NOVA ACTA.

Abh. der Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.

Band 107. Nr. 1.

W. R. Hamiltons Arbeiten zur Strahlenoptik und analytischen Mechanik.

Ihre Einordnung in die Entwicklung dieser Zweige mathematischer Forschung an Hand einer historisch-kritischen Darstellung.

Von

Georg Prange in Hannover.

HALLE.

1923.

Druck von Karras, Kröber & Nietschmann in Halle (Saale).

Für die Akademie in Kommission bei Max Niemeyer, Verlag in Halle a. S.

Im A u s t a u s c h .

Nova Acta, alte Serie, Band 107 ist unvollständig geblieben ur fällt deshalb aus. Von Band 108 bis 110 sind keine Exemplare mehr vorhanden. Von Band I (Neue Folge) an wird die Zust regelmäßig und mit größter Pünktlichkeit erfolgen. Etwa 20 Bogen bilden einen Band. Dem letzten Heft eines Bandes wird jeweilen das Titelblatt und das Inhaltsverzeichnis für den ganzen Band beigegeben.

NOVA ACTA.
Abh. der Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.
Band 107. Nr. 1.

W. R. Hamiltons Arbeiten zur Strahlenoptik und analytischen Mechanik.

Ihre Einordnung in die Entwicklung dieser Zweige mathematischer Forschung an Hand einer historisch-kritischen Darstellung.

Von

Georg Prange in Hannover.

Eingegangen bei der Akademie am 1. September 1921.

HALLE.
1923.
Druck von Karras, Kröber & Nietschmann in Halle (Saale).

Für die Akademie in Kommission bei Max Niemeyer, Verlag in Halle a. S.

Einleitung.

Weit verbreitet ist die Ansicht, dafs die Gedanken W. R. Hamiltons, die für den Ausbau der theoretischen Mechanik und weiterhin für die Ausbildung der Variationsrechnung und ihrer Anwendung in der Analysis so wichtig geworden sind, ihre Entstehung den Untersuchungen Hamiltons über Himmelsmechanik verdanken. Die neue Darstellung der Störungstheorie, welche in seinen beiden bekannten Abhandlungen in den Philosophical Transactions[1]) niedergelegt ist, habe — so denkt man — zur Einführung der „charakteristischen Funktion“ bezw. „Prinzipalfunktion“ den ersten Anlafs gegeben, und Hamiltons eigentliches Ziel sei gewesen, mit Hilfe dieser Funktion eine Integrationstheorie der Differentialgleichungen der Mechanik aufzustellen. Folgerichtig im Sinne dieser Ansicht glaubt man weiter, dafs Jacobi die Methode Hamiltons übernommen und verbessert habe, und dafs sie immer in Verfolg des von Hamilton beabsichtigten Weges in der Jacobischen Schule ausgebaut worden sei.

Dem gegenüber hat in einer Vorlesung des S.-S. 1891 F. Klein[2]) den eigentlichen Gehalt der Hamiltonschen Gedanken und die Art ihrer Entstehung klargestellt, und hat eingehend ausgeführt, wie die ursprünglichen Gedanken Hamiltons in der Jacobischen Schule geradezu eine Umbiegung erfahren haben. Im Anschlufs daran hat er auch in einem Vortrage auf der Naturforscher-Versammlung in Halle (1891)[3]) darauf aufmerksam gemacht, wie irrig die geschilderte landläufige Ansicht sei. Hamilton ist zu seiner Methode der charakteristischen Funktion nicht durch Untersuchungen aus dem Gebiete der Mechanik gelangt, sondern durch solche über geometrische Optik, die er in ganz jungen Jahren angestellt hat. Hat er doch bereits im Jahre 1824 (also erst 19 Jahre alt) eine Abhandlung (On caustics) der irischen Akademie vorgelegt, in welcher der Grundstein für die Theorie der charakteristischen Funktion gelegt ist. Diese Abhandlung ist nicht gedruckt, ihr Inhalt ist übergegangen in eine grofse Arbeit, welche den Titel „Essay on the theory of systems of rays“ führt, und welche im Jahre 1827 fertig

---

[1]) W. R. Hamilton, On a general method in dynamics. Phil. Trans. 1834, S. 247—308, und Second essay on a general method in dynamics. Phil. Trans. 1835, S. 95—144.

[2]) Von dieser Vorlesung war eine Ausarbeitung auf dem mathematischen Lesezimmer zu Göttingen allgemein zugänglich.

[3]) F. Klein, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinig. Bd. 1 (1890—91), S. 35.

ungeändert. Es ist so die Merkwürdigkeit eingetreten, dafs die neuere Ausgestaltung der durch die Jacobische Tradition überlieferte „Hamiltonschen“ Theorie für die Zwecke der Variationsrechnung, insbesondere ihre Verbindung mit der von Weierstrafs in den Mittelpunkt gerückten Idee des „Feldes“, gerade zu Ansätzen und Auffassungen zurückführt, welche ursprünglich Hamiltons Ausgangspunkt in der geometrischen Optik gewesen sind und ihn auf seine Methode geführt haben.

Aber nicht nur für die Geschichte der Analysis, sondern auch für die Geometrie sind die Hamiltonschen optischen Abhandlungen von grofser Bedeutung. Die für die Optik so wichtige Frage nach der Wiedervereinigung der von einem leuchtenden Punkte ausgesandten Lichtstrahlen führt zu Untersuchungen im Gebiete der Differentialgeometrie, insbesondere, da die Lichtstrahlen im allgemeinen gerade Linien sind, der differentiellen Liniengeometrie. Auch hier sind die Hamiltonschen Ergebnisse grundlegend gewesen, aber natürlich mit in Vergessenheit geraten. In den Lehrbüchern ist von Hamiltons Leistungen auf diesem Gebiete nicht die Rede; die Schöpfung der Differentialgeometrie der gradlinigen Strahlenkongruenzen wird Kummer zugeschrieben,[1]) und nur der Name der „Hamiltonschen Gleichung“ erinnert noch an Hamilton.

Dies ist aber nicht alles. Neben den differentialgeometrischen Überlegungen treten auch Gedanken der allgemeinen Liniengeometrie auf. Es werden sechs Koordinaten einer geraden Linie benutzt, der Begriff des Komplexes wird gestreift usw., wenn auch an einen systematischen Aufbau natürlich noch nicht gedacht wird und sich ebensowenig etwas von jener grofsen Entwicklung findet, welche die Liniengeometrie durch die Wendung zur algebraischen Behandlung genommen hat.

Diese Andeutungen zeigen, welchen Wert es schon vom Standpunkt der reinen Mathematik hat, die Hamiltonschen Arbeiten der Vergessenheit zu entreifsen, noch wichtiger aber ist dies für die Optik. Auch bei ihren Vertretern sind Hamiltons Arbeiten fast unbeachtet geblieben, wenn man von der glänzenden Entdeckung der konischen Refraktion absieht, die der dritte Nachtrag enthält, und welche allerdings immer bekannt gewesen und gebührend bewundert worden ist. Insbesondere ist die hohe Bedeutung der Hamiltonschen Methode der charakteristischen Funktion für die Praxis des optischen Instrumentenbaues völlig verkannt. Und doch hatte Hamilton

weit Jacobi auch die Abhandlungen über geometrische Optik, von deren Existenz er sicher wufste, zur Kenntnis genommen hat.

[1]) Kummer weist dagegen ausdrücklich auf Hamilton hin und sagt selbst, dafs er nur Hamiltons Ergebnisse mit einer anderen Art der Behandlung neu herleitet.

mit ihrer Hilfe eine so durchsichtige Darstellung der Wirkungsweise optischer Instrumente erhalten, dafs sie ihm ermöglichte, die Aufgabe des Instrumentenbaues ganz allgemein anzugreifen und so weitgehend durchzuführen, dafs seine Ergebnisse auch heute noch nicht wesentlich überholt sind. Über die Ansprüche der optischen Praxis zu Hamiltons Zeit gingen sie weit hinaus. Daher wohl hat er ihnen nicht die Form gegeben, welche zu unmittelbarer Verwendbarkeit in der Praxis notwendig ist.

Es ist der Sinn der Methode der charakteristischen Funktion, von der Besonderheit der einzelnen optischen Instrumente abzusehen, und die allgemeinen, allen gemeinsamen Eigenschaften voranzustellen. Dieser Gedanke, der in Hamiltons Abhandlungen in voller Helle aufleuchtet, hat sich erst ganz allmählich in den Forschungen über optische Instrumente durchgesetzt. Für den Sonderfall des achsensymmetrischen Instrumentes hat sich Gaufs[1]) in seinen dioptrischen Untersuchungen auch gerade dieses Ziel gesteckt, aber unter Beschränkung auf die Abbildung in unmittelbarer Nähe der Achse durch Strahlen, welche nur unendlich wenig gegen die Achse geneigt sind. Ohne sich um die besondere Art der Verwirklichung des einzelnen Instrumentes zu kümmern, konnte er allgemein diese Abbildungen kennzeichnen. Noch allgemeiner wurde diese Betrachtungsweise dann in England durch Maxwell,[2]) und unabhängig in Deutschland durch E. Abbe[3]) aufgenommen. Es lag nahe, dafs man das, was so für die erste Näherung der achsennahen Strahlen gelungen war, auch in den allgemeineren Abbildungsaufgaben durchzuführen versuchte. Für die Aberrationen dritter Ordnung gelang dies L. Seidel[4]) durch Weiterführung der Gaufs'schen Untersuchungen. Auch die Arbeiten Seidels sind einmal nicht so beachtet, wie sie es verdient hätten, andererseits wäre auch auf seinem Wege eine völlig allgemeine Theorie nicht zu erreichen gewesen. Der naturgemäfse Weg hierzu führt über Hamiltons Methode der charakteristischen Funktion, die sich auf das Prinzip des kürzesten Lichtweges gründet. Am ehesten konnte in England die Hamiltonsche Tradition noch bewahrt werden. In der Tat findet man in der 1865 erschienenen ersten Auflage von Thomson-Taits,

[1]) C F. Gaufs, Dioptrische Untersuchungen. Abhandl. d. Kgl. Ges. d. Wiss. z. Göttingen 1 (1840), S. 1—34, auch Werke Bd. 5, S. 243—276.

[2]) I. Cl. Maxwell, On the general laws of optical instruments. Quart. journ. of pure and appl. math. 2 (1858), S. 243—276, auch Papers I, S. 271—285.

[3]) Für die Arbeit Ernst Abbes vgl. S. Czapski, Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. Breslau 1893.

[4]) L. Seidel, Zur Dioptrik. Astronomische Nachrichten 43 (1856), S. 279—332. Seidel arbeitete übrigens auch für die Praxis des optischen Instrumentebaues, und zwar für die Steinheilsche Werkstatt.

„A treatise on natural philosophy“ einige der wertvollsten der Hamiltonschen Gedanken mitgeteilt und mit treffenden Beispielen erläutert. So hat denn auch Maxwell seine späteren Arbeiten über geometrische Optik, deren Ziel war, über die achsennahe Abbildung hinauszugehen, auf die Hamiltonsche charakteristische Funktion gegründet. In Deutschland aber, wo Hamiltons Abhandlungen zur Strahlenoptik ganz unbekannt waren, hat man gerade bei den Versuchen zur Verallgemeinerung der Gaufs'schen Dioptrik, die Hamiltonsche charakteristische Funktion von neuem entdeckt. Als erster ist M. Thiesen[1]) zu nennen, der ebenso wie Hamilton von dem Prinzip des kürzesten Lichtweges ausging und den Gedanken aufnahm, den Lichtweg als Funktion der Koordinaten der Begrenzungspunkte anzusehen. Aber er ist ganz in den Anfängen stecken geblieben und hat nicht einmal die Grundeigenschaften der charakteristischen Funktion erkannt. Sehr viel bedeutender ist eine Arbeit von H. Bruns.[2]) Er gelangt, ausgehend von der fundamentalen Eigenschaft optischer Abbidungen, dafs ein räumliches Strahlensystem, welches von den Normalen einer Fläche gebildet wird, immer wieder in ein Strahlensystem von ebendieser Eigenschaft übergeht[3]) zu dem Ergebnis, dafs eine solche Abbildung sich durch Angabe einer einzigen Funktion kennzeichnen lasse, welche er Eikonal nennt. Dieses Eikonal ist, worauf bald nach dem Erscheinen der Bruns'schen Abhandlung F. Klein[4]) aufmerksam macht, in seinem Wesen mit der Hamiltonschen charakteristischen Funktion identisch. Es kann somit nicht wundernehmen, dafs auch ein grofser Teil der Bruns'schen Ergebnisse sich bei Hamilton findet, und es ist andererseits auch erklärlich, dafs Bruns, da ihm die anschauliche optische Bedentung seines Eikonals entgangen war, die grofse Allgemeinheit der Hamiltonschen Untersuchungen und ihre weitreichenden Ergebnisse nicht wieder erreicht hat.

In den folgenden Paragraphen soll über den Inhalt der Hamiltonschen Arbeiten Bericht erstattet werden. Gleichzeitig soll versucht werden, einerseits zu zeigen, auf welchen vorhandenen Grundlagen Hamilton aufbauen konnte, als er seine Untersuchungen begann, andererseits zu skizzieren, welche Stellung die einschlägigen Arbeiten späterer Forscher zu den Hamiltonschen Gedanken einnehmen.

[1]) M. Thiesen, Beiträge zur Dioptrik. Berliner Berichte 1890, S. 799—813. Freilich ist er vielleicht indirekt von Hamilton her beeinflufst. Helmholtz nämlich hat ihn zu seiner Arbeit angeregt und Helmholtz hat enge Beziehungen zu den englischen Physikern unterhalten.

[2]) H. Bruns, Das Eikonal. Sächs. Berichte 21 (1895), S. 321—436.

[3]) Dabei sind natürlich die vom Licht zu durchsetzenden Mittel unkristallinisch vorausgesetzt.

[4]) F. Klein, Über das Bruns'sche Eikonal. Zeitschr. f. Math. u. Physik 46 (1900), S. 372.

§ 1.

Die charakteristische Funktion Hamiltons in der Strahlenoptik.

1. „Der Essay".

Es ist nicht mehr ohne weiteres festzustellen, welche genaue Fragestellung für Hamilton der Anlafs war, seine Untersuchungen zu beginnen. Ganz sicher kann man aber sagen, dafs es nicht sein Ziel war, die Gestalt der Lichtstrahlen zu bestimmen. Denn in dem Falle gewöhnlicher optischer Mittel, den er zuerst im Auge hat, sind ja die Lichtstrahlen einfach gerade Linien. In dem „Essay" geht sein Bestreben denn auch sogleich dahin, eine zweiparametrige Schar geradliniger Lichtstrahlen, die von einem leuchtenden Punkte ausgesandt wird, als Ganzes durch ein optisches Instrument — und zwar zunächst durch ein System von Spiegeln — zu verfolgen und die Eigenschaften eines solchen Strahlensystems zu bestimmen.

Den Anfang seiner Entdeckungen bildet dabei die Erkenntnis, dafs nicht jede beliebige zweiparametrige Schar von geraden Linien durch wiederholte Reflexion an geeignet gestalteten Spiegeln aus einem ursprünglich homozentrischen Strahlenbündel erzeugt werden kann, sondern dafs dazu die Schar eine besondere Bedingung erfüllen mufs. Um dies nachzuweisen und zugleich die Bedingung zu gewinnen, denkt er sich eine beliebige zweiparametrige Geradenschar gegeben und stellt sich die Forderung, für dieses Strahlensystem einen Brennspiegel zu konstruieren, d. h. einen Spiegel von solcher Gestalt, dafs durch Reflexion an ihm das gegebene Strahlensystem — man hat es als einfallendes System aufzufassen — in ein homozentrisches Strahlensystem verwandelt wird, d. h. in ein Strahlensystem, bei dem alle Strahlen durch einen Punkt gehen.

Sind α, β, γ die Richtungskosinus eines einfallenden, α', β', γ' die des zugehörigen reflektierten Strahles, so findet das Reflexionsgesetz seinen Ansatz in der Beziehung

$$(1) \qquad (\alpha + \alpha')\, dx + (\beta + \beta')\, dy + (\gamma + \gamma')\, dz = 0,$$

die im Einfallspunkte für jede Fortschreitungsrichtung dx, dy, dz, auf dem Spiegel erfüllt sein mufs. Da nun α, β, γ und α', β', γ' Funktionen von x, y, z

sind, so stellt (1) eine lineare totale Differentialgleichung in den drei Veränderlichen x, y, z vor. Sie mufs von den Koordinaten der Punkte (x, y, z) des Brennspiegels erfüllt werden, kann also als eine Bestimmungsgleichung für den gesuchten Brennspiegel angesehen werden.

Die erste Frage wird dann sein, ob die Gleichung (1) vollständig integrabel ist, da sie nur dann eine Fläche als Lösung haben kann, wie es doch sein mufs, wenn es einen Brennspiegel geben soll. Für die Aufstelluug der Integrabilitätsbedingung geht Hamilton davon aus, dafs alle Strahlen des reflektierten Systems sich in einem Punkte treffen, dafs also

$$\alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz$$

ein vollständiges Differential ist, nämlich gleich $d\varrho$, wenn ϱ die Entfernung des Einfallspunktes auf dem Spiegel von dem festen Punkte ist, durch den alle Strahlen des reflektierten Systems hindurchlaufen. Die Integrabilitätsbedingung von (1) wird dann, wie man leicht erkennt, gleichbedeutend mit der Bedingung, dafs auch der andere Teil der linken Seite von (1), nämlich

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz \tag{2}$$

ein vollständiges Differential wird. Nur wenn die vorgelegte zweiparametrige Geradenschar diese Bedingungen erfüllt, läfst sich zu ihr ein Brennspiegel konstruieren.

Fassen wir umgekehrt jetzt das homozentrische Strahlensystem als einfallendes System bei der Spiegelung auf, so folgt, dafs ein homozentrisches Strahlensystem durch eine Reflexion nur in ein solches Strahlensystem übergeführt werden kann, für das der Ausdruck (2) ein vollständiges Differential ist. Diese Eigenschaft kann das Strahlensystem aber auch durch weitere Spiegelungen nicht verlieren; denn auf dem einzelnen Spiegel besteht immer eine Bedingung von der Gestalt (1), d. h. man hat eine lineare totale Differentialgleichung, die die Spiegelfläche als Lösung besitzt und also vollständig integrabel ist. Da nun für das einfallende Strahlensystem, wie wir eben zunächst für den zweiten von den Strahlen getroffenen Spiegel feststellten, der Ausdruck der Gestalt (2) ein vollständiges Differential ist, so mufs das Gleiche auch von dem reflektierten System gelten. Der Ausdruck (2) mufs daher dauernd ein exaktes Differential sein. Jedem Strahlensystem gehört somit eine Funktion

$$V(x, y, z) = \int (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) \tag{3}$$

zu.

Dieses Ergebnis läfst sich aufserordentlich anschaulich geometrisch deuten. Die Funktion V liefert nämlich in dem Strahlensystem eine einparametrige Schar von Flächen $V = \text{Const.}$ und diese Flächen müssen, da auf ihnen

$$dV = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0 \tag{3a}$$

gilt, alle Strahlen des Systems senkrecht schneiden. Für zwei beliebige dieser Orthogonalflächen $V(x, y, z) = V_1$ und $V(x, y, z) = V_2$ haben wir ferner die Beziehung

$$V_2 - V_1 = \int (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = \text{Const.}, \tag{3b}$$

wo das Integral über eine beliebige Kurve erstreckt werden kann, die einen Punkt der ersten Fläche mit einem Punkt der zweiten verbindet. Wählt man als solchen Integrationsweg einen Lichtstrahl, so ist der Wert des Integrals in (3b) offenbar gleich der Länge des Stücks dieses Strahls, das von den beiden Flächen $V = V_1$ und $V = V_2$ abgeschnitten wird. Also schneiden irgend zwei Flächen der Schar $V(x, y, z) = C$ auf allen Lichtstrahlen des Strahlensystems Stücke von gleicher Länge ab.

Ist eine der Flächen $V(x, y, z) = C$ gegeben, so ist damit auch das ganze Strahlensystem bekannt; denn es besteht einfach aus den Normalen dieser Fläche. Man kann weiter von dieser einen Fläche aus alle Flächen der Schar leicht angeben. Denn man braucht nur auf allen Lichtstrahlen Stücke konstanter Länge abzutragen, dann bilden deren Endpunkte eine Fläche der Schar, die die Lichtstrahlen senkrecht schneidet.[1])

Die Funktion $V(x, y, z)$ wird von Hamilton als charakteristische Funktion des Strahlensystems bezeichnet, weil man aus ihrer analytischen Gestalt alle geometrischen Eigenschaften des Strahlensystems herauslesen

---

[1]) Wie völlig der Inhalt der Hamiltonschen Arbeiten zur Strahlenoptik in Vergessenheit geraten ist, erkennt man z. B. daran, dafs eine ähnliche Aufgabe wie die Hamiltonsche Brennspiegelkonstruktion, nämlich die Aufgabe, ein gegebenes Strahlensystem durch Reflexionen oder Brechungen in ein vorgeschriebenes anderes System überzuführen, noch 1900 von T. Levi-Civita in zwei Noten in den Rendiconti della accad. dei lincei (5), Bd. 9_1, S. 185—189, 237—245, behandelt ist. Er kommt natürlich auch zu dem Hamiltonschen Ergebnis, dafs zwei Strahlensysteme mit Orthogonalflächen immer durch eine Spiegelung oder Brechung — wir wollen dafür allgemein Knickung sagen — ineinander übergeführt werden können, wobei man für die knickende Fläche einen Punkt beliebig vorgeben, d. h. beliebig zwei Strahlen der beiden Systeme, die sich in einem Punkte treffen, einander zuordnen kann. Auch das Verhältnis der Brechungsindizes kann man noch beliebig vorschreiben.

Sind zwei beliebige Geradenscharen ohne Orthogonalflächen gegeben, so kann man mit zwei Knickungen die eine in die andere überführen. Dabei besteht bei der Durchführung noch soviel Willkürlichkeit, dafs man in jeder der beiden Scharen eine Regelfläche beliebig herausgreifen und fordern kann, dafs deren Erzeugende in vorgeschriebener Zusammenordnung ineinander übergehen.

kann. Man erhält in jedem Punkt (x, y, z) des Raumes die Richtungskosinus α, β, γ des hindurchlaufenden Strahls durch die partiellen Ableitungen von V

$$\alpha = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{4}$$

Wenn man in diesen Beziehungen umgekehrt den α, β, γ konstante Werte gibt und die x, y, z als Veränderliche auffaſst, so stellen sie die Gleichungen des einzelnen Strahls vor, und zwar sind es zwei unabhängige Gleichungen, weil ja zwischen den partiellen Ableitungen die Beziehung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{5}$$

besteht. Daſs die charakteristische Funktion $V(x, y, z)$ einer solchen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, ist an sich sehr bedeutsam. An dieser Stelle freilich merkt es Hamilton vorerst nur beiläufig an.

Neben der Richtung des einzelnen Lichtstrahls sind für die Optik vor allem die differentialgeometrischen Beziehungen benachbarter Strahlen von Bedeutung, denn der Schnitt benachbarter Strahlen bestimmt das Bild des leuchtenden Punktes, das von dem Spiegelsystem erzeugt werden soll. Da die Lichtstrahlen die Normalen der Flächen $V =$ Const. sind, so konnte Hamilton bei der Behandlung dieser Frage Anschluſs an die Ergebnisse der geometrischen Forschung über den Schnitt benachbarter Flächen-Normalen nehmen, d. h. also an die Theorie der Krümmung der Flächen, die von Euler begonnen und von Monge fortgebildet war.[1] Da die Krümmung einer Fläche durch die zweiten Ableitungen der zugehörigen Funktion bestimmt ist, so beherrschen die zweiten Ableitungen der charakteristischen Funktion V die differentialgeometrischen Eigenschaften des Strahlensystems. Übrigens begnügt sich Hamilton nicht damit, die Ergebnisse der Krümmungstheorie einfach zu übernehmen, sondern er hat bei dieser Behandlung der Brenneigenschaften der Normalensysteme die Theorie gleichzeitig weitergeführt, worauf wir später zurückkommen werden.

Dies ist in ihren Wesenszügen die Auffassung, auf Grund deren Hamilton in dem ausgeführten Teil des „Essays" eine Theorie der optischen Abbildung durch Spiegel gibt. Genau dieselbe Grundlage sollte ihm in dem nicht ausgeführten, nur im Programm skizzierten zweiten Teile des

[1] Die einschlägigen Arbeiten Dupins kannte Hamilton damals nicht. Auch die Untersuchungen von Malus über Strahlensysteme wurden ihm, wie er selbst sagt, erst bekannt, als er die Idee der charakteristischen Funktion bereits erfaſst hatte.

„Essays“ dazu dienen, die Brechung in gewöhnlichen homogenen optischen Mitteln zu behandeln. Dabei konnte sich für seine prinzipielle Auffassung wenig Neues ergeben, und gerade dieser Umstand mag ihn veranlafst haben, diesen Teil später nicht mehr auszuarbeiten. Der dritte Teil des „Essays“ sollte nach dem Programm die Ausbreitung des Lichtes in Kristallen behandeln. Da werden die Verhältnisse anders. In Kristallen brauchen für Systeme geradliniger Lichtstrahlen keine Orthogonalflächen mehr zu existieren.[1])

[1]) Die charakteristische Funktion hat, was auch Hamilton hervorhebt, sowohl für die Emissionstheorie, wie für die Undulationstheorie des Lichtes eine anschauliche Bedeutung. Denn beide Theorien führen auf das Prinzip des kürzesten Lichtwegs, nach welchem das über dem Lichtstrahl erstreckte Integral

$$\int n\,ds \tag{a}$$

ein Extremum werden mufs, unter ds das Bogenelement des Strahls, unter n den Brechungsindex des Mittels verstanden. In der Emissionstheorie ist der Brechungsindex n der Geschwindigkeit v der Lichtfortpflanzung proportional, und also das Integral (a) proportional zu

$$\int v\,ds = \int v \frac{ds}{dt}\,dt = \int v^2\,dt,$$

d. h. proportional dem Integral über die kinetische Energie des ausgeschleuderten Lichtteilchens, also der Wirkung im Sinne des Prinzips der kleinsten Wirkung in der Eulerschen Fassung.

Vom Standpunkt der Undulationstheorie dagegen ist der Brechungsindex n dem reziproken Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes proportional, so dafs das Integral (a) proportional zu

$$\int \frac{ds}{v} = \int dt = t_2 - t_1,$$

d. h. proportional der Zeit wird, die das Licht zu seiner Fortpflanzung gebraucht. Dabei mufs der Strahl vom Standpunkt der undulatorischen Optik als ein Stück einer ebenen Welle angesehen werden, deren seitliche Ausdehnung grofs im Vergleich zur Wellenlänge ist. (Wie von dieser Auffassung aus die Strahlenoptik als Grenzfall der Wellenoptik für unendlich klein werdende Wellenlänge herauskommt, hat gelegentlich P. Debye gezeigt. Vgl. A. Sommerfeld und I. Runge, Anwendung der Vektor-Rechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik, Annalen der Physik [4], 35, [1911], S. 289—293.)

Die Flächen $V =$ Const. sind nach der Auffassung der emissiven Optik Flächen konstanter Wirkung, nach der Undulationstheorie Flächen konstanter Ausbreitungszeit, d. h. Wellenflächen. Es liegt die Vermutung nicht fern — F. Klein hat sie ausgesprochen — dafs der Kampf zwischen der emissiven und undulatorischen Optik, der durch Fresnels Arbeiten im ersten Viertel des 19. Jahrhunderts neu erregt und zugunsten der Undulationstheorie entschieden wurde, Hamilton die Anregung zu seinen Untersuchungen gab. Treten doch durch Hamiltons Ergebnisse das Grundelement der emissiven Optik, der Strahl, und das Grundelement der undulatorischen Optik, die Wellenfläche, in innere Beziehung.

2. Der erste Nachtrag.

Beim ersten Blick scheint der erste Nachtrag, der zunächst an Stelle des zweiten und dritten Teils des „Essay“ veröffentlicht wurde, die Frage nach der Gestalt der Lichtstrahlen aufzuwerfen. Denn Hamilton beginnt hier mit der allgemeinen Formulierung des Prinzips des kürzesten Lichtwegs für Mittel, deren Brechungsindex sowohl mit dem Orte, wie mit der Richtung variiert. Er setzt allgemein den Brechungsindex

$$v = v(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z), \tag{6}$$

wo v in den drei Richtungskosinus homogen von erster Ordnung sein soll, und hat dann als Prinzip des kürzesten Lichtwegs das Variationsprinzip:

$$\int v\, ds = \text{Extrem.} \tag{7}$$

Er leitet her, daſs die Bahnen des Lichts durch die Euler-Lagrangeschen Gleichungen dieses Variationsproblems:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial v}{\partial \gamma}\right) - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

zu bestimmen sind, doch geht er nicht auf deren Integration ein. Weiterhin beschäftigt ihn nämlich doch nur der Fall, daſs die Lichtausbreitung in einem homogenen, nicht isotropen Mittel stattfindet, so daſs v von x, y, z unabhängig wird und die Bahnen des Lichts also nach (8) wieder gerade Linien sind. Entsprechend denkt er auch da, wo er der Überlegung ihre Allgemeinheit läſst, die Bahnen des Lichts aus den Gleichungen (8) bereits ermittelt und betrachtet ein zweiparametriges System von Lichtstrahlen, das ursprünglich von einem leuchtenden Punkte ausgestrahlt ist, aber durch wiederholte Knickung eine allgemeine Gestalt erhalten hat. Da durch jeden Punkt $P(x, y, z)$ des Mittels ein bestimmter Strahl hindurchgeht, so bildet Hamilton das Integral (7) längs des Lichtstrahls vom leuchtenden Punkte bis zum Punkte P und hat damit eine Ortsfunktion

$$V(x, y, z) = \mathfrak{E}\int_0^P v\, ds \text{ [1]} \tag{9}$$

eingeführt, die für das Strahlensystem von analoger Bedeutung ist, wie oben im Sonderfalle die Funktion (3). Sie wird deshalb auch wieder die

[1] Das Zeichen $\mathfrak{E}$ am Integral soll andeuten, daſs das Integral über den Lichtstrahl (die Extremale des Variationsproblems) genommen werden soll.

charakteristische Funktion des Strahlensystems genannt. Die Variation des Integrals (7) gibt für ihr Differential den Ausdruck

(10) $$\delta V = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\,\delta x + \frac{\partial v}{\partial \beta}\,\delta y + \frac{\partial v}{\partial \gamma}\,\delta z,$$

aus dem man die Beziehungen

(10a) $$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \beta},\quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial \gamma}$$

abliest, die in jedem Punkte x, y, z die partiellen Ableitungen der charakteristischen Funktion V mit den Richtungskosinus der Tangente des hindurchlaufenden Lichtstrahls verknüpfen. So einfach wie oben, daſs die Lichtstrahlen mit den Normalen der Flächen $V =$ Const. zusammenfallen, liegt die Sache hier freilich nicht mehr. Es ist aber von der gleichen grundlegenden Bedeutung, daſs zwischen den Flächen $V =$ Const. und den Lichtstrahltangenten eine solche feste Beziehung besteht, wie sie in den Formeln (10a) ausgesprochen ist. Man bezeichnet in der Variationsrechnung diese Beziehung, die übrigens eine naturgemäſse Verallgemeinerung des Senkrechtsstehens ist,[1] als **Transversalität** der Lichtstrahlen zu den Flächen

---

[1]) Für den Fall der Lichtausbreitung in homogenen, isotropen Mitteln ist

(a) $$v = n\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

bezw. für die Theorie der Spiegel einfach

(a') $$v = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

so daſs das Variationsproblem des kürzesten Lichtwegs zu

(b) $$\int \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\, ds = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \text{Extrem.}$$

wird.

Die Extremalen fallen also mit den geraden Linien zusammen und der Wert des längs der Extremale erstreckten Integrals ist gleich dem Abstand der beiden Grenzen im Sinne der gewöhnlichen Euklidischen Maſsgeometrie. Man könnte in den Sätzen der Euklidischen Geometrie statt von „geraden Linien“ auch von „Extremalen des Variationsproblems (b)“ und statt von der „Entfernung“ zweier Punkte auch von dem „Wert des Integrals (b)“ sprechen, das über das Extremalenstück, das die Punkte verbindet, zu nehmen ist. Man sagt in diesem Sinne wohl, daſs **das Variationsproblem (b) die Euklidische Maſsbestimmung definiert.**

Im gleichen Sinne kann man nun auch das Variationsproblem (7), wie jedes Variationsproblem, als **Definition einer Maſsbestimmung** ansehen, indem man

(c) $$d\sigma = v\,(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)\, ds = v\,(dx, dy, dz, x, y, z)$$

als Länge des Bogenelements auffaſst, das an der Stelle (x, y, z) durch die Koordinatendifferenzen dx, dy, dz bestimmt ist. Setzt man $d\sigma =$ Const., so erhält man auf jeder vom

$V = \text{Const.}$ Zwei beliebige Flächen $V(x, y, z) = V_1$ und $V(x, y, z) = V_2$ aus der Schar der Flächen $V = \text{Const.}$, schneiden auf allen Lichtstrahlen Stücke ab, für die das Integral

(9 a)
$$\mathfrak{E}\int_1^2 v\, ds,$$

das über den Lichtstrahl von dem Schnittpunkt mit der ersten Fläche bis zu dem mit der zweiten erstreckt wird, immer den gleichen Wert $(V_2 - V_1)$ hat.

Punkte (x, y, z) ausstrahlenden Richtung einen Punkt, und alle diese Punkte liegen auf einer Fläche, deren Gleichung durch (c) gegeben ist, wenn man darin x, y, z festhält und dx, dy, dz als laufende Koordinaten auffafst. Diese Fläche gibt ein anschauliches Bild davon, welche Strecke für die verschiedenen Richtungen im Sinne der Mafsbestimmung als „Längeneinheit" zu nehmen ist. Gewöhnlich pflegt man sie durch Dilatation im Verhältnis $d\sigma : 1$ aus dem Infinitesimalen ins Endliche zu übersetzen und die dilatierte Fläche

(c′)
$$v(\xi, \eta, \zeta, x, y, z) = 1,$$

wobei ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten sind, als die zum Punkte (x, y, z) gehörige **Eichfläche der Mafsbestimmung** zu bezeichnen. Für das besondere Integral (b), dafs auf die Mafsbestimmung der Euklidischen Geometrie führt, ist diese Eichfläche nach (b)

(c″)
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

also eine Kugel, und zwar, da x, y, z hier gar nicht auftreten, für jeden Punkt des Raumes die gleiche Kugel.

Legt man für die Strahlenoptik die Auffassung der Undulationstheorie zugrunde, so bedeutet die „Bogenlänge" der Mafsbestimmung die Fortpflanzungszeit des Lichtes und die infinitesimale Fläche (c) ist die Wellenfläche, bis zu der sich das Licht, das zu der Zeit $t = 0$ vom Punkte (x, y, z) aus ausgestrahlt wird, nach Ablauf der Zeit $dt = d\sigma$ ausgebreitet hat. Die Eichfläche (c′) würde die Wellenfläche sein, die vom Lichte nach Ablauf der Zeiteinheit erreicht wäre, wenn der Brechungsindex überall der gleiche wie im Punkte (x, y, z) wäre. In diesem Sinne kann man die Eichfläche (c′) als **Einheitswelle** bezeichnen, ein Name, der sich auch bei Hamilton findet. In der Kristalloptik wird sie sonst wohl als **Strahlenfläche** bezeichnet.

Bei der Euklidischen Mafsbestimmung erhält man die geraden Linien als Extremalen des Variationsproblems (b). Bei der allgemeinen Mafsbestimmung (c) treten an deren Stelle die Extremalen des Variationsproblems (7), die Lichtstrahlen, die zwar, wenn in der Gleichung der Eichfläche die Ortskoordinaten explizit auftreten, keine Geraden mehr sind, aber doch **geradeste oder geodätische Linien** vorstellen. Auch den **Winkel zweier Richtungen**, insbesondere das **Senkrechtstehen**, kann man von der Eichfläche aus erfassen. In der Euklidischen Mafsgeometrie lautet die Bedingung für das Senkrechtstehen der beiden Richtungen dx, dy, dy und $\delta x, \delta y, \delta z$

(d)
$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0,$$

oder wenn wir die Funktion $v(dx, dy, dz) = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ heranziehen,

(d′)
$$\frac{\partial v}{\partial\, dx}\delta x + \frac{\partial v}{\partial\, dy}\delta y + \frac{\partial v}{\partial\, dz}\delta z = 0.$$

Nach solchen einleitenden allgemeiner gehaltenen Ausführungen schränkt Hamilton die Untersuchung wieder auf geradlinige Lichtstrahlen ein, indem er, wie wir oben erwähnten, voraussetzt, dafs v von x, y, z unabhängig ist, und gibt seinen Überlegungen nun eine Wendung, die sie gerade für den praktischen Gebrauch bei der Behandlung optischer Instrumente aufserordentlich brauchbar machen.

Die Strahlenoptik stellt im Falle homogener optischer Mittel eine Beziehung zwischen Objektraum und Bildraum her, bei der jede gerade Linie des Objektraums, die man ja als Lichtstrahl auffassen kann, in eine gerade Linie des Bildraums übergeführt wird. Ein Punkt des Objektraums dagegen — man mufs ihn für die Abbildung als leuchtenden Punkt auffassen — geht im allgemeinen nicht in einen Punkt des Bildraums über, denn das homozentrische Strahlensystem im Objektraum, dessen Träger der leuchtende Punkt ist, liefert im allgemeinen im Bildraum ein Strahlensystem, dessen Strahlen keineswegs mehr durch einen Punkt laufen. Sonach ist nicht der Punkt, sondern die gerade Linie das Element, auf das sich die Theorie der optischen Abbildung gründen mufs. Von diesem Standpunkt aus erscheint die charakteristische Funktion $V(x, y, z)$, in der die Koordinaten eines Punktes des Bildraums als unabhängige Veränderliche auftreten, der geometrischen Natur der Aufgabe noch nicht vollkommen angepafst. Man wird zweckmäfsig Koordinaten einführen, die den einzelnen Strahl festlegen, mit anderen Worten, man mufs Linienkoordinaten heranziehen und die optische Abbildung als eine Aufgabe der Liniengeometrie behandeln.

Wie bekannt, sind zu einer symmetrischen Darstellung in der Liniengeometrie für eine gerade Linie sechs Koordinaten einzuführen, von denen drei ihre Richtung und drei ihre Lage kennzeichnen. Zwischen diesen

---

Ganz entsprechend werden zwei Richtungen im Sinne der durch (c) gegebenen allgemeinen Mafsbestimmung $d\sigma = v\,(dx, dy, dz, x, y, z)$ dann als senkrecht zueinander bezeichnet, wenn sie die Bedingung

$$\frac{\partial v}{\partial\, dx}\,\delta x + \frac{\partial v}{\partial\, dy}\,\delta y + \frac{\partial v}{\partial\, dz}\,\delta z = 0$$

befriedigen. Da wir auch $d\sigma = v\,(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)\,ds$ schreiben können, so können wir ihr auch die Gestalt

$$\text{(d}''\text{)} \qquad \frac{\partial v}{\partial \alpha}\,\delta x + \frac{\partial v}{\partial \beta}\,\delta y + \frac{\partial v}{\partial \gamma}\,\delta z = 0$$

geben. In dieser Auffassung sagt dann die Beziehung (10) aus, dafs die Flächen $V = \text{Const.}$ im Sinne der durch das zugehörige Variationsproblem gelieferten allgemeinen Mafsbestimmung die Lichtstrahlen senkrecht schneiden.

sechs Koordinaten bestehen dann zwei Identitäten. Auch Hamilton benutzt sechs Angaben zur Festlegung eines Lichtstrahls. Er denkt nämlich die Richtung des Lichtstrahls durch die drei Richtungskosinus festgelegt und bestimmt zu der Richtung die Lage, indem er für den Lichtstrahl drei Gleichungen anschreibt, von denen natürlich, ebenso wie von den Richtungskosinus, nur zwei unabhängig sind.

Hamilton erreicht dies, indem er die charakteristische Funktion $V(x, y, z)$ nicht selbst zur analytischen Behandlung des Strahlensystems verwendet, sondern sie der sogenannten Legendreschen Transformation unterwirft und so zu einer Funktion

$$W = x\frac{\partial v}{\partial \alpha} + y\frac{\partial v}{\partial \beta} + z\frac{\partial v}{\partial \gamma} - V \tag{11}$$

gelangt. Folgerichtig sollte er dabei die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial \alpha}, \frac{\partial v}{\partial \beta}, \frac{\partial v}{\partial \gamma}$, die den Richtungskosinus der Normalen der Fläche $V(x, y, z) = \text{Const.}$ proportional sind, als neue Veränderliche einführen. Indessen faſst er in diesem ersten Nachtrag W als eine Funktion der drei Richtungskosinus α, β, γ

$$W = W(\alpha, \beta, \gamma) \tag{11a}$$

auf. Er legt die analytische Gestalt dieser Funktion, die wegen der Identität $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ nicht völlig bestimmt ist, durch die Forderung fest, sie solle in den Veränderlichen α, β, γ von nullter Ordnung sein.[1])

[1]) Die Tangentenebene der Fläche $V = \text{Const.}$ im Punkte (x, y, z) hat nach (10a) die Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}(X - x) + \frac{\partial v}{\partial \beta}(Y - y) + \frac{\partial v}{\partial \gamma}(Z - z) = 0.$$

Legt man nun einen Strahl durch den Anfangspunkt, der die Richtungskosinus α, β, γ besitzt und dessen Gleichungen also

$$X = \alpha \cdot s, \quad Y = \beta \cdot s, \quad Z = \gamma \cdot s$$

sind, so schneidet er die Tangentenebene in einem Punkte, dessen Entfernung vom Anfangspunkte durch

$$s\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial v}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial v}{\partial \gamma}\right) = \frac{\partial v}{\partial \alpha}x + \frac{\partial v}{\partial \beta}y + \frac{\partial v}{\partial \gamma}z$$

oder

$$s v = \frac{\partial v}{\partial \alpha}x + \frac{\partial v}{\partial \beta}y + \frac{\partial v}{\partial \gamma}z$$

gegeben ist. Das Produkt (sv) ist die Länge des Lichtwegs auf dem Strahl, der durch den Anfangspunkt parallel zu dem Strahl im Punkte (x, y, z) gezogen ist, und zwar die Lichtweglänge vom Anfangspunkte bis zu dem Schnittpunkte mit der Tangentenebene der Fläche $V = \text{Const.}$ im Punkte (x, y, z). Nach (11) ist also die Funktion W gleich der Lichtweglänge auf diesem parallelen Strahl, vermindert um die Lichtweglänge V auf dem wirklichen Strahl, die zum Punkte (x, y, z) gehört.

Aus (11) erhält man durch Differentiation nach den als unabhängig anzusehenden Veränderlichen α, β, γ

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = x \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + y \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + z \frac{\partial^2 v}{\partial \gamma^2} \tag{12}$$

und zwei analoge Beziehungen, die als lineare Gleichungen in x, y, z die Gleichungen des Lichtstrahls mit den Richtungskosinus α, β, γ sind, und die also seine Lage im Raum bestimmen. Somit liefern die ersten Ableitungen der Funktion $W(\alpha, \beta, \gamma)$ in analoger Weise die Lage eines Strahls mit bekannter Richtung α, β, γ, wie vorher die ersten Ableitungen der Funktion $V(x, y, z)$ die Richtung des Strahls bestimmten, der durch einen vorgegebenen Punkt hindurchgeht.

Wie vorher durch die zweiten Ableitungen von V, so werden jetzt durch die zweiten Ableitungen von W die Beziehungen zwischen benachbarten Strahlen, d. h. die differentialgeometrischen Eigenschaften des Strahlensystems beherrscht, die für die Abbildung durch ein optisches Instrument grundlegend sind. Die Strahlen sind jetzt nicht mehr, wie vorhin im Falle homogener Mittel die Normalen von Flächen. Daher leiten diese Untersuchungen Hamilton zu der Differentialgeometrie der allgemeinen (nicht flächennormalen) Strahlensysteme über, die er unter Benutzung einerseits der charakteristischen Funktion V,[1]) andererseits der neuen Funktion W des Strahlensystems aufbaut. Dafs die Ergebnisse, die er so auf zwei Wegen erhält, übereinstimmen, weist er durch Umrechnung der einen in die anderen nach. Dazu braucht er den Zusammenhang der zweiten Ableitungen der beiden Funktionen V und W, den er daher in sehr ausführlich entwickelten Formeln festlegt.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen $V(x, y, z)$ und $W(\alpha, \beta, \gamma)$ und ihren ersten und zweiten Ableitungen ist noch zu einem anderen Zwecke wichtig. Will man nämlich das Strahlensystem beim Durchlaufen eines optischen Instruments verfolgen, insbesondere seine Umformung an den Knickflächen, an denen eine Reflexion oder Brechung der Lichtstrahlen stattfindet, untersuchen, so hat man zu beachten, dafs zu beiden Seiten einer Knickfläche im allgemeinen V wie W durch verschiedene analytische Ausdrücke dargestellt werden. Die charakteristische Funktion

[1]) Da die Lichtstrahlen im Sinne der durch das „Bogenelement" $d\sigma$ gegebenen Mafsbestimmung die „Normalen" der Flächen $V =$ Const. sind, so gewinnt Hamilton die Differentialgeometrie der allgemeinen Strahlensysteme in der Weise, dafs er die Krümmungstheorie der Flächen im dreidimensionalen Euklidischen Raume auf die von Flächen in einem dreidimensionalen Raume mit allgemeiner Mafsbestimmung überträgt.

$V(x, y, z)$ ist aber dadurch ausgezeichnet, dafs ihr numerischer Wert auf einer solchen Knickfläche ungeändert bleibt, so dafs die Gleichung der Knickfläche $u(x, y, z) = 0$ bis auf einen Faktor λ mit

$$V''(x, y, z) - V'(x, y, z) = 0 \tag{13}$$

übereinstimmen mufs, wenn V' und V'' die analytischen Ausdrücke der Funktion V zu beiden Seiten der Knickfläche sind. Wegen dieser Eigenschaft ist es verhältnismäfsig einfach, auf den Knickflächen die Änderungen von V und seinen Ableitungen zu bestimmen, aus denen man dann die Änderungen von W und seinen Ableitungen mit Hilfe der Zusammenhangsformeln berechnet. Demgegenüber hat die Funktion W als Funktion von α, β, γ die Eigenschaft, dafs ihr numerischer Wert ungeändert bleibt, wenn man das Stück eines Lichtstrahls zwischen zwei Knickstellen durchläuft, und das Gleiche gilt von ihren Ableitungen. Wenn man daher das Strahlensystem durch das optische Instrument verfolgt, so wird man für die Stücke der Strahlen zwischen den Knickflächen die Funktion W benutzen, an den Knickflächen aber zu der charakteristischen Funktion V übergehen und deren Änderung und die ihrer Ableitungen an der Knickfläche bestimmen. Dann rechnet man die neuen Ausdrücke der Funktion V und ihrer Ableitungen wieder in die von W bezw. deren Ableitungen um, die auf dem anschliefsenden geradlinigem Stück des Strahls konstant bleiben. Das wiederholt sich an jeder Knickfläche.

Man sieht aus diesen Ausführungen, dafs Hamilton sich hier die Funktionen V und W so gebildet denkt, dafs man das Strahlensystem durch das optische Instrument hindurch verfolgt.

Die charakteristische Funktion $V(x, y, z)$ genügt nun einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die für ein homogenes isotropes optisches Mittel, für das

$$v = n\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \text{ also } \frac{\partial V}{\partial x} = n\alpha, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = n\beta, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = n\gamma \tag{14}$$

ist, in Verallgemeinerung von (5) die Gestalt

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = n^2 \tag{15}$$

besitzt, und die im Falle eines homogenen nichtisotropen Mittels eine allgemeinere Gestalt

$$\Omega\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0 \tag{15a}$$

haben würde. Hamilton denkt aber im ersten Nachtrag noch so wenig daran, diese partielle Differentialgleichung zur Bestimmung der charakteristischen Funktion V nutzbar zu machen, daſs er sie im ersten Nachtrag gar nicht erwähnt.

3. Der zweite Nachtrag.

Im zweiten Nachtrag kommt eine andere Auffassung zum Durchbruch. Statt ein Strahlensystem durch ein gegebenes optisches Instrument zu verfolgen, fragt er jetzt nach dem allgemeinsten möglichen System, das durch ein optisches Instrument erzeugt werden kann. Da tritt dann die partielle Differentialgleichung für die charakteristische Funktion $V(x, y, z)$ in den Vordergrund. Denn hat man durch ihre Integration die allgemeinste mögliche Funktion V gefunden, so erhält man das zugehörige Strahlensystem, indem man nach (10a) in jedem Punkte einer Fläche $V = C$ den zugehörigen Strahl konstruiert. Für den Fall homogener isotroper Mittel gelingt Hamilton nun die allgemeine Integration der zugehörigen partiellen Differentialgleichung (15) bezw. (5) durch Beachtung der Beziehung zwischen den beiden Funktionen V und W. Der Gedanke ist dabei der, daſs eine Transformation, die die charakteristische Funktion V in eine andere Funktion überführt, auch gleichzeitig die partielle Differentialgleichung für V in eine partielle Differentialgleichung für die transformierte Funktion verwandeln muſs. Wenn man nun gerade durch die Legendresche Transformation (10a), (11) von der Funktion V zu der Funktion W übergeht, so geht im besonderen Falle eines homogenen Mittels die partielle Differentialgleichung in eine endliche Gleichung zwischen den neuen Veränderlichen über. Im Falle eines isotropen Mittels, der für praktische Zwecke der wichtigste ist, und den Hamilton hier allein behandelt, wird durch die Legendresche Transformation die partielle Differentialgleichung (15) einfach in die Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{16}$$

umgesetzt, in der sogar die transformierte Funktion W nicht mehr vorkommt. Hamilton kann daher die Funktion W ganz beliebig als Funktion ihrer Veränderlichen ansetzen, und hat dann nur durch die Legendresche Transformation zu der Funktion V zurückzukehren, um eine Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung zu erhalten. Ist die Funktion W ganz willkürlich gewählt, so muſs sich so die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung ergeben.[1]) Hamilton setzt dem-

[1]) Diese Integration der partiellen Differentialgleichung der charakteristischen Funktion benutzt den später von Lie systematisch ausgebildeten Gedanken, durch eine Transformation,

entsprechend W als Potenzreihe in α, β, γ (mit willkürlichen Koeffizienten) an, eliminiert γ vermöge der Identität (16) und geht dann durch die Legendresche Transformation zu der allgemeinen Lösung der partiellen

---

insbesondere eine Berührungstransformation, der partiellen Differentialgleichung eine solche Gestalt zu geben, dafs ihre Integration bekannt ist bezw. dafs im Sonderfall, wie hier, gar keine Integration mehr auszuführen ist. Übrigens hat ebenso wie Hamilton auch Plücker den Gedanken, eine Differentialgleichung durch eine Berührungstransformation auf eine bekannte Differentialgleichung zurückzuführen und so zu integrieren, lange vor Lie durchgeführt (vgl. J. Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831, S. 265—267).

Um das Verfahren im einzelnen geometrisch zu verstehen, erscheint es zweckmäfsig, in der partiellen Differentialgleichung (15) bezw. (5) eine Koordinate, etwa z, zu unterdrücken und die Differentialgleichung

$$\text{(a)} \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = 1$$

zu behandeln. Man erkennt unmittelbar, dafs

$$\text{(b)} \qquad V = x \cos\varphi + y \sin\varphi + p,$$

wo φ und p zwei beliebige Konstante sind, eine **vollständige Lösung** dieser Gleichung vorstellt. Geometrisch stellt jede dieser Lösungen eine Ebene im (x, y, V) Raum, die vollständige Lösung also eine zweiparametrige Ebenenschar vor.

Aus der vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung erhält man nach den Regeln die **allgemeine Lösung**, wenn man die Konstante p als eine willkürliche Funktion von φ ansetzt und dann φ vermöge der Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

eliminiert. Die allgemeine Lösung unserer partiellen Differentialgleichung ist also eine willkürliche **abwickelbare Fläche**.

Für die unverkürzte Gleichung (5) bezw. (15) hat man entsprechend als vollständige Lösung eine dreiparametrige Schar von dreidimensionalen „ebenen" Mannigfaltigkeiten im vierdimensionalen (x, y, z, V) Raum und die allgemeine Lösung ist eine willkürliche in eine ebene Mannigfaltigkeit „abwickelbare" dreidimensionale Mannigfaltigkeit.

Die Legendresche Transformation bedeutet, dafs die Integralfläche statt in Punktkoordinaten in Ebenenkoordinaten ausgedrückt wird, bezw. dafs der Integralfläche eine neue Fläche zugeordnet wird, deren Punktkoordinaten gleich den Ebenenkoordinaten der ursprünglichen Fläche sind. Bei dieser Zuordnung entspricht einem Element der ursprünglichen Differentialgleichung im Lieschen Sinne, d. h. einem Punkt einer Integralfläche mit der hindurchgehenden Tangentenebene, ein Element der transformierten Differentialgleichung, so dafs die als zweiparametriger Elementenverein aufzufassende Integralfläche in einen zweiparametrigen Elementenverein übergeht und also die zugeordnete Fläche eine Integralfläche der transformierten partiellen Differentialgleichung wird.

Fafst man eine der Ebenen (b) als Elementenverein der partiellen Differentialgleichung (a) auf, so hat sie die Eigentümlichkeit, dafs die Ebenen, die die einzelnen Punkte zu Elementen ergänzen, sämtlich zusammenfallen, da sie mit der Ebene (b) selbst identisch

Differentialgleichung der charakteristischen Funktion $V(x, y, z)$ über. Dabei führt er die notwendigen Eliminationen nach einer von Laplace herrührenden Methode durch. Für die Zwecke der optischen Praxis spezialisiert er die Ergebnisse insbesondere für den Fall, daſs Symmetrie um eine Achse herrscht, wie es bei achsensymmetrischen Instrumenten der Fall ist, wenn der leuchtende Punkt auf der Achse des Instrumentes liegt.

4. Dritter Nachtrag.

Im dritten Nachtrag kehrt Hamilton zu den Fragestellungen des ersten Nachtrags zurück. Aber jetzt haben seine Überlegungen in dem steten Ringen mit dem Stoff den groſsen Zug ins Allgemeine gewonnen, so daſs wir hier noch mehr als in den anderen Abhandlungen die weitreichende Bedeutung der Hamiltonschen Erkenntnisse vor Augen haben. Schon äuſserlich tritt die Allgemeinheit seiner Auffassung darin in Erscheinung, daſs er hier den Brechungsindex v als eine allgemeine Funktion des Ortes und der Richtung des Lichtstrahls auffaſst, ja, daſs er sogar die Farbe des

sind. Durch die Legendresche Transformation geht dieser Elementenverein daher in einen einzigen Punkt über, durch den ∞^2 Ebenen hindurchlaufen. Die transformierte Gleichung muſs also erfüllt sein, ganz gleich, welche Werte die partiellen Ableitungen der transformierten unbekannten Funktion haben. Das heiſst aber doch nichts anderes, als daſs die transformierte Differentialgleichung von den partiellen Ableitungen der transformierten Funktion frei, also eine endliche Gleichung sein muſs.

Eine solche endliche Gleichung kann geometrisch als eine Fläche gedeutet werden. Jeder der Punkte dieser Fläche, als Träger eines Ebenenbündels aufgefaſst, stellt eine Lösung, die zweiparametrige Schar der Punkte der Fläche also eine vollständige Lösung der transformierten partiellen Differentialgleichung vor. Im Sonderfalle der Gleichung (a) fällt aus der endlichen Gleichung auch noch die Gröſse W ganz heraus, diese endliche Gleichung wird einfach

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \tag{a'}$$

und stellt also im (α, β, W)-Raum einen Kreiszylinder mit der W-Achse als Achse vor.

Aus der zweiparametrigen Schar seiner Punkte, die als Träger von Ebenenbündeln anzusehen sind, d. h. aus der vollständigen Lösung der transformierten „Differentialgleichung" (a') erhält man eine allgemeine Lösung, wenn man auf dem Zylinder eine Raumkurve

$$W = W(\alpha, \beta)$$

zieht und jeden ihrer Punkte nur noch als Träger eines Ebenenbüschels auffaſst, der die Tangente der Kurve als Achse besitzt. Formt man diesen Elementenverein durch die Legendresche Transformation um, so ergibt sich eine abwickelbare Fläche, also das allgemeine Integral von (a). Man sieht durch den Vergleich mit den Ausführungen im Text, daſs Hamilton gerade diese letzte Operation, nur mit einer unabhängigen Veränderlichen mehr, vollzieht.

Lichtes in Rechnung zieht, indem v als abhängig von einem Parameter χ erscheint, der die Farbe des Lichtes kennzeichnet,

$$v = v(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z, \chi). \tag{17}$$

Schliefslich geht er noch einen Schritt weiter. Denn um auch die Doppelbrechung des Lichtes in zweiachsigen Kristallen zu umfassen, gibt er auch die Eindeutigkeit des Brechungsindex v auf, so dafs in einem Punkte (x, y, z) zu einer Richtung α, β, γ des Strahls zwei Werte von v gehören, und gerade diese Problemstellung führt ihn durch das Studium der Verzweigung, zu der die Mehrdeutigkeit Anlafs gibt, zu der Entdeckung der konischen Refraktion, die bei ihm nur als ein einzelnes Ergebnis seiner Überlegung neben anderen erscheint, die aber in der Physik gewöhnlich als das Hauptstück seiner Arbeiten zur Optik angesehen wird.[1] Übrigens verwendet er in diesem dritten Nachtrag nur noch die Undulationstheorie des Lichtes und deutet alles auf Grund dieser Theorie. In dem Prinzip des kürzesten Lichtwegs

$$\int v(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z, \chi)\, ds = \text{Extrem.} \tag{18}$$

ist also das Integral die Zeit t, die das Licht braucht, um auf einen Lichtstrahl von einem Punkte zum andern zu gelangen.

Die erste Aufgabe wäre bei der neuen allgemeinen Fragestellung nun natürlich, aus diesem Variationsprinzip des kürzesten Lichtwegs die Gestalt der Lichtstrahlen zu bestimmen. Doch auch hier wieder schiebt Hamilton diese Aufgabe durchaus zurück und betrachtet sie als bereits erledigt. Gegenüber der Auffassung des „Essay“ und des ersten Nachtrags kommt aber in diesem dritten Nachtrag eine neue Wendung dadurch herein, dafs er nicht mehr wie bisher, nur ein einzelnes Strahlenbündel im Bildraum betrachtet, sondern auch den Objektraum in die Betrachtung einbezieht. Bei der Abbildung eines endlich ausgedehnten Gegenstandes sind dessen Punkte als leuchtende Punkte anzusehen, von deren jedem ein Lichtstrahlenbündel ausgeht. Man hat also unendlich viele Lichtstrahlenbündel und mufs, wenn man ein einzelnes Bündel mit Hilfe der charakteristischen Funktion V untersuchen will, zur näheren Festlegung des Bündels die Koordinaten des leuchtenden Punktes x_0, y_0, z_0 im Objektraum als Parameter in die Funktion V aufnehmen. So erscheint die charakteristische Funktion

$$V = V(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \tag{19}$$

[1] Der konischen Refraktion ist unten ein besonderer Abschnitt gewidmet.

abhängig von den Koordinaten zweier Punkte, des veränderlichen Punktes $P(x, y, z)$ im Bildraum und des leuchtenden Punktes $P_0(x_0, y_0, z_0)$ im Objektraum.[1])

Hamilton stellt nun im dritten Nachtrag die charakteristische Funktion in dieser neuen Auffassung an die Spitze. Ein Lichtstrahl verbindet einen Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ des Objektraumes mit einem Punkte $P_2(x_2, y_2, z_2)$ des Bildraumes. Das über den Lichtstrahl von P_1 nach P_2 erstreckte Integral (18) ist die charakteristische Funktion

$$(20) \qquad V(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1) = \mathfrak{E}\int_{P_1}^{P_2} v(\alpha, \beta\, \gamma, x, y, z)\, d s,$$

die als Funktion der Koordinaten der beiden Begrenzungspunkte erscheint. Sie stellt vom Standpunkt der Optik aus gedeutet, die Länge des Lichtwegs zwischen den beiden Punkten P_1 und P_2 vor, im Sinne der Undulationstheorie also die Zeit, die das Licht braucht, um von P_1 nach P_2 zu gelangen.

Für das Differential der Funktion V liefert die Grenzformel der Variationsrechnung Hamilton unmittelbar den Ausdruck

$$(21) \quad \delta V = \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)_2 \delta x_2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)_2 \delta y_2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \gamma}\right)_2 \delta z_2\right\} - \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial \gamma}\right)_1 \delta z_1\right\},$$

aus dem er durch Aufspalten die beiden Gruppen von Beziehungen

$$(22\,a) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)_2, \quad \frac{\partial V}{\partial y_2} = \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)_2, \quad \frac{\partial V}{\partial z_2} = \left(\frac{\partial v}{\partial \gamma}\right)_2$$

und

$$(22\,b) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = -\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)_1, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = -\left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)_1, \quad \frac{\partial V}{\partial z_1} = -\left(\frac{\partial v}{\partial \gamma}\right)_1$$

erhält, welche in jedem der beiden Begrenzungspunkte die partiellen Ableitungen der charakteristischen Funktion V zu den Richtungskosinus der Tangente des Lichtstrahls in Beziehung setzen. Wenn in jeder dieser beiden Gleichungsgruppen die Richtungskosinus der Tangente des Lichtstrahls eliminiert werden, so ergeben sich zwei Beziehungen zwischen den

---

[1]) Dabei haben wir vorausgesetzt, daſs der Farbenparameter einen konstanten Wert hat, daſs wir es also mit einfarbigem Licht zu tun haben. An sich würde auch χ als Parameter in der charakteristischen Funktion V auftreten. Von einem leuchtenden Punkte strahlt dann nicht ein einzelnes Strahlenbündel aus, sondern eine einparametrige Schar von solchen Bündeln, indem zu der Farbe jeder Wellenlänge ein Strahlenbündel gehört. Der Einfachheit halber wollen wir im folgenden diese Abhängigkeit von der Farbe nicht jedesmal wieder ausdrücklich hervorheben, zumal man leicht erkennt, wie der Farbenparameter χ in die Beziehungen eingehen wird.

partiellen Ableitungen von V. Die charakteristische Funktion V mufs also für jeden der beiden Begrenzungspunkte je einer partiellen Differentialgleichung

$$\Omega_2\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial y_2}, \frac{\partial V}{\partial z_2}, x_2, y_2, z_2\right) = 0 \tag{23 a}$$

bezw.

$$\Omega_1\left(-\frac{\partial V}{\partial x_1}, -\frac{\partial V}{\partial y_1}, -\frac{\partial V}{\partial z_1}, x_1, y_1, z_1\right) = 0 \tag{23 b}$$

genügen.[1])

Indem Hamilton nun nach der inneren Bedeutung jeder dieser beiden partiellen Differentialgleichungen fragt, kommt er auf geradem Wege zu der Auffassung der optischen Abbildung als einer Berührungstransformation. Diese Auffassung wird im Falle der Optik, wenn man die Undulationstheorie zugrunde legt, — man möchte sagen — von der Natur selbst unmittelbar dargeboten. Die charakteristische Funktion $V(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1)$ spielt dabei die Rolle der Direktrixgleichung in der Bezeichnungsweise Plückers. Wir wollen dies etwas genauer ausführen.

Fafst man in der charakteristischen Funktion $V(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1)$ die Koordinaten eines der beiden Begrenzungspunkte als fest, die des anderen als veränderlich auf, so stellt die Beziehung

$$V(x_2\, y_2\, z_2; x_1\, y_1\, z_1) = \text{Const.} = C$$

eine Fläche, nach der Undulationstheorie eine Wellenfläche, vor. Jedem der beiden Begrenzungspunkte des Lichtstrahlstückes gehört so, wenn man den anderen Punkt als veränderlich auffafst, eine Fläche zu. Die partiellen Ableitungen von V

$$\sigma_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad \tau_2 = \frac{\partial V}{\partial y_2}, \quad v_2 = \frac{\partial V}{\partial z_2} \tag{24 a}$$

bezw.

$$\sigma_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \tau_1 = -\frac{\partial V}{\partial y_1}, \quad v_1 = -\frac{\partial V}{\partial z_1} \tag{24 b}$$

in dem einen oder anderen der beiden Punkte P_1 und P_2 bestimmen die Normale bezw. die Tangentenebene der durch den Punkt laufenden Wellenfläche. (Genauer gesagt, bestimmen sie nicht nur die Richtung der Normalen, sondern auch die Gröfse der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle.)

[1]) Die beiden Funktionen Ω sind durch einen Index unterschieden. Denn wenn die beiden Begrenzungspunkte in optischen Mitteln verschiedener Natur liegen, so ist die analytische Gestalt der Funktion v und damit, wie wir gleich sehen werden, auch die der Funktion Ω für beide Begrenzungspunkte des Lichtwegs verschieden.

Fafst man die Koordinaten x, y, z eines Punktes und die zugehörigen Gröfsen σ, τ, v als ein Ganzes auf, so hat man in

(25 a) $$x_2, y_2, z_2; \sigma_2, \tau_2, v_2$$

bezw.

(25 b) $$x_1, y_1, z_1; \sigma_1, \tau_1, v_1$$

in Übereinstimmung mit der Ausdrucksweise Lies die sechs Bestimmungsstücke eines Elementes. Die optische Abbildung bezw. die charakteristische Funktion V vermittelt die Überführung des Elementes in P_1 in das zugehörige Element in P_2.

Die partielle Differentialgleichung (23 a) sagt in dieser Auffassung aus, dafs zwischen den sechs Bestimmungsstücken eines Wellenelementes die Gleichung

(26 a) $$\Omega_2 (\sigma_2, \tau_2, v_2, x_2, y_2, z_2) = 0$$

besteht. Ebenso führt (23 b) zu der Beziehung

(26 b) $$\Omega_1 (\sigma_1, \tau_1, v_1, x_1, y_1, z_1) = 0$$

für die Bestimmungsstücke des anderen Wellenelementes. Zur geometrischen Deutung jeder dieser beiden Gleichungen knüpfen wir an die Überlegungen auf S. 16 an. Ist $v(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)$ der Brechungsindex im Punkte (x, y, z) eines optischen Mittels und nehmen wir an, das Mittel habe in der Umgebung des Punktes (x, y, z) überall den gleichen Brechungsindex, dann breitet sich das Licht, das von dem Punkte (x, y, z) ausgestrahlt wird, in der Zeiteinheit bis zu der Fläche

(27) $$v(\xi, \eta, \zeta, x, y, z) = 1$$

aus, — ξ, η, ζ sind die laufenden Koordinaten — die in Hamiltons Bezeichnungsweise die Einheitswelle heifst, und die wir oben als Eichfläche der durch das Variationsproblem gegebenen Mafsbestimmung

(27 a) $$dt = v(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)\, ds = v(dx, dy, dz, x, y, z)$$

eingeführt haben. Jedem Punkte (x, y, z) des optischen Mittels gehört seine Einheitswelle zu, solange v von den Ortskoordinaten x, y, z abhängig ist. Soll nun die Einheitswelle statt in Punktkoordinaten, wie es in (27) statthat, in Ebenenkoordinaten dargestellt werden, so haben wir die partiellen Ableitungen

(28) $$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \sigma, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \tau, \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} = v$$

als neue Koordinaten einzuführen und dann aus diesen drei Gleichungen unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} = v \tag{29}$$

die ausspricht, dafs $v(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)$ in α, β, γ homogen erster Ordnung ist, die Punktkoordinaten ξ, η, ζ zu eliminieren. Nach den obigen Überlegungen müssen wir aber durch diese Elimination die Gleichung

$$\Omega(\sigma, \tau, v, x, y, z) = 0 \tag{30}$$

erhalten, die sonach die Gleichung der Einheitswelle in Ebenenkoordinaten ist. Eine partielle Differentialgleichung wie (23a) und (23b) bedeutet also, dafs zu einem Lichtstrahl mit der Richtung α, β, γ eine Wellenebene gehört, die der Tangentenebene der Einheitswelle in dem Punkte parallel ist, in dem sie von der Richtung α, β, γ getroffen wird. Die Richtung des Lichtstrahls und die Ebene des Wellenelements sind zueinander transversal in der Sprache der Variationsrechnung oder zueinander senkrecht im Sinne der allgemeinen Mafsbestimmung (27a).[1]

Wenn man die Lichtübertragung von einem Punkte eines Lichtstrahls zu einem anderen als eine Transformation eines Wellenelements in ein anderes ansieht, so kann man auch die Differentialgleichungen des Lichtstrahls aus dieser Auffassung heraus unmittelbar anschreiben. Man braucht nur die beiden Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) in der charakteristischen Funktion V infinitesimal benachbart, etwa

$$x_1 = x,\ y_1 = y,\ z_1 = z \quad \text{und} \quad x_2 = x + dx,\ y_2 = y + dy,\ z_2 = z + dz$$

zu nehmen, dann erhält man

$$V(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1) = v(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)\, ds = v(dx, dy, dz, x, y, z).$$

[1]) Da die beiden Funktionen v und Ω die gleiche Fläche in Punkt- bezw. Ebenenkoordinaten darstellen, kann man natürlich auch aus der Funktion Ω die Funktion v gewinnen.

Die Gestalt der Funktion Ω, die durch die Elimination von ξ, η, ζ aus (28) entsteht, legt Hamilton noch durch die Bedingung fest, dafs

$$\sigma \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \tau \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + v \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \Omega + 1 = 1$$

sein soll. Dann ergeben sich für die Ableitungen von Ω und v Beziehungen der Gestalt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \frac{\alpha}{v} \text{ usw. und } \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} \text{ usw.} \tag{31}$$

Also wird

$$\sigma_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial dx} \text{ usw.}, \quad \sigma_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial dx} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

und somit

$$d\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 = \frac{\partial v\,(dx, dy, dz, x, y, z)}{\partial x} \text{ usw.},$$

oder wenn wir durch $dV = v\,(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)\,ds$ dividieren,

$$\frac{d\sigma}{dV} = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} \text{ usw.},$$

wobei jetzt wieder $v = v\,(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)$ zu denken ist. Führen wir schließlich noch Ω ein, so folgt nach (31)

$$\text{(32)} \qquad \frac{d\sigma}{dV} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{d\tau}{dV} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \frac{dv}{dV} = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$ [1])

Diese Gestalt der Gleichungen für den Lichtstrahl hat Hamilton in diesem Nachtrag auch gelegentlich angeschrieben, freilich nicht direkt bei der eben gegebenen Ableitung der Gleichung der Lichtstrahlen aus der charakteristischen Funktion, wo er sich vielmehr mit der Gestalt

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{d\tau}{ds} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

begnügt. Die zu (32) gehörige zweite Gruppe der kanonischen Gleichungen des Variationsproblems

$$\text{(32 a)} \qquad \frac{dx}{dV} = \frac{\alpha}{v} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}, \quad \frac{dy}{dV} = \frac{\beta}{v} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}, \quad \frac{dz}{dV} = \frac{\gamma}{v} = \frac{\partial \Omega}{\partial v}$$

schreibt er nicht hin, trotzdem sie in seinen Formeln implizit enthalten sind. Es kam ihm eben nicht auf die formale Gestalt der Gleichungen, sondern auf das Wesen der geometrischen Transformation an, die die optische Abbildung erzeugt. Die Auffassung, daſs die charakteristische Funktion eine Berührungstransformation definiert, ist ihm in der optischen Formulierung unter Heranziehung der Undulationstheorie des Lichtes anschaulich klar, während der analytische Apparat bei ihm natürlich noch nicht die Vollendung hat, die ihm später gegeben wurde.

[1]) Da $dV = v.\,ds = dt$ ist, wird hier die undulatorische Zeit, d. h. die Bogenlänge der allgemeinen Maſsbestimmung (27 a), als unabhängige Veränderliche eingeführt. Es wird also im Sinne der Theorie der Berührungstransformation ein kanonischer Parameter gewählt.

Gehen wir von der Beziehung

$$V(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1) = C \tag{33}$$

die als Direktrixgleichung der Berührungstransformation (in der Plückerschen Bezeichnung) eine zentrale Stellung erhält, aus, so ordnet sie wie wir oben sahen, einem Punkte des Objekt- bezw. Bildraumes eine Fläche des Bild- bezw. Objektraumes zu. Nehmen wir nun in dem einen Raume, etwa im Objektraume, statt eines einzelnen Punktes ein Wellenflächenelement, das wir durch drei infinitesimal benachbarte Punkte gegeben denken können, so entsprechen diesen drei Punkten drei Flächen, die zu infinitesimal benachbarten Werten der Parameter x_1, y_1, z_1 gehören. Die drei Flächen schneiden sich in einem Punkte, und dieser Schnittpunkt gehört gleichzeitig der Hüllfläche der Flächenschar an, die entsteht, wenn man die Paramter x_1, y_1, z_1 auf einer Fläche, der das Flächenelement angehört, variieren läfst. Dem Schnittpunkt ist damit gleichzeitig eine Ebene zugeordnet, nämlich die Tangentenebene dieser Hüllfläche, und Punkt und Ebene bilden zusammen das Element des Bildraums, das durch die optische Abbildung dem gegebenen Element des Objektraums entspricht. Nimmt man die Konstante in (33) veränderlich, so erhält man so alle Elemente, die mit wachsender Zeit einem einzelnen Element des Objektraumes entsprechen.

Der Schnittpunkt der drei infinitesimal benachbarten Flächen ist durch die Beziehungen

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1}a_1 = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial y_1} = \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1}b_1 = 0$$

gegeben, die zusammen mit der Gleichung (23 b) die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = c_1, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = c_2, \quad \frac{\partial V}{\partial z_1} = c_3 \tag{34}$$

liefern. Da er immer auf dem Lichtstrahl liegen mufs, so stellen diese Beziehungen (34) die endlichen Gleichungen des Lichtstrahls dar, der von dem Punkte (x_1, y_1, z_1) ausstrahlt. Wir müssen dazu in (34) x_2, y_2, z_2 als Veränderliche ansehen und die Konstanten so bestimmen, dafs die Richtung des Strahls in x_1, y_1, z_1 den durch das vorgegebene Element bestimmten Wert erhält. So fliefst aus der Auffassung der charakteristischen Funktion als Direktrixgleichung der Berührungstransformation unmittelbar die Darstellung der endlichen Gleichungen des Lichtstrahls bezw. der Lösungen der Euler-Lagrangeschen Gleichungen des Variationsproblems.[1])

[1]) Die Auffassung der Lichtausbreitung als einer Berührungstransformation ist in neuerer Zeit ausführlich von Vessiot entwickelt, der übrigens keinerlei Bezug auf Hamilton

Man erkennt an dieser Stelle besonders deutlich, wie bei Hamilton die Integration der Euler-Lagrangeschen Gleichungen durchaus kein Zielpunkt ist, sondern sich die Darstellung der Integrale dieser Gleichungen mehr beiläufig bei der Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der optischen Abbildungen ergibt.

Die Fortpflanzung eines Wellenelementes $(x, y, z; \sigma, \tau, v)$ durch das optische Mittel hat man sich nach diesen Überlegungen folgendermafsen vorzustellen: Die Einheitswelle (oder Eichfläche) im Punkte (x, y, z) bestimmt die zu der Ebene σ, τ, v gehörige Strahlrichtung.[1] Längs des Strahls schreitet man um eine durch dV bestimmte infinitesimale Strecke[2] zu einem Nachbarpunkte fort. Diesem Nachbarpunkte ist eine Ebene zugeordnet, deren Stellung man findet, wenn man neben der Einheitswelle um den Punkt (x, y, z) noch um zwei Nachbarpunkte in der Ebene σ, τ, v die Einheitswellen konstruiert, die drei Flächen zum Schnitt bringt und in den Schnittpunkt die gemeinsame Tangentenebene legt.[3] So hat man ein Nachbarelement gefunden und nun verfährt man in der gleichen Weise weiter. Um den Punkt des Nachbarelements wird die zugehörige Einheitswelle konstruiert, mit ihrer Hilfe bestimmt man aus der Ebene des Nachbarelements die neue Strahlrichtung, auf der man wieder ein Stück fortschreitet usw. Offenbar ist dies Verfahren nichts anderes als die allgemeine Formulierung des Huyghens'schen Prinzips, dessen fundamentale Bedeutung für die Strahlenoptik danach verständlich erscheint.

Wenn es sich um ein homogenes optisches Mittel handelt, so sind alle Einheitswellen um die einzelnen Punkte des Mittels kongruent und gegeneinander nur parallel verschoben, und die Lichtstrahlen werden gerade Linien. Allen Punkten eines geradlinigen Strahls gehören demnach Ebenen von gleicher Stellung zu, wenn man die Punkte zu Wellenelementen ergänzt. Umgekehrt ist einer bestimmten Stellung einer Ebene nicht mehr ein einzelner Punkt, sondern der ganze geradlinige Lichtstrahl zugeordnet, dessen Richtung transversal, d. h. senkrecht im Sinne der Mafsbestimmung, zu der Ebene ist.

Statt an die Überführung eines einzelnen Wellenelements des Objektraums in ein einzelnes Wellenelement des Bildraums anzuknüpfen, wird man dann zweckmäfsiger die Gesamtheit der Elemente auf einen Strahl, d. h. den geradlinigen Strahl mit der zu ihm gehörenden Stellung der Ebenen, als

nimmt. Vgl. E. Vessiot, Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales. Bulletin de la société mathématique de France, 34 (1906), S. 430.

[1]) Die zu der Ebene im Sinne der Mafsbestimmung senkrecht ist.

[2]) $dV = dt$ ist das Bogenelement der allgemeinen Mafsbestimmung.

[3]) Das ist die geometrische Bedeutung der Gleichungen (32).

eine Einheit auffassen und hat danach die optische Abbildung als eine geometrische Transformation, die die geraden Linien des einen Raumes in bestimmter Weise in die geraden Linien des anderen Raumes überführt. Da nun die Richtung der Geraden die Stellung der Ebene bestimmt, so werden für die Untersuchung der Abbildung zweckmäfsig solche Gröfsen als unabhängige Veränderliche gewählt, die die Richtung der Strahlen festlegen. Das ist der gleiche Gedanke, der Hamilton schon im ersten Nachtrag von der Funktion V zu der Funktion W geführt hat, die er dort als Funktion der Richtungskosinus des Strahls ansah. Nur betrachtet er im ersten Nachtrag immer nur das einzelne Strahlenbündel in einem Raume, nicht die durch die optische Abbildung vermittelte Transformation eines Raumes in einen anderen.

Ebenso wie im ersten Nachtrag formt er auch im dritten Nachtrag die charakteristische Funktion $V(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1)$ durch die Legendresche Transformation

$$\sigma_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad \tau_2 = \frac{\partial V}{\partial y_2}, \quad v_2 = \frac{\partial V}{\partial z_2},$$
$$\sigma_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \tau_1 = -\frac{\partial V}{\partial y_1}, \quad v_1 = -\frac{\partial V}{\partial z_1}$$

in eine neue Funktion

$$T(\sigma_2, \tau_2, v_2; \sigma_1, \tau_1, v_1) = (x_2\sigma_2 + y_2\tau_2 + z_2 v_2) - (x_1\sigma_1 + y_1\tau_1 + z_1 v_1) - V(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1) \tag{35}$$

um, in der er jetzt folgerichtig im Sinne der Legendreschen Transformation, die σ, τ, v selbst als unabhängige Veränderliche beibehält und sie nicht, wie im ersten Nachtrag, durch die Richtungskosinus α, β, γ der Strahlen ersetzt.

Übrigens kann man diese Funktionen T auch im allgemeinen Falle krummliniger Lichtstrahlen zur Untersuchung der optischen Abbildung verwenden, und wenn Hamilton auch gewifs zu ihrer Einführung durch die optische Abbildung mit geradlinigen Lichtstrahlen gekommen ist, so gibt er doch in seiner Darstellung vorab ihre Verwendung für den allgemeinen Fall beliebiger nichthomogener und nichtisotroper Mittel. In diesem Falle hat man keine Strahlenabbildung eines Raumes in einen anderen, sondern mufs die Überführung eines einzelnen Wellenelements $\sigma, \tau, v; x, y, z$ in ein anderes betrachten. Die Funktion T beherrscht diese Transformation genau so, wie vorhin die charakteristische Funktion V. Während in dieser die Koordinaten der beiden Punkte der Elemente x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 als unabhängige Veränderliche auftraten, haben wir in T je die drei anderen Gröfsen σ_1, τ_1, v_1 bezw. σ_2, τ_2, v_2 der beiden Wellenelemente als unabhängige Veränderliche. In gleicher Weise, wie wir vorhin durch Differentiation von

V nach den x, y, z die σ, τ, v erhielten, erhalten wir jetzt durch Differentiation von T nach den σ, τ, v die x, y, z gemäfs den Formeln

(36 a) $$x_2 = \frac{\partial T}{\partial \sigma_2}, \quad y_2 = \frac{\partial T}{\partial \tau_2}, \quad z_2 = \frac{\partial T}{\partial v_2},$$

bezw.

(36 b) $$x_1 = -\frac{\partial T}{\partial \sigma_1}, \quad y_1 = -\frac{\partial T}{\partial \tau_1}, \quad z_1 = -\frac{\partial T}{\partial v_1}.$$

Wie für die Funktion V in jedem der beiden Begrenzungspunkte des Lichtwegs je eine partielle Differentialgleichung (23 a) bezw. (23 b) bestand, so mufs offenbar auch die Funktion T für σ_2, τ_2, v_2 der partiellen Differentialgleichung

(37 a) $$\Omega_2\left(\sigma_2, \tau_2, v_2, \frac{\partial T}{\partial \sigma_2}, \frac{\partial T}{\partial \tau_2}, \frac{\partial T}{\partial v_2}\right) = 0$$

bezw. für σ_1, τ_1, v_1 der partiellen Differentialgleichung

(37 b) $$\Omega_1\left(\sigma_1, \tau_1, v_1, -\frac{\partial T}{\partial \sigma_1}, -\frac{\partial T}{\partial \tau_1}, -\frac{\partial T}{\partial v_1}\right) = 0$$

genügen. Im Falle eines homogenen Mittels aber ist Ω von x, y, z unabhängig, daher geht dann in die Beziehungen (37 a) und (37 b) die Funktion T gar nicht ein. T ist in diesem Falle nicht an partielle Differentialgleichungen gebunden, dafür bestehen aber zwischen den unabhängigen Veränderlichen σ, τ, v zwei Beziehungen, nämlich

(38) $$\Omega_2(\sigma_2, \tau_2, v_2) = 0 \quad \text{bezw.} \quad \Omega_1(\sigma_1, \tau_1, v_1) = 0.$$

Die unabhängigen Veränderlichen in T sind jetzt nicht mehr willkürlich veränderlich, daher erhält man an Stelle von (36 a) und (36 b) die Beziehungen

(39 a) $$\frac{\frac{\partial T}{\partial \sigma_2} - x_2}{\frac{\partial \Omega_2}{\partial \sigma_2}} = \frac{\frac{\partial T}{\partial \tau_2} - y_2}{\frac{\partial \Omega_2}{\partial \tau_2}} = \frac{\frac{\partial T}{\partial v_2} - z_2}{\frac{\partial \Omega_2}{\partial v_2}}$$

bezw.

(39 b) $$\frac{\frac{\partial T}{\partial \sigma_1} + x_1}{\frac{\partial \Omega_1}{\partial \sigma_1}} = \frac{\frac{\partial T}{\partial \tau_1} + y_1}{\frac{\partial \Omega_1}{\partial \tau_1}} = \frac{\frac{\partial T}{\partial v_1} + z_1}{\frac{\partial \Omega_1}{\partial v_1}}$$

die in x_2, y_2, z_2 bezw. x_1, y_1, z_1 linear sind. Sie stellen die Gleichungen der beiden Lichtstrahlen vor, die durch die optische Abbildung einander zugeordnet sind. Hamilton hebt hervor, dafs man bei dieser Spezialisierung die Funktion T in analoger Weise wie im zweiten Nachtrag zur Bestimmung der allgemeinen Integrale jeder der partiellen Differentialgleichungen für V verwenden könnte.

Die Funktion T ist das zweckmäfsige analytische Werkzeug, um die Strahlenabbildung zweier Räume zu beherrschen, und man wird daher immer von ihr ausgehen, wenn man die allgemeinen Eigenschaften solcher Strahlenabbildungen, wie sie im Falle gewöhnlicher optischer Mittel entstehen, untersuchen will. In der praktischen Anwendung auf die Behandlung der optischen Instrumente haben wir aber nun immer die Besonderheit in der Beziehung zwischen Objektraum und Bildraum, dafs die Geraden des Objektraums, die von einem leuchtenden Punkte ausstrahlen, zu einer Einheit zusammenzufassen und so durch das optische Instrument hindurch zu verfolgen sind. Da wird es dann zweckmäfsig sein, die charakteristische Funktion $V(x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1)$ nur hinsichtlich der Koordinaten x_2, y_2, z_2 des Punktes im Bildraum der Legendreschen Transformation zu unterwerfen und so eine Funktion

$$W(\sigma_2, \tau_2, v_2; x_1, y_1, z_1) = x_2 \sigma_2 + y_2 \tau_2 + z_2 v_2 - V \tag{40}$$

zu bilden, bei der man im Objektraum die Koordinaten des Punktes, im Bildraum aber die drei Bestimmungsstücke σ, τ, v des Elementes, bezw. im speziellen der Richtung des Strahls, als unabhängige Veränderliche hat. Auch diese Funktion W hat natürlich nicht nur für den Fall geradliniger Lichtstrahlen, sondern allgemein ihre Bedeutung. Im allgemeinen Fall erhält man aus ihr die Transformationsformel für die Überführung eines Wellenelementes in ein anderes in der Gestalt

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \sigma_1, \quad \frac{\partial W}{\partial y_1} = \tau_1, \quad \frac{\partial W}{\partial z_1} = v_1 \tag{41 a}$$

und

$$x_2 = \frac{\partial W}{\partial \sigma_2}, \quad y_2 = \frac{\partial W}{\partial \tau_2}, \quad z_2 = \frac{\partial W}{\partial v_2} \tag{41 b}$$

und man erkennt unmittelbar, dafs im allgemeinen Falle die partiellen Differentialgleichungen

$$\Omega_2\left(\sigma_2, \tau_2, v_2, \frac{\partial W}{\partial \sigma_2}, \frac{\partial W}{\partial \tau_2}, \frac{\partial W}{\partial v_2}\right) = 0 \tag{42 a}$$

bezw.

$$\Omega_1\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \frac{\partial W}{\partial z_2}, x_1, y_1, z_1\right) = 0 \tag{42 b}$$

für die Funktion W bestehen müssen. Ebenso sieht man, dafs man in

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = c_1, \quad \frac{\partial W}{\partial y_1} = c_2, \quad \frac{\partial W}{\partial z_1} = c_3 \tag{43}$$

zusammen mit (41 b) eine Darstellung der endlichen Gleichungen der Lichtstrahlen hat, die der Darstellung (34) entspricht.

Ihre eigentliche Bedeutung für die optische Abbildung gewinnt die Funktion W natürlich aber erst dann, wenn die Lichtstrahlen im Bildraume gerade Linien sind. Da tritt an die Stelle der partiellen Differentialgleichung (42 b) die endliche Gleichung

$$\Omega_2(\sigma_2, \tau_2, v_2) = 0 \tag{44}$$

und daher treten an die Stelle der zweiten Gruppe (41 b) der Transformationsformeln eines Wellenelementes die Gleichungen

$$\frac{x_2 - \dfrac{\partial W}{\partial \sigma_2}}{\dfrac{\partial \Omega_2}{\partial \sigma_2}} = \frac{y_2 - \dfrac{\partial W}{\partial \tau_2}}{\dfrac{\partial \Omega_2}{\partial \tau_2}} = \frac{z_2 - \dfrac{\partial W}{\partial v_2}}{\dfrac{\partial \Omega_2}{\partial v_2}}, \tag{45}$$

die in x_2, y_2, z_2 linear sind und also die beiden Gleichungen eines einzelnen geradlinigen Lichtstrahls im Bildraum vorstellen. Damit ist auch die Funktion W, die Hamilton schon im ersten Nachtrag benutzt hat, in den neuen Gedankenkreis der optischen Abbildung zweier Räume aufeinander eingeordnet. Natürlich würde man auch in der Art des zweiten Nachtrags die Integration der im Bildraum gültigen partiellen Differentialgleichung (23 a) für V mit Hilfe der willkürlich gewählten Funktion W ausführen können.

Für die Bilderzeugung durch optische Instrumente ist der Schnitt von Nachbarstrahlen von grundlegender Bedeutung, da die optische Abbildung in der Praxis durch dünne Bündel erfolgt. Für die analytische Beherrschung der geometrischen Beziehungen benachbarter Strahlen ist nun die Kenntnis der zweiten Ableitungen einer dieser Funktionen V, T oder W erforderlich. Hamilton verwendet denn auch viele Seiten, um Formeln abzuleiten, durch die man von den zweiten Ableitungen der einen der drei Funktionen, zu denen einer der beiden anderen übergehen kann. Entsprechend seiner praktischen Bedeutung wird besonders eingehend natürlich der Fall behandelt, daſs die Lichtstrahlen geradlinig und also die Veränderlichen σ, τ, v nicht unabhängig voneinander sind. Ebenso wie im ersten Nachtrag spielt dabei die Frage eine wichtige Rolle, wie sich die drei Funktionen und ihre Ableitungen erster und zweiter Ordnung längs der geradlinigen Stücke der Strahlen und an ihren Knickstellen auf den brechenden oder spiegelnden Flächen ändern. Wir brauchen darauf indessen nicht näher einzugehen, da die Verhältnisse durchaus die gleichen bleiben, die wir oben im ersten Nachtrag geschildert haben.