotescunt, cum sit

$$D = \tfrac{4}{5}(1, 4) = \tfrac{4}{5} \cdot \frac{\pi}{5 \sin. \frac{1}{5}\pi} \text{ et } F = \tfrac{6}{5}(2, 3) = \tfrac{6}{5} \cdot \frac{\pi}{5 \sin. \frac{2}{5}\pi}.$$

Dummodo ergo duae reliquarum etiam vt cognitae spectentur, caeteras omnes per eas definire licebit. At vero sex illae relationes rite inter se comparatae ternas formulas tam ipsi D quam ipsi F aequales suppeditant, quae sunt $D = AG = BI = CK$ et $F = BH = CG = EI$. Hinc igitur, si praeter D et F etiam litterae A et B pro cognitis assumantur, reliquae litterae ex iis determinabuntur vt sequitur: $C = \frac{AF}{D}$, $E = \frac{BF}{D}$, $G = \frac{D}{A}$, $H = \frac{F}{B}$, $I = \frac{D}{B}$ et $K = \frac{DD}{AF}$.

§. 27. Substituamus nunc loco harum litterarum characteres formularum integralium, atque sex sequentes relationes obtinebuntur:

1°. $(1, 4) = (1, 1)(2, 4)$,
2°. $(1, 4) = 2(1, 2)(3, 4)$,
3°. $(1, 4) = 3(1, 3)(4, 4)$,
4°. $(2, 3) = (1, 2)(3, 3)$,
5°. $(2, 3) = (1, 3)(2, 4)$,
6°. $(2, 3) = 2(2, 2)(3, 4)$;

vnde plura egregia theoremata formari possent.

§. 28. Quoniam ambae litterae D et F, seu potius characteres $(1,4)$ et $(2,3)$ ambo peripheriam circuli inuoluunt, eorum ratio, seu fractio $\frac{(1,4)}{(2,3)}$, algebraice exhiberi poterit, quippe cuius valor est $= \frac{\sin. \frac{2}{5}\pi}{\sin. \frac{1}{5}\pi} = 2 \cos. \frac{1}{5}\pi$. Hinc etiam sequentes ratio-

nes

nes inter binas formulas integrales deriuantur:

$$2 \operatorname{cos}. \tfrac{1}{5}\pi = \frac{(1, 1)}{(1, 3)} = 2\frac{(3, 4)}{(3. 3)} = \frac{(1, 2)}{(2, 2)} = 3\frac{(4, 4)}{(2, 4)},$$

vnde iterum eximia theoremata formari possent, si praesens nostrum institutum hoc postularet. Pleniorem autem huius argumenti expositionem in aliam occasionem sum dilaturus.

§. 29. Simili modo quo hic casum $\lambda = 5$ euoluimus, etiam tractare liceret sequentes casus, quibus litterae λ maiores valores tribuuntur. Quoniam autem numerus aequationum continuo secundum numeros trigonales increscit, superfluum foret istum laborem hic suscipere, quoniam omnes operationes analyticae, quibus hae solutiones nituntur, iam satis dilucide sunt expositae.

PLE-

PLENIOR EXPOSITIO SERIERVM ILLARVM MEMORABILIVM, QVAE EX VNCIIS POTESTATVM BINOMII FORMANTVR.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 30 Sept. 1776.

§. 1.

Ad summationem istarum progressionum imprimis me perduxit idonea signandi ratio, qua vsus sum ad vncias cuiuscunque potestatis Binomii succincte repraesentandas. Scilicet potestatem indefinitam Binomii $(1+z)^n$ per sequentem seriem exhibui:

$$(1+z)^n = 1 + (\tfrac{n}{1})z + (\tfrac{n}{2})zz + (\tfrac{n}{3})z^3 + (\tfrac{n}{4})z^4 + \text{etc.}$$

ita vt potestatis z^p coëfficiens sit $(\frac{n}{p})$, in quo charactere, sub forma fractionis expresso, numerus superior n denotat ipsum exponentem potestatis, inferior vero p indicat, quotus sit iste coëfficiens ab initio numeratus. Constat autem ex euolutione huius potestatis semper esse vt sequitur:

$$(\tfrac{n}{0}) = 1,\ (\tfrac{n}{1}) = n,\ (\tfrac{n}{2}) = \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2},\ (\tfrac{n}{3}) = \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3},$$

et in genere

$$(\tfrac{n}{p}) = \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3}\cdot\ldots\ldots\tfrac{n-p+1}{p},$$

deinde cum vltimus terminus Binomii euoluti sit z^n, erit $(\frac{n}{n}) = 1$; et quia vnciae, ab vltimo termino regrediendo, eun-

dem

dem ordinem seruant atque ab initio, erit $\left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\frac{n}{1}\right)$, $\left(\frac{n}{n-2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)$, atque in genere $\left(\frac{n}{n-p}\right) = \left(\frac{n}{p}\right)$. Caeterum quoque hinc manifestum est valorem huius characteris $\left(\frac{n}{p}\right)$ semper in nihilum abire, quoties fuerit p vel numerus negatiuus, vel positiuus maior quam n.

§. 2. His positis contemplatus sum seriem, cuius singuli termini sunt producta ex binis vnciis duarum quarumcunque potestatum Binomii, ordine inuicem iunctis, cuiusmodi in genere est haec progressio:

$$s = \left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{n}{p+1}\right) + \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{p+2}\right) + \left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{n}{p+3}\right) + \text{etc.}$$

donec perueniatur ad terminos euanescentes, quemadmodum etiam termini, qui primum praecederent, euanescunt, atque ostendi talis progressionis summam semper esse $s = \left(\frac{m+n}{m+p}\right)$, vel etiam $s = \left(\frac{m+n}{n-p}\right)$. Demonstratio quidem huius veritatis ita comparata videtur, vt tantum pro exponentibus integris m et n valeat; veruntamen iam ostendi, eandem summationem etiam pro exponentibus fractis locum habere, si modo valor characteris $\left(\frac{m+n}{m+p}\right)$ per notas methodos interpolationum rite definiatur.

§. 3. Ista autem interpolatio commodissime instituitur per formulas integrales logarithmicas. Notum enim est, si ponatur breuitatis gratia $l\frac{1}{x} = u$, atque integralia sequentia perpetuo a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extendantur, fore vt sequitur: $\int u\,\partial x = 1$; $\int uu\,\partial x = 1.2$; $\int u^3\,\partial x = 1.2.3$; $\int u^4\,\partial x = 1.2.3.4$, atque in genere

$$\int u^p\,\partial x = 1.2.3.4.\ldots.p.$$

Praeterea vero erit $\int u^0\,\partial x = 1$. Sin autem exponens p denotet numerum integrum negatiuum quemcunque, valor integralis $\int u^p\,\partial x$, semper erit infinitus. Cum enim in genere sit

$$\int u^{p+1}\partial x = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots.\ (p+1) = (p+1)\int u^p \partial x,$$

erit viciſſim

$$\int u^p \partial x = \frac{1}{p+1}\int u^{p+1}\partial x.$$

Quare ſi ſumamus $p = -1$, prodit

$$\int \frac{\partial x}{u} = \frac{1}{0}\int u^0 \partial x = \frac{1}{0} = \infty.$$

Deinde ſumto $p = -2$, habebitur:

$$\int \frac{\partial x}{u^2} = -\frac{1}{1}\int \frac{\partial x}{u} = -\frac{1.\ 1}{0.\ 1} = \infty.$$

Vnde patet etiam omnia ſequentia integralia euadere infinita. Quando autem p denotat numerum fractum, talis euolutio non amplius locum habere poteſt, ſed contentos nos eſſe oportet ea quantitate tranſcendente, quae per formulam $\int u^p \partial x$ exprimitur. Ita iam dudum innotuit, ſi fuerit $p = -\frac{1}{2}$, tum eſſe $\int \frac{\partial x}{\sqrt{u}} = \sqrt{\pi}$, denotante π peripheriam circuli cuius diameter eſt $= 1$. Hinc ergo per reductionem ante allatam erit $\int \partial x \sqrt{u} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, ſimilique modo porro eſt

$$\int u^{\frac{3}{2}} \partial x = \frac{1.\ 3}{2.\ 2}\sqrt{\pi}, \text{ atque vlterius}$$

$$\int u^{\frac{5}{2}} \partial x = \frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 2.\ 2}\sqrt{\pi} \text{ et}$$

$$\int u^{\frac{7}{2}} \partial x = \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7}{2.\ 2.\ 2.\ 2}\sqrt{\pi},$$

etc.

Quando autem p eiusmodi eſt fractio, cuius denominator eſt maior quam 2, tum valores huiusmodi formularum integralium reducuntur ad quadraturas magis tranſcendentes.

§. 4. His expoſitis ſummatio progreſſionis ſupra allatae per huiusmodi formulas integrales exhiberi poterit: facile enim perſpicitur fore

$$s = \left(\frac{m+n}{m+p}\right) = \frac{\int u^{m+n}\partial x}{\int u^{m+p}\partial x \cdot \int u^{n-p}\partial x}.$$

Si enim m, n et p fuerint numeri integri poſitiui, erit vtique

$\int u^{m+n}$

$$\int u^{m+n}\partial x = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots (m+n).$$

Simili modo erit

$$\int u^{m+p}\partial x = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots (m+p);$$

$$\int u^{n-p}\partial x = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots (n-p);$$

vnde ſequitur fore

$$\frac{\int u^{m+n}\partial x}{\int u^{m+p}\partial x} = (m+p+1)(m+p+2).\ \ldots\ (m+n),$$

vbi factorum numerus eſt $= n-p$, quippe qui, ordine retrogrado ſcripti, ſunt

$$(m+n)(m+n-1)(m+n-2).\ \ldots\ldots (m+p+1).$$

Verum hoc productum ſi inſuper diuidatur per

$$\int u^{n-p}\partial x = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots (n-p),$$

vbi factorum numerus pariter eſt $n-p$, reperietur fore

$$\frac{\int u^{m+n}\partial x}{\int u^{m+p}\partial x . \int u^{n-p}\partial x} = \frac{m+n}{1} . \frac{m+n-1}{2} . \frac{m+n-2}{3} . \frac{m+n-3}{4} \ldots . \frac{m+p+1}{n-p},$$

atque haec forma manifeſto eſt valor huius characteris $(\frac{m+n}{n-p})$, qui pariter ſummam quaeſitam s indicat. Quamquam autem haec demonſtratio ad numeros integros reſtringi videtur, tamen per principium continuitatis iſta expreſſio, per formulas integrales exhibita, etiam veritati conformis manere debet, quicunque numeri fracti pro litteris m, n et p accipiantur.

§. 5. Huc fere redeunt, quae non ita pridem circa ſummationem huiusmodi progreſſionum ſum commentatus. Nunc autem mihi propoſitum eſt in easdem ſummas per methodum maxime diuerſam, cuius iam nonnulla dedi ſpecimina, inquirere; quo pacto non ſolum ſummatio hic tradita maxime confirmabitur et illuſtrabitur, ſed etiam pro caſibus exponentium fractorum eae curuae algebraicae reperientur, a quarum quadratura ſummationes pendent, cum ante iſtae ſummae per

 qua-

quadraturas curuarum transcendentium exprimerentur, ita vt ista noua methodus maximam vtilitatem in Analysin sit illatura; ea autem nititur reductione formularum integralium satis quidem cognita, quam autem ad nostrum vsum in sequentibus Lemmatibus sum accommodaturus.

Lemma I.

§. 6. Si ponatur $V = x^a (1 - x^b)^{\frac{c}{b}}$, erit

$$lV = a\,l\,x + \tfrac{c}{b}\,l\,(1 - x^b),$$

ac differentiando

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{a\,\partial x}{x} - \frac{c\,x^{b-1}\,\partial x}{1 - x^b},$$

hinc per V multiplicando, iterumque integrando, perueniemus ad hanc reductionem:

$$V = x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = a\int x^{a-1}\partial x\,(1-x^b)^{c:b} - c\int x^{a+b-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c-b}{b}},$$

hincque binas sequentes reductiones deducimus:

$$\text{I.}\ \int x^{a-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \tfrac{a}{1}\,x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \tfrac{c}{a}\int x^{a+b-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}.$$

$$\text{II.}\ \int x^{a+b-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = -\tfrac{1}{c}\,x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \tfrac{a}{c}\int x^{a-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}}.$$

Corollarium.

§. 7. Quodsi haec integralia a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extendi debeant, atque omnes exponentes a, b etc. fuerint positiui, tum in vtraque reductione membrum algebraicum penitus ex comparatione tollitur, quippe quod euanescit, facto tam $x = 0$ quam $x = 1$, atque binae reductiones inuentae ita se habebunt:

I.

$$\text{I. } \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \tfrac{c}{a}\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} \text{ et}$$

$$\text{II. } \int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \tfrac{a}{c}\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}}.$$

Sin autem exponentes a, b et c non fuerint poſitiui, in iſtis reductionibus membrum algebraicum ſeu abſolutum praetermitti nequit, quandoquidem id vel caſu $x=0$ vel caſu $x=1$ in infinitum excreſcit. Hic autem ſemper exponens b tanquam poſitiuus ſpectari poterit.

Lemma II.

§. 8. Poſito vt ante $V = x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}}$, ſi ambae fractiones, quas pro $\frac{\partial V}{V}$ inuenimus, ad communem denominatorem redigamus, habebimus $\dfrac{\partial V}{V} = \dfrac{a\,\partial x - (a+c)x^b\partial x}{x(1-x^b)}$.

Quodſi iam iterum per V multiplicemus et integremus, perueniemus ad hanc aequationem:

$$V = x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = a\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}$$
$$-(a+c)\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1},$$

vnde ſequuntur hae duae aequationes:

$$\text{I. } \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \tfrac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}}$$
$$+\left(\tfrac{a+c}{a}\right)\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} \text{ et}$$

$$\text{II. } \int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \tfrac{-1}{a+c}x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}}$$
$$+\tfrac{a}{a+c}\cdot\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}.$$

Corollarium.

§. 9. Quodsi haec integralia, quemadmodum in sequentibus perpetuo assumemus, a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extendi debeant, atque exponentes a etc. fuerint positiui, membra absoluta praetermittere licebit, ita vt tum sequentes reductiones locum sint habiturae:

$$\text{I. } \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a+c}{a}\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} \text{ et}$$

$$\text{II. } \int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c}\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}.$$

Lemma III.

§. 10. Posito denuo $V = x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}}$, quoniam supra inuenimus $\frac{\partial V}{V} = \frac{a\partial x - (a+c)x^b\partial x}{x(1-x^b)}$, si hic loco prioris membri $a\partial x$ scribamus $(a+c)\partial x - c\partial x$, fiet

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{\partial x(a+c)}{x} - \frac{c\partial x}{x(1-x^b)},$$

quae aequatio per V multiplicata et integrata praebet:

$$V = x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = (a+c)\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}}$$
$$- c\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1},$$

vnde sequentes duae reductiones obtinentur:

$$\text{I. } \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{1}{a+c}x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}}$$
$$+ \frac{c}{a+c}\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} \text{ et}$$

$$\text{II. } \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = -\frac{1}{c}x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}}$$
$$+ \frac{a+c}{c}\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}}.$$

Corol-

Corollarium.

§. 11. Quodsi igitur exponentes a etc. fuerint positiui, et integralia extendi debeant ab $x = 0$ ad $x = 1$, omisso membro absoluto hae reductiones nascentur:

$$\text{I. } \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{c}{a+c}\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} \text{ et}$$

$$\text{II. } \int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a+c}{c}\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}}.$$

Problema 1.

Si, integratione ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extensa, exponentes a et c fuerint positiui, cognitusque fuerit valor formulae integralis $\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \Delta$, per eundem exprimere omnes formulas integrales in hac forma generali contentas:

$$\int x^{a+ib-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}.$$

Solutio.

§. 12. Hic vtendum erit reductione posteriore Lemmatis secundi, in Corollario tradita, quae est

$$\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c}\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1},$$

vbi continuo exponentem a numero b augeamus; et cum per hypothesin sit

$$\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \Delta,$$

reductiones reperiuntur sequentes:

$$\text{I. } \int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c}\cdot\Delta.$$

$$\text{II. } \int x^{a+2b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c}\cdot\frac{a+b}{a+b+c}\cdot\Delta.$$

$$\text{III.} \int x^{a+3b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c}\cdot\frac{a+b}{a+b+c}\cdot\frac{a+2b}{a+2b+c}\cdot\Delta.$$

$$\text{IV.} \int x^{a+4b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c}\cdot\frac{a+b}{a+b+c}\cdot\frac{a+2b}{a+2b+c}\cdot\frac{a+3b}{a+3b+c}\cdot\Delta.$$

etc. etc.

cuius progreſſionis lex manifeſto in oculos incurrit.

Corollarium 1.

§. 13. Quodſi fuerit $a+c=b$, ideoque $c=b-a$, erit $\Delta = \int \frac{x^{a-1}\partial x}{(1-x^b)^{\frac{a}{b}}}$; vbi quidem tenendum eſt, non ſolum exponentem a debere eſſe poſitiuum, ſed etiam minorem quam b, quia etiam c debet eſſe poſitiuum. Haec autem formula commode ad quadraturam circuli reuocari poteſt, ad quod oſtendendum ponatur $\frac{x}{\sqrt[b]{(1-x^b)}} = y$, vt poſito $x=0$ fiat etiam $y=0$, at facto $x=1$ euadet $y=\infty$; tum autem erit $\Delta = \int \frac{y^a \partial x}{x}$, ſumtisque poteſtatibus exponentis b, erit $y^b = \frac{x^b}{1-x^b}$, vnde reperitur $x^b = \frac{y^b}{1+y^b}$, hincque ſumendis logarithmis erit $b\,l\,x = b\,l\,y - l(1+y^b)$, vnde differentiando colligitur:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{y} - \frac{y^{b-1}\partial y}{1+y^b} = \frac{\partial y}{y(1+y^b)},$$

quo valore ſubſtituto erit $\Delta = \int \frac{y^{a-1}\partial y}{1+y^b}$, quod integrale cum ab $y=0$ vsque ad $y=\infty$ extendi debeat, alia occaſione oſtendi eius valorem eſſe $= \frac{\pi}{b\,\text{ſin.}\,\frac{a\pi}{b}}$.

Corol-

Corollarium 2.

§. 14. Quamobrem si in genere statuamus $c = b - a$, ita vt sit $\Delta = \frac{\pi}{b \sin. \frac{a\pi}{b}}$, singulae reductiones in problemate inventae ita se habebunt.:

$$\text{I. } \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}} = \frac{a}{b} \Delta.$$

$$\text{II. } \int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \Delta.$$

$$\text{III. } \int \frac{x^{a+3b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \cdot \Delta.$$

$$\text{IV. } \int \frac{x^{a+4b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(x - x^b)^a}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \cdot \frac{a+3b}{4b} \cdot \Delta.$$

etc. etc.

vbi euidens est coëfficientes ipsius Δ prorsus conuenire cum vnciis potestatis binomialis $(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}}$, quippe quae per euolutionem praebet

$$1 + \frac{a}{b} x^b + \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot x^{2b} + \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \cdot x^{3b} + \text{etc.}$$

Problema 2.

§. 15. *Quodsi ponamus breuitatis gratia*

$$(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + A x^b + B x^{2b} + C x^{3b} + \text{etc.}$$

ita vt sit

$$A = \frac{a}{b}, \; B = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b}, \; C = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b}, \text{ etc.}$$

inuestigare summam huius seriei :

$$S = 1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + \text{etc.}$$

Solutio.

Cum igitur sit

$$(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + A x^b + B x^{2b} + C x^{3b} + \text{etc.}$$

multiplicemus vtrinque per $\frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}}$, atque integrando habebimus :

$$\int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^{2a}}} = \int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}} + A \int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}}$$

$$+ B \int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}} + C \int \frac{x^{a+3b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}} + \text{etc.}$$

Omnes autem has formulas integrales per quantitatem Δ exprimere docuimus, qui valores si substituantur, perueniemus ad sequentem seriem :

$$\int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^{2a}}} = \Delta + A.\tfrac{a}{b}\,\Delta + B.\tfrac{a}{b}.\tfrac{a+b}{2b}.\Delta$$

$$+ C.\tfrac{a}{b}.\tfrac{a+b}{2b}.\tfrac{a+2b}{3b}.\Delta \text{ etc.}$$

quae series manifesto reducitur ad hanc :

$$\Delta\,(1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + \text{etc.})$$

vnde seriei nostrae propositae summa quaesita erit

$$S = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^{2a}}},$$

existente $\Delta = \frac{\pi}{b \sin.\frac{a\pi}{b}}$.

Corol-

Corollarium 1.

§. 16. Consideremus hic primo casum quo $b=2$, et quia capi debet $a<b$, fit $a=1$, vnde fit $\Delta=\frac{\pi}{2}$; tum vero pro serie ipsa habebimus $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$, $C=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$, $D=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}$, etc. atque seriei

$$1+A^2+B^2+C^2+D^2+\text{etc.}$$

summa erit $S=\frac{2}{\pi}\int\frac{\partial x}{(1-xx)}$. Est vero $\int\frac{\partial x}{1-xx}=\frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}$, qui valor, posito $x=1$, abit in infinitum. Est vero vtique summa huius seriei:

$$1+(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2+(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2+(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8})^2+\text{etc.}$$

infinite magna, quemadmodum alia occasione ostendi.

Corollarium 2.

§. 17. Consideremus quoque casum $b=3$, sumamusque $a=1$, vt exponens $\frac{2a}{b}=\frac{2}{3}$ etiamnunc sit vnitate minor. Hoc igitur casu pro ipsa serie habebimus: $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}$, $C=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}$, $D=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{10}{12}$, $E=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{13}{15}$, etc. atque ob $\Delta=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, summa seriei $1+A^2+B^2+C^2+$ etc. erit

$$S=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\int\frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},$$

quam ergo nunc exprimere licet per quadraturam curuae algebraicae, cuius abscissae x respondet applicata $y=\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$, pro quo casu methodus primum tradita praebet quadraturam curuae transcendentis.

Scholion.

§. 18. Haec expressio pro summa seriei

$$1+A^2+B^2+C^2+\text{etc.}$$

locum habere nequit, nisi exponens a fuerit positiuus, quo

ergo

ergo casu Binomii $1 - x^b$ potestas est negatiua, ideoque series $1 + A^2 + B^2 + C^2 +$ etc. in infinitum excurrit. Hinc ergo pro vnciis Binomii ad dignitatem positiuam eleuati nihil concludi potest, cum tamen hic casus priore methodo sponte se obtulerit. Deinde cum summa huius seriei inuenta sit

$$S = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^{2a}}}, \text{ existente}$$

$$\Delta = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}};$$

euidens est, si esset $a = b$, quo casu foret $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, etc. tum summam seriei quadratorum manifesto fore infinitam, id quod multo magis eueniret, si esset $a > b$. Quin etiam, si foret $2a = b$, siue $a = \frac{1}{2} b$. in Corollario primo vidimus etiam hanc summam esse infinitam. Quamobrem summatio hic inuenta restringitur ad hos arctos limites 1°. $a > 0$ et 2°. $a < \frac{1}{2} b$. Quemadmodum autem hinc etiam summae definiri queant, quando a est numerus negatiuus, deinceps videbimus.

Problema 3.

§. 19. *Si maneat, vt ante*

$$(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + A x^b + B x^{2b} + C x^{3b} + \text{ etc.}$$

atque insuper ponatur:

$$(1 - x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A} x^b + \mathfrak{B} x^{2b} + \mathfrak{C} x^{3b} + \text{ etc.}$$

ita vt sit

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha}{b}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\alpha + b}{2b}, \quad \mathfrak{C} = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\alpha + b}{2b} \cdot \frac{\alpha + 2b}{3b}, \text{ etc.}$$

inuenire summam seriei ex his binis vnciarum seriebus compositae:

$$S = 1 + \mathfrak{A} A + \mathfrak{B} B + \mathfrak{C} C + \mathfrak{D} D + \text{ etc.}$$

Solu-

Solutio.

Posito vt in antecedente Problemate

$$\int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \Delta,$$

ita vt sit $\Delta = \frac{\pi}{b \sin. \frac{a\pi}{b}}$, si quidem fuerit $a > 0$, reductiones ibi adhibitae dabunt:

$$\int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = A\,\Delta,$$

$$\int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = B\,\Delta,$$

$$\int \frac{x^{a+3b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = C\,\Delta,$$

$$\int \frac{x^{a+4b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = D\,\Delta,$$

etc. etc.

Cum igitur sit

$$(1-x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A}\,x^b + \mathfrak{B}\,x^{2b} + \mathfrak{C}\,x^{3b} + \text{etc.}$$

si vtrinque multiplicemus per $\frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$ et integremus a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$, perueniemus ad sequentem seriem:

$$\int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = \Delta + \mathfrak{A}\,A\,\Delta + \mathfrak{B}\,B\,\Delta + \mathfrak{C}\,C\,\Delta + \text{etc.}$$

 quae

quae eſt ipſa ſeries quaeſita per Δ multiplicata, ideoque eius ſumma $= \Delta\, S$. Hinc ergo viciſſim concludimus fore

$$S = 1 + \mathfrak{A} A + \mathfrak{B} B + \mathfrak{C} C + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a-1}\, \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}}.$$

Haec autem ſummatio pariter locum habere nequit, niſi ſit $a > 0$. At vero circa exponentem α hic nobis nihil praeſcribitur; vnde pro eo tam numeros poſitiuos quam negatiuos accipere licebit. Id tantum hic obſeruandum occurrit: niſi fuerit $a + \alpha < b$, ſummam ſeriei propoſitae ſemper eſſe infinite magnam.

Corollarium 1.

§. 20. Quoniam a contineri debet intra limites 0 et b, ſumamus $b = 2$, capique oportet $a = 1$, vnde fit $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$, $C = \frac{1.3.5}{2.4.6}$, $D = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$, etc. praeterea vero habebimus:

$$\Delta = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}.$$

Hinc igitur, quicunque valor ipſi α tribuatur, ſeriei quaeſitae

$$S = 1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A} + \tfrac{1.3}{2.4}\mathfrak{B} + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{C} + \text{etc.}$$

ſumma erit

$$S = \frac{2}{\pi} \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)^{1+\alpha}}}.$$

Vnde patet, dummodo fuerit $1 + \alpha < 2$, ideoque $\alpha < 1$, ſummam ſemper fore finitam.

Corollarium 2.

§. 21. Manente igitur $a = 1$ et $b = 2$, quia debet eſſe $\alpha < 1$, quosdam caſus euoluamus.

I.

I. Sit $\alpha = 0$.

Hinc fiet $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, etc. ficque feries fummanda erit $S = 1$, noftra autem formula praebet $S = \frac{2}{\pi}\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$. Eft vero pro terminis fummationis praefcriptis $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}$, vnde fit $S = 1$, id quod egregie conuenit.

II. Sit $\alpha = -1$.

Hoc cafu fiet $\mathfrak{A} = -\frac{1}{2}$, $\mathfrak{B} = -\frac{1.1}{2.4}$, $\mathfrak{C} = -\frac{1.1.3}{2.4.6}$, etc. vnde feries fummanda erit

$$S = 1 - \frac{1.1}{2.2} - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1.1}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} - \text{etc.}$$

At vero noftra formula praebet

$$S = \frac{2}{\pi}\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)^0}} = \frac{2}{\pi},$$

quae fumma egregie conuenit cum ea, quam ex formulis integralibus logarithmicis eruimus.

III. Sit $\alpha = -2$.

Fiet hic $\mathfrak{A} = -1$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, etc. Series ergo fummanda erit $S = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; formula vero noftra integralis praebet $S = \frac{2}{\pi}\int \partial x \sqrt{(1-xx)}$. Iam vero ex Corollario Lemmatis tertii habemus hanc reductionem:

$$\int x^{a-1}\partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{c}{a+c}\int x^{a-1}\partial x (1-x^b)^{\frac{c}{b}-1},$$

quae, ad noftrum cafum accommodata, ponendo $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, dat

$$\int \partial x \sqrt{(1-xx)} = \frac{1}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

hinc ergo fit $S = \frac{1}{2}$.

IV. Sit $\alpha = -3$.

Hoc ergo cafu fiet

$\mathfrak{A} = -\frac{3}{2}$, $\mathfrak{B} = +\frac{3.1}{2.4}$, $\mathfrak{C} = \frac{3.1.1}{2.4.6}$, $\mathfrak{D} = \frac{3.1.1.3}{2.4.6.8}$, $\mathfrak{E} = \frac{3.1.1.3.5}{2.4.6.8.10}$, etc.

vnde

vnde feries fummanda erit

$$S = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{3.1}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{3.1.1}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{3.1.1.3}{2.4.6.8} + \text{etc.}$$

at vero formula noftra integralis praebet:

$$S = \frac{2}{\pi} \int \partial x (1 - x x).$$

Eft vero pro terminis fummationis ftabilitis $\int \partial x (1 - x x) = \frac{2}{3}$, quamobrem fumma quaefita erit $S = \frac{4}{3\pi}$.

V. Sit $\alpha = -4$.

Hoc ergo cafu fiet

$$\mathfrak{A} = -2, \mathfrak{B} = 1, \mathfrak{C} = 0, \mathfrak{D} = 0, \text{etc.}$$

vnde feries fummanda erit

$$S = 1 - 1 + \frac{1.3}{2.4} = \frac{1.3}{2.4} = \frac{3}{8},$$

at vero formula integralis praebet:

$$S = \frac{2}{\pi} \int \partial x \sqrt{(1 - x x)^3} = \frac{2}{\pi} \int \partial x (1 - x x)^{\frac{3}{2}}.$$

Nunc vero per reductionem cafu III. adhibitam, fumto $a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$, habebimus

$$\int \partial x (1 - x x)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} \int \partial x \sqrt{(1 - x x)}.$$

Vidimus autem effe $\int \partial x \sqrt{(1 - x x)} = \frac{\pi}{4}$, vnde erit

$$\int \partial x (1 - x x)^{\frac{3}{2}} = \frac{3\pi}{16},$$

ex quo colligitur fumma quaefita $S = \frac{3}{8}$, id quod egregie convenit.

Problema 4.

§. 22. *Retentis litteris tam Latinis A, B, C, D, etc. quam Germanicis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. et iisdem valoribus, quos ipfis in praecedente problemate affignauimus, inueftigare fummas fequentium ferierum ex illis compofitarum:*

$S' =$

$$S' = A + \mathfrak{A} B + \mathfrak{B} C + \mathfrak{C} D + \mathfrak{D} E + \text{etc.}$$
$$S'' = B + \mathfrak{A} C + \mathfrak{B} D + \mathfrak{C} E + \mathfrak{D} F + \text{etc.}$$
$$S''' = C + \mathfrak{A} D + \mathfrak{B} E + \mathfrak{C} F + \mathfrak{D} G + \text{etc.}$$
etc. etc.

Solutio.

Pofito iterum $\Delta = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$, in praecedente problemate vidimus effe

$$\int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = A \Delta,$$
$$\int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = B \Delta,$$
$$\int \frac{x^{a+3b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = C \Delta.$$
etc. etc.

Cum iam pofuerimus

$$(1-x^b)^{\frac{-\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A} x^b + \mathfrak{B} x^{2b} + \mathfrak{C} x^{3b} + \text{etc.}$$

multiplicemus vtrinque ftatim per $\frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$, et integrando nancifcemur fequentem formam:

$$\int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = A\Delta + \mathfrak{A} B \Delta + \mathfrak{B} C \Delta + \mathfrak{C} D \Delta + \mathfrak{D} E \Delta + \text{etc.}$$

quae feries manifefto eft $= \Delta S'$. Hinc ergo concludimus fore

 $S' =$

$$S' = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}},$$

vbi, vt hactenus, est

$$\Delta = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{\pi}{b \sin. \frac{a\pi}{b}}.$$

Pro secunda serie inuenienda multiplicetur forma illa:

$$(1 - x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A} x^b + \mathfrak{B} x^{2b} + \mathfrak{C} x^{3b} + \text{etc.}$$

per formulam $\frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$, et singulis terminis integratis deducemur ad sequentem formam:

$$\int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = B\Delta + \mathfrak{A} C\Delta + \mathfrak{B} D\Delta + \mathfrak{C} E\Delta + \mathfrak{D} F\Delta + \text{etc.}$$

quae est secunda series proposita in Δ ducta, ideoque $\Delta S''$, vnde concludimus fore

$$S'' = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}}.$$

Ex his iam satis perspicitur, quomodo omnium sequentium serierum propositarum summae assignari queant: reperitur enim vt sequitur:

$$S''' = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+3b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}};$$

$$S^{IV} = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+4b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}};$$

$$S^{V} = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+5b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}};$$

etc.

hinc

hincque porro in genere concluditur fore

$$S^{(n)} = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+nb-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}}.$$

Verum hic adhuc conditio ſupra praeſcripta locum habet, qua valor exponentis a inter limites o et b contineri debet. Deinde vero circa exponentem α pariter notari oportet, has ſummas finitas eſſe non poſſe, niſi ſit $\alpha + a < b$. Quamobrem nunc diſpiciamus, quemadmodum has ſummationes etiam ad alios valores exponentis a accommodari conveniat.

Problema 5.

§. 23. *Si exponens* a *fuerit numerus negatiuus, minor tamen quam* b, *ita vt ſit* $a + b > 0$, *inuenire ſummam ſeriei*

$$S = 1 + \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \mathfrak{D}D + \text{etc.}$$

vbi litterae maiuſculae eosdem habeant valores vt hactenus, ſcilicet:

$$(1-x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + Ax^b + Bx^{2b} + Cx^{3b} + Dx^{4b} + \text{etc.}$$

$$(1-x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \mathfrak{D}x^{4b} + \text{etc.}$$

Solutio.

Cum exponens $a + b$ ſit poſitiuus, reductiones ſupra §. 12. exhibitas a ſecunda inchoemus, ac iam ponamus: $\int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \Delta'$, vnde reductiones ſupra exhibitae reuocabuntur ad ſequentes:

$$\int \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a+b}{2b}\Delta' = \frac{b}{a}\,B\,\Delta',$$

$$\int \frac{x^{a+3b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a+b}{2b}\cdot\frac{a+2b}{3b}\Delta' = \frac{b}{a}\,C\,\Delta',$$

$$\int \frac{x^{a+4b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a+b}{2b}\cdot\frac{a+2b}{3b}\cdot\frac{a+3b}{4b}\Delta' = \frac{b}{a}\,D\,\Delta',$$

$$\int \frac{x^{a+5b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a+b}{2b}\cdot\frac{a+2b}{3b}\cdot\frac{a+3b}{4b}\cdot\frac{a+4b}{5b}\Delta' = \frac{b}{a}\,E\,\Delta'.$$

etc. etc.

His praenotatis confideremus hanc aequationem:

$$(1-x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} - 1 = \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \mathfrak{D}x^{4b} + \text{etc.}$$

quam per $\dfrac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$ multiplicemus et integremus, atque obtinebimus fequentem aequationem:

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} - \int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$$
$$= \mathfrak{A}\Delta' + \frac{b}{a}\mathfrak{B}\,B\,\Delta' + \frac{b}{a}\mathfrak{C}\,C\,\Delta' + \frac{b}{a}\mathfrak{D}\,D\,\Delta' + \text{etc.}$$

vbi loco primi termini $\mathfrak{A}\Delta'$ fcribamus $\frac{b}{a}\mathfrak{A}\,A\,\Delta'$, vt feries ad hanc formam redigatur:

$$\frac{b}{a}\Delta'(\mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \mathfrak{D}D + \text{etc.}) = \frac{b}{a}\Delta'(S-1).$$

Quo-

Quoniam autem exponens a ſupponitur negatiuus, vnde ambae formulae integrales euaderent infinitae, vtamur reductione in Lemmate I. tradita:

$$\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \tfrac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \tfrac{c}{a}\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1},$$

et facta applicatione ad priorem formulam integralem, ſumendo $c = -a - \alpha$, erit

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = \tfrac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{-a-\alpha}{b}}$$

$$- \tfrac{(a+\alpha)}{a}\int x^{a+b-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{-a-\alpha-b}{b}}.$$

Pro altera autem formula noſtra integrali ſumi debet $c = -a$, fietque

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \tfrac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{-a}{b}} \int x^{a+b-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{-a-b}{b}}.$$

Cum iam exponens $a+b$ ſit poſitiuus, per reductionem in Corollario Lemmatis III. quae erat

$$\int x^{a-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \tfrac{a+c}{c}\int x^{a-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}},$$

pro caſu poſterioris formulae habebimus

$$\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{-a-b}{b}} = -\tfrac{b}{a}\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{-a}{b}} = -\tfrac{b}{a}\Delta',$$

ſicque formula noſtra integralis poſterior ita exprimetur, vt ſit

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \tfrac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{-a}{b}} + \tfrac{b}{a}\Delta',$$

qui valor a priore formula integrali ſubtractus relinquit pro parte ſiniſtra hanc expreſſionem:

$$\tfrac{1}{a} x^a (1 - x^b)^{\frac{-a-\alpha}{b}} - \tfrac{(a+\alpha)}{b} \int \frac{x^{a+b-1}\, \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+\beta}}};$$

$$- \tfrac{1}{a} x^a (1 - x^b)^{\frac{-a}{b}} - \tfrac{b}{a} \Delta'.$$

Hic quidem, quoniam a ſupponitur negatiuum, vtrumque membrum abſolutum, poſito $x = 0$, abit in infinitum; at bina coniunctim ita repraeſententur:

$$\tfrac{1}{a} x^a (1 - x^b)^{\frac{-a}{b}} [(1 - x^b)^{\frac{-\alpha}{b}} - 1],$$

quae forma, ſumto x infinite paruo, ob $(1-x^b)^{\frac{\alpha}{b}} = 1 + \frac{\alpha}{b} x^b$, etc. transmutatur in hanc: $\frac{\alpha}{ab} x^{a+b} (1 - x^b)^{\frac{-a}{b}}$, quae ob $a + b > 0$, facto $x = 0$, vtique euaneſcit, prouti conditio integrationis poſtulat. Poſito autem $x = 1$ quoque totum membrum abſolutum euaneſcit; quamobrem pro membro dextro noſtrae aequationis habebimus:

$$- \tfrac{b}{a} \Delta' - (\tfrac{a+\alpha}{a}) \int \frac{x^{a+b-1}\, \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+\beta}}},$$

cui ſi membrum ſiniſtrum $\frac{b}{a} \Delta' (S - 1)$ aequale ponatur, impetrabimus iſtum valorem:

$$S = - \frac{(a+\alpha)}{b\,\Delta'} \int \frac{x^{a+b-1}\, \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+\beta}}},$$

quae expreſſio iam pro omnibus caſibus valet, quibus $a + b$ eſt numerus poſitiuus.

Corollarium 1.

§. 24. Quoniam in paragrapho praecedente inuenimus:

$$\int \frac{x^{a+b-1}\, \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}} = - \frac{b}{a} \Delta',$$

notum

notum eſt iſtius formulae integralis valorem, ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſum, reduci ad hanc formam: $\frac{\pi}{b \sin. \frac{(a+b)}{b} \pi}$, vnde innoteſcit quantitas charactere Δ' contenta, quippe quae erit $\Delta' = \frac{-\pi a}{b b \sin. \frac{(a+b)}{b} \pi}$, qui valor ita reducitur:

$$\Delta' = \frac{\pi a}{b b \sin. \frac{a \pi}{b}}$$

Corollarium 2.

§. 25. Reſtituamus autem loco Δ' ipſam formulam integralem, vnde prodiit, atque ſumma inuenta S hoc modo per binas formulas integrales exprimetur:

$$S = -\frac{(a+\alpha)}{b} \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}} : \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}},$$

quae etiam hoc modo exprimi poteſt:

$$S = \frac{(a+\alpha)}{a} \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}} : \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}},$$

quae expreſſio ergo valet, quando $a + b > 0$, etiamſi forte a ſit negatiuum; at vero pro caſibus, quibus exponens a ipſe eſt negatiuus, pro eadem ſerie inuenimus ſummam

$$S = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} : \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}.$$

Corollarium 3.

§. 26. Quodſi has binas formas accuratius perpendamus, mox deprehendemus, formam hic inuentam ex praecedente

dente facile deriuari posse ope reductionis prioris in Corollario Lemmatis primi monstratae, vbi erat

$$\int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{c}{a} \int x^{a+b-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1}.$$

Quodsi enim hanc reductionem applicemus ad formam supra pro S inuentam, pro numeratore erit $c = -a - \alpha$, vnde ipse numerator hoc modo transmutatur:

$$\int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^{a+\alpha}}} = -\frac{(a+\alpha)}{a} \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^{a+\alpha+\beta}}}.$$

Deinde vero pro denominatore erit $c = -a$, ideoque ipse denominator:

$$\int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}} = -\int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^{a+b}}};$$

vbi euidens est, si numerator per denominatorem diuidatur, eum ipsum valorem resultare, quem hoc problemate sumus nacti.

Scholion.

§. 27. Quamquam igitur expressio supra inuenta pro summatione seriei:

$$S = 1 + \mathfrak{A} A + \mathfrak{B} B + \mathfrak{C} C + \text{etc.}$$

quae ita se habet:

$$S = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^{a+\alpha}}} : \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}},$$

tantum valet pro casibus quibus $a > 0$, tamen ex ea facile immediate deduci potuisset expressio pro S hic inuenta, quae etiam valet, dummodo fuerit $a + b > 0$, quam hic non sine longis ambagibus sumus adepti; at vero ratio hic difficulter perspicitur, ob quam tali reductione vti liceat, quandoquidem reduc-

reductio §. 7. tradita subsistere nequit, nisi exponens a fuerit positiuus, propterea quod pars absoluta est neglecta, vnde vtique reductio tam numeratoris quam denominatoris seorsim spectata foret erronea; verum ambo errores, tam in numeratore quam in denominatore commissi, feliciter se mutuo compensant. Quamobrem hac noua methodo tuto vti poterimus, quando exponenti a adhuc maiores valores negatiui tribuuntur.

Problema 6.

§. 25. *Retineant litterae maiusculae, tam Latinae quam Germanicae, eosdem valores, quos ipsis hactenus assignauimus, definire summam seriei:*

$$S = 1 + \mathfrak{A}\,A + \mathfrak{B}\,B + \mathfrak{C}\,C + \mathfrak{D}\,D + \text{etc.}$$

quando exponens a *valores negatiuos quantumuis magnos accipit.*

Solutio.

Pro casibus, quibus exponens a est positiuus, summa istius seriei ita exprimitur, vt sit

$$S = \int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} : \int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a}}}.$$

Deinde vero pro valoribus negatiuis ipsius a, si modo fuerit $a + b > 0$, per reductionem §. 7. modo inuenimus:

$$S = \left(\frac{a+\alpha}{a}\right) \int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+\beta}}} : \int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}}.$$

Sin autem demum formula $a + 2b$ fiat positiua, reductionem expositam ad formam proxime praecedentem applicemus, sumique debebit $a = a + b$ et $c = -a - \alpha - b$, pro numeratore; at vero pro denominatore $c = -a - b$; vnde reperitur

$$\int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}} = -\frac{(a+\alpha+b)}{a+b}\int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+2b}}} \text{ et}$$

$$\int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}} = -\int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+2b}}},$$

quibus valoribus in poſtrema expreſſione pro S ſubſtitutis, pro caſu $a + 2b > 0$, reperiemus

$$S = \frac{a+\alpha}{a} \cdot \frac{a+\alpha+b}{a+b}\int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+2b}}} : \int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+2b}}}.$$

Sin autem $a + 3b$ poſitiuum obtineat valorem, ſimilis reductio perducet ad ſequentem expreſſionem:

$$S = \frac{a+\alpha}{a} \cdot \frac{a+\alpha+b}{a+b} \cdot \frac{a+\alpha+2b}{a+2b}\int \frac{x^{a+3b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+3b}}} : \int \frac{x^{a+3b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+3b}}}.$$

Similique modo ſi demum formula $a + 4b$ ad poſitiuum valorem aſſurgat, ſumma quaeſita reperietur

$$S = \frac{a+\alpha}{a} \cdot \frac{a+\alpha+b}{a+b} \cdot \frac{a+\alpha+2b}{a+2b} \cdot \frac{a+\alpha+3b}{a+3b}\int \frac{x^{a+4b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+4b}}} : \int \frac{x^{a+4b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+4b}}}.$$

In omnibus his formulis denominatores ad arcum circularem ſe reduci patiuntur. Cum enim forma generalis denominatorum ſit $\int \frac{x^{a+nb-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x)^{a+nb}}}$, per ea quae ſupra ſunt oſtenſa patet eius valorem eſſe $\frac{\pi}{b\,\text{ſin.}\,(\frac{a+nb}{b})\,\pi}$; vbi cum ſit ſin. $(\frac{a+nb}{b})\,\pi = \text{ſin.}\,(n\pi + \frac{a}{b}\pi)$, euidens eſt caſibus, quibus n eſt numerus par, fore denominatorem $= \frac{\pi}{b\,\text{ſin.}\,\frac{a\pi}{b}}$; caſibus autem, quibus n eſt numerus impar, denominator erit: $= \frac{-\pi}{b\,\text{ſin.}\,\frac{a\pi}{b}}$.

Caete-

Caeterum omnes iſtae formulae prorſus inter ſe conuenire ſunt cenſendae, quoniam omnes ex prima per reductiones ſupra traditas ſunt deductae, ſi modo partes abſolutae negligantur. Tanta enim eſt vis harum formularum, vt, etiamſi reductiones iſtae tam pro numeratore quam denominatore ſeorſim ſumtae falſae eſſent futurae, tamen hi duo errores ſe mutuo iterum deſtruant.

Exemplum.

§. 29. Sumamus $b = 2$, ſitque $a = -5$ et $\alpha = -4$, vnde hae ſeries naſcuntur:

$$(1 - xx)^{\frac{5}{2}} = 1 - \tfrac{5}{2} xx + \tfrac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 - \tfrac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 - \tfrac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^8 - \tfrac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} x^{10} - \text{etc. et}$$

$$(1 - xx)^2 = 1 - 2xx + x^4,$$

vnde ſeries ſummanda erit

$$S = 1 + 5 + \tfrac{15}{8} = \tfrac{63}{8}.$$

Iam quoniam hic demum $a + 3b$ fit quantitas poſitiua, nempe $a + 3b = 1$, vtendum erit formula ſecunda, vnde colligitur:

$$S = \frac{9 \cdot 7 \cdot 5}{5 \cdot 3 \cdot 1} \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - xx)^{-3}}} : \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

vbi denominator eſt $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{\pi}{2}$; at vero numerator eſt $\int \partial x \sqrt{(1 - xx)^3}$, quae formula per reductionem priorem §. 10. poſito $a = 1$ et $b = 2$ praebet:

$$\int \partial x (1 - xx)^{\frac{c}{2}} = \tfrac{c}{1 + c} \int \partial x (1 - xx)^{\frac{c}{2} - 1},$$

vnde ob $c = 3$ fiet

$$\int \partial x (1 - xx)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{4} \int \partial x (1 + xx)^{\frac{1}{2}}.$$

Porro autem quia hic $c = 1$, erit

$$\int \partial x (1 - xx)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - xx)}} = \tfrac{\pi}{4},$$

vnde pro numeratore habebimus:

$$\int \partial x (1 - xx)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3\pi}{16},$$

quibus valoribus substitutis summa quaesita prodit:

$$S = \frac{9.7.5}{5.3.1} \cdot \tfrac{3\pi}{16} : \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{63}{8},$$

id quod egregie conuenit cum vera summa.

Alia methodus
earundum serierum summas inueniendi.

§. 30. Praecedentes summas elicuimus ex ipsa indole serierum, qua singuli termini sunt producta ex binis vnciis duarum potestatum Binomii. Quoniam autem non ita pridem (*) demonstraui, si series ita formetur, vt sit

$$S = 1 + \left(\tfrac{m}{1}\right)\left(\tfrac{n}{1}\right) + \left(\tfrac{m}{2}\right)\left(\tfrac{n}{2}\right) + \left(\tfrac{m}{3}\right)\left(\tfrac{n}{3}\right) + \left(\tfrac{m}{4}\right)\left(\tfrac{n}{4}\right) + \text{etc.}$$

tum fore $S = \left(\frac{m+n}{m}\right)$, vel etiam $S = \left(\frac{m+n}{n}\right)$, cuius valor more solito euolutus praebet:

$$S = \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2} \cdot \frac{m+n-2}{3} \cdot \frac{m+n-3}{4} \cdot \ldots\ldots \frac{m+1}{n},$$

qui ergo valor, quoties m et n sunt numeri integri, semper facile assignari potest. Quando autem pro his numeris fractiones accipiuntur, huius expressionis valorem sequenti modo per formulas integrales exhibui, vt sit

$$S = \frac{\int u^{m+1} \partial x}{\int u^m \partial x . \int u^n \partial x},$$

existente $u = l\frac{1}{x}$, tum vero integralibus ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extensis.

§. 31. Ista autem expressio ad nostrum institutum non satis idonea videtur, propterea quod quadraturas curuarum transcendentium inuoluit; at vero, re penitius considerata, inueni valo-

(*) V. Acta Acad. Imp. Sc. pro anno 1781. P. I. pag. 94 et 95.

valorem eiusdem formulae $(\frac{m+n}{n})$ etiam posse ad quadraturas curuarum algebraicarum reuocari, quae adeo simpliciores prodierunt quam illae, quas methodo praecedenti sumus adepti, neque etiam eo incommodo laborant, vt pro diuersis exponentibus alias atque alias reductiones postulent. Hanc igitur nouam methodum hic clarius sum expositurus.

§. 32. Haec autem methodus deducta est ex reductionibus supra §. 12. allatis, vbi posuimus

$$\Delta = \int x^{a-1} \partial x \, (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1}.$$

Hic autem sumamus statim $b = 1$ et $a = 1$, ita vt sit:

$$\Delta = \int \partial x \, (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c},$$

tum autem reductiones §. 12. allatae sequenti modo se habebunt:

$$\int x \partial x \, (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c+1} \cdot \Delta,$$

$$\int x x \partial x \, (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c+1} \cdot \frac{2}{c+2} \cdot \Delta,$$

$$\int x^3 \partial x \, (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c+1} \cdot \frac{2}{c+2} \cdot \frac{3}{c+3} \cdot \Delta,$$

$$\int x^4 \partial x \, (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c+1} \cdot \frac{2}{c+2} \cdot \frac{3}{c+3} \cdot \frac{4}{c+4} \cdot \Delta,$$

etc. etc.

vnde concluditur in genere fore:

$$\int x^\lambda \partial x \, (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c+1} \cdot \frac{2}{c+2} \cdot \frac{3}{c+3} \cdots\cdots \frac{\lambda}{c+\lambda} \cdot \Delta.$$

§. 33. Quodsi iam postrema formula inuertatur, reperietur

$$\frac{\Delta}{\int x^\lambda \partial x \, (1 - x)^{c-1}} = \frac{c+1}{1} \cdot \frac{c+2}{2} \cdot \frac{c+3}{3} \cdot \frac{c+4}{4} \cdots\cdots \frac{c+\lambda}{\lambda},$$

hoc autem productum, si numeratores ordine inuerso scribantur, hanc induet formam:

$$\frac{c+\lambda}{1} \cdot \frac{c+\lambda-1}{2} \cdot \frac{c+\lambda-2}{3} \cdot \frac{c+\lambda-3}{4} \cdots\cdots \frac{c+1}{\lambda},$$

 quam

quamobrem cum ſumma quaeſita $S = (\frac{m+n}{n})$ euoluta dederit

$$S = \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2} \cdot \frac{m+n-2}{3} \cdot \ldots \ldots \frac{m+1}{n},$$

illa forma manifeſto in hanc transformatur, ſumendo $c = m$ $\lambda = n$, ex quibus fit $\Delta = \frac{1}{m}$, et ipſa ſumma quaeſita exprimetur hoc modo: $S = \frac{1}{m \int x^n \partial x (1-x)^{m-1}}$, atque cum ambos numeros m et n inter ſe permutare liceat, erit etiam

$$S = \frac{1}{m \int x^m \partial x (1-x)^{n-1}}.$$

§. 34. Haec expreſſio, quoties m et n ſunt numeri integri, manifeſto veram ſummam ſuppeditat. Sit exempli gratia $m = 4$ et $n = 3$, et quia

$$(1+z)^4 = 1 + 4z + 6zz + 4z^3 + z^4 \text{ et}$$
$$(1+z)^3 = 1 + 3z + 3zz + z^3,$$

erit ſeries ſummanda $S = 1 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 35$. At vero per formulam integralem priorem habemus $S = \frac{1}{4 \int x^3 \partial x (1-x)^3}$, per formulam autem poſteriorem erit $S = \frac{1}{3 \int x^4 \partial x (1-x)^2}$. Eſt vero pro priore $\int x^3 \partial x (1-x)^3 = \frac{1}{140}$, pro altera vero eſt

$$\int x^4 \partial x (1-x)^2 = \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1}{105},$$

ita vt ex vtraque formula prodeat $S = 35$.

§. 35. In reductionibus quidem, vnde has expreſſiones hauſimus, integralia ita accipi aſſumſimus, vt a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extendantur. Verum hic eadem circumſtantia commode vſu venit, quam in praecedente ſolutione obſeruauimus, quod formula hic inuenta etiam locum obtineat, etiamſi exponentes fuerint negatiui, quibus quippe caſibus eam regulam obſeruare non licet; namque hic etiam gemini

mini errores se mutuo destruunt. Ita si fuerit $m = -4$ et $n = 3$, fiet

$$(1+z)^{-4} = 1 - 4z + 10zz - 20z^3 + 35z^4 - 56z^5 + \text{etc. et}$$
$$(1+z)^3 = 1 + 3z + 3zz + z^3,$$

sicque series summanda erit

$$S = 1 - 3.4 + 3.10 - 1.20 = -1.$$

At vero posterior formula integralis dat $S = \frac{1}{3\int \frac{\partial x}{x^4}(1-x)^2}$.

Est vero

$$\int \frac{\partial x}{x^4}(1-x)^2 = \frac{-1}{3x^3} + \frac{2}{2xx} - \frac{1}{x},$$

quae expressio euanescit facto $x = \infty$, ea vero posito $x = 1$ dat $-\frac{1}{3}$. Sin autem ambo numeri m et n sumerentur negatiui, summa seriei manifesto fieret infinita.

§. 36. Cum autem casus, quibus m et n sunt numeri integri, nullam difficultatem pariant, vsus praecipuus nostrae formulae tum locum habebit, quando numeri m et n sunt fracti. Ita si fuerit $m = \frac{1}{2}$ et $n = \frac{1}{2}$, ob

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1.1}{2.4}zz + \frac{1.1.3}{2.4.6}z^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}z^4 + \text{etc. et}$$
$$(1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.4}zz - \frac{1.3.5}{2.4.6}z^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}z^4 - \text{etc.}$$

erit series summanda:

$$S = 1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4}.\frac{1.3}{2.4} - \frac{1.1.3}{2.4.6}.\frac{1.3.5}{2.4.6} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \text{etc.}$$

At vero formula integralis prior nobis dat $S = \frac{2}{\int \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)}}}$. Iam vero posito $x = yy$, fit

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{\partial y}{\sqrt{(1-yy)}} = \pi,$$

ita

ita vt hinc fiat $S = \frac{2}{\pi}$, quam fummam iam fupra pro eodem cafu inuenimus.

§. 37. Pro aliis cafibus plurimum iuuabit reductiones fupra expofitas in vfum vocare, quod quo facilius fieri poffit confideremus hanc formam generalem: $\int x^q \partial x (1-x)^r$, atque fex illae reductiones fupra in Corollariis Lemmatum allatae praebebunt fequentes:

$$\text{I. } \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{r}{q+1} \int x^{q+1} \partial x (1-x)^{r-1},$$

$$\text{II. } \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{q}{r+1} \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{r+1},$$

$$\text{III. } \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{q+r+2}{q+1} \int x^{q+1} \partial x (1-x)^r,$$

$$\text{IV. } \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{q}{q+r+1} \int x^{q-1} \partial x (1-x)^r,$$

$$\text{V. } \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{r}{q+r+1} \int x^q \partial x (1-x)^{r-1},$$

$$\text{VI. } \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{q+r+2}{r+1} \int x^q \partial x (1-x)^{r+1}.$$

§. 38. Ope harum reductionum prior expreffio pro fumma inuenta $S = \frac{1}{m \int x^n \partial x (1-x)^{m-1}}$, vbi $q = n$ et $r = m-1$, in fequentes fex formas transfundi poterit:

$$\text{I. } S = \frac{n+1}{m(m-1) \int x^{n+1} \partial x (1-x)^{m-2}},$$

$$\text{II. } S = \frac{1}{n \int x^{n-1} \partial x (1-x)^m},$$

$$\text{III. } S = \frac{n+1}{m(m+n+1) \int x^{n+1} \partial x (1-x)^{m-1}},$$

$$\text{IV. } S = \frac{m+n}{m n \int x^{n-1} \partial x (1-x)^{m-1}},$$

V.

$$\text{V. } S = \frac{m+n}{m(m-1)\int x^n \partial x (1-x)^{m-2}},$$

$$\text{VI. } S = \frac{1}{(m+n+1)\int x^n \partial x (1-x)^m}.$$

quae eaedem formae etiam ex posteriore sequuntur.

§. 39. Reductiones autem istae semper ita in vsum trahi possunt, vt in formula integrali ambo exponentes ipsius x et $1-x$ intra terminos o et -1 redigantur, quippe quae formae praecipue considerari solent. Ita si fuerit $m = \frac{7}{2}$ et $n = 4$, hinc fiet:

$$(1+z)^{\frac{7}{2}} = 1 + Az + Bzz + Cz^3 + \text{etc. et}$$
$$(1+z)^4 = 1 + 4z + 6zz + 4z^3 + z^4$$

ita vt series summanda sit $S = 1 + 4A + 6B + 4C + D$; at vero erit $S = \frac{2}{7\int x^4 \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}}}$, vbi $q = 4$ et $r = \frac{5}{2}$. Primo ergo exponentem q vsque ad nihilum deprimere poterimus, id quod ope reductionis IV fit, hinc enim erit

$$\int x^4 \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \tfrac{8}{15}\int x^3 \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}};$$

porro vero

$$\int x^3 \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \tfrac{6}{13}\int xx \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}};$$

deinde

$$\int xx \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \tfrac{4}{11}\int x \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}};$$

denique

$$\int x \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \tfrac{2}{9}\int x \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}};$$

ſicque iam habemus:

$$S = \frac{2.\ 15.\ 13.\ 11.\ 9}{7.\ 8.\ 6.\ 4.\ 2 \int \partial x\, (1-x)^{\frac{5}{2}}}.$$

§. 40. Cum porro r ſit $= \frac{5}{2}$, deprimetur hic exponens per reductionem V, vnde ob $q = 0$ et $r = \frac{5}{2}$, fit

$$\int \partial x\, (1-x)^{\frac{5}{2}} = \tfrac{5}{7} \int \partial x\, (1-x)^{\frac{3}{2}};$$

eodem modo erit

$$\int \partial x\, (1-x)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{5} \int \partial x\, (1-x)^{\frac{1}{2}};$$

denique

$$\int \partial x\, (1-x)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3} \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x)}};$$

ex quibus conficitur:

$$S = \frac{2.\ 15.\ 13.\ 11.\ 9.\ 7.\ 5.\ 3}{7.\ 8.\ 6.\ 4.\ 2.\ 5.3.\ 1 \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x)}}}.$$

Eſt vero

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x)}} = 2 - 2\sqrt{(1-x)},$$

ſicque eius valor erit $= 2$, et euoluto calculo reperietur $S = \frac{6435}{128}$.

§. 41. Cum iam fuerit $m = \frac{7}{2}$, erit

$$A = \tfrac{7}{2},\ B = \tfrac{7.5}{2.4},\ C = \tfrac{7.5.3}{2.4.6},\ D = \tfrac{7.5.3.1}{2.4.6.8},$$

ita vt noſtra ſeries ſummanda ſit:

$$S = 1 + 14 + \tfrac{105}{4} + \tfrac{35}{4} + \tfrac{35}{128} = \tfrac{6435}{128},$$

id quod egregie conuenit cum ſumma ante inuenta.

§. 42. Quod porro ad eas ſeries attinet, quas per terminum generalem $(\frac{m}{x})\,(\frac{n}{p+x})$ indicauimus, vbi loco x ordine

dine ſcribendi ſunt numeri 0, 1, 2, 3, 4, etc. ita vt ſit $S = \int (\frac{m}{x}) (\frac{n}{p + x})$, oſtendi fore $S = (\frac{m + n}{m + x})$ vel etiam $S = (\frac{m + n}{n - p})$; vnde patet hanc ſummam eandem fore, ac ſi ſeries propoſita eſſet $(\frac{m + p}{x}) (\frac{n - p}{x})$. Quamobrem ad hanc ſummam formulae noſtrae ſupra datae accommodabuntur, ſi in iis loco litterarum m et n ſcribantur hi valores, $m + p$ et $n - p$, ſicque ex priore formula haec ſumma erit:

$$S = \frac{1}{(m + p) \int x^{n-p} \partial x (1 - x)^{m+p-1}},$$

ex poſteriore autem erit:

$$S = \frac{1}{(n - p) \int x^{m+p} \partial x (1 - x)^{n-p-1}},$$

ſicque totum hoc argumentum ad finem perductum eſt cenſendum.

§. 42. Vnicum tantum caſum hic adieciſſe operae erit pretium, quo $m + n = 1$, ideoque $m = 1 - n$, eritque ſumma ſeriei ex formula IV. §. 38.

$$S = \frac{1}{n (1 - n) \int \frac{x^{n-1} \partial x}{(1 - x)^n}},$$

quod integrale commode per arcum circuli exprimi poterit: erit enim $\int \frac{x^{n-1} \partial x}{(1 - x)^n} = \frac{\pi}{\text{ſin.}\, n \pi}$, ita vt ſumma ſeriei propoſitae ſit $S = \frac{\text{ſin.}\, n \pi}{m n \pi}$. Vnde ſi fuerit $m = \frac{1}{2}$ et $n = \frac{1}{2}$, erit $S = \frac{4}{\pi}$, quae eſt ſumma ſeriei:

$$1 + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1.1}{2.4})^2 + (\tfrac{1.1.3}{2.4.6})^2 + (\tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8})^2 + \text{etc.}$$

vti iam ſupra notauimus. Deinde ſi ſumamus $m = \frac{1}{3}$ et $n = \frac{2}{3}$ ob

$$(1+z)^{\frac{1}{3}} = 1 + \tfrac{1}{3}z - \tfrac{1.2}{3.6}zz + \tfrac{1.2.5}{3.6.9}z^3 - \text{etc. et}$$

$$(1+z)^{\frac{2}{3}} = 1 + \tfrac{2}{3}z - \tfrac{2.1}{3.6}zz + \tfrac{2.1.4}{3.6.9}z^3 - \tfrac{2.1.4.7}{3.6.9.12}z^4 + \text{etc.}$$

feries fummada erit

$$S = 1 + \tfrac{1.2}{3.3} + \tfrac{1.2}{3.6}\cdot\tfrac{2.1}{3.6} + \tfrac{1.2.5}{3.6.9}\cdot\tfrac{2.1.4}{3.6.9} + \tfrac{1.2.5.8}{3.6.9.12}\cdot\tfrac{2.1.4.7}{3.6.9.12} + \text{etc.}$$

cuius ergo fumma, ob fin. $\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, per quadraturam circuli exprimi poterit, eritque $S = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi}$. Eodem modo fi fumamus $m = \frac{1}{4}$ et $n = \frac{3}{4}$, erit feries fummanda

$$S = 1 + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4} + \tfrac{1.3}{4.8}\cdot\tfrac{3.1}{4.8} + \tfrac{1.3.7}{4.8.12}\cdot\tfrac{3.1.5}{4.8.12} + \tfrac{1.3.7.11}{4.8.12.16}\cdot\tfrac{3.1.5.9}{4.8.12.16} + \text{etc.}$$

cuius autem fumma, ob fin. $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, erit $S = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi}$, feries autem ifta ita fuccincte exhiberi poteft:

$$S = 1 + \tfrac{3}{4^2}\left(1 + \tfrac{1.3}{8^2} + \tfrac{1.3.5.7}{8^2.12^2} + \tfrac{1.3.5.7.9.11}{8^2.12^2.16^2} + \text{etc.}\right).$$

EXERCITATIO ANALYTICA.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 3 Octobr. 1776.

§. 1.

Consideranti productum infinitum cosinum cuiusque anguli exprimens, quod est

$$\operatorname{cos.} \frac{\pi}{2n} = \left(1 - \frac{1}{nn}\right)\left(1 - \frac{1}{9nn}\right)\left(1 - \frac{1}{25nn}\right)\left(1 - \frac{1}{49nn}\right) \text{ etc.}$$

in mentem venit methodum inuestigare, cuius ope vicissim ex indole istius producti eius valor, quem nouimus esse $= \operatorname{cos.} \frac{\pi}{2n}$, erui queat, in quo negotio plura se obtulere artificia, quorum explicationem Geometris haud ingratam fore confido.

§. 2. Pono igitur

$$S = \left(1 - \frac{1}{nn}\right)\left(1 - \frac{1}{9nn}\right)\left(1 - \frac{1}{25nn}\right) \text{ etc.}$$

et sumtis logarithmis prodit mihi:

$$lS = l\left(1 - \frac{1}{nn}\right) + l\left(1 - \frac{1}{9nn}\right) + l\left(1 - \frac{1}{25nn}\right) + \text{etc.}$$

et cum sit

$$l\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \text{etc.}$$

erit his seriebus ordine dispositis signisque mutatis:

 —lS

$$-lS = \frac{1}{nn} + \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{3n^6} + \frac{1}{4n^8} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{9nn} + \frac{1}{2.9^2 n^4} + \frac{1}{3.9^3 n^6} + \frac{1}{4.9^4 n^8} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{25.nn} + \frac{1}{2.25^2.n^4} + \frac{1}{3.25^3.n^6} + \frac{1}{4.25^4.n^8} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{49.nn} + \frac{1}{2.49^2.n^4} + \frac{1}{3.49^3.n^6} + \frac{1}{4.49^4.n^8} + \text{etc.}$$
etc.

§. 3. Quodſi iam ſingulas columnas verticales in ordinem diſponamus, ſequentes ſeries pro $-lS$ obtinebimus:

$$-lS = \frac{1}{nn}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.n^4}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{3.n^6}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{4.n^8}\left(1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.}\right)$$
etc.

Sicque negotium perductum eſt ad ſummationem ſerierum poteſtatum parium progreſſionis harmonicae $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$, etc.

§. 4. Oſtendi autem olim, poſito breuitatis gratia $\frac{\pi}{2} = \varrho$, ſi harum poteſtatum ſummae repraeſententur ſequenti modo:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = A\,\varrho^2,$$
$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = B\,\varrho^4,$$
$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = C\,\varrho^6,$$
etc.

primo eſſe $A = \frac{1}{2}$, tum vero litteras reliquas ſequenti modo per praecedentes determinari:

$$B = \tfrac{2}{3}A^2,\ C = \tfrac{2}{5}.2AB,\ D = \tfrac{2}{7}(2AC + BB),$$
$$E = \tfrac{2}{9}(2AD + 2BC),\ F = \tfrac{2}{11}(2AE + 2BD + CC),\ \text{etc.}$$

cuius

cuius veritas ſimul ex pulcherrimo conſenſu huius Analyſeos elucebit.

§. 5. His igitur valoribus ſubſtitutis nanciſcimur hanc ſeriem:

$$-lS = \frac{A\rho^2}{nn} + \frac{1}{2}\cdot\frac{B\rho^4}{n^4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{C\rho^6}{n^6} + \frac{1}{4}\cdot\frac{D\rho^8}{n^8} + \text{etc.}$$

Quod ſi igitur ponamus $\frac{\rho}{n} = x$, vt ſit $x = \frac{\pi}{2n}$, iſta ſeries hanc induet formam:

$$-lS = Axx + \tfrac{1}{2}Bx^4 + \tfrac{1}{3}Cx^6 + \tfrac{1}{4}Dx^8 + \text{etc.}$$

Vt fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. abigamus, differentiemus, ac facta diuiſione per $2\partial x$ conſequemur.

$$-\frac{\partial S}{2S\partial x} = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{etc.}$$

§. 6. Statuamus hic breuitatis gratia $-\frac{\partial S}{2S\partial x} = t$, vt habeamus;

$$t = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{etc.}$$

vnde ſumtis quadratis orietur haec ſeries:

$$\begin{array}{llllll} tt = A^2xx + & 2ABx^4 + & 2ACx^6 + & 2ADx^8 + & 2AEx^{10} + & \text{etc.} \\ & & + BB & + 2BC & + 2BD & + \text{etc.} \\ & & & & + CC & + \text{etc.} \end{array}$$

ſicque iam pro quauis poteſtate ipſius x eas nacti ſumus formulas, quibus determinatio litterarum A, B, C, D, continetur: deſunt tantum coëfficientes illi $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, etc.

§. 7. Hos autem coëfficientes introducemus integrando, poſtquam per $2\partial x$ multiplicauerimus. Reperietur enim

$$2\int tt\partial x = \tfrac{2}{3}A^2x^3 + \tfrac{2}{5}\cdot 2ABx^5 + \tfrac{2}{7}(2AC + BB)x^7$$
$$+ \tfrac{2}{9}(2AD + 2BC)x^9 + \tfrac{2}{11}(2AE + 2BD + CC)x^{11} + \text{etc.}$$

Cum nunc ſit

$$\tfrac{2}{3}A^2 = B,\ \tfrac{2}{5}\cdot 2AB = C,\ \tfrac{2}{7}(2AC + BB) = D,\ \text{etc.}$$

his

his valoribus restitutis perueniemus ad hanc seriem:

$$2 \int t t \partial x = B x^3 + C x^5 + D x^7 + E x^9 + \text{etc.}$$

§. 8. Cum igitur ante habuissemus hanc seriem:

$$t = A x + B x^3 + C x^5 + D x^7 + \text{etc.}$$

hinc manifesto fluit ista aequatio:

$$t = A x + 2 \int t t \partial x,$$

quae differentiata dat

$$\partial t = A \partial x + 2 t t \partial x = \tfrac{1}{2} \partial x + 2 t t \partial x, \text{ ob } A = \tfrac{1}{2}.$$

Hinc ergo habebimus $2 \partial t = \partial x (1 + 4 t t)$, vnde fit $\partial x = \frac{2 \partial t}{1 + 4 t t}$, cuius integrale in promptu est, scilicet $x = A$ tang. $2 t$, vbi constantis adiectione non est opus, quandoquidem posito $x = 0$ t iam sponte euanescit. Hac ergo aequatione inuenta, si quantitas x vt angulus spectetur, viciſſim erit $2 t =$ tang. x. Erat vero $t = - \frac{\partial S}{2 S \partial x}$, vnde colligitur haec aequatio:

$$- \frac{\partial S}{S \partial x} = \text{tang. } x, \text{ ideoque } - \frac{\partial S}{S} = \frac{\partial x \,\text{sin.}\, x}{\text{cos.}\, x}.$$

§. 9. Cum igitur sit ∂x sin. $x = - \partial.$ cos. x, erit $\frac{\partial S}{S} = \frac{\partial. \text{cos.}\, x}{\text{cos.}\, x}$, hincque integrando $l S = l$ cos. $x + C$, quae constans inde debet definiri, vt posito $x = 0$ fiat $l S = 0$. Hinc ergo erit $C = 0$, ita vt sit $l S = l$ cos. x, ideoque ad numeros progrediendo fiet $S =$ cos. x.

§. 10. Posueramus autem $x = \frac{\pi}{2 n}$, vnde manifesto valor quaesitus S prodit $S = \text{cos.}\, \frac{\pi}{2 n}$, prorsus vti iam ante constabat. Haec igitur Analysis egregie confirmat illam relationem inter litteras A, B, C, D, quam aliunde in calculum introduxi.

EVO-

EVOLVTIO PROBLEMATIS CVIVS SOLVTIO ANALYTICA EST DIFFICILLIMA, DVM SYNTHETICA PER SE EST OBVIA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 16 *Ian.* 1777.

1.

Problema, quod hic euoluendum suscipimus, ita se habet: *Circa punctum fixum A describere curuam C M, vt ductis ad singula puncta M radiis osculi M R, distantia A R vbique sit eiusdem magnitudinis.* Hic primo statim patet huic problemati satisfacere curuam ex euolutione circuli natam, cuius centrum sit in puncto A, radius vero distantiae propositae A R aequalis. Descripto enim centro A radio A C circulo, si peripheriae filum circumplicetur, quod ex C euolutum producat curuam C M, eius radius osculi in M erit recta M R, circulum in R tangens, ita vt puncti R distantia a puncto A vbique sit eadem. Tab. I. Fig. 1. Fig. 2.

§. 2. Praeterea vero etiam euidens est huic problemati omnes satisfacere circulos, quocunque radio descriptos, quorum centra propositam teneant a puncto A distantiam. Si enim circa punctum R, cuius distantia ab A est data, radio quo- Fig. 3.

cunque R C describatur circulus C M, quia eius radius osculi in M est M R, distantia praescripta A R vtique pro omnibus punctis M est eadem. Sicque problema propositum duplicem admittit solutionem, quarum altera praebet curuas ex euolutione circuli, cuius radius A C datur, natas, altera vero complectitur infinities-infinitos circulos, quorum centra a puncto A datam teneant distantiam. Ex quo iam intelligimus, solutionem istius problematis analyticam ita comparatam esse debere, vt ambas solutiones memoratas in se complectatur.

§. 3. At vero solutio analytica haud parum debet esse ardua, propterea quod radius osculi, qui per differentialia secundi gradus determinatur, in computum ingreditur. Interim tamen haec solutio sequenti modo commodissime institui posse videtur. Posita distantia data $AR = a$, pro puncto curvae quocunque M vocetur distantia $AM = z$, ductaque ad M tangente M P, in eam ex A demittatur perpendiculum A P, quod vocemus $AP = p$, ac primo quidem quaeramus aequationem inter has binas variabiles $AM = z$ et $AP = p$, quandoquidem hinc deinceps haud difficulter aequatio inter coordinatas solitas deduci potest. Has autem binas variabiles ideo eligi conuenit, quod ex iis radius osculi M R simplicissime exprimi potest, siquidem habetur $MR = \frac{z \partial z}{\partial p}$, ita vt tantum differentialia primi gradus inuoluat.

Tab. I. Fig. 1.

§. 4. Quod si iam ex A ad radium osculi M R ducatur normalis A Q, quae tangenti M P erit parallela et aequalis, erit quoque $MQ = AP = p$, ideoque $QR = \frac{z \partial z}{\partial p} - p$. Quoniam igitur est $AQ = \sqrt{(zz - pp)}$, ob $AR = a$ habebitur ista aequatio pro curua quaesita:

$$aa = (zz - pp) + \left(\frac{z \partial z}{\partial p} - p\right)^2, \text{ siue}$$

$$aa = zz - pp + \frac{(z \partial z - p \partial p)^2}{\partial p^2}.$$

Quare

Quare si ponamus $zz - pp = tt$, ita vt sit

$$t = \surd(zz - pp) = \mathrm{MP} = \mathrm{AQ},$$

statim habemus hanc aequationem maxime concinnam:

$$aa = tt + \frac{tt\partial t^2}{\partial p^2}, \text{ ideoque}$$

$$aa\partial p^2 = tt(\partial p^2 + \partial t^2),$$

quae duas tantum continet variabiles p et t, vnde elicitur

$$\partial p = \frac{t\partial t}{\surd(aa - tt)}.$$

§. 5. Quanquam iam integratio est facillima, antequam eius integrale consideremus, manifestum est huic aequationi differentiali satisfacere valorem $t = a$, quoniam hinc fractionis $\frac{t\partial t}{\surd(aa - tt)}$ tam numerator quam denominator euanescunt. Hoc autem accuratius ita ostendi potest. Quoniam immediate deducti sumus ad hanc aequationem:

$$\partial p\surd(aa - tt) - t\partial t = 0,$$

haec ad formam $\mathrm{M}\partial\mathrm{V} = 0$ reducta praebet

$$\surd(aa - tt)\left(\partial p - \frac{t\partial t}{\surd(aa - tt)}\right) = 0,$$

ita vt hic sit

$$\mathrm{M} = \surd(aa - tt) \text{ et } \partial\mathrm{V} = \partial p - \frac{t\partial t}{\surd(aa - tt)},$$

Perspicuum autem est, quoties solutio cuiuspiam problematis deducit ad huiusmodi aequationem differentialem $\mathrm{M}\partial\mathrm{V} = 0$, eam complecti geminam solutionem, alteram $\mathrm{M} = 0$, alteram vero $\partial\mathrm{V} = 0$, ex qua posteriore demum integrando prodit $\mathrm{V} = \mathrm{Const.}$ Neque igitur mirandum est priorem solutionem $\mathrm{M} = 0$ non in altera $\mathrm{V} = \mathrm{C}$ contineri, multoque minus paradoxon videri debet quod saepenumero aequationi differentiali eiusmodi valores satisfacere queant, qui in integrali completo non contineantur.

§. 6. Cum igitur noſtro caſu ſit $M = \sqrt{(aa - tt)}$ et $\partial V = \partial p - \frac{t \partial t}{\sqrt{(aa - tt)}}$, hinc aequatio inuenta duplicem manifeſto inuoluit ſolutionem; ac prior quidem ſtatim ſequitur ex valore $M = \sqrt{(aa - tt)} = 0$, qui dat $t = a$, vnde cum ſit $t = \sqrt{(zz - pp)}$, erit $p = \sqrt{(zz - aa)}$; ex quo perſpicuum eſt in figura interuallum QR euaneſcere, et interuallum AQ eſſe conſtans, quae conditio ſatis clare curuam ex euolutione circuli, cuius radius $= AQ$, natam declarat, quod idem vero etiam analytice ex ipſa aequatione $p = \sqrt{(zz - aa)}$ oſtendi poteſt.

Tab. I. Fig. 4. §. 7. Hunc in finem accipiamus rectam quandam AC pro axe fixo, ac vocemus angulum $CAM = \Phi$, et pro puncto curuae proximo erit $Am = z + \partial z$ et angulus $MAm = \partial \Phi$, ſicque deſcripto centro A arculo Mp erit $mp = \partial z$ et $Mp = z \partial \Phi$, vnde elementum curuae naſcitur

$$Mm = \sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)}.$$

Hinc iam ſimilitudo triangulorum mMp et mAP praebet:

$$Mm : Mp = mA : AP = MA : AP, \text{ ſiue}$$

$$\sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)} : z \partial \Phi = z : p,$$

vnde fit $p = \frac{zz \partial \Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)}}$. Quoniam igitur inuenimus $p = \sqrt{(zz - aa)}$, ſumtis quadratis erit

$$zz - aa = \frac{z^4 \partial \Phi^2}{\partial z^2 + zz \partial \Phi^2},$$

vnde fit $\partial \Phi = \frac{\partial z \sqrt{(zz - aa)}}{az}$, quae formula, ponendo

$$\sqrt{(zz - aa)} = v,$$

ob $zz = aa + vv$, ideoque $\frac{\partial z}{z} = \frac{v \partial v}{aa + vv}$, ab irrationalitate liberata praebet $\partial \Phi = \frac{vv \partial v}{a(aa + vv)}$, ſiue $\partial \Phi = \frac{\partial v}{a} - \frac{a \partial v}{aa + vv}$, vnde integrando colligitur $\Phi = \frac{v}{a} - A \tang. \frac{v}{a}$.

§. 8. Denotet ω angulum cuius tangens eſt $\frac{v}{a}$, ita vt ſit $v = a \tang. \omega$, ideoque $z = \frac{a}{\cos. \omega}$, hincque porro angulus

lus $\Phi = \text{tang.}\,\omega - \omega$. Ad has formulas conſtruendas centro A, radio $AC = a$, deſcribamus circulum, in quo capiamus $CR = a\,\text{tang.}\,\omega$, cui aequalem ſumamus tangentem circuli RM, ita vt ſit $RM = a\,\text{tang.}\,\omega$, vnde ducta recta AM, ob $AR = a$ euidens eſt fore angulum $RAM = \omega$, hincque ipſam rectam $AM = \frac{a}{\cos\omega}$, ſicque haec recta AM aequatur noſtrae lineae z. Praeterea vero cum ſit angulus $CAR = \frac{CR}{CA} = \text{tang.}\,\omega$, ſi angulus $MAR = \omega$ ab eo ſubtrahatur, remanebit angulus $CAM = \text{tang.}\,\omega - \omega$, ideoque $CAM = \Phi$, ſicque punctum M revera erit in curua quaeſita, quam ergo ob $MR = CR$ patet generari ex euolutione arcus circuli CR, quae eſt prior ſolutio initio commemorata. Tab. I. Fig. 5.

§. 9. Altera vero ſolutio petenda eſt ex aequatione differentiali $\partial V = 0$, ſiue

$$\partial p - \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}} = 0,$$

cuius integrale dat $p + \sqrt{(aa - tt)} = c$. Quia vero eſt $t = \sqrt{(zz - pp)}$, erit $\sqrt{(aa - tt)} = \sqrt{(aa - zz + pp)}$, ſicque aequatio noſtra erit: $\sqrt{(aa - zz + pp)} = c - p$; ſumtisque quadratis $aa - zz = cc - 2cp$, vnde deducimus

$$p = \frac{cc - aa + zz}{2c}.$$

Modo ante autem vidimus, poſito angulo $CAM = \Phi$, eſſe

$$p = \frac{zz\,\partial\Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2)}};$$

quare ſi breuitatis gratia ponamus $cc - aa = bb$, erit

$$\frac{2czz\,\partial\Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2)}} = bb + zz,$$

ex qua aequatione elicitur:

$$\partial\Phi = \frac{(bb + zz)\,\partial z}{z\sqrt{[4cczz - (bb + zz)^2]}},$$

quae aequatio, quantumuis perplexa, tamen praeter circulos

 nullas

nullas alias curuas in se complectitur, quod quomodo eueniat nobis est ostendendum.

§. 10. Quo hanc formulam simpliciorem reddamus simulque litterarum numerum diminuamus, ponamus $zz = bbv$, vt sit $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{2v}$, tum vero ponatur $4cc = (2n + 2)bb$, vbi meminisse oportet esse $bb = cc - aa$, quo facto nostra aequatio fiet

$$\partial\Phi = \frac{(1+v)\partial v}{2v\sqrt{(2nv - vv - 1)}},$$

quae aequatio commode in duas partes resoluitur hoc modo:

$$2\partial\Phi = \frac{\partial v}{\sqrt{(2nv - vv - 1)}} + \frac{\partial v}{v\sqrt{(2nv - vv - 1)}},$$

in qua posteriore parte si ponamus $v = \frac{1}{u}$, habebimus hanc aequationem integrandam:

$$2\partial\Phi = \frac{\partial v}{\sqrt{(2nv - vv - 1)}} - \frac{\partial u}{\sqrt{(2nu - uu - 1)}},$$

sicque sufficiet altervtram tantum partem integrasse.

§. 11. Pro priore parte introducamus quempiam angulum θ, ponendo $v = \alpha + \beta\,\text{cos}.\,\theta$, et quantitas $2nv - vv - 1$ induet hanc formam:

$$\begin{aligned} &2n\alpha + 2n\beta\,\text{cos}.\,\theta - \beta^2\,\text{cos}.\,\theta \\ &- \alpha\alpha - 2\alpha\beta\,\text{cos}.\,\theta \\ &- 1 \end{aligned}$$

vbi primo termini $\text{cos}.\,\theta$ inuoluentes tollantur, quod fit sumendo $\alpha = n$, tum vero statuatur $2\alpha n - \alpha\alpha - 1 = \beta\beta$, vt ista forma transeat in $\beta\beta\,\text{sin}.\,\theta^2$. Quia vero est $\alpha = n$, altera littera β ex hac aequatione definietur:

$$2nn - nn - 1 = nn - 1 = \beta\beta,$$

ideoque est $\beta = \sqrt{(nn-1)}$, atque hinc prior formula $\frac{\partial v}{\sqrt{(2nv - vv - 1)}}$ transmutatur in hanc: $-\partial\theta$, cuius ergo integrale est $-\theta$. Cum igitur posuerimus $v = n + \text{cos}.\,\theta.\sqrt{(nn-1)}$, erit $\text{cos}.\,\theta = \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}}$,

ideo-

ideoque $\theta = A\, cof. \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}}$. Simili modo erit integrale posterioris partis

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(2nu-uu-1)}} = -A\, cof. \frac{u-n}{\sqrt{(nn-1)}} = -A\, cof. \frac{1-nv}{\sqrt{(nn-1)}},$$

vnde conficitur integrale quaesitum:

$$2\Phi = -A\, cof. \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}} + A\, cof. \frac{1-nv}{v\sqrt{(nn-1)}} + C.$$

§. 12. Hinc igitur fi priorem arcum, vti fecimus, per θ defignemus, pofteriorem vero per η, ita vt fit $2\Phi = \eta - \theta$, quoniam habemus:

$$cof.\, \theta = \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}} \text{ et } cof.\, \eta = \frac{1-nv}{v\sqrt{(nn-1)}}, \text{ erit}$$

$$fin.\, \theta = \frac{\sqrt{(2nv-vv-1)}}{\sqrt{(nn-1)}} \text{ et } fin.\, \eta = \frac{\sqrt{(2nv-vv-1)}}{v\sqrt{(nu-1)}}.$$

Hinc iam cum fit

$$fin.\, 2\Phi = fin.\, \eta\, cof.\, \theta - cof.\, \eta\, fin.\, \theta \text{ et}$$

$$cof.\, 2\Phi = cof.\, \eta\, cof.\, \theta + fin.\, \eta\, fin.\, \theta,$$

erit factis fubftitutionibus:

$$fin.\, 2\Phi = \frac{(v-1)\sqrt{(2nv-vv-1)}}{(n-1)v} \text{ et}$$

$$cof.\, 2\Phi = \frac{(1+n)v-vv-1}{(n-1)v},$$

atque hinc porro habebimus:

$$1 + cof.\, 2\Phi = 2\, cof.\, \Phi^2 = \frac{2nv-vv-1}{(n-1)v} \text{ et}$$

$$1 - cof.\, 2\Phi = 2\, fin.\, \Phi^2 = \frac{(v-1)^2}{(n-1)v}.$$

§. 13. Cum nunc fit angulus $CAM = \Phi$ et $AM = z$, Tab. I.
ob $zz = bbv$, erit $v = \frac{zz}{bb}$; tum vero ducta applicata MX, Fig. 4.
fi vocentur coordinatae $AX = x$ et $XM = y$, erit primo $zz = xx + yy$, tum vero fin. $\Phi = \frac{y}{z}$; vnde fi ifti valores loco Φ et v fubftituantur, nancifcemur aequationem inter x et y pro curua quaefita: $\frac{2yy}{zz} = \frac{(zz-bb)^2}{bb(n-1)zz}$, fiue reductione facta

$$b y \sqrt{(2 n - 2)} = z z - b b = x x + y y - b b,$$

quae manifesto est pro circulo. Sumsimus autem

$$4 c c = (2 n + 2) b b,$$

sicque erit $n = \frac{2 c c - b b}{b b}$, ideoque $n - 1 = \frac{2(c c - b b)}{b b}$. Porro autem posueramus $c c - a a = b b$, ita vt sit $c c = a a + b b$ et $n - 1 = \frac{2 a a}{b b}$, consequenter $\sqrt{2 (n - 1)} = \frac{2 a}{b}$, vnde aequatio nostra finalis pro curua quaesita erit:

$$2 a y = x x + y y - b b,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$x x + (y - a)^2 = b b + a a.$$

§. 14. Ad hanc aequationem construendam ex A ad
Tab. I. Fig. 6. axem C A erigatur perpendiculum A I $= a$, ductaque axi parallela I O erit O M $= y - a$ et I O $= x$, vnde ducta recta I M erit

$$\mathrm{I M}^2 = x x + (y - a)^2 = a a + b b,$$

ideoque constans, et quidem pro lubitu accipienda, quia $b b$ est constans arbitraria. Vnde patet, curuam quaesitam esse circulum, radio quocunque circa centrum I descriptum, existente interuallo A I $= a$, quae sola conditio hic est spectanda, vt sit A I $= a$, propterea quod positio axis A C arbitrio nostro relinquitur, id quod etiam calculus ostenderet, si in vltima aequatione integrali $2 \Phi = \eta - \theta$ constantem adiecissemus, quippe qua ratione vbique angulus M A C quantitate data fuisset auctus vel minutus, atque hinc discimus, praeter binas solutiones, quas nobis synthesis exhibuit, nullas alias dari curuas quaesito satisfacientes.

Alia

Alia Solutio concinnior eiusdem problematis.

§. 15. Si quis immediate ex binis coordinatis x et y ſolutionem huius problematis tentare vellet, is in formulas prorſus inextricabiles incideret, in quibus non ſolum quadrata differentialium ſecundorum occurrerent, ſed etiam haec differentialia cum ipſis coordinatis ac differentialibus primis ita forent permixta, vt nullo modo ſolutio ſperari poſſet. Sequenti autem modo ſolutio multo elegantior quam praecedens obtineri poterit, ſi ſtatim ab initio amplitudo curuae rite in computum ducatur.

§. 16. Ducto igitur, per datum punctum A, axe fixo AB, radium oſculi MR ſecante in N; vocetur angulus $ANM = \phi$, qui amplitudinem arcus AM metietur, ſiquidem axis AB ad curuam in A fuerit normalis, quae tamen conditio ad ſolutionem non eſt neceſſaria. Vocetur porro interuallum $AN = u$, ac demiſſo ex A in radium oſculi MR perpendiculo AP, erit $AP = u \text{ſin.} \phi$ et $NP = u \text{coſ.} \phi$. Ponatur autem breuitatis gratia $AP = v = u \text{ſin.} \phi$. Eaedem denominationes porro transferantur in radium oſculi proximum mr; et quia angulus $Anm = \phi + \partial \phi$, erit angulus $MRm = \partial \phi$, pariter ac angulus PAp; vnde ſi recta Ap ſecet radium oſculi MR in q, ob $Ap = v + \partial v$, erit $pq = \partial v$ et $Pq = v \partial \phi$. Hinc igitur primo erit $Rq = \frac{\partial v}{\partial \phi} = Rp$. Quodſi inſuper vocetur $MP = p$, vt ſit $mp = p + \partial p = Mq$, erit manifeſto $\partial p = v \partial \phi$, ideoque $p = \int v \partial \phi = MP$. Tab. I. Fig. 7.

§. 17. Cum nunc noſtrum problema poſtulet vt interuallum AR habeat magnitudinem conſtantem $= a$, triangulum rectangulum APR ſtatim nobis dat hanc aequationem:

$$a a = v v + \frac{\partial v^2}{\partial \phi^2},$$

vnde colligimus iſtam:

$$\partial \Phi \sqrt{(a a - v v)} = \partial v,$$

quae cum forma generali $M \partial V = o$ comparata dat

$$M = \sqrt{(a a - v v)} \text{ et } \partial V = \partial \Phi - \frac{\partial v}{\sqrt{(a a - v v)}},$$

vnde manifesto duplex solutio deducitur: Prior scilicet $M = o$ dat $v = a$, posterior vero $V = C$ praebet $\Phi - A \sin. \frac{v}{a} = C$; neque iam difficile erit hinc ambas solutiones initio commemoratas deducere.

§. 18. Pro priore solutione, qua inuenimus $v = a$, erit interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = o$, ita vt iam ipsa recta MP futura sit radius osculi, cuius ergo quantitas erit

$$MP = \int v \partial \Phi = a \Phi.$$

Vnde patet, quia punctum P perpetuo eandem distantiam a puncto A seruat, scilicet $AP = a$, euolutam curuae quaesitae esse circulum, centro A, radio $AP = a$ descriptum, atque ipsam rectam $MP = a \Phi$ aequari arcui huius circuli iam euoluto.

§. 19. Pro altera solutione, quae dedit $\Phi - A \sin. \frac{v}{a} = C$, erit $\frac{v}{a} = \sin. (\Phi - C)$; vbi euidens est constantem C tuto negligi posse, propterea quod positio axis assumti AB ab arbitrio nostro pendet, ita vt habeamus $v = a \sin. \Phi$; vnde colligitur primo interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = a \cos. \Phi$, deinde interuallum $MP = - a \cos. \Phi + b$. Hinc ipse radius osculi concluditur $MR = b$, ideoque constans; vnde manifestum est curvam quaesitam hoc casu fore circulum, radio arbitrario $= b$ descriptum, pro cuius positione cum sit $AP = v = u \sin. \Phi = a \sin. \Phi$, hinc fit $u = AN = a$, ita vt punctum N sit fixum adeoque centrum circuli inuenti. Quia enim interuallum

lum $NP = a \cos.\phi$ et $MP = -a\cos.\phi + b$, erit ipsa recta $NM = b$, ideoque punctum R in N incidet.

§. 20. Sin autem constantem illam C praetermittere nolimus, ponamusque $C = \alpha$, habebimus $v = a \sin.(\phi - \alpha)$, hincque interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \phi} = a \cos.(\phi - \alpha)$ et interuallum $MP = -a\cos.(\phi - \alpha) + b$, vnde ipse radius osculi prodit $MR = b$, vt ante. Quoniam porro erat $v = u \sin.\phi$, hinc colligitur $AN = u = \frac{a \sin.(\phi - \alpha)}{\sin.\phi}$, hincque porro

$$NP = u \cos.\phi = \frac{a \sin.(\phi - \alpha).\cos.\phi}{\sin.\phi},$$

cui si addatur $MP = -a\cos.(\phi - \alpha) + b$, erit interuallum

$$NM = -\frac{a \sin.\alpha}{\sin.\phi} + b.$$

Quoniam igitur inuenimus $MR = b$, erit $NR = \frac{a \sin.\alpha}{\sin.\phi}$.

§. 21. Quo haec clariora euadant, ex R in axem AB ducatur normalis RS, et ob angulum $RNS = \phi$, erit

$$RS = a \sin.\alpha \text{ et } NS = \frac{a \sin.\alpha \cos.\phi}{\sin.\phi};$$

ante vero inuenimus

$$AN = u = \frac{a \sin.(\phi - \alpha)}{\sin.\phi},$$

quibus coniunctis prodit interuallum

$$AS = \frac{a \sin.\alpha \cos.\phi + a \sin.(\phi - \alpha)}{\sin.\phi}.$$

Quia vero

$$\sin.(\phi - \alpha) = \sin.\phi \cos.\alpha - \cos.\phi \sin.\alpha,$$

erit hoc interuallum $AS = a\cos.\alpha$; vnde patet punctum R esse fixum, eiusque distantiam $AR = a$, simulque angulum $SAR = \alpha$, quae solutio perfecte conuenit cum praecedente.

Applicatio principii
quo Illuſtris de la Grange geminas huiusmodi Problematum ſolutiones inter ſe conciliare eſt adortus.

§. 22. Quando ſolutio cuiuspiam problematis deducit ad huiusmodi aequationem differentialem: $M \partial V = 0$, ita vt factor finitus M non pro lubitu, ſed ex ipſa indole problematis acceſſerit; tum manifeſtum eſt tale problema admittere duas ſolutiones, alteram aequatione finita $M = 0$, alteram vero aequatione differentiali $\partial V = 0$ contentam. His igitur caſibus nulla plane ratio adeſt, cur prior harum ſolutionum in poſteriore inuoluta eſſe debeat, aeque parum ac ſi problema algebraicum ad aequationem pluribus factoribus conſtantem perducit, vbi ſinguli factores ſeorſim ſolutiones praebere ſolent nullo modo a ſe inuicem dependentes. Neque ergo his caſibus principium Ill. de la Grange in vſum vocari poterit.

§. 23. Plerumque autem vſu venire ſolet, vt factor ille finitus M non aperte in aequationem finalem ingrediatur, ſed demum, dum aequatio integrabilis redditur, in ſubſidium vocari ſolet, quo caſu vtique iſte factor arcto vinculo cum ipſa aequatione differentiali cohaeret. Veluti ſi peruentum fuerit ad huiusmodi aequationem differentialem: $p \partial x + q \partial y = 0$, quae ſponte integrationem non admittat, ſed demum per formulam M diuiſa integrabilis euadat, tum iſtam aequationem hoc modo repraeſentari conueniet: $M . \frac{p \partial x + q \partial y}{M} = 0$, ita vt hic ſit $\partial V = \frac{p \partial x + q \partial y}{M}$, tum vtique duae habebuntur ſolutiones: altera finita $M = 0$, altera differentialis $\frac{p \partial x + q \partial y}{M} = 0$, ex qua integrando elicitur: $\int \frac{p \partial x + q \partial y}{M} = \text{Conſt.}$ Hoc ergo caſu prior ille factor M ab indole functionum p et q pendet, atque principium memoratum eum in finem excogitatum videtur,

detur, quemadmodum ex aequatione integrali:

$$\int \frac{p\,\partial x + q\,\partial y}{M} = C,$$

altera ſolutio finita $M = 0$ elici queat.

§. 24. Ad hoc praeſtandum vir Ill. iubet aequationem integratam, poſtquam certo modo in ordinem fuerit redacta, denuo differentiare, ita vt etiam conſtans per integrationem ingreſſa tanquam variabilis tractetur, quo pacto ad talem aequationem $P\,\partial x + Q\,\partial y + Q\,\partial C = 0$, peruenietur; tum vero coëfficientem ipſius ∂C nihilo aequalem ſtatuit et ex aequatione $R = 0$ valorem ipſius conſtantis C per ambas variabiles x et y definit, atque affirmat, ſi iſte valor loco C in ipſa aequatione integrali ſubſtituatur, tum prodituram eſſe aequationem illam finitam $M = 0$, ſicque hanc aequationem finitam certo modo in aequatione integrali contineri eſſe cenſendam; quanquam equidem hanc concluſionem minus perſpicio, propterea quod ſi in aequatione integrata conſtans vt variabilis tractetur, haec aequatio non amplius pro integrali haberi poteſt.

§. 25. Applicemus autem hoc principium ad ſolutionem §. 5. inuentam: $\partial p \sqrt{(aa - tt)} - t\,\partial t = 0$, quae ad hanc formam:

$$\partial p - \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}} = 0,$$

reducta et integrata praebet $p + \sqrt{(aa - tt)} = c$, vnde irrationalitatem tollendo prodit: $aa - tt = cc - 2cp + pp$, quae differentiata, ſpectando etiam c vt variabile, praebet:

$$-2t\,\partial t = 2c\,\partial c - 2c\,\partial p - 2p\,\partial c + 2p\,\partial p,$$

vbi coëfficiens ipſius ∂c eſt $2(c - p)$, qui nihilo aequatus dat $c = p$. Hic iam valor in aequatione integrata loco c, ſubſtitutus dat $p + \sqrt{(aa - tt)} = p$, ſiue $\sqrt{(aa - tt)} = 0$, quae

 vtique

vtique eſt prior noſtra ſolutio ex factore finito concluſa, ſcilicet $t = a$. Quia autem naturae rei repugnat, conſtanti per integrationem ingreſſae c valorem variabilem p tribui, neutiquam video, quomodo dici queat, ſolutionem illam finitam $t = a$ in aequatione integrali contineri.

§. 26. Deinde etiam nullam rationem perſpicio, cur aequatio integralis, antequam conſtanti c variabilitas tribuitur, ab irrationalitate liberari debeat. Si enim hoc principium immediate applicare vellemus, ipſamque aequationem integralem primo inuentam differentiare, coëfficiens ipſius ∂c foret vnitas, vnde nihil plane ſequeretur. Praetermiſſa autem reductione ad rationalitatem hac ratione quicquid lubuerit concludi poſſet. Si enim aequatio integrata hac forma repraeſentetur:

$$p + q + \sqrt{(aa - tt)} = c + q,$$

ſumtisque vtrinque quadratis differentiatio inſtituatur, coëfficiens ipſius ∂c erit $2(c + q)$, vnde deducitur $c = -q$, qui valor in ipſa aequatione integrali ſubſtitutus daret

$$p + \sqrt{(aa - tt)} = -q,$$

vbi q denotare poſſet functionem quamcunque variabilium p et t. Nemini autem in mentem venire poterit talem ſolutionem problematis admittere.

§. 27. Nullum autem eſt dubium, quia vir Ill. mentem ſuam non ſatis clare expoſuerit, aut quasdam rationes ad intelligendum neceſſarias reticuerit, quas equidem ſupplere non valeo, vnde vberior explicatio ſuper hoc nouo principio, in quo Ill. Auctor adeo inſigne ſupplementum vniuerſi Calculi integralis conſtituit, maxime foret optanda.

PRO-

PROBLEMA GEOMETRICVM.

OB SINGVLARIA SYMTOMATA IMPRIMIS MEMORABILE.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 10 Febr. 1777.

§. 1.

Problema, quod hic tractandum suscipio, et quod nobis plura phaenomena maxime notatu digna offeret, ita se habet:

Problema.

Circa punctum fixum C describere lineam curuam AZ eius indolis, vt area sectoris ACZ proportionalis sit quadrato arcus AZ. Tab. II. Fig. 1.

Scilicet si vocetur arcus $AZ = s$, area vero sectoris $ACZ = \Sigma$, requiritur vt vbique $\Sigma : ss$ eandem teneat rationem, quam ita designemus, vt sit $ss = 4n\Sigma$.

§. 2. Primo obseruo huic problemati omnes spirales logarithmicas, circa centrum C descriptas, satisfacere. Sit enim ζ angulus, sub quo omnes radii CZ spiralem secant, ita vt sit angulus $CZA = \zeta$, voceturque ipse radius $CZ = z$, et ducto radio proximo $Cz = z + \partial z$, centroque C arcu-

lo

lo ZO erit elementum $Oz = \partial z$ et ob angulum $ZzO = \zeta$, erit $ZO = \partial z$ tang. z et $Zz = \partial z$ fec. $z = \frac{\partial z}{cof. \zeta}$. Hinc ergo erit elementum arcus $\partial s = \frac{\partial z}{cof. \zeta}$, ideoque $s = \frac{z}{cof. \zeta}$, quae formula totam fpiralis longitudinem ab ipfo centro C vsque ad Z protenfam denotat. Deinde ob $ZO = \partial z$ tang. ζ, erit area trianguli $CZz = \frac{1}{2} z \partial z$ tang. ζ, quod cum fit differentiale areae Σ, erit integrando $\Sigma = \frac{1}{4} z z$ tang. ζ, quae area iterum ab ipfo centro C eft defumta. Vi igitur noftri problematis, cum effe debeat $ss = 4 n \Sigma$, his valoribus fubftitutis habebimus $\frac{zz}{cof. \zeta^2} = n z z$ tang. ζ, fiue $1 = n$ fin. ζ cof. ζ, ita vt hic fit $n = \frac{1}{fin. \zeta \, cof. \zeta}$, vnde patet his cafibus n adeo binario maiorem effe debere, fiquidem erit $n = \frac{2}{fin. 2 \zeta}$. Hinc igitur, fi detur numerus $n > 2$, duo anguli pro ζ dabuntur quaefito fatisfacientes. Cum enim fit fin. $2\zeta = \frac{2}{n}$, fi fuerit fin. $\alpha = \frac{2}{n}$, quoniam etiam eft fin. $(180° - \alpha) = \frac{2}{n}$, erit duplici modo vel $\zeta = \frac{1}{2} \alpha$, vel $\zeta = 90° - \frac{1}{2} \alpha$.

§. 3. Haec autem folutio hoc laborat incommodo: quod tam arcus quam area initium ab ipfo centro C capiant, a quo fpirales demum poft infinitos gyros vsque ad Z porriguntur. Deinde etiam haec folutio locum habere nequit, nifi numerus n fit binario maior, vnde haec folutio pro maxime particulari haberi debet, fiquidem nullo modo locum habere poteft, quando initium A, a quo tam arcus quam areae fint computandae, extra centrum C fitum proponitur, tum vero etiam pro n numerus quicunque, fiue maior, fiue minor quam 2 praefcribitur. Quamobrem operam dabimus, vt folutionem generalem problematis propofiti eruamus; quod negotium triplici modo expedire licebit.

Prima Solutio
problematis propositi.

§. 4. Sit igitur vt ante arcus $AZ = s$ et area sectoris $ACZ = \Sigma$, ita vt esse debeat $ss = 4n\Sigma$. Iam pro lubitu accipiatur axis CB, quem normalis ad curuam ZR secet in puncto N; tum vero ex C in istam normalem perpendiculariter ducatur recta CP, ac vocata distantia CZ, vt ante, $= z$, ponantur insuper $CP = t$ et $ZP = p$, ita vt sit $zz = pp + tt$, ductaque ad punctum proximum z recta Cz, in eamque normali ZO, triangulum ZzO simile erit triangulo CZP; vnde cum sit $zO = \partial z$ et $Zz = \partial s$, habebitur ista proportio: Tab. II. Fig. 2.

$$\begin{array}{ccccc} CZ : Zz & = & CP : zO & = & ZP : ZO, \\ z : \partial s & = & t : \partial z & = & p : \end{array}$$

vnde primo colligitur $ZO = \frac{p \partial s}{z}$ et $t \partial s = z \partial z$. Hinc ex valore ZO prodit elementum areae sectoris:

$$CZz = \partial \Sigma = \tfrac{1}{2} p \partial s,$$

ideoque $\Sigma = \frac{1}{2} \int p \partial s$. Quare cum esse debeat $ss = 4n\Sigma$, erit differentiando:

$$s \partial s = 2n \partial \Sigma = np \partial s,$$

vnde colligitur $s = np$. Hinc insignis proprietas curuae quaesitae statim innotescit, qua arcus curuae AZ se semper habet ad rectam $ZP = p$ in ratione data, scilicet vt $n : 1$.

§. 5. Ducatur iam ex puncto z pariter normalis ad curuam zR priori in R occurrens, eritque ZR radius osculi curuae quaesitae, quem nominemus $= r$. In hanc porro normalem zR ex centro C demittatur quoque perpendiculum $Cp = t + \partial t$, priorem secans in π, et cum iam sit $zp = p + \partial p$, erit quoque $Z\pi = p + \partial p$, vnde colligitur $P\pi = \partial p$ et

$\pi p = \partial t$, ob omnes angulos rectos. Hinc quoque patet, fore angulum ZRz aequalem $PC\pi$; vnde sequitur triangulum $PC\pi \sim$ triang. ZRz, hincque colligitur $\partial p : t = \partial s : r$, ergo $r = \frac{t \partial s}{\partial p}$. Supra autem vidimus esse $s = np$, ideoque $\partial s = n \partial p$, quo valore loco ∂s substituto erit $r = nt$, quae est altera insignis proprietas huius curuae, scilicet vt eius radius osculi vbique ad rectam $OP = t$ datam teneat rationem, vt $n : 1$; vnde patet in hac curua vbique esse arcum $AZ = s$ ad radium osculi $ZR = r$ vti $ZP : CP$.

§. 6. Vocemus iam angulum $CNZ = \Phi$, qui angulus amplitudinem curuae metitur, et cum sit $C\pi z = \Phi + \partial \Phi$, erit angulus $ZRz = \partial \Phi = PC\pi$, vnde fit $P\pi = t \partial \Phi = \partial p$, ideoque $p = \int t \partial \Phi$. Porro quia $\pi p = \partial t$, erit

$$Rp = \frac{\partial t}{\partial \Phi} = PR,$$

vnde componitur radius osculi

$$r = \frac{\partial t}{\partial \Phi} + \int t \partial \Phi.$$

Quare cum esse debeat $r = nt$, habebimus istam aequationem, duas tantum variabiles continentem: $nt = \frac{\partial t}{\partial \Phi} + \int t \partial \Phi$, qua tota solutio problematis nostri continetur; ex qua ergo quantitatem t per angulum Φ inuestigari oportet. Inuenta autem hoc modo recta t, vltro se offert formula integralis:

$$\int t \partial \Phi = nt - \frac{\partial t}{\partial \Phi} = p.$$

§. 7. Vt nunc aequationem inuentam a signo integrali liberemus, ea differentiata, sumto elemento $\partial \Phi$ constante, dabit hanc aequationem differentialem secundi gradus:

$$n \partial t = \frac{\partial \partial t}{\partial \Phi} + t \partial \Phi, \text{ siue}$$

$$t - \frac{n \partial t}{\partial \Phi} + \frac{\partial \partial t}{\partial \Phi^2} = 0,$$

quae forma ita est comparata, vt ei certo satisfaciat huiusmodi di valor: $t = A e^{\alpha\Phi}$; hinc enim fit

$$\frac{\partial t}{\partial \Phi} = A \alpha e^{\alpha\Phi} \text{ et } \frac{\partial \partial t}{\partial \Phi^2} = A \alpha \alpha e^{\alpha\Phi},$$

quibus substitutis erit $1 - n\alpha + \alpha\alpha = 0$, ita vt α debeat esse radix istius aequationis quadraticae; vnde duplici modo fit

$$\alpha = \tfrac{1}{2} n \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4} nn - 1)},$$

hinc si altera radix indicetur per β, etiam satisfaciet formula $t = B e^{\beta\Phi}$. Manifestum autem est aequationi inuentae etiam satisfacturum esse valorem ex his duobus compositum, scilicet $t = A e^{\alpha\Phi} + B e^{\beta\Phi}$, vbi litterae A et B sunt binae constantes per duplicem integrationem ingressae; vnde patet, hanc aequationem continere integrale completum.

§. 8. Quodsi ergo propositus fuerit numerus n, vt fiat $ss = 4n\Sigma$, ex eo quaerantur ambo numeri α et β, ita vt sit

$$\alpha = \tfrac{1}{2} n + \sqrt{(\tfrac{1}{4} nn - 1)} \text{ et } \beta = \tfrac{1}{2} n - \sqrt{(\tfrac{1}{4} nn - 1)},$$

ideoque $\alpha + \beta = n$ et $\alpha\beta = 1$, qui ergo erunt ambo reales, quando fuerit $n > 2$; contra vero imaginarii, quando $n < 2$; casu autem $n = 2$, ambo hi valores erunt inter se aequales, vterque scilicet $= 1$. Accommodemus autem solutionem nostram ad primum casum, quo $n > 2$, quandoquidem hinc bini reliqui casus facile deriuari poterunt. Cum igitur habeamus

$$t = A e^{\alpha\Phi} + B e^{\beta\Phi},$$

hinc statim innotescit radius osculi curuae:

$$r = nt = n(A e^{\alpha\Phi} + B e^{\beta\Phi}).$$

Deinde cum sit

$$\frac{\partial t}{\partial \Phi} = A \alpha e^{\alpha\Phi} + B \beta e^{\beta\Phi}, \text{ erit}$$

$$\int t \partial \Phi = nt - \frac{\partial t}{\partial \Phi} = \beta A e^{\alpha\Phi} + \alpha B e^{\beta\Phi} = p;$$

ex quo statim patet, quia erat $s = np$, fore ipsum arcum curvae

$$A Z = s = n (\beta A e^{\alpha \Phi} + \alpha B e^{\beta \Phi}),$$

vnde porro concluditur area ſectoris $\Sigma = \frac{s s}{4 n}$, hoc eſt

$$\Sigma = \frac{n}{4} (\beta A e^{\alpha \Phi} + \alpha B e^{\beta \Phi})^2.$$

Denique cum ſit $z z = p p + t t$, erit

$$z z = A^2 e^{2 \alpha \Phi} (1 + \beta \beta) + B^2 e^{2 \beta \Phi} (1 + \alpha \alpha)$$
$$+ 2 A B e^{\alpha \Phi + \beta \Phi} (1 + \alpha \beta).$$

Quia autem $1 + \alpha \alpha = \alpha n$, $1 + \beta \beta = \beta n$ et $\alpha \beta = 1$, habebitur:

$$z z = \beta n A^2 e^{2 \alpha \Phi} + \alpha n B^2 e^{2 \beta \Phi} + 4 A B e^{\alpha \Phi + \beta \Phi},$$

§. 9. Quoniam conſtantes A et B ab arbitrio noſtro pendent, eas ita ſumamus, vt poſito $\Phi = 0$ ipſe arcus curvae $A Z$ euaneſcat, hocque modo punctum Z in ipſum initium A incidat; poſito autem $\Phi = 0$ fit $s = n (\beta A + \alpha B)$, ideoque ſtatui oportet $\beta A = - \alpha B$. Quamobrem ſumamus $A = C \alpha$ et $B = - C \beta$, quo facto nanciſcimur hos valores:

$$t = C (\alpha e^{\alpha \Phi} - \beta e^{\beta \Phi}) \text{ et } p = C (e^{\alpha \Phi} - e^{\beta \Phi}),$$

ex quibus porro habebimus:

$$s = n C (e^{\alpha \Phi} - e^{\beta \Phi}) \text{ et } r = n C (\alpha e^{\alpha \Phi} - \beta e^{\beta \Phi}).$$

§. 10. Quo nunc ad coordinatas orthogonales calculum redigamus, quas ponamus $C X = x$ et $Z X = y$, vocemus tantiſper interuallum $C N = u$, vt fiat $C P = t = u \sin. \Phi$ et $N P = u \cos. \Phi$, et quia $u = \frac{t}{\sin. \Phi}$, erit $N P = t \cos. \Phi$, hincque tota Normalis $Z N = p + t \cos. \Phi$, quam breuitatis gratia deſignemus per v, ita vt ſit

$$v = C (e^{\alpha \Phi} - e^{\beta \Phi}) + C \cos. \Phi (\alpha e^{\alpha \Phi} - \beta e^{\beta \Phi}), \text{ ſiue}$$
$$v = C e^{\alpha \Phi} (1 + \alpha \cos. \Phi) - C e^{\beta \Phi} (1 + \beta \cos. \Phi).$$

Hinc iam primo deducimus applicatam $X Z = y = v \sin. \Phi$,

ſiue

siue $y = p$ sin. $\Phi + t$ cos. Φ. Pro abscissa vero erit $CX = x$ $= u - v$ cos. Φ, ideoque

$$x = t \text{ sin. } \Phi - p \text{ cos. } \Phi.$$

Hinc ambe coordinatae x et y sequenti modo per angulum Φ exprimentur:

$$x = Ce^{\alpha\Phi}(\alpha \text{ sin.} \Phi - \text{cos.} \Phi) - Ce^{\beta\Phi}(\beta \text{ sin.} \Phi - \text{cos.} \Phi) \text{ et}$$

$$y = Ce^{\alpha\Phi}(\text{sin.} \Phi + \alpha \text{ cos.} \Phi) - Ce^{\beta\Phi}(\text{sin.} \Phi + \beta \text{ cos.} \Phi).$$

Pro initio igitur, vbi $\Phi = 0$, siue pro puncto A, erit $x = 0$ et $y = C(\alpha - \beta)$; vnde patet punctum A puncto C perpendiculariter imminere, existente interuallo $CA = C(\alpha - \beta)$; vnde si statuamus hanc altitudinem $CA = a$, erit $C = \frac{a}{\alpha - \beta}$.

§. 11. Posito igitur pro curuae initio A interuallo $CA = a$, vt sit $C = \frac{a}{\alpha - \beta}$, consideremus reliqua symptomata curuae in hoc loco. Ac primo quidem, cum sit $s = 0$, erit quoque $p = 0$, ideoque recta CA tanget curuam in puncto A. Deinde pro hoc loco erit $t = a$; vnde cum sit radius osculi $r = nt$, in ipso initio A erit radius osculi curuae $= na$. Ante autem vidimus pro hoc puncto esse $x = 0$ et $y = a$, haecque symptomata semper locum habent, siue numerus n fuerit maior, siue minor quam Q; reliqua vero symptomata huius curuae plurimum pendent ab hoc valore, atque adeo maxime variantur, provti fuerit vel $n > 2$, vel $n = 2$, vel $n < 2$, quos ergo casus seorsim perpendamus.

Euolutio casus primi,

quo $n > 2$.

§. 12. Hic igitur ambae litterae α et β reales habebunt valores, eosque positiuos, ergo posito $C = \frac{a}{\alpha - \beta}$ primo habebimus:

$$C p = t = \frac{a}{\alpha - \beta} (\alpha e^{\alpha \Phi} - \beta e^{\beta \Phi}),$$

vbi erit $\alpha - \beta = \sqrt{(nn - 4)}$, hincque radius osculi $ZR = nt = r$. Pro initio autem modo vidimus esse $t = a$ et $r = n a$. Quodsi iam angulus Φ continuo augeatur, euidens est hanc quantitatem t, ideoque etiam radium osculi r continuo crescere, atque adeo in infinitum, quando angulus Φ in infinitum augetur; vnde patet hanc curuam per infinitos gyros continuo maiores circa C reuolui, quod etiam elucet ex valore

$$p = \frac{a}{\alpha - \beta} (e^{\alpha \Phi} - e^{\beta \Phi}),$$

vnde fit $s = n p$. Quoniam enim aucto angulo Φ arcus s continuo increscit, etiam interuallum ZP continuo augetur, atque adeo in infinitum vsque.

§. 13. Perpendamus autem etiam continuationem curvae in alteram partem vltra A, cui respondebunt anguli Φ negatiue sumti, et quoniam valor ipsius t in ipso puncto A erat $t = a$, curuam retro continuando huius lineae quantitas decrescet, atque adeo alicubi euanescet, vbi scilicet erit $\alpha e^{\alpha \Phi} = \beta e^{\beta \Phi}$, vnde sequitur $\Phi = \frac{1}{\alpha - \beta} l \frac{\beta}{\alpha}$. Quia autem $l \beta = - l \alpha$, erit

$$\Phi = \frac{-2 l \alpha}{\alpha - \beta} = \frac{-2 l \alpha}{\sqrt{(n n - 4)}},$$

qui ergo valor ipsius Φ est negatiuus, ob $\alpha > \frac{1}{2} n$. Pro hoc porro puncto, vbi $t = 0$, manifesto radius CZ in curuam erit normalis, simulque radius osculi erit $= 0$. At vero pro eodem loco, vbi $\Phi = \frac{-2 l \alpha}{\alpha - \beta}$, erit

$$e^{\alpha \Phi} = \alpha^{\frac{-2\alpha}{\alpha - \beta}} \text{ et } e^{\beta \Phi} = \alpha^{\frac{-2\beta}{\alpha - \beta}},$$

hincque colligitur fore:

$$p = \frac{a}{\alpha - \beta} (\alpha^{\frac{-2\alpha}{\alpha - \beta}} - \alpha^{\frac{-2\beta}{\alpha - \beta}}) = \frac{a}{\alpha - \beta} \cdot \alpha^{\frac{-2\alpha}{\alpha - \beta}} (1 - \alpha \alpha),$$

qui

qui ergo valor, ob $\alpha > 1$, est negatiuus, id quod necesse est, cum sit $p = \frac{s}{n}$, atque hoc casu arcus curuae s negatiue accipiatur. Quod quo clarius appareat, sit iste arcus retro continuatus, in eoque E punctum, vbi $t = 0$, ideoque radius CE ad curuam normalis $= p$, ita vt sit ipse arcus $AE = np = nCE$. In ipso autem hoc puncto E, quia radius osculi euanescit, satis tuto concludere licet curuam habere cuspidem, vnde in partem contrariam reflectatur. Tum vero pro situ huius puncti E cognoscendo notetur esse angulum $BCE = -\Phi$, ita vt habeamus angulum $BCE = \frac{2l\alpha}{\sqrt{(nn-4)}}$, sicque hoc punctum E innotescit. Sin autem hunc angulum Φ negatiuum vltra istum terminum E augere velimus, quoniam, posito $\Phi = -\infty$, tam p quam s iterum euanescunt, patet arcum AE non vltra terminum E progredi, sed in E necessario reflecti debere, eiusque valorem in contrarium sensum conuerti; atque haud difficulter intelligitur, nostrae curvae portionem vltra hunc terminum E in spiralem esse abituram, post infinitos gyros in ipso centro C terminandam. Quia enim, sumto $\Phi = \infty$, etiam arcus s euanescit, sequitur arcum ab E vsque ad centrum C porrectum praecise aequalem esse futurum arcui AE. Tab. II. Fig. 3.

§. 14. Haec autem omnia clariora reddentur, si praeter elementa hactenus vsurpata insuper in computum introducamus angulum, quem curua in singulis punctis Z cum radio vectore CZ constituit. Ponamus igitur hunc angulum $CZA = \theta$, qui cum sit aequalis angulo ZCP, erit

$$\text{tang.}\, \theta = \frac{p}{t} = \frac{e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}}{\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}};$$

tum vero quia angulus $ACP = \text{ang.}\, CNZ = \Phi$, qui metitur amplitudinem arcus AZ, erit angulus $ACZ = \Phi - \theta$;

vnde

vnde patet, translato puncto Z in A, seu sumto $\Phi = 0$, fore angulum $\theta = 0$, vnde manifesto fit pro hoc casu $CZA = 0$.

§. 15. Progrediamur nunc ab initio A per Z continuo vlterius in infinitum, et quia $\alpha > \beta$, euidens est angulum $AZC = \theta$ paulatim fieri continuo maiorem; statim enim ab initio, vbi Φ adhuc valde paruum, ob $e^{\alpha\Phi} = 1 + \alpha\Phi$ et $e^{\beta\Phi} = 1 + \beta\Phi$ erit

$$\text{tang.}\, \theta = \frac{\Phi(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta) + (\alpha\alpha - \beta\beta)\Phi} = \frac{\Phi}{1 + (\alpha + \beta)\Phi},$$

seu proxime $\theta = \Phi$. Vnde patet, quo longius progrediamur, istum angulum increscere, neque vero vltra certum terminum augeri posse. Si enim amplitudo Φ statuatur infinita, ita vt curua iam per infinitos gyros a centro C recesserit, quia $\alpha > \beta$, terminus $e^{\beta\Phi}$ prae $e^{\alpha\Phi}$ euanescet, sicque tandem fiet tang. $\theta = \frac{1}{\alpha} = \beta$. Quare cum $\alpha\beta = 1$ et $\alpha > \beta$, semper erit $\alpha > 1$ et $\beta < 1$, ideoque tang. $\theta < 1$; vnde patet limitem istum, ad quem angulus θ continuo magis propinquat, minorem esse quam $45°$, sicque ista curua, postquam plures gyros perfecerit, tandem confundetur cum spirali logarithmica, quae a radiis secatur sub angulo, cuius tangens $= \beta$.

§. 16. Egrediamur nunc ab initio A continuo propius ad centrum C, quo casu amplitudo euadet negatiua. Statuamus igitur $\Phi = -\psi$, ita vt ψ sit amplitudo ab initio A retrorsum continuata, eritque

$$\text{tang.}\, \theta = \frac{e^{\beta\psi} - e^{\alpha\psi}}{\alpha e^{\beta\psi} - \beta e^{\alpha\psi}},$$

vnde dum angulus ψ existit quam minimus, erit

$$\text{tang.}\, \theta = \frac{\psi(\beta - \alpha)}{\alpha - \beta} = -\psi,$$

ita vt hic sit $\theta = -\psi$, quo indicatur, istum angulum in partem

tem contrariam conuerti, et continuo fieri maiorem. Mox autem iste angulus θ insignia capiet incrementa, atque adeo vsque ad angulum rectum increscet, quod fit vbi tang. θ euadet infinita, siue vbi fit denominator $\alpha e^{\beta\psi} - \beta e^{\alpha\psi} = 0$; tum igitur erit sumtis logarithmis $l\alpha + \beta\psi = l\beta + \alpha\psi$, vnde colligitur amplitudo:

$$\psi = \frac{1}{\alpha - \beta} l \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2 l \alpha}{\alpha - \beta},$$

siue $\psi = \frac{2 l \alpha}{\sqrt{(nn - 4)}}$. Ponamus nunc hoc euenire in puncto E, ita vt radius CE hic ad curuam sit normalis, et quia $\theta = -90°$, ob $\Phi = -\psi$, erit angulus ACE $= 90° - \psi$, sicque ψ dabit angulum BCE. Quoniam vero hic est $t = 0$ et ipsa distantia $z = \sqrt{(pp + tt)}$, erit haec distantia:

$$CE = p = \frac{a}{\alpha - \beta}(e^{-\alpha\psi} - e^{-\beta\psi}) = \frac{a}{\alpha - \beta} \frac{e^{\beta\psi} - e^{\alpha\psi}}{e^{n\psi}}.$$

Cum igitur sit

$$\psi = \frac{2 l \alpha}{\sqrt{(nn - 4)}} = \frac{2 l \alpha}{\alpha - \beta}, \text{ erit}$$

$$e^{\alpha\psi} = \alpha^{\frac{2\alpha}{\alpha - \beta}}; \quad e^{\beta\psi} = \alpha^{\frac{2\beta}{\alpha - \beta}} \text{ et}$$

$$e^{(\alpha + \beta)\psi} = \alpha^{\frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta}}.$$

Vbi signum negatiuum tantum lineam p afficit, ipsa enim distantia z semper est positiua.

§. 17. Nunc a puncto modo inuento E, vbi $\theta = -90°$, vlterius retro progrediamur, augendo scilicet amplitudinem ψ vltra terminum inuentum, atque denominator fractionis pro tang. θ inuentus euadet negatiuus, sicque angulus θ, qui hactenus fuerat negatiuus, hic subito signum mutabit, et curua ex puncto E in plagam contrariam inflectetur, ita vt in E cuspidem formauerit, et quo longius progrediamur, tang. θ

 con-

continuo magis diminuetur, neque tamen vltra certum terminum, quem cognoſcemus ſtatuendo amplitudinem $\psi = \infty$; tum autem fiet tang. $\theta = \frac{1}{\beta} = \alpha$. Poſtquam igitur curua infinitos gyros continuo minores peregerit, tandem cum ſpirali logarithmica conueniet, cum radiis angulum faciente, cuius tangens $= \alpha$, ideoque maior vnitate, ſicque iſte angulus ſemper maior erit ſemirecto. Per ſe autem perſpicuum eſt diſtantias z continuo magis imminui, atque adeo euaneſcere ob $e^{-\alpha\psi} = 0$ et $e^{-\beta\psi} = 0$.

Euolutio caſus ſecundi, quo $n = 2$.

§. 18. Hunc caſum facile ex praecedente deriuabimus, ponendo $\alpha = \beta = 1$. Quoniam autem hoc caſu in ſuperioribus formulis tam numeratores quam denominatores euaneſcerent, ſtatuemus inter α et β infinite paruam differentiam, ponamusque $\alpha = 1 + \omega$ et $\beta = 1 - \omega$, ſicque erit $\alpha - \beta = 2\omega$; praeterea vero

$$e^{\alpha\Phi} = e^{(1+\omega)\Phi} = e^{\Phi}(1 + \omega\Phi) \text{ et}$$
$$e^{\beta\Phi} = e^{(1-\omega)\Phi} = e^{\Phi}(1 - \omega\Phi).$$

His autem valoribus ſubſtitutis vbique tam numeratorem quam denominatorem per ω diuidere licebit, ita vt hoc pacto littera infinite parua introducta ω ex calculo excedat.

§. 19. Hoc igitur modo ſingulas formulas percurramus, ac primo quidem reperiemus $ZP = p = a\Phi e^{\Phi}$; hinc quia erat arcus $AZ = s = np$, hoc caſu habebimus arcum $AZ = 2a\Phi e^{\Phi}$. Deinde prodibit ſimili modo interuallum $ZP = t = a(1 + \Phi)e^{\Phi}$, vnde ſimul radius oſculi innoteſcet, ſcilicet $r = nt = 2a(1 + \Phi)e^{\Phi}$. Ex his autem coniunctis colligitur tang. $\theta = \frac{p}{t} = \frac{\Phi}{1+\Phi}$, tum vero hinc etiam facile definiri poterit ipſa diſtantia:

C Z

$$CZ = a e^{\Phi} \sqrt{(1 + 2\Phi + 2\Phi\Phi)}.$$

Denique hic manet vt ante angulus $ACZ = \Phi - \theta$.

§. 20. Incipiamus hic quoque a puncto A, vbi $\Phi = o$, ideoque $p = o$ et $s = o$, tum vero $t = a$, $r = 2a$ et angulus $\theta = o$. Hinc autem, amplitudinem Φ progrediendo continuo magis augeamus, atque etiam angulus θ continuo magis increscet, attamen nunquam certum terminum excedet; posito enim $\Phi = \infty$, erit tang. $\theta = 1$, ideoque $\theta = 45°$, sicque ista curua in infinito confundetur cum spirali logarithmica semirectangula; multo tamen magis diuerget, quandoquidem pro spirali foret $z = a e^{\Phi}$; vnde patet hic distantias z esse infinities maiores pro paribus amplitudinibus. Ex quo perspicuum est hanc curuam prorsus vt casu praecedenti per spiras infinitas continuo longius a centro C recedere.

§. 21. Consideremus nunc etiam istam curuam retro continuatam, ac ponamus ψ loco $-\Phi$. Cum igitur sit $z = \frac{a}{e^{\psi}} \sqrt{(1 - 2\psi + 2\psi\psi)}$, euidens est aucta amplitudine ψ denominatorem e^{ψ} multo magis increscere quam numeratorem; vnde distantiae continuo euadent minores, et mox fere euanescent. Deinde cum iam ipse arcus negatiue sumtus sit $s = + \frac{2a\psi}{\psi}$, quam diu amplitudo ψ valde est parua, erit $s = \frac{2a\psi}{1+\psi}$; interim tamen, sumto $\psi = \infty$, etiam iste arcus iterum euanescit; ex quo perspicuum est longitudinem arcus tantum vsque ad certum terminum augeri, eoque superato rursus imminui: Alicubi igitur maximum nanciscetur valorem, quem differentiale huius formulae, nihilo aequatum, ostendet, vnde reperitur $\psi = 1$, hoc est, vbi amplitudo aequatur sinui toto, vnde iste valor maximus respondet amplitudini:

$$\psi = 57°, 17', 45'',$$

 lon-

longitudo autem maxima huius arcus erit $= \frac{2a}{e}$, existente $e = 2,71828$; tum vero, ob $\psi = 1$, erit distantia a centro $z = \frac{a}{e}$, angulus autem θ hoc loco euadet rectus, angulusque ad centrum $\Phi - \theta = 90^\circ - \psi$, ideoque angulus

$$BCE = \psi = 57^\circ, 17', 45';$$

vbi obseruetur casu praecedente, quo erat $n > 2$, angulum BCE semper fuisse minorem.

§. 22. Consideremus nunc rursus istam curuam ab A antrorsum continuatam, et cum vi problematis sit $ss = 8\Sigma$, denotante s arcum et Σ aream sectoris, ob $s = 2a\Phi e$, erit $\Sigma = \frac{1}{2}a^2\Phi^2 e^{2\Phi}$, sicque omnes areae, a puncto fixo A sumtae, quadratis arcuum ab eodem termino sumtorum vtique sunt proportionales; id quod etiam tenendum est de altera curuae portione a puncto A retrorsum versus centrum C procedente, vbi pro loco cuspidis E, quoniam inuenimus arcum $AE = \frac{2a}{e}$, erit area sectoris $ACE = \frac{aa}{2ee}$. Quando autem vltra centrum C versus E progredimur, arcus iterum diminuuntur, et etiam areae sectorum iterum imminui sunt censendae; propterea quod in plagam contrariam vergunt. At vbi vsque ad centrum C fuerit peruentum, tam longitudo arcus quam area euanescunt, id quod eueniet post infinitos gyros, qui tandem etiam cum spirali logarithmica semirectangula confundentur; propterea quod tang. $\theta = \frac{\psi 1}{\psi - 1}$, qui valor sumto $\psi = \infty$, abit in vnitatem, fietque $\theta = 45^\circ$; sicque ista curua ita est comparata, vt tam in infinitum a centro recedens, quam proxime ad centrum accedens cum tali spirali conueniat.

§. 23. Cum igitur, si vicissim a centro C per infinitas spiras vsque ad punctum fixum A progrediamur, tota arcus

cus longitudo euanescat, ideoque etiam area descripta: non solum punctum fixum A problemati nostro satisfaciet, sed etiam ipsum centrum C, ita vt omnes areae a centro C computatae proportionales sint quadratis arcuum ab eodem puncto C sumtorum. Namque si vt ante arcus quicunque A Z vocetur $= s$ et area sectoris ACZ $= \Sigma$, erit quoque totus arcus a centro C ad punctum indefinitum Z porrectus $= s$, eodemque modo area a centro C vsque ad Z sumta $= \Sigma$, sicque etiam pro centro C erit $s s = 8 \Sigma$, quae obseruatio etiam locum habet pro casu primo, quo $n > 2$, vbi ergo proprietas praescripta non solum ad punctum A sed etiam ad centrum C pertinere est censenda.

Euolutio casus tertii,
quo $n < 2$.

§. 24. Quo istum casum facilius in calculo tractari queamus, statuamus $n = 2 \operatorname{cos}. \gamma$, siquidem hoc modo omnes numeri binario minores exprimi possunt, et conditio praescripta nunc postulabit, vt sit $s s = 8 \Sigma \operatorname{cos}. \gamma$; tum autem ambae litterae α et β nunc ita per imaginaria exprimentur, vt sit

$$\alpha = \operatorname{cos}. \gamma + \sqrt{-1} \operatorname{sin}. \gamma \text{ et } \beta = \operatorname{cos}. \gamma - \sqrt{-1} \operatorname{sin}. \gamma.$$

Ponamus autem breuitatis gratia $\operatorname{cos}. \gamma = \mu$ et $\operatorname{sin}. \gamma = \nu$, vt sit

$$\alpha = \mu + \nu \sqrt{-1} \text{ et } \beta = \mu - \nu \sqrt{-1},$$

sicque erit $\alpha - \beta = 2 \nu \sqrt{-1}$.

§. 25. Euoluamus nunc ambas formulas exponentiales $e^{\alpha \Phi}$ et $e^{\beta \Phi}$, et quoniam ex computo Imaginariorum constat esse:

$$e^{\omega \sqrt{-1}} = \operatorname{cos}. \omega + \sqrt{-1} \operatorname{sin}. \omega \text{ et}$$
$$e^{-\omega \sqrt{-1}} = \operatorname{cos}. \omega - \sqrt{-1} \operatorname{sin}. \omega,$$

habemus primo: $e^{\alpha\Phi} = e^{\mu\Phi} \cdot e^{\nu\Phi\sqrt{-1}}$, vnde facta reductione erit:

$$e^{\alpha\Phi} = e^{\mu\Phi}(\text{cof.}\, \nu\Phi + \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, \nu\Phi),$$

fimilique modo erit

$$e^{\beta\Phi} = e^{\mu\Phi}(\text{cof.}\, \nu\Phi - \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, \nu\Phi).$$

In formulis autem fupra inuentis in cafu primo occurrit expreffio $e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}$, cuius ergo valor per iftam reductionem euadit $e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi} = 2\, e^{\mu\Phi} \cdot \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, \nu\Phi$. Deinde quoque occurrit formula $\alpha\, e^{\alpha\Phi} - \beta\, e^{\beta\Phi}$, quae reducta dabit:

1°. $\alpha e^{\alpha\Phi} = e^{\mu\Phi}(\mu\, \text{cof.}\nu\Phi - \nu\, \text{fin.}\nu\Phi + \mu\sqrt{-1}\, \text{fin.}\nu\Phi + \nu\sqrt{-1}\, \text{cof.}\nu\Phi)$,

2°. $\beta e^{\beta\Phi} = e^{\mu\Phi}(\mu\, \text{cof.}\nu\Phi - \nu\, \text{fin.}\nu\Phi - \mu\sqrt{-1}\, \text{fin.}\nu\Phi - \nu\sqrt{-1}\, \text{cof.}\nu\Phi)$,

vnde conficitur:

$$\alpha\, e^{\alpha\Phi} - \beta\, e^{\beta\Phi} = 2\, e^{\mu\Phi}\sqrt{-1}\, (\mu\, \text{fin.}\, \nu\Phi + \nu\, \text{cof.}\, \nu\Phi).$$

§. 26. His iam factis reductionibus, ob

$$\alpha - \beta = 2\nu\sqrt{-1},$$

formulae in cafu primo inuentae ad cafum praefentem accommodari poterunt. Primo enim, quia fupra habuimus

$$p = \frac{a}{\alpha - \beta}(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}),$$

pro cafu praefente habebimus:

$$p = \frac{a\, e^{\mu\Phi}\, \text{fin.}\, \nu\Phi}{\nu}, \text{ hinc porro}$$

$$s = \frac{2\mu\, a\, e^{\mu\Phi}\, \text{fin.}\, \nu\Phi}{\nu}.$$

Deinde erat

$$t = \frac{a}{\alpha - \beta}(\alpha\, e^{\alpha\Phi} - \beta\, e^{\beta\Phi}),$$

vnde pro cafu praefenti erit:

$t =$

$$t = \frac{a}{\nu} \cdot e^{\mu\Phi}(\mu \text{ fin. } \nu\Phi + \nu \text{ cof. } \nu\Phi),$$

vnde deductus eſt radius oſculi:

$$r = n\,t = \frac{2\mu a}{\nu} \cdot e^{\mu\Phi}(\mu \text{ fin. } \nu\Phi + \nu \text{ cof. } \nu\Phi).$$

Praeterea conſiderauimus angulum $ACT = \theta$, vidimusque eſſe tang. $\theta = \frac{p}{t}$, quamobrem nunc habebimus:

$$\text{tang. } \theta = \frac{\text{fin. } \nu\Phi}{\mu \text{ fin. } \nu\Phi + \nu \text{ cof. } \nu\Phi} = \frac{1}{\mu + \nu \text{ cot. } \nu\Phi}.$$

Inuento autem angulo θ oſtendimus eſſe angulum $ACZ = \Phi - \theta$. Denique poſita ipſa diſtantia $CZ = z$, quoniam erat $z = \sqrt{(pp + tt)}$, erit nunc

$$z = \frac{a}{\nu} \cdot e^{\mu\Phi} \sqrt{[(\mu\mu + 1) \text{ fin. } \nu\Phi^2 + 2\mu\nu \text{ fin. } \nu\Phi \text{ cof. } \nu\Phi + \nu\nu \text{ cof. } \nu\Phi^2]},$$

quae expreſſio reducitur ad ſequentem:

$$z = \frac{a}{\nu} e^{\mu\Phi} \sqrt{(1 + \mu\nu \text{ fin. } 2\nu\Phi - \mu\mu \text{ cof. } 2\nu\Phi)}.$$

§. 27. His praeparatis contemplemur attentius ſingula ſymptomata harum curuarum. Ac primo quidem ſumta amplitudine $\Phi = 0$, pro termino initiali A habebimus $p = 0$, ideoque etiam $s = 0$; tum vero erit $t = a$, ideoque radius oſculi in $A = 2\mu a$; porro habebimus $z = t = a$, ita vt prodeat, vti aſſumſimus, interuallum $CA = a$, quae recta ſimul curvam in A tanget, ſiquidem ſit tang. $\theta = 0$. Ab hoc autem termino A antrorſum progrediemur, dum amplitudinem Φ continuo augebimus; tum autem arcus s non perpetuo creſcet, vt caſu primo, quoniam ſumto $\nu\Phi = \pi$ denuo fit $s = 0$, vnde interea valorem maximum acquiſiuerit neceſſe eſt, quem indicat haec aequatio differentialis:

$$\mu \text{ fin. } \nu\Phi + \nu \text{ cof. } \nu\Phi = 0,$$

iisdem caſibus nempe, quibus tam t, quam r euaneſcunt; vnde in his locis angulus θ fiet rectus, ita vt radius CZ ibi

in

in curuam ſit normalis. Quoniam igitur vltra hunc terminum arcus s iterum decreſcit, neceſſe eſt vt curua quaſi reflectatur et in partes contrarias vergat; ex quo patet, in omnibus his punctis curuam cuſpidibus eſſe praeditam atque adeo curvaturam infinitae paruam eſſe habituram. Talia autem puncta adeo infinita dabuntur, ex aequatione:

$$\mu \sin. \nu \Phi + \nu \cos. \nu \Phi = 0$$

definienda; vnde cum ſit $\mu = \cos. \gamma$ et $\nu = \sin. \gamma$, haec aequatio dabit:

$$\cos. \gamma \sin. \nu \Phi + \sin. \gamma \cos. \nu \Phi = 0,$$

ideoque $\sin. (\gamma + \nu \Phi) = 0$, quod manifeſto euenit infinitis caſibus, quibus eſt $\gamma + \nu \Phi$ vel $\pm \pi$, vel $\pm 2 \pi$, vel $\pm 3 \pi$, vel in genere $\pm i \pi$, vnde conſequimur pro his curuis amplitudinem $\Phi = \frac{\pm i \pi - \gamma}{\nu}$. Ex quo intelligitur, hanc curuam antrorſum progrediendo infinitas habituram eſſe cuſpides his amplitudinibus ordine reſpondentes:

$$1^\circ.\ \Phi = \frac{\pi - \gamma}{\nu},$$
$$2^\circ.\ \Phi = \frac{2\pi - \gamma}{\nu},$$
$$3^\circ.\ \Phi = \frac{3\pi - \gamma}{\nu},$$
$$4^\circ.\ \Phi = \frac{4\pi - \gamma}{\nu},$$

etc.

Pro his autem punctis longitudo arcus a termino A ſumta erit

$$1^\circ.\ s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(\pi - \gamma)} \sin. (\pi - \gamma) = 2 \mu a e^{\frac{\mu}{\nu}(\pi - \gamma)},$$

$$2^\circ.\ s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \gamma)} \sin. (2\pi - \gamma) = - 2 \mu a e^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \gamma)}.$$

$3^\circ.\ s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(3\pi - \gamma)} \sin.(3\pi - \gamma) = 2\mu a e^{\frac{\mu}{\nu}(3\pi - \gamma)},$

$4^\circ.\ s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(4\pi - \gamma)} \sin.(4\pi - \gamma) = -2\mu a e^{\frac{\mu}{\nu}(4\pi - \gamma)},$

etc. etc.

§. 28. Iam obſeruauimus in omnibus his punctis fore $t = 0$, ideoque tang. $\theta = \infty$, id quod etiam noſtra formula indicat, quae ad hanc reduci poteſt: tang. $\theta = \frac{\sin. \nu \Phi}{\sin. (\gamma + \nu \Phi)}$. Hinc igitur quia angulus A C Z $= \Phi - \theta$, erit pro caſibus modo memoratis:

$1^\circ.$ Ang. A C Z $= \frac{\pi(2 - \nu)}{2\nu} - \frac{\gamma}{\nu}$,

$2^\circ.$ Ang. A C Z $= \frac{\pi(4 - \nu)}{2\nu} - \frac{\gamma}{\nu}$,

$3^\circ.$ Ang. A C Z $= \frac{\pi(6 - \nu)}{2\nu} - \frac{\gamma}{\nu}$,

$4^\circ.$ Ang. A C Z $= \frac{\pi(8 - \nu)}{2\nu} - \frac{\gamma}{\nu}$,

etc.

Succinctius autem horum angulorum complementa, ſiue anguli B C Z exprimentur, hoc ſcilicet modo:

$1^\circ.$ Ang. B C Z $= \frac{\gamma}{\nu} - \frac{(1 - \nu)\pi}{\nu}$,

$2^\circ.$ Ang. B C Z $= \frac{\gamma}{\nu} - \frac{(2 - \nu)\pi}{\nu}$,

$3^\circ.$ Ang. B C Z $= \frac{\gamma}{\nu} - \frac{(3 - \nu)\pi}{\nu}$,

$4^\circ.$ Ang. B C Z $= \frac{\gamma}{\nu} - \frac{(4 - \nu)\pi}{\nu}$,

Denique ipſae diſtantiae C Z $= z$, quia ob $t = 0$ eſt $z = p$, erunt pro iis locis:

$1^\circ.$ C Z $= a e^{\frac{\mu}{\nu}(\pi - \gamma)}$,

$2^\circ.$ C Z $= a e^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \gamma)}$,

$$3^\circ.\ CZ = a\, e^{\frac{\mu}{\nu}(3\pi - \gamma)},$$

$$4^\circ.\ CZ = a\, e^{\frac{\mu}{\nu}(4\pi - \gamma)},$$

etc

§. 29. Eodem prorſus modo a termino A ad centrum C accedendo innumerabiles dabuntur cuſpides, quae reſpondebunt ſequentibus amplitudinibus negatiuis:

1°. $\Phi = \frac{-\gamma}{\nu}$, (quae puncto E ſupra conſiderato reſpondet),

2°. $\Phi = \frac{-\pi - \gamma}{\nu}$,

3°. $\Phi = \frac{-2\pi - \gamma}{\nu}$,

4°. $\Phi = \frac{-3\pi - \gamma}{\nu}$,

etc. etc.

quae puncta continuo propius ad centrum C accedent, et per infinitas ſpiras, cuſpidibus permixtas, tandem in centro C euaneſcent.

§. 30. Denique iſtae curuae a praecedentibus etiam in hoc diſcrepabunt, quod in infinitis locis longitudo arcus s euaneſcat. Cum enim ſit $s = \frac{2\mu a e^{\mu\Phi}}{\nu}$ ſin. $\nu\Phi$, hoc euenit, vbi fuerit Φ vel $\frac{\pi}{\nu}$, vel $\frac{2\pi}{\nu}$, vel $\frac{3\pi}{\nu}$, etc. vel etiam negatiue $\Phi = \frac{-\pi}{\nu}$, vel $= \frac{-2\pi}{\nu}$, vel $= \frac{-3\pi}{\nu}$, etc. Quare cum in omnibus iſtis locis ſit longitudo arcus $s = 0$, ibidem quoque area Σ euaneſcet, id quod etiam in ipſo centro C eueniet. Vnde concludimus praeter duo puncta A et C innumerabilia inſuper alia dari puncta eiusdem indolis, vt areae a quolibet eorum computatae pariter proportionales ſint quadratis arcuum ab iisdem punctis ſumtorum. Poſtremo hic non eſt praetereundum, in omnibus iſtis punctis curuam a radiis C Z tangi, veluti

veluti euenit in puncto A; et quoniam est $\theta = 0$, pro singulis erit etiam angulus $ACZ = \Phi$, scilicet ipsi amplitudini aequalis, ex quo forma harum curuarum haud difficulter colligi potest.

Alia solutio problematis,

ex radio vectore $CZ = z$ et angulo descripto $ACZ = \omega$, deriuata.

§. 31. Ex his binis variabilibus z et ω primo area $ACZ = \Sigma$ ita exprimitur, vt sit $\Sigma = \frac{1}{2}\int zz\partial\omega$; deinde vero pro arcu curuae $AZ = s$ habebimus:

$$s = \int \surd(\partial z^2 + zz\partial\omega^2),$$

quibus formulis inuentis nostrum problema postulat vt sit

$$ss = 4n\Sigma = 2n\int zz\partial\omega,$$

quae aequatio quo euolui queat, statuamus $z\partial\omega = q\partial z$, vt sit $\partial\omega = \frac{q\partial z}{z}$, sicque loco anguli ω nouam variabilem q introducimus, eritque $\int zz\partial\omega = \int qz\partial z$; tum vero fiet

$$\surd(\partial z^2 + zz\partial\omega^2) = \partial z\surd(1+qq).$$

Differentiemus nunc nostram aequationem, prodibitque $2s\partial s = 2nqz\partial z$, ideoque $s = \frac{nqz}{\surd(1+qq)}$, quae denuo differentiata praebet

$$\partial z\surd(1+qq) = \frac{nq\partial z}{\surd(1+qq)} + \frac{nz\partial q}{(1+qq)^{\frac{3}{2}}},$$

quae ducta in $(1+qq)^{\frac{3}{2}}$ dat hanc aequationem rationalem:

$$\partial z(1+qq)^2 = nq\partial z(1+qq) + nz\partial q.$$

§. 32. Ista aequatio porro insigne hoc commodum praestat, vt binae variabiles a se inuicem separari queant; inde

 enim

enim deducitur $\frac{\partial z}{z} = \frac{+n\partial q}{(1+qq)(1-nq+qq)}$, vnde quantitas z per q definiri poterit. Tum autem, cum fit $\partial\omega = \frac{q\partial z}{z}$, erit

$$\partial\omega = \frac{nq\partial q}{(1+qq)(1-nq+qq)},$$

ficque etiam angulus ω per eandem variabilem q determinabitur. His autem inuentis binae coordinatae $CX = x$ et $XZ = y$, sponte se produnt, ac pariter per solam variabilem q exprimentur: erit enim $x = z\,\text{fin.}\,\omega$ et $y = z\,\text{cof.}\,\omega$, id quod ad solutionem sufficere posset. Verum hic maxime ostendi conveniet, quomodo haec solutio cum praecedente consentiat. Hunc in finem magis euoluamus formulas inuentas, ac quoniam denominator duobus constat factoribus, formula pro $\frac{\partial z}{z}$ inuenta discerpatur in has partes:

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{q\partial q}{1+qq} + \frac{(n-q)\partial q}{1-nq+qq},$$

vnde integrando colligitur:

$$lz = l\surd(1+qq) + \int\frac{(n-q)\partial q}{1-nq+qq}.$$

Hic iam pro parte posteriore ponamus denominatoris $1-nq+qq$ factores esse $(q-\alpha)(q-\beta)$, eritque $\alpha+\beta = n$ et $\alpha\beta = 1$, quo facto resoluetur fractio $\frac{n-q}{(q-\alpha)(q-\beta)}$, in has duas: $\frac{A}{q-\alpha} + \frac{B}{q-\beta}$, existente $A = \frac{\beta}{\alpha-\beta}$ et $B = \frac{-\alpha}{\alpha-\beta}$, sicque habebitur:

$$\int\frac{(n-q)\partial q}{1-nq+qq} = A\,l(q-\alpha) + B\,l(q-\beta),$$

consequenter per meros logarithmos habebimus

$$lz = l\surd(1+qq) + \frac{\beta}{\alpha-\beta}\,l(q-\alpha) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\,l(q-\beta),$$

vnde ad numeros progrediendo erit

$$z = \frac{a\surd(1+qq)(q-\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}}{(q-\beta)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}},$$

quae ergo expressio adeo est algebraica, si modo litterae α et

β

β ſint numeri rationales; ſin autem ſiunt imaginarii, quod euenit quando $n < 2$, tum poſterior integratio ad arcus circulares reuocetur.

§. 33. Tractemus ſimili modo alteram formulam inventam $\partial\omega = \frac{n q \partial q}{(1+qq)(1-nq+qq)}$, quae vt ſupra in duas partes diuellatur, ſcilicet:

$$\partial\omega = \frac{-\partial q}{1+qq} + \frac{\partial q}{1-nq+qq};$$

vbi pars prior praebet arcum circularem, cuius tangens $= q$; poſterior vero, vt ante, per logarithmos exprimetur, ſiquidem litterae α et β fuerint reales. Hic autem plurimum notaſſe iuuabit, cum ſit $\partial\omega = \frac{q\partial z}{z}$, q fore tangentem anguli CZA, quem in ſolutione praecedente littera θ deſignauimus, ita vt ſit $\int\frac{\partial q}{1+qq} = \theta$, vnde aequatio noſtra erit

$$\omega + \theta = \int\frac{\partial q}{1-nq+qq}.$$

Facile autem perſpicitur ſummam horum angulorum exhibere amplitudinem arcus AZ, quam ante vocauimus $= \Phi$, ita vt ſit $\theta + \omega = \Phi = \int\frac{\partial q}{1-nq+qq}$.

§. 34. Videamus igitur, vtrum hinc eandem relationem inter binos angulos θ et Φ elicere queamus, quam in ſuperiore ſolutione ſumus adepti, quae erat

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}}{\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}}.$$

Cum igit ſit $q = \text{tang.}\,\theta$, erit $\partial q = \frac{\partial\theta}{\text{coſ.}\,\theta^2}$, quibus valoribus introductis erit

$$\Phi = \int\frac{\partial\theta}{1 - n\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta} = \int\frac{2\partial\theta}{2 - n\,\text{ſin.}\,2\theta}.$$

Ad hanc conuenientiam oſtendendam retineamus in calculo litteram $q = \text{tang.}\,\theta$, vt ſit $\partial\Phi = \frac{\partial q}{1-nq+qq}$, atque denominatorem

torem per hos factores repraesentemus: $(q-\alpha)(q-\beta)$, existente $\alpha+\beta=n$ et $\alpha\beta=1$, eritque

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q}=\frac{1}{(q-\alpha)(q-\beta)}=\frac{1}{(\alpha-\beta)(q-\alpha)}-\frac{1}{(\alpha-\beta)(q-\beta)}.$$

Nunc igitur erit

$$(\alpha-\beta)\partial\Phi=\frac{\partial q}{q-\alpha}-\frac{\partial q}{q-\beta},$$

vnde integrando fit $(\alpha-\beta)\Phi=l\frac{q-\alpha}{q-\beta}$, hincque ad numeros progrediendo erit $C\,e^{(\alpha-\beta)\Phi}=\frac{q-\alpha}{q-\beta}$, ex qua aequatione elicitur $q=\frac{\beta C\,e^{(\alpha-\beta)\Phi}-\alpha}{C\,e^{(\alpha-\beta)\Phi}-1}$.

§. 35. Haec porro formula supra et infra multiplicata per $e^{\beta\Phi}$ transit in hanc: $q=\frac{\beta C\,e^{\alpha\Phi}-\alpha\,e^{\beta\Phi}}{C\,e^{\alpha\Phi}-e^{\beta\Phi}}$, vbi si capiatur $C=\frac{\alpha}{\beta}$, prodibit

$$q=\frac{\alpha\,e^{\alpha\Phi}-\alpha\,e^{\beta\Phi}}{\frac{\alpha}{\beta}\,e^{\alpha\Phi}-e^{\beta\Phi}}=\frac{e^{\alpha\Phi}-e^{\beta\Phi}}{\alpha\,e^{\alpha\Phi}-\beta\,e^{\beta\Phi}},$$

quae est ea ipsa expressio quam ante inuenimus. Quod autem constanti C hic ipse valor $\frac{\alpha}{\beta}$ tribui debeat, ex prima aequatione inuenta $C\,e^{(\alpha-\beta)\Phi}=\frac{q-\alpha}{q-\beta}$ colligitur, ad ipsum curvae initium A regrediendo, vbi quia recta CA curuam tangit, hic erit $\Phi=0$ et $\theta=0$, ideoque etiam $q=0$, vnde prodit $C=\frac{\alpha}{\beta}$, sicque conformitas huius solutionis cum praecedente perfecte est euicta.

Solutio

Solutio tertia eiusdem problematis, ex binis coordinatis $CX = x$ et $XZ = y$ immediate deducta.

§. 36. Cum igitur hic fit area $CAZX = \int y \partial x$, area vero trianguli $CXZ = \frac{1}{2} xy$, erit area fectoris Tab. II. Fig. 2.

$$ACZ = \Sigma = \tfrac{1}{2} \int (y \partial x - x \partial y).$$

Nunc autem porro ponamus $\partial y = p \partial x$, eritque

$$\Sigma = \tfrac{1}{2} \int \partial x (y - px),$$

hinc vero erit elementum curuae $\partial s = \partial x \sqrt{(1 + pp)}$, quare cum problema noftrum poftulet vt fit $ss = 4 n \Sigma$, prima differentiatio ftatim dat:

$$s \sqrt{(1 + pp)} = n (y - px), \text{ ideoque}$$
$$s = \frac{n (y - px)}{\sqrt{(1 + pp)}}.$$

§. 37. Ante autem quam denuo differentiemus, ponamus $y = u \cdot x$, vnde, quia fit

$$\partial y = u \partial x + x \partial u = p \partial x,$$

habebimus $\frac{\partial x}{x} = \frac{+ \partial u}{p - u}$. Nunc igitur erit

$$y - px = - x (p - u),$$

at vero differentiando commode fit

$$\partial. (y - px) = - x \partial p.$$

His praeparatis differentiatio repetita dabit:

$$\partial x \sqrt{(1 + pp)} = - \frac{n x \partial p}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{n x (p - u) p \partial p}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}},$$

quae aequatio ducta in $(1 + pp)^{\frac{3}{2}}$ nobis largitur:

$$\partial x (1 + pp)^2 = - n x \partial p (1 + pp) + n x (p - u) p \partial p,$$

ex

ex qua ſtatim elicimus:

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{n\,\partial p(1+pu)}{(1+pp)^2}.$$

Cum igitur modo inuenerimus $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$, nunc habebimus aequationem differentialem primi gradus inter binas tantum variabiles p et u, quae ita ſe habet:

$$\frac{\partial u}{p-u} = -\frac{n\,\partial p(1+pu)}{(1+pp)^2}, \text{ ſiue}$$

$$\partial u = -\frac{n\,\partial p(p-u)(1+pu)}{(1+pp)^2},$$

vbi autem ambae variabiles p et u tantopere inter ſe ſunt permixtae, vt vix vlla via patere videatur ad eam reſoluendam; at vero ſimplex ſubſtitutio totum negotium facile conficiet. Statuamus enim $u = \frac{p+q}{1+pq}$, tum enim ſtatim ſatis concinne prodibit:

$$p - u = \frac{q(pp+1)}{1+pq} \text{ et } 1 + pu = \frac{1+pp}{1+pq},$$

qua ergo ſubſtitutione denominator ille $(1+pp)^2$ feliciter tolletur, erit enim

$$\frac{(p-u)(1+pu)}{(1+pp)^2} = \frac{q}{(1+pq)^2}.$$

§. 38. Deinde vero differentiando reperiemus:

$$\partial u = \frac{\partial p(1+qq)}{(1+pq)^2} - \frac{\partial q(1+pp)}{(1+pq)^2},$$

quibus igitur valoribus aequatis, quia denominatores $(1+pq)^2$ vtrinque ſe pulcherrime deſtruunt, aequatio reſultans erit:

$$\partial p(1+qq) - \partial q(1+pp) = -nq\,\partial p,$$

vnde erit $\frac{\partial p}{1+pp} = \frac{\partial q}{1+nq+qq}$. Ponamus iam

$$1 + nq + qq = (q+\alpha)(q+\beta),$$

vt ſit $\alpha + \beta = n$ et $\alpha\beta = 1$, ac ſi ſtatuatur

$$\frac{1}{1+nq+qq} = \frac{A}{q+\alpha} + \frac{B}{q+\beta},$$

erit $A = \frac{-1}{\alpha-\beta}$ et $B = \frac{1}{\alpha-\beta}$, hincque integrando:

Ar.

$$\text{Arc. tang. } p = \frac{1}{\alpha - \beta}\, l\, \frac{q+\beta}{q+\alpha} + C.$$

Iam notetur p eſſe Cotangentem anguli A Z X, qui metitur amplitudinem arcus A Z, quam ſupra poſuimus $= \Phi$, ita vt ſit $p = \cot. \Phi$, ideoque Arc. tang. $p = 90° - \Phi$, ſicque mutata conſtante erit

$$\Phi = l\, c + \frac{1}{\alpha - \beta}\, l\, \frac{q+\alpha}{q+\beta},$$

vnde ad numeros progrediendo erit

$$C\, e^{(\alpha - \beta)\Phi} = \frac{q+\alpha}{q+\beta},$$

vnde colligimus:

$$q = \frac{\alpha - \beta\, C\, e^{(\alpha - \beta)\Phi}}{C\, e^{(\alpha - \beta)\Phi} - 1},$$

hinc autem porro, ob $p = \cot. \Phi$, elicitur valor

$$u = \frac{p - q}{1 + p\, q} = \frac{y}{x}.$$

In ipſo igitur initio, ſeu puncto A, debet eſſe $\Phi = 0$, ideoque $p = \infty$, atque etiam $u = \infty$; vnde perſpicuum eſt eſſe debere $q = 0$. In valore igitur pro q inuento faciamus $\Phi = 0$, et quia eſſe debet $q = 0$, pro conſtante definienda habebimus: $C = \frac{\alpha}{\beta}$, ſicque nunc habemus determinate:

$$q = \frac{\alpha - \alpha\, e^{(\alpha - \beta)\Phi}}{\frac{\alpha}{\beta}\, e^{(\alpha - \beta)\Phi} - 1} = \frac{1 - e^{(\alpha - \beta)\Phi}}{\alpha\, e^{(\alpha - \beta)\Phi} - \beta}, \text{ ſiue}$$

$$q = \frac{e^{\beta\Phi} - e^{\alpha\Phi}}{\alpha\, e^{\alpha\Phi} - \beta\, e^{\beta\Phi}},$$

ex quo intelligitur per angulum, quem ſupra poſuimus θ, fore $q = -\text{tang. } \theta$.

§. 39. Quoniam igitur per p, ſiue per angulum Φ, non ſolum q, ſed etiam u expreſſum inuenimus, poſtrema formula euoluta dabit:

 $u =$

$$u = \frac{e^{\alpha\Phi}(1+\alpha\cot.\Phi) - e^{\beta\Phi}(1+\beta\cot.\Phi)}{e^{\alpha\Phi}(\alpha-\cot.\Phi) - e^{\beta\Phi}(\beta-\cot.\Phi)} = \frac{y}{x}.$$

Tantum igitur ſupereſt, vt aequatio $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$ integretur. Vtamur autem potius poſteriore aequatione:

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{n\,\partial p(1+pu)}{(1+pp)^2},$$

quae ob $1+pu = \frac{1+pp}{1+pq}$ transmutatur in hanc:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{-n\,\partial\Phi}{(1+pp)(1+pq)},$$

quae porro, ob $p = \cot.\Phi$, tranſit in hanc: $\frac{\partial x}{x} = \frac{n\,\partial\Phi}{1+q\cot.\Phi}$. Nunc igitur loco q ſcribatur valor inuentus, ac reperietur:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{n\,\partial\Phi(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi})}{e^{\alpha\Phi}(\alpha-\cot.\Phi) - e^{\beta\Phi}(\beta-\cot.\Phi)},\ \text{ſiue}$$

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{n\,\partial\Phi(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi})}{e^{\alpha\Phi}(\alpha\,\text{ſin.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi)\,e^{\beta\Phi}(\beta\,\text{ſin.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi)}.$$

Haec autem formula nimis complicata videtur, quam vt eius integrationem exſpectare liceat; verum ſi denominatorem differentiemus, deprehendemus fore:

$$e^{\alpha\Phi}\partial\Phi(\alpha\alpha+1)\,\text{ſin.}\,\Phi - e^{\beta\Phi}\partial\Phi(\beta\beta+1)\,\text{ſin.}\,\Phi.$$

Quia vero eſt $\alpha\alpha+1 = n\alpha$ et $\beta\beta+1 = n\beta$, iſtud differentiale erit:

$$n\alpha e^{\alpha\Phi}\partial\Phi\,\text{ſin.}\Phi - n\beta e^{\beta\Phi}\partial\Phi\,\text{ſin.}\Phi = n\,\partial\Phi\,\text{ſin.}\Phi(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}),$$

cui ipſe numerator praeciſe eſt aequalis, ex quo ſtatim adipiſcimur

$$l\,x = l\,[e^{\alpha\Phi}(\alpha\,\text{ſin.}\Phi - \text{coſ.}\Phi) - e^{\beta\Phi}(\beta\,\text{ſin.}\Phi - \text{coſ.}\Phi)] + l\,a,$$

vnde concludimus

$$x = a\,e^{\alpha\Phi}(\alpha\,\text{ſin.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi) - a\,e^{\beta\Phi}(\beta\,\text{ſin.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi).$$

Quodſi nunc fractionem pro $\frac{y}{x}$ inuentam ſupra et infra in ſin. Φ ducamus, habebimus:

y

$$\frac{y}{x} = \frac{e^{\alpha\Phi}(\sin.\Phi + \alpha\cos.\Phi) - e^{\beta\Phi}(\sin.\Phi + \beta\cos.\Phi)}{e^{\alpha\Phi}(\alpha\sin.\Phi - \cos.\Phi) - e^{\beta\Phi}(\beta\sin.\Phi - \cos.\Phi)},$$

ita vt denominator praebeat valorem ipſius x, hincque adeo ſponte ſe offert y; erit enim:

$$y = a\,e^{\alpha\Phi}(\sin.\Phi + \alpha\cos.\Phi) - a\,e^{\beta\Phi}(\sin.\Phi + \beta\cos.\Phi).$$

§. 40. Ex his igitur manifeſtum eſt, etiam hanc poſtremam ſolutionem cum ea, quam primo inuenimus, ad amusſim conuenire, propterea quod §. 10. eaedem plane formulae pro coordinatis x et y ſunt exhibitae. Interim tamen haec tertia ſolutio multo difficiliores integrationes atque artificia multo magis abſtruſa poſtulauit, ob quam ipſam rationem iſta ſolutio imprimis notatu digna eſt viſa.

DE CVRVIS HYPERBOLICIS QVAE INTRA SVAS ASSYMTOTAS SPATIVM FINITVM INCLVDVNT.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 13 *Febr.* 1777.

1.

Tab. II. Fig. 4. Confiderabo hic eiusmodi curuas hyperbolicas, quarum affymtotae inter fe funt normales, quoniam, quae de his reperientur, omnia facile ad Hyperbolas obliquangulas accommodari poffunt. Sit igitur $f\,Y\,e$ eiusmodi Hyperbola, cuius affymtotae CF et CE fint inter fe normales, atque nobis hic eft propofitum eas huius generis curuas inueftigare, quae vtrinque in infinitum continuatae intra fuas affymtotas fpatium finitum includant. Ad hoc igitur requiritur, vt, pofitis coordinatis $CX = x$ et $XZ = y$, formula integralis $\int y\,\partial x$ ita fit comparata, vt a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = \infty$ extenfa, valorem finitum obtineat. Notum autem eft, nullam talium curuarum aequatione binomia expreffarum, veluti $x^m y^n = 1$, hac proprietate praeditam effe, fed femper fpatium ad alterutram affymtotam relatum infinite magnum prodire, atque adeo in Hyperbola conica vtrumque fpatium euadere infinitum.

§. 2.

§. 2. Hic igitur potiſſimum contemplabor eiusmodi Hyperbolas, quarum aequationes inter coordinatas x et y ſunt trinomiales, cuiusmodi generatim haec eſt aequatio:

$$A x^\alpha y^\beta + B x^\gamma y^\delta = C,$$

vbi quidem omnes exponentes α, β, γ, δ, poſitiui, ſeu nihilo maiores eſſe debent, quia alioquin, poſito $x = 0$, applicata y non fieret infinita, vel non euaneſceret poſito $x = \infty$. Praeterea etiam ad inſtitutum noſtrum requiritur, vt ambo coëfficientes A et B ſint poſitiui. Si enim alter foret negatiuus, curua non vniformi tractu intra aſſymtotas protenderetur, ſed alicubi extra eas euagaretur; vnde nihil impedit, quominus ſtatuamus $B = A$, atque adeo etiam $C = A$, ita vt habeamus $x^\alpha y^\beta + x^\gamma y^\delta = 1$. Quae enim ſymtomata pro his curuis fuerint inuenta, eadem facile transferentur ad caſus, quibus iſti coëfficientes ſunt inaequales.

§. 3. Inter has autem curuas imprimis notatu dignae ſunt eae, in quibus binas coordinatas x et y permutare inter ſe licet, id quod euenit quando $\gamma = \beta$ et $\delta = \alpha$, vt aequatio ſit $x^\alpha y^\beta + x^\beta y^\alpha = 1$. Hoc enim modo ambo rami huius curuae ad ſuas aſſymtotas pariter conuergent; ita vt ſi ſpatium ad alterutram aſſymtotam relatum fuerit vel finitum, vel infinitum, etiam alterum eandem legem ſequatur. Nunc igitur inueſtigari conueniet, quemadmodum ambo exponentes α et β comparati eſſe debeant, vt valor formulae integralis $\int y \partial x$, a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ extenſus, quantitati finitae aequalis euadat. Quoniam igitur iſtos exponentes α et β tanquam incognitos ſpectamus, euidens eſt ex hac aequatione neque y per x, neque x per y definiri poſſe.

§. 4. Interim tamen determinatio areae huius curuae facile ſuccedet, ſi nouam variabilem in calculum introducamus,

mus, per quam tam x quam y commode exprimere liceat, id quod ſuccedet, ſi ponamus $y = u x$, tum enim noſtra aequatio fiet: $(u^\alpha + u^\beta) + x^{\alpha+\beta} = 1$; vnde poſito br. gr. $\alpha + \beta = \lambda$, erit $x = \frac{1}{\sqrt[\lambda]{(u^\alpha + u^\beta)}}$, hincque $y = \frac{u}{\sqrt[\lambda]{(u^\alpha + u^\beta)}}$.
Hic notetur abſciſſam x euaneſcere caſu $u = \infty$, quo caſu ſimul y in infinitum creſcere debet. Quia enim numerator u ita exhiberi poteſt, vt ſit $u = \sqrt[\lambda]{u^\lambda} = \sqrt[\lambda]{u^{\alpha+\beta}}$, erit

$$y = \sqrt[\lambda]{\frac{u^{\alpha+\beta}}{u^\alpha + u^\beta}},$$

vbi, quia exponens ipſius u in numeratore maior eſt quam in denominatore, neceſſe eſt vt poſito $u = \infty$ tota expreſſio euadat infinita; contra autem, ſumto $u = 0$, valor ipſius x manifeſto fit infinitus; at ipſius $y = 0$, ob rationem modo allegatam. Hanc ob rem ſequentes integrationes a termino $u = \infty$ vsque ad $u = 0$ extendi oportebit.

§. 5. Hinc autem differentiando reperiemus:

$$\partial x = -\frac{\partial u (\alpha u^{\alpha-1} + \beta u^{\beta-1})}{\lambda (u^\alpha + u^\beta)^{1+\frac{1}{\lambda}}},$$

quae expreſſio ducta in y dabit elementum areae:

$$y \partial x = -\frac{\partial u (\alpha u^\alpha + \beta u^\beta)}{\lambda (u^\alpha + u^\beta)^{1+\frac{2}{\lambda}}},$$

cuius integrale ab $u = \infty$ vsque ad $u = 0$ extendi debet. Quia autem hic poteſtates ipſius u tam in numeratore quam in denominatore reperiuntur, hanc formulam vlterius reducere licet. Sumamus igitur eſſe $\beta > \alpha$, ac ponamus $\beta = \alpha + \varepsilon$, atque formula denominatoris ita referri poterit: $u^\alpha (1 + u^\varepsilon)$, ſicque

ſicque denominator erit

$$\lambda u^{\alpha + \frac{2\alpha}{\lambda}} (1 + u^{\varepsilon})^{1 + \frac{2}{\lambda}}.$$

Diuidamus igitur tam numeratorem quam denominatorem per $u^{\alpha + \frac{2\alpha}{\lambda}}$, et habebimus

$$y \partial x = - \frac{\partial u (\alpha u^{-\frac{2\alpha}{\lambda}} + \beta u^{\varepsilon - \frac{2\alpha}{\lambda}})}{\lambda (1 + u^{\varepsilon})^{1 + \frac{2}{\lambda}}},$$

hinc igitur integrale noſtrum conſtat ex ſequentibus duobus membris:

$$\int y \partial x = - \frac{\alpha}{\lambda} \int \frac{u^{-\frac{2\alpha}{\lambda}} \partial u}{(1 + u^{\varepsilon})^{1 + \frac{2}{\lambda}}} - \frac{\beta}{\lambda} \int \frac{u^{\varepsilon - \frac{2\alpha}{\lambda}} \partial u}{(1 + u^{\varepsilon})^{1 + \frac{2}{\lambda}}}.$$

Quoniam vero neutra harum formularum, integrationem, in genere quidem, admittit, id tantum nobis inquirendum relinquitur: vtrum haec duo integralia a termino $u = \infty$ vsque ad terminum $u = 0$ extenſa, valores adipiſcantur finitos, an infinitos, ad quod diiudicandum ſequens Lemma praemitti oportet: *Iſta formula integralis:* $\int \frac{u^m \partial u}{(1 + u^n)^k}$, *a termino* $u = 0$ *vsque ad terminum* $u = \infty$ *extenſa, valorem habebit finitum, quoties fuerit* $m + 1 > 0$, *ſimulque* $m + 1 < k n$.

Demonſtratio.

§. 6. Quaeramus primo tantum huius formulae valorem ab $u = 0$ vsque ad $u = 1$ extenſum, quem vocemus $= P$, atque vt integrale per ſeriem exhibeamus, quia eſt

$$\frac{1}{(1 + u^n)^k} = 1 - \frac{k}{1} . u^n + \frac{k(k+1)}{1.2} u^{2n} - \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3} u^{3n} + \text{etc.}$$

erit

erit iſtud integrale in genere:

$$P = \frac{u^{m+1}}{m+1} - \frac{k}{1} \cdot \frac{u^{n+m+1}}{n+m+1} + \frac{k(k+1)}{1.2} \frac{u^{2n+m+1}}{2n+m+1} - \text{etc.}$$

qui valor vtique euaneſcit poſito $u = 0$, ſi modo fuerit $m + 1 > 0$, quae eſt conditio primo commemorata. Hinc igitur poſito $u = 1$ erit valor quem quaerimus:

$$P = \frac{1}{m+1} - \frac{k}{1(n+m+1)} + \frac{k(k+1)}{1.2(2n+m+1)} - \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3(3n+m+1)} + \text{etc.}$$

cuius ſeriei ſumma, quoniam terminorum ſigna alternantur, certe eſt finita, ſicque littera P valorem habebit finitum.

§. 7. Huic valori igitur inſuper addere debemus eum qui ex integratione eiusdem formulae naſcitur, ſiquidem a termino $u = 1$ vsque ad terminum $u = \infty$ extendatur, quem valorem indicemus littera Q, ita vt ſit

$$Q = \int \frac{u^m \partial u}{(1+u^n)^k} \begin{bmatrix} \text{ab } u = 1 \\ \text{ad } u = \infty \end{bmatrix}.$$

Hunc in finem ſtatuamus $u = \frac{1}{v}$, et nunc termini integrationis erunt a $v = 1$ vsque ad $v = 0$. Facta autem ſubſtitutione formula noſtra euadet:

$$Q = -\int \frac{v^{kn-m-2} \partial v}{(v^n+1)^k} \begin{bmatrix} \text{a } v = 1 \\ \text{ad } v = 0 \end{bmatrix}.$$

Sin autem terminos integrationis permutemus, erit

$$Q = +\int \frac{v^{kn-m-2} \partial v}{(v^n+1)^k} \begin{bmatrix} \text{a } v = 0 \\ \text{ad } v = 1 \end{bmatrix}.$$

§. 8. Iam denominatorem vt ante in ſeriem reſoluamus, quae erit

$$1 - \frac{k}{1} v^n + \frac{k(k+1)}{1.2} v^{2n} - \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3} v^{3n} + \text{etc.}$$

quae ducta in $v^{nk-m-2} \partial v$ et integrata dabit:

v

$$\frac{v^{nk-m-1}}{nk-m-1} - \frac{k}{1} \cdot \frac{v^{nk+n-m-1}}{nk+n-m-1} + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{v^{nk+2n-m-1}}{nk+2n-m-1} - \text{etc.}$$

quae series euanescit casu $v = 0$, si modo fuerit $n k - m - 1 > 0$, hoc est $n k > m + 1$, quae est altera conditio praescripta. Statuatur $v = 1$, eritque

$$Q = \frac{1}{nk - m - 1} - \frac{k}{1(nk + n - m - 1)} + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2(nk + 2n - m - 1)} - \text{etc.}$$

cuius seriei valor, quoniam signa terminorum alternantur, certe est finitus, consequenter formulae propositae $\int \frac{u^m \partial u}{(1 + u^n)^k}$, a termino $u = 0$ vsque ad $u = \infty$ extensae, valor erit $= P + Q$, ideoque finitus, si modo fuerit tam $m + 1 > 0$, quam $m + 1 < k n$.

Alia demonstratio eiusdem Lemmatis.

§. 9. Statuamus $u^n = \frac{t^n}{1 - t^n}$ fietque $u = 0$, si $t = 0$; at fiet $u = \infty$, facto $t = 1$, sicque termini integrationis nunc erunt a $t = 0$ ad $t = 1$. Tum autem erit $1 + u^n = \frac{1}{1 - t^n}$ et denominator $= \frac{t}{(1 - t^n)^k}$. Deinde vero ob $u = \frac{t}{\sqrt[n]{(1 - t^n)}}$, erit $u^m = \frac{t^m}{(1 - t^n)^{\frac{m}{n}}}$, denique $\partial u = \frac{\partial t}{(1 - t^n)^{2 + \frac{1}{n}}}$. His igitur valoribus substitutis formula integranda erit:

$$\int \frac{t^m \partial t}{(1 - t^n)^{\frac{m+1}{n} - k + 1}} \begin{bmatrix} \text{a} & t = 0 \\ \text{ad} & t = 1 \end{bmatrix}.$$

Hic primum obseruasse iuuabit, vt integrale posito $t = 0$ euanescere possit, requiri vt sit $m + 1 > 0$. Deinde vero, quia denominator euanefcit pofito $t = 1$, ne etiam integrale hoc cafu in infinitum excrefcat, neceffe eft vt exponens denominatoris $\frac{m+1}{n} - k + 1$ fit vnitate minor; vnde fequitur conditio $m + 1 < k n$, quae funt eaedem conditiones in Lemmate allatae.

§. 10. Applicemus nunc hoc Lemma ad binas formulas integrales, ex quibus aream totam $\int y \partial x$ componi inuenimus, quod quo facilius fieri poffit, immutemus quoque terminos integrationis, vt fit:

$$\int y \partial x = \frac{\alpha}{\lambda} \int \frac{u^{-\frac{2\alpha}{\lambda}} \partial u}{(1+u^{\varepsilon})^{1+\frac{2}{\lambda}}} + \frac{\beta}{\lambda} \int \frac{u^{\varepsilon - \frac{2\alpha}{\lambda}} \partial u}{(1+u^{\varepsilon})^{1+\frac{2}{\lambda}}} \begin{bmatrix} \text{ab } u = 0 \\ \text{ad } u = \infty \end{bmatrix},$$

atque applicatio prioris partis ad noftrum Lemma dabit $m = -\frac{2\alpha}{\lambda}$, $n = \varepsilon$ et $k = 1 + \frac{2}{\lambda}$, vnde prior conditio $m + 1 > 0$ praebet $\lambda > 2\alpha$. Quia igitur eft $\lambda = \alpha + \beta$, debet effe $\beta > \alpha$, quae conditio iam fponte eft adimpleta; altera vero conditio $m + 1 < n k$ pro noftro cafu dat $\lambda - 2\alpha < (\lambda + 2)\varepsilon$, ideoque $\lambda + 1 > 0$, quod etiam vltro euenit, quoniam bini exponentes α et β neceffario funt pofitiui, vnde prior formula perpetuo habet valorem finitum, quicunque valores litteris α et β tribuantur.

§. 11. Applicemus pari modo noftrum Lemma ad alteram formulam, pro qua erit $m = \varepsilon - \frac{2\alpha}{\lambda}$, $n = \varepsilon$ et $k = 1 + \frac{2}{\lambda}$; hinc prior conditio $m + 1 > 0$ multo magis fponte adimpletur quam ante. At vero altera conditio $m + 1 < k n$ praebet $\lambda - 2\alpha < 2\varepsilon$; quia autem $\lambda - 2\alpha = \beta - \alpha = \varepsilon$, haec conditio pariter fponte adimpletur, nifi fit $\varepsilon = 0$, hoc eft $\beta = \alpha$.

§. 12.

§. 12. Hinc igitur patet, omnes Hyperbolas in hac aequatione: $x^\alpha y^\beta + x^\beta y^\alpha = 1$, contentas intra suas assymtotas semper spatia finita includere, quicunque numeri positiui exponentibus α et β tribuantur, solo casu $\beta = \alpha$ excepto, quo aequatio nostra abit in $2 x^\alpha y^\alpha = 1$, ideoque $x y =$ Const. quae aequatio est pro Hyperbola conica, cuius spatium vtique est infinitum, id quod eo magis est mirandum, quia in Hyperbolis binomialibus nulla plane nostro scopo satisfacit.

§. 13. Hactenus in aequatione tractata omnes coëfficientes vnitati aequales assumsimus: facile autem apparet, demonstrationem pari modo esse successuram, si coëfficientes quicunque adiungantur, dummodo fuerint positiui, quandoquidem etiam Lemma supra allatum omnem vim retinet, etiamsi formula integralis hoc modo proponatur: $\int \frac{u^m \partial u}{(a + b u^n)^k}$. Hanc ob rem sequens Theorema generalius in medium afferre licet.

Theorema.

Omnes curuae hyperbolicae in hac aequatione contentae:

$$a x^\alpha y^\beta + b x^\beta y^\alpha = c,$$

intra assymtotas suas spatium finitum includent, 1°.) *si omnes coëfficientes* a, b, c, *fuerint positiui;* 2°.) *si exponentes* α *et* β *fuerint pariter ambo positiui;* 3°.) *si fuerint inter se inaequales.*

§. 14. Iam enim obseruauimus, si coëfficientium a et b alteruter euanescat, quo casu aequatio fit binomialis, tum spatium inter has Hyperbolas et suas assymtotas inclusum semper esse infinite magnum. Deinde, si exponentes α et β inter

ter ſe eſſent aequales, curua abiret in Hyperbolam conicam, ideoque etiam memoratum ſpatium haberet infinitum, ex quo intelligitur, quo magis hi exponentes α et β a ratione aequalitatis recedant, eo minus eſſe futurum ſpatium inter curuas et aſſymtotas contentum. Porro etiam hoc ſpatium eo magis diminuetur, quo propius ambo coëfficientes *a* et *b* ad aequalitatem acceſſerint.

§. 15. Caſus autem iſte tractatus maxime eſt particularis reſpectu aequationis generalis ex tribus terminis conſtantis, quae eſt:

$$a\,x^{\alpha}\,y^{\beta} + b\,x^{\gamma}\,y^{\delta} = c,$$

quam autem aequationem non eodem modo, vti praecedentem, tractare licet. Interim tamen circa hanc aequationem generaliſſimam ſequens theorema rigoroſe demonſtrare licet.

Theorema generale.

Omnes curuae hyperbolicae in hac aequatione generali contentae: $a\,x^{\alpha}\,y^{\beta} + b\,x^{\gamma}\,y^{\delta} = c$, *intra ſuas aſſymtotas ſpatium finitum includent ſub ſequentibus conditionibus:* 1°.) *ſi ſinguli coëfficientes* a, b, c, *fuerint poſitiui ſiue nihilo maiores;* 2°.) *ſi etiam omnes exponentes* α, β, γ, δ, *fuerint poſitiui, quandoquidem, ſi vnicus eſſet negatiuus, vel ſaltem nihilo aequalis, curuae ne quidem forent Hyperbolae;* 3°.) *requiritur vt harum duarum fractionum* $\frac{\alpha}{\beta}$ *et* $\frac{\gamma}{\delta}$, *altera ſit vnitate maior, altera vero minor; ſi enim vel ambae eſſent vnitate maiores vel ambae minores, vel altervtra ſaltem* $=1$, *tum ſpatium de quo loquimur, ſemper foret infinite magnum.*

Demonſtratio.

§. 16. Quia coëfficientes *a*, *b*, *c* in iudicio circa infinitum vel finitum non in computum ingrediuntur, eorum lo-

co

co commoditatis gratia vnitatem ſcribamus. Deinde quia fractionum $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\delta}$ altera debet eſſe vnitate maior, altera minor, vt huius conditionis rationem in calculum inferamus, ponamus eſſe $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ et $\frac{\gamma}{\delta} < 1$, huncque in finem ſtatuamus $\alpha = \beta + \mu$ et $\delta = \gamma + \nu$, vt aequatio noſtra ſit:

$$x^{\beta+\mu} . y^{\beta} + x^{\gamma} y^{\gamma+\nu} = 1.$$

§. 17. Hic autem ſtatim patet, ſubſtitutionem ante vſurpatam $y = u x$ hic nullum plane vſum eſſe allaturam. Ponamus autem modo generaliori $y = u x^{\theta}$, et aequatio reſultans erit:

$$x^{\beta+\mu+\beta\theta} u^{\beta} + x^{\gamma+\gamma\theta+\nu\theta} u^{\gamma+\nu} = 1.$$

Iam ambos ipſius x exponentes ſtatuamus aequales, vt ſit

$$\beta + \mu + \beta\theta = \gamma + \gamma\theta + \nu\theta,$$

vnde reperitur $\theta = \frac{\beta+\mu-\gamma}{\gamma+\nu-\beta}$. Hinc autem fiet exponens ipſius $x = \frac{\beta\nu+\gamma\mu+\mu\nu}{\gamma+\nu-\beta}$. Hunc autem exponentem br. gr. ponemus $= \lambda$, vt ſit $\lambda = \frac{\beta\nu+\gamma\mu-\mu\nu}{\gamma+\nu-\beta}$, atque aequatio noſtra iam erit:

$$x^{\lambda}(u^{\beta} + u^{\nu+\gamma}) = 1, \text{ ideoque}$$

$$x = \frac{1}{(u^{\beta} + u^{\gamma+\nu})^{\frac{1}{\lambda}}}; \text{ tum autem erit}$$

$$y = x^{\theta} . u = \frac{u}{(u^{\beta} + u^{\gamma+\nu})^{\frac{\theta}{\lambda}}}, \text{ vbi eſt}$$

$$\frac{\theta}{\lambda} = \frac{\beta+\mu-\gamma}{\beta\nu+\gamma\mu+\mu\nu}.$$

Hic igitur exponens denominatoris ſemper eſt poſitiuus.

 §. 18.

§. 18. Nunc vt aream exprimere possimus, differentiemus abscissam x, et quia coëfficientes ad nostrum institutum nihil conferunt, eos prorsus negligamus, eritque:

$$\partial x = \frac{(u^{\beta - 1} + u^{\gamma + \nu - 1})\,\partial u}{(u^{\beta} + u^{\gamma + \nu})^{\frac{1}{\lambda} + 1}}.$$

Hinc autem porro erit elementum areae:

$$y\,\partial x = \frac{\partial u\,(u^{\beta} + u^{\gamma + \nu})}{(u^{\beta} + u^{\gamma + \nu})^{\frac{1 + \lambda + \theta}{\lambda}}},$$

vbi exponens denominatoris est $\frac{\beta\nu + \gamma\mu + \mu\nu + \mu + \nu}{\beta\nu + \gamma\mu + \mu\nu}$, qui ergo semper est positiuus, atque adeo vnitate maior. Vnde si br. gr. ponamus $\frac{\mu + \nu}{\beta\nu + \gamma\mu + \mu\nu} = \xi$, iste exponens erit $1 + \xi$, atque elementum areae nunc erit:

$$y\,\partial x = \frac{\partial u\,(u^{\beta} + u^{\gamma + \nu})}{(u^{\beta} + u^{\gamma + \nu})^{1 + \xi}}.$$

§. 19. Ante autem quam nostrum Lemma supra datum huc transferre liceat, tres casus probe a se inuicem distingui oportet, prouti fuerit vel 1°. $\gamma + \nu > \beta$, vel 2°. $\gamma + \nu < \beta$, vel 3°. $\gamma + \nu = \beta$, vnde a postremo, vtpote simplicissimo, inchoëmus.

Casus I. quo $\beta = \gamma + \nu$.

§. 20. Hoc casu substitutio adhibita locum habere plane nequit, propterea quo tam λ quam θ in infinitum excrescerent; verum hoc casu negotium sine vlla substitutione expediri potest. Cum enim aequatio nostra fiat:

$$x^{\beta + \mu} y^{\beta} + x^{\gamma} y^{\beta} = 1,$$

hinc statim fit:

$y^{\beta} =$

$$y^{\beta} = \frac{1}{x^{\beta+\mu} + x^{\gamma}}, \text{ ideoque}$$

$$y = \frac{1}{(x^{\beta+\mu} + x^{\beta-\nu})^{\frac{1}{\beta}}},$$

consequenter elementum areae:

$$y\,\partial x = \frac{\partial x}{(x^{\beta+\mu} + x^{\beta-\nu})^{\frac{1}{\beta}}};$$

vbi denominator ita exhiberi potest: $x^{\frac{\beta-\nu}{\beta}}(1 + x^{\mu+\nu})^{\frac{1}{\beta}}$, quo pacto formula nostra integranda erit:

$$y\,\partial x = \frac{x^{\frac{\nu-\beta}{\beta}}\,\partial x}{(1 + x^{\mu+\nu})^{\frac{1}{\beta}}}.$$

§. 21. Nunc igitur ad hanc formam nostrum Lemma applicare licebit, vt pateat, vtrum integrale huius formulae a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ valorem obtineat finitum, nec ne. Facta autem applicatione erit $m = \frac{\nu-\beta}{\beta}$, $n = \mu + \nu$, $k = \frac{1}{\beta}$, vnde vt spatium quaesitum euadat finitum, primo esse debet $m + 1 > 0$, hoc est $\frac{\nu}{\beta} > 0$, quae conditio sponte adimpletur, quoniam omnes litterae denotant numeros positiuos Altera vero conditio postulat vt sit $m + 1 < nk$, hoc est $\frac{\nu}{\beta} < \frac{\mu+\nu}{\beta}$, quod pariter est manifestum, ita vt iam certum sit, casu $\gamma + \nu = \beta$ spatium, quod consideramus, esse finitae magnitudinis.

Casus II. quo $\gamma + \nu > \beta$.

§. 22. Sit igitur $\gamma + \nu = \beta + \varepsilon$; hoc ergo casu erit

$$\partial = \frac{\beta + \mu - \gamma}{\varepsilon} \text{ et } \lambda = \frac{\beta\nu + \gamma\mu + \mu\nu}{\varepsilon}.$$

Hinc cum iam sit

$x =$

$$x = \frac{1}{u^{\frac{\beta}{\lambda}}(1+u^{\varepsilon})^{\frac{\xi}{\lambda}}} \text{ et } y = \frac{u^{1-\frac{\beta\theta}{\lambda}}}{(1+u^{\varepsilon})^{\frac{\theta}{\lambda}}},$$

primo, ob λ numerum positiuum, euidens est sumto $u = \infty$ prodire $x = 0$; contra vero sumto $u = 0$ fieri $x = \infty$. Casu autem $u = \infty$ fit

$$y = \frac{u^{1-\frac{\beta\theta}{\lambda}}}{u^{\varepsilon\frac{\theta}{\lambda}}} = u^{1-\frac{\beta\theta-\varepsilon\theta}{\lambda}},$$

quod erit infinitum, si fuerit $1 > \frac{(\beta+\varepsilon)\theta}{\lambda}$, hoc est $\frac{\lambda}{\theta} > \beta + \varepsilon$. Est vero $\frac{\lambda}{\theta} = \frac{\beta\nu+\gamma\mu+\mu\nu}{\beta+\mu-\gamma}$, ideoque $\gamma + \nu > \beta$, quae est ipsa nostra hypothesis. Eodem modo ostenditur, casu $u = 0$ etiam fieri $y = 0$: erit enim $y = u^{1-\frac{\beta\theta}{\lambda}}$, vbi ergo exponens multo magis est positiuus quam praecedente casu, ita vt certe sit $y = 0$, facto $u = 0$. Hoc igitur notato formulam integralem $\int y\,\partial x$ a termino $u = \infty$ vsque ad $u = 0$ extendi oportet.

§. 23. Cum igitur θ et λ sint numeri positiui, elementum areae in duas partes discerpatur:

$$y\,\partial x = \frac{u^{\beta}\,\partial u}{u^{\beta+\beta\xi}(1+u^{\varepsilon})^{1+\xi}} + \frac{u^{\beta+\varepsilon}\,\partial u}{u^{\beta+\beta\xi}(1+u^{\varepsilon})^{1+\xi}}.$$

Nunc igitur Lemma nostrum primo ad formulam priorem accommodemus, eritque $m = -\beta\xi$, $n = \varepsilon$ et $k = 1 + \xi$, vnde prima conditio, quae postulat $m + 1 > 0$, dat $1 > \beta\xi$, hoc est $\gamma + \nu > \beta$, quae est ipsa hypothesis; vnde patet priorem conditionem $m + 1 > 0$ multo magis in altera formula locum habere. E contrario autem altera conditio $m + 1 < nk$ in priore formula certe valebit, si in posteriore locum habeat. Pro altera autem formula est $m = \varepsilon - \beta\xi$ et $kn = \varepsilon(1+\xi)$. Quare cum esse debeat $m + 1 < nk$, erit nobis $1 - \beta\xi < \varepsilon\xi$,

hinc

hinc substituto loco ξ valore erit $\beta < \gamma + \nu$, quae iterum est ipsa hypothesis praescripta, vnde etiam pro hoc casu Theorema nostrum est euictum.

Casus III. quo $\gamma + \nu < \beta$.

§. 24. Sit igitur $\gamma + \nu = \beta - \varepsilon$, vnde ambo valores θ et λ euadent negatiui, scil. $\theta = \frac{\beta + \mu - \gamma}{-\varepsilon}$ et $\lambda = \frac{\beta\nu + \gamma\mu + \mu\nu}{-\varepsilon}$, vnde erit

$$x = \frac{1}{u^{\frac{\beta - \varepsilon}{\lambda}}(1 + u^{\varepsilon})^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Hinc quia λ valorem habet negatiuum, euidens est, inuerso modo fieri $x = 0$, quando $u = 0$, atque $x = \infty$, si $u = \infty$. Hinc autem iam ex natura rei sequitur, priore casu fieri $y = \infty$, posteriore vero $y = 0$, ideoque nunc formulam integralem $\int y\,\partial x$ ab $u = 0$ vsque ad $u = \infty$ extendi oportet.

§. 25. Quanquam autem hic valores litterarum θ et λ sunt negatiui, tamen exponens principalis ξ semper est positiuus, siquidem est $\xi = \frac{\mu + \nu}{\beta\nu + \gamma\mu + \mu\nu}$, quae expressio ob $\gamma + \nu = \beta - \varepsilon$ transformatur in hanc:

$$\xi = \frac{\mu + \nu}{\beta(\mu + \nu) - \varepsilon\mu};$$

vbi notetur ε non solum esse numerum positiuum sed etiam minorem quam β. Nunc igitur formulam pro area accuratius perpendamus, quae ob $\gamma + \nu = \beta - \varepsilon$ ita se habebit:

$$y\,\partial x = \frac{u^{\beta}\,\partial u + u^{\beta - \varepsilon}\,\partial u}{(u^{\beta} + u^{\beta - \varepsilon})^{1 + \xi}},$$

cuius denominator, quia factorem habet $u^{\beta - \varepsilon}$, ita repraesentetur: $(u^{\beta - \varepsilon})^{1 + \xi}(1 + u^{\varepsilon})^{1 + \xi}$, hocque modo area quaesita duabus his conſtabit partibus:

$$\int y\,\partial x = \int \frac{u^{-\xi(\beta-\varepsilon)}\,\partial u}{(1+u^{\varepsilon})^{1+\xi}} + \int \frac{u^{\varepsilon-\xi(\beta-\varepsilon)}\,\partial u}{(1+u^{\varepsilon})^{1+\xi}}.$$

§. 26. Nunc vtramque hanc formulam ſecundum noſtrum Lemma examinemus, et facta comparatione pro priore habebimus $m = -\xi(\beta-\varepsilon)$; $n = \varepsilon$ et $k = 1+\xi$, vnde prima conditio $m+1 > 0$ dat $1-\xi(\beta-\varepsilon) > 0$, quae, ſubſtituto valore ipſius ξ, praebet:

$$\beta(\mu+\nu) - \varepsilon\mu - (\mu+\nu)(\beta-\varepsilon) > 0,$$

quae euoluta dat $\varepsilon\nu > 0$, quod ob ε et ν numeros poſitiuos per ſe eſt manifeſtum. Simul vero hinc patet, ſi ν eſſet negatiuum, tum iſtam conditionem non adimpleri, ideoque aream prodituram eſſe infinitam. Altera vero conditio, quae poſtulat $m+1 < nk$, praebet

$$1 - \xi(\beta-\varepsilon) < \varepsilon(1+\xi),$$

ſiue $1-\beta\xi < \varepsilon$, ac pro ξ valore ſubſtituto:

$$-\varepsilon\mu < \varepsilon[\beta(\mu+\nu) - \varepsilon\mu],$$

quae per numerum poſitiuum diuiſa praebet hanc conditionem:

$$\varepsilon\mu - \mu < \beta(\mu+\nu),$$

quae conditio etiam manifeſto adimpletur, ob $\varepsilon < \beta$.

§. 27. Simili modo alteram formulam tractemus, in qua $m = \varepsilon - \xi(\beta-\varepsilon)$, $n = \varepsilon$ et $k = 1+\xi$. Cum igitur hic ſit m maius quam ante, prior conditio multo magis implebitur; pro altera autem conditione hic habebimus:

$$m+1 = 1+\varepsilon-\xi(\beta-\varepsilon) = 1+\varepsilon(1+\xi)-\beta\xi.$$

At vero nk eſt $\varepsilon(1+\xi)$, vnde ſecunda conditio poſtulat $1-\beta\xi < 0$, ſiue $\beta\xi > 1$, hoc eſt

$$\beta(\mu+\nu) > \beta(\mu+\nu) - \varepsilon\mu$$

ſiue

fiue $\varepsilon \mu > 0$, quod vtique euenit, quia μ fupponitur poſitiuum. Simul vero hinc patet, fi μ eſſet negatiuum, tum ſpatium quaeſitum futurum eſſe infinitum, quae circumſtantia etiam in caſu primo locum habet.

§. 28. His igitur tribus caſibus coniunctis ſummo vigore euictum eſt, ſpatium inter has Hyperbolas et ſuas aſſymtotas incluſum ſemper fore finitae magnitudinis, ſi modo litterae μ et ν fuerint poſitiuae, vti quidem aſſumſimus; tum autem fractio $\frac{\alpha}{\beta}$ vnitate erit maior, altera vero fractio $\frac{\gamma}{\delta}$ vnitate minor, quae fractiones cum permutationes patiantur, ſequitur, quoties ambarum harum fractionum $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\delta}$ altera fuerit vnitate maior, altera minor, toties ſpatium memoratum finitam habiturum eſſe magnitudinem, ſimul vero quoque demonſtratum eſt, ſi vel ambae hae fractiones fuerint maiores vnitate vel minores, toties iſtud ſpatium eſſe infinitum.

§. 29. Hactenus quidem contenti fuimus eos caſus aſſignare, quibus ſpatium memoratum habeat finitam quantitatem, neque vero ſolliciti fuimus de vera eius quantitate, quae plerumque formulas integrales intractabiles poſtulat, vbi ſcilicet integratio ad quantitates maxime tranſcendentes aſſurgeret. Caſum igitur ſatis memorabilem ſubiungamus, quo ipſam iſtam aream adeo algebraice ſatis ſimplici modo exprimere licet.

Problema.

Si natura curuae hyperbolicae hac aequatione fuerit expreſſa: $a x^\alpha y^\beta + b x^\beta y^\alpha = c$, *vbi coëfficientes* a, b, c, *omnes ſint poſitiui, exponentes vero* α et β *ita comparati, vt eorum ſumma vnitati aequetur, aream inueſtigare, quam iſtae curuae in infinitum productae intra ſuas aſſymtotas includunt.*

 Solu-

Solutio.

§. 30. Quoniam assumitur $\alpha + \beta = 1$, ponamus
$$\alpha = \tfrac{1+\lambda}{2} \text{ et } \beta = \tfrac{1-\lambda}{2},$$
vt fit $\alpha - \beta = \lambda$. Nunc ponatur $y = u\,x$, et aequatio nostra dabit: $(a\,u^\beta + b\,u^\alpha)\,x = c$, vnde fit

$$x = \frac{c}{a\,u^\beta + b\,u^\alpha}, \text{ ideoque}$$

$$y = \frac{c\,u}{a\,u^\beta + b\,u^\alpha}; \text{ tum igitur erit}$$

$$\partial x = -\frac{c\,(a\,\beta\,u^{\beta-1} + b\,\alpha\,u^{\alpha-1})\,\partial u}{(a\,u^\beta + b\,u^\alpha)^2},$$

ex quo conficitur elementum areae:

$$y\,\partial x = -\frac{\beta\,a\,c\,c\,u^\beta - \alpha\,b\,c\,c\,u^\alpha}{(a\,u^\beta + b\,u^\alpha)^3}\,\partial u.$$

§. 31. Nunc loco α et β valores ante assumtos scribamus, eritque

$$a\,u^\beta + b\,u^\alpha = u^{\frac{1-\lambda}{2}}\,(a + b\,u^\lambda),$$

quo valore substituto reperietur:

$$y\,\partial x = -\frac{\beta\,a\,c\,c\,u^{\lambda-1} - \alpha\,b\,c\,c\,u^{2\lambda-1}}{(a + b\,u^\lambda)^3}\,\partial u,$$

ideoque

$$\int y\,\partial x = -c\,c\int\frac{\beta\,a\,u^{\lambda-1}\,\partial u + \alpha\,b\,u^{2\lambda-1}\,\partial u}{(a + b\,u^\lambda)^3}.$$

Ponatur nunc $a + b\,u^\lambda = z$, erit $u^\lambda = \frac{z-a}{b}$, $u^{\lambda-1}\,\partial u = \frac{\partial z}{\lambda b}$ et $u^{2\lambda-1}\,\partial u = \frac{(z-a)\,\partial z}{\lambda\,b\,b}$, quibus valoribus substitutis erit:

$$\int y\,\partial x = -\tfrac{c\,c}{\lambda\,b\,b}\int\tfrac{\partial z}{z^3}\,[(\beta - \alpha)\,a\,b + \alpha\,b\,z],$$

siue

fiue

$$\int y\,\partial x = -\tfrac{cc}{\lambda b}\int\tfrac{(\alpha z - \lambda a)\,\partial z}{z^3},$$

cuius integrale eft

$$\int y\,\partial x = C - \tfrac{cc}{\lambda b}\left(\tfrac{\lambda a}{2zz} - \tfrac{\alpha}{z}\right).$$

§. 32. Reftituto iam loco z valore affumto erit area quaefita in genere:

$$\int y\,\partial x = C - \frac{cc}{\lambda b}\left(\frac{\lambda a}{2(a+bu^\lambda)^2} - \frac{\alpha}{a+bu^\lambda}\right),$$

vbi, quia x fit $=0$ fumto $u=\infty$, conftans ita definiatur, vt facto $u=\infty$ area euanefcat, vnde manifeftum eft ftatui debere $C=0$, ita vt iam fit area indefinita a termino $x=0$ fumta

$$\int y\,\partial x = \frac{cc}{\lambda b}\left(\frac{\alpha}{a+bu^\lambda} - \frac{\lambda a}{2(a+bu^\lambda)^2}\right).$$

Nunc igitur abfciffa x in infinitum vsque extendatur, quod fit ponendo $u=0$, atque tota noftra area quaefita erit:

$$\tfrac{cc}{ab}\left(\tfrac{\alpha}{\lambda} - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{cc}{2ab}\cdot\tfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \tfrac{cc}{2ab(\alpha-\beta)},$$

quae ergo area femper eft finita, nifi fit $\alpha=\beta$, quem autem cafum iam exclufimus, quippe pro Hyperbola conica.

§. 33. Cum exponentes α et β eiusmodi defignent fractiones, quarum fumma vnitati aequetur, fumamus duos numeros integros quoscunque μ et ν, quorum fit fumma $\lambda = \mu+\nu$, ac ftatui poterit $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$ et $\beta = \frac{\nu}{\lambda}$, ita vt aequatio pro noftris curuis hyperbolicis fit:

$$a\sqrt[\lambda]{x^\mu y^\nu} + b\sqrt[\lambda]{x^\nu y^\mu} = c,$$

et iam fpatium inter has curuas et fuas affymtotas contentum

 erit

erit $\frac{\lambda c c}{2 a b (\mu - \nu)}$. Hic autem imprimis quaeritur aequatio rationalis, qua harum curuarum natura exprimatur, vt pateat ad quemnam ordinem hae curuae ſint referendae, id quod ope ſequentis Lemmatis facillime praeſtabitur.

Lemma.

§. 34. Quod ſi p et q fuerint radices huius aequationis quadraticae: $zz - fz + g = 0$, ita vt ſit $p + q = f$ et $pq = g$, aggregatum binarum quarumuis poteſtatum ipſarum p et q ſequenti modo exprimitur:

$$\begin{aligned}
p + q &= f, \\
p^2 + q^2 &= ff - 2g, \\
p^3 + q^3 &= f^3 - 3fg, \\
p^4 + q^4 &= f^4 - 4ffg + 2gg, \\
p^5 + q^5 &= f^5 - 5f^3 g + 5fgg, \\
p^6 + q^6 &= f^6 - 6f^4 g + 9ffgg - 2g^3, \\
p^7 + q^7 &= f^7 - 7f^5 g + 14f^3 gg - 7fg^3, \\
p^8 + q^8 &= f^8 - 8f^6 g + 20f^4 gg - 16ffg^3 + 2g^4, \\
p^9 + q^9 &= f^9 - 9f^7 g + 27f^5 gg - 30f^3 g^3 + 9fg^4, \\
p^{10} + q^{10} &= f^{10} - 10f^8 g + 35f^6 gg - 50f^4 g^3 + 25ffg^4 - 2g^5,
\end{aligned}$$

etc.

atque hinc in genere concluditur fore:

$$p^\lambda + q^\lambda = f^\lambda - \lambda f^{\lambda-2} g + \frac{\lambda(\lambda-3)}{1.2} f^{\lambda-4} gg - \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{1.2.3} f^{\lambda-6} g^3$$
$$+ \frac{\lambda(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-7)}{1.2.3.4} f^{\lambda-8} g^4 - \text{etc.}$$

quae autem formula non valet, niſi exponens λ fuerit numerus integer poſitiuus, ac praeterea iſti termini non vltra exponentes poſitiuos ipſius f continuentur.

§. 35.

§. 35. Quod si iam hoc Lemma ad nostrum casum accommodemus, erit $p = a\sqrt[\lambda]{x^\mu y^\nu}$ et $q = b\sqrt[\lambda]{x^\nu y^\mu}$, tum vero habebimus $p + q = c$ et productum $pq = abxy$, ita vt nunc sit $f = c$ et $g = abxy$, quibus notatis formula generalis in Lemmate data nobis statim suppeditat hanc aequationem rationalem:

$$a^\lambda x^\mu y^\nu + b^\lambda x^\nu y^\mu = c^\lambda - \lambda c^{\lambda-2} abxy + \frac{\lambda(\lambda-3)}{1.2} c^{\lambda-4} a^2 b^2 x^2 y^2$$
$$- \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{1.2.3.} c^{\lambda-6} a^3 b^3 x^3 y^3 + \text{etc.}$$

quae ergo aequatio manifesto pertinet ad ordinem λ^{um}.

§. 36. Percurramus nunc aliquot casus simpliciores, sitque 1°. $\mu = 2$, $\nu = 1$ et $\lambda = 3$, ita vt aequatio pro Hyperbolis irrationalis sit $b\sqrt[3]{xxy} + b\sqrt[3]{xyy} = c$, atque aequatio rationalis hinc nata erit:

$$a^3 xxy + b^3 xyy = c^3 - 3cabxy,$$

et spatium quaesitum inter curuam et suas assymtotas contentum erit $= \frac{3cc}{2ab}$. 2°. Sit $\mu = 3$ et $\nu = 1$, ideoque $\lambda = 4$, vt aequatio pro curuis sit $a\sqrt[4]{x^3 y} + b\sqrt[4]{xy^3} = c$, quae ad rationalem perducta sit:

$$a^4 x^3 y + b^4 xy^3 = c^4 - 4c^2 abxy + 2a^2 b^2 x^2 y^2,$$

et spatium quaesitum hinc erit $= \frac{cc}{ab}$. 3°. Sit $\mu = 3$ et $\nu = 2$, ideoque $\lambda = 5$, vt aequatio sit

$$a\sqrt[5]{x^3 yy} + b\sqrt[5]{xxy^3} = c,$$

quae ad rationalem perducta sit:

$$a^5 x^3 yy + b^5 xxy^3 = c^5 - 5c^3 abxy + 5ca^2 b^2 x^2 y^2,$$

et spatium quaesitum $= \frac{5cc}{2ab}$. 4°. Sit $\mu = 4$ et $\nu = 1$, ideoque $\lambda = 5$, erit aequatio:

$$a\sqrt[5]{x^4 y} + b\sqrt[5]{x y^4} = c,$$

et rationaliter

$$a^5 x^4 y + b^5 x y^4 = c^5 - 5 c^3 a b x y + 5 c a^2 b^2 x^2 y^2,$$

et ſpatium $= \frac{5cc}{6ab}$. 5°. Sit $\mu = 5$, $\nu = 1$ et $\lambda = 6$, erit aequatio pro curuis: $a\sqrt[6]{x^5 y} + b\sqrt[6]{x y^5} = c$, et rationalis: $a^6 x^5 y + b^6 x y^5 = c^6 - 6 c^4 a b x y + 9 c c a^2 b^2 x^2 y^2 - 2 a^3 b^3 x^3 y^3$, et ſpatium $= \frac{3cc}{4ab}$.

§. 37. Quanquam autem ex aequatione irrationali aream facile definire licuit: tamen ſi aequatio rationalis proponeretur, vix vlla via pateret ex ea aream inueſtigandi, quandoquidem ad hoc requireretur reſolutio aequationum cuiusuis gradus. Interim tamen, quoties talem aequationem reſoluere licet, ex ea area haud difficulter elicietur, id quod vnico exemplo oſtendiſſe ſufficiet.

Exemplum.

Si proponatur linea hyperbolica tertii ordinis, ſub hac aequatione:

$$x x y + x y y = 1 - 3 x y,$$

contenta, eius aream inter aſſymtotas contentam inueſtigare?

§. 38. Primo igitur ex hac aequatione valor applicatae y per abſciſſam x expreſſus inueſtigetur, qui erit:

$$y = -\frac{(x+3)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{1}{x}\right)},$$

quae ſi comparetur cum ſpeciebus linearum tertii ordinis a *Newtono* enumeratis, deprehenditur pertinere ad eius ſpeciem vigeſimam ſecundam. Scilicet ſi recta ACB ſit axis abſciſſarum et C initium, tum vero per C ducatur normalis DE, praeterea

rea vero capiantur interualla $CF = CG = 3$, tum tres rectae Tab. II. Fig. 5.
ACB, DCE et $HFGI$, erunt tres assymtotae curuae in nostra aequatione contentae, quae ergo ex tribus Hyperbolis erit composita, quarum prima ad continetur intra angulum ACD, secunda eb intra angulum EFH, ac tertia ib intra angulum IGB. Praeterea dabitur diameter KCL, angulum rectum ACD bisecans, ita vt portiones curuarum vtrinque sint inter se aequales, Imprimis autem hic notandum est, ad has curuas pertinere punctum coniugatum O, in ipso diametro KL, ad distantiam $CO = \sqrt{2}$ situm. Deinde notasse iuuabit si per O ex G producatur recta GM, hanc fore diametrum obliquangulum nostrae curuae, scilicet, si posita abscissa $AX = x$ applicata YX producatur, vt inferiorem Hyperbolam secet in Y', tum interuallum YY' ab hoc diametro GM in V bifariam secabitur, ita vt vbique sit $VY = VY'$. Nam euidens est, hanc rectam GM ipsam CF bisecare in S, sicque fore $CS = \frac{1}{2} GC$: erit ergo etiam

$$XV = \tfrac{1}{2} GX = \frac{x+3}{2},$$

cui si addatur $XY = y$, ex valore supra inuento prodit:

$$VY = y + \frac{x+3}{2} = \sqrt{\left(\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{1}{x}\right)},$$

quae formula cum sit radicalis, sequitur ex altera parte fore pariter $VY' = VY$, ideoque rectam GV diametrum. Caeterum notatu dignum hic occurrit punctum coniugatum O esse centrum grauitatis trianguli FCG, tum vero si haec recta assymptotam GFH secet in puncto X', erit etiam $VX = VX'$, sicque etiam $X'Y' = y$; vnde patet, aream, quam curua ad intra suas assymptotas includit, aequalem fore areae intra assymptotas HF et FE suamque curuam be comprehensae. Simili modo recta ex F per O producta etiam erit diameter obliquangula bisecans omnes ordinatas axi AB parallelas.

§. 39. Ex valore autem pro applicata y inuento inuestigemus aream curuae indefinitam D d C $x\,y$, cuius elementum est

$$y\,\partial x = -\frac{\partial x}{2}(x+3) \pm \frac{\partial x}{2}\surd\left(xx+6x+9+\frac{4}{x}\right),$$

vbi partis prioris integrale manifesto est $-\frac{1}{4}xx - \frac{3}{2}x$; partis vero posterioris integratio merito maxime ardua videretur, nisi commode eueniret vt formula post signum radicale factorem habeat quadratum. Est enim

$$xx+6x+9+\frac{4}{x} = \frac{x^3+6xx+9x+4}{x} = \frac{x+4}{x}(x+1)^2,$$

vnde pars areae posterior ita exprimetur vt sit

$$\pm\tfrac{1}{2}(x+1)\,\partial x\,\surd\frac{x+4}{x}.$$

§. 40. Ad hanc formulam integrandam ponamus $x = v\,v$, ac integralis pars posterior erit

$$\pm\int\partial v\,(vv+1)\surd(vv+4).$$

Sit nunc $\surd(vv+4) = v+2t$, eritque $v = \frac{1-tt}{t}$, ideoque

$$\surd(vv+4) = \frac{1+tt}{t} \text{ et } vv+1 = \frac{1-tt+t^4}{tt},$$

ac denique $\partial v = -\frac{\partial t(1+tt)}{tt}$, quibus substitutis formula proposita induit hanc formam:

$$-\int\frac{(1+tt)^2(1-tt+t^4)\partial t}{t^5} = -\int\frac{\partial t}{t^5}(1+tt+t^6+t^8),$$

cuius ergo integrale est

$$\frac{1}{4t^4}+\frac{1}{2tt}-\frac{1}{2}tt-\frac{1}{4}t^4 = \frac{1+2tt-2t^6-t^8}{4t^4} = \frac{(1-tt)(1+tt)^3}{4t^4},$$

et restitutis valoribus $\dfrac{v\,(vv+4)^{\frac{3}{2}}}{4}$, atque adeo per x erit haec pars: $\dfrac{(x+4)^{\frac{3}{2}}\surd x}{4}$, hincque area quaesita erit:

$\int y\,\partial x$

$$\int y\,\partial x = -\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{3}{2}x + \frac{(x+4)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}}{4},$$

vbi conſtantis additione non eſt opus, quia haec area ſponte euaneſcit caſu $x = 0$. Faciamus nunc $x = \infty$, et cum ſit

$$\sqrt{(xx + 4x)} = x + 2 - \tfrac{2}{x},$$

haec area erit

$$= -\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{3}{2}x + \frac{(x + 2 - \frac{2}{x})(x+4)}{4},$$

quod euolutum et x infinitum poſitum dat aream $= \frac{3}{2}$, prorſus vti ſupra aſſignauimus, ob $a = b = c = 1$. Hinc autem facile intelligitur talem calculum pro curuis altioribus neutiquam inſtitui poſſe.

DE CVRSV NAVIS IN SPHAEROIDE ELLIPTICO.

Auctore
F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. die 16 *Ian.* 1792.

§. 1.

Vniuerſa ars Nautica ſine difficultate reduci poteſt ad ſequens Problema: *Dato ſitu duorum locorum, inuenire curſum nauis intermedium*, ſiue angulum conſtantem, ſub quo omnes Meridianos ſecat directio nauis, deſcribentis in mari curvam, quae vulgo dicitur *Loxodromia.* Omnes reliqui caſus in arte nautica occurrentes, Problematis huius idonea applicatione vel etiam inuerſione facile ſoluuntur. Mappae hydrographicae a *Mercatore* inuentae nihil aliud ſunt niſi eiusdem Problematis ſolutio breuis per conſtructionem, ſeu proiectio Loxodromiae in lineam rectam, quemadmodum infra videbimus. Cardo itaque rei verſatur in determinanda curua Loxodromica, de qua quum iam olim Academiae a me oblata ſit Diſſertatio, figuram telluris ſphaericam ſupponens, haud ſuperfluum fore exiſtimavi, ſi hanc quoque disquiſitionem ad figuram ellipticam extenderem. Quodſi enim in Geographia vel aliqua ſperanda ſit vtilitas ex conſideratione figurae telluris ellipticae petenda, non dubito, quin ea potiſſimum ad vſum nauticum ſit referenda.
Re-

Reuera quoque videbimus, differentiam hinc oriundam non esse negligendam; quare quum calculus magis complexus mapparum tantum hydrographicarum constructionem reddat difficiliorem, non autem vsum earum in praxi nautica, hinc non leuis oriri videtur artis nauticae emendatio. Quinimmo ipsius mapparum constructionis difficultas prorsus tolletur tabula hunc in finem a me computata, quae in mappis hydrographicis adornandis loco tabulae secantium vel partium Meridionalium est substituenda.

§. 2. Sint itaque in Sphaeroide elliptico duo puncta A, B, iuncta curua Loxodromica A M B, in qua pro arbitrio assumatur punctum M. Ductis e Polo P Meridianis P A, P B, P M et P n ipsi P M proximo, per punctum n feratur arcus Aequatori parallelus $n\,\mu$. Proinde si Loxodromia Meridianos secet sub angulo constante P M B $= \Phi$, erit in Triangulo elementari M $n\,\mu$, $\mu\, n =$ M μ tang Φ. Posita iam latitudine puncti M $= \mu$, angulo A P M $= \psi$, semiaxe maiore Meridiani elliptici, seu radio Aequatoris $= 1$, semiaxe minore $= b$, et $\frac{1}{b} = m$, erit e natura ellipseos radius Paralleli $\mu\, n$ Tab. III. Fig. 1.

$$= y = \frac{m}{\sqrt{(m^2 + tang^2\, \mu)}},$$

ideoque elementum

$$\mu\, n = \frac{m\, \partial\, \psi}{\sqrt{(m^2 + tang^2\, \mu)}}, \text{ et arcus}$$

$$\text{M}\, \mu = \frac{-\partial\, y}{\text{fin.}\, \mu} = \frac{m\, \text{fec}^3\, \mu\, \partial\, \mu}{(m^2 + \text{tang}^2\, \mu)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quibus valoribus in aequatione fundamentali, $\mu\, n =$ M μ tang Φ, substitutis, atque posito tang $\Phi = a$, nanciscimur:

$$\partial\, \psi = \frac{a\, fec^3\, \mu\, \partial\, \mu}{m^2 + tang^2\, \mu} = \frac{a\, fec\, \mu\, \partial.\, tang\, \mu}{m^2 + tang^2\, \mu},$$

seu scripto u loco tang μ, $\partial\, \psi = \frac{a\, \partial\, u\, \sqrt{(1 + u\, u)}}{m\, m + u\, u}$. Statuatur

 sec

ſec $\mu = v$ tang μ, ut ſit $v =$ coſec μ; unde ſit $1 + uu = u^2 v^2$, $u^2 = \frac{1}{v^2 - 1}$,

$$\surd (1 + u u) = \frac{v}{\surd (v v - 1)}, \text{ atque}$$

$$\partial u = \frac{- v \partial v}{(v v - 1)^{\frac{3}{2}}}, \text{ proinde}$$

$$\partial \psi = \frac{- a v^2 \partial v}{(v^2 - 1)(m^2 v^2 - m^2 + 1)},$$

ſeu poſito $m^2 - 1 = n^2$,

$$\partial \psi = \frac{- a v^2 \partial v}{(v^2 - 1)(m^2 v^2 - n^2)}.$$

Haec expreſſio ſi diſpeſcatur in partes ſecundum factores denominatoris, orietur

$$\frac{- \partial \psi}{a} = \frac{v^2 \partial v}{2 (m^2 - n^2)} \left(\frac{1}{v - 1} - \frac{1}{v + 1} + \frac{m^2}{n (m v + n)} - \frac{m^2}{n (m v - n)}\right),$$

quae formula, diuiſa quantitate v^2 per denominatores $v - 1$, $v + 1$, etc. ob $m^2 - n^2 = 1$, abit in ſequentem:

$$\frac{\partial \psi}{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{v + 1} - \frac{\partial v}{v - 1} + \frac{n \partial v}{m v - n} - \frac{n \partial v}{m v + n}\right),$$

vnde ſit integrando:

$$\frac{\psi}{a} = \log. \surd \frac{v + 1}{v - 1} + \frac{n}{m} \log. \surd \frac{m v - n}{m v + n}.$$

Verum eſt

$$\frac{n}{m} = \frac{\surd (1 - b b)}{m b} = \surd (1 - b b),$$

ſeu aequalis excentricitati ellipſeos Meridianorum, qua poſita $= c$, habemus:

$$\frac{\psi}{a} = \log. \surd \frac{v + 1}{v - 1} - c \log. \surd \frac{v + c}{v - c},$$

ubi ſi ſubſtituatur $v =$ coſec μ, tandem ſit

$$\frac{\psi}{a} = \log. \surd \frac{1 + \text{ſin.}\, \mu}{1 - \text{ſin.}\, \mu} - c \log. \surd \frac{1 + c\, \text{ſin.}\, \mu}{1 - c\, \text{ſin.}\, \mu}.$$

§. 3. Conſtans adiicienda inde determinatur, quod caſu $\psi = 0$, angulus μ aequari debet latitudini puncti $A = \alpha$. Qua

Quapropter Conſtans iſta erit

$$= - \log. \sqrt{\frac{1+\textit{ſin.}\,\alpha}{1-\textit{ſin.}\,\alpha}} + c \log. \sqrt{\frac{1+c\,\textit{ſin.}\,\alpha}{1-c\,\textit{ſin.}\,\alpha}}.$$

Quum pariter caſu $\psi = APB = \gamma$, angulus μ aequalis eſſe debeat latitudini puncti $B = \beta$, nanciſcimur hanc aequationem.

$$\frac{\gamma}{a} = \log. \sqrt{\frac{1+\textit{ſin.}\,\beta}{1-\textit{ſin.}\,\beta}} - \log. \sqrt{\frac{1+\textit{ſin.}\,\alpha}{1-\textit{ſin.}\,\alpha}}$$
$$+ c \log. \sqrt{\frac{1+c\,\textit{ſin.}\,\alpha}{1-c\,\textit{ſin.}\,\alpha}} - c \log. \sqrt{\frac{1+c\,\textit{ſin.}\,\beta}{1-c\,\textit{ſin.}\,\beta}}.$$

Ponamus adhuc $c \sin \alpha = \sin \delta$, $c \sin \beta = \sin \varepsilon$, ut fiat

$$\frac{\gamma}{a} = \log.\, \text{tang.}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}\beta) - \log.\, \text{tang.}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$+ c \log.\, \text{tang.} (45^\circ + \tfrac{1}{2}\delta) - c \log.\, \text{tang.} (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varepsilon);$$

quae aequatio praebet tangentem a anguli Loxodromiae cum Meridianis, dato ſitu locorum A, B, per eorum latitudines α, β, et differentiam longitudinum γ. Si nempe breuitatis ergo ſcribamus A, B, D, E, loco iſtorum logarithmorum, erit $a = \text{tang.}\, \Phi = \frac{\gamma}{B - A + D - E}$.

§. 4. Aſſumta figura telluris ſphaerica, ſit angulus Loxodromiae cum Meridianis $= \Phi'$, quare cum ſit $c = 0$, erit

$$\text{tang.}\, \Phi' = \frac{\gamma}{B - A}, \text{ et } \text{tang.}\, \Phi = \frac{\gamma}{B - A + D - E}.$$

Si iam $\beta > \alpha$, ideoque $\varepsilon > \delta$, vel $E > D$, erit quoque $\Phi > \Phi'$. Sin autem $\alpha > \beta$, h. e. $A > B$, et $D > E$, binae formulae abeunt in iſtas:

$$\text{tang.}\, \Phi' = \frac{-\gamma}{A - B}, \text{ et } \text{tang.}\, \Phi = \frac{-\gamma}{A - B - (D - E)},$$

proinde iterum $\text{tang.}\, \Phi > \text{tang.}\, \Phi'$. Unde ob valorem tangentis negativum ſequitur, angulum obtuſum Φ minorem, ſeu angulum acutum, qui eſt eius complementum ad 180°, in elliptica figura maiorem eſſe complemento anguli Φ' in figura ſphaerica. Unde, ſi ſemper anguli recto minores intelligantur, concluditur in genere, Loxodromiam Aequatorem et Parallelos

rallelos ſub minoribus angulis ſecare in Sphaeroide elliptico quam in Sphaera, ſive curſum navis priore caſu magis verſus Orientem vel Occidentem eſſe dirigendum, quam caſu altero.

§. 5. Cognito ſic angulo $PAB = \Phi$, facile reperitur longitudo arcus $AM = s$. Eſt enim $Mn = \partial s = \frac{M\mu}{cos.\,\Phi}$, unde ob Φ conſtantem, arcus Loxodromiae rectificari poteſt conceſſa rectificatione arcus $M\mu$, h. e. rectificatione circuli vel ellipſeos, prout figura telluris aſſumitur ſphaerica vel elliptica. Ductis nempe arcubus parallelis $M\nu$ et $B\beta$, eſt $M\mu$ elementum arcus $A\nu$, conſequenter $AM = \frac{A\nu}{cos.\,\Phi}$. Totius itaque curuae AB longitudo eſt $= \frac{A\beta}{cos.\,\Phi}$; vnde in Sphaera eſt $AB = \frac{\beta - \alpha}{cos\,\Phi}$, in Sphaeroide autem pro arcu $A\beta$ inuenienda eſſet formula exprimens arcum ellipticum per latitudines. Sed quum iam alia occaſione Academiae a me oblata ſit tabula exhibens arcum Meridiani elliptici pro quauis latitudine, arcus $A\beta$ indepeti poſſunt; quare his non diutius immoror.

§. 6. Iam ſine difficultate applicari haec poſſunt ad mapparum hydrographicarum conſtructionem, quarum finis primarius eſt, vt linea Loxodromiam repraeſentans Meridianos ſub eodem angulo conſtante Φ interſecet ac in ipſa tellure, quem in finem elementa Meridianorum ac Parallelorum in eadem ratione ſunt conſtruenda, quam in tellure tenent. Si enim *Figura ſecunda* partem mappae repraeſentet, eſſe oportet

$$\frac{\mu n}{M\mu} = \text{tang}\,\Phi = \frac{(m^2 + tang^2\,\mu)\,\partial\psi}{sec^3\,\mu\,\partial\mu} \quad (\S.\ 2.),$$

quam eſſe rationem genuinam in Sphaeroide elliptico, ibidem vidimus. Variis autem modis proportio haec obtineri poteſt, pro diverſis, quas in proiectione ſequi velimus, legibus. Vel-

ut

ut ſi Meridiani eſſe debeant lineae rectae in polo P ſe ſecantes, atque Paralleli circuli concentrici circa centrum P, ponatur radius Paralleli $PM = x$, longitudo puncti $M = \lambda$, atque eſſe oportet

$$\frac{\mu n}{M \mu} = \frac{x \partial \lambda}{- \partial x} = \text{tang } \Phi = \frac{(m^2 + tang^2 \mu) \partial \psi}{sec^3 \mu \partial \mu}.$$

Quum autem nihil impediat, quo minus gradus Aequatoris $m \nu$ capiantur aequales, ſtatui poteſt $\lambda = \psi$, aut ſaltem $n \lambda = \psi$, unde habemus: $\frac{- x}{n \partial x} = \frac{m^2 + tang^2 \mu}{sec^3 \mu \partial \mu}$, et integrando

$$n\, l \tfrac{1}{x} = \int \frac{sec^3 \mu \partial \mu}{m^2 + tang^2 \mu}.$$

Poſterius integrale iam ſupra (§. 2.) inuentum fuit

$$= log. \text{ tang. } (45^\circ + \tfrac{1}{2} \mu) - c\, log. \text{ tang. } (45^\circ + \tfrac{1}{2} \nu),$$

poſito nempe c ſin μ = ſin ν. Unde fit

$$x = \sqrt[n]{\frac{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} \nu)^c}{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} \mu)}}.$$

Conſtans nulla adiicitur, quoniam caſu $\mu = 90^\circ$, eſſe debet $x = 0$, et caſu $\mu = 0$, $x = P\, m = 1$; idemque praebet formula noſtra. Caſu $n = 1$, fit $\lambda = \psi$, et angulus

$$m P \nu = \frac{m \nu}{P m} = \frac{\partial \lambda}{1} = \partial \psi,$$

unde patet, omnes angulos ad polum per angulos ipſis aequales repraeſentari. Hac quidem proiectione obtinetur, vt omnes figurae minimae in telluris ſuperficie per alias ipſis perfecte ſimiles in mappa repraeſententur. Quum autem fieri nequeat, ut Meridiani $P m$, $P \nu$, a linea recta ſub iisdem angulis ſecentur, ſequitur, Loxodromiae proiectionem $M n$ eſſe curvam; unde haec proiectio in mappis nauticis uſum habere nequit.

§. 7. Methodi ſcilicet inter nautas receptae, curſum navis vel angulum Φ menſurandi, neceſſario requirunt, vt Loxodromiae proiectio fit linea recta, atque non secus ac in tellure cum Meridianos tum Parallelos sub angulo secet constante: quem in finem opus est, ut Meridiani sint rectae parallelae, et Paralleli rectae illis normales. Quare si Ma, Bb, sint Meridiani, Am, BM, Paralleli per loca A, B, transeuntes, ab Aequator atque AB Loxodromia, esse oportet

Fig. 3.

$$BAM = \Phi, \text{ et}$$

$$\text{tang } BAM = \frac{BM}{AM} = \text{tang } \Phi = \frac{\gamma}{B - A + D - E} \quad (\S.\ 3.).$$

Proinde quum in hac proiectione sit $BM = ab = \gamma$, sequitur $AM = B - A + D - E$. Est autem $AM = Bb - Aa$; quare quum linea Bb non nisi a latitudine loci $B = \beta$, lineaque Aa a latitudine loci $A = \alpha$ dependere possit, quum praeterea logarithmi B, E, ipsius β, atque logarithmi A, D, ipsius α solummodo functiones sint, concluditur $bB = B - E$, et $aA = A - D$, h. e. data latitudine puncti $B = \beta$, in mappis nauticis generatim fieri oportet

$$bB = l \text{ tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\beta) - c\, l \text{ tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varepsilon) \quad (\S.\ 3.).$$

In Sphaera, ob $c = 0$, erit

$$bB = l \text{ tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\beta).$$

§. 8. Secundum hanc formulam tabula annexa a me computata est ad dena minuta eleuationis poli. Columna secunda continet lineam Bb, ex hypothesi sphaerica, seu quantitatem $l \text{ tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\beta)$, tertia eandem lineam dat ex hypothesi elliptica, seu quantitatem

$$l \text{ tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\beta) - c\, l \text{ tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varepsilon),$$

assumta ratione axium Newtoniana, seu $m = \frac{230}{229}$. Quarta denique columna numeros praebet a numeris tertiae columnae subtrahendos, si m ponatur $= \frac{200}{199}$. Sic tabula nostra instar trium tabularum peculiarium esse potest, prout quis circulum vel

vel diverſas ellipſes pro Meridianis aſſumere velit. Omnes autem iſti numeri in partibus radii Aequatoris ſunt expreſſi, unde ſecundum eandem legem longitudines ab quoque ſunt exprimendae. Quapropter ſi uni gradui longitudinis in mappa tribuere velimus lineam n, et arcus radio aequalis contineat ν gradus, vt ſit $\nu = 57,2957795 \ldots$, erit radius in mappa adhibitus $= n\nu$, per quam lineam omnes numeri tabulae ſunt multiplicandi. Haec tabula ſi loco vulgaris tabulae nauticae, quam partes dicunt *Meridionales*, adhibeatur, mappae hydrographicae ſecundum hypotheſin ellipticam haud maiore labore, at multo exactius conſtruentur, quam ſecundum hypotheſin ſphaericam. Omnia quidem Problemata nautica, quae in curſu navis reperiundo verſantur, mappis ex hac tabula conſtructis facile ſolvuntur: at ipſe quoque angulus Φ tabulae huius ope commodiſſime invenitur per calculum. E columna ſcilicet tertia capiantur lineae $b\text{B} = p$, et $a\text{A} = p'$, latitudinibus β et α in prima columna reſpondentes: linea $\text{BM} = \gamma$ ex aliis tabulis ſatis obviis, quae arcus circulares in partibus radii exprimunt, invenitur; unde fit $\text{tang}\,\Phi = \frac{\gamma}{p - p'}$. Ad veram autem lineae AB longitudinem, ſeu diſtantiam locorum inveniendam, neque tabula neque mappa ſufficit, ſed peculiari calculo hunc in finem inſtituendo opus eſt. Per conſtructionem ſcilicet eſt $\text{AB} = \frac{\text{AM}}{\cos\Phi}$, quum tamen vera Loxodromiae longitudo ſit $= \frac{\text{A}\beta}{\cos\Phi}$ (Fig. 1. §. 5.). Eſt autem

$$\text{AM} = \frac{\Psi}{a} = \int \frac{\sec^3\mu\,\partial\mu}{m^2 + \text{tang}^2\mu'} \text{ et}$$

$$\text{A}\beta = \int \text{M}\mu = m\int \frac{\sec^3\mu\,\partial\mu}{(m^2 + \text{tang}^2\mu)^{\frac{3}{2}}}.$$

T 2 Neceſſe

Neceſſe igitur eſt, ut arcus elliptici $A\beta$ aut calculo integrali, aut ope eiusmodi tabulae, qualem haud ita pridem cum Academia communicaui, quaerantur; atque tum fiet vera diſtantia $= \frac{A\beta}{\cos\phi}$.

§. 9. Priusquam ulterius progrediamur, tribus adhuc verbis methodum vulgarem explicabimus, qua tabulae atque mappae nauticae conſtrui ſolent. Tabula nempe, partes ſic dictas meridionales continens, cuius ope mappas ſuas conſtruunt calculumque perficiunt nautae, nihil aliud eſt niſi termini ſummatorii ſeriei, cuius terminus generalis eſt productum arcus cuiuspiam in ſuam ſecantem: ſecantes ſummari ſolent ad dena minuta. Sic pro latitudine $= 30'$, tabula praebet hanc ſummam:

$$10'.\ \sec 10' + 20'.\ \sec 20' + 30'.\ \sec 30',$$

et ſic porro. Quae quomodo cum formula noſtra conveniant, facile patet. Erat nempe (§. 2.) $\partial\psi = \frac{a \sec^3 \mu\, \partial\mu}{m^2 + \tang^2 \mu}$, quare quum in Sphaera ſit $m = 1$, fit $\frac{\partial\psi}{a} = \sec\mu\,\partial\mu$, et $\psi = a\int\sec\mu\,\partial\mu$. Regrediamur itaque ad Figuram tertiam ubi erat $BM = \psi$, unde ob $a = \tang BAM$, fiet

$$BM.\ \tang ABM = AM = \int\sec\mu\,\partial\mu - C,$$

quam conſtantem ex ſuperioribus conſtat eſſe $= Aa = \int\sec\alpha\,\partial\alpha$. Partes itaque Meridionales aM inveniuntur, ſi latitudo μ puncti M in partes minimas $\partial\mu$ dividatur, eaeque ſingulae in ſecantes ſuas ductae in unam ſummam redigantur: unde patet propoſitum. Caeterum patet, eandem hanc methodum etiam in hypotheſi elliptica poſſe adhiberi. Quum enim ſit in genere $l\tang(45° + \frac{1}{2}\mu) = \int\sec\mu\,\partial\mu$, e ſuperioribus ſequitur fieri debere partes Meridionales

$$bB = \int\sec\beta\,\partial\beta - c\int\sec\varepsilon\,\partial\varepsilon,$$

ubi

ubi arcus ε determinatur per hanc aequationem: $c \sin \beta = \sin \varepsilon$. Unde patet, quomodo calculus esset instituendus, si vulgaribus tabulis nauticis uti vellemus.

§. 10. Constat, partes Meridiani bB in mappa esse maiores quam in tellure, quod quoque tabula docet, in qua arcus 50 graduum radio aequatur, cui in tellure tantum arcus 57 graduum fere est aequalis. Quum itaque partes Meridiani in hypothesi elliptica vbique minores sint quam in sphaerica, sequitur, mappas nauticas, ubi ellipticae Meridianorum figurae ratio habetur, veram proportionem magis servare quam vulgares, idque eo magis, quo maior assumatur ratio axium.

Non inutile mihi videtur, unum exemplum addere, unde differentia utriusque hypotheseos appareat. Situs itaque sit locus A sub latitudine $= 10°$, longitudine $= 315°$, B sub latitudine $= 60°$, longitudine $= 12°. 17'. 45''$. ita ut sit $\gamma = 57°. 17'. 45''$, $\alpha = 10°$, $\beta = 60°$, eritque, ob $\gamma = 1$, $p - p' = \cot \Phi$ (§. 8.); unde ex tabula nostra fiet:

si m	$p - p'$	Φ	A β	log. distantiae A B	distantia.
1	1,141532	41°. 13'. 8''.	0,872665	0, 0645154	997 mill. geogr.
$\frac{230}{229}$	1,135508	41. 22. 9.	0,869055	0, 0637158	995,2 - -
$\frac{200}{199}$	1,134404	41. 23. 49.	0,868511	0, 0636293	995 - -

Hinc patet, distantiam in Sphaeroide breviorem esse quam in Sphaera. Caeterum arcus circuli maximi in Sphaera inter loca A, B, intercepti reperitur $= 981$ mill. geogr.

§. 11. Quum nonnunquam intersit nosse, in quonam puncto Loxodromia datum Parallelum sit secatura, huic fini

 qui-

quidem inservire potest aequatio supra inventa:

$$\frac{\psi}{a} = l.\,\text{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\mu) - c\,l.\,\text{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\nu) + \text{cet. } (\S.\ 3.),$$

posito $\sin \nu = c \sin \mu$; si nempe loco μ substituatur latitudo Paralleli dati, exinde invenitur ψ, h. e. punctum Paralleli, cui Loxodromia occurrit. Haud tamen inutile mihi videtur, aequationem quaerere ad curuam A B (Fig. 1.) inter ternas coordinatas $CN = x$, $NQ = y$, $QM = z$. Quem in finem ponatur $m\,CM = \lambda$, simulque notetur, e natura ellipseos esse $\text{tang}\,\mu = m^2 \,\text{tang}\,\lambda$; unde habemus

$$\partial.\,\text{tang}\,\mu = \frac{m^2\,\partial\lambda}{\cos^2\lambda},$$
$$\sec\mu = \sqrt{(1 + m^4\,\text{tang}^2\lambda)}, \text{ et}$$
$$m^2 + \text{tang}^2\mu = m^2\,(1 + m^2\,\text{tang}^2\lambda),$$

quibus valoribus in aequatione

$$\psi = a \int \frac{\sec\mu\ \ \partial.\,\text{tang}\,\mu}{m^2 + \text{tang}^2\mu} \quad (\S.\ 2.)$$

substitutis, nanciscimur

$$\psi = a \int \frac{\partial\lambda\,\sqrt{(1 + m^4\,\text{tang}^2\lambda)}}{\cos^2\lambda\,(1 + m^2\,\text{tang}^2\lambda)}.$$

Quare quum sit $\sin\lambda = \frac{QM}{CM}$, posito $CM = u$, fiet $\sin\lambda = \frac{z}{u}$; $\cos^2\lambda = \frac{u^2 - z^2}{u^2}$, $\text{tang}^2\lambda = \frac{z^2}{u^2 - z^2}$, atque $\partial\lambda = \frac{u\,\partial z - z\,\partial u}{u\sqrt{(u^2 - z^2)}}$, quibus valoribus introductis, aequatio nostra integralis erit:

$$\psi = a \int \frac{u\,(u\,\partial z - z\,\partial u)\,\sqrt{(u^2 - z^2 + m^4 z^2)}}{(u^2 - z^2)\,(u^2 - z^2 + m^2 z^2)}.$$

Est autem $u\,u = CM^2 = x^2 + y^2 + z^2$, et e natura ellipseos est $x^2 + y^2 + m^2 z^2 = 1$, unde posito $m^2 - 1 = n^2$, fit $u\,u = 1 - n^2 z^2$, $u\,\partial u = -n^2 z\,\partial z$, $u^2\,\partial z - u\,z\,\partial u = \partial z$, $u^2 - z^2 = 1 - m^2 z^2$, $u^2 - z^2 + m^4 z^2 = 1 + m^2 n^2 z^2$; quare quum sit

$$\psi = a\,C\,m = \text{Arc. tang}\,\frac{y}{x},$$

nan-

nancifcimur hanc aequationem:

$$\text{Arc. tang}\,\frac{y}{x} = a\int \frac{\partial z \sqrt{(1 + m^2 n^2 z^2)}}{1 - m^2 z^2}.$$

Pofterius integrale vocetur Z, et ponatur $z^2 = \frac{1}{s^2 - m^2 n^2}$, ut fit

$$z\,\partial z = \frac{-s\,\partial s}{(s^2 - m^2 n^2)^2},$$

$$1 - m^2 z^2 = \frac{s^2 - m^4}{s^2 - m^2 n^2},$$

$\sqrt{(1 + m^2 n^2 z^2)} = s z$, ideoque

$$\partial Z = \frac{-s^2\,\partial s}{(s^2 - m^4)(s^2 - m^2 n^2)};$$

unde difpefcendo denominatorem in fuos factores, erit legitimis factis reductionibus,

$$\partial Z = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{s + m^2} - \frac{\partial s}{s - m^2} + \frac{n}{m}\cdot\frac{\partial s}{s - m n} - \frac{n}{m}\cdot\frac{\partial s}{s + m n}\right).$$

Quum itaque fit $\frac{n}{m} = \sqrt{(1 - b b)} = c$, et $m n = m^2 c$, habemus

$$Z = l.\sqrt{\frac{s + m^2}{s - m^2}} + c\, l.\sqrt{\frac{s - m^2 c}{s + m^2 c}}.$$

Ubi fi fubftituatur $s = \frac{\sqrt{(1 + m^2 n^2 z^2)}}{z}$, erit

$$\sqrt{\frac{s + m^2}{s - m^2}} = \frac{\sqrt{(1 - m^2 z^2)}}{\sqrt{(1 + m^4 c^2 z^2)} - m^2 z} = \frac{\sqrt{(1 + m^4 c^2 z^2)} + m^2 z}{\sqrt{(1 - m^2 z^2)}},\ \text{et}$$

$$\sqrt{\frac{s - m^2 c}{s + m^2 c}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + m^4 c^2 z^2)} + m^2 c z} = \sqrt{(1 + m^4 c^2 z^2)} - m^2 c z.$$

Proinde eft integrale:

$$\text{Arc. tang}\,\frac{y}{x} = a\, l.\frac{\sqrt{(1 + m^4 c^2 z^2)} + m^2 z}{\sqrt{(1 - m^2 z^2)}}$$
$$+ a c\, l.\left[\sqrt{(1 + m^4 c^2 z^2)} - m^2 c z\right] + \text{Conft.}$$

Supra invenimus

$$\frac{\psi}{a} = l.\sqrt{\frac{v + 1}{v - 1}} + c\, l.\sqrt{\frac{v - c}{v + c}}\ (\S.\ 2.),$$

dum hic eft

$$\frac{\psi}{a} = l.\sqrt{\frac{s + m^2}{s - m^2}} + c\, l.\sqrt{\frac{s - m^2 c}{s + m^2 c}};$$

unde

unde quo haec ſolutio cum priore conveniat, eſſe oportet

$$\frac{v+1}{v-1}=\frac{s+m^2}{s-m^2}, \text{ et } \frac{v-c}{v+c}=\frac{s-m^2 c}{s+m^2 c}.$$

Eſt autem per naturam ellipſeos

$$CM^2=\frac{1}{1+n^2 \sin^2\lambda}, \text{ ideoque}$$

$$z=CM\sin\lambda=\frac{\sin\lambda}{\sqrt{(1+n^2\sin^2\lambda)}}, \text{ ſeu}$$

$$\sin^2\lambda=\frac{z^2}{1-n^2 z^2}, \text{ et } \tang^2\lambda=\frac{z^2}{1-m^2 z^2}.$$

Hinc, ob $\tang\mu = m^2 \tang\lambda$, fit $\tang^2\mu=\frac{m^4 z^2}{1-m^2 z^2}$, et

$$\operatorname{coſec}\mu=\frac{\sqrt{(1+m^2 n^2 z^2)}}{m^2 z}.$$

Quamobrem quum ſit (§. 2.) $v=\operatorname{coſec}\mu$, et $s=\frac{\sqrt{(1+m^2 n^2 z^2}}{z}$, ſequitur $v=\frac{s}{m^2}$, vnde concluditur $\frac{v+1}{v-1}=\frac{s+m^2}{s-m^2}$, atque

$$\frac{v-c}{v+c}=\frac{s-m^2 c}{s+m^2 c}, \text{ quemadmodum requiritur.}$$

Eleva-

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230 : 229	Correctio ſi ratio axium = 200 : 199
0°. 10′.	0, 00290889	0, 00288305	0, 00000378
20.	0581780	0576732	0755
30.	0872676	0865104	1133
40.	1163579	1153484	1511
50.	1454491	1441871	1888
1. 0.	1745418	1730275	2266
10.	2036358	2018691	2643
20.	2327316	2307126	3021
30.	2618294	2595581	3399
40.	2909292	2884056	3776
50.	3200316	3172557	4153
2. 0.	3491368	3461086	4530
10.	3782448	3749644	4908
20.	4073561	4038235	5286
30.	4364708	4326860	5663
40.	4655893	4615523	6039
50.	4947116	4904226	6418
3. 0.	5238381	5192970	6795
10.	5529691	5481760	7172
20.	5821050	5770599	7549
30.	6112454	6059483	7925
40.	6403913	6348423	8303
50.	6695425	6637417	8680
4. 0.	6986995	6926469	9057
10.	7278622	7215578	9434
20.	7570313	7504751	0, 00009809
30.	7862069	7793991	0, 00010187
40.	8153890	8083296	0563
50.	8445781	8372671	0939
5°. 0′.	0, 08737744	0, 08662119	0, 00011316

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230 : 229	Correctio si ratio axium = 200 : 199
5°. 10′.	0, 09029780	0, 08951041	0, 00011692
20.	9321896	9241244	2068
30.	9614088	9530923	2444
40.	0, 09906362	0, 09820685	2820
50.	0, 10198721	0, 10110532	3196
6. 0.	0491168	0400[illegible]3	3571
10.	0783704	0690494	3947
20.	1076330	0980611	4322
30.	1369054	1270827	4698
40.	1661873	1561138	5073
50.	1954791	[illegible]	5449
7. 0.	2247811	2142064	5824
10.	2540937	2432635	6199
20.	2834169	2723452	6573
30.	3127514	3014254	6947
40.	3420965	3305203	7322
50.	3714539	359627[illegible]	7697
8. 0.	4008224	38874[illegible]0	8070
10.	4302033	4178770	8444
20.	4595962	4470201	8819
30.	4890017	4761758	9192
40.	5184199	5053444	9565
50.	5478514	5345264	0, 00019939
9. 0.	5772902	5637218	0, 00020312
10.	6067544	5929307	0685
20.	6362264	6221536	1059
30.	6657127	6513908	1431
40.	6952130	6806422	1804
50.	7247282	70[illegible]9086	2176
10°. 0′.	0, 17542583	0, 17391900	0, 00022548

Ele-

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230:229	Correctio si ratio axium = 200:199
10°. 10′.	0, 1783803[illegible]	0, 17684864	0, 00022920
20.	8133636	7977983	3292
30.	8429404	8271268	3664
40.	8725327	8564709	4035
50.	9021413	885[illegible]314	4406
11. 0.	931[illegible]	9152081	4777
10.	9614071	9446022	5148
20.	0, 19910604	0, 19740132	5519
30.	0, 20207425	0, 20034418	5889
40.	0504360	0328880	6259
50.	0801472	0623520	6629
12. 0.	1098768	0918346	7000
10.	1396249	1213358	7369
20.	1693915	1508556	7738
30.	1991769	1803944	8107
40.	2289815	2099526	8477
50.	2588056	2395304	8845
13. 0.	2886498	2691285	9213
10.	3185139	2987466	9581
20.	3483983	3283852	0, 00029949
30.	378[illegible]033	3580446	0, 00030317
40.	4082293	3877252	0685
50.	4381762	4174268	1052
14. 0.	4681448	4471503	1419
10.	4981351	4768957	1786
20.	5281471	5066629	2152
30.	5581818	5364530	2518
40.	5882388	5662656	2884
50.	6183191	5961017	3250
15°. 0′.	0, 26484227	0, 26259613	0, 00033616

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230 : 229	Correctio si ratio axium = 200 : 199
15°. 10′.	0, 26785494	0, 26558441	0, 00033980
20.	7086980	6857491	4346
30.	7388742	7156818	4710
40.	7690732	7456375	5074
50.	7992968	7756181	5438
16. 0.	8295440	8056224	5802
10.	8598190	8356547	6165
20.	8901135	8657117	6528
30.	9204435	8957944	6890
40.	9507950	9259039	7253
50.	0, 29811723	9560393	7615
17. 0.	0, 30115771	0, 29862025	7978
10.	0420085	0, 30163924	8339
20.	0724676	0466103	8700
30.	1029542	0768559	9061
40.	1334685	1071294	9422
50.	1640112	1374315	0, 00039782
18. 0.	1945825	1677625	0, 00040142
10.	2251829	1981227	0501
20.	2558125	2285124	0861
30.	2864715	2589317	1219
40.	3171603	2893811	1579
50.	3478795	3198611	1937
19. 0.	3786291	3503717	2295
10.	4094092	3809131	2653
20.	4402211	4114865	3010
30.	4710639	4420910	3367
40.	5019388	4727278	3723
50.	5328457	5033970	4080
20°. 0.	0, 35637850	0, 35340987	0, 00044435

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230 : 229	Correctio. si ratio axium = 200 : 199
20°. 10′.	0, 35947572	0, 35648336	0, 00044790
20.	6257627	5956021	5146
30.	6568012	6264038	5500
40.	6878734	6572394	5854
50.	7189798	6881096	6209
21. 0.	7501210	7190147	6562
10.	7812967	7499547	6916
20.	8125079	7809304	7269
30.	8437543	8119416	7621
40.	8750365	8429888	7973
50.	9063548	8740724	8325
22. 0.	9377093	9051924	8676
10.	0, 39691014	9363504	9027
20.	0, 40005307	9675458	9378
30.	0319972	0, 39987786	0, 00049727
40.	0635017	0, 40300498	0, 00050077
50.	0950451	0613602	0427
23. 0.	1260264	0927087	0775
10.	1582465	1240963	1124
20.	1899064	1555239	1471
30.	2216059	1869915	1819
40.	2533459	2184999	2166
50.	2851261	2500487	2513
24. 0.	3169472	2816388	2859
10.	3488103	3132711	3205
20.	3807145	3449449	3551
30.	4126606	3766608	3895
40.	4446490	4084193	4240
50.	4766802	4402209	4583
25°. 0.	0, 45087541	0, 44720650	0, 00054927

Ele-

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230:229	Correctio. si ratio axium = 200:199
25°. 10′.	0, 45408713	0, 45039539	0, 00055271
20.	5730328	5358867	5613
30.	6052387	5678643	5956
40.	6374898	5998874	6298
50.	6697856	6319555	6639
26. 0.	7021268	6640693	6980
10.	7345243	6962297	7320
20.	7669477	7284363	7660
30.	7994232	7606904	8000
40.	8319558	7929919	8339
50.	8645302	8253405	8677
27. 0.	8971535	8577385	9015
10.	9298253	8901850	9352
20.	9625451	9226801	0, 00059690
30.	0, 49953149	9552254	0, 00060026
40.	0, 50281339	0, 49878203	0363
50.	0610029	0, 50204655	0698
28. 0.	0939228	0531019	1033
10.	1268935	0859095	1367
20.	1599156	1187088	1701
30.	1929894	1515602	2035
40.	2261156	1844643	2368
50.	2592945	2174215	2701
29. 0.	2925266	2504323	3033
10.	3258124	2834970	3364
20.	3591522	3166162	3696
30.	3925465	3497901	4025
40.	4259955	3830192	4356
50.	4595007	4163048	4685
30°. 0′.	0, 54930614	0, 54496462	0, 00065013

Elc-

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230 : 229	Correctio. si ratio axium = 200 : 199
30°. 10'.	0, 55266789	0, 54830448	0, 00065341
20.	5603526	5165000	5669
30.	5940841	5500134	5997
40.	6278732	5835847	6323
50.	6617210	6172151	6649
31. 0.	6956272	6509043	6975
10.	7295930	6846534	7300
20.	7636186	7184627	7624
30.	7977043	7523326	7949
40.	8318512	7862639	8272
50.	8660594	8202570	8595
32. 0.	9003291	8543119	8917
10.	9346612	8884297	9239
20.	0, 59690562	9226107	9560
30.	0, 60035145	9568554	0, 00069881
40.	0380369	0, 59911646	0, 00070201
50.	0726236	0, 60255385	0520
33. 0.	1072755	0599779	0838
10.	1419927	0944831	1157
20.	1767762	1290550	1475
30.	2116258	1636933	1791
40.	2465433	1984000	2108
50.	2815280	2331743	2424
34. 0.	3165814	2680177	2739
10.	3517033	3029300	3054
20.	3868946	3379121	3368
30.	4221560	3729647	3681
40.	4574880	4080883	3994
50.	4928909	4432832	4306
35°. 0'.	0, 65283658	0, 64785500	0, 000746[illegible]

Elev-

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230 : 229	Correctio. si ratio axium = 200 : 199
35°. 10′.	0, 65639128	0, 65138904	0, 00074928
20.	5995333	5493042	5239
30.	6352267	5847913	5548
40.	6709943	6203531	5858
50.	7068362	6559895	6166
36. 0.	7427549	6917032	6474
10.	7787498	7274935	6781
20.	8148198	7633594	7088
30.	8509668	7993026	7393
40.	8871922	8353247	7698
50.	9234965	8714261	8003
37. 0.	9598798	9076070	8307
10.	0, 69963430	9438682	8610
20.	0, 70328873	0, 69802110	8913
30.	0695124	0, 70166350	9215
40.	1062189	0531408	9517
50.	1430077	0897294	0, 00079817
38. 0.	1798801	1264020	0, 00080117
10.	2168363	1631589	0417
20.	2538771	2000008	0715
30.	2910033	2369286	1013
40.	3282156	2739429	1310
50.	3655144	3110442	1607
39. 0.	4029008	3482336	1904
10.	4403754	3855116	2199
20.	4779386	4228786	2493
30.	5155918	4603362	2788
40.	5533347	4978839	3081
50.	5911686	5355230	3373
40°. 0′.	0, 76290945	0, 75732547	0, 00083666

Ele-

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230 : 229	Correctio si ratio axium = 200 : 199
40°. 10′.	0, 76671137	0, 76110800	0, 00083956
20.	7052266	6489996	4247
30.	7434332	6870133	4536
40.	7817354	7251231	4825
50.	8201331	7633289	5114
41. 0.	8586276	8016320	5402
10.	8972196	8400330	5688
20.	9359099	8785328	5975
30.	0, 79746990	9171319	6260
40.	0, 80135888	9558322	6545
50.	0525802	0, 79946346	6892
42. 0.	0916723	0, 80335381	7112
10.	1308666	0725444	7395
20.	1701642	1116544	7677
30.	2095662	1508694	7959
40.	2490733	1901899	8239
50.	2886866	2296171	8519
43. 0.	3284068	2691516	8796
10.	3682348	3087946	9076
20.	4081717	3485469	9353
30.	4482180	3884091	9630
40.	4883755	4283831	0, 00089907
50.	5286446	4684691	0, 00090182
44. 0.	5690261	5086680	0456
10.	6095212	5489810	0730
20.	6501309	5894092	1005
30.	6908562	6299534	1275
40.	7316981	6706148	1546
50.	7726577	7113944	1817
45°. 0′.	0, 88137359	0, 87522931	0, 00092087

 Ele-

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230:229	Correctio. si ratio axium = 200:199
45°. 10′.	0, 88549337	0, 87933119	0, 00092356
20.	8962521	8344518	2625
30.	9376924	8757142	2893
40.	0, 89792557	9171000	3159
50.	0, 90209434	0, 89586108	3425
46. 0.	0627557	0, 90002467	3690
10.	1046933	0420085	3955
20.	1467586	0838984	4218
30.	1889523	1259173	4481
40.	2312760	1680668	4744
50.	2737304	2103474	5004
47. 0.	3163161	2527599	5265
10.	3590351	2953063	5525
20.	4018885	3379875	5784
30.	4448773	3808048	6043
40.	4880031	4237595	6300
50.	5312660	4668519	6556
48. 0.	5746685	5100844	6812
10.	6182115	5534580	7067
20.	6618964	5969740	7321
30.	7057241	6406334	7574
40.	7496962	6844377	7827
50.	7938138	7283880	8078
49. 0.	8380785	7724800	8328
10.	8824919	8167333	8579
20.	9270545	8611303	8828
30.	0, 99717688	9056796	9076
40.	1, 00166353	9503816	9324
50.	0616558	0, 99952382	9570
50°. 0′.	1, 01068318	1, 00402509	0, 00099817

Ele-

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230 : 229	Correctio si ratio axium = 200 : 199
50°. 10′.	1, 01521645	1, 00854208	0, 00100062
20.	1976560	1307501	0306
30.	2433069	1762393	0549
40.	2891196	2218909	0791
50.	3350948	2677056	1033
51. 0.	3812346	3136854	1274
10.	4275407	3598322	1515
20.	4740139	4061465	1753
30.	5206571	4526315	1991
40.	5674707	4992874	2229
50.	6144566	5461162	2465
52. 0.	6616169	5931200	2701
10.	7089531	6403002	2935
20.	7564671	6876589	3170
30.	8041608	7351978	3403
40.	8520344	7829172	3635
50.	9000928	8308220	3866
53. 0.	9483336	8789098	4097
10.	1, 09967635	9271872	4326
20.	1, 10453809	1, 09756528	4556
30.	0941883	1, 10243089	4783
40.	1431882	0731581	5010
50.	1923820	1222018	5235
54. 0.	2417721	1714424	5461
10.	2913603	2208817	5685
20.	3411488	2705219	5909
30.	3911394	3203648	6131
40.	4413350	3704133	6353
50.	4917356	4206673	6573
55°. 0′.	1, 15423455	1, 14711313	0, 00106793

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230:229	Correctio. si ratio axium = 200:199
55°. 10′.	1, 15931662	1, 15218067	0, 00107012
20.	6441994	5726952	7230
30.	6954479	6237996	7447
40.	7469139	6751221	7663
50.	7985994	7266647	7879
56. 0.	8505061	7784291	8093
10.	9026385	8304198	8306
20.	1, 19549974	8826376	8518
30.	1, 20075853	9350851	8730
40.	0604042	1, 19877641	8940
50.	1134580	1, 20406787	9151
57. 0.	1667480	0938301	9360
10.	2202781	1472222	9568
20.	2740499	2008566	9775
30.	3280650	2547349	0, 00109980
40.	3823278	3088617	0, 00110187
50.	4368422	3632405	0390
58. 0.	4916077	4178711	0594
10.	5466277	4727568	0796
20.	6019070	5279024	0997
30.	6574477	5833101	1198
40.	7132527	6389827	1397
50.	7693253	6949235	1595
59. 0.	8256682	7511353	1794
10.	8822836	8076202	1990
20.	9391772	8643839	2186
30.	1, 29963495	9214269	2380
40.	1, 30538046	1, 29787534	2575
50.	1115470	1, 30363678	2767
60°. 0′.	1, 31695790	1, 30942725	0, 00112960

Ele-

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230:229	Correctio. si ratio axium = 200:199
60°. 10'.	1,32279035	1,31524703	0,00113151
20.	2865251	2109658	3340
30.	3454465	2697618	3530
40.	4046720	3288625	3718
50.	4642046	3882710	3906
61. 0.	5240485	4479914	4092
10.	5842069	5080269	4277
20.	6446839	5683817	4461
30.	7054839	6290602	4645
40.	7666106	6900659	4827
50.	8280677	7514027	5008
62. 0.	8898598	8130752	5188
10.	1,39519907	8750871	5368
20.	1,40144651	1,39374432	5546
30.	0772864	1,40001468	5723
40.	1404607	0632041	5900
50.	2039909	1266180	6076
63. 0.	2678826	1903940	6251
10.	3321401	2545364	6423
20.	3967674	3190493	6596
30.	4617709	3839391	6768
40.	5271553	4492104	6938
50.	5929241	5148668	7108
64. 0.	6590835	5809144	7276
10.	7256388	6473586	7444
20.	7925954	7142048	7611
30.	8599581	7814577	7776
40.	9277332	8491237	7940
50.	1,49959258	9172079	8104
65°. 0'.	1,50645414	1,49857157	0,00118266

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230:229	Correctio si ratio axium = 200:199
65°. 10′.	1, 51335872	1, 50546544	0, 00118428
20.	2030683	1240291	8589
30.	2729904	1938455	8749
40.	3433610	2641109	8907
50.	4141861	3348316	9064
66. 0.	4854709	4060127	9221
10.	5572241	4776628	9376
20.	6294504	5497867	9531
30.	7021572	6223918	9685
40.	7753531	6954867	9838
50.	8490438	7690770	0, 00119989
67. 0.	9232371	8431706	0, 00120139
10.	1, 59979404	9177749	0289
20.	1, 60731618	1, 59928980	0438
30.	1489090	1, 60685475	0584
40.	2251900	1447315	0730
50.	3020134	2214587	0876
68. 0.	3793871	2987368	1021
10.	4573192	3765739	1163
20.	5358201	4549806	1305
30.	6148975	5339644	1446
40.	6945609	6135350	1587
50.	7748203	6937022	1726
69. 0.	8556844	7744749	1865
10.	1, 69371640	8558637	2002
20.	1, 70192688	1, 69378783	2137
30.	1020091	1, 70205292	2272
40.	1853956	1038270	2406
50.	2694395	1877829	2539
70°. 0′.	1, 73541516	1, 72724076	0, 00122670

Ele-

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230 : 229	Correctio si ratio axium = 200 : 199
70°. 10'.	1, 74395436	1, 73577130	0, 00122802
20.	5256268	4437102	2931
30.	6124135	5304117	3060
40.	6999161	6178297	3187
50.	7881476	7059774	3314
71. 0.	8771200	7948666	3440
10.	1, 79668474	8845115	3564
20.	1, 80573429	1, 79749253	3688
30.	1486213	1, 80661226	3810
40.	2406982	1581191	3931
50.	3335859	2509271	4051
72. 0.	4273002	3445625	4171
10.	5218577	4390417	4289
20.	6172744	5343809	4406
30.	7135658	6305954	4522
40.	8107501	7277036	4638
50.	1, 89088445	8257225	4751
73. 0.	1, 90078660	1, 89246693	4864
10.	1078360	1, 90245653	4976
20.	2087706	1254265	5086
30.	3106912	2272745	5196
40.	4136185	3301299	5304
50.	5175707	4340109	5412
74. 0.	6225726	5389424	5519
10.	7286440	6449440	5624
20.	8358094	7520403	5728
30.	1, 99440926	8602552	5832
40.	2, 00535173	1, 99696122	5934
50.	1641088	2, 00801368	6035
75°. 0'.	2, 02758943	2, 01918561	0, 00126135

Ele-

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230 : 229	Correctio. si ratio axium = 200 : 199
75°. 10′.	2, 03888994	2, 03047957	0, 00126234
20.	5031530	4189845	6332
30.	6186834	5344508	6428
40.	7355202	6512243	6525
50.	8536952	7693366	6619
76. 0.	2, 09732400	2, 08888195	6712
10.	2, 10941878	2, 10097061	6805
20.	2165728	1320306	6896
30.	3404305	2558285	6986
40.	4657979	3811369	7076
50.	5927147	5079953	7163
77. 0.	7212185	6364415	7250
10.	8513520	7665182	7337
20.	2, 19831578	2, 18982678	7421
30.	2, 21166797	2, 20317342	7505
40.	2519663	1669661	7588
50.	3890650	3040108	7669
78. 0.	5280268	4429193	7749
10.	6689029	5837429	7829
20.	8117484	7265366	7908
30.	2, 29566209	2, 28713580	7985
40.	2, 31035791	2, 30182658	8061
50.	2526860	1673230	8136
79. 0.	4040071	3165952	8210
10.	5576092	4721491	8283
20.	7135643	6280567	8354
30.	2, 38719470	7863927	8425
40.	2, 40328354	2, 39472351	8495
50.	1963111	2, 41106655	8563
80°. 0′.	2, 43624605	2, 42767703	0, 00128630

Ele-

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230 : 229	Correctio si ratio axium = 200 : 199
80°.10′.	2, 45313738	2, 44456398	0, 00128697
20.	7031457	6173686	8762
30.	2, 48778767	7920572	8826
40.	2, 50556721	2, 49698109	8888
50.	2366423	2, 51507402	8950
81. 0.	4209042	3349619	9011
10.	6085827	5226010	9071
20.	7998066	7137861	9129
30.	2, 59947150	2, 59086565	9186
40.	2, 61934557	2, 61073600	9243
50.	3961842	3100519	9297
82. 0.	6030619	5168939	9353
10.	2, 68142665	7280634	9405
20.	2, 70299858	2, 69437484	9457
30.	2504180	2, 71641470	9508
40.	4757755	3894716	9557
50.	7062852	6199492	9606
83. 0.	2, 79421905	2, 78558231	9653
10.	2, 81837526	2, 80973545	9699
20.	4312502	3448222	9745
30.	6849869	5985297	9789
40.	2, 89452850	2, 88587994	9832
50.	2, 92124961	2, 91259828	9874
84. 0.	4870022	4004619	9915
10.	2, 97692123	6826458	9955
20.	3, 00595750	2, 99729829	0, 00129992
30.	3585780	3, 02719612	0, 00130031
40.	6667526	5801117	066
50.	3, 09846849	3, 08980207	101
85°. 0′.	3, 13130131	3, 12263264	0, 00130136

Elevatio Poli	Partes Meridiani circularis	Partes Meridiani elliptici si ratio axium = 230:229	Correctio si ratio axium = 200:199
85°. 10'.	3, 10524449	3, 15657364	0, 00130169
20.	3, 20037608	3, 19170312	201
30.	3, 23678250	3, 22810750	231
40.	3, 27456027	3, 26588331	261
50.	3, 31381691	3, 30513807	290
86. 0.	3, 35467357	3, 34599291	317
10.	3, 39726625	3, 38858385	343
20.	3, 44174982	3, 43306576	368
30.	3, 48830014	3, 47961449	393
40.	3, 53711922	3, 52843205	416
50.	3, 58844002	3, 57975141	438
87. 0.	3, 64253332	3, 63384334	458
10.	3, 69971646	3, 69102518	477
20.	3, 76036433	3, 75167183	496
30.	3, 82492473	3, 81623108	513
40.	3, 89393810	3, 88524338	529
50.	3, 96806511	3, 95936939	544
88. 0.	4, 04812550	4, 03942885	558
10.	4, 13515303	4, 12645553	572
20.	4, 23047800	4, 22177973	583
30.	4, 33585190	4, 32715292	594
40.	4, 45364693	4, 44494732	603
50.	4, 58718894	4, 57848878	613
89. 0.	4, 74134985	4, 73264921	619
10.	4, 92367807	4, 91497702	625
20.	5, 14682796	5, 13812658	631
30.	5, 43451506	5, 42581342	635
40.	5, 83998315	5, 83128132	637
50.	6, 53313244	6, 52443050	0, 00130639
90°. 0'.	Infinit.	Infinit.	

Re-

REFLEXIONS
SUR
LES LOGARITHMES IMAGINAIRES.

Par

F. T. SCHVBERT.

Presenté à l'Académie le 28 Janvier 1790.

§. 1.

Il n'y a aucun Mathematicien, qui ne connoisse la dispute célèbre agitée rélativement aux Logarithmes des nombres négatifs, entre deux des plus grands Geomètres, M. M. Leibnitz & Jean Bernoulli, dont celui-là soutint que les Logarithmes des nombres négatifs étoient imaginaires, tandis que celui-ci prétendit qu'ils étoient non seulement réels mais les mêmes que ceux des nombres affirmatifs. L'un & l'autre de ces deux savans appuya son sentiment sur des raisons si fortes, & trouva tant de contradictions dans le sentiment opposé, que de quelque parti qu'on se déclara, on rencontra des difficultés qu'il ne sembloit guéres possible de surmonter. On a donc beaucoup d'obligations à M. Léonard Euler, pour avoir decidé à la satisfaction de tous les connoisseurs cette dispute qui avoit même rendu suspectes toutes les Mathematiques pures, & pour en avoir selon sa coûtume levé heureusement toutes les difficultés. Dans un mémoire inseré dans *l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences & belles lettres de Berlin* pour l'anee née 1749, ce grand Geomètre decide la queſtion en faveur de M. Leibnitz, en montrant, qu'à chaque nombre, poſitif ou négatif, réel ou imaginaire, repond une infinité de Logarithmes, mais avec cette difference, que tous ces Logarithmes ſont imaginaires, ſi le nombre eſt négatif ou imaginaire, & que chaque nombre affirmatif, qui n'a qu'un ſeul Logarithme réel, a en outre une infinité de Logarithmes imaginaires. Il fait voir enſuite, que cette theorie des Logarithmes eſt parfaitement d'accord avec toutes les opérations qui renferment de ces quantités tranſcendentes, & que toutes les difficultés dont il eſt queſtion, s'évanouiſſent entierement, pourvû qu'on n'oublie pas qu'à chaque nombre repond une infinité de Logarithmes imaginaires.

§. 2. Cette diſpute paraiſſant ainſi terminée, j'ai été ſurpris de lire dans les *Memoires de la Societé Italienne* (*), que M. Riccati renverſe tout d'un coup les raiſonnemens de M. Euler, en avançant, que tous les Logarithmes, tant ceux des nombres affirmatifs que des nombres négatifs, trouvés par la methode de M. Euler, ſont également imaginaires. Les reflexions occaſionnées par cet ingénieux mémoire m'ayant cependant toujours plus convaincu de la ſolidité des raiſonnemens de ce grand Mathématicien, je prends la liberté de les communiquer à l'Académie, puisque la moindre difficulté dans cette matiere eſt de la derniere importance. Je tâcherai de faire voir, 1) que la demonſtration de M. Riccati ne prouve point la verité de ſon Theorème, & qu'il eſt au contraire indubitable, que le zero imaginaire ne diffère en rien du zero réel; 2) que les raiſons desquelles M. Euler déduit ſa Théorie

(*) *Memorie di Matematica e Fiſica della Societá Italana*, Tomo IV. Teorema: *Il Nulla immaginario non puó confonderſi col reale.* Pag. 116. ſeqq.

rie des Logarithmes, font aussi solides qu'on les peut attendre de la part d'un si grand génie.

§. 3. Comme les formules que M. Euler trouve pour les Logarithmes, se reduisent aux suivantes:

$$l(+1) = 2\lambda\pi\sqrt{-1}, \quad \& \quad l(-1) = (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1},$$

M. Riccati se propose de prouver la fausseté de cette proposition: $0\sqrt{-1} = 0$, d'où il conclut, que d'après la méthode de M. Euler tous les Logarithmes des nombres affirmatifs seroient aussi imaginaires, quand même on supposeroit $\lambda = 0$, parcequ'on n'est pas autorisé de confondre le zero imaginaire & le zero réel. Il le démontre à l'aide de la courbe que les anciens appellérent la Conchoide, & qui se forme, comme on sait, de la maniere suivante: Qu'on coupe la ligne droite A E par un autre A C perpendiculairement, & qu'on determine dans celle-ci un point C. Or si l'on trace une ligne quelconque C E qui rencontre la ligne A E au point E, & qu'on fasse E M = E m = à une ligne donnée A B, les points M, m, feront dans la Conchoide. En posant donc A B = A D = a, A C = c, A P = x, P M = y, on a P M : P E = A C : A E, c'est à dire, Tab. III. Fig. 1.

$$y : \sqrt{(a^2 - y^2)} = c : x + \sqrt{(a^2 - y^2)};$$

partant

$$x = \frac{(c - y)\sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}.$$

Statuons maintenant $y = AC = c$, & nous aurons $x = 0\sqrt{(a^2 - c^2)}$. Si donc le point C est au delà du point B, ou que $c > a$, on a $x = 0\sqrt{(c^2 - a^2)}\sqrt{-1}$. Or M. Riccati raisonne ainsi: le point C n'étant pas dans la courbe, dans le cas que nous venons de considérer, il faut que la valeur trouvée de x soit imaginaire; il est donc absolument faux que $0\sqrt{-1} = 0$, mais $0\sqrt{-1}$ est toujours une quantité imaginaire.

§. 4. Avant que d'examiner la demonſtration même de M. Riccati je remarquerai que la concluſion qu'il en déduit, n'eſt pas fondée. Un ſeul exemple ne ſauroit demontrer, que $0\sqrt{-1}$ ſoit toujours une quantité imaginaire, mais tout au plus, que cette formule peut avoir quelquefois une valeur imaginaire. Pour juſtifier le raiſonnement de M. Euler, il ſuffira donc d'oppoſer d'autres cas, où il ſoit vrai que $0\sqrt{-1}=0$. Cela fait, il feroit encore queſtion de ſavoir, laquelle de ces deux valeurs il faut admettre dans le cas qui a été l'objet des recherches de M. Euler. Je produirai donc un cas mémorable, qui ne diffère presque en rien du cas propoſé, comme je ferai voir dans la ſuite, & dans lequel il eſt hors de doute que $0\sqrt{-1}=0$. On ſait, que tous les facteurs doubles de la fonction $p^n - q^n$ ſont contenus ſous cette forme:

$$p^2 - 2\,p\,q\,\text{coſ}\,\tfrac{2\lambda\pi}{n} + q^2,$$

laquelle peut encore être decompoſée en ces facteurs ſimples

$$p - q\,(\text{coſ}\,\tfrac{2\lambda\pi}{n} \pm \text{ſin}\,\tfrac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

Or poſant $\lambda = 0$, le facteur double devient

$$p^2 - 2\,p\,q + q^2 = (p-q)^2,$$

d'où il ſuit, que les deux facteurs ſimples ſont $= p - q$. Mais l'expreſſion générale du facteur ſimple eſt pour ce cas $p - q\,(1 \pm 0\sqrt{-1})$; donc à fin que ce ſoit égal à $p - q$, il doit être $0\sqrt{-1}=0$.

§. 5. Paſſons maintenant à la demonſtration de M. Riccati, qui détruiroit ſans doute tous les raiſonnemens de M. Euler, ſi elle prouvoit que $0\sqrt{-1}$ ait *toujours* une valeur imaginaire. Car la formule de M. Euler: $l(+1) = 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, donnant une infinité de Logarithmes imaginaires & un ſeul Logarithme réel $=0$, ſuppoſé que $0\sqrt{-1}=0$, il il eſt vrai qu'on pourroit dire, que la propoſition de M. Riccati ne demontre autre choſe ſi non que ce Logarithme eſt auſſi imaginaire, ou que le nombre des Logarithmes imaginaires de $+ 1$ doit être augmenté de l'unité, ce qui donneroit de même leur nombre $= \infty$. On pourroit encore dire, que comme il eſt d'ailleurs connu, que chaque nombre affirmatif a du moins un Logarithme réel, il eſt indubitable malgré l'objection de M. Riccati, que tout nombre affirmatif a une infinité de Logarithmes imaginaires & un ſeul Logarithme réel. Mais auſſi on ne peut nier, que cela prouveroit du moins la fauſſeté des raiſonnemens de M. Euler, quoique la concluſion qu'il en tire, ne fut pas détruite; car puisqu'il a établi, que l'expreſſion $2 \lambda \pi \sqrt{-1}$ eſt une formule *générale* qui renferme tous les Logarithmes de l'unité, il s'enſuit, que l'unité n'a que des Logarithmes imaginaires, ſi $0 \sqrt{-1}$ a une valeur impoſſible. Or comme l'unité a ſans doute un Logarithme réel, ſes raiſonnemens conduiroient à une concluſion fauſſe. On en tireroit encore la conſequence, que dans ce cas les nombres négatifs pourroient auſſi avoir un Logarithme réel, & M. Euler n'auroit pas demontré ce qu'il s'étoit propoſé.

§. 5. Il me ſemble donc valoir la peine d'examiner rigoureuſement, ſi cette circonſtance tirée de la nature de la Conchoide prouve en effêt la valeur imaginaire de l'expreſſion $0 \sqrt{-1}$; & j'avouerai, qu'à mon avis elle prouve tout le contraire, & qu'en ce cas même l'abciſſe x ne peut pas avoir d'autre valeur que celle-ci $x = 0$. En effêt il eſt certain, que le point C étant le *pole* de la Conchoide eſt une partie de la courbe, puisqu'il eſt evident par ſa generation, qu'elle ne ſauroit être décrite ſans le point C, le point M de la Conchoide étant pris ſur la ligne C E, en faiſant E M

=

$= AB$, & que le point C eſt le plus ſouvent (ſavoir ſi $c \leqq a$) ſitué actuellement dans l'arc de la courbe. Il s'agit ici de trouver, en quels points la ligne CD rencontre la courbe, ou de determiner les valeurs de l'appliquée y au cas que $x = 0$. En mettant donc $x = 0$, on trouve $y = \pm a$, et $y = c$, dont les deux valeurs premieres determinent les points B, D, & la troiſieme valeur donne le point C. Pour l'expoſer dans tout ſon jour, il faut rendre l'equation rationelle d'après la methode vulgaire. Ainſi nous aurons

$$y^4 - 2cy^3 + (x^2 + c^2 - a^2)y^2 + 2a^2cy - a^2c^2 = 0,$$

dont les racines, ſi $x = 0$, feront 1) $y = \pm a$. Pour trouver les autres racines, il faudra diviſer l'equation par $y^2 - a^2 = 0$, par où l'on aura

$$y^2 - 2cy + c^2 = 0 = (y - c)^2,$$

partant $y = c$, & il ne paroît point, que cette valeur ſoit imaginaire, ſi $c > a$. On ne peut donc douter que $x = 0$, ſi $y = c$, d'où il ſuit que $0\sqrt{-1} = 0$.

§. 7. Il eſt vrai, que dans le cas où $y = c$ & $c > a$, il y a $x = 0\sqrt{-1}$, & qu'il ne faut pas tout à fait négliger le facteur imaginaire $\sqrt{-1}$; c'eſt pourquoi il ne ſera pas hors de propos de dire quelques mots pour determiner la juſte valeur du produit $0\sqrt{-1}$. Le facteur $\sqrt{-1}$ nous fait voir, que pour peu que la valeur de $y = c$ ſoit changée, l'abſciſſe x ſera imaginaire, ſavoir $x = \alpha\sqrt{-1}$; c'eſt à dire, qu'à la verité le point C eſt dans la Conchoide, mais qu'il appartient à une branche de la courbe, dans laquelle toutes les appliquées ſont imaginaires, hormis celle qui repond à l'abſciſſe $x = 0$, qu'ainſi cette branche s'eſt perdue dans un point, ou que C eſt un *point iſolé* (*punctum conjugatum*); ce qui eſt parfaitement d'accord avec la nature de la Conchoide. Car

Car il faut ſe ſouvenir, que ſon équation contient quatre valeurs de la quantité y, ou qu'elle a quatre branches, dont deux ſont determinées par le facteur $y^2 - a^2 = 0$, & les deux autres par le facteur qui devient $(y - c)^2 = 0$, ſi $x = 0$. Quand il y a $c < a$, la Conchoide a un noeud, tel que la Fig. 2. le repreſente. La ligne c croiſſant, le point C approche du point B, ce noeud devient moindre; il s'évanouit, ſi $c = a$, & le point C ſe confond avec le point B; enfin il devient un point iſolé C, ſi $c > a$, comme dans la Fig. 1. Puisqu'il eſt donc evident, que le point C appartient dans tous ces cas à la courbe, & qu'il ſe trouve toujours dans la ligne A C, il faut que dans le cas où $y = c$ on ait toujours $x = c$. Mais dans le ſeul cas où $c > a$, l'équation doit être d'une telle forme, que la quantité variable x devienne imaginaire, auſſitôt que la valeur $y = c$ ſubit un changement infiniment petit. Je dis, infiniment petit, parceque d'ailleurs l'appliquée y n'appartiendroit pas à la même branche dans laquelle ſe trouve le point C, & qui s'eſt évanouie en un point iſolé. Et c'eſt ce juſtement que veut dire l'expreſſion $x = 0\sqrt{-1}$.

§. 8. Toutes les fois donc, que pour une certaine valeur de l'appliquée y on trouve $x = 0\sqrt{-1}$, cela demontre, que le point correſpondant eſt un point iſolé ou conjugué. Suppoſons, qu'on veuille définir la ſituation d'un point C rélativement à l'axe A B, il faudra dire, qu'en prenant Fig. 3.
l'abſciſſe égale à A B $= a$, l'appliquée deviendra $=$ B C $= c$, ou que généralement pour $x = a$ on aura $y = c$. Mais pour diſtinguer le point d'avec une ligne quelconque qui paſſe par ce point, il faut qu'à toute autre abſciſſe A P reponde une ordonnée imaginaire. On a donc d'abord $x - a = y - c$; mais c'eſt une équation, à laquelle ſatisfait toute ligne droite qui paſſe par le point C & qui coupe l'axe A P ſous un an-

gle de 45°. Car soit M E une telle ligne, on a, à cause de l'angle $E = 45°$, $BC = EB$, ou $AE = BC - AB = c - a$, et $PM = y = EP = x + c - a$, c'est à dire, $y - c = x - a$. Donc pour que l'équation ne contienne que le point C, il faut qu'elle donne pour toute autre valeur hormis $y = c$, une valeur imaginaire pour l'abscisse x; partant elle doit avoir cette forme, $x - a = (y - c)\sqrt{-1}$.

§. 9. Puisqu'on peut envisager le point comme un cercle d'un rayon qui s'est évanoui, soit C le centre d'un cercle donné, dont le rayon $CM = b$; soit $AB = a$, $BC = c$, $AP = x$, $PM = y$, & nous aurons $CM^2 = CD^2 + DM^2$ c'est à dire, $b^2 = (a - x)^2 + (y - c)^2$, & pour le point C, on $b = 0$, $(x - a)^2 = -(y - c)^2$, partant $x - a = (y - c)\sqrt{-1}$. C'est donc, pour ainsi dire, l'équation générale pour le point geometrique, & si l'équation d'une courbe donne pour une certaine valeur de y cette expression, $x = a + 0\sqrt{-1}$, cela fait voir, que la courbe a un point isolé pour l'abscisse $x = a$. Les valeurs des coordonnées pour ce point ne sont pas imaginaires, mais elles appartiennent à une serie infinie de valeurs, qui toutes sont imaginaires à la reserve d'une seule. Il est essentiel de ne jamais oublier cette régle, lorsqu'on parvient à une expression de la forme suivante: $x = a + 0\sqrt{-1}$.

§. 10. Celà suffira, à ce qui me semble, pour montrer, que le zero imaginaire est veritablement un zero réel, mais que neanmoins l'expression $0\sqrt{-1}$ signifie quelque chose de plus que le simple zero. Pour le rendre encore plus evident, je remarquerai, que cette expression $0\sqrt{-1}$, à laquelle on est parvenu par le calcul, resulte toujours d'une telle forme $Z\sqrt{-1}$, Z étant une telle fonction de la variable z, qui s'évanouit si l'on donne à la lettre z une valeur deter-

determinée $= a$, d'où il ſuit, que Z doit avoir cette forme $(z^n - a^n)^m$; partant ſi $z = a$, nous obtiendrons

$$Z \sqrt{-1} = (a^n - a^n)^m \sqrt{-1}.$$

Or il eſt indubitablement $a \sqrt{-1} = a \sqrt{-1}$, quelle que ſoit la valeur de $\sqrt{-1}$; on a donc $a^n \sqrt{-1} - a^n \sqrt{-1} = 0$, & $0 \sqrt{-1} = 0$, parceque cette expreſſion ſe reduit toujours à une autre de cette forme $(a - a) \sqrt{-1}$. Ainſi nous avons trouvé dans la Conchoide $x = \frac{(c - y) \sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}$; or ſi $y = c$ et $c > a$, cette expreſſion deviendra $x = \frac{(c - c) \sqrt{(a^2 - c^2)}}{c}$, ou en ſubſtituant $\sqrt{(c^2 - a^2)} = C$, $x = C \sqrt{-1} - C \sqrt{-1} = 0$, comme nous venons de demontrer.

§. 11. Puisqu'on ne ſauroit être trop clair ſur cette matiere, je remarquerai encore, qu'on peut enviſager cet objet ſous une autre face. Le zero & l'infini ne peuvent jamais exiſter; ce ſont des choſes impoſſibles, auſſi bien que les quantités imaginaires $\sqrt{-1}$ (*). Or il n'eſt pas abſurde d'admettre une valeur réelle d'un produit de deux quantités impoſſibles, comme $0 \sqrt{-1}$, non plus que de celles 0∞ ou $a \sqrt{-1} \times b \sqrt{-1}$. Mais pour determiner la valeur actuelle d'un tel produit, il faut remonter au ſens primitif de ces ſignes. Comme l'équation $x = 0$ veut dire, qu'on ne ſauroit prendre x aſſés petite pour qu'elle ſatisfaſſe au Problème, & $x = 0 . a$, qu'il n'y a point de nombre aſſés petit, qui multiplié par a produiſe la quantité x; ainſi l'expreſſion $x = 0 \sqrt{-1}$ ne ſignifie autre choſe, ſi non que nul facteur, quelque petit qu'il ſoit, ne ſauroit être tel, qu'étant multiplié par l'imaginaire $\sqrt{-1}$, il pût produire la quantité x; ou ce

 qui

(*) Voy. l'excellent mémoire de *M. l'Abbé de Caluſo*, *du Calcul différentiel & des fluxions*, dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin*, pour les années 1786 & 1787.

qui revient au même, cette expreſſion ſynonime $\frac{x}{0}$ ou $x . \infty =$ $\sqrt{-1}$, veut dire, qu'il n'y a point de facteur, quelque grand qu'il ſoit, qui étant multiplié par la quantité x, pût produire une quantité imaginaire $\sqrt{-1}$: d'où il ſuit ſans doute, que $x = 0$, ou du moins qu'elle n'a pas une valeur imaginaire.

§. 12. Il reſte encore à appliquer ce que nous venons de dire, à la demonſtration que M. Euler a donnée de ſa Theorie des Logarithmes. Il trouve cette expreſſion générale: $l(+1) = 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, de laquelle ſi $\lambda = 0$ l'on déduit $l(+1) = 0\sqrt{-1}$. Or comme j'ait fait voir, qu'une telle expreſſion $y = 0\sqrt{-1}$ indique toujours, que y appartient à une infinité de valeurs, qui toutes ſont imaginaires à l'exception d'une ſeule qui eſt $y = 0$; il s'enſuit d'abord, que chaque nombre poſitif a un ſeul Logarithme réel, mais une infinité de Logarithmes imaginaires. C'eſt ce que M. Euler demontre de la manière ſuivante: Poſant $l(+1) = y$, on a $(1 + \frac{y}{n})^n - 1 = 0$, n étant un nombre infini. Or le facteur général de cette equation eſt

$$(1 + \frac{y}{n})^2 - 2(1 + \frac{y}{n}) \operatorname{cof} \frac{2\lambda\pi}{n} + 1,$$

qui dans le cas où $\lambda = 0$ devient $(1 + \frac{y}{n} - 1)^2$, d'où l'on conclud que $\frac{y}{n} = 0$, ou bien $y = 0 . n$. Il eſt vrai, que la valeur de y paroit encore indeterminée, parceque $n = \infty$; mais il ſuit du moins, que cette valeur de y eſt réelle, parceque n eſt bien un nombre infini mais non pas imaginaire, & que le produit $0 . \infty$ ne ſauroit jamais être imaginaire. La valeur de y eſt donc réelle, ſi $\lambda = 0$; mais dans ce même cas il eſt $y = 0\sqrt{-1}$; partant l'expreſſion $0\sqrt{-1}$ a une valeur réelle, qui ne peut être que celle $y = 0$.

Les facteurs ſimples de l'équation $(1 + \frac{y}{n})^n - 1 = 0$, ſont

$1 +$

$$1 + \frac{y}{n} - \left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sin\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}\right) = 0,$$

ou à cauſe de $n = \infty$,

$$1 + \frac{y}{n} - 1 + \frac{2\lambda^2\pi^2}{n^2} - \text{cet.} \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1} \pm \text{cet.}$$
$$= \frac{y}{n} \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1} = 0,$$

parceque les autres termes ſont diviſées par des puiſſances d'un expoſant plus grand de $n = \infty$. On a donc généralement $y \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1} = 0$, ou bien $y = \mp 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, & lorsque $\lambda = 0$, $y = 0\sqrt{-1}$. Or j'ai demontré en particulier (§. 4.), que dans le facteur général

$$p - q(\cos\Phi \pm \sin\Phi\sqrt{-1})$$

de la fonction $p^n - q^n$, on a $\sin\Phi\sqrt{-1} = 0$, ſi $\Phi = 0$. D'où il ſuit, que tout au moins dans ce cas qui a été l'objet de recherches de M. Euler, il eſt $0\sqrt{-1} = 0$; partant une des valeurs de $l(+1)$ eſt $= 0$, toutes les autres étant imaginaires.

DE

DE NOVIS QVIBVSDAM CAVSTICAE PARABOLAE PROPRIETATIBVS.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. die 26 Ian. 1792.

§. 1.

Iam ſeptem vltra ſaeculum anni ab eo tempore elapſi ſunt, quo celeberrimus Tſchirnhaus, primus Curuarum cauſticarum inuentor, harum linearum praecipuas proprietates inueſtigauit. Poſt eum ſagaciſſimus Geometra Baſilienſis, Iohannes Bernoulli, plurimum in hoc argumento occupatus fuit. Quinimo qui poſt eum inclaruêre Geometriae principes, de perficienda vniuerſa Theoria Curuarum ſolliciti, etiam iſtam Geometriae ſublimioris partem inuentis numero et pondere claris locupletarunt. Nihilo vero minus multae ſane adhuc latent affectiones harum curuarum ſingulares, quas noſſe nec vanum nec iniucundum foret, praeterquam quod ad ſcientiam augendam ornandamque conferret. Quum igitur nuper, in ſolutione Problematis ex methodo tangentium inuerſa occupatus, in aliquot proprietates Cauſticae Parabolae incidiſſem, dubius, an quisquam alius earum iam mentio fecerit, has proprietates, vna cum aliis obſeruationibus, cum propoſito argumento arctiori vinculo connexis, hic exponere in animum induxi. Quanquam

quam enim huiusmodi disquisitiones parum arridere videntur plerisque Geometrarum nostri aevi, non deerunt tamen, quibus breuis excursio in derelictam quasi Geometriae prouinciam eo minus displicebit, si egregiis proprietatibus huius curuae, iam olim a Geometris detectis, aliquid addere nonnullaque emendare nobis contigerit.

§. 2. Prius autem quam propositum argumentum aggredior, haud abs re erit generale Curuarum causticarum, ex reflexione radiorum parallelorum natarum, Problema resoluisse. Formulas porro inde natas ad Parabolam vulgarem referam, ponendo scilicet radios incidentes axi normales. Proprietates deinde praecipuas huius curuae ex relatione coordinatarum deriuabo. Quomodo porro eas, de quibus hic potissimum sermo est, per methodum tangentium inuersam eruere liceat, ostendam, quo simul pateat, vtrum hae proprietates etiam aliis lineis curuis competant, an vero soli Causticae Parabolae. Denique ipsius Problematis, quod hisce disquisitionibus ansam praebuit, solutionem tradam.

Problema generale.

§. 3. *Si ex puncto lucido infinite remoto radii axi AB normales incidant in lineam curuam quamcunque AMN, determinare lineam catacausticam a radiis reflexis formatam.* Tab. IV. Fig. 1.

Solutio.

Sit arcus curuae propositae $AM = s$, et angulus incidentiae $AMR = \phi$, erit pro radio proximo rm arculus $Mm = \partial s$ et angulus $Amr = \phi + \partial\phi$; ex natura autem reflexionis sequitur fore angulum $ZMN = AMR = \phi$. Tum vero ob angulum $MZm = Msm - rmZ$, nec non $Msm = RMZ$, sequitur fore $MZm = RMZ - rmZ$. Est vero

RMZ

$$R M Z = 180 - A M R - Z M N = 180° - 2 \Phi \text{ et}$$

$$R M Z - r m Z = \partial . R M Z = - 2 \partial \Phi,$$

vbi ſignum — tantum indicat concauam ſupponi verſus axem curuam radios incidentes reflectentem, ita vt, nullo reſpectu ad ſignum habito, ſtatui queat $M Z m = 2 \partial \Phi$. Ex triangulo autem $M Z m$ colligitur longitudo radii reflexi

$$M Z = \frac{M m \,\text{ſin.}\, M m Z}{\text{ſin.}\, M Z m} = \frac{\partial s \,\text{ſin.}\, \Phi}{2 \partial \Phi}.$$

Pro inueſtigandis iam coordinatis curuae catacauſticae, referatur punctum eius Z ad axem $A B$, voceturque abſciſſa $A X = X$ et applicata $X Z = Y$, exiſtentibus pro curua data coordinatis $A P = x$, $P M = y$, eritque in triangulo $M Q Z$ rectangulo

$$Q Z = M Z \,\text{ſin.}\, Q M Z = \frac{\partial s \,\text{ſin.}\, \Phi \,\text{ſin.}\, 2 \Phi}{2 \partial \Phi};$$

$$Q M = M Z \,\text{coſ.}\, Q M Z = - \frac{\partial s \,\text{ſin.}\, \Phi \,\text{coſ.}\, 2 \Phi}{2 \partial \Phi};$$

conſequenter

$$X = A P + Q Z = x + \frac{\partial s \,\text{ſin.}\, \Phi \,\text{ſin.}\, 2 \Phi}{2 \partial \Phi};$$

$$Y = P M - Q M = y + \frac{\partial s \,\text{ſin.}\, \Phi \,\text{coſ.}\, 2 \Phi}{2 \partial \Phi}.$$

Cum denique conſtet omnem Cauſticam eſſe rectificabilem, videamus quaenam ſit arcus indefiniti $A Z$ longitudo. Hunc in finem notetur eſſe radium reflexum proximum $m z = M Z + \partial . M Z$; ducto autem arculo $m v$ erit $Z v = M Z - M v$ et $Z z = \partial . A Z = m z - m Z = m z - v Z = \partial . M Z + M v$. Eſt vero $M v = \partial s \,\text{coſ.}\, \Phi = m u = \partial . P M$, ideoque $\partial . A Z = \partial . M Z + \partial . P M$, et integrando $A Z = M Z + P M$, ſtatuendo ſcilicet initium in A. Arcus igitur Cauſticae aequatur ſummae radiorum incidentis et reflexi.

Pro-

Problema ſpeciale.

§. 4. *Si ex puncto lucido infinite remoto radii R M, r m, axi A B normales, incidant in Parabolam A M N, determinare Catacauſticam ab iis formatam.*

Solutio.

Sit ſemiparameter Parabolae $= p$, ita vt $y = \sqrt{2 p x}$; et cum in triangulo characteriſtico $M m u$ ſit tang. $M m u = \frac{M u}{m u}$, hoc eſt tang. $\Phi = \frac{\partial x}{\partial y}$, ob $x = \frac{y y}{2 p}$, erit tang. $\Phi = \frac{y}{p}$, ex quo valore ſequentes colliguntur:

$$\text{ſin.}\ \Phi = \frac{y}{\sqrt{(p p + y y)}};\ \text{ſin.}\ 2\,\Phi = \frac{2 p y}{p p + y y},$$
$$\text{coſ.}\ \Phi = \frac{p}{\sqrt{(p p + y y)}};\ \text{coſ.}\ 2\,\Phi = \frac{p p - y y}{p p + y y}.$$

Porro indidem differentiando prodit

$$\partial.\ \text{tang.}\ \Phi = \frac{\partial \Phi}{\text{coſ.}\ \Phi^2} = \frac{\partial y}{p},$$

hincque $\partial \Phi = \frac{p\, \partial y}{p p + y y}$. Denique erit elementum arcus:

$$\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial y}{p} \sqrt{(p p + y y)},$$

quibus ſubſtitutis ambae coordinatae curuae catacauſticae quaeſitae erunt

$$X = x + \frac{y y}{p} = \frac{3 y y}{2 p},$$
$$Y = y + \frac{y (p p - y y)}{2 p p} = \frac{y (3 p p - y y)}{2 p p}.$$

Cum autem ſit $X = \frac{3 y y}{2 p}$, erit $y = \sqrt{\frac{2}{3} p X}$, vnde fit

$$Y = \pm \left(\tfrac{3}{2} - \frac{X}{3 p}\right) \sqrt{\tfrac{2}{3} p X},$$

cuius aequationis admodum ſimplicis ſubſidio figura et proprietates curuae quaeſitae facile innoteſcunt.

Corollarium 1.

§. 5. Statim enim intelligitur, ſumto $X = 0$ fore etiam $Y = 0$, quod itidem euenit quando $X = \frac{9}{2}p$. Tum vero applicata erit maxima, vbi

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{X}{3p}}{2\sqrt{X}} - \frac{1}{3p}\sqrt{X} = 0,$$

hoc eſt vbi $X = \frac{3}{2}p$, exiſtente hac applicata $Y = \pm p$. Denique poſito $X = \infty$, erit $Y = \pm\infty$. Curua igitur formam habebit Lemniſcatae Carteſii ſimilem, in figura ſecunda expreſſam, vbi ſcilicet longitudo axis a vertice ad nodum $AB = \frac{9}{2}p$, tum vero $AC = \frac{3}{2}p = \frac{1}{3}AB$, $CD = CE = p$; curuae autem rami AEBG, ADBH, ſecus ac in Lemniſcata Carteſii euenit, demum ad diſtantiam infinitam a vertice A habent aſſymptotam axi AB normalem.

Tab. IV. Fig. 2.

Corollarium 2.

§. 6. Videamus etiam quaenam hic ſit longitudo arcus indefiniti $AZ = S$. Cum igitur in genere ſit $S = PM + MZ$ (§. 3.), ob $PM = y = \sqrt{\frac{2}{3}pX}$ et

$$MZ = \frac{y(pp + yy)}{2pp} = \left(\frac{1}{2} + \frac{X}{3p}\right)\sqrt{\frac{2}{3}pX},$$

habebimus

$$S = \left(\frac{3}{2} + \frac{X}{3p}\right)\sqrt{\frac{2}{3}pX}.$$

Quod ſi hic ſtatuatur primo $X = \frac{3}{2}p$, fiet longitudo arcus $AD = AE = 2p$; tum vero ſi ſumatur $X = \frac{9}{2}p$, fiet longitudo arcus $ADB = AEB = 3p\sqrt{3}$.

Corollarium 3.

§. 7. Cum inuenerimus

Applicatam $Y = \left(\frac{3}{2} - \frac{X}{3p}\right)\sqrt{\frac{2}{3}pX}$,

Arcum $S = \left(\frac{3}{2} + \frac{X}{3p}\right)\sqrt{\frac{2}{3}pX}$,

adden-

addendo habebimus $Y + S = 3\sqrt{\frac{2}{3}p}\,X$; vnde discimus in Caustica Parabolae summam applicatae et arcus vbique esse in ratione subduplicata abscissae.

Corollarium 4.

§. 8. Examinemus etiam quadraturam huius curuae, et cum sit

$$\int Y\,\partial X = \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}p}\int X^{\frac{1}{2}}\,\partial X - \sqrt{\tfrac{2}{27p}}\int X^{\frac{3}{2}}\,\partial X,$$

integrando colligitur spatium indefinitum

$$ADZX = \sqrt{\tfrac{2}{3}p}\,.\,X^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5}\sqrt{\tfrac{2}{27p}}\,.\,X^{\frac{5}{2}}.$$

Hinc sumto $X = \frac{3}{2}p$ prodit spatium

$$ACD = \tfrac{6}{5}pp \text{ et } DAE = \tfrac{12}{5}pp;$$

sumto vero $X = \frac{9}{2}p$, habebitur spatium $ADB = \frac{9}{5}pp\sqrt{3}$, hinc totum spatium intra nodum et verticem $BDAEB = \frac{18}{5}pp\sqrt{3}$. Ioh. Bernoulli (*V. Opera Tom. III. pag.* 472.) inuenit hoc spatium $ADB = \frac{5}{2}pp\sqrt{3}$, quod autem falsum esse iam inde manifestum est, quod area rectanguli ex AB et CD facti tantum non aequale sit areae spatii ADB, quemadmodum ea a Ioanne Bernoulli assignatur. Mendae origo latet, quoniam calculum non apposuit Auctor.

Corollarium 5.

§. 9. Etiam angulum curuedinis pro singulis curuae elementis nosse iuuabit. Cum igitur, posito hoc angulo $= \omega$, sit tang. $\omega = \frac{\partial Y}{\partial X}$, erit

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{X}{p}\right)\sqrt{\frac{2}{3}p}}{2\sqrt{X}}.$$

Hinc iam manifestum est in puncto A, vbi $X = 0$, fore tang. $\omega = \infty$ et $\omega = 90°$, hoc est curua in vertice A axi normaliter insistit. Porro in puncto D, vbi $X = \frac{3}{2} p$, erit tang. $\omega = 0$ et $\omega = 0$, ergo curua axi parallela, vti requiritur. Deinde in puncto B, vbi $X = \frac{3}{2} p$, erit tang. $\omega = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, ergo $\omega =$ F B K $= 150°$, siue A B F $= 30°$, ita vt ambo curuae rami sese in puncto B sub angulo 60 graduum intersecent. Vbi adhuc obseruandum, fore tangentem B F aequalem parti tertiae arcus A D B bis sumtae, et perpendiculum C F semissem tangentis.

Corollarium 6.

§. 10. Determinemus quoque radium curuaturae in singulis Causticae punctis, quod facillime praestabitur ope expressionis $R = -\frac{\partial S}{\partial \omega}$. Cum igitur inuenerimus

$$\text{tang. } \omega = \frac{(\frac{3}{2} - \frac{X}{p}) \sqrt{\frac{2}{3} p}}{2 \sqrt{X}},$$

differentiando habebimus:

$$\frac{\partial \omega}{\text{cos. } \omega^2} = -\frac{\partial X . \sqrt{\frac{2}{3} p} \times (\frac{3}{2} + \frac{X}{p})}{4 X \sqrt{X}};$$

tum vero

$$\text{cos. } \omega = \frac{2 \sqrt{X}}{(\frac{3}{2} + \frac{X}{p}) \sqrt{\frac{2}{3} p}},$$

consequenter

$$\partial \omega = -\frac{\partial X}{(\frac{3}{2} + \frac{X}{p}) \sqrt{\frac{2}{3} p X}}.$$

At vero est

$$\partial S = \sqrt{(\partial X^2 + \partial Y^2)} = \sqrt{\left(\partial X^2 + \frac{\partial X^2 (\frac{3}{2} - \frac{X}{p})^2 \frac{2}{3} p}{4 X}\right)},$$

quae expressio reducitur ad hanc:

$$\partial S = \frac{\partial X (\frac{3}{2} + \frac{X}{p}) \cdot \sqrt{\frac{2}{3} p}}{2 \sqrt{X}}.$$

His igitur ſubſtitutis erit radius oſculi

$$R = \frac{1}{3} p (\frac{3}{2} + \frac{X}{p})^2.$$

Quod ſi igitur ſtatuatur $X = 0$, habebitur radius oſculi in vertice $A = \frac{3}{4} p$. Sin autem ponatur $X = \frac{3}{2} p$, innoteſcit radius oſculi in puncto $D = 3 p$. Denique habebitur radius oſculi in nodo vel puncto interſectionis B, ponendo $X = \frac{9}{2} p$, quo facto fiet $R = 12 p$.

Corollarium 7.

§. 11. Quod ſi iam punctum Z noſtrae curuae ad axem E F referamus, ſtatuendo abſciſſam $D V = x$ et applicatam $V Z = y$, erit $X = \frac{3}{2} p + y$ et $Y = p - x$, vnde aequatio ad curuam erit:

$$x = p + \frac{y - 3 p}{3 p} \sqrt{(p p + \frac{2}{3} p y)}.$$

Ducta iam ex puncto Z normali Z N, quae axi abſciſſarum productae occurrat in N, erit differentia inter rectam D N et arcum D Z vbique aequalis ſemiparametro Parabolae genitricis ter ſumto. Cum enim ſit differentiando

$$\partial x = \frac{y \partial y}{3 \sqrt{(p p + \frac{2}{3} p y)}},$$

erit Subnormalis

$$V N = \frac{y \partial y}{\partial x} = 3 \sqrt{(p p + \frac{2}{3} p y)},$$

ideoque

$$D N = x + 3 \sqrt{(p p + \frac{2}{3} p y)}.$$

Tum vero erit arcus

$$D Z = \int \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \int \frac{\partial y (3 p + y)}{3 \sqrt{(p p + \frac{2}{3} p y)}},$$

 hoc

hoc eſt

$$D\,Z = x + \int \frac{p\,\partial y}{\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}}.$$

Cum igitur ſit

$$\int \frac{p\,\partial y}{\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}} = 3\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)} - 3p,$$

integrali ita ſumto, vt euaneſcat poſito $y = 0$, erit arcus noſter

$$D\,Z = x - 3p + 3\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)};$$

hincque $D\,N - D\,Z = 3p$. Hinc cum ſit arcus $AD = 2p$, erit etiam $D\,N - A\,D\,Z = p$.

Corollarium 8.

§. 12. Quin etiam, ſi in axe A B ſiniſtrorſum producto capiatur interuallum $A\,I = A\,C = \frac{3}{2}p$, atque in I erigatur perpendiculum I T, tangenti Z T occurrens in T, arcus indefinitus A D Z aequabitur vbique ſemiſummae perpendiculi et tangentis, quod ita oſtendo. Ducta Z Q axi parallela erit

$$Z\,V : V\,t = Z\,Q : Q\,T$$
$$Z\,V : Z\,t = Z\,Q : Z\,T,$$

vnde fit

$$Q\,T = \frac{V\,t \,.\, Z\,Q}{Z\,V} = \frac{\partial x\,(3p + y)}{\partial y},$$
$$Z\,T = \frac{Z\,t \,.\, Z\,Q}{Z\,V} = \frac{\partial s\,(3p + y)}{\partial y},$$

ideoque

$$Q\,T + Z\,T = \frac{(3p + y)(\partial x + \partial s)}{\partial y}.$$

Tum vero habebimus ex §. 11.

$$Q\,I = p - x = \frac{3p - y}{3p}\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)},$$

nec

nec non

$$\partial x + \partial s = \frac{\partial y\,(3p + 2y)}{3\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}},$$

consequenter

$$QT + ZT = \frac{3\,(3p + y)\,(pp + \frac{2}{3}py)}{3p\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}},$$

vnde cum sit

$$QI = \frac{(3p - y)\,(pp + \frac{2}{3}py)}{3p\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}},$$

harum linearum summa dat

$$IT + TZ = \frac{12p + 2y}{3p}\sqrt{(pp + \tfrac{2}{3}py)}.$$

Est vero ex §. 6. arcus

$$AZ = (\tfrac{3}{2} + \tfrac{X}{3p})\sqrt{\tfrac{2}{3}pX},$$

siue per nouam applicatam y, ob $X = \frac{3}{2}p + y$, erit

$$AZ = \frac{6p + y}{3p}\sqrt{(pp + \tfrac{2}{3}py)} = \frac{IT + TZ}{2}.$$

Scholion.

§. 13. Praeter illas igitur insignes proprietates huius curuae mirabilis, ex parte iam dudum cognitas, quod scilicet pro punctis eius cardinalibus abscissae, applicatae, radii osculi, arcus et spatia tam simplicem teneant rationem ad Parametrum Parabolae genitricis, eiusue quadratum, ista curua adhuc sequentibus gaudet proprietatibus singularibus:

1°.) Summa applicatae et arcus correspondentis est vbique in ratione subduplicata abscissae (V. §. 7.).

2°. Differentia arcus et lineae abscissarum comprehensae intra curuam et Normalem correspondentem, est constanter eadem et triplo semiparametri Parabolae genitricis aequalis, si scilicet abscissae capiantur in recta axem et vtrumque curuae ramum normaliter traiiciente (§. 11.).

3°.)

3°.) Producta tangente vsque ad positione datum perpendiculum in axem per verticem nodi transeuntem, erit semisumma Tangentis et perpendiculi arcui a vertice sumto aequalis (§. 12.).

Videamus iam vtrum hae proprietates ad solam Causticam Parabolae restringantur, an vero etiam in aliis curuis locum habeant. Hunc in finem resoluamus sequentia tria Problemata.

Problema 1.

§. 14. *Inuenire lineas curuas, in quibus summa applicatae et arcus sit in ratione subduplicata abscissae.*

Solutio.

Sit abscissa $= x$, applicata $= y$, positoque $\partial y = q \partial x$ fieri hic debet

$$y + \int \partial x \sqrt{(1 + qq)} = \sqrt{2ax}.$$

Hinc differentiando et per ∂x diuidendo fit

$$q + \sqrt{(1 + qq)} = \frac{a}{\sqrt{2ax}},$$

vnde sumtis quadratis vtrinque, prodit

$$2q\sqrt{(1 + qq)} = \frac{a - 2x}{2x} - 2qq,$$

ita vt denuo quadrando habeatur:

$$4qq = \frac{(a - 2x)^2}{4xx} - 2qq\frac{(a - 2x)}{x},$$

vnde colligitur

$$qq = \frac{(a - 2x)^2}{8ax}, \text{ hincque}$$

$$q = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{2ax}},$$

ita vt habeamus:

$$\partial y = \frac{\partial x(a - 2x)}{2\sqrt{2ax}},$$

et integrando

$$y = \frac{3a - 2x}{6a}\sqrt{2ax},$$

quae

quae aequatio ab ea quam supra §. 4. pro Caustica Parabolae inuenimus, tantum in eo differt, quod hic loco p habeamus $\frac{1}{3}a$. Praeter hanc igitur curuam nulla alia conditioni Problematis satisfacit.

Problema 2.

§. 15. *Inuenire curuam AYM, ad quam si in puncto quouis Y ducatur normalis YN, axi AB occurrens in N, differentia arcus et rectae AN sit constans.* Tab. IV. Fig. 3.

Solutio.

Sit abscissa $AX = x$, applicata $XY = y$, positoque $\partial y = q\partial x$, erit arcus $AY = \int \partial x \surd(1 + qq)$ et recta $AN = x + qy$. Fieri ergo debet

$$x + qy - \int \partial x \surd(1 + qq) = C.$$

Hinc differentiando erit

$$\partial x + q\partial y + y\partial q - \partial x \surd(1 + qq) = 0,$$

siue ponendo $\frac{\partial y}{q}$ loco ∂x prodibit

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{-q\partial q}{1 + qq - \surd(1 + qq)}.$$

Ponatur $\surd(1 + qq) = u$, erit $1 + qq = uu$ et $q\partial q = u\partial u$, quibus substitutis habebimus $\frac{\partial y}{y} = -\frac{\partial u}{u - 1}$, hincque integrando $ly = la - l(u - 1)$ et ad numeros surgendo

$$y = \frac{a}{u - 1} = \frac{a}{\surd(1 + qq) - 1}.$$

Hinc porro fit $\surd(1 + qq) = \frac{a + y}{y}$, ideoque $qq = \frac{aa + 2ay}{yy}$, vnde porro concluditur

$$\partial x = \frac{\partial y}{q} = \frac{y\partial y}{\surd(aa + 2ay)}.$$

Ad hanc formulam commodius integrandam ponatur $\surd(aa + 2ay) = z$, fietque

 $y =$

$$y = \frac{zz - aa}{2a} \text{ et } \partial y = \frac{z\partial z}{a},$$

quibus ſubſtitutis erit $\partial x = \frac{(zz - aa)\partial z}{2aa}$, vnde fit

$$x = \text{Conſt.} + \frac{z^3}{6aa} - \frac{1}{2} z,$$

et reſtituendo

$$x = C + \frac{(aa + 2ay)^{\frac{3}{2}}}{6aa} - \frac{1}{2}\sqrt{(aa + 2ay)},$$

quae aequatio facile reducitur ad hanc:

$$x = C + \frac{y - a}{3a}\sqrt{(aa + 2ay)}.$$

Determinata autem conſtante C ita, vt facto $y = 0$ fiat etiam $x = 0$, erit

$$x = \frac{1}{3}a + \frac{y - a}{3a}\sqrt{(aa + 2ay)},$$

quae eſt eadem aequatio quam ſupra §. 11. methodo directa pro Cauſtica Parabolae inuenimus, dum ſcilicet omnia ad axem EF retulimus. Praeter hanc igitur curuam nulla alia proprietate in Problemate enunciata gaudet.

Problema 3.

Tab IV. Fig. 4. §. 16. *Inuenire curuam DTM ita comparatam, vt ducta tangente TT, et erecto ex initio abſciſſarum A perpendiculo AV, arcus DT vbique aequalis ſit ſemiſummae tangentis et perpendiculi.*

Solutio.

Poſitis coordinatis $AX = x$, $XY = y$, nec non $\partial y = q\partial x$, erit Tangens $TY = \frac{y\sqrt{(1 + qq)}}{q}$ et Subtangens $TX = \frac{y}{q}$, hinc $AT = \frac{y - qx}{q}$. Iam ex V in XY agatur normalis VQ, eritque $TX : TY = VQ : VY$, vnde fit

$$VY = \frac{TY \cdot VQ}{TX} = x\sqrt{(1 + qq)};$$

tum

tum vero erit $TX : XY = VQ : QY$, hinc $QY = \frac{XY \cdot VQ}{TX}$ $= qx$, conſequenter

$$AV = XY - QY = y - qx.$$

Conditio igitur Problematis iam poſtulat vt huic conditioni ſatisfiat:

$$2 \int \partial x \sqrt{(1 + qq)} = y - qx + x \sqrt{(1 + qq)}.$$

Differentietur haec aequatio, et prodibit:

$$\partial x \sqrt{(1 + qq)} = \frac{x \partial q [q - \sqrt{(1 + qq)}]}{\sqrt{(1 + qq)}},$$

hinc ſeparando variabilia erit

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{q \partial q}{1 + qq} - \frac{\partial q}{\sqrt{(1 + qq)}},$$

vnde integrando deducitur:

$$l x = l a + l \sqrt{(1 + qq)} - l [q + \sqrt{(1 + qq)}],$$

ita vt ad numeros ſurgendo habeamus:

$$x = \frac{a \sqrt{(1 + qq)}}{q + \sqrt{(1 + qq)}},$$

vnde porro ſequitur:

$$q = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a - x}{\sqrt{(2ax - aa)}}, \text{ ſiue}$$

$$\partial y = \frac{(a - x) \partial x}{\sqrt{(2ax - aa)}},$$

Ponatur $\sqrt{(2ax - aa)} = v$, erit $a - x = \frac{aa - vv}{2a}$ et $\partial x = \frac{v \partial v}{a}$, hincque

$$\partial y = \tfrac{1}{2} \partial v - \frac{vv \partial v}{2aa},$$

et integrando

$$y = \text{Conſt.} + \tfrac{1}{2} v - \frac{v^3}{6aa},$$

ſiue reſtituto x

$$y = b + \frac{2a - x}{3a} \sqrt{(2ax - aa)},$$

 vnde

vnde si constans b ita determinetur, vt y euanescat sumto $x = \frac{1}{2} a$, erit $b = 0$ et

$$y = \frac{2a - x}{3a} \sqrt{(2ax - aa)},$$

siue posito $x = X + \frac{1}{2} a$, fiet

$$y = \frac{3a - 2X}{6a} \sqrt{2aX},$$

quam eandem aequationem supra iam §. 14. inuenimus pro Caustica Parabolae, praeter quam igitur et haec tertia proprietas nulli lineae curuae conuenit.

Scholion.

§. 17. Hoc postremum Problema sequenti modo multo generalius enunciari et resolui potest, ponendo scilicet rationem inter arcum D Y et summam rectarum A V + V Y qualemcunque. Haec resolutio cum nonnulla habeat attentione digna, mereri videtur vt heic coronidis loco exponatur.

Problema generalius.

§. 18. *Inuenire curuam D Y M, vt ducta tangente Y T, ad eamque vsque ex puncto dato A normali in axem, A V, sit summa rectarum A V et V Y in data ratione ad arcum D Y.*

Solutio.

Sit ratio data vt n ad 1, ita vt fieri debeat A V + V Y $= n$ D Y, et adhibitis iisdem denominationibus quas supra introduximus, aequatio resoluenda erit

$$y - qx + x\sqrt{(1 + qq)} = n \int \partial x \sqrt{(1 + qq)},$$

ex qua per operationes superioribus similes eruitur:

$$(n - 1)\frac{\partial x}{x} = \frac{q\,\partial q}{1 + qq} - \frac{\partial q}{\sqrt{(1 + qq)}},$$

vnde

vnde porro integrando prodit

$$(n-1)\,l\,x = l\,A + l\,\sqrt{(1+qq)} - l\,[q+\sqrt{(1+qq)}],$$

et ſurgendo ad numeros

$$x^{n-1} = \frac{A\sqrt{(1+qq)}}{q+\sqrt{(1+qq)}},$$

hincque porro concluditur fore:

$$q = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{A - x^{n-1}}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}},$$

quamobrem habebitur applicata

$$y = \int \frac{(A - x^{n-1})\,\partial x}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}},$$

et arcus curuae quaeſitae

$$s = \int \frac{x^{n-1}\,\partial x}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}}.$$

Ex his igitur manifeſtum eſt curuam Problematis conditioni ſatisfacientem ſemper fore algebraicam et rectificabilem, quoties fuerit $n = \frac{i+1}{i}$, denotante i numerum integrum quemcunque.

Poſito enim $n = \frac{i+1}{i}$ et $\sqrt{(2Ax^{\frac{1}{i}} - AA)} = v$, fiet

$$y = \frac{i}{2AA}\int (AA - vv)\left(\frac{AA+vv}{2A}\right)^{i-1}\partial v;$$

$$s = \frac{i}{A}\int \left(\frac{AA+vv}{2A}\right)^{i}\partial v;$$

quae formulae, quoties i fuerit numerus integer, per terminorum numerum finitum euolui, tumque ſinguli termini integrari poterunt.

Corollarium 1.

§. 19. Etiamſi integratio in genere non ſuccedat, tamen facile oſtenditur, formulas iſtas generales Problemati fore ſatisfacturas. Cum enim ſit:

$$AV = y - qx = \int \frac{(A - x^{n-1})\partial x}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}} - \frac{x(A - x^{n-1})}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}},$$

$$VY = x\sqrt{(1 + qq)} = \frac{x^n}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}},$$

habebimus:

$$AV + VY = \int \frac{(A - x^{n-1})\partial x}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}} + \frac{x}{A}\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)},$$

At vero fieri debet

$$AV + VY = n\int \frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}},$$

ideoque

$$\int \frac{(A - x^{n-1})\partial x}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}} + \frac{x}{A}\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)} = n\int \frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}},$$

quam aequalitatem reuera locum habere ipſa differentiatio docet. Differentia autem conſtans, quae forte per integrationem actualem ingrederetur, hic non in cenſum venit, quoniam ſemper in noſtra poteſtate eſt ita integrare, vt haec conſtans euaneſcat.

Corollarium 2.

§. 20. Maxime autem ob ſummam ſimplicitatem notatu digna eſt expreſſio radii oſculi omnium curuarum in quibus ſumma tangentis et perpendiculi eſt in ratione arcus. Cum enim ſit

$$\partial y = \frac{(A - x^{n-1})\partial x}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}},$$

facile inuenitur:

$\partial\partial y$

$$\partial \partial y = -\frac{(n-1)\, A\, x^{2n-3}\, \partial x^2}{(2\, A\, x^{n-1} - A A)^{\frac{3}{2}}},$$

consequenter erit radius osculi

$$R = -\frac{\partial s^3}{\partial x\, \partial\, \partial y} = \frac{x^n}{(n-1)\, A},$$

siue scribendo loco constantis A potestatem b^{n-1}, erit

$$R = \frac{x^n}{(n-1)\, b^{n-1}}.$$

Corollarium 3.

§. 21. Applicetur adhuc solutio generalis ad alium casum, vbi n est numerus formae $\frac{i+1}{i}$, sitque $n = \frac{3}{2}$, ita vt fieri debeat $A V + V Y = \frac{3}{2} D Y$. Hoc igitur casu est

$$y = \int \frac{(A - \sqrt{x})\, \partial x}{\sqrt{(2 A \sqrt{x} - A A)}},$$

$$s = \int \frac{\partial x \sqrt{x}}{\sqrt{(2 A \sqrt{x} - A A)}}.$$

Statuatur iam $\sqrt{(2 A \sqrt{x} - A A)} = z$, ita vt sit $\sqrt{x} = \frac{A A + z z}{2 A}$; $A - \sqrt{x} = \frac{A A - z z}{2 A}$, $x = \frac{(A A + z z)^2}{4 A A}$, et $\partial x = \frac{(A A + z z) z \partial z}{A A}$, quibus substitutis erit

$$y = \int \frac{(A^4 - z^4)\, \partial z}{2\, A^3} = \frac{A z}{2} - \frac{z^5}{10\, A^3},$$

$$s = \int \frac{(A A + z z)^2\, \partial z}{2\, A^3} = \frac{A z}{2} + \frac{z^3}{3 A} + \frac{z^5}{10 A^3}.$$

Tum vero est

$$q = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A - \sqrt{x}}{\sqrt{(2 A \sqrt{x} - A A)}} = \frac{A A - z z}{2 A z},$$

con-

consequenter $\sqrt{(1+qq)}-q=\frac{z}{A}$, vnde ob $AV+VY=y+x[\sqrt{(1+qq)}-q]$, erit

$$AV+VY=\frac{3Az}{4}+\frac{z^3}{2A}+\frac{3z^5}{20A^3},$$

vnde quia inuenimus

$$DY=s=\frac{Az}{2}+\frac{z^3}{3A}+\frac{z^5}{10A^3},$$

manifestum est fore

$$AV+VY=\tfrac{3}{2}DY,$$

vti requiritur. Huius denique curuae spatium indefinitum erit

$$\int y\,\partial x=z^3\left(\frac{A}{6}+\frac{z^2}{10A}-\frac{z^4}{70A^3}-\frac{z^6}{90A^5}\right),$$

et radius osculi

$$R=\frac{2x\sqrt{x}}{A}.$$

DEMONSTRATIO THEOREMATVM QVORVNDAM ANALYTICORVM.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. die 25 Oct. 1790.

ARTICVLVS I.

§. 1.

Cum nuper Tomum fecundum Differtationum Mathematicarum et Phyficarum, a Societate Italica editarum, euolverem, attentior fubftiti in fequentibus fummationibus, quas a fummo quondam noftro Eulero iam pridem demonftratas noveram, fcilicet:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{n} = l\,\frac{1}{0},$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \ldots \frac{1}{2n} = l\,\frac{2}{1},$$

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} + \ldots \frac{1}{3n} = l\,\frac{3}{2},$$

etc. etc.

denotante n numerum infinite-magnum (*a*). Horum enim Theorematum non parum curioforum fecundum pro fingulis celeberrimus Geometra Ticinenfis, Gregorius Fontana, loco citato, peringeniofe demonftrat, vt qui fingulos feriei terminos in progreffionem geometricam transmutat, et collectis in vnam fum-

(*a*) Memorie di Matematica e Fifica della Società Italiana. Tomo II. Parte I. pag 141.

ſummam terminis ſibi inuicem verticaliter ſubſcriptis, ob n numerum infinitum, omnes eius poteſtates praeter ſupremam, in numeratoribus cuiusque membri delet.

§. 2. Quo Lectores, qui librum citatum non prae manibus habent, completam ſibi iuſtamque methodi ab acutiſſimo Fontana adhibitae ideam formare queant, ſimulque perſpiciant, quomodo valorem indagare liceat illius ſeriei, ad quam tandem hae operationes ducunt, tertiam heic ſummationum modo expoſitarum, ad mentem laudati Auctoris, demonſtrabimus, poſtmodum vero aliam methodum illas ſummationes demonſtrandi, ex ſingulari principio deriuatam, exhibebimus.

§. 3. Sit igitur ſummanda haec ſeries harmonica ex infinitis terminis infinite-paruis compoſita:

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} + \dots \frac{1}{3n},$$

et ſingulos terminos ſeorſim euoluendo prodit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1} &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{8n^3} - \frac{1}{16n^4} + \text{etc.}\\
\frac{1}{2n+2} &= \frac{1}{2n} - \frac{2}{4n^2} + \frac{2^2}{8n^3} - \frac{2^3}{16n^4} + \text{etc.}\\
\frac{1}{2n+3} &= \frac{1}{2n} - \frac{3}{4n^2} + \frac{3^2}{8n^3} - \frac{3^3}{16n^4} + \text{etc.}\\
\frac{1}{2n+4} &= \frac{1}{2n} - \frac{4}{4n^2} + \frac{4^2}{8n^3} - \frac{4^3}{16n^4} + \text{etc.}\\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

vnde porro, terminis ſibi inuicem ſubſcriptis in vnam ſummam collectis, naſcuntur ſequentes ſeries:

$$+ \frac{1}{2n}(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}),$$

$$- \frac{1}{4n^2}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \text{etc.}),$$

$$+ \frac{1}{8n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \text{etc.}),$$

$$- \frac{1}{16n^4}(1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \text{etc.}),$$

At

At vero notum eſt caſu $n = \infty$ fore:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.} = n,$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \text{etc.} = \frac{n^2}{2},$$
$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \text{etc.} = \frac{n^3}{3},$$
$$1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \text{etc.} = \frac{n^4}{4},$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

quibus valoribus ſubſtitutis ſeriei harmonicae propoſitae:

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \ldots \frac{1}{3n},$$

ſumma hac noua ſerie exprimitur:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \text{etc.}$$

cuius autem valor haud minus incognitus eſt quam valor ſeriei propoſitae, ſecus ac in demonſtratione ſecundi Theorematis, ab ipſo Auctore inſtituta, euenit, vbi eaedem operationes ad ſeriem notiſſimam perduxerant. Ad ſummam igitur huius poſtremae ſeriei eruendam obſeruandum eſt, ex ſerie notiſſima:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \text{etc.} = \frac{1}{x+1},$$

multiplicando per ∂x et integrando oriri ſequentem:

$$l\,x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \text{etc.} = l\,(x+1),$$

vnde concluditur fore

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \text{etc.} = l\,\frac{x+1}{x},$$

hincque ſumto $x = 2$ habebimus:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \text{etc.} = l\,\frac{3}{2},$$

ita vt ſeriei propoſitae ſumma ſit

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \ldots \frac{1}{3n} = l\,\frac{3}{2}.$$

§. 4. Ex hoc ſpecimine, in compendium, quantum fieri potuit, redacto, vis huius ingenioſae demonſtrationis, alias nonnihil prolixae, luculenter perſpicitur. Quantacunque autem ſit elegantia huius methodi, non video tamen quid viro, in cuius gratiam Cel. Fontana hunc laborem ſuſcepit (*b*), diſplicuerit in demonſtratione olim ab Eulero data, niſi forte nimis generalis ei viſa fuerit et non ſatis prolixe explicata (*c*). Quin etiam nihil pretio huius nouae demonſtrationis detrahere mihi videor, ſi eam Eulerianae, quoad methodum, nec rigore neque euidentia antecellere exiſtimem. Tantum interea abeſt vt credam ſuperfluam ideo eſſe nouam hanc demonſtrationem illorum Theorematum Eulerianorum, vt potius demonſtrationibus modo memoratis ſequentem, oblata hac occaſione, adiicere non dubitem, quae, vt ſpero, ſimplicitate aeque ac elegantia quodammodo Geometris ſe commendabit.

Theorema I.

§. 5. *Denotante* n *numerum infinite-magnum et* l *logarithmum hyperbolicum, erit:*

$$(A)\quad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots \tfrac{1}{n} = l\,\tfrac{1}{0},$$

$$(B)\quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \ldots \frac{1}{2n} = l\,\tfrac{2}{1},$$

$$(C)\quad \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} + \ldots \frac{1}{3n} = l\,\tfrac{3}{2},$$

$$(D)\quad \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} + \ldots \frac{1}{4n} = l\,\tfrac{4}{3},$$

etc. etc.

De-

(*b*) "Finiro" inquit Vir clariſſimus, pag. 138. lib. cit. "con riſpondere all' „ultima ſua dimanda, di communicarle una nuova dimoſtrazione del „bel Teorema concernente l'uguaglianza fra il Logaritmo iperbolico „del numero 2 e la ſerie armonica a termini infiniteſimi *non paren-* „*dole pienamente ſoddisfacenti le dimoſtrazioni da lei vedute*".

(*c*) Comment. Ac. Imp. Sc. Petrop. Tom. VII. pag. 157.

Demonſtratio.

I. Cum ſit

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x},$$

multiplicando per ∂x et integrando erit:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \frac{x^n}{n} = l\frac{1}{1-x},$$

vnde poſito $x = 1$ naſcitur prima ſeries:

$$A = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots \tfrac{1}{n} = l\tfrac{1}{0},$$

II. Porro cum ſit

$$A + B = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \frac{x^{2n}}{2n} \text{ et}$$

$$A = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \frac{x^n}{n},$$

ſumto ſcilicet $x = 1$, ſi in hac poſtrema ſerie loco x ſcribatur x^2, quod, quia deinceps vbique loco x vnitas ſcribitur, ſine vllo dubio licet, prodibit

$$A = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \ldots \frac{x^{2n}}{n},$$

qua ſerie ab illa pro $A + B$ aſſumta ſublata remanet

$$B = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \text{etc.}$$

ita vt poſito $x = 1$ habeamus:

$$B = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{etc.} = l\,2,$$

conſequenter:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \ldots \frac{1}{2n} = l\tfrac{2}{1},$$

III. Eodem modo cum poſito $x = 1$ ſit

$$A + B + C = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots . \frac{x^{3n}}{3n},$$

si in serie

$$A = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots . \frac{x^n}{n},$$

loco x scribatur x^3 et series inde resultans:

$$A = x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \frac{x^{12}}{4} + \ldots . \frac{x^{3n}}{n},$$

aufferatur a priore, remanebit:

$$B + C = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{2x^6}{6} + \text{etc.}$$

ita vt posito $x = 1$ habeamus:

$$B + C = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \text{etc.} = l\,3,$$

vnde colligitur $C = l\,3 - B$. Est vero $B = l\,2$, vt modo vidimus, ergo $C = l\,\frac{3}{2}$, hoc est

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} + \text{etc.} = l\,\tfrac{3}{2},$$

IV. Simili porro modo, quoniam

$$A + B + C + D = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \ldots . \frac{x^{4n}}{4n},$$

sumto scilicet $x = 1$: si in serie illa

$$A = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots . \frac{x^n}{n},$$

loco x scribatur x^4, seriesque hinc orta

$$A = x^4 + \frac{x^8}{2} + \frac{x^{12}}{3} + \frac{x^{16}}{4} + \ldots . \frac{x^{4n}}{n},$$

subtrahatur ab $A + B + C + D$, restabit

$$B + C + D = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \text{etc.}$$

siue restituta loco x vnitate:

B +

$$B + C + D = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{3}{8} + \text{etc.} = l\,4,$$

consequenter $D = l\,4 - (B + C)$. Supra autem vidimus esse $B + C = l\,3$, ergo $D = l\,\tfrac{4}{3}$, hoc est

$$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} + \text{etc.} = l\,\tfrac{4}{3}.$$

Q. E. D.

Scholion.

§. 6. Quod si cui suspecta videatur haec demonstrandi methodus, ideo quod, ne tanto terminorum numero opus sit, loco vnitatis in singulis numeratoribus potestates quantitatis arbitrariae x in calculum introduximus, dum scilicet loco progressionis A successiue scripsimus:

$$A = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \;\ldots\ldots\; \frac{x^n}{n},$$

$$A = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \;\ldots\ldots\; \frac{x^{2n}}{n},$$

$$A = x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \frac{x^{12}}{4} + \;\ldots\ldots\; \frac{x^{3n}}{n},$$

etc.

quo hic procedendi modus magis explicetur, simulque omne dubium tollatur, theorematis demonstrationem sequenti modo, sine subsidio litterae x instituemus.

Alia demonstratio Theorematis I.

§. 7.
$$\begin{array}{rl} A + B = & 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \ldots\ldots \tfrac{1}{2n} \\ -A = & -1 \quad - \tfrac{1}{2} \quad - \tfrac{1}{3} \quad - \tfrac{1}{4} \quad - \tfrac{1}{5} - \ldots\ldots \tfrac{1}{n} \\ \hline B = & 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{10} + \text{etc.} = l\,2, \end{array}$$

ita vt statim habeamus $B = l\,\tfrac{2}{1}$,

$$\begin{array}{rl} A + B + C = & 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \ldots\ldots \tfrac{1}{3n} \\ -A = & -1 \quad - \tfrac{1}{2} \quad - \tfrac{1}{3} - \quad \ldots\ldots \tfrac{1}{n} \\ \hline B + C = & 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{2}{9} + \tfrac{1}{10} + \text{etc.} = l\,3, \end{array}$$

hinc-

hincque fit $C = l\,3 - B = l\,\frac{3}{2}$,

$$\begin{array}{l} A+B+C+D = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots\frac{1}{4n} \\ -A \qquad\quad = \qquad -1 \qquad\qquad -\frac{1}{2} \qquad\qquad -\frac{1}{3}-\ldots\frac{1}{n}, \\ \hline B+C+D = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{3}{12}+\text{etc.} = l\,4 \end{array}$$

consequenter $D = l\,4 - (B + C) = l\,\frac{4}{3}$,

Q. E. D.

Corollarium.

§. 8. Cum igitur sit

$$A + B + C + D + \text{etc.} = l\,\frac{1}{0} + l\,\frac{2}{1} + l\,\frac{3}{2} + l\,\frac{4}{3} + \text{etc.}$$

siue etiam

$$A + B + C + D + \text{etc.} = l\,\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \ldots\ (n+1)}{0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ n},$$

sequitur fore

$$A + B + C + D + \text{etc.} = l\,\frac{1}{0} + l\,(n + 1).$$

Est vero $A = l\,\frac{1}{0} = l\,n$, ergo $B + C + D + \text{etc.} = l\,(n + 1)$ et

$$A - (B + C + D + \text{etc.}) = l\,\frac{n}{n+1} = 0,$$

ideoque

$$A = B + C + D + E + \text{etc.}$$

Summa igitur omnium terminorum seriei harmonicae naturalis ab 1 vsque ad $\frac{1}{n}$ aequalis est summae omnium terminorum sequentium vsque ad $\frac{1}{nn}$: differentia enim inter ambo haec infinita $l\,n$ et $l\,n+1$ videtur nulla. Interim tamen non praetereunda est obseruatio, in integratione formulae $\frac{\partial x}{1-x}$ neglectam fuisse constantem, qua adiecta erit $A = l\,n + C$, hincque

$$A - (B + C + D + \text{etc.}) = C,$$

cuius litterae C valor est $C = 0{,}5772156649$. Ita differentia inter summam seriei harmonicae naturalis ab 1 vsque ad $\frac{1}{n}$,

$\frac{1}{n}$, et summam terminorum sequentium vsque ad $\frac{1}{nn}$ reuera est $= 0,5772156649$, idem scilicet ille numerus memorabilis, de quo Eulerus amplissime disseruit in nostris Actis (*d*).

ARTICVLVS II.

§. 9. Quae praeterea Cel. Fontana adhuc affert in eadem dissertatione (*e*), circa aequalitatem, vel potius inaequalitatem quantitatum:

$$e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\text{etc.}} \quad \text{et} \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.},$$

vbi series in exponente est reciproca numerorum primorum, altera vero est progressio harmonica, numeros naturales in denominatoribus habens, haec, inquam, quoque directa videntur contra Eulerum (*f*), licet nominatim nulla de eo mentio fiat. Non solum enim obiectionum auctor, ipsis Euleri characteribus vsus, sed etiam eius ratiocinia pedetentim prosecutus est. Adde quod non memini hanc aequalitatem vnquam ab alio Geometra prolatam et demonstratam vidisse. Eulerus autem in Theoremate suo, loco citato, id tantum asserit: esse summam seriei reciprocae numerorum primorum infinities minorem serie harmonica naturali, eiusque quasi logarithmum exhibere, quam propositionem etiam solidissime probauit, quamuis in demonstratione sua, sine vlla necessitate, ad exponentialia confugit illamque aequationem protulit, quam reprobat Cl. Fontana, argumentis satis speciosis eam impugnans. Etsi igitur fateri cogimur, virum immortalem non pro more suo euidentiae principiorum consuluisse, dum in exponente quantitatem finitam prae infinita, absque rationum explicatione, neglexit: tamen

(*d*) Acta Acad. Imp. Sc. Petr. pro anno 1781. P. II. pag. 45.
(*e*) Memorie etc. Tom. II. P. II. pag. 134. seqq.
(*f*) Commentarii Acad. Scient. Imp. Petrop. Tom. IX. pag. 188.

tamen nobis liceat obſeruare, hac menda, ſi qua commiſſa eſt, ipſum Theorema nequaquam vitiari. Ad hoc oſtendendum Theorema memoratum Eulerianum ipſis Auctoris verbis hic enunciabimus eiusque demonſtrationem alio modo adornabimus; tum vero, quid de obiectionibus R. P. Fontanae ſentiendum ſit, videbimus. Quo autem haec demonſtratio facilius inſtitui queat, aliquot Lemmata ei inſeruientia praemittere eo minus alienum erit, quod eorum ope varia momenta demonſtrationis Eulerianae, quae vlteriore explicatione indigere videntur, magis eluceſcent.

Lemma I.

§. 10. *Series reciproca numerorum naturalium, ſiue ſeries harmonica ſimplex:*

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.}$$

aequalis eſt huic producto ex infinitis factoribus conſtanti:

$$\frac{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 15.\ 17.\ \text{etc.}}{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16.\ \text{etc.}}$$

cuius numeratores ſunt numeri primi, denominatores vero itidem numeri primi vnitate minuti.

Demonſtratio.

Statuatur

$$s = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{etc.}$$

eritque

$$\tfrac{1}{2}s = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \text{etc.}$$

qua ſerie ab illa ablata remanet:

$$\tfrac{1}{2}s = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \text{etc.}$$

vbi igitur nulli denominatores pares occurrunt. Ab hac ſerie denuo auſſeratur haec:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}s = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{27} + \text{etc.}$$

ac

ac remanebit iſta:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\,s = 1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{17} + \text{etc.}$$

in qua nulli amplius denominatores per 2 et per 3 diuiſibiles occurrunt. Extrudantur ſimili modo multipla quinarii, quod fit, ſi a ſerie modo inuenta:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot s = 1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{17} + \text{etc.}$$

ſubtrahatur haec:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{5}\,s = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{55} + \tfrac{1}{65} + \text{etc.}$$

remanebit enim:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\,s = 1 + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{17} + \text{etc.}$$

Quodſi hoc modo vlterius procedamus, expellendo ſucceſſiue denominatores 7, 11, 13, 17, etc. erit

$$s\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{10}{11}\cdot\tfrac{12}{13}\cdot\tfrac{16}{17}\cdot\text{etc.} = 1,$$

conſequenter:

$$s = \frac{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 19.\ 23.}{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.\ 12.\ 16.\ 18.\ 22.}\ \text{etc.}$$

Q. E. D.

Corollarium.

§. 11. Cum ſupra inuenerimus:

$$\text{I.}\quad \tfrac{1}{2}\,s = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} + \text{etc.}$$

$$\text{II.}\quad \tfrac{1}{2}\,s = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \text{etc.}$$

hinc ſequitur has ambas ſeries, quarum vtraque infinitam habet ſummam, inter ſe eſſe aequales, etiamſi earum differentiam aſſignare valeamus, quippe quae eſt:

$$\text{II.} - \text{I} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \text{etc.} = l\,2,$$

ita vt inter duas quantitates infinite-magnas aequalitas ſubſistere queat, etiamsi quantitate finita a se inuicem discrepent, quae obseruatio, iam supra §. 8. tradita, in sequentibus nobis vsu veniet.

Scholion.

§. 12. Eodem, quo hic vsi sumus, modo etiam sequentes series reciprocas generaliores:

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}$$

$$N = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.}$$

in producta infinita transformare licet. Reperietur enim fore per huiusmodi producta:

$$M = \frac{2^n}{2^n - 1} \cdot \frac{3^n}{3^n - 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n - 1} \cdot \text{etc.}$$

$$N = \frac{3^n}{3^n - 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n - 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \cdot \text{etc.}$$

vnde, diuidendo prius per alterum, nascitur:

$$\frac{M}{N} = \frac{2^n}{2^n - 1}, \text{ siue}$$

$$M : N = 2^n : 2^n - 1,$$

quae proprietas, etiamsi hic nullius sit vsus, digna tamen mihi visa est vt hac occasione produceretur. En igitur Theorema sequens:

Series reciproca potestatum n^{marum} *numerorum naturalium est ad seriem reciprocam potestatum* n^{marum} *numerorum imparium vt potestas* n^{ma} *binarii est ad eandem vnitate minutam.*

Lem-

Lemma II.

§. 13. *Si ponatur*

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \tfrac{1}{11^2} + \tfrac{1}{13^2} + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{5^3} + \tfrac{1}{7^3} + \tfrac{1}{11^3} + \tfrac{1}{13^3} + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \tfrac{1}{11^4} + \tfrac{1}{13^4} + \text{etc.}$$

etc. etc.

erit

$$\frac{\mathfrak{A}}{1} + \frac{\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{C}}{3} + \frac{\mathfrak{D}}{4} + \text{etc.} = l\,\tfrac{2}{1} + l\,\tfrac{3}{2} + l\,\tfrac{5}{4} + l\,\tfrac{7}{6} + \text{etc.}$$

Demonſtratio.

Cum ſit

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \text{etc.}$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{2} = \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{2.5^2} + \frac{1}{2.7^2} + \frac{1}{2.11^2} + \text{etc.}$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{3} = \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{3.11^3} + \text{etc.}$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{4} = \frac{1}{4.2^4} + \frac{1}{4.3^4} + \frac{1}{4.5^4} + \frac{1}{4.7^4} + \frac{1}{4.11^4} + \text{etc.}$$

etc. etc.

ſi termini ſibi inuicem verticaliter ſubſcripti in vnam ſummam colligantur, ob

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \text{etc.} = \frac{1}{x-1} \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \quad \text{etc.} = l\,\frac{x}{x-1},$$

habebimus:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \text{etc.} = l\,\frac{2}{1},$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{4.3^4} + \text{etc.} = l\,\frac{3}{2},$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2.5^2} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{4.5^4} + \text{etc.} = l\,\frac{5}{4},$$
$$\frac{1}{7} + \frac{1}{2.7^2} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{4.7^4} + \text{etc.} = l\,\frac{7}{6},$$
etc. etc.

consequenter

$$\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{C}}{3} + \frac{\mathfrak{D}}{4} + \text{etc.} = l\,\frac{2}{1} + l\,\frac{3}{2} + l\,\frac{5}{4} + l\,\frac{7}{6} + \text{etc.}$$

Q. E. D.

Lemma III.

§. 14. *Iisdem positis erit*

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \text{etc.} = \frac{3}{2} - l\,2,$$

ideoque quantitas finita, vnitate adeo minor.

Demonstratio

Collectis terminis sibi inuicem subscriptis in vnam summam erit:

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.} = \left\{\begin{array}{l} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{25}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{49}\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.}\right) \\ \quad\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right.$$

Notum autem est esse

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \text{etc.} = 2,$$
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \text{etc.} = \frac{3}{2},$$
$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{5}{4},$$
$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = \frac{7}{6},$$
etc. etc.

vnde

vnde colligitur fore

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2.3} + \tfrac{1}{4.5} + \tfrac{1}{6.7} + \tfrac{1}{8.9} + \text{etc.}$$

Iam ſtatuatur $\frac{x}{1-x^2} = s$, eritque per ſeriem:

$$s = x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + \text{etc.}$$

hinc per ∂x multiplicando et integrando prodit:

$$\int s\,\partial x = \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4} + \tfrac{x^6}{6} + \tfrac{x^8}{8} + \tfrac{x^{10}}{10} + \text{etc.}$$

quae ſeries denuo in ∂x ducta et integrata praebet:

$$\int \partial x \int s\,\partial x = \tfrac{x^3}{2.3} + \tfrac{x^5}{4.5} + \tfrac{x^7}{6.7} + \tfrac{x^9}{8.9} + \text{etc.}$$

At vero, cum poſuerimus $s = \frac{x}{1-x^2}$, erit

$$\int s\,\partial x = -\log.\sqrt{(1-xx)},$$

$$\int \partial x \int s\,\partial x = -\int \partial x\, l\sqrt{(1-xx)},$$

Ponatur $1 - xx = zz$, ita vt ſit $\partial x = -\frac{z\,\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$, eritque

$$\int \partial x \int s\,\partial x = \int \frac{z\,\partial z\, l z}{\sqrt{(1-zz)}},$$

ita vt per Lemma notiſſimum:

$$\int P\,\partial Q = PQ - \int Q\,\partial P,$$

habeamus

$$\int \partial x \int s\,\partial x = -\sqrt{(1-zz)}\, l z + \int \frac{\partial z \sqrt{(1-zz)}}{z}.$$

Cum igitur, reſtituendo litteram x, ſit

$$\int \frac{\partial z \sqrt{(1-zz)}}{z} = -\int \frac{xx\,\partial x}{1-xx} = \int \partial x - \int \frac{\partial x}{1-xx},$$

hoc eſt

$$\int \frac{\partial z \sqrt{(1-zz)}}{z} = x + \tfrac{1}{2} l \frac{1-x}{1+x} = x + \tfrac{1}{2} l \frac{1-xx}{(1+x)^2},$$

erit denique

$$\int \partial x \int s\,\partial x = -x\, l\sqrt{(1-xx)} + x + l\sqrt{(1-xx)} - l(1+x),$$

vnde poſito $x = 1$ erit

$$\int \partial x \int s \partial x \begin{bmatrix} \text{ab} & x = 0 \\ \text{ad} & x = 1 \end{bmatrix} = 1 - l\,2.$$

At vero per feriem eft

$$\int \partial x \int s \partial x \begin{bmatrix} \text{ab} & x = 0 \\ \text{ad} & x = 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \text{etc.}$$

confequenter:

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} + 1 - l\,2 = \tfrac{3}{2} - l\,2.$$

Q. E. D.

Corollarium.

§. 15. Cum inuenerimus

$$\int \partial x \int s \partial x \begin{bmatrix} \text{ab} & x = 0 \\ \text{ad} & x = 1 \end{bmatrix} = 1 - l\,2,$$

pofito vero $1 - xx = zz$ habeamus:

$$\int \partial x \int s \partial x = \int \frac{z \partial z\, l z}{\sqrt{(1 - zz)}},$$

fequitur fore:

$$\int \frac{z \partial z\, l z}{\sqrt{(1 - zz)}} \begin{bmatrix} \text{a} & z = 1 \\ \text{ad} & z = 0 \end{bmatrix} = 1 - l\,2,$$

hincque mutatis terminis integrationis:

$$\int \frac{z \partial z\, l z}{\sqrt{(1 - zz)}} \begin{bmatrix} \text{a} & z = 0 \\ \text{ad} & z = 1 \end{bmatrix} = l\,2 - 1.$$

Lemma IV.

§. 16. *Denotante* x *numerum infinitum, eius logarithmus etiam erit infinitus, attamen infinities minor quam* **x.**

Demonftratio.

Ponatur $v = \frac{\sqrt{x}}{l x}$, et pofito $p = \frac{1}{l x}$ et $q = \frac{1}{\sqrt{x}}$, erit $v = \frac{p}{q}$. Quoniam autem, fumto $x = \infty$, quantitas v indefinitum

tum fortitur valorem, cum fit $v = \frac{0}{0}$, erit fecundum regulam notam $v = \frac{\partial p}{\partial q} = \frac{2\sqrt{x}}{(lx)^2}$. Cum autem pofuerimus $v = \frac{\sqrt{x}}{lx}$, erit $vv = \frac{x}{(lx)^2}$, quod diuifum per $v = \frac{2\sqrt{x}}{(lx)^2}$ praebet $v = \frac{\sqrt{x}}{2} = \infty$, fumto $x = \infty$, ita vt hoc cafu fit $\frac{\sqrt{x}}{lx} = \infty$, hoc eft logarithmus infiniti infinities minor quam radix infiniti, et a fortiori log. x infinities minor quam x.

Theorema II.

§. 17. *Summa feriei reciprocae numerorum primorum:*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \text{etc.}$$

eft infinite-magna, infinities tamen minor quam fumma ferici harmonicae:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \text{etc.}$$

atque illius fumma eft quafi logarithmus fummae iftius.

Demonftratio.

Supra in Lemmate primo (§. 10.) inuenimus effe feriem reciprocam numerorum naturalium:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.} = \frac{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13}{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.\ 12}\ \text{etc.}$$

Cum igitur ex Lemmate fecundo (§. 13.) fit

$$\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{C}}{3} + \frac{\mathfrak{D}}{4} + \text{etc.} = l\,\frac{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13}{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.\ 12}\ \text{etc.}$$

hinc fequitur fore

$$\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{C}}{3} + \frac{\mathfrak{D}}{4} + \text{etc.} = \log.\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}\right).$$

Notum autem eft fummam feriei harmonicae effe infinitam (§. 5. N°. 1.); erit igitur

$$\log.\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}\right) = \infty.$$

Infinitum igitur etiam erit aggregatum:

$$\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{C}}{3} + \frac{\mathfrak{D}}{4} + \frac{\mathfrak{E}}{5} + \text{etc.}$$

Ex Lemmate tertio autem (§. 14.) conſtat eſſe:

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \text{etc.} = \tfrac{3}{2} - l\,2 = 0,306853,$$

ideoque quantitas finita ſatis parua, vnde neceſſario quantitas $\mathfrak{A}$ infinita eſſe debet, cuius reſpectu ſequentes termini

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{B} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{C} + \tfrac{1}{4}\mathfrak{D} + \text{etc.}$$

(multo minores quam $\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.}$) tuto negligi poſſunt, ita vt ſit

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.} = l\,(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{etc.}).$$

Eſt igitur ſumma ſeriei reciprocae numerorum primorum *quaſi* logarithmus ſummae ſeriei harmonicae, ideoque infinities minor (§. 16.).

Q. E. D.

Corollarium 1.

§. 18. Cum ſit vi §. 5^{li}

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{etc.} = l\,\infty,$$

ſequitur fore

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \text{etc.} = l\,l\,\infty,$$

vnde patet ſummam ſeriei reciprocae numerorum primorum ad genus quantitatum infinitarum multo inferius pertinere quam quod per ſimplicem logarithmum infiniti deſignatur (§. 16.).

Corollarium 2.

§. 19. Quod ſi autem nunc ad numeros eſſet ſurgendum, ex aequalitate illa §^{i} 17:

$$\mathfrak{A} = \log.(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{etc.}),$$

ſeque-

ſequeretur ipſa aequatio a Cel. Fontana oppugnata:

$$e^{\mathfrak{A}} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{ etc. } = A$$

Quanquam enim reuera eſt $e^{\mathfrak{A}+n} = A$, exiſtente

$$n = \tfrac{\mathfrak{B}}{2} + \tfrac{\mathfrak{C}}{3} + \tfrac{\mathfrak{D}}{4} + \text{ etc.}$$

tamen factor finitus e^n, contra ſententiam Cl. Fontanae, hic non in cenſum venit, quoniam vtraque aequatio $e^{\mathfrak{A}} = A$ et $e^{\mathfrak{A}+n} = A$, idem ſignificat, ſcilicet eiusdem gradus eſſe ambo Infinita $e^{\mathfrak{A}}$ et A; id ipſum, quod Eulerus oſtendere voluit. Longe aliter res ſe habet, quando ratio geometrica quaeritur inter illa Infinita $e^{\mathfrak{A}}$ et A; tum enim, vt recte monet ſagaciſſimus Fontana, in exponente quantitatem illam finitam n, quantumuis exiguam, non amplius negligere licet. Idem tenendum eſt de aequalitate ſupra §. 11. exhibita:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \text{ etc. } = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{ etc.}$$

vbi ſignum $=$ tantum indicat ſummas harum ſerierum ad eundem ordinem Infiniti pertinere. Quando autem rationem arithmeticam, ſiue differentiam quaerimus, tum illas ſeries non amplius aequales ponimus, quandoquidem nouimus, differentiam inter duo Infinita eiusdem gradus finitam atque adeo infinitam gradus inferioris eſſe poſſe.

Scholion.

§. 20. Quoniam ſeries illae, §. 13. in limine demonſtrationis pro quantitatibus $\frac{\mathfrak{B}}{2}$, $\frac{\mathfrak{C}}{3}$, $\frac{\mathfrak{D}}{4}$, etc. allatae, valde conuergunt, facile erit differentiam veram inter ſummam ſeriei reciprocae numerorum primorum et logarithmum ſummae ſeriei harmonicae naturalis aſſignare. Reperitur enim:

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{B} = 0,22527$$
$$\tfrac{1}{3}\mathfrak{C} = 0,05823$$
$$\tfrac{1}{4}\mathfrak{D} = 0,01913$$
$$\tfrac{1}{5}\mathfrak{E} = 0,00714$$
$$\tfrac{1}{6}\mathfrak{F} = 0,00284$$
$$\tfrac{1}{7}\mathfrak{G} = 0,00118$$
$$\tfrac{1}{8}\mathfrak{H} = 0,00051$$
$$\tfrac{1}{9}\mathfrak{J} = 0,00022$$
$$\text{Reliqui} = 0,00018$$
$$\text{Summa}\quad 0,31470$$

Cum igitur ſit

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{B} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{C} + \tfrac{1}{4}\mathfrak{D} + \text{etc.} = 0,31470,$$

erit

$$l\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{etc.}\right) - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \text{etc.}\right) = 0,31470,$$

quae tamen differentia non impedit quo minus aequales dicamus quantitates infinitas:

$$l\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \text{etc.}\right) \text{ et}$$
$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \text{etc.}$$

ARTICVLVS III.

§. 21. Supra §. 14. ad hanc perducti fuimus ſummationem:

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \text{etc.} = 1 - l\,2,$$

quae ſeries reſpectu legis euidentiſſimae, qua progreditur, haud minus memorabilis eſt ac illa ſeries quam Eulerus olim dedit (g) ſcilicet:

$\tfrac{1}{8}$ +

(g) Comment. Ac. Imp. Sc. Petrop. Tom. IX. pag. 163.

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}+\text{etc.}=1-l\,2.$$

Aequalitas quae inter has ambas ſeries prorſus ſingulares ſubſiſtit, inducit me poſterioris demonſtrationem directam heic apponere, ex qua ſimul ordo denominatorum aliquanto clarius perſpicietur quam quidem eum ex diſſertatione citata intelligere licet.

Theorema III.

§. 22. *Si omnes poteſtates impares*

9, 25, 27, 49, 81, 121, 125, 169, 225, etc.

vnitate minuantur, indeque formetur haec ſeries reciproca:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}+\frac{1}{124}+\frac{1}{168}+\text{etc.}$$

eius ſumma erit $1-l\,2$.

Demonſtratio.

Conſideretur haec ſeries reciproca numerorum imparium:

$$x=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\text{etc.}$$

et cum ſit

$$\frac{1}{a-1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}+\text{etc.}$$

ſumto $a=3$ erit

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\text{etc.}$$

qua ſerie ab illa ablata expulſi erunt omnes denominatores formae 3^n, hoc eſt termini $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, etc. ita vt remaneat:

$$x-\frac{1}{2}=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\text{etc.}$$

Eodem modo, ſumto $a=5$, fit

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\text{etc.}$$

qua ſerie ab illa ſubtracta prodit:

$$x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = 1 + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{19} + \text{ etc.}$$

Quod ſi eodem modo extrudantur termini:

$$\tfrac{1}{7},\ \tfrac{1}{11},\ \tfrac{1}{13},\ \tfrac{1}{17},\ \tfrac{1}{19},\ \text{etc.},$$

eorumque poteſtates, quod fit ſubtrahendo ſucceſſiue ſeries:

$$\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{49} + \tfrac{1}{343} + \text{ etc.}$$

$$\tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{121} + \tfrac{1}{1331} + \text{ etc.}$$

ad dextram tandem ſola vnitas remanebit, eritque

$$x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{14} - \text{ etc.} = 1,$$

vbi in parte ſiniſtra omnes occurrunt numeri pares, praeter eos qui naſcerentur expulſione denominatorum iam expulſorum, qui ſunt

$$\tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{25},\ \tfrac{1}{27},\ \tfrac{1}{49},\ \tfrac{1}{81},\ \tfrac{1}{121},\ \tfrac{1}{125},\ \tfrac{1}{169},\ \text{etc.}$$

ex euolutione fractionum:

$$\tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{24},\ \tfrac{1}{26},\ \tfrac{1}{48},\ \tfrac{1}{80},\ \tfrac{1}{120},\ \tfrac{1}{124},\ \tfrac{1}{168},\ \text{etc.}$$

oriundi. His igitur vtrinque ablatis, vt in ſiniſtra parte omnes plane numeri pares cum ſigno negatiuo occurrant, habebimus:

$$x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} - \text{ etc.} = 1 - A,$$

denotante A ſeriem terminorum illorum:

$$\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{26} + \tfrac{1}{48} + \tfrac{1}{80} + \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{124} + \text{ etc.}$$

Reſtituta igitur loco x ſerie aſſumta erit:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \text{ etc.} = l\,2 = 1 - A,$$

ideoque

$$A = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{26} + \tfrac{1}{48} + \tfrac{1}{80} + \tfrac{1}{120} + \text{ etc.} = 1 - l\,2.$$

Q. E. D.

ARTI-

ARTICVLVS IV.

§. 23. Huic poſtremae ſummationi, affinitatis inter methodum in ſummando adhibitam atque legem progreſſionis cauſſa ſequentem denique hic adiungam:

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} + \frac{1}{624} + \frac{1}{728} + \text{etc.} = \frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6},$$

quam Eulerus pariter in Opere citato (*h*) demonſtrauit, in ſubſidium vocando hanc ſeriem absque demonſtratione vſurpatam:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \text{etc.}$$

Etiam in ſequenti demonſtratione ordo, ſecundum quem denominatores procedunt, melius, vt mihi quidem videtur, in oculos incurrit, ſimulque veritas ſeriei Bernoullianae (*i*):

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \text{etc.}$$

perſpicitur alio modo demonſtrata.

Theorema IV.

§. 24. *Si omnia quadrata quae ſimul ſunt altiores poteſtates, veluti* 16, 64, 81, 256, 625, 729, *etc. vnitate minuantur, indeque formetur haec ſeries reciproca:*

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} + \frac{1}{624} + \frac{1}{728} + \frac{1}{1023} + \text{etc.}$$

eius ſumma erit $\frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6}$.

Demonſtratio.

Conſideretur ſeries reciproca quadratorum:

$$x = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

et

(*h*) Commentar. Tomo IX. pag. 171.

(*i*) Iac. Bernoulli Ars coniectandi, pag. 253.

et cum ſit

$$\frac{1}{a^2-1} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^8} + \text{etc.}$$

poſito primo $a = 2$ erit

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \text{etc.}$$

qua ſerie ab illa ſubtracta remanet:

$$x - \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc.}$$

vbi expulſi ſunt omnes numeri formae 2^{2n}. Sumatur porro $a = 3$, et ſi ſeries inde nata:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} + \text{etc.}$$

auferatur a ſerie x, expulſi erunt termini formae $\frac{1}{3^{2n}}$, prodibitque

$$x - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{100} + \text{etc.}$$

Eodem modo ſi extrudantur ſucceſſiue termini formae $\frac{1}{5^{2n}}$, $\frac{1}{6^{2n}}$, $\frac{1}{7^{2n}}$, etc. prodibit

$$x - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \frac{1}{35} - \frac{1}{48} - \frac{1}{99} - \frac{1}{125} - \text{etc.} = 1,$$

vbi in parte ſiniſtra occurrunt omnia quadrata vnitate minuta, praeter ea quae ſimul ſunt altiores poteſtates, veluti

$$\frac{1}{15},\ \frac{1}{63},\ \frac{1}{80},\ \frac{1}{255},\ \frac{1}{624},\ \text{etc.},$$

quibus expellerentur termini iam extruſi. Quodſi igitur ſumma horum terminorum vocetur B, iis vtrinque ablatis habebimus:

$$x - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{15} - \frac{1}{24} - \frac{1}{35} - \frac{1}{48} - \frac{1}{63} - \frac{1}{80} - \text{etc.} = 1 - B,$$

vnde concluditur fore:

$$B = 1 - x + \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \text{etc.}$$

Eſt

Eſt vero

$$\frac{1}{a^2-1} = \frac{1}{(a-1)(a+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right);$$

conſequenter

$$\frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right),$$
$$\frac{1}{3^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right),$$
$$\frac{1}{4^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right),$$
$$\frac{1}{5^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right),$$

etc. etc.

quibus ſubſtitutis colligitur fore:

$$B = 1 - x = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{r} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \text{etc.} \end{array}\right].$$

ideoque, ob $x = \frac{\pi^2}{6}$, erit

$$B = \frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} + \frac{1}{624} + \text{etc.} = \frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6}.$$

Q. E. D.

ADDITAMENTVM.

§. 25. In diſſertatione Cel. Fontanae, iam ſaepius laudata, pag. 137. ſtatuitur functionem Z, ex pluribus variabilibus x, y, u, v, etc. compoſitam, euaneſcere non poſſe, poſito $x = b$ et $y = a$, niſi fuerit formae $Z = P(y-a)^n + Q(x-b)^m$, quae aſſertio ſi vera eſſet, inde ſequeretur, omnia differentialia partialia huiusmodi functionis Z, veluti $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)$, etc. quoque euaneſcere, poſito $y = a$ et $x = b$, ſolo caſu $n = m = 1$ excepto; cum tamen infinitae dentur huiusmodi functiones, quarum differentialia $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$ non euaneſcunt, ſumto $x = b$ et $y = a$, etiamſi reliqua, puta $\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)$, etc. hac poſitione ſemper in nihilum

 abeant,

abeant, quemadmodum Eulerus et alii demonſtrauerunt, excipiendo ab hac euaneſcentia differentialia $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$, non quia *nunquam*, ſed quia *non ſemper*, vt reliqua, in nihilum abeunt.

Tantum autem abeſt vt functio Z neceſſario formam $P(y-a)^n + Q(x-b)^m$ habere debeat, vt potius infinitas functiones Z aſſignare liceat, quae euaneſcant poſito $y = a$ et $x = b$, quamuis in forma illa non contineantur. Huiusmodi ſunt, exempli gratia, functiones:

$$Z = P(xy - ab),$$
$$Z = P(by - ax),$$
$$Z = P\, l\left(2 - \frac{xy}{ab}\right),$$
$$Z = P\, l\frac{y}{2a-y} + Q\, l\frac{x}{2b-x},$$
$$Z = P(xy - ab) + Q(by - ax),$$

et innumerae aliae, quarum differentialia $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$ non euaneſcunt, poſito $y = a$ et $x = b$, quamquam reliqua omnia in nihilum abeant.

SUR

SUR LES
LISTES DES MARIAGES, DES NAISSANCES ET DES MORTS À St. PÉTERSBOURG,

MÉMOIRE TROSIEME CONTENANT LA PÉRIODE DE 1786 JUSQU'EN 1790.

Par
W. L. KRAFFT.

Communiqué à l'Académie le 23 Aout 1792.

Je continue dans ce Mémoire le travail que j'ai entrepris fur les Liftes de la fécondité & de la mortalité à St. Pétersbourg & dont j'ai rendu compte à l'Académie dans deux Mémoires précédans; le premier (*) embraffe la période de 1764 à 1780; le feconde (**) celle de 1781 à 1785; c'eft maintenant la fuite de ces Liftes pour la période de 1786 à 1790 que je vais avoir l'honneur de lui prefenter, rédigée fur le même Plan que j'ai tracé dans mon premier Mémoire, & accompagnée des rémarques que j'ai cru pouvoir en tirer. Je ne m'étendrai plus ici fur l'utilité de ces fortes d'obferva- tions;

(*) Voy. les Actes de l'Acad. pour l'an 1782.
(**) Nouv. Actes de l'Acad. T. IV.

tions; j'en ai donné un tableau méthodique dans mon premier Mémoire. La feule chofe que je dois répéter encore ici, eft que dans ce travail mon but principal étoit & l'eft encore, 1°.) de faire fentir par l'emploi des Tables d'une feule ville, que quand on en a de pareilles pour des Provinces ou pour des Gouvernemens entiers de la Ruffie, on pourroit en tirer des lumieres & des inftructions qui ont un rapport intime à l'avantage de l'humanité & au bien-être de la population; 2°.) de faire voir, fous quels points de vue & de quelle façon un Bureau établi exprès pour la rédaction de ces Tables, devroit les rédiger & les examiner pour être à même d'en tirer de femblables conclufions. Notre tres-gracieufe Souveraine a ajouté à tant d'actions de bienfaifance qui rendent Son regne fi cher à Ses peuples & à l'humanité, auffi celle d'ordonner en 1764 la formation de pareilles Liftes; on doit donc en avoir de conftruites depuis ce tems-la; je me feliciterai infiniment, fi l'emploi que j'ai fait de celles d'une feule Ville, pourra affés mériter l'attention du Gouvernement pour en faire un femblable de celles des Provinces entieres. Comme il pourra peut-être y avoir dans les Actes de l'Académie une fuite de Mémoires fur cet objet; il eft bon fans doute de les mettre dans une liaifon perpetuelle & de leur conferver autant d'analogie que poffible; c'eft pourquoi j'ai lié chaque Mémoire à celui qui précéde, titre par titre & rémarque par rémarque; c'eft auffi par cette raifon & par d'autres encore, que j'ai cru devoir répéter quelquefois les mêmes rémarques; le lecteur eft prié de faire grace à ces fortes de rédites en faveur de l'intention.

I.) Ta-

I. Table générale des nombres annuels des Mariages, des Naiſſances & des Morts.

Année	Mariages	Naiſſances	Morts.
1786	1508	6137	7751
1787 (*)	1416	6628	4217
1788 (**)	1319	6204	7627
1789	1306	6248	8422
1790	1406	6347	8879
1826 jours	6955	31564	36896

II. Table ſpéciale des nombres annuels des Mariages.

Année	A	B	C	D	Somme.
1786	1072	102	235	99	1508
1787	1037	123	169	87	1416
1788	958	86	170	105	1319
1789	929	98	172	107	1306
1790	1013	104	188	101	1406
1826 jours	5009	513	934	499	6955

A. Mariages entre des Garçons & des Filles.
B. Mariages entre des Veufs & des Filles.
C. Mariages entre des Garçons & des Veuves.
D. Mariages entre des Veufs & des Veuves.

(*) Le 7 Janvier S. M. J. partit pour viſiter les provinces meridionales de ſon empire & en revint le 11 Juillet.
Le 15 d'Aout les Turcs declarereut la guerre à la Ruſſie:

(**) Cette année le Roi de Suede declara la guerre à la Ruſſie, qui ſut terminée par la paix conclue le 9 d'Aout 1790.

III. Table ſpéciale des nombres annuels des Naiſſances.

Année	Garçons	Filles	Somme	Dans ces nombres il y a des Enfans venus morts au monde. Garçons	Filles	Somme
1786	3227	2910	6137	8	5	13
1787	3406	3222	6628	10	6	16
1788	3268	2936	6204	15	12	27
1789	3254	2994	6284	10	10	20
1790	3204	3143	6347	13	11	24
1826 jours	16359	15205	31,64	56	44	100

Sous le titre des Enfans venus morts au monde les tables comprennent auſſi ceux qui ſont morts avant le Batême.

IV. Table ſpéciale des nombres annuels des Morts.

Année	Mâles	Fémell.	Somme	Dans ces nombres il y a des Corps trouvés morts. Mâles	Fémell.	Somme.
1786	5989	1762	7751	24	8	32
1787	2783	1434	4217	19	2	21
1788	5549	2078	7627	5	0	5
1789	6573	1849	8422	23	2	25
1790	7094	1785	8879	20	2	22
1826 jours	27988	8908	36896	91	14	105

Dans ces nombres des morts on a compté auſſi les enfans venûs morts au monde conſignés dans la table précédente.

V. Ta-

V. Table ſpéciale des Morts du ſexe maſculin rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	1786	1787	1788	1789	1790	Sommes.
Enfans venus morts.	8	10	15	10	13	56
Entre 0 — 1 an	477	353	271	126	98	1325
1 — 2	225	249	563	581	488	2106
2 — 3	42	38	38	31	31	180
3 — 5	28	30	25	29	18	130
5 — 10	59	48	81	78	46	312
10 — 15	61	42	101	117	96	417
15 — 20	145	114	177	129	357	922
20 — 25	872	237	961	1449	1225	4744
25 — 30	853	223	781	1031	1238	4126
30 — 35	869	328	769	997	1379	4342
35 — 40	497	199	355	352	562	1965
40 — 45	531	263	413	763	708	2678
45 — 50	306	140	255	288	201	1190
50 — 55	287	142	178	184	211	1002
55 — 60	177	82	127	95	82	563
60 — 65	208	87	185	105	139	724
65 — 70	80	58	67	61	62	328
70 — 75	122	47	102	61	67	399
75 — 80	39	41	33	29	17	159
80 — 85	57	21	34	22	28	162
85 — 90	13	5	10	8	6	42
90 — 95	2	4	3	2	2	13
95 — 100	6	3	0	2	0	11
deſſus 100	1	0	0	0	0	1
Somme - - -	5965	2764	5544	6550	7074	27897

VI. Ta-

VI. Table ſpéciale des Morts du ſexe feminin rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	1786	1787	1788	1789	1790	Somme.
Enfans venus morts	5	6	12	10	11	44
Entre 0 — 1 an.	512	350	254	137	98	1351
1 — 2	58	53	37	18	33	199
2 — 3	42	47	28	15	8	140
3 — 5	82	100	480	472	430	1564
5 — 10	36	39	57	49	43	224
10 — 15	23	30	39	54	48	194
15 — 20	44	53	56	60	48	261
20 — 25	66	67	115	158	126	532
25 — 30	108	70	97	70	86	431
30 — 35	98	85	107	149	133	572
35 — 40	82	56	98	61	84	381
40 — 45	85	76	99	134	119	513
45 — 50	69	65	71	56	55	316
50 — 55	65	48	89	93	86	381
55 — 60	71	60	80	62	65	138
60 — 65	94	63	102	94	121	474
65 — 70	55	43	79	40	55	272
70 — 75	81	61	92	62	81	377
75 — 80	35	20	38	21	22	136
80 — 85	26	27	22	16	23	114
85 — 90	10	8	13	8	6	45
90 — 95	5	2	6	6	2	21
95 — 100	2	1	6	2	0	11
deſſus 100	0	2	1	0	0	3
Somme.	1754	1432	2078	1847	1783	8894

VII. Ta-

V. Table reduite des morts rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	De 1000 morts du ſexe maſculin il y a	De 1000 morts du ſexe feminin il y a	De 1000 morts pris en géneral il y a
Enfans venus morts	2, 01	4, 95	2, 72
Entre 0 — 1 an	47, 50	151, 90	72, 73
1 — 2	75, 49	22, 37	62, 65
2 — 3	6, 45	15, 74	8, 70
2 — 5	4, 56	175, 84	46, 04
5 — 10	11, 18	25, 18	14, 57
10 — 15	14, 95	21, 81	16, 61
15 — 20	33, 05	29, 35	32, 15
20 — 25	170, 05	59, 91	143, 40
25 — 30	147, 91	48, 46	123, 86
30 — 35	155, 64	64, 31	133, 56
35 — 40	70, 44	42, 84	63, 76
40 — 45	95, 99	57, 68	86, 73
45 — 50	42, 66	35, 53	40, 93
50 — 55	35, 92	42, 84	37, 59
55 — 60	20, 18	38, 00	24, 49
60 — 65	25, 95	53, 29	32, 56
65 — 70	11, 76	30, 53	16, 31
70 — 75	14, 30	42, 39	21, 09
75 — 80	5, 70	15, 29	8, 02
80 — 85	5, 81	12, 82	7, 50
85 — 90	1, 50	5, 06	2, 36
90 — 95	0, 47	2, 36	0, 92
95 — 100	0, 49	1, 24	0, 60
deſſus 100	0, 03	0, 34	0, 11

VIII. Table de la vitalité des âges des hommes à St. Pétersbourg.

telle, qu'elle sert aux calculs des Rentes viagéres & d'autres établissemens de ce genre.

	De 1000 Garçons nouveaux nés.	De 1000 Filles nouvellement nées.	De 1000 Enfans nouveaux nés.
Viennent vivans au monde	997, 99	995, 05	997, 28
Accomplissent la 1 année.	950, 49	843, 15	924, 55
2 — —	875, 00	820, 78	861, 90
3 — —	868, 55	805, 04	853, 20
5 — —	863, 89	629, 20	807, 16
10 — —	852, 72	604, 02	792, 59
15 — —	837, 76	582, 21	775, 98
20 — —	804, 71	552, 86	743, 83
25 — —	634, 66	493, 05	600, 43
30 — —	486, 75	444, 59	476, 57
35 — —	331, 11	380, 28	343, 01
40 — —	260, 67	337, 44	279, 25
45 — —	164, 68	279, 76	192, 52
50 — —	122, 02	244, 23	151, 59
55 — —	86, 10	201, 39	114, 00
60 — —	65, 92	163, 39	89, 51
65 — —	39, 97	110, 10	56, 95
70 — —	28, 21	79, 52	40, 64
75 — —	13, 91	37, 13	19, 55
80 — —	8, 21	21, 84	11, 53
85 — —	2, 40	9, 02	4, 03
90 — —	0, 90	3, 96	1, 67
95 — —	0, 43	1, 60	0, 75
100 — —	0, 04	0, 36	0, 15

IX. Table ſpéciale des Morts du ſexe maſculin rangés ſelon les maladies ou les cauſes de la mort.

Maladies & cauſes de la mort.	1786	1787	1788	1789	1790	Somme
Pleureſie - - - - -	676	582	821	864	557	3500
Fievre chaude - - -	2512	903	2513	3051	3208	12187
Conſomption - - -	713	421	612	810	753	3309
Convulſions - - - - -	132	90	117	103	99	541
Vieilleſſe - - - - - -	213	102	155	102	135	707
Dyſſenterie - - - - -	639	180	686	853	1453	3811
Petite verole - - - - -	32	18	57	109	66	282
Hydropiſie - - - - -	244	146	161	166	180	897
Malheur - - - - - - -	12	31	15	19	13	90
Apoplexie - - - - -	110	137	123	116	163	649
Scorbut - - - - - -	610	89	163	283	316	1461
Dentition - - - - - -	32	13	27	18	13	103
Epilepſie - - - - - -	10	6	16	5	6	43
Verole - - - - - - -	0	4	15	5	69	93
Rougeole - - - - - -	1	0	2	8	2	13
Esquinancie - - - - -	6	9	16	5	5	41
Phreneſie - - - - - -	0	3	5	10	4	22
Etouffem. des enfans au ſommeil p. la mere -	0	0	1	0	0	1
Yvrognerie - - - - -	1	0	0	0	0	1
Fievre - - - - - - -	0	0	0	0	0	0
Pierre - - - - - - -	0	0	0	0	0	0
Maladies inconnues - -	14	20	24	13	19	90
Sommes - - - -	5957	2754	5529	6540	7061	27841

 X. Ta-

X. Table ſpéciale des Morts du ſexe feminin rangés ſelon les maladies ou les cauſes de la mort.

Maladies & cauſes de la mort.	1786	1787	1788	1789	1790	Somme
Pleureſie - - - - -	537	446	629	468	441	2521
Fievre chaude - - - -	314	232	369	391	364	1670
Conſomption - - - -	306	251	374	310	361	1602
Convulſions - - - - -	109	72	67	76	72	396
Vieilleſſe - - - - - - -	212	150	239	157	179	937
Dyſſenterie - - - - -	41	33	54	56	38	222
Petite verole - - - - -	24	20	59	110	73	286
Hydropiſie - - - - -	73	50	72	74	78	347
Malheurs - - - - - - -	2	4	8	6	5	25
Apoplexie - - - - -	41	49	62	44	42	238
Scorbut - - - - - -	18	24	31	39	21	133
Enfantement - - - - -	42	47	44	62	62	257
Dentition - - - - -	16	15	21	12	14	78
Epilepſie - - - - - -	3	2	1	4	2	12
Verole - - - - - -	0	5	5	1	2	13
Rougeole - - - - - -	1	1	1	2	3	8
Esquinancie - - - - -	2	3	8	4	0	17
Phreneſie - - - - - -	1	2	1	4	1	9
Etouffem. des enfans - - au ſommeil p. la mere -	0	0	1	0	0	1
Yvrognerie - - - - -	0	0	0	0	0	0
Fievre - - - - - - - -	0	0	0	0	0	0
Pierre - - - - - -	0	0	0	0	0	0
Malad. inconnues - - -	7	20	20	17	74	78
Sommes - -	1740	1426	2066	1837	1772	8850

XI. Ta-

XI. Table reduite des morts

rangés felon les maladies ou les caufes de la mort.

Maladies ou caufes de la mort.	De 1000 morts du fexe mafculin il y a	De 1000 morts du fexe feminin il y a	De 1000 morts pris en général il y a
Pleurefie - - -	125, 71	284, 85	164, 10
Fievre chaude - -	437, 74	188, 70	377, 67
Confomption - -	118, 86	181, 02	133, 04
Convulfions - -	19, 43	44, 74	25, 54
Vieilleffe - - -	25, 39	105, 87	44, 81
Dyffenterie - - -	136, 88	25, 08	109, 92
Petite verole - -	10, 13	32, 31	15, 48
Hydropifie - - -	32, 22	39, 21	33, 90
Malheurs - - -	3, 23	2, 82	3, 13
Apoplexie - - -	23, 31	26, 89	24, 17
Scorbut - - - -	52, 48	15, 03	43, 44
Enfantement - -		29, 04	7, 00
Dentition - - -	3, 69	8, 81	4, 94
Epilepfie - - -	1, 64	1, 35	1, 50
Verole - - - -	3, 34	1, 47	2, 93
Rougeole - - -	0, 47	0, 91	0, 57
Esquinancie - -	1, 47	1, 92	1, 58
Phrenefie - - -	0, 79	1, 01	0, 84
Etouff. des enfans au fommeil par les meres	0, 03	0, 11	0, 05
Yvrognerie - - -	0, 03	0, 00	0, 02
Fievre - - - -	0, 00	0, 00	0, 00
Pierre - - - -	0, 00	0, 00	0, 00
Maladies inconnues -	3, 23	8, 81	4, 58

 XII. Ta-

XII. Table ſpéciale des morts rangés ſelon les mois.

	Males.	Femell.	Somme.		Males.	Fem.	Somme.
Janvier.	1622	702	2324	Juillet.	2095	847	2942
Février	1796	699	2495	Aout	1673	761	2434
Mars	2810	782	3592	Septemb.	1612	634	2246
Avril	4093	801	4894	Octobr.	1557	593	2150
Mai	4336	888	5224	Novbr.	1619	617	2236
Juin	2968	831	3799	Décembr.	1660	695	2355

Dans ces nombres on ne comprend pas les enfans venus morts, ni les corps trouvés morts.

	Le plus grand nombre des morts & le mois, où il a eu lieu.		Le plus petit nombre des morts & les mois, où il a eu lieu.	
Année.	Males.	Femelles.	Males.	Femelles.
1786	Mai 1032	Aout 194	Décembr. 238	Janv. & Nov. 117
1787	Juin 291	Mai 140	Octobr 186	Octobr. 86
1788	Mai 742	Juillet 227	Janvier 288	Janv. 137
1789	Mai 1310	Mars 188	Octobr. 303	Octobr. 119
1790	Avrill. 1315	Aout 265	Avrill. 220	Septembr. 90

Les Tables précédentes nous fourniſſent d'abord les ſuivans

Réſultats généraux.

I. *Etat moyen de la population à St. Pétersbourg dans la periode de 1786 à 1790.*

1.) Dans cette periode il ſe fit à St. Pétersbourg 1391 mariages par an.

2.)

2.) Il y naquit annuellement 6313 enfans; 3272 garçons & 3041 filles.

2.) Il y mourut annuellement 7380 perſonnes; 5598 males & 1782 femelles.

4.) Il y eut un excedant annuel des morts ſur les naiſſances de 1067 perſonnes; il y naquit 1259 femelles plus qu'il n'en mourut, mais il y mourut 2326 males plus qu'il n'en naquit.

II. *Parallele entre les Etats moyens de la Population à St. Pétersbourg dans cinq periodes conſecutives:*

Nombre annuel des	Periodes.				
	1764-1770	1771-1775	1776-1780	1781-1785	1785-1709
Mariages - -	1351	1221	1305	1368	1391
Naiſſances					
Garçons - -	2592	2639	2898	3004	3272
Filles - - -	2530	2476	2740	2885	3041
Total - -	5122	5115	5638	5889	6313
Morts					
Males - - -	3036	3243	2752	3474	5598
Femelles - -	1641	1677	1559	1688	1782
Total - -	4677	4921	4311	5162	7380
Excédant des naiſſances.					
en Males -	— 444	— 605	— 146	— 470	— 2326
en Fémelles	+ 889	+ 799	+ 1181	+ 1197	+ 1259
Total - -	+ 445	+ 194	+ 1327	+ 727	— 1067.

Le

Le ſigne + indique, que le nombre des naiſſances a ſurpaſſé celui des morts, & le ſigne — en marque le contraire.

1.) La derniere de ces 5 periodes, celle de 1785 à 1790 ſe diſtingue avantageuſement des précédentes par le plus grand nombre des mariages & des naiſſances. Ces deux nombres vont, depuis 1775, en augmentant de période en période.

2.) Mais la derniere periode ſe diſtingue auſſi desavantageuſement des précédentes en ce qu'il y eut un excedant conſiderable des morts ſur les naiſſances au lieu que dans les 4 periodes précédentes il y en eut un des naiſſances ſur les morts. Nos Tables font voir qu'à l'égard des fémelles le nombre des naiſſances a ſurpaſſé celui des morts, & qu'il en eſt arrivé toujours le contraire par rapport aux mâles; mais dans la derniére période le nombre des morts mâles a tant ſurpaſſé celui des naiſſances mâles que malgré le fort excedant des naiſſances ſur les morts en fémelles, il y en eut, dans la totalité, un des morts ſur les naiſſances de 1067 hommes. Dans les grandes villes le nombre des morts eſt ordinairement ſuperieur à celui des naiſſances; ce n'eſt cependant que la derniére période qui en offre l'exemple pour St. Pétersbourg; la 9^{me} de nos Tables & les remarques qui s'y rapportent, rendent viſible dans ſa ſource la mortalité extraordinairement forte des males qui a eu lieu dans cette période.

Outre ces reſultats généraux, les Tables données ci-deſſus nous fourniſſent encore les ſuivantes

Rémar-

Rémarques ſpéciales

rélatives aux titres que j'ai établis dans mon premier Memoire.

I. Nombre moyen des habitans à St. Pétersbourg & rapport du nombre des nationaux à celui des étrangers.

1.) L'Arithmetique politique ſe ſert ſouvant des Liſtes des mariages, des naiſſances & des morts d'une ville, d'une Province &c. pour calculer le nombre de ſes habitans; c'eſt ordinairement toute l'utilité qu'on en retire; j'ai fait voir dans mes deux Mémoires précédans, que l'on peut tirer des pareilles Liſtes des concluſions bien plus importantes ſi le nombre des vivans qu'elles embraſſent, eſt donné. Nous jouiſſons de cet avantage à l'égard de la derniere période; le denombrement fait en 1789 par ordre de la Police a donné la population de St. Pétersbourg de 217948 perſonnes, 148520 mâles & 69428 fémelles. Par un ſemblable denombrement fait dans la période précédente, en 1784, on l'avoit trouvée de 192246 perſonnes, 126827 males & 65619 fémelles; donc dans l'intervalle de 5 ans elle s'eſt augmentée de 25502 perſonnes, 21693 males & 3809 fémelles, & la population de la Ville dans la derniere période eſt à celle qui y a eu lieu dans la période précédente, en raiſon de 113 à 100; or nos Tables font voir que dans la derniere période il y a eu un excedant des morts ſur les naiſſances; il s'en ſuit, que l'accroiſſement qui a eu lieu dans la derniére période, n'eſt point reſulté de la vigueur interne de la population, mais uniquement d'une forte affluence de monde dans cette Capitale.

2.) La ville de St. Pétersbourg étant assise, comme je l'ai dit dans le Mémoire précédant, sur une surface de 49 Werstes quarrées; il vient pour la derniere période 4448 hommes sur une Werste quarrée, 472 de plus que dans la période précédente.

3.) Il auroit été utile, si l'on eut continué, comme on l'avoit fait pour les années 1764 & 1765, de distinguer dans les tables de St. Pétersbourg les nationaux d'avec les étrangers; j'ai fait voir dans mon premier Mémoire qu'une pareille distinction fournit des rémarques tres-interessantes sur la difference qui subsiste dans la fécondité, la mortalité & la force des maladies des uns & des autres. Pour y suppléer autant que possible, je joins ici une Table, semblable à celle que j'ai donnée pour la période précédente dans mon sécond Mémoire, elle est tirée des regîtres de toutes les Paroisses étrangéres de la Ville; mais elle a encore ainsi que la précédente, le defaut de ne marquer ni l'âge ni le genre des maladies des morts.

Etat des Mariages, des Naissances & des Morts des Etrangers à St. Pétersbourg, depuis 1786 jusqu'en 1790.

	Mariages.	Naissances.			Morts.		
		Garç.	Filles	Sommes	Hommes	Femmes	Sommes
1786	233	412	357	769	468	350	818
1787	226	430	409	839	371	295	666
1788	214	454	355	809	547	404	951
1789	203	439	402	841	483	398	881
1790	252	433	427	860	387	377	764
Total.	1128	2168	1950	4118	2256	1824	4080

En

En prenant les ſommes totales de cette table & en les comparant avec les ſommes reſpectives pour les nationaux, on trouve le rapport

entre les nombres:		ces rapports on été dans la periode précédente:
des mariages	= 51 : 10	= 51 : 10
des naiſſances	= 67 : 10	= 70 : 10
des morts	= 80 : 10	= 57 : 10

On voit d'abord que le rapport des mariages a été le même dans ces deux périodes, & que celui des naiſſances a peu changé; mais celui des morts eſt monté de 57 à 80; & comme celà eſt encore un effet de la forte mortalité qui a eu lieu dans la derniere période, nous n'employerons pour calculer le rapport du nombre des étrangers à celui des nationaux, que le rapport des mariages 51 à 10, & celui des naiſſances 67 à 10. Le rapport moyen de ces deux eſt celui de 59 à 10 au lieu de 60$\frac{1}{2}$ à 10 qu'il a été dans la période précédente. On peut donc établir avec bien de probabilité, que dans la derniere période on comptoit à St. Pétersbourg 59 nationaux ſur 10 étrangers, & que dans la population totale de 217948 perſonnes il y avoit 186361 nationaux & 31587 étrangers & 145 étrangers ſur 1000 habitans (*). En employant d'une maniere ſemblable le rapport de 60$\frac{1}{2}$ à 10 qui a eu lieu dans la période précédente, dans la population totale de 192446 perſonnes, il y avoit alors 165147 nationaux & 27299 étrangers, de façon que dans la derniere période le nombre des nationaux à St. Pétersbourg s'eſt augmenté de 21214 & celui des étrangers de 4288 perſonnes.

(*) Il peut être utile dans quelques cas d'avoir les états ſpécials des Mariages, des Naiſſances & des Morts de chacune des Nations étrangeres ou re-

II. Fécondité intentionelle.

1.) Le nombre moyen annuel des mariages a été = 1391, calcul moyen de 5 ans; j'en tire le rapport au nombre de la population ou la meſure de la fécondité intentionelle = $\frac{1}{156}$, c'eſt à dire, qu'entre 156 perſonnes il ſe fit un mariage par an ou bien que de 78 perſonnes il y eut annuellement une qui s'eſt mariée. Cette fécondité intentionelle, tres-petite en elle même, eſt encore de beaucoup inferieure à celle que j'ai trouvée pour la periode précédente où elle a été = $\frac{1}{140}$. Pour ce qui concerne les étrangers, la meſure de leur fécondité intentionelle ſe trouve = $\frac{1}{140}$ pour la derniere période au lieu de $\frac{1}{122}$ qu'elle a été dans la précédente; elle a donc été auſſi ſenſiblement diminuée. Quoique donc la derniere période ſe diſtingue des autres par le plus grand nombre des mariages; cependant eu égard à l'accroiſſement de la population, la fécondité intentionelle ou bien la diſpoſition à ſe marier étoit alors éffectivement moindre que dans la periode précédente, en raiſon de 140 à 156.

2.)

ligions à part qui ſe trouvent établies dans la Ville; voici ce que j'ai pû obtenir à cet égard par les regiſtres des differentes Paroiſſes pour ce période de 1786 à 1790.

	Mariages	Naiſſances	Morts.
Allemands Lutheriens - -	695	2421	2311
— — Réformés - -	18	92	73
François réformés - - -	14	42	31
Catholiques - - - - - -	132	532	475
Finnois - - - - - - -	129	579	752
Suedois - - - - - - -	79	291	328
Anglois - - - - - - -	53	122	69
Hollandois - - - - - -	5	27	12
Armeniens - - - - - -	3	12	29
Total - - - - - -	1128	4118	4080

2.) Le nombre des Veuves qui ſe ſont remariées, a ſurpaſſé celui des Veufs qui ont paſſé à des ſécondes nôces, dans la derniere période precisément autant que dans la précédente, en raiſon de 7 à 5. Quelle pourroit être la cauſe d'un euenement ſi conſtant & dont par tout ailleurs il arrive le contraire?

III. Fécondité réelle.

1.) Le nombre moyen annuel des naiſſances a été = 6313, dans le quel il y avoit 3272 garçons & 3041 filles; calcul moyen de 5 ans; j'en tire le rapport au nombre moyen annuel des mariages ou la meſure de la fécondité réelle = 4, 5, c'eſt à dire, qu'on comptoit 45 naiſſances ſur 10 mariages; c'eſt une forte fécondité réelle pour une grande ville; elle a été auſſi dans la derniere periode plus forte que dans les précédentes, où elle fut ſucceſſivement 3, 7; 4, 1; 4, 2; & 4, 3.

2.) Dans la totalité des naiſſances de 31564 enfans il y eut 16359 garçons & 15205 filles: ces deux nombres ſont entre eux en raiſon de 107 à 100; ce qui conſtate encore la rémarque intereſſante qu'on a faite depuis longtems ſur le rapport conſtant du nombre des naiſſances mâles à celui des naiſſances femelles.

IV. Fécondité générale.

Le nombre moyen annuel des naiſſances a été = 6313; calcul moyen de 5 ans; il en reſulte le rapport de ce nombre à celui de la population ou la meſure de la fécondité générale = $\frac{1}{34}$, c'eſt à dire que ſur 34 habitans il arrivoit une naiſſance par an. Cette fécondité générale eſt ſenſiblement moindre que celle qui a ordinairement lieu dans les grandes villes, & elle va pour St. Pétersbourg en diminuant de de periode en periode, car elle a été ſucceſſivement $\frac{1}{31}$; $\frac{1}{33}$ & dans la dernière periode $\frac{1}{34}$; cette diminution de la fécondité générale eſt une ſuite de celle de la fécondité intentionelle, mais on doit auſſi l'attribuer en partie à l'affluence du monde dans la Capitale qui n'y fait qu'un ſejour paſſager.

V. Mortalité générale.

1.) Le nombre moyen annuel des morts a été = 7380 dans le quel il y eut 5598 hommes & 1782 femelles; calcul moyen de 5 ans. Le rapport de ce nombre à celui de la population ou la meſure de la mortalité générale a donc été = $\frac{1}{29}$, c'eſt à dire que de 29 perſonnes il en mourut une par an, ou bien 35 de 1000; c'eſt preciſement la même meſure de la mortalité générale qui a également lieu pour d'autres grandes villes.

2.) La mortalité générale dans la derniere période a ſurpaſſé celle qui a eu lieu dans la periode précédente, en raiſon de 128:100. Par l'éffet de cette forte mortalité le nombre des morts a été même ſuperieur à celui des naiſſances; malgré cela cette mortalité, ſi forte pour St. Pétersbourg, ne fait encore qu'égaler celle qui a lieu en de grandes villes; c'eſt que la meſure de la mortalité générale eſt pour St. Pétersbourg ordinairement tres petite n'étant que de $\frac{1}{37}$.

3.) On a cru avoir lieu de ſoupçonner la précíſion des tables de la mortalité de St. Pétersbourg, parce qu'elles donnoint toujours le nombre des naiſſances ſuperieur à celui des morts & que dans les grandes villes il en arrivoit presque par tout le contraire. J'ai fait voir dans les Mémoires précédans, combien ce ſoupçon étoit peu fondé; la derniere période en offre une nouvelle preuve.

4.) Il

4.) Il n'y eût dans cette période qu'une feule année (1787) où le nombre des naiffances a été fuperieur à celui des morts. Le nombre moyen annuel des naiffances eft inférieur à celui des morts en raifon de 85 à 100. Voici le parallèle de ces rapports dans les 5 périodes confecutives:

Période.	Rapport du nombre annuel des naiffances à celui des morts.
1764 à 1770	- - 109 à 100
1771 à 1775	- - 104 à 100
1776 à 1780	- - 130 à 100
1781 à 1785	- - 114 à 100
1786 à 1790	- - 85 à 100

5.) L'excédant annuel des morts fur les naiffances qui a eu lieu dans la derniere période, réfulte de la grande mortalité des *hommes*. Dans le nombre annuel de 7380 morts, il y a eu 5598 mâles & 1782 femelles. Donc pour les *hommes* le nombre annuel des naiffances a été inferieur à celui des morts en raifon de 58 à 100, au lieu que pour les femelles il l'a furpaffé dans le rapport de 170 à 100.

6.) Le nombre moyen annuel des hommes morts a été dans la derniere période fuperieur à celui des femelles mortes en raifon de 314 à 100. Ce rapport extraordinairement fort, & même beaucoup plus fort que celui de la période précédente, s'explique 1.) par le grand excédant du nombre des hommes fur celui des femelles à St. Pétersbourg; le dernier denombrement fait voir, qu'on y comptoit alors 214 hommes contre 100 femelles 2do) par la mortalité plus grande des hommes que des femmes, dés l'âge de 20 ans, 3tio) particulierement quant à la dernière période, par les épidemies des Fievres chaudes & des Dyffenteries en 1789 & 1790, 1790, & par celle du Scorbut en 1786, qui dans ces deux années ont enleué plus d'hommes que dans toute la durée de la période précédente.

VI. Mortalité ſpéciale de chaque âge.

1.) *Nombre des enfans venûs morts au monde.*

1.) Dans la totalité de 31564 naiſſances arrivées dans la derniere période, il y eut 100 enfans de nés-morts; ou bien 3 ſur 1000 naiſſances, & conſéquement plus que dans la période précédente, où il n'y en a pas eu même 2 ſur 1000. La différence qu'on a rémarquée à cet égard entre les deux ſexes dans les périodes précédentes, a été moins ſenſible dans la derniére; dans un nombre égal des naiſſances de l'un & de l'autre ſexe le nombre des garçons nès-morts n'a ſurpaſſé celui des filles venues mortes au monde qu'en raiſon de 17 à 14, au lieu que dans la période précédente il l'a ſurpaſſé en raiſon de 13 à 6 ou bien de 30 à 14.

2.) Le nombre extremement petit des enfans nés-morts à St. Pétersbourg s'explique au moins en partie par la facilité de l'accouchement des meres ruſſes; les tables de la derniere période donnent ſur ce point le même réſultat qu'ont donné les précédentes, ſcavoir que de 1000 meres en couche à St. Pétersbourg, il n'y a que 8 qui ſont les victimes des travaux ou des ſuites de l'enfantement.

2. *Mortalité des Enfans nouveaux-nés.*

1.) La meſure de la mortalité de la premiere année de l'âge humain a été dans la derniere période telle que de 1000 enfans nouveaux-nès & mis vivans au monde, il n'en meurt que 73 avant que de l'accomplir, & la mortalité de

la

la premiere année n'a enleué qu'$\frac{1}{11}$ de toutes les naiſſances au lieu que dans les périodes précédentes elle en a enlevé $\frac{1}{5}$ & même plus d'un quart. Il s'offre ici une différence frappante entre la Table VII. pour la derniere période & celle pour les précédentes; mais desqu'on ſe rappelle les vrais principes de ces ſortes de calcul, on voit facilement que cette différence eſt occaſionnée par la grande mortalité des *autres âges* qui a eu lieu dans cette période & qui fait qu'on en doit regarder ſurtout les deux dernieres années comme epidémiques.

2.) Je me rapporte à mes deux Mémoires précédens pour ce que j'avois à dire ſur l'importance qu'il y a de connoitre la méſure de la mortalité des enfans nouveaux-nés à la campagne, dans les villes & auſſi dans les maiſons des enfans trouvés; ſur le ſervice & les comptoirs des nourrices, & ſur les avis à donner au peuple à l'égard des maladies & du traitement phyſique des enfans.

3.) *Mortalité de l'Enfance.*

La méſure de la mortalité de l'enfance a été dans la derniere période telle, que de 1000 enfans tous agés d'un an 839 accompliſſent la 15^{me} année & qu'il n'y en a que 161 d'enlevés par la mort pendant cet intervalle des âges. Pour que cette méſure ſe réſentiſſe le moins poſſible de la conſtitution en partie épidemique de la dernière periode pour les autres âges, il conviendra de prendre le milieu entre celle-cy & celles que j'ai trouvées dans les Mémoires precédans; il en réſulte que de 1000 enfans tous agés d'un an à St. Pétersbourg 809 accompliſſent la 15^{me} annee & qu'il n'y en a que 191 d'enlevés par la mort dans cet intervalle des âges. Une ſi forte vitalité de l'enfance eſt peut-être ſans exem-

exemple; les deux nombres que je viens de trouver, font une espece d'expression arithmétique de la constitution vigoureuse de la nation russe & de ce que la Nature est disposée à faire pour en faire accroitre la population.

4.) *Mortalité du moyen âge & de la vieillesse.*

C'est ici que nos tables font voir une forte mortalité dans la derniere période bien plus que dans les précédentes. De 1000 personnes toutes agées de 20 il n'y a, que 120 qui accomplissent la 60^{me} année & il y en a 880 d'enlevés durant cette belle partie de la vie, consequemtent 58 plus que dans la période précédente, 336 plus que dans d'autres pays en général & 160 plus que même à Londres qui se distingue des autres grandes villes par la plus forte mortalité de tous les âges jusqu'à la 60^{me} année de la vie. C'est l'effet marqué de l'Épidemie dont j'ai parlé plus haut; elle a attaqué surtout le moyen âge, & a été bien plus meurtriere pour les hommes que pour les femmes; car selon la mésure de la mortalité de cet âge là telle qu'elle a été dans la derniere période, de 1000 hommes tous agés de 20 ans il meurt 918 dans le dit intervalle des âges, 53 plus que dans la période précédente, au lieu que d'autant de femmes toutes agées de 20 ans il n'y a que 705 d'enlevées dans le même intervalle, & seulement 10 de plus que dans la periode précédente.

2.) Dans la derniere période il y a eu 4 personnes mortes à l'âge de plus d'un siecle.

VII. Force des maladies & état de la ſanté publique.

1.) Les maladies qui cauſent généralement à St. Pétersbourg le plus de mortalité, ſont les Fievres chaudes, les Pleureſies & les Conſomtions, mais il y avoit dans la derniere période encore deux ſortes de maladies, la Dyſſenterie & le Scorbut, qui y ont fait plus de ravage que dans aucune autre. Voici les nombres moyens annuels de ceux qui ont été enlevés par ces cinq maladies.

	Hommes.	Femmes.	Sommes.
Pleureſie - - -	700	504	1204
Fievre chaude -	2437	334	2771
Conſomtion - -	662	320	982
Dyſſenterie - -	762	44	806
Scorbut - - -	292	25	317
	4853	1227	6080

Or le nombre moyen annuel de tous les morts ayant été $=$ 7380; il eſt viſible que ces cinq maladies y ont contribué pour plus de $\frac{4}{5}$. On voit auſſi qu'elles ont enlevé bien plus d'hommes que de femmes; car le nombre moyen annuel des hommes morts ayant été $=$ 5598 & celui des femmes mortes $=$ 1782; ces maladies y ont contribué pour presque $\frac{9}{10}$ à la totalité des hommes morts, & pour presque $\frac{7}{10}$ à la totalité des femmes mortes. La mortalité cauſée par les Fievres chaudes a été dans la derniere periode ſenſiblement plus forte que dans la précédente, & la Dyſſenterie & le Scorbut y on fait des ravages extraordinaires, ce qu'on voit le plus clairement dans le tableau ſuivant, qui expoſe combien parmi 1000 morts il y a eu de morts de chacune de ces trois maladies, dans les deux périodes conſecutives:

Parmi 1000 morts du fexe

	Mafculin. dern. per.	Mafculin. per. précéd.	Feminin. dern. per.	Feminin. per. précéd.
Fievre chaude	437	398	188	165
Dyffenterie -	136	51	25	12
Scorbut - -	52	8	15	3

La force de ces trois maladies a donc été dans ces deux périodes confécutives.

	pour les hommes en raifon de	pour les femmes en raifon de
Fievre chaude	109 à 100	114 à 100
Dyffenterie -	266 à 100	208 à 100
Scorbut - -	650 à 100	500 à 100.

2.) Quant aux maladies des enfans, les Convulfions ont enlevé dans la derniere période annuellement 187 enfans, 108 garnons & 79 filles; la petite verole naturelle a couté la vie à 113 enfans par an, à 56 garçons & à 57 filles. La forçe de ces deux fortes de maladies d'enfans a été dans la derniere période bien moindre que dans la précédente; les convulfions n'ayant enlevé qu'$\frac{1}{34}$, & la petite verole feulement $\frac{1}{55}$ de la totalité des naiffances. Dans les cinq ans de la dernière période la petite verole n'a enlevé que 568 enfans; elle en a enlevé presque deux fois autant dans les cinq ans de la période précédente. Sept fois ce nombre ou 3976 a donc été probablement le nombre des malades de la petite verole dans la derniere période; il n'en feroit mort probablement que 12, en raifon de 3 par 1000, s'ils avoient été inoculés; l'Inoculation auroit fauué la vie à 556 enfans dans l'él'éſpace de cinq ans. J'ai le plaiſir de pouvoir joindre ici un apperçu de l'état de l'Inoculation telle qu'elle ſe pratique dans l'inſtitut Impérial établi à St. Pétersbourg l'an 1768 par la bienfaiſance & l'humanité de notre tres-gracieuſe Souveraine; je le dois à la complaiſance du Directeur actuel de la maiſon, Mr. le Conſeiller de College Holledy, & de Mr. l'Aſſeſſeur Mineman qui y eſt attaché depuis long-tems, & qui ont bien voulu me communiquer un extrait des regiſtres depuis 1780.

Nombres des enfans qui ont été inoculés dans la maiſon Impériale d'inoculation à St. Pétersbourg depuis 1780 *jusqu'en* 1790.

l'an.	Mâles	Fémelles	Sommes	Morts.
1780	62	41	103	
1781	71	90	161	
1782	57	51	108	
1783	102	83	185	
1784	59	53	112	1
1785	109	64	173	1
1786	64	75	139	
1787	86	63	149	1
1788	60	75	135	
1789	132	58	190	
1790	58	57	115	1
Total	860	710	1570	4

Je tire de cette table les concluſions ſuivantes:

a) Il n'eſt mort des enfans inoculés qu'en raiſon de 25 de 10000; c'eſt moins encore qu'en raiſon de 3 par 1000. Or on peut bien ſuppoſer, que, l'un compen-

 ſant

ſant l'autre, il meurt des enfans attaqués de la petite verole naturelle en raiſon de 1428 à 10000; la mortalité de la petite verole naturelle eſt donc à celle de la petite verole inoculée comme 1428 à 25, ou bien comme 57 à 1.

b) Il y a annuellement 143 enfans inoculés dans l'établiſſement; calcul moyen de 11 ans. Or dans ce même intervalle de tems il y eut à St. Pétersbourg annuellement 6049 naiſſances. Il n'y eut donc que le 42^{me} enfant de toutes les naiſſances qu'on ait fait jouir de cet établiſſement publique; quoique nos tables demontrent, que dans le même intervalle de tems la petite verole naturelle a enlevé 146 enfans par an, & que ce fut conſequemment le 41^{me} enfant de toutes les naiſſances qui dut être la victime de cette maladie.

c) L'âge des inoculés a été pour le moins, & rarement, de 2 ans & demi; pour l'ordinaire entre 3 & 10 ans; il y eut cependant auſſi d'inoculés neuf perſonnes à l'âge de 16, deux à celui de 25, & une à l'âge de 46 ans.

3.) Il y eut dans la derniere période annuellement 23 perſonnes, 18 hommes & 5 femmes, qui ont peri par différens accidens.

4.) Le nombre moyen annuel des corps trouvés morts a été de 21 perſonnes, 18 hommes & 3 femmes. Il a donc été dans cette période de la moitie moindre que dans la précedente.

5.) La

5.) La publicité à l'égard des nombres annuels des morts arrivées dans les maisons des Enfans trouvés, dans les Hospitaux & les Prisons, interesse trop l'humanité pour ne pas la desirer; aussi l'Ordre Impérial en fait, je le repète, une expresse mention.

6.) La révolution pèriodique de la mortalité relativement aux saisons & aux mois de l'année, a été dans la dernière période sensiblement la même que dans les périodes précédentes. Depuis le mois d'Octobre, au quel la mortalité a été la plus petite, elle s'est augmentée de mois en mois jusqu'à celui de Mai, où elle a été la plus forte; après quoi elle s'est diminuée peu à peu jusqu'à celui d'Octobre.

De 1000 morts dans la dernière période, il mourut

374	au Printems	Le nombre des morts au Printems
250	en Été	& en Été surpasse celui des morts en
181	en Automne	Automne & en hiver en raison de
195	en Hiver.	3 à 2.

DE MOTV SINGVLARI PROGRESSIVO ET ROTATORIO CORPORIS CYLINDRICI, FILO FLEXILI, EX CVIVS ALTERO TERMINO SVSPENDITVR, CIRCVMDATI.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. die 4 *Apr.* 1793.

§. 1.

Tab. V. Fig. 1. Corpus, in cuius motum hic ſum inquiſiturus, conſtat ex duobus diſcis circularibus PQ et RS, inter ſe parallelis, eiusdem materiae, magnitudinis & figurae, parum a ſe inuicem diſtantibus, et cylindrulo *a b c d* ita iunctis, vt eorum axes cum axe cylindruli in eandem lineam rectam incidant. Cylindro filum flexile circumuoluitur, cuius alter terminus in ſuperficie cylindri figitur, ita vt, dum alter terminus ex O ſuſpenſus tenetur, corpus proprio ſuo pondere, circa centrum gyrando, in eodem plano verticali deſcendere libere filumque ſeſe euoluere queat.

§. 2. Ex hac deſcriptione facile quisque intelligitur, ſermonem hic eſſe de crepundiis illis, a Gallis emigratis, vt fama fert, Aquisgrani primum inuentis, indeque breui temporis ſpatio per maximam Europae partem propagatis et anno proxime

xime praeterlapſo etiam inter luſus iuuentutis Petropolitanae per aliquod tempus receptis. Motus igitur huius corporis phaenomena et leges ex principiis mechanicis breviter determinabo.

§. 3. Quanquam autem inueſtigationem huius motus a caſu illo ſimpliciſſimo inchoabo, quem initio deſcripſi; tamen praecipuum huius disquiſitionis negotium verſabitur in ſolutione problematis multo difficilioris, quo corpus non ſoli ſuo ponderi relinquitur, ſed data quadam vi, datoque ſub angulo, retento altero fili termino, proiicitur, et, gyrando circa axem, in plano verticali, diſcis parallelo, per lineam curvam deſcendit. Pro hoc enim motu numerum reuolutionum corporis, longitudinem portionis fili euolutae, tenſionem fili, celeritatem progreſſiuam & gyratoriam, nec non curuae a puncto contactus deſcriptae coordinatas pro quauis elongatione a recta verticali, determinabo.

§. 4. Sit radius cylindri $CX = a$, radius diſci vtriusque $CB = b$, longitudo portionis fili cylindro circumuolutae $= f$, punctum contactus initio motus ſit in A. Maſſula ſeu pondus corporis vocetur M et momentum inertiae, reſpectu axis gyrationis, Mkk. Iam poſt tempus t minutorum ſecundorum ab initio motus elapſum peruenerit corpus in X, ita vt portio fili euoluta ſit $AX = x$, et poſito angulo $XCx = \Phi$, erit arcus Xx, cui portio fili XA applicata fuerat, $= a\Phi = x$, ita vt ſit $\partial x = a\partial\Phi$ et $\partial\partial\Phi = \frac{\partial\partial x}{a}$. His notatis principia mechanica praebent has duas aequationes: Tab. V. Fig. 2.

I. $\frac{M\partial\partial x}{2g\partial t^2} = M - T,$

II. $\frac{Mkk\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = bT,$

denotante T tenſionem fili et g altitudinem, per quam corpus quodlibet primo minuto ſecundo libere delabitur.

§. 5. Ex harum aequationum fecunda elicitur valor tenfionis

$$T = \frac{M k k \partial \partial \Phi}{2 g b \partial t^2} = \frac{M k k \partial \partial x}{2 g a b \partial t^2},$$

qui in prima fubftitutus dat:

$$\frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2} = \frac{1}{1 + \frac{k k}{b b}} = \frac{1}{1 + n},$$

pofito breuitatis gratia $n = \frac{k k}{a b}$. Hinc integrando deducitur:

Celeritas progreffiua $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{2 g t}{1 + n}$;

Celeritas gyratoria $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{2 g t}{a (1 + n)}$;

hincque denuo integrando prodit:

Spatium percurfum $x = \frac{g t t}{1 + n}$;

Angulus gyrationis $\Phi = \frac{g t t}{a (1 + n)}$.

Hic enim, in neutra integratione, conftantis adiectione opus eft, quoniam initio motus, vbi $t = 0$, tam celeritas quam fpatium fponte euanefcunt, vti natura rei poftulat.

§. 6. Ex hactenus allatis intelligitur, in puncto X fore tempus defcenfus $t = \sqrt{\frac{(1 + n) x}{g}}$, celeritatem vero progreffiuam $\frac{\partial x}{\partial t} = 2 \sqrt{\frac{g x}{1 + n}}$, vnde pro puncto infimo, ad quod corpus gyrando defcendere poteft, erit tempus defcenfus $t = \sqrt{\frac{f (1 + n)}{g}}$ et celeritas in hoc puncto acquifita $\frac{\partial x}{\partial t} = 2 \sqrt{\frac{f g}{1 + n}}$. Quod tenfionem fili attinet, ea vbique erit eadem, fcilicet

$$T = \frac{M k k}{a b (1 + n)}.$$

§. 7. Cum igitur corpus in puncto infimo celeritatem acquifiuerit gyratoriam feu angularem $= \frac{2}{a} \sqrt{\frac{g x}{1 + n}}$; id hac celeritate motum fuum gyratorium profequetur, quod, quoniam totum iam filum eft euolutum, in contrarium fenfum, gravitatis

vitatis directioni oppositum, fiat necesse est. Corpus igitur in eundem sensum quidem gyrare perget, filum autem ex altera parte iterum cylindro sese circumplicabit et corpus ascendet secundum sequentes leges motus.

§. 8. Ex puncto infimo F corpus rursus ascendere incipiet celeritate acquisita $= 2\sqrt{\frac{fg}{1+n}}$. Post tempus t ab ascensus initio elapsum peruenerit corpus in X, existente nunc spatio $FX = x$ et angulo $XCx = \Phi$, eritque arcus $XGx = a\Phi = x$, et principium accelerationis dat: Tab. V. Fig. 3.

I. $\frac{M\partial\partial x}{2g\partial t^2} = T - M,$

II. $\frac{Mkk\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = -bT.$

Hinc, ob $\partial\partial\Phi = \frac{\partial\partial x}{a}$, prodit aequatio:

$$\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = \frac{-1}{1+n},$$

vnde deducitur celeritas progressiua:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = C - \frac{2gt}{1+n},$$

quae cum in puncto F, vbi $t = 0$, debeat esse $2\sqrt{\frac{fg}{1+n}}$, inde concluditur $C = 2\sqrt{\frac{fg}{1+n}}$, ita vt, substituto hoc valore, sit celeritas

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 2\sqrt{\frac{fg}{1+n}} - \frac{2gt}{1+n},$$

et spatium percursum

$$x = 2t\sqrt{\frac{fg}{1+n}} - \frac{gtt}{1+n},$$

vbi constantis additione non est opus, quoniam posito $t = 0$, pro ascensus initio fit $x = 0$, vti requiritur.

§. 9. Quaeramus tempus t, quo corpus ab F vsque ad X peruenit, eritque

$$t = \sqrt{\frac{f(1+n)}{g}} - \sqrt{\frac{(f-x)(1+n)}{g}}.$$

 Hoc

Hoc porro valore loco t introducto erit celeritas in puncto X

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 2 \sqrt{\frac{g(f-x)}{1+n}},$$

quae igitur casu $x = 0$ est $2 \sqrt{\frac{fg}{1+n}}$, vti requiritur, posito vero $x = f$ euanescit. Corpus igitur eodem temporis spatio, quo descensum absoluerat, in pristinum statum reuertitur, & in quolibet puncto ascendendo eandem habet velocitatem, quam descendendo in eodem puncto habuit, eodemque temporis interuallo, a momento ascensus aequaliter remoto, tam ascendendo quam descendendo in eodem puncto rectae verticalis deprehenditur.

§. 10. Quo rem exemplo illustremus, sumamus $a = 2$ lin. $b = 21$ lin. $f = 4$ eiusmodi pedum, quorum 16 faciunt altitudinem, ex qua grave primo minuto secundo delabitur, ita vt $g = 16$ ped. Hinc ob $kk = \frac{1}{2} bb$ et $n = \frac{kk}{ab} = \frac{21}{4}$, erit $n + 1 = \frac{25}{4}$. Motum huius corporis sequens tabula exhibet.

Temp.	Celer.	Dist. A X	Num. rev.
0, 25	1, 28	0, 16	1, 83
0, 50	2, 56	0, 64	7, 33
0, 75	3, 84	1, 44	16, 39
1, 00	5, 12	2, 56	29, 33
1, 25	6, 40	4, 00	45, 84
1, 50	5, 12	2, 56	62, 34
1, 75	3, 84	1, 44	75, 17
2, 00	2, 56	0, 64	84, 34
2, 25	1, 28	0, 16	89, 84
2, 50	0, 00	0, 00	91, 68

§. 11. Circa hanc tabulam sequentia sunt notanda: Prima columna exhibet tempus ab initio motus elapsum in minu-

minutis ſecundis expreſſum. Secunda columna oſtendit celeritatem progreſſiuam diſci, expreſſam per ſpatium, quod corpus eadem celeritate vno minuto ſecundo percurreret, in pedibus quorum 16 faciunt altitudinem, ex qua grave primo minuto ſecundo delabitur. Tertia columna continet diſtantiam corporis a loco eius initiali, in iisdem pedibus expreſſam. Quarta denique columna oſtendit quot reuolutiones corpus interea perfecerit. Abſoluta hac prima periodo corpus motum ſuum ſecundum easdem leges proſequetur, hicque motus perpetuo durabit, niſi frictio, aliaque impedimenta phyſica eum ita moderent, vt tandem penitus extinguatur.

§. 12. Proiiciatur nunc corpus ſecundum directionem AD, ad lineam verticalem AB, per initium motus A tranſeuntem, inclinatam ſub angulo $BAD = \alpha$. Ponamus initio punctum cylindruli x fuiſſe in A, elapſo autem tempore t min. ſec. ſeſe euoluiſſe portionem fili $AX = a\Phi$, exiſtente angulo gibbo $XCx = \Phi$, ſiue arcu $XRx = a\Phi$. Sit vis initialis qua corpus proiicitur $= V$, angulus vero $BAX = \zeta$, vocenturque coordinatae $AP = x$, $PX = y$, et ſeruatis reliquis denominationibus ſupra adhibitis, ſi vires ſecundum directiones coordinatarum reſoluamus, principia motus ſuppeditant ſequentes tres aequationes fundamentales: Tab. V. Fig. 4.

$$\text{I.}\quad \frac{\partial\partial x}{2g\,\partial t^2} = \frac{V\,cof.\,\alpha + M - T\,cof.\,\zeta}{M};$$

$$\text{II.}\quad \frac{\partial\partial y}{2g\,\partial t^2} = \frac{V\,fin.\,\alpha - T\,fin.\,\zeta}{M};$$

$$\text{III.}\quad \frac{\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = \frac{bT}{Mkk};$$

quibus tota problematis ſolutio comprehenditur.

§. 13. Sumantur nunc differentialia tam prima quam ſecunda coordinatarum:

 $x =$

$$x = a\,\Phi \operatorname{cof.} \zeta,$$
$$y = a\,\Phi \operatorname{fin.} \zeta,$$

eritque

$$\partial x = a\,\partial\Phi \operatorname{cof.}\zeta - a\,\Phi\,\partial\zeta \operatorname{fin.}\zeta,$$
$$\partial y = a\,\partial\Phi \operatorname{fin.}\zeta + a\,\Phi\,\partial\zeta \operatorname{cof.}\zeta,$$
$$\partial\partial x = a\,\partial\partial\Phi \operatorname{cof.}\zeta - 2\,a\,\partial\Phi\,\partial\zeta \operatorname{fin.}\zeta - a\,\Phi\,\partial\zeta^2 \operatorname{cof.}\zeta - a\,\Phi\,\partial\partial\zeta \operatorname{fin.}\zeta,$$
$$\partial\partial y = a\,\partial\partial\Phi \operatorname{fin.}\zeta + 2\,a\,\partial\Phi\,\partial\zeta \operatorname{cof.}\zeta - a\,\Phi\,\partial\zeta^2 \operatorname{fin.}\zeta + a\,\Phi\,\partial\partial\zeta \operatorname{cof.}\zeta.$$

Fiat nunc haec combinatio: II. cof. ζ — I. fin. ζ; tum vero I. cof. ζ + II. fin. ζ, vnde emergent fequentes duae aequationes:

$$\text{IV.}\quad \frac{\partial\partial y \operatorname{cof.}\zeta - \partial\partial x \operatorname{fin.}\zeta}{2\,g\,\partial t^2} = \frac{V \operatorname{fin.}(\alpha - \zeta) - M \operatorname{fin.}\zeta}{M},$$
$$\text{V.}\quad \frac{\partial\partial x \operatorname{cof.}\zeta + \partial\partial y \operatorname{fin.}\zeta}{2\,g\,\partial t^2} = \frac{V \operatorname{cof.}(\alpha - \zeta) + M \operatorname{cof.}\zeta - T}{M}.$$

Cum autem fit:

$$\partial\partial y \operatorname{cof.}\zeta - \partial\partial x \operatorname{fin.}\zeta = 2\,a\,\partial\Phi\,\partial\zeta + a\,\Phi\,\partial\partial\zeta,$$
$$\partial\partial x \operatorname{cof.}\zeta + \partial\partial y \operatorname{fin.}\zeta = a\,\partial\partial\Phi - a\,\Phi\,\partial\zeta^2,$$

poftremae binae aequationes, his valoribus fubftitutis, fequentem induent formam:

$$\text{IV.}\quad \frac{2\,a\,\partial\Phi\,\partial\zeta + a\,\Phi\,\partial\partial\zeta}{2\,g\,\partial t^2} = \frac{V \operatorname{fin.}(\alpha - \zeta) - M \operatorname{fin.}\zeta}{M},$$
$$\text{V.}\quad \frac{a\,\partial\partial\Phi - a\,\Phi\,\partial\zeta^2}{2\,g\,\partial t^2} = \frac{V \operatorname{cof.}(\alpha - \zeta) + M \operatorname{cof.}\zeta - T}{M}.$$

Ex III. autem colligitur $\frac{T}{M} = \frac{k\,k\,\partial\partial\Phi}{2\,g\,b\,\partial t^2}$, quo valore in V fubftituto, fi breuitatis gratia ponatur $a + \frac{k\,k}{b} = h$, ifta poftrema aequatio ita fe habebit:

$$\text{V.}\quad \frac{h\,\partial\partial\Phi - a\,\Phi\,\partial\zeta^2}{2\,g\,\partial t^2} = \frac{V \operatorname{cof.}(\alpha - \zeta) + M \operatorname{cof.}\zeta}{M}.$$

§. 14.

§. 14. Totum iam negotium eo redit, vt ex binis poſtremis aequationibus relatio inter angulos ζ et Φ eruatur. Hunc in finem notetur, quartam veram eſſe, quicunque valor angulo ζ tribuatur. Scribatur ergo $\zeta - 90^\circ$ loco ζ, eaque abibit in hanc:

$$\text{IV. } \frac{2 a \partial \Phi \partial \zeta + a \Phi \partial \partial \zeta}{2 g \partial t^2} = \frac{V \cos. (\alpha - \zeta) + M \cos. \zeta}{M},$$

qua cum V comparata ſequens emergit aequatio differentialis ſecundi gradus binas variabiles Φ et ζ complectens:

$$b \partial \partial \Phi - 2 a \partial \Phi \partial \zeta - a \Phi \partial \zeta^2 - a \Phi \partial \partial \zeta = 0,$$

quae aequatio ſi per b diuidatur, elementum vero $\partial \zeta$ vt conſtans ſpectetur, ita ſe habebit:

$$\partial \partial \Phi - \tfrac{2 a}{b} \partial \Phi \partial \zeta - \tfrac{b}{a} \Phi \partial \zeta^2 = 0,$$

cuius integrale completum eſt

$$\Phi = A e^{\lambda \zeta} + B e^{\mu \zeta},$$

exiſtente $\lambda = \frac{a}{b} + m$, $\mu = \frac{a}{b} - m$ et $m = \sqrt{(\frac{a a}{b b} + \frac{a}{b})}$.

§. 15. Ad determinandas binas conſtantes arbitrarias A et B, per duplicem integrationem ingreſſas, conſideretur primo ſtatus initialis, vbi $\zeta = \alpha$ et $\Phi = 0$, eritque ex hoc caſu $B = - A e^{2 m \alpha}$, hincque

$$\Phi = A (e^{\lambda \zeta} - e^{2 m \alpha + \mu \zeta}).$$

In fine autem motus, vbi totum filum, cuius longitudinem ponamus $= l$, iam eſt euolutum, debet eſſe $\Phi = \frac{l}{a}$. Sit pro hoc loco angulus $\zeta = \beta$, eritque

$$\tfrac{l}{a} = A (e^{\lambda \beta} - e^{2 m \alpha + \mu \beta}),$$

idcoideoque

$$A = \frac{l}{a\,(e^{\lambda\beta} - e^{2m\alpha + \mu\beta})},$$

quem valorem notasse sufficiet, quandoquidem eius loco litteram A in calculo retinebimus.

§. 16. Inuenta relatione inter angulos ζ et Φ, omnia per solam elongationem fili a linea verticali exprimere licebit. Cum enim sit

$$\partial\Phi = A\,(\lambda e^{\lambda\zeta} - \mu e^{2m\alpha + \mu\zeta})\,\partial\zeta,$$

$$\partial\partial\Phi = A\,(\lambda^2 e^{\lambda\zeta} - \mu^2 e^{2m\alpha + \mu\zeta})\,\partial\zeta^2,$$

tum vero ex quinta aequatione:

$$\partial t^2 = \frac{M b}{2 g} \cdot \frac{\partial\partial\Phi - \frac{a}{b}\Phi\,\partial\zeta^2}{V \text{ cos.}\,(\alpha - \zeta) + M \text{ cos.}\,\zeta},$$

substitutis valoribus pro Φ et $\partial\partial\Phi$ erit

$$\partial t^2 = \frac{M A a\,\partial\zeta^2\,(\lambda e^{\lambda\zeta} - \mu e^{2m\alpha + \mu\zeta})}{g\,[V \text{ cos.}\,(\alpha - \zeta) + M \text{ cos.}\,\zeta]},$$

ideoque tempus

$$t = \frac{M A a}{g}\int\partial\zeta\sqrt{\frac{\lambda e^{\lambda\zeta} - \mu e^{2m\alpha + \mu\zeta}}{V \text{ cos.}\,(\alpha - \zeta) + M \text{ cos.}\,\zeta}},$$

quod autem, ob defectum Analyseos, finite exprimere non licet.

§. 17. Quod reliqua momenta attinet, ea sequenti modo per solam variabilem ζ exprimentur:

Coor-

Coordinatae curuae:

$$x = a\,A\,(e^{\lambda\zeta} - e^{2ma+\mu\zeta})\,\text{cof.}\,\zeta;$$
$$y = a\,A\,(e^{\lambda\zeta} - e^{2ma+\mu\zeta})\,\text{fin.}\,\zeta;$$

Celeritates progreffiuae:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{gaA[V\text{cof.}(\alpha-\zeta)+M\text{cof.}\zeta][(\lambda\text{cof.}\zeta-\text{fin.}\zeta)e^{\lambda\zeta}-(\mu\,\text{cof.}\zeta-\text{fin.}\zeta)e^{2m\alpha+\mu\zeta}]}{M\,(\lambda\,e^{\lambda\zeta} - \mu\,e^{2m\alpha+\mu\zeta})}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{\frac{gaA[V\text{cof.}(\alpha-\zeta)+M\text{cof.}\zeta][(\lambda\text{fin.}\zeta+\text{cof.}\zeta)e^{\lambda\zeta}-(\mu\text{fin.}\zeta+\text{cof.}\zeta)e^{2m\alpha+\mu\zeta}]}{M\,(\lambda\,e^{\lambda\zeta} - \mu\,e^{2m\alpha+\mu\zeta})}}$$

Celeritas gyratoria:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \sqrt{\frac{g\,A\,[V\,\text{cof.}(\alpha-\zeta) + M\,\text{cof.}\zeta]\,(\lambda e^{\lambda\zeta}-\mu e^{2m\alpha+\mu\zeta})}{M\,a}}.$$

Tenfio fili:

$$T = \frac{k\,k\,[V\,\text{cof.}(\alpha-\zeta) + M\,\text{cof.}\zeta]\,(\lambda^2 e^{\lambda\zeta} - \mu^2 e^{2m\alpha+\mu\zeta})}{2\,a\,b\,(\lambda\,e^{\lambda\zeta} - \mu\,e^{2m\alpha+\mu\zeta})}.$$

§. 18. Facile intelligitur hanc folutionem generalem ad cafum praecedentem, §. §. 4 — 7. tractatum, vbi corpus foli fuo ponderi relinquebatur, neutiquam applicari poffe, quoniam fola variabilis ζ, qua hic omnia momenta exprimuntur, pro illo cafu euanefcit. Solutio igitur cafus fpecialis memorati repetenda foret a ternis aequationibus fundamentalibus §. 12. exhibitis, quae pofito $\zeta = 0$, $\alpha = 0$, $V = 0$, abeunt in eas ipfas, quas §. 4. protulimus. Interim tamen hoc incommodum ceffat refpectu tenfionis T, quae cum fupra §. 6. inuenta fit $T = \frac{Mkk}{ab(1+n)}$, ideoque conftans, eundem valorem fortiri debet, fi in expreffione generali §. 17.

 tradi-

tradita ponatur $\alpha = 0$, $\zeta = 0$, $V = 0$, quo facto fit:

$$T = \frac{kk M(\lambda^2 - \mu^2)}{2ab(\lambda - \mu)} = \frac{Mkk(\lambda + \mu)}{2ab}.$$

Eſt vero

$$\lambda + \mu = \frac{2a}{b} = \frac{2ab}{ab + kk} = \frac{2}{1 + n},$$

ideoque

$$T = \frac{Mkk}{ab(1 + n)},$$

vt ſupra, qui conſenſus veritatem noſtrae ſolutionis generalis egregie confirmat.

PHY-

PHYSICA.

OBSERVATIONVM
DE
TELA DICTA CELLVLOSA
CONTINVATIO SECVNDA:
CELLVLOSA MVSCVLORVM.

Auctore
C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. die 17 *Mart.* 1791.

Si ſectio fiat cutis, digitum vnum aut duos transuerſos lata, ſubſtantiae deinde ſubcutaneae et adipis, porro celluloſae, quae adipem et muſculos intercedit, et muſculorum tandem ipſorum ad oſſa vsque, *a*) ſicuti commode quidem ex brachio id fieri poteſt, quam partem et imprimis tum in prioribus, tum in his, quae ſequuntur, experimentis adhibui; cutis cum ſubſtantia ſubcutanea *b*) et adipe *c*), quas hactenus deſcripſi, ſatis firmiter inter ſe cohaerent; hae partes vero ſimul ſumtae cum muſculis *d*), ope celluloſae nonniſi ea ratione connexae ſunt, vt horſum iſtorſum, quocunque lubuerit,

a) Tab. V. fig. 1.
b) Tab. cit. fig. 1. a. b. c. c.
c) Tab. cit. fig. 1. d. e.
d) Tab. cit. fig. 1. f. f. f.

rit, illae fuper mufculos illaefa cellulofa, illaefoque nexu promoueri queant. Et recta abftrahi quoque a mufculis ad digitorum duorum transuerforum diftantiam vsque, et vltro, partes eaedem poffunt, cellulofa nexuque pariter illaefis. Verum dum hoc fit, lata lamina *a*), quantum cutis cum adipe abftracta a mufculis diftat, admodum tenuis, perpendiculari pofitione ab adipe ad mufculos tranfit, ex cellulofa, qua adeps cum mufculis coniungitur, formata. Haec, vt omnis cellulofa, fi microfcopio perluftratur, continua et aequalis fubftantia apparet. Neque lineolas illas, aut quidquam diftincti, in ea inueni, neque vmbra pororum, nedum cellarum, aut laminarum, apparuit.

Nimirum cellulofa fubftantia, qua adeps cum mufculis fubiectis conglutinatur, quaeque eadem fimul mufculos inueftit, ftratum fibi remiffa alicuius craffitiei, quam lineam tamen non puto fuperare, efficit. Haec fubftantia femifluida et ductilis a lateribus ad mediam partem inter adipem et mufculos, dum illa cum cute ab his abducitur, fe retrahit, in eaque tenuem illam, quam dixi, laminam *b*), dum extenditur, producit, eo quidem latiorem, quo magis extenditur. Non omnis tamen omnino fubftantia cellulofa a mufculis vtrinque, dum verfus mediam partem fe retrahit, abducitur; quin aliqua eius portio tantum ad laminam efficiendam concurrit, reliqua illita mufculis manet, quam vt fibrae mufculi diftinctius appareant, cultro feorfim a mufculis foluere et auferre oportet.

Haud rarum eft videre fimiles laminas latas inter mufculos aliasque partes, copiofiori cellulofa coniunctas. Si duo mufcu-

a) Tab. cit. fig. 1. h.
b) Fig. 1. h.

musculi, sibi mutuo incumbentes, communi cellulosa obducti, eademque simul inter se conglutinati, non solito modo, veluti ad praeparationem anatomicam opus est, ablata cultro cellulosa separantur, sed digitis simpliciter prehensi a se inuicem diducuntur; in similem laminam latam ea cellulosae portio, qua musculi cohaerebant, extenditur. Maxime in regione lumbari abdominis, tum et in iliaca inter peritoneum et partes, retro hoc sitas, renes, psoas musculos iliacosque internos laminae eiusmodi cellulosae apparent, dum peritoneum a dictis partibus subiectis abducitur. Si partes a se mutuo diducendae vna cum conglutinante cellulosa aliis partibus et profundiori cellulosae incumbunt, vt aer vtrinque liber ad laminam accedere non possit; hic tamen alicubi inter cellulosam subiectam et laminam irrumpere eamque eleuare et magnas sub eadem bullas aereas producere solet. Neque etiam aliter hoc fieri potest; siquidem ipso pondere suo aer externus laminam productam, nisi alios aditus inueniat perforabit, inque spatia, diductione partium sub lamina suborta, irrumpet, bullasque producet. Caeterum ad trium quatuorue digitorum transuersorum latitudinem eiusmodi laminae saepius extendi possunt, priusquam rumpantur.

Mirum est, qui credi potuit, has latas magnasque laminas, vti inter partes distractas apparent, natura formatas, antequam partes illae a se mutuo distraherentur, cumque contiguae sibi accumberent, iam exstitisse; cum locus desit, vbi exitant. Spatiaque illa magna et bullas aereas exstitisse, cum partes, quas oporteret continere spatia et bullas contiguae sibi mutuo accumbant, cumque strepitus irrumpentis aeris, dum peritoneum v. c. a partibus, quas tegit, abducitur, dumque spatia ergo ac bullae nostra arte procreantur, audiri possit. Nam contiguum omnino peritoneum in regionibus illis partibus

bus retrositis accumbit, neque nisi tenue stratum substantiae, cellulosae dictae, semifluidae tenacis et continuae, qua partibus peritoneum adglutinatur, peritoneo et partibus interest. Vbi musculi vero a se inuicem distracti laminam fingunt, tenuis, vix lineam dimidiam lata stria inter eos, antequam diducuntur, apparet, quae sectionem scilicet, et crassitiem eius strati substantiae denotat, qua musculi conglutinantur, continuae et vniformis, quae ergo versus partem mediam, musculis diductis, retracta in latam illam laminam extenditur.

Si operae pretium est, notare particulas illas diuersas, quae passim reperiuntur in cellulosa, dum variis modis tractatur, quae minime quidem elementa sunt eius, quemadmodum creditum est, neque vllo modo illaesa partium structura et ordine in ea existunt, at aliquam tamen causam sui in natura cellulosae habere videntur; sequentes sunt, quas hactenus obseruauimus: Longe frequentissima fila occurrunt, quae omnem fere solitam praeparationem anatomicam partium corporis comitantur. Siue musculos enim sine neruos sectione detexeris, siue arterias, aut venas, aut membranas; vel euoluendae ex cellulosa hae partes vel separandae ab aliis erunt, quibuscum cellulosa substantia conglutinantur. Vtrumque hoc, siquidem illaesas partes volueris, nonnisi ita fieri potest, vt vel partes prius a se mutuo, vel cellulosa a parte eruenda, distrahantur, tum cultro cellulosa soluatur. In fila ergo antequam dissecatur, omnis cellulosa extenditur. Haec opera ergo anatomici efficiuntur; pendentque simul a natura cellulosae, quae semifluida et tenaciuscula substantia ni esset, in fila extendi non posset. Alia species artefactae cellulosae structurae vesiculae sunt, vel bullae potius aereae, quae vel flatu, vel aere sponte irrumpente, in cellulosa producuntur. Hae minus frequenter quidem quam fila, attamen haud raro quoque

que apparent. Vbi profundior cellulofa inter partes diftrahendas haeret, dumque in longiora fila aut laminas latiores cellulofa extenditur, veluti dum mufculi duo fecundum longitudinem a fe inuicem difcerpuntur; fieri vix poteft, quin et ea cellulofae portio, quae filis laminisue productis proxime fubiecta eft, quaeque ipfis his filis et laminis adhucdum tegitur, iam aliquantum extendatur, partesque, quas connectit, a fe mutuo diducantur; proinde fpatia inter partes diductas efficiantur, laminis filisque fublimioribus tecta, in quae ergo aer externus, premens pondere fuo, laminasque fublimiores perforans, penetret; bullasque in profundiori illa cellulofa producat. Haec veficularis cellulofae ftructura pariter aut cafu, aut data opera ab anatomico, efficitur. Ea tamen fingularis et propria cellulofae natura eft, vt, vel fponte irrumpente in eam aere, vel impulfo, in bullas efflari poffit. Nam nifi femifluida cellulofa fimulque tenaciuscula effet; neque impelli in eam aer poffet, neque cellulofa cedendo aeris expanfioni, eumque continendo tamen in tenues pelliculas ab aere impulfo fe extendi pateretur. Morbis etiam veficularis cellulofae ftructura effici poteft. Et ipfa naturalis adipis fabrica eandem imitatur; cum veficulae eius fimili prorfus modo impulfo in cellulofam fluido oleofo, ac bullae aere in eandem impulfo producantur. Tertiam denique fpeciem magnae lataeque illae laminae exhibent, quae vel fimplices funt, vel bullas maiores etiam continent, quemadmodum in praecedentibus explicui. Veram cellulofam ftructuram, quemadmodum fcilicet nobis eam imaginamur, quae cellulis minoribus lamellis varie compofitis inclufis, conftaret, non memini, fiue arte fiue natura productas, me unquam vidiffe. Tres ergo fpecies tantum ftructurae artificialis cellulofae effe videntur, in quas haec fubftantia fcilicet, dum varie tractatur, fua natura effingi folet:

 filata,

filata, *vesicularis*, et quae laminis maioribus constat, quam in ipsis his paginis exposui.

Strata diuersarum substantiarum, quae integumenta communia efficerent, quatuor in praecedenti de tela cellulosa dissertatione numerata sunt praeter epidermidem et cellulosam, quae musculos tegit: cutis ipsa nimirum, substantia subcutanea, adeps merus et tunica adiposa *a*). Haec posterior ergo, quam in dissertatione praecedente non satis explicui, si microscopio perlustratur, *b*) larga constat cellulosa, siue glutinosa substantia *c*), quam vix vllam in mero adipe inuenias, nisi pelliculas, quibus vesiculae constant, ipsas putes, quae adeo arcte compressae per totum adipis stratum existunt, vt nullum interstitium inter eas distingui possit. Striatim contra adipis vesiculae *d*) per cellulosam tunicae adiposae distributae sunt, vt larga satis interstitia inter tractus adipis inueniantur, quae clara maximamque partem pura cellulosa constant; cum tractus illi adipis contra vesiculis immediate, non glebis, aut vesicularum aggeribus, velut merus adeps, compositae sint. Glutinosa substantia eiusdem fere indolis est, cuius ea est, quae musculos eorumque fibras connectit, quam in superioribus descripsi. Clara scilicet pellucida et semifluida substantia est, quae in fila *e*) facile extendi possit. Sedes tamen variae dantur in tunica adiposa, a tractibus adipis pariter et a pura cellulosa diuersae. In iis scilicet globuli dispersi *f*) apparent soli-

---

a) Tab. cit. fig. 1. c.
b) Tab. cit. fig. 2.
c) Tab. cit. fig. 2. b. b. b.
d) Tab. cit. fig. 2. a. a.
e) Tab. cit. fig. 2. c. c.
f) Tab. cit. fig. 2. d. d.

ſolitarii, veſiculis adipis minores et albi. Non dubito, quin verae veſiculae ſint hi globuli, quamuis propria experimenta cum iis inſtituere ob paruitatem eorum non licuit. Analogia adipis, ſubſtantiaeque ſubcutaneae, ipſa ſedes tandem inter tractus adipis, rem demonſtrare fere videntur.

Tunica tandem adipoſa in muſculorum celluloſam ipſam ea ratione abit, vt ſenſim imminuta copia adipis pura denique glutinoſa ſubſtantia euadat, eo quidem purior clariorque, quo profundius in fabricam muſculorum penetrat. Haec muſculos ſingulos tegit, inter ſingulos continuata a tunica adipoſa deſcendit, totosque tanquam propriis vaginis ſuis obducit et inuoluit, eaque ratione alterum quemuis muſculum ab altero ſibi vicino diſtinguit. Ab his vaginis muſculorum earumque interna, qua muſculum ſpectant, ſuperficie inter ſingulos maiores, ſi quos muſculus habet, faſciculos eius lamina in muſculum ipſum deſcendit, faſciculumque quemuis ab altero quouis ſibi vicino diſtinguit, et continuata totum, quaelibet ſuum, faſciculum circumdat, eaque ratione vaginam porro cuiuis faſciculo propriam efficit, ſimili prorſus modo, atque de communi totius muſculi vagina dictum eſt. Denique a qualibet faſciculi vagina lamina porro, tenerior tamen iis, quibus faſciculi diſtinguuntur, inter fibras ſingulas, quae coniunctae faſciculum efficiunt, deſcendit, fibramque a fibra diſtinguit, et quamlibet continuata fibram ambit, vaginamque cuilibet propriam, faſciculorum vaginis teneriorem, producit. Vt quaeuis fibra propria ſua, hae, quae faſciculum ſimul ſumtae efficiunt, communi porro, et quae muſculum denique faſciculatim compoſitae producunt, omnium porro communi vagina ſint indutae, ea ratione quidem, vt quaeuis cuiusuis vaginae pars, qua duae vicinae fibrae, aut qua faſciculi duo, aut duo muſculi, ſibi mutuo vicini, a ſe inuicem diſtinguuntur, paries ſit communis, aut ſeptum commune, fibrarum earum, aut faſciculorum, muſculorumue, ſibi mutuo vicinorum. Si fibrae ergo omnes illaeſis vaginis extrahi ex iis poſſent; ſectio earum alueolos potius quam diſtinctas ſeparatasque vaginas repraeſentaret.

Has vaginas caeterum muſculorum fibrarumque, pariter ac tunicas celluloſas arteriarum, venarum, inteſtinorum, ventriculi, partiumque aliarum, partes eſſe organicas, ex celluloſa ſubſtantia formatas, facile patet. Atque inde porro intelligitur, alueolos illos, etiamſi exiguos fibrarum, haud magis tamen, quam faſciculorum alueoli, aut vaginae muſculorum, neque magis quam tunicae celluloſae vaſorum et inteſtinorum, cum creditis cellis celluloſae ſubſtantiae confundendos eſſe. Si ſubſtantia vaginarum ſua natura celluloſa exiſteret; laminas parietesque vaginarum ipſas cellarum plenas eſſe, et conſtare lamellis minoribus, oporteret. Verum vaginae et laminae omnino continuae integraeque et aequales ſunt, neque vmbra in iis aut pori alicuius, aut cellae, aut lamellae, ſiue armatis ſiue inermibus oculis apparet. Moneo haec, ne confuſio rerum diuerſarum nouum errorem inducat. Nam ad ipſum etiam antiquum telae celluloſae errorem haud parum vaginae illae fibrarum, laminaeque, fibras diſtinguentes, contuliſſe videntur.

Solita enim praeparationis muſculorum phaenomena, quae neminem quidem plane latere, minime tamen ſatis obſeruata et conſiderata, eſſe videntur, vna cum filis illis, arte productis, errorem animis induxiſſe puto. Si integumenta communia, cutis cum omni adipe et cum celluloſa omni, qua muſculis adeps annectitur, ea ratione ſecundum longitudinem fibrarum a muſculis ſoluuntur, vt eadem hac vna operatione

conti-

continuo mufculi eorumque fibrae diftincte, et depurati a cellulofa, appareant, quemadmodum et vulgo fieri folet; fila, dum integumenta trahuntur, continuo apparent, inter fingulas mufculi fibras vel fafciculos a retractis integumentis defcendentia, quibus integumenta mufculo annexa effe videntur. Si cultro haec fila diffecas, continuo integumenta trahendo, vlterius haec a mufculo foluuntur, at fila quafi eadem, vlterius modo promota, continuo adfunt. Si maiori, fi minori fectione apparentia fila incidis, magis vel minus a mafculis integumenta foluuntur, magisque vel minus, quae continuo apparent, fila promouentur; at eadem vbique fila continuo ad funt, neque fpatium vnquam detegitur, quo praecedens aliquod a fequente filo diftingueretur.

Vides facile, haec minime, quae videntur, fila, feparata alia ab aliis, fed laminas effe continuas, feu fepta, fecundum longitudinem fibras diftinguentia, quorum ad quamvis factam incifionem fectiones tantum apparent, continuati parietes inter partes foluendas integumentorum mufculorumque adhucdum cohaerentes latent, quaeque, fiue leuiorem fiue profundiorem feceris incifionem, vbique continuo tanquam fila praefentia apparent. Vides laminas illas effe, quas fuperius defcripfi, quae ab integumentis, a cellulofa fcilicet, qua adeps cum mufculis cohaeret, et quae vaginam fingulis mufculis efficit, inter fingulas mufculi fibras defcendunt, fibrasque circumdant et proprias fingulis vaginas producunt. Neque, dummodo praeparando fic mufculum, fibris infignioribus et fafciculis praeditum, veluti pectoralem maiorem, attentius retractam cum adipe cellulofam, mufculumque ipfum, et data opera confideres, res ipfa latet. Non fila enim tunc, fed veras vaginas, tractione integumentorum dilatatas, ampliores fibris, videbis, in quas continuatae fibrae defcendunt. Nimirum absque microfcopii auxilio attentis haec oculis apparent.

Altera methodus mufculos praeparandi, qua fcilicet ad latitudinem fibrarum integumenta, vel aliae partes, a mufculo fucceffiue foluuntur, quae et pro meliori et tutiori haberi folet, plane diuerfa a prioribus phoenomena, quae pariter neceffario eam comitantur, oftendit. In iis cellulofae fubftantiae in vaginas fibrarum fafciculorumque productio, fi dubium adhucdum fuperfit, omnino patebit. Si integumenta communia a mufculo, latioribus fafciculis aut fibris praedito, folito modo fecundum latitudinem fibrarum foluuntur, vt quantum fieri poteft fcilicet proxime ad fibram feu fafciculum incifio fiat cellulofae, qua retracta integumenta mufculo annectuntur; (nam fola hac ratione, vti notum eft, omnis cellulofa aufertur et nitida fit mufculi praeparatio); non fila nunc, fed lata lamina, ad quamuis incifionem inter retracta integumenta et mufculum apparet, quae ab integumentis retro vltimum, quem detexeris, fafciculum profunde defcendere, eumque et totam detectam praeparatamque partem mufculi, ab ea, quam integumenta adhucdum tegunt, diftinguere et fecundum longitudinem mufculi feparare videtur. Hanc fi extremo mucrone fcalpelli incideris, non quantum incidifti, de mufculo, fed totus continuo nouus fafciculus fecundum omnem fui latitudinem in confpectum prodit. Quo addito parti detectae et praeparatae mufculi, noua rurfus lamina apparet, auctam partem praeparatam denuo a reliqua, quam integumenta tegunt, diftinguens. Vt femper tenuior tantum lamina cellulofa fit incidenda, quo latior ilico mufculi fafciculus, aut lamella tenuior, quo fibra latior in confpectum prodeat. Vides ergo laminas effe, fecundum longitudinem fibrarum ductas, quibus finguli fafciculi fingulaeque fibrae a fe mutuo distintinguuntur, quae, ſi ad longitudinem fibrarum integumenta aliaeue partes a muſculo ſoluuntur, ſui ſectiones tantum oſtendunt, filaque mentiuntur.

Sic factum eſſe exiſtimo, vt praeparando muſculos fila proſectores viderint celluloſa, quibus muſculi connecterentur, quae, iuncta filis, arte productis, ad confirmandam telae celluloſae ideam non parum contribuerint. Haec quamuis non ſint arte producta, velut illa, quae extenſione ſubſtantiae celluloſae ſimplicis fiunt; tamen nec ita, quemadmodum facta ſectione apparent, in corpore illaeſo exiſtunt. Vaginae nimirum exiſtunt integrae, aut quas latera earum vtrinque ad fibram referunt laminae, quae et, dum ſecundum latitudinem fibrarum integumenta a muſculo ſoluuntur, tanquam laminae ſe repraeſentant; atque tum demum, quando praeparatione muſculi ſecundum longitudinem fibrarum, inciſionibus factis transuerſis, diſſecantur, ſui ſectiones oſtendunt, quae nec tum quidem vera fila ſunt, ſed eſſe tantum videntur. Non minus ergo imaginariae partes ſunt haec fila, quam fila extenſione producta.

Apparent phoenomena illa ſuperius deſcripta, quae praeparationem muſculorum, tam ad latitudinem quam longitudinem fibrarum factam, comitantur; ſiue integumenta communia, ſiue aliae partes, quae muſculum tegunt, ſiue muſculi quoque a muſculis, praeparando ſoluuntur; dummodo, vt fieri ſolet, vtque leges artis praecipiunt, omnis celluloſa, facta proxime ad muſculum praeparandum ſectione, a muſculo aufertur. Nam hac ratione vaginae fibrarum ipſae forcipe prehenſae et dilatatae inciduntur et aperiuntur, vt nuda fibra appareat, et ſectiones diuiſae ad longitudinem vaginae fila vtrinque ad fibram repraeſentant. Si vero duo muſculi *a*) copio-

ſori

a) Tab. cit. fig. 3. a. b.

ſiori celluloſa coniuncti, ita ſecundum longitudinem fibrarum a ſe mutuo ſeparantur, vt celluloſa ad muſculum vtrumque remaneat, vaginae fibrarum, ſectione non tactae, integrae et occultae reſtant. Sic ſolitae praeparationis phoenomena minime apparent. Illa potius in conſpectum prodeunt, quae in ſuperioribus (Diſſ. I. §. 10. fig. 1. 2. Ibidemque §. 12. fig. 3. 4.) deſcripſi, quibus continuam celluloſa ſubſtantiam offert, quae diſtractione muſculorum extenditur, fila artefacta producit.

Verum in hoc experimento, dum ad longitudinem ſcilicet fibrarum muſculi diuelluntur, quamuis etiam vaginae illaeſae et tectae occultaeque ad muſculos remaneant; veſtigia tamen aliqua earum haud raro apparent. Inter ſingulas fibras enim, dum duo muſculi ſecundum longitudinem diuelluntur *a*), fila eminentiora in conſpectum veniunt *b*), interſtitiis, fibris reſpondentibus, planiore celluloſa repletis *c*). Nimirum ad longitudinem muſculis diuulſis non ſimplex ſubſtantia celluloſa, vniformis et continua, ſed tubi potius, ex celluloſa ſubſtantia formati, a ſe mutuo diſtrahuntur, quemadmodum in praecedentibus explicatum eſt. Quae ergo tubis his ipſis, ſeu fibris incluſis, reſpondet *d*) celluloſa, tenuior eſt; craſſior, profundiusque inter fibras deſcendens, quae harum interſtitia occupat *e*). Hinc alternatim craſſiores tenuioresque ſtriae celluloſae eminentiora fila *f*) alternatim et planiora eorum inter

a) Fig. 3. a. b.

b) Fig. 3. f. f. f. f.

c) Fig. 3. d. d.

d) Fig. 3. d. d. e. e.

e) Fig. 3. f. f. f.

f) Fig. cit. 3. f. f. f.

terſtitia *a*) producunt. Interſtitia fibris ſeu tubis aut vaginis earum ipſis, fila fibrarum interſtitiis reſpondent. Si contra ad latitudinem fibrarum muſculi duo a ſe mutuo diuelluntur, quemadmodum factum eſt in experimentis diſſertationis primae, vnum continuum ſeptum, ex celluloſa ſubſtantia factum, inter muſculos deſcendens, eiusque craſſities quidem, proinde ſola vniformis ſubſtantia, diſtrahitur. Haec primo aequalem ſuperficiem muſculis diſtractis offert (Diſſ. I. fig. 1. 2.), deinde tractione continuata in fila extenditur (Diſſ. I. fig. 3. 4.).

Ergo et haec fila, veſtigia vaginarum latentium, distinguenda a filis pariter, quae ſimplice celluloſae extenſione oriuntur, atque ab illis, quae ſolitam muſculorum praeparationem comitantur, quaeque diſſectae fibrarum vaginae oſtendunt, phaenomenis illis adnumeranda ſunt, quibus opinio celluloſae telae produci et foueri potuit. Atque ſi ad varias illas particulas reſpicis, quas glutinoſa, quam celluloſam dicimus, ſubſtantia, dum varie tractatur, effingere poteſt, quinque earum ſpecies ſunt, quas hactenus vidimus; fila nimirum extenſione producta; deinde haec, quae ſectiones vaginarum fibrarum muſcularium mentiuntur. Ambo frequentiſſima ſunt; illa ſingularum partium corporis euolutionem, haec omnem praeparationem muſculorum, comitantur. Tertium filorum genus veſtigia ſunt vaginarum latentium fibrarum muſcularium. Haec quidem fila omnium rariſſime apparuiſſe videntur, cum contra methodum ac leges ſecandi ſit, digitis prehenſos musculos a ſe mutuo diuellere. His tribus filorum generibus ſtructura frequentiſſima celluloſae ſubſtantiae, filata ſcilicet effingitur. Denique bullae aereae, veſicularem exhibentes celluloſae

a) Fig. 3 d. d. d.

lulofae ftructuram et laminae latae quartum et quintum genus particularum artificialium cellulofae efficiunt.

Caeterum fi microfcopio mufculi fecundum longitudinem diuulfi confiderantur, *a*) bullae aereae copiofae *b*) vti irrumpente aere externo producuntur, haud iniucundo fpectaculo frequenter obferuari folent. Maximam partem in interftitiis inter fila, fibris refpondentibus, apparent *c*). Saepe tamen etiam in ipfa fila *d*) aerem penetrare bullasque in iis producere vidi.

Verifimile videtur, vti a mufculorum fafciculorumque eius, fic pariter et a fibrarum vaginis, quas vltimas confideravimus, lamellas intus abire, quae inter fibrillas fingulas fcilicet defcendant easque ambiant, et vaginulas pro iis efficiant. Rem ipfam tamen microfcopio profequi non potui. Fibram folitae latitudinis ex anconeo longo adhibui. Eius aliquam portionem *e*) fub microfcopium, fpeculo inftructum, transtuli vt pellucidam fibram viderem. Continuo fibrillae, *f*) quibus fibra compofita erat, admodum diftinctae, ex rubro flauefcentes, eiusdem vbique latitudinis, nonnihil paffim crifpatae, in faciculum, fibram efficientem, collectae, apparuerunt. Diuifi hanc fibram fecundum longitudinem in duas fere aequales partes. *g*) Tenuis ilico pellucidiffima et fere fluida fubftantia glutinofa et continua, cum partes fibrae paulatim fepararem, in

a) Fig. 3.
b) Fig. 3. e. e. e.
c) Fig. 3. d. d.
d) Fig. 3 f. f.
e) Fig 4. a.
f) Fig. 4 h. h. h. h.
g) Fig. 4. b. c.

in conſpectum inter eas venit, qua portiones cohaerebant *a*). Vbi magis eas a ſe mutuo remoui, in fila mire tenuia et paſſim retiformia ſubſtantia extracta eſt *b*). Videtur ergo, quantum quidem experiri licet, quaelibet fibrilla non laxa vagina obducta, ſed illita potius eſſe ſimplici ſubſtantia hac glutinoſa, tenerrima et fere fluida, eaque cum ſua vicina cohaerere. Quicquid tamen ſit, hoc certum eſt, celluloſam eo vsque inter omnes corporis partes intercedere, easque a ſe mutuo diſtinguere et conglutinare pariter, aut connectere, vt inter ſimpliciſſimas microſcopicas fibrillas muſculorum quoque tenerrima haec et fere fluida ſubſtantia glutinoſa ſe inſinuet, fibrillamque a fibrilla diſtinguat.

Explicatio figurarum

Tab. VI. fig. 1.

Portiones muſculorum, ex brachio exſciſſae, cum tunica, qua teguntur, adipoſa, adipe puro et cute, inermibus oculis viſae. Cutis cum adipe et tunica adipoſa a muſculis abſtracta. Quae muſculos et tunicam illam intercedit celluloſa in latam laminam tenuem extenſa, in qua neque cellae neque pori, nec microſcopio adhibito, apparuerunt.

a. b. c. Cutis portio, pollicem circiter lata, aliquantum contracta.

a. Eius ſuperficies externa.

b. Margines ſeu ſectiones contractae.

d. d. Adeps purus, glebis conſtans compreſſis.

a) Fig. 4 d.

b) Fig, 4. e. f. g.

e. Tunica adipoſa, quam vaſa ſanguinea, parallela cuti, percurrunt.

f. f. f. Muſculi, celluloſa, in quam lamina (*h*) continuat, obducti.

g. Eorum ſectio.

h. Lata lamina celluloſa, abductis cute, adipe, et tunica adipoſa a muſculis, quos tegebant, quibusque celluloſa ſubſtantia adhaerebant, ſuborta; dum ſubſtantia haec glutinoſa ſcilicet retractione integumentorum extendebatur. In hac microſcopio aequalis et continua ſuperficies apparuit. Simplex ergo lamina eſt, extenſione orta, aut ſubſtantia glutinoſa, in latam laminam extenſa.

i. i. k. l. m. Margo laminae, quo muſculis adhucdum adhaeret. Ex eo celluloſa ſubſtantia laminae ſuper musculos (*f. n. f.*) continuat, eosque tegit. Si magis ergo cutem cum adipe a muſculis remouebam, margo verſus finem muſculorum adſcendebat, vt pars marginis (*i*) v. gr. regionem (*n*) in muſculis occuparet. Aer externus continuo ſubrepſit laminamque veſicae inſtar eleuauit. Vbi integumenta remiſi, margo laminae ſe retraxit, glutinoſa ſubſtantia laminae muſculis adhaeſit.

Fig. 2.

Subſtantia tunicae adipoſae (fig. I. *e.*) microſcopio conſiderata.

a. a. Veſiculae adipis, ſimiles prorſus illis, quae adipem puram efficiunt, non tamen in glebas, ſed in longas potius ſtrias collectae.

b. b. b.

b. b. b. Clara continua pellucida ſubſtantia glutinoſa.

c. c. Fila, in quae facile illa extenditur.

d. d. Veſiculae adipoſis minores, diſperſae, albae.

Fig. 3.

Portiones duorum muſculorum, celluloſa coniunctorum, aliqua parte ſecundum longitudinem a ſe inuicem ſeparatae, microſcopio conſideratae, quo connectens fibras celluloſa appareat.

a. b. Muſculi a ſe inuicem ſeparati.

c. c. c. c. Fibrae muſculorum.

d. d. d. d. Interſtitium inter muſculos in hac parte diſtractos, celluloſa repletum.

e. e. Bullae aereae, quibus plena eſt celluloſa, quae interſtitium replet. Quamprimum enim muſculi diducuntur a ſe mutuo, vt celluloſa, qua cohaerent, extendatur, aer continuo externus cum ſtrepitu aliquo in eam irrumpit, bullasque efficit.

f. f. f. f. Laminae celluloſae inter fibras deſcendentes, easque diſtinguentes, ſeu latera vaginarum, quibus fibrae inuoluuntur, extenſa, quo fila eminentia efficiuntur.

Fig. 4.

Fibra muſcularis, in duas partes ſecundum longitudinem diuiſa, vt celluloſa, ſeu glutinoſa ſubſtantia, qua fibrillae conglutinantur, appareat. Microſcopio pellucida viſa.

a. Fibra naturali magnitudine.

b. c. Partes in quas ſub microſcopio diuiſa eſt. Fibrillae, quibus conſtat.

d. Aequalis et continua, fere fluida, glutinosa substantia, qua portiones (*b. c.*) aeque ac singulae fibrillae inter se cohaerent, qua fibrillae obductae. Quamdiu aliquantum modo partes fibrae (*b. c.*) a se inuicem distractae erant, aequalis vbique, vt in hac parte et continua substantia apparuit. Vbi magis vero portiones distraxi, in fila extendi coepit.

e. f. Fila solita, in quae substantia extensa.

g. In hac parte tenerrima mirae elegantiae fila microscopica retiformia extensione oriebantur, quae nullam artem satis imitari posse opinor.

EXPÉRIENCES SUR LE PRODUIT EN FER DE FONTE D'UN HAUT-FOURNEAU EN SIBÉRIE.

Par

B. F. I. HERMANN.

Communiqué à l'Académie le 18 *Août* 1791.

Les haut-fourneaux n'ayant pas encore été connus, on se servoit pendant plusieurs siècles à la fusion des mines de fer de petits fourneaux, qu'on appelle Wolfsoefen (fours du loup) Rennherde, Baueroefen (fours des paysans) &, dont on trouve encore quelq'ues uns en Sibérie, en Russie, en Suede & même en Allemagne. Mais dès que les hauts-fourneaux sont presque généralement employés la plûpart des Métallurgistes ne se doute guères, que ceux-ci ne méritent pas la préférence sur les fourneaux anciens; cependant il y a des savants d'un grand mérite, parmi lesquels je nomme seulement M. M. *du Coudray*, *) le Baron *de Dieterich*, **) & le

*) Mémoire sur la manière, dont on extrait en Corse le fer, par Mr. Tronson du Coudray, Paris, 1775.

**) Description des gîtes de minerai, des forges & des Salines de Pyrénées, par Mr. le Baron de Dieterich, 2 vol. in 4to Paris, 1786.

le Marquis *de la Peiroufe*, *) qui croient prouver le contraire. Ils nous ont donné de excellens defcriptions des forges du Comté de foix & de la Corfe, où la manière de fondre les mines de fer dans de petits fourneaux aux moyens des trompes à eau eft encore en ufage. Par la comparaifon avec les hauts-fourneaux en france ils les ont trouvés beaucoup plus avantageux, parcequ'on y épargne la moitié ou du moins un tiers de charbon, pour produire la même quantité de fer. Selon le calcul de Mr. de *Dieterich* il faut 5 jusqu'à 6½ livres de Charbon pour produire une livre de fer dans les hauts-fourneaux & dans le raffinage aux forges, au lieu qu'à la manière de Catalone ou du Comté de foix on n'a befoin que trois jusqu'à quatre livres de Charbon fur chaque livre de fer forgé, ce qui fait une difference fi confidérable, qu'elle mérite la plus grande attention de tous les propriétaires des forges. Auffi Mr. de *Dieterich* s'exprime-t-il là deffus en ces-termes: „Je les connus à peine, dit-il, les forges du pays de foix, que je fus enthufiasmé de l'économie & de la fimplicité des procédés & des atteliers; & dès mon retour à Paris je propofai à l'adminiftration royale & à celle de Monf. Comte d'Artois, de m'autorifer à faire faire dans le pays de foix des effais de cette methode avec des mines tirées des differentes provinces du royaume, &, particulierement avec des mines en grains. Dans le cas d'un plein fuccès, ce procédé devoit épargner un bon tiers de Charbon fur la confommation ordinaire de la fabrication ufitée dans le refte du royaume. J'en avois donné la preuve par des tableaux de Comparaifon; Mr. *du Coudray* portoit même cette économie du Charbon à près de moitié.“ (ouvrage cité T. I. pag. 35). On

*) Mémoire fur les mines & les forges du Comté de foix, par M. le Marquis de la Peiroufe, Paris, 1787.

On croit que cette différence vient de ce qu'au lieu de convertir la mine en fonte, comme dans les hauts-fourneaux, pour être portée dans les affineries, puis dans les chaufferies, la mine dans le comté de Foix eſt immediatement reduite en fer forgé, & etirée dans un ſeul feu ſans avoir paſſé par l'état de fonte. Les eſſais, que Mr. de *Dieterich* a fait pour traiter de cette manière quelques autres mines de fer de la France n'ont pas eu un plein ſuccès; cependant il aſſure, qu'il ne ſoit pas douteux pour toutes les mines en roche, dont la nature n'eſt pas vicieuſe. Mais c'eſt le point le plus important; les mines riches & d'une bonne qualité ne laiſſent pas d'être traitables à la manière du Comté de Foix, mais celles d'une nature vicieuſe où les mines pauvres ne le ſont guères. Celles-ci, faiſant presque partout une bonne partie de l'exploitation, ont ſûrement donné lieu à l'uſage des hauts-fourneaux, aux moyens desquels ont vient à bout de convertir en bon fer la mine la plus rebelle, ce qui ne réuſſit pas ou très difficilement à la manière du pays de Foix.

La grande quantité de fonte, que produiſent les hauts-fourneaux en peu de tems eſt encore un grand avantage, ſurtout dans les contrés, où l'on eſt obligé de transporter les mines ou la fonte, pour être convertie en fer forgé, fort loin du lieu de l'exploitation. Mais le produit des hauts-fourneaux d'un pays diffère quelquefois beaucoup de celui d'un autre. La grandeur, la proportion de la ſtructure intérieure, & le régence du feu influent autant ſur le prix du produit, que la qualité de la mine. Il y a des hauts-fourneaux, qui produiſent une ſi énorme quantité de fonte, en n'y conſommant pas une quantite excéſſive de Charbon, qu'on eſt tenté à croire, qu'on ne ſauroit rien imaginer de plus

 profi-

profitable dans ce genre des travaux métallurgiques. Mais pour s'assurer la quelle de ces deux méthodes, de traiter les mines de fer à la manière du comté de Foix où dans les hauts-fourneaux, en convertant ensuite la fonte en fer forgé par le raffinage, soit la meilleure, il faudroit entreprendre des essais continués pendant un longs tems avec la même mine, sous les mêmes circonstances & au même lieu. En supposant que la plûpart des mines de fer, comme en Sibérie, où la plus grande partie consiste en mines de roche, soit susceptible d'être traitée à la manière de Foix, l'avantage, qui en résulteroit de l'épargne du Charbon, seroit si considérable, qu'il est fort à souhaiter, que cette méthode y soit introduite, parcequ'à present pour produire une livre de fer, on y a besoin presqu'une aussi grande quantité de Charbon qu'en France.

Les montagnes Ouraliennes p. ex. produisent annuellement plus de $3\frac{1}{2}$ millions de pouds de fer forgé, en y employant à peu près 20 mill. de charbon de sapins. Ce seroit un objet très-important, que d'y en épargner le tiers; & dans quelques autres pays peut-être le profit seroit encore plus grand, car il y a tout lieu à croire, que les hauts-fourneaux de Sibérie rendent considérablement plus d'avantage, que ceux de beaucoup d'autres provinces & il n'y a surement aucune, où ils rendent dans un certain tems autant de fer de fonte qu'en Siberie, quoique il y ait quelques uns, qui en doutent.

Pour démontrer cette assértion, pour servir les savans dans leurs comparaisons de ces deux méthodes, qui sont à portée de les faire avec exactitude, & en même tems pour faire connoitre la manière usitee aux fonderies de fer de ce pays,

pays, je me ſuis propoſé de rendre ici un Notice du haut-fourneau & du procédé de la fabrique impériale de Kamensk, en y joignant des tables authentiques & détaillées de la production journalière en fer de fonte d'un an entier & des matériaux y employés. Je ſuis convaincu, qu'il n'y a rien de plus utile pour le progrès de la Métallurgie, que les deſcriptions des procédés, dont les réſultats ſont prouvés & démontrés par des tables pareilles. Sans cela on n'acquiert qu'une connoiſſance fort imparfaite d'un établiſſement quelconque, ne pouvant pas déterminer au juſte le produit du métal, ni les dépenſes réelles des matériaux.

La fabrique de Kamensk eſt ſituée aux monts d'Oural ſur leur pente orientale à la gauche de la riviere d'Iſſet auprès de la petite riviere Kamenka, 90 verſtes de Cathérinebourg. Elle ſe trouve pesque dans une plaine, & ſes mines ſe rencontrent dans des Collines, qui ne ſont guères plus élevées, que celle-là. Ces mines de fer conſtiſtent dans les eſpéces ſuivantes :

1.) Mines de fer ochraceuſes, (Minera ferri ochracea) d'une couleur jaune, rougeatre & brunâtre.

2.) Mines de fer ſabloneuſes; (Minera ferri arenacea indurata).

3.) Mines de fer limoneuſes; (Minera ferri argillacea lapidea). Elles ſe rencontrent pour la plûpart en géodes, dont la grandeur varie beaucoup & qui renferment à l'ordinaire

4.) Des Haematites ſtalactitiques noires, presque toujours couvertes d'une ochre de Manganaiſe noire très-fine. Quelquefois celle-ci ſe trouve en petites aiguilles & en criſtaux d'une lueur argentine.

5.) Mines de fer blanches argilleuſes (Minera ferri alba argillacea, thonigter Stahlſtein). Cette eſpéce ne ſe trouve que dans une ſeule minière en maſſes aſſez conſidérables, dont les fentes ſont remplies des hématites ſtalactitiques.

La plus grande partie de l'exploitation de ces mines conſiſte en Nros 2. 3 et 4. Celle de N°. 1. n'eſt qu'accésſoire, & la mine blanche ſuffit à peine pour améliorer la fonte, qui ſert à la fabrication de l'acier.

La mine exploitée eſt miſe en grands tas, qui contiennent de 10, 000 jusqu'à 30, 000 pouds pour la griller en plein air ou à ciel ouvert au moyen du bois, poſé dans un quarré de l'un epaiſſeur environ d'une arſchine. Le grillage ſe fait en 8 à 15 jours. Alors la mine eſt tranſportée à la fabrique & concaſſée avec des marteaux à main en morceaux d'une groſſeur des noix & des oeufs.

Le *haut-fourneau* de Kamensk a préſentement une *hauteur* de 13 arſchines ou $28\frac{332}{731}$ pieds de Paris en comptant depuis le carreau du creuſet jusqu'à la gueule où l'on mêt le charbon; (vom Herdſtein bis zur Schür) il eſt conſtruit ſans cheminée.

Le *Creuſet* (das Geſtelle) a 3 archin. de long, & à l'endroit, où l'on fait couler le métal 1 arch. de large, vis-à-vis de celui-ci il a 14 verchoks de large & en tout 3 arſchin. de haut. Les épaules (die Raſt) ont une largeur de $1\frac{1}{2}$ arſch. Immediatement ſur celles-ci trouve-t-on la plus grande circonférence de l'intérieur du fourneau, dont le diamétre a $4\frac{1}{2}$ arſch. & celui de l'orifice ſuperieur a 3 arſch.

Les

Les creuſets & les parois intérieurs du fourneau ſont maçonnés d'une éſpece de pierre talqueuſe melée de beaucoup de quarz, qui ſe trouve dans la montagne, qu'on appele Totſchilnaya-Gora. La figure intérieure du creuſet préſente un quarré oblong, mais le reſte du fourneau eſt rond. Les parois intérieurs ou les fauſſes parois ſont conſtruite en briques.

La *tuyere* ſe fait ici de l'argille humide, qu'on applique dans un trou pratiqué dans la pierre, par la quelle le vent eſt conduit dans le fourneau. Ce trou ſe trouve 13 verſchoks au deſſus du carreau du creuſet; celui-ci eſt conſtruit avec une ouverture, qu'on appele la *timpe*, (Tümpel) par laquelle on rétire les ſcories, qui nagent ſur le métal fondu. On place la tuyere presque horizontalement; elle enfonce à peu-près 3 à 4 verſch. dans le fourneau. L'oeul ou ſa bouche a 1¼ verſch. de haut ſur 2 verſch. de large. Celle-ci doit être réparée, à meſure qu'elle eſt brulée par la force du feu ou emportée par les ſcories.

Les deux *ſouflets* de bois ont 9 arſchines, & les touyaux ou les buſes y appartenantes ont presque 2 arſchines de longueur. Ceux-ci ſont faites de fer de fonte, & le diamétre de leur orifice va jusqu'à 2 verſchoks. Ils ſont mis en mouvement par une roue à eau, qui a 6 arſch. de haut, ſur 2 arſch. de large.

Après avoir bien chauffé le haut-fourneau on commence la fuſion en le chargeant d'abord tout plein des charbons de ſapins ſans mines, ce qui ſe fait avec 20 à 21 corbeilles, dont chacune peſe environ 20 pouds. On mêt le feu par la tuyere, en faiſant aller doucement les ſouflets &

en 15 à 18 heures la flamme fe montre au haut du fourneau; dèslors les charges (Колошъ) font données avec de la mine, mais de manière, que pendant la prémiere femaine la quantité de mines eft augmentée peu à peu de 5 pouds fur la Corbeille de charbon jusqu'à 15 ou 18 pouds. Dans la fuite à mefure que le fourneau acquiert plus de chaleur on augmente la mine de 20 jusqu'à 25 pouds fur chaque corbeille.

La caftine, qu'on employe ici, eft une pierre calcaire ftratifiée, & pour la plùpart remplie des coquillages petrifiés. Elle eft en partie brulée ou reduite en chaux; l'autre partie refte crue. De toutes les deux éfpeces on employe fur chaque charge de 2, 3, 4 jusqu'à 5 pouds felon la réuffite de la fufion & la qualité requife de la fonte.

Quand le fourneau demande une nouvelle charge on commence à mettre premièrement le Charbon, fur le charbon la mine & fur celle-ci le Caftine. La mine & la Caftine font difpofées dans un cercle à l'entour du bord de la gueule ou de l'orifice du fourneau, le quel prend chaque heure une charge & quelquefois en $\frac{3}{4}$ d'heures, de forte qu'en 24 heures il confomme 25 jusqu'à 30 charges & plus.

Pour l'ordinaire on fait couler la fonte trois fois en 24 heures, ou feulement 5 fois en 2 jours, en cas qu'on veut plus purifier le métal; mais quand on a en vue de produire une fonte dure, blanche & ftriee; on donne plus de mines fur la charge & fait couler le métal plus fouvent. Le contraire arrive lorsque la fonte réfide plus long tems dans le fourneau; dans ce cas elle devient ici compacte, grife & molle, au lieu qu'en quelques endroits en Allemagne la fonte acquiert

acquiert la couleur blanche, quand elle eſt bien purifiée & long tems tenue au fourneau, ce qui dépend pour la plupart de la grandeur du four. Quelque longtems, qu'on tient ici le métal au bain il ne devient que plus compacte, plus gris & plus mou; il endomage en même tems très ſenſiblement le creuſet en s'attachant fortement à ſes parois. On peut remédier à cet accident, en augmentant les charges & le mouvement des ſouflets, par la direction de la tuyere, laquelle doit être formée plus étroitement en la dirigeant en même tems un peu plus vers le fond.

Quant à la régence du feu on obſerve pluſieurs rémarques, pour juger, ſi le fourneau eſt dans ſon état requis, & ſi la fuſion produira une fonte de la qualite ſouhaitée; l'obſervation la plus commune & la plus decidante eſt tirée des ſcories. Au commencement de la fuſion, ou quand on a donné plus de mine que de Charbon, comme dans la proportion ordinaire, elles ſont toujours noires ou d'un verd foncé & très péſantes; mais quand le fourneau a ſa chaleur néceſſaire, quand on donne un ſurplus de charbon, en melant aſſez de Caſtine avec la mine, & en faiſant réſider longtems le métal au fourneau, les ſcories ſortent pour la plupart toujours très blanches, remplies d'une infinité de cavites, étant en même tems ſi legères, qu'elles nagent ſur l'eau. Quelquefois elles ſont verdâtres, tirant ſur le bleu, & compactes. Dans ce cas la fonte eſt d'une qualité moyenne, c'eſt-à-dire elle n'eſt pas trop dure & non plus trop molle ou trop longtems tenue au bain, ce qui augmente le déchet.

En

En suivant ce procédé le haut-fourneau de Kamensk a produit du 21 Décembre 1787 jusqu'au 24 d'Août 1788, la quantite de fonte fousdite :

Table prémiere

du produit en fer de fonte en 1788.

	Jours.	Charges.	Matériaux.					Produit en fer de fonte.	
			Charb.	Mine		Castine			
			Corbeilles	Pouds	liv.	Pouds	liv.	Pouds	liv.
Du 21e jusqu'au 31e 1787 - -	11	174	$139\frac{1}{5}$	2677	- -	299	30	877	30
Janvier 1788 -	31	849	$680\frac{4}{5}$	18373	- -	2553	20	8207	15
Fevrier - - -	28	844	$675\frac{1}{5}$	18971	- -	2859	- -	8923	35
Mars - - - -	31	919	$735\frac{1}{5}$	20780	- -	3127	20	9788	37
Avril - - - -	30	828	$662\frac{2}{5}$	17738	- -	2895	- -	8392	20
Mai - - - -	31	843	$674\frac{2}{5}$	18532	- -	295[illegible]	20	9094	20
Juin - - - -	30	808	$646\frac{2}{5}$	17770	- -	3016	20	8240	20
Juillet - - -	31	827	$661\frac{3}{5}$	16962	20	2815	- -	7488	35
Août jusqu'au 24	24	639	$511\frac{1}{5}$	12593	- -	2019	20	5461	10
total. -	247	6731	$5386\frac{2}{5}$	144396	20	22539	10	6047[illegible]	22

En comparant les matériaux consommés avec le produit & le tems du fondage il en résulte le calcul suivant :

Ta-

Table feconde.

Comparaifon du produit avec les matériaux y confommés en 1788.

	En 24 heures le fourneau a produit en fer de fonte.		Le fourneau a confommé dans ce même tems des mines.		100 Pouds de mine ont produits en fer de fonte.		Sur 100 Pouds de mine on a confommé de la caftine.		Pour fondre 100 P. de mines on a eu befoin de charbon.	En 24 heures il y a voit des charges.
	Pouds	liv.	Pouds	liv.	Pouds	liv.	Pouds	liv.	Corbeilles.	nombre
Décembre 1787	79	$32\frac{8}{11}$	243	$14\frac{6}{11}$	32	$30\frac{4}{26}$	10	$10\frac{14}{26}$	$5\frac{6}{26}$	$14\frac{10}{11}$
Janvier 1788 -	264	$26\frac{28}{31}$	592	$27\frac{3}{31}$	44	$26\frac{15}{18}$	13	- - $\frac{25}{40}$	$3\frac{13}{18}$	$27\frac{12}{31}$
Février - -	300	$34\frac{2}{28}$	677	$3\frac{6}{14}$	47	$1\frac{11}{18}$	15	$2\frac{15}{18}$	$3\frac{10}{18}$	$30\frac{4}{28}$
Mars - - -	315	$30\frac{27}{31}$	673	- $\frac{28}{31}$	47	- $\frac{8}{20}$	15	2	$3\frac{1}{20}$	$29\frac{20}{31}$
Avril - - -	279	30	591	$10\frac{20}{30}$	47	$12\frac{9}{17}$	16	$13\frac{4}{17}$	$3\frac{12}{17}$	$27\frac{15}{30}$
Mai - - -	293	$1\frac{26}{31}$	597	$32\frac{8}{21}$	49	3	16	$2\frac{4}{18}$	$3\frac{11}{18}$	$27\frac{6}{31}$
Juin - - -	274	$27\frac{10}{30}$	592	$13\frac{10}{30}$	46	$14\frac{14}{17}$	16	39	$3\frac{11}{17}$	$26\frac{28}{30}$
Juillet - - -	241	$23\frac{2}{31}$	547	$7\frac{3}{31}$	44	6	16	$23\frac{13}{16}$	$3\frac{15}{16}$	$26\frac{21}{31}$
Août - - -	227	$22\frac{2}{24}$	524	$28\frac{1}{3}$	43	$14\frac{8}{12}$	16	- - $\frac{8}{12}$	$4\frac{7}{25}$	$26\frac{15}{24}$
En total l'un portant l'autre -	269	$5\frac{67}{247}$	584	$24\frac{12}{247}$	46	$2\frac{23726}{144397}$	15	$24\frac{52272}{144397}$	$3\frac{105509}{144397}$	$27\frac{62}{247}$

Avec une corbeille de charbon on a donc produit 12 Pouds $13\frac{3249}{53357}$ liv. de fer de fonte, où pour produire une livre de fonte il falloit $1\frac{307}{493}$ liv. de charbon de fapins.

Table troiſieme
du produit en fer de fonte en 1789 & 1790.

	Jours.	Charges	Matériaux. Charbon. Corbeille.	Mine. Pouds.	Mine. liv.	Caſtine. Pouds.	Caſtine. liv.	Produit en fer de fonte. Pouds.	Produit en fer de fonte. liv.
Du 23^e Novembre jusqu'au 31^e 1788	8	95	76	1187	- -	135	20	260	- -
Décembre - -	31	944	$755\frac{1}{3}$	16756	- -	3035	- -	7484	2
Janvier 1789 -	31	814	814	18577	- -	3290	20	9355	7
Février - - -	28	778	778	17106	- -	3225	- -	8192	23
Mars - - -	31	880	880	19582	- -	4168	- -	10112	30
Avril - - -	30	826	826	18931	- -	3764	- -	10050	- -
Mai - - - -	31	869	869	20462	- -	3846	- -	10520	33
Juin - - - -	30	813	813	17066	- -	3200	20	8674	33
Juillet - - -	31	878	878	18538	- -	3881	20	9056	19
Août - - - -	31	899	899	20428	- -	4325	20	10074	32
Septembre - -	30	816	816	16685	- -	3849	- -	7571	17
Octobre - - -	31	981	981	21965	- -	4790	- -	10192	- -
Novembre - -	30	965	965	21100	- -	4825	- -	9573	15
Decembre - -	31	1082	$1065\frac{2}{3}$	24834	- -	5702	20	11181	16
Janvier 1790 -	31	1044	1044	25636	- -	5565	- -	11736	18
Fevrier - - -	28	936	936	22451	- -	5022	- -	10065	25
Mars - - - -	31	1033	1033	25588	- -	6088	20	11237	- -
Avril - - - -	30	875	875	21553	- -	5553	20	9665	3
Mai - - - -	5	127	127	2920	- -	775	20	1402	30
total -	529	15655	$15430\frac{3}{3}$	351365	- -	75042	20	166406	20

En comparant les matériaux conſommés avec le produit & le tems du fondage il en réſulte le calcul ſuivant:

Ta-

Table quatrième.

Comparaison du produit avec les matériaux y consommés en 1789 & 1790.

	En 24 heures le fourneau a produit en fer de fonte.		Le fourneau a consommé dans le même tems de mine.		100 Pouds de mine ont produits en fer de fonte.		Sur 100 Pouds de mine on a consommé de la Castine.		Pour fondre 100 P. de mine on a eu besoin de Charbon.	En 24 heures il y avoit des charges.
	Pouds	liv.	Pouds	liv.	Pouds	liv.	Pouds	liv.	Corbeilles	nombre.
Novembre 1788	32	10	148	15	21	$36\frac{1}{11}$	11	$1\frac{7}{11}$	$6\frac{4}{11}$	$11\frac{7}{8}$
Décembre - -	241	$16\frac{3}{4}$	540	$20\frac{1}{2}$	44	$26\frac{1}{2}$	18	4	$4\frac{12}{24}$	30
Janvier 1789 -	302	9	599	10	50	14	17	28	$4\frac{8}{24}$	26
Février - - -	292	23	610	37	47	30	18	30	$4\frac{1}{2}$	27
Mars - - -	326	$8\frac{1}{2}$	631	27	51	$25\frac{3}{4}$	21	11	$4\frac{11}{24}$	$28\frac{1}{4}$
Avril - - -	335	- -	631	- -	53	3	19	35	$4\frac{9}{24}$	$27\frac{1}{2}$
Mai - - -	347	$17\frac{1}{2}$	660	- -	52	$25\frac{1}{2}$	13	20	$4\frac{5}{24}$	$28\frac{1}{31}$
Juin - - -	289	$14\frac{1}{2}$	568	$34\frac{1}{2}$	50	$33\frac{1}{4}$	18	30	$4\frac{18}{24}$	27
Juillet - - -	292	8	598	- -	49	10	20	$37\frac{1}{2}$	$4\frac{17}{24}$	$28\frac{1}{3}$
Août - - -	324	$39\frac{1}{2}$	678	13	49	$12\frac{3}{4}$	21	$6\frac{3}{4}$	$4\frac{9}{24}$	29
Septembre - -	252	22	556	$6\frac{1}{4}$	45	15	23	- -	$4\frac{21}{24}$	27
Octobre - - -	328	31	708	22	46	16	21	$32\frac{1}{4}$	$4\frac{11}{24}$	$31\frac{5}{8}$
Novembre - -	319	$4\frac{1}{2}$	703	13	45	$14\frac{1}{2}$	22	$34\frac{3}{4}$	$4\frac{13}{24}$	$32\frac{1}{6}$
Décembre - -	360	$27\frac{1}{2}$	801	$3\frac{3}{4}$	45	- -	22	$38\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$34\frac{23}{31}$
Janvier 1790 -	378	$22\frac{29}{31}$	826	$38\frac{22}{31}$	45	31	21	$28\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{16}$	$33\frac{21}{31}$
Février - - -	359	$19\frac{1}{4}$	801	$32\frac{1}{2}$	44	33	22	$14\frac{1}{2}$	$4\frac{2}{16}$	$33\frac{3}{7}$
Mars - - -	362	$19\frac{1}{4}$	825	$16\frac{3}{4}$	43	$36\frac{1}{2}$	23	$31\frac{3}{4}$	4	$33\frac{1}{3}$
Avril - - -	322	7	718	$17\frac{1}{4}$	44	$33\frac{1}{2}$	25	$30\frac{1}{2}$	4	29
Mai - - -	280	22	584	- -	48	$1\frac{16}{29}$	26	$32\frac{9}{29}$	$4\frac{10}{29}$	$21\frac{2}{5}$
En total l'un portant l'autre -	314	$22\frac{382}{529}$	664	$28\frac{228}{529}$	47	$14\frac{140690}{3513365}$	21	$14\frac{104290}{3513365}$	$4\frac{137640}{3357365}$	$29\frac{314}{529}$

Avec une corbeille de Charbon on a donc produit 10 pouds $31\frac{5449}{15431}$ liv. de fer de fonte, où pour produire une livre de fonte il falloit $1\frac{369}{431}$ liv. de charbon de Sapins. — Il faut obſerver, que depuis le mois d'août 1788 la hauteur du fourneau a été augmentée d'une arſchine ſans rien changer dans ſa Conſtruction intérieure; par là on a obtenû par jour une plus grande quantité de fonte & le fondage en a été conſidérablement accéléré. La qualité de la fonte n'en a rien perdue non plus; mais la Conſommation de Charbon eſt plus grande, de ſorte qu'à preſent le fourneau donne ſur chaque corbeille $62\frac{1}{3}$ livres moins de fonte qu'auparavant; cependant ſur une livre de fonte on ne peut pas compter plus que $1\frac{4}{5}$ liv. de Charbon.

Dans les forges de la Sibérie le déchet eſt présque partout un tiers, quelques livres de plus ou de moins; auſſi la fonte de Kamensk en la travaillant en fer de barres, ſouffre un tiers de déchet; par ex. de 90 pouds de fonte on ne reçoit que 60 pouds de fer forgé, dont les barres ont 3 pouces de large ſur $\frac{3}{4}$ pouces d'épaiſſeur. Pour produire cette quantité de fer on conſomme à l'ordinaire 9 Corbeilles de Charbon de ſapins, ce qui fait 180 pouds; toute la conſommation de Charbon pour la fonte & le raffinage fait donc 342 pouds ou 13680 liv. ainſi pour produire une livre de fer en barres il faut $5\frac{2}{3}$ livres de charbon, le fer forgé obtenu de 90 pouds de fer cru faiſant 60 pouds ou 2400 livres.

Ta-

OBSERVATIONS SUR DIFFERENTES ÉSPÉCES DE PIERRES DE ROCHE COMPOSEÉS ROULÉES DES ENVIRONS DU CANAL DE LADOGA *).

Par

BASILE SEWERGUINE.

Communiqué à l'Académie le 1 *Sept.* 1791.

Ce n'eſt pas toujours dans les pays lointains, qu'il faut aller chercher les objets dignes d'attention. Souvent nous les foulons ſous non pas daignant à peine leur accorder un oeil favorable, & pourtant j'oſe le dire, ce ſont autant de corps remarquables, dignes de toute contemplation ſerieuſe. Telles ſont entre autres les pierres roulées, que l'on employe ici pour paver les rues, pour remplir les marais, & pour tant d'autres uſages. Elle m'ont parues preſenter trop de phenomênes rémarquables pour les paſſer tout à fait ſous ſilence. On les retire prés du Canal de Ladoga aux environs de Schlüſſelbourg, où ces pierres roulées ſont entaſſées, l'une

 ſur

*) Avans de paſſer plus loin dans mes recherches ſur les pierres de roches en général, j'ai cru devoir y ajouter ces obſervations, qui pourront être de quelque utilité dans la ſuite. On peut les régarder comme des ſupplements à mon eſſay ſur les pierres de roche compoſées.

fur l'autre de la forte, qu'elles y forment des collines ou des montagnes entières. Elles font toutes de la nature des pierres de roche compofées. Toutes nous peuvent donner quelques idées, peut être, fur la nature de la contrée entière du gouvernement de Wibourg, d'Olonetz & de quelques pays circonvoifins. On fait que les parties conftituantes de ces éfpeces de pierres varient beaucoup. J'en citerai de 40 différentes combinaifons avec leurs varietés, je les accompagnerai des obfervations, que j'ai faites la deffus, & tacherai de tirer une parallele avec celles des autres pays, qui leur font analogue. On fait & on le verra dans la fuite, que la pluspart des montagnes qui en confiftent fourniffent des gites de mineraux les plus utiles. Donc fi une fois d'aprés les échantillons, dont je vais donner la defcription, on parviendra à decouvrir les rochers, dont elles ont été arrachées, on aura peut être un moyen de plus pour s'enrichir des dons de la nature.

Enumeration de différentes éfpéces de pierres de roche compofées roulées des environs du Canal de Ladoga.

Article I. Pierres de roche compofées, ou le principe Calcaire predomine.

A. *De deux parties conftituantes.*

1.) Marbre & Spath calcaire: le premier eft gris noirâtre, l'autre blanc; il eft rémarquable, que ce fpath à des ftries paralleles à fa furface, mais elles ne viennent peut être que de quelques caufes accidentelles.

2.) Marbre & Mica, l'un bleuvatre & l'autre argentin & difperfé par le Marbre en petites paillettes.

3.) Marbre & Quarz: l'un blanc & l'autre rouge, ſouvent en criſtaux piramidals. — Le Saxum Sahlbergenſe de Linnée, qui a les mêmes parties conſtituantes ſert d'enveloppe aux galênes de Plomb de Sahlberg; & une ſorte de pierre, qui lui eſt analogue contient de la mine d'argent blanche à Kapnick. Le Saxum Helenae ſur l'isle d'Helene, & le ſaxum margariticum en Nerice me ſemblent être auſſi à peu de choſe prés les mêmes, que l'éſpéce que j'ai decrite ici.

4.) Marbre & Feldſpath: éſpéce trés rémarquable, où le Marbre eſt de couleur griſe & le Feldſpath de couleur blanchâtre & qui ſe manifeſte en grands rombes luiſants au Soleil. — On dit, qu'il y ait une combinaiſon du Spath calcaire avec le Feldſpath à Bornholm, qui contient de la galêne de plomb.

5.) Marbre & Asbeſt; ce dernier eſt toujours plus ou moins verd, quelquefois d'une nuance tres agreable & tres luiſant.

B. *De trois parties conſtituantes.*

6.) Marbre, Asbeſt & Spath calcaire: il y en a deux variétes.

a) l'une, où toutes les parties conſtituantes ſont blanches, & ne ſe diſtinguent que par leur forme differente.

b) l'autre, où le Marbre eſt gris, l'Asbert verd, & le ſpath calcaire blanc.

7.) Marbre gris foncé, Asbeſt verd, & Schoerl noir & trés luiſant.

8.)

8.) Marbre blanc, Feldſpath rouge en particules trés minces & de l'argille endurcie noirâtre.

9.) Grés calcaire blanchâtre avec de l'Asbeſt verd & du Mica; cette éſpece devient ferrugineuſe à ſa ſurface.

10.) Spath calcaire blanc, Quarz brun, & Asbert verd.

C. *De quatre parties conſtituantes.*

11.) Marbre blanc, Spath calcaire blanc, Asbert verd & Quartz.

Toutes ces différentes éſpéces de pierres de roche compoſées ſont employées en plus ou moins grande quantité à la conſtruction de l'Egliſe de St. Iſaak & viennent pour la plûs part, des environs du village de Roaskale en Carelie; celles, qui ſuivent, ont été ramaſſées, comme je l'ai dit, parmi les pierres roulées, que l'on apporte ici en abondance.

Art. II. Pierres de roche compoſées, ou le principe argilleux predomine.

A. *De deux parties conſtituantes.*

12.) Hornblende & Quarz; il y en a deux varietés.

a) l'une où la Hornblende eſt de couleur griſe claire, & toute la pierre tellement detruite par le laps du tems, qu'elle eſt presque entièrement reduite en une terre verdatre, dont l'écorce ou la ſuperficie eſt trés raboteuſe, & toujours verte.

b) l'autre eſt plus dure, & la Hornblende noire foncée.

On trouve à Aedelfors, à Rydderhütta & à Norberg en Weſtmannland une éſpéce, qui ſelon moi lui doit être analogue.

ſugue. C'eſt le Hornſchiefer de Wallerius qui ſelon lui forme ſouvent la ſalbande de quelques montagnes de Suede. Même le *grünſtein* n'en diffère qu'en peu de choſe.

13.) Hornblende griſe foncée, & Feldſpath blanc.

14.) Mica noir & Feldſpath en rombes blancs.

15.) Mica & Quarz.

a) Mica noir en forme de ſtries & Quartz blanc.

b) La même éſpéce, mais qui eſt plus decompoſée & dont la ſurface eſt enduite d'une écorce argilleuſe entrémelée de beaucoup de Mica jaune & luiſant.

C'eſt le Saxum *Garpenbergenſe* & *Rocroſienſe* de Linnée dont on aſſure, qu'à Garpenberg, à Oſtgothland, à Roeros, & à Bramblé en Norwege, ainſi qu'a Schneberg, prés de Sterzing en Tirole ils contiennent du cuivre; à Aedelfors en Smoland de l'or; à Platte en Bohême de la Molybdene; au Hartz de la mine de plomb; à Kongsberg de l'argent; & enfin à Altenberg prés de Geyer & d'Ehrenfriedersdorf en Saxe de l'Etain. La Pierre de roche de Roeros eſt ſchiſteuſe.

16.) Argille & Mica: éſpéce trés rémarquable, où l'argille eſt griſe & tachetée de pointes luiſantes de Mica noir. On trouve la même combinaiſon prés de Platte en Bohème; à St. Géorgenſtadt en Saxe elle contient du Wolfram; dans l'Épiſcopat de Naſſau de la Molybdène, & à Schmoelnitz dans la Haute Hongrie de la pyrite cuivreuſe. Même le Saxum métalliferum de Mr. de *Born* n'eſt ſouvent melé que d'argille & de Mica, comme à Herrengrund prés de Neuſol &c. ainſi que l'aſſerte Mr. Haydinger.

B. *De trois parties constituantes.*

17.) Mica rouge, qui ressemble beaucoup au cuivre natif, Quarz blanc, & des grenats rouges foncés. Cette éspéce est trés fragile & trés decomposee. Le *Saxum granosum* de Linnée, que l'on trouve à Silfberget en Suede, *le Saxum tritorium* de Norvége & de Dalekarlie, le *Saxum punctatum* de Kiaging en Scandinavie, le *Saxum alpinum*, qui forme les plus hautes alpes de la Lapplande & qui se trouve en Norvège & en Nerice, & dont on assure qu'a Geyer en Saxe il contient de l'Étain, & de mines d'argent & d'or prés de Schemnitz (Gmelin Linnée pag. 622.) & enfin le *Saxum tinnitans* de Westgothland n'en différent selon moi, qu'en peu de chose. Ce sont toutes des varietés de la même éspéce, où les grenats sont en plus ou moins grande quantité & plus où moins visibles. Le Mica du Saxum punctatum est argentin.

18.) Schiste micacé gris, contenant du Mica jaune en taches rondes, & du Quarz blanc en particules à peine appercevables. Cette éspéce a un teint bleuvâtre. C'est peut être le *Saxum Coerulescens* de Linnée, que l'on trouve à Smoland.

19.) Argille grise, contenant du Mica en paillettes trés minces & des grenats trés fins. Souvent ces grenats s'en degagent, & alors ils laissent dans l'argille les cavités vuides où gissoient les grenats.

Art.

Art. III. Pierres de roche composées où le principe Siliceux prédomine.

A. *De deux parties constituantes.*

20.) Quarz & Mica, qui par leur couleur & par leur forme différente presente plusieurs variétés que je vais citer.

a) Quarz blanc & mica noir, tous les deux en particules trés minces, mais jointes ensemble trés étroitement. La surface est dure, mais elle jaunit, & commence à former une écorce jaune ferrugineuse.

b) De même couleur, mais le Mica est parsemé trés régulièrement en petites taches noires par le Quarz blanc compacte, & lui donne un air tigré trés agréable. La surface commence à devenir jaune & ferrugineuse.

c) Quarz gris & compacte, & Mica argentin en pailletes à peine appercevables.

d) Quarz brun & gras, Mica noir en pailletes trés luisantes, mais jointes ensemble étroitement, & separées de la masse du Quarz. La surface en est jaune ferrugineuse entremelée de beaucoup de Mica jaune & souvent de couleur de gorge de pigeon.

e) Quarz blanc & Mica argentin en petites pailletes parsemées sans ordre ça & là.

f) Quarz brun en forme de prismes arrangées parallélement l'une auprés de l'autre, & recouvertes de Mica argentin talcqueux. Une varieté, qui pour la forme singulière du Quarz m'a parue toujours trés rémarquable. Ce sont, dirai je des colonnes du Basalte en miniature.

g) La même variété, mais dont le Mica repréfente plufieurs rayons, qui fe raffemblent tous au même centre.

C'eft le *Geftellftein* des Mineurs Allemands & le *Saxum fornacum* des Mineralogiftes. Le *Saxum decuffatum* que l'on trouve à Kallmora en Suede, le *Saxum montanum* & le *Saxum Mareftrandenfe* que l'on trouve dans la Scandinavie, à Oertra à Silfberget, & fur l'isle de Mareftrand (Gmelin Linnée p. 624.) & même le *Sarris*, que l'on trouve à Tourine n'en different qu'en peu de chofe. On affure que cette éfpéce contient de la mine d'argent rouge à St. Géorgenftadt en Saxe, de la mine d'argent blanche à Schladming en Stirie, & de la Molybdéne prés de Platte en Bohéme.

21.) Feldfpath rouge & Quarz blanc, tous le deux en particules, trés minces. On trouve felon Mr. Haidinger une pareille éfpéce en Dalekarlie.

22.) Grés Quarzeux & Mica.

a) Grés Quarzeux & Mica noir; cette varieté eft fchifteufe & recouverte à fa furface de Mica jaune.

b) Grés Quarzeux blanc & Mica noir parfemé reguliérement en taches oblongues. La furface eft enduite d'une écorce ferrugineufe rouge.

C'eft le *Saxum undulatum* & le *Saxum Stenonis* de Linnée. On les trouve en Dalekarlie, & fur le mont Stenshufrund en Suede. La varieté *b.* eft à ce qu'il me paroit, justement le *Saxum novaculare* que l'on trouve dans la Scandinavie & en Norvege (Gmelin Linnée pag. 612.).

23.) Feldſpath chatoyant, de couleur violette & Quarz blanc à peine viſible. Des contrées de Péterhof.

24.) Quarz gras & blanc & jaſpe rouge. Mr. de Linnée a donné le nom de ſaxum ſibiricum à une éſpéce qui lui eſt analogue (Gmelins Linnée p. 626.).

25.) Quarz brun avec des taches de grenats; cette éſpéce eſt compacte, mais un peu grenûe & jaunit à ſa ſurface, on apelle une éſpéce qui lui reſſemble, ſi non que le Quarz en eſt verd! *Granit de Bavarie.*

26.) Feldſpath compacte de couleur rouge brun, & Schoerl verd.

27. Feldſpath & Mica.

a) Feldſpath jaune & Mica noir. Cette varieté contient à ſa ſurface beaucoup de Mica jaune.

b) Le Feldſpath eſt rouge. Cette varieté eſt un peu ſchiſteuſe.

Tel eſt le *Saxum fatiſcens* & le *Rapakivi* que l'on trouve en Finnlande.

B. *De trois parties conſtituantes.*

28.) Feldſpath, Quarz & Mica.

a) Feldſpath jaune, Quarz brun, & Mica noir; ces deux derniérs melés enſemble y paſſent en veines; le Feldſpath repreſente des grands rombes.

b) Feldſpath blanc jaunâtre, Quarz brun & Mica noir, tous en petites parcelles & trés decompoſés.

c) Feldſpath brun jaunâtre, Quarz brun en forme de grains & Mica noir, qui devient jaune à ſa ſurface.

d) Feldſpath rouge & en forme de cubes, Quarz blanc en forme de grains, & Mica argentin.

e) Feldſpath blanchâtre, Quarz brun, & Mica noir; il y a des endroits, où le Feldſpath eſt en prismes tétraedres.

f) La même varieté, mais où le Feldſpath eſt de couleur de miel.

g) Feldſpath rouge foncé, Quarz noir en forme de grains, & Mica noir.

h) Feldſpath rouge, Quarz blanc, & Mica noir, tous en tres petites parcelles.

i) Feldſpath blanc, Quarz bleuvâtre & Mica noir.

Toutes ces varietés ſont de l'éſpéce de granit, dont on aſſure, qu'il contient quelque ſoit de differentes mines, & même dit on, que les mines d'Étain en Saxe & en Bohême giſſent dans une éſpéce de granit. Le Saxum fuſorium n'eſt qu'un granit decompoſé, & ſert d'envellope aux mines d'Étain criſtalliſées en Bohême (Gmelins Linnée p. 620.) Pluſieurs de ces granits roulés de Ladoga ne cedent aucunement aux grantis orientaux, pour la dureté & la beauté.

29.) Quarz brun reſſemblant au Pétroſilex, Feldſpath brun rougeatre, & Mica jaune. On en trouve de pareille en Smolande & dans la Finnlande Suedoiſe, & Mr. de Linnée deſigne cette éſpéce, ſous le nom de Saxum molinum.

30.) Feldſpath, mica, & Quarz.

a)

a) Feldſpath presque compacte, Mica verd, & Quarz rougeâtre & en forme de grains.

b) Feldſpath blanc, Mica noir, & Quarz gris.

31.) Feldſpath brun rougeâtre, Mica noir, & Schoerl verd.

32.) Quarz gris, Mica noir, & grenats. Quelque fois le *Saxum alpinum* ſe rapproche de cette éſpéce par l'addition du Quarz, & ſe trouve aux mêmes endroits que j'ai cités au N. 17.

33. Feldſpath jaunâtre, Quarz griſâtre & de la Plombagine.

34.) Feldſpath rouge en particules trés minces, Quarz blanc, & ſchiſte micacé. Le Feldſpath eſt melé avec le Quarz & le ſchiſte micacé récouvre cette melange de deux cotés.

C. *De quatre parties conſtituantes.*

35.) Feldſpath gris jaunâtre, Quarz verdâtre, Mica & Schoerl noirs. Le Quarz devient en quelques endroits auſſi bien feuillete que le Feldſpath. Le Schoerl étant beaucoup de fois trés decompoſé n'a aucun éclat.

36.) Feldſpath jaune, Schoerl ſpathique noir, Quarz blanc & Mica noir.

37.) Feldſpath jaune & Feldſpath rouge jaſpitique, Quarz brun & Schoerl noir. Mr. Haydinger cite un pareille exemple de Bohéme.

38.) Feldſpath rouge, Quarz brun & gras, Steatite jaune verdâtre, & Mica argentin. Mr. de Sauſſure & Mr. Hay-

Haydinger citent de pareilles exemples de différents endroits.

39.) Feldſpath brun en petites parcelles, Mica noir en ſtries, des taches de grenats & Quarz blanc.

40.) Feldſpath jaune rougeâtre, Schoerl noir ſpathique, Mica noir, Mica jaune & Quarz blanc.

Une choſe tout à fait particulière à nos pierres de roche compoſées, c'eſt qu'il eſt trés rare d'y trouver du Schoerl. La partie la plus abondante eſt le Feldſpath, puis ſuit le Mica; Le Quarz n'y eſt en général, qu'en trés petite quantité. Mais quelques ſoyent leurs parties conſtituantes, j'ai obſervé, qu'à peine commence t-elle à ſe décompoſer qu'elles jauniſſent à leur ſurface, & forment enfin une écorce ferrugineuſe argilleuſe, entremelée de beaucoup de Mica jaune luiſant. Mais en même tems faut-il rémarquer, que ſi c'eſt le Quarz, qui abonde, l'écorce en eſt plus dûre, & ne contient que peu d'argille, & point de Mica. Si c'eſt le Feldſpath, l'écorce en eſt rouge & trés ferrugineuſe; même elle eſt ſouvent entremelée de Mica. Le Mica enfin quelque ſoit ſa couleur dans ſon état naturel, jaunit toujours ou devient rouge aux endroits qui ſont expoſés aux viciſſitudes de l'air. Si c'eſt le Feldſpath qui abonde, le Mica de l'écorce n'eſt que jaune; ſi c'eſt le Mica qui faiſoit la plus grande quantité, alors le Mica decompoſé de l'écorce, preſente pour la pluspart des couleurs de gorge de pigeon. Le Mica de nos granits eſt presque toujours noir. Rien n'eſt de plus aiſé d'aprés ces obſervations. que de conclure, que peut étre donc nos granits & autres pierres de roche compoſées, qui contiennent du Mica différemment coloré, peut étre, dis

je,

je, ne ſont ils plus dans leur état naturel, & ont commencé à ſe décompenſer; une rémarque, qui me paroit d'autant plus digne d'attention, que pluſieurs de ces éſpeces de pierres ſervent d'envellope à quelques éſpéces de mines, comme je l'ai cité plus haut. Car eſt ce dans leur état naturel qu'elles ſont plus avantageuſes pour les mines, ou ſi c'eſt dans l'état de decompoſition? Et ſi ma rémarque eſt juſte, il ſera plus aiſé de decider ce doute, & de fixer l'état favorable & pour les mines & pour leurs récherches, ſans faire mention des récherches phyſiques ſur les montagnes en général qui n'en feront que profitér.

Les pierres de roche compoſées où la Hornblende prédomine, deviennent vertes dans leur état de dècompoſition, & ſont ordinairement enduites d'une écorce raboteuſe & verte, ſans mica & autre melange viſible. On eſt même d'aprés cette écorce aſſez ſûr d'y trouver de la Hornblende.

Enfin le Feldſpath preſente des phénomenes dignes de toute attention ſerieuſe des phyſiciens. Pluſieurs minéralogiſtes y ont trouvé danalogie avec le Schoerl. Sans conteſter leur opinion, je rémarque que j'y ai trouvé plus d'analogie encore avec le Jaspe; car il y a du Feldſpath où d'un coté on voit toute ſa forme ſpathique & ſon air luiſant, & de l'autre il eſt ſouvent compacte, terreux & a tout l'air d'un jaspe rouge ferrugineux. J'ai des échantillons, qui le prouvent trés évidemment. Mais il faut rémarquer, qu'alors le Feldſpath eſt dans un certain degré de décompoſition, & qu'il ne paſſe au Jaspe que dans cet état.

Encore une obſervation & qui eſt de la plus grande importance, c'eſt que dans tous les granits, que l'on apporte de Finlande pour la conſtruction de nos batimens &c. le Feldſpath git en taches toujours plus ou moins rondes. Que l'on ſe répreſente un vrai pouddingue, & alors on aura une idée de cette forme ſingulière du Granit. Ce ſont d'ailleurs de vrais Granits, qui conſiſtent de Feldſpath, Quarz & Mica, unis étroitement enſemble, & où l'on n'obſerve rien de l'état de décompoſition dont j'ai parlé plus haut. Mais le Feldſpath y eſt toujours en taches rondes entourées de Mica & de Quarz, & c'eſt une obſervation, que je n'ai faite qu'ici, & dont perſonne, ſi je ne me trompe, n'a fait mention encore. Mais elle eſt trés aiſée à faire à quiconque voudra jetter un coup d'oeil ſur les granits qui ſont employés à nos batimens ſuperbes. La couleur du Feldſpath eſt ordinairement jaune ou jaunatre. J'avoue que cela me frappa d'abord, & je penſais auparavant que peut être eſt ce le poli qui en eſt cauſe; mais les granits tout rudes preſentent les mêmes phénomes. Quelle eſt d'aprés cela la formation de nos Granits? J'éſpere de dévellopper mes idées la deſſus dans la dernière partie de l'Eſſay ſur les pierres de roche compoſées.

Pour le Quarz, il eſt comme je l'ai dit, ordinairement en moindre quantité & trés ſouvent en forme de grains, plus ou moins grands. Lorsqu'il eſt en plus grande quantité, il prend ſouvent par gradation une forme plus ou moins feuilletée, & s'unit alors tellement avec le Feldſpath, qu'ils ſemblent former une ſeule maſſe enſemble n'ayant aucun point de diviſion, de ſorte que le Quarz ſemble paſſer au Feldſpath. J'ai dit plus haut que le Feldſpath paſſe au Jaspe. J'éſpere de pouvoir démontrer tout celà par les échantillons, que j'ai ramaſſées.

Enfin plus les parties du Feldſpath ſont minces, & plus la roche, qui en conſiſte tend à ſe décompoſer.

Mais

Mais on voit bien & je l'ai dis tout au commencement que tout celà ne ſont que des pierres roulées. D'ou viennent elles? De quels monts ont elles été arrachées? De quelle contrée, de quel pays ſont elles venues occuper les marais de la Finnlande? Qu'il ſeroit à ſouhaiter, qu'on repaſſe encore une fois les montagnes d'Olonetz! oui; elles ſont dignes de toute l'attention des minéralogiſtes. Pluſieurs des combinaiſons que j'ai citées, favoriſent dans beaucoup de pays les mines les plus beaux & les plus riches. Quelques unes contienent de l'étain dans leur ſein. Quelle acquiſition ne ſeroit ce ſi l'on parviendroit à découvrir leur vrai lieu natal! Quel bel éſperance n'auroit on pas d'avoir un moyen de plus pour embellir les chefs d'oeuvres de la Ruſſie. Les pierres de roche de Suede & de Norvége qui ſont à beaucoup de prés de même nature renferment dans leurs entrailles de l'or & de l'argent. Mais peut être nos pierres roulées ont elles été entrainées de beaucoup plus loin que n'eſt le cercle des monts d'Olonetz, & alors, dira-t-on, toutes nos récherches feront inutiles à cet égard. Oui, à cet égard peutêtre; mais les montagnes d'Olonetz en ſont dignes pour bien d'autres, & je conclue cet article par la rémarque que jamais les récherches phyſiques ne peuvent être tout à fait vaines.

DISSERTATIONIS
DE
ACIDI ACETI CRYSTALLISATIONE
CONTINVATIO
EXHIBENS VARIAS EIVS ET RECENS DETECTAS METHODOS.

Auctore
TOBIA LOWITZ.

Conuent. exhib. die 29 Sept. 1791.

§. 1.

Prima a me inuenta, quam Ill. Academiae in priori mea hoc de argumento dissertatione (*) exposui, acidum aceti ad formam crystallinam perducendi methodus, eo adhuc visa mihi ipsi est incommodo laborare, quod ex omni in aceto contenta acidi quantitate non nisi perexiguam eius partem sub crystallorum forma segregare mihi licuerit, ita, vt acetum tale glaciale, ista mea methodo paratum, curiosi magis quam vtilis producti chemici nomen vendicare sibi potuerit.

Producti huius tam praestantia, quam elegantia et phoenominorum ipsius varietate adductus, omnem, quam potui, operam in eo collocavi, vt breviorem concretum hoc praeparandi methodum invenirem, qua id efficeretur, vt omnes in

(*) Vid. Noua Acta Acad. Imp. Scient. T. VII.

in data aceti quantitate contentae partes acidae ſub pulcherrima hac cryſtallorum forma elici poſſent. In quo negotio quantum habuerim ſucceſſum, me quidem iudice proſperrimum, ex ſequentibus patebit.

§. 2. Concentrationis gradum vel fortitudinem, ad quam acetum quodcunque reducere mihi licuit, brevitatis cauſſa, hac in diſſertatione per gradus exprimam, quos ita ſtatuere conſuevi, vt aceti ad examen reuocandi drachmae vni 5 guttas ſolutionis alcalinae e ſalis tartari ſicci et aquae purae partibus aequalibus paratae inſtillarem, tot vicibus, donec in mixtione, obtento ſaturationis puncto, ad inſtar flocculorum promta particularum terrearum oriatur praecipitatio; quo viſo, concentrationis gradum numero deſigno, qui ſignificat, quot vicibus 5 dictae ſolutionis guttas huic negotio impendere debuerim. Si igitur e. g. aceti cuiusdam fortitudinem 6 graduum eſſe dicam; intelligendum eſt, aceti huius drachmam vnam ſexies 5 guttas, id eſt, 30 guttas dictae ſolutionis ad ſaturationem poſtulare; cuius deſignandi rationis vſus et commoditas infra patebit. Atque hic quidem liceat mihi breuitatis cauſſa etiam ſequentes ſtabilire determinationes: acetum concentratiſſimum, quod vehementi frigori expoſitum cryſtalliſationem ſubit, *acetum cryſtalliſabile*; obteutas hac operatione cryſtallos a relicta parte liquida ſeparatas, *acetum glaciale*: et partem liquidam a cryſtallis decantatam, *muriam aceti* nominabo.

Cum porro acetum glaciale ipſum variis adhuc fortitudinis gradibus gaudere poſſit; id aceti acidum, cuius fortitudo ne vllo quidem artificio intendi amplius poteſt, *acetum glaciale fortiſſimum*; hoc vero tenuius, *acetum glaciale debile*, appellabo.

§. 3. Permultis experimentis ſequentia reperi:

1.) Acetum, vt, vehementiſſimo frigori expoſitum, cryſtallorum formationi aptum ſit, fortitudine ad minimum 29 vel 30 graduum pollere debet. Huiusmodi acetum cryſtalliſabile non niſi frigore 190 vel 195 graduum Scalae de Lislianae cryſtallos generat: quo fortius vero hoc acetum eſt, eo minus ad cryſtalliſationem frigus exigit. Vnde liquet, omnem rei cardinem ad conficiendum acetum glaciale in eo inprimis verti, vt aceto dictus concentrationis gradus concilietur.

2.) Aceti glacialis debiliſſimi fortitudo ad minimum 42 graduum eſſe debet; maxima vero 54 graduum eſt, vltra quos concentratio nullo modo intendi poteſt. Hoc aceti acidum, ſi congelatum eſt, vt formam liquidam recuperet, calorem 125 graduum Delislianorum expoſcit.

3.) Muria aceti, ſive relicta a prima vel ſecunda aceti cryſtalliſabilis cryſtalliſatione pars liquida, ſi a phlegmate ſuperuacuo leniſſima deſtillatione liberetur, novae cryſtallorum concretioni apta redditur.

§. 4. Aceti in acetum cryſtalliſabile et glaciale modo dicta diſtributio quamuis reſpectu fortitudinis relatiua tantum ſit, ita vt aceti acidum eiusmodi fortitudinis parari queat, de quo, vtrum acetum cryſtalliſabile fortiſſimum, an glaciale debiliſſimum appellandum ſit, dubitari queat; varia tamen memoratu haud indigna inter ea intercedunt diſcrimina, eaque eo evidentiora, quo magis aceta haec fortitudine a ſe inuicem diſcrepant.

a) Acetum cryſtalliſabile debile non niſi vehementiſſimo frigore; acetum contra glaciale fortiſſimum interdum aeſtiua quoque tempeſtate frigida 130 graduum Scalae Delislianae in cryſtallos coit.

b) In aceto cryſtalliſabili cryſtalli formantur regulares, rhomboideae et prismaticae, glaciei ad inſtar puriſſimae, pelluciditate pulcherrima praeditae, aceti liquidi copia ſuperſtite.

Acetum vero glaciale per totam molem coagulatur, in maſſam albam camphorae aemulam abit, et hoc ipſo momento miram aquae gelaſcentis ſimilitudinem offert.

c) In aceto cryſtalliſabili pars acida, perinde ac in aliis ſalium ſolutionibus, larga quantitate aquae ſolutionis diluta eſt, vel aliis vt vtar verbis: acetum cryſtalliſabile non niſi acidi aceti ſolutio eſt, ad cryſtalliſationis punctum vsque perducta, acetum vero glaciale fortiſſimum non niſi aquam cryſtalliſationis continet; vnde fit, vt gradu caloris neceſſario ad liqueſcentiam orbata, omnis quanta eſt, maſſa congeletur. Comparationis cauſſa ſal mirabile ſic dictum Glauberi allego: cryſtalli ſalis huius ob largam, quam continent, cryſtalliſationis aquam, leuiſſimo etiam calore liquefiunt, eamdemque ob cauſſam et acetum noſtrum glaciale accedente iuſto caloris gradu liqueſcit.

Aquae ſic dictae cryſtalliſationis in aceti acido alia atque alia quantitas eſſe poteſt, vnde aceti glacialis fortitudo varia a 42 gradibus ad 54 vsque gradus originem repetit.

§. 5.

§. 5. Tentaminibus indubiis infra exponendis certo certius compertum habeo, acetum glaciale aqua cryſtalliſationis nulla poſſe arte prorſus priuari. Quam primum enim acetum glaciale ad 54^{mum} fortitudinis gradum perductum eſt; ſi aquae cryſtalliſationis maiorem adhuc copiam ei adimere velis, aceti acidum ex parte in aëris formam ſoluitur, ita, vt fortitudo ipſius vltra dictum gradum nulla encheireſi augeri queat; cuius rei cauſſa, me quidem iudice, ex particularum ignearum ſumma inter ſe appropinquatione repetenda videtur, vnde quoque cryſtallorum aceti facillima liqueſcentia intelligitur; a qua ſententia mea non diſſidet id, quod chemicorum peritiſſimi vno ore iam dudum affirmabant, acetum prae omnibus ceteris acidis vegetabilis proſapiae largiori particularum ignearum copia praeditum eſſe.

§. 6. In priori mea de cryſtalliſatione aceti diſſertatione ita ſenſi, vt, acetum cryſtalliſabile ex ſola aceti frigore concentrati rectificatione ſuper carbonum pulvere originem repetere, putarem, carbonumque non eſſe in hoc negotio niſi eam vim, vt ſuperſtitem in fine deſtillationis in carbonibus aceti fortiſſimi partem a copioſis particulis empyreumatico-oleoſis depurarent. Inſtitutis vero poſtea permultis tentaminibus, carbones ex alia etiam parte ſymbolum ſuum ad hoc negotium conferre, edoctus ſum. In carbonibus nimirum, praeter dephlogiſticatricem, aliam adhuc vim ſingularem reperiri, qua efficitur, vt carbonum puluis, in quacunque aceti frigore concentrati ſuper eum rectificatione particularum acidarum certam et determinatam quantitatem in ſe recipiat, eiusque ita tenax ſit, vt non niſi calore, eo feruentis aquae, longe vehementiori ſub aceti cryſtalliſabilis forma ex eo expelli poſſint.

§. 7.

§. 7. Singularis huius carbonum proprietatis (§. 6.) cognitioni ſequentem nouiſſimam pulcherrimamque aceti concentrandi et cryſtalliſandi methodum debeo.

Aceti vini deſtillati, a particulis ſpirituoſo-inflammabilibus liberati, quantitas quaelibet frigore quantum fieri poteſt concentretur. Acetum hoc concentratum, ſuper quartam carbonum pulueris partem ex mariae balneo euocetur, donec ne vna quidem guttula amplius tranſcenderit. Poſtea retorta cum remanente in ea carbonum puluere arenae balneo immergatur, ignisque ſenſim ſenſimque augeatur, donec per tria ſubinde temporis ſecunda gutta guttam ſequatur. Quam primum deinde guttae per 20 temporis ſecunda decidunt, acetum cryſtalliſabile transgreſſum effundatur in vitrum: nunc enim liquor longe debilior ſequitur. Vaſe refrigerato, remanenti in retorta carbonum pulueri affundatur deſtillatum primum mariae balneo obtentum, iterumque deſtillatio ex mariae balneo inſtituatur, qua finita, retorta perinde ac ante cum remanente carbonum puluere in arenae balneum tranſportetur: ſicque priori aequalem aceti cryſtalliſabilis nouam portionem obtinebis.

Atque hac ratione omnes impenſi aceti particulae acidae in acetum cryſtalliſabile redigi poſſunt, ſi operationes dictae eousque repetantur, donec deſtillatum ex mariae balneo obtinendum omnibus particulis acidis deſtitutum et aquae inſtar inſipidum prorſus tranſierit.

Quo acetum, dicto modo ex arenae balneo obtentum, ſummam contentrationem ſubeat et in acetum glaciale rediga-

 tur;

tur; omnia deſtillata, variis vicibus obtenta, miſcenda et hyemali tempore vehementiori frigori exponenda ſunt: peracta demum cryſtalliſatione, muria aceti ab aceti cryſtallis probe decantetur. Muria haec a cryſtallis decantata, ſi dimidia eius pars debilior leniſſima deſtillatione abſtrahitur, nouae cryſtallorum formationi apta redditur.

Hac methodo ex alcoholis aceti frigore ad 19 fortitudinis gradus redacti libris 10 per 12 dierum interuallum deſtillationibus e duabus retortis ſuper 5 carbonum pulueris libras quinquies repetitis 38 vncias aceti cryſtalliſabilis, et ex his 20 aceti glacialis vncias obtinui.

§. 8. De methodo hic expoſita etiam ſequentia notaſſe, non erit alienum.

a) Quod in hac methodo, cuius benificio acetum, ſine vllo alius corporis connubio, ad ſummum concentrationis gradum perducitur, pulcherrimum eſt, in eo conſiſtit, quod vno eodemque medio, carbonum puluere, duplex vſus obtineatur, aceti nimirum et concentratio et ab inhaerente empyreumate depuratio.

b) Sic et cryſtalliſatio acidi aceti vno quoque eodemque tempore tam ſummam concentrationem, quam perfectiſſimam depurationem efficit, ſiquidem hoc in caſu eae etiam, quae carbonibus ab aceto ſegregari nequeunt, partes heterogeneae in muria aceti ſuperſtites a cryſtallis quam perfectiſſime ſeparantur.

c) Si acetum frigore concentratum ſuper vna carbonum pulveris libra abſtrahitur, quauis deſtillatione 10 et quod excurrit; ſi ſuper duabus libris, 20; ſi ſuper tribus, 30 obtinentur aceti cryſtalliſabis drachmae, ita vt obtinenda

nenda e ſingulis deſtillationibus aceti cryſtalliſabilis quantitas impenſae pulueris carbonum quantitati proportionalis ſit.

d) Aceti huius cryſtalliſabilis fortitudo 36 vel 40 graduum eſſe ſolet.

e) Minimus frigoris gradus, quo acetum hoc cryſtalliſabile ſua ſponte in cryſtallos coit 173^{mus} Scalae Delislianae eſt; at infra talem monſtrabo encheireſin, cuius ope cryſtalliſatio eiusdem frigore longe debiliori effici queat.

f) In prima ſuper carbonum puluere deſtillatione acetum cryſtalliſabile flavo tranſit colore; ex omnibus vero deſtillationibus ſequentibus ſuper eodem carbonum puluere aquae inſtar limpidiſſimus liquor eſt.

g) Ex aceto cryſtalliſabili fortitudinis 38 graduum frigore 183 graduum, acetum glaciale 54 graduum obtinui et muriam ab eo decantatam 28 tantum graduum deprehendi.

h) Aceti glacialis muria igne vel leniſſimo deſtillationi ſubmiſſa colorem tamen fuſcum contrahit, ſub deſtillationis fine nigreſcentem. Deſtillatione demum igne quam moderatiſſimo abſoluta, magmatis nigricantis nonnihil, extractiformis, inſipidi fere, omnique aciditate carentis in retorta remanet, quod magma cum ſpiritu nitri fumante tractatum acidi ſachari cryſtallos pulcherrimas facillime largitur.

i) Magma hoc, quod acido-ſaponaceae naturae eſſe videtur, aceti acido tam arcte adhaeret, vt, ſi a cryſtalliſationis adminiculo diſceſſeris, nec carbonum puluere neque etiam repetitis deſtillationibus, ſeparari ab aceto

 per-

perfecte queat. Haecque ipsa substantia in aceto destillato pertinaciter superstes, ea est pars heterogenea, quae Cl. D. Amburgerum in eam deduxit sententiam, vt contra egregiam acidorum vegetabilium theoriam a Viris Cel. Westrumbio et Hermbstaetio prolatam, aceti acidum in acidum sachari transformari posse falso sibi persuaderet; qualem quoque transformationem complures iique peritissimi chemici negarunt iam dudum aceti acidum ab omnibus partibus heterogeneis liberatum subire posse, atque ego quidem ex aceto meo glaciali purissimo acidi nitri concentratissimi atque adeo dephlogisticati adminiculo, acidi sachari ne hilum quidem obtinui.

k) Ex hac quoque materia saponacea empyreumatis et coloris flaui origo repetenda est, quo acetum et salinae eius praeparationes imbui solent.

l) Balneo mariae ignis arenae substitui potest, id quod, siquidem ignis iusto regimine coerceatur, maximum et laboris et temporis compendium affert; successus hoc in casu eo inprimis nititur, vt versus destillationis finem, incipiente aceti crystallisabilis transitu, receptaculorum commutatio opportuno tempore fiat, et in obseruanda hac regula summa cautio adhibeatur.

m) Cum, finita quacunque destillatione, antequam nova instituti queat destillatio, vasa refrigerari oporteat, duas ad hoc negotium adornari retortas conuenit, quarum alterno vsu insigne temporis compendium obtinetur.

Atque haec sunt omnia, quae de aceti crystallisabilis et glacialis praeparatione carbonum puluere perficienda notatu dignissima mihi visa sunt.

§. 9.

§. 9. Forma acidi aceti cryſtallina cum haud parum atque eo magis mira mihi initio viſa fuerit, ideo imprimis, quod hucusque acetum meum glaciale non niſi mediante carbonum puluere obtinui; fateor, me ſaepius ambiguum haeſiſſe, merumne aceti acidum ſit quod obtinui concretum cryſtallinum, an vero, carbonum acceſſu, mixtionis et naturae ſuae reſpectu iam quodammodo mutatum? hanc tamen vanam fuiſſe ſuſpicionem, ſequenti experimento didici.

EXPERIMENTVM I.

Aceti deſtillati, frigore concentrati et fortitudinis 12 graduum Libras 12 deſtillatione per ſe, id eſt, ſine carbonum additione, e cucurbita altiore, alembico inſtructa, igne moderatiſſimo ad ſex circiter remanentis vncias abſtraxi; quo facto, empyreumaticum et fuſci admodum coloris reſiduum, vt a copioſioribus heterogeniis particulis empyreumatico-oleoſis liberarem, ad ſiccitatem vsque e retorta deſtillaui, ſic, prima debiliori parte ſeorſim excepta, vncias tres aceti flaui valde empyreumatici obtinui, cuius fortitudinem cryſtalliſationi aptam, 34 nimirum graduum, deprehendi; et reapſe acetum hoc frigori 181 graduum expoſitum cryſtallos formauit, ſi ab empyreumate, quo fuerunt imbutae, diſceſſeris, iis prioris aceti mei glacialis perfecte aemulas.

Acetum igitur abſque carbonum additione ad cryſtallinam adeo formam reduci poteſt. Ceteroquin methodus haec, etſi prima fronte videtur quam ſimpliciſſima, valde attamen et operoſa et taedii plena eſt, propter tarditatem operationis non minus quam propter empyreuma, quo acetum inficitur, copioſiſſimum.

§. 10. Vt viderem, poſſitne acetum glaciale obtineri, etiam ſi non niſi debile acetum deſtillatum ordinarium loco aceti concentrati adhibeatur, ſequens tentamen inſtitui.

EXPER. II.

Libras 30 aceti ordinarii deſtillati admodum debilis ſuper duas carbonum pulueris libras e mariae balneo abſtraxi. Deſtillatione hac difficillima aquoſum prorſus fluidum obtinui, nulla fere aciditate gaudens. Superſtes vero in retorta carbonum puluis e balneo arenae drachmas 12 largiebatur aceti cryſtalliſabilis puriſſimi 40 graduum, quod in frigore cryſtalliſatum aceti glacialis optimi 4 drachmas ſuppeditabat.

Hinc ſequitur, acetum glaciale etiam ſine praeuia aceti congelatione parari poſſe. Monendum tamen, praeviam aceti congelationem quam maximae eſſe vtilitatis, quia hoc modo maxima aquae copia antea ſeparatur, deinde quoque, quia per maiorem concentrationem et aceti volatilitas augetur; quo ipſo deſtillatio ſuper carbonum puluere inſigniter acceleratur.

§. 11. Supra iam dixi, acetum cryſtalliſabile ad ſpontaneam cryſtalliſationem frigus ad minimum 173 graduum poſtulare (§. 8. e.) Contigit tamen mihi encheireſin inuenire, qua acetum cryſtalliſabile frigore longe minori, 158 nempe graduum, ad cryſtalliſationem perducitur; pro quo tamen negotio acetum glaciale iam confectum ad manus ſit oportet.

EXPER. III.

Elychnium tenue goſſypinum (cui, ſi placet, et filum quoddam ſubſtitui poteſt) aceto glaciali fortiori liquefacto immerſi, et hoc ad cryſtalliſandum diſpoſui, idque eo fine, vt

cryſtal-

cryſtalli nonnullae aceti glacialis elychnii ei immerſi extremitati adhaererent; poſtea elychnium hoc, in vitro acetum cryſtalliſabile continente frigorique 158 graduum expoſito, ſuspendi ea ratione, vt elychnii extremitas cryſtallulis ei adhaerentibus onuſta aceti ſuperficiem tangeret, quo facto, cryſtalliſationis primordia iucundo oculis ſpectaculo ſine mora vidi; initio enim magna vis cryſtallulorum in ſuperficie oriri coepit, qui niuem mentiti fundum petebant; breui poſt cryſtallos radicatas diuergentes et ociſſime in longum creſcentes goſſypii extremitati, penicillorum ad inſtar, adhaerere vidi, ita, vt vnius horae ſpatio pulcerrima aceti noſtri cryſtalliſatio plane abſoluta fuerit.

Singularis et elegantis effectus huius cauſſa ex ea acidi aceti proprietate repetenda eſt, qua id alium cryſtalliſationis, liquefactionis alium temperiei gradum habet.

Duplex eſt encheireſis huius vtilitas, ſiquidem eius ope aceti cryſtalliſatio non minori ſolum frigore perficitur, ſed magnae etiam et regulares oriuntur cryſtalli, a quibus ſuperſtes muria facillime et ſine mora decantari poteſt. Adde quod debilius quoque acetum, ac ſupra (§. 3. n. 1.) nominaui, 24 nempe graduum, cryſtalliſationi encheireſis huius adminiculo aptum ſit, dummodo hoc in caſu frigus quam vehementiſſimum in auxilium vocetur.

§. 12. Tentaminum hucusque deſcriptorum omnium proſperrimus ſucceſſus non incitare me non potuit, vt, poſſitne acetum glaciale aliis adhuc parari modis, experirer; idque ideo imprimis, quod cum nunc cognouerim concentrationis gradum, quem acetum, vt certo frigoris gradui expoſitum in cryſtallos coire queat, poſtulat.

EX-

EXPER. IV.

Die 18 Februarii anno 1789 e sodac acetosae siccissimae vnciis 27, adiuuantibus 18 acidi vitrioli concentratissimi vnciis, methodo consueta Cl. Westendorfii, alcoholis aceti fortitudinis 32 graduum vncias 13 destillatione elicui. Acetum hoc, frigori 174 graduum per noctem expositum, elychnio gossipino, cui aceti glacialis crystalluli adhaerebant (Exper. III.) tactum, breui post tempore in pulchras prismaticas, nitri ad instar, crystallos concreuit pollices tres longas, ita, vt post noctem, frigore ad 182 vsque gradus aucto et decantata superstite parte liquida, vnica hac crystallisatione drachmas 27 cum dimidia aceti glacialis obtinuerim. Muriam dictam a crystallis decantatam fortitudinis 24 graduum destillationi super duabus pulueris carbonum libris e mariae balneo subieci. Acetum hac destillatione obtentum suauis purissimique erat odoris et 16 fortitudine graduum. E superstite vero carbonum puluere aceti crystallisabilis valde sulphurei $22\frac{1}{2}$ drachmas ex arenae balneo obtinui: Acetum hoc crystallisabile etiamsi fortitudinis erat nonnisi 36 graduum, frigore tamen 163 tantum graduum sponte, aceti glacialis more, penitus fere in massam concreuit crystallinam.

§. 13. Crystallisationis phoenomena huius aceti quod attinet; ea consimilia prorsus sunt iis aceti glacialis ope pulveris carbonum parati. Ex quo, mea quidem sententia, videre est, acetum suo cum aliis corporibus connubio naturae suae mutationem subire nullam.

§. 14. Eo nunc cum peruenissem, vt descriptis duabus, a se inuicem longe diuersis, methodis (§. 7 et 12.) hyemali quidem tempore, facili negotio acetum glaciale pararem; nihil mihi magis in votis fuit, quam, vt talem exploraplorarem viam, qua acidum aceti absque frigoris adminiculo; quacunque anni tempestate, ad formam redigi crystallinam posset.

Media, quibus aceto per eius cum corporibus alcalinis terreisque et metallicis connubium partes aqueae adimi prorsus possunt, satis superque nota sunt, nec latent ea, quibus aceti acidum a corporibus dictis sibi vnitis liberari queat. Primum inter haec locum procul dubio oleum vitrioli sibi hucusque vindicauit. Enim vero acidum hoc quantumuis concentratum sit, tamen aquae nonnihil fouet, qua aceti acidum sub destillatione semper rursus diluitur, et aceti quidem crystallisabilis, neutiquam vero glacialis formam induit. Vt itaque acetum a corpore sibi iuncto sub glaciali forma segregetur; substantiae prorsus siccae adminiculo, qualis est ipse sal aceti, vt perficiatur separatio, necesse est. Quae dum animo mecum perpenderem totusque essem in eo, vt aptum separationis medium detegerem: dies 28 Februarii anni 1789 diuturni laboris optatissimum tandem finem attulit. Nonnullis nimirum abhinc iam annis in residuo quodam a liquore anodino Hoffmanni crystallos salinas singularis formae fortuitu inueneram. Salem hunc tartarum fuisse vitriolatum vitriolico acido supersaturatum, examen chemicum me docuerat (chemische Annalen St. 10. S. 300).

Ea acidi vitriolici pars, qua alcali fixum vegetabile supersaturatum est, sali huic non sicca tantum forma sed adeo etiam leuiter adhaeret, vt via tam sicca per candescentiam, quam humida, aliarum substantiarum absorbentium adminiculo, separatu a tartaro vitriolato facillima sit. His omnibus spem concepi, fore, vt acidum vitriolicum superuacaneum sicca forma in hoc sale latens medium separationis aceti sub glaciali forma aptissimum praebeat; qua spe adductus sequentia tentamina institui.

EXPER. V.

Calcis acetatae grana 10, et tartari vitriolati ſuperſaturati totidem in mortario lapideo exactiſſime contrivi; durante tritura hac aceti odorem percipere nullum potui; ſtatim vero, ac pulueri huic ſicco aliquot aquae frigidae guttas admiſcuiſſem, vehementiſſimus aceti odor oriebatur.

EXPER. VI et VII.

Aequalem dictae mixtionis quantitatem (Exper. V.), forma pulueris ſicciſſimi, ſine aquae additione, vitro paruo immiſi, vitrumque, orificium ipſius digito claudens, flammae candelae oblique admoui; ſic breui tempore in vitri parte deorſum verſa duae vel tres liquoris guttae colligebantur, quas loco frigido expoſitas maxima cum voluptate mea acetum glaciale imitari obſeruaui.

Effectum aequalem vidi, cum calcis acetatae loco, ſodam acetoſam pari ratione cum tartaro vitriolato ſuperſaturato tractauiſſem.

§. 15. Antequam plura maiorique quantitate inſtituere experimenta potuerim; definita methodus tartarum vitriolatum ſuperſaturatum conficiendi inueſtiganda mihi erat. Miſſis omnibus hunc in finem a me ſuſceptis tentaminibus, non niſi eum procedendi modum, qui optimus eſſe mihi viſus eſt, hic exhibebo.

In cucurbita vitrea debitae capacitatis colloque longiori inſtructa partes 7 olei vitrioli cum aequali aquae purae quantitate commiſceantur. Mixtioni fervidiſſimae adhuc 4 alcali fixi vegetabilis depurati partes ingerantur, idque interuallis, quantum pro exoriente inde inſigni efferueſcentia fieri poteſt, breuiſſimis, ne ne refrigeratus liquor perfectae ſalis ſolutioni impedimentum afferat. Mixtis omnibus et frigeſcente ſolutione, tartarus vitriolatus ſuperſaturatus in pulchras magnasque cryſtallos coit rhomboidales, quae, omnibus probe refrigeratis, et decantato ſuperſtite liquore in ſimilem vſum aſſeruando, bis vel ter aqua frigida quam citiſſime abluantur, leuique calore ſiccatae in puluerem ſubtiliſſimum conterantur, denuo probe ſiccandum, quotiescunque in vſum fuerit reuocandus.

§. 16. Parata hoc modo ſatis larga huius ſalis copia, ipſa tentamina, acetum glaciale eius ope parandi, adgreſſus ſum.

EXPER. VIII.

Debitam miſcendorum proportionem, cuius praeuia cognitione mihi potiſſimum opus erat, ſequenti ratione exploravi.

Sodae acetoſae grana 6 in cochleari argenteo candela calefacto parua aquae quantitate diſſolui; ſolutioni tantum quantum per euaporationem abierat aquae, ſubinde reddidi, eique iterum iterumque granum vnum tartari vitriolati ſuperſaturati admiſcui, donec quod vltimo admiſcuiſſem granum aceti odorem produxiſſet nullum; quo tentamine didici, tres partes ſodae acetoſae pro aceto plene expellendo quatuor ſalis noſtri acido vitriolico abundantis partes poſtulare.

§. 17. Poſtquam hac ratione proportionem miſcendorum via humida inueſtigaſſem; eandem ſicca quoque via per ſequentia tentamina explorare non praetermiſi.

EXPER. IX.

Sodae acetoſae ſicciſſimae drachmas 12; tartarique vitr. ſuperſaturati drachmas 16, ſeorſim in puluerem ſubtiliſſimum redactas probeque ſiccatas et commixtas, deſtillationi in arenae balneo ſubieci. Applicatis applicandis ignem ſubdidi vehementem, quo mixtio breui tempore liquefacta in pultem bullas magnas et ſpiſſas extrudentem abiit. Stillante deinceps liquore receptaculum bis mutaui. Finita deſtillatione, drachmas ſex cum duobus granis aceti glacialis, turbidi et flavo colore, odoreque admodum ingrato hepar ſulphuris olente praediti nactus ſum, cuius, quae media tranſiit adeoque concentratiſſima pars 50 graduum fortitudine pollebat. Reſiduum ſalinum maſſam duram, ſpongioſam illam et ex gryſeo nigricantem, ſiſtebat, cuius alcalinus ſapor impenſam tartari vitriolati ſuperſaturati quantitatem plenae 12 drachmarum ſodae acetoſae deſtructioni non ſuffeciſſe, remque aliter via ſicca ac humida ſe habere, indicauit.

EXPER. X.

Ex 12 Sodae acetoſae drachmis et 3 tartari vitr. ſuperſaturati vnciis, drachmas 7 et 40 grana aceti glacialis flavi coloris odorisque ſulphurei obtinui. Reſiduum ſalinum penitus quidem nigri coloris, ſaporis vero, quam ante, minus alcalini erat.

EXPER. XI.

Ex 12 Sodae acetoſae drachmis et 4 Tartari vitriolati ſuperſaturati vnciis, drachmas 8 cum granis 5 aceti glacialis obtinui.

EXPER. XII.

Sodae acetoſae drachmae 12 cum 6 tart. vitr. ſuperſaturati vnciis commixtae, 8 drachmas et 14 grana aceti glacialis largiebantur.

Am-

Amborum horum vltimorum tentaminum euentus, praeter maiorem, quam largiebantur, aceti quantitatem, ab eo priorum experimentorum IX et X, in fequentibus praecipue differebat:

a) Deftillatio longe facilius fucceffit, dum gutta guttam fingulis fecundis fecuta eft.

b) Acetum obtentum non pellucitate tantum, fed puritate quoque ac fortitudine erat maiori

c) Refiduum falinum in fuperficie quidem cinereum, in fundo vero albiffimum referebat colorem.

d) Sapore idem gaudebat non alcalino fed acido potius.

Praeterea mifcendorum proportionem quod attinet, ea, qua in Exper. XI. vfus fum, omnibus mihi antecellere videtur, vbi fodae acetofae quantitas ad eam tartari vitriolati fuperfaturati in ratione numerorum 3 et 8 fuit. Caeterum quae obtinetur hac methodo, tanta eft aceti glacialis copia, vt mihi quidem admiranda videatur, fiquidem 3 Sodae acetofae partes 2 aceti noftri partes largiuntur.

Experimentis his demum edoctus fum, receptaculum, fubftrato iam igne et ineunte liquoris ftillatione, prius adplicandum non effe, nifi expulfa iam humiditate; apparentes deinde in retortae roftro ftriae pingues, vaporesque albi, tranfeuntis ipfius aceti glacialis initium produnt. Ita quoque tranfiens in vltima deftillatione liquoris pars vtpote reliqua longe debilior feorfim eft excipienda.

§. 18. In omnibus tentaminibus paragrapho antecedente expofitis, quia materiam citiffime liquefieri huic negotio neceſſarium duxi, ignem impendi vehementem. At vero, quod vtique maxima mea cum moleſtia expertus ſum, acetum admodum empyreumaticum ſulphureumque odorem inde nunquam non affecutum eſt. Inſtitutis vero compluribus poſtea periculis didici, operationem hanc leniſſimo etiam, et qui fundendae materiae prorſus impar eſt, caloris gradu ſuccedere, acetumque inde aquae ad inſtar limpidiſſimum, exiguo duntaxat odore heterogeneo praeditum eadem facilitate nec non celeritate prodire.

EXPER. XIII.

Mixtio ſicciſſima, conſtans 18 vnciis ſodae acetoſae et 48 vnciis tartari vitriolati ſuperſaturati, deſtillatione igne leniſſimo peracta, vncias 11 cum drachmis 6 aceti glacialis fortitudinis 50 graduum ſuppeditauit, cuius periculi proſperrimus euentus, aceti glacialis praeparationem ſecundum methodum hanc largiori etiam quantitate ſuccedere, me edocuit.

§. 19. Cum ſalium in ſe inuicem augeatur actio, liquoris adminiculo ipſorum ſolutioni fauentis; tentamina ſupra deſcripta ſequenti ratione variari, e re mihi viſum eſt.

EXPER. XIV.

Mixtioni 3 tartari vitriolati ſuperſaturati vnciis et 12 Sodae acetoſae drachmis conſtanti, in retortam immiſſae, drachmas 8 aceti glacialis fortitudinis 46 graduum in antecedentibus tentaminibus obtenti, admiſcui blandoque igne deſtillationem inſtitui; quo facto, 15 drachmas cum 49 granis aceti glacialis 48 graduum obtinui. Reſiduum ſalinum ſimile prorſus fuit ei experimenti X, vbi tres quoque tartari vitriolati ſuperſaturati vncias adhibui, nigri ſcilicet coloris.

EX-

EXPER. XV.

E miſtione 4 tartari vitriolati ſuperſaturati vnciis, 12 Sodae acetoſae et 16 aceti glacialis drachmis conſtante, deſtillatione 24 drachmas cum 10 granis aceti glacialis obtinui. Reſiduum in ſuperficie album, in fundo vero nigricantem prae ſe ferebat colorem et acri linguam ſapore feriebat.

Duo haec pericula ſatis ſane comprobant, aceti glacialis nullam plane hac in operatione vtilitatem eſſe, acetum enim hac ratione obtentum nec qualitate neque etiam quantitate antecellere reperi.

§. 20. Cum in experimentis hucusque expoſitis non niſi eiusmodi obtinuiſſem acetum glaciale, cuius certe non erat ſumma fortitudo, id quod me quidem iudice ſuperſtiti in ſalibus aquae cryſtalliſationis debetur, tum quoque, vt explorarem, poſſitne acetum hoc orbum plane aqueis particulis a baſi ſua diuelli; tentamina ſequentia inſtitui.

EXPER. XVI.

Vt omnem cryſtalliſationis aquam e tartaro vitriolato ſuperſaturato expellerem, 4 eius vncias fuſioni in tigillo debito igne expoſui; ceſſante deinde ebullitione, ſal hoc ſuper laminam metallicam effudi, eique poſt refrigerationem in pulverem ſubtiliſſimum redacto 12 drachmas ſodae acetoſae ſicciſſimae admiſcui. E puluere hoc 7 drachmas aceti glacialis 51 graduum deſtillatione euocaui.

Etiamſi hoc in tentamine acetum maiorem quam ante conſecutum eſt fortitudinem: methodus tamen ipſa votis non plane ſatisfacere mihi videbatur, quandoquidem tartarus vitriolatus

olatus ſuperſaturatus, poſt fuſionem ita vitri ad inſtar dureſcit, vt non niſi difficillime in puluerem redigi queat.

EXPER. XVII.

Drachmas 26 ſodae acetoſae igne vehementiori liquefactas, in mortarium lapideum effuſas et in puluerem redactas, cum octo vnciis tartari vitriolati ſuperſaturati ſicciſſimi probe mixtas deſtillationi leniſſimo igne ſubieci; quo artificio 14 drachmas aceti glacialis 54 graduum laetabundus obtinui.

Vt nihil, quo aquoſae partes e ſalibus quorum tenaciſſimae ſunt, expellerentur, intentatum relinquerem: experimenta eadem ſequenti ratione variaui:

EXPER. XVIII.

Sodae acetoſae drachmas 26 fuſioni diuturniori, et vehementiore igne, quam in praecedente experimento, expoſui, qua pondus eius iacturam 3 drachmarum paſſum eſt. Eodem tempore in patina figulina vncias 8 tartari vitriolati ſuperſaturati, continuo agitando eas bacillo vitreo, per integram horam tali expoſui igni, vt, quantum fieri potuit, absque liqueſcentia aqua cryſtalliſationis omni priuarentur. Hac calcinatione pondus ſalis huius iacturam 3 drachmarum paſſum eſt. Binis his ſalibus probe mixtis et retortae immiſſis, deſtillationem adgreſſus ſum. Initio igne leniſſimo 4 aceti glacialis limpidiſſimi drachmae 54 graduum tranſierunt: aucto autem deinceps igne 10 adhuc aceti flaui coloris, at contra opinionem meam 46 tantum graduum conſcentus ſum.

§. 21. Vt explorarem, qua ratione tart. vitr. ſuperſaturatus ad alia aceti ſalia ſe haberet, ſequentia experimenta inſtitui:

EX-

EXPER. XIX.

Ex duodecim drachmis terrae foliatae tartari, debito igne fusis et cum 4 tart. vitr. superſaturati vnciis probe mixtis, deſtillatione blando igne drachmas 7 cum 21 granis aceti glacialis 52 graduum obtinui, odoris, quam id, quod ex ſoda acetoſa nactus ſum, certe purioris. Detrimentum vero duorum fortitudinis graduum ei ſine dubio terrae foliatae tartari tribuendum proprietati eſt, qua inſigni gaudet cum aëris aquoſis particulis affinitate; incommodum hoc, quod cum miſcentur ſalia locum obtinet, penitus tolli nulla arte poteſt, poteſt tamen imminui, maturando operationes, quibus ea in pulueres rediguntur, miſcentur et retortae immittuntur.

EXPER. XX.

Sachari Saturni, aqua cryſtalliſationis orbati, drachmae 12 cum 4 tartari vitriolari ſuperſaturati vnciis mixtae, deſtillatione drachmas 5 aceti glacialis ſatis puri praebuerunt: at deſtillatio haec non niſi vehementi igne perfici potuit, neque tamen niſi lento paſſu proceſſit.

EXPER. XXI.

Calcis acetatae drachmae 4 et tartari vitriolati ſuperſaturati vncia vna drachmas duas cum 45 granis aceti glacialis 44 graduum ſuppeditauerunt; quae methodus, licet minus ſumtuoſa ſit, id tamen incommodi habet, quod calcis acetatae perfecta ſiccatio valde ſit operoſa.

EXPER. XXII.

Florum viridis aeris vncia $1\frac{1}{2}$ cum 4 tartari vitriolati ſuperſaturati vnciis mixtae 9 drachmas aceti cryſtalliſabilis 40 graduum ſuppeditauerunt.

EXPER. XXIII.

Vnciae ſex florum viridis aeris in puluerem redacto-rum deſtillatione per ſe, 19 drachmas aceti radicalis ſic dicti largiebantur, quarum vltimae duae tantum nec niſi frigore 155 graduum cryſtallos formauerunt. Caeterum in aceto hoc coerulei coloris magna etiam vis cryſtallorum cupri acetati conſpiciebatur, hocque ipſum eſt acetum illud glaciale, quod Cl. Comes de Lauragais primus obſeruauit.

Hiſce factis, ſciendi cupidus, liceatne tartari vitrio-lati ſuperſaturati loco alia eodem fine ſubſtituere ſalia ſicca, ſequentia ſuſcepi pericula, eaque nominatim cum alumine, cremore tartari, acido puro tartari et mercurio ſublimato cor-roſiuo.

EXPER. XXIV.

Vncia vna ſodae acetoſae cum duabus aluminis crudi vnciis probe mixta, deſtillando vnciam vnam aceti lacteſcen-tis admodum ſulphurei coloris largiebatur, cuius fortitudo non niſi 12 graduum erat.

EXPER. XXV.

Sodae acetoſae vncia vna cum duabus aluminis vſti vnciis, deſtillatione drachmas duas cum 20 granis aceti 28 graduum flaui coloris et nauſeoſiſſimi odoris ſuppeditabat.

EXPER. XXVI.

Ex aluminis moderato igne aqua cryſtalliſationis pri-vati vnciis 4 cum ſodae acetoſae igne liquatae 12 drachmis, 10 drachmas cum dimidia aceti 20 graduum, limpidi quidem ſed ingrati odoris conſecutus ſum.

Quae

Quae tria tentamina, aceti glacialis productioni ineptum omnino alumen esse, satis vtique demonstrant.

EXPER. XXVII.

Crystalli tartari et terra foliata tartari quantitate perquam exigua cum aliquot aquae guttis probe contritae, aceti odorem spirabant plane nullum; attamen mixtio in cochleari modice calefacta vehementissimo aceti odore statim nares feriebat.

EXPER. XXVIII.

Terrae foliatae tartari igne liquatae drachmis 12 cremorisque tartari vnciis 4, probe mixtis, destillationique subiectis, non nisi tanto igne, qui tartarum destruit, 6 drachmas aceti debilis valde empyreumatici fuscique coloris obtinui.

EXPER. XXIX.

Acidum tartari siccum et terra foliata tartari, quantitatibus exiguis probe contrita, adiectis mistioni aliquot aquae guttis, fortissimum spirabant aceti odorem.

EXPER. XXX.

Ex duarum terrae foliatae tartari igne liquatae, totidemque acidi tartari sicci vnciarum mixtione destillationi subiecta vnciam vnam aceti 10 graduum valde empyreumatici fuscique coloris obtinui.

EXPER. XXXI.

Aceti a basi sua alcalina per acidum tartari separationem fortassis accessu aquae faciliorem fore, dum suspicarer, antecedens experimentum sequenti modo variaui.

Drachmis 12 terrae foliatae tartari retortae immissis, vncias duas lixiuii acidi tartari, euaporatione ad crystallisationis fere punctum redacti, admiſcui; vbi quidem id notatu dignum mihi viſum eſt, quod mixtionis tempore inſignis materiae calor isque ſine vlla aceti expulſione, exoriretur. Postea, miſtione hac deſtillationi ſubmiſſa, vnciam vnam aceti debilis valde empyreumatici et fuſci coloris aſſecutus ſum.

Cremor ergo tartari acidumque eius purum, aeque ac alumen, aceti glacialis ſeparationi inſeruire plane non poſſunt.

EXPER. XXXII.

Sodae acetoſae igne liquatae drachmae 12 cum mercurii ſublimati corroſiui vnciis tribus exactiſſime mixtae et deſtillationi igne mediocri ſubiectae drachmas 3 et grana 40 aceti glacialis 54 graduum, limpidi quidem eius ſed valde ingrati odoris ſuppeditabant, quod, vt liqueſceret, temperiem 127 graduum poſtulabat.

Obtenti hoc modo aceti non quantitas tantum exigua, ſed reſidui etiam pulueruIenti color niger eiusdemque in aqua feruida ſolutio, quae praeter ſalis communis ſaporem linguae nihil prorſus metallici indicauit, ſatis comprobant, adhibitam mercurii ſublimati quantitatem perfectae aceti expulſioni non ſuffeciſſe.

Ex omnibus hiſce experimentis a paragrapho 16^{to} hucvsque expoſitis, manifeſtum eſt, alcali vegetabile acido vitriolico ſuperſaturatum, et mercurium ſublimatum, aceto glaciali a baſi ſua ſeparando quam optime inſeruire. Caeterum, quodnam duorum horum laudatorum ſeparationis mediorum alteri palmam praeripiat, per ſe patet.

§. 23. Etſi nullum, vt aiunt, non moui lapidem, vt acido aceti ſummum fortitudinis gradum conciliarem: tamen vltra

vltra gradum 54^{tum}, nullo mihi hucusque artificio procedere licuit.

§. 24. Acetum glaciale debile 42 graduum duobus a se inuicem diuersis modis ad summam, cuius acidum hoc capax esse videtur, fortitudinem reduci potest:

1.) rectificatione leni igne perficienda; vbi pars fortior insequitur debiliorem.

2.) Crystallisatione; vbi pars debilior formam liquidam conseruans a parte solida crystallina longe fortiori decantatur.

Hyemali tempore concentratio haec quam optime obtinetur, si acetum glaciale debile, frigore in crystallos coactum, ad hypocausti fenestram ita collocetur, vt vitri latus vnum fenestram immediate attingat; aestiuo autem tempore, vitrum acetum continens aquae cum glacie mixtae ad collum vsque immergendum, acidoque perfecte refrigerato alius aceti glacialis fortissimi in formam solidam ante iam coacti nonnihil addendum est; quo facto, acetum glaciale concentrandum suauissimo spectaculo breui tempore in pulchras magnasque concrescit crystallos, quae, decantata parte liquida longe debiliore, fortissimum sistunt acetum glaciale; quo iucundo procedendi modo aceto glaciali summus fortitudinis gradus conciliari quam facillime potest.

§. 25. Singulare id quoque est, quod acetum glaciale, quando supradictis artificiis (§. 24. n. 1 et 2.) ad 54 graduum fortitudinem perductum est, vlterioris eiusdem gradus capax nulla ratione esse videatur; tantum enim abest, vt acetum 54 graduum, si modo dictis concentrandi methodis vlterius ſubmittitur, eo etiam fortius euadat, vt potius inſigniter debilitetur et particularum acidarum iacturam experiatur. Inde videre eſt, aceti acidum cum variis aliis acidis id commune habere, vt partes acidae aëris formam induant, quam primum omnibus particulis aqueis prorſus priuantur. Hinc ſingularis illa et copioſa bullularum apparitio, quae, incipiente aceti glacialis cryſtalliſatione, ſemper obſeruatur.

Hinc quoque in eiusmodi aceto glaciali 54 graduum, quoties ad cryſtalliſandum ex parte tantum diſponitur, pars liquida longe debilior deprehenditur, licet in parte cryſtalliſata nullum iam fortitudinis incrementum obſeruari poſſit.

Hiſce omnibus conſideratis, extra omnem dubitationis aleam poſitum eſſe videtur, acido aceti maiorem fortitudinem conciliari nullo modo poſſe. Vnde etiam fieri plane nequit, vt tale vnquam conſequamur acetum glaciale, quod formam ſuam cryſtallinam calidiori etiam aeſtiuo tempore conſeruare queat.

§. 26. Expoſitis hucusque variis acetum glaciale parandi methodis; ſupereſt vt earum praeſtantiores hoc paragrapho ſeparatim exhibeam, et quibus ſingulae vel commodis praecellant vel premantur defectibus, exponam.

Tres ſunt huiusmodi methodi, quae me quidem iudice optimae videntur, et nominatim quidem:

1.) praeparatio aceti glacialis mediante carbonum puluere (§. 7.);

2.) praeparatio eiusdem ex alcohole aceti fortiſſimo Westendorfii (§. 12. Exp. 4.);

3.)

3.) denique iſta methodus, qua acetum ex ſoda acetoſa vel terra foliata tartari adiuuante tartaro vitriolato ſuperſaturato immediate ſub glaciali forma ſegregatur (Exp. XIII. XVII et XIX.).

Primam quod attinet methodum, ob repetendas iterum iterumque ſuper carbonum puluere aceti abſtractiones, multum illa quidem temporis requirit et laboris, at obtentum hac ratione acetum glaciale tanta gaudet ſuauitate et perfectiſſima puritate, vt caeteris hoc intuitu longe ſit praeferendum.

Secundam quod attinet et tertiam; vtraque longe eſt, quam prima, facilior; attamen inficias ire non licet, acetum glaciale inde reſultans ea, qua iſtud prioris methodi, ſuauitate non gaudere.

Binarum harum methodorum vtra antecellat alteri, ſupereſt vt diſpiciamus. Prima quidem fronte, ea qua acetum Weſtendorfii in vſum vocatur, facillima eſſe videtur, quia ad acetum ex ſoda acetoſa expellendum immediate vnicum acidum vitriolicum adhibetur. At omnibus probe perpenſis, tertia, quae tartaro vitriolato ſuperſaturato vtitur, palmam ſibi iure vendicare videtur, idque ob ſequentes rationes:

1.) In aceti Weſtendorfiani praeparatione iuſtam, quae ad plenariam aceti e ſoda acetoſa expulſionem requireretur, acidi vitriolici quantitatem addere non licet; quia, quantitate ſi peccetur, aceti alcohol acido vitriolico ſulphureoque admodum inquinaretur.

Si contra mediante tartaro vitriolato ſuperſaturato expellitur aceti acidum; absque vllo noxae periculo tanta

tanta ſalis huius copia adhiberi poteſt, quanta haerenti in ſale acetoſo acidi quantitati perfecte liberandae par eſt, immo adeo iuſto maior etiamſi fuerit, nihil inde detrimenti pertimeſcendum eſt. Acidum vitrioli in ſale hoc abundans ei tam arcte adhaeret, vt ex eo vaſibus clauſis per ſe immiſſo, igne non niſi vehementiſſimo expelli poſſit.

2.) Acidum vitrioli concentratiſſimum quamuis cautiſſime adfundatur ſali acetoſo probe ſiccato; aequalis, quae magni hoc in negotio eſt momenti, ingredientium commiſtio et mutua in ſe inuicem actio obtineri nequit. Prorſus vero aliter res ſe habet, vbi olei vitrioli loco, tartarus vitriolatus ſuperſaturatus adhibetur; nunc enim, vti oportet, miſcenda conteri in mortario pro lubitu poſſunt.

3.) Acidi vitrioli cum ſale acetoſo commiſtio, licet cautiſſime inſtituatur, vehementiſſimam tamen ſemper producit incaleſcentiam, qua ſalis acetoſi aliquantulum comburitur non tantum, ſed aceti etiam pars vaporum ſub forma in auras abit; a quibus vitiis altera methodus, quoniam miſcenda non niſi accedente igne in ſe inuicem agunt, prorſus libera eſt.

4.) Cl. Weſtendorfii methodo impediri non poteſt, quominus reſultans ex ea acetum acido vitriolico ſulphureoque inquinetur: id quod mea methodo, ſi modo iuſtum fuerit ignis moderamen, neutiquam pertimeſcendum eſt.

5.) Adiuvante oleo vitrioli fortiſſimo, ex ſodae acetoſae vnciis 24 non niſi duodecim alcoholis aceti 32 graduum

duum obtinentur vnciae, quae vehementi demum frigori expositae ad summum 6 aceti glacialis vncias crystallisatione largiuntur. Tartari vero vitriolati supersaturati adminiculo ex eadem sodae acetosae igne fusae quantitate 16 fere aceti glacialis 54 graduum obtinentur, vbi igitur duplex, et mira vtique, vtriusque methodi differentia cernitur.

6.) Ex aceto Westendorfiano, hiemali eoque vehemente frigore opus est, vt acetum obtineatur glaciale, quod nostra posteriori methodo quacunque aëris temperie parari potest.

Tartari vitriolati supersaturati pretium si quis obiicere hic velit; moneri hic non erit alienum, sal hoc minori quoque sumtu e variis residuis pharmaceuticis parari posse v. g. si olei vitrioli loco residuum a destillatione liquoris anodini, et loco salis tartari superstes post depurationem cinerum clavellatorum tartarus vitriolatus adhibeatur: quid quod, ipsum aceti glacialis in retorta superstes residuum salinum denuo in tartarum vitriolatum supersaturatum novae operationi aptum facillime conuerti potest, dummodo, soluto eo in aqua, nova ei addatur olei vitrioli portio.

Quibus omnibus perpensis, vltimam hanc methodum meam, si quis aceti glacialis quantitatem magnam breuissimo tempore parare velit, priori antecellere manifestum est.

Per methodum hanc aceti vini crudi librae 300 aceti glacialis libras 7 largiuntur. Ex 5 aceti destillati 5 graduum libris 6 horarum labore duas obtinui aceti glacialis vncias.

Minorem denique odoris huius aceti ſuauitatem quod attinet; corri i plane vitium hoc idque duplici modo poteſt, vel abſtrahendo acetum ſuper carbonum puluere, vel, quod praeſtat, ſaepius iteraudis recryſtalliſationibus, qua methodo principium iſtud raphanum propemodum olens in remanente parte liquida ſuperſtes ab aceto glaciali feliciſſime ſeparatur.

DE ORDINE FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.

Diſſertatio X.

DE STRATO SECVNDO FIBRARVM VENTRICVLI SINISTRI.

PARS II.

Auctore
C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. die 27 Octobr. 1791.

Quatuor fibrarum ſtrati ſecundi ordines.

Fibrarum ſtrati ſecundi diſpoſitionem, analogiam earum cum fibris externis, et differentiam ab iisdem, deinde ortum fibrarum huius ſtrati, earum progreſſum et directionem, denique inſertionem in vniuerſum, et quae porro ab his pendent, in prima parte huius diſſertationis expoſui. Reliqua quaedam ſunt de his fibris in vniuerſum dicenda, quae nunc addam. Vti generatim ſingularis et mira analogia inter externum et ſecundum ſtratum, ſicuti et inter caetera, quae porro ſequuntur, intercedit; diuiſio etiam fibrarum ſtrati ſecundi perquam ſimilis eſt externarum fibrarum diuiſioni. Pariter illae atque externae in quatuor ordines, idque ſimili et analoga ratione, diſtribuuntur. Memorabile eſſe videtur, omnino et penitus diuerſum in ea re fuiſſe ventriculum dextrum. Huius ſtratum externum in varios numeroſos, figura, ſitu, magnitudine, diuerſos, muſculos diuiſum erat. Numeroſiores etiam longe, magisque figura et ſitu diuerſas, et maximam partem minutiores, portiones muſculares in ſtrato ſecundo inuenimus, quibus hoc aegre quaſi conflatum eſſet. Simpliciſſima contra diuiſio fuit fibrarum externarum ventriculi ſiniſtri in quatuor illos ordines, quos ex ipſa ventriculi figura et fabrica enatos eſſe facile intellexeris. Atque ſimili prorſus modo ſecundi quoque ſtrati fibrae diſpeſcuntur. Ordo primus eſt earum fibrarum, quae in inferiori ſuperficie ventriculi a filo oriuntur cartilagineo poſteriori ſiniſtro *a*) et in ſtriae partem poſteriorem, *b*) quae peculiaris et diſtincta eſt a caeteris eius partibus, inferuntur. Ordo ſecundus funiculis conſtat, inſignibus maxime in inferiori ventriculi ſuperficie, ortis a filo cartilagineo anteriori ſiniſtro, *c*) a baſi aortae *d*) et ab ea ſede, quam columna triangularis in ſtrato externo occupat, *e*) inſertis in partem fere mediam ſtriae, *f*) quae pariter et a poſteriori ſtriae parte et ab anteriori ſua ſtructura ſe diſtinguit. Tertius ordo eſt fibrarum, quae, ortae a crena ad regionem radiatam vsque, *g*) latam faſciam efficiendo, *h*) circa marginem

a) Tab. IX. l. m. n.
b) Tab. IX. l. c. o.
c) Tab. VII. G. H.
d) Tab. VII. G. B.
e) Tab. VII. B. E.
f) Tab. IX. p. x. s. q. 2. 3.
g) Tab. VII. E. 36. 37 38.
h) Tab. VII. 28. 39.

nem ventriculi flectuntur, et ſub ordinis ſecundi funiculos partim ſe recipiunt, *a*) partim in ſtriae portionem anteriorem, diſtinctam ab eius parte media, inſeruntur. *b*) In his nimium ſe diſtinguunt in hoc corde, quas interpoſitas vocare posſes, quae ortae in ſuperiori ſuperficie flabellatim fere ex ſequentibus huius ordinis fibris, vel ex interſtitio inter eas et funiculos ordinis ſecundi *c*) ſub eosdem funiculos in inferiori ſuperficie ſe recipiunt. *d*) Niſi omnino conſtantes ſunt interpoſitae iſtae, veſtigia tamen earum in plurimis cordibus reperiuntur. Denique quartus fibrarum ordo ab vltima parte crenae, a regione eius radiata et a duobus faſciculis terminalibus, ſuperiori et medio, oritur, *e*) et totus ſe ſub ordinem praecedentem recipit, *f*) excepta exigua parte, *g*) qua ad ſtriam pertingit.

Harum analogia cum ordinibus fibrarum ſtrati externi.

Adeo hi ordines analogi ſunt ordinibus ſtrati externi, vt ortum plane eundem a partibus iisdem, progreſſum fibrarum inſertionemque mire ſimiles ſinguli vtriusque ſtrati ordines inter ſe habeant. Ordo primus in ſtrato vtroque a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro oritur *h*); ſed fibris obliquis, longitudinali ductui propioribus, ea ratione progreditur in externo, vt totam ad principium faſciculi terminalis inferioris

 vsque

a) Tab. IX. x. 4. z. 6.
b) Tab. IX. 10. 15. 12. 15.
c) Tab. VII. E. 28 32.
d) Tab. IX. x. 4. z.
e) Tab. VII. 41. 42. 44. 47. 50.
f) Tab, VII. 41. 42. 43. 40. Tab. IX. 11. 16. 17.
g) Tab. IX. 18
h) Tab. IX. l. m. n. Tab. VI. y. 9.

vsque ſtriam inſertione ſua occupet; *a*) ductui propioribus contra transuerſo ita in ſecundo procedit ſtrato, vt partem tertiam tantum poſteriorem ſtriae fibris ſuis inſertis recipiat, *b*) proinde muſculum longe minorem, ſed ſimilem, in hoc ſtrato ſecundo efficiat. Sic ordo ſecundus a filo cartilagineo anteriori ſiniſtro baſique aortae in vtroque ſtrato oritur; *c*) fibris autem, longitudinali ductui propinquis, apicem verſus in ſtrato externo decurrit, in faſciculumque terminalem inferiorem ſe inſerit; *d*) dum ductui propioribus transuerſo contra in ſtrato ſecundo ad mediam partem ſtriae pertingit in eamque inſeritur; *e*) muſculum pariter ſimilem in vtroque, minorem tamen in ſecundo quam in externo ſtrato efficiendo. Tertius ordo a pontis regione in ſtrato vtroque oritur. *f*) Fibris, ad marginem maxime in ductum longitudinalem curvatis, apicem verſus deſcendit in ſtrato externo, in eumque inſeritur. *g*) Transuerſis contra, marginemque tranſeuntibus, in ſecundo ſtrato ad ſtriam *h*) peruenit, in eamque ſe inſerit. Quartus denique a radiata crenae regione et a faſciculis terminalibus in ſtrato vtroque ortus *i*) in vtroque ſub praecedentem ordinem ſe recipit, *k*) atque inſertione igitur non minus quam ortu ſibi ſimilis eſt.

Funi-

---

a) Tab. VI. y. 9 10. 11. 12.
b) Tab. IX. l. m, n. c. o. s.
c) Tab. IV. Q. p. 51. 60. 65. 67. Tab. VII. H. G. B. E.
d) Teb, VI. 13. 23. 53. 75.
e) Tab. IX. p. x. q. 3.
f) Tab. IV. 73. 79. Tab. VII. f. 36. 37.
g) Tab. IV. 77. 82. 105.
h) Tab. VII. 28 39. Tab. IX. x. 11. 10. 15.
i) Tab. IV. 84. 98. 99. Tab. VII. 41. 44. 50.
k) Tab. IV. 92. 91, 97. 98, Tab. VII. 41. 43. Tab. IX. 16. 17.

Funiculi procurrentes in ſtrato ſecundo.

Qui tamen funiculi in ſtrato ſecundo analogi ſunt procurrentibus funiculis ſtrati externi, qui ad ſequentes, quorum fibras colligebant, ordines in hoc externo ſtrato referebantur, ii ad praecedentes potius ordines in ſtrato ſecundo, ſub quos fibrae ordinum ſequentium ſe reciperent, referendi eſſe videntur. Sic vltimus funiculorum ordinis ſecundi *a*) nihil habet, quo ſe a praecedentibus *b*) huius ordinis funiculis diſtingueret. Neque ſe inſerunt in eum fibrae ſequentes ordinis tertii, *c*) qui ad eum terminari videntur; quin certum potius eſt, eas ſe recipere ſub funiculos ordinis ſecundi, ſub iisque ad ſtriam continuare. Qui procurrentem brevem in ſtrato ſecundo refert, funiculus craſſus omnino et inſignis eſt, *d*) etiamſi in inferiori ventriculi ſuperficie in planiorem faſciam ſe diſpergat. *e*) Sed fibrae ordinis quarti, quin ſe recipiant ſub eum, quin porro ſub caeteras tertii ordinis fibras ſe extendant, nullum prorſus dubium eſt. Videtur ergo et hic faſciculus ad tertium potius quam ad quartum ordinem fibrarum referendus eſſe. Atque idem, ni fallor, de ipſis procurrentibus funiculis externi ſtrati monendum quoque erit, vt maior ſcilicet ad ordinem potius ſecundum, minor ad tertium, referatur. Inſeri minime in illum fibras ordinis tertii, in hunc quarti, certiſſimum eſt, et monitum iam in ſuperioribus. Verum haud longe a procurrentibus fibras, quae ſub illos ſe recipiunt, excurrere, vel inde iam patet, quod, vbi prope ad eos

---

a) Tab. VII. e. 28, Tab. IX. x. z.
b) Tab. VII. 26. 27. Tab. IX. w. t. p.
c) Tab. IX. x. 4. z.
d) Tab. VII. 38. 39.
e) Tab. IX. 11. 12. 15.

eos accedunt, *a*) ita iam curuantur, vt eundem fere cum procurrentibus ductum ſub iis continuent. Aliter in ſtrato ſecundo, imprimis ad procurrentem breuem ſe res habet, vbi ex directione fibrarum, dum ſe ſub illos recipiunt, *b*) cognoſcas, quo magis ſub iis continuent, eo magis diſcedere ab iisdem. Caeterum ſiue ad praecedentes ordines procurrentes referas funiculos, quorum ſint fibrae vltimae, ſiue ad ſequentes, quorum primas efficerent fibras; notabiles tamen funiculi erunt, quibus ordines diuerſi manifeſto a ſe mutuo diſtinguuntur, et qui procurrentes ſequentium fibrarum reſpectu vocari merentur.

Striae, ſedis inſertionis, conditio in ſtrato ſecundo.

Stria, ſedes inſertionis, in tres partes diuerſas, remoto externo ſtrato, in hoc quidem corde, in aliis, vbi apices ventriculorum minus ſeparati erant, in quatuor diuiſa fuit. Earum prima *c*) ad baſin ſita eſt. In hac fibrae ventriculi ſiniſtri cum fibris dextri ventriculi fere concurrunt. In aliis cordibus illae in has plane continuabant. Alia pars media eſt. *d*) In ea fibrae ventriculi ſiniſtri longius a dextris remotae, demergunt ſe citius in ſtriam et continuant in fibras ſepti, vt interſtitium ſatis largum in hac media parte ſtriae inter ambos ventriculos in ſecundo hoc ſtrato appareat. Tertia ſtriae pars *e*) eadem eſt, ſuper quam in ſtrato externo fifibrae ventriculi ſiniſtri in dextrum ventriculum tranſeunt,

a)

a) Tab. IV. 77. 78. 82. 91. 93. 94.
b) Tab. VII. 42. 43. Tab. IX. 16. 17. x, 4.
c) Tab. IX. a. c d.
d) Tab. IX. d. e.
e) Tab. IX. e. f.

a) eius in fibras continuatae. In ea pariter fibrae ventriculi finiſtri cum dextri fibris fere concurrunt in ſtrato ſecundo; et in aliis cordibus etiam in hoc ſecundo pariter atque in externo ſtrato ex finiſtro in dextrum ventriculum fibras tranſire vidi. Vt in hac atque in illa prope baſin ſede arctius omnino ventriculi, quam in media parte coniungantur. Denique quarta pars in aliis cordibus fuit, quae eadem cum hac eſſe videtur, qua ventriculi in hoc corde ſeparati exiſtunt, *b*) inſignes apices diſtinctos formando. Haec nullis ex finiſtro in dextrum ventriculum transeuntibus fibris in cordibus illis tegebatur, faciliusque in ea ſede, pariter ac in media ſtriae parte, ventriculi a ſe mutuo ſeparari poterant. Videtur ergo haec pars ſtriae eſſe ſingularis, qua conſtanter ventriculi minus arcte, quam in parte praecedenti et in prima, baſi propiori, parte coniunguntur. Vt eo minus ergo mirum ſit, ſi, velut in hoc corde, apices ventriculorum prorſus a ſe mutuo ſeparati inueniuntur.

An hoc naturae inſtitutum, vt in ſingulas has ſtriae partes ſinguli ordines fibrarum inſerantur? Vt partem ſuperiorem, ſeu poſteriorem, quam tranſire fibrae ſolent, ordo primus, mediam, qua in ſeptum illae ſe demergunt, ſecundus, inferiorem denique tertius occupet ordo fibrarum, quartus ſe recipiat ſub tertium? Nihil certi hactenus video. Et quae in caeteris cordibus obſeruaui conſentire potius cum huius cordis ſtructura viſa ſunt. Non totam ſuperiorem ſeu poſteriorem partem ſtriae primus ordo occupare ſua inſertione videbatur,

a) Tab VI. 44. 45. 46. 12.
b) Tab. VI 12. 7. 100. Tab. IX. f. 20. 74.

batur, et partim in hanc ſuperiorem, partim in mediam, ſtriae partem ſecundus ordo fibrarum in iis, quae picta habeo, cordibus inſertus fuit. Sic mediae partis anteriorem portionem et aliquam pariter portionem partis anterioris ſtriae tertius ordo in plurimis cordibus tenuit, et quartus ordo his paucis, quae ad ſtriam peruenerant, fibris reliquam huius partis anterioris ſtriae portionem occupauit. Maximam enim partem ſub tertium is quartus ordo conſtanter ſe recipit.

Ordo primus fibrarum in ſtrato ſecundo.
(Tab. IX. l. m. n. o. c. l.).

Ergo a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro et a dimidio interſtitio inter bina fila ſiniſtra *a*) primus ordo fibrarum oritur. Sola ea pars fili, qua ex trunco filorum originem ducit, quam ſuo ortu faſcicnlus ſtriae occupat, excepta eſt. *b*) Reliqua tota ordini ortui inſeruit. At ſtriae vero faſciculus latitudine et magnitudine in variis cordibus variat, maioremque in aliis fili partem occupat, in aliis, velut in hoc corde, minorem. Proinde et ordo fibrarum a maiori nunc fili parte, nunc a minori, oritur. Sic ortus fibris, quaſi in faſciculos collectis *c*) craſſiores latioresque, ea directione oblique verſus poſtremam partem ſtriae, quam faſciculus ſtriae occupat, *d*) progreditur, vt multo propior ſit transuerſali quam longitudinali ductui. Imprimis vbi ex filo oriuntur faſciculi adeo transuerſim ferri incipiunt, vt fere prallelae ſint filo, angulisque ex eo oriantur acutiſſimis. *e*) Deinde in medio

a) Tab. IX. l. m n.
b) Tab. IX. a. l.
c) Tab. IX. m.
d) Tab. IX. l. c.
e) Tab. IX. m. n.

dio itinere, quasi inflexae fibrae apicem versus, eundem tamen continuo recipiunt ductum, transuerso propinquum, eoque ad solam illam, quam fasciculus striae occupat, striae exiguam partem continuant, sub eaque radiatim concurrunt, *a*) alia, quam continuo dicam, musculi portione reliquam sedis insertionis partem occupante. Aliter ergo se habent fibrae ordinis primi in strato externo, quae ortae a filo cartilagineo eodem *b*) adeo oblique progrediuntur, vt totam striam ad extremitatem vsque sua insertione occupent, *c*) musculumque sic efficiant longe maiorem. Ad musculum striae vbi peruenerunt diuersi fasciculi, quos fibrae ordinis primi efficiunt, extremitatibus tenuioribus in angustius spatium coerciti ad finem musculi striae inseruntur. *d*) Vt vnus alterue fasciculorum huic musculo ipsi se adiungat, caeteri omnes prope finem eius, vbi ad dextrum ventriculum se flectit, in striam inserantur. Tum alia vero in hoc corde portio huius musculi datur, *e*) emergens ex interstitio inter priorem portionem *f*) et funiculos ordinis secundi. *g*) Haec sub dictis fibris a media inter bina fila sinistra parte oriri videtur. Inseritur iuxta portionem priorem in partem striae sequentem. *h*) Vt totus hic ordo maiorem omnino portionem posterioris partis striae, haud totam tamen hanc partem, sua insertione occupet. Non constans haec portio est; quin plerumque hae

 fibrae

a) Tab. IX. c.
b) Tab. VI. y. F. 9.
c) Tab. VI. 9. 10. 11. 12. y.
d) Tab. IX. c.
e) Tab. IX. o.
f) Tab. IX. m. n. c.
g) Tab. IX. n. r. s.
h) Tab. IX. c. c.

fibrae extremae ordinis primi parallelae prioribus, ortae ab interſtitio inter bina fila cartilaginea ſiniſtra, nec tectae funiculis ordinis ſecundi, ad ſtriam vsque decurrunt in eamque inſeruntur. Ortas etiam hoc modo ab interſtitio inter fila ſiniſtra progredi, et ſub priores huius ordinis fibras, a media fili parte ortas, ſe recipere, in aliquo corde vidi.

Varietas ordinis primi fibrarum.

Caeterum ſatis conſtans hic muſculus eſt, quem facile vbique et primo aſpectu a caeteris ſtrati fibris diſtinguas. Directionem hanc ſingularem fibrarum, qua parallelae fere filo ipſi, et ſub angulis acutiſſimis, ab illo oriuntur, qua apicem verſus deinde paulum flexae, mox tamen in ductum eundem, transuerſo propinquum redeunt, faſciculos porro latiores, in quos fibrae collectae ſunt, et figuram denique illam, quaſi ventricoſam, vbique fere reperi: Vna tamen varietas eſt, quae frequentius fere, quam haec deſcripta ſtructura ipſa occurrere videtur, adeo, vt in duas quaſi ſpecies fabricam fibrarum ordinis primi diſtinguere liceat, quarum altera eam, quae in hoc corde exſtat altera hanc, quam continuo dicam, muſculi huius conditionem, referat. Nimirum ſimili modo fibrae huius ordinis a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro ortae directione eadem ſimilique prorſus ductu ad ſedem inſertionis vsque progreſſae, ſimilem figura efficiendo muſculum, non in partem hanc ſtriae poſteriorem inſeruntur, ſed plane continuant in faſcias ſtrati ſecundi ventriculi dextri, vt vnum omnino cum his faſciis muſculum efficiant. Dum ſic fibrae in dextrum ventriculum tranſeunt, adiungunt ſe fibris muſculi ſtriae, pariter in dextrum ventriculum excurrentibus, ductuque conformi cum his progrediuntur; vt peculiaris modo portio faſciculus ſtriae muſculi eius quem tranſeuntes fibrae ordinis primi efficiunt, eſſe videatur. Vti faſciculus ſtriae in mar-

marginalem fafciam ventriculi dextri continuare folet; fibrae ordinis primi in fecundam tertiamque abeunt angularem. Et vidi, ipfam ventralem fafciam primam ex his primi ordinis fibris in aliquo corde productam fuiffe. Quae hac ratione ex finiftro in dextrum ventriculum tranfeunt fibrae omnes fimul fumtae totam conftanter occupant partem poftremam ftriae. Si folae ergo, quod plerumque fieri folet, ordinis primi fibrae tranfeunt; hae certe totam ftriae pofteriorem partem continuatione fua tegunt, fibraeque ordinis fecundi in folam mediam inferuntur. Sed accidit quoque, vt aliqua fibrarum ordinis fecundi portio vna cum primi fibris tranfeat, quae in primam tunc fafciam ventralem ventriculi dextri continuare folet. Tum ficut in hoc corde haud folae primi ordinis fibrae fed portio fecundi quoque partem ftriae pofteriorem replent teguntque. Egregiam caeterum, magnam, latamque, transuerfalem fafciam hae fibrae, fi in dextrum ventriculum continuant, ad inferiorem fuperficiem cordis efficiunt, cuius latitudinem totam prope bafin transuerfim percurrunt, anguftiorem in cordibus nonnullis ad ventriculum finiftrum, latiorem ad dextrum, in aliis vtrinque aequalem, in media potius parte latiorem, ductu imprimis eleganti fibrarum infignem.

Ordo fibrarum fecundus

(Tab. VII. G. E. H. 28. Tab. IX. p. x. s. q. 1. 2. 3.) Ortus.

Ordo fecundus, feu funiculorum, in ftrato fecundo a filo cartilagineo anteriori finiftro *a*) et ab interftitio inter hoc filum et pofterius finiftrum, maxime tamen a parte finiftra bafis aortae *b*) et a fede columnae triangularis ad principium crenae

a) Tab. VII. H. G.

b) Tab. VIII. a.

crenae vsque *a*) originem ducit. A filo ipſo eiusque et poſterioris interſtitio paucae quidem fibrae oriuntur, cum parallelae fere huic filo angulisque acutiſſimis et oriantur progredianturque. Tamen etiam magis aliquantum oblique deſcendere has fibras in aliquo corde vidi, atque in eo ergo copioſiores quoque ab hoc filo fibrae oriebantur. Conſtantior tamen et ſolita potius haec ſtructura eſt, quae in hoc corde obſeruatur, qua parallelae fere filo fibrae filum vix tangunt. Longe maxima pars fibrarum ea eſt, quae a baſi aortae, a latere eius ſiniſtro, oritur, *b*) ex quo ſub angulis fere rectis fibrae prodeunt, totamque gibboſam partem ventriculi tegunt. *c*) Quae a ſede columnae triangularis in conſpectum fibrae veniunt, *d*) non ab hac columna oriuntur, ſed continuantur ab ea ſepti parte, cui conus arterioſus dexterius incumbit, quam ſiniſterius columna tegit triangularis et foſſa triangularis. His partibus ergo teguntur, quae ſepti hactenus fibrae ſunt, quae nunc ad marginem columnae ſiniſtrum in conſpectum veniunt, fibras efficiendo ventriculi ſiniſtri.

Progreſſus et inſertio.

Ex his ſedibus transuerſim fibrae, aut vix tamen a transuerſali ductu diuerſae, et parallelae fere filo cartilagineo anteriori ductumque huius fili proprium imitando, ad marginem vsque ventriculi progrediuntur, totamque eius partem poſteriorem ad baſin, principio crenae et fili radice incluſam, partemque gibboſam ventriculi, occupant. *e*) Quamuis etiam

a) Tab. VIII. c. i.
b) Tab VII. G. B.
c) Tab. VII. H. 26.
d) Tab. VII. B. E. 26. 28.
e) Tab. VII. G. E. H. 28.

etiam in aliquo corde magis oblique defcendere has fibras obferuauerim; folita tamen haec directio, hic progreffus, hic ductus eft fibrarum, qui in icone adiecto repraefentatur, vt etiam primo intuitu has fibras, quamuis, in quo ftrato exifterent, ignoraretur, cognofcere et a quibusuis caeteris fibris cordis diftinguere liceret. In duas quafi portiones ad fuperiorem fuperficiem in hoc corde quidem diftinguuntur, quarum altera, pofterior et maior, *a*) a bafi aortae, altera, minor, *b*) a fede columnae triangularis, oritur. Vbi fuper marginem in inferiorem fuperficiem tranfeunt, maiores crasfioresque funiculos efficiunt, et directionem fimul infigniter mutant. *c*) Solidiores omnino fortioresque fibrae funt, dum per fuperiorem fuperficiem ventriculi progrediuntur, haud adeo manifefto tamen diftinctos craffitie funiculos quam in hac inferiori fuperficie efficiunt. Videntur ergo fibrae fimplices quidem, quamuis fortiores, a fede ortus oriri, et progredi fimplices per vniuerfam fuperiorem fuperficiem, tum colligi vero in craffiores hos funiculos, qui in inferiori fuperficie obferuantur. In ipfo margine quoque ventriculi ita fimul flectuntur, vt, quae transuerfae hactenus in fuperiori fuperficie fibrae fuerant, oblique defcendentes in inferiori appareant funiculi. Hi angulos femirectos quafi vtrinque, cum filo cartilagineo pofteriori finiftro pariter *d*) atque cum margine ventriculi, *e*) includendo per inferiorem hanc fuperficiem decurrunt, mediamque ftriae partem verfus properant. *f*) Dimidio ta-

a) Tab. VII. G. B. H.

b) Tab. VII. C. E. 26.

c) Tab. IX. p. x. 5. 3.

d) Tab. IX. l. m. n.

e) Tab. IX. x. 11.

f) Tab. IX. x. z.

tamen itinere ſuperato iterum flectuntur, et in ductum denuo redeunt, transuerſo propinquum. *a*) Sic in ſtriae partem mediam et in aliquam ſuperioris partis portionem inſeruntur. *b*) Vbi primum ſuper marginem ventriculi tranſeunt, in inferiorique ſuperficie apparent, in duas portiones diuiſae, in hoc quidem corde, progrediuuntur. Earumque, quae propior baſi ventriculi, prior portio *c*) in ſuperiorem ſepti partem inſeritur. *d*) Altera, ſecunda, *e*) mediam fere, haud totam tamen, ſepti partem ſua inſertione occupat. *f*) Diſtinctae in hoc corde portiones ſunt ſingulari modo, dum funiculi quidam ſub alios ſe recipiunt. Dum funiculi per inferiorem ventriculi ſuperficiem verſus ſedem ſuam inſertionis progrediuntur; primae fibrae ordinis ſequentis ſub extremum funiculum ſe recipiunt, *g*) hic ipſe porro funiculus ſe ſub praecedentem ſibi recipit, *h*) et iſte porro ſub eum, qui huic praeceſſerat. *i*) Non plane conſtans quidem haec extremorum funiculorum conditio eſt, ſed neque ad indiuiduum quoque corpus tantum pertinet, cum ſimilem funiculorum ſubmerſionem in aliis quoque cordibus iam obſeruauerim. Vtriusque portionis funiculi, vbi propius ad ſtriam accedunt, in ſimplices fibras reſoluuntur, iisque in ſtriam ſe inſerunt. *k*).

Com-

---

a) Tab. IX. z. y. 3.
b) Tab. IX. 5, q. 2. 3.
c) Tab. IX. p. q. r. s. t. v.
d) Tab. IX. 5. q.
e) Tab. IX. w. x. 1. 2. 3.
f) Tab, IX. 1. 2. 3.
g) Tab IX. x. z.
h) Tab. IX. z.
i) Tab. IX. y.
k) Tab. IX. s. q. 1. 2. 3.

Comparatio cum ordine ſecundo ſtrati externi.

Quamuis analogus hic ordo funiculorum funium ordini in ſtrato externo; inſigniter tamen et differt ab eo. A filo cartilagineo anteriori, a baſi porro aortae et a columnae triangularis ſede vterquae oritur. *a*) Tum funes autem ita oblique in ſuperiori iam ſuperficie progrediuntur, vt nacti marginem ventriculi dimidiam eius partem poſteriorem occupent; *b*) funiculi contra, transferſim fere progreſſi, ſolam gibboſam eius partem, vbi ad marginem vsque peruenere, tegunt. *c*) Rhomboideam illi, hi quadratam fere, figuram in hac ſuperiori ſuperficie efficiunt. Inferiorem dum ingrediuntur, vtrisque aeque ad longitudinalem nunc ductum magis appropinquantibus, vel recedentibus a transverſo, eo vsque funes descendunt, vt apicem ventriculi verſus tendentes in faſciculum demum terminalem inferiorem recta incurrant, *d*) omiſſa tota ſtria dexterius, et dimidia fere obliqua parte dexteriori ſuperficiei inferioris ventriculi, pro ordine primo fibrarum, *e*) ſiniſterius vniuerſam ſuperficiem ad marginem vsque occupando. Funiculi contra, quamuis pariter ad longitudinalem ex priori ſuo ductu flexi, tamen eam modo obtinent obliquitatem, vt ad mediam vsque partem ſtriae, nec vlterius, perueniant, *f*) exiguam dexterius et ſuperius pro primo ordine fibrarum, et vix octauam totius inferioris ſuperficiei, partem vacuam relin-

a) Tab. IV. Q. C. D. Tab. VII. H. G. B. E.
b) Tab. IV. Q. R.
c) Tab. VII. H. G. E. 28.
d) Tab, VI. 13. 52. 74. 75.
e) Tab. VI. 9. 52. C.
f) Tab. IX. p. x. 5. 3.

linquendo, *a*) finiſterius et inferius maiori quam dimidia eius parte pro caeteris fibrarum ordinibus relicta. *b*). Sic ſimilis ſibi hic ordo fibrarum in vtroque ſtrato maxime tamen et differt.

Faſciculi procurrentes ſecundi ſtrati cum externi faſciculis iisdem comparati.

Deinde, quod in ſuperioribus iam notatum eſt, qui procurrens faſciculus maior in ſtrato externo inſignis fuit, quo funium ordo ab ordine fibrarum tertio diſtinguebatur, is minus luculenter in ſtrato ſecundo ſe offert. *c*) Structura tamen in eo, quod rem ipſam concernit, omnino in ſtrato vtroque couenit. Nimirum tertius ordo fibrarum ſub hunc funiculorum ordinem ſe recipit. Maximam partem paralleli ſibi mutuo funiculi decurrunt, et in inferiori imprimis ſuperficie notabili ductu obliquo feruntur, *d*) quo nec a primo etiam fibrarum ordine differunt. Iam et tertii ordinis fibrae inter ſe ipſas parallelae ſatis procedunt, *e*) verum vbi ad marginem ventriculi veniunt, vbi inferiorem ingrediuntur ſuperficiem, aliter quam ambo praecedentes ordines ſe habent. Non oblique deſcendunt, ſed recta transuerſim progrediuntur. *f*) Quo ergo ab ambobus praecedentibus ordinibus tertius ille ordo non modo manifeſto ſe diſtinguit, ſed limites quoque inter tertium et ſecundum ſingulares, *g*) iique prorſus ſimiles effi-

a) Tab. IX. l. m. n. o.
b) Tab. IX. x. e. 20 11. x.
c) Tab. IX. x. z.
d) Tab. IX. p. x. 5. 3.
e) Tab. VII. E. 30 34. 39.
f) Tab. IX. x. 4. 11.
g) Tab. IX. x. z. y.

efficiuntur iis, quibus in ſtrato externo ſecundus et tertius ordo diſtincti erant *a*) Nam et in hoc funes paralleli inter ſe ipſos, ductu imprimis maxime obliquo, et vix a longitudinali diuerſo, dum per inferiorem ſuperficiem ventriculi decurrerent inſignes erant. *b*) In tertio ordine primum notabilis directionis mutatio ſe manifeſtabat, qua propiores ductui transverſo fibrae eius omnes ſub ordinem funium ſe recipiebant. *c*) Id ergo inſigne in ſtrato vtroque inter ſecundum et tertium ordinem fibrarum conuenit. Siue vltimum funiculum nunc in ſtrato ſecundo pro faſciculo procurrente maiori habere velis, ſiue totam pro eo ſumere portionem illam, quae ſe a reliquis funiculis ordinis ſecundi diſtinguit, ſiue nullum prorſus agnoſcere in ſtrato ſecundo funiculum procurrentem; ſtructura tamen eadem in hoc ſtrato locum habet, quae in externo a procurrente hoc funiculo efficiebatur. Alia ac noua directio fibrarum, transuerſo ductui propior, primum in limitibus inter ſecundum et tertium ordinem ſe manifeſtat, tertius ſub ſecundum ſe recipit, et limites eo ipſo inſignes efficiuntur. Haec ſingula in vtroque ſtrato locum habent, nec aliam quamcunque ob cauſam in externo memorabilis procurrens faſciculus fuit, quam propterea, quod haec efficeret.

Supereſt tertius et quartus ordo fibrarum ſtrati ſecundi, quos in ſequentibus exponam.

---

a) Tab. IV. 73 77. 78 78 82.
b) Tab. VI. 13. 54. 55. 24 76.
c) Tab. IV. 75 79. 77. 78. 82.

OBSERVATIONES
CIRCA SALIS COMMVNIS
CRYSTALLISATIONEM OPE FRIGORIS EFFICIENDAM,
ET
DEPVRANDI SALIS HVIVS METHODVS NOVA.

Auctore
TOBIA LOWITZ.

Conuent. exhib. die 26 *Aug.* 1792.

§. 1.

Salia plurima, conſtat, duobus modis ex ipſorum ſolutionibus ad ſoliditatis ſtatum reuocari poſſe, quorum vnus partium aquearum euaporatione, alter refrigeratione abſoluitur. Haec ſpontanea, illa coacta, dici poteſt ſalium cryſtalliſatio.

§. 2. Salia, duplicem hanc cryſtalliſandi methodum quae admittunt, cryſtalliſatione ſua, vel ſpontanea vel coacta, aliam atque aliam non cryſtallorum modo figuram oſtendunt; ſed priori quoque caſu maiorem, poſteriori minorem, aquae cryſtalliſationis copiam recipiunt.

§. 3.

§. 3. Sal commune non nisi euaporationis ope ex solutione in crystallos coire, neque id solutionis refrigeratione vnquam fieri, communis hucusque fuit chemicorum opinio, neque etiam sal hoc, praeter cubicas ex hisque compositas pyramidales, aliter figuratas formare crystallos visum est. Notum quoque, ordinarias hasce salis marini crystallos perexiguam aquae crystallisationis copiam, teste nimirum Cl. Bergmanno, non nisi 6 partes in centenario continere: quo etiam fit, vt sal hoc igni expositum in aqueum liquorem prorsus non abeat, neque in aëre libero, aliorum salium ex alcali minerali conflatorum more, in puluerem fatiscat.

§. 4. Mihi vero hac hyeme circa crystallisationem salis marini a modo memoratis toto coelo discrepantia videre phoenomena contigit: eaque eo magis digna, quae memoriae traderentur, mihi visa sunt, quia eiusmodi concernunt naturae productum, quod abundantissime non tantum in orbe nostro occurrit, sed latissimi etiam vsus et amplissimae vtilitatis est.

§. 5. Saturata salis communis solutio si hyemali tempore in loco quieto vehementiori frigori exponitur: praeterlapsis aliquot horis, absque vlla praeuia partium aquearum congelatione, in solutionis fundo satis magna salis quantitas in pulcherrimas crystallos concrescit. Increscente deinde frigore, in superstite et a prioribus hisce crystallis decantata solutione noua etiam eaque satis copiosa crystallorum quantitas concrescit, posteaque summo frigore in solutionis superficie admodum leuis aquae conglaciatio conspicitur.

§. 6. Ex his, quas modo dixi, obseruationibus liquet, istam salis crystallisationem non deberi partium aquea-

 rum

rum congelationi, ſed ſua ſponte nec niſi per ſolutionis refrigerationem fieri, atque ex ipſa hac praeuia ſalis ſecretione inſequentis partium aquearum congelationis cauſſam repeti debere, vtpote quae vehementiſſimo etiam frigore fieri non potuiſſet, ſi ſolutio largiore ſalis quantitate, aquae congelationem quam pertinaciſſime impediente, antea non liberata fuiſſet.

Fallor, an hac in re contraria prorſus chemicorum ſententia hucusque fuit, qui, quantum equidem memini, ſalis communis praecipitationem ex ipſius ſolutione frigori vehementiſſimo expoſita non niſi praeuia partium aquearum congelatione fieri aſſeuerarunt.

§. 7. Inſtitutis ex propoſito tentaminibus, ſingularem iſtam ſalis culinaris cryſtalliſationem non niſi frigore 168 graduum Scalae de l'Isliinae obtinere reperi. Cryſtalli hoc modo obtentae ſequentibus gaudent proprietatibus:

a) cryſtalliſationis aquae ſunt ditiſſimae ita, vt in centenario 48 eiusdem complectantur partes: hinc

b) perfectiſſima praeditae ſunt pelluciditate:

Tab. IV. Fig. 5. c) figuram quod attinet, tabulas referunt cryſtalli iſtae hexagonas aequilateras; quatuor marginis lateribus acuminatis, duobus vero ſibi oppoſitis planis, ita, vt, praeter duo plana cardinalia hexagona ſuperius et inferius, decem marginalibus planis cinctae ſint, octo
Fig. 5. nimirum rhomboidalibus, duobus hexagonis oblongis. Has praeter cryſtallos vidi, rariſſime quidem, et alias, quae duas, baſibus connexas, pyramides quadrangulares obliquas, apicibus detruncatis, referebant.

d)

d) aëri ſicciſſimo frigidiſſimoque hyemali tempore expoſitae Glauberiani ſalis ad inſtar in puluerem album fatiſcunt.

e) Ab omnibus hucusque notis ſalibus neutris ea potiſſimum proprietate diſcrepant, quod calore aëris naturali tantillo funduntur, qua liqueſcendi facilitate ſalem non modo Glauberianum, ſed acetum etiam glaciale inſigniter ſuperant. Facillimam hanc cryſtallorum noſtrarum deſtructionem, quam primum naturalis aëris temperies ad 143 gradus De l'Islianos aſcendit, nunquam non contingere, experimentis ſedulo inſtitutis reperi. Notandum tamen eſt,

f) liqueſcentiam hanc non eſſe perfectam, ſed partialem tantum; haud enim exigua ſalis noſtri pars ſub pulueris arenoſi albi forma irreſoluta remanet, id quod non fieri non poteſt, cum ſuperſtes in cryſtallis noſtris aquae cryſtalliſationis quantitas ſoluendae omni ſalis copiae impar ſit, ſiquidem una ſalis communis ordinarii pars, vt ſoluatur, tres fere aquae partes poſtulat, cuius in noſtro ſale non niſi vna continetur.

§. 8. Ex vltimo hoc phaenomeno, facillimam dico ſalis noſtri liqueſcentiam, id concludere licet, diuerſam ſalium in aqua cryſtalliſationis ſua liqueſcendi facilitatem non a ſola aquae huius quantitate pendere, ſed a diuerſo quoque attractionis gradu repetendam eſſe, qua ſalina et aquoſa elementa corpus ſolidum cryſtallinum conſtituentia inter ſe cohaerent. Sal enim Glauberi, vitriolum martis, ſoda cryſtalliſata, pluraque alia, prae noſtro ſale aquae criſtalliſationis copia abundant, qua tamen non obſtante, caloris gradum, vt liqueſcant, longe maiorem poſtulant.

§. 9.

§. 9. Insignis interdum crystallorum harum magnitudo est. Ex saturata quatuor salis communis librarum solutione frigore a 149 ad 172 vsque gradus per nichtemerum sensim sensimque increscente, vna crystallisatione sesqui libras crystallorum, formas hexagonas exhibentium, obtinui, quarum nonnullae diametri erant duorum pollicum.

§. 10. Notatu et id dignum occurrit, quod, si salis communis solutio vehementissimo frigore sub crystallisationis suae initium in vas vitreum aliud cito transfunditur, breui tempore multae conspiciantur, per omnem liquorem hinc inde natantes, crystalli hexagonae oblongae, quae ob eximiam tenuitatem motu lenissimo fundum petunt, et ambitu simul suo sensibiliter crescunt, acetique glacialis more, omnes colores prismaticos quam pulcherrime referunt.

§. 11. Quem exposui in praecedentibus salis marini per frigus crystallisandi modum, is nouam nobis eamque facilem eiusdem salis depurandi methodum suppeditat. Omnia enim, quibus sal culinare inquinatum semper est, salia heterogenea partesque pingues, peracta crystallisatione, in liquore superstite remanent, et quae crystallis externe adhaeret, perexigua particularum heterogenearum copia, decantato liquore, separatur omnis, simulac crystalli sacco linteo immissae in loco calidiore in aqueum liquorem abeunt, quo fit, vt satis magna salis copia irresoluta sub pulueris forma in sacco residua reperiatur, quae exsiccata albissimum et ab omnibus heterogeneis plane liberatum sal marinum exhibet.

§. 12. Sal commune consueta methodo et summa quantumuis cura depuratum semper tamen salium terreorum non

non nihil continet; quae ſalia heterogenea manifeſtis ſe produnt indiciis, ſimulac filtratae eiusmodi ſalis communis ſolutioni aliquot ſolutionis terrae ponderoſae nitratae vel acidi ſachari guttulae miſcentur. Salis autem noſtra methodo (§. 11.) depurati ſolutionem reagentia haec ne hilum quidem turbant.

§. 13. Supra iam monui (§. 5.) in vna eademque ſalis communis ſolutione primae cryſtalliſationi, increſcente frigore, ſuccedere ſecundam, vbi quidem monendum eſt, cryſtallos has ſecunda cryſtalliſatione obtinendas permultis inquinari cryſtallulis aculeatis veram magneſiam vitriolatam exhibentibus; vnde colligitur, ſi ſalis communis per frigus cryſtalliſatio ſalis depurandi cauſſa ſuſcipiatur, eas tantum, quae prima cryſtalliſatione obtinentur, cryſtallos laudata puritate pollere: eas vero, quas ſecunda offert et tertia cryſtalliſatio, ob mixtum iis ſal amarum, impuras et ſeorſim conſeruandas eſſe.

§. 14. Conſtat itaque nunc ex iis, quas expoſui, nouis obſeruationibus, ſal marinum, aliorum complurium more, ſpontaneam cryſtalliſationem, vnica ſcilicet refrigeratione, ſubire, hocque in caſu larga aquae cryſtalliſationis copia ſe imbuere, cryſtallosque formare figurae a conſueta plane discrepantis. Conſtat et id, cauſſam ob quam dicta cryſtalliſatio non niſi frigidiſſimo hyemali tempore ſuccedit, ex ſumma ea, quam dixi, liqueſcendi facilitate repeti debere, qua efficitur, vt cryſtalli noſtrae leuiſſimi etiam caloris acceſſu in aqueum liquorem abeant.

Caeterum haec, quae detegere mihi contigit, et, ni fallor, plane noua, amplum complurium aliorum eiusdem generis experimentorum campum aperiunt, vt, quae ſit frigoris in alias ſalium ſpecies efficientia, exploretur, quibus inſtituendis proxima hieme operam dabo.

OBSERVATION SUR LES EAUX MARTIALES DU GOUVERNEMENT D'OLONETZ.

Par

NICOLAS OZERETSKOVSKY.

Communiqué à l'Académie le 23 Janv. 1792.

Dans la déſcription des mines de Woëtzk, que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Académie l'année paſſée, il étoit dit, que dans le Gouvernement d'Olonetz, & ſourtout dans les provinces de Pétroſawodsk & de Powenetz, on a découvert pluſieurs indices des différents minéraux; ce qui eſt très vrai; le nombre des pareilles découvertes eſt même ſi grand, qu'on pourroit prendre les dites provinces pour un autre Pérou, ſi les éſſais, faits avec quelques-uns de ces minéraux, avoient promis plus de richeſſes, qu'il n'y en a effectivement. Déja en 1774 on a connu 528 endroits, où il y avoit des mines de cuivre, dont les indices ſont ſi répandus par tout ce pays montagneux, que même dans les carrieres du marbre de Tiwdia (*), on rencontre très ſouvent des petites houppes

(*) Tiwdia eſt une riviere, formée par pluſieurs lacs, qui portent différens noms, & qui communiquent l'un avec l'autre par le moyen de la dite riviere, laquelle tombe enfin dans le lac Sandal. A deux werſte de ſon houppes & des aiguilles de mine de cuivre verte extrémement delicates, enforte qu'on ne peut les toucher fans les écrafer fous les doigts; & en regardant leur petiteffe, on diroit, que la nature n'ait fait que commencer à les produire, ou qu'elle ne poffede point affez de matiere, pour en fournir à leur accroiffement & remplir dans le marbre les cavités, qui leur fervent de nids. Les mines de plomb ont été découvertes dans 43, & celles de fer dans 172 endroits. Il y avoit auffi des mines d'or, dont on comptoit fix. Cependant toutes ces découvertes ont été inutiles & même très couteufes, quand on effaioit de tirer & de fondre quelque-unes de ces mines, que l'on a reconnu ou fort pauvres, ou fort difficiles pour être exploitées, à caufe de la dureté du quartz, qui leur fervoit de gangue, ou que les filons de ces mines étoient d'une très petite étendue. C'eft pourquoi elles furent toutes abandonnées, exceptées deux mines de fer, dont l'une fe trouve tout-près des eaux Martiales, & dont l'autre n'en eft éloignée que de 33 werftes. D'abord je vais parler de la premiere.

Les eaux Martiales font fituées à 44 werftes de Pétrofawodsk, au fond des montagnes adjacentes au lac Onega. Elles ont été découvertes fous le regne de Pierre I. Les fources de ces eaux fe trouvent au pied d'une montagne, d'où elles découlent dans une grande plaine & y transportent une terre martiale, que l'on employe à la fonte des canons dans la fonderie de Pétrofawodsk; & c'eft cette terre, qui conftitue la mine de fer aux eaux martiales, lesquelles dépofent,

 outre

fon embouchure, fur le coté droit, il y a une carriere de marbre rouge, rayé de blanc, qu'on travaille & qu'on transporte à Pétersbourg, où l'on l'employe pour bâtir les édifices.

outre celà, dans la dite plaine, une terre noire, empreinte des parties vitrioliques & alumineuſes.

L'autre mine de fer, éloignée des eaux martiales de 33 werſtes, ſe trouve dans un lac, appellé Nelhomoſero, dont on la tiroit. Elle fait le premier lit de ſon fond. C'eſt auſſi une terre martiale, depoſée dans le lac par les eaux des ſources minérales, qui y coulent; car ſitôt qu'elle eſt emportée, on voit paroitre une argille bleuâtre, qui conſtitue le véritable fond du lac.

À peu de diſtance du dit lac, il y en a un autre, nommé Noydomoſero, dont on tiroit, pendant pluſieurs années, une pareille mine de fer, qui eſt toute épuiſée. Les mines de ces trois endroits & des pluſieurs autres ſe reſſemblent parfaitement, & on les employe pour la fonte des canons, ſans diſtinction. Leur origine doit être auſſi la même; & voici pourquoi.

Le pays montagneux où ſe trouvent ces mines de fer ochracées ou plûtot terreuſes, eſt très abondant en ſchiſte pyriteux, qu'on rencontre non ſeulement ſur les pentes & dans les contours des montagnes, mais auſſi dans les plaines & dans les lieux très bas. On en voit des couches dans le rivage du lac Onéga à peu de diſtance de la paroiſſe Tolwouy; il conſtitue un grand banc dans le rivage du lac Sandal entre les villages Erſchi & Matiukow Navolok. En général, il y exiſte presque par-tout, auſſi bien dans la terre ferme, qu'aux isles, qui ſont très frequentes dans les lacs, dont on compte 1998 dans tout le Gouvernement d'Olonetz. Ce ſchiſte, dans pluſieurs endroits, eſt à-decouvert; les champs mêmes ou la terre labourable en ſont parſemés; mais

mais il y eſt briſé en petites tablettes par le ſoc de la charrue, & défend les grains ſemés des intempéries de l'Atmoſphere, comme de la trop grande ſécchereſſe, en empéchant l'humidité de la terre de s'évaporer, & du grand froid qui ſurvient au commencement d'été, en détournant du bled ſemé ſes éffets nuiſibles. Partout où il y en a des couches, il ſe trouve en grandes feuilles ou plûtot en tables groſſes & fort dures, dans lesquelles la matière pyriteuſe eſt très abondante, enſorte qu'il ne faut que des yeux tout nuds pour diſtinguer les parties minérales dont ce ſchiſte eſt empreint. Il n'eſt pas même rare de voir dans les groſſes planches de ce ſchiſte des cryſtalliſations pyriteuſes, ſemblables à des marcaſſites, qui font des petites protubérances ſur les feuilles plattes de ce ſchiſte, qui eſt bien noir & fort dur, comme je l'ai déjà dit; mais il eſt à remarquer, qu'on en trouve en différens endroits des grandes maſſes ſur la ſurface de la terre, tout-à-fait ſeparées des couches ſchiſteuſes, & que ces maſſes n'ont plus la même ſolidité que le ſchiſte en couches; au contraire, on les caſſe très facilement avec un léger coup de marteau, & elles tombent alors en petites portions, dans lesquelles la ſtructure ſchiſteuſe eſt toujours viſible, car leur caſſure s'opére ou par tablettes, ou par portions à cotés applatis. À l'isle Lyſchnoy dans le lac Sandal, à l'isle Klimetzkoy dans le lac Onega & dans pluſieurs autres endroits, on trouve fréquemment des pareilles maſſes de ce ſchiſte, & non ſeulement il eſt très aiſé de les caſſer à petits coups, mais elles ſe decompoſent d'elles mêmes. Quand on caſſe ces maſſes, on y decouvre une ochre ferrugineuſe jaune & rougeâtre, qui couvre ou enduit la ſurface du ſchiſte pret à ſe décompoſer. En caſſant pluſieurs morceaux de ce ſchiſte, je me ſuis aſſuré de l'exiſtence de cette terre ferrugineuſe dans les maſſes ſchiſteuſes, & il me paroit très probable, que toutes les mines de fer des lacs ou marecageuſes, qui ſont ſi nombreuſes dans tout ce pays, tirent leur origine de la décompoſition du ſchiſte pyriteux; & comme il ſe décompoſe ſur la ſurface de la terre, y étant en morceaux détachés de ſa couche, la même choſe lui doit arriver auſſi dans l'intérieur de la terre. Car s'il n'y a point de doute, que ce ſont l'air & l'eau, qui le décompoſent, quand il eſt expoſé au jour; il eſt très naturel d'attribuer auſſi aux mêmes élémens ſa decompoſition dans l'intérieur de la terre. Pour cela on n'a qu'à prendre en conſidération la conſtitution du pays, qui ne conſiſte, pour ainſi dire, que de montagnes, de lacs, de rivières & de ſources; en un mot, partout il n'y-a que des montagnes & des eaux. Ainſi les couches du ſchiſte pyriteux ne peuvent nullement être à l'abri de cet élément, même dans une grande profondeur de la terre; mais elles doivent par tout en éprouver l'action, & étant attaquées par les eaux, qui les lavent, la matière pyriteuſe, dont elles ſont impregnées, ſe met en mouvement, l'union des parties intégrantes de ce ſchiſte ſe détruit, il tombe en éfflореſcence & ſe décompoſe. Quand cela eſt fait, les mêmes eaux, qui ont decompoſé ce ſchiſte, en entrainent les parties avec elles, & étant ſorties hors de la terre, elles les depoſent dans les lacs & dans les plaines, où elles coulent.

C'eſt à cette décompoſition du ſchiſte pyriteux, que les eaux appellées martiales doivent les ſubſtances, qu'elles contiennent, & qui ſont la terre ferrugineuſe & la terre vitriolique. Cette derniere eſt dépoſée tout-près de l'iſſue des eaux-martiales, au pied de la montagne dont elles ſourdent; & la premiere eſt entrainée un peu plus loin dans une vaſte plaine, dans laquelle l'eau ſe diſperſe en y laiſſant cette terre ferrugineuſe, qui conſtitue la mine de fer, employée pour la fonte des

ca-

canons. C'eſt dans cette plaine, qu'on trouve des morceaux dé bois, penétrés par les eaux minérales & dévenus comme pétrifiés.

La terre vitriolique a un gout très piquant; elle eſt de couleur noire. On en prépare, à l'endroit même, de la couperoſe verte.

On tire ainſi des eaux martiales un double profit, en mettant en uſage les deux terres minérales, qui en réſultent; mais ſi l'on vouloit employer ces eaux à l'uſage interne, & les prendre pour ſalutaires, comme on a cru du tems paſſé; elles ne pourroient aucunement répondre à ce but; puisque, quand on les raſſemble dans un baſſin, au ſortir de leur ſource, elles y ſont tellement impregnées de vitriol, qu'elles ne ſont pas même potables. Leur gout auſtère eſt inſupportable; & comme elles contiennent auſſi une portion de ſubſtance alumineuſe, qui les rend ſtiptiques, leur uſage interne ne peut qu'être nuiſible.

On voit par tout ce que je viens de dire, que les avantages, qu'on tire des eaux martiales, ne ſont point conſidérables; parceque la mine de fer, provenante de ces eaux, n'eſt pas de bonne qualité, & que le fer de fonte, qu'on en obtient, eſt fort aigre & caſſant; enſorte que ſi cette mine n'appartenoit pas à la couronne, mais à un particulier, elle ſeroit déjà dipuis longtemps abandonnée.

La terre vitriolique, dont on fabrique de la couperoſe verte, me paroit être incomparablement plus vtile, que la dite mine; car elle fournit beaucoup de vitriol; & comme il y en a une très grande quantité, on ne doit pas craindre, qu'elle puiſſe être bientôt épuiſée.

Mais

Mais en tirant ces avantages des eaux martiales, il faudroit aussi faire attention à ce schiste pyriteux, qui fournit les dites substances, & qu'on y trouve dans plusieurs endroits, & souvent sous la premiere couche de terre. Jusqu'à présent on n'avoit cherché dans ce pays que des mines d'or, d'argent, de cuivre, de plomb & de fer, & on n'a pas pensé à cette substance, si commune dans nôtre pays, laquelle étant fouillée, pourroit être utile par elle même, en fournissant de la terre vitriolique, après s'être décomposée à l'air & par l'humidité; mais en outre elle conduiroit peut-être à des découvertes beaucoup plus importantes. Car c'est toujours sous les couches des schistes qu'on trouve des bonnes ardoises, qui s'annoncent ordinairement par un lit de schiste noirâtre; & lorsqu'on ne trouve pas l'ardoise au-dessous des schistes, dit M. de Buffon (*), on peut espérer d'y trouver des charbons de terre, aux veines desquels les schistes servent de lits & d'envéloppe.

(*) Hist. natur. des Minéraux, à l'article des schistes.

ASTRONOMICA
ET
METEOROLOGICA.

OBSERVATIONES
NONNVLLAE ASTRONOMICAE.
PETROPOLI HABITAE.

Auctore
STEPHANO RVMOVSKI.

Conuent. exhib. die 2 Dec. 1793.

Anno 1775.

Die $\frac{22\ Sept.}{2\ Oct.}$ Immers. I. Satell. Iouis - $10^{h.}\ 29'.\ 4''$. t. v.

Obseruatio bona peracta est tubo Gregoriano bipedali, prout omnes reliquae.

1778.

Die $\frac{22\ Ian.}{2\ Febr.}$ Immerf. I. Satell. Iovis - 9. 30. 16.

Obferuatio dubia Iove non procul ab oppofitione cum Sole diftante.

Die $\frac{28\ Febr.}{11\ Mart.}$ Emerf. II. Satell. Iovis - 9. 58. 19.

Luna non procul a Ioue remota fatellitem iufto tardius confpexiffe me exiftimo, nam intenfiori iam lumine quam par eft lucebat, dum eum confpicio.

Die $\frac{9}{20}$ Mart. Emerſ. I. Satell. Iouis - $12^h. 16'. 23''$. t. v.

Die $\frac{25\ \text{Mart.}}{5\ \text{April}}$. Emerſ. I. Sat. Iouis - 10. 38. 48.

Pari cum reliquis lumine lucet 10. 39. 28.

Eadem die Immerſ. IV. Satell. Iouis.

Lumen ſatellitis diminutum - 11. 45. 39.

Diſparuiſſe videtur - - 46. 40.

Obſeruatio dubia: nam cum lumine diminuto cerneretur, tam exiguo interuallo a primo fuit ſeiunctus, vt cum illo cohaerere videretur, et nec niſi lumine debiliori differebat a primo.

Die $\frac{30\ \text{Mart.}}{10\ \text{Aril.}}$ Emerſ. III. Satell. Iouis

Dubito de praeſentia Satellitis - - $9^h. 30'. 1''$. t. v.

Nam tardius cum expectaueram

Certus ſum illum prodiiſſe - - - 9. 30. 7.

Caelo ſereno, aere tranquillo, obſeruatio bona.

Die $\frac{31\ \text{Mart.}}{11\ \text{April.}}$.

Emerſ. II. Satell. Iouis - - - $9^h. 54'. 32''$.

Emerſ. I. Satell. Iouis - - - 12. 35. 20.

Pari lumine cum reliquis lucet 36. 0.

1779.

Die $\frac{29\ \text{April.}}{10\ \text{Maii.}}$ Emerſ. I. Satell. Iouis

Dubito de praeſentia ſatellitis - - $10^h. 10'. 20''$.

Certus ſum illum prodiiſſe - - 10. 32.

1780.

1780.

Die $\frac{20\ \text{Febr.}}{2\ \text{Mart.}}$ Emerſ. II. Satell. Iouis - $15^h. 27'. 25''$. t. v.

Obſeruatio dubia.

Die $\frac{29\ \text{Febr.}}{11\ \text{Mart.}}$ Immerſ. I. Satell. Iouis - 11. 51. 16.

Coelo ſereno, ſed faſciis minus diſtincte conſpicuis.

Die $\frac{8}{19}$ Mart. Immerſ. II. Satell. Iouis - $12^h. 22'. 38''$

Eadem a Socio tubo tripedali achrom. 22. 50.

Die $\frac{9}{20}$ Martii occultatio γ ♍ a Luna.

Immerſio ſtellae ad limbum ☽ lucidum $14^h. 22'. 48''$.

Obſeruatio exacta ad vnum minutum ſecundum

Emerſio ad limbum ☽ obſcurum - $15^h. 26'. 9''$.

Obſeruatio non aeque exacta ac praecedens, inſtituta enim eſt oculo non in id ipſum punctum directo, ad quod contigit emerſio; incertitudo tamen non niſi 4 aut 5 minutorum ſecundorum eſſe potuit.

Die $\frac{4}{15}$ Maii. Emerſ. II. Satell. Iouis.

Satelles prodit in conſpectum - $11^h. 23'. 47''$. t. v.

Pari lumine cum reliquis lucet - 24. 53.

Die $\frac{17}{28}$ Maii. Emerſ. I. Satell.

Credo ſatellitem prodire - - 11. 12. 23.

Certus ſum de eius praeſentia - 12. 30.

Pariter cum reliquis fulget - - 13. 8.

1781.

Die $\frac{3}{14}$ Mart. Immerſ. I. Satell.

Lumen ſatellitis imminutum - -	$14^h. 43'. 9''$. t. v.
Dubito de eius praeſentia - -	43. 42.
Certus ſum illum diſparuiſſe - -	43. 47.

Die $\frac{12}{23}$ Mart.

Immerſ. I. Satellitis Iouis - - $13^h. 3'. 39''$.

Obſeruatio ob viciniam Iouis horizonti et ſplendorem Lunae dubia.

Die $\frac{26 \text{ Mart.}}{6 \text{ April.}}$ Immerſ. I. Satell.

Satelles debili lumine lucet - -	$14^h. 58'. 3''$.
Diſparet - - - -	58. 48.

1783.

Die $\frac{22 \text{ Iulii}}{2 \text{ Aug.}}$. Emerſ. I. Satell.

Satelles prodire ſed denuo diſparere videtur	$11^h. 12'. 30''$.
Certus ſum de eius praeſentia - -	12. 51.

Obſeruatio peracta eſt Ioue tenui nubecula tecto, faſciis non diſtincte conſpicuis.

Die $\frac{7}{18}$ Aug.

Emerſ. I. Satellitis Iouis - - $9^h. 35' 18''$.

Obſeruatio dubia ob nebulam.

1784.

1784.

Die $\frac{16}{17}$ Iulii. Immerſ. III. Satell.

Satellitem vix ac ni vix quidem conſpicio	12^h.	$12'$.	$45''$.	t. v.
Certus ſum eum immerſiſſe - - -		12.	53.	

Die $\frac{31 \text{ Iulii}}{11 \text{ Aug.}}$. Immerſ. I. Satell. - - 14. 42. 20.

1785.

Die $\frac{5}{16}$ Sept. Immerſ. I. Satell.

Lumen ſatellitis imminutum - -	14.	29.	29.
Diſparet prorſus - - - -		30.	4.

Obſeruatio bona.

DE-

DÉSCRIPTION
D'UN MÉTÉORE REMARQUABLE,
OBSERVÉ À St. PÉTERSBOURG
LE 18 JUIN 1790.

Par
M. TOBIE LOWITZ.

Presenté à l'Académie le 18 Octobre 1790.

Tab. VII. Le matin du 18 Juin, la région visible de l'Atmosphère étant par tout uniformement chargée de vapeurs semblables à un brouillard, cette constitution de l'air occasiona un phénomène des plus beaux, des plus rares & des plus remarquables par sa variété. Je commençai de m'en appercevoir à 7 heures 30 minutes & je l'observai jusqu'à sa fin, en le décrivant avec la plus grande exactitude.

1. Le soleil étoit entouré de deux cercles *e b d k* & *e i d c* qui se coupoient en *d* & *e*, & dont la couleur étoit rougeatre du coté tourné vers le soleil & blanchâtre du coté opposé. Le soleil étoit ainsi placé en *a* entre leurs centres *α* & *β*. Les arcs extérieurs *d b e* & *d c e* étoient beaucoup plus clairs & plus brillans que les intérieurs *d k e* & *d i e*. La ressemblance des couleurs donnoient à ces derniers une figure

figure allongée ou ovale, & les deux autres avoient la forme d'un cercle applati par le bas & le haut. Au point supérieur de leur intersection on en voyoit une partie considérable *w d w* d'une vivacité extraordinaire, dont la splendeur éblouïssante incommodoit autant la vüe que le soleil même.

2. Le point d'intersection inférieur *e* touchoit à un arc demi-cercle renversé *r e f* fort clair & large, qui rélativement à son diametre étoit le plus petit de tous les arcs.

3. Un autre cercle *z z z*, pareillement coloré mais à une plus grande distance du soleil & imparfait vers l'horizon, qu'un arc supérieur *p z q* faisoit paroître cornu, avoit le soleil même pour centre.

4. Ce dernier cercle touchoit vers le midi & vers l'orient à deux arcs renversés *t t* & *v v*, opposés au soleil, parfaitement semblables à des parties d'arc en ciel, tant par leur largeur que par la vivacité des couleurs prismatiques, en quoi ils se distinguoient de tous les autres arcs de ce météore. Les bâtimens m'empechoient de voir si ses bouts s'étendoient jusqu'à l'horizon.

5. Encore un aute cercle entier & blanc *a f h g a* qui renfermoit une très grande étendue, étoit parallèle à l'horizon, qu'il entouroit de toute part, & qui avoit conséquemment le Zénith pour centre. Dans la circonférence de celuici se trouvoit le soleil même & cinq parhélies, dont trois *f*, *h* & *g* vis à vis du soleil vers NOu. étoient blancs & pâles, & les deux autres *x* & *y* à chaque coté du soleil, en SE, colorés & fort brillans.

6. Ces deux derniers parhélies qui ſe trouvoient à quelque diſtance des interſections du grand cercle horizontal par les deux couronnes qui entourent le ſoleil, renvoyoient d'abord des deux cotés de parties d'arc très courtes colorées *x i* & *y k* dont la direction s'inclinoit au deſſous du ſoleil jusqu'aux deux demi-arcs de cercle interieurs *d i e* & *d k e*. En ſecond lieu ils étoient pourvues des queues longues, claires & blanches *x* ζ & *y* η, oppoſées au ſoleil & renfermees dans la circonference du grand cercle *a ſ h g*.

7. Enfin deux grands arcs de cercle *dlh* & *dmh* de couleur blanche parurent en dedans du grand cercle horizontal *a ſ h g*, mais ils étoient ſi pâles, que pluſieurs perſonnes à qui je m'efforçois de les montrer, ne le purent pas appercevoir. D'abord ils ſe rencontroient près du ſoleil en *d* dans la clarté éblouïſſante, & ſe croiſoient enſuite de l'autre coté eux mêmes, ainſi que le grand cercle, dans le centre du parhélie pâle *h*, d'où ils s'étendoient ſenſiblement plus loin, au delà de quelques degrés du grand cercle vers le N. Ou. de l'horizon, en *n* & *o*.

Tel étoit ce beau météore à 10 heures avant midi, où il avoit atteint ſa plus grande perfection. À l'égard du changement ſucceſſif de ſes parties, je fis encore les obſervations ſuivantes :

À 7 heures 30 min. du matin les deux couronnes autour du ſoleil *d b e k* & *d c e i* n'étoient pas encore dans leur perfection, on ne voyoit que leurs arcs intérieurs *die* & *dke* ſous la figure d'un oval parfait avec ſa clarté brillante d'en-haut *d*. Ce ne fut que peu à peu que cette clarté s'etendoit des deux côtés, en formes d'arcs *d w*, *d w*, qui dévenoient de de plus en plus grandes, jusqu'à ce qu'ils fe réunirent enfin à 9 heures entièrement en *e* près du demi-cercle brillant *r e f*.

Ce qu'il y avoit de plus remarquable dans ces deux cercles ou couronnes, qui fe croifoient, qu'après avoir atteint leur perfection ils s'approchoient de plus en plus jusqu'à ce qu'enfin ils ne formérent qu'une feule couronne qui avoit le foleil pour centre. Cependant on obferva toujours vers les parties fupérieure & inférieure une clarté très fenfible. Vers ce même temps disparurent les deux arcs de couleurs prismatiques *t t* & *v v*. Les deux parhélies *x* & *y* au contraire s'eloignoient du foleil de plus en plus & difparurent enfin entièrement à $10^h. 45'$.

Le grand cercle horizontal *a f h g a* & fes trois parhélies foibles *f*, *h* & *g* refterent encore & ne disparurent qu'à $11^h. 35'$. Ce qui méritoit encore d'être remarqué dans ce grand cercle, c'eft que confervant toujours le foleil & fes cinq parhélies dans fa circonférence, il reftoit conftamment parallèle à l'horizon, & gardoit conféquemment le zénith pour centre: c'eft pourquoi plus le foleil approchoit du méridien, plus il s'élévoit fur l'horizon, le grand cercle dont l'étendue étoit d'abord extrèmement grande, lorsque le foleil étoit encore peu élévé, alla toujours en diminuant, jusqu'à ce qu'à la fin fon diamètre devint prèsque auffi petit que celui des deux couronnes réunies. La même chofe arriva aux deux arcs *d l h* & *d m h* qui fe trouvoient dans le cercle horizontal. Leurs points d'interfection furent toujours en *h* & *d*.

À midi il ne resta plus rien de ce beau phénomène qu'une simple couronne très luisante dans ses bords supérieurs & inférieurs, qui disparut enfin entièrement à 12 heures midi 30 minutes.

En général ce météore étoit composé de douze arcs divers, dont neuf étoient colorés, de sorte que partout le rouge se trouvoit tourné vers le soleil & le blanc aux côtés opposés.

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À ST. PÉTERSBOURG
EN L'ANNEÉ MDCCXC.

Daprès le nouveau Stile.

Présenté à l'Académie le 3 Mars 1791.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrèmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne du Baromètre, pour chaque mois de l'année 1790.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variation.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour, heure	P. cent.	jour, heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	28.77	le 4 à 2 h.s.	27.47	le 13 à 6h.s.	130	28.12	28.202
Février	28.47	le 20 à 3h.m.	27.18	le 6 à 3h.m.	129	27.82	27.863
Mars	29.09	le 28 à 9h.m.	27.52	le 7 à 3h.m.	157	28.30	28.359
Avril	28.91	le 1 à 12h.m.	27.82	le 21 à 9h.m.	109	28.36	28.291
Mai	28.68	le 12 à 6h.m.	27.80	le 16 à 4h.m.	88	28.24	28.257
Juin	28.39	le 20 à 9h.m.	27.63	le 28 à 2h.m.	76	28.01	28.023
Juillet	28.23	le 27 à 5h. s.	27.41	le 18 à 12h.m.	82	27.82	27.904
Août	28.21	le 15 à 4h. s.	27.62	le 19 à 4h.m.	59	27.91	27.948
Septembr.	28.49	le 21 à 12h.m.	27.31	le 26 à 4h.m.	118	27.90	27.952
Octobre	28.68	le 4 à 11h. s. le 5 à 11h.m. le 26 à 6h.m.	27.16	le 16 à 6h.s.	152	27.92	28.085
Novembr.	28.74	le 8 à 6h.m.	27.42	le 22 à 6h.s.	132	28.08	28.176
Décembr.	28.59	le 30 matin.	26.96	le 12 à 11h.m.	163	27.77	27.906

m. signifie *matin* ou *avant-midi*, & s. *soir* ou *après-midi*.

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a surpassé quelques points principaux de l'échelle, avec la hauteur qui répond à chaque demi-mois.

Mois.	Au dessus de 27. 80 jours h.	27. 90 jours h.	28. 00 jours h.	28. 10 jours h.	28. 20 jours h.	un demi-mois au dessus de Pouces. mill.
Janvier.	29. 0	26. 18	23. 21	21. 0	17. 0	28. 248
Février	18. 15	14. 21	7. 15	4. 21	3. 0	27. 923
Mars	29. 12	27. 18	26. 9	24. 15	20. 0	28. 316
Avril	30. 0	29. 12	28. 9	25. 15	17. 6	28. 267
Mai	31. 0	29. 18	28. 12	25. 3	18. 9	28. 240
Juin	27. 21	24. 21	16. 12	8. 6	3. 9	28. 025
Juillet	25. 6	14. 12	8. 18	3. 21	1. 0	27. 915
Août	26. 15	18. 15	12. 9	4. 3	0. 6	27. 939
Sept.	20. 0	16. 15	10. 21	8. 15	5. 18	27. 929
Oct.	25. 0	18. 21	14. 21	13. 15	11. 12	27. 980
Nov.	26. 12	25. 3	20. 15	17. 21	14. 15	28. 189
Déc.	17. 12	14. 21	13. 21	11. 21	8. 21	27. 882
Année. 1790.	306, 21	262, 3	212, 15	169, 12	121, 0	182½ jours au dessus de 28.030
du 1 Nov. 1789. au 1 May 1790.	155, 3	141, 0	123, 9	106, 9	78, 15	90½ jours au dessus de 28, 157
du 1 May au 1 Nov. 1790.	155, 18	123, 3	91, 21	63, 18	40, 6	92 jours au dessus de 27, 999

La

La plus grande élévation du mercure dans le Baromètre $=$ 29. 09 pouces de Paris, le 28 Mars à 9 heures du matin. Thermomètre de Délisle 162. Ciel ſerein, vent du Sud.

La plus petite élévation $=$ 26. 96 le 12 Décembre à 11 heures avant midi. Therm. 153. Ciel couvert, neige & un vent très fort de l'Oueſt.

La variation totale $=$ 2, 13: le milieu $=$ 28. 025.

La hauteur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs obſervées, diviſée par leur nombre.

1. Pour toute l'année $=$ 28. 082.
2. Pour l'hyver de 1789 à 1790, ou depuis le 1 Novembre 1789 jusqu'au 1 May 1790 $=$ 28. 143.
3. Pour l'été de 1790, ou depuis le 1 May jusqu'au 1 Novembre 1790 $=$ 28. 028.

La hauteur moyenne du Baromètre a été la plus grande au mois de Mars, & la plus petite au mois de Février: la différence eſt $=$ 0, 496, ou bien presque d'un demi-pouce.

3.) Va-

3.) Variations fubites & extraordinaires.

Mois.	Temps jour.	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmofphère.
Janv.	2.	10. s.	39	28.	25	+52	149	SOu.	ciel couvert.
	4.	1. s.		28.	77		166	Ou. fort.	ciel demi-couvert.
	4.	12. s.	27	28.	65	—93	165	SOu. ff.	c. couvert, neige & pluie.
	6.	3. m.	23	27.	72	+51	148	NOu.	ciel couvert, enfuite pluie.
	7.	2. m.		28.	23		163	NOu.	ciel couvert.
	7.	4. s.	32	27.	94	+57	163	NOu.	ciel couvert.
	8.	12. s.		28.	51		175	SOu.	ciel ferein.
	9.	11. m.	18	28.	54	—41	174	S.	ciel ferein.
	10.	5. m.		28.	13		154	SOu.	ciel couvert.
	12.	9. m.	33	28.	02	—55	148	SOu.	c. couvert, petite pluie.
	13.	6. s.	24	27.	47	+51	146	SOu. fort.	c. couvert, pluie.
	14.	6. s.		27.	98		151	NOu. fort.	c. ferein, enfuite couvert.
	15.	10. m.	30	27.	87	+56	155	NOu. fort.	c.couv. neige,enfuite c.ferein.
	16,	4. s.	14	28.	43	+16	165	N.	ciel ferein.
	17.	6. m.		28.	59		174	NOu. fort.	c. ferein.
Févr.	3.	12. m.	20	28.	33	—80	180	calme.	brouill.c.ferein, enfuite couv
	4.	8. m.		27.	53		149	SOu. fort.	c. couv. neige.
	5.	3. m.	24	27.	96	—78	165	NOu.	ciel ferein.
	6.	3. m.	20	27.	18	+81	151	SOu. fort.	neige, & ciel couvert.
	6.	11. s.	37	27.	99	—80	165	N. fort.	c. ferein.
	8.	12. m.	32	27.	19	+75	161	SE.	neige, & ciel couvert.
	9.	8. s.		27.	94		185	N. fort.	c. demi-couvert.

3.) Va-

3.) Variations ſubites & extraordinaires.

Mois.	Temps jour	Temps heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Differ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
	14.	9. m.	15	27. 96	—34	165	SOu.	ciel couvert.
	14.	12. s.	46	27. 62	+77	155	SOu.	neige & c. couvert.
	16.	10. s.	24	28. 39	—39	166	NE.	c. demi-couvert.
	17.	10. s.		28. 00		154	SOu. fort.	ciel couvert.
	18.	12. s.	24	27. 95	+62	150	N.	neige, c. couvert.
Févr.	19.	12. s.	34	28. 57	—74	164	NOu. fort	c. couvert, neige.
	21.	10. m.		27. 83		150	Ou. fort.	neige, c. couvert en partie.
	22.	3. m.	20	28. 06	—69	165	NOu.	ciel ſerein.
	22.	11. s.	25	27. 37	+67	146	SOu. fort.	neige, c. couvert.
	23.	12. s.		28. 04		166	Ou.	ciel ſerein.
	24.	12. s.	12	28. 24	—43	165	SE.	ciel couvert en partie, neige.
	25.	12. m.	12	27. 81	+26	158	E. ff.	neige, ciel couvert.
	25.	12. s.	12	28. 07	—28	160	Ou. fort.	c. couvert.
	26.	12. m.		27. 79		145	Ou.	c. couvert, pluie.
	3.	6. m.	21	28. 25	—60	181	N.	ciel ſerein.
	4.	3. m.	36	27. 65	+88	165	E. fort.	c. couv. beaucoup de neige.
	5.	3. s.	36	28. 53	—101	172	NE.	c. ſerein, enſuite couvert.
	7.	3. m.	32	27. 52	+86	155	N. fort.	c. couv. neige, enſuite c. ſer.
Mars.	8.	11. m.		28. 38		164	NOu.	c. couvert.
	10.	6. s.	42	27. 80	+78	148	SOu.	c. couvert.
	12.	12. m.		28. 58		147	SOu. fort.	ciel ſerein.
	18.	3. m.	30	28. 16	+57	152	N.	c. couvert en partie.
	19.	9. m.		28. 73		155	NOu.	c. ſerein.
Avril	8.	2. s.	24	28. 07	+37	144	calme.	c. couvert, pluie & neige.
	9.	2. s.		28. 44		162	NOu.	c. ſerein.

3.) Variations subites & extraordinaires.

Mois.	Temps jour.	Temps heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	Baromètr. 1/100	Diff. 1/100	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
	15.	12. m.	16	28.	42	—50	148	calme	c. serein, ensuite couvert.
	16.	4. m.		27.	92		149	Ou. fort.	c. couvert, pluie & neige.
Avril	19.	3. s.	42	28.	38	—56	154	NE. ff.	c. serein, ensuite couv. & neige
	21.	9. m.	48	27.	82	+71	151	NE. fort.	neige, c. couv. ens. ser. en partie
	23.	9. m.		28.	53		158	calme	brouillard, ensuite c. serein.
	17.	2. s.	22	27.	89	—47	118	Ou.	c. en partie serein.
Juill.	18.	12. m.	48	27.	42	+57	128	NOu. fort.	c. couv. beaucoup de pluie.
	20.	12. m.		27.	99		122	SOu. fort.	c. en partie serein, ensuite pluie forte & ciel couv.
Août.	19.	4. m.	20	27.	62	+40	135	Ou. fort.	pluie, ciel en partie couvert.
	19.	12. s.		28.	02		137	Ou.	ciel serein.
	14.	3. s.	21	27.	72	+27	132	Ou. fort.	c. en partie couv. pluie & grele.
	15.	12. m.	8	27.	99	—19	134	SOu. fort.	ciel couvert, pluie copieuse.
	15.	8. s.	13	27.	80	+33	136	SE. calme.	pluie, ensuite c. serein.
	16.	9. m.	15	28.	13	—35	138	E.	c. serein, brouillard.
	16.	12. s.		27.	78		132	SE. fort.	c. demi-couv. éclairs, aur. bor.
	19.	11. m.	25	27.	66	+64	133	SOu. fort.	pluie & ciel couvert.
Sept.	20.	12. m.		28.	30		139	NOu.	c. en partie serein.
	24.	0. m.		28.	32		139	Ou.	c. serein, brouillard.
	25.	0. m.	28	28.	14	—83	141	SOu. fort.	c. en partie couvert.
	26.	4. m.	42	27.	31	+96	140	NOu. fort.	pluie, c. couvert.
	27.	10. s.		28.	27		151	NOu.	c. en partie couvert.
	29.	6. m.	30	27.	92	+50	148	calme	brouillard, c. couv. pluie.
	30.	12. m.		28.	42		142	Ou.	ciel serein.

3.) Va-

3.) Variations ſubites & extraordinaires.

Mois.	Temps jour	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
	16.	6. s.	45	27.	16	+82	142	S. SOu.	c. en partie couv. enſuite pluie
	18.	3. s.	30	27.	98	−56	147	SOu.	ciel couvert.
Oct.	19.	9. s.		27.	42		149	SE.	neige & pluie, c. couvert.
	20.	8. m.	16	27.	37	+49	149	NE.	neige & pluie, c. en part. couv.
	20.	12. s.	48	27.	86	+61	148	NE.	pluie, c. couvert.
	22.	12. s.		28.	47		149	NE.	c. en partie couvert.
	26.	8. s.	39	28.	52	−82	141	S. SE.	c. couvert, enſuite neige.
	28.	11. m.		27.	70		149	S.	neige & ciel couvert.
	8.	3. s.	33	28.	73	−55	155	SOu.	c. en part. couv. La riviere charia des glaces.
	9.	12. s.		28.	18		150	Ou. fort.	neige, pluie, ciel couvert.
	11.	10. m.	44	28.	11	+57	150	S, N.	neige, c. couvert.
	13.	6. m.		28.	68		161	N.	c. couvert.
	13.	12. m.	34	28.	68	−55	163	S.	c. en partie ſerein.
Nov.	14.	10. s.		28.	13		156	SE.	c. couv. neige. La riviere fut priſe le lendemain.
	23.	6. m.	24	27.	47	+67	149	SOu. ff.	c. couvert, neige.
	24.	6. m.		28.	14		157	NOu.	c. ſerein, enſuite couvert.
	24.	12. m.	28	28.	13	−50	153	NOu.	c. couvert, enſuite neige.
	25.	4. s.	20	27.	63	+54	149	SOu.	pluie, c. couvert. La riviere fut priſe pour la 2 fois.
	26.	12. m.	24	28.	17	−55	155	NOu.	c. ſerein.
	27.	12. m.	36	27.	62	+92	149	SE. ff.	c. couvert, pluie & neige.
	28.	12. s.		28.	54		158	NE. calme.	ciel couvert.
	29.	12. m.		28.	63		161	NE.	ciel ſerein.

3.) Variations fubites & extraordinaires.

Mois.	Temps. jour.	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmofphère.
	1.	0. m.	34	28.	62	—50	162	SE. calme.	c.couv.enfuite brouill.&neige
	2.	10. m.		28.	12		149	SE.	c. couvert, pluie.
	7.	4. s.	20	27.	94	—42	154	Ou. NOu.	c. couvert.
	8.	12. m.	22	27.	52	+36	152	S. fort.	c. couvert & neige.
	9.	10. m.		27.	88		154	SOu.	c. couvert.
	10.	8. m.	19	27.	80	—43	153	SOu.	c. couvert, pluie & neige.
Déc.	11.	3. m.		27.	37		151	Ou. fort.	c. couvert.
	11.	3. s.	20	27.	47	—51	152	SOu. fort.	c. en partie couv. neige.
	12.	11. m.	7	26.	96	+36	150	Ou. ff.	de même.
	12.	6. s.		27.	32		156	Ou. fort.	c. en partie ferein.
	14.	6. m.	27	27.	66	—61	163	E.	c. ferein, brouillard, c. couv.
	15.	9. m.	15	27.	05	+42	150	S.	beaucoup de neige, c. couv.
	15.	12. s.		27.	47		158	SOu. fort.	c. couvert.
	20.	6. m.	18	27.	73	+52	153	calme.	beaucoup de neige, c. couv.
	20.	12. s.		28.	25		165		c. ferein, brouillard.

ff. indique que le vent a été très fort.

Les.

Les défcentes les plus confidérables ont été, de $1\frac{1}{100}$ pouces en 36 heures le 6 Mars: de $\frac{93}{100}$ pouces, ou de $11\frac{1}{10}$ lignes en 27 heures le 5 Janvier, & de $\frac{8}{10}$ pouces, ou de $9\frac{3}{5}$ lignes en 20 heures le 3 Février. Les montées n'ont pas été auffi fubites: il y en a eu, de $\frac{92}{100}$ pouces, ou de 11 lignes en 36 heures le 27 Novembre: de $\frac{81}{100}$ pouces, ou de $9\frac{7}{10}$ lignes en 20 heures le 6 Février; enfin celles du 4 & du 7 de Mars. En général les variations du Baromètre on été les plus fortes dans les trois premiers & les quatre derniers mois de l'année.

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes, avec leur différence, & l'état moyen du froid & de la chaleur, pour chaque mois de l'année 1790.

Mois.	Hauteurs extrêmes.				Différence.	Etat moyen.	
	Au plus bas		Au plus haut.			Froid moyen.	Chaleur moyen.
	Degré.	jour & heure.	Degré.	jour & heure.	Degré	Degré.	Degré.
Janvier	182	le 25 à 10h.s.	145	le 13 à 2 h. s.	37	165,1	159,1
Février	188	le 3 à 6 h. m. & le 10 à 10h.s.	144	le 27 à 2 h. s.	44	168,2	158,4
Mars	184	le 5 à 6 h. m.	141	le 23 à 2 h. s.	43	160,6	150,8
Avril	174	le 4 à 7 h.m.	138	le 30 à 2 h. s.	36	161,7	149,5
Mai	153	le 17 à 6 h. m.	121	le 21 à 2 h. s.	32	142,4	132,0
Juin	145	le 1 à 6 h. m.	116	le 11 à 2 h. s.	29	132,3	125,0
Juillet	138	le 6 à 7 h. m.	115	le 31 à 3 h. s.	23	130,8	124,5
Août	145	le 23 à 6 h. m.	117	le 5 à 2 h. s.	28	133,5	125,6
Sept.	155	le 28 à 6 h. m.	130	le 16 à 2 h. s.	25	141,2	134,6
Octobr.	153	le 31 à 10 h.s.	133	le 6 à 3 h. s.	20	147,1	142,6
Novem.	165	le 29 & le 30 à 10 h. s.	147	le 22 à 3 h. s.	18	155,5	152,0
Décem.	165	le 20 à 9 h. s.	146	le 3 à 3 h. s.	19	156,1	152,0

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont surpassé quelques divisions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Le froid a été plus grand que						La chaleur a été plus grande que					
	180 jours.	170 jours.	160 jours.	150 jours.	140 jours.	130 jours.	120 jours.	130 jours.	140 jours.	150 jours.	160 jours.	170 jours.
Janv.	2	11	22	29	31	31				8	16	27
Févr.	6	8	22	27	28	28				6	18	23
Mars	3	6	15	27	31	31				20	26	30
Avril		6	17	30	30	30			2	16	28	30
Mai				5	18	31		15	27	31	31	31
Juin					2	22	3	29	30	30	30	30
Juillet						22	4	27	31	31	31	31
Août					2	23	5	25	31	31	31	31
Sept.				3	14	30			26	30	30	30
Oct.				10	31	31			10	31	31	31
Nov.			7	26	30	30				12	28	30
Déc.			6	29	31	31				7	31	31
Année. 1790.	11	31	89	186	248	340	12	96	157	253	331	355
du 1 Nov. 1789. au 1 May 1790.	12	39	90	146	181	181			6	91	139	169
du 1 May au 1 Nov. 1790.				18	67	159	12	96	155	184	184	184

Il n'y a eu cette année ni des grands froids ni des ſortes chaleurs. L'hyver de 1789 à 1790 a été extraordinairement doux, & l'été de 1790, froid & humide.

Le plus grand froid a été de 188°, ou de $20\frac{1}{3}$ degrés d'après Réaumur, le 3 Février à 6 heures matin: Baromètre 28. 28, calme, brouillard & ciel ſerein: de même le 10 Février à 10 heures du ſoir, Barom. 27. 95. vent du Nord, ciel en partie couvert.

La plus grande chaleur de 115°, ou de $18\frac{2}{3}$ degrés d'après Réaumur, a été obſervée le 31 Juillet à 3 heures après-midi, Baromèt. 28. 09. ciel en partie couvert & un vent fort du Sud.

La différence entre ces deux températures extrèmes eſt = 73° de Délisle, qui ſort 39 degrés de Réaumur.

Le froid moyen, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques, obſervées à 6 heures du matin & à 10 heures du ſoir, diviſée par leur nombre, a été le plus grand en Février, & le plus petit en Juillet. Sa valeur pour toute l'année eſt = 149°, 4

Pour l'hyver de 1789 à 1790, ce froid moyen eſt
depuis le 1 Novembre 1789 jusqu'au 1 Mai 1790 = 160°, 6 &
depuis le 1 Décembre 1789 jusqu'au 1 Avril 1790 = 162°, 4

Enſuite pour les ſix mois d'été ſuivans, ou
depuis le 1 Mai 1790, jusqu'au 1 Novembre = 137°, 9

De

De même la chaleur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques obſervées à 2 heures après-midi, diviſée par leur nombre, a été la plus grande en Juillet & la plus petite en Janvier. Elle a été pour toute l'année $= 141^\circ, 9$, & pour l'Été de 1790

depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre $= 130^\circ, 7$
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre $= 127^\circ, 4$

Et pour les ſix mois de l'hyver paſſé ou
depuis le 1 Novembre 1789 jusqu'au 1 Mai 1790 $= 152^\circ, 5$

3.) Énumération détaillée des froids, pendant l'hyver de 1789 à 1790, ou depuis le 1 Novembre 1789 jusqu'au 1 Mai 1790, ce qui fait un intervalle de 181 jours d'hyver.

Le froid a surpassé 180 degrés en 12 jours, le 2 Décembre 1789, le 25. 26 Janvier 1790, le 1. 2. 3. 9. 10. 11 Février, & le 2. 3. 5. Mars.

Le froid a été entre

170 & 180	le 24 — 26. 29. 30 Novembre, le 1. 3 Décembre, le 8. 9. 16. 17. 24. 27. 28. 30. 31 Janvier, le 12. 13 Février, le 1. 4. 8 Mars, & le 3 — 5. 9 — 11 Avril - - - - - - -	jours 27
160 & 170	le 23. 28 Novembre, le 10. 11. 13. 14 Décembre, le 3 — 7. 11. 15. 21 — 23. 29 Janvier, le 4 — 8. 14. 16. 17. 19. 20. 22 — 25 Févr. le 6. 7. 16. 19. 26 — 30 Mars, & le 1.2. 6. 8. 12. 13. 15. 19. 22 — 24 Avril - - - - -	51
150 & 160	le 1. 13. 22. 27 Novembre, le 4 — 7.9. 12. 15. — 19. 24. 27. 30. 31 Décembre. le 1. 2. 10. 14. 18 — 20 Janv. le 15. 18. 21. 26. 28 Février, le 9. 10. 12. 14. 15. 18. 20. 21. 23 — 25. 31 Mars, & le 7. 14. 16 — 18. 20. 21. 25 — 30 Avril -	56

En 35 jours il n'a gélé point du tout: mais il avoit déja gélé au mois d'Octobre 1789, savoir le 19. 20. 21. 25. 29 & 30 Octobre, & il y avoit encore eu des gélées au mois de Mai 1790, le 1. 10. 16. 17. 18.

L'Intervalle entre la premiere gélée du 19 Octobre 1789 & la derniere gélée du 18 Mai 1790, est de 221 jours.

4.)

4.) Énumération détaillée des chaleurs pendant l'été de 1790; c'eſt à dire depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1790: ce qui fait un intervalle de 184 jours d'été.

La chaleur a été en 12 jours plus grande que 120, le 11. 12. 27 Juin, le 17. 21. 30. 31 Juillett & le 1. 4 — 7 Août.

La chaleur a été obſervée entre

130 & 120	le 2 — 8. 19 — 26 Mai, le 2 — 10. 13 — 26 28 — 30 Juin, le 1 — 3. 8 — 16. 18 — 20 22 — 29 Juillet, & le 2. 3. 8 — 12. 15 — 18 20. 21. 24 — 30 Août - - -	jours 84
140 & 130	le 1. 9. — 11. 13 — 15. 18. 27 — 29. 31 Mai, le 1 Juin, le 4 — 7 Juillet, le 13. 14. 19. 22. 23. 31 Août, le 1 — 26 Septembre & le 1 — 10 Octobre - - - -	59
150 & 140	le 12. 16. 17. 30 May, le 27 — 30 Septembre, & le 11 — 31 Octobre - -	29

Il n'y a donc eu aucun jour, où il eut gelé continuellement: & déja en Avril il y a eu 2 jours des chaleurs plus grandes que de 140°, ſavoir le 29 & 30.

La derniere gélée a été de 151° le 18 Mai matin. Baromètre 28. 28, temps calme & ciel ſerein.

Il recommença à géler le 27 Septembre matin, le Thermomètre fut à 151°: Baromètre 27. 92. Vent NOu, ciel en partie couvert: mais cette gélée ne dura que jusqu'au 30 Septembre, le temps ſe remit au chaud, & les gélées ne revinrent que le 18 Octobre au ſoir.

L'Intervalle entre la derniere gelée & la premiere n'eſt donc que de 132 jours. Mais ſi l'on compte jusqu'au 18 Octobre: cet intervalle eſt de 153 jours.

III. Vent.

1.) Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année 1790.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord.	NE.	Eſt.	SE.	Sud.	SOu.	Oueſt.	NOu.
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janv.	1	18	11	1	9	2	1	1	3	7	1	7
Févr.	3	11	12	2	4	4	2	2	1	8	7	0
Mars	2	21	8	0	5	5	1	0	1	8	3	8
Avril	5	14	7	4	7	12	0	0	0	0	2	9
Mai	8	12	9	2	1	9	5	0	5	7	4	0
Juin	4	15	9	2	0	2	0	1	4	2	12	9
Juillet	2	17	11	1	1	3	2	2	5	9	8	1
Août	8	16	6	1	1	2	6	3	2	4	10	3
Sept.	5	15	8	2	1	1	2	2	2	9	7	6
Oct.	3	21	7	0	2	5	2	2	5	11	3	1
Nov.	10	14	4	2	1	2	1	7	4	7	6	2
Déc.	8	12	10	1	0	0	6	6	4	7	5	3
Année 1790.	59	186	102	18	32	47	28	26	36	79	68	49
du 1 Nov. 1789. au 1 May. 1790.	13	102	55	11	34	24	10	7	13	47	18	28
du 1 May au 1 Nov. 1790.	30	96	50	8	6	22	17	10	23	42	44	20

2.)

2.) Rapport de la force des vents & des quatre plages : tiré du Tableau précédent pour chaque mois de l'année 1790.

Mois.	Degré de Force.	Rapp. des quatre plages.			
		Nord	Eſt	Sud	Oueſt.
Janvier	287	13	3	7	8
Février	317	6	5	6	11
Mars	245	12	3	5	11
Avril	310	17	6	0	7
Mai	271	5	10	8	8
Juin	286	5	2	5	18
Juillet	284	3	4	11	13
Août	232	4	8	6	13
Septembre	277	5	3	8	14
Octobre	235	5	6	11	9
Novembre	233	3	5	11	11
Decembre	258	2	9	10	10
Année 1790.	270	80	64	88	133
du 1 Nov. 1789. au 1 Mai 1790.	290	60	25	40	56
du 1 Mai au 1 Nov. 1790.	264	27	33	49	75

Le mois de Février a donc été le plus venteux, & ceux d'Août, de Novembre & d'Octobre les plus calmes. L'hyver de 1789 au 1790 a été plus venteux que l'été de 1790.

Le vent dominant fut celui de l'Oueſt, & ſpécialement celui du SOu. Mais pendant l'hyver de 1789 à 1790 ce fut celui du Nord.

3.) Direction des vents forts.

Direction	Jours & Mois.	Nombre de jours
Nord.	Le 20 Janv. le 6. 9 Févr., le 7 Mars, le 3. 4. 5. 18 Avril, le 6 Juillet, & le 14 Août - -	10
NE.	Le 31 Janvier, le 1. 26 Mars, le 12. 14. 19. 20. 21 Avril, le 8. 9. 11. 16. 17. 30. 31 Mai, le 2 Juin, le 3. 4. 5 Juillet, & le 28 Nov. -	20
Eſt.	Le 30 Janv. le 25. 28 Février, le 4 Mars, le 22 Mai, le 18 Juillet, & le 8. 12 Août - -	8
SE.	Le 6 Août, le 21 Sept., le 19 Octobre, le 22. 27 Novembre, & le 2 Décembre - - -	6
Sud.	Le 27 Janv. le 6 Mai, le 12. 27 Juin, le 31 Juillet, le 22 Sept., le 13 Octobre, & le 8. 15. 22 Décembre - - - - - - - - -	10
SOu.	Le 1. 5. 13 Janv. le 4. 5. 17. 20. 22 Févr. le 6. 12. 13. 29 Mars, le 17. 26 Juin, le 14. 19. 20. 24. 25 Juillet, le 17 Août, le 4. 11. 25 Sept. le 5. 10. 15. 16 Oct. le 18. 23 Novembre, & le 10. 15. 21. 25. 26. 31 Décembre - -	35
Oueſt.	Le 4 Janvier, le 1. 18. 21. 23. 26 Février, le 16 Avril, le 13. 27 Mai, le 18. 19 Juin, le 28 Juillet, le 2. 19 Août, le 7. 13. 14 Septbr. le 17 Oct. le 9 Nov. & le 11. 12 Déc. -	20
NOu.	Le 14. 15. 17. 19 Janv. le 7 Avril, le 13. 25. 29. 30 Juin, le 19. 26 Septembre - - -	11
	Somme	120

Parmi

Parmi ces 120 jours de vents forts ont été les plus orageux.

ceux du 3. 4 Avril & du 6 Juillet.	Direction	*Nord.*	Nombre 3.
du 19. 20 Avril, du 9 & 16 Mai	—	*NE.*	— 4.
du 25. 28 Févr. & du 12 Août	—	*Est.*	— 3.
du 27 Novembre - - -	—	*SE.*	— 1.
du 27 Juin, & du 22 Septembre	—	*Sud.*	— 2.
du 5 Janv. du 26 Juin & du 23 Novembre - - - -	—	*SOu.*	— 3.
du 12 Décembre - - -	—	*Oueſt.*	— 1.
du 19 Septembre - - -	—	*NOu.*	— 1.

IV.

IV. Atmoſphère.

Mois.	Ciel. ſerein jours.	Ciel. couvert jours	Brouillard jours.	Pluie. forte jours.	Pluie. petite jours.	Neige. forte jours.	Neige. petite jours.
Janvier	4	10	1		5		15
Février	2	11	2		4		14
Mars	13	3	4		3	1	4
Avril	10	7	4		2	1	7
Mai	15	6	2	1	6		2
Juin	9	4	0	1	12		
Juillet	4	8	0	9	14		
Août	3	3	4	6	16		
Septemb.	3	5	5	5	18		
Octobre	1	18	3		17		8
Novemb.	3	19	4		7		12
Décemb.	1	22	7		5	3	10
Année 1790.	68	116	36	22	109	5	72
				131		77	
du 1 Nov. 1789. au 1 May.	32	68	15	0	34	4	56
				34		60	
du 1 May. 1790. au 1 Nov.	35	44	14	22	83	0	10
				105		10	

Le nombre des jours ſereins a été extraordinairement petit: & celui des jours de pluie très grand. Depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, ainſi dans un intervalle de 184 jours, il n'y a eu que 79 jours, où il n'eut plu, & parmi ceux-ci il n'y a eu que 35 de ciel entièrement ſerein.

La derniere neige tomba le 30 Mai, & il recommença à neiger le 19 Octobre, après un intervalle de 142 jours.

La Neva débacla dans la nuit du 1 au 2 Mai, après avoir été gelée pendant 157 jours (*). Elle charia enſuite les glaces du Ladoga le 11. 12. 13 & 14, le 17 en grande abondance & enſuite en diminuant jusqu'au 21 Mai.

La riviere recommença à former & à charier des glaces le 8 Novembre, & elle fut priſe deux fois I.) le 15 au ſoir (**) après avoir été ouverte pendant 198 jours. Elle reſta dans cet état de priſe jusqu'au 17 au ſoir, où la glace repartit. La Neva en charia le 19, 23, & le 24 en ſi grande abondance, qu'il étoit impoſſible de la paſſer avec des bâteaux. Enfin II.) le 25 à 1 h. après midi (***), elle fut repriſe pour la ſeconde fois, 10 jours après ſa premiere priſe & 208 jours après ſon débacle en Mai.

Il

(*) Thermomètre de Délisle 146 à 148. Baromètre 28. 28. Ciel ſerein & calme.

(**) Thermomètre 150 à 155. Baromètre 27. 00. Vent de l'Oueſt ciel couvert. On ne put paſſer la riviere ni le 16 ni le 17.

(***) Le Thermomètre n'étant qu'au 149 degré. Baromètre 27. 64. Vent du Sud, ciel couvert & pluie.

Il gréla cinq fois le 26 Janvier, le 20 Mai, le 12 & 30 Août, & le 14 Septembre.

Le nombre des orages ne monte qu'à quatre: le 27 Juin il y en eut un fort: les autres trois plus foibles furent le 7 Juin, le 11 Juillet & le 12 Août. Des éclairs de nuit, le 7 Août & le 5 Septembre.

Il n'y eut que quatre aurores boreales d'obſervées, le 1 Mai, le 16 & 30 Sept. & le 4 Octobre, dont aucune n'a été bien forte.

Mais un parhélie d'autant plus complet & de toute beauté fut obſervé le 29 Juin. La déſcription de ce phénomène faite par M. Lowitz ſe trouve ci-deſſûs pag. 384.

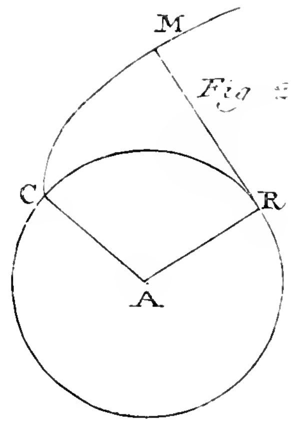


Fig. 2.

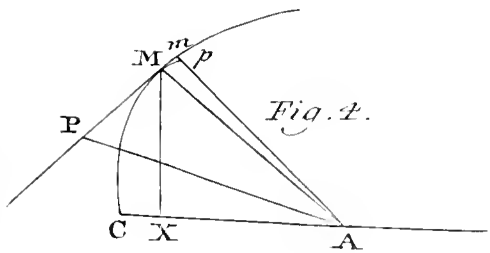


Fig. 4.

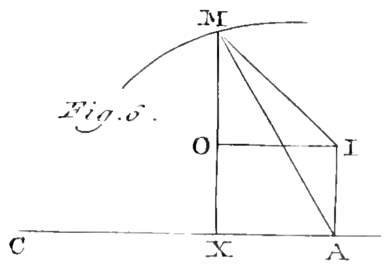


Fig. 6.

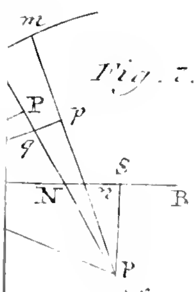


Fig. 7.

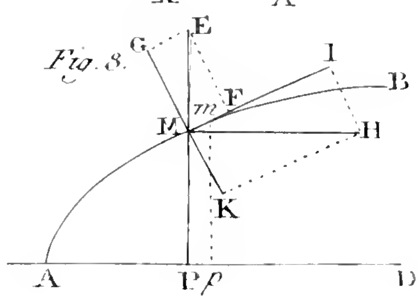


Fig. 8.

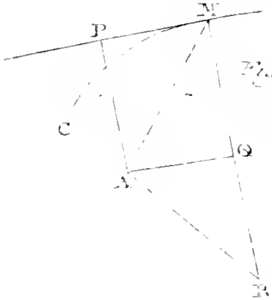


Fig. 1

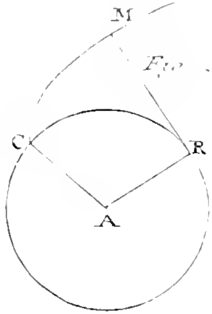


Fig. 2

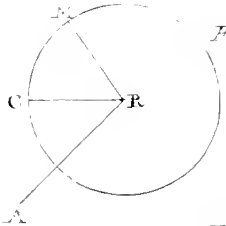


Fig. 3.

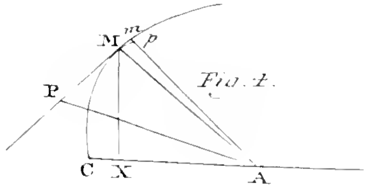


Fig. 4.

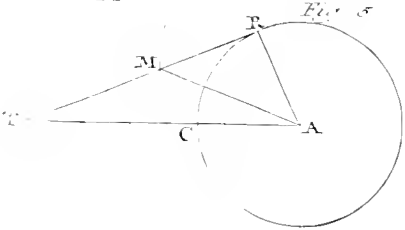


Fig. 5

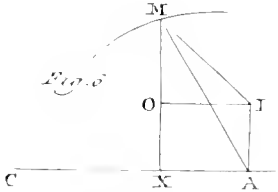


Fig. 6

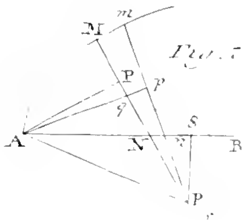


Fig. 7

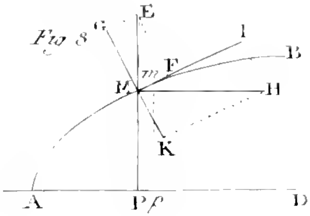


Fig. 8

Fig. 5.

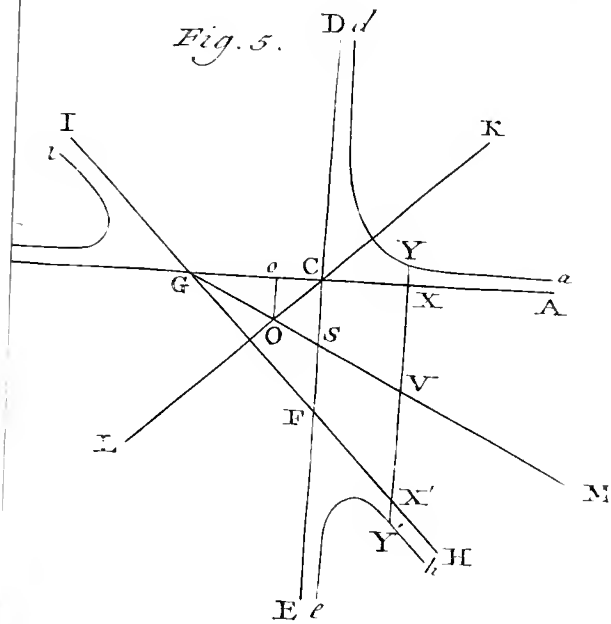
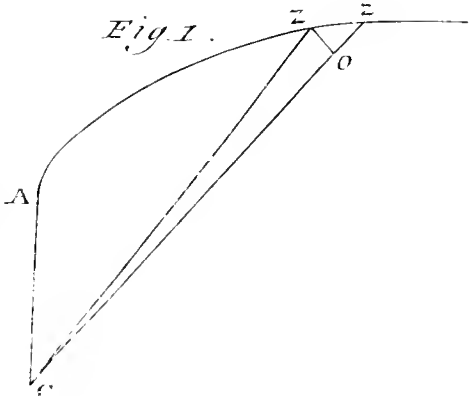


Fig. 1.



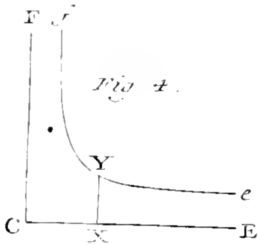


Fig. 4.

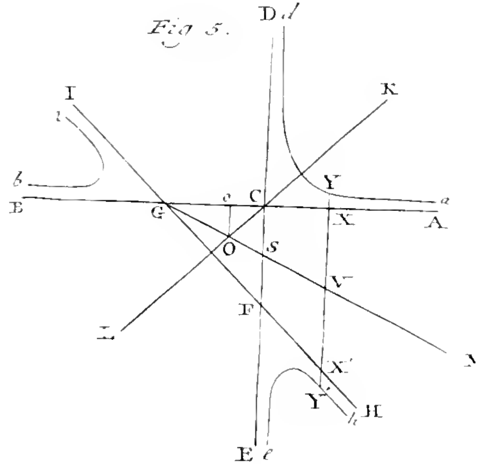


Fig. 5.

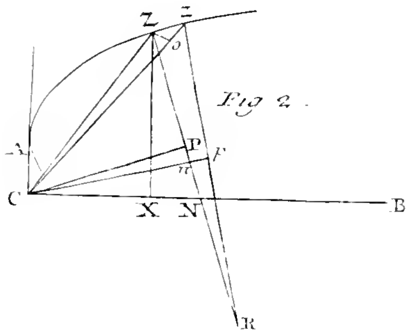


Fig. 2.

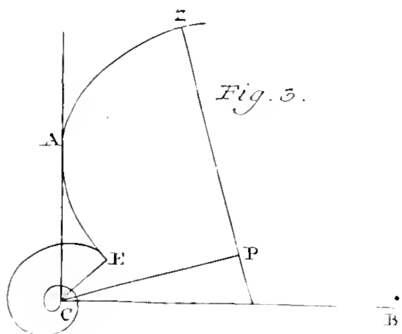


Fig. 3.

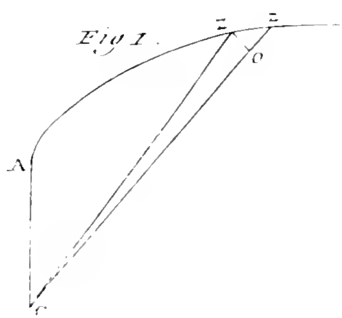


Fig. 1.

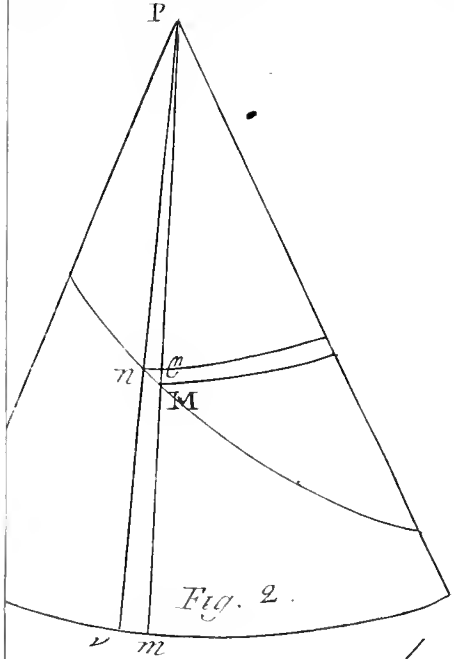


Fig. 2.

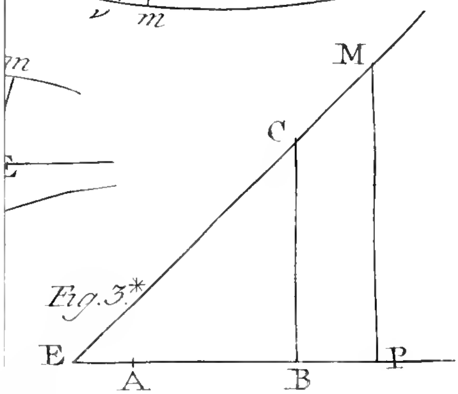


Fig. 3.*

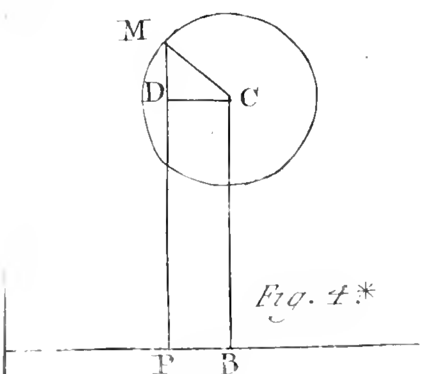


Fig. 4.*

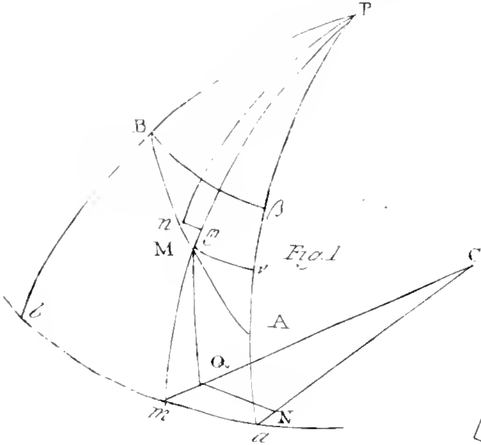


Fig. 1

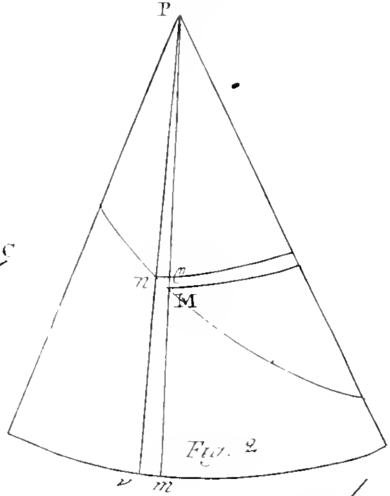


Fig. 2

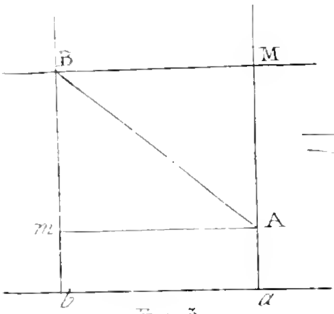


Fig. 3.

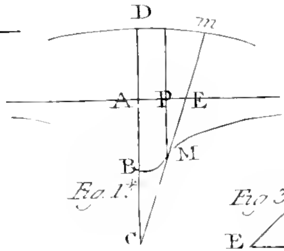


Fig. 1.*

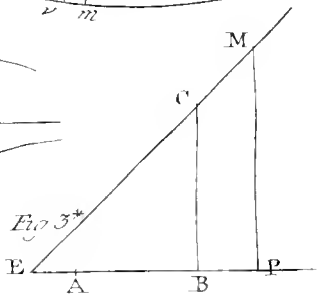


Fig. 3.*

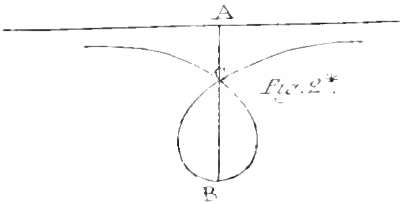


Fig. 2.*

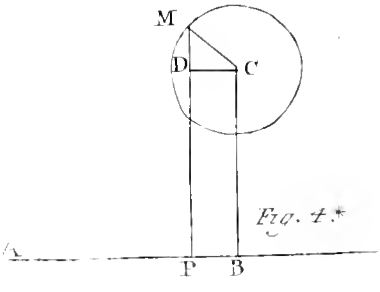


Fig. 4.*

Fig. 2.

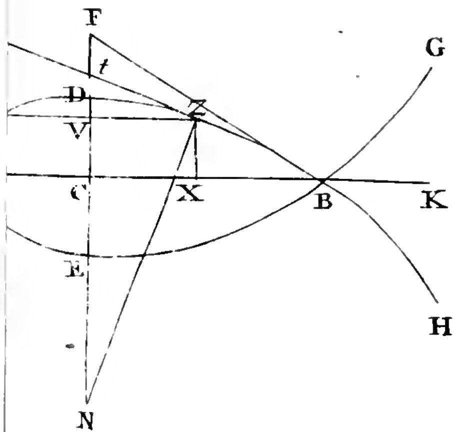


Fig. 4.

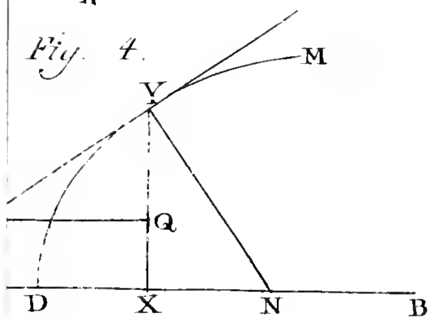


Fig. 6.

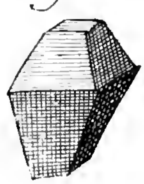


Fig. 1.

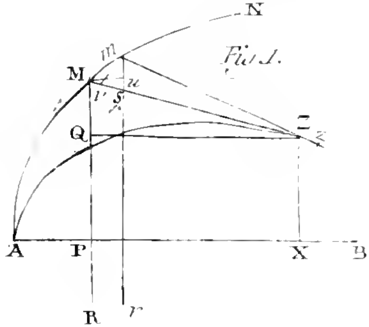


Fig. 2

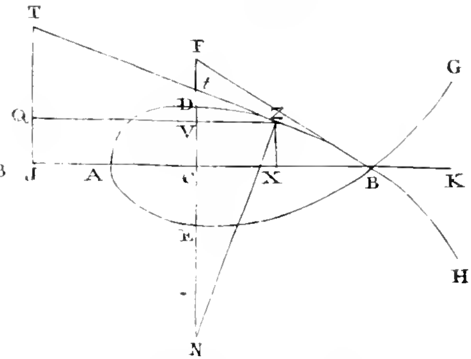


Fig. 3

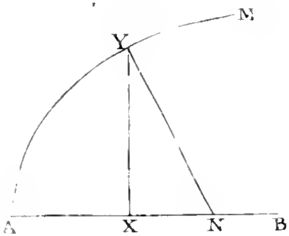
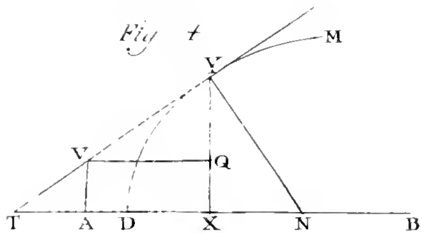


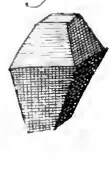
Fig. 4



ad Fig. II.

Fig. 5

Fig. 6.



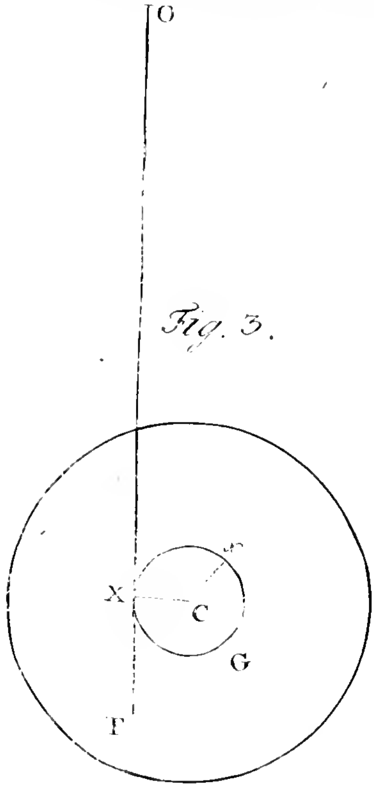


Fig. 3.

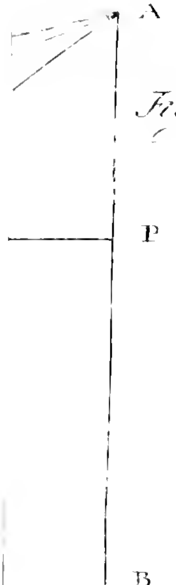


Fig. 4.

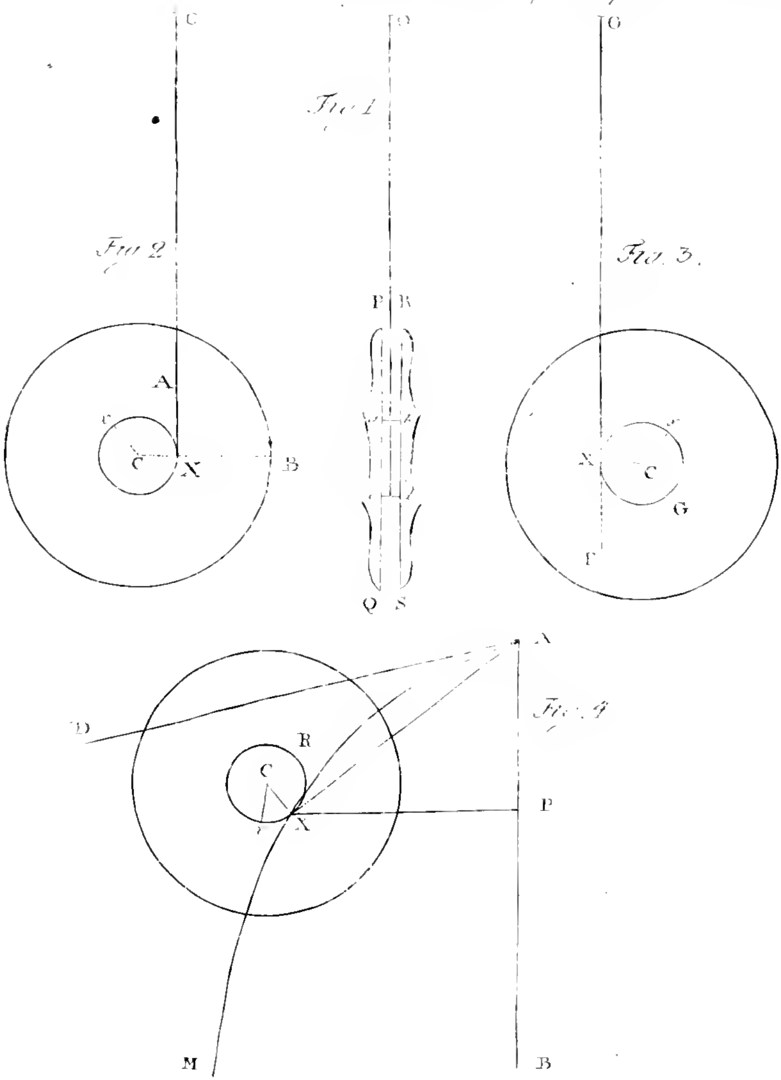
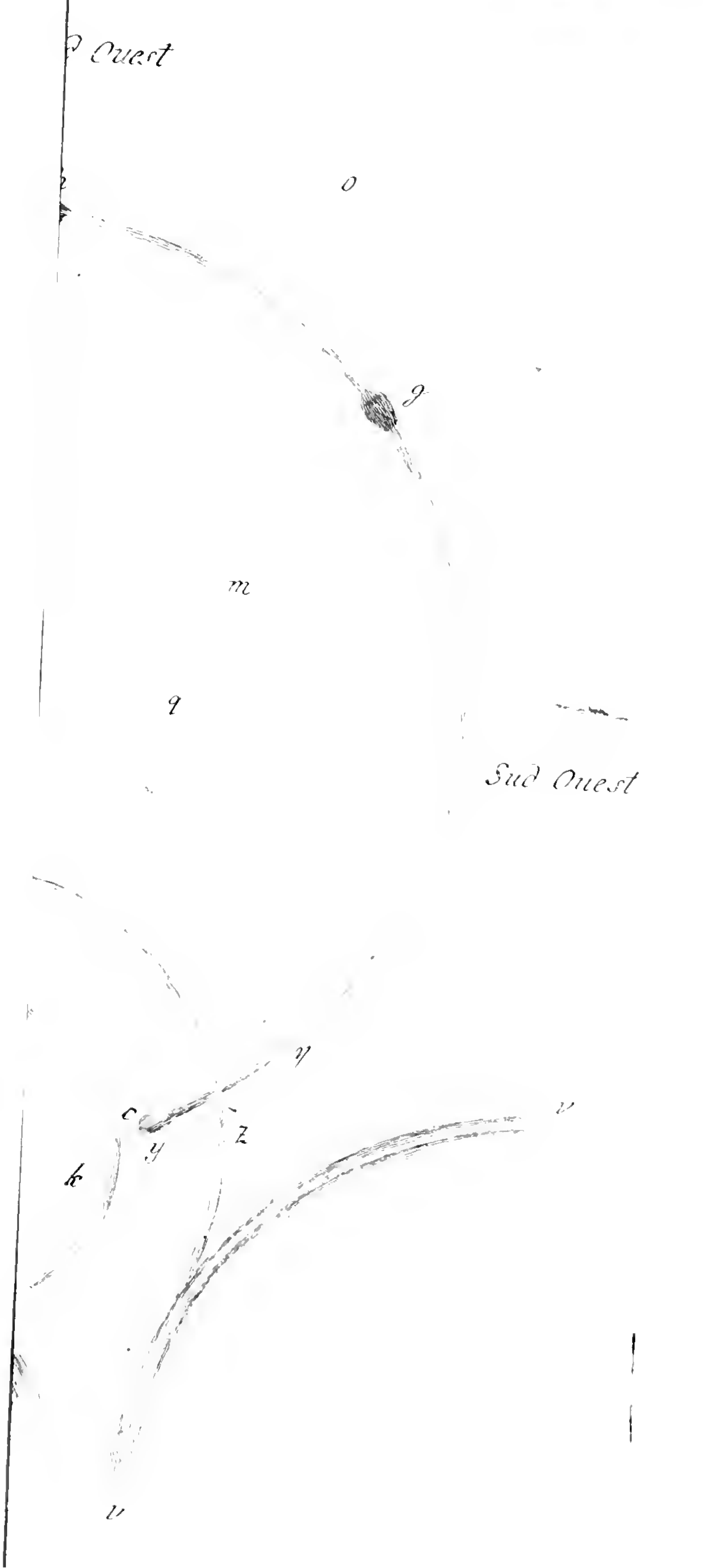


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4
O
P R
Q S
A
c
C
X
B
x
C
G
F
A
D
R
C
X
P
M
B


Fig. 2
Fig. 4


Ouest
o
g
m
q
Sud Ouest
y
v
c
z
y
k
v


Nord Ouest
Nord Est
Sud Ouest
Sud Est
Zenith

de l'Académie Imp. des Sciences A: 1790.