NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMVS X.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE AD ANNVM MDCCXCII.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCXCVII.

Cum approbatione Academiae Imperialis Scientiarum

Imprimatur

PAVL BACVNIN.

Iohannes Albertus Euler.

Secretarius perpetuus.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCXCII.

NOVA

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS. TOMVS X.

Cum XIII. Tabulis aeri incisis.

MATHEMATICA ET PHYSICO-MATHEMATICA.

PHYSICA.

P. S.

ASTRONOMICA ET METEOROLOGICA.

PE-

HISTOI-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
ANNÉE MDCCXCII.

L'Académie a fait en cette année diverſes acquiſitions très conſidérables en pluſieurs ſortes de pieces rares & curieuſes, dont ſon muſée a été enrichi: & que nous allons indiquer en peu de mots.

I.) Un cabinet de curioſités en tout genre de près de 400 pieces, qui jusques là avoit été dépoſé au Chateau d'Oranienbaum, & que Sa Majeſté l'Impératrice avoit ordonné très gracieuſement de faire transporter au Muſée académique.

II.) Une collection de minéraux de Sibérie contenant 1860 pieces, que l'Académie a achétée pour completter ſon cabinet.

III.) Une autre Collection de 760 minéraux indigènes & étrangers, dont M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski s'étoit ſervi dans ſes leçons publiques, & dont il a fait préſent à l'Académie. L'Académie en choiſit les plus beaux & les plus rares pour en enrichir ſon cabinet; du reſte elle fit un aſſortiment qui fut dépoſé à la Salle du Gymnaſe académique, où ſe donnent les leçons publiques. Enfin

IV.) Neuf médailles d'or frappées en mémoire des derniers évenémens remarquables dans le Regne de Sa Majeſté l'Impératrice. Ces médailles péſent enſemble 4 livres & 85 Solotniques.

Les autres acquiſitions moins conſidérables ſe trouvent indiquées ci-deſſous à l'article: Ouvrages préſentés à l'Académie. &c. Pag. 7.

Une ſanté délabrée & des maladies fréquentes n'ayant plus permis à M. le Conſeiller de Cour Socolof de continuer ſes travaux au laboratoire chymique, l'Académie l'en diſpenſa à ſa réquiſition, & chargea M. l'Adjoint Zacharef des fonctions d'un chymiſte auprès de ſon laboratoire. M. Socolof prit enfin ſa dimiſſion entiere pour aller s'établir dans une province plus méridionale de la Ruſſie, & l'Académie le plaça depuis au nombre de ſes aſſociés libres. Avant de partir il fit préſent de ſa petite collection de minéraux au cabinet du Gymnaſe académique, deſtiné à l'uſage des leçons publiques.

M. le Conſeiller de Collèges & Chevalier Pallas obtint vers la fin de l'année un congé de douze mois depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1793, pour voyager en Tau-

Tauride, où il fut chargé de quelques commiſſions, pour lesquelles Sa Majeſté lui conſerva tous ſes appointemens. Il s'engagea au reſte envers l'Académie de lui envoyer de ces contrées toutes les productions naturelles qu'il aura occaſion d'y cueillir, & de lui communiquer ſes découvertes & obſervations ſur le païs, qu'il parcourrera.

Le 22 Septembre, anniverſaire de l'inſtitution de l'Ordre de St. Wolodimer, M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski fut décoré des marques de cet Ordre de la quatrieme claſſe.

L'Académie a publié dans le courant de cette année:

Le huitieme volume des annales du R. P. Nicon: Руское Лѣтопись по Никоновскому списку.

Le huitieme & le neuvieme volume de la collection des articles divers, qui ont été imprimés dans les différentes ſortes d'almanachs, que l'Académie a publié: Собранiе сочиненiй выбранныхъ изъ Мѣсяцослововъ на разные годы.

Le ſeptieme Tome des Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, qui comprend 31 mémoires de Mathématiques & de Phyſiques, précédés de l'hiſtoire de l'année 1789.

Outre pluſieurs ouvrages & traductions en ruſſe, deſtinées à éclairer le public & a étendre la ſphère des connoiſſances utiles & agréables.

Le 6 Septembre. Sa Majeſté l'Impératrice a ordonné de rayer du nombre des Académiciens étrangers, M. le Marquis de Condorcet; vû que ſa conduite envers ſon Souverain le rendoit indigne d'être aſſocié à l'Académie Impériale des Sciences. Il avoit été reçu en 1776, le 29 Décembre.

Le 18 Octobre. Mourut à Jevern dans ſa 83^{me} année M. Paul-Henri-Gerhard Möhring, Docteur en Médicine, Conſeiller & Médecin du corps de S. A. S. Mſgr. le Prince d'Anhalt-Zerbſt; Membre de l'Académie Impériale des curieux de la Nature. Il avoit été reçu au nombre des Aſſociés externes, le 19 Septembre 1780.

Le 12 Avril. l'Académie reçut au nombre des Aſſociés externes, M. Jean-Chrétien-Daniel Schreber, Docteur en Medécine & Préſident de l'Académie Impériale des curieux de la Nature.

Le 13 Août. Fut reçu au nombre des Correſpondans tîtrés M. Antoine Joſeph Cavanilles de Valence en Espagne, auteur de quelques ouvrages précieux de Botanique: & enfin

Le 3 Septembre. Pareillement au nombre des Correſpondans tîtrés, M. Guillaume Tooke, Profeſſeur en Théologie, Membre de la Société royale des Sciences de Londres, & ci-devant Paſteur de la factorie angloiſe à St. Pétersbourg.

OU-

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS, PRODUCTIONS DE LA NATURE ET DE L'ART, ANTIQUITÉS ET CURIOSITÉS, présentés ou communiqués à l'Académie, l'année 1792.

Le 9 Janvier. Madame la Princesse de Daschkaw, Dame d'Honneur de Sa Majesté l'Imperatrice, & de l'Ordre de Ste. Cathérine, Directrice de l'Académie, a envoyé de la part de M. Krestinin, Correspondant de l'Académie à Archangel, une ancienne Chronique de Novogorod, qui a été déposée à la Bibliothèque académique.

—— —— M. le Conseiller de Cour & Chevalier Euler, Secrétaire perpétuel des conférences académiques, a remis de la part de M. le Conseiller privé Formey à Berlin, le nouveau Programme des Prix proposés par l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse pour 1792 & 1793.

—— —— Le même a communiqué des lettres de Mrs. le Conseiller de Cour Lichtenberg à Göttingue & le Docteur Koch à Osnabrüg, d'après lesquelles l'Académie a recommandé ce dernier à la Société des Scrutateurs de la Nature de Dantzig pour la place d'Astronome, qui y est vacante.

Le 16 Janvier. Madame la Princesse de Daschkaw a communiqué de la part de M. Churchmann: Proposals for

for publishing by Iohn Churchman, author of the magnettc Altas a differtation on gravitation containing coniectures concerning the caufe of the feveral kinds of attraction.

Le 19 Janvier. Le Secrétaire a remis une lettre de remerciment de la part de la Société Royale des Sciences de Londres pour l'envoi que lui à fait l'Académie du dernier volume des nouveaux Actes & du mémoire couronné fur les fonctions arbitraires.

—— —— Madame la Princeffe de Dafchkaw a envoyé de la part de l'auteur: Abhandlung über die Entbindungs-Kunft verfaft zum Nutzen des Ruffifchen Reichs, von Jofeph Freyherrn von Mohrenheim. I. Band. En grand folio avec beaucoup de figures.

—— —— La même a communiqué une lettre que lui a adreffée M Barth, Profeffeur de Mathématiques à Ollmütz, qui mande avoir non feulement adapté un clavier à l'inftrument nommé Harmonica, mais l'avoir encore perfectionné à un degré fort éminent.

Le 30 Janvier. Madame la Princeffe de Dafchkaw a envoyé pour le Mufée académique, une collection de quelques productions marines.

—— —— La même a fait remettre de la part de l'Académie Royale des Sciences de Paris, pour être dépofé à la Bibliothéque académique: Expofé des opérations faites en France en 1787, pour la jonction des obfervatoires de Paris & de Greenwich, par Mrs. Caffini, Méchain & le Gendre. Un volume in 4to.

Le

Le 6 Février. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé quinze pieces de minéraux avec un catalogue, dont elle a fait présent au cabinet académique.

—— —— Le Secrétaire a lu une lettre de M. de la Lande, qui mande diverses nouvelles littéraires, concernant surtout ses propres occupations, & qui annonce que l'impression de ses Ephémerides astronomiques jusqu'à 1800 vient d'être achévée.

Le 9 Février. Mad. la Princesse de Daschkaw a communiqué une lettre de M. le Conseiller Wehrs à Hannovre, adressée à Sa Majesté l'Impératrice, qui offre en vente pour quelques milliers de roubles divers instrumens de navigation pour déterminer la longitude en mer, inventés en 175 , par le defunt Pasteur de Brincke à Twülbstädt dans le Duché de Brounswig & executés sous sa direction par le Méchanicien Walkerling. Mad. la Princesse en ayant demandé l'avis de la Conférence académique, celle-ci lui a fait répondre, que vraisemblablement ni l'inventeur, ni l'executeur aient bien compris le fameux Problème de la longitude, en voulant le résoudre par le moyen de semblables instrumens; que d'ailleurs ces instrumens ayant, suivant la lettre de M. Wehrs, été envoyé encore du vivant de l'inventeur au Bureau des Longitudes à l'Amirauté de Londres, il n'est pas probable que ce corps respectable les eut renvoyé comme il l'a fait, s'ils avoient valu quelque chose.

—— —— Le Secrétaire a présenté & lu un rapport de M. le Translateur Jährig, daté de Kiachta sur les frontieres de la Chine, qui envoie ses élémens des langues Mongoles & Oehlötes, qui feront fuivis de quelques obfervations fur la langue Tübäte.

—— —— M l'Adjoint Lowitz a remis pour la Bibliotheque la traduction ruffe de fa méthode de raffiner le nître par le moyen des charbons, imprimée à la Typographie de l'Ecole des Mines: Опыты о чищенїя грубой селитры угольями.

—— —— Le même a expofé du fel commun cryftallifé par le froid: ce qui jusqu'ici n'avoit pas encore été obfervé. Les cryftaux en different de ceux qu'on obtient par la méthode ordinaire, en ce qu'ils ont la figure d'un exagone régulier & qu'ils fe fondent à une temperature de 140 degrés de Délisle, qui répondent à $5\frac{1}{3}$ degres de Réaumur.

Le 23 Février. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Prof. Arbogaft qui remercie l'Académie de l'avoir reçu au nombre de fes Correfpondans.

—— —— M. l'Académicien Fufs a lu une lettre de M. le Baron de Paccaffi, qui lui communique la folution de quelques problèmes d'Aftronomie.

—— —— M. l'Académicien Wolff a expofé deux enfans gémaux joints par le bas ventre, qu'il a reçu de M. le Confeiller d'Etat Baron d'Afch, & dont il a fait préfent au Mufée académique.

Le 5 Mars. Le Secrétaire a remis de la part de M. Fontenai une feuille imprimée, contenant les obfervations météorologiques faites à l'Obfervatoire Royal de Paris en Fé-

Février 1792. L'Académie en a reçu depuis la continuation.

Le 12 Mars. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Prof. Bode, Académicien de Berlin, qui communique plusieurs nouvelles astronomiques & littéraires, & qui envoie ses Éphemerides astronomiques pour l'année 1794; Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1794 nebst einer Sammlung der neuesten in die astronomischen Wissenschafften einschlagenden Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten. Berlin 1792.

—— —— Le même a présenté de la part de M. le Brigadier, Chevalier de Lorgna le 5[e] Tome des mémoires de la Société Italienne imprimé à Vérone en 1790: Memorie di Matematica & Fisica della Societa italiana.

Le 15 Mars. Mad. la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de l'Université Impériale de Moscou: Catalogus lectionum et exercitationum publicarum in Universitate Caesarea Mosquensi et in utroque eius Gymnasio, a 17 Augusti anni MDCCXCI ad 26 Iunii anni MDCCXCII habendarum.

Le 26 Mars. Mad. la Princesse de Daschkaw a envoyé pour la Bibliotheque académique un exemplaire du Traité de la Paix conclue avec la Porte ottomanne à Yassi le 29 Décembre 1791.

—— —— M. l'Académicien Géorgi a présenté de la part de M. le Conseiller de Cour Hermann, une caisse contenant la collection complette de toutes les espèces de roches de l'Oural avec un catalogue raisonné.

Le 12 Avril. Mad. la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de S. E. Mr. le Prince Démetrius de Golitzin, résident à la Haye, une lettre imprimée de M. van Marum à M Bertholet à Paris, contenant la déscription d'un gazomètre nouveau & différent de celui de M. M. Lavoisier & Meunier, avec un appareil pour faire avec plus de facilité & très peu de fraix l'expérience de la composition de l'eau par la combustion continuelle, avec plusieurs planches de figures.

—— —— La même a communiqué une lettre que lui avoit addressée de Berlin S. E. Mr. le Comte de Hertzberg, qui envoie pour la Bibliotheque académique le nouveau volume des mémoires de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse, depuis Août 1786 jusqu'à la fin de 1787.

—— —— M. l'Adjoint Sewergyne a remis pour le cabinet de l'Académie, des Grénats & Schoerls verds, trouvés par M. le Conseiller de Cour Laxmann, près de la source du Viluï à l'embouchure de l'Achtaragda.

Le 19 Avril. M. le Conseiller d'État, Baron d'Asch a envoyé pour la Bibliotheque académique: Friderici Stephani M. D. Enumeratio Stirpium agri mosquensis. Mosquae 1792.

Le

Le même 19 Avril. M. l'Adjoint Lowitz a lu une lettre de M. le Conseiller des Mines Bucholtz à Weimar, qui mande avoir purifié suivant la méthode de M. Lowitz, les eaux croupies ordinaires aussi bien que minérales, par le moyen des charbons de bois réduits en poudre, & avoir de même repété avec un égal succès ses autres expériences sur cette propriété admirable des charbons de purifier & raffiner diverses matieres gatées ou impregnées d'impuretés.

Le 23 Avril. Mad. la Princesse de Daschkaw a fait exposer diverses pieces de minéraux, avec les ouvrages indiqués ci-après, que l'auteur M. le Pere Hermenegilde Pini, Barnabite & Professeur d'Histoire naturelle à Milan lui a envoyés pour être présentés à l'Académie & déposés dans sa Bibliotheque.

Hermegildi Pini, de venarum metallicarum excoctione Vol. I. II. Mediol. 1779. 4to.

Élementi di Storia naturale di N. G. Leske, tradotti da Ermeneg. Pini. Vol. I. II. Milano 1785. 8^{v}.

Sulle rivoluzioni del Globo terrestre provenienti dall' azione dell' acque &c. Memoria geologica di E. Pini 4to.

Saggio di una nuova Teoria della Terra di Erm. Pini 4to.

Della maniera di preparare la Torba e di usarla a Fuoco pire vantaggiose dell' ordinario-Milano 1785. 8vo.

Mémoire sur des nouvelles cristallisations de Feldspath & autres singularités renfermées dans les granites des environs de Baveno, par E. Pini. Milan 1779. 8vo.

Memoria mineralogica sulla montagna e sui contorni di S. Gottardo, di E. Pini. Milano 1783. 8vo.

Di alcuni fossili singolari della Lombardia austriaca e di altre parti dell' Italia, di E. Pini. Milano 1790.

—— —— Le Conseiller de Cour Ozeretskovski a donné à l'Académie une collection de plus de cinq cent minéraux, dont elle a choisi les pieces les plus rares tant étrangeres qu'indigènes, pour être deposées dans son cabinet minéralogique. Les autres ont été placées à l'auditoire du Gymnase académique, pour servir dans les leçons de Minéralogie qu'on y donne. Pag. 4.

Le 30 Avril. M. l'Adjoint Lowitz a communiqué un rapport très favorable, qu'a fait S. E. Mr. le Géneral-Major & Chevalier de Bock, du succès heureux qu'a eu à l'armée, dans la derniere campagne, la méthode de rendre potable les eaux croupies, par le moyen des charbons de bois pilés.

Le 28 Mai. Mad. la Princesse de Daschkaw a fait notifier, que Sa Majesté l'Impératrice a eu la grace d'ordonner, que le beau cabinet de curiosités qui se trouvoit au Chateau Impérial d'Oranienbaum, soit transporté & deposé au Musée académique. Pag. 4.

Le 31 Mai. Le Secrétaire a communiqué une lettre de M. le Conseiller de Cour Laxmann, qui envoie pour le le cabinet académique un Spath calcaire avec des cryſtaux de Glimmer & de Schörl qu'il a découverts ſur la chaine des hautes montagnes, au bout méridional du lac Baikal.

Le même 31. Mai. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Chirurgien Major Fries à Ouſtiug véliqui, qui envoie un traité manuſcript: Unterſchiedliche die Naturgeſchichte, Oekonomie, Statistik betreffende Artikel zur Kenntniſs der Gegend und des Clima von Uſtiug weliki, der Ruſſiſch-Kayſerlichen Academie der Wiſſenſchaften und der freyen oekonomiſchen Geſellſchaft, zugeeignet: Studium rebus adverſis perfugium ac ſolatium praebent.

Le 4 Juin. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Prof. Kolreif dix feuilles imprimées qui repréſentent les vents obſevés chaque jour à Travemünde près de Lubec pendant dix années conſécutives 1781 — 1790 incluſivement.

Le 11 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann à Irkutzk, qui envoie pour le cabinet académique un morceau de Quartz des environs de Selenginsk, parſémé de Molybdène lamelleux, flexible & reluiſant, compoſé de phlogiſton & d'acide aëreux.

Le 14 Juin. Le Secrétaire a préſenté: I.) de la part de la Société Royale des Sciences de Göttingen: Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingenſis. Vol. IX. ad A. 1787 et 1788. Vol. X. ad A. 1789 & 1790. Et II) de la part de l'auteur, M. le Conſeiller de Cour Käſtner à Göttingen: Geometriſche Auffätze I und II Theil.

Le

Le 5 Juillet. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté de la part de M. le Conſeiller de Colleges & Docteur Samoilovitſch, pour être dépoſé à la Bibliotheque académique, deux volumes in 8^{vo}. I.) Mémoire ſur la peſte qui en 1771 ravagea l'Empire de Ruſſie, ſurtout Moſcou la capitale, dédié à Sa Majeſté l'Impératrice. Paris 1783. II.) Opuſcules ſur la peſte qui en 1771 ravagea Moscou, avec un Discours aux éléves des Hopitaux de l'empire de Ruſſie.

—— —— Le Sécretaire a lu une lettre de M. le Grand-Baillif Royal & Docteur Jean Jerome Schröter à Lilienthal près de Bremen, qui communique les diverſes découvertes nouvelles, qu'il a faites ſur l'atmoſphère & le crepuſcule de la Lune & de Venus, & qui envoye en manuſcript: Vorläufige Anzeige einiger aſtronomiſchen Neuigkeiten.

Le 9 Juillet. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie Américaine des Arts & des Sciences à Boſton: An Eulogy on the honourable James Bowdoin Esq. L. L. D. late Preſident of the American Academy of arts and ſciences who died at Boſton. Novembre 6. A. D. 1790. by Joh. Lowell. 4^{to}. envoyé par M. Eliphalet Pearun, Secrétaire de la correſpondance de la dite Académie.

Le 13 Août. Le Secrétaire a lu une lettre addreſſée à Sa Majeſté l'Impératrice, par M. Antoine Joſeph Cavanilles de Valence en Eſpagne, qui met à ſes pieds les ouvrages de Botanique ſuivans pour être préſentés à Son Académie des Sciences.

I.) Ant. Joſephi Cavanilles Icones et deſcriptiones plantarum quae aut ſponte in Hiſpania creſcunt aut in hortis

hortis hospitantur, fol. Vol. I. Madriti 1791. II.) Monadelphiae Classis. Dissertationes decem. 4^{to}. Madriti 1790. En trois volumes.

Le 20 Août. Le Secrétaire a lu une lettre de S. E. Mr. le Prince Demétrius de Golitzin, datée de la Haye, qui communique ses remarques sur les gazomètres de Mrs. van Marum & Lavoisier; (voyez le 12 Avril.) ayant assisté aux essais qui en ont été faits pour produire de l'eau par la combustion des airs, & qui envoie en même temps:

I.) De la part de l'auteur: Mémoires sur les grandes gelées & leurs éffets, où l'on éssaye de déterminer ce qu'il faut croire de leurs retours périodiques & de la gradation en plus ou en moins du froid de notre globe. Par Mr. l'Abbé Mann, Chanoine de l'église de Notre Dame à Courtray & Secrétaire perpétuel de l'Académie Impériale & Royale des Sciences & Belles-Lettres de Bruxelles. Imprimé in 8^{vo}.

II.) Seconde lettre de M. van Marum à M. Bertholet, contenant la déscription d'un gazomètre très simple & d'un appareil fort simple, pour faire à peu de fraix l'expérience de la composition de l'eau par combustion continuelle.

—— —— Le Secrétaire a remis de la part de M. le Conseiller Privé Formey à Berlin:

I.) Programme pour le Prix extraordinaire de la classe de Physique de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse.

II.) Gazette littéraire de Berlin, ou le Conservateur Avis au Public par M. Mayet, Directeur des fabriques de S. M. le Roi de Prusse.

Le 27 Août. Le Secrétaire a remis pour la Bibliotheque: Mathematical Memoirs respecting a varietes of subjects. Vol. I & II. by John Landen F. R. S. Un volume in 4^{to} envoyé de Peterborough en Angleterre par Mll. Eleonore Landen, fille de l'auteur, qui marque que son pere lui avoit ordonné en mourant de faire parvenir cet ouvrage à l'Académie, pour lui être présenté.

Le 3 Septembre. M. le Conseiller de Cour Ozeretskovski a exposé une mole, qui s'est trouvée engendrée dans la matrice d'une vâche.

— — Le même a présenté de la part de M. Krestinin, citoien d'Archangel & correspondant de l'Académie Историческія примѣчанія о коммерческомъ кредитъ внѣшнія торговли, подѣлать прошедскаго вѣка россійскихъ купцовъ вообще, и подѣйствіямъ нынѣшняго стольтствія Архангело городскихъ купцовъ особливо. c. à d. Remarques historiques sur le crédit de commerce du negoce extérieur des marchands russes dans le siècle passé en général, & en particulier de celui des négocians de la ville d'Archangel du siècle présent. Cet écrit a été inséré dans le Journal académique qui se publie en russe: Новыя Ежемѣсячныя Сочиненія.

Le 6 Septembre. M. le Conseiller de Cour Inohodzof a remis pour être inséré dans le Calendrier historique de 1793: Описаніе городовъ велико-устюжской области съ ихъ округами: c. à d. Déscription des villes de la province de Velikoi-Oustiug & de ses cercles.

Le

Le 5 Sept. M. l'Adjoint Lowitz a fait voir une cryſtalliſation de l'Alcali fixe végétal cauſtique, qu'on avoit revoqué en doute, & que Mrs. Dehne & Bertholet avoient les premiers effectué à l'aide de l'eſprit de vin. M. Lowitz a réuſſi de le cryſtalliſer par une procédure directe ſans aucune addition. (Voyéz le Tome IX. des nouveaux Actes pag. 311.).

Le 10 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Conſeiller de Collèges & Docteur Samoilovitſch, pour être dépoſé à la Bibliotheque: Краткое Описаніе Микроскопическихъ изслѣдованій о существѣ яду язвеннаго. c. à d. Déſcriptio ſuccincte des recherches microſcopiques ſur la ſubſtance du venin peſtilentieux.

—— —— M. l'Adjoint Lowitz a expoſé encore une autre cryſtalliſation de l'Alcali fixe végétal cauſtique en pyramides. Celle qu'il avoit fait voir dans la derniere ſéance étoit lamelleuſe.

—— —— Le Secrétaire a lu une lettre de M. Blondin, Secrétaire Interprète de la Bibliotheque Royale à Paris, qui envoie ſes ouvrages ſuivans.

I. Discours de l'Académie Royale de l'Hiſtoire au Roi, à l'occaſion de la naiſſance de l'Infant. Lû au Muſée de Paris & imprimé à Madrid en 1780.

II.) A new Grammar to teach french to Englishmen. London 1788. &

III.) Précis de la langue françoiſe honoré de la ſouſcription de leurs Majeſtés & de la famille Royale. Paris 1790.

Le 14 Septembre. M. le Confeiller de Cour Ozeretskovski a préfenté pour être imprimé dans le Calendrier hiftorique de 1793. О желѣзоплавиленныхъ заводахъ Олонецкаго Намѣстничества, частнымъ людямъ принадлежащихъ c. à d. Des mines de fer du Gouvernement d'Olonez qui appartiennent à des particuliers.

—— —— Le Secrétaire a préfenté de la part de l'auteur, M. Théophile de la Tour d'Auvergne Corret, Capitaine d'Infantérie & Chevalier des ordres militaires de St. Louïs & de Charles III. deux exemplaires de fes nouvelles recherches fur la langue, l'origine & les antiquités des Brétons, pour fervir à l'hiftoire de ce peuple. 8vo à Bayonne 1792. Un de ces exemplaires a été remis à l'Académie Ruffe.

—— —— Le même a remis I.) Programme publié par la Société hollandoife des Sciences établie à Haarlem pour l'anne 1792.

II.) Un avis du libraire Nicolaï à Berlin: Joh. Karl Gottfried Jakobfons technologifches Wörterbuch V. VI. u. VII Theil, enthaltend die Supplemente und die Litteratur der Technologie, von Gottfried Erich Rofenthal.

Le 17 Septembre. Mad. la Princeffe de Dafchkaw a envoyé & fait préfent au Cabinet de Phyfique, une lampe d'émailleur portatile, apareillée à la fonte des métaux en petit, inventée & conftruite par le marechal ferrant Dalgreen établi à St. Pétersbourg, & approuvée par la Société libre économique, qui en a publié la déscription dans le IV Tome de fes mémoires allemands, intitulés: Auswahl öko-

ökonomifcher Abhandlungen. pag. 233. Cet artifte s'eft déja diftingué par diverfes inventions, & il fe trouve de lui dans la partie hiftorique du I^re^ volume des Actes pour l'année 1777, pag. 67. la déscription d'une échelle à feu, approuvée par l'Académie & honorée d'une médaille d'argent.

Le 17 Septembre. M. l'Adjoint Lowitz a fait voir trois diverfes cryftallifations de l'Acide tartareux, très remarquables & fort belles, qu'il a obtenues par un procédé dont il a enfuite rendu compte à l'Académie. La premiere cryftallifation lui a donné des parallelepipedes de $2\frac{1}{2}$ pouces de long & 8 lignes d'épaiffeur: la feconde a produit un gros cryftal quadrangulaire de $2\frac{1}{2}$ pouces de long, 1 pouce 8 lignes de large & $1\frac{1}{2}$ lignes d'épaiffeur. La troifieme a formé une grande & belle groupe de cryftaux lamelleux auffi minces que du papier à écrire d'$1\frac{1}{2}$ pouces de long & 11 lignes de large.

Le 27 Septembre. Le Secrétaire a préfenté de la part de M. Jährig, Translateur des langues mongoles établi à Kiachta fur les frontieres de la Chine, le titre & la préface de fes principes de la langue Tübäte: Anfangsgründe der tubätifchen Schrift- und Sprach-Lehre, avec leurs alphabets antiques & modernes & les copies de quelques infcriptions, qu'on trouve fur des monumens anciens, en deux feuilles. Pag. 9.

Le 8 Octobre. M. le Profeffeur Krafft a lu une lettre de M. le Confeiller de Cour Laxmann, datée de Yakoutzk', qui envoie les obfervations météorologiques qu'a faites fon fils à Gifchiga, dans le Gouvernement d'Irkoutzk', depuis le 1 Novembre 1790 jusqu'au 1 Novembre 1791.

 Le

Le 29 Octobre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de M. le Conseiller de Cour Ebell à Hannovre :

I.) Warum heitzen wir unsere Kirchen nicht?

II.) Von den Thüren und Eingängen der Kirchen, Opernhäusern, Komedien und Redouten-Sälen, Börsen und dergleichen öffentlichen Versammlungs-Plätzen.

III.) Von dem gefahrvollen Baden in Flüssen. Insérés dans le Magazin d'Hannover.

Le 12 Novembre. Le Secrétaire a communiqué: Programma publicato dell' Academia delle Sienze di Siene nella solenne adunanza del di 13 Settembre 1792.

Le 15 Novembre. M. l'Adjoint Sewergyne a présenté: Tableau d'une nouvelle Minéralogie, qui contient le plan d'un ouvrage de Minéralogie plus étendû, qu'il s'est proposé de publier en langue russe.

Le 19 Novembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conseiller de Cour Hermann, qui mande que la belle fabrique d'acier qu'il avoit fait construire à Pyschminsk', & dont il a été le Directeur, vient d'ètre entierement réduite en cendres, par une incendie dont on ignore l'origine; qu'il a été en conséquence obligé de demander sa dimission, & que sa santé étant d'ailleurs délabrée, il s'est proposé d'aller aux bains chauds pour se rétablir. Au reste il envoie à l'Académie, le journal d'un voyage fait aux frontieres de la Chine & écrit en russe par M. le Commissaire Pesteref, qui

qui a été inféré enfuite dans le Journal ruffe: новыя Ежемѣсячныя сочинения.

Le 22 Novembre. M. le Baron de Völckerfahm, Miniftre plénipotentiaire de la cour Électorale de Saxe a envoié de la part de l'auteur, M. le Confeiller Privé Baron de Wiefen à Dresden, une continuation de l'ouvrage de Mufique théorique & prâtique, préfentée à l'Académie le 20 Janvier 1791. (Partie hiftorique du Tom IX des nouveaux Actes pag. 16.) Cette continuation diftribuée en deux cahiers à pour tîtres:

I.) Verfuch eines formularifch und tabellarifch vorgebildeten Leitfadens in Bezug auf die Quelle des harmonifchen Tönungs Ausfluffes, ferner auf die mechanifch ausführbare Stimmungs-Uebertragung der fowohl Rational-Stimmung als auch ungleich fchwebenden fixen Temperatur-Stimmung auf der Orgel und dem Taften inftrument. Gravé en petit folio oblong.

II.) Ptolemäus und Zarlino, oder wahrer Gefchichts-Kreis der haltbaren Univerfalitäten der elementar Tonlehre, in den fowohl ältern als neueren Zeiten, vom Verfaffer des voraus gehenden Verfuchs: imprimé in 4.

Le 13 Décembre. M. l'Adjoint Lowitz a rapporté, avoir obtenu dans une temperature de 148 degrés de Délisle, par un mélange de neige & de l'alcali cauftique cryftallifé d'après fa méthode, un froid de 200 degrés qui a même duré quelque temps; ce qui eft d'autant plus remarquable que jusqu'ici les Phyficiens n'ont employé que des acides & principalement de l'esprit vitriolique fumant pour pro-

produire des grands froids artificiels. M. Lowitz ayant dans la suite repété cette expérience, a même réussi de produire dans une temperature de 140° de Délisle, un froid artificiel encore plus grand par le même mélange, savoir de 206 degrés de la même graduation. Un autre mélange de neige & de sel ammoniac ne lui donnoit qu'un froid de 170 degrés, & en y employant de l'esprit de nître fumant, le froid augmenta jusqu'au 190 degré.

Le Secrétaire a continué de présenter chaque mois les observations météorologiques, que M le Conseiller de Collèges & Chevalier Stritter a faites à Moscou pendant le cours de l'année.

SVPPLÉMENT.

RECHERCHES SUR LES ÉQUATIONS LINEAIRES DU SECOND DEGRÉ AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

Par
J. TREMBLEY.

Présenté à l'Académie le 9 Avril 1795.

J'ai donné dans un Mémoire présenté à l'Académie Impériale, & qui a paru dans les Actes pour l'année 1791, des considérations relatives à l'intégration des équations linéaires du premier degré aux différences partielles. La théorie des équations du second degré renferme des difficultés de différens genres. Elle suppose la résolution des équations du premier degré, & par conséquent est soumise aux mêmes difficultés. Elle renferme de plus des difficultés qui lui sont particulières, & ces difficultés sont considérables. Le but de ce Mémoire est principalement d'en faire l'exposition, d'indiquer les ressources que paraît fournir l'Analyse, & de rechercher les formes que doivent avoir les équations intégrables. A l'exception du grand Euler les Géomètres au génie desquels on doit les principales découvertes dans ce genre de calcul, & qui doivent nous servir de Maîtres dans cette carrière laborieuſe, ſe ſont bornés, pour l'ordinaire, à un petit nombre d'exemples, qui ne préſentaient pas toutes les difficultés dont la matière eſt ſusceptible. J'ai fait voir dans le Mémoire cité, qu'en traitant des exemples plus compoſés pour les équations du premier degré, on appercevait de nouveaux obſtacles, on était obligé de chercher dans l'Analyſe de nouvelles reſſources. Or il eſt toujours poſſible de traiter pour les équations du premier degré des exemples auſſi généraux que l'on voudra, parce qu'en prenant l'intégrale complette $z = \Pi F : \Phi$, Π & Φ étant des fonctions de x & y on peut toujours en tirer une équation aux différences partielles, qui ne contienne point de fonctions arbitraires, au lieu que pour les équations du ſecond degré, l'intégrale complette renfermant néceſſairement deux fonctions arbitraires, ſi l'on prend la forme $z = \Pi' F : \Phi' + \Pi'' f : \Phi''$, on ne peut en tirer généralement une équation aux différences partielles qui ne renferme point de fonctions arbitraires, mais il reſte des équations de condition, auxquelles il faut ſatisfaire, & qui ſuppoſent certaines relations entre les quantités Π' & Π'' & les quantités Φ' & Φ''. La recherche de ces relations doit donc précéder la formation des exemples généraux, & c'eſt un ſujet presque neuf qui demande à être développé avec ſoin.

§. 1. Soit l'équation générale $z = \Pi' F : \Phi' + \Pi'' f : \Phi''$, on aura

$$\left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\tfrac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) F : \Phi' + \Pi' \left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) F' : \Phi' + \left(\tfrac{\partial \Pi''}{\partial x}\right) f : \Phi'' + \Pi'' \left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) f' : \Phi'';$$

$$\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\tfrac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) F : \Phi' + \Pi' \left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) F' : \Phi' + \left(\tfrac{\partial \Pi''}{\partial y}\right) f : \Phi'' + \Pi'' \left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) f' : \Phi'';$$

∂∂z

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right) F:\Phi' + \left[2\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \Pi'\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x^2}\right)\right] F':\Phi'$$
$$+ \Pi'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 F'':\Phi' + \left(\frac{\partial\partial \Pi''}{\partial x^2}\right) f:\Phi''$$
$$+ \left[2\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + \Pi''\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right)\right] f':\Phi + \Pi''\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)^2 f'':\Phi'';$$

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y^2}\right) F:\Phi' + \left[2\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \Pi'\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial y^2}\right)\right] F':\Phi'$$
$$+ \Pi'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2 F'':\Phi' + \left(\frac{\partial\partial \Pi''}{\partial y^2}\right) f:\Phi''$$
$$+ \left[2\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \Pi''\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial y^2}\right)\right] f':\Phi'' + \Pi''\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)^2 f'':\Phi'';$$

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x\,\partial y}\right) F:\Phi'$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \Pi'\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\right] F':\Phi'$$
$$+ \Pi'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) F'':\Phi' + \left(\frac{\partial\partial \Pi''}{\partial x\,\partial y}\right) f:\Phi''$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \Pi''\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\right] f':\Phi''$$
$$+ \Pi''\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) f'':\Phi''.$$

(On a ici Π', Π'', Φ', Φ'', fonctions de x & y, $F:\Phi' = \frac{\partial . F:\Phi'}{\partial \Phi'}$, & ainsi des autres quantités).

Multipliant respectivement ces six équations par les quantités G, A, B, C, D, E, fonctions indéterminées de x & y, & égalant séparément à zéro les coëfficiens de $F:\Phi$, $F':\Phi$, $F'':\Phi$, $f:\Phi$, $f':\Phi$, $f'':\Phi$, on aura l'équation differentielle du second degré:

$$G z + A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}\right) = 0,$$

& les six équations de condition suivantes:

1. $C\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 + D\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2 + E\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = 0,$
2. $C\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + D\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)^2 + E\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) = 0,$

$$3.\ \Pi'\left[A\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+B\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+D\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+E\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left[\left(2C\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+E\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right]\right.$$
$$+\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\left[2D\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+E\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right]=0,$$

$$4.\ \Pi''\left[A\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+B\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+D\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial\partial y^2}\right)+E\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)\left[2C\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+E\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)\left[2D\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+E\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)\right]=0,$$

$$5.\ G\Pi'+A\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)+B\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)$$
$$+D\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)+E\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)=0,$$

$$6.\ G\Pi''+A\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)+B\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right)$$
$$+D\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)+E\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)=0.$$

Les deux premières équations donnent par l'élimination,

$$\frac{C}{D}=\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)},\quad \frac{E}{D}=-\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}-\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}.$$

§. 2. Au moyen de ces valeurs on a

$$\frac{2C}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)=-\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right];$$

$$\frac{2C}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)=\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right];$$

$$2\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=\frac{1}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right];$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right].$$

Substituant ces valeurs dans les équations 3 & 4, elles deviendront,

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)=$$
$$=\left[\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{A}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\Pi'}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)},\ (a)$$

$$-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)=$$
$$=\left[\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{A}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\Pi''}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}.\ (b)$$

Eliminant de ces deux équations les valeurs de $\frac{A}{D}$ & $\frac{B}{D}$, on a

$$\frac{B}{D}\ \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}\ \frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi''}+\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\ \frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}$$
$$\frac{+\frac{E}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\right]+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\qquad +\frac{E}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\right],}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}$$

$$\frac{A}{D} = -\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'} + \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}$$

$$+\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\Pi''} + \frac{C}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$\frac{+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)\right]}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right).}$$

§. 3. Les équations 5 & 6 donnent par leur combinaison,

$$\frac{A}{D}\left[\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right] + \frac{B}{D}\left[\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}\right]$$

$$+\frac{C}{D}\left[\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi''}\right] + \left[\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi''}\right]$$

$$+\frac{E}{D}\left[\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi''}\right] = 0;$$

Substituant dans cette équation les valeurs de A & de B, on a

$$\frac{\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'} - \dfrac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'^2} - \dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi''} + \dfrac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)^2}{\Pi''^2} + \dfrac{C}{D}\left[\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'} - \dfrac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'^2} - \dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi''} + \dfrac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)^2}{\Pi''^2}\right] + \dfrac{E}{D}\left[\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi'} - \dfrac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'^2} - \dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi''} + \dfrac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''^2}\right]}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}$$

+

$$\dfrac{\begin{array}{l} +\left[\frac{C}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^3}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\right]\right. \\ \left.+\frac{E}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)\right]\right]\left[\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right] \\ +\left[\frac{C}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\right]+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) \\ +\frac{E}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\right]\left[\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}\right] \end{array}}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}=0,$$

ou en faifant $\mu'=l\,\Pi'$, $\mu''=l\,\Pi''$, ce qui donne

$$\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}=\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right),\quad \frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)^2}{\Pi'^2}=\left(\frac{\partial\partial\mu'}{\partial x^2}\right),\quad \frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}=\left(\frac{\partial\mu'}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)^2}{\Pi'^2}=\left(\frac{\partial\partial\mu'}{\partial y^2}\right),\quad \frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'^2}=\left(\frac{\partial\partial\mu'}{\partial x\partial y}\right),$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}=\left(\frac{\partial\mu''}{\partial x}\right),\quad \frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi''}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)^2}{\Pi''^2}=\left(\frac{\partial\partial\mu''}{\partial x^2}\right),\quad \frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}=\left(\frac{\partial\mu''}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi''}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)^2}{\Pi''^2}=\left(\frac{\partial\partial\mu''}{\partial y^2}\right),\quad \frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi''}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''^2}=\left(\frac{\partial\partial\mu'}{\partial x\partial y}\right),$$

faifant de plus $v=\mu'-\mu''$, ce qui donne

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\mu''}{\partial x}\right),\quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\mu'}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\mu''}{\partial y}\right),$$

$$\left(\frac{\partial\partial v}{\partial x^2}\right)=\left(\frac{\partial\partial\mu'}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial\mu''}{\partial x^2}\right),\quad \left(\frac{\partial\partial v}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial\partial\mu'}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial\mu''}{\partial y^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial\partial v}{\partial x\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\partial\mu'}{\partial x\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\partial\mu''}{\partial x\partial y}\right),$$

on aura l'équation fuivante:

$$\left(\frac{\partial\partial v}{\partial y^2}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial v}{\partial x^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial v}{\partial x\partial y}\right)$$

$$+ \frac{\left[\frac{C}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\right] + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) + \left[\frac{E}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)\right]\right]\right]\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}$$

$$+ \frac{\frac{C}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\right] + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}$$

L'Intégrale de cette équation eſt $v = M:\Phi' + m:\Phi''$ (M & m déſignant des fonctions de Φ' & Φ'') $= l\,\Pi' - l\,\Pi'' = l\,\frac{\Pi'}{\Pi''}$, donc $\Pi' = \Pi'' e^{M:\Phi' + m:\Phi''}$. L'Intégrale complette ſera donc, $z = e^{M:\Phi' + m:\Phi''}\,\Pi''\,F:\Phi + \Pi'' f:\Phi'' = e^{m:\Phi''}\,\Pi''\,F:\Phi' + \Pi'' f:\Phi'' = e^{m:\Phi'}\,\Pi''\,F:\Phi' + e^{m:\Phi''}\,\Pi'' f:\Phi'' = e^{m:\Phi''}\,\Pi''\,(F:\Phi' + f:\Phi'')$. On peut donc, ſans nuire à la généralité de la ſolution, faire $\Pi' = \Pi''$, & l'intégrale ſera $z = \Pi'\,(F:\Phi' + f:\Phi'')$.

§. 4. On peut parvenir immédiatement à cette derniere concluſion, en conſidérant que les équations (a) & (b), du §. 2. ſont telles que la premiere devient la ſeconde en y mettant Φ' au lieu de Φ'', Φ'' au lieu de Φ'' & Π'' au lieu de Π'. Réciproquement la ſeconde devient la premiere en y mettant Φ' au lieu de Φ'', Φ' au lieu de Φ', & Π' au lieu de Π'', enſorte que la valeur de Π' doit être telle qu'elle devienne Π'', en y échangeant Φ' en Φ'' & Φ'' en Φ', & réciproquement la valeur de Π'' doit être telle qu'elle devienne Π', en y échangeant Φ' en Φ'' & Φ'' en Φ'. Soit donc $\Pi' = \alpha\,\Pi''$, α étant une fonction quelconque,

que, on aura $\Pi'' = \frac{\Pi'}{\alpha}$, & $\Pi' = \frac{\Pi''}{\alpha}$ en échangeant Φ' & Φ'' dans α, donc α doit devenir $\frac{1}{\alpha}$, en y échangeant Φ' & Φ'', donc $\alpha = \frac{r:\Phi''}{r:\Phi'}$, donc $\Pi' = \frac{r:\Phi''}{r:\Phi'}\Pi''$, & $\frac{\Pi' r:\Phi'}{r:\Phi''} = \Pi''$, donc l'intégrale

$$\begin{aligned} z &= \Pi' F:\Phi' + \Pi'' f:\Phi'' = \Pi' F:\Phi' + \frac{\Pi' r:\Phi'}{r:\Phi''} f:\Phi'', \\ &= \Pi' F:\Phi' + \Pi' r:\Phi' f:\Phi'' = \Pi' r:\Phi' F:\Phi' \\ &+ \Pi' r:\Phi' f:\Phi'' = \Pi'(F:\Phi' + f:\Phi'') \end{aligned}$$

comme ci-dessus. (On observera que $r:\Phi'$ est une fonction de Φ', & $r:\Phi''$ une fonction de Φ'').

§. 5. On a donc en faisant $\Pi' = \Pi''$,

$$\frac{B}{D} = -\frac{E}{D}\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}$$
$$+\frac{\frac{C}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\right] + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\right]}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)},$$

$$\frac{A}{D} = -\frac{C}{D}\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'} - \frac{E}{D}\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}$$
$$+\frac{\frac{C}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\right] + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)\right]}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)},$$

Nous aurons enfin

$$\frac{G}{D} = -\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'} - \frac{C}{D}\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'} - \frac{E}{D}\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi'}$$
$$-\frac{B}{D}\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'} - \frac{A}{D}\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}.$$

Prenant donc l'intégrale $z = \Pi'(F : \Phi' + f : \Phi'')$, on pourra former l'équation différentielle

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{A}{D}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{G}{D} z = 0,$$

puisque nous venons de déterminer les valeurs de $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{D}$ en Φ', Φ'', les valeurs de $\frac{B}{D}$, $\frac{A}{D}$ en Φ', Φ'', Π', $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{D}$, & celle de $\frac{G}{D}$ en Π', $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{A}{D}$.

§. 6. Traitons maintenant le Problème inverse, & supposant donnée l'équation différentielle, & connaissant par conséquent les valeurs $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{A}{D}$, $\frac{G}{D}$, voyons comment nous parviendrons à connaitre les valeurs de Φ', Φ'', Π'. On a par l'équation 1.

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2} + \frac{E}{D}\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)} + \frac{C}{D} = 0, \text{ donc}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)} = -\frac{E}{2D} \pm \sqrt{\left[-\frac{C}{D} + \frac{EE}{4D^2}\right]}.$$

L'équation 2 donne les mêmes valeurs pour $\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}$. Je puis donc faire

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)} = -\frac{E}{2D} + \frac{\sqrt{(EE - 4CD)}}{2D},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)} = -\frac{E}{2D} - \frac{\sqrt{(EE - 4CD)}}{2D},$$

ce qui me donne ces deux équations aux différences partielles du premier degré:

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \left[\frac{E - \sqrt{(EE - 4CD)}}{2D}\right]\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \left[\frac{E + \sqrt{(EE - 4CD)}}{2D}\right]\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) = 0.$$

L'intégrale de ces équations dépend, comme nous l'avons prouvé dans le Mémoire cité de l'intégration des équations ſuivantes aux différences ordinaires,

$$[E - \sqrt{(EE - 4CD)}]\,\partial y - 2D\,\partial x = 0,$$

$$[E + \sqrt{(EE - 4CD)}]\,\partial y - 2D\,\partial x = 0,$$

qu'on intégrera par les methodes des multiplicateurs, ou par celle des Intégrales particulieres. J'ai traité ſéparement de ces deux méthodes dans deux Mémoires préſentés à l'Académie des Sciences de Berlin en 1791 & 1793, & qui paraitront dans les Volumes de ces années. Ainſi la recherche de Φ' & Φ'' ne ſuppoſe que le calcul différentiel ordinaire.

§. 7. Les équations 3 & 4 donnent maintenant, en faiſant pour abréger

$$A' = \left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x^2}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right),$$

$$A'' = \left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right),$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) = \frac{A'\,\Pi'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)},$$

$$-\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) = \frac{A''\,\Pi'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}.$$

On tire de là les deux équations ſuivantes,

$$\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'} = \frac{A'\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + A''\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]^2},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'} = \frac{A'\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + A''\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]^2}.$$

Múltiplions la premiere équation par ∂x, la feconde par ∂y, ajoutant ces deux équations, & faifant pour abréger

$$\beta = \frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]^2}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)},$$

on aura $\frac{\partial \Pi'}{\Pi'} = \frac{A'\partial\Phi'' + A''\partial\Phi'}{\beta}$, donc $\Pi' = e^{\frac{\int(A'\partial\Phi'' + A''\partial\Phi')}{\beta}}$; (j'appelle toujours e le nombre dont le logarithme hyperbolique eft 1.)

§. 8. On a maintenant l'équation de condition

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x \partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + \frac{G}{D}\Pi' = 0.$$

Or en faifant pour abrêger,

$$a = \frac{A'\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + A''\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)}{\beta}, \quad b = \frac{A'\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + A''\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)}{\beta},$$

on a $\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) = a\Pi'$, $\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) = b\Pi'$, ce qui donne en différentiant,

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right) = a\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + \Pi'\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right) = \left[aa + \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\right]\Pi',$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y^2}\right) = b\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + \Pi'\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right) = \left[bb + \left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)\right]\Pi',$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x \partial y}\right) = a\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + \Pi'\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right) = \left[ab + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)\right]\Pi'$$

$$= b\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + \Pi'\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right) = \left[ab + \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)\right]\Pi'.$$

On

On conclud de là que $\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, ce qui eſt la même condition qu'exige l'intégrabilité de $\frac{A' \partial \Phi'' + A'' \partial \Phi'}{\beta}$. Subſtituant maintenant ces valeurs dans l'équation de condition, on a en diviſant par Π',

$$b\,b + \left(\frac{\partial b}{\partial y}\right) + \frac{E}{D}\left[a\,b + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)\right] + \frac{C}{D}\left[a\,a + \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\right] + \frac{B}{D}\,b + \frac{A}{D}\,a + \frac{G}{D} = 0.$$

§. 9. Soit l'équation $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) - \frac{x\,x}{y\,y}\cdot\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) = 0$, que traite M. Euler (Calc. Int. T. III. p. 246.). On a ici

$$\frac{C}{D} = -\frac{x\,x}{y\,y},\ \frac{E}{D} = 0,\ \frac{A}{D} = 0,\ \frac{B}{D} = 0,\ \frac{G}{D} = 0.$$

On a donc pour déterminer Φ' & Φ'' les équations

$$-\frac{2x\,\partial y}{y} - 2\,\partial x = 0,\ \frac{2x\,\partial y}{y} - \frac{2\,\partial x}{x} = 0,$$

ce qui donne $\Phi' = x\,y$, $\Phi'' = \frac{x}{y}$, donc

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) = y,\ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = x,\ \left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x^2}\right) = 0,\ \left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x\,\partial y}\right) = 1,$$
$$\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial y^2}\right) = 0,\ \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) = \frac{1}{y},\ \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) = -\frac{x}{y\,y},\ \left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x^2}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x\,\partial y}\right) = -\frac{1}{y\,y},\ \left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial y^2}\right) = \frac{2x}{y^3},$$

donc $\beta = \frac{4\,x\,x}{y\,y}$, $A' = 0$, $A'' = \frac{2x}{y^3}$, donc

$$\frac{A'\partial \Phi'' + A''\partial \Phi'}{\beta} = \frac{x\,\partial y + y\,\partial x}{2\,x\,y},\ \int\frac{(A'\partial \Phi'' + A''\partial \Phi')}{\beta} = l\,\sqrt{(x\,y)},$$
$$\Pi' = \sqrt{(x\,y)}.$$

On a $a = \frac{1}{2x}$, $b = \frac{1}{2y}$, ce qui ſatisfait aux équations de condition.

§. 10. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) - a\,a\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) + 2\,a\,b\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 2\,a\,a\,b\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

que

que traite M. Euler p. 255, on a

$$\frac{E}{D} = 0,\ \frac{C}{D} = -aa,\ \frac{B}{D} = 2ab,\ \frac{A}{D} = 2aab.$$

On a pour déterminer Φ' & Φ'' les équations $\partial x + a\partial y = 0$, $\partial x - a\partial y = 0$, ce qui donne $\Phi' = x + ay$, $\Phi'' = x - ay$. Donc

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) = a,\ \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = -a,\ \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\beta = 4aa,\ A' = 4aab,\ A'' = 0,\ \text{donc}$$

$$\frac{A'\partial\Phi'' + A''\partial\Phi'}{\beta} = b(\partial x - a\partial y),$$

$$\int\frac{(A''\partial\Phi' + A'\partial\Phi'')}{\beta} = bx - aby,\ \Pi' = e^{bx - aby},$$

cette valeur satisfait aux équation de condition.

§. 11. Si dans l'équation différentielle,

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{G}{D}z = 0,$$

l'on suppose constans les coëfficiens A, B, C, D, E, G, l'on aura en faisant

$$m = -\frac{E}{2D} + \frac{\sqrt{(EE - 4CD)}}{2D},\ n = -\frac{E}{2D} - \frac{\sqrt{(EE - 4CD)}}{2D},$$

les équations $\partial x + m\partial y = 0$, $\partial x + n\partial y = 0$, ce qui donne $\Phi' = x + my$, $\Phi'' = x + ny$, donc

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) = m,\ \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = n,\ \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) = 0,$$

donc $\beta = (m-n)^2 = \frac{EE - 4CD}{DD}$,

$$A' = \frac{B}{D}m + \frac{A}{D},\ A'' = \frac{B}{D}n + \frac{A}{D},$$

$$a = \frac{\frac{B}{D}(m+n) + \frac{2A}{D}}{(m-n)^2},\ b = \frac{\frac{A}{D}(m+n) + \frac{2B}{D}mn}{(m-n)^2} = \frac{2BC - AE}{EE - 4CD}.$$

L'é-

L'équation de condition donnera donc en reduisant,

$$AAD + BBC - ABE + G(EE - 4CD) = 0, \text{ donc}$$

$$\frac{\partial\Pi'}{\Pi'} = \frac{A'\partial\Phi'' + A''\partial\Phi'}{\beta} = a\,\partial x + b\,\partial y$$

$$= \frac{(2AD - BE)\partial x + (2BC - AE)\partial y}{EE - 4CD},\ \Pi' = e^{\frac{(2AD - BE)x + (2BC - AE)y}{EE - 4CD}}.$$

L'intégrale complette sera donc

$$z = e^{\frac{(2AD - BE)x + (2BC - AE)y}{EE - 4CD}}\,[F:(x+my) + f:(x+ny)].$$

§. 12. Cette formule ne peut servir dans le cas où $D = 0$; mais cherchons sa valeur lorsque $C = 0$, & nous aurons $m = 0$, $n = -\frac{E}{D}$. Nous aurons donc

$$z = e^{\frac{(2AD - BE)}{EE}x - \frac{A}{E}y}\,[F:x + f:(x - \tfrac{E}{D}y)] = e^{-\frac{A}{E}y}\,F:x$$
$$+ e^{\frac{(2AD - BE)}{EE}x - \frac{A}{E}y}\,f:(x - \tfrac{E}{D}y).$$

Pour avoir maintenant le cas de $D = 0$, il suffit de changer D en C, A en B, B en A, x en y, y en x, on aura $m = 0$, $n = -\frac{E}{C}$,

$$z = e^{-\frac{B}{E}x}F:y + e^{\frac{(2BC - AE)}{EE}y - \frac{B}{E}x}[f:(y - \tfrac{E}{C}x)] =$$
$$e^{-\frac{B}{E}x}F:y + e^{\frac{(2BC - AE)}{EE}y - \frac{B}{E}x}(f:x - \tfrac{C}{E}y) =$$
$$e^{-\frac{B}{E}x}F:y + e^{\frac{(2BC - AE)}{EE}y - \frac{B}{E}x + \frac{B}{E}x - \frac{BC}{EE}y}f:(x - \tfrac{C}{E}y) =$$
$$e^{-\frac{B}{E}x}F:y + e^{\frac{(BC - AE)}{EE}y}f:(x - \tfrac{C}{E}y).$$

§. 13. Si $D = C = 0$, on reprendra la premiere formule du §. prec. qu'on pourra mettre sous cette forme:

$z =$

$$z = e^{-\frac{A}{E}y} F : x + e^{\left(\frac{2AD - BE}{EE}\right)x - \frac{A}{E}y} f : \left(y - \frac{D}{E}x\right) =$$

(en y faifant $D = 0$)

$$e^{-\frac{A}{E}y} F : x + e^{-\frac{B}{E}x - \frac{A}{E}y} = e^{-\frac{A}{E}y} F : x + e^{-\frac{B}{E}x} f : y.$$

Ce font les réfultats que trouve M. de Condorcet qui traite cette équation. (Mém. de Paris, pour 1772. T. I. p. 23.).

§. 14. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{a}{z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{a b z}{x y} = 0.$$

On a $D = 0$, $E = 1$, $C = 0$, $B = \frac{b}{x}$, $A = \frac{a}{y}$, $G = \frac{ab}{xy}$. On trouve $\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) = 0$, ce qui donne $\Phi' = x$, $\Phi'' = y$. La quantité β deviendrait infinie, mais on la déterminera par l'équation de condition (1) qui donne à caufe de $a = \frac{b}{\beta x}$, $b = \frac{a}{\beta y}$,

$$\frac{a b}{\beta^2 x y} + \frac{2 a b}{\beta x y} + \frac{a b}{x y} = 0,$$

d'où l'on tire $\beta^2 + 2\beta + 1 = 0$, ou $\beta = -1$. Donc

$$\frac{\partial \Pi'}{\Pi'} = -\frac{a \partial y}{y} - \frac{b \partial x}{x}, \quad \Pi' = y^{-a} x^{-b},$$

& l'intégrale complette fera $z = y^{-a} z^{-b} (F : x + f : y)$.

§. 15. Si $\Phi' = \Phi''$, c'eft-à-dire fi la quantité Φ eft la même dans les deux fonctions arbitraires, la folution précédente ne peut fervir. Les équations 1. & 2. fe reduifent à la même, favoir:

$$C\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + D\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + E\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0.$$

Les équations 3. & 4. fe reduifent à la même,

$$A\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x^2}\right) + E\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

&

& les équations 5. & 6. subsistent les mêmes. On a par le §. 1.

$$\frac{E}{D} = - \frac{2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)}, \quad \frac{C}{D} = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2} = \frac{EE}{4DD}.$$

On a donc dans ce cas-là les équations suivantes:

1. $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{E}{2D}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0$,

2. $\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{EE}{4DD}\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x \partial y}\right) = 0$,

3. $\frac{G}{D}\Pi' + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + \frac{EE}{4DD}\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x \partial y}\right) = 0$,

4. $\frac{G}{D}\Pi'' + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right) + \frac{EE}{4DD}\left(\frac{\partial\partial \Pi''}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial \Pi''}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Pi''}{\partial x \partial y}\right) = 0$.

On a donc ici quatre équations & quatre quantités indéterminées, $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{E}{D}$, $\frac{G}{D}$, on pourra donc toujours de l'Intégrale supposée, $z = \Pi' F : \Phi + \Pi'' f : \Phi$, tirer une équation différentielle. Dans le §. 1., où l'Intégrale supposée était $z = \Pi' F : \Phi' + \Pi'' f : \Phi''$, on avait six équations & seulement cinq quantités indéterminées $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{D}$, $\frac{G}{D}$, ensorte qu'il restait une équation de condition à remplir. Mais nous avons vu que dans ce cas-là on pouvait faire $\Pi' = \Pi''$, & qu'ainsi il ne restait plus que cinq équations & cinq quantités indéterminées. Dans ce cas-ci les quantités Π' & Π'' ne peuvent plus être faites égales.

§. 16. Pour résoudre maintenant le Problème inverse, étant données les quantités $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{E}{D}$, $\frac{G}{D}$, on aura Φ

par l'équation 1, en intégrant l'équation aux différences ordinaires $\partial x - \frac{E}{2D} \partial y = 0$. L'équation 2 aura toujours lieu pour cette valeur de Φ, sans quoi les valeurs de Φ' & Φ'' ne feraient pas égales. La valeur de Π' se tirera de l'équation 3, & celle de Π'' de l'équation 4. Ces équations, étant du second degré, paraissent aussi difficiles à résoudre que l'équation proposée, étant de la même forme. Mais la forme de l'intégrale $z = \Pi' f : \Phi + \Pi'' f : \Phi$, fait voir que dans la recherche des valeurs de Π' & Π'' on peut faire Φ constant, & même nul, & tirer de là la valeur de y en x, & réciproquement, ce qui reduit les équations au différences partielles du second degré à des équations du second degré aux différences ordinaires. Nous allons en voir des exemples.

§. 17. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) + \frac{2x}{y}\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right) + \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) + \frac{b}{y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{bx}{y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{iz}{y^2} = 0,$$

que traite M. Cousin dans son Calcul intégral p. 646. J'ai ici $\frac{E}{D} = \frac{2x}{y}$, $\frac{D}{B} = \frac{b}{y}$, $\frac{A}{D} = \frac{bx}{y^2}$, $\frac{G}{D} = \frac{i}{y^2}$. L'équation $\partial y - \frac{E}{2D} \partial x = 0$, donne $\partial x - \frac{x}{y} \partial y = 0$, d'où l'on tire $\Phi = \frac{x}{y}$, ce qui donne $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \frac{1}{y}$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = -\frac{x}{yy}$, $\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x^2}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x \partial y}\right) = -\frac{1}{yy}$, $\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial y^2}\right) = \frac{2x}{y^3}$. L'équation z devient donc

$$\frac{bx}{y^3} - \frac{bx}{y^3} + \frac{2x}{y^3} - \frac{2x}{y^3} = 0,$$

c'est à dire identiquement nulle. Pour résoudre maintenant l'équation 3, qui est:

$$\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial y^2}\right) + \frac{2x}{y}\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x \partial y}\right) + \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x^2}\right) + \frac{b}{y}\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{bx}{y^2}\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + \frac{i \Pi'}{y^2} = 0,$$

je

je fais $\phi = o$, ce qui donne $x = o$, donc

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y^2}\right) + \frac{b}{y}\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + \frac{i\,\Pi'}{y^2} = o.$$

Pour intégrer cette équation aux différences ordinaires, je fais $\Pi' = y^\alpha$, ce qui donne $\frac{\partial \Pi'}{\partial y} = \alpha\, y^{\alpha - 1}$,

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y^2}\right) = \alpha\,(\alpha - 1)\, y^{\alpha - 2},$$

& l'équation devient $\alpha\,(\alpha - 1) + h\,\alpha + i = o$, donc

$$\alpha = \frac{1-b}{2} \pm \frac{\surd\,[(1-b)^2 - 4\,i]}{2}.$$

L'une de ces valeurs donne Π' & l'autre Π''. On aura donc

$$z = y^{\frac{1-b}{2} + \frac{\surd\,[(1-b)^2 - 4\,i]}{2}}\, F : \frac{x}{y} + y^{\frac{1-b}{2} - \frac{\surd\,[(1-b)^2 - 4\,i]}{2}}\, f : \frac{x}{y},$$

ou en multipliant la premiere fonction par

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1-b}{2} + \frac{\surd\,[(1-b)^2 - 4\,i}{2}}$$

& la seconde par

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1-b}{2} + \frac{\surd\,[(1-b)^2 - 4\,i}{2}},$$

$$z = x^{\frac{1-b}{2} + \frac{\surd\,[(1-b)^2 - 4\,i]}{2}}\, F : \frac{x}{y} + x^{\frac{1-b}{2} - \frac{\surd\,[(1-b)^2 - 4\,i]}{2}}\, f : \frac{x}{y}.$$

§. 18. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - \frac{2\,n\,x}{x\,x + y\,y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = o,$$

que traite M. Euler p. 208. Comme on a ici $D = o$, j'échange x en y, & réciproquement, & j'ai

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \frac{2\,n\,y}{x\,x + y\,y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = o,$$

& j'ai $E = C = A, = G = 0$. L'équation $2 C \partial y - E \partial x = 0$ devient donc $\partial x = 0$, ce qui donne $\Phi = x$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x^2}\right) = 0$; l'équation 2 devient identiquement nulle, & j'ai pour l'équation en Π,

$$\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right) - \frac{2 n y}{x x + y y} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) = 0.$$

Suppofant x conftant, j'ai $\frac{\partial \partial \Pi}{\partial \Pi} = \frac{2 n y \partial y}{x x + y y}$, donc $l \frac{\partial \Pi}{\partial y} = n l (x x + y y)$, $\Pi = \int (x x + y y)^n \partial y$. L'autre valeur eft $\Pi = 1$. On a donc en échangeant de nouveau x & y,

$$z = f : y + \int (x x + y y)^n \partial x . F : y.$$

§. 19. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) - \frac{2 y}{x} \left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right) + \frac{y y}{x x} \left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{y^2 - 2 x^2}{x^2 y}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{(x^2 - 2 y^2)}{x^3} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{2 x^4 + x^2 y^2 + 2 y^4}{x^4 y^2}\right) z = 0.$$

On a ici $\frac{E}{D} = - \frac{2 y}{x}$, $\frac{B}{D} = \frac{y^2 - 2 x^2}{x^2 y}$, $\frac{A}{D} = \frac{x^2 - 2 y^2}{x^3}$, $\frac{G}{D} = \frac{2 x^4 + x^2 y^2 + 2 y^4}{x^4 y^2}$. L'équation $\partial x - \frac{E}{2 D} \partial y = 0$, donne $\partial x + \frac{2 y \partial y}{x} = 0$, donc $\Phi = x^2 + y^2$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 2 x$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 2 y$, $\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x^2}\right) = 2$, $\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x \partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial y^2}\right) = 2$. L'équation 2 donne,

$$\frac{2 x^2 - 4 y^2}{x^2} + \frac{2 y^2 - 4 x^2}{x^2} + \frac{2 y^2}{x^2} + 2 = 0,$$

équation identiquement nulle. L'équation en Π donne maintenant

$$\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right) - \frac{2 y}{x} \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}\right) + \frac{y y}{x x} \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x^2}\right) + \frac{(y^2 - 2 x^2)}{x^2 y} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)$$
$$+ \left(\frac{x^2 - 2 y^2}{x^3}\right) \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + \frac{(2 x^4 + x^2 y^2 + 2 y^4)}{x^4 y^2} \Pi = 0.$$

Faifant $\Phi = 0$, j'en tire $x x = - y y$, $x = y \sqrt{-1}$, & j'aurai l'équation

$$\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right) + \frac{(y^2 - 2 x^2)}{x^2 y} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + \frac{(2 x^4 + x^2 y^2 + 2 y^4)}{x^4 y^2} \Pi = 0,$$

ou

ou en faisant les substitutions,

$$\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2} - \frac{3}{y}\frac{\partial\Pi}{\partial y} + \frac{3}{yy}\Pi = 0.$$

Pour intégrer cette équation, je fais $\Pi = y^\alpha$, ce qui donne $\frac{\partial\Pi}{\partial y} = \alpha y^{\alpha-1}$, $\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2} = \alpha(\alpha-1)y^{\alpha-2}$, & l'équation devient $\alpha(\alpha-1) - 3\alpha + 3 = 0$, donc $\alpha^2 = 4\alpha - 3$, $\alpha = 2 \pm 1$, $\alpha = 3$, $\alpha = 1$, ce qui donne ces deux valeurs $\Pi = y^3$, $\Pi = y$. En conservant maintenant x au lieu de y, on a l'équation

$$yy\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{x^2 - 2y^2}{x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \frac{(2x^4 + x^2y^2 + 2y^4)}{x^2y^2}\Pi = 0, \text{ ou}$$

$$xx\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) - 3x\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + 3\Pi = 0,$$

équation d'où l'on tire, comme ci-dessus, $\Pi = x^3$, $\Pi = x$. Les premieres donnent en substituant de nouveau la valeur de yy, $\Pi = -x^2y$, $\Pi = y$, & les secondes en substituant la valeur de x, $\Pi = -xy^2$, $\Pi = x$. Combinant les deux valeurs $-x^2y$, $-xy^2$, on en tire $\Pi = x^2y + xy^2$, $\Pi = x^2y - xy^2$, ce qui satisfait à l'équation génerale en Π. L'Intégrale complette est donc

$$z = xy(x+y)F:(x^2+y^2) + xy(x-y)f:(x^2+y^2).$$

On aurait procédé plus régulierèment, en supposant $x^2+y^2 = cc$, c étant une constante, d'où l'on aurait tiré $x^2 = cc - yy$. Cela posé l'équation

$$\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2} + \frac{(y^2 - 2x^2)}{x^2y}\frac{\partial\Pi}{\partial y} + \frac{(2x^4 + x^2y^2 + 2y^4)}{x^2y^2}\Pi = 0,$$

donne

$$\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2} + \frac{(3y^2 - 2cc)}{y(cc-yy)}\frac{\partial\Pi}{\partial y} + \frac{[2(cc-yy)^2 + (cc-yy)yy + 2y^4]}{(cc-yy)^2y^2}\Pi = 0.$$

Cherchant les intégrales particulieres de cette équation, on trouve par la méthode expliquée dans le Mémoire cité plus

plus haut, $\Pi = y(cc - yy) \pm y^2 \sqrt{(cc - yy)}$, ce qui donne, en remettant pour $cc - yy$ sa valeur xx, $\Pi = x^2 y \pm x y^2$, comme ci-dessus.

§. 20. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \frac{2x}{1+x}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) + \frac{x^2}{(1+x)^2}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$$
$$+ \frac{(2y - 2x + 6xy + xy^2 - 6x^2 + 10x^2 y - 9x^3 + 4x^3 y - 4x^4)}{(1+x)^2 (4x^2 y + 2xy + x^2 - y^2)}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{(2x^2 - 2xy + 5x^3 - 2x^2 y - 4x^3 y - xy^2 + 4x^4)}{(1+x)^2 (4x^2 y + 2xy + x^2 - y^2)}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$- \frac{(2 + 8x + 14x^2 + 2xy + 8x^3)}{(1+x)^2 (4x^2 y + 2xy + x^2 - y^2)} z = 0,$$

l'équation $\partial x - \frac{E}{2D}\partial y = 0$, donne $\partial x + \frac{x \partial y}{1+x} = 0$, donc

$$\Phi = x e^{x+y},\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = (1+x) e^{(x+y)},\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = x e^{x+y},$$
$$\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) = (2+x) e^{x+y},\ \left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x \partial y}\right) = (1+x) e^{x+y}.$$

L'équation 2 donne

$$\frac{(2x^2 - 2xy + 5x^3 - 2x^2 y - 4x^3 y - xy^2 + 4x^4)}{(1+x)^2 (4x^2 y + 2xy + x^2 - y^2)}(1+x)$$
$$+ \frac{(2y - 2x + 6xy + xy^2 - 6x^2 + 10x^2 y - 9x^3 + 4x^3 y - 4x^4)x}{(1+x)^2 (4x^2 y + 2xy + x^2 - y^2)}$$
$$+ x - 2x(1+x) + \frac{x^2}{(1+x)^2}(2+x) = 0,$$

équation identiquement nulle. L'équation en Π donne maintenant,

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial y^2}\right) - \frac{2x}{1+x}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x \partial x}\right) + \frac{x^2}{(1+x)^2}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right)$$
$$+ \frac{(2y - 2x + 6xy + xy^2 - 6x^2 + 10x^2 y - 9x^3 + 4x^3 y - 4x^4)}{(1+x)^2 (4x^2 y + 2xy + x^2 - y^2)}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{(2x^2 - 2xy + 5x^3 - 2x^2 y - 4x^3 y - xy^2 + 4x^4)}{(1+x)^2 (4x^2 y + 2xy + x^2 - y^2)}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)$$
$$- \frac{(2 + 8x + 14x^2 + 2xy + 8x^3)}{(1+x)^2 (4x^2 y - 2xy + x^2 - y^2)} \Pi = 0.$$

Faisant $\Phi = C$, j'aurai $lx + x + y = lC$, ou parceque C est arbitraire, faisant $C = 1$, $y = -x - lx$, l'équation se ſe reduit à $x^2 \left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x}\right)$

$$+ \frac{(2x^2 - 2xy + 5x^3 - 2x^2y - 4x^3y - xy^2 + 4x^4}{4x^2y + 2xy + x^2 - y^2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)$$

$$- \frac{(2 + 8x + 14x^2 + 2xy + 8x^3)}{4x^2y + 2xy + x^2 - y^2} \Pi = 0.$$

ou en ſubſtituant la valeur de y,

$$x^2 \frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2} + \frac{(4x^2 + 2xlx + 6x^3 + 8x^4 + 4x^3lx - x(lx)^2}{-4x^3 - 4x^2lx - 2x^2 - 4xlx - (lx)^2} \frac{\partial\Pi}{\partial x}$$

$$+ \frac{(2 + 8x + 12x^2 - 2xlx + 8x^3)}{4x^3 + 4x^2lx + 2x^2 + 4xlx + (lx)^2} \Pi = 0.$$

On trouve pour intégrales particulières $\Pi' = 2x + lx$, $\Pi'' = 2x^2 + 2xlx + (lx)^2$, ou en remettant pour y ſa valeur, $\Pi' = x - y$, $\Pi'' = x^2 + y^2$. L'intégrale complette eſt donc

$$z = (x - y)\, F : x\, e^{x+y} + (x^2 + y^2) f : x\, e^{x+y}.$$

§. 21. Mais cette méthode n'eſt pas toujours praticable, parceque Φ peut être une fonction de x & y telle qu'on ne puiſſe tirer la valeur de y en x ou de x en y. C'eſt le même inconvénient qui affecte les méthodes qu'on a données pour réſoudre les équations aux différences partielles du premier degré. Il faut donc dans ce cas recourir à d'autres artifices, & pour cela examiner de plus près la nature intime des équations aux différences partielles.

§. 22. Nous avons vu que lorsque $\Phi' = \Phi''$, on a $\frac{C}{D} = \frac{EE}{4DD}$, en faiſant $\frac{E}{D} = \alpha$, $\frac{C}{D} = \frac{\alpha\alpha}{4}$. On a de plus

$$\frac{A}{D}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left[\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right) = 0.$$

Mais

$$\frac{\frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)\right]-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right)\right]}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right),\ \text{donc}$$

$$\frac{A}{D}+\frac{B}{D}\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)}-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)=0,\ \text{ou}$$

$$\frac{A}{D}-\frac{\alpha}{2}\frac{B}{D}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)-\frac{\alpha}{4}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)=0.$$

Combinant cette équation avec celle qui ſe déduit des équations 3 & 4,

$$\frac{A}{D}\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi''}\right)$$
$$+\frac{E}{D}\left(\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi''}\right)+\left(\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi''}\right)=0,$$

on obtient

$$\frac{B}{D}=\frac{\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'}+\alpha\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi'}+\frac{\alpha^2}{4}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'}-\left(\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi''}+\alpha\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi''}+\frac{\alpha^2}{4}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi''}\right)+\frac{\alpha}{4}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right]\left[\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right]}{\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}+\frac{\alpha}{2}\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}-\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}+\frac{\alpha}{2}\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}\right)}$$

$$\frac{A}{D}=\frac{\dfrac{\alpha}{2}\left(\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'}+\alpha\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi'}+\dfrac{\alpha^2}{4}\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'}\right)-\dfrac{\alpha}{2}\left(\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi''}+\alpha\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi''}+\dfrac{\alpha^2}{4}\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi''}\right)-\left(\dfrac{\alpha}{4}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right)\left(\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}-\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}\right)}{\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}+\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}-\left(\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}+\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}\right)}$$

$$\frac{G}{D}=\frac{\left(\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}+\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right)\left(\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'}+\alpha\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi'}+\dfrac{\alpha^2}{4}\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'}\right)-\left(\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}+\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}\right)\left(\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi''}+\alpha\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi''}+\dfrac{\alpha^2}{4}\dfrac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi''}\right)-\left[\dfrac{\alpha}{4}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right]\left[\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}-\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}\right]}{\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}+\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}-\left(\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}+\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}\right)}$$

Le dénominateur de ces trois quantités a cette forme:

$$\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}\right).$$

Or $\alpha=-\dfrac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)}=\frac{\partial x}{\partial y}$, parceque dans la recherche de Π' & Π'' on peut regarder Φ comme conftant, ou

$$\partial\Phi=\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\partial x+\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\partial y=0,$$

ce qui donne $\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)} = -\frac{\partial x}{\partial y}$. Nous aurons donc en faiſant cette ſubſtitution

$$[\Pi' (\tfrac{\partial \Pi''}{\partial y}) - \Pi'' (\tfrac{\partial \Pi'}{\partial y})]\, \partial y + [\Pi' (\tfrac{\partial \Pi''}{\partial x}) - \Pi'' (\tfrac{\partial \Pi'}{\partial x})]\, \partial x.$$

On cherchera par les méthodes connues les multiplicateurs qui rendent cette quantité intégrable. On trouvera ainſi Π' & Π''. La queſtion ſe reduit donc à mettre le dénominateur commun des quantités $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{G}{D}$ ſous la forme $M + \frac{\alpha}{2} N$, M & N étant des fonctions de x & y, & $\frac{\alpha}{2}$ étant une quantité connue.

§. 23. Dans l'équation du §. 20, il faut reduire le dénominateur $4x^2y + 2xy + x^2 - y^2$ à cette forme:

$$M - \frac{x}{1+x} N = \frac{M(1+x) - Nx}{1+x}.$$

Je fais $M = A'xy + M'$, $N = B'xy + N'$, A', B' étant des conſtantes arbitraires, M', N' étant des fonctions de x & y. J'ai

$$M(1+x) - Nx =$$
$$\begin{matrix} Ax^2y + Axy + M' + M'x \\ -B \qquad\qquad\qquad\qquad - N'x \end{matrix} = 4x^2y + 2xy + x^2 - y^2,$$

donc $A - B = 4$, $A = 2$, $B = -2$, $M' = N' = x^2 - y^2$, donc $M = 2xy + x^2 - y^2$, $N = -2xy + x^2 - y^2 =$ (à cauſe de $-\frac{x}{1+x} = \frac{\partial x}{\partial y}$)

$$(2xy + x^2 - y^2)\,\partial y + (x^2 - 2xy - y^2)\,\partial x = 0.$$

On trouve pour intégrales particulières de cette équation $x - y = 0$, $x^2 + y^2 = 0$, ce qui donne $\Pi' = x - y$ $\Pi'' = x^2 + y^2$, comme ci-deſſus. L'Intégrale complette de cette

cette équation, qui est par le §. précédent

$$\left(\frac{\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''} - \frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}\right) \partial y + \left(\frac{\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''} - \frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}\right) \partial x = 0,$$

est $\frac{\Pi''}{\Pi'} = C$, C étant la constante arbitraire. On a dans ce cas-ci, $\frac{x^2 + y^2}{x - y} = C$, donc $\frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{\Pi''}{\Pi'}$.

§. 24. Cette méthode est sujette à un inconvénient qu'il est bon d'examiner. Il peut y avoir un facteur commun dans le numérateur & dans le dénominateur des valeurs $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{G}{D}$, & il s'agit de retrouver ce facteur, pour procéder à l'intégration. Pour découvrir la nature de ce facteur, je remarque que

$$\partial . l \frac{\Pi'}{\Pi''} = \frac{\partial \Pi'}{\Pi'} - \frac{\partial \Pi''}{\Pi''} = \frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) \partial x}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right) \partial x}{\Pi''} + \frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) \partial y}{\Pi'}$$

$$- \frac{\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''} \partial y = \partial y \left(\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''} + \frac{\partial x}{\partial y}\left(\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right)\right).$$

Or dans les valeurs de Π', Π'', on peut supposer $\Phi =$ constant, ou $\partial \Phi = 0$, donc $\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)} = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{\partial x}{\partial y}$, donc

$$\frac{\partial l \frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y} = \frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right).$$

On a ensuite,

$$\frac{\partial \partial l \frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y} = \left(\frac{\partial \partial y}{\partial y^2}\right) \partial l \frac{\Pi'}{\Pi''} + \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial y^2}\right) \partial y}{\Pi'} + \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x \partial y}\right) \partial x}{\Pi'}$$

$$- \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi''}{\partial y^2}\right) \partial y}{\Pi''} - \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi''}{\partial x \partial y}\right) \partial x}{\Pi''}$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)\partial x}{\Pi'}+\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)\partial y}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right)\partial x}{\Pi''}-\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\partial y}\right)\partial y}{\Pi''}\right)$$

$$+\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)\partial x+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\partial y\right]\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right)$$

$$-\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\partial x}{\Pi'^2}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)^2\partial y}{\Pi'^2}+\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)\partial x}{\Pi''^2}+\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)^2\partial y}{\Pi''^2}$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left(-\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)^2\partial x}{\Pi'^2}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\partial y}{\Pi'^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)^2\partial x}{\Pi''^2}+\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)\partial y}{\Pi''^2}\right).$$

Donc

$$\frac{\partial\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y^2}=\frac{\partial\partial y}{\partial y^3}\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}+\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'}+\alpha\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi'}$$

$$+\frac{\alpha^2}{4}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi''}-\alpha\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi''}-\frac{\alpha^2}{4}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi''}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)^2}{\Pi'^2}$$

$$-\alpha\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'^2}-\frac{\alpha^2}{4}\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)^2}{\Pi'^2}+\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)^2}{\Pi''^2}+\alpha\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''^2}$$

$$+\frac{\alpha^2}{4}\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)^2}{\Pi''^2}+\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)+\tfrac{\alpha}{4}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)\right]\left[\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right].$$

Donc

$$\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'}+\alpha\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi'}-\frac{\alpha^2}{4}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'}-\left(\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi''}+\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi''}+\frac{\alpha^2}{4}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi''}\right)$$

$$+\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)+\tfrac{\alpha}{4}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right)=$$

$\partial\partial l$

$$\frac{\partial\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y^2}-\frac{\partial\partial y}{\partial y^3}\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}+\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}+\frac{\alpha}{2}\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}\right)^2$$
$$-\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}+\frac{\alpha}{2}\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right)^2=$$
$$\frac{\partial\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y^2}-\frac{\partial\partial y}{\partial y^2}\frac{\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y}$$
$$+\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}+\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}\right)+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}+\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right)\frac{\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}=-\frac{\frac{\partial\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y^2}}{\frac{\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y}}+\frac{\partial\partial y}{\partial y^2}-\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}+\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''}\right)$$
$$+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}+\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''}\right)=\frac{\partial\left(\frac{\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y}\right)}{\partial y\frac{\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y}}-\frac{\partial l\,\Pi'\,\Pi''}{\partial y}=$$
$$-\frac{\partial l\frac{\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y}}{\partial y}=-\frac{\partial l\,\Pi'\,\Pi''}{\partial y},$$

en suppofant $\partial\Phi=0$. On trouvera de même

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}=-\frac{\alpha}{2}\frac{\partial l\frac{\partial l\frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y}}{\partial y}-\frac{\alpha}{2}\frac{\partial l\,\Pi'\,\Pi''}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)+\frac{\alpha}{4}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right).$$

On

On trouvera enfin d'après les valeurs précédentes,

$$\frac{G}{D} = \frac{\partial l \Pi'}{\partial y} \frac{\partial l \Pi''}{\partial y} \left\{ 1 + \partial l \frac{\frac{\frac{\partial l \Pi'}{\partial y}}{\frac{\partial l \Pi''}{\partial y}}}{\partial y} \right\} \Bigg/ \left\{ \frac{\partial l \frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y} \right\}$$

$$= \frac{\partial l \Pi'}{\partial y} \frac{\partial l \Pi''}{\partial y} \frac{\partial l \frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right)}}{\frac{\partial l \frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y}}.$$

Or il eſt évident que ſi $\frac{\partial l \frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y}$ renferme Φ, comme dans toute cette recherche, on peut regarder Φ comme conſtant, ſa différentielle renfermera auſſi Φ, ainſi Φ diſparaitra au numérateur & au dénominateur dans $\frac{A}{D}$ & $\frac{B}{D}$, il diſparaitra auſſi dans $\frac{G}{D}$, car $\frac{\partial l \frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y} = \frac{\partial l \Pi'}{\partial y} - \frac{\partial l \Pi''}{\partial y}$, donc

$$\frac{\frac{\partial l \Pi'}{\partial y}}{\frac{\partial l \Pi''}{\partial y}} = 1 + \frac{\partial . l \frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y}, \quad l \frac{\frac{\partial . l \Pi'}{\partial y}}{\frac{\partial . l \Pi''}{\partial y}} = l \left(1 + \frac{\partial l \frac{\Pi'}{\Pi''}}{\frac{\partial y}{\frac{\partial l \Pi''}{\partial y}}}\right)$$

égal à une fonction de $\frac{\partial l \frac{\Pi'}{\Pi''}}{\frac{\partial y}{\frac{\partial l \Pi''}{\partial y}}}$; cette fonction renfermera donc Φ, & par conſéquent Φ diſparaitra encore au numérateur & au dénominateur dans $\frac{G}{D}$. Il faudra donc, avant d'opérer,

pérer, multiplier le numérateur & le dénominateur de ces quantités par Φ, & opérer ensuite comme ci-dessus.

§. 25. Prenons pour exemple l'équation du §. 19. On a $\frac{\alpha}{2} = -\frac{y}{x}$. Le dénominateur de $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{G}{D}$, ne m'offre aucun facteur à traiter, je rétablis donc le facteur $\Phi = x^2 + y^2$ que je reduis à la forme $M - \frac{y}{x} N$, ce qui me donne $x(x + \frac{y}{x} y) = x(x - \frac{\partial x}{\partial y} y) = x \frac{(x \partial y - y \partial x)}{\partial y}$. Pour intégrer l'équation, $x \partial y - y \partial x = 0$, je la divise par yy & j'ai $\frac{x}{y} + A' = 0$, A étant une constante arbitraire. Pour déterminer cette constante, je considère que $x + A' y$ étant un des facteurs de Π, substituant cette valeur pour Π dans l'équation différentielle du second degré, cette expression devra être $= 0$, lorsque $x + A' y = 0$. Je fais donc $\Pi = x + A' y$, ce qui donne $(\frac{\partial \Pi}{\partial x}) = 1$, $(\frac{\partial \Pi}{\partial y}) = A'$, $(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x^2}) = 0$, $(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}) = 0$, $(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}) = 0$, l'équation deviendra donc

$$\frac{(y^2 - 2x^2) A'}{x^2 y} + \frac{x^2 - 2y^2}{x^3} + \frac{(2x^4 + x^2 y^2 + 2y^4)}{x^4 y^2} (x + A' y) = 0,$$

d'où l'on tire

$$A' x^2 y^3 + 2 x^3 y^2 + 2 x^5 + 2 A' y^5 = 0, \text{ ou}$$
$$x^5 + A' y^5 + 2 x^2 y^2 (x + A y) = 0,$$

ce qui ne peut s'accorder avec $x + A y = 0$, que dans le cas où $A = \pm 1$. J'ai donc les facteurs $x + y$, $x - y$, & je fais $\frac{\Pi'}{\Pi''} = (x + y)^m (x - y)^n$, il faut que la différentielle de cette quantité donne $x \partial y - y \partial x = 0$. Or on obtient en différentiant & divisant par $(x + y)^{m-1} (x - y)^{n-1}$,

$$\begin{matrix} m x \partial x & + m x \partial y & - m y \partial x & - m y \partial y \\ + n & - n & + n & - n \end{matrix} = 0,$$

il faut donc que $m + n = 0$, donc $n = -m$, $\frac{\Pi'}{\Pi''} = \frac{x+y}{x-y}$,

 m,

m reſtant indéterminé, donc

$$\Pi' = \Pi'' \frac{(x+y)}{x-y}, \quad \Pi' \Pi'' = \Pi''^2 \frac{(x+y)}{x-y}.$$

Subſtituent ces valeurs dans l'équation

$$-\frac{\partial . l \frac{\partial l \frac{\Pi'}{\Pi''}}{\partial y}}{\partial y} - \frac{\partial l \Pi' \Pi''}{\partial y} = \frac{y^2 - 2x^2}{x^2 y},$$

on trouve

$$\frac{\partial l \Pi''}{\partial y} = \frac{x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + y^3}{x^2 y (x-y)} = \frac{x^2 - 2xy - 2y^2 + \frac{y^3}{x}}{xy(x-y)}.$$

Je fais donc $\Pi'' = xy(x-y)$, ce qui donne $\Pi' = xy(x+y)$, & l'intégrale complette ſe trouve comme ci-deſſus. On auroit pu faire $\Pi' = x^m y^n (x-y)$, $\Pi' = x^m y^n (x+y)$, & l'on aurait trouvé $m = n = 1$, en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation.

§. 26. La ſolution précédente ſe rapporte au cas de $z = \Pi F : \Phi$. En effet cette ſeule ſuppoſition fournit toutes les équations néceſſaires pour réſoudre le Problème; car en procédant comme dans le §. 1. on obtient les trois équations,

$$1.\ C\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + D\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + E\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0,$$

$$2.\ \Pi\left[A\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x \partial y}\right)\right]$$
$$+ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left[2C\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left[2D\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left. + E\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right] = 0.$$

$$3.\ G\Pi + A\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial y^2}\right)$$
$$+ E\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

L'équation 1. donne deux valeurs de Φ, chacune deſquelles étant

étant ſubſtituée dans les deux autres équations, donne quatre équations, & ce ſont celles que nous avons rapportées dans le §. 1. La ſeconde équation donne deux valeurs de Π, que nous avons prouvées pouvoir être faites identiques, ſi cette valeur de Π, qui réſulte de l'intégration d'une équation du premier degré, ſatisfait à l'équation 3. le Problème eſt réſolu, ſinon, la forme $z = \Pi F : \Phi$ ne peut avoir lieu. Dans ce cas il faut, comme l'enſeigne M. Euler, examiner la forme $z = \Pi' F : \Phi + \Pi F' : \Phi$, $F' : \Phi$ étant $= \frac{\partial . F : \Phi}{\partial \Phi}$.

§. 27. Soit donc $z = \Pi' F : \Phi + \Pi F' : \Phi$, on a en différentiant

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) F : \Phi + \Pi' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) F' : \Phi$$
$$+ \Pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F'' \Phi,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) F : \Phi + \Pi' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) F' : \Phi$$
$$+ \Pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F'' : \Phi,$$

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x^2}\right) F : \Phi + 2 \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F' : \Phi + \Pi' \left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x^2}\right) F' : \Phi$$
$$+ \Pi' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 F'' : \Phi + \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x^2}\right) F' : \Phi + 2 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F'' : \Phi$$
$$+ \Pi \left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x^2}\right) F'' : \Phi = \Pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 F''' : \Phi,$$

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial y^2}\right) F : \Phi + 2 \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F' : \Phi + \Pi' \left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial y^2}\right) F' : \Phi$$
$$+ \Pi' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 F'' : \Phi + \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right) F' : \Phi + 2 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F'' : \Phi$$
$$+ \Pi \left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial y^2}\right) F'' : \Phi + \Pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 F''' : \Phi,$$

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x \partial y}\right) F : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F' : \Phi$$
$$+ \Pi' \left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x \partial y}\right) F' : \Phi + \Pi' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F'' : \Phi + \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}\right) F' : \Phi$$
$$+ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F'' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F'' : \Phi + \Pi \left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x \partial y}\right) F'' : \Phi$$
$$+ \Pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F''' : \Phi.$$

Multipliant respectivement ces équations par les quantités G, A, B, C, D, E, fonctions indéterminées de x & y, & égalant séparément à zéro les coëfficiens de $F:\Phi$, $F':\Phi$, $F'':\Phi$, $F''':\Phi$, on aura l'équation différentielle du second dégré:

$$Gz + A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) = 0,$$

& les quatre équations de condition suivantes:

$$1.\quad C\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + D\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0,$$

$$2.\quad \Pi\left[A\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left[2C\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left[2D\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right] = 0,$$

$$3.\quad G\Pi + A\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+\Pi'\left[A\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left[2C\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\left[2D\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right] = 0,$$

$$4.\quad G\Pi' + A\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right) = 0.$$

§. 28. Les deux premieres équations sont les mêmes que dans le §. 26. L'équation 1. donne deux valeurs de Φ, savoir Φ' & Φ''. Substituant successivement ces deux valeurs dans l'équation 2, on obtient deux équations parfaitement semblables à celles du §. 2, d'où l'on conclura, comme dans le §. 4. que l'on peut faire identiques les deux valeurs de Π qui en résultent, d'où il suit que la valeur de Π est telle qu'on peut y échanger Φ' en Φ'', & réciproquement, sans que sa valeur change. Donc la quantité

$$\frac{G}{D}\Pi + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right) = B'$$

restera la même, en y échangeant Φ' & Φ''. Cela posé, conservant les valeurs A', A'' du §. 7, introduisant la valeur de B', & pratiquant les réductions du §. 2, on trouvera ra que l'équation (3), si l'on y substitue successivement Φ' & Φ'', fournit les deux équations suivantes:

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right)=\frac{(A'\nu'-B')\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)},$$

$$-\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu''}{\partial y}\right)=\frac{(A''\nu''-B')\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}.$$

J'appelle ici ν' & ν'' les deux valeurs de Π' résultantes de la substitution de Φ' & Φ''. Ces deux équations sont dans le même cas que les équations en Π, elles se changeront l'une en l'autre, en y échangeant Φ' & Φ'', ν' & ν'', d'où l'on conclurra par les mêmes raisonnemens du §. 4. qu'on a $\nu' F:\Phi' = \nu'' F:\Phi''$, & que par conséquent on peut faire $\nu' = \nu''$, & donner à l'intégrale cette forme:

$$z = \Pi'(F:\Phi' + f:\Phi'') + \Pi(F':\Phi' + f':\Phi'').$$

§. 29. Rappellant ici pour plus de clarté les dénominations dont nous avons besoin, nous ferons

$$A' = A\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x\partial y}\right),$$

$$A'' = A\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x\partial y}\right),$$

$$B' = G + A\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} + B\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} + C\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + D\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + E\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi},$$

$$\beta = \frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]^2}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)},$$

$$\alpha' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)},$$

$$\alpha'' = -\frac{[(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}) - (\frac{\partial\Phi'}{\partial x})(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})]}{(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})},$$

$$a' = -\frac{[(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}) - (\frac{\partial\Phi'}{\partial x})(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})](\frac{\partial\Phi'}{\partial y})}{(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})},$$

$$a'' = \frac{[(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}) - (\frac{\partial\Phi'}{\partial x})(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})](\frac{\partial\Phi''}{\partial y})}{(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})},$$

$$a = \frac{A'(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}) + A''(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})}{\beta}, \quad b = \frac{A'(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}) + A''(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})}{\beta};$$

$$a^{(1)} = \frac{B'[(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}) + (\frac{\partial\Phi''}{\partial x})]}{\beta}, \quad b^{(1)} = \frac{B'[(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}) + (\frac{\partial\Phi''}{\partial y})]}{\beta}.$$

§. 30. Subſtituant Φ' & Φ'' dans les équations du §. 27., on obtient,

$$\alpha'(\tfrac{\partial\Pi}{\partial y}) + a'(\tfrac{\partial\Pi}{\partial x}) + A'\Pi = 0,$$
$$\alpha''(\tfrac{\partial\Pi}{\partial y}) + a''(\tfrac{\partial\Pi}{\partial x}) + A''\Pi = 0,$$
$$\alpha'(\tfrac{\partial\Pi'}{\partial y}) + a'(\tfrac{\partial\Pi'}{\partial x}) + A'\Pi' + B'\Pi = 0,$$
$$\alpha''(\tfrac{\partial\Pi'}{\partial y}) + a''(\tfrac{\partial\Pi'}{\partial x}) + A''\Pi' + B'\Pi = 0.$$

Eliminant des deux prémieres équations les valeurs de $(\frac{\partial\Pi}{\partial x})$ & $(\frac{\partial\Pi}{\partial y})$, & obſervant que $\partial\Pi = (\frac{\partial\Pi}{\partial x})\partial x + (\frac{\partial\Pi}{\partial y})\partial y$, on aura après les reductions, $\partial\Pi = (a\,\partial x + b\,\partial y)\Pi$. Opérant de même ſur les deux autres équations, on aura

$$\partial\Pi' - (a\,\partial x + b\,\partial y)\Pi' = (a^{(1)}\partial x + b^{(1)}\partial y)\Pi,$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\Pi = e^{\int(a\,\partial x + b\,\partial y)},$$

$$\Pi' = e^{\int(a\,\partial x + b\,\partial y)}\int e^{-\int(a\,\partial x + b\,\partial y)}(a^{(1)}\partial x + b^{(1)}\partial y)\Pi.$$

Or

Or $a\,\partial x + b\,\partial y = \frac{A'\,\partial\Phi'' + A''\,\partial\Phi'}{\beta}$,

$$a^{(1)}\,\partial x + b^{(1)}\,\partial y = \frac{(\partial\Phi' + \partial\Phi'')}{\beta} \times$$

$$\times\left[G + \frac{A\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} + \frac{B\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} + \frac{C\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + \frac{D\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + \frac{E\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)}{\Pi}\right].$$

Subſtituant ces valeurs dans les formules intégrales, on a

$$\Pi = e^{\frac{\int(A'\,\partial\Phi'' + A''\,\partial\Phi')}{\beta}},$$

$$\Pi' = \Pi\int\left[G + \frac{A\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} + \frac{B\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} + \frac{C\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + \frac{D\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi}\right.$$

$$\left. + \frac{E\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)}{\Pi}\right]\left(\frac{\partial\Phi' + \partial\Phi''}{\beta}\right)$$

& l'équation de condition ſera

$$G\Pi' + A\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\,\partial y}\right) = 0.$$

§. 31. Soit l'équation $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \frac{2aa}{\text{coſ.}(ax+b)^2}\,z = 0$, que traite M. Euler p. 309, on a

$$\frac{E}{D} = 0,\ \frac{C}{D} = -1,\ \frac{B}{D} = \frac{A}{D} = 0,\ \frac{G}{D} = \frac{2aa}{\text{coſ.}(ax+b)^2}.$$

Les quantités Φ' & Φ'' dépendent de l'intégration des équations $\partial x \pm \partial y = 0$. J'aurai donc $\Phi' = x + y$, $\Phi'' = x - y$,

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = -1,\ \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) = 0.$$

On aura donc $A' = A'' = 0$, donc $\Pi = C$, C étant une conſtante arbitraire, ou $\Pi = 1$. Maintenant on a

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = 2,\ \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 1,$$

donc $\beta = 4$, $\partial\Phi' + \partial\Phi'' = 2\,\partial x$,

$\Pi' =$

$$\Pi' = \int \frac{a\,a\,\partial x}{cos.\,(a\,x + b)^2} = a \text{ Tang. } (a\,x + b).$$

L'intégrale complette sera donc,

$$z = a \text{ Tang. } (a\,x + b)\,[F:(x+y) + f:(x-y)] + F':(x+y) + f':(x-y),$$

ce que trouve M. Euler. On a ici

$$\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) = 0,\ \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) = \frac{a\,c}{cos.\,(a\,x+b)^2},\ \left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right) = -\frac{2\,a^3\,T.\,(a\,x+b)}{cos.\,(a\,x+b)^2},$$

l'équation de condition sera donc

$$\frac{2\,a^3 \text{ Tang. } (a\,x+b)}{cos.\,(a\,x+b)^2} - \frac{2\,a^3 \text{ Tang. } (a\,x+b)}{cos.\,(a\,x+b)^2} = 0$$

équation identique, ainsi l'équation de condition est remplie.

§. 32. Soit l'équation $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \frac{2}{(c+x)^2}\,z = 0$, que traite M. Euler p. 306. On a

$$\frac{E}{D} = 0,\ \frac{C}{D} = -1,\ \frac{B}{D} = \frac{A}{D} = 0,\ \frac{G}{D} = \frac{2}{(c+x)^2}.$$

Les quantités Φ' & Φ'' dépendent de l'intégration des équations $\partial x \pm \partial y = 0$. On a donc $\Phi' = x+y$, $\Phi'' = x-y$,

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x\,\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) = -1,\ \left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x\,\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial y^2}\right) = 0.$$

On aura donc $A' = A'' = 0$, donc

$$\Pi = 1;\ \beta = 4,\ \partial \Phi' + \partial \Phi'' = 2\,\partial x,$$

$$\Pi' = \int \frac{\partial x}{(c+x)^2} = -\frac{1}{c+x}.$$

L'Intégrale complette sera donc,

$$z = -\frac{1}{c+x}\,[F:(x+y) + f:(x-y)] + F':(x+y) + f':(x-y).$$

L'on trouvera comme ci-dessus que l'équation de condition est remplie.

§. 33.

§. 33. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - c\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - \frac{2c}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{2cz}{xx} = 0,$$

que traite M. de la Grange (Mém. de Turin p. 64.) On a ici $\frac{E}{D} = 0$, $\frac{C}{D} = -c$, $\frac{B}{D} = 0$, $\frac{A}{D} = -\frac{2c}{x}$, $\frac{G}{D} = \frac{2c}{xx}$. Les quantités Φ' & Φ'' dépendent de l'intégration des équations $\partial x \pm \partial y \sqrt{c} = 0$. On a donc

$$\Phi' = x + y\sqrt{c},\ \Phi'' = x - y\sqrt{c},$$

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) = \sqrt{c},\ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = -\sqrt{c},$$

$$\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\ \,y}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) = 0.$$

On aura donc $A' = -\frac{2c}{x}$, $A'' = -\frac{2c}{x}$,

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = 2\sqrt{c},$$

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 1,\ \beta = 4c,$$

$$\frac{A'\partial\Phi'' + A''\partial\Phi'}{\beta} = -\frac{\partial x}{x},\ \text{donc}$$

$$\Pi = \frac{1}{x},\ \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) = -\frac{1}{xx},\ \left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right) = \frac{2}{x^3},$$

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = 0,\ \left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + \frac{E}{D}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi} + \frac{C}{D}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + \frac{B}{D}\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} + \frac{A}{D}\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} + \frac{G}{D} =$$

$$-\frac{2c}{x^2} + \frac{2c}{x^2} + \frac{2c}{xx} = \frac{2c}{xx},\ \text{donc}$$

$$\Pi' = \frac{1}{x}\int\frac{\partial x}{xx} = -\frac{1}{xx}.$$

L'Intégrale complette sera donc

$$z = -\frac{1}{xx}[F:(x + y\sqrt{c}) + f:(x + y\sqrt{c})]$$
$$+ \frac{1}{x}[F':(x + y\sqrt{c}) + f':(x - y\sqrt{c})],$$

comme le trouve M. de la Grange. L'équation de condition eſt remplie.

§. 34. Il y a cependant un cas où les deux valeurs de Π peuvent être inégales, c'eſt celui où l'une d'elles eſt nulle. Soit la valeur de Π qui répond à Φ'', nulle, enſorte que la forme de l'intégrale ſoit

$$z = \Pi' [F : (\Phi' + f : \Phi'')] + \Pi F' : \Phi'.$$

Dans ce cas-là, on a néceſſairement

$$\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = A'' = 0,$$

ſans quoi la ſeconde valeur de Π ſerait néceſſairement réelle. Enſuite Π étant affecté d'une fonction de Φ' ſeulement, on peut dans la recherche de Π ſuppoſer Φ' conſtant, & par conſéquent $\partial\Phi' = 0$, on aura donc $\Pi = e^{\int \frac{A'\,\partial\Phi''}{\beta}}$,

$$\Pi' = \Pi \int \frac{\partial\Phi''}{\beta}\left[\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + \frac{E}{D}\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)}{\Pi} + \frac{C}{D}\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + \frac{B}{D}\,\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} + \frac{A}{D}\,\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} + \frac{G}{D}\right],$$

en intégrant toujours dans la ſuppoſition de $\partial\Phi' = 0$, ce qui donne $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}$. On peut traiter ce cas directement d'après les formules générales; car puiſque la valeur de Π correſpondante à Φ'' eſt $= 0$, & que

$$\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = A'' = 0,$$

l'él'équation 3. du §. 27. donnera celle-ci:

$$-\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right)=0,$$

ce qui donne $\Pi' = F:\Phi''$. L'équation 3. donnera encore en y substituant la valeur de Φ',

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x \partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)+\frac{G}{D}\Pi + A'\Pi'$$
$$-\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\right]=0,$$

ou en mettant pour Π' la valeur $F:\Phi''$, on aura

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x \partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)+\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{G}{D}\Pi + A' F:\Phi'' - \beta\frac{\partial F:\Phi''}{\partial \Phi''}=0.$$

L'Intégrale de cette équation aux différences ordinaires donne

$$F:\Phi'' = e^{\int \frac{A'}{\beta}\partial \Phi''}\int \frac{\partial \Phi''}{\beta}\, e^{-\int \frac{A'}{\beta}\partial \Phi''}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x \partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)+\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)+\frac{G}{D}\Pi\right].$$

On a enfin par l'équation 2.

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}A'\Pi$$
$$-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)=0.$$

Mais $\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) = -\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)$, donc

$$\frac{\partial \Pi}{\Pi} = \frac{A'\partial x}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}.\quad \text{Or}$$

$$\left[\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}\right]\partial x=\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]\partial x}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)},$$

donc $$\frac{\partial x}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)}=\frac{\partial \Phi''}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}$$ &

$$\frac{\partial \Pi}{\Pi}=\frac{A'\partial \Phi''}{\beta},\quad \Pi=e^{\int\frac{A'\partial \Phi''}{\beta}},$$ donc

$$\Pi'=\Pi\int\frac{\partial \Phi''}{\beta}\left[\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi}+\frac{E}{D}\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi}+\frac{C}{D}\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi}+\frac{B}{D}\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}+\frac{A}{D}\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}+\frac{G}{D}\right]$$

comme ci-dessus.

§. 35. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)-aa\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+\frac{a}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{aa}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

que traite M. Euler p. 256. On a

$$\frac{E}{D}=0,\ \frac{C}{D}=-aa,\ \frac{B}{D}=\frac{a}{x},\ \frac{A}{D}=\frac{aa}{x},\ \frac{G}{D}=0.$$

Les quantités Φ' & Φ'' dépendent de l'intégration des équations $\partial x \pm a\partial y=0$. J'aurai donc $\Phi'=x+ay$, $\Phi''=x-ay$,

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)=1,\ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)=a,\ \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)=1,\ \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)=-a,$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x^2}\right)=\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial y^2}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right)=\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial y^2}\right)=0.$$

On aura donc $A'=\frac{2aa}{x}$, $A''=0$, donc $\frac{A'\partial \Phi''}{\beta}=\frac{1}{x}\left(\partial x-\frac{a\partial y}{2}\right)$ à cause de $\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)=a$, ce qui donne $\beta=4aa$. Mais la supposition $\partial\Phi'=0$ donne $\partial x+a\partial y=0$, donc

$a\partial y=$

$$a \partial y = - \partial x, \quad \frac{A' \partial \Phi''}{\beta} = \frac{\partial x}{x},$$

$$\int \frac{A' \partial \Phi''}{\beta} = l x, \quad e^{\int \frac{A' \partial \Phi''}{\beta}} = x = \Pi, \text{ donc}$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) = 1, \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right) = 0, \text{ donc}$$

$$\Pi' = x \int \frac{(\partial x - a \partial y)}{4} \cdot \frac{1}{xx} = x \int \frac{\partial x}{2xx} = - \frac{x}{2x} = - \frac{1}{2}.$$

L'Intégrale complette sera donc

$$z = - \tfrac{1}{2} [F : (x + a y) + f : (x - a y)] + x F' : (x + a y),$$

ce qui revient à ce que trouve M. Euler. Π' étant constant, l'équation de condition devient identiquement nulle.

§. 36. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) - [a y + \sqrt{(2 a x + a a y y)}]^2 \left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) = 0,$$

que M. Euler traite p. 248. On a

$$\frac{E}{D} = 0, \quad \frac{C}{D} = - [a y + \sqrt{(2 a x + a a y y)}]^2,$$

$$\frac{B}{D} = \frac{A}{D} = \frac{G}{D} = 0.$$

Les quantités Φ' & Φ'' dépendent de l'intégration des équations,

$$\partial x \pm [a y + \sqrt{(2 a x + a a y y)}] \partial y = 0.$$

Soit pour abréger,

$$a y + \sqrt{(2 a x + a a y y)} = P,$$

l'intégrale de

$$\partial x + [a y + \sqrt{(2 a x + a a y y)}] \partial y = 0,$$

ou de $\partial x + P \partial y = 0$, est $P =$ Const. car alors

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \partial x + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \partial y = 0, \text{ donc}$$

$$\partial x + \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)} \partial y = 0, \quad \text{or } \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{a}{\sqrt{(2 a x + a a y y)}},$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = a + \frac{aay}{\sqrt{(2ax + aayy)}} = \frac{a[ay + \sqrt{(2ax + aayy)}]}{\sqrt{(2ax + aayy)}}$$
$$= \frac{aP}{\sqrt{(2ax + aayy)}} = P\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right).$$

L'équation devient donc $\partial x + P\partial y = o$, ce qui eſt l'équation différentielle propoſée, donc $\Phi' = P$. Maintenant l'intégrale de $\partial x - P\partial y = o$ eſt $y\sqrt{P} - \frac{P^{\frac{3}{2}}}{3a} =$ Conſt. car alors,

$$\partial y\left[\sqrt{P} + \frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{2\sqrt{P}} - \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\sqrt{P}}{2a}\right] + \partial x\left[\frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{2\sqrt{P}} - \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\sqrt{P}}{2a}\right] = o, \text{ ou}$$
$$\partial x\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{(P - ay)}{2a\sqrt{P}} - \partial y\left[\sqrt{P} + \frac{(ay - P)\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\sqrt{P}}{2a}\right] = o.$$

Mais $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{a}{P - ay}$, & ſubſtituant cette valeur, on a $\partial x - P\partial y(2 - 1) = o$, ou $\partial x - P\partial y = o$, ce qui eſt l'équation différentielle propoſée. On a donc

$$\Phi' = P,\ \Phi'' = y\sqrt{P} - \frac{P^{\frac{3}{2}}}{3a}, \text{ donc}$$
$$A' = \left(\frac{\partial\partial P}{\partial y^2}\right) - PP\left(\frac{\partial\partial P}{\partial x^2}\right).$$

Or puisque $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = P\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$, on aura

$$\left(\frac{\partial\partial P}{\partial y^2}\right) = P\left(\frac{\partial\partial P}{\partial x\partial y}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = P\left(\frac{\partial\partial P}{\partial x\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2;$$
$$\left(\frac{\partial\partial P}{\partial x\partial y}\right) = P\left(\frac{\partial\partial P}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2, \text{ donc}$$
$$\left(\frac{\partial\partial P}{\partial y^2}\right) = PP\left(\frac{\partial\partial P}{\partial x^2}\right) + 2P\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2, \text{ ou}$$
$$\left(\frac{\partial\partial P}{\partial y^2}\right) - PP\left(\frac{\partial\partial P}{\partial x^2}\right) = 2P\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2, \text{ donc } A' = 2P\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2.$$

On aura enſuite

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = \frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{2\sqrt{P}} - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{P}}{a}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right),$$

$\partial\Phi''$

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = \sqrt{P} + \frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial \cdot}\right)}{2\sqrt{P}} - \frac{\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{2a},$$

$$\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) = \frac{y\left(\frac{\partial\partial P}{\partial x^2}\right)}{2\sqrt{P}} - \frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{4P\sqrt{P}} - \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{a\sqrt{P}} - \frac{\sqrt{P}}{2a}\left(\frac{\partial\partial P}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\sqrt{P}} + \frac{y\left(\frac{\partial\partial P}{\partial y^2}\right)}{2\sqrt{P}} - \frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}{4P\sqrt{P}}$$

$$- \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}{a\sqrt{P}} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\partial P}{\partial y^2}\right)\sqrt{P}}{a}, \text{ donc}$$

$$A'' = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\sqrt{P}} + \frac{y\left(\frac{\partial\partial P}{\partial y^2}\right)}{2\sqrt{P}} - \frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}{4P\sqrt{P}} - \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}{a\sqrt{P}} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\partial P}{\partial y^2}\right)\sqrt{P}}{a}$$

$$- \frac{yP\sqrt{P}\left(\frac{\partial\partial P}{\partial x^2}\right)}{2} + \frac{y\sqrt{P}}{4}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \frac{\frac{1}{4}P\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{a}$$

$$+ \frac{PP\sqrt{P}\left(\frac{\partial\partial P}{\partial x^2}\right)}{2a} = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\sqrt{P}} + y\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \frac{y\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{4}$$

$$- \frac{\frac{1}{4}P\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{a} - \frac{P\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{a} + \frac{y\sqrt{P}}{4}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \frac{\frac{1}{4}P\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{a}$$

$$= \frac{P\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\sqrt{P}} + y\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \frac{P\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{a}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\sqrt{P} - \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2(P - ay)}{a}\sqrt{P}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\sqrt{P} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\sqrt{P} = 0.$$

On a après cela

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = \frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{2\sqrt{P}}$$

$$-\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{2a}\sqrt{P}-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\sqrt{P}-\frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{2\sqrt{P}}$$

$$+\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\sqrt{P}}{2a}=-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\sqrt{P}, \text{ donc}$$

$$\beta=\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 P}{y\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}=-\frac{2aP\sqrt{P}}{P-ay}=-2P\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right),$$

donc $\frac{A'\partial\Phi''}{\beta}=-\frac{2P\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{2P\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)}\times$

$$\left(\frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\partial x}{2\sqrt{P}}-\frac{\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\partial x}{2a}+\partial y\sqrt{P}+\frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\partial y}{2\sqrt{P}}-\frac{\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\partial y}{2a}\right).$$

Faisant maintenant

$$\partial\Phi'=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\partial y=c, \text{ on a}$$

$$\partial x=-\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\partial y}{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)},$$

donc $\frac{A'\partial\Phi''}{\beta}=-\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\partial y}{\sqrt{P}}\times$

$$\left(-\frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{2\sqrt{P}}+\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\sqrt{P}}{2a}+\sqrt{P}+\frac{y\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{2\sqrt{P}}-\frac{\sqrt{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{2a}\right)=$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\partial y=-\frac{a\,\partial y}{P-ay},$$

donc puisque P peut être ſuppoſé conſtant, on aura

$$\int\frac{A'\partial\Phi''}{\beta}=l\,(P-ay),\quad \Pi=P-ay,$$

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right),\quad \left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)-a,$$

$$\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)=\left(\frac{\partial\partial P}{\partial x^2}\right),\quad \left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial\partial P}{\partial y^2}\right),$$

donc

donc

$$\Pi' = (P - a y) \int \frac{-\partial y \sqrt{P}}{2 P \sqrt{P} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)} \left(\frac{\left(\frac{\partial \partial P}{\partial y^2}\right) - P P \left(\frac{\partial \partial P}{\partial x^2}\right)}{P - a y} \right)$$

$$= (P - a y) \int \frac{-\partial y}{2 P \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)} \cdot \frac{2 P \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{P - a y}$$

$$= (P - a y) \int \frac{-\partial y \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{P - a y}$$

$$= (P - a y) \int \frac{-a \partial y}{(P - a y)^2}$$

$$= (P - a y) \left(\frac{-1}{P - a y} \right) = -1.$$

L'Intégrale complette ſera donc,

$$z = -\left[F : P + f : \left(y \sqrt{P} - \frac{P \sqrt{P}}{2 a}\right)\right] + (P - a y) F' : P,$$

P étant $= a y + \sqrt{(2 a x + a a y y)}$. On voit que cette méthode donne l'intégrale de cette équation d'une maniere très aiſée & très ſimple, tandis que M. Euler n'a pas conduit ſa ſolution jusqu'à la fin, à cauſe de l'éxtrème complication des formules, & s'eſt contenté d'indiquer le procédé. Dans ce cas-ci, Π étant conſtant, l'équation devient identiquement nulle.

§. 37. Si l'équation de condition n'eſt pas remplie, il faut paſſer à la forme

$$z = \Pi'' F : \Phi + \Pi' F' : \Phi + \Pi F'' : \Phi,$$

$$F'' : \Phi = \frac{\partial F' : \Phi}{\partial \Phi}.$$

On obtiendra en procédant comme dans le §. 27. les équations ſuivantes:

$$1.\ C \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + D \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + E \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0.$$

$$2.\ \Pi\,[A\,(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}) + B\,(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}) + C\,(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}) + D\,(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}) + E\,(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y})]$$
$$+ (\tfrac{\partial\Pi}{\partial x})\,[2\,C(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}) + E(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y})] + (\tfrac{\partial\Pi}{\partial y})\,[E(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}) + 2\,D(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y})] = 0,$$

$$3.\ G\,\Pi + A\,(\tfrac{\partial\Pi}{\partial x}) + B\,(\tfrac{\partial\Pi}{\partial y}) + C\,(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}) + D(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}) + E\,(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y})$$
$$+ \Pi'\,[A\,(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}) + B\,(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}) + C\,(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}) + D(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}) + E(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y})]$$
$$+ (\tfrac{\partial\Pi'}{\partial x})[2\,C(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}) + E(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y})] + (\tfrac{\partial\Pi'}{\partial y})[(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}) + 2\,D(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y})] = 0,$$

$$4.\ G\,\Pi' + A\,(\tfrac{\partial\Pi'}{\partial x}) + B(\tfrac{\partial\Pi'}{\partial y}) + C(\tfrac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}) + D(\tfrac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}) + E(\tfrac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\,\partial y})$$
$$+ \Pi''\,[A(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}) + B(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}) + C(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}) + D(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}) + E(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y})]$$
$$+ (\tfrac{\partial\Pi''}{\partial x})[2\,C(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}) + E(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y})] + (\tfrac{\partial\Pi''}{\partial y})[E(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}) + 2\,D(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y})] = 0,$$

$$5.\ G\,\Pi'' + A\,(\tfrac{\partial\Pi''}{\partial x}) + B\,(\tfrac{\partial\Pi''}{\partial y}) + C\,(\tfrac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}) + D\,(\tfrac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2})$$
$$+ E\,(\tfrac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\,\partial y}) = 0.$$

§. 38. Les trois premieres équations font les mêmes que celles du §. 27., & l'on en conclurra comme dans le §. 28. que les deux valeurs de Π, & les deux valeurs de Π', réfultantes de la fubftitution des valeurs Φ' & Φ'', tirées de l'équation 1, peuvent être faites égales, enforte qu'on aura

$$z = \mu'\,F : \Phi' + \mu''\,f : \Phi'' + \Pi'\,(F' : \Phi' + f' : \Phi'')$$
$$+ \Pi\,(F'' : \Phi' + f'' : \Phi''),$$

μ' & μ'' étant les deux valeurs de Π''. Il réfulte de là que Π' eft tel qu'on peut y échanger Φ' & Φ'', fans que fa valeur change, donc la quantité

$$\tfrac{G}{D}\,\Pi' + \tfrac{A}{D}\,(\tfrac{\partial\Pi'}{\partial x}) + \tfrac{B}{D}\,(\tfrac{\partial\Pi'}{\partial y}) + \tfrac{C}{D}\,(\tfrac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}) + (\tfrac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2})$$
$$+ \tfrac{E}{D}\,(\tfrac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\,\partial y}) = B'',$$

reftera la même, en y échangeant Φ' & Φ''. Cela pofé, l'équal'équation (4.) en y mettant fucceffivement Φ' & Φ'', & pratiquant les réductions expliquées ci-deffus, donnera les deux équations fuivantes:

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu'}{\partial y}\right) = \frac{(A'\mu' - B'')\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)},$$

$$-\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu''}{\partial y}\right) = \frac{(A''\mu'' - B'')\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}.$$

Ces deux équations font dans le même cas que les précédentes; elles fe changent l'une dans l'autre, en y échangeant Φ' & Φ'', μ' & μ'', d'où l'on conclura de même, qu'on a $\mu' F:\Phi' = \mu'' F:\Phi''$, & que par conféquent l'on peut faire $\mu' = \mu''$ & donner à l'intégrale la forme

$$z = \Pi''(F:\Phi' + f:\Phi'') + \Pi'(F':\Phi' + f':\Phi'') + \Pi(F'':\Phi' + f'':\Phi'').$$

§. 39. Confervant maintenant les dénominations du §. 29, & y ajoutant celle-ci:

$$B'' = G + A\,\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'} + B\,\frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'} + C\,\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'}$$

$$+ D\,\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'} + E\,\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x\,\partial y}\right)}{\Pi'},$$

$$a^{(2)} = B''\,\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right]}{\beta},\quad b^{(2)} = B''\,\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]}{\beta},$$

on aura en fubftituant Φ' & Φ'' dans les équations du §. 37.

$$\alpha'\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + a'\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + A'\Pi = 0,$$

$$\alpha''\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + a''\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + A''\Pi = 0,$$

$$\alpha'\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + \alpha'\frac{\partial \Pi'}{\partial x}) + A'\,\Pi' + B'\,\Pi' = 0,$$
$$\alpha''\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + \alpha''\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + A''\,\Pi' + B'\,\Pi = 0,$$
$$\alpha'\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right) + \alpha''\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right) + A'\,\Pi'' + B''\,\Pi' = 0,$$
$$\alpha''\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right) + \alpha''\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right) + A''\,\Pi'' + B''\,\Pi' = 0.$$

Ces équations combinèes deux à deux, comme dans le §. 30. donnent aprés les reductions, $\partial\,\Pi = (a\,\partial\,x + b\,\partial\,y)\,\Pi$,

$$\partial\,\Pi' - (a\,\partial\,x + b\,\partial\,y)\,\Pi' = (a^{(1)}\,\partial\,x + b^{(1)}\,\partial\,y)\,\Pi,$$
$$\partial\,\Pi'' - (a\,\partial\,x + b\,\partial\,y)\,\Pi'' = (a^{(2)}\,\partial\,x + b^{(2)}\,\partial\,y)\,\Pi',$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\Pi = e^{\int(a\,\partial\,x + b\,\partial\,y)},$$
$$\Pi' = e^{\int(a\,\partial\,x + b\,\partial\,y} \int e^{-\int(a\,\partial\,x + b\,\partial\,y)}\,(a^{(1)}\,\partial\,x + b^{(1)}\,\partial\,y)\,\Pi,$$
$$\Pi'' = e^{\int(a\,\partial\,x + b\,\partial\,y)} \int e^{-\int(a\,\partial\,x + b\,\partial\,y)}\,(a^{(2)}\,\partial\,x + b^{(2)}\,\partial\,y)\,\Pi',$$

Or $a\,\partial\,x + b\,\partial\,y = \frac{A'\,\partial\,\Phi'' + A''\,\partial\,\Phi'}{\beta}$,

$$a^{(1)}\,\partial\,x + b^{(1)}\,\partial\,y = \frac{(\partial\Phi' + \partial\Phi'')}{\beta}\left[G + A\,\frac{\left(\frac{\partial\,\Pi}{\partial\,x}\right)}{\Pi} + B\,\frac{\left(\frac{\partial\,\Pi}{\partial\,y}\right)}{\Pi} + C\,\frac{\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi}{\partial\,x^2}\right)}{\Pi} + D\,\frac{\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi}{\partial\,y^2}\right)}{\Pi} + E\,\frac{\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi}{\partial\,x\,\partial\,y}\right)}{\Pi}\right],$$

$$a^{(2)}\,\partial\,x + b^{(2)}\,\partial\,y = \frac{(\partial\Phi' + \partial\Phi'')}{\beta}\left[G + A\,\frac{\left(\frac{\partial\,\Pi'}{\partial\,x}\right)}{\Pi'} + B\,\frac{\left(\frac{\partial\,\Pi'}{\partial\,y}\right)}{\Pi'} + C\,\frac{\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi'}{\partial\,x^2}\right)}{\Pi'} + D\,\frac{\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi'}{\partial\,y^2}\right)}{\Pi'} + E\,\frac{\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi'}{\partial\,x\,\partial\,y}\right)}{\Pi'}\right].$$

Subſtituant ces valeurs dans les formules intégrales, on a

$$\Pi = e^{\int\frac{A'\,\partial\,\Phi'' + A''\,\partial\,\Phi'}{\beta}},$$

Π'

$$\Pi' = \Pi \int \left[G + A \frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} + B \frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} + C \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi} \right.$$
$$\left. + D \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + E \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}\right)}{\Pi} \right] \left(\frac{\partial \Phi' + \partial \Phi''}{\beta} \right)$$

$$\Pi'' = \Pi \int \left[G \frac{\Pi'}{\Pi} + A \frac{\frac{\partial \Pi'}{\partial x}}{\Pi} + B \frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi} + C \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi} \right.$$
$$\left. + D \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + E \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x \partial y}\right)}{\Pi} \right] \left(\frac{\partial \Phi' + \partial \Phi''}{\beta} \right),$$

& l'équation de condition sera

$$G \Pi'' + A \left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right) + B \left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right) + C \left(\frac{\partial \partial \Pi''}{\partial x^2}\right) + D \left(\frac{\partial \partial \Pi''}{\partial y^2}\right)$$
$$+ E \left(\frac{\partial \partial \Pi''}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

§. 40. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) + 6\, x \frac{(2\, a^3 + x^3)}{(a^3 - x^3)^2} z = 0;$$

que traite M. Euler p. 306. On a ici

$$\frac{E}{D} + 0, \ \frac{C}{D} = -1, \ \frac{B}{D} = \frac{A}{D} = 0, \ \frac{G}{D} = \frac{6\, x\, (2\, a^3 + x^3)}{(a^3 - x^3)^2}.$$

Les quantités Φ' & Φ'' se déterminent d'après les équations $\partial x \pm \partial y = 0$, ce qui donne $\Phi' = x+y$, $\Phi'' = x-y$,

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) = 1, \ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = 1, \ \left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial y^2}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) = 1, \ \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) = -1, \ \left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Donc $A' = 0$, $A'' = 0$, ce qui donne $\Pi = 1$. On a ensuite

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) = 2, \ \beta = 4.$$

On a ici $B' = \frac{G}{D}$, $\frac{\partial \Phi' + \partial \Phi''}{\beta} = \frac{\partial x}{2}$, donc

$$\Pi' = \int \frac{3x\partial x(2a^3+x^3)}{(a^3-x^3)^2} = \frac{3x^2}{a^3-x^3}, \text{ donc}$$

$$\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) = \frac{3x(2a^3+x^3)}{(a^3-x^3)^2}; \quad \left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right) = \frac{6a^6+42a^3x^3+6x^6}{(a^3-x^3)^3},$$

donc

$$\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi} - \frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + \frac{6x(2a^3+x^3)}{(a^3-x^3)^2}\,\frac{\Pi'}{\Pi}\left(\frac{\partial\Phi'+\partial\Phi''}{\beta}\right)$$

$$= -\frac{(3a^6+3a^3x^3-6x^6)\partial x}{(a^3-x^3)^3} = -\frac{3(a^3+2x^3)\partial x}{(a^3-x^3)^2},$$

dont l'intégrale eſt $-\frac{3x}{a^3-x^3} = \Pi''$. L'Intégrale complette eſt donc

$$z = -\frac{3x}{a^3-x^3}[F:(x+y)+f:(x-y)]$$
$$+\frac{3x^2}{a^3-x^3}[(F':(x+y)+f':(x-y)]$$
$$+F':(x+y)+f'':(x-y).$$

On a

$$\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right) = -\frac{3(a^3+2x^3)}{(a^3-x^3)^2}, \quad \left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right) = -\frac{18x^2(2a^3+x^3)}{(a^3-x^3)^3},$$

ces valeurs ſatisfont à l'équation de condition.

§. 41. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \frac{2(mm-1)aa[m^2\,cos.\,\omega^2 - sin.\,(m\omega+\alpha)^2]}{[m\,cos.\,(m\omega+\alpha)\,cos.\,\omega + sin.\,(m\omega+\alpha)\,sin.\,\omega]^2}\,z = 0,$$

que traite M. Euler p. 315. en faiſant pour abrêger $\omega = ax+b$. On a ici $\frac{E}{D} = 0$, $\frac{C}{D} = -1$, $\frac{B}{D} = \frac{A}{D} = 0$,

$$\frac{G}{D} = \frac{2(mm-1)aa[m^2\,cos.\,\omega^2 - sin.\,(m\omega+\alpha)^2]}{[m\,cos.\,(m\omega+\alpha)\,cos.\,\omega + sin.\,(m\omega+\alpha\,sin.\,\omega]^2}.$$

Les quantités Φ' & Φ'' ſe déterminent d'après les équations $\partial x \pm \partial y = 0$, ce qui donne $\Phi' = x+y$, $\Phi'' = x-y$, donc

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = 1, \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) = 1, \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 1, \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = -1, \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right) = 0.$$

donc

donc $A' = 0$, $A'' = 0$, ce qui donne $\Pi = 1$. On a enſuite,

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) = 2,$$

$\beta = 4$. On a ici $B' = \frac{G}{D}$, $\frac{\partial \Phi' + \partial \Phi''}{\beta} = \frac{\partial x}{2}$, donc

$$\Pi' = \int \frac{(mm - 1)\, a\, a\, [m^2 \, cof.\, \omega^2 - fin.\, (m\omega + \alpha^2)]\, \partial x}{[m\, cof.\, (m\omega + \alpha)\, cof.\, \omega + fin.\, (m\omega + \alpha)\, fin.\, \omega]^2}$$

ou bien à cauſe de $\partial x = \frac{\partial \omega}{a}$

$$\Pi' = \int \frac{(mm - 1)\, a\, [m^2 \, cof.\, \omega^2 - fin.\, (m\omega + a)^2]\, \partial \omega}{[m\, cof.\, (m\omega + \alpha)\, cof.\, \omega + fin.\, (m\omega + \alpha)\, fin.\, \omega]^2}$$

ou bien

$$\Pi' = \frac{(mm - 1)\, a\, fin.\, (m\omega + \alpha)\, cof.\, \omega}{m\, cof.\, (m\omega + \alpha)\, cof.\, \omega + fin.\, (m\omega + \alpha)\, fin.\, \omega}, \text{ donc}$$

$$\left[\frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi} - \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + \frac{G}{D}\frac{\Pi'}{\Pi}\right]\left(\frac{\partial \Phi' + \partial \Phi''}{\beta}\right)$$

$$= - \frac{(mm - 1)\, a\, m\, [m\, fin.\, \omega\, cof.\, \omega\, (m^2\, cof.\, \omega^2 - fin.\, (m\omega + \alpha)^2]}{[m\, cof.\, (m\omega + \alpha)\, cof.\, \omega + fin.\, (m\omega + \alpha)\, fin.\, \omega]^2},$$

dont l'intégrale eſt

$$- \frac{m\, a\, a\, [m\, fin.\, (m\omega + \alpha)\, fin.\, \omega + cof.\, (m\omega + \alpha)\, cof.\, \omega]}{m\, cof.\, (m\omega + \alpha)\, cof.\, \omega + fin.\, (m\omega + \alpha)\, fin.\, \omega} = \Pi''.$$

L'Intégrale complette eſt donc,

$$z = - \frac{m\, a\, a\, [m\, fin.\, (m\omega + \alpha) fin\, \omega + cof.\, (m\omega + \alpha)\, cof.\, \omega}{m\, cof.\, (m\omega + \alpha)\, cof.\, \omega + fin.\, (m\omega + \alpha)\, fin.\, \omega} [F:(x+y) + f:(x-y)]$$

$$+ \frac{(mm - 1)\, a\, fin.\, (m\omega + \alpha)\, cof.\, \omega}{m\, cof.\, (m\omega + \alpha)\, cof.\, \omega + fin.\, (m\omega + \alpha)\, fin.\, \omega} [F':(x+y) + f':(x-y)]$$

$$+ F'':(x+y) + f'':(x-y).$$

Les différentielles de Π'' ſatisfont à l'équation de condition.

§. 42. Si l'une des valeurs de Π eſt $= 0$, on prouvera comme dans le §. 34. que $\Pi = e^{\int \frac{A'\, \partial \Phi'}{\beta}}$,

$$\Pi' = \Pi \int \frac{\partial \Phi''}{\beta}\left[\frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + \frac{E}{D}\frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}\right)}{\Pi} + \frac{C}{D}\frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + \frac{B}{D}\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} + \frac{A}{D}\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} + \frac{G}{D}\right],$$

Π''

$$\Pi'' = \Pi \int \frac{\partial \Phi''}{\beta} \left[\frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + \frac{E}{D} \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x \partial y}\right)}{\Pi} + \frac{C}{D} \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi}, \right.$$

$$\left. + \frac{B}{D} \frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi} + \frac{A}{D} \frac{\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi} + \frac{G}{\Pi} \right],$$

en ſuppoſant Φ' conſtant & par conſequent $\partial \Phi' = 0$. Si l'une des valeurs de Π' eſt $= 0$, l'équation 3 du §. 37. donne

$$G \Pi + A \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + B \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + C \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x^2}\right) + \Pi \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right)$$
$$+ E \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

ce qui étant l'équation de condition du 1er cas, montre que dans ce cas-là l'intégrale complette aura la forme $z = \Pi (F : \Phi' + f : \Phi'')$. Si l'une des valeurs de Π'' eſt $= 0$, l'équation 4 du même §. donne

$$G \Pi' + A \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + B \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + C \left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x^2}\right) + \Pi \left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial y^2}\right)$$
$$+ E \left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

ce qui étant l'équation de condition du 2^e cas, montre que dans ce cas-là, l'intégrale complette aura la forme

$$z = \Pi (F : \Phi' + f : \Phi'') + \Pi' (F' : \Phi' + f' : \Phi'').$$

Le même raiſonnement peut s'appliquer au cas général que nous allons traiter.

§. 43. Soit géneralement la forme

$$z = \Pi^{(n)} F : \Phi + \Pi^{(n-1)} F' : \Phi + \Pi^{(n-2)} F'' : \Phi + \Pi^{(n-3)} F''' : \Phi \ldots$$
$$\ldots + \Pi'' F^{(n-2)} : \Phi + \Pi' F^{(n-1)} : \Phi + \Pi'' F^{(n)} : \Phi,$$

$\Pi, \Pi', \Pi'' \ldots \Pi^{n)}$ étant des fonctions de x & y, & $F' : \Phi$, $F'' : \Phi \ldots . F^{(n)} : \Phi$ étant telles qu'on ait $F' : \Phi = \frac{\partial . F : \Phi}{\partial \Phi}$,

F''

$$F'' : \Phi = \frac{\partial . F' : \Phi}{\partial \Phi},\ F''' : \Phi = \frac{\partial . F'' : \Phi}{\partial \Phi} \ldots\ldots$$

$$F^{(n)} : \Phi = \frac{\partial . F^{(n-1)} : \Phi}{\partial \Phi},$$

on obtiendra en différentiant & procédant comme dans le §. 27. les équations ſuivantes:

$$1.\ C\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + D\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + E\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} 2.\ \Pi \Big[A\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x \partial y}\right)\Big] \\ + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\Big[2C\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\Big] \\ + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\Big[E\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + 2D\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\Big] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.\ G\Pi + A\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x \partial y}\right) \\ + \Pi' \Big[A\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x \partial y}\right)\Big] \\ + \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)\Big[2C\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\Big] + D\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\Big] + \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)\Big[E\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + 2D\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\Big] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.\ G\Pi' + A\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x \partial y}\right) \\ + \Pi'' \Big[A\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x \partial y}\right)\Big] \\ + \left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right)\Big[2C\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\Big] + \left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right)\Big[E\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + 2D\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\Big] = 0. \end{aligned}$$

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

$$\begin{aligned} n.\ G\Pi^{(n-3)} + A\left(\frac{\partial \Pi^{(n-3)}}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Pi^{(n-3)}}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial \Pi^{n-3)}}{\partial x^2}\right) \\ + D\left(\frac{\partial\partial \Pi^{(n-3)}}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial \Pi^{(n-3)}}{\partial x \partial y}\right) \\ + \Pi^{(n-2)}\Big[A\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x \partial y}\right)\Big] \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n-2)}}{\partial\,x}\right)\left[2\,C\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x}\right)+E\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}\right)\right]$$

$$+\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n-2)}}{\partial\,y}\right)\left[E\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x}\right)+2\,D\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}\right)\right]=0,$$

$n+1.$ $$G\,\Pi^{(n-2)}+A\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n-2)}}{\partial\,x}\right)+B\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n-2)}}{\partial\,y}\right)+C\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n-2)}}{\partial\,x^2}\right)$$

$$+D\left[\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n-2)}}{\partial\,y^2}\right)+E\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n-2)}}{\partial\,x\,\partial\,y}\right)\right]$$

$$+\Pi^{(n-1)}\left[A\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x}\right)+B\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}\right)+C\left(\frac{\partial\,\partial\,\Phi}{\partial\,x^2}\right)+D\left(\frac{\partial\,\partial\,\Phi}{\partial\,y^2}\right)+E\left(\frac{\partial\,\partial\,\Phi}{\partial\,x\,\partial\,y}\right)\right]$$

$$+\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n-1)}}{\partial\,x}\right)\left[2\,C\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x}\right)+E\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}\right)\right]$$

$$+\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n-1)}}{\partial\,y}\right)\left[E\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x}\right)+2\,D\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}\right)\right]=0,$$

$n+2.$ $$G\,\Pi^{(n-1)}+A\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n-1)}}{\partial\,x}\right)+B\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n-1)}}{\partial\,y}\right)+C\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n-1)}}{\partial\,x^2}\right)$$

$$+D\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n-1)}}{\partial\,y^2}\right)+E\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n-1)}}{\partial\,x\,\partial\,y}\right)$$

$$+\Pi^{(n)}\left[A\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x}\right)+B\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}\right)+C\left(\frac{\partial\,\partial\,\Phi}{\partial\,x^2}\right)+D\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi}{\partial\,y^2}\right)+E\left(\frac{\partial\,\partial\,\Phi}{\partial\,x\,\partial\,y}\right)\right]$$

$$+\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial\,x}\right)\left[2\,C\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x}\right)+E\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}\right)\right]$$

$$+\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial\,y}\right)+\left[E\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x}\right)+2\,D\left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}\right)\right]=0,$$

$n+3.$ $$G\,\Pi^{(n)}+A\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial\,x}\right)+B\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial\,y}\right)+C\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial\,x^2}\right)$$

$$+D\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial\,y^2}\right)+E\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial\,x\,\partial\,y}\right)=0.$$

§. 44.

§. 44. On prouvera maintenant, comme dans le §. 4. que l'équation 2 est telle que l'on peut, sans nuire à la généralité de la solution, supposer égales les deux valeurs de Π qui résultent de la substitution des valeurs Φ' & Φ'' tirées de l'équation. On prouvera ensuite, comme dans le §. 28. que l'équation 3 est telle que l'on peut supposer égales les deux valeurs de Π' qui résultent des mêmes substitutions. On prouvera comme dans le §. 38. que l'équation 4 est telle que l'on peut supposer égales les deux valeurs de Π'' qui résultent des mêmes substitutions. Et comme chaque équation entraine nécessairement la même chose pour toutes les équations qui suivent jusqu'à l'équation $(n+2)^e$ inclusivement, l'on pourra donc supposer égales les deux valeurs de Π''', Π^{IV} .... $\Pi^{(n)}$ qui résultent des mêmes substitutions, au moyen de quoi l'on pourra donner à l'intégrale la forme

$$z = \Pi^{(n)}(F:\Phi' + f:\Phi'') + \Pi^{(n-1)}(F':\Phi' + f':\Phi'') + \Pi^{(n-2)}(F'':\Phi' + f'':\Phi'')$$

— — — — — — — — —

$$+ \Pi''(F^{(n-2)}:\Phi' + f^{(n-2)}:\Phi'') + \Pi'(F^{(n-1)}:\Phi' + f^{(n-1)}:\Phi'') + \Pi(F^{(n)}:\Phi' + f^{(n)}:\Phi'').$$

§. 45. Conservant maintenant les dénominations des §. 29 & 39, & y ajoutant celles-ci:

$$B''' = G + A\frac{\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''} + B\frac{\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''} + C\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi''} + D\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi''} + E\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi''}{\partial x\,\partial y}\right)}{\Pi''}$$

— — — — — — — — — —

$$B^{(n)} = G + A\,\frac{\left(\frac{\partial \Pi^{(n-1)}}{\partial x}\right)}{\Pi^{(n-1)}} + B\,\frac{\left(\frac{\partial \Pi^{(n-1)}}{\partial x}\right)}{\Pi^{(n-1)}} + C\,\frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi^{(n-1)}}{\partial x^2}\right)}{\Pi^{(n-1)}}$$

$$+ D\,\frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi^{(n-1)}}{\partial y^2}\right)}{\Pi^{(n-1)}} + E\,\frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi^{(n-1)}}{\partial x \partial y}\right)}{\Pi^{(n-1)}}$$

$$B^{(n+1)} = G + A\,\frac{\left(\frac{\partial \Pi^{(n)}}{\partial x}\right)}{\Pi^{(n)}} + B\,\frac{\left(\frac{\partial \Pi^{(n)}}{\partial y}\right)}{\Pi^{(n)}} + C\,\frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi^{(n)}}{\partial x^2}\right)}{\Pi^{(n)}}$$

$$+ D\,\frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi^{(n)}}{\partial y^2}\right)}{\Pi^{(n)}} + E\,\frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi^{(n)}}{\partial x \partial y}\right)}{\Pi^{(n)}}$$

$$a^{(3)} = B'''\,\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right]}{\beta},\quad b^{(3)} = B'''\,\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]}{\beta}$$

— — — — — — — — —

$$a^{(n)} = B^{(n)}\,\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right]}{\beta},\quad b^{(n)} = B^{(n)}\,\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]}{\beta}$$

$$a^{(n+1)} = B^{(n+1)}\,\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right]}{\beta},\quad b^{(n+1)} = B^{(n+1)}\,\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]}{\beta},$$

ſubſtituant Φ' & Φ'' dans le équations du 43. on obtient,

$$\alpha'\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + a'\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + A'\,\Pi = 0,$$

$$\alpha''\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + a''\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + A''\,\Pi = 0,$$

$$\alpha'\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + a'\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + A'\,\Pi' + B'\,\Pi = 0;$$

$$\alpha''\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + a''\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + A''\,\Pi' + B'\,\Pi = 0;$$

α'

$$\alpha'\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right) + a''\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right) + A'\,\Pi'' + B''\,\Pi' = 0,$$

$$\alpha''\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right) + a''\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right) + A''\,\Pi'' + B''\,\Pi' = 0,$$

— — — — — — — —

$$\alpha'\left(\frac{\partial \Pi^{(n-1)}}{\partial y}\right) + a'\left(\frac{\partial \Pi^{(n-1)}}{\partial x}\right) + A'\,\Pi^{(n-1)} + B^{(n-1)}\,\Pi^{(n-2)} = 0,$$

$$\alpha''\left(\frac{\partial \Pi^{(n-1)}}{\partial y}\right) + a''\left(\frac{\partial \Pi^{(n-1)}}{\partial x}\right) + A''\,\Pi^{(n-1)} + B^{(n-1)}\,\Pi^{(n-2)} = 0,$$

$$\alpha'\left(\frac{\partial \Pi^{(n)}}{\partial y}\right) + a'\left(\frac{\partial \Pi^{(n)}}{\partial x}\right) + A'\,\Pi^{(n)} + B^{(n)}\,\Pi^{(n-1)} = 0,$$

$$\alpha''\left(\frac{\partial \Pi^{(n)}}{\partial y}\right) + a''\left(\frac{\partial \Pi^{(n)}}{\partial x}\right) + A''\,\Pi^{(n)} + B^{(n)}\,\Pi^{(n-1)} = 0,$$

$$B^{(n+1)} = 0.$$

Ces équations combinées deux à deux, comme dans le §. 30. donnent aprés les reductions,

$$\partial \Pi = (a\,\partial x + b\,\partial y)\,\Pi,$$

$$\partial \Pi' - (a\,\partial x + b\,\partial y)\,\Pi' = (a^{(1)}\,\partial x + b^{(1)}\,\partial y)\,\Pi,$$

$$\partial \Pi'' - (a\,\partial x + b\,\partial y)\,\Pi'' = (a^{(2)}\,\partial x + b^{(2)}\,\partial y)\,\Pi',$$

$$\partial \Pi''' - (a\,\partial x + b\,\partial y)\,\Pi''' = (a^{(3)}\,\partial x + b^{(3)}\,\partial y)\,\Pi'',$$

$$\partial \Pi^{IV} - (a\,\partial x + b\,\partial y)\,\Pi^{IV} = (a^{(4)}\,\partial x + b^{(4)}\,\partial y)\,\Pi''',$$

— — — — — — — — —

$$\partial \Pi^{(n-2)} - (a\,\partial x + b\,\partial y)\,\Pi^{(n-2)} = (a^{(n-2)}\,\partial x + b^{(n-2)}\,\partial y)\,\Pi^{(n-3)},$$

$$\partial \Pi^{(n-1)} - (a\,\partial x + b\,\partial y)\,\Pi^{(n-1)} = (a^{(n-1)}\,\partial x + b^{(n-1)}\,\partial y)\,\Pi^{(n-2)},$$

$$\partial \Pi^{(n)} - (a\,\partial x + b\,\partial y)\,\Pi^{(n)} = (a^{(n)}\,\partial x + b^{(n)}\,\partial y)\,\Pi^{(n-1)},$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\Pi = e^{\int(a\partial x + b\partial y)},$$

$$\Pi' = e^{\int(a\partial x + b\partial y)}\int e^{-\int(a\partial x + b\partial y)}(a^{(1)}\partial x + b^{(1)}\partial y)\,\Pi,$$

$$\Pi'' = e^{\int(a\partial x + b\partial y)}\int e^{-\int(a\partial x + b\partial y)}(a^{(2)}\partial x + b^{(2)}\partial y)\,\Pi',$$

$$\Pi''' = e^{\int(a\partial x + b\partial y)}\int e^{-\int(a\partial x + b\partial y)}(a^{(3)}\partial x + b^{(3)}\partial y\,\Pi'',$$

$$\Pi^{\mathrm{IV}} = e^{\int(a\partial x + b\partial y)}\int e^{-\int(a\partial x + b\partial y)}(a^{(4)}\partial x + b^{(4)}\partial y)\,\Pi'''.$$

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

$$\Pi^{(n)} = e^{\int(a\partial x + b\partial y)}\int e^{-\int(a\partial x + b\partial y)}(a^{(n)}\partial x + b^{(n)}\partial y)\,\Pi^{(n-1)}.$$

Or $a\partial x + b\partial y = \frac{A'\partial\Phi'' + A''\partial\Phi'}{\beta}$,

$$a^{(1)}\partial x + b^{(1)}\partial y = \left(\frac{\partial\Phi' + \partial\Phi''}{\beta}\right)\left[G + A\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} + B\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} + C\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + D\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + E\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi}\right]$$

$$a^{(2)}\partial x + b^{(2)}\partial y = \left(\frac{\partial\Phi' + \partial\Phi''}{\beta}\right)\left[G + A\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'} + B\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'} + C\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'} + D\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'} + E\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi'}\right]$$

$$a^{(3)}\partial x + b^{(3)}\partial y = \left(\frac{\partial\Phi' + \partial\Phi''}{\beta}\right)\left[G + A\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi''} + B\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi''} + C\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi''} + D\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi''} + E\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi''}\right]$$

— — — — — — — — — —

$$a^{(n)}\partial x + b^{(n)}\partial y = \left(\frac{\partial\Phi' + \partial\Phi''}{\beta}\right)\left[G + A\,\frac{\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n-1)}}{\partial x}\right)}{\Pi^{(n-1)}}\right.$$

$$+ B\,\frac{\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n-1)}}{\partial y}\right)}{\Pi^{(n-1)}} + C\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\,\Pi^{(n-1)}}{\partial x^2}\right)}{\Pi^{(n-1)}} + D\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\,\Pi^{(n-1)}}{\partial y^2}\right)}{\Pi^{(n-1)}}$$

$$\left.+ E\,\frac{\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n-1)}}{\partial x\,\partial y}\right)}{\Pi^{(n-1)}}\right].$$

Substituant ces valeurs dans les formules intégrales, on a

$$\Pi = e^{\frac{\int (A'\partial\Phi'' + A''\partial\Phi')}{\beta}},$$

$$\Pi' = \Pi\int\left[G + A\,\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} + B\,\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}\right.$$

$$\left. + C\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + D\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + E\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)}{\Pi}\right]\left(\frac{\partial\Phi' + \partial\Phi''}{\beta}\right),$$

$$\Pi'' = \Pi\int\left[\frac{G\,\Pi'}{\Pi} + A\,\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi} + B\,\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi}\right.$$

$$\left. + C\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + D\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + E\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\,\partial y}\right)}{\Pi}\right]\left(\frac{\partial\Phi' + \partial\Phi''}{\beta}\right),$$

$$\Pi''' = \Pi\int\left[\frac{G\,\Pi''}{\Pi} + A\,\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)}{\Pi} + B\,\frac{\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)}{\Pi}\right.$$

$$\left. + C\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + D\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + E\,\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\,\partial y}\right)}{\Pi}\right]\left(\frac{\partial\Phi' + \partial\Phi''}{\beta}\right),$$

Π^{IV}

$$\Pi^{\text{IV}} = \Pi \int \left[\frac{G\,\Pi'''}{\Pi} + A \frac{\left(\frac{\partial \Pi'''}{\partial x}\right)}{\Pi} + B \frac{\left(\frac{\partial \Pi'''}{\partial y}\right)}{\Pi} + C \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'''}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + D \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'''}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + E \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi'''}{\partial x \partial y}\right)}{\Pi} \right] \left(\frac{\partial \Phi' + \partial \Phi''}{\beta} \right),$$

— — — — — — — — —

$$\Pi^{(n-1)} = \Pi \int \left[\frac{G\,\Pi^{(n-2)}}{\Pi} + A \frac{\left(\frac{\partial \Pi^{(n-2)}}{\partial x}\right)}{\Pi} + B \frac{\left(\frac{\partial \Pi^{(n-2)}}{\partial y}\right)}{\Pi} + C \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi^{(n-2)}}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + D \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi^{(n-2)}}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + E \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi^{(n-2)}}{\partial x \partial y}\right)}{\Pi} \left(\frac{\partial \Phi' + \partial \Phi''}{\beta} \right) \right].$$

$$\Pi^{(n)} = \Pi \int \left[\frac{G\,\Pi^{(n-1)}}{\Pi} + A \frac{\left(\frac{\partial \Pi^{(n-1)}}{\partial x}\right)}{\Pi} + B \frac{\left(\frac{\partial \Pi^{(n-1)}}{\partial y}\right)}{\Pi} + C \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi^{(n-1)}}{\partial x^2}\right)}{\Pi} + D \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi^{(n-1)}}{\partial y^2}\right)}{\Pi} + E \frac{\left(\frac{\partial \partial \Pi^{(n-1)}}{\partial x \partial y}\right)}{\Pi} \left(\frac{\partial \Phi' + \partial \Phi''}{\beta} \right) \right],$$

& l'équation de condition ſera,

G

$$G\,\Pi^{(n)} + A\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial\,x}\right) + B\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial\,y}\right) + C\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial\,x^2}\right)$$
$$+ D\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial\,y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial\,x\,\partial\,y}\right) = 0.$$

Si cette équation de condition est remplie, en aura l'intégrale complette, sinon, on aura une suite infinie qui pourra satisfaire, si elle est suffisamment convergente.

§. 46. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial\,\partial\,z}{\partial\,y^2}\right) - \frac{b\,b}{a\,a}\left(\frac{\partial\,\partial\,z}{\partial\,x^2}\right) - \frac{2\,b\,b\,m}{a\,a\,x}\left(\frac{\partial\,z}{\partial\,x}\right) = 0,$$

que M. Euler propose p. 280. & qui contient le résultat de la theorie de la propagation du son. Nous aurons ici $D = 1$, $C = -\frac{b\,b}{a\,a}$, $E = 0$, $A = -\frac{2\,b\,b\,m}{a\,a\,x}$, $B = 0$, $G = 0$. Les quantités Φ' & Φ'' se déterminent d'aprés les équations $a\,\partial\,x \pm b\,\partial\,y = 0$, ce qui donne $\Phi' = a\,x + b\,y$,

$$\Phi'' = a\,x - b\,y,\ \left(\frac{\partial\,\Phi'}{\partial\,x}\right) = a,\ \left(\frac{\partial\,\Phi'}{\partial\,y}\right) = b,$$
$$\left(\frac{\partial\,\partial\,\Phi'}{\partial\,x^2}\right) = \left(\frac{\partial\,\partial\,\Phi'}{\partial\,x\,\partial\,y}\right) = \left(\frac{\partial\,\partial\,\Phi'}{\partial\,y^2}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial\,\Phi''}{\partial\,x}\right) = a,\ \left(\frac{\partial\,\Phi''}{\partial\,y}\right) = -b,$$
$$\left(\frac{\partial\,\partial\,\Phi''}{\partial\,x^2}\right) = \left(\frac{\partial\,\partial\,\Phi''}{\partial\,x\,\partial\,y}\right) = \left(\frac{\partial\,\partial\,\Phi''}{\partial\,y^2}\right) = 0,$$

donc $A' = A'' = -\frac{2\,b^2\,m}{a\,x}$, $\beta = \frac{4\,a^2\,b^2}{a^2} = 4\,b^2$,

$$\partial\,\Phi' + \partial\,\Phi'' = 2\,a\,\partial\,x,$$
$$\Pi = e^{\int -\frac{m\,\partial\,x}{x}} = e^{l\,x^{-m}} = x^{-m},\ \text{donc}$$
$$\left(\frac{\partial\,\Pi}{\partial\,x}\right) = -m\,x^{-m-1},\ \left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi}{\partial\,x^2}\right) = m\,(m+1)\,x^{-m-2},$$
$$\frac{\left(\frac{\partial\,\Pi}{\partial\,x}\right)}{\Pi} = -m\,x^{-1},\ \frac{\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi}{\partial\,x^2}\right)}{\Pi} = m\,(m+1)\,x^{-2},$$

$$\Pi' = x^{-m} \int \left(\frac{2\,b\,b\,m^2}{a\,a} - \frac{m\,(m+1)\,b\,b}{a\,a} \right) \frac{x^{-2}\,a\,\partial x}{2\,b^2}$$

$$= x^{-m} \int \frac{m\,(m-1)\,x^{-2}\,\partial x}{2\,a} = \frac{-\,m\,(m-1)}{2\,a}\,x^{-m-1},$$

Donc $\left(\frac{\partial\,\Pi'}{\partial\,x}\right) = \frac{m\,(m-1)\,(m+1)}{2\,a}\,x^{-m-2},$

$$\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi'}{\partial\,x^2}\right) = -\,\frac{m\,(m-1)\,(m+1)\,(m+2)}{2\,a}\,x^{-m-3},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\,\Pi'}{\partial\,x}\right)}{\Pi} = \frac{m\,(m-1)\,(m+1)}{2\,a}\,x^{-2},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi'}{\partial\,x^2}\right)}{\Pi} = -\,\frac{m\,(m-1)\,(m+1)\,(m+2)}{2\,a^3}\,x^{-3}$$

$$\Pi'' = x^{-m} \int \left(-\,\frac{2\,b\,b\,m^2\,(m-1)\,(m+1)}{2\,a^3} + \frac{b\,b\,(m-1)\,(m+1)\,(m+2)}{2\,a^3} \right) \times$$

$$\times\ \frac{x^{-x}\,a\,\partial x}{2\,b^2} = x^{-m} \int -\,\frac{m\,(m^2-1)\,(m-2)}{4\,a^2}\,x^{-3}\,\partial x$$

$$= \frac{m\,(m^2-1)\,(m-2)}{2\,.\,2^2\,a^2}\,x^{-m-2}.$$

donc

$$\left(\frac{\partial\,\Pi''}{\partial\,x}\right) = -\,\frac{m\,(m^2-1)\,(m^2-4)}{2\,.\,2^2\,.\,a^2}\,x^{-m-3}.$$

$$\left(\frac{\partial\,\partial\,\Pi''}{\partial\,x^2}\right) = \frac{m\,(m^2-1)\,(m^2-4)\,(m+3)}{2\,.\,2^2\,.\,a^2}\,x^{-m-4},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\,\Pi''}{\partial\,x}\right)}{\Pi} = \frac{-\,m\,(m^2-1)\,(m^2-4)}{2\,.\,2^2\,.\,a^2}\,x^{-3}$$

$(\partial\,\partial\,\Pi'')$

$$\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi} = \frac{m(m^2-1)(m^2-4)(m+3)}{2 \cdot 2^2 \cdot a^2} x^{-4};$$

$$\Pi''' = x^{-m} \int \left(\frac{bbm^2(m^2-1)(m^2-4)}{2 \cdot 2^2 \cdot a^4} - \frac{bbm(m^2-1)(m^2-4)(m+3)}{2 \cdot 2^2 \cdot a^2} \right) \times$$

$$\times \frac{x^{-4} \cdot a\,\partial x}{2\,b^2} = x^{-m} \int \frac{m(m^2-1)(m^2-4)(m-3)}{2 \cdot 2^3 \cdot a^3} x^{-4} \partial x$$

$$= -\frac{m(m^2-1)(m^2-4)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot a^3} x^{-m-3}.$$

L'analogie eſt maintenant évidente, & l'on aura

$$\Pi^{(n)} = \pm \frac{m(m^2-1)(m^2-4) \ldots [m^2-(n-1)^2](m-n)}{2 \cdot 3 \ldots n \cdot 2^n \cdot a^n} x^{-m-n},$$

donc

$$\left(\frac{\partial \Pi^{(n)}}{\partial x}\right) = \mp \frac{m(m^2-1)(m^2-4) \ldots [m^2-(n-1)^2](m^2-n^2)}{2 \cdot 3 \ldots n \cdot 2^n \cdot a^n} x^{-m-n-1},$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi^{(n)}}{\partial x^2}\right) = \pm \frac{m(m^2-1)(m^2-4) \ldots [m^2-(n-1)^2](m^2-n^2)(m+n+1)}{2 \cdot 3 \ldots n \cdot 2^n \cdot a^n} x^{-m-n-2}.$$

L'équation de condition donnera donc

$$\frac{m(m^2-1)(m^2-4) \ldots [m-(n-1)^2](m^2-n^2)(m-n-1)}{2 \cdot 3 \ldots n \cdot 2^n \cdot n^n} = 0.$$

On remarquera que ce facteur eſt égal au facteur de $\Pi^{(n)}$ multiplié par $(m+n)(m-n-1)$. Afin donc que la ſérie ſe termine à $\Pi^{(n)}$, il faut qu'on ait $(m+n)(m-n-1)=0$, ce qui donne $m+n=0$, $m-n-1=0$, ou $m=-n$, $m=n+1$. Si l'une de ces conditions n'a pas lieu, la ſérie va à l'infini, c'eſt à dire que l'on ne peut pas mettre l'intégrale ſous une forme finie. L'on aura donc en général,

$$z = \frac{m(m^2-1)(m^2-4)\ldots[m^2-(n-1)^2](m-n)}{1.2.3\ldots n.2^n.a^n} x^{-m-n} \times$$
$$[F:(ax+by)+f:(ax-by)]$$
$$-\frac{m(m^2-1)(m^2-4)\ldots[m^2-(n-2)^2](m-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1).2^{n-1}a^{n-1}} x^{-m-n+1} \times$$
$$[F':(ax+by)+f':(ax-by)]$$
$$+\frac{m(m^2-1)(m^2-4)\ldots[m^2-(n-3)^2](m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-2)2^{n-2}a^{n-2}} x^{-m-n+2} \times$$
$$[F'':(ax+by)+f'':(ax-by)]$$

— — — — — — — — —

$$\pm\frac{m(m^2-1)(m-2)}{2.2^2.a^2}(F^{(n-2)}:\Phi'+f^{(n-2)}:\Phi'')$$
$$\pm\frac{m(n-1)}{2}x^{-m-1}(F^{(n-1)}:\Phi'+f^{(n-1)}:\Phi'')$$
$$\pm x^{-m}(F^{(n)}:\Phi'+f^{(n)}\Phi'').$$

§. 47. Soit maintenant $m = -n$, on aura en ſubſtituant cette valeur, & effaçant dans chaque terme ce qui ſe détruit,

$$z = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{2^n.n^n}[F:(ax+by)+f:(ax-by)]$$
$$-\frac{n(n+1)\ldots\ldots(2n-1)}{2^{n-1}a^{n-1}}x[F':(ax+by)+f':(ax-by)]$$

+

$$+\frac{(n-1)\,n\,\ldots\,(2n-2)}{2^{n-2}\,a^{n-2}}\,x^2\,[F'':(ax+by)+f'':(ax+by)]$$

— — — — — — — — —

$$\pm\frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}{2.\,4.\,a^2}\,x^{n-2}[F^{(n-2)}:(ax+by)+f^{(n-2)}:(ax-by)]$$

$$\mp\frac{n\,(n+1)}{2\,a}\,x^{n-1}\,[F^{(n-1)}:(ax+by)+f^{(n-1)}:(ax-by)]$$

$$\pm\,x^n\,[F^{(n)}:(ax+by)+f^{(n)}:(ax-by)].$$

Soit ensuite $m=n+1$, on aura de même en substituant,

$$z=\frac{(n+1)(n+2)\,\ldots\,2n}{2^n\,a^n}\,x^{-2n-1}[F:(ax+by)+f:(ax-by)]$$

$$-\frac{n(n+1)\,\ldots\,(2n-1)}{2^{n-1}\,a^{n-1}}\,x^{-2n}\,[F':(ax+by)+f':(ax-by)]$$

$$+\frac{(n-1)\,n\,\ldots\,(2n-2)}{2^{n-2}\,a^{n-2}}\,x^{-2n+1}[F'':(ax+by)+f'':(ax-by)]$$

— — — — — — — — — —

$$\pm\frac{(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)}{2\,.\,4\,a}\,x^{-n-3}\,[F^{(n-2)}(ax+by)+f^{(n-2)}:(ax-by)]$$

$$\mp\frac{n\,(n+1)}{2\,a}\,x^{-n-2}\,[F^{(n-1)}:(ax+by)+f^{(n-1)}:(ax-by)]$$

$$\pm\,x^{-n-1}\,[F^{(n)}:(ax+by)+f^{(n)}:(ax-by)].$$

§. 48. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)-\frac{bb}{aa}\,x^{\frac{4m}{2m-1}}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)=0,$$

que M. Euler propose p. 282. & qui résulte de l'Analyse

 du

du mouvement des cordes d'une épaisseur inégale. Nous aurons ici $D = 1$, $C = -\frac{bb}{aa} x^{\frac{4m}{2m-1}}$, $E = A = B = G = 0$. Les quantités Φ' & Φ'' se déterminent d'après les équations $a\,\partial x \pm b\,x^{\frac{2m}{2m-1}}\,\partial y = 0$, ce qui donne

$$\Phi' = (1-2m)\,a\,x^{-\frac{1}{2m-1}} + by,$$

$$\Phi'' = (1-2m)\,a\,x^{-\frac{1}{2m-1}} - by,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) = a\,x^{-\frac{2m}{2m-1}},\quad \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = b,$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x^2}\right) = \frac{-2am}{2m-1}\,x^{-\frac{4m+1}{2m-1}},\quad \left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x\,\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial y^2}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) = a\,x^{-\frac{2m}{2m-1}},\quad \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) = -b,$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right) = \frac{-2am}{2m-1}\,x^{-\frac{4m+1}{2m-1}},\quad \left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x\,\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Donc

$$A' = A'' = \frac{2bbm}{a(2m-1)}\,x^{\frac{1}{2m-1}},$$

$$\beta = \frac{4\,a^2\,b^2\,x^{-\frac{4m}{2m-1}}}{a^2\,x^{-\frac{4m}{2m-1}}} = 4\,b^2,$$

$$\partial \Phi' + \partial \Phi'' = 2\,a\,x^{\frac{-2m}{2m-1}}\,\partial x,\ \text{donc}$$

$$\Pi = e^{\int \frac{m}{m-1}\cdot\frac{\partial x}{x}} = x^{\frac{m}{2m-1}},$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) = \frac{m}{2m-1}\,x^{\frac{1-m}{2m-1}},$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right) = \frac{m(1-m)}{(2m-1)^2}\,x^{\frac{2-3m}{2m-1}},$$

∂∂

$$\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi} = \frac{m(1-m)}{(2m-1)^2}\, x^{\frac{2-4m}{2m-1}} = \frac{m(1-m)}{(2m-1)^2}\, x^{-2},$$

$$\Pi' = x^{\frac{m}{2m-1}} \int \frac{-2a}{4b^2}\, x^{\frac{-2m}{2m-1}} \partial x \,.\, \frac{bb\, m(1-m)}{aa(2m-1)^2}\, x^{\frac{2}{2m-1}}$$

$$= x^{\frac{m}{2m-1}} \int \frac{-m(1-m)}{2a(2m-1)^2}\, x^{\frac{2-2m}{2m-1}} \partial x$$

$$= \frac{m(1-m)(1-2m)}{2a(2m-1)^2}\, x^{\frac{m+1}{2m-1}}, \text{ donc}$$

$$\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) = \frac{m(m+1)(1-m)(1-2m)}{2a(2m-1)^3}\, x^{\frac{2-m}{2m-1}},$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right) = \frac{m(m+1)(1-m)(2-m)(1-2m)}{2a(2m-1)^4}\, x^{\frac{3-3m}{2m-1}},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi} = \frac{m(m+1)(1-m)(2-m)(1-2m)}{2a(2m-1)^4}\, x^{\frac{3-4m}{2m-1}},$$

$$\Pi'' = x^{\frac{m}{2m-1}} \int \frac{-2a}{4b^2}\, x^{\frac{-2m}{2m-1}} \partial x \,.\, \frac{bb}{aa} \,.\, \frac{m(m+1)(1-m)(2-m)(1-2m)}{2a(2m-1)^4}\, x^{\frac{3}{2m-1}}$$

$$= x^{\frac{m}{2m-1}} \int \frac{-m(m+1)(1-m)(2-m)(1-2m)}{4a^2(2m-1)^4}\, x^{\frac{3-2m}{2m-1}} \partial x$$

$$= \frac{m(m+1)(1-m)(2-m)(1-2m)^2}{2.4a^2(2m-1)^4}\, x^{\frac{m+2}{2m-1}}.$$

On peut ſimplifier ces formules en mettant

$$\Pi' = \frac{m(m-1)}{2a(2m-1)}\, x^{\frac{m+1}{2m-1}},$$

$$\Pi'' = \frac{m(m+1)(m-1)(m-2)}{2.4a^2(2m-1)^2}\, x^{\frac{m+2}{2m-1}},$$

$$\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right) = \frac{m(m+1)(m+2)(m-1)(m-2)}{2.4a^2(2m-1)^3}\, x^{\frac{3-m}{2m-1}},$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi''}{\partial x^2}\right) = -\frac{m(m+1)(m+2)(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4a^2(2m-1)^4}\, x^{\frac{4-3m}{2m-1}},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\partial \Pi''}{\partial x^2}\right)}{\Pi} = -\frac{m(m+1)(m+2)(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4a^2(2m-1)^4}\, x^{\frac{4-4m}{2m-1}},$$

$\Pi''' =$

$$\Pi''' = x^{\frac{m}{2m-1}} \int \frac{m(m+1)(m+2)(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4\,a^2} \cdot \frac{bb}{aa}\, x^{\frac{4}{2m-1}} \cdot \frac{2a}{4b^2}\, x^{\frac{-2m}{2m-1}}\, \partial x$$

$$= x^{\frac{m}{2m-1}} \int \frac{m(m+1)(m+2)(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 2^3 \cdot a^3 (2m-1)^4}\, x^{\frac{4-2m}{2m-1}}\, \partial x$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 2^3 (2m-1)^3 a^3}\, x^{\frac{m+3}{2m-1}}.$$

L'analogie eſt maintenant évidente, & l'on aura

$$\Pi^{(n)} = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{2.\,3\ldots.n.\,2^n\,(2m-1)^n\,a^n}\, x^{\frac{m+n}{2m-1}},$$

donc

$$\left(\frac{\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial x}\right) = \frac{m(m+1)\ldots(m+n)(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{2.\,3\ldots n.\,2^n\,(2m-1)^{n+1}\,a^n}\, x^{\frac{n-m+1}{2m-1}},$$

$$\left(\frac{\partial\partial\,\Pi^{(n)}}{\partial x^2}\right) = -\frac{m(m+1)\ldots(m+n)(m-1)(m-2)\ldots(m-n)(m-n-1)}{2.\,3.n.\,2^n\,(2m-1)^{n+2}\,a^n} = 0.$$

On voit par là que ce terme eſt égal au précédent multiplié par $(m+n)(m-n-1)$. Afin donc que la ſuite finiſſe à ce terme, il faut que $(m+n)(m-n-1) = 0$, ce qui donne $m = -n$, $m = n+1$. On aura donc en général,

$$z = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{2.\,3\ldots.n.\,2^n\,(2m-1)^n\,a^n}\, x^{\frac{m+n}{2m-1}} \times (F:\Phi' + f:\Phi'')$$

$$- \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{2.\,3\ldots.(n-1).\,2^{n-1}\,(2m-1)^{n-1}\,a^{n-1}}\, x^{\frac{m+n-1}{2m-1}} \times (F':\Phi' + f':\Phi'')$$

$$+ \frac{m(m+1)\ldots(m+n-3)(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{2.\,3\ldots.(n-2).\,2^{n-2}\,(2m-1)^{n-2}\,a^{n-2}}\, x^{\frac{m+n-2}{2m-1}} \times (F'':\Phi' + f'':\Phi'')$$

— — — — — — — — — —

$$\pm \frac{m(m+1)(m-1)(m-2)}{2.4\,a^2(2m-1)^2} x^{\frac{m+2}{2m-1}} (F^{(n-2)}:\Phi' + f^{(n-2)}:\Phi'')$$

$$\mp \frac{m(m-1)}{2a(2m-1)} x^{\frac{m+1}{2m-1}} (F^{(n-1)}:\Phi' + f^{(n-1)}:\Phi'')$$

$$\pm x^{\frac{m}{2m-1}} (F^{(n)}:\Phi' + f^{(n)}:\Phi'').$$

Soit $m = -n$, on aura

$$\Phi' = (2n+1)\,a\,x^{\frac{1}{2n+1}} + by,$$

$$\Phi'' = (2n+1)\,a\,x^{\frac{1}{2n+1}} - by,$$

& l'intégrale complette deviendra,

$$z = \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots 2n}{2^n a^n (2n+1)^n} (F:\Phi' + f:\Phi'')$$

$$- \frac{n(n+1)\ldots\ldots(2n-1)}{2^{n-1} a^{n-1} (2n+1)^{n-1}} x^{\frac{1}{2n+1}} (F':\Phi' + f':\Phi'')$$

$$+ \frac{(n-1)n\ldots\ldots(2n-2)}{2^{n-2} a^{n-2} (2n+1)^{n-2}} x^{\frac{2}{2n+1}} (F'':\Phi' + f'':\Phi'')$$

— — — — — — — — —

$$\pm \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2.4\,a^2(2n+1)^2} x^{\frac{n-2}{2n-1}} (F^{(n-2)}:\Phi' + f^{(n-2)}:\Phi'')$$

$$\mp \frac{n(n+1)}{2a(2n+1)} x^{\frac{n-1}{2n-1}} (F^{(n-1)}:\Phi' + f^{(n-1)}:\Phi'')$$

$$\pm x^{\frac{n}{2n-1}} (F^{(n)}:\Phi' + f^{(n)}:\Phi'').$$

Soit ensuite $m = n+1$, on aura

$$\Phi' = -(2n+1)\,a\,x^{-\frac{1}{2n-1}} + by,$$

$$\Phi'' = -(2n+1)\,a\,x^{-\frac{1}{2n-1}} - by,$$

enforte que Φ' & Φ'' peuvent conferver les mêmes valeurs que dans le cas précédent. On aura donc dans ce cas

$$z = \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots 2n}{2^n\,a^n\,(2n+1)^n}\,x^{\frac{2n+1}{2n+1}}\,(F:\Phi' + f:\Phi'')$$

$$-\frac{n(n+1)\ldots\ldots(2n-1)}{2^{n-1}\,a^{n-1}\,(2n+1)^{n-1}}\,x^{\frac{2n}{2n+1}}\,(F':\Phi' + f':\Phi'')$$

$$+\frac{(n-1)\,n\ldots\ldots(2n-2)}{2^{n-2}\,a^{n-2}\,(2n+1)^{n-2}}\,x^{\frac{2n-1}{2n+1}}\,(F'':\Phi' + f'':\Phi'')$$

— — — — — — — — —

$$\pm\frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}{2.\,4\,a^2\,(2n+1)^2}\,x^{\frac{n+3}{2n+1}}\,(F^{(n-2)}:\Phi' + f^{(n-2)}:\Phi'')$$

$$\mp\frac{n(n+1)}{2a(2n+1)}\,x^{\frac{n+2}{2n+1}}\,(F^{(n-1)}:\Phi' + f^{(n-1)}:\Phi'')$$

$$\pm\, x^{\frac{n+1}{2n+1}}\,(F^{(n)}:\Phi' + f^{(n)}:\Phi'').$$

§. 49. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{m}{x+y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{m}{x+y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{n}{(x+y)^2}\,z = 0,$$

que M. Euler propofe p. 262. On trouve dans ce cas là, $D = 0$, $E = 1$, $C = 0$, $A = \frac{m}{x+y}$, $B = \frac{m}{x+y}$, $G = \frac{n}{(x+y)^2}$. L'équation 1. donne dans ce cas, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0$, ce qui donne $\Phi' = x$, $\Phi'' = y$,

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) = 0,\ \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 0,\ \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) = 0,$$

on a $A' = A'' = \frac{m}{x+y}$, $\partial\Phi' + \partial\Phi'' = \partial x + \partial y$. La quantité

tité β devient dans ce cas infinie, parce qu'elle se trouve divisée par o. Il faut donc reprendre les équations 3. & 4. du §. 1. en y faisant $\Pi' = \Pi'' = \Pi$. L'équation 3. donne $\frac{\partial \Pi}{\partial y} + \frac{m \Pi}{x+y} = 0$, & l'équation 4. donne $(\frac{\partial \Pi}{\partial x}) = \frac{m \Pi}{x+y} = 0$. Multipliant la premiere par ∂y, la seconde par ∂x, & ajoutant ces deux équations, on a $\frac{\partial \Pi}{\Pi} + \frac{m(\partial x + \partial y)}{x+y} = 0$, ce qui donne $\Pi = (x+y)^{-m}$, d'où l'on voit qu'on aurait du supposer $\beta = -1$. On a donc

$$(\frac{\partial \Pi}{\partial x}) = -m(x+y)^{-m-1},$$
$$(\frac{\partial \Pi}{\partial y}) = -m(x+y)^{-m-1},$$
$$(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}) = m(m+1)(x+y)^{-m-2},$$
$$\frac{(\frac{\partial \Pi}{\partial x})}{\Pi} = -m(x+y)^{-1},$$
$$\frac{(\frac{\partial \Pi}{\partial y})}{\Pi} = -m(x+y)^{-1},$$
$$\frac{(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y})}{\Pi} = m(m+1)(x+y)^{-2},$$

$$\Pi' = (x+y)^{-m} \int -(\partial x + \partial y)\left[\frac{n}{(x+y)^2} - \frac{2m^2}{(x+y)^2} + \frac{m(m+1)}{(x+y)^2}\right] =$$
$$(x+y)^{-m} \int \frac{(-n+m-m^2)(\partial x + \partial y)}{(x+y)^2} = (n+m-m^2)(x+y)^{-m-1},$$

donc

$$(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}) = -(m+1)(n+m-m^2)(x+y)^{-2} = (\frac{\partial \Pi'}{\partial y}),$$
$$(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x \partial y}) = (m+1)(m+2)(n+m-m^2)(x+y)^{-m-3},$$
$$\frac{(\frac{\partial \Pi'}{\partial x})}{\Pi} = \frac{(\frac{\partial \Pi'}{\partial y})}{\Pi} = -(m+1)(n+m-m^2)(x+y)^{-2},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\,\partial y}\right)}{\Pi} = (m+1)(m+2)(n+m-m^2)(x+y)^{-3},$$

$$\Pi'' = (x+y)^{-m}\int -(\partial x+\partial y)\left[\frac{n(n+m-m^2)}{(x+y)^3} - \frac{2m(m+1)(n+m-m^2)}{(x+y)^3} + \frac{(m+1)(m+2)(n+m-m^2)}{(x+y)^3}\right] =$$

$$(x+y)^{-m}\int -\frac{(n+m-m^2)(n+m-m^2+2)(\partial x+\partial y)}{(x+y)^3} = \frac{(n+m-m^2)(n+m-m^2+2)}{2}(x+y)^{-m-2},$$

donc

$$\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right) = -\frac{(n+m-m^2)(n+m-m^2+2)(m+2)}{2}(x+y)^{-m-3} = \left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial\partial\Pi''}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{(m+2)(m+3)(n+m-m^2)(n+m-m^2+2)}{2}(x+y)^{-m-4}$$

$$\Pi''' = (x+y)^{-m}\int -\frac{(\partial x+\partial y)(n+m-m^2)(n+m-m^2+2)(n+m-m^2+2.3)}{2(x+y)^4}$$

$$= \frac{(n+m-m^2)(n+m-m^2+2)(n+m-m^2+2.3)}{2.3}(x+y)^{-m-3}.$$

L'analogie eſt maintenant évidente & l'on aura,

$$\Pi^{(i)} = \frac{(n+m-m^2)(n+m-m^2+2)(n+m-m^2+2.3)\ldots\ldots[n+m-m^2+(i-1)i](x+y)^{-m-i}}{1.2\ldots\ldots i}$$

$$\Pi^{(i+1)} = \frac{(n+m-m^2)(n+m-m^2+2)(n+m-m^2+2.3)\ldots\ldots[n+m-m^2+(i-1)i][n+m-m^2+i(i+1)](x+y)^{-m-i-1}}{1.2\ldots\ldots(i+1)}$$

Pour que $\Pi^{(i+1)}=0$, il faut que $n+m-m^2+(i+1)i=0$, ou $n=m^2-m-i(i+1)$. Subſtituant cette valeur on a

$$\Pi^{(i)} = (i+1)(i+2)\ldots\ldots 2i(x+y)^{-m-i},$$

$$\Pi^{(i-1)} = -\frac{i}{1}(i+1)(i+2)\ldots\ldots(2i-1)x^{-m-i+1},$$

$$\Pi^{(i-2)} = \frac{(i-1)i(i+1)\ldots\ldots(2i-2)}{1.2}x^{-m-i+2}\ldots\ldots,$$

$$\Pi''' = \pm\frac{i(i-1)(i-2)}{2.3}(i+1)(i+2)(i+3)x^{-m-3},$$

Π''

$$\Pi'' = \mp \tfrac{i(i-1)}{2}(i+1)(i+2)\,x^{-m-2},$$
$$\Pi' = \pm \tfrac{i}{1}(i+1)\,x^{-m-1}, \quad \Pi = x^{-m}.$$

L'Intégrale complette sera donc,

$$z = (i+1)(i+2) \;\ldots\; 2i\,(x+y)^{-m-i}(F:x+f:y)$$
$$-\tfrac{i}{1}(i+1)(i+2)\ldots(2i-1)\,(x+y)^{-m-i+1}(F':x+f':y)$$
$$+\tfrac{(i-1)i(i+1)}{2}\;\ldots\;(2i-2)\,(x+y)^{-m-i+2}(F'':x+f'':y)$$

— — — — — — — — —

$$\pm\tfrac{i(i-1)(i-2)}{2.3}(i+1)(i+2)(i+3)\,x^{-m-3}(F^{(n-3)}:x+f^{(n-3)}:y)$$
$$\mp\tfrac{i(i-1)}{2}(i+1)(i+2)\,x^{-m-2}(F^{(n-2)}:x+f^{(n-2)}:y)$$
$$\pm\tfrac{i}{1}(i+1)\,x^{-m-1}(F^{(n-1)}:x+f^{(n-1)}:y)$$
$$\pm x^{-m}(F^{(n)}:x+f^{(n)}:y).$$

§. 50. Je n'ai traité jusqu'ici que des équations où z se trouve sous une forme linéaire. Soit maintenant l'équation $\psi = \Pi\,F:\Phi$ (1), Π & Φ étant comme ci-dessus des fonctions de x & y, & ψ une fonction de x, y, z, z étant une fonction de x & y, on aura en différentiant,

$$\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\tfrac{\partial\Pi}{\partial x}\right)F:\Phi+\Pi\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)F':\Phi, \quad (2)$$
$$\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\tfrac{\partial\Pi}{\partial y}\right)F:\Phi+\Pi\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)F':\Phi, \quad (3)$$
$$\left(\tfrac{\partial\partial\psi}{\partial x^2}\right)+2\left(\tfrac{\partial\partial\psi}{\partial x\partial z}\right)\left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\tfrac{\partial\partial\psi}{\partial z^2}\right)\left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\tfrac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)=$$
$$\left(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)F:\Phi+\left[2\left(\tfrac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\Pi\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right)\right]F':\Phi+\Pi\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2F'':\Phi \quad (4)$$
$$\left(\tfrac{\partial\partial\psi}{\partial y^2}\right)+2\left(\tfrac{\partial\partial\psi}{\partial y\partial z}\right)\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right)+\left(\tfrac{\partial\partial\psi}{\partial z^2}\right)\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)=$$
$$\left(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)F:\Phi+\left[2\left(\tfrac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\Pi\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right)\right]F':\Phi+\Pi\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2F'':\Phi \quad (5)$$
$$\left(\tfrac{\partial\partial\psi}{\partial x\partial y}\right)+\left(\tfrac{\partial\partial\psi}{\partial x\partial z}\right)\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right)+\left(\tfrac{\partial\partial\psi}{\partial y\partial z}\right)\left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\tfrac{\partial\partial\psi}{\partial z^2}\right)\left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right)+\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\tfrac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)=$$
$$\left(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)F:\Phi+\left[\left(\tfrac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\left(\tfrac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\Pi\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)\right]F':\Phi+\Pi\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)F'':\Phi \quad (6).$$

Multipliant réfpectivement ces fix équations par les quantités G, A, B, C, D, E, fonctions indéterminées de x, y, z, & égalant féparément à zero les coëfficiens de $F'':\Phi$, $F:\psi$, $F:\zeta$, on aura l'équation differentielle du fecond degré:

$$\begin{aligned} & G\psi + A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + A\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ & + C\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial x^2}\right) + 2C\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial x\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \\ & + C\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial y^2}\right) + 2D\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial y\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ & + D\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + D\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial x\partial y}\right) \\ & + E\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial x\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial y\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ & + E\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) = 0, \end{aligned}$$

& l'on aura les trois équations de condition fuivantes:

$$C\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + D\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0, \quad (a)$$

$$\begin{aligned} & \Pi\left[A\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)\right] \\ & + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left[2C\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left[2D\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right] = 0, \quad (b) \end{aligned}$$

$$G\Pi + A\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right) = 0, \quad (c).$$

Ces trois équations de condition font les mêmes que dans le cas précedent, & l'on peut en tirer les mêmes conclufions.

§. 51. Comparant maintenant l'équation differentielle avec l'équation génerale du fecond degré,

$$\begin{aligned} & N\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + P\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + N'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + P'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ & \qquad + Q'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + R\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + S\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + T = 0, \end{aligned}$$

on aura en comparant les coëfficiens de $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$,

$$\frac{E}{D} = \frac{P}{N}, \quad \frac{C}{D} = \frac{Q}{N}.$$

On

On aura ensuite en comparant les coëfficiens de $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$,

$$\frac{\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial z^2}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)} = \frac{N'}{N} = \frac{Q'}{Q} = \frac{P'}{P}, \text{ donc}$$

$$l\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \int\frac{N'\partial z}{N}, \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = e^{\int\frac{N'\partial z}{N}}, \psi = \int\partial z\, e^{\int\frac{N'\partial z}{N}}.$$

On trouvera ainsi la valeur de ψ, & les valeurs de Φ, Π se trouvent comme dans le cas précédent. La comparaison des coëfficiens de $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ donnera les équations suivantes :

$$\frac{2\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial y\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)} + \frac{\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial x\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)} + \frac{B}{D} = \frac{R}{N};$$

$$\frac{2\,C\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial x\partial z}\right)}{D\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)} + \frac{\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial y\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)} + \frac{A}{D} = \frac{S}{N}.$$

Enfin la comparaison des coëfficiens du terme exemt des différentielles de z, donne

$$\frac{\frac{G}{D}\psi}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)} + \frac{\frac{A}{D}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)} + \frac{\frac{B}{D}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)} + \frac{\frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)} + \frac{\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial y^2}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)}$$
$$+ \frac{\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\psi}{\partial x\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)} = \frac{T}{N}.$$

La valeur de ψ tirée de l'intégration précédente doit satisfaire à ces trois équations. Ainsi le cas où ψ est une fonction de z n'est pas plus difficile à résoudre que celui où z se trouve sous une forme linéaire.

§. 52.

§. 52. Au reste il est aisé de prouver par l'inspection de l'équation (a) que $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{D}$ sont des fonctions de x & y seulement, puisqu'elles se déterminent par une fonction de Φ qui ne contient point de z, & le procédé du §. 6. prouve que les quantités $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{G}{D}$ n'en contiennent point non plus. Ainsi dans le cas que nous examinons les coëfficiens de l'équation ne contiennent que x & y, & il était aisé de prévoir que cela devait être ainsi. Car puisque l'équation $\psi = \Pi F : \Phi$ suppose qu'une fonction donnée de z est égale à une fonction de x & y, il s'ensuit nécessairement de là que z est aussi égale à une fonction de x & de y, ainsi les équations qui résultent de ces deux suppositions doivent être de la même espèce.

§. 53. Le cas où Π & Φ contiennent des fonctions de z, conduit à des équations de condition du premier degré, où les différences partielles ne se présentent plus sous la forme linéaire. Je l'examinerai ailleurs. Ce cas renferme des difficultés considérables, & dans l'état d'imperfection où est encore l'Analyse, il est à craindre qu'on ne fasse pas de grands progrès dans cette partie.

ADDI-

ADDITION AU MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFERENCES PARTIELLES DU SECOND DEGRÉ ENVOYÉ EN 1795 À L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DE ST. PÉTERBOURG.

Par
J. TREMBLEY.

Je dois obſerver qu'il y a une exception à la théorie générale expoſée dans ce Mémoire. Nous avons vu qu'en ſuppoſant $z = \Pi F : \Phi + \Pi' F' : \Phi$, on avait entre autres équations celle-ci:

$$\Pi' \left[A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + B \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + C \left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x^2}\right) + D \left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial y^2}\right) + E \left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x \partial y}\right) \right]$$
$$+ \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) \left[2C \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + E \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \right] + \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) \left[2D \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + E \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \right] = 0.$$

Comme Φ peut être fait conſtant dans la recherche de la valeur de Π', ſoit b la valeur de Π' trouvée, on ſatisfera à l'équation par la valeur $b \mu : \Phi$, $\mu : \Phi$ déſignant une fonction quelconque de Φ. Comme on a deux valeurs de Φ, Φ', Φ'', on aura deux valeurs de Π' qui, en vertu de la théorie expoſée ci-deſſus, feront $b \mu : \Phi'$, $b : \nu : \Phi''$, $\nu : \Phi''$ étant une fonction de Φ''. Or il eſt aiſé de prouver que $\nu : \Phi''$ & $\mu : \Phi'$ doivent être des fonctions ſemblables de Φ''

& de Φ'. Car en ſubſtituant dans l'équation précédente, les deux valeurs de Π', on aura les deux équations ſuivantes :

$$b\mu : \Phi' \left[A\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$+ \mu : \Phi' \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)\left[2C\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)\left[2D\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right]$$
$$+ b\left[2C\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2 + 2E\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + D\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2\right] = 0,$$
$$b\nu : \Phi'' \left[A\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$\nu : \Phi'' \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)\left[2C\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)\left[2D\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]$$
$$+ b\left[2C\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2 + 2E\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + D\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)^2\right] = 0.$$

Le 3ᵉ terme de chacune de ces équations s'évanouit, parcequ'on a en général

$$C\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + D\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

De plus ces équations étant telles par leur nature, que la première ſe change en la ſeconde, en changeant Φ' & Φ'' & réciproquement, il faut que $\mu = \nu$, c'eſt à dire que les fonctions de Φ' & Φ'' ſoyent ſemblables. Cela poſé l'équation

$$G\Pi' + A\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+ \Pi\left[A\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$+ \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left[2C\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left[2D\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right] = 0,$$

ſe changera en celles-ci :

$$\mu : \Phi'\left[Gb' + A\left(\frac{\partial b'}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial b'}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial b'}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial b'}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial b'}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$+ \Pi\left[A\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$+ \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left[2C\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left[2D\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right] = 0.$$

$\mu : \Phi''$

$$\mu:\Phi''[Gb + A(\tfrac{\partial b}{\partial x}) + B(\tfrac{\partial b}{\partial y}) + C(\tfrac{\partial\partial b}{\partial x^2}) + D(\tfrac{\partial\partial b}{\partial y^2}) + E(\tfrac{\partial\partial b}{\partial x\partial y})]$$
$$+ (\tfrac{\partial\Pi}{\partial x})[2C(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial x}) + E(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial y})] + (\tfrac{\partial\Pi}{\partial y})[2D(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial y}) + E(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial x})]$$
$$+ \Pi[A(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial x}) + B(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial y}) + C(\tfrac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}) + D(\tfrac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}) + E(\tfrac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y})] = 0.$$

Ici on prouvera comme dans le Mémoire précédent que les deux valeurs de Π font égales, & l'on ne pourra pas les multiplier réfpectivement, comme on a fait pour les valeurs de Π', par des fonctions de Φ' & Φ'', parceque ces équations contiennent un terme indépendant de Π. Dans ce cas-là on déterminera $\mu:\Phi'$ par les conditions qui rendent intégrable cette équation aux différences partielles du premier degré. Je n'en donnerai ici qu'un exemple, je traiterai ailleurs cette matière plus au long.

Soit l'équation

$$(1+y^2)(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y^2}) + 2xy(\tfrac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}) + (1+x^2)(\tfrac{\partial\partial z}{\partial x^2}) = 0.$$

On a ici $D = 1+y^2$, $E = 2xy$, $C = 1+x^2$. La fonction arbitraire dépend de l'intégration des équations

$$[xy + \sqrt{(-1-x^2-y^2)}]\,\partial y - (1+y^2)\,\partial x = 0;$$
$$[xy - \sqrt{(-1-x^2-y^2)}]\,\partial y - (1+y^2)\,\partial x = 0.$$

(Voyès le prémier Mémoire fur les équations aux différences partielles du premier degré).

Ces équations s'intégrent fort aifement par la méthode que j'ai donnée dans les Mémoires de Berlin pour 1793. On a

$$\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{xy + \sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2} = 0.$$

La fuppofition la plus fimple qui réfulte de cette méthode

 eft

eſt de faire $\Phi = \frac{Axy - B\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}$, & l'on trouve $A=1$, $B=1$, on a donc $\Phi' = \frac{xy + \sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}$. On trouve de même $\Phi'' = \frac{xy - \sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}$, on a donc

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = \frac{y\sqrt{(-1-x^2-y^2)} - x}{(1+y^2)\sqrt{(-1-x^2-y^2)}},$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = \frac{(x-xy^2)\sqrt{(-1-x^2-y^2)} + y+2x^2y+y^3}{(1+y^2)^2\sqrt{(-1-x^2-y^2)}} = -\Phi'\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right);$$

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = \frac{y\sqrt{(-1-x^2-y^2)} + x}{(1+y^2)\sqrt{(-1-x^2-y^2)}},$$

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = \frac{(x-xy^2)\sqrt{(-1-x^2-y^2)} - (y+2x^2y+y^3)}{(1+y^2)^2\sqrt{(-1-x^2-y^2)}} = -\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\Phi''.$$

Subſtituant ces valeurs on a $\frac{\partial\Pi'}{\Pi'} = \frac{x\partial x + y\partial y}{1+x^2+y^2}$, donc $\Pi' = \sqrt{(-1-x^2-y^2)}$. Si d'aprés la valeur de Π' on cherchait la valeur de Π, ſuivant la méthode expoſée dans ce Mémoire, on trouverait une quantité qui n'eſt pas intégrable. Faiſant donc $\Pi' = \mu : \Phi'\sqrt{(-1-x^2-y^2)}$, l'équation en Π déviendra aprés les ſubſtitutions & réductions,

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2 - \frac{\mu:\Phi'}{-1-p^2-q^2} = 0,$$

$$-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \Pi\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2 - \frac{\mu:\Phi''}{-1-p^2-q^2} = 0.$$

Or

$$-1-x^2-y^2 = \frac{-1-\Phi'^2}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2} = \frac{-1-\Phi''^2}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2};$$

les équations deviennent donc,

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2 - \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2}{-1-\Phi'^2}\mu:\Phi' = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \Pi\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2}{-1-\Phi''^2}\mu:\Phi'' = 0.$$

Il

Il eſt évident qu'on ſatisfait à cette équation, en faiſant $\Pi = 1$, $\mu : \Phi' = -1 - \Phi'^2$, $\mu : \Phi'' = -1 - \Phi''^2$, & cette valeur de Π ſatisfaiſant à l'équation de condition, on a l'intégrale complete ſuivante;

$$z = F : \Phi' + f : \Phi'' + \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)} \times$$
$$\times [(-1 - \Phi'^2) F : \Phi' + (-1 - \Phi''^2) f : \Phi''],$$

comme on l'a trouvé par d'autres méthodes. M. le Gendre a traité cette équation dans les Mémoires de Paris de 1787.

MÉTHODE AMELIORÉE DE SÉPARER L'OR ET L'ARGENT PAR LE DÉPART, Fondée ſur les Affinités des Corps.

Par

Charles Baron de Meidinger.

Préſenté à l'Académie le 5 Octobre 1795.

Le départ de l'or & l'argent eſt exercé chez nous en gros dans l'hôtel des monnoies, qui ſe trouve à Cremnitz en baſſe Hongrie. On y ſousmet par an à cette operation une grande quantité d'argent aurifère, tant fournie par les mines de ce pays, que recueillée par l'achat dans l'hôtel général des monnoies à Vienne, qui en fait la rémiſe à Cremnitz, d'où la partie de l'or & l'argent affinés, qu'on y change pas en monnoie, retourne à Vienne, pour être vendue au Corps des Tréfileurs & orfèvres, qui en reçoivent tous les mois par répartition faite de la Regence 1500 Marcs d'argent & quelques Marcs d'Or, & les changent

gent en marchandiſes de luxe, dont le métal précieux eſt perdu pour la circulation.

Le départ eſt une Opération chimique; mais elle y eſt executée par des hommes appellés affineurs, qui de même que leurs maitres, les Officiers des hôtels des monnoies, n'ont pas la moindre connoiſſance de la Chimie, & ne travaillent, que méchaniquement ſans penſer aux ameliorations néceſſaires & utiles, car leur routine eſt tellement inveterée, que tous les bons conſeils propres à corriger les fautes & à donner du profit à la couronne, ſont en vain, mépriſés & rejettés.

C'eſt uniquement la chimie, qui nous apprend la meilleure méthode, de faire le départ avec plus de commodité & avec plus de profit, qu'il ne fut executé jusqu'ici, & qui nous enſeigne en même tems, de conſerver l'eau forte, diſſolvant précieux, & communement diſſipé, d'une manière, qui nous donne par la même operation encore un produit tres récherché dans le Commerce.

Le départ de l'or & l'argent eſt donc fondé ſur les affinites chimiques des Corps, qui nous montrent le chemin le plus prochain, que nous devons aller, pour travailler bien & à bon marché. Ce n'eſt que par des Expériences réiterées, que j'ai trouvé un procedé trés ſimple, de faire le départ en gros à peu de frais, ſans diſſipation de l'eau forte & de produire en même tems une marchandiſe neceſſaire & récherchée pour les Arts & métiérs, que j'ai l'honneur de préſenter ici à la trés illuſtre Académie, qui

qui peut-être ne manquera pas d'en faire bon uſage pour les affineries de l'Empire de Ruſſie. *).

Avant que d'en donner la déſcription, je trouve neceſſaire, de parler de l'ancienne maniere, dont on ſe ſert maintenant pour le départ, afin qu'on puiſſe rémarquer le déſavantage de cette operation défectueuſe, & calculer les avantages de la mienne.

Le départ ſe fait à Cremnitz, comme tout allieurs moiennant l'eau forte ou l'acide nitrique. On y diſtille deux ſortes de cette liqueur, dont l'une eſt appellée *ſimple eau forte* & l'autre *double eau forte*. La prémiere ſert pour diſſoudre l'argent aurifère, & la ſeconde, qui eſt d'une force extraordinaire & d'une couleur jaunâtre, pour ôter à la chaux d'or les dernieres parties de l'argent, & même pour éſſaïer le titre de l'or. Les officiers de nos hôtels des monnoies donnent la préference à la double eau forte en éſſaïant le titre de l'or, parcequ'ils prétendent, que les petits rouleaux d'or ſe doivent changer en chaux, pour ce que l'argent ſe détache entierement, dont une partie reſteroit avec l'or, ſi les rouleaux garderoient leur forme entiere. C'eſt un préjugé de ces gens, qui ne ſont pas chimiſtes, & qui ne ſavent pas, qu'on ait refuté cette fauſſe opinion il y a longtems par des experiences; car une bague d'argent toute dorée ſe diſſout parfaitement dans l'eau forte, n'y laiſſant que la dorure ſous la forme d'une pellicule

*) Cette méthode ameliorée eſt en uſage depuis plus de 40 ans au Laboratoire de la ſéparation de l'Or & de l'Argent à la cour des monnoies de St. Pétersbourg. *Hermann.*

cule trés mince & point déchirée, ſuppoſé, que le diſſolvant ne ſoit ni trop foible ni trop fort dans ſon action.

Le procédé pour diſtiller l'eau forte à Cremnitz n'a rien de particulier, qui meritoit l'attention. On s'y ſert de ſulfatte de fer *) (Vitriol de fer) calciné, & de Nitrate de potaſſe (Nitre affiné) mélés enſemble à parties égales. Un mélange p. e. de 240. livres de ſulfatte de fer calciné & de 240. liv. de Nitrate de potaſſe donne communement 240. liv. d'eau forte, appellée *eau ſimple* **). Pour déterminer le prix de 100 liv. de ſulfate de fer calciné on fait le compte à maniere ſuivante:

	Florins.	*Kr.*
50. Quintals de ſulfate de fer (de la Bohême) à 4. Florins & 48. Kreutzer le quintal, font - - - - - - -	240.	—
Frais pour les transporter à Cremnitz -	110.	—
Deux voies de bois pour le feu de Calcination - - - - - - - - - -	3.	30
Payement aux calcinateurs - - - -	2.	—
	355. f.	30

de ces 50 Quintals de ſulfate de fer ne reſtent que 40 Quintals, qui coutent 355 Florins & 30 Kreutzer, & par con-

*) Je fais ici uſage de la nouvelle Noménclature chimique propoſée par les Académiciens français. Voiez leur methode de Nomenclature chimique 8. à Paris 1787, ouvrage, que j'ai traduit en allemand il y a un an.

**) Juſtement de cette maniere eſt preparée l'eau forte à la Cour des monnoies de St. Pétersbourg. *H.*

consequent 100 liv. de sulfate de fer calciné couteront 8 Florins & $53\frac{1}{4}$ Kreutzer.

Or pour appréter 340 livres d'eau forte il faut débourser les frais suivants:

	Florins.	Kr.
240 liv. de sulfate de fer calciné à 8 flor. $53\frac{1}{4}$ kr. le quintal, font - - -	21	$19\frac{3}{4}$
240 liv. de Nitrate de potasse à 32 florins le quintal - - - - - - - - -	76	48
Charbons pour les fourneaux - - - -	4	3
Suif - - - - - - - - - -	—	3
Verres, ciment, réparation à peu prés -	4	—
	116 f.	$13\frac{3}{4}$

ainsi le prix de 100 liv. d'eau forte sera de 34 florins & $11\frac{7}{69}$ kr. & cela fait 20 Kreutzer $2\frac{3}{68}$ deniers la livre.

Je parlerai de la maniere, dont on se sert pour obtenir la double eau forte ci-aprés, lorsque je donnerai le procédé du départ même.

Pour executer le départ on change l'argent aurifère en grénaille, & on en fait la dissolution par la simple eau forte dans de grandes Cucurbites enduits de ciment & mises dans de Coupelles à Sable, dont chaque fourneau de galère porte douce rangées de deux cotés six à six. On ne met que dix Marcs d'argent dans chaque Cucurbite, & pour dissoudre 400 Marcs on a besoin de 270 livres d'eau forte

forte *). Au commencement on y verſe ſeulement la quantité du diſſolvant, qui eſt neceſſaire, pour couvrir les grénailles, & on fait feu ſous les Coupelles. Sitôt que l'eau forte commence à agir, ou à oxyder, on ajoute de la nouvelle, en augmentant le feu, puis on décante la ſolution ſaturée, & on continue ce maniément, jusqu'à ce, que les 400 Marcs d'argent ſont entièrement diſſous **). Aprés avoir décanté la derniere ſolution, on verſe un peu de la double eau forte ſur la chaux d'or, pour emporter les dernieres parties d'argent, allors on la lave avec eau chaude, on la fait rougir, & on la fond dans un creuſet.

Quand le départ eſt fini, il s'agit de la réduction de l'argent diſſout, & c'eſt juſtement le procédé, que j'ai amelioré. On l'appelle à Cremnitz *das Ausheitzen des Silbers* & on le fait à cette maniere: On verſe les Solutions d'argent dans les mêmes Cucurbites, dans lesquelles on a fait le départ, & aprés avoir appliqué des Alambics & des Ballons, on commence à diſtiller tout doucement en augmentant le feu peu à peu, & on obtient dans les Ballons une eau forte très foible, ou pour mieux dire un phlegme — qui ne peut ſervir qu'à une nouvelle diſtillation d'eau forte — parceque l'acide nitrique eſt combiné avec l'oxyde d'argent. Auſſitòt que l'argent dans les verres

*) A St. Pétersbourg dans chaque cucurbite on mêt 5 liv. d'argent aurifère & 10 liv. d'eau forte. *H.*

**) Au laboratoire de St. Pétersbourg on ne diſſout dans une ſeule Cucurbite que 15 liv. d'argent, en l'y méttant par trois fois, après quoi la ſolution eſt verſée dans un Vaſe de verre pour la précipitation avec du cuivre, & l'or & décanté eſt fondu en lingots. *H.*

res commence à devenir une maſſe ſèche & blanche s'attachante au parois, on applique un autre Ballon avec de l'eau forte ſimple, & on augmente conſidérablement le feu, pour pouſſer l'acide nitrique combiné avec l'argent dans l'eau forte, qui en rédouble ſa force, & voilà la double eau forte, dont j'ai fait mention ci-deſſus. On empeche le gonflement de l'argent, qui arrive ordinairement vers la fin de la diſtillation, en y jettant un peu de ſuif & en levant l'alambic, pour faire paſſer l'air dans la Cucurbite. — Enfin on caſſe les Verres, pour en rétirer l'argent, qu'on briſe dans un abbreuvoir à coup d'un piſtil, pour le faire fondre dans un creuſet.

Frais du départ de 400 Marcs d'argent.

	Florins.	*Kr.*
270 livres d'eau forte à 20 kr. $2\frac{3}{68}$ deniers - - - - - - - - -	92	$17\frac{3}{4}$
Bois pour chauffer les fourneaux - -	3	36
Charbons pour la diſtillation - - -	2	24
Argile & toile pour le ciment - - -	1	37
Sable pour les Coupelles - - - -	—	9
Suif - - - - - - - - -	—	15
Verres & réparation - - - -	16	—
Payement aux affineurs - - - - -	7	—
	123	$18\frac{3}{4}$

par conſequent le départ d'un Marc d'argent aurifère coute 18 Kreutzer $1\frac{74}{80}$ denier.

Cette

Cette dépenſe n'eſt pas trés conſidérable, & je ne crois pas, que cette operation ſe faſſe ailleurs à moins de frais, mais nonobſtant cela les frais ſe peuvent diminuer plus de la moitié, ſi on évite les fautes manifeſtes & la diſſipation inutile de l'eau forte, qui ſe trouvent dans ce procédé: car

Premièrement, on perd une partie conſidérable du diſſolvant précieux, qui reſte combiné avec l'argent ſous la forme de Nitrate d'argent, & ſe diſſipe par la fonte. On retire bien par la diſtillation du Nitrate d'argent une double eau forte, mais parce qu'on peut ſe paſſer de celle-ci, je n'en vois qu'une diſſipation manifeſte du tems & des frais, en faiſant cette éſpece de liqueur, qui ne paye pas ni la perte d'acide nitrique, ni la depenſe de la diſtillation.

Secondement, on eſt obligé, de caſſer toujours les Verres, pour en retirer l'argent, qui s'attache à leur parois, & celles-ci ſont cheres, ſurtout ſi les Verreries ſont éloignées.

Troiſièmement, en verſant la diſſolution d'un verre à l'autre, dont un peu y reſte toujours attaché, on perd une partie de l'argent, tandis qu'une autre ſe volatiliſe dans la fonte par l'acide nitrique, que la diſtillation n'a pu chaſſer entierement. Je ne parle pas de tous ces creuſets, qui viennent d'être gatés par le Nitrate d'argent, qui eſt un vrai corroſif, ni de ces malheurs, qui peuvent arriver, lorsqu'une Cacurbite remplie de la ſolution crêve pendant la diſtillation & repand l'argent par tout.

C'eſt pour eviter ces malheurs, & pour diminuer les dépenſes, que je propoſe ma nouvelle & profitable maniere, de faire le départ, fondée ſur les affinités des Corps, dont voici le procédé.

Pour le premier je fais diſtiller de l'eau forte à manière ordinaire, en emploïant des parties égales de Nitrate de potaſſe & de ſulfate de fer calciné, ou par la combinaiſon de l'acide ſulfurique, tel que l'on obtient par la combuſtion du ſoufre, avec le Nitrate de potaſſe dans l'apparat de M. Woulfen, par où on ſe procure de l'eau forte de la derniere qualité & à trés bon marché. Ce chemin eſt le plus profitable, car il ne demande pas tant de feu, pour détacher l'acide nitrique, & le réſidu, qui ſe trouve dans la cornue eſt un ſulfate de potaſſe ou Tartre vitriolé (Arcanum duplicatum) qui n'a beſoin, que d'être diſſous & cryſtalliſé, pour payer presqu'entierement l'acide ſulfurique. Il eſt bien vrai, on retire le même tartre vitriolé en leſſivant le Colcothar, qui reſte dans les cruches de fer en diſtillant à l'ordinaire, mais ce chemin eſt ennuyant & couteux, & ne donne pas la même quantité de ce ſel. A Cremnitz on rejette tout le Colcothar, ſans en faire uſage pour le tartre vitriolé.

Quant au départ même, je fais diſſoudre mes grenailles d'argent auriſère dans l'eau forte à la manière ordinaire, & décanter la diſſolution pour laver & réduire l'oxyde d'or.

Or pour faire la réduction de l'argent, ouvrage principal, je délaye la ſolution avec un peu de l'eau, & je précipite

cipite l'argent par immerſion des plaques de cuivre *) cela fait, je décante la liqueur verte, ou la ſolution ſaturée de cuivre, pour en retirer l'oxyde d'argent, que je fais fondre aprés le lavement. Cet oxyde d'argent n'eſt pas volatil, & me donne mon argent ſans déchet, ſi j'ai travaillé proprement.

Aprés cela je verſe la ſolution cuivreuſe dans une Cornue tubulée repoſante dans une coupelle à ſable. J'y ajoute par un entonnoir la quantité requiſe d'acide ſulfurique & je chauffe le fourneau **). Cet acide s'unie d'abord avec le cuivre diſſout & détache l'acide nitrique, qui va dans le Ballon attaché à la cornue, d'où me revient la quantité de l'eau forte emploiée pour le départ. On continue en augmentant le feu la diſtillation, jusqu'à ce que dans la cornue ne reſte qu'une maſſe ſaline ſèche & bleuâtre nomée ſulfate de cuivre, qui aprés ſa diſſolution dans l'eau chaude, evaporation & cryſtalliſation, donne le Vitriol bleu de cuivre, appellé dans le Commerce *Vitriol de Cypre*, marchandiſe trés éſtimée & récherchée dans les Arts & métiers, dont le quintal ſe vend à cette heure chez nous à 28 — 30. florins ***).

Pour

*) A St. Pétersbourg on mèt dans la ſolution d'argent un morceau de cuivre de 8 liv. environ, qui, en précipitant l'argent, eſt mangé peu à peu. La ſolution cuivreuſe, qui en reſulte, eſt verſée dans un vaſe de cuivre pour precipiter tout l'argent, qui peut s'y trouver encore. *H.*

**) Au laboratoire de St. Pétersbourg au lieu d'acide ſulfurique on y verſe une ſolution de potaſſe, d'où reſulte du verd de gris. *H.*

***) On le fabrique en oxydant le cuivre par le ſoufre. Voiez *Demachys* Chimiſte en gros. &c.

Pour cette operation il faut se procurer l'acide sulfurique à bon marché, & je donne le Conseil, de le faire même dans les affineries par la combustion du soufre *), si on ne peut pas avoir celui à prix moderé, qui se fabrique en Angleterre; mais cet acide de commerce est trés foible par la quantité de l'eau, qu'il tient, & qui devroit être chassée auparavant par une rectification.

Il est impossible, de fixer ici la quantité d'acide sulfurique, qu'on a besoin, pour la combinaison avec le cuivre dissous & pour en detacher l'acide nitrique. Elle depend de la force de cet acide & de la quanité de cuivre, qui est adoptée par le dissolvant. Cependant il est à remarquer, que selon M. Kirwan 260 parties de cuivre demandent 100 parties d'acide sulfurique de la meilleure qualité, pour produire un Vitriol de cuivre, dont [illegible] parties sont composées de o, 27. p. de cuivre, [illegible], 3[illegible]. p. d'acide, & [illegible], 43. p. d'eau de cristallisation: Or si on a pesé les plaques de cuivre emploiées pour la précipitation de l'argent, on peut savoir leur déchet, c'est à dire, combien de cuivre se trouve dissous dans l'eau forte, & combien d'acide sulfurique sera necessaire, pour faire la susdite combinaison, ou pour changer le cuivre en Vitriol, dont la quantité résultante se déterminera par les quantités de cuivre dissous & d'acide sulfurique emploiés, en y contant toujours l'eau nécessaire pour la cristallisation.

Sup-

*) J'ai inventé pour ce dessein une machine pneumatique trés-simple, qui me donne 120 livres d'acide sulfurique en y brulant 100 livr. de soufre par l'affluence continuelle de l'air & des Vapeurs de l'eau chaude absorbantes le Gaz sulfureux.

Suppoſons, que 27. liv. de cuivre ſoient diſſous dans l'eau forte, on aura donc beſoin de 30. liv. d'acide ſulfurique pour chaſſer le diſſolvant, & on recevera une maſſe ſaline, qui donne aprés la criſtalliſation 100. liv. de Vitriol de cypre.

On fait uſage de mêmes plaques de cuivre dans les précipitations ſuivantes, en les péſant toujours, jusqu'a ce qu'elles ſont mangées par l'eau forte, allors on prend de nouvelles.

Il eſt aiſé à voir, que ce procédé de faire le départ, ou pour mieux dire, la réduction de l'argent combinée avec la production du ſulfate de cuivre ſoit beaucoup plus profitable, que celle, dont j'ai parlé ci-deſſus: car

Premièrement on retire presque la même quantité de l'eau forte, qu'on a emploiée pour diſſoudre l'argent, & elle peut ſervir aux opérations conſécutives.

Secondement on produit par le même travail le Vitriol de cypre, marchandiſe trés recherchée dans le commerce.

Troiſièmement on ne briſe pas ici les cucurbites & les cornues, qui coutent beaucoup, ſurtout ſi les Verreries ſont bien éloignées.

Quatriémement l'argent ſe réduit ſans déchet, parceque ſa chaux précipitée par le cuivre n'a rien de volatil & de corroſif, & ne mange pas les creuſets.

Quant au calcul de cette nouvelle méthode, on n'a qu'a faire les dépenſes ſuivantes:

		Flor.	Kr.
De 270. liv. d'eau forte néceſſaires pour diſſoudre 400. Marcs d'argent on veut admettre un déchet de la 4^{me} partie, c'eſt à dire 67 $\frac{1}{2}$ liv. qui coutent à 20 $\frac{1}{2}$ kr.	-	23.	3 $\frac{3}{4}$.
Bois pour chauffer les fourneaux, dans les quels on fait la diſſolution d'argent -	-	3.	36.
Charbons pour diſtiller ou pour détacher l'eau forte - - - - - -	-	2.	24.
Argile, toile pour le ciment - -	-	1.	37.
Sable pour les coupelles - - -	-	—	9.
Reparation à peu prés - - -	-	8.	—
Payement aux ouvriers - - -	-	7.	—
		45.	49 $\frac{3}{4}$.

Or ſi le départ de 400. Marcs d'argent aurifére coute une ſomme de 45. florins & 49 $\frac{3}{4}$ kreutzer, il coutera pour le marc 6. kreutzer & 3 $\frac{49}{100}$ deniers, au lieu qu'il a couté à la premiere méthode 18. kreutzer & 1 $\frac{7}{10}$. denier.

Je n'ai pas mit en ligne de compte ni le cuivre néceſſaire pour la précipitation, ni l'acide ſulfurique, ni les frais de la criſtalliſation du Vitriol de cypre, parcequ'on remarque bien, que cette marchandiſe paye le tout & donne encore un ſurplus de profit trés conſidérable, de façon, que le départ ſe fait avec une trés petite dépenſe.

DE

DE PROGRESSIONIBVS ARCVVM CIRCVLARIVM, QVORVM TANGENTES SECVNDVM DATAM LEGEM PROCEDVNT.

Auctore

J. F. PFAFF.

Conventui exhib. die 8 Octobr. 1795.

§. 1.

Plerarumque serierum, quarum summae hucusque investigatae sunt, termini generales a quantitatibus transcendentibus liberi sunt, quanquam summae ipsae eiusmodi quantitatibus affectae reperiuntur. Eae quidem series, quae secundum sinus cosinusve angulorum multiplorum progrediuntur, ad vsitatum genus referri possunt, quippe constat, ex cognita summa seriei $a + b\,x + c\,x^2$ &c. sponte consequi summas serierum: $a + b\,x$ cos. $\Phi + c\,x^2$ cos. $2\,\Phi$ &c. $a + b\,x\,\int\Phi + c\,x^2\,\int 2\,\Phi$ &c. Longe autem diversa est ratio aliarum serierum, quae alias quantitates transcendentes involvunt, quarum summatio gravioribus plerumque difficultatibus obvoluta, vel nonnunquam vires Analyseos, quas hactenus quidem nacta est, superare videtur.

§. 2. Inter paucissima eiusmodi serierum, quoad terminum generalem transscendentium specimina, memorabile extat illud, quod exhibuit L. Eulerus, in peculiari Commentatione (Nov. Comm. T. IX.), in qua series arcuum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt, contemplatus est, easque summandi methodum docuit, simplicitate omnino conspicuam, at ex ipsius inventoris testimonio indirectam, ac ad casus tantum faciliores restrictam. Quid post hunc laborem, cui deinceps a Geometris nihil amplius additum fuit, in summatione istarum serierum praestandum restet, vix clarius elucescet, ac ex ipsis viri summi verbis, quae sub initium commentationis laudatae leguntur. Quae Euleri effata ansam mihi praebuerunt, ut curatius inquirerem, quo pacto ea, quae in hoc problematum genere adhuc desiderari ipse iudicavit, suppleri queant: cumque ad methodum, istas series summandi, pervenerim, directam ac late patentem, eam in hac commentatione evolvere constitui: hunc quippe laborem Analystis haud ingratum fore existimans, cum penitiore cognitione satis ampli serierum generis, quod hactenus minus excultum erat, doctrinae serierum aliqua accessio contingere videatur.

§. 3. Ordo tractationis hic isto: A.) *Sect. I.* Primo *formulas generales* proponam, ex principiis mere trigonometricis et algebraicis deductas, ad quamcunque tangentium legem et summas vel finitas vel infinitas patentes. Iam quoad applicationem harum formularum *duo serierum genera* discernenda videntur: B.) *Sect. II. Primum genus* eas complectitur series, quarum summatio ex formulis praedictis elici potest, quia aliorum theorematum, vel Analyseos infinitorum auxilio opus sit: quarumque summa exprimitur Arcu, cuius tan-

tangens algebraice eſt aſſignabilis; quas ideo ſeries *algebraice ſummabiles* appellabo. Ad hoc genus pertinent cunctae ſeries ab Eulero ſummatae. Hae nimirum ſeries, vt paucis dicam, quo ſumma commentationis ſupra laudatae redeat, *duplicis ſunt ſpeciei.* α.) Primae ſpeciei exempla compluria exhibuit Eulerus, quas deinceps hac ſummatione generaliore complexus eſt:

$$\text{A tang.} \frac{1}{L+M+N} + \text{A tang.} \frac{1}{4L+2M+N} + \ldots \text{A tang.} \frac{1}{Lx^2+Mx+N}$$
$$+ \ldots = \text{A tang.} \frac{2}{L+M}, \text{ poſito } 4LN = M^2 - L^2 + 4.$$

β.) Alterius ſpeciei quatuor duntaxat exempla propoſuit: haec nimirum: $\frac{\pi}{8} = \text{A tang.} \frac{1}{2} - \text{A tang.} \frac{1}{12} + \text{A tang.} \frac{1}{70} - \text{A tang.} \frac{1}{408}$ etc. vbi eſt $70 = 6.12 - 2$; $408 = 6.70 - 12$; et ſic porro; $\frac{\pi}{12} = \text{A tang.} \frac{1}{4} + \text{A tang.} \frac{1}{64} + \text{A tang.} \frac{1}{900} + \text{A tang.} \frac{1}{12544}$ etc. vbi denominatores ſunt quadrata, quorum radicum $x^a = \frac{(2+\sqrt{3})^x - (2-\sqrt{3})^x}{\sqrt{3}}$. Reliquas binas ſeries hoc loco omitto, cum lex tangentium haud expreſſa ſit, deinceps euoluenda. Cuius iam vtriusque ſpeciei ſeries generi noſtro primo ſubſunt, nec tamen illud exhauriunt. Ita quoad primam ſpeciem (Cap. I.) ſummationi ab Eulero commemoratae:

$$\frac{\pi}{4} = \text{A tang.} \frac{1}{2} + \text{A tang.} \frac{1}{8} \ldots + \text{A tang.} \frac{1}{2x^2} \text{ etc.}$$

haec generalior ſub formula (α) incluſa ſubſtitui poteſt:

$$(2r-1)\frac{\pi}{4} = \text{A tang.} \frac{r^2}{2} + \text{A tang.} \frac{r^2}{8} + \text{A tang.} \frac{r^2}{18} \ldots$$
$$\ldots + \text{A tang.} \frac{r^2}{2xx} + \text{etc.},$$

denotante r quemcunque numerum integrum. Alteram ſpeciem (Cap. II.) amplius euoluendam duxi, cum pro ea Eulerus formulas generales haud exhibuerit, quas ex ipſius me-

methodo, adhibitis fractionibus continuis, elicere difficilius videtur. Quae disquisitio perducit ad theoremata, ex forma simplici, una cum latiore ambitu aliquam commendationem habentia. Ita vt in binis exemplis (β) subsistam: primum ad hanc formam revocatur:

$$A \text{ tang. } \frac{1}{A} - A \text{ tang. } \frac{1}{A(A^2+2)} + A \text{ tang. } \frac{1}{A(A^2+2)^2 - A} - \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{2} A \text{ tang. } \frac{2}{A},$$

denominatoribus in serie recurrente scalae $A^2 + 2$, -1 procedentibus; alterum ad hanc formam:

$$A \text{ tang. } \frac{1}{A} + A \text{ tang. } \frac{1}{B} \ldots + A \text{ tang. } \frac{1}{Z} \ldots = \frac{1}{2} A \text{ sin. } \frac{2}{A},$$

vbi denominatores sunt quadrata, quorum radices formant seriem termini generalis

$$\zeta = \sqrt{z} = \frac{\left[\frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - 1\right)}\right]^x - \left[\frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - 1\right)}\right]^x}{\sqrt{\left(A - \frac{4}{A}\right)}},$$

seu recurrentem seriem scalae A, -1; posito insuper $B = A^3$.
C.) Inter hasce series, quarum summatio ad Trigonometriam et Algebram vulgarem pertinet, *aliud superest serierum genus* (*Sect. III*), quarum summatio altioris est indaginis, ac nisi adhibitis Theorematibus ex Trigonometria sublimiore vel Analysi infinitorum (maxime de productis infinitis per quantitates trigonometricas vel exponentiales exprimendis) absolui nequit; quarumque summa exprimitur Arcu, cuius ipsa tangens quantitates transcendentes inuoluit: quas ideo series *transcendentes summabiles* appellabo. Cuius generis quod hactenus ne specimen quidem exhibitum fuerit, eo magis est cur forte mirari possis, cum duorum problematum generalium solutio in potestate sit. Quod si nimirum fuerit $\frac{p}{q}$ functio quaecunque fracta *par* vel $x$ti numeri natura-

turalis, vel $x$ti imparis ($2x-1$), summabilis est series infinita:

$$\text{A tang.}\,\frac{a}{b}+\text{A tang.}\,\frac{c}{d}+\text{A tang.}\,\frac{e}{f}\ldots+\text{A tang.}\,\frac{p}{q}+\text{etc.}$$

Nec minus summari potest series signis alternantibus instructa:

$$\text{A tang.}\,\frac{a}{b}-\text{A tang.}\,\frac{c}{d}+\text{A tang.}\,\frac{e}{f}\ldots\pm\text{A tang.}\,\frac{p}{q}\ \text{etc.}$$

denotante $\frac{p}{q}$ functionem quamcunque fractam, modo *imparem* x^{ti} numeri *imparis* (de vocabulis functionum *parium* et *imparium* cf. L. Euleri Introductio p. 12. etc.). Quorum problematum, praeter alia, eos praesertim casus euoluam, cum pro signis aequalibus sit $\frac{p}{q}=\frac{a}{x^{2m}+b}$, vel $\frac{a}{(2x-1)^{2m}+b}$; pro signis inaequalibus $=\frac{a}{(2x-1)^{2m-1}}$. Nec obseruatione indignum videtur, quod denotante $\frac{p}{q}$ quamcunque functionem fractam variabilis x, A tang. $\frac{p}{q}$ semper resolui possit in tot Arcus, quorum tangentes sunt fractiones simplices, veluti A tang. $\frac{\alpha}{x+\beta}$ + A tang. $\frac{\gamma}{x+\delta}$ + etc., ad quot dimensiones denominator q assurgit: quae quidem resolutio semper realis est, secus ac in functionum ipsarum resolutione accidere constat.

SECTIO I.

Formulae generales.

Problema 1.

§. 4. *Proposita quacunque serie quantitatum a', a'' .... a^x, inuenire expressionem pro summa A tang. a' + A tang. a'' .... + A tang. a^x = S A tang. a^x.*

Solu-

Solutio.

Reperitur S A tang. a^x = A tang. $\frac{A - C + E - G + \ldots}{1 - B + D - F + \text{etc.}}$. *Demonstratio* huius solutionis ex formulis trigonometricis et doctrina combinationum petitur. In numeratore scil. occurrunt quantitatum a', a'' .... a^x combinationes secundum numeros impares, seu con-$(2x-1)$-tiones; in denominatore secundum numeros pares. Signa vtrinque alternantur.

Hypothesis.

§. 5. Proposita serie quantitatum α', α'', α''' ... α^x ..., producta ex illarum 2, 3, 4 .... x denotentur per P α'', P α''' .... P α^x; vt sit P $\alpha^x = \alpha' \alpha'' \ldots \alpha^x$. Hinc est P α^x . P β^x = P $(\alpha^x \beta^x)$.

Theorema 1.

§. 6. Summa seriei (§. 4.) siue S A tang. a^x est

$$= \text{A tang.} \sqrt{-1} \left\{ \frac{1 - P\left(\frac{1 + a^x\sqrt{-1}}{1 - a^x\sqrt{-1}}\right)}{1 + P\left(\frac{1 + a^x\sqrt{-1}}{1 - a^x\sqrt{-1}}\right)} \right\}.$$

Demonstratio.

Ex theoria aequationum est

$$\left(1 - \frac{a'}{z}\right)\left(1 - \frac{a''}{z}\right)\ldots\left(1 - \frac{a^x}{z}\right)$$

$$= 1 - \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} - \frac{C}{z^3} \text{ etc. (§. 4.) et}$$

$$\left(1 + \frac{a'}{z}\right)\left(1 + \frac{a''}{z}\right)\ldots\left(1 + \frac{a^x}{z}\right) = 1 + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} \ldots$$

Hinc

Hinc fit addendo $2\left(1+\frac{B}{Z^2}+\frac{D}{Z^4}\ldots\ldots\right)$

$$=\left(1-\frac{a'}{z}\right)\ldots\left(1-\frac{a^x}{z}\right)$$
$$+\left(1+\frac{a'}{z}\right)\ldots\left(1+\frac{a^x}{z}\right);$$

subtrahendo $2\left(\frac{A}{Z}+\frac{C}{Z^3}\ldots\ldots\right)$

$$=\left(1+\frac{a'}{z}\right)\ldots\left(1+\frac{a^x}{z}\right)$$
$$-\left(1-\frac{a'}{z}\right)\ldots\left(1-\frac{a^x}{z}\right).$$

Ponatur iam $Z=\sqrt{-1}$, obtinentur expressiones pro $1-B+D-$ etc., et pro $A-C+E-$ etc., quae §. 4. substitutae formulam demonstrandam praebent.

Corollarium 1.

§. 7. Cum quaeuis quantitas imaginaria ad $M+N\sqrt{-1}$ reduci queat, ex theoremate obtinetur haec

Regula.

Exprimatur Productum $P(1+t^x\sqrt{-1})$ per $M+N\sqrt{-1}$, vel $P\left(\frac{1+t^x\sqrt{-1}}{1-t^x\sqrt{-1}}\right)$ per $\frac{M+N\sqrt{-1}}{M-N\sqrt{-1}}$, eritque $S\,A\,\mathrm{tang}.\,t^x = A\,\mathrm{tang}.\,\frac{N}{M}$.

Corollarium 2.

§. 8. Si productum indefinitum $P(1+t^x\sqrt{-1})$ quantitate exprimitur, quae ipsa ex factoribus conflata est,

$$\text{ſc. } \frac{P(1+t^x\sqrt{-1})}{1-t^x\sqrt{-1}} = \frac{(M'+N'\sqrt{-1})}{M'-N'\sqrt{-1}} \frac{(M''+N''\sqrt{-1})}{M''-N''\sqrt{-1}} \text{.. erit}$$

$$S\,A\,\text{tang.}\, t^x = A\,\text{tang.}\,\tfrac{N'}{M'} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{N''}{M''} + \text{etc.}$$

Corollarium 3.

§. 9. Poſito $P(1+t^x\sqrt{-1}) = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}$, erit $S\,A\,\text{tang.}\, t^x = \frac{1}{2} A\,\text{coſ.}\, \mathfrak{M}$.

Scholion 1.

§. 10. Ad formulam theorematis, et Regulam inde emanantem (§. 7.) perueni, conſiderando expreſſionem Arcus per Logarithmum

$$[z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,\text{tang.}\,(\frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}),\ \text{ſumto } t = \text{tang.}\, z];$$

praeſtare tamen videbatur, demonſtrationem elementarem adornare, ex ſolutione §. 4., quae et ipſa vſu haud caret.

Scholion 2.

§. 11. Conſtat, arcus indefinite multos $\alpha, \alpha \pm \pi \ldots \ldots \alpha \pm r\pi \ldots$ communem tangentem habere. Quae expreſſiones ſummae Arcuum hic traditae, quibus $S\,A\,\text{tang.}\, a^x$ ad Arcum certae tangentis reducitur, a formulis ſummatoriis vſitatis in eo differunt, quod per illas ſumma haud omnimode determinetur. Ad tollendam ambiguitatem in ſignificatione ipſorum ſeriei ſummandae terminorum, ſub $A\,\text{tang.}\, t^x$ intelligetur Arcus minimus, cui tangens t^x competit. Exinde tamen neutiquam ſequitur, quod Arcum, qui ſummam exprimit, eodem ſemper ſenſu accipiendus ſit. Varie potius pro re nata diiudicandum eſt, quodnam ſemiperipheriae multiplum Arcui minimo tangentis in ſumma expreſſae adiici-

en-

endum ſit, vt vera Arcuum ſumma prodeat. Quod ſi nimirum in formula §. 7.

$$A \text{ tang. } t' + \ldots + A \text{ tang. } t^x = A \text{ tang. } \tfrac{N}{M},$$

Arcus minimus, cuius tangens $= \frac{N}{M}$, ſit $= A$, erit vera Arcuum ſumma $= r\pi + A$, vbi $r\pi$ eſt quaſi conſtans aliunde definienda; *quaſi conſtans* inquam, cum vaga quodammodo ſit, nec vti in conſtantibus ex integratione oriundis ſit, ex vno variabilis x valore certo modo determinari queat, cuius obſeruationis vis ex ſequentibus, (praeſertim Sect. III.), clarius percipietur.

SECTIO II.
Inueſtigatio ſerierum algebraice ſummabilium.

Problema 2.

§. 12. Inueſtigare formam generalem ſerierum:

$$A \text{ tang. } t' + A \text{ tang. } t'' \;\ldots\ldots + A \text{ tang. } t^x$$

algebraice ſummabilium.

Solutio.

1.) Cum ſummatio harum ſerierum ad determinationem *producti indefiniti* reuocata ſit (§. 6.), caſus ſummationis ſine dubio ſimpliciſſimus eſt is, quo factores producti ſunt fractiones, ita ſe excipientes, vt denominatores et numeratores in producto ſe mutuo tollant, et relinquantur tantum primus numerator ac vltimus denominator. Quod quidem accidit, cum fuerit

$$\frac{1 + t^x \sqrt{-1}}{1 - t^x \sqrt{-1}} = \frac{\Phi x}{\Phi(x+1)},$$

denotante Φx quamuis functionem ipsius x; quippe tum erit

$$P\left(\frac{1+t^x\sqrt{-1}}{1-t^x\sqrt{-1}}\right)=\frac{\Phi 1.\Phi 2.\Phi 3\ldots\Phi(x-1).\Phi x}{\Phi 2.\Phi 3.\Phi 4\ldots\Phi x.\Phi(x+1)}=\frac{\Phi 1}{\Phi(x+1)}.$$

2.) Quo iam aequatio $\frac{1+t^x\sqrt{-1}}{1-t^x\sqrt{-1}}=\frac{\Phi x}{\Phi(x+1)}$ locum habere possit, functioni assumtae Φx forma imaginaria tribuenda est. Sit igitur $\Phi x = F x + G x.\sqrt{-1}$, eritque

$$(1+t^x\sqrt{-1})[F(x+1)+G(x+1)\sqrt{-1}]$$
$$=(1-t^x\sqrt{-1})(Fx+Gx\sqrt{-1});$$

vnde formata duplici aequatione, et eliminando t^x, fit

$$F(x+1)^2+G(x+1)^2=Fx^2+Gx^2.$$

3.) Exinde consequitur, functiones Fx et Gx ita esse accipiendas, vt Fx^2+Gx^2 sit $=$ quantitati constanti. Ponatur igitur $Fx^2+Gx^2=1$. Iam quo Fx et Gx formam rationalem induant, constat, ponendum esse $Gx=\sqrt{(1-Fx^2)}=1-Fx.fx$, denotante fx aliam functionem indicis x. Hinc prodit

$$Fx=\frac{2fx}{fx^2+1};\ Gx=\frac{fx^2-1}{fx^2+1};\ t^x=\frac{fx-f(x+1)}{1+fx.f(x+1)}.$$

4.) Porro fit

$$P\left(\frac{1+t^x\sqrt{-1}}{1-t^x\sqrt{-1}}\right)=P\frac{(1+fx\sqrt{-1})[1-f(x+1)\sqrt{-1}]}{(1-fx\sqrt{-1})[1+f(x+1)\sqrt{-1}]},$$

vel ob factores se mutuo tollentes $=\frac{(1+f1\sqrt{-1})[1-f(x+1)\sqrt{-1}]}{(1-f1\sqrt{-1})[1+f(x+1)\sqrt{+1}]}$. Vnde erit summa Arcuum

$$=\text{A tang.}\,\frac{N}{M}\ (\S.\ 7.)=\text{A tang.}\,\frac{f1-f.(x+1)}{1+f1.f(x+1)}.$$

Qua-

Quare haec obtinetur fummatio:

$$\text{A tang. } t' + \text{A tang. } t'' \ldots + \text{A tang. } t^x = \text{A tang. } \frac{f1 - f(x+1)}{1 + f1 \cdot f(x+1)},$$

pofito $t^x = \frac{fx - f(x+1)}{1 + fx \cdot f(x+1)}$.

5.) Cafum hactenus euolutum haud vnicum effe, quo productum indefinitum, hincque fummam Arcuum inuenire liceat, facile apparet. Affumi fcil. poteft hypothefis generalior: $\frac{1 + t^x \sqrt{-1}}{1 - t^x \sqrt{-1}} = \frac{\Phi x}{\Phi(x+r)}$, denotante r numerum integrum; tumque erit productum indefinitum

$$\mathrm{P}\left(\frac{1 + t^x \sqrt{-1}}{1 - t^x \sqrt{-1}}\right) = \frac{\Phi 1 \,.\, \Phi 2 \,.\,.\, \Phi r \,.\, \Phi(1+r)}{\Phi(1+r)\,\Phi(2+r) \ldots \Phi 2r \,.\, \Phi(1+2r)} \ldots$$

$$\ldots \frac{\Phi x}{\Phi(x+r)} = \frac{\Phi 1 \,.\,.\, \Phi 2 \ldots \Phi r}{\Phi(x+1)\,\Phi(x+2) \ldots \Phi(x+r)}, \text{ i. e.}$$

reuocatum ad productum definitum. Iam prodit

$$t^x = \frac{fx - f(x+r)}{1 + fx \,.\, f(x+r)};$$

productum

$$\mathrm{P}\left(\frac{1 + t^x \sqrt{-1}}{1 - t^x \sqrt{-1}}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{1 + fx \,.\, \sqrt{-1}}{1 - fx\sqrt{-1}} : \frac{1 + f(x+r)\sqrt{-1}}{1 - f(x+r)\sqrt{-1}}\right)$$

$$= \frac{(1+f1\sqrt{-1})[1-f(x+1)\sqrt{-1}](1+f2\sqrt{-1})[1-f(x+2)\sqrt{-1}]\ldots(1+fr\sqrt{-1})[1-f(x+r)\sqrt{-1}]}{(1-f1\sqrt{-1})[1-f(x+1)\sqrt{-1}](1-f2\sqrt{-1})[1-f(x+2)\sqrt{-1}]\ldots(1-fr\sqrt{-1})[1-f(x+r)\sqrt{-1}]}$$

Hinc combinando binos factores, fumma Arcuum

$$\text{S A tang. } t^x = \text{A tang. } \frac{N'}{M'} + \text{A tang. } \frac{N''}{M''} + \text{etc. } (\S.\ 7.)$$

$$= \text{A tang. } \frac{f1 - f(x+1)}{1 + f1 f(x+1)} + \text{A tang. } \frac{f2 - f(x+2)}{1 + f2 \,.\, f(x+2)} \ldots$$

$$+ \text{A tang. } \frac{fr - f(x+r)}{1 + fr f(x+1)}.$$

Scholion 1.

§. 13. Formula prima praecedentis §i (art. 4.) conuenit cum ea, a qua Eulerus ceu a principio eius generis ſummationum exorſus eſt: quanquam paullo aliter ſit expreſſa. Demonſtratio *ſynthetica* huius formulae ſine negotio conficitur. Eſt enim

$$\text{A tang. } t' = \text{A tg. } \frac{f1 - f2}{1 + f1 \cdot f2} = \text{A tang. } f1 - \text{A tang. } f2:$$

$$\text{A tang. } t'' = \text{A tang. } f2 - \text{A tang. } f3,$$

— — — — — — — — —

$$\text{A tang. } t^{x-1} = \text{A tang. } f(x-1) - \text{A tang. } fx;$$

$$\text{A tang. } t^{x} = \text{A tang. } fx - \text{A tang. } f(x+1).$$

Additione prodit

$$\text{S A tang. } t^{x} = \text{A tg. } f1 - \text{A tg. } f(x+1) = \text{A tg. } \frac{f1 - f(x+1)}{1 + f1 \cdot f(x+1)}.$$

Satius tamen videbatur oſtendere, quo pacto haec formula *analytice* ex iisdem formulis generalibus euolui queat, ex quibus caſus etiam reliqui difficiliores reſoluendi ſunt. Ceterum hanc formulam non niſi viam *indirectam* monſtrare, ad ſummationes perueniendi, apparet. Etenim ſi ex ea ſummanda eſſet ſeries Arcuum, cuius terminus generalis = A tang. X, denotante X functionem indicis x, definienda prius foret functio Φx, ſeu reſoluenda aequatio:

$$X = \frac{\Phi x - \Phi(x+1)}{1 + \Phi x \cdot \Phi(x+1)},$$

cuius reſolutio directa et vniuerſalis exhiberi nequit: indirectae et particulares ſolutiones obtinentur, dum aſſumuntur varii valores functionis Φx, hincque determinatur valor functionis X. Quare ſequentia problemata directe ex formulis generalibus reſoluam, ita vt a *termino generali* ad *ſummam progreſſus* fiat, quia ab hac ad illum *regreſſu* opus ſit.

Scho-

Scholion 2.

§. 14. Formula generalior (§. 12, art. 4.) fimili ratione fynthetice combrobari poteft. Eft nimirum

$$A\,\text{tang.}\,t' = A\,\text{tang.}\,f\,1 - A\,\text{tang.}\,f\,(1+r);$$
$$A\,\text{tang.}\,t'' = A\,\text{tang.}\,f\,2 - A\,\text{tang.}\,f\,(2+r);$$
$$A\,\text{tang.}\,t''' = A\,\text{tang.}\,f\,3 - A\,\text{tang.}\,f\,(3+r);$$
$$\text{— — — — — — — —}$$
$$A\,\text{tang.}\,t^r = A\,\text{tang.}\,f\,r - A\,\text{tang.}\,f\,2r;$$
$$A\,\text{tang.}\,t^{r+1} = A\,\text{tang.}\,f\,(1+r) - A\,\text{tang.}\,(1+2r);$$
$$\text{— — — — — — — — —}$$
$$A\,\text{tang.}\,t^x = A\,\text{tang.}\,f\,x - A\,\text{tang.}\,f\,(x+r).$$

Inde cum quilibet feriei terminus duabus partibus conftet, altera affirmatiua, altera negatiua, partes affirmatiuae ab A tang. $f(1+r)$ ad vsque vltimam A tang. $f\,x$ deftruent partes aequales negatiuas, ac remanebit fumma

$$= A\,\text{tang.}\,f\,1 + A\,\text{tang.}\,f\,2 + \ldots + A\,\text{tang.}\,f\,r$$
$$- A\,\text{tang.}\,f(x+1) - A\,\text{tang.}\,f(x+2) \ldots - A\,\text{tang.}\,f(x+r).$$

Ex quibus haftenus vniuerfe praemiffis quanquam ingens ferierum fummabilium varietas oriatur, duae tamen inprimis ferierum fpecies, fupra iam quodammodo indicatae (§. 3. B. α. β.) euoluenda videntur;, quorum primam Cap. I. alteram Cap. II. confiderabimus.

CAP. I.

De iis maxime feriebus, quae conftant Arcubus, quorum cotangentes in ferie algebraica fecundi ordinis procedunt.

Pro-

Problema 3.

§. 15. *Summare seriem Arcuum:*

$$\text{A tang.}\,\frac{a}{1+b+c}+\text{A tang.}\,\frac{a}{4+2b+c}+\ldots+\text{A tang.}\,\frac{a}{x^2+bx+c},$$

posito

$$4c = b^2 + 4a^2 - 1.$$

Solutio.

1.) Productum indefinitum $P\left(\frac{1+t^x\sqrt{-1}}{1\quad t^x\sqrt{-1}}\right)$ (§. 7.) est $= P\left(\frac{x^2+bx+c+a\sqrt{-1}}{x^2+bx+c-a\sqrt{-1}}\right)$, quo reuocato ad formam $M+N\sqrt{-1}$ summa erit $=$ A tang. $\frac{N}{M}$.

2.) Resoluantur numerator & denominator quadratici in factores simplices, & prodibit factor generalis producti (1)

$$=\frac{\left(x+\frac{b-1+2a\sqrt{-1}}{2}\right)\left(x+\frac{b+1-2a\sqrt{-1}}{2}\right)}{\left(x+\frac{b-1-2a\sqrt{-1}}{2}\right)\left(x+\frac{b+1+2a\sqrt{-1}}{2}\right)}$$

i. e. $\frac{\Phi x}{\Phi(x+1)}$ (§. 12. art. 1.) Productum ipsum ob factores se mutuo tollentes est

$$=\left(\frac{b+1-2a\sqrt{-1}}{b+1-2a\sqrt{-1}}\right)\frac{\left(x+\frac{b+1-2a\sqrt{-1}}{2}\right)}{\left(x+\frac{b+1+2a\sqrt{-1}}{2}\right)}.$$

3.) Hinc reperitur summa Arcuum

$$=\text{A tang.}\,\frac{2ax}{(b+1)(x+1)+2c}.$$

Corollarium 1.

§. 16. 1.) Si $x=\infty$, erit summa seriei infinitae, $=$ A

$= \text{A tang.} \frac{2a}{b+1}$, vti inuenit L. Eulerus, (fupra §. 3. pofito $a = \frac{1}{\alpha}$, $M = \frac{b}{a}$, $N = \frac{c}{a}$).

2.) Summa feriei finitae fic exprimi poteft:

$$S\,\text{A tang.} \frac{a}{x^2 + bx + c} = \text{A tang.} \frac{2a}{1+b} - \text{A tang.} \frac{2a}{1x+1+b}.$$

Corollarium 2.

§. 17. 1.) Ponatur $\frac{2a}{b+1} = \frac{1}{\alpha}$; deinde $\frac{1}{a} = n$, & $\frac{\alpha^2+1}{n} = m$, & prodibit

$$\text{A tang.} \frac{1}{\alpha+m} + \text{A tang.} \frac{1}{3\alpha+m+2n} + \text{A tang.} \frac{1}{5\alpha+m+6n} + \text{etc.}$$
$$+ \text{A tang.} \frac{1}{(2x-1)\alpha + m + x(x-1)n} = \text{A tang.} \frac{x}{\alpha x + m},$$

dummodo fuerit $mn = \alpha^2 + 1$.

2.) Pro $x = \infty$ eft fumma $= \text{A tang.} \frac{1}{\alpha}$, vti extat apud Eulerum. Si $n = 1$, erit

$$\text{A tang.} \frac{1}{\alpha^2+\alpha+1} + \text{A tang.} \frac{1}{\alpha^2+3\alpha+3} + \ldots$$
$$+ \text{A tang.} \frac{1}{\alpha^2 + (2x-1)\alpha + x^2 - x + 1} + \text{etc.}$$
$$= \text{A tang.} \frac{1}{\alpha}.$$

Corollarium 3.

§. 18. Aequationi $mn = \alpha^2 + 1$ (§. 17. 1.) innumeris modis per numeros *integros* fatisfieri poteft: n et α ita nimirum accipiendi funt, vt $\alpha^2 + 1$ per n diuifibile fit. Quod cum effe nequeat, fi n foret diuifor $\mathfrak{N}\alpha$, ponatur $\alpha = nk + r$ (denotante k numerum integrum, quotientem ex diuifione $\mathfrak{N}\alpha$ per n refultantem, r refiduum), vel etiam $a = nk - r$; eritque

$$\frac{a^2+1}{n} = nk^2 \pm 2kr + \frac{r^2+1}{n} = m.$$

Quare si r & n ita sumantur, vt $\frac{r^2+1}{n}$ sit = numero integro, omnes numeri formae $nk \pm r = a$ conditionem requisitam adimplebunt, vt scilicet eorum quadratum vnitate auctum per n diuisibile sit. Ponatur vel 1.) $r^2 + 1 = n$, vel 2.) $\frac{r^2+1}{2} = n$, posterius quidem, si r fuerit numerus impar, tum prodit a vel $= (r^2+1)k \pm r$, vel $= \frac{(r^2+1)}{2} k \pm r$. Hinc innumeri valores pro n, a & m obtinentur. Quorum aliquot, scil. pro $n = 5, 10, 13, 17, 25$, exhibuit Eulerus, nec tamen formula generali eos comprehendit, nec, qua ratione ad eos perueniatur, expressit.

Corollarium 4.

§. 19. 1.) Posito $n = r^2 + 1$, $a = nk + r$, erit terminus generalis seriei (§. 17. 1.)

$$= \text{A tang.} \frac{1}{(r^2+1)(x+k)^2 - (r-1)^2 (x+k) - r + 1};$$

summa seriei infinitae

$$= \text{A tang.} \frac{1}{(r^2+1)k + r}.$$

2.) Pro $a = nk - r$, est terminus generalis

$$= \text{A tang.} \frac{1}{(r^2+1)(x+k-1)^2 + (r-1)^2 (x+k-1) - r + 1},$$

summa seriei infinitae

$$= \text{A tang.} \frac{1}{(r^2+1)k - r}.$$

3.) Sit in (1.) $k = 0$, in (2.) $k = 1$; prodit

$$S\ \text{A tang.} \frac{1}{(r^2+1)x^2 - (r-1)^2 x - r + 1} = \text{A tang.} \frac{1}{r};$$

S A

$$S\,A\,\text{tang.}\frac{1}{(r^2+1)x^2+(r-1)^2x-r+1}=A\,\text{tang.}\frac{1}{r^2+1-r}.$$

A binis feriebus ita fummatis reliquae ex aliis valoribus $\mathfrak{N}\,k$ oriundae in eo tantum differunt, quod in his quidem (§. 1. 2.) vel k, vel $k-1$ primi illarum termini defint. Inde haec oritur *fummatio.*

„ Summa feriei infinitae, cuius terminus quisque x^{tus} eft

$$A\,\text{tang.}\frac{1}{(r^2+1)x^2\mp(r-1)^2x-r+1}, \text{ eft}$$
$$=A\,\text{tang.}\frac{1}{(r^2+1)k\pm r},$$

fi feries k *vel* $k-1$ terminis initialibus, pro figno fuperiori *vel* inferiori, truncata fuerit, i. e. vel $k+1^{to}$ vel k^{to} termino incipiat."

Hinc manifeftum eft, quomodo eiusdem feriei *finitae* fumma determinetur.

4.) Eadem ratione, pofito $n=\frac{r^2+1}{2}$, denotante r numerum imparem, haec prodit *fummatio*:

„ Summa feriei infinitae, cuius terminus x^{tus}

$$=A\,\text{tang.}\frac{1}{\frac{(r^2+1)}{2}x^2\pm\left(\frac{(r^2+1)}{2}-2r\right)x-r+2} \text{ eft}$$

$$=A\,\text{tang.}\frac{1}{\frac{(r^2+1)}{2}k\pm r},$$

fi vel k vel $k-1$ termini initiales deficiant."

4.) Ex his formulis, cum pro r in (3.) quiuis numerus integer, in (4.) quiuis impar poni poffit, innumerae

 obti-

obtinentur feries fummabiles. Si in (4.) fumatur $r = 1$; 5; 7; in (3.) $r = 1$; 2; 3; 4; proueniunt exempla Euleri (§.§. 4. 8. 10. 5. 6. 7. 9.), quorum Analyfin et formulas generales tradere haud fuperfluum videbatur; quare exempla numerica addere minus neceffe eft.

Problema 4.

§. 20. *Inuenire fummam Arcuum:*

$$\text{A tang.}\, \frac{a}{1+b+c} + \text{A tang.}\, \frac{a}{4+2b+c} \ldots + \text{A tang.}\, \frac{a}{x^2+bx+c},$$

fi fuerit $4c = b^2 + \frac{4a^2}{r^2} - r^2$, *denotante r numerum quemuis integrum.*

Solutio.

1.) Eadem omnino ratione ac §. 14. 1. 2. reperitur productum $P\left(\frac{1 + t^x \sqrt{-1}}{1 - t^x \sqrt{-1}}\right)$

$$= P \frac{\left(x + \frac{b - r + \frac{2a}{r}\sqrt{-1}}{2}\right)\left(x + \frac{b + r - \frac{2a}{r}\sqrt{-1}}{2}\right)}{\left(x + \frac{b - r - \frac{2a}{r}\sqrt{-1}}{2}\right)\left(x + \frac{b + r + \frac{2a}{r}\sqrt{-1}}{2}\right)}$$

quod eft forma fupra expofita (§. 12. 5.), fumto

$$fx = \frac{a}{r\left(x + \frac{b-r}{2}\right)}.$$

2.) Hinc prodit fumma Arcuum

$= A$

$$= \text{A tang.}\, \frac{2a}{r(b-r+2)} + \text{A tang.}\, \frac{2a}{r(b-r+4)}$$
$$+ \text{A tang.}\, \frac{2a}{r(b-r+6)} \;\ldots\; + \text{A tang.}\, \frac{2a}{r(b+r)}$$
$$- \text{A tang.}\, \frac{2a}{r(2x+b-r+2)} - \text{A tang.}\, \frac{2a}{r(2x+b-r+4)} \ldots$$
$$\ldots - \text{A tang.}\, \frac{2a}{r(2x+b+r)}.$$

Corollarium 1.

§. 21. Pro $x = \infty$ eſt ſumma

$$\text{A tang.}\, \frac{2a}{r(b-r+2)} + \text{A tang.}\, \frac{2a}{r(b-r+4)}$$
$$+ \text{A tang.}\, \frac{2a}{r(b-r+6)} \;\ldots\; + \text{A tang.}\, \frac{2a}{r(b+r)}.$$

Corollarium 2.

§. 22. Si $b = 0$, primus ſummae terminus cum penvltimo efficiunt π, vti ceteri termini ab illis aequidiſtantes. Inde haec obtinetur *ſummatio*:

$$\text{A tang.}\, \frac{a}{1+c} + \text{A tang.}\, \frac{a}{4+c} + \text{A tang.}\, \frac{a}{9+c} \;\ldots$$
$$+ \text{A tang.}\, \frac{a+\pi}{x^2+c} = (r-1)\frac{\pi}{2} + \text{A tang.}\, \frac{2a}{r^2},$$

poſito $c = \frac{a^2}{r^2} - \frac{r^2}{4}$, et r denotante quemuis numerum integrum.

Corollarium 3.

§. 23. Sit $b = -1$, terminus ſummae primus et vltimus praebent ſummam π, nec non reliqui ab iis aequidiſtantes. Inde haec *ſummatio*:

$$\text{A tang.}\, \frac{a}{c} + \text{tang. A}\, \frac{a}{1\cdot 2+c} + \text{A tang.}\, \frac{a}{2\cdot 3+c}$$
$$+ \text{A tang.}\, \frac{a}{3\cdot 4+c} \;\ldots + \text{A tang.}\, \frac{a}{x^2-x+c} + \text{etc.}$$
$$= \frac{r\pi}{2}, \text{ poſito } 4c = 1 + \frac{4a^2}{r^2} - r^2.$$

 Porro

Porro est:

$$\text{A tang.}\,\frac{a}{2+c} + \text{A tang.}\,\frac{a}{6+c} + \text{A tang.}\,\frac{a}{12+c} \ldots$$
$$+ \text{A tang.}\,\frac{a}{x^2+x+c} + \text{etc.}$$
$$= \frac{r\pi}{2} - \text{A tang.}\,\frac{a}{c}.$$

Corollarium 4.

§. 24. Simili ratione demonstratur haec *summatio*:

$$\text{A tang.}\,\frac{a}{1+c} + \text{A tang.}\,\frac{a}{9+c} + \text{A tang.}\,\frac{a}{25+c} \ldots$$
$$+ \text{A tang.}\,\frac{a}{(2x-1)^2+c} + \text{etc.} = \frac{r\pi}{4},$$

posito $c = \frac{a^2}{r^2} - \frac{r^2}{4}$, et $r =$ numero pari.

Corollarium 5.

§. 25. Sit $a = \frac{r^2}{2}$, erit

$$\text{A tang.}\,\frac{r^2}{2.1} + \text{A tang.}\,\frac{r^2}{2.4} + \text{A tang.}\,\frac{r^2}{2.9} \ldots$$
$$\ldots + \text{A tang.}\,\frac{r^2}{2xx} + \ldots = (2r-1)\frac{\pi}{4};$$
$$\text{A tang.}\,\frac{r^2}{2.1} + \text{A tang.}\,\frac{r^2}{2.9} + \text{A tang.}\,\frac{r^2}{2.25} \ldots$$
$$\ldots + \text{A tang.}\,\frac{r^2}{2(2x-1)^2} \ldots = \frac{r\pi}{4},$$

in posteriore r par supponitur.

Corollarium 6.

§. 26. 1. Seriei signis *alternantibus* instructae:

$$\text{A tang.}\,\frac{a}{1+b+c} - \text{A tang.}\,\frac{a}{4+2b+c} + \text{A tang.}\,\frac{a}{9+3b+c} \ldots$$
$$\pm \text{A tang.}\,\frac{a}{x^2+bx+c} \pm \text{etc.}$$

summa ex §. 20. etiam determinatur, dum fuerit $4c = b^2 + \frac{4a^2}{r^2} - r^2$, et r numerus par.

2.)

2.) Ita pro $b = 0$, haec habetur *summatio*:

$$A\,\text{tang.}\,\frac{a}{1+c} - A\,\text{tang.}\,\frac{a}{4+c} + A\,\text{tang.}\,\frac{a}{9+c}$$
$$- A\,\text{tang.}\,\frac{a}{16+c} + \text{etc.} = A\,\text{tang.}\,\frac{r^2}{2a},$$

posito $c = \frac{a^2}{r^2} - \frac{r^2}{4}$; e. g. pro $a = \frac{r^2}{2}$, est

$$A\,\text{tang.}\,\frac{r^2}{2.1} - A\,\text{tang.}\,\frac{r^2}{2.4} + A\,\text{tang.}\,\frac{r^2}{2.9}$$
$$- A\,\text{tang.}\,\frac{r^2}{2.16} + \text{etc.} = \frac{\pi}{4};$$

posito r pari. Summa seriei ab r non pendet.

Scholion.

§. 27. 1.) Problemata 3 et 4 innumeras series summabiles praebent, quarum terminus generalis est formae $A\,\text{tang.}\,\frac{a}{x^2 + bx + c}$. Quarum serierum si binae pluresue inuicem addantur, liquet nouas inde oriri series itidem summabiles, terminum generalem habentes formae

$$A\,\text{tang.}\,\frac{A x^{2m-2} + B x^{2m-3} + C x^{2m-4} + \ldots}{x^{2m} + b x^{2m-1} + c x^{2m-2} + \ldots}$$

vbi coëfficientes A, B, C . . . b, c . . certas inter se relationes teneant necesse est.

2.) Quod si summabilis est series, cuius terminus generalis $= A\,\text{tang.}\,X$, assignari quoque poterit

$$S\,A\,\text{tang.}\,\frac{a + X}{1 - aX} = x\,A\,\text{tang.} + S\,A\,\text{tang.}\,X.$$

Ita exempli gratia summari potest series, cuius terminus generalis $= A\,\text{tang.}\,\frac{A x^2 + B x + c}{x^2 + b x + c}$, dum fuerit 1.) $B = A b$; 2.) $\frac{4(AC + c)}{1 + A^2} = b^2 + \frac{4}{r^2}\left(\frac{C - Ac}{1 + A^2}\right)^2 - r^2$, denotante r numerum integrum. Cum haec ex hactenus demonstratis repeti queant

ant, et resolutio Arcuum in sequentibus (Sect. III.) illustrabitur, haec sufficiant. Transeamus ad *alteram speciem* serierum algebraice summabilium.

CAPVT II.

De iis maxime seriebus, quae constant Arcubus, quorum cotangentes procedunt in serie recurrente secundi ordinis vel pura vel affecta. (*)

Problema 5.

§. 28. *Summare seriem Arcuum:*

$$A\,tang.\frac{a}{E+bE^{-1}+c}+A\,tang.\frac{a}{E^2+bE^{-2}+c}$$

$$+A\,tang.\frac{a}{E^3+bE^{-3}+c}\ldots+A\,tang.\frac{a}{E^x+bE^{-x}+c},$$

posito $\frac{b}{E}=\frac{c^2}{(E+1)^2}+\frac{a^2}{(E-1)^2}$.

Solutio.

1.) Productum indefinitum

$$P\left(\frac{1+t^x\sqrt{-1}}{1-t^x\sqrt{-1}}\right)(\S.\ 7.)\text{ est }=P\left(\frac{E^{2x}+(c+a\sqrt{-1})E^x+b}{E^{2x}+(c-a\sqrt{-1})E^x+b}\right).$$

Resoluendo numeratorem et denominatorem fit factor generalis

$$=\frac{\left(E^x+\frac{c}{E+1}-\frac{a}{E-1}\cdot\sqrt{-1}\right)\left(E^{x-1}+\frac{c}{E+1}+\frac{a}{E-1}\cdot\sqrt{-1}\right)}{\left(E^x+\frac{c}{E+1}+\frac{a}{E-1}\cdot\sqrt{-1}\right)\left(E^{x-1}+\frac{c}{E+1}-\frac{a}{E-1}\cdot\sqrt{-1}\right)},$$

i. e. formae $\frac{\Phi x}{\Phi(x+1)}$ (§. 12.). Quare productum, ob factores se mutuo destruentes

=

(*) Cf. Nota sequens.

$$=\frac{\left(1+\frac{c}{E+1}+\frac{a}{E-1}\cdot\sqrt{-1}\right)\left(E^x+\frac{c}{E+1}-\frac{a}{E-1}\cdot\sqrt{-1}\right)}{\left(1+\frac{c}{E+1}-\frac{a}{E-1}\cdot\sqrt{-1}\right)\left(E^x+\frac{c}{E+1}+\frac{a}{E-1}\cdot\sqrt{-1}\right)}.$$

2.) Hinc ſumma Arcuum $=$ A tang. $\frac{N}{M}$ (§. 7.)

$$=\text{A tang.}\ \frac{\frac{a}{E-1}(E^x-1)}{E^x\left(1+\frac{c}{E+1}\right)+\frac{c}{E+1}+\frac{b}{E}}.$$

Corollarium 1.

§. 29. 1.) Pro $x=\infty$, eſt ſumma

$=$ A tang. $\frac{a(E+1)}{(E-1)(E+1+c)}$, ſi $E>1$; vel

$=$ A tang. $\frac{aE(E+1)}{(1-E)[(c+b)E+b]}$, ſi $E<1$.

Hic caſus ad illum reduci et ſemper $E>1$ ſumi poteſt.

2.) Summa ſeriei finitae etiam ſic exprimi poteſt:

$$\text{S A tang.}\ \frac{a}{E^x+bE^{-x}+c}=\text{A tang.}\ \frac{a:(E-1)}{1+c:(E+1)}$$

$$-\text{A tang.}\ \frac{a:(E-1)}{E^x+c:(E+1)}.$$

Corollarium 2.

§. 30. Quodſi accuratius confiderentur cotangentes Arcuum ſeriei, apparebit eas formare ſeriem recurrentem ſecundi ordinis, cum *appendice* (*). Sit nimirum $\frac{E^x+bE^{-x}+c}{a}=Z$, et

(*) Hoc verbo vtuntur Analyſtae Itali, e. g. *Riccati*; poſito $Z''=\alpha Z'+\beta Z$, Z eſt terminus generalis ſeriei recurrentis vulgaris; ſi fuerit, $Z''=\alpha Z'+\beta Z+\gamma$, habetur ſeries recurrens cum *appendice.* Ad analogiam aequationum quadraticarum hae ſeries etiam *affectae* vocari poſſunt.

et cotangentes proximae ponantur Z′, Z″, prodibit aequatio:

$$Z'' = \frac{E^2+1}{E} \cdot Z' - Z - \frac{(E-1)^2 c}{a E},$$

i. e. Z, Z′, Z″ ſunt in ſerie recurrente *affecta*. Quae obſeruatio in ſequenti problemate amplius euoluitur.

Problema 6.

§. 31. *Summare ſeriem Arcuum:*

$$A \cot. A + A \cot. B + A \cot. C \ldots + A \cot. Z,$$

progredientibus $A, B, C, \ldots Z$ *in ſerie recurrente affecta tali, vt ſit* $Z'' = m Z' - Z - n$; *ac poſito inſuper*

$$(m+2)(AB-1) = (A+B)(A+B+n).$$

Solutio.

1.) Comparatio huius ſeriei cum prius ſummata has quatuor offert aequationes:

1.) $m = \frac{E^2+1}{E}$;

2.) $n = (E-1)^2 \frac{c}{aE}$;

3.) $A = \frac{E}{a} + \frac{c^2}{2(E+1)^2} + \frac{a}{(E-1)^2} + \frac{c}{a}$;

4.) $B = \frac{E^2}{a} + \frac{c^2}{aE(E+1)^2} + \frac{a}{E(E-1)^2} + \frac{c}{a}$.

Ex quibus non tantum determinari poſſunt quantitates c, a, E, verum etiam infertur aequatio inter ipſas quantitates A, B, m et n. Eliminatis nimirum c, a, E prodit $m + 2 = \frac{(A+B)(A+B+n)}{AB-1}$. Quae eſt *aequatio conditionalis* definiens relationem neceſſariam inter A, B, m, n, quo ſeries Arcuum ſummabilis ſit.

2.) Summa ſeriei infinitae reperitur $= A \tan. \frac{E(E+1)}{BE - A + En}$; finitae

$$= \text{A tang.} \frac{E(E+1)}{BE - A + nE}$$

$$- \text{A tang.} \frac{E(E+1)}{E^x(BE-A) - nE^2(E^{x-1}-1):E-1};$$

quantitas E ex aequatione $E^2 + 1 = mE$ definitur.

Corollarium 1.

§. 32. Summa feriei infinitae etiam fic exprimi poteft:

$$\text{A tang.} \frac{A+B}{AB - 1 - \frac{(A^2+1)}{E}} \text{ vel } = \text{A tang.} \tfrac{1}{A} + \text{A tang.} \tfrac{E+1}{BE-A}.$$

Corollarium 2.

§. 33. 1.) Aequatio conditionalis inter m, n et terminos feriei cotangentium primum et fecundum fuppofita locum etiam habet de fecundo et tertio, hinc de quibusvis fibi proximis, vt fit

$$(m+2)(Z'Z''-1) = (Z'+Z'')(Z'+Z''+n).$$

2.) Exinde feriei ab inde termino $(x+1)^{to} = \text{A cot. } Z'$ in infinitum excurrentis erit fumma

$$= \text{A tang.} \frac{Z'+Z''}{Z'Z'' - 1 - \frac{(Z'Z''+1)}{E}}.$$

Qua ferie a priori fubtracta, remanet fumma feriei *finita*

A cotang. A + A cotang. B . . . . + A cotang. Z

$$= \text{A tang.} \frac{A+B}{AB - 1 - \frac{(A^2+1)}{E}} - \text{A tang.} \frac{Z'+Z''}{Z'Z'' - 1 - \frac{(Z'Z''+1)}{E}},$$

vbi Z', Z'' ſunt cotangentes vltimam Z proxime inſequentes. Exinde Solutio Problematis 6. hoc comprehendi poteſt Theoremate:

Theorema generale.

Poſito $Z'' = m Z' - Z - n$, et $(m + 2)(A B - 1) = (A + B)(A + B + n)$, eſt

$$A \text{ cotang. } A + A \text{ cotang. } B \ldots + A \text{ cotang. } Z + \text{ in inf.}$$
$$= A \text{ tang. } \frac{A + B}{A B - 1 - \frac{(A^2 + 1)}{E}};$$

pro ſerie finita ſubtrahitur ab hac ſumma:

$$A \text{ tang. } \frac{Z' + Z''}{Z' Z'' - 1 - \frac{(Z' Z' + 1)}{E}}.$$

Eſt autem $\frac{1}{E} = \frac{m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m^2}{4} - 1\right)}$.

Scholion 1.

§. 34. Solutio praecedentis problematis inuoluit ſimul ſolutionem problematis 3. (§. 15.), inſtar caſus particularis. Series nimirum algebraicae ſecundi ordinis conſiderari poſſunt tanquam recurrentes affectae eiusdem ordinis, ob differentias ſecundas conſtantes. Poſito igitur (§. 15.) $\frac{x^2 + b x + c}{a} = Z$, erit $Z'' - 2 Z' + Z = \frac{2}{a}$; hinc §. 31. $m = 2$, $n = -\frac{2}{a}$, $E = 1$. Aequatio conditionalis in hanc abit: $4 c = 4 a^2 + b^2 - 1$. Summa ſeriei infinitae prodit A tang. $\frac{2 a}{b + 1}$. Quae cum ſupra inuentis conſpirant.

Scholion 2.

§. 35. Summatio problematis 5. etiam modo ſupra (§. 13.) indicato comprobari poteſt.

1.) Sit nimirum

$$\text{A tang.}\,\frac{a}{E^x+bE^{-x}+c}=\text{A tang.}\,\frac{\alpha}{E^x+\beta}-\text{A tang.}\,\frac{\alpha}{E^{x+1}+\beta},$$

tres produnt aequationes, vnde fit

$$\frac{b}{E}=\frac{c^2}{(E+1)^2}+\frac{a^2}{(E-1)^2};\ \text{et}$$

$$\text{A tang.}\,\frac{a}{E^x+bE^{-x}+c}=\text{A tang.}\,\frac{a:(E-1)}{E^{x-1}+c:(E+1)}$$

$$-\text{A tang.}\,\frac{a:(E-1)}{E^x+c:(E+1)}.$$

2.) Terminis feriei fingulis ita expreffis et additis prodit fumma prius inuenta.

Scholion 3.

§. 36. Ex hactenus demonftratis, cum aequationi conditionali $(m+2)(AB-1)=(A+B)(A+B+n)$ quatuor quantitates indeterminatas inuoluenti, infinitis modis fatisfieri poffit, innumerae obtinentur feries fummabiles Arcuum, quorum cotangentes ad legem feriei recurrentis latiori fenfu acceptae prodeunt. In fequentibus feries inprimis infinitas confideramus, ad quas finitarum fummatio facile reducitur (§. 33.). Deinde in eos cafus maxime inquirendum videtur, quibus fingulae cotangentes *numeris integris* exprimuntur: quod fit, cum A, B, m, n iftiusmodi numeris aequantur. Quanquam refolutio aequationis praedictae in numeris integris ad Analyfin Diophanteam pertineat, nec fit huius loci, primarios tamen cafus euoluamus, et quidem 1.) quando cotangentes A, B . . . Z funt termini feriei recurrentis ftrictius fic dictae (39. — 46.); 2.) quando eaedem aequantur quadratis eiusmodi terminorum, vel horum quadratorum aeque multiplis (47. — 56.); 3.) cum A, B ... Z ſint numeri integri, in ſerie recurrente affecta quacunque progredientes (57. — 85.). Theoremata huc ſpectantia ſpecialia vocantur, quod derivantur ex theoremate generali §. 33.

Theorema ſpecialius 1.

§. 37. A cotang. A + A cotang. B .... + A cotang. Z + in inf. $= \frac{1}{2}$ A cotang. $\frac{A(1-m)+B}{2}$, poſito

$Z'' = mZ' - Z$, et $m + 2 = \frac{(A+B)^2}{AB-1}$.

Demonſtratio.

Ex §. 30. petitur, poſito $n = 0$.

Corollarium 1.

§. 38. 1.) Summa ſeriei *finitae* A cot. A + A cot. B .... + A cotang. Z, eſt

$= \frac{1}{2}$ A. tang. $\frac{2}{B - A(m-1)} - \frac{1}{2}$ A tang. $\frac{2}{Z' - Z}$.

2.) Summa ſeriei *infinitae* etiam ſic exprimi poteſt:

A tang. $\frac{1}{A} + \frac{1}{2}$ A tang. $\frac{2}{B-A}$.

Corollarium 2.

§. 39. B et m negative ſumendo, obtinetur ſignis alternantibus

A cotang. A — A cotang. B + etc. $\pm$ A cotang. Z $\mp$ in inf.

$= \frac{1}{2}$ A cotang. $\frac{A(m+1)-B}{2}$, vel

$=$ A cotang. A $- \frac{1}{2}$ A cotang. $\frac{A+B}{2}$.

Corol-

Corollarium 3.

§. 40. Ex aequatione conditionali sequitur:

$$B = \frac{m A \pm \sqrt{[m^2 A^2 - 4(A^2 + m + 2)]}}{2}.$$

Hinc apparet, proditurum esse valorem rationalem $\mathfrak{R}$ B, ponendo $A^2 + m + 2 = 0$. Inde haec nascetur *summatio*:

$$A \text{ tang. } \frac{1}{A} - A \text{ tang. } \frac{1}{A(A^2+2)} + A \text{ tang. } \frac{1}{A(A^2+2)^2 - A} - \text{etc.}$$
$$\pm A \text{ cotang. } Z \text{ in inf. } = \tfrac{1}{2} A \text{ cotang. } \tfrac{A}{2},$$

cotangentibus hac lege progredientibus:

$$Z'' = (A^2 + 2) Z' - Z.$$

Exempla numerica.

§. 41. 1.) $A = 1$;

$$A \text{ tang. } 1 - A \text{ tang. } \tfrac{1}{3} + A \text{ tang. } \tfrac{1}{8} - A \text{ tang. } \tfrac{1}{21}$$
$$+ A \text{ tang. } \tfrac{1}{55} - \text{etc.} \pm A \text{ tang. } \tfrac{1}{Z} \mp \text{etc.} = \tfrac{1}{2} A \text{ tang. } 2;$$

vbi est $Z'' = 3 Z' - Z$.

2.) $A = 2$;

$$A \text{ tang. } \tfrac{1}{2} - A \text{ tang. } \tfrac{1}{12} + A \text{ tang. } \tfrac{1}{70} - A \text{ tang. } \tfrac{1}{408}$$
$$+ A \text{ tang. } \tfrac{1}{2378} - \text{etc.} = \tfrac{1}{2} A \text{ tang. } 1 = \tfrac{\pi}{8};$$

vbi est $Z'' = 6 Z' - Z$.

3.) $A = 3$;

$$A \text{ tang. } \tfrac{1}{3} - A \text{ tang. } \tfrac{1}{33} + A \text{ tang. } \tfrac{1}{360} - A \text{ tang. } \tfrac{1}{3927}$$
$$+ \text{etc.} = \tfrac{1}{2} A \text{ tang. } \tfrac{2}{3};$$

vbi $Z'' = 11 Z' - Z$.

4.) $A = 4$;

$$A \text{ tang. } \tfrac{1}{4} - A \text{ tang. } \tfrac{1}{72} + A \text{ tang. } \tfrac{1}{1292} - A \text{ tang. } \tfrac{1}{23184}$$
$$+ \text{etc.} = \tfrac{1}{2} A \text{ tang. } \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2} A \text{ tang. } \tfrac{1}{2};$$

vbi est $Z'' = 18 Z' - Z$.

5.)

5.) $A = 5$;

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{5} - A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{135} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{3640} - A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{98145} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\,A\,\text{tang.}\,\tfrac{2}{5};$$ vbi eſt $Z'' = 27.\,Z' - Z$.

Quae ſeries quomodo pro lubitu continuandae ſint, manifeſtum eſt. Exemplum (2.) (ſupra §. 2.) extat apud *Eulerum;* quod igitur iam ad formulam generalem reuocatum eſt, quae tamen ipſa alio reſpectu particularis eſt.

Alia exempla.

§. 42. Quo pateat, praeter ſeries ſub formula §. 42. comprehenſas alias exhiberi poſſe, ad caſum I. (§. 35.) pertinentes, ſequentia adiungam exempla.

1.) $A = 1,\ B = 2$;

$$A\,\text{tang.}\,1 + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{13} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{89} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{610} + \text{etc.} = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\,A\,\text{tang.}\,2;$$ vbi eſt $Z'' = 7.\,Z' - Z$.

2.) $A = 1,\ B = 5$;

$$A\,\text{tang.}\,1 + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{5} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{34} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{233} + \text{etc.} = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\,A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2};$$ vbi eſt $Z'' = 7.\,Z' - Z$.

3.) $A = 1,\ B = 3$.

$$A\,\text{tang.}\,1 + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{3} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{17} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{99} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{577} + \text{etc.} = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\,A\,\text{tang.}\,\tfrac{2}{2} = \tfrac{3\pi}{8};$$ vbi eſt $Z'' = 6.\,Z' - Z$.

4.) $A = 2,\ B = 3$.

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{3} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{7} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{18} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{47} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{123} + \text{etc.} = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\,A\,\text{tang.}\,2;$$ vbi eſt $Z'' = 3.\,Z' - Z$.

Scho-

Scholion 1.

§. 43. Termini generales ferierum hactenus inuestigatarum facile exhiberi possunt. Ita terminus generalis feriei §. 40. fummatae eft

$$= \pm \text{A cotang.} \frac{[\sqrt{(g^2+1)}+g]^{2x} - [\sqrt{(g^2+1)}-g]^{2x}}{2\sqrt{(g^2+1)}},$$

pofito $\frac{A}{2} = g$. Pro exemplo *Euleri* (§. 41. 2.) eft $g = 1$, et terminus generalis

$$= \pm \text{A cotang.} \frac{(3+2\sqrt{2})^x - (3-2\sqrt{2})^x}{2\sqrt{2}}.$$

Scholion 2.

§. 44. 1.) Generatim cafus hactenus expofitus $n=0$, idem eft, ac fi in formulis §. 28. 29. ponatur $c=0$. Tum prodit haec fummatio:

$$\text{A tang.} \frac{a}{E+bE^{-1}} + \text{A tang.} \frac{a}{E^2+bE^{-2}} + \ldots$$

$$\ldots + \text{A tang.} \frac{a}{E^x+bE^{-x}} = \text{A tang.} \frac{a}{E-1}$$

$$- \text{A tang.} \frac{a}{E^x(E-1)} = \text{A tang.} \frac{a(E^x-1):(E-1)}{E^x+b:E}.$$

Summa feriei infinitae eft $= \text{A tang.} \frac{a}{E-1}$, vel $\text{A tang.} \frac{1-E}{a}$, pro $E > 1$ vel < 1. Sit $\frac{a}{E-1} = \frac{1}{\alpha}$, erit

$$\text{A tang.} \frac{\alpha(E-1)}{\alpha^2 E+1} + \text{A tang.} \frac{\alpha(E-1)}{\alpha^2 E^2 + E^{-1}} + \ldots$$

$$\ldots + \text{A tang.} \frac{\alpha(E-1)}{\alpha^2 E^x + E^{1-x}} = \text{A cotang.}\, \alpha - \text{A cot.}\, \alpha E^x.$$

2.) Posito $E = -\varepsilon$, fit

$$A \tan \frac{\alpha(\varepsilon+1)}{\alpha^2 \varepsilon - 1} - A \tan \frac{\alpha(\varepsilon+1)}{\alpha^2 \varepsilon^2 - \varepsilon^{-1}} + A \tan \frac{\alpha(\varepsilon+1)}{\alpha^3 \varepsilon^3 - \varepsilon^{-3}} \cdots$$

$$\cdots \pm A \tan \frac{\alpha(\varepsilon+1)}{\alpha^2 \varepsilon^x - \varepsilon^{1-x}} = A \cot . \alpha \pm A \cot . \alpha \varepsilon^x.$$

3.) Sit $\varepsilon = \alpha^2$, prodibit:

$$A \tan \frac{\alpha^2+1}{\alpha(\alpha^2 - \alpha^{-2})} - A \tan \frac{\alpha^2+1}{\alpha(\alpha^4 - \alpha^{-4})} \cdots$$

$$\cdots \pm A \tan \frac{\alpha^2+1}{\alpha(\alpha^{2x} - \alpha^{-2x})} = A \cot . \alpha \pm A \cot . \alpha^{2x+1}.$$

Posito $\alpha = \sqrt{(g^2+1)} + g$ hinc emanat summatio §. (43.) sc.

$$S \pm A \tan \frac{2\sqrt{(g^2+1)}}{[\sqrt{(g^2+1)}+g]^{2x} - \sqrt{[(g^2+1)-g]^{2x}}}$$
$$= \tfrac{1}{2} A \cot . g \pm A \tan [\sqrt{(g^2+1)} + g]^{2x+1}.$$

Exposito iam primo casu, quo cotangentes in serie recurrente procedunt, transeamus ad alterum casum (§. 36.), cum eae aequantur quadratis, eorumue aequemultiplis, quorum radices istiusmodi seriem constituunt. Huc spectat sequens

Theorema specialius 2.

§. 45. Summa seriei:

$$A \tan \frac{a}{(e+\gamma e^{-1})^2} + A \operatorname{tg} \frac{a}{(e^2+\gamma e^{-2})^2} \cdots + A \operatorname{tg} \frac{a}{(e^x+\gamma e^{-x})^2}$$

est

$$= \text{A tang.}\ \frac{a:(e^2-1)}{1+2\gamma:(e^2+1)} - \text{A tang.}\ \frac{a:(e^2-1)}{e^{2x}+2\gamma:(e^2+1)},$$

pofito

$$a = \frac{\gamma\,(e^2-1)^2}{e\,(e^2+1)}.$$

Demonftratio.

Deducitur ex §. 28. 29, pofito $c = 2\sqrt{b}, = 2\gamma$; $E = e^2$.

Corollarium 1.

§. 46. Summa feriei infinitae eft

$$= \text{A tang.}\ \frac{\gamma\,(e^2-1)}{e\,(e^2+1+2\gamma)};\ \text{finitae}$$

$$= \text{A tang.}\ \frac{\gamma\,(e^2-1)\,(e^{2x}-1)}{e^{2x+2}(e^2+1+2\gamma)+\gamma^2(e^2+1)+2\gamma e^2}.$$

Corollarium 2.

§. 47. 1.) Pofito $\gamma = -1$, erit

$$\text{A tang.}\ \frac{1}{e(e^2+1)}\left(\frac{e^2-1}{e-e^{-1}}\right)^2 + \text{A tang.}\ \frac{1}{e(e^2+1)}\left(\frac{e^2-1}{e^2-e^{-2}}\right)^2 \ldots$$

$$\ldots + \text{A tang.}\ \frac{1}{e(e^2+1)}\left(\frac{e^2-1}{e^x-e^{-x}}\right)^2 = \text{A tang.}\ \frac{e\,(e^{2x}-1)}{e^{2x+2}-1}.$$

Summa feriei infinitae eft $= \text{A tang.}\ \frac{1}{e}$, fi $e > 1$; A tang. e fi $e < 1$.

2.) Ponatur $e = g + \sqrt{(g^2-1)}$, erit

$$\text{A tang.}\,\frac{2(g^2-1):g}{[[(g+\sqrt{(g^2-1)}]^2-[g-\sqrt{(g^2-1)}]]^2}$$

$$+\text{A tang.}\,\frac{2(g^2-1):g}{[[(g+\sqrt{(g^2-1)}]^2-[g-\sqrt{(g^2-1)}]^2]^2}+\text{etc.}$$

$$+\text{A tang.}\,\frac{2(g^2-1):g}{[[g+\sqrt{(g^2-1)}]^x-[g-\sqrt{(g^2-1)}]^x]^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\,\text{A fin.}\,\tfrac{1}{g}.$$

Corollarium 3.

§. 48. Sit $\gamma=-2$, erit

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{e^2+1}\left(\frac{e^2-1}{e-1}\right)^2+\text{A tg.}\,\frac{1}{e^2+1}\left(\frac{e^2-1}{e^2-e^{-1}}\right)^2\ldots$$

$$+\text{A tang.}\,\frac{1}{e^2+1}\left(\frac{e^2-1}{e^x-e^{1-x}}\right)^2=\text{A tg.}\left(\frac{e+1}{e-1}\right)\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right).$$

Summa feriei infinitae $=$ A tang. $\frac{e+1}{e-1}$, vel A tang. $\frac{e+1}{1-e}$, pro $e>1$ vel <1.

Theorema fpecialius 3.

§. 49. A cot. A + A cot. B . . + A cot. Z + in inf.

$$=\text{A tang.}\,\frac{A+B}{A\,n-1-\frac{1}{2}(A^2+1)[\nu^2-2-\nu\sqrt{(\nu^2-4)}]},$$

fi pofito $Z=\zeta\zeta$, fuerit

$$\zeta''=\nu\zeta'-\zeta,\ \text{et}\ \nu=\frac{A+B}{\sqrt{AB}\pm 1}.$$

Demonftratio.

Ex praecedente Theoremate petitur.

Corol-

Corollarium 1.

§. 50. Ex $\nu = \frac{A + B}{\sqrt{AB \pm 1}}$ fit

$$B = \frac{(\nu^2 - 2) A \pm 2 \nu \pm \nu \sqrt{[(\nu^2 - 4) A^2 \pm 4 \nu A]}}{2}.$$

Hinc vt B euadat numerus integer, quantitas $(\nu^2 - 4) A^2 \pm 4 \nu A$ quadrato aequanda eſt. Id quidem fit, figno + adhibito, ſi ponatur $A = \nu$, vnde $B = \nu^3$. Hinc, poſito $A = \nu = \mathfrak{A}^2$, haec obtinetur *ſummatio:*

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{\mathfrak{A}^2} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{\mathfrak{A}^6} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}^4 - 1)^2} \ldots$$

$$+ A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{\zeta\zeta} + \ldots = \tfrac{1}{2} A\,\text{ſin.}\,\tfrac{2}{\mathfrak{A}^2},$$

poſito $\zeta'' = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\zeta' - \zeta$. Cotangentes ipſae $Z = \zeta\zeta$ hac lege procedunt: $Z'' = (\mathfrak{A}^4 - 2) Z' - Z + 2\mathfrak{A}^2$.

Exemplum.

§. 51. $\mathfrak{A} = 2$;

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{4} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{64} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{900} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{12544} \ldots = + \tfrac{\pi}{4}.$$

Denominatorum radices ita procedunt, vt ſit $\zeta'' = 4\zeta' - \zeta$; vel terminus x^{tus}

$$\zeta = \frac{(2 + \sqrt{3})^x - (2 - \sqrt{3})^x}{\sqrt{3}};$$

indeque haec ſummatio ſub Coroll. 2. §. 47. continetur, pro $g = 2$. Hoc exemplum extat apud Eulerum. Ex forma generali, cui illud ſubeſt, innumera ſimilia fluunt.

Corollarium 2.

§. 52. Sit $A = m\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, erit $B = m^3\mathfrak{A}^6$; hinc

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{m\mathfrak{A}^2} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{m(m\mathfrak{A}^3)^2} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{m(m^2\mathfrak{A}^5 - \mathfrak{A})^2} \ldots$$

$$+ A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{m u u} + \ldots = \tfrac{1}{2} A\,\text{ſin.}\,\tfrac{2}{m\mathfrak{A}^2},$$

poſito $u'' = m\mathfrak{A}^2 u' - u$.

Alia Exempla.

§. 53. Formula §. 50. inuenta eſt, poſito $\nu = \frac{A+B}{\sqrt{AB+1}}$ Iam ſi ponatur $\nu = \frac{A+B}{\sqrt{AB-1}}$, nouae prodeunt ſummationes, vt ſequentia exempla declarant:

1.) $A = 1$, $B = 4$

$$A\ \mathrm{tang.}\ 1 + A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{(2)^2} + A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{(9)^2} + A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{(43)^2} \ldots$$
$$= A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{\sqrt{21}-4},$$

2.) $A = 1$, $B = 9$

$$A\ \mathrm{tang.}\ 1 + A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{(3)^2} + A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{(14)^2} + A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{(67)^2} \ldots$$
$$= A\ \mathrm{tang.}\ \frac{\ }{\sqrt{21}-3},$$

pro vtraque ſerie eſt $\zeta'' = 5.\zeta' - \zeta$

3.) $A = 2$, $B = 18$

$$A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{2} + A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{2.(3)^2} + A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{2(11)^2} + A\ \mathrm{tg.}\ \frac{1}{2(41)^2} \ldots$$
$$+ A\ \mathrm{tang.} \ldots = \frac{\pi}{6}.$$

Hoc exemplum extat apud Eulerum. Lex ibi non expreſſa hac aequatione continetur: $\zeta'' = 4\zeta' - \zeta$. Contangentes ipſae $Z = 2\zeta\zeta$ hac lege procedunt: $Z'' = 14.Z' - Z - 8$.

4.) $A = 3$, $B = 12$

$$A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{3.(1)^2} + A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{3.(2)^2} + A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{3(5)^2}$$
$$+ A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{3(13)^2} \ldots + A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{3\zeta\zeta} + \mathrm{etc.}$$
$$= A\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \text{vbi eſt}\ \zeta'' = 3\zeta' - \zeta.$$

Scholion.

§. 54. Tranſeundum iam eſt ad tertium caſum (§. 36.), cum cotangentes Arcuum aequantur numeris *inte-*

gris

gris, qui in ſerie recurrente *affecta* quacunque ſecundi ordinis procedunt. Aequatio conditionalis:

$$m + 2 = \frac{(A + B)(A + B + n)}{AB - 1},$$

duplici ratione conſiderari poteſt 1.) dum A et B pro cognitis habentur, indeque m et n debito modo definiuntur; vel 2.) dum datis quantitatibus m et n, vnaue earum, determinandae ſunt A et B, ſeu earum alterutra. Prior conſideratio ſequens ſuppeditat

Theorema ſpecialius 4.

§. 55. Summa ſeriei infinitae

$$A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{A} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{B} + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{C} \ldots + A\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{Z} + \ldots$$

$$= A\,\text{tang.}\,\frac{2}{2A - r(A^2+1) + (A^2+1)\sqrt{r\left(r - \frac{4}{A+B}\right)}},$$

poſito

$$Z'' = [(A + B)r - 2]Z' - Z - r(AB - 1) + A + B,$$

denotante r numerum quemuis integrum.

Demonſtratio.

Simpliciſſimus modus aequationi conditionali pro datis A et B (§. 54. 1.) ſatisfaciendi, eſt is, vt ponatur $\frac{A + B + n}{AB - 1}$ = numero integro $= r$. Hinc reliqua fluunt.

Corollarium 1.

§. 56. Cotangens tertia C eſt $= r(B^2 + 1) - B$. Quod ſi iam terminus ſecundus prioris ſeriei tanquam primus conſideretur, et ponatur A pro B, a pro A, haec obtinetur *ſummatio*:

A

$$\text{A tang.}\ \tfrac{1}{A} + \text{A tang.}\ \frac{1}{r(A^2+1)-A} + \text{etc.} + \text{A tang.}\ \tfrac{1}{z} + \ldots$$

$$= \text{A tang.}\ \frac{2}{A - a + \sqrt{[(A+a)(A+a-\frac{4}{r})]}},$$

pofito

$$Z'' = [r(A+a) - 2]\,Z' - Z - r(A\,a - 1) + A + a.$$

Corollarium 2.

§. 57. Cum in binis fummationibus (§. 55. 56.) tres quantitates indeterminatae occurrant, A, B, r; A, a, r; quarum quaevis numero cuilibet integro aequari poteft, innumerae oriuntur feries fummabiles Arcuum, quorum cotangentes numeris integris expreffae in ferie recurrente affecta fecundi ordinis procedunt. Ceterum aequationi conditionali pro datis A et B plerumque aliis infuper modis fatisfieri poffe, quam pofitione §. 55. affumta, liquet. Sit enim $\frac{A+B}{AB-1}$ in minimis numeris $= \frac{f}{g}$, tum ponendum $n = g\,r - A - B$. Hinc maior adhuc varietas ferierum fummabilium oritur.

Corollarium 3.

§. 58. Cum fit

$$(m+2)\,A = \frac{(A^2+1)(A+B+n)}{AB-1} + A + B + n,$$

$\frac{(A^2+1)(A+B+n)}{AB-1}$ numero integro ϱ aequari debet. Hinc fit $m + 2 = \varrho\,\frac{(A+B)}{A^2+1}$. Sumto igitur pro ϱ numero integro tali, vt $\varrho\,(A+B)$ per A^2+1 diuidi queat, erit $m = \varrho\,\frac{(A+B)}{A^2+1} - 2$: $n = (m+1)\,A - B - \varrho$. Summa feriei infinitae eft

$$= \text{A tang.}\ \frac{2}{2A - \varrho + \sqrt{\varrho\,[\varrho - 4\,\frac{(A^2+1)}{A+B}]}}.$$

Pro-

Prouti iam vel $\frac{f}{A^2+1}$ vel $\frac{A+B}{A^2+1}$ = numero integro $= r$ ponitur, peruenitur ad fummationem §. 55. vel 56.

Corollarium 4.

§. 59. Quodfi aequatio conditionalis altero refpectu (§. 54. 2.) confideretur, et quidem primo m et A pro cognitis habeantur, tum ob $s = \frac{(m+2)(A^2+1)}{A+B}$ numerator quocunque modo in binos factores f, F refoluendus, et alteri eorum f aequandus denominator; quo facto habetur $B = f - A$, $\varrho = F$; $n = (m+2)A - F - f$; fumma

$$= A \text{ tang. } \frac{2}{2A - F + \sqrt{F\left(F - 4\frac{(A^2+1)}{f}\right)}}.$$

Hinc apparet, pro datis m et A certum tantum numerum ferierum fummabilium oriri, haud innumeras, vt priori cafu, affumtis A et B. Exempla bina fimpliciffima funt haec:

$$A \text{ tang. } \frac{1}{A} + A \text{ tang. } \frac{1}{A^2 - A + 1} + \ldots + A \text{ tang. } \frac{1}{Z} + \ldots$$
$$\ldots = A \text{ tang. } \frac{2}{2A - m - 2 + \sqrt{(m^2 - 4)}}$$
$$A \text{ tang. } \frac{1}{A} + A \text{ tang. } \frac{1}{m + 2 - A} + \ldots + A \text{ tang. } \frac{1}{Z} + \ldots$$
$$\ldots = A \text{ tang. } \frac{2}{(A^2+1)\sqrt{\left(\frac{m-2}{m+2}\right)} - (A-1)^2}$$

pofito $Z'' = mZ' - Z - (m+2)(A-1) + A^2 + 1$; quorum illud etiam ex §. 56., hoc ex §. 55. fequitur, pro $r = 1$.

Scholion.

§. 60. Si vel n et A vel m et n pro cognitis fumantur, vt aequationem conditionalem altero refpectu (§. 54. 2.) confiderare pergamus, tum eam aequationem alio modo

 trac-

tractare conuenit. Est nimirum

$$B = \frac{(m\,A - n) \pm \sqrt{[m^2\,A^2 - 2\,m\,A\,n + n^2 - 4\,(A^2 + n\,A + m + 2)]}}{2}.$$

Quam igitur formulam ad rationalitatem perducere oportet. Quod negotium modo generali absolui vix potest: si quidem postuletur solutio vniuersalis omnes valores idoneos trium quantitatum m, A, n complectens. Etenim si 1.) A spectetur tanquam quantitas indeterminata, tum methodi notae supponunt, vnum illius valorem cognitum esse, qui formulam quadraticam rationalem reddat, ex quo deinceps innumeros alios valores deriuare licet. At is ipse valor vnde eliciendus sit, haud liquet: deinde ex vno tali valore haud plures easque reuera diuersas series summabiles arcuum prodire, infra docebitur. Quodsi 2.) quantitates m vel n determinendae sint pro datis A, n, vel A, m, tum, quoniam eae coëfficientes habent A^2 et 1, i. e. quadratos, methodi usitatae hoc casu ne adhiberi quidem possunt. Quare in eo acquiescendum videtur, vt inter A, m, n tales relationes supponantur, pro quibus formula illa quadratica sponte rationalis prodeat. Quem in finem duae se offerunt positiones, quas iam euoluamus, cum sc. fuerit vel

1.) $A^2 + n\,A + m + 2 = 0$; vel.

2.) $-2\,m\,A\,n + n^2 - 4\,(A^2 + n\,A + m + 2) = 0.$

Prior hypothesis ad eum casum spectat, quo dantur A et n; alterius ope pro dato m innumeri valores quantitatum A, B, n, certo ordine procedentes reperiuntur. Ex illa sequens petitur

Theorema specialius 5.

§. 61. A cotang. A + A cotang. B + . . . + A cotang. Z + . . .

$= \text{A cotang.}\ \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - \frac{A}{N-A}\right)}$, posito

B =

$B = [(N - A)A - 2]A + N$, et
$Z'' = [(N - A)A - 2]Z' - Z + N.$

Demonſtratio.

Deducitur ex poſitione $A^2 + nA + m + 2 = 0$, et $n = -N$.

Corollarium 1.

§. 62. Sumto n poſitiue, erit

$$A\,\text{cotang.}\,A - A\,\text{cot.}\,B + A\,\text{cot.}\,C \ldots \pm A\,\text{cot.}\,Z \mp \text{etc.}$$
$$= A\,\text{cotang.}\,\tfrac{A}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{A^2}{4} + \tfrac{A}{n+A}\right)},$$ poſito

$B = [(n + A)A + 2]A - n;$
$Z'' = [(n + A)A + 2]Z' - Z \pm n,$

vbi ſignum ſuperius pro affirmativis Z vel Z'', inferius pro negativis obtinet.

Corollarium 2.

§. 63. 1.) Pro $N = 2A$, ex ſummatione (61.) prodit ſummatio (50.); pro $n = 0$ ex altera (62.) ſequitur ſummatio (40.).

2.) $A = 1$ (61.);

$$A\,\text{tang.}\,1 + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{2N-3} + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{2N^2-8N+8} + \text{etc.}$$
$$+ A\,\text{tang.}\,\frac{1}{Z} \ldots = A\,\text{tang.}\,\frac{2}{1+\sqrt{\left(\frac{N-5}{N-1}\right)}},$$

vbi eſt $Z'' = (N - 3)Z' - Z + N.$

3.) $A = 2;$

$$A\,\text{tang.}\,\frac{1}{2} + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{5N-12} + A\,\text{tg.}\,\frac{1}{10N^2-53N+70} + \text{etc.}$$

$$+ \text{A tang.} \tfrac{1}{Z} + \text{etc.} = \text{A tang.} \frac{1}{1 + \sqrt{\left(\frac{N-4}{N-2}\right)}};$$

$$Z'' = (2N - 6) Z' - Z + N.$$

4.) $A = 4$;

$$\text{A tang.} \tfrac{1}{4} + \text{A tang.} \frac{1}{17N - 72} + \text{etc.} + \text{A tang.} \tfrac{1}{Z} + \ldots$$

$$\ldots = \text{A tang.} \frac{1}{2 + 2\sqrt{\left(\frac{N-5}{N-4}\right)}};$$

$$Z'' = 2(2N - 9) Z' - Z + N.$$

Scholium.

§. 64. Summationes (§. 61. 62.) etiam ex ſummatione (56.) ſequuntur, pro $a = 0$, $r = N - A$, vel $= -n - A$. Quare cum r cuiuis numero integro, ſiue affirmatiuo, ſiue negatiuo, aequari poſſit, Theorema (61.) haberi poteſt pro Corollario theorematis (55.), et ſeries ſummabiles, quas illud ſuppeditat, iam comprehenduntur ſub ſummatione (56.).

Theorema ſpecialius 6.

§. 65. A cotang. A + A cot. B + ... + A cot. Z + etc.

$$= \text{A tang.} \frac{A + B}{AB - 1 - (A^2 + 1)\left[\frac{m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m^2}{4} - 1\right)}\right]},$$

poſito

$$Z'' = m Z' - Z + 2\nu; \quad m + 2 = \frac{A^2 - \nu^2}{A\nu - 1};$$

$$B \text{ vel} = mA + \nu, \text{ vel} = \nu.$$

Demonſtratio.

Sequitur ex altera poſitione (§. 60.):

—

$$-2mAn+n^2-4(A^2+nA+m+\nu)=0,$$

posito $n=-2\nu$.

Corollarium 1.

§. 66. Si m negatiue accipiatur, tum pro $-\surd(m^2-4)$ ponendum $+\surd(m^2-4)$. Pro $B=mA+\nu$, est summa

$$=A\,\text{tang.}\,\frac{2}{A-\nu+(A+\nu)\surd\left(\frac{m-\nu}{m+2}\right)};$$

pro $B=\nu$,

$$=A\,\text{tang.}\,\frac{2}{2A+\frac{(A^2+1)(\nu-1)}{A\nu-1}\left[1-\surd\left(\frac{m-2}{m+2}\right)\right]}.$$

Corollarium 2.

§. 67. Pro $\nu=1$, $m=A-1$, $B=A^2-A+1$, haec prodit *summatio:*

$$A\,\text{tang.}\,\frac{1}{A}+A\,\text{tang.}\,\frac{1}{(A-1)A+1}+\text{etc.}$$
$$+A\,\text{tang.}\,\frac{1}{Z}+\text{etc.}=\frac{1}{2}A\,\text{sin.}\,\frac{2}{A-1},\ \text{vbi est}$$
$$Z''=(A-1)Z'-Z+2.$$

Hinc fit

$$A\,\text{tang.}\,1+A\,\text{tang.}\,\frac{1}{A}+A\,\text{tang.}\,\frac{1}{(A-1)A+1}+\text{etc.}$$
$$+A\,\text{tang.}\,\frac{1}{Z}+\text{etc.}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}A\,\text{cof.}\,\frac{2}{A-1}.$$

Corollarium 3.

§. 68. Sumto A negative, est

$$A\,\text{tang.}\,\frac{1}{A}-A\,\text{tang.}\,\frac{1}{A(A+1)+1}+\text{etc.}$$
$$\pm A\,\text{tang.}\,\frac{1}{Z}\mp\text{etc.}=\frac{1}{2}A\,\text{fin.}\,\frac{2}{A+1},\ \text{vel}$$

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{1} - \text{A tang.}\,\tfrac{1}{A} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{A^2+A+1} - \text{etc.}$$
$$\pm\ \text{A tang.}\,\tfrac{1}{Z} \mp \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\,\text{A cos.}\,\tfrac{2}{A+1},$$

vbi denominatores constituunt seriem recurrentem affectam, pro qua est $Z'' = (A+1)Z' - Z \pm 2$, signo superiori obtinente pro terminis Z, Z' positivis.

Exempla.

§. 69. 1.) $A = 5$;

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{5} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{81} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{305} + \text{etc.} = \tfrac{\pi}{12};\ \text{vel}$$
$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{1} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{5} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{81} + \text{etc.} = \tfrac{\pi}{3};\ \text{vbi est}\ Z'' = 4Z' - Z + 2.$$

2.) $A = 3$;

$$\text{A tang.}\,1 - \text{A tang.}\,\tfrac{1}{3} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{13} - \text{A tang.}\,\tfrac{1}{47} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{177} - \text{A tang.}\,\tfrac{1}{639}\ \text{etc.} = \tfrac{\pi}{6}.$$

Hoc exemplum protulit *Eulerus* (supra §. 20.); nec tamen legem exhibuit, ex qua denominatores progrediuntur. Quae lex haec est:

$$13 = 4\cdot 3 - 1 + 2;\ 47 = 4\cdot 13 - 3 - 2;$$
$$177 = 4\cdot 47 - 13 + 2;\ \ldots Z'' = 4Z' - Z \pm 2.$$

Scholium.

§. 70. 1.) Summationes (§. 67.) ex §. 55. 56. sequuntur, pro $r = 1$, $a = 1$; $r = 1$, $A = 1$. Exinde corollaria adhuc generaliora peti possunt.

2.) Pro $A = 1$, ex (§. 55.)

$$\text{A tg.}\,1 + \text{A tg}\,\tfrac{1}{B} + \ldots + \text{A tg.}\,\tfrac{1}{Z} + \ldots = \text{A tg.}\,\frac{1}{1 - r + \sqrt{r\left(r - \frac{4}{B+1}\right)}};$$

posito

pofito

$$Z'' = [(B+1)r - 2]Z' - Z - r(B-1) + B + 1;$$

Ex (§. 56.):

$$A\,\text{tang.}\,1 + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{2r-1} + \ldots + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{Z} + \text{etc.}$$

$$= A\,\text{tang.}\,\frac{2}{1 - a + \sqrt{(1+a)\left(1+a-\frac{4}{r}\right)}},$$

pofito

$$Z' = [r(1+a) - 2]\,Z' - r(a-1) + a + 1.$$

E. g. pro $r = 2$:

$$A\,\text{tang.}\,1 + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{B} + \ldots + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{Z} + \ldots.$$

$$= A\,\text{tang.}\,\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{B-1}{B+1}\right)} - 1};$$

vbi eft

$$Z'' = 2\,B\,Z' - Z - B + 3;$$

$$A\,\text{tang.}\,1 + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{3} + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{5a+2} + \text{etc.}$$

$$+ A\,\text{tang.}\,\frac{1}{Z} + \ldots = A\,\text{tang.}\,\frac{2}{1 - a + \sqrt{(a^2 - 1)}};$$

vbi eft

$$Z'' = 2\,a\,Z' - a + 3.$$

3.) $A = 2$, ex (§. 55.)

$$A\,\text{tang.}\,\frac{1}{2} + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{B} + \ldots + A\,\text{tang.}\,\frac{1}{Z} + \ldots.$$

$$= A\,\text{tang.}\,\frac{2}{4 - 5r + 5\sqrt{r\left(r - \frac{4}{B+2}\right)}},$$

pofito

$$Z'' = [(2+B)r - 2]\,Z' - Z - r(2B-1) + B + 2;$$

Ex

Ex (§. 56.)

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{2} + \text{A tang.}\tfrac{1}{5r-2} + \ldots + \text{A tang.}\tfrac{1}{Z} + \ldots$$

$$= \text{A tang.}\frac{2}{2 - a + \sqrt{(2+a)(2+a-\frac{4}{r})}};\ \text{posito}$$

$$Z'' = [r(a+2)-2]Z' - Z - r(2a-1) + a + 2.$$

E. g. pro $r = 1$:

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{2} + \text{A tang.}\tfrac{1}{B} + \ldots + \text{A tang.}\tfrac{1}{Z} + \ldots.$$

$$= \text{A tang.}\frac{2}{5\sqrt{(\frac{B-2}{B+2})} - 1};$$

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{2} + \text{A tang.}\tfrac{1}{3} + \text{A tang.}\tfrac{1}{2a+1} + \ldots + \text{A tang.}\tfrac{1}{Z}\ldots$$

$$= \text{A tang.}\frac{2}{2 - a + \sqrt{(a^2-4)}},$$

posito hic

$$Z'' = aZ' - Z - a + 3;\ \text{illic}$$

$$Z'' = BZ' - Z - B + 3.$$

Corollarium 4.

§. 71. 1.) Posito §. 65. $A = 1$, $B = mA + \nu$, haec oritur summatio:

$$\text{A tang. } 1 - \text{A tang.}\tfrac{1}{3} - \text{A tang.}\tfrac{1}{5m+7}\ldots - \text{A tang.}\tfrac{1}{Z}\ldots$$

$$= \text{A tang.}\frac{2}{m + 4 - \sqrt{(m^2-4)}},\ \text{vel}$$

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{3} + \text{A tang.}\tfrac{1}{5m+7} + \ldots + \text{A tang.}\tfrac{1}{Z}\ldots$$

$$= \text{A tang.}\frac{1}{2 + \sqrt{(\frac{m-2}{m+2})}},\ \text{posito}$$

$$Z'' = mZ' - Z + 2(m+3).$$

2.)

2.) Posito $m = -\mu$, fit

$$\text{A tang. } 1 - \text{A tang. } \tfrac{1}{3} + \text{A tang. } \tfrac{1}{5\mu - 7} - \text{etc.}$$

$$\pm \text{A tang. } \tfrac{1}{Z} \mp \text{etc.} = \text{A tang. } \frac{2}{4 - \mu + \sqrt{(\mu^2 - 4)}},$$

vbi est $Z'' = \mu Z' - Z \pm 2(\mu - 3)$;

$$\text{A tang. } \tfrac{1}{3} - \text{A tang. } \tfrac{1}{5\mu - 7} + \text{etc.} \pm \text{A tang. } \tfrac{1}{Z} \mp \ldots$$

$$= \text{A tang. } \frac{1}{2 + \sqrt{\left(\frac{\mu + 2}{\mu - 2}\right)}},$$

posito $Z'' = \mu Z' - Z \mp 2(\mu - 3)$.

3.) Posito $B = \nu$, erit

$$\text{A tang. } 1 + \text{A tang. } \tfrac{1}{\nu} - \text{A tang. } \tfrac{1}{\nu^2 + \nu + 1} + \ldots.$$

$$\pm \text{A tang. } \tfrac{1}{Z} \mp \ldots. = \text{A tang. } \frac{1}{2 - \sqrt{\left(\frac{\nu + 5}{\nu - 1}\right)}}, \text{ siue}$$

$$\text{A tang. } \tfrac{1}{\nu} - \text{A tang. } \tfrac{1}{\nu^2 + \nu + 1} + \text{etc.} \pm \text{A tang. } \tfrac{1}{Z} \mp \ldots.$$

$$= \text{A tang. } \frac{2}{\nu - 1 + \sqrt{[(\nu + 3)^2 - 4]}}, \text{ vbi est}$$

$$Z'' = (\nu + 3) Z' - Z \pm 2\nu.$$

Porro ob $m = -\nu - 3$, est

$$\text{A tang. } 1 - \text{A tang. } \tfrac{1}{m + 3} - \text{A tang. } \tfrac{1}{(m + 3)(m + 2) + 1} - \ldots$$

$$- \text{A tang. } \tfrac{1}{Z} - \ldots = \text{A tang. } \frac{1}{2 - \sqrt{\left(\frac{m - 2}{m + 2}\right)}}, \text{ vel}$$

$$\text{A tang. } \tfrac{1}{m + 3} + \text{A tang. } \tfrac{1}{(m + 3)(m + 2) + 1} + \ldots..$$

$$+ \text{A tang. } \tfrac{1}{Z} \ldots = \text{A tang. } \frac{2}{m + 4 + \sqrt{(m^2 - 4)}},$$

posito $Z'' = m Z' - Z + 2(m + 3)$.

Scholion 1.

§. 72. Summationum §. 71. 1. prima fluit ex §. 66. pro $A = 1$, $r = -1$, $a = -m - 3$; altera pro $A = 3$, $a = -1$, $2r = m + 2$. Nec non summationum §. 71. 2 prima ex §. 65. pro $A = 1$, $r = -1$; vltima ex §. 66. pro $A = m + 3$, $r = 1$, $a = -1$ deriuatur. Eadem ratione ac §. 70. summationes generaliores elici possunt. Ita posito §. 66. $A = 3$, $2r = m + 2$, $a = -2\alpha - 1$, fit

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{3} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{5m+2} + \text{etc.} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{Z} + \ldots$$

$$= \text{A tang.}\,\frac{1}{2 + \alpha + \sqrt{[(1-\alpha)(\frac{m-2}{m+2} - \alpha)]}},$$

posito

$$Z'' = [m(1-\alpha) - 2\alpha]Z' - Z + 2(m+3) + 3(m+4)\alpha;$$

Perinde habetur pro $A = m + 3$, $\nu = 1$, $a = \alpha - 1$:

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{m+3} + \text{A tang.}\,\frac{1}{(m+3)(m+2)+1} + \text{etc.}$$

$$+ \text{A tang.}\,\tfrac{1}{Z} + \ldots = \text{A tang.}\,\frac{2}{m+4-\alpha+\sqrt{[(m+2+\alpha)(m-2+\alpha)]}},$$

posito

$$Z'' = (m+\alpha)Z' - Z + 2(m+3) - (m+2)\alpha.$$

Scholion 2.

§. 73. Aequationi §. 65. $m + 2 = \frac{A^2 - \nu^2}{A\nu - 1}$ aliis adhuc modis, quam ponendo $A = 1$ vel $\nu = 1$, vti §. 67. 71., per numeros *integros* satisfieri potest. Resolutio aequationis praebet:

$$A = \frac{(m+2)\nu \pm \sqrt{[(m+2)^2 + 4]\nu^2 - 4(m+2)}}{2}.$$

Quare ii valores quantitatis ν eligendi sunt, qui expressionem $[(m+2)^2 + 4]\nu^2 - 4(m+2)$ *quadrato* aequalem reddunt. Huc facit sequens Lemma:

Lem-

Lemma.

§. 74. Inuenire valores quantitatis indeterminatae x, qui formulam $\sqrt{(\alpha x^2 + \gamma)} = y$ rationalem reddant, denotante α numerum non quadratum.

Solutio.

Conf. *Euleri* Algebra P. II. Sect. II. Cap. IV. V. VI. *Comm. Petrop.* T. VI. Nov. Comm. T. IX.

Corollarium 1.

§. 75. Formula $\sqrt{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}$ simili modo rationalis redditur.

Corollarium 2.

§. 76. 1.) Quae vt ad formulam

$$\sqrt{[[(m+2)^2+4]\nu^2 - 4(m+2)]} = y$$

traducantur, est primus valor τȣ $\nu = 1$, τȣ $y, = m$. Inde duplex oritur series valorum quantitatis ν:

I.) $1;\ 1+(m+1)(m+2);\ \ldots\ldots\ \nu^r,$

II.) $1;\ m+3;\ \ldots\ldots\ \nu^r,$

Nec non τȣ y;

I.) $m;\ (m+2)^3 - m(m+1);\ \ldots\ y^r \ldots$

II.) $-m;\ (m+2)^2 + m + 4;\ \ldots\ y^r \ldots$

Series sunt recurrentes, sc:

$$\nu^{r+2} = [(m+2)^2+2]\nu^{r+1} - \nu^r,\ y^{r+2}$$
$$= [(m+2)^2+2]y^{r+1} - y^r.$$

2.) Cuilibet ν respondet duplex valor τȣ $A = \frac{(m+2)\nu \pm y}{2}$. Hinc quatuor nascuntur series τῶν A, duplex pro vtraque serie τῶν ν:

I. pro prima ferie $\tau\tilde{\omega}\nu$ ν:

$$\text{I. 1.)}\ m+1;\ (m+2)^3-(m+1)^2;\ .\ .\ A^r\ .\ .\ .$$
$$\text{I. 2.)}\qquad 1;\ -(m+1);\ .\ .\ .\ .\ .\ A^r.$$

II. pro altera ferie $\tau\tilde{\omega}\nu$ ν.

$$\text{II. 1.)}\qquad 1;\ 1+(m+2)(m+3);\ .\ .\ A^r$$
$$\text{II. 2.)}\ m+1;\ -1;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ A^r.$$

Quae eandem legem fequuntur, fcil.

$$A^{r+2}=[(m+2)^2+2]\,A^{r+1}-A^r.$$

Series I. 2. a ferie I. 1. quoad figna tantum differt, eftque illius terminus r^{tus} aequalis termino huius $r-1^{to}$ negatiue fumto. Idem valet de feriebus II. 1., II. 2.

3.) Cum poni poffit B vel $a.$) $= m\,A+\nu$, vel b.) $=\nu$, pro quolibet A et ν, B duplicem valorem habet. Hinc octo prodeunt feries $\tau\tilde{\omega}\nu$ B;

I. pro prima ferie $\tau\tilde{\omega}\nu$ ν.

1.) pro prima ferie $\tau\tilde{\omega}\nu$ A.

$$\text{I. 1. a)}\ m(m+1)+1;\ (m+1)^2(m+2)+(m+1)(2m+1);\ .\ .\ B^r\ .\ .\ .$$
$$\text{I. 1. b)}\qquad 1;\qquad 1+(m+1)(m+2)\ .\ .\ .\ .\ .\ B^r\ .\ .\ .$$

2.) pro altera ferie $\tau\tilde{\omega}\nu$ A.

$$\text{I. 2. a)}\ m+1;\ 2m+3;\ .\ .\ .\ .\ .\ B^r\ .\ .$$
$$\text{I. 2. b)}\qquad 1;\ 1+(m+1)(m+2);\ .\ .\ .\ .\ B^r\ .\ .$$

II. pro altera ferie $\tau\tilde{\omega}\nu$ ν.

1.) pro tertia ferie $\tau\tilde{\omega}\nu$ A.

II.

$$\text{II. 1. a)}\quad m+1;\quad m+(m+1)^2(m+3);\ \ldots\ B^r \ldots$$
$$\text{II. 1. b)}\quad 1;\quad m+3;\ \ldots\ldots\ B^r \ldots$$

2.) pro quarta ferie $\tau\tilde{\omega}\nu$ A.

$$\text{II. 2. a)}\quad m(m+1);\ 3;\ \ldots\ldots\ B^r \ldots$$
$$\text{II. 2. b)}\quad \ldots\ 1;\ m+3;\ \ldots\ B^r \ldots$$

Pro his feriebus itidem eft

$$B^{r+2} = [(m+2)^2+2]\,B^{r+1} - B^r.$$

Corollarium. 3.

§. 77. 1.) Quibus feriebus $\tau\tilde{\omega}\nu$ B fi feries $\tau\tilde{\omega}\nu$ A et ν debito modo iungantur, prouti defignatio hic adhibita fatis clare indicat, octo obtinentur combinationes trium ferierum pro ν, A et B, quae ita funt comparatae, vt fi earum termini quilibet fibi inuicem refpondentes pro ν, A et B fumantur, prodeant feries arcuum, quorum cotangentes in ferie recurrente affecta 2^{di} ordinis progredientes numeris *integris* exprimuntur; quae quidem feries hac forma comprehenfae:

$$\text{A cot. A} + \text{A cot. B} + \text{A cot. C} \ldots + \text{A cot. Z} + \ldots$$

vbi eft

$$Z'' = m\,Z' - Z + 2\,\nu;$$

fummam habent

$$= \text{A tang.}\,\frac{A+B}{AB - 1 - \frac{1}{2}(A^2+1)[m - \sqrt{(m^2-4)}]}.$$

Innumeras inde eiusmodi feries oriri, manifeftum eft, quarum quaelibet, ob quantitatem *m* indeterminatam, aeque innumera exempla complectitur.

2.) Accuratior tamen consideratio docet, *octo* istas combinationes ad *quatuor* redire. Demonstrari nimirum potest, series arcuum ex serie I. 1. *a* oriundas a seriebus, quas series I. 2. *b*. suppeditat, non differre, nisi quod illae duobus primis harum terminis truncatae sint, siue incipiant. Similiter series arcuum ex serie I. 1. *b*) oriundae, eaeque quae ex I. 2. *a* prodeunt, pro identicis haberi possunt; idemque obtinet de seriebus II. 1. *a*., II. 2. *b*; et II. 1. *b*., II. 2. *a*.

3.) Quodsi igitur series tantum I. 2. *a*; I. 2. *b*; II. 2. *a*; II. 2. *b*; retineantur, eaeque cum seriebus τῶν ν et A rite coniungantur, sequentes oriuntur series, ex quibus valores trium quantitatum ν, A et B peti possunt, qui in serie:

$$A \text{ cotang. } A + A \text{ cot. } B + \ldots A \text{ cot. } Z + \ldots$$

substituti praebent progressiones arcuum summabiles:

1.) $1;\ 1 + (m+1)(m+2);\ \ldots,\ \nu^r \ldots$ (I. 2. a)
$1;\ -(m+1);\ \ldots\ \ldots\ A^r$
$m+1;\ 2m+3;\ \ldots\ \ldots\ B^r \ldots$

2.) $1;\ 1 + (m+1)(m+2);\ \ldots\ \nu^r \ldots$ (I. 2. b)
$1;\ -(m+1);\ \ldots\ \ldots\ A^r \ldots,$
$1;\ 1 + (m+1)(m+2);\ \ldots\ B^r \ldots$

3.) $1;\ m+3;\ \ldots\ \ldots\ \nu^r \ldots$ (II. 2. a).
$m+1;\ -1;\ \ldots\ \ldots\ A^r \ldots$
$1 + (m+1)(m+2);\ 3;\ \ldots\ B^r \ldots$

4.)

4.) $1;\ m+3;$ . . . . ν^r . . . (II. 2. b)
$m+1;\ -1;$ . . . . A^r . . . .
$1;\quad m+3;$ . . . . B^r . . . .

Corollarium 4.

§. 78. 1.) Harum ferierum termini primi pro ν, A et B fubftituti haud alias progreffiones arcuum fuppeditant, ac eas, quae iam §. 67. 68. exhibitae funt. Ex terminis fecundis ferierum 3. 4. oriuntur progreffiones §. 71. fummatae.

2.) Confideremus igitur terminos fecundos ferierum 1. 2, ex quibus primo, adhibitis feriebus 1. haec oritur fummatio:

$$\text{A tang.} - \frac{1}{m+1} + \text{A tang.} \frac{1}{2m+3}$$
$$+ \text{A tang.} \frac{1}{2(2m+3)(m+1)+1} + \ldots + \text{A tang.} \frac{1}{Z} \ldots$$
$$= \text{A tang.} \frac{2}{[1+(m+1)^2]\sqrt{\frac{m-2}{m+2}} - (m+2)^2};$$

feu

$$\text{A tang.} \frac{1}{2m+3} + \text{A tang.} \frac{1}{2(2m+3)(m+1)+1} + \ldots$$
$$+ \text{A tang.} \frac{1}{Z} + \ldots = \text{A tang.} \frac{2}{3m+4+\sqrt{(m^2-4)}};$$

pofito

$$Z'' = mZ' - Z + 2 + 2(m+1)(m+2).$$

Pofito $m = -\mu$, fit

$$\text{A tang.} \frac{1}{\mu-1} - \text{A tang.} \frac{1}{2\mu-3}$$
$$+ \text{A tang.} \frac{1}{2(\mu-1)(2\mu-3)+1} - \text{etc.} \pm \text{A tang.} \frac{1}{Z} \text{ etc.}$$
$$= \text{A tang.} \frac{2}{[1+(\mu+1)^2]\sqrt{\frac{\mu+2}{\mu-2}} - (\mu-2)^2},$$

vbi

vbi eſt

$$Z'' = \mu Z' - Z \pm 2\,[1 + (\mu - 1)(\mu - 2)];\ \text{ſeu}$$

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{2\mu - 3} - \text{A tang.}\,\frac{1}{2(\mu - 1)(2\mu - 3) + 1}$$
$$+ \text{A tang.}\,\frac{1}{4(\mu - 1)^3 - \mu + 1} - \text{etc.} \pm \text{A tang.}\,\tfrac{1}{2}\ \text{etc.}$$
$$= \text{A tang.}\,\frac{2}{3\mu - 4 + \sqrt{(\mu^2 - 4)}},$$

poſito

$$Z'' = \mu Z' - Z \mp 2\,[1 + (\mu - 1)(\mu - 2)].$$

3.) Simili ratione ſerierum (2.) (77.) termini ſecundi hanc praebent ſummationem:

$$\text{A tang.} - \frac{1}{m+1} + \text{A tang.}\,\frac{1}{1 + (m+1)(m+2)}$$
$$+ \text{A tang.}\,\frac{1}{(m+2)^3 - (m+1)^2} + \ldots + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{2} + \text{etc.}$$
$$= \text{A tang.}\,\frac{-2}{3m + 4 - \sqrt{(m^2 - 4)}};\ \text{vel}$$

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{1 + (m+1)(m+2)} + \text{A tg.}\,\frac{1}{(m+2)^3 - (m+1)^2} + \ldots + \text{A tg.}\,\tfrac{1}{2}\ \text{etc.}$$
$$= \text{A tang.}\,\frac{2}{(m+2)^2 + [1 + (m+1)^2]\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}},$$

vbi eſt

$$Z'' = m Z' - Z + 2\,[1 + (m+1)(m+2)].$$

Poſito $m = -\mu$, fit:

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{1 + (\mu - 1)(\mu - 2)} - \text{A tang.}\,\frac{1}{(\mu - 2)^3 + (\mu - 1)^2} + \text{etc.}$$
$$\pm \text{A tang.}\,\tfrac{1}{2} \mp \text{etc.}$$
$$= \text{A tang.}\,\frac{2}{(\mu - 2)^2 + [1 + (\mu - 1)^2]\sqrt{\frac{\mu + 2}{\mu - 2}}},$$

vbi eſt

$$Z'' = \mu Z' - Z \pm 2\,[1 + (\mu - 1)(\mu - 2)].$$

Exem-

Exempla numerica.

§. 79. $A \text{ tang.} \frac{1}{9} + A \text{ tang.} \frac{1}{73} + A \text{ tang.} \frac{1}{252} + \ldots$
$+ A \text{ tang.} \frac{1}{Z} \ldots = A \text{ tang.} \frac{2}{13 + \sqrt{5}};$

$Z'' = 3 . Z' - Z + 42;$

$A \text{ tang.} \frac{1}{21} + A \text{ tang.} \frac{1}{109} + A \text{ tang.} \frac{1}{260} + \ldots$

$$= A \text{ tang.} \frac{2}{25 + 17 \sqrt{\frac{1}{5}}};$$

$Z'' = 3 Z' - Z + 42;$

$A \text{ tang.} \frac{1}{2} - A \text{ tang.} \frac{1}{3} + A \text{ tang.} \frac{1}{13} - A \text{ tang.} \frac{1}{30} + \ldots$
$\pm A \text{ tang.} \frac{1}{Z} \text{ etc.} = A \text{ tang.} \frac{2}{5\sqrt{5} - 1};$

$Z'' = 3 Z' - Z \pm 6.$

$A \text{ tang.} \frac{1}{3} - A \text{ tang.} \frac{1}{5} + A \text{ tang.} \frac{1}{31} - A \text{ tang.} \frac{1}{105} + \ldots$
$= A \text{ tang.} \frac{1}{5\sqrt{3} - 2};$

$Z'' = 4 . Z' - Z \pm 14.$

$A \text{ tang.} \frac{1}{7} - A \text{ tang.} \frac{1}{17} + A \text{ tang.} \frac{1}{75} - A \text{ tang.} \frac{1}{209} + \text{etc.}$
$= A \text{ tang.} \frac{1}{5\sqrt{3} + 2};$

$Z'' = 4 . Z' - Z \pm 14.$

Scholion.

§. 80. 1.) Summationum §. 78. 2. prima ex §. 55. pro $A = -m - 1$, $B = 2m + 3$, $r = 1$ fluit; altera ex §. 56. pro $A = 2m + 3$, $r = 1$. fummationum §. 78. 3. prima ex §. 56. deriuatur pro $A = -m - 1$, $r = 1$.

2.) Quibus collatis cum §. 70. 72, apparet generatim progreſſiones arcuum quae ex terminis primis et ſecundis ſerierum pro ν, A et B (77.) oriuntur, iam ſub ſummationibus §. 55. 56. comprehenſas eſſe. At ſi termini poſt ſecundos adhibeantur, tum nouae prodeunt ſummationes, a prioribus (55. 56.) diuerſae; quas tamen amplius euoluere ſuperfluum eſt.

Corollarium 5.

§. 81. 1.) Quanquam valores quantitatis ν (77. 78) etiam negatiue accipi queant, hinc tamen haud nouae ſeries arcuum obtinentur. Porro aequatio $m + 2 = \frac{A^2 - \nu^2}{A\nu - 1}$, ita quoque reſolui poteſt, vt ſit

$$\nu = -\frac{(m+2)A \pm \sqrt{[[(m+2)^2 + 4]A^2 + 4(m+2)]}}{2}.$$

Quodſi vero ſuper hac formula ad rationalitatem perducenda ratiocinia prioribus ſimilia inſtituantur, ſeries inde ab iam inuentis haud diuerſae prodeunt.

2.) Cum in aequatione conditionali

$$m + 2 = \frac{(A + B\;A + B + n)}{AB - 1},$$

(§. 31.) quae in omni hactenus inueſtigatione fundamenti loco poſita fuerit, quantitates A et B permutari inuicem queant, manifeſtum eſt, ex ſeriebus arcuum ad regulas §. 77. inuentis nouas formari poſſe, dum illarum termini primi et ſecundi inuicem permutantur; vnde etiam reliqui termini nouarum ſerierum alios valores recipiant neceſſe eſt. Itaque numerus ſerierum ſummabilium duplo maior quam ex §. 77. prodire videtur. Rem tamen ſecus ſe habere, re, accurratior consideratio ostendit. Demonstratur nimirum, series arcuum ex permutatione $\tau\tilde{\omega}\nu$ A et B in progressionibus ex I. 2. *a*. ortis; a seriebus ex I. 2. *b*. petitis haud differre, nisi quod hae primis illarum terminis truncatae sint. Idem obtinet vice versa, nec non de seriebus arcuum ex II. 2. *a*. et II. 2. *b*. deriuatis. Proinde iam, quo ea quae §. 76. 77. fusius inuestigata sunt, quam licet breuissime complectamur, sequens ex istis condi potest

Theorema specialius 7.

§. 82. Quod si sequentes binae formentur conternationes trium serierum:

$$
\begin{array}{llll}
1.) & 1; & 1+(m+1)(m+2); \ldots & \nu^r \ldots \\
 & -1; & -(m+1); \ldots & A^r \text{ vel } B^r \ldots \\
 & m+1; & 2m+3; \ldots & B^r \text{ vel } A^r \ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
2.) & 1; & m+3; \ldots & \nu^r \ldots \\
 & m+1; & -1; \ldots & A^r \text{ vel } B^r \ldots \\
 & 1+(m+1)m; & 3; \ldots & B^r \text{ vel } A^r \ldots
\end{array}
$$

quarum quaeuis est recurrens, scala relationis communi existente: $(m+2)^2+2; -1$; si porro quicunque terminus primae seriei alterutrius conternationis pro ν, et termini illi respondentes secundae et tertiae seriei eiusdem conternationis pro A et B, vel vice versa pro B et A substituantur; tum orientur progressiones summabiles arcuum, sc.

$$A \text{ cot. } A + A \text{ cot. } B + \ldots + A \text{ cot. } Z + \ldots$$

quorum cotangentes numeris integris exprimuntur, et in ſerie recurrente affecta procedunt, hac lege, vt ſit $Z'' = m Z' - Z + 2 \nu$. Summa erit

$$= \text{A tang.} \frac{A + B}{A B - 1 - (A^2 + 1)\left[\frac{m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m^2}{4} - 1\right)}\right]}.$$

Demonſtratio

Huius theorematis ex iis ipſis conſequitur, quae hactenus expoſita ſunt. Quanquam ea breuius concinnari poſſit, ſumendo tantum §. 76. 2., $A = \frac{(m - 2)\nu - 2}{2}$, (3.), $B = m A + \nu$. Praeſtare tamen mihi videbatur, omnium caſuum, qui ex hypotheſi altera §. 60. commemorata, reſultare poſſe videntur, enumerationem completam exhibere, ſimulque oſtendere, eorum apparentem multitudinem et varietatem ad eam ſimplicitatem reduci, quam Theorema indicat.

Summa ſeriei finitae eſt = priori ſummae

$$- \text{A tang.} \frac{Z' + Z''}{Z' Z'' - 1 - (Z' Z' + 1)\left[\frac{m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m^2 - 1}{4}\right)}\right]},$$

(Conf. ſupra §. 33.).

Scholium.

§. 83. 1.) Cum ſit

$$B = \frac{m A - n \pm \sqrt{[(m^2 - 4) A^2 - 2 A n (m + 2) + n^2 - 4 m - 2]}}{2}$$

$$= \frac{m A - n \pm u}{2} \text{ (§. 60.)},$$

vnico valore τȣ A, qui pro certis m et n formulam u rationalem reddat, innumeri alii valores obtinentur idem praeſtantes (§. 74. 75.). Proinde ex ſeriebus arcuum, quos theorema

rema (§. 82.) suppeditat, innumerae aliae deriuari posse videntur, dum pro certo valore τȣ ν ex vno valore τȣ A, vi theorematis cognito, alii valores reperiuntur. Nihilominus tamen haud nouas exinde oriri summationes, a prioribus reuera diuersas, accuratiori consideratione comprobari potest.

2.) Hinc apparet, resolutionem aequationis conditionalis (§. 60.) quatenus ea spectatur tanquam aequatio inter indeterminatas A et B, haud quicquam emolumenti afferre ad detegendas plures progressiones arcuum summabiles (Conf. §. 60.). Ex vna enim cognita haud nouae prodirent ac reuera diuersae series. Quibus haud obstantibus innumeras eiusmodi series exhiberi posse, hactenus declaratum est: aequatio sc. conditionalis considerari potest tanquam aequatio inter tres indeterminatas A, B et n.

Problema 7.

§. 84. *Summare seriem:*

$$\mathrm{A\,tang.}\,\frac{a}{\mathrm{E}+b\,\mathrm{E}^{-1}+c}+\mathrm{A\,tang.}\,\frac{a}{\mathrm{E}^2+b\,\mathrm{E}^{-2}+c}\cdots$$
$$+\,\mathrm{A\,tang.}\,\frac{a}{\mathrm{E}^x+b\,\mathrm{E}^{-x}+c},$$

posito scilicet

$$\frac{b}{\mathrm{E}^r}=\frac{c^2}{(\mathrm{E}^r+1)^2}+\frac{a^2}{(\mathrm{E}^r-1)^2},$$

denotante r *numerum quemuis integrum.*

 Solutio.

Solutio.

Iisdem omnino ratiociniis, quae supra adhibita sunt, productum indefinitum $P\left(\frac{1+t^x\sqrt{-1}}{1-t^x\sqrt{-1}}\right)$ reducitur ad formam (§. 12. 5.) expositam; hincque prodit summa

$$= \text{A tang.} \frac{a E^r}{(E^r-1)\left(E+\frac{c E^r}{E^r+1}\right)} + \text{A tg.} \frac{a E^r}{(E^r-1)\left(E^2+\frac{c E^r}{E^r+1}\right)} \ldots$$

$$\ldots + \text{A tang.} \frac{a E^r}{(E^r-1)\left(E^r+\frac{c E^r}{E^r+1}\right)}$$

$$- \text{A tang.} \frac{a E^r}{(E^r-1)\left(E^{1+x}+\frac{c E^r}{E^r+1}\right)}$$

$$- \text{A tang.} \frac{a E^r}{(E^r-1)\left(E^{2+x}+\frac{c E^r}{E^r+1}\right)} - \text{etc.}$$

$$- \text{A tang.} \frac{a E^r}{(E^r-1)\left(E^{r+x}+\frac{c E^r}{E^r+1}\right)}.$$

Si series in infinitum excurrit, eae summae partes, quae x inuolvunt, omittuntur, supposito $E > 1$.

Corollarium 1.

§. 85. Posito $c = 0$, $b = E$, in summae expressione primus et vltimus arcus conficiunt $\frac{\pi}{2}$, et quicunque bini termini ab illis aequidistantes. Hinc fit:

A

$$\text{A tang.}\,\frac{e\,(e^r - e^{-r})}{e^2 + 1} + \text{A tang.}\,\frac{e\,(e^r - e^{-r})}{e^4 + e^{-2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ \text{A tang.}\,\frac{e\,(e^r - e^{-r})}{e^{2x} + e^{2-2x}} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi r}{4}.$$

Corollarium 2.

§. 86. Sit $c = 0$, $b = 1$, $E = e^2$, tum fit

$$\text{A tang.}\,\frac{e^r - e^{-r}}{e^2 + e^{-2}} + \text{A tang.}\,\frac{e^r - e^{-r}}{e^4 + e^{-4}}$$

$$+ \ldots + \text{A tang.}\,\frac{e^r - e^{-r}}{e^{2x} + e^{-x}} + \ldots$$

$$= (r + 1)\,\frac{\pi}{4} - \text{A tang.}\,e^r.$$

§. 87. 1.) Summationis §. 84. demonstratio synthetica condi potest ex resolutione termini generalis in binorum arcuum differentiam: est nimirum

$$\text{A tang.}\,\frac{a\,E^r}{E^x + b\,E^{-x} + c}$$

$$= \text{A tang.}\,\frac{a\,E^r}{(E^r + 1)\left(E^x + \dfrac{c\,E^r}{E^r + 1}\right)}$$

$$- \text{A tang.}\,\frac{a\,E^r}{(E^r - 1)\left(E^{x+r} + \dfrac{c\,E^r}{E^r + 1}\right)}.$$

2.)

2.) Quod ſi ſerierum innumerarum, quae ex hactenus demonſtratis ſummari poſſunt, duae pluresue inuicem addantur, noue prodeunt ſeries ſummabiles arcuum, quorum cotangentes haud amplius in ſerie recurrente affecta 2^di^ ordinis, verum ſecundum aliam legem magis compoſitam procedunt. Cum tamen iſtiusmodi ſerierum contemplatio vix ad theoremata generalia et ſimplicia perducere videntur, cumque reſolutio arcuum deinceps exponenda ſit, ad ſectionem tertiam tranſeundum eſt.

MÉMOIRES SUR LA RÉSPIRATION,

offerts à l'Académie Impériale de St. Pétersbourg

par

A. YPEY.

Présenté à l'Académie le 16 Mai 1796.

Mémoire prémier.

§. 1.

La néceſſité abſolue de la Réſpiration a la vie; les ſuites ſerieuſes du moindre dérangement de cette fonction, & la facilité, avec la quelle l'air atmosphèrique perd ſon aptitude, pour continuer, par ſon inſpiration, la vie des animaux, a de touts-temps fixé l'attention des ſçavans ſur cette queſtion. Quelle eſt la neceſſité & l'utilité d'une fonction ſi perilleuſe & ſouvent ſi précaire?

§. 2. Les anciens, qui n'avoient des idées diſtinctes ſur la conſtruction du poumon, la circulation des humeurs, la nature de l'air &c. étoient dans l'opinion, qu'il voltigeoit dans l'atmosphére un certain eſprit vital, qui, par les conduits du poumon, étoit communiqué au coeur & aux artéres, pour continuer la vitalité de ces parties: & même que ce principe transporté au cervéau par le moyen du chasſis admirable de la carotide (Reticulum admirabile) qui n'exiſte pas même dans l'homme, là produiſoit les eſprits animaux. Les Carteſiens continuoient, après la decouverte de la circulation du sang, la même doctrine Galénique, en substituant leurs pretendués particules spiritueuses & ethereénnes a ceux des anciens, dont les qualités n'étoient si exactement definíes.

§. 3. Dans la suite plusieurs ont cherché dans l'atmosphére quelque principe salin, qui résorbé, par l'action des poumons, de ce fluide élastique, porroit servir a la continuation de la vie. On appelloit ordinairement cet agent imaginaire Nitre aërien, qui n'existe guères. Des autres pretendoient, que le poumon etoit fabriqué pour servir au refroidissement du sang &c.

§. 4. Le grand Haller, le fondateur de la Physiologie moderne, a fait une soigneuse distinction entre la néceffité & l'utilité de la Réspiration a la vie. La néceffité de cette fonction consiste, selon lui, principalement, dans l'expension des vesicules pulmonaires par un fluide elastique, pour faciliter le chemin du sang par les petits vaisseaux de ce viscére, qui dans un poumon, a demi vuidé d'air, sont dans un etât de compreffion, qui ne permet pas une circulation libre par ce viscére. L'élasticité de l'air est dans cette doctrine le principal agent de la réspiration, & l'inhabilité de plusieurs airs factices, ou fluides aëriformes mephytiques, a cette fonction, est attribuée a leur trop petite elasticité, comme auffi la qualité nuisible des quelques vapeurs, par exemple de ceux des charbons allumés, est attribuée a une pretendue puiffance, de detruire l'élasticité de l'air. L'utilité de la réspiration consiste, selon lui, au contraire, dans la formation de la voix & l'exhalation & l'inhalation pulmonaire, pour ne pas parler de plusieurs au-

autres effets, qui, felon M. Haller lui même, font bien douteux. (V. Haller El. Phyfiol. T. III. L. VIII & IX.).

§. 5. Non feulement Haller, mais auffi Hales, Musfchenbroek, & presque touts les Phyficiens, avant M. Prieftley, ont cherché dans l'élafticité de l'air le principal agent de la Réfpiration. Mais la contemplation plus exacte des fluides aëriformes de nos jours, a bientôt démontrée l'infuffifance de cette theorie, par la mort fubite des animaux dans ces airs, quoique ils avoient le même dégré d'élafticité, & quelquefois une plus grande denfité, que l'air de l'atmosphére. A cettes obfervations M. Prieftley a ajouté la belle decouverte de l'origine de la rougeur du fang, en prouvant, que l'air réfpirable procure au fang fa rougeur vitale, & que le fang eft noirci par chaque air nuifible, en proportion de fon exitialité pour la vie. Pour cela M. Prieftley confidére la refpiration comme une operation purement dephlogifticatoire, dans la quelle l'air refpirable attire le phlogiftique venimeux du poumon, & l'exporte hors du corps. Le trouble de la réfpiration par la corruption de l'air, ou par quelque autre caufe eft donc, felon lui, exitial, puisque il empeche l'abforbtion du phlogiftique, accumulé dans les veines pulmonaires. (v. Prieftley Experim. and obfervat. on differents kinds & air Vol. III. §. 5.).

§. 6. En raifon de l'accroiffement de nos connoisfances a l'égard du feu & des fluides élaftiques aëriformes, on a auffi mieux appri la nature de la Réfpiration. C'eft l'immortel Lavoifier, ce Newton François, une des victimes le plus régrettées du terrorisme Robespierrien, qui eft l'auteur de l'ingenieufe idée, que la Réfpiration pourroit être la caufe de la chaleur naturelle des animaux. Il developpa cette idée dans les mémoires de l'Academie Royale de Paris de 1777 & faifoit ufage de fuivantes obfervations, pour etablir fon fyftéme.

1.) La *temperature* des animaux refpirants, avec des poumons parfaits, eft plus élévée, que celle du milieu environnant: ceux ou contraire, qui ont un poumon imparfait, comme les amphibies & ceux qui ne jouiffent pas de cet organe, ont à peu près la mème *temperature*, que le milieu, qui les environne.

2.) Ces animaux a fang chaud, qui ont des poumons plus confiderables, relativement a leur volume, ont auffi une plus haute *temperature.*

3.) La *temperature* d'un même animal eft proportionelle a la quantité d'air, qui eft réfpiré par lui, dans un temps donné.

4.) Les expériences de ce Philofophe prouvent; que l'atmosphére eft compofée de deux fluides, dont l'un eft appellé air vital ou dephlogiftique & l'autre aröte; que cet air premier eft la feule partie de l'atmosphére, qui fert a la Réfpiration; qu'elle fait feulement un peu plus, que la quatrieme partie du tout, & qu'enfin cette partie refpirable de l'air fe convertit, par fa réfpiration, en gaz acide carbonique.

§. 7. Le celebre Philofophe Anglois Crawford a adopté la théorie de M. Lavoifier, a l'égard de l'origine de la chaleur animale, en combinant les idées du chimiste Fran-

François avec les siennes, sur le phlogistique, la chaleur specifique & relative &c. (V. son ouvrage intitulé: Experiments and observations on animal heat, p. 348. Ed. Lond. de 1788.). La doctrine Crawfordienne a trouvée, entre autres, un defenseur distingué en M. Blumenbach, celébre Professeur à Gottingue, qui s'exprime ainsi sur cet article dans sa Physiologie. (Inst. Physiol. §. 162.).

„ La theorie de Crawford se reduit principalement „ a cela, que la Réspiration, si bien que la combustion, „ soit un procedé phlogistique, par lequel le phlogistique „ inhaesif aux corps, par l'acces du feu libre (qui doit être „ bien distingué du feu interne inperceptible des corps) „ en est chassé. "

„ Car le phlogistique & la matiere du feu sont des „ elements contraires; tant plus que les substances contien„ nent de l'un, tant moins ils possedent de l'autre. On „ assure par exemple, que l'air fixe contient seulement $\frac{1}{67}$ „ de la chaleur, qui subsiste dans une egale masse d'air „ atmosphérique. "

„ Il est aussi prouvé par l'expérience, que l'air at„ mosphériqne aie une plus grande affinité avec le phlo„ gistique, qu' avec le feu; d'ou s'ensuit, qu'il se combine „ très facilement avec le premier & que pour s'unir avec „ celui il laisse echapper le feu, avec qui il etoit jusqu'a „ present combiné. "

„ §. 163. Quand nous comparons les phénoménes de „ la Réspiration avec ce, que nous avons enseigné jusqu'ici, il

„ il devient probable, que la chaleur naturelle ſoit excitée „ par un procedé analogue. “

„ Car, comme nous avons vu, l'air, qui nous exſpirons, diffère beaucoup de celui, qui nous avous reſpiré ci-devant: puisqu'il eſt ſpolié de ſa partie ignée, & au contraire combiné avec le phlogiſtique & avec la baſe de l'air fixe. “

„ §. 164. Il ſemble donc probable, que la partie ignée de l'air réſpirable ſoit reçue dans le vaiſſeaux ſanguins, des quels elle eſt ſeulement ſeparée par des trés minces diſſepiments, & qu'elle ſoit de là transportée, par le ſyſtéme veineux du poumon, dans le ſyſtéme artérieux de l'aorte & de là par tout le corps. “

„ Elle ſemble, après cela, & bien dans les plus petits vaiſſeaux, étre échangée avec le phlogiſtique, qu'elle rencontre partout. Celui ci, au contraire, dans ſa place uni avec le ſang, ſemble étre transporté par le ſyſtéme veineux dans le poumon, pour étre là ſelon les loix des affinités, dont nous parlâmes a l'inſtant, de nouveau reçu par l'air inſpiré, afin que la chaleur de cet air, iſolée par cette acceſſion, ſe combineroit encore avec le ſang. “

§. 8. La théorie Crawfordienne auroit été probablement univerſellement adoptée, ſi les expériences curieuſes du grand Lavoiſier, & de ces cooperateurs, n'auroient beaucoup etendues nos connoiſſances ſur la nature du feu & de ſes combinaiſons, & ſpecialement démontré, qu'il n'exiſte pas un phlogiſtique univerſel, mais bien pluſieurs eſpéces de de corps combuſtibles & entre autres le carbone, au quel ſpecialement convient, ce que Crawford, & ſes partiſans, ont attribué en general a leur matiere inflammable univerſelle chimerique. Cela ſemble auſſi bien ſurabondant dans la theorie de ce ſavant, qu'il ſuppoſe un echangement du calorique, & de ſon phlogiſtique, dans les vaiſſeaux capillaires, de tout le corps. Car puisque le carbone, ſans cela, par le mouvement rapide du ſang, transpire en aſſez grande quantité dans les veſicules pulmonaires, il ſemble plus probable & beaucoup plus ſimple, de chercher le lieu de cette commutation dans le poumon ſeul. La prétendue antipathie Crawfordienne du phlogiſtique, ou plutôt du carbone avec le feu eſt auſſi une chimére, qui a priſe ſon origine de la méconnue plus grande affinité du dernier principe avec l'Oxigène, que du premier.

§. 9. Puisqu'il eſt certain, que la principale alteration de l'air atmosphérique par la Réſpiration, conſiſte en cela, qu'il eſt, pour une partie aſſéz remarquable, changé dans ce gaz, qu'on nommâ ci-devant air fixe, & qu'on, aprés une plus perfaite connoiſſance de ces principes, a nommé Gaz acide carbonique. Rien n'étoit ſans doute plus interreſſant, que de connoitre avec accurateſſe les principes conſtituants de cette matiere gazeuſe. C'étoit le grand Lavoiſier, qui diſſipâ le premier les idées confuſes a l'egard de l'origine & de la compoſition de cette matiere. C'eſt lui, qui a demontré, qu'un quintal de cet acide eſt compoſé de 28 parties de carbone pur & de 72 parties d'Oxigène, ou de cette matiere, qui conſtitue la baſe de l'air pur vital ou dephlogiſtiqué. Pour prouver cela, il a fait bruler dans des cloches, pleines d'air vital, & au deſſus du

mer-

mercure (Fourcroy Elem. de chimie T. I. p. 446.) une quantité déterminée de charbon, privé de tout gaz hydrogène, par une calcination préliminaire, dans des vaiſſeaux fermés, parce qu'il avoit obſervé, que, ſans cette précaution, il obtenoit de gouttes d'eau, qui troubloient l'exactitude des calculs. Cette combuſtion ſe faiſoit par le moyen d'un quart de grain d'amadou, placé ſur le charbon, & recouvert par un atôme de phosphore. Un fer rouge récourbé, paſſé a travers le Mercure, a ſervi pour allumer le phosphore, celui-ci a mis le feu a l'amadou, qui l'a communiqué au charbon, ce qui occaſionnoit une inflammation très rapide, & accompagnée de beaucoup de lumiere. Apres le refroidiſſement de l'appareil, on a introduit, ſous la cloche, de l'alcali fixe cauſtique en liqueur, qui a abſorbé tout l'acide carbonique, formé dans cette experience, & qui a laiſſé le réſidu de l'air vital, auſſi pur, qu'au commencement de l'operation. Il s'enſuit de tout cela, que dans de telles combuſtions, le principe oxigène, dont la combinaiſon avec les calorique forme l'air vital, ſe combine avec le carbone, & qu'il produit l'acide carbonique: tandis que l'autre principe du même air vital ſe degagé ſous la forme de chaleur & de lumiere. Il reſtoit de la cendre, & la quantité d'acide formé avoit en excés de poids ſur l'air vital employé, le deficit, qu'avoit eprouvé le charbon.

§. 10. Puisque il ſe forme, dans la réſpiration des animaux, une très notable quantité d'air fixe, delà s'enſuit, que, dans cette fonction, une partie de la baze oxigène de l'air réſpiré ſe combine avec la partie charbonneuſe de nôtre ſang, ce qui ſe ne fairoit pas dans la température ordinaire des animaux réſpirans, ſi ce charbon étoit dans un

état

état solide. Mais cette union est beaucoup facilitée par la subtilité, que ce charbon reçoit, par le roulement des elemens du sang, dans la circulation & principalement, dans les exhalations aqueuses & pour ainsi dire charbonneuses, qui, dans les vesicules du poumon, sont immediatement melées, avec l'air inspiré. Il ne se fait donc ici une phlogistication de l'air, ce qui n'est, qu'une idée vague & indeterminée, mais une combinaison de la partie charbonneuse de nos humeurs, avec la base oxigène de l'air vital. Mais par ce, que cet oxigène se ne peut pas combiner avec le carbone, sans se defaire de son calorique, de là s'ensuit, que cette combinaison doive necessairement produire de la chaleur, & bien une chaleur considerable, puisque cette operation se continue toujours, & que les vessies du poumon soient toujours remplies, par des vapeurs animales, qui tiennent le carbone en dissolution, qui sont toujours intimement melées, avec l'air inspiré, par le mouvement continuel des poumons, qui est une suite du méchanisme de la Réspiration.

§. 11. Quoique on apresent en general soit assez convaincu, que la chaleur naturelle soit une consequence de la Respiration, il y a neanmoins plusieurs, qui ne determinent asséz leur attention, sur l'importance de cette fonction, qui, selon moi, fait la principale nécessité de la réspiration, pour la continuation de la vie des animaux a sang chaud. Une de causes, que ne fait assez éstimer la dignité de la fonction calorifique du poumon, est l'opinion bien universellement repandue, que la chaleur animale se ne produit seulement dans ce viscére, mais aussi dans tous les vaisseaux capillaires par tout le corps animal. Cette doctrine eſt auſſi protegée par le celebre Blumenbach (l. c. §. 166.) mais elle eſt bien vague & deſtituée des preuves convainquantes. Elle ſemble même contraire a l'expérience: les grands amphibies, par exemple, comme les crocodiles, ont, par tout leur corps, une irritabilité & par cela une action de fibres ſubtiles des vaiſſeaux capillaires beaucoup plus grande, qu'eſt celle des animaux a ſang chaud. On peut donc ſuppoſer dans leurs vaiſſeaux capillaires une force active beaucoup plus grande, au moins égale, que dans les notres. Avec tout cela, ils ont le ſang presque froid, parce, que leur poumon eſt un viscere partial, que reçoit a la fois ſeulement une petite portion de leur ſang.

§. 12. La décompoſition continuelle de l'air dephlogiſtiqué, dans nos poumons, eſt aſſéz grande, pour procurer cette chaleur, la quelle anime nos humeurs, ſans qu'il ſoit neceſſaire, de recourir a quelque ſécret agent de petits vaiſſeaux, aſſumé ſans aucun fondement ſolide. La rapidité avec la quelle le ſang circule par nos corps, ſemble être auſſi aſſéz grande, pour diſtribuer cette chaleur par tout le corps. Cette circulation ſe fait en géneral vingt & deux fois par heure. Donc chaque particule du ſang, qui eſt ſortie du poumon, avec ſon chaleur neceſſaire, retourne, apres trois minutes, dans le même viscére, pour en retirer une nouvelle proviſion: une rapidité de mouvement ſans doute aſſez ſatisfaiſante, pour diſtribuer, avec beaucoup d'egalité, la chaleur animale par toutes les parties du corps vivant.

§. 13. J'oſe donc ſoutenir, ſans aucun ſcrupule, que la preſſante néceſſité de la réſpiration, pour la continuation de de la vie des animaux a ſang chaud, doive être cherchée ſeulement dans la géneration de la chaleur dans leurs poumons. Car les humeurs des tels animaux ſont d'une grande denſité, ils ſubiſſent une coagulation notable par le moindre froid. Auſſitôt donc, que la génération de la chaleur dans leur poumon ceſſe, le ſang ſe commence trop épaiſſir, pour pouvoir paſſer plus long temps par les petits vaiſſeaux de ce viscére. En même temps, ces vaiſſeaux capillaires refroidis éprouveront une diminution conſiderable de leur capacité. Nous aurons donc enſemble des humeurs trôp condenſés, pour paſſer, & des canaux trop étroits pour transmettre les humeurs. Ce double vice empéchera la transfuſion du ſang des extrémités arterieuſes du poumon, dans le commencement des veines, ou, ce qui eſt le même, la ſuffocation & la mort feront les ſuites tres rapides de la réſpiration empechée par une cauſe quelconque: c'eſt a dire par la ſuſpenſion, la ſtrangulation, le noyement, la reſpiration de quelque eſpéce d'air, qui ne poſſéde pas, ou qui a perdu, ſon oxigène etc. Je ne nie pas cependent, que l'evacuation des matieres charbonneuſes du ſang par les poumons ſoit une choſe de beaucoup de conſequence pour la vie des animaux: mais je ne conçois pas, qu'une petite interruption de cette evacuation puiſſe être aſſéz importante, pour occaſionner la ſuffocation & la mort. Si l'on voudroit retenir la diſtinction Hallerienne, entre la neceſſité & l'utilité de la Réſpiration a la vie, je ferois d'avis, que ſa Néceſſité conſiſte dans la generation de la chaleur, & ſon utilité dans la dephlogiſtication, ou plûtot dans la decarboniſation, du ſang.

§. 14. Mais, crieront plusieurs, ce n'est pas la generation de la chaleur animale, qui fasse la principale dignité de la Réspiration. C'est plutôt la resorbtion de l'oxigène de l'air respiré dans le sang, qui, par sa force irritante, est la cause la plus prochaine de l'irritabilité animale. Ce n'est donc l'exstinction de la chaleur naturelle, qui occasionne la mort des suffoqués, mais c'est l'empéchement de la resorbtion de l'oxigène, dans le sang, & par cela la perte de ce puissant irritant, sans qui l'irritabilité animale se ne peut passer un moment. Cette theorie, quoique apresent approuvée par plusieurs, paroit bien fausse, & j'en chercherai demontrer la foiblesse, premierement par l'examen des arguments, qu'on produit, pour prouver la resorbtion de l'oxigène pur dans le sang, pendant la Réspiration, & après cela je péserai l'importance des arguments, par lesquels on veut demontrer l'éminente qualité de l'oxigéne, pour exciter & sustenter l'irritabilité des coeurs des animaux.

§. 15. Le principal argument, par lequel on veut prouver la résorbtion de l'oxigène, dans le sang, c'est la belle expérience de M. Lavoisier, communiquée dans les Mémoires de l'Académie Royale de Médicine de 1787. „ Pour bien connoitre (dit-il, V. & Annales de Chymie, „ T. V. p. 261.) le genre d'alteration, qui arrive a l'air, „ lorsqu'il est ainsi réspiré par les animaux, j'ai introduit „ un cochon d'Inde sous une cloche de cristal renversée sur „ du Mercure; elle contenoit 248 pouces cubiques d'air vital; je l'y ai laissé pendant une heure & un quart. Au „ bout de ce temps, je l'ai retiré de la même manière, „ qu'il y avoit été introduit, c'est a dire, en le faisant passer par le Mercure: je ne me suis pas apperçu, que ces „ deux passages l'eussent aucunement incommodé. "

„ Pour

„ Pour rendre les comparaiſons plus faciles, je ſup-
„ poſerai, que la quantité d'air vital, dans lequel le co-
„ chon d'Inde a ainſi dejourné, fut d'un pied cube, ou de
„ 1728 pouces cubiques, & je rapporterai par calcul les
„ réſultats de ce volume. Lorsque le cochon d'Inde a été
„ retiré de deſſous la cloche, les 1728 pouces cubiques d'air
„ vital ſe ſont trouvés reduits a $1672\frac{3}{4}$. Il y avoit donc
„ eu une diminution de volume de 55 pouces $\frac{1}{4}$. Il s'étoit
„ formé, en même tems, 229 pouces $\frac{1}{2}$ d'air fixe (gaz aci-
„ de carbonique), ce dont je me ſuis aſſuré en introduiſant
„ de l'alcali cauſtique ſous la cloche; enfin l'air reſtant é-
„ toit encore de l'air vital bien pur."

„ En convertiſſant ces volumes en poids, on aura,
„ pour les quantités d'air reſtant ſous la cloche, après que
„ l'animal en a été retiré

	Onc.	Gros.	Gran.
" air vital - - - - - - -	1.	2.	$1\frac{3}{4}$.
" air fixe (gaz acide carbonique) - -		2.	15.
" Total - - - - - -	1.	4.	$16\frac{3}{4}$.

" L'air, dans cette experience, a été diminué, d'en-
„ viron $\frac{1}{32}$ de ſon volume; mais il a augmenté de peſan-
„ teur abſolue, d'ou réſulte evidemment 1°. Que l'air ex-
„ trait quelque choſe du poumon, pendant l'acte de la ré-
„ ſpiration. 2°. Que la ſubſtance extraite. combinée avec
„ l'air vital, forme de l'air fixe (gaz acide carbonique):
„ or on ſait, qu'il n'-y-a, que la matiere charbonneuſe,
„ qui ait cette proprieté. L'air, par l'acte de la réſpira-

„ tion, extrait donc du poumon une matiere veritablement
„ charbonneuse.“

„ Mais il est a considerer, que cette augmentation
„ de poids, qui ne paroit être, que de 21, 17 grains, est
„ réellement beaucoup plus considérable, qu'on ne croiroit
„ d'abord; en effet, dans l'experience, que je viens de rap-
„ porter, il n'y a eu que 229 $\frac{1}{2}$ d'air fixe. Or d'après des
„ résultats tres exacts, que j'ai discuté ailleurs, 100 par-
„ ties d'air fixe en poids sont composées de 72 parties d'air
„ vital & de 28. de charbon: ces 229. 5 pouces d'air fixe
„ obtenu contenoient donc.

„ air vital - - -	114, 84 grains.
„ charbon - - - -	44, 66 ——

„ Les 114, 84 grains d'air vital réviennent, en pouces cu-
„ bes à 229. $\frac{2}{3}$; si donc il n'y avoit eu d'air vital employé,
„ qu'à faire de l'air fixe, la quantité restante après l'ope-
„ ration auroit dû être de

„ 1728 — 229 $\frac{2}{3}$ - - - - - - -	1498 $\frac{1}{2}$.
„ Elle ne s'est trouvée que de - -	1443 $\frac{2}{3}$.
„ Deficit - - - - -	54 $\frac{2}{3}$.

„ Il est donc evident, qu'independamment de la por-
„ tion de l'air vital, qui a été convertie en air fixe, une
„ portion de celui, qui est entré dans le poumon, n'en
„ est pas réssorti dans l'état élastique —.“

§. 15. Il s'ensuit bien de tout cela, qu'on a perdu, dans cette experience, une quantité assez considérable d'air vital;

vital; mais cela ne prouve guers, que cet air, ſous ſa forme oxygenée, ſoit reſorbé dans le ſang. Le grand Lavoiſier n'eſt auſſi de ce ſentiment, & il croit plûtot, que cet air, qui eſt disparu, ſe ſoit combiné avec l'hydrogène, pour former de l'eau. Mais il y a encore une autre ſolution, pour expliquér cette disparition d'air. L'oxigène, qui manque, ſe peut auſſi avoir combiné avec du carbone, & avoir été reſorbé dans le ſang, par la fonction des vaiſſeaux lymphatiques du poumon, aprés qu'il ait été changé en air fixe. Car ce gaz eſt bien ſoluble dans l'eau, & dans ce cas il perd auſſitòt ſon élaſticité, & rien n'empeche, qu'il ſoit, ſous ce tître, introduit dans la circulation. Mais l'air fixe eſt réconnu comme très nuiſible pour l'irritabilité de la fibre animale. Si donc l'Oxigène ſoit réſorbé ſous cette eſpèce de combinaiſon, il n'y a aucune raiſon de croire, qu'il puiſſe favoriſer cette proprieté de nos ſolides.

§. 16. Mais ſi une partie du gaz carboniqué, formé dans le poumon, ſoit diſſoute dans les vapeurs, qui ſont ſecernés du ſang, dans les follicules de ce viscère, & qu'elle ſoit, ſelon les lois de l'abſorbtion, introduite dans le ſang, qui va au coeur gauche, comme il y a toûte raiſon de croire, ce gaz pourra, dans une autre relation, être d'une grande utilité pour l'oeconomie animale. Tous les animaux ont, par la conſtruction de leurs ſolides & par la nature de leurs fluides, une propenſion bien rémarquable a la pourriture; & on a ſouvent demandé, pourquoi la vie ſoit le meilleur préſervatif contre cette deſtruction ſpontanée? Cet effêt depend ſans doute du concours des pluſieurs cauſes, & entre autres, pour une grande partie, de la continuelle conſomtion des ali-

aliments. Mais d'une autre coté on a reconnu, que le gaz carbonique, ou l'air fixe, soit une de meilleurs préservatifs contre la corruption, &, selon les expériences de Macbride, ce subtil acide est presque le seul antiseptique, qui rend aux solides semiputrides leur ancienne fraicheur & fermeté. N'y a-t-il donc beaucoup de raison de croire, que ce subtil antiseptique, continuellement formé dans le poumon, & introduit par son systeme résorbant dans la circulation, soit une des causes le plus puissantes, qui empêchent la dissolution putride de nôtre corps?

§. 17. Contre l'opinion de ceux, qui supposent la résorbtion de l'Oxigène pur dans le sang, on peut encore réflechir, qu'il ne pourra, comme tel, entrer par la résorbtion des vaisseaux du poumon, dans le sang: car il entre dans la poitrine en forme d'air vital, dans laquelle il est combiné avec le calorique, & dans cette disposition il ne peut penetrer dans les vaisseaux du poumon; puisque cet air est indissoluble dans les vapeurs aqueuses du poumon, & pour ce, que par les experiences du grand Haller soit demontré, qu'un air vrajement élastique ne puisse absolument penetrer par le systême resorbant du poumon, dans le sang. Il ne pourra donc aller là, que dans une combinaison dissoluble par l'eau, mais dans cet etât il est nuisible a l'irritabilité.

§. 18. Examinons aprésent les arguments par les quels on veut prouver, que l'Oxigène soit un des plus puissants excitans de l'irritabilité de la fibre musculaire. On se fonde pour celà entre autres sur une expérience de M. de la Métherie (Essay sur l'air Tom. II. p. 22.) qui a prou-

prouvé, qu'un coeur de grenouille, arraché du corps, se meut avec beaucoup plus de force, & plus long temps, dans l'air vital, que dans aucun autre. Celà prouve fort bien la force stimulante de l'air vital, mais point celle de l'oxigène. On ne peut certainement faire aucune conclusion, de la Nature de cette combinaison d'oxigène & calorique a l'un de ces simples seuls, & si l'on voudroit conclure, de la force irritante de ce composé, que l'oxigène simple soit un excitant de l'irritabilité, on pourra des proprietés opposées de l'air fixe, tirer la consequence, directement contradictoire. Car celui-ci est un composé d'oxigène & de charbon, & il est un destructeur de l'irritabilité; d'où s'ensuit, selon cette façon de raisonner, que l'oxigène soit aussi un destructeur de l'irritabilité. Voila des conclusions contraires, déduites du même principe, qui donc est une bien grande absurdité.

§. 19. Mais le principal argument, sur lequel se fondent les protecteurs de cette opinion, est tiré des observations, de MM. Lavoisier & Fourcroy, sur les éffets de l'inspiration de l'air vital, par les animaux. „ Lorsqu'on „ plonge, dit M. Fourcroy, (Annales de Chimie, T. IV. p. 85.) „ un animal dans une cloche, pleine d'air vital, sa réspi- „ ration s'accelère, la dilatation de sa poitrine devient con- „ sidérable, son coeur & ses arteres se contractent avec plus „ de force & de vitesse, que dans l'état naturel: il est bien- „ tôt dans un veritable état fébrile, ses yeux deviennent „ rouges & saillants, la sueur coule de toute part sur son „ corps; la temparature de toutes les régions s'elève singu- „ liérement: enfin il est bientôt attaqué d'une fièvre inflam- „ matoire, extrémement aigue, qui se termine par une gan-

„ grène & une fyderation, dont la poitrine eft le principal „ foyer " Tous ces effêts font encore produits par la combinaifon de l'oxigène avec le calorique & démontrent donc nullement, que l'oxigène feul produira des tels effets. Outre celà, tous ces phénomènes fe peuvent, & fe doivent expliquer, fans qu'il foit néceffaire de confiderer la réforbtion de quelque partie de l'air, réfpiré dans les poumons, puisque ils font les effets feuls & naturels de la production d'une plus grande chaleur dans les poumons. „ L'air vital étant (dit M. Fourcroy l. c. p. 88.) la partie „ de l'atmofphére, qui fert feule à la réfpiration, & d'où „ provient la chaleur animale, lorsqu'on le fait infpirer pur, „ & fans mélange du gaz azote, avec lequel il eft unie „ dans l'air atmofphérique, il doit faire naitre une chaleur „ trois fois plus confidérable, que celle, qui eft produite „ par l'air de l'atmofphére." Une telle augmentation de chaleur naturelle excite cette raréfaction dans le fang, qu'on nomme plethore de volume. Le fang propulfé des poumons dans le coeur gauche ne devient donc pas feulement beaucoup plus chaud par la réfpiration de l'air vital, mais expand auffi, par fon plus grand volume, avec beaucoup plus de force, le ventricule gauche du coeur & excite par là une beaucoup plus grande réaction de ce vifcère, dont neceffairement doit fuivre un état de fièvre bien chaude, &, par fon augmentation continuelle, la deftruction des vaiffeaux capillaires, fpécialement dans le foyer de cette chaleur énorme. Toutes les fuites de cet état, obfervées par M Fourcroy, s'expliquent donc parfaitement bien, par la confidération feule de l'accroiffement de la chaleur naturelle, fans qu'on aie befoin de recourir à la réforbtion de quelque principe irritant fingulier.

§. 20.

§. 20. On apperçoit de cela ſans beaucoup de peine, pourquoi la Sageſſe Créatrice a compoſée l'atmoſphére, d'un mélange, de plus que deux parties d'air inutil à la réſpiration, & d'une d'air ſeulement réſpirable. Un air vital pur auroit brulé, avec une grande viteſſe, nos organes, & pour animer la vie, pendant un temps trés court, il l'auroit éteint pour jamais. C'eſt ainſi, dans la Médicine, que l'acide vitriolique & d'autres préparations chimiques, qui, par leur nature, ſont des cauſtiques venimeux, deviennent des médicamens ſalutaires, quand ils ſont aſſez dilués avec de l'eau.

§. 21. A préſent il ſera auſſi facile, de diſtinguer les maladies, dans lesquelles la réſpiration de l'air vital ſoit ſalutaire, ou nuiſible. On a fait pluſieurs expériences avec cet air, dans la phthiſie poulmonaire. Dans le commencement on s'imaginoit, d'en obſerver quelques éffets ſalutaires: mais, dans peu, ces expériences étoient ſuivies par un crachement de ſang & par l'exaſperation de tous les ſymptomes. Rien n'étoit plus raiſonnable, que d'en attendre de tels effets. La phthiſie eſt ordinairement accompagnée d'un état inflammatoire, d'une trop grande ſenſibilité & irritabilité des organes, qui ſervent à la réſpiration. Quand donc, par l'uſage de l'air vital, on ajoute à tout-cela un agent, qui échauffe encore plus & qui anime davantage une circulation, qui étoit déja trop rapide, tout doit aller de mauvais en pis. Au contraire, dans toutes les maladies, qui tirent leur origine d'une action languiſſante de la réſpiration, où il y a manque de la chaleur naturelle, & où la circulation eſt par conſéquence lente, & pas aſſez animée, rien n'eſt plus convénable, que l'uſage de l'air dephlogiſtiqué; comme dans les affections chlorotiques. l'aſthme veritable pituiteux & humoral &c. On en entendra auſſi la raiſon, pourquoi un air ſec, pur & élevé ſoit en general nuiſible pour une phthiſie poulmonaire, accompagnée d'une fibre ſèche & irritable, comme auſſi pour l'aſthme ſec, qui ſuppoſe un éréthisme du poumon, & une trop grande ſenſibilité de ce viſcere; pendant qu'au contraire, dans des tels cas, on éprouve beaucoup de ſoulagement. par la réſpiration d'un air impur, qui eſt plein des vapeurs huileuſes. C'eſt par cela, qu'on a quelquefois obſervé dans la phthiſie beaucoup d'effêt de la réſpiration d'un air inquiné, par les exhalations des vaches dans les écuries. On en comprend auſſi, pourquoi l'inſpiration des exhalations balſamiques eſt quelquefois d'une ſi grande utilité dans cette maladie. Car de telles parties huileuſes & balſamiques, introduites dans le poumon, empéchent par leur qualité obvolvante l'excés de l'action de l'air ſur un ſang à demi décompoſé, ou plutôt. ſur ſon charbon, ce qui diminue la génération de la chaleur animale, & par là contribue beaucoup à l'imminution de l'état inflammatoire, dont dependent ordinairement les circonſtances les plus perilleuſes de cette affreuſe maladie.

§. 22. Ces mêmes principes nous apprennent auſſi, pourquoi le ſang ſoit plus chaud dans la fleur de l'age, que dans la vielleſſe. Dans l'état premier un coeur plus irritable anime plus fortement la circulation, & les parties de l'air vital ſont mieux en état de s'unir avec les parties du charbon plus libres & avec plus de force propulſées avec la vapeur, exhalante dans les petites veſſies du poumon, ce qui procure une union plus intîme de ces parties

&

& par celà l'evolution de beaucoup plus de calorique, qui ſe diſtribue par le ſang. Au contraire, dans la vielleſſe extréme le ſang ſe meut avec beaucoup de lenteur & ne paſſe pas par les poumons, ſans peine: ce qui rallentie, très ſenſiblement, l'action de l'air ſur ce liquide. Il me ſemble même aſſéz probable, qu'on doive ce défaut de géneration de chaleur naturelle ajouter aux cauſes de la mort naturelles & inévitables, dans un age bien avancé.

§. 2?. Il exiſte une très rémarquable connexion, entre la circulation par le cordon ombilical du foetus, & la réſpiration de l'enfant après ſa naiſſance. La dernière fonction eſt comme le remplacement de la premiere & elle devient ſi neceſſaire, par la ſuppreſſion de celle-ci, que ſi une femme, après la prolapſion & la compreſſion de ce cordon, n'eſt delivrée le plutôt poſſible, elle devient mére d'un enfant mort Quelle eſt la rélation de ces fonctions, entre lesquels on decouvre ſi peu de reſſemblence? Il me ſemble, que les nouvelles découvertes à l'égard de la réſpiration, illuſtrent beaucoup cette matiere difficile. La réſpiration eſt la cauſe de la chaleur naturelle, & l'homme, qui ne réſpire plus, meurt, parce que ſon ſang réfroidi ne peut plus paſſer par les vaiſſeaux capillaires. Ainſi on peut affirmer, qu'il paſſe toujours un ſang bien chaud par la veine ombilicale du corps de la mere, dans celui du foetus, & que ce ſang ſoit le principal moyen, pour ſoutenir la chaleur naturelle, dans les entrailles & le cerveau du foetus; auſſi-tôt donc, que la circulation par le cordon ombilical n'exiſte plus, la cauſe de la chaleur naturelle dans l'enfant eſt detruite, & il doit mourir dans un clin d'oeil, s'il n'eſt ſubſtitué un autre moyen pour produire de la chaleur naturelle, & ce moyen eſt la réſpiration.

§. 24. Il s'enſuit auſſi de ces obſervations, que l'inflation d'un air vital dans le poumon d'un noyé doit être infiniment plus efficace, que celle de l'air vulgaire atmoſphérique. La réſtitution de la vie, par ce moyen, doit principalement être procurée par la ſuſcitation de la chaleur naturelle, pour fondre le ſang à demi coagulé dans les extrémités des vaiſſeaux des poumons. Mais l'air vital peut occaſionner une chaleur plus que trois fois plus grande, que l'air atmoſphérique, par la réſpiration. Par conſequence il eſt bien raiſonnable, d'attendre des éffets beaucoup plus grands de l'inflation d'un air déphlogiſtiqué que de l'atmoſphére vulgaire: & une expérience réiterée a pluſieurs fois confirmée cette théorie.

§. 25. Les poiſſons exercent ſans doute, par le mouvement continuel de leurs ouïes, une fonction, analogue à la réſpiration des animaux à ſang chaud. Comme dans les poumons de ceux-ci, il ſe trouve dans les ouïes de ces êtres aquatiques, beaucoup plus de ſang, qu'ailleurs. Le mouvement continuel de ces parties eſt analogue au mouvement perpetuel des poumons, par la réſpiration, pour expoſer mieux leur ſang à un nouveau courant d'eau, comme le nôtre eſt continuellement expoſé, a un courant renouvellé d'air inſpiré. Qu'enfin l'air contribue quelque partie eſſentielle à cette fonction, cela eſt démontré par la neceſſité du rénouvellement de l'air, dans les eaux, pour ſoutenir la vie des poiſſons. Cependant l'excitation d'une chaleur naturelle ne ſemble pas être le but

but de cette fonction analogue à la réspiration, comme aussi point de la réspiration dans les amphibies, dont le poumon reçoit seulement une médiocre portion de sang, par un rameau de l'aorte; mais seulement une assez grande application de l'air, contenu dans les eaux, pour suffire à la résorbtion du peu de charbon atténué, qui transpire des extrémités des vaisseaux exhalatoires des leurs ouies. Ce principe charbonneux, seulement uni avec l'eau, sans une nouvelle combinaison, semble être nuisible à la vie des poissons; mais, quand la présence de l'air, dans ce fluide rend possible cette nouvelle combinaison, que nous appellons gaz carbonique, celui-ci contribue, peutêtre, par sa présence, beaucoup, pour diminuer la corruption des eaux, si nuisible aux poissons, & est aussi résorbé dans les corps des poissons mêmes pour agir comme antiseptique. Pour ces êtres semble donc la décarbonization du sang, & la résorbtion du gaz carbonique antiseptique, être la principale utilité de l'action des ouies, qui, dans les creatures à sang chaud, étoit l'utilité accessoire de la réspiration veritable. Le poumon partiel des amphibies, outre son utilité à la nage, semble aussi point ou peu servir a la génération de quelque degré rémarquable de la chaleur, mais principalement à la décarbonization du sang.

NO-

NOTICE
SUR LE
QUARTZ ROSE DE FINLANDE,
presentée à l'Académie Impériale des Sciences.

Par
Le C. P. AND. de NARTOW.
Président du Collège de Mines & de Monnoye.

Présenté à l'Académie le 23 Février, 1797.

En Vous remerciant, Messieurs, pour m'avoir admis unanimement au nombre de Vos Membres honoraires, j'ai l'honneur de Vous présenter une courte notice d'un objet minéral de nôtre voisinage, plutôt pour y fixer Vôtre attention, dont il est digne à plusieurs égards, que pour Vous présenter quelque découverte importante. C'est le Quartz rose, qui est devenu connu depuis peu, & que j'ai l'honneur de Vous communiquer avec la présente.

Il vient des environs de la forteresse Neyschlott en Finlande. Il n'est pas tout à fait de la nature du Quartz rose, trouvé à Kolywan, dont Mr. Karsten dans la déscription du cabinet de Leske, semble vouloir faire une espéce particuliere. Ce Quartz de Kolywan est de couleur rose pale, plus transparent, plus gras, plus vitreux & conchoideux dans ses fractures, tandis que le nôtre est de couleur de rose bien foncée, moins transparent, plus sec, plus dûr dur avec une fracture en pailletes. Néanmoins il présente différentes nuances de sa couleur de rose, depuis la plus pâle, jusqu'à la plus foncée dans le même morceau; quelques fois il a des stries brunâtres paralleles, qui ajoutent à sa beauté. Il n'est jamais cristallisé & ordinairement assez dur pour prendre un beau poli. Il est très vraisemblable, que sa couleur vient des parties de manganèse, comme c'est le cas dans la roche de corne rose de Catharinébourg, où les particules de manganèse sont souvent tout-à-fait visibles & quelquefois dentritiques sur la surface de la pierre. Mais ce Quartz est encore plus remarquable par la roche, dans laquelle il se trouve. C'est un Feldspath grisâtre, quelquefois strié avec une tendance à se cristalliser, mais en grosses masses, & mêlé avec des masses de hornblende noir, assez dur, feuilleté & luisant, quelquefois friable, terreux & ressemblant parfaitement à du charbon de terre; de sorte, qu'elle semble faire passage au minéral, que les minéralogistes allemands désignent par le nom de Kohlenblende. C'est encore la roche, où se trouve le minéral, nommé Plumbago, sur lequel Monsieur le Professeur Lowitz à donné une savante dissertation dans les Actes de la Société économique. Enfin j'ai reçu du même endroit une vraie topaze fumée de la nature du cristal de roche d'une grandeur remarquable & assés belle, comme celles de Catharinébourg. On voit donc, Messieurs, par cette petite ébauche, que je vous présente, combien cette contrée de Finlande est remarquable, & combien elle est digne des recherches plus soigneuses de nos minéralogistes.

EXPÉRIENCES CHYMIQUES

communiquées de la part de S. E. Mr. le Comte de Mouſſin-Pouſchkin, Chambellan & Vice-Préſident du Collège Impérial des mines: par M. l'Académicien Lowitz, le 13 Mai 1797.

Son Excellence Monſieur le Comte de Mouſſin-Pouſchkin, Vice-Préſident du Collège Impérial des mines, m'a chargé de préſenter à l'Académie Impériale des Sciences les deux découvertes remarquables en chymie, qu'il a faites, comme il ſuit:

1.) Parmi pluſieurs expériences très intéreſſantes, que Monſieur le Comte a faites avec la Platina, il lui a réuſſi d'amalgamer parfaitement & en peu de minutes de temps ce métal qui a été peu examiné jusqu'à préſent. Après l'avoir réduit auparavant en une forme criſtalline, en le précipitant par le ſel ammoniac de ſa ſolution dans l'eau régale: toute l'opération conſiſte, d'ajouter peu à peu 5 à 6 parties d'argent vif ſur une partie de ce ſel de Platina bien ſéché & qui préſente une triple combinaiſon, en les broyant continuellement dans une coupe de verre. Ce mélange ſe combine alors bientôt en une maſſe métallique molle, qui ne céde ni en ductilité, ni en molleſſe, ni en éclat métallique, à l'amalgame le plus parfait d'étain ou d'argent, mais elle ſe décompoſe à l'attouchement des corps métalliques ou animales.

2.)

2.) Il lui a reuffi de découvrir une méthode trés facile & qui peut être executée en peu de tems, de porter le phosphore à un fi haut degré de pureté, qu'il devient non feulement parfaitement décoloré & clair comme de l'eau, mais qu'il conferve même aprés être roidi & coagulé parfaitement la transparence du verre blanc; ce qui eft d'autant plus remarquable, qu'on ne connoiffoit le phosphore, depuré fuivant la méthode ordinaire, que comme un corps demi-transparent, fans avoir la parfaite transparence produite par cette nouvelle dépuration. Toute la méthode que Monfieur le Comte me fit l'honneur d'entreprendre avant-hier en ma préfence, eft la fuivante.

Environ 2 drachmes d'un phosphore trés impur & de couleur rouge brun, ayant été mis dans une vaiffelle de verre, on verfa deffus 3 onces d'eau régale, aprés quoi on l'échauffa peu à peu fur une bougie de cire allumée en le remuent fouvent. Aprés que le phosphore avoit fondu & qu'il commençoit à bouillir, on l'écarta du feu. Pendant qu'on le remuoit fortement & continuellement, des vapeurs rouges s'en dégageoient, le phosphore perdoit vifiblement & en peu de minutes fa couleur rouge, & recevoit une apparence blanche laiteufe. Ce phosphore blanc, aprés en avoir oté l'acide, fut lavé avec de l'eau froide, en obfervant la précaution requife, & mis dans un entonnoire de verre rempli de l'eau chaude & bouché par le deffous. Le Phosphere étant fondu dans le pied de l'entonnoire, prit bien de nouveau une apparence fale rougeâtre, mais elle lui fut oté en le remuant & nettoyant fouvent avec une plume: de forte qu'il devint enfin tout-à-fait transparent & clair comme l'eau la plus pure; parceque par cette derniere opération, fimplement méchanique, toutes les parties hétérogènes & colorantes du phosphore s'attachant à la plume, s'en dégagent & se détachent étant lavé avec de l'eau chaude; quand on laisse refroidir trés lentement l'eau, dans laquelle étoit mis l'entonnoir avec le phosphore. Aprés avoir fini cette dépuration, le phosphore retient la plus parfaite transparence à cause du roidissement lent qui étoit produit par cette opération. Mais quand il se roidit trop subitement, alors il acquiert plutôt une transparence moyenne.

EXTRAIT DES MÉMOIRES

CONTENUS DANS CE VOLUME.

CLASSE MATHÉMATIQUE ET PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

Vlterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

Quand on désigne par la lettre Z une fonction quelconque de z, laquelle, en mettant $z = x + y\sqrt{-1}$ reçoit la forme $M + N\sqrt{-1}$, la même fonction devient $M - N\sqrt{-1}$, lorsqu'on met $z = x - y\sqrt{-1}$, où M & N sont toujours des quantités réelles. De là il suit que si dans la formule intégrale $\int Z\partial z$ on met $z = x + y\sqrt{-1}$, de sorte que $Z = M + N\sqrt{-1}$, son intégrale aura la forme $P + Q\sqrt{-1}$, où

$$P = \int(M\partial x - N\partial y) \;\&\; Q = \int(N\partial x + M\partial y).$$

C'est d'après ces principes que l'Auteur de ce mémoire a traité autrefois la formule $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1 + z^n}$, dans un des mémoires du Tome VII. de nos nouveaux Actes; & c'est en en ſuivant la même méthode qu'il a cherché dans le préſent mémoire l'intégrale de la formule beaucoup plus générale $\int \frac{z^{m-1} \partial z}{(a + b z^n)^\lambda}$, pour les cas où z eſt une quantité imaginaire de la forme $x + y \sqrt{-1}$, en déterminant les valeurs des quantités réelles P & Q qui compoſent cette intégrale $P + Q\sqrt{-1}$, par des formules dont l'ntégration ſe fait ſelon les mêmes loix que celle de la formule propoſée $\int \frac{z^{m-1} \partial z}{(a + b z^n)^\lambda}$, lorſque z eſt une quantite réelle; de ſorte que, cette formule étant intégrable, ſoit algébriquement, ſoit par des logarithmes & des arcs de cercle, les valeurs de P & Q ſeront auſſi exprimées de la même maniere.

Cette recherche conduit l'Auteur à un Théoreme très général de calcul intégral, ſavoir que ſi P & Q marquent des fonctions rationnelles de la forme x^n, on puiſſe toujours intégrer $\frac{\partial x (P x^{m-1} + Q x^{n-1})}{(a + b x^n)^{\frac{m}{n}}}$ par des logarithmes & des arcs circulaires, Théoreme dont la démonſtration termine ce Mémoire.

L'Auteur obſerve encore, qu'il ſeroit à ſouhaiter que ces dernieres intégrations puſſent être faites ſans le ſecours des quantités imaginaires; mais il avoue qu'il n'en voit pas le moyen, ce qui donne une nouvelle preuve de la grande utilité que l'Analyſe retire de l'introduction des quantités imaginaires, par le moyen deſquelles feu M. Euler a réſolu nombre de Problêmes de calcul intégral, & même me des questions relatives à l'Analyse de Diophante, qui sans le secours des quantités imaginaires n'auroient jamais été résolues.

II.

Integratio succincta formulae integralis maxime memorabilis $\int \frac{\partial z}{(3 \pm zz) \sqrt[3]{(1 \pm 3zz)}}$.

Auctore *L. Eulero*, pag. 20.

Comme dans le calcul intégral tout revient à transformer, par des substitutions convenables, une formule différentielle proposée en une autre, dont l'intégrale est déjà connue : de même dans l'intégration des formules différentielles irrationelles tout l'art consiste à imaginer des substitutions qui transforment cette formule en une ou plusieurs autres équivalentes, dégagées du signe radical. Feu M. Euler, à qui tout le calcul intégral doit ses plus grands progrès, a fait voir dans son grand ouvrage: *Institutiones Calculi integralis*, Tome I. Chapitre 6, & dans un Mémoire postérieur, qui sert de Supplément à ce chapitre, & qui se trouve dans le Tome IV, partie 1. des Actes pour l'année 1780, comment on doit traiter les formules différentielles irrationnelles. Aussi le dernier volume des nouveaux Actes, pour l'année 1791. contient trois Mémoires qui roulent sur de pareilles intégrations.

Quant à l'intégration de la formule qui fait le sujet du présent Mémoire, l'Auteur y donne deux méthodes pour la rendre rationnelle. Dans la premiere les ſubſtitutions $\sqrt[3]{(1+3zz)} = v$, $p = \frac{1+z}{v}$ & $q = \frac{1-z}{v}$ transforment la formule propoſée en ces deux: $\frac{\partial p}{4(1-p^3)} - \frac{\partial q}{4(1-q^3)}$. Dans la ſeconde la ſubſtitution $z = \frac{1+x}{1-x}$ transforme la formule propoſée en deux autres irrationnelles, qui ſeront dégagées du ſigne radical, la premiere en mettant $\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)^3}} = t$, & la ſeconde en mettant $\sqrt{(1-x^3)} = u$. Car alors la formule différentielle irrationnelle propoſée devient

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}\left(\frac{\partial t}{1+2t^3} + \frac{u\,\partial}{2-u^3}\right).$$

Ainſi moyennant l'une & l'autre méthode on parvient à des formules rationnelles, dont l'intégration peut s'achever par les regles connues, & celles de la premiere méthode même très facilement.

Quant aux cas où dans la formule propoſée le ſigne inférieur négatif a lieu, il faudra mettre $z = y\sqrt{\quad 1}$, & on pourra traiter la formule qui en réſulte ſelon les mêmes méthodes & obtenir l'intégrale ſous une forme réelle, en faiſant uſage de la transformation connue des arcs circulaires imaginaires en logarithmes réels, & réciproquement, des logarithmes imaginaires en arcs de cercle réels; moyennant quoi les multiplicateurs imaginaires ſortent du calcul.

III.

III.

De casibus quibus hanc formulam: $x^4 + kxxyy + y^4$ ad quadratum reducere licet.

Auctore *L. Lulero*, pag. 27.

On sçait qu'en mettant à la place de k les valeurs numériques 1, 3, 4, 5, 6, 7, &c. la formule proposée ne sauroit jamais devenir un quarré, quelques valeurs qu'on donnât à x & à y, tandis que pour les cas $k = \pm 2$ & $k = -nn$, la réduction n'a aucune difficulté. Lors donc qu'on demande quels nombres entiers on pourra mettre à la place de k, pour que la formule proposée soit réductible à un quarré, l'Analyse de Diophante offre différens moyens. Mais de quelque méthode qu'on fasse usage pour résoudre le problème, il reste toujours quelque doute, si l'on a trouvé toutes les valeurs possibles, ou non.

Dans le présent Mémoire l'Auteur a tenté, pour trouver ces valeurs de k, un moyen singulier qui paroît même être contraire à la nature de la question, en représentant k sous la forme irrationelle $P + \sqrt{Q}$, ce qui étant mis à la place de k, la formule proposée étant de la forme $X + Y\sqrt{Q}$, elle ne sauroit être un quarré, à moins que $XX - QYY$ ne soit un quarré. Or la racine de ce quarré aura nécessairement la forme $x^4 + Pxxyy - y^4$, dont le quarré, égalé à $XX - QYY$, conduit à cette équation: $4Pyy \quad (Q - 4)xx = 0$, à laquelle satisfont les valeurs $P = fxx$ & $Q = 4fyy + 4$, de sorte que $k = xx \pm 2\sqrt{(fyy + 1)}$, où tout se reduit à rendre un quarré la formule connue de Pell: $fyy + 1$.

Cette ingénieuſe méthode ne laiſſe pas d'avoir le même défaut dont nous avons parlé au commencement de cet extrait, ſavoir de nous laiſſer incertains, ſi de cette maniere on puiſſe trouver toutes les valeurs poſſibles de k; & l'Auteur avoue qu'il nous manque encore une méthode ſûre de réſoudre ce Problème, dont la ſolution complette lui paroît ſurpaſſer les forces actuelles de l'Analyſe.

IV.

Inveſtigatio ſuperficierum quarum normales ad datum planum productae ſint omnes inter ſe aequales.

Auctore *L. Eulero*, pag. 41.

De toutes les ſurfaces qui ſatisfont à la condition preſcrite, que leurs Normales, prolongées jusqu'à un plan donné, ſoyent toutes égales entr'elles, la premiere qui ſe préſente eſt celle de la Sphère, le plan donné, qui termine les Normales, étant ſuppoſé paſſer par le centre du corps; enſuite la ſurface d'un Cylindre, dont l'axe ſe trouve dans le plan donné. Auſſi ſçait on depuis longtems que tout corps cylindrique, dont l'axe forme une ligne courbe quelconque dans le plan donné, ſatisfait au Problème. Dans le ſixieme volume des nouveaux Actes pour l'année 1788, & dans le 8^{me} volume, pour l'année 1790, on trouve des Mémoires de M. Euler, qui roulent ſur le même Problème. Le préſent Mémoire ne contient pas, à la verité, des ſolutions nouvelles, mais il ne laiſſe pas de mériter l'attention des Géomètres, par les deux ſolutions analytiques qui y ſont développées.

V.

V.

Variae ſpeculationes ſuper area triangulorum ſphaericorum.

Auctore *L. Eulero*, pag. 47.

Les trois angles d'un triangle ſphérique étant donnés, on trouve ſa ſurface par le Théorème connu d'Albert Girard, en ôtant deux angles droits de leur ſomme, & multipliant le reſte, transformé en arc de grand cercle, par le rayon de la ſphère. Mais ſi l'on veut exprimer la ſurface d'un triangle ſphérique par ſes trois côtés, feu M. Euler a trouvé autrefois cette ſurface égale au produit du diamètre de la ſphère, multiplié par un arc dont le coſinus eſt $\frac{1 + \text{coſ.}\, a + \text{coſ.}\, b + \text{coſ.}\, c}{4\, \text{coſ.}\, \frac{1}{2} a \,.\, \text{coſ.}\, \frac{1}{2} b \,.\, \text{coſ.}\, \frac{1}{2} c}$, a, b, c, étant les trois côtés du triangle. Dans ce Mémoire l'Auteur donne une double demonſtration de cette expreſſion. La premiere eſt déduite de la conſidération de deux triangles ſphériques conſtruits ſur la même baſe, & dont les ſommets ſont infiniment proches l'un de l'autre. Car après avoir déterminé, par la baſe, les côtés & leurs différentielles, la différence des ſurfaces de ces deux triangles, ou la différentielle de la ſurface cherchée, il en trouve l'intégrale & parvient, moyennant des transformations ingénieuſes, à l'expreſſion mentionnée. Dans l'autre démonſtration il part du Théorème de Girard, & trouve par la compoſition des angles & par des ſubſtitutions & transformations qui ne ſont pas ſusceptibles d'extrait, la même expreſſion.

Le Mémoire eſt terminé par la conſtruction d'un Problème réſolu par feu M. Lexell dans le premier ſemeſtre de nos Actes pour l'an 1781, ſavoir: ſur une baſe donnée dans la ſurface de la ſphère, conſtruire tous les triangles de même ſurface. Ces triangles ſont rémarquables par la propriété d'avoir tous leur ſommet dans un même petit cercle de la ſphère parallèle à celui dans lequel ſe trouvent les extrémités de la baſe donnée.

IV.

Vtrum hic numerus: 1000009 ſit primus, nec ne, inquiritur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 63.

Dans un Mémoire inſéré au Tome XIX. des nouveaux Commentaires de l'Académie, intitulé: *De tabula numerorum primorum vsque ad Millionem & vltra continuanda, vbi ſimul omnium numerorum non primorum minimi diviſores exprimantur*, feu M. Euler avoit expoſé une méthode très facile de conſtruire une table des nombres premiers, & il y avoit donné un modèle de ces tables, contenant les nombres premiers depuis un million jusqu'à 1002000, parmi lesquels ſe trouvoit auſſi le nombre 1000009. Mais ayant eu dans la ſuite des occaſions de douter que ce nombre ſoit effectivement premier, il l'a ſoumis à un examen particulier, & cet examen fait le ſujet du préſent Mémoire.

Dans cette recherche tout revient à ſavoir ſi le nombre propoſé 1000009, qui eſt évidemment la ſomme des deux

deux quarrés 1000^2 & 3^2, puiſſe être décompoſé encore d'une autre manière en deux nombres quarrés, parce qu'il eſt démontré que ſi cette décompoſition a lieu, le nombre n'eſt certainement pas premier. Or l'Auteur trouve que le nombre en queſtion eſt non ſeulement la ſomme des quarrés de 1000 & de 3, mais qu'il eſt auſſi la ſomme des quarrés de 972 & de 235; d'où il ſuit que 1000009 a un diviſeur premier 293, qui avoit été omis dans la conſtruction de la table mentionnée des nombres premiers contenus entre 1000000 & 1002000.

C'eſt en ſuivant le même procédé que l'Auteur examine auſſi le nombre 1000081, qui eſt pareillement la ſomme de deux quarrés, ſavoir 1000^2 & 9^2; mais s'étant aſſûré que c'eſt la ſeule décompoſition en deux nombres quarrés, que ce nombre admet, il en infère qu'il eſt effectivement premier, tel que le donne la table en queſtion.

L'Auteur obſerve que de la même manière on peut examiner tout nombre de la forme $4n+1$, s'il eſt premier, ou non, pourvu que le dernier chifre en ſoit ou 1 ou 9; vu que, lorſqu'un tel nombre eſt réſoluble en deux quarrés, l'un ou l'autre de ces quarrés eſt certainement diviſible par 5. Que s'il ſe trouve que le nombre donné eſt réſoluble d'une ſeule manière en deux quarrés, il ſera premier, mais que ſi la décompoſition en deux quarrés a lieu de deux ou pluſieurs manières, il ne ſera pas premier & on trouvera ſes diviſeurs de la manière enſeignée dans ce Mémoire. Si enfin le nombre propoſé n'eſt pas du tout réſoluble en deux quarrés, il aura, pour le moins, deux facteurs premiers de la forme $4n-1$.

VII.

VII.

Commentatio in Pappi Alexandrini Theor. XVI. Lib. IV.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 74.

Le Théorème de *Pappus* dont il s'agit dans ce mémoire est celui-ci: *Si l'on décrit sur les deux parties quelconques du diamètre d'un cercle donné A, deux demi-cercles B, C, puis un quatrieme D qui touche A, B, C, ensuite un autre cercle E qui touche le cercle D & l'un des cercles A, B, C, &c. & qu'on abbaisse de chaque centre d'un cercle D, E, &c. une perpendiculaire sur le diamétre du cercle A: ces perpendiculaires seront successivement égales au diamètre, au double, au triple, au quadruple, &c. du diamétre de ce cercle, du centre duquel elles sont abbaissées.* M. Schubert démontre d'une maniere analytique & générale, que cette loi simple a toujours lieu & peut être étendue à un nombre infini de cercles D, E, F, &c. De ce cas spéciel il déduit plusieurs autres cas, par un leger changement de la formule générale. Il trouve enfin une autre relation aussi simple que celle-la, qui a lieu entre les abscisses du diamètre du cercle A, qui sont marquées par ces perpendiculaires.

VIII.

De la descente d'un corps sur un plan incliné, dont les deux extrémités sont appuyées sur un fond élastique.

Par M. *Nicolas Fuss*, page 91.

Dans le volume précédent de nos Actes se trouve un Mémoire qui contient des recherches du même Auteur, touchant

chant la descente d'un corps ſur un plan incliné dont une extrémité eſt appuyée ſur un fond élaſtique. Ayant vu que la principale difficulté du problème, qui n'a pu être réſolu que par approximation, vient de la variabilité de l'inclinaiſon du plan, il ſuppoſe dans ce Mémoire-ci l'une & l'autre extrémité du plan appuyée ſur un fond élaſtique, ſavoir ſur deux reſſorts parfaitement égaux qui, cedant à la preſſion variable du corps en mouvement, baiſſent & relevent alternativement le plan incliné pendant la deſcente du corps. C'eſt donc ce double mouvement du corps & du plan incliné, qui eſt déterminé dans ce Mémoire, où l'Auteur donne des formules, moyennant leſquelles on peut déterminer, pour un intervalle quelconque de tems écoulé depuis le commencement du mouvement, l'affaiſſement du plan, le raccourciſſement & la force des reſſorts, la preſſion du corps, la ligne courbe qu'il a décrit & l'eſpace parcouru ſur le plan.

IX.

De Quadrilateris quibus circulum tam inſcribere quam circumſcribere licet.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 103.

Les quatre côtés d'un Quadrilatère inſcrit à un cercle étant donnés, on peut exprimer, par les ſeuls côtés, & d'une manière très commode, la ſurface, le rayon du cercle circonſcrit, les diagonales, & les angles de la figure ce qui fait le ſujet du premier Problème réſolu dans ce Mémoire, & de ſes corollaires. Mais quand le Quadrilatère eſt circonfcrit à un cercle, il faut connoître, outre les quatre côtés, ou un point d'attouchement, ou un angle, pour déterminer le refte. Le fecond & le troifieme Problème, avec leurs corollaires contiennent les différens cas qui peuvent avoir lieu ici. Dans le quatrième Problème M. Fufs cherche, de tous les Quadrilatères formés de quatre côtés donnés, celui dont le rayon du cercle infcrit eft le plus grand, & trouve que c'eft celui qui eft infcriptible à un cercle. Ceci l'engage à examiner de quelle maniere on puiffe conftruire des Quadrilatères, auxquels on puiffe à la fois infcrire & circonfcrire un cercle, & il donne dans le Problème cinquieme & fixième deux conftructions géométriques, la premiere: pour circonfcrire à un cercle donné un Quadrilatère auquel on puiffe circonfcrire un cercle; la feconde: pour infcrire à un cercle donné un Quadrilatère, auquel on puiffe infcrire un cercle. Dans les deux Problèmes fuivans 7 & 8 l'Auteur fait voir comment, foit que les quatre côtés foyent donnés, foit que deux côtés feulement foyent donnés, avec l'angle intercepté, on puiffe conftruire un Quadrilatère infcriptible & circonfcriptible au cercle. Le Problème neuvieme & dixième montrent, le premier: comment, les angles d'un Quadrilatère circonfcrit à un cercle étant donnés, on puiffe trouver les côtés, la furface & le rayon du cercle circonfcrit; le fecond: comment, les angles d'un Quadrilatère infcrit à un cercle étant connus, on puiffe trouver les côtés, la furface, & le rayon du cercle infcrit. Dans le dernier Problème & dans un Scholie qui eft à fa fuite l'Auteur détermine la diftance des centres des cercles qui font circonfcrits & infcrits à un Quadrilatère & à un Triangle quelconques, les rayons des deux cercles étant donnés; & il trouve le quarré de cette diftance $= RR + rr - r$

$\surd$

$\sqrt{(4RR + rr)}$ pour le Quadrilatère, & $= RR - 2Rr$ pour le Triangle, R étant le rayon du cercle circonſcrit & r le rayon du cercle inſcrit à la figure.

X.

Integratio formulae $\int \frac{\partial z}{(3 - zz)\sqrt[3]{(1 + zz)}}$ aliarumque nonnullarum.

Auctore *Step. Romovski*, pag. 126.

Ce mémoire contient une méthode particuliere pour intégrer les formules

$$\frac{\partial z}{(3 - zz)\sqrt[3]{(1 + zz)}}, \quad \frac{\partial z}{(3 + zz)\sqrt[3]{(1 + 3zz)}} \text{ et } \frac{\partial z}{(3 - zz)\sqrt[3]{(1 - 3zz)}}.$$

L'intégration des deux premières y eſt entierement achévée, mais pour celle de la troiſieme, l'Auteur s'eſt contenté de l'avoir reduit à une expreſſion rationnelle. Pour faire plaiſir à ceux qui déſirent de connoître cette méthode d'intégrer les formules mentionnées, nous allons indiquer ici en abregé, de quelle maniere l'Auteur s'eſt pris dans la réduction dont il parle aux §. §. 2. & 6., parce-qu'elle ne pourroit pas ſi tôt ſe préſenter à l'eſprit. Cette reduction concerne les membres $\frac{1}{3} l \frac{v - 1}{\sqrt{(vv + v + 1)}}$ & $\frac{1}{3} l \frac{\sqrt{(vv + v + 1)}}{v - 2}$, dont il ſuffira d'avoir expoſé la premiere. Comme $v = \sqrt[3]{(1 + u^3)}$, il en réſulte d'abord

$$\frac{1}{3} l \frac{v-1}{\sqrt{(vv+v+1)}} = \frac{1}{3} l \frac{\sqrt[3]{(1+u^3)}-1}{\sqrt{[(1+u^3)^{\frac{2}{3}}+(1+u^3)^{\frac{1}{3}}+1]}}:$$

Qu'on multiplie le numérateur & le dénominateur par $\sqrt[3]{(1+u^3)}-1$, & on obtiendra tous de fuite

$$\frac{1}{3} l \frac{v+1}{\sqrt{(vv+v+1)}} = \frac{1}{3} l \frac{\sqrt[3]{(1+u^3)}-1}{u}.$$

Par cette même méthode fe fait auffi la réduction dont il eft parlé au §. 6.

XI.

Application de la Roue hydraulique Segnerienne à l'exploitation de Mines.

Par Mr. *Krafft*, pag. 137.

On fçait combien il eft avantageux dans les travaux des Mines, de fe fervir des forces de l'eau, préférablement à toute autre efpèce de puiffance motrice, pour mettre en jeu les Machines deftinées à exploiter les minerais, ou à élever les eaux fouterraines des puits de Mines, foit au jour, foit à la hauteur des Galleries d'écoulement. L'hiftoire des travaux des Mines offre des exemples, qu'on étoit dans la neceffité facheufe, d'en laiffer de bien confidérables en proie aux eaux fouterraines, par la feule raifon qu'on manquoit d'eau motrice, ou bien qu'on manquoit des moyens de tirer de celle qu'on avoit à fa dis-

disposition, le plus grand parti possible en raison de sa quantité & de sa chute. Il est bien vrai, qu'aujourd'hui on pratique déja quatre manieres différentes d'employer l'eau comme force motrice au jeu des Machines des Mines; elle y sert en cette qualité, par son poids dans les Roues à Godets; par son choc dans celles à Palettes; par sa pression portée de bas en haut dans les Machines à colonne d'eau; enfin par l'élasticité de ses vapeurs dans les Machines à feu; mais l'auteur de ce Mémoire n'a trouvé nulle part, qu'on ait jusqu'ici employé aux travaux des Mines la force de réaction que l'eau exerce, quand elle s'écoule d'un vase par des ouvertures convenablement placées; c'est cependant cette force de réaction, que l'Illustre Mr. de Segner a fait connoitre le premier, il y a longtems, par sa célébre Roue hydraulique, à la quelle elle sert de principe moteur, & qu'on n'a pas laissé d'employer ensuite à différentes espéces de Moulins. Mr. Krafft, présumant que cette force de réaction de l'eau pourroit être bien avantageusement appliquée au jeu des Machines des Mines, a été bien confirmé dans cette idée par les expériences qu'il a faites pour cet effet avec un Modèle d'une Machine de ce genre, construit en grandeur médiocre; ce qui l'a engagé à réprendre la théorie de cette Machine qu'il a reussi à reduire à autant de simplicité qu'il faut pour la pratique. Il donne dans ce Mémoire les solutions des Problèmes qui peuvent se présenter à ce sujet, & il les éclaireit par des applications aux travaux des Mines; enfin il tire de ses récherches le résultat, que les Roues hydrauliques de cette espece sont capables de produire un effet qui, abstraction faite des résistances du milieu & du frottement, égale au moins fept huitièmes du plus grand effet qu'il eft poffible de produire par une dépenfe & une chute d'eau données ; que par conféquent elles font de beaucoup préférables dans les travaux des Mines aux Roues à Palettes ; qu'elles l'emportent même fur les Roues à Godets par la fimplicité de leur conftruction, & qu'elles pourroient auffi fervir avantageufement à bocarder les Minérais & à mettre en jeu les foufflets de fondéries.

CLASSE

CLASSE PHYSIQVE.

I.

De ordine fibrarum mufcularium cordis. Differtatio X. De ftrato fecundo fibrarum ventriculi finiftri. Pars IV.

Auctore *C. F. Wolff*, pag. 175.

Celeberrimus olim beatus auctor pergens in extricandis fibris ftrati fecundi ventriculi finiftri cordis, euoluit in primis progreffum & finem primae et fecundae fafciae ordinis quarti; quibus explicatis ortum et progreffum fafciae tertiae enodat. In fafcia quarta, quae intertexta eft cum fafcia tertia, fibras fuperficiei interioris flabellatas defcribit, quas, dum fint majores, quam in fafcia quinta, *flabellatas* maiores vocat. In quinta denique fafcia fingularem modum, quo fibrae ipfius, quas *flabellatas* minores appellat, terminantur, obferuat: nimirum vbi hae propius iam ad fafciculum accefferunt terminalem inferiorem, quem verfus progrediuntur, euanefcunt ita, vt aperturam omnino in hac apicis ventriculi parte relinquant. Aperturae huius dein figuram, fedem, initium et fibras a quibus efficitur defcribit. Inftituta tandem comparatione ordinum quartorum externi et fecundi ftrati auctor demonftrat, quod externum ftratum curuatum, defcendens, fecundum vero rectum, transuerfum fit.

II.

II.

Expositio methodi nouae aquam putridam vel corruptam depurandi.

Auctore *Tob. Lowitz*, pag. 187.

L'Auteur de ce mémoire s'étant assuré par plusieurs expériences, que les charbons de bois (dont il découvrit en 1785 la vertu purificative) pouvoient être employés utilement à détruire les parties odorantes & colorantes; il en fit heureusement l'application à l'eau corrompue, à laquelle il rendit par ce moyen sa premiere salubrité.

Le procédé est on ne peut plus simple, & quelques minutes suffisent pour l'exécuter. On n'a qu'à mêler peu-à-peu avec l'eau, qu'on se propose de purifier, des charbons pulvérisés jusqu'à ce qu'une petite portion qu'on fait passer par le filtre, en sorte absolument claire. Alors on jette tout le mélange dans une chausse de toile bien serrée & il en découle promptement une eau parfaitement purifiée.

Neuf parties de charbons pulverisés sont plus que suffisantes pour purifier 100 parties d'eau. Mais si d'abord on ajoute à l'eau un peu d'huile de vitriol, par exemple 6. gouttes à une livre d'eau, $3\frac{1}{2}$ parties de charbons pulvérisés suffisent pour enlever à cent parties d'eau corrompue la mauvaise odeur & en même tems l'acide vitriolique qu'on y a mélé.

Si avant le mélange des charbons pulvérisés on ajoute à l'eau corrompue, que l'on destine pour cuire les alimens,

mens, aulieu d'huile de vitriol, autant de ſel commun ou d'eau de mer qu'il en faut pour produire la ſalure néceſſaire, une quantité bien moindre de charbons pulvériſés ſuffit pour la rendre pure. Car Mr. Lowitz a fait la remarque intéreſſante, que les ſels neutres ſont auſſi propres que les acides à rendre plus active la vertu purificative qu'ont les charbons de bois; ce qui peut être très avantageux à la navigation.

III.
Mémoire ſur le Talc.

Par M. *B. Sewerguine*, pag. 209.

Le but de l'auteur y eſt, de déterminer les caractéres extérieurs des différentes eſpéces de pierres, qui ſont propres à la Ruſſie, & particulierement celles du genre du Talc, en y ajoutant leur lieu nâtal & autres qualités remarquables. Comme il n'avoit pas encore adopté le ſyſtème du celèbre Werner, il avoit ſuivi l'arrangement ſyſtématique, qui a été fourni par M. le Profeſſeur Gmelin, dans la treizième édition du ſyſtème de la Nature du Chevalier de Linné, ſuivant lequel on y trouve décrites les eſpèces: Talcum Spuma maris, T. fulconum, T. porzellanum, T. ſquamoſum, T. radiatum, T. ſmectis, T. ollaris, T. ſchiſtoſum, avec leurs variétés, accompagnées de remarques ſur la nature & les proprietés chymiques, par leſquelles pluſieurs d'entr'elles lui ſemblent participer plus ou moins de la nature des terres & pierres argilleuſes.

IV.

Sur les Serpentines ruſſes, pour ſervir de ſuite à l'eſſay ſur l'Oriçtographie de la Ruſſie.

par M. *B. Sewergine*, pag. 229.

Ce mémoire eſt une continuation du précedent. La méthode & l'arrangement y eſt le même: l'auteur y diſcute ſur les eſpéces qui appartiennent au genre de la ſerpentine ſuivant le ſyſtème de M. le Profeſſeur Gmelin. Telles ſont le S. néphriticus, S. genuinus, S. fiſſiils, & S. cryſtalliſatus, il en expoſe toutes les variétés qui lui ſont connues en Ruſſie, en y ajoutant quelques réflexions ſur le genre de la Serpentine en général & ſur ſes caractéres diſtinctifs.

V.

Sur la Cyanite.

par M. *B. Sewergyne*, pag. 242.

Ce mémoire a été préſenté à l'occaſion de quelques échantillons de cyanites de St. Gothard, qui ont été envoyés à l'Académie par le R. P. Ermengildo Pini. Comme M. l'Académicien Hermann avoit envoyé à l'Académie il-y-a quelques tems, des cyanites de Cathérinebourg, les unes & les autres méritoient d'être examinées d'autant plus ſoigneuſement, que les cyanites Ruſſes préſentoient réellement quelques différences à l'égard des cyanites de St. Gothard. Vû ces différences ſpécifiques & quelques autres pro-

propriétés remarquables, l'auteur les diſtribue en général, en cyanite en barres, (C. priſmaticus,) cyanite en tables, (C. tabularis,) & cyanite feuilletée, (C. lamellaris.)

VI.

Tableau phyſique et topographique de la Tauride.

Par Mr. *Pallas*, pag. 257.

Ce tableau qui a auſſi été imprimé ſéparement, contient la minéralogie & la Géographie phyſique de ce païs; où l'auteur rapporte le deux premiers ordres des montagnes de la Tauride, enſuite les lacs ſalés, les éruptions vaſeuſes de la presqu'isle de Kertſch & de l'isle de Taman, les champs de Granite de la plaine des Nogais. Enſuite la Botanique, l'économie & la Zoologie de la Tauride & enfin un catalogue des eſpèces de végétaux ſpontanés obſervés en Tauride, dont le nombre monte à 990, & parmi lesquels ſe trouvent 302 eſpèces qu'on ne rencontre pas dans les autres gouvernemens de l'Empire de Ruſſie, excepté un petit nombre de celles qui ſont familieres à quelques parties du Caucaſe.

VII.

Terra Strontiana in ſpatho ponderoſo, ceu pars eius conſtitutiva ſecundaria detecta.

Auctore *Tob. Lowitz*, pag. 321.

Déja l'an 1792. toutes les fois que M. Lowitz étoit occupé à préparer la terre péſante combinée avec l'acide du du ſel, (Terra ponderoſa ſalita) il obſervoit dans la leſſive mere qui reſte, un ſel très ſoluble & d'une cryſtalliſation particuliere formant des cryſtaux longs & pointûs. Quelques expériences auxquelles il ſoumit ce ſel, lui firent ſoupçonner dans ce ſel, la préſence d'une nouvelle eſpèce de terre encore inconnue. Mais ayant été informé en 1795 des propriétés de la terre du Strontianite, il trouva qu'elles s'accordoient parfaitement avec celles, qu'il avoit découvertes dans le ſpath péſant. Par pluſieurs expériences que l'auteur a faites ſur plus de 20. eſpèces de ſpaths péſans ramaſſés en divers endroits, il a trouvé que la terre du Strontianite ſe trouvoit en raiſon d'un à deux par cent, dans tous les ſpaths péſans, ainſi que dans le vithrite comme une partie conſtituante ſécondaire, combinée dans la premiere avec l'acide ſulphureux & dans le ſecond avec l'acide aërien.

VIII.
Plantae novae ex herbario et ſchedis defuncti Botanici Ioh. Sievers deſcriptae.

Auctore *P. S. Pallas*, pag. 369.

Celeberrimus Auctor proponit in hac diſſertatione decem plantarum ſpecies novas, quibus praemittit ſuccinctam hiſtoriam quorundam momentorum vitae & in Botanicam meritorum atque fatum *Iohannis Sievers*, e herbario et ſchedis cuius has deſumſit, et pro more ſuo, graphice deſcribit.

Ex his prima eſt *Robinia iubata Robinia cauda cameli* Sievers, quae ramis abbreuiatis villoſis, petiolis elongatis ſpineſcentibus, confertis, deflexis, pedunculis vnifloris a a reliquis discernitur. Sed flores recentes huius ſingularis atque curioſiſſimae ſpeciei non ſunt viſi. Creſcit circa fluvios alpeſtres *Küddü* et *Soon-Murin*, a latere meridionali iugi altiſſimi *Chamar-Daban* fluentes.

2.) *Robinia tragacanthoides*, quae eſt ramoſiſſima, foliis biiugis, petiolis ſpineſcentibus, ſpinis reflexo-patentibus, pedunculis vnifloris. Procreſcit e fiſſuris rupium in valle granitoſa, anguſta, ad lacum *Bolak-Tshillek*, in vicinia *Noor-Saiſſan*.

His, Auctor, cultura edoctus, novam Ribiniae ſpeciem ſub nominae *Robiniae Altaganae* addit, quam olim pro varietate Robiniae caraganae habuit, et in *Florae Roſſicae* Vol. I. Tab. 42. depictam ſiſtit.

3.) *Sophora Argentea*; *Ribinia argentea* Sievers. Quae definitur quod ſit petiolis diphyllis ſpineſcentibus, pedunculis racemoſo-multifloris. Haec cum in floreſcentia nondum cognita ſit, in incerto manet, an ad Sophoras ſit referenda, vel novi generis exiſtimanda planta. Ceterum huic eſt habitus ſumma affinitas et ſimilitudo mira cum Robinia Halodendro. Obſervata eſt in campis arenoſo-ſalſugineis circa *Noor-Saiſſan* et aliis Songarici deſerti locis.

4.) *Tamarix Songarica*. *Schanginia* Sievers, quae floribus octandris, decandris que, foliis filiformibus carnoſis a congeneribus diſtinguitur. Provenit elegantiſſimus hic fruticulus in campis Salino-ſqualidis, limoſis Songariae et in arenoſo-ſalſis circa *Noor-Saiſſan*.

5 — 7.) Sequuntur tres novae ſpecies Ribes; ex his prima eſt *Ribes ſaxatilis,* media inter R. alpiam, et R. diacantham, habitu groſſulariae, fructu ribeſii ramisque ſparſis ſpinoſis, racemis fructiferis erectis. Provenit in montibus granitoſis Songariae.

Secunda vero eſt *Ribes fragrans, Ribes-Pneobalſamum* Sievers, ſui generis fragrantiſſima, inermis, ſurculis ramoſis, erectis: foliis ſubquinquangulo-trilobatis, racemis fructiferis erectis. Creſcit in montibus Mongoliae finitimis altioribus, vbi nulla ſylva viget.

Tertia *Ribes triſte, Ribes melancholicum* Sievers, quod eſt inerme, ſurculis ſimpliciſſimis virgatis, ſuperius foliiferis racemiferis que, racemis pendulis. Occurit circa ſumma montium cacumina iugi *Iablonnoi* et in altioribus iugorum Mongoliae finitimorum.

8.) *Roſa berbirifolia,* quae ſpinis recurvatis, foliis ſimplicibus, ſeſſilibus, ſpinae geminae interiectis dignoſcitur. Lecta eſt circa fluvium *Vldſchar* deſerti Songarici.

9.) *Moluccella diacanthophylla,* quae foliis tripartitis, laciniis linearibus, inciſis, mucronatis, foliis geminis, axillaribus, ſetaceis diſtinguitur. Lecta in montibus granitoſis, verſus *Chaſyltaſch* montem, altiſſimo iugo *Tartagatai* Songariae finitimum.

10.) Totum tandem agmen claudit *Rheum leucorrhizum, Rheum nanum* Sievers, quod foliis transverſe-ovalibus, depreſſis, panicula feminifera divaricata, calycis foliolis

lis binis, multoties maioribus discernitur & eſt admodum affine *Rheo Caſpio* (Tatarico Lin.); ſed radicis natura, quae contra regulam generis alba eſt, calyce et natali ſolo ſemper diſtinctum eſt; nam hoc in ſalſuginoſis circa *Uldſchar* fluvium et lacum *Alagül* provenit, illud vero inter montes quartzoſo-ſchiſtoſos, nudos circa fluvios *Dshar-gurban* et *Kurtſchum* deſerti Songarici naſcitur.

IX.

Obſervations minéralogiques dans un voyage fait, pour connoître les roches, dont la chaîne Ouralienne eſt compoſée, en la traverſant de l'Oueſt vers l'Eſt.

Par M. *B. F. J. Hermann*, pag. 384.

L'auteur a taché de faire connoître dans ce mémoire les roches, dont la chaîne des montagnes ouraliennes eſt compoſée en la traverſant par ſa largeur; il a marqué ſur le profil y joint, chaque pierre qu'il a rencontré ſur ſa route de diſtance en diſtance, en faiſant voir par là, comment les différentes roches, dont les montagnes y conſiſtent, ſuivent les unes aprés les autres du pied jusqu'à la hauteur, & de là jusqu'au coté oppoſé. D'ailleurs le profil commence & finit à deux endroits, où l'on trouve des pétrifications; & comme entre ces deux points, la chaîne, dont la largeur eſt ici de 165 verſtes conſiſte partout de montagnes primitives, abſolument depourvûes de corps pétrifiés, il en faut conclure, que toute cette grande contrée n'a jamais été ſubmergée de la mer.

X.

X.

Obſervationes quaedam circa vera ſtigmata et fructificationem Periplocae graecae Lin.

Auctore *I. T. Koelreuter*, pag. 407.

In hac analyſi inprimis celeberrimus auctor demonſtrat vera floris nectaria, pro quibus vulgo fulcra eorum haberi ſolent, dein ſtructuram atque conformationem antherarum experimento demonſtrat, quae phalenarum pupulae haud diſpares deprehenduntur. Reſectis ſtaminibus cum ſuis antheris obſervavit auctor ſupra ſuperiorem et exteriorem ſpongioſi corporis marginem quinque ſpathulaeformes lamellas, in inferiori parte tenuiſſimo pedunculo inſtructas, quas pro veris ſtigmatibus ex albo humore unguento ſimili, quali eo tempore, dum antherae in eo ſunt, vt polline ſuo ſe exonerent, illae obtectae obſervantur, agnoſcere nullus dubitat. Dein pergens in extricando miro partium genitalium mechaniſmo atque ſitu, fructificationis que natura, oſtendit plantam hanc ab univerſaliori florum ſtructura ad ſingulariſſimam earum plantarum, quae verum gynandriae Linn. ſpeciem prae ſeferunt, tranſitum quaſi facere. Tandem oſtendit *Periploram africanam* Linn. cum *Periploca graeca* ſub eodem genere ſcil. *Periplocae* ſtare non poſſe. Denique litem inter ipſum et celeberr. Jacquinium, ratione theſis Auctoris de veris Aſcilepidiarum genitalibus maſculis eorundemque functione ſubortam componere tentat.

XI.

XI.
Polygoni ſpecies nova deſcripta.

Auctore *Ioh. Lepechin.* Pag. 414.

Inprimis denominationis ſpecificae rationem reddit Auctor; huic ſubiungit definitionem ſpeciei, nimirum quod polygonum deſcribendum ſit caule diffuſo, paniculis laxis, floribus octandris, trigynis, floribus lanceolato linearibus, glabris, acutis. Tandem ex praemiſſa deſcriptione oſtendit, quodnam ſit diſcrimen inter polygonum a Gmelino T. III. No. 40. in Flora Sibirica deſcriptum et hanc novam ſpeciem.

CLASSE ASTRONOMIQUE ET MÉTÉOROLOGIQUE.

I.

De perturbatione motuum Martis.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 419.

Quiconque a bien approfondi la méthode ingénieuse dont M. *de la Place* s'est servi, pour calculer les dérangemens de Jupiter & de Saturne, causés par leur action réciproque, & sur laquelle ce grand Géomètre a fondé une nouvelle théorie de ces deux Planètes, qui a rempli les voeux & surpassé les espérances des Astronomes, en déduisant de la théorie Neutonienne plus de vingt équations depuis quelques secondes jusqu'à 49′, qui contiennent toutes les irrégularités de ces deux planètes, même de leur équation séculaire dont les Asttronomes avoient été occupés pendant si longtems & qui en rendent le calcul parfaitement d'accord avec les observations les plus anciennes — quiconque a vu par l'analyse de cette méthode, qu'en ne négligeant pas les moindres quantités, elle conduit à une exactitude que les méthodes antérieures ne pouvoient atteindre, doit être persuadé, que la théorie des autres planètes ne manquera pas d'être portée à un nouveau degré de perfection, quand on y voudra employer la même méthode: & celui qui, par le le motif d'être utile, se charge de ce long & pénible calcul, peut, ce semble, compter sur la reconnoissance des Astronomes. L'auteur de ce mémoire, ayant calculé les dérangemens de *Mars* & d'*Ouranus* d'après cette méthode, rend compte dans ce mémoire des résultats qu'il a trouvés pour la premiere de ces planètes, en n'y tenant compte que de l'action de Jupiter & de la Terre, l'action des autres planètes sur Mars étant tout-à-fait insensible. Voici ces résultats. En nommant ♂, ♃, ☉, les longitudes moyennes de Mars, Jupiter, & du Soleil; ζ, η, θ, leurs anomalies moyennes, & en exprimant le rayon de l'orbite terrestre par 1000000, on trouve les équations suivantes.

Équation du *rayon vecteur* de Mars

$$
\begin{aligned}
= &- 4 + 78 \cos(♂-♃) - 68 \cos 2(♂-♃) - 7 \cos 3(♂-♃) \\
&+ 11 \cos(♂-♃-\zeta) - 9\cos(♂-♃+\zeta) + 60\cos[2(♂-♃)-\zeta] \\
&+ 6 \cos[2(♂-♃)+\zeta] - 11 \cos[3(♂-♃)-\zeta] \\
&+ 1 \cos[3(♂-♃)+\zeta] - 3 \cos\eta - 7 \cos(♂-♃-\eta) \\
&+ 17\cos[2(♂-♃)-\eta] - 1\cos[2(♂-♃)+\eta] + 20\cos(♂-☉) \\
&+ 5 \cos 2(♂-☉) - 1 \cos 3(♂-☉) - 2 \cos(♂-☉-\zeta) \\
&+ 9\cos(♂-☉+\zeta) + 20\cos[2(♂-☉)+\zeta] + 3\cos[3(♂-☉)+\zeta] \\
&+ 3 \cos[2(♂-☉)+\theta] + 3 \cos[3(♂-☉)+\theta];
\end{aligned}
$$

Équation de la *longitude* de Mars

$$
\begin{aligned}
= &- 24'',4 \sin(♂-♃) + 13'',6 \sin 2(♂-♃) + 1'',2 \sin 3(♂-♃) \\
&+ 5'',5 \sin(♂-♃-\zeta) + 2'',9 \sin(♂-♃+\zeta) \\
&- 23'',6 \sin[2(♂-♃)-\zeta] - 1'',9 \sin[2(♂-♃)+\zeta] \\
&+ 2'',7 \sin[3(♂-♃)-\zeta] + 5'',4 \sin\eta + 2'',4 \sin(♂-♃-\eta) \\
&- 3'',6 \sin[2(♂-♃)-\eta] + 7'',3 \sin(♂-☉) + 1' \sin 2(♂-☉) \\
&- 12'' \sin(♂-☉+\zeta) + 6'',4 \sin[2(♂-☉)+\zeta] \\
&- 5'',7 \sin[2(♂-☉)+\theta].
\end{aligned}
$$

En comparant cette expreſſion avec celle trouvée par M. *de la Lande* d'après la méthode de *Clairaut*, ſavoir

$$-25'',7\,\text{ſin}(♂-♃)+12'',2\,\text{ſin}\,2(♂-♃)+9'',2\,\text{ſin}(♂-♃-\zeta)$$
$$-1'',4\,\text{ſin}(♂-♃+\zeta)-17'',6\,\text{ſin}[2(♂-♃)-\zeta]$$
$$+1'',6\,\text{ſin}[2(♂-♃)+\zeta]+7''\,\text{ſin}(♂-\odot)+1''\,\text{ſin}\,2(♂-\odot)$$
$$-35'',8\,\text{ſin}(♂-\odot+\zeta)-15'',7\,\text{ſin}[2(♂-\odot)+\zeta]$$
$$-14'',8\,\text{ſin}[2(♂-\odot)+\theta],$$

on s'appercevra de la différence conſidérable entre ces deux méthodes, qui a lieu dans les équations qui dépendent de l'excentricité, c'eſt-à-dire, dans les argumens desquelles entrent les anomalies ζ, η, θ.

Quant aux perturbations de la nouvelle Planète, M. Schubert ne tardera pas d'en communiquer le calcul à l'Académie.

II.

De variatione obliquitatis eclipticae et anni ſolaris.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 433.

Depuis longtems les plus grands Geomètres de ce ſiecle avoient calculé d'après la théorie de *Newton* des expreſſions générales pour les variations ſéculaires des élémens des orbites planétaires; mais ces expreſſions, renfermant les élémens variables mêmes, ne ſont que les différentielles des variations entières ou les variations momentanées, & partant

partant ne fauroient fervir que pour un tems limité, pendant lequel ces élémens n'ont pas changé fenfiblement. M. *de la Grange* eft le premier, qui eft venu à bout d'intégrer ces expreffions & d'en déduire d'autres qui, ne renfermant que des quantites conftantes, déterminées par les époques des élémens, ont lieu pour un tems quelconque même infini. C'eft des équations intégrales calculées d'après cette méthode pour le mouvement de l'orbite terreftre, que M. *de la Grange* a déduit des formules intégrales pour le changement de l'obliquité de l'ecliptique & le mouvement des points équinoxiaux, qui ont lieu pour un tems indéfini. Mais comme ces mouvemens, étant donnés par des finus & cofinus de plufieurs angles qui croiffent uniformement, font néceffairement périodiques, il feroit très-intéreffant d'en connoître les periodes & les limites. Il faut pour celà un calcul très-long & très-ennuyant, parce qu'on n'y parvient que par des tâtonemens; c'eft pourquoi le grand Geomètre auquel on doit ces découvertes, n'a pas voulu pourfuivre fes calculs. M. Schubert, perfuadé de l'utilité de ces recherches, ayant entrepris ce travail, a trouvé les réfultats que voici.

L'an 29958 avant I. C. l'*obliquité* fut un *maximum* $= 27° 48'$; l'an 14917 elle fut un *minimum* $= 20° 44'$; l'an 2167 elle fut un *maximum* $= 23° 53'$. L'an 6664 après I. C. l'obliquité fera un *minimum* $= 22° 53'$; l'an 19774 elle fera un *maximum* $= 25° 55'$; l'an 34986 elle fera un *minimum* $= 20° 34'$: enforte que pendant un intervalle de 65000 ans, l'obliquité ne change que depuis $27° 48'$ jusqu'à $20° 34'$, d'où il fuit que l'obliquité d'àpréfent eft un peu moindre que la *moyenne*.

À cauſe du mouvement périodique des équinoxes, produit par l'action des planètes, *l'année tropique* en 1700 fut plus longue que la *moyenne* de 6, 364 ſecondes: l'an 3192 avant I. C. fut un *maximum*, plus long que l'année moyenne de 47″; l'année 2170 après I. C. ſera parfaitement égale à l'année moyenne; enſuite l'année tropique vraie diminuera, & l'an 7648 deviendra un *minimum*, plus court que l'année moyenne de 47″, 6. D'où il ſuit, que depuis les obſervations les plus anciennes jusqu'à nos jours, l'année tropique a toujours diminuée & que par conſéquent le mouvement moyen du Soleil a eu une équation ſéculaire additive: ce que pluſieurs Aſtronomes ont conclu des obſervations. Au reſte, comme dans ce calcul on a ſuppoſé la maſſe de *Venus* plus grande d'un quart que celle de la terre, & qu'elle eſt apparemment plus petite, M. Schubert ſe propoſe de refaire tous ces calculs intéreſſans mais pénibles, d'après une autre hypothéſe pour la maſſe de Venus.

III.

Obſervations aſtronomiques faites à l'Obſervatoire du Collège académique de Mitau.

par M. *Beitler*, pag. 447.

Ces obſervations ſont extraites de diverſes lettres que l'auteur a adreſſées à M. l'Académicien & Chevalier Krafft, pour être communiquées & lues à l'Académie. On y trouve:

1.)

1.) Obſervation de l'éclipſe partiale de la Lune du 11 au 12 Octobre 1791, faite avec un téleſcope de Nairne, groſſiſſant 40 fois. Elle a été viſible depuis le commencement jusqu'à la fin.

2.) Éclipſes des ſatellites de Jupiter, obſervées & calculées d'après les tables de Wargentin & de Lambre.

3.) Occultations de quelques étoiles.

4.) Obſervation de l'occultation de Jupiter & de ſes ſatellites, faite le 23 Septembre 1795, avec une lunette achromatique de Dollond à triple objectif, groſſiſſant 80 fois avec 40 lignes d'ouverture.

5.) Obſervation de l'occultation de l'étoile μ de la baleine par la Lune, faite le 30 Septembre 1795.

IV.

Nonnullae obſervationes aſtronomicae Petropoli in ſpecula domeſtica anno 1795 inſtitutae.

Auctore *P. Inochodzow*, pag. 458.

L'Auteur ayant été obligé de quitter ſon ancienne démeure auprès de l'obſervatoire académique, & d'aller occuper une autre plus éloignée de près de 3 verſtes, il s'y fit conſtruire un petit obſervatoire domeſtique aſſés ſolide & avantageuſement ſituée. Après y avoir fait transporter ſes

ſes inſtrumens aſtronomiques, les mêmes dont il s'étoit ſervi dans ſes voyages & en dernier lieu à l'obſervatoire de l'Académie, ſes premiers ſoins furent de déterminer la poſition reſpective de ſon nouveau obſervatoire, qu'il trouva de 2'. 46''. plus au midi, & d'après le plan de la ville de 0, 3''. plus à l'Eſt que celui de l'Académie. Le temps obſcur & les nuages épais ne lui permirent pas de faire l'obſervation de l'éclipſe partiale de $\frac{20}{31}$ Juillet, quoiqu'il aie pu prendre les hauteurs correſpondantes du Soleil pour examiner la marche de ſa pendule tant avant qu'après cette éclipſe. M. Inochodzof ſe contente donc de rapporter & de communiquer les obſervations qu'il a faites aux mois d Août & de Septembre, des éclipſes des ſatellites de Jupiter, dont quelques unes lui paroiſſent encore douteuſes.

V.

Commentatio de eclipſi Solis Anno 1791 die $\frac{23 \text{ Mart.}}{3 \text{ April}}$ obſervata.

Auctore *Step. Rumovsky*, pag. 463.

VI.

Additamentum ad commentationem praecedentem, de eclipſi Solis.

Auctore *eodem*, pag. 470.

L'Auteur avoit déja donné au Tome VII. des nouveaux Actes un mémoire ſur cette éclipſe du Soleil, où il il a fousmis au calcul les obfervations faites à Paris, à Palerme & à St. Pétersbourg. Ayant depuis reçu celle qui a été faite à Cambridge en Amérique près de Bofton par M. Samuel Weber, il a cru devoir reprendre fes calculs. L'éclipfe y a été annulaire; de forte qu'on y a pu obferver non feulement le commencement & la fin, mais encore les deux contacts internes, favoir la formation de l'anneau & & fa rupture. L'auteur joint à cette obfervation encore quelques autres qui lui ont été communiquées depuis fon premier mémoire & en détermine les momens principaux fuivans, qui méritent d'être rapportés ici.

1.) Il fuit des contacts intérieurs obfervés à Cambridge, que dans les éclipfes annulaires, la correction de la différence des demi-diamètres du Soleil & de la Lune doit être de $1''\frac{1}{2}$ fouftractive, & comme la correction de la fomme de ces deux demi-diamètres eft pour la pluspart de $5''\frac{1}{2}$ foustractive, il en refulte la correction du demi-diamètre du Soleil de $-3''\frac{1}{2}$ & de celui de la Lune de $-2''$.

2.) Les tables de la Lune de Mayer donnent la latitude de la Lune de $10''$ & fa longitude de $3''$ plus petites, qu'on ne les trouve par l'obfervation, favoir fi l'on calcule fon lieu, feulement par les tables de Meyer pour le temps vrai de la conjonction à Greenwich $0^{h.}\ 41'.\ 58''$. mais fi la longitude du Soliel eft calculée d'après les tables de M de Zach, la correction pour la longitude de la Lune devient de $15''$ additive.

L'auteur ayant ensuite reçu l'observation de la même éclipse faite à Philadelphie en Amérique, il la soumet pareillement au calcul afin d'établir la correction de la différence des diamètres du Soleil & de la Lune, telle qu'elle doit être employée dans les éclipses du Soleil annullaires. Ce qui fait le sujet du supplement que l'auteur a ajouté à son mémoire, où il fait voir que les momens des deux contacts intérieurs observés à Philadelphie ont besoin d'être corrigée d'une minute entiere de temps pour les faire accorder avec la fin de l'eclipse, & qu'il en résulte une correction de la différence des deux demi-diamètres du Soleil & de la Lune de 2″ soustractive à peu près. Mais que si l'on diminue de quelques peu de secondes le moment du premier contact intérieur, on obtient à très peu près la même correction que les contacts intérieurs observés à Cambridge ont donnée. La longitude de Philadelphie à l'Ouest du méridien de Paris devient de $5^h. 9'. 46''$, qui diffère en moins de 8 secondes de celle qu'a trouvée M. Maskelyne & qui tient un milieu entre celles que le grand Euler a déduites des deux contacts extérieur & intérieur de la planète Venus dans son passage par le disque du Soleil observés à Philadelphie en 1769.

VII.

Observationes meteorologicae anno 1768 et 1769 a Iohanne Islenief in Iakutsk institutae, quarum potiora momenta recensuit.

Auctor *Steph. Rumovsky*, pag. 474.

M.

M. Islenief a été un des Aſtronomes que l'Académie avoit envoyés en divers endroits de la Ruſſie pour y obſerver le paſſage de Venus par le disque du Soleil: deſtiné pour Jakoutzc il y arriva en 1768. Le journal de ſes obſervations météorologiques qu'il y a continué ſans interruption jusqu'à ſon départ, commence le 24 Juin 1768 & finit au 6 Août de l'année ſuivante d'après le nouveau ſtile. Elles ont été annotées quatre fois par jour 1.) à 8 heures du matin, 2.) à 12 heures midi, 3.) à 4 heures après midi & 4.) tantôt après le coucher du Soleil tantôt à 8 heures du ſoir. M. Islenief avoit deux thermomètres gradués d'après Déliſle & Réaumur, & un Baromètre dont l'echelle étoit diviſée en pouces & lignes de France, & dont les hauteurs ſont réduites dans cet extrait en centiemes parties de pouce.

La plus grande hauteur du Baromètre a été obſervée de 28.07 pouces, le 27 Janvier 1769, après midi, & ſa plus petite hauteur de 26,17 pouces le 22 Juillet 1768.

Le Mercure s'eſt trouvé gélé dans le tube du Thermomètre, en 11 jours au Décembre 1768 & en 10 jours au Janvier 1769. Il y avoit donc 21 jours, où le froid a ſurpaſſé 210 dégrés:

enſuite 51 jours où il a été plus grand que		200
80	- - - - - - - - -	190
115	- - - - - - - - -	180
142	- - - - - - - - -	170
164	- - - - - - - - -	160
& 193	- - - - - - - - -	150 degrés.

Iii 2 Mais

Mais il y a eu aussi 37 jours où la chaleur a surpassé 120 degrés, ensuite

95 jours où elle a été plus grande que 130
119 - - - - - - - - - - 140 &
162 - - - - - - - - - - 150 degrés.

VIII.

Extrait des observations météorologiques faites à St. Pétersbourg. Année 1792, d'après le nouveau Stile.

Par M. *Euler*, pag. 486.

IX.

Extrait des observations météorologiques faites à Moscou. Année 1792, d'après le nouveau Stile.

Par M. *Stritter*, pag. 507.

En comparant les résultats de ces deux extraits, on trouve :

1.) Que la plus grande hauteur du Baromètre, ainsi que sa plus petite hauteur ont été observées presque au même temps, à Moscou aussi bien qu'à St. Pétersbourg: que la plus grande hauteur a été de $\frac{99}{100}$ pouces & la plus petite de $\frac{44}{100}$ p. plus petite à Moscou qu'à St. Pétersbourg. La différence entre les deux moyennes hauteurs est de $\frac{70}{100}$ pouces.

2.)

2.) Le plus grand froid a été à Moscou de 10 degrés de Délisle plus fort qu'à St. Pétersbourg: à l'un & à l'autre endroit ce plus grand froid a été observé en Janvier.

3.) La plus forte chaleur en Juillet a été à Moscou de 3 degrés plus grande qu'à St. Pétersbourg.

4.) Le froid moyen a été à Moscou d'un degré plus petit, & la chaleur moyenne de près de 4 degrés plus grande, qu'à St. Pétersbourg.

5.) L'Intervalle entre la derniere gelée au printemps & la premiere en automne a été à Moscou de 32 jours plus court qu'à St. Pétersbourg. On ne peut donc pas dire que la durée de l'eté ait été plus longue à Moscou qu'à St. Pétersbourg, ni qu'il y a fait moins froid: mais toujours la chaleur y a été plus efficace.

6.) Les vents sont à Moscou plus violans qu'à St. Pétersbourg, où le nombre des jours calmes & des vents médiocres surpasse de 145 celui, qu'on a observé Moscou.

7.) Le nombre des jours entierement sereins a été de 45 plus petit à Moscou, & celui des jours entierement couverts de 127 plus grand, qu'à St. Pétersbourg, Enfin

8.) La pluïe aussi bien que la neige a été plus abondante à Moscou qu'à St. Pétersbourg. Ce qui ne don-

donne pas une idée fort avantageuse du clima de l'ancienne capitale, quoique par rapport à la fertilité & la végétation, elle soit plus abondante & riche en plusieurs productions, & qu'elle produit même des fruits qu'on cultiveroit en vain à St. Pétersbourg.

Errata.

In Tom. IX. Nov. Actorum.

Supplement: pag. 41. lin. 5 & 13 loco *diamètre* lege demidiamètre.

In Tom. X. Nov. Actorum.

Supplement: pag. 137. lin. ante pen. & vltima loco 𝔑 α lege τȣ̃ α.

pag. 139. lin. 3 loco 𝔑 k lege τȣ̃ k.

pag. 151. lin. 4 loco 𝔑 B lege τȣ̃ B.

Acta: pag. 103. lin. 7. loco 14 Aug. lege 14 April.

pag. 466. lin. 22. loco $2^h. 43'. 18''$, lege $2^h. 43'. 28''$.

MATHE-

MATHEMATICA.

ET

PHYSICO-MATHEMATICA.

VLTERIOR DISQVISITIO
DE
FORMVLIS INTEGRALIBVS IMAGINARIIS.

Auctore
L. EVLERO

Conuentui exhib. die 21 Mart. 1777.

§. 1.

Vniuersa Theoria Imaginariorum, vnde tot egregia incrementa nunc quidem in Analysin sunt illata, hoc potissimum nititur fundamento: quod si Z fuerit functio quaecunque ipsius z, eaque posito $z = x + y\sqrt{-1}$ abeat in hanc formam: $M + N\sqrt{-1}$, tum eadem functio Z, posito $z = x - y\sqrt{-1}$, euadat $= M - N\sqrt{-1}$; vbi quidem litterae M & N semper denotant quantitates reales. Hinc si proponatur ista formula differentialis: $Z\,\partial z$, cuius integrale sit $\int Z\,\partial z = V$, in eaque ponatur $z = x + y\sqrt{-1}$, vnde prodeat $Z = M + N\sqrt{-1}$, ipsum integrale erit huius formae: $V = P + Q\sqrt{-1}$. Cum enim sit

$$\partial V = Z\partial z = M\partial x - N\partial y + (N\partial x + M\partial y)\sqrt{-1},$$

 inte-

integrale erit

$$\int(M\partial x-N\partial y)+\sqrt{-1}\int(N\partial x+M\partial y)=P+Q\sqrt{-1}.$$

Necesse igitur est, vt posito $z=x-y\sqrt{-1}$ fiat

$$P-Q\sqrt{-1}=\int(M\partial x-N\partial y)-\sqrt{-1}\int(N\partial x+M\partial y).$$

Hinc autem manifestum est fore

$$P=\int(M\partial x-N\partial y) \text{ et } Q=\int(N\partial x+M\partial y).$$

Ex quo intelligitur, in huiusmodi substitutionibus semper partes reales et imaginarias seorsim inter se aequari debere.

§. 2. Haec euolutio nobis iam suppeditat insignes proprietates, quae inter quantitates M, N, P et Q intercedunt. Primo enim cum sit $P=\int(M\partial x-N\partial y)$, quoniam haec formula semper integrationem admittit, erit per criterium huiusmodi formularum generale $(\frac{\partial M}{\partial y})=-(\frac{\partial N}{\partial x})$. Eodem autem modo, quia habemus $Q=\int(N\partial x+M\partial y)$, ob integrabilitatem huius formulae erit $(\frac{\partial M}{\partial x})=(\frac{\partial N}{\partial y})$. Ecce ergo per talem substitutionem semper inueniuntur eiusmodi duae functionos M et N binarum variabilium x et y, his insignibus proprietatibus praeditae, vt sit tam $(\frac{\partial M}{\partial y})=-(\frac{\partial N}{\partial x})$ quam $(\frac{\partial M}{\partial x})=(\frac{\partial N}{\partial y})$.

§. 3. Similis proprietas etiam conuenit quantitatibus P et Q. Cum enim sit $\partial P=M\partial x-N\partial y$ et $\partial Q=M\partial y+N\partial x$, erit per similes characteres

$$(\frac{\partial P}{\partial x})=M \text{ et } (\frac{\partial P}{\partial y})=-N,$$

$$(\frac{\partial Q}{\partial x})=N \text{ et } (\frac{\partial Q}{\partial y})=M,$$

vnde

vnde manifestum est fore

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) \text{ et } \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Tales autem relationes eo magis sunt notatu dignae, quod earum ratio minus perspicitur, simulac pro Z functiones aliquanto magis complicatae accipiuntur.

§. 4. Non ita pridem contemplatus sum, secundum haec principia, formulam integralem $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1 \pm z^n}$, vnde plures huiusmodi relationes non contemnendas sum adeptus. Deinde etiam hanc speculationem extendi ad formulam $\int \frac{\partial z}{\sqrt[n]{(1+z^n)}}$, cuius integrale cum semper per logarithmos et arcus circulares exprimere liceat, inde etiam pro litteris P et Q eiusmodi formulae prodire debent, quae similem integrationem admittant, etiamsi vix vlla via pateat istam integrationem exsequendi. Hocque modo deductus sum ad Theorema quoddam maxime memorabile, cuius demonstratio propemodum vires Analyseos superare videbatur; interim tamen deinceps eius demonstrationem elicui; quam ob rem constitui istud argumentum aliquanto generalius retractare.

§. 5. Considerabo igitur hic istam formulam integralem multo latius patentem: $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{(a+bz^n)^\lambda} = V$, vbi, vt calculus commodius succedat, loco z substituo istam formulam imaginariam: $z = v(\operatorname{cos.} \theta + \sqrt{-1} \operatorname{sin.} \theta)$, quippe quae omnia Imaginaria in se complectitur; tum vero hic angulum θ pro constante sum habiturus, ita vt sola v nobis sit variabilis, vnde ergo ſtatim fit $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{v}$. Cum igitur ſit

$$z^m = v^m (\text{coſ.}\, m\,\theta + \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\, m\,\theta)$$

numerator huius formulae ſtatim fit

$$z^{m-1}\,\partial z = v^{m-1}(\text{coſ.}\, m\,\theta + \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\, m\,\theta)\,\partial v.$$

Ex hac autem ſubſtitutione ſumamus prodire iſtum valorem integralem: $V = P + Q\sqrt{-1}$.

§. 6. Pro denominatore autem obtinebimus

$$a + b\,z^n = a + b\,v^n (\text{coſ.}\, n\,\theta + \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\, n\,\theta)$$

cuius ergo pars realis eſt $a + b\,v^n\,\text{coſ.}\, n\,\theta$, pars imaginaria vero $b\,v^n \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\, n\,\theta$; vnde ſi exponens eſſet numerus integer, imaginaria facile ex denominatore in numeratorem transferri poſſent, dum ſcilicet ſupra et infra multiplicaremus per

$$[a + b\,v^n (\text{coſ.}\, n\,\theta - \sqrt{-1}\ \text{ſin.}\, n\,\theta)]^\lambda.$$

Verum quia hi caſus nulla laborant difficultate, calculum potiſſimum ad exponentes fractos pro λ accipiendos accommodari conuenit.

§. 7. Hunc in finem loco variabilis v aliam in calculum introducamus s, cum certo angulo Φ, ita vt ſit

$$a + b\,v^n\,\text{coſ.}\, n\,\theta = s\,\text{coſ.}\,\Phi \ \text{ et}$$

$$b\,v^n\,\text{ſin.}\, n\,\theta = s\,\text{ſin.}\,\Phi$$

vnde ergo certa relatio inter hanc nouam variabilem s et angulum Φ definitur, ita vt vel ſola littera s vel ſolus angulus Φ in calculum introduci queat. Euidens autem eſt, has duas quantitates per variabilem v ita definiri, vt ſit

1°.

$$\text{I}^o.\ ss = aa + 2abv^n \operatorname{cof.} n\theta + bbv^{2n},$$

$$\text{II}^o.\ \operatorname{tang.} \Phi = \frac{bv^n \operatorname{fin.} n\theta}{a + bv^n \operatorname{cof.} n\theta}.$$

§. 8. Hic autem ftatim intelligitur, ipfam quantitatem s loco ipfius v non commode in calculum introduci poffe, quandoquidem angulum Φ, cuius varia multipla occurrunt, nullo modo ex calculo eliminare liceret, vel faltem formulae inextricabiles in calculum implicarentur. Quamobrem conueniet totum calculum ad folam variabilem Φ reuocare, ita vt nobis incumbat, ambas quantitates v et s per iftam nouam variabilem Φ determinare.

§. 9. Ante autem quam hoc exfequamur, obferuemus, denominatorem noftrae formulae per binas variabiles affumtas s & Φ ita concinne expreffum iri, vt fiat

$$a + bz^n = s(\operatorname{cof.} \Phi + \surd - 1 \operatorname{fin.} \Phi)$$

hincque totus denominator

$$(a + bz^n)^\lambda = s^\lambda (\operatorname{cof.} \lambda\Phi + \surd - 1 \operatorname{fin.} \lambda\Phi).$$

Quodfi igitur fupra et infra per $\operatorname{cof.} \lambda\Phi - \surd - 1 \operatorname{fin.} \lambda\Phi$ multiplicemus, formula noftra propofita, retento adhuc numeratore, fequentem accipiet formam:

$$\int \frac{v^{m-1}\partial v(\operatorname{cof.} m\theta + \surd - 1 \operatorname{fin.} m\theta)(\operatorname{cof.} \lambda\Phi - \surd - 1 \operatorname{fin.} \lambda\Phi)}{s^\lambda} = \mathrm{V}$$

quae contrahitur in hanc formam fatis fimplicem:

$$\int \frac{v^{m-1}\partial v}{s^\lambda}[\operatorname{cof.}(m\theta - \lambda\Phi) + \surd - 1 \operatorname{fin.}(m\theta - \lambda\Phi)],$$

cuius valor cum pofitus fit $= \mathrm{P} + \mathrm{Q}\surd - 1$, realia ab

ima-

imaginariis feparando erit

$$P = \int \frac{v^{m-1}\,\partial v \operatorname{cof.}(m\theta - \lambda\Phi)}{s^\lambda} \text{ et}$$

$$Q = \int \frac{v^{m-1}\,\partial v \operatorname{fin.}(m\theta - \lambda\Phi)}{s^\lambda}.$$

§. 10. Vt nunc hinc binas litteras v et s abigamus, recurramus ad binas pofitiones ante ftabilitas:

I. $a + b v^n \operatorname{cof.} n\theta = s \operatorname{cof.} \Phi$,

II. $b v^n \operatorname{fin.} n\theta = s \operatorname{fin.} \Phi$.

Hic primo quantitas s eliminabitur per hanc combinationem: I. fin. Φ — II. cof. Φ, vnde fit $a \operatorname{fin.}\Phi = b v^n \operatorname{fin.}(n\theta - \Phi)$, ideoque $v^n = \frac{a \operatorname{fin.}\Phi}{b \operatorname{fin.}(n\theta - \Phi)}$ ficque iam valorem litterae v per angulum Φ fumus adepti. Porro vero haec combinatio I. fin. $n\theta$ — II. cof. $n\theta$ praebet $a \operatorname{fin.} n\theta = s \operatorname{fin.}(n\theta - \Phi)$, vnde fit $s = \frac{a \operatorname{fin.} n\theta}{\operatorname{fin.}(n\theta - \Phi)}$, ex quo valore nancifcimur

$$P = \frac{1}{a^\lambda \operatorname{fin.} n\theta^\lambda} \int v^{m-1}\,\partial v \operatorname{fin.}(n\theta - \Phi)^\lambda \operatorname{cof.}(m\theta - \lambda\Phi) \text{ et}$$

$$Q = \frac{1}{a^\lambda \operatorname{fin.} n\theta^\lambda} \int v^{m-1}\,\partial v \operatorname{fin.}(n\theta - \Phi)^\lambda \operatorname{fin.}(m\theta - \lambda\Phi).$$

§. 11. Quoniam porro inuenimus $v^n = \frac{a \operatorname{fin.}\Phi}{b \operatorname{fin.}(n\theta - \Phi)}$, fumtis logarithmis habebimus

$$n\,l\,v = l\,a \operatorname{fin.}\Phi - l\,b \operatorname{fin.}(n\theta - \Phi)$$

hincque differentiando

$$\frac{n\,\partial v}{v} = \frac{\partial\Phi \operatorname{cof.}\Phi}{\operatorname{fin.}\Phi} + \frac{\partial\Phi \operatorname{cof.}(n\theta - \Phi)}{\operatorname{fin.}(n\theta - \Phi)} = \frac{\partial\Phi \operatorname{fin.} n\theta}{\operatorname{fin.}\Phi \operatorname{fin.}(n\theta - \Phi)}.$$

Deinde

Deinde vero erit $v^m = \left(\frac{a \sin. \Phi}{b \sin. (n\theta - \Phi)}\right)^{\frac{m}{n}}$. His igitur valoribus substitutis ad sequentes formulas integrales deducemur:

$$P = \frac{1}{n a^\lambda \sin. n\theta^{\lambda - 1}} \int \left(\frac{a \sin. \Phi}{b \sin. (n\theta - \Phi)}\right)^{\frac{m}{n}} \frac{\partial \Phi \sin. (n\theta - \Phi)^\lambda \cos. (m\theta - \lambda\Phi)}{\sin. \Phi \sin. (n\theta - \Phi)}$$

$$Q = \frac{1}{n a^\lambda \sin. n\theta^{\lambda - 1}} \int \left(\frac{a \sin. \Phi}{b \sin. (n\theta - \Phi)}\right)^{\frac{m}{n}} \frac{\partial \Phi \sin. (n\theta - \Phi)^\lambda \sin. (m\theta - \lambda\Phi)}{\sin. \Phi \sin. (n\theta - \Phi)}$$

Quod si iam breuitatis gratia ponamus $n\theta - \Phi = \psi$, vt sit $\Phi + \psi = n\theta$, ideoque $\partial \Phi + \partial \psi = 0$, ambae formulae concinnius sequenti modo repraesentari poterunt:

$$P = \frac{a^{\frac{m}{n} - \lambda}}{n b^{\frac{m}{n}} \sin. n\theta^{\lambda - 1}} \int \partial \Phi \sin. \Phi^{\frac{m - n}{n}} \sin. \psi^{\lambda - \frac{m}{n} - 1} \cos. (m\theta - \lambda\Phi),$$

$$Q = \frac{a^{\frac{m}{n} - \lambda}}{n b^{\frac{m}{n}} \sin. n\theta^{\lambda - 1}} \int \partial \Phi \sin. \Phi^{\frac{m - n}{n}} \sin. \psi^{\lambda - \frac{m}{n} - 1} \sin. (m\theta - \lambda\Phi),$$

§. 12. En ergo deducti sumus ad binas formulas integrales, quarum integratio, quantumuis, ob exponentem fractum $\frac{m}{n}$, videatur difficilis, tamen semper pendet a formula principali proposita $\int \frac{z^{m-1} \partial z}{(a \pm b z^n)^\lambda}$, cuius ergo integrale, si vel algebraice, vel saltem per logarithmos et arcus circulares assignari queat, etiam certo affirmare poterimus, ambas formulas hic inuentas secundum eandem legem integrari posse. Hic quidem primo se offert casus $m = n$, quo

quo adeo integrale algebraice exhiberi poteſt; verum quia hoc caſu $\frac{m}{n}$ non amplius eſt fractio, eum praetereamus.

§. 13. Imprimis autem hic occurrit caſus maxime memorabilis, quo $\lambda = \frac{m}{n}$, quippe quo integrationem per logarithmos & arcus circulares expedire licet. Si enim pro noſtra formula integrali $\int \frac{\partial z}{z} \cdot \frac{z^m}{(a + b z^n)^{\frac{m}{n}}}$ ſtatuamus

$\frac{z}{(a + b z^n)^{\frac{1}{n}}} = t$, vt formula integranda ſit $\int t^m \frac{\partial z}{z}$, erit

$t^n = \frac{z^n}{a + b z^n}$, vnde colligitur $z^n = \frac{a t^n}{b t^n - 1}$, hincque differentiando ſumtis logarithmis, erit

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial t}{t} - \frac{b t^{n-1} \partial t}{b t^n - 1} = \frac{-\partial t}{t (b t^n - 1)},$$

ita vt formula noſtra integranda ſit $-\int \frac{t^{m-1} \partial t}{b t^n - 1}$, quae cum ſit rationalis, ſemper per logarithmos & arcus circulares integrari poteſt, quod ergo etiam de binis noſtris formulis P et Q erit tenendum.

§. 14. Statuamus igitur in noſtris formulis ſupra inuentis $\lambda = \frac{m}{n}$, eaeque transmutabuntur in ſequentes:

$$P = \frac{1}{n b^{\frac{m}{n}} \text{ſin. } n \theta^{\lambda - 1}} \cdot \int \frac{\partial \Phi \text{ ſin. } \Phi^{\frac{m}{n} - 1} \text{ coſ. } (m \theta - \frac{m}{n} \Phi)}{\text{ſin. } \psi},$$

Q =

$$Q = \frac{1}{n\, b^{\frac{m}{n}}\, \text{fin.}\, n\, \theta^{\lambda-1}} \cdot \int \frac{\partial \Phi\, \text{fin.}\, \Phi^{\frac{m}{n}-1}\, \text{fin.}\, (m\,\theta - \frac{m}{n}\Phi)}{\text{fin.}\, \psi},$$

vbi breuitatis gratia loco coëfficientis conſtantis ſcribatur C, et cum ex indole formulae propoſitae ſemper ſit $m < n$, has formulas ita ſuccinctius exhibere licet:

$$P = C \int \frac{\partial \Phi\, \text{cof.}\, (m\,\theta - \frac{m}{n}\Phi)}{\text{fin.}\, \psi\, \text{fin.}\, \Phi^{\frac{n-m}{n}}} \text{ et}$$

$$Q = C \int \frac{\partial \Phi\, \text{fin.}\, (m\,\theta - \frac{m}{n}\Phi)}{\text{fin.}\, \psi\, \text{fin.}\, \Phi^{\frac{n-m}{n}}},$$

quae ergo formulae, quicunque numeri pro m et n accipiantur, ſemper a logarithmis et arcubus circularibus pendere ſunt cenſendae.

§. 15. Quodſi binae formulae $\text{cof.}\, (m\,\theta - \frac{m}{n}\Phi)$ et $\text{fin.}\, (m\,\theta - \frac{m}{n}\Phi)$, euoluantur, ambae formulae integrales inuentae commode in vnam contrahi poterunt, quae hanc habebit formam:

$$C \int \partial \Phi \frac{\alpha\, \text{fin.}\, \frac{m}{n}\Phi + \beta\, \text{cof.}\, \frac{m}{n}\Phi}{\text{fin.}\, \psi\, \text{fin.}\, \Phi^{\frac{n-m}{n}}},$$

quae praefata lege integrationem admittet, quicunque valores litteris α et β tribuantur. Deinde quia $\psi = n\,\theta - \Phi$, facta euolutione loco fin. ψ, eiusue multipli cuiusque, ſcribi poterit $\gamma\, \text{fin.}\, \Phi + \delta\, \text{cof.}\, \Phi$, ficque nunc formula noſtra erit

$$\int \frac{\partial \Phi}{\text{fin.}\, \Phi^{\frac{n-m}{n}}} \cdot \frac{\alpha\, \text{fin.}\, \frac{m}{n}\Phi + \beta\, \text{cof.}\, \frac{m}{n}\Phi}{\gamma\, \text{fin.}\, \Phi + \delta\, \text{cof.}\, \Phi},$$

vbi littcrae α, β, γ, δ pro lubitu accipi poſſunt; quamobrem ſi ad fractiones tollendas ſtatuamus $\Phi = n\,\omega$, vt ſit $\frac{m}{n}\Phi = m\,\omega$, ad ſequens perducimur theorema notatu digniſſimum.

Theorema.

Si litterae m *et* n *denotent numeros integros quoscunque, integratio huius formulae:*

$$\int \frac{\partial\,\omega}{(\text{ſin.}\, n\,\omega)^{\frac{n-m}{n}}} \cdot \frac{\alpha\,\text{ſin.}\, m\,\omega + \beta\,\text{coſ.}\, m\,\omega}{\gamma\,\text{ſin.}\, n\,\omega + \delta\,\text{coſ.}\, n\,\omega},$$

ſemper ad logarithmos et arcus circulares reduci poteſt, quicunque etiam valores litteris α, β, γ, δ *tribuantur.*

§. 16. Quam ardua huius Theorematis demonſtratio ſit, clarius intelligemus, ſi hanc formulam ab angulis ad quantitates ordinarias revocemus. Ponamus igitur tang. $\omega = t$, erit $\partial\,\omega = \frac{\partial\,t}{1+t\,t}$; deinde ſi brev. gr. vncias poteſtatum binomii hoc modo deſignemus, vt ſit

$$(1+x)^\lambda = 1 + (\tfrac{\lambda}{1})\,x + (\tfrac{\lambda}{2})\,x^2 + (\tfrac{\lambda}{3})\,x^3 + \text{etc.}$$

ſinus et coſinus angulorum multiplorum ipſius ω ſequenti modo per t exprimentur:

$$\text{ſin.}\, m\,\omega = \frac{(\frac{m}{1})\,t - (\frac{m}{3})\,t^3 + (\frac{m}{5})\,t^5 - (\frac{m}{7})\,t^7 + \text{etc.}}{(1+t\,t)^{\frac{m}{2}}}$$

$$\text{coſ.}\, m\,\omega = \frac{1 - (\frac{m}{2})\,t^2 + (\frac{m}{4})\,t^4 - (\frac{m}{6})\,t^6 + \text{etc.}}{(1+t\,t)^{\frac{m}{2}}}$$

Ponamus autem porro breuitatis ergo

$$(\tfrac{m}{1})\,t - (\tfrac{m}{3})\,t^3 + (\tfrac{m}{5})\,t^5 - \text{etc.} = \mathrm{M}$$
$$1 - (\tfrac{m}{2})\,t^2 + (\tfrac{m}{4})\,t^4 - \text{etc.} = \mathfrak{M}$$

ſimili

ſimilique modo etiam ponamus:

$$\left(\tfrac{n}{1}\right) t - \left(\tfrac{n}{3}\right) t^3 + \left(\tfrac{n}{5}\right) t^5 - \text{etc.} = \mathrm{N}$$
$$1 - \left(\tfrac{n}{2}\right) t^2 + \left(\tfrac{n}{4}\right) t^4 - \text{etc.} = \mathfrak{N}$$

vt habeamus

$$\text{ſin.}\, m\,\omega = \frac{\mathrm{M}}{(1+tt)^{\frac{m}{2}}}, \quad \text{coſ.}\, m\,\omega = \frac{\mathfrak{M}}{(1+tt)^{\frac{m}{2}}},$$
$$\text{ſin.}\, n\,\omega = \frac{\mathrm{N}}{(1+tt)^{\frac{n}{2}}}, \quad \text{coſ.}\, n\,\omega = \frac{\mathfrak{N}}{(1+tt)^{\frac{m}{2}}},$$

quibus valoribus ſubſtitutis formula noſtra integralis ſequentem induet formam:

$$\int \frac{(1+tt)^{n-m-1}\,\partial t\,(\alpha\,\mathrm{M} + \beta\,\mathfrak{M})}{\mathrm{N}^{\frac{n-m}{n}}\,(\gamma\,\mathrm{N} + \delta\,\mathfrak{N})}.$$

Vbi omnia quidem ſunt rationalia, praeter formulam $\mathrm{N}^{\frac{m}{n}}$, quae autem, quia abit in $\left[\left(\tfrac{n}{1}\right) t - \left(\tfrac{n}{3}\right) t^3 + \left(\tfrac{n}{5}\right) t^5 - \text{etc.}\right]^{\frac{m}{n}}$, ſtatim atque n binarium ſuperat, tantopere ſit irrationalis, vt nulla plane via pateat irrationalitatem tollendi, ſi tantum fuerit $n = 3$; multo minus, ſi exponens n magis increſcat, vllo modo reductionem ad rationalitatem ſperare licebit. Interim tamen ſequentem demonſtrationem mihi eruere contigit.

Demonſtratio ſuperioris Theorematis.

§. 17. Ante omnia hic in ſubſidium vocari convenit formulas illas imaginarias, quibus iam ſaepius cum egregio ſucceſſu ſum vſus, quibus pono

$$\text{cos.}\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\omega = p \text{ et } \text{cos.}\,\omega - \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\omega = q,$$

eritque $p\,q = 1$ et $\frac{\partial p}{p} = \partial\,\omega\,\sqrt{-1}$. Deinde vero hinc pro finibus et cofinibus angulorum multiplorum habebimus:

$$\text{fin.}\,m\,\omega = \frac{p^m - q^m}{2\sqrt{-1}} = \frac{p^{2m} - 1}{2\,p^m\sqrt{-1}} \text{ et}$$

$$\text{cof.}\,m\,\omega = \frac{p^m + q^m}{2} = \frac{p^{2m} + 1}{2\,p^m},$$

fimilique modo

$$\text{fin.}\,n\,\omega = \frac{p^{2n} - 1}{2\,p^n\sqrt{-1}} \text{ et } \text{cof.}\,n\,\omega = \frac{p^{2n} + 1}{2\,p^n}.$$

§. 18. Quo fubftitutio horum valorum magis fublevetur, obferuaffe juuabit, coëfficientes conftantes nihil ad integrabilitatem conferre, ideoque vel omitti, vel fub alia forma referri poffe. Hanc ob rem ftatuemus

$$\partial\,\omega = \frac{\partial p}{p} \text{ et } \text{fin.}\,n\,\omega = \frac{p^{2n} - 1}{p^n};$$

deinde vero, mutata conftantium forma, poni poterit

$$\alpha\,\text{fin.}\,m\,\omega + \beta\,\text{cof.}\,m\,\omega = \frac{\alpha'\,p^{2m} + \beta'}{p^m},$$

eodemque modo

$$\gamma\,\text{fin.}\,n\,\omega + \delta\,\text{cof.}\,n\,\omega = \frac{\gamma'\,p^{2n} + \delta'}{p^n}.$$

His igitur valoribus fubftitutis formula noftra hanc induet formam:

$$\int \frac{p^{2n-2m-1}\partial p}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}} \cdot \frac{\alpha' p^{2m}+\beta'}{\gamma' p^{2n}+\delta'}.$$

§. 19. Haec iam formula vltro se scindit in duas partes, quas ita seorsim repraesentemus:

$$\alpha \int \frac{p^{2n-1}\partial p}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}(\gamma' p^{2n}+\delta')} + \beta' \int \frac{p^{2n-2m-1}\partial p}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}(\gamma' p^{2n}+\delta')}$$

et nunc non amplius difficile erit, vtramque harum formularum seorsim ad rationalitatem reducere. In priore enim tantum opus est statuere $p^{2n}-1=x^{2n}$; tum enim erit $p^{2n-1}\partial p = x^{2n-1}\partial x$ et $(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}} = x^{2n-2m}$, sicque formula prior accipiet hanc formam: $\alpha \int \frac{x^{2m-1}\partial x}{\gamma' x^{2n}+\gamma'+\delta'}$, cuius ergo integrale per logarithmos et arcus circulares exhibere licet.

§. 20. Quod vero ad alteram formulam attinet reductio etiam se facile offeret, si ipsa formula hoc modo repraesentetur:

$$\beta' \int \frac{\partial p}{p} \cdot \frac{p^{2n-2m}}{(p^{2n}-1)^{\frac{n-m}{n}}(\gamma' p^{2n}+\delta')}, \text{ siue}$$

$$\beta' \int \frac{\partial p}{p} \left(\frac{p^{2}}{(p^{2n}-1)^{\frac{1}{n}}}\right)^{n-m} \cdot \frac{1}{\gamma' p^{2n}+\delta'}.$$

Si enim hic ponatur $\frac{p^2}{(p^{2n}-1)^{\frac{1}{n}}} = y^2$, fiet $\frac{p^{2n}}{p^{2n}-1} = y^{2n}$,

hinc-

hincque $p^{2n} = \frac{y^{2n}}{y^{2n} - 1}$, vnde fumtis logarithmis et differentiando prodit $\frac{\partial p}{p} = \frac{-\partial y}{y(y^{2n} - 1)}$, quibus valoribus fubftitutis ifta formula euadet

$$-\beta' \int \frac{y^{2n-2m-1} \partial y}{(\gamma' + \delta') y^{2n} - \delta'},$$

quae ergo pariter eft rationalis.

§. 21. Hoc igitur modo veritas noftri theorematis fatis firmiter eft demonftrata, atque ifte cafus ita eft comparatus, vt tota formula ope vnius fubftitutionis nullo modo rationalis reddi queat, quae circumftantia eo magis eft notatu digna, quod vulgo ftatui folet, omnes formulas differentiales, quantumuis fuerint irrationales, fi earum integralia per logarithmos et arcus circulares exhiberi poffunt, eas femper ope certae fubftitutionis ad rationalitatem perduci poffe. Nunc igitur videmus hoc effatum ita reftringi debere, vt tantum ad fingulas partes totius formulae propofitae extendatur, quandoquidem fieri poteft, vt quaelibet pars peculiarem fubftitutionem poftulet.

§. 22. Quod fi hanc demonftrationem attentius perpendamus, facile videre licebit, eam ad formulas multo latius patentes extendi poffe. Apparebit enim fequentem formulam multo generaliorem femper ad rationalitatem perduci poffe, id quod in fequente theoremate clarius explicemus.

Theo-

Theorema maxime generale.

§. 23. *Si litterae P et Q denotent functiones quascunque rationales formae x^n, istius formulae:*

$$\int \frac{\partial x (P x^{m-1} + Q x^{n-1})}{(a + b x^n)^{\frac{m}{n}}},$$

integrale semper per logarithmos et arcus circulares exprimetur.

Demonstratio.

Secetur, vt supra fecimus, ista formula etiam in duas partes, quae sint

$$\int \frac{P x^{m-1} \partial x}{(a + b x^n)^{\frac{m}{n}}} \text{ et } \int \frac{Q x^{n-1} \partial x}{(a + b x^n)^{\frac{m}{n}}},$$

atque statim patet posteriorem partem rationalem reddi, ponendo $a + b x^n = r^n$; tum enim erit $(a + b x^n)^{\frac{m}{n}} = r^m$, tum vero $x^n = \frac{r^n - a}{b}$ et $x^{n-1} \partial x = \frac{r^{n-1} \partial r}{b}$. Quia nunc Q est functio rationalis ipsius x^n, facta hac substitutione prodibit certe functio rationalis ipsius r^n, sicque pars posterior accipiet hanc formam: $\frac{1}{b} \int Q r^{n-m-1} \partial r$.

Quo prior pars ad rationalitatem reuocetur, statuatur $\frac{x}{(a + b x^n)^n} = s$, vt fiat $\frac{x^m}{(a + b x^n)^{\frac{m}{n}}} = s^m$, tum vero erit $x^n = \frac{a s^n}{1 - b s^n}$, qui ergo valor si in P loco x^n subſtituatur, manifeſto dabit functionem rationalem ipſius s^n; deinde vero hinc fit $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial s}{s(1 - b s^n)}$, ex quibus valoribus oritur pars noſtra prior $= \int \frac{P s^{m-1} \partial s}{1 - b s^m}$, quae ergo formula etiam eſt rationalis.

Quin etiam in angulis Theorema multo generalius proponi poteſt, quod ita ſe habebit:

Theorema generale.

§. 24. *Si litterae P et Q denotent functiones quascunque rationales binarum formularum ſin. 2 n ω et coſ. 2 n ω, ſequens formula integralis ſemper per logarithmos et arcus circulares expediri poterit:*

$$\int (P \text{ ſin. } m\,\omega + Q \text{ coſ. } m\,\omega)\, \partial \,.\, (\text{ſin. } n\,\omega)^{\frac{m}{n}},$$

vbi notetur eſſe

$$\partial\, (\text{ſin. } n\,\omega)^{\frac{m}{n}} = \frac{m\, \partial\,\omega \text{ coſ. } n\,\omega}{(\text{ſin. } n\,\omega)^{\frac{n-m}{n}}};$$

cuius demonſtratio ſimili modo ſuccedet vt ſupra, dum pariter ad binas partes peruenietur, quarum vtramque certa ſubſtitutione rationalem reddere licebit.

§. 25. Pluribus fortaſſe diſplicebit, quod reſolutio poſtremae formulae per ſubſtitutiones imaginarias peragatur, cum tamen hic nobis ſit propoſitum imaginaria a realibus ſeparare; plurimum igitur optandum eſſet vt hoc negotium um ſine imaginariis abſolui poſſet; verum equidem fateri cogor, me neutiquam perſpicere, quomodo hoc praeſtari queat. Ceterum quia reductio Imaginariorum ad realia iam ſatis eſt exculta, tale remedium non adeo deſiderandum videtur. Quin potius hic nouus ſe prodit vſus Imaginariorum in ipſa reſolutione formularum integralium, dum eiusmodi formulae integrabiles exhiberi poſſunt, quarum integralia ſine auxilio Imaginariorum eruere non licet.

INTEGRATIO SVCCINCTA FORMVLAE INTEGRALIS MAXIME MEMORABILIS

$$\int \frac{\partial z}{(3 \pm zz)\sqrt[3]{(1 \pm 3zz)}}.$$

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 28 April. 1777.

§. 1.

Valeant primo ſigna ſuperiora, ſitque

$$\partial V = \frac{\partial z}{(3 + zz)\sqrt[3]{(1 + 3zz)}};$$

ac poſito $\sqrt[3]{(1 + 3zz)} = v$, vt ſit $1 + 3zz = v^3$, erit $z\partial z = \frac{1}{2} vv\partial v$, ideoque $\partial z = \frac{vv\partial v}{2z}$, vnde ſit $\partial V = \frac{v\partial v}{2z(3+zz)}$.

§. 2. Statuatur nunc $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, eritque $p^3 + q^3 = 2$ et $p^3 - q^3 = \frac{6z+2z^3}{v^3}$, vnde ſit $\partial V = \frac{\partial v}{vv(p^3-q^3)}$. Cum porro ſit $p + q = \frac{2}{v}$, erit $\partial p + \partial q = -\frac{2\partial v}{vv}$, ideoque

$$\partial V = -\frac{(\partial p + \partial q)}{2(p^3 - q^3)}.$$

§. 3.

§. 3. Discerpatur iam haec formula in duas partes, ponendo $\frac{\partial p}{p^3-q^3} = \partial P$ et $\frac{\partial q}{p^3-q^3} = \partial Q$, vt sit $\partial V = -\frac{1}{2}\partial P - \frac{1}{2}\partial Q$, et quia $q^3 = 2 - p^3$, erit $\partial P = -\frac{\partial p}{2(1-p^3)}$; tum vero ob $p^3 = 2 - q^3$, erit $\partial Q = +\frac{\partial q}{2(1-q^3)}$, sicque habebimus

$$4\partial V = +\frac{\partial p}{1-p^3} - \frac{\partial q}{1-q^3}.$$

§. 4. Cum nunc constet esse

$$\int\frac{\partial p}{1-p^3} = \frac{1}{3} l \frac{\sqrt{(1+p+pp)}}{1-p} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{p\sqrt{3}}{2+p},$$

ob $1+p+pp = \frac{1-p^3}{1-p} = \frac{1-p^3}{(1-p)^3}$, erit

$$\int\frac{\partial p}{1-p^3} = \frac{1}{6} l \frac{1-p^3}{(1-p)^3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{p\sqrt{3}}{2+p}.$$

§. 5. Cum igitur simili modo sit

$$\int\frac{\partial q}{1-q^3} = \frac{1}{6} l \frac{1-q^3}{(1-q)^3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{q\sqrt{3}}{2+q},$$

erit integrale quaesitum quater sumtum

$$4V = \frac{1}{6} l \frac{1-p^3}{(1-p)^3} - \frac{1}{6} l \frac{1-q^3}{(1-q)^3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{p\sqrt{3}}{2+p} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{q\sqrt{3}}{2+q}.$$

§. 9. Quod si iam logarithmi hoc modo contrahantur, vt fiant $\frac{1}{6} l \frac{1-p^3}{1-q^3} + \frac{1}{6} l \frac{(1-q)^3}{(1-p)^3}$, haec expressio, ob $1-p^3 = -(1-q^3)$, praebet $\frac{1}{6} l - 1 + \frac{1}{2} l \frac{1-q}{1-p}$, vbi pars prior, quia est constans, omitti potest, ita vt logarithmi iunctim sumti faciant $\frac{1}{2} l \frac{1-q}{1-p}$, ideoque habeatur:

$$4V = \frac{1}{2} l \frac{1-q}{1-p} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{p\sqrt{3}}{2+p} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{q\sqrt{3}}{2+q}.$$

Bini autem arcus circulares contrahuntur in vnum

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{(p-q)\sqrt{3}}{2+p+q+2pq},$$

 sic-

ſicque integrale quaeſitum erit

$$V = \frac{1}{8} l \frac{1-q}{1-p} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{(p-q)\sqrt{3}}{2+p+q+2pq}.$$

§. 7. Cum nunc poſuerimus $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, pars logarithmica accipiet hanc formam:

$$\frac{1}{8} l \frac{v-1+z}{v-1-z} = \frac{1}{8} l \frac{1-v-z}{1-v+z}.$$

Pro arcu circulari autem erit $p-q = \frac{2z}{v}$, tum vero ob $p+q = \frac{2}{v}$ et $pq = \frac{1-zz}{vv}$, arcus fiet

$$\frac{1}{4\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{vz\sqrt{3}}{1+v+vv-zz},$$

ſicque adepti ſumus hanc integrationem ſatis concinnam:

$$\int \frac{\partial z}{(3+zz)\sqrt[3]{(1+3zz)}} = \frac{1}{8} l \frac{1-v-z}{1-v+z} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{A tang.} \frac{vz\sqrt{3}}{1+v+vv-zz},$$

exiſtente $v = \sqrt[3]{(1+3zz)}$.

§. 8. Iam pro altero caſu, quo ſigna inferiora valent, ſtatuamus $z = y\sqrt{-1}$, vt ſit $v = \sqrt[3]{(1-3yy)}$, vnde ſit integratio ſuperior

$$\int \frac{\partial y\sqrt{-1}}{(3-yy)\sqrt[3]{(1-3yy)}} = \frac{1}{8} l \frac{1-v-y\sqrt{-1}}{1-v+y\sqrt{-1}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{A tag.} \frac{vy\sqrt{3}\sqrt{-1}}{1+v+vv+yy}$$

vbi tantum opus eſt imaginaria tollere.

§. 9. Hunc in finem, cum ſit in genere

$$\text{A tang.}\, t\sqrt{-1} = \int \frac{\partial t\sqrt{-1}}{1-tt} = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{1+t}{1-t},$$

noſtro caſu, ob $t = \frac{vy\sqrt{3}}{1+v+vv+yy}$, erit pars poſterior formulae

mulae inuentae

$$\frac{\sqrt{-1}}{8\sqrt{3}}\, l\, \frac{1+v+vv+yy+vy\sqrt{3}}{1+v+vv+yy-vy\sqrt{3}}.$$

Pro parte logarithmica in formula canonica ponatur $t = u\sqrt{-1}$, fietque

$$-\text{A tang. } u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}},$$

ideoque

$$l\, \frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\, \text{A tang. } u.$$

Pro noſtro iam caſu eſt $u = -\frac{y}{1-v}$, ideoque

$$l\, \frac{1-v-y\sqrt{-1}}{1-v+y\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\, \text{A tang.} -\frac{y}{1-v};$$

quibus valoribus ſubſtitutis integrale praeſentis formulae imaginariae erit

$$-\frac{\sqrt{-1}}{4}\, \text{A tang. } \frac{y}{1-v} + \frac{\sqrt{-1}}{8\sqrt{3}}\, l\, \frac{1+v+vv+yy+vy\sqrt{3}}{1+v+vv+yy-vy\sqrt{3}}.$$

§. 10. Hic manifeſto omnia per $\sqrt{-1}$ ſunt diuiſibilia, ſicque ſublatis imaginariis nacti ſumus hanc alteram integrationem:

$$\int \frac{\partial y}{(3-yy)\sqrt[3]{(1-3yy)}} = \frac{1}{8\sqrt{3}}\, l\, \frac{1+v+vv+yy+vy\sqrt{3}}{1+v+vv+yy-vy\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\, \text{A tang. } \frac{y}{1-v},$$

vbi notetur, ſi fractionem logarithmo adiunctam ſupra et infra per $1-v$ multiplicemus, ob $1-v^3 = 3yy$, eam fore $\frac{y(4-v)+v(1-v)\sqrt{3}}{y(4-v)-v(1-v)\sqrt{3}}$. Hocque modo noſtra integratio hanc induit formam:

$$\int \frac{\partial y}{(3-yy)\sqrt[3]{(1-3yy)}} = \frac{1}{8\sqrt{3}}\, l\, \frac{y(4-v)+v(1-v)\sqrt{3}}{y(4-v)-v(1-v)\sqrt{3}} - \tfrac{1}{4}\,\text{A tang.}\, \frac{y}{1-v},$$

exiſtente $v = \sqrt[3]{(1-3yy)}$.

Reſolutio magis naturalis formulae differentialis propoſitae.

§. 11. Quanquam ſolutio ſuperior totum negotium pulcherrime conficit, tamen id in ea deſiderari poteſt, quod nulla ratio patet, quae ſubſtitutiones ibi adhibitas ſuadere potuerit; quam ob rem haud ingratum erit aliam ſolutionem ſubiungere, cuius ratio quodammodo clarius perſpici queat.

§. 12. Conſiderantem autem formulam priorem

$$\partial V = \frac{\partial z}{(3+zz)\sqrt[3]{(1+3zz)}}$$

expreſſiones $1+3zz$ et $3z+z^3$ admonere poſſunt, huiusmodi ſubſtitutionem $z = \frac{1+x}{1-x}$ haud ſine ſucceſſu in vſum vocari poſſe, cum altera ſuperiorum expreſſionum ſit ſumma duorum cuborum, altera differentia. Hinc autem fit $\partial z = \frac{2\partial x}{(1-\alpha)^2}$, tum vero

$$3+zz = \frac{4-4x+4xx}{(1-x)^2} = \frac{4(1+x^3)}{(1+x)(1-x)^2}$$

denique erit

$$1+3zz = \frac{4+4x+4xx}{(1-x)^2} = \frac{4(1-x^3)}{(1-x)^3}$$

vnde fit

√

$$\sqrt[3]{(1+3zz)} = \frac{\sqrt[3]{4(1-x^3)}}{1-x}$$

quibus ſubſtitutis prodit

$$\partial V = \frac{1}{2\sqrt[3]{4}} \times \frac{(1-xx)\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}}.$$

§. 13. Hoc modo formula inuenta vltro in duas partes diſcerpitur, atque integratio hoc modo repraeſentari poteſt:

$$2V\sqrt[3]{4} = \int \frac{\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}} - \int \frac{xx\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}},$$

quarum formularum prior ad rationalitatem perduci poteſt, ponendo $\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = t$, ita vt pars prior ſit $\int \frac{t\partial x}{x(1+x^3)}$; tum autem erit $x^3 = t^3 - t^3 x^3$, ideoque $x^3 = \frac{t^3}{1+t^3}$, vnde ſtatim ſit $1 + x^3 = \frac{1+2t^3}{1+t^3}$. Sumtis autem logarithmis differentiando colligitur $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t(1+t^3)}$ ſicque pars iſta prior euadet $\int \frac{\partial t}{1+2t^3}$, cuius integratio eſt in promtu.

§. 14. Partis poſterioris tractatio adhuc magis eſt obuia. Poſito enim $\sqrt[3]{(1-x^3)} = u$, ſit $x^3 = 1 - u^3$, tum vero $xx\partial x = -uu\partial u$ et $1 + x^3 = 2 - u^3$; hoc ergo modo habebitur

$$\int \frac{xx\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}} = -\int \frac{u\partial u}{2-u^3}.$$

Totum igitur integrale quaesitum erit

$$2 V \sqrt[3]{4} = \int \frac{\partial t}{1 + 2 t^3} + \int \frac{u \partial u}{2 - u^3}.$$

§. 15. Hoc igitur modo formulam propositam etiam transformauimus in duas alias formulas mere rationales, quarum ergo integratio per regulas cognitas facile expeditur, vnde idcirco idem integrale resultare debet, quod prior methodus suppeditauit, si modo debitae reductiones rite instituantur. Facile autem patet, priore methodo formulam finalem multo facilius obtineri, quam si has postremas formulas euoluere vellemus, atque ob hanc ipsam causam methodus ante tradita huic palmam praeripere est censenda.

§. 16. Si alteram formulam $\frac{\partial z}{(3 - zz) \sqrt[3]{(1 - 3zz)}}$ simili modo tractare velimus, statui oportebit $z = \frac{1+x}{1-x} \sqrt{-1}$ ita vt ista resolutio non aliter nisi per Imaginaria institui possit, vnde paradoxon iam ante allatum multo magis confirmatur, quo eiusmodi formulas differentiales exhiberi posse affirmaueram, quarum integratio nonnisi per Imaginaria procedendo perfici queat, ex quo summus vsus calculi Imaginariorum in Analysi multo magis perspicitur.

DE

DE CASIBVS QVIBVS HANC FORMVLAM $x^4 + kxxyy + y^4$ AD QVADRATVM REDVCERE LICET.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 28 April. 1777.

§. 1.

Super hac formula primum obferuo, inde omnes cafus excludi debere, quibus numerorum x et y altervter effet $= 0$, quoniam tum haec formula fponte euaderet quadratum, quicunque numeri loco k acciperentur. Secundo porro obferuo, fi fumeretur vel $k = 2$ vel $k = -2$, formulam iam fponte effe quadratum, quicunque numeri pro x et y ftatuerentur. Tertio vero obferuari conuenit, omnia quadrata negatiua loco k affumta nulla difficultate laborare. Si enim ponatur $k = -nn$, formula euadet $x^4 - nnxxyy + y^4$, quae ergo in quadratum abit, fumendo vel $x = ny$, vel $y = nx$, ficque pro littera k vltro fe offerunt cafus $k = \pm 2$ et $k = -nn$; vnde quaeftio in hoc verfatur, vt omnes reliqui valores pro k inueftigentur, quibus reductio formulae propofitae ad quadratum locum habere queat.

§. 2. Cum igitur poſtulentur omnes numeri integri pro k accipiendi, quibus formula reductionem ad quadratum admittit, methodus *Diophantea* varios modos ſuppeditat id praeſtandi. Verum quacunque vtamur methodo, ſemper aliquod dubium relinquitur, an inde omnes plane valores idonei obtineantur; etiamſi facile ſit innumerabiles valores idoneos exhibere, vt hoc modo omnes numeri inepti cognoſci queant, cuiusmodi ſunt $k = 1$, vel $k = 3$, vel $k = 4$, vel $k = 5$, vel $k = 6$, etc. pro quibus iam ſolide demonſtratum eſt, reductionem ad quadratum nullo modo locum habere poſſe.

§. 3. Quod ſi enim quadrati, cui formula noſtra aequari debet, radix ſtatuatur $= xx + \frac{pyy}{q}$, prodit $k = \frac{2p}{q} + \frac{pp}{qq} \cdot \frac{yy}{xx} - \frac{yy}{xx}$, qui valor vt fiat integer, primo patet pro q ſumi debere diuiſorem ipſius yy, id quod eo pluribus modis fieri poteſt, quo plures factores numerus y inuoluit; vnde iam patet iſtam methodum nimis eſſe vagam, quam vt omnes plane caſus in genere exhiberi queant. Si igitur huic conditioni ſatisfecerimus, vt ſit $yy = aq$, aequatio inuenta dabit $kxx = \frac{2pxx + app}{q} - aq$. Requiritur igitur porro vt formula $2pxx + app$, ſiue $2xx + ap$, diuiſionem per q admittat, quod ſi fuerit effectum, et Q ſit valor huic fractioni aequalis, inſuper, cum iam ſit $k = \frac{Q - aq}{xx}$, effici debet, vt quantitas $Q - aq$ euadat diuiſibilis per xx. Ex quo iam ſatis intelligitur, hac methodo perfectam enumerationem omnium valorum idoneorum ipſius k ſperari non poſſe.

§. 4. Idem defectus ſe exerit, quando radicem quadratam formulae propoſitae ſtatuimus $xx + \frac{p}{q}xy \pm yy$, tum enim facta euolutione reperitur

$$k x y = \frac{2p}{q}(xx \pm yy) \pm 2xy + \frac{pp}{qq} xy, \text{ fiue}$$

$$k = \frac{2p}{q} \cdot \frac{xx \pm yy}{xy} \pm 2 + \frac{pp}{qq},$$

quae forma etiamfi facile ad numeros integros reuocatur, hincque infiniti numeri idonei erui poffunt, tamen pariter ingens relinquitur dubium, num hoc modo omnes plane valores idonei, nullo praetermiffo, obtineri queant.

§. 5. Nuper autem, cum haec perpendiffem, incidi in methodum prorfus fingularem, quae primo intuitu adeo naturae quaeftionis aduerfari videtur. Confidero enim valorem litterae k quafi effet formula irrationalis, in binomio $P + \sqrt{Q}$ contenta, ita vt fit $k = P + \sqrt{Q}$. Euidens enim eft, poftquam in genere omnes valores pro P et Q fuerint inuenti, id infuper effici debere, vt Q reddatur numerus quadratus; hoc autem valore fubftituto formula propofita abibit pariter in tale binomium, cuius pars rationalis erit $x^4 + Pxxyy + y^4$, irrationalis vero $xxyy\sqrt{Q}$, quod igitur quadratum effici debet. Conftat autem hoc fieri non poffe, nifi quadratum partis rationalis, ablato quadrato partis irrationalis, fiat quadratum; hinc autem peruenitur ad fequentem formam:

$$\begin{aligned} x^8 + 2Px^6yy + 2\,&x^4y^4 + 2Pxxy^6 + y^8 \\ +&PP \\ -&Q \end{aligned}$$

§. 6. Cum iam haec forma in genere debeat effe quadratum, quicunque numeri pro x et y accipiantur, manifeftum eft eius radicem aliam formam habere non poffe, nifi vel $x^4 + Pxxyy + y^4$ vel $x^4 + Pxxyy - y^4$. At vero prior hic locum habere nequit; perduceret enim ad $Q = 0$;

 vn-

vnde adhibeamus alteram formam, cuius quadratum eſt

$$x^8 + 2 P x^6 y y - 2 x^4 y^4 - 2 P x x y^6 + y^8,$$
$$+ P P$$

cui ſi formula inuenta aequalis ſtatuatur, peruenitur ad hanc aequationem:

$$4 x^4 y^4 - Q x^4 y^4 + 4 P x x y^6 = 0,$$

quae per $x x y^4$ diuiſa praebet:

$$4 P y y - Q x x + 4 x x = 0,$$

cui vt ſatisfiat, ſtatuatur $P = f x x$, hincque ſponte ſe prodit $Q = 4 f y y + 4$, vbi id commodi ſumus aſſecuti, vt nullae amplius fractiones ſint abigendae.

§. 7. Quoniam igitur inuenimus $P = f x x$ et $Q = 4 f y y + 4$, binomium pro numero k accipiendum fiet $k = f x x + 2 \sqrt{(f y y + 1)}$, nihilque iam amplius ſupereſt, niſi vt formula $f y y + 1$ reddatur quadratum, quae cum ſit ipſa formula *Pelliana*, euidens eſt, hoc infinitis modis praeſtari poſſe, dum pro f pro lubitu omnes numeros poſitiuos aſſumere licet, exceptis ſolis numeris quadratis; quamobrem huc transferri poterunt, quae circa hanc formulam iam olim ſum commentatus, vbi pro ſingulis valoribus f vsque ad 100 valores requiſitos ipſius y in tabula ſum complexus:

f	y	f	y	f	y
2	2	37	12	69	936
3	1	38	6	70	30
5	4	39	4	71	413
6	2	40	3	72	2
7	3	41	320	73	267000
8	1	42	2	74	430
10	6	43	531	75	3
11	3	44	30	76	6630
12	2	45	24	77	40
13	180	46	3588	78	6
14	4	47	7	79	9
15	1	48	1	80	1
17	8	50	14	82	18
18	4	51	7	83	9
19	39	52	90	84	6
20	2	53	9100	85	30996
21	12	54	66	86	1122
22	42	55	12	87	3
23	5	56	2	88	21
24	1	57	20	89	53000
26	10	58	2574	90	2
27	5	59	69	91	165
28	24	60	4	92	120
29	1820	61	226153980	93	1260
30	2	62	8	94	221064
31	273	63	1	95	4
32	3	65	16	96	5
33	4	66	8	97	6377352
34	6	67	5967	98	10
35	1	68	4	99	1

§. 8.

§. 8. Quin etiam, si loco k istum valorem substituamus, deprehendemus, formulam nostram propositam revera fieri quadratum. Prodit enim

$$x^4 + f x^4 yy + y^4 + 2 xxyy \sqrt{(fyy+1)},$$

quae manifesto est quadratum huius formae:

$$yy + xx \sqrt{(fyy+1)}$$

quemadmodum periculum facienti mox patebit. Ex quo intelligimus, etiam pro omnibus valoribus idoneis litterae k statim radicem quadratam ipsius formulae propositae assignari posse. Ita si fuerit $f = 2$ et $y = 2$, hinc fit $k = 2xx + 6$, ex quo valore formula euadit

$$9 x^4 + 24 xx + 16 = (3 xx + 4)^2.$$

§. 9. Contemplemur iam accuratius formulam pro k inuentam $k = fxx + 2\sqrt{(fyy+1)}$, vbi per se manifestum est, membrum posterius radicale tam positiue quam negatiue accipi posse, ita vt sit $k = fxx \pm 2\sqrt{(fyy+1)}$; quare si primo sumamus $x = 1$ et $y = 1$, erit $k = f \pm 2\sqrt{(f+1)}$. Iam vt haec formula reddatur rationalis, ponatur $f + 1 = nn$, ideoque $f = nn - 1$, eritque,

$$k = nn \pm 2n - 1 = (n \pm 1)^2 - 2.$$

Sicque pro k iam habentur omnes numeri quadrati binario minuti, vnde vsque ad centum pro k sumi poterunt sequentes valores:

2, 7, 14, 23, 34, 47, 62, 79, 98.

§. 10. Maneat $y = 1$, at x relinquatur indefinitum, sumtoque $f = nn - 1$ prodibit ista formula:

$$k = (nn - 1) xx \pm 2n,$$

quae

quae iam infinitam multitudinem valorum idoneorum pro k suppeditat. Vbi imprimis notasse iuuabit, nihil impedire, quominus pro x fractiones accipiantur, dummodo valor ipsius k prodeat numerus integer, quandoquidem sola ratio inter x et y est spectanda; vnde si prodierit $x = \frac{p}{q}$, quoniam sumsimus $y = 1$, sumi debebit $x : y = p : q$.

§. 11. Percurramus igitur casus simpliciores numeri n; ac si eueniat vt $nn - 1$ habeat factorem quadratum, puta $nn - 1 = maa$, statui poterit $x = \frac{z}{a}$, fietque hinc $k = mzz + 2n$, tum vero erit $x : y = z : a$, hincque nata est sequens tabula:

n	k	$x:y$
2	$3zz \pm 4$	$z:1$
3	$2zz \pm 6$	$z:2$
4	$15zz \pm 8$	$z:1$
5	$6zz \pm 10$	$z:2$
6	$35zz \pm 12$	$z:1$
7	$3zz \pm 14$	$z:4$
8	$7zz \pm 16$	$z:3$
9	$5zz \pm 18$	$z:4$
10	$11zz \pm 20$	$z:3$
11	$30zz \pm 22$	$z:2$
13	$42zz \pm 26$	$z:2$
15	$14zz \pm 30$	$z:4$
17	$2zz \pm 34$	$z:12$
19	$10zz \pm 38$	$z:12$
23	$33zz \pm 46$	$z:4$
24	$23zz \pm 48$	$z:5$
25	$39zz \pm 50$	$z:4$
26	$3zz \pm 52$	$z:15$

n	k	$x:y$
28	$87zz \pm 56$	$z:3$
31	$15zz \pm 62$	$z:8$
33	$17zz \pm 66$	$z:8$
35	$34zz \pm 70$	$z:6$
37	$38zz \pm 74$	$z:6$
39	$95zz \pm 78$	$z:4$
48	$47zz \pm 96$	$z:7$
49	$6zz \pm 98$	$z:20$
50	$51zz \pm 100$	$z:7$
51	$26zz \pm 102$	$z:10$
53	$78zz \pm 106$	$z:6$
55	$21zz \pm 110$	$z:12$
63	$62zz \pm 126$	$z:8$
65	$66zz \pm 130$	$z:8$
71	$35zz \pm 142$	$z:12$
73	$37zz \pm 146$	$z:12$
80	$79zz \pm 160$	$z:9$
82	$83zz \pm 164$	$z:9$
97	$3zz \pm 194$	$z:56$
99	$2zz \pm 198$	$z:70$

§. 12. Hactenus scilicet pro f solos numeros integros admisimus; verum etiam fracti admitti possunt, dummodo pro k numeri integri resultent. Quod si enim in genere statuamus $x = 2v$, fiet $k = 4fvv + \sqrt{(4fyy + 4)}$, vbi euidens est sufficere dummodo $4f$ fuerit numerus integer. Ponatur ergo $4f = g$, eritque $k = gvv + \sqrt{(gyy + 4)}$; vbi quia pro x sumsimus numerum parem, intelligitur hic pro

pro y tantum numeros impares accipi debere, quia alioquin in casus praecedentes reuerteremur.

§. 13. Iam in hac formula statuamus $y = 1$, vt sit $k = gvv \pm \sqrt{(g+4)}$, et nunc vt $g+4$ euadat quadratum, primo omnium sumi poterit $g = -3$, vnde oritur $k = -3vv \pm 1$; vbi cum sit $x = 2v$, erit $x : y = 2v : 1$, ex qua formula meri numeri negatiui pro k resultant, qui vsque ad centum erunt:

$$-2, -4, -11, -13, -26, -28, -47, -49, -74, -76,$$

ad quos insuper, vti initio innuimus, quadrata negatiua accedunt, scilicet:

$$-1, -4, -9, -16, -25, -36, -49, -64, -81, -100.$$

§. 14. Pro reliquis valoribus ipsius g statuamus $g + 4 = nn$, fietque $k = (nn - 4)vv \pm n$. Hic ergo, vt supra, si euadat $nn - 4 = maa$ et loco av scribatur z, erit $k = mzz \pm n$; vbi cum sit $v = \frac{x}{2}$, erit $z = \frac{ax}{2}$, ideoque $x = \frac{2z}{a}$, hincque ratio inter x et y erit $x : y = 2z : a$.

§. 15. In hac autem formula sufficiet pro n numeros tantum impares sumsisse, quandoquidem ex paribus praecedentes formulae redirent. Hoc notato sequentes formulae speciales pro k obtinentur:

n	k	$x : y$
1	$-3zz+1$	$2z : 1$
3	$5zz+3$	$2z : 1$
5	$21zz+5$	$2z : 1$
7	$5zz+7$	$2z : 3$
9	$77zz+9$	$2z : 1$
11	$13zz+11$	$2z : 3$
23	$21zz+23$	$2z : 5$
25	$69zz+25$	$2z : 3$
27	$29zz+27$	$2z : 5$
29	$93zz+29$	$2z : 3$
47	$5zz+47$	$2z : 21$
51	$53zz+51$	$2z : 7$
79	$77zz+79$	$2z : 9$
83	$85zz+83$	$2z : 9$
119	$13zz+119$	$2z : 33$
123	$5zz+123$	$2z : 55$

§. 16. Ex his iam formulis haud difficulter omnes valores numeri k, vsque ad 100, computari possunt, qui cum sponte distinguantur in positiuos et negatiuos, vtrosque seorsim in tabulis subiunctis referamus, et cuilibet valori adiungamus rationes inter x et y, vnde hi numeri producuntur.

Tabula

Tabula prior

exhibens omnes valores positiuos ipsius k centenario minores.

k	Rationes.	k	Rationes.
2	Omnes	57	$\frac{12}{55}$
7	$\frac{1}{1}$	61	$\frac{5}{4}$
8	$\frac{2}{1}$	62	$\frac{1}{1}$
12	$\frac{3}{2}$	63	$\frac{3}{4}$
13	$\frac{3}{4}$	64	$\frac{3}{2}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{2}{15}$
14	$\frac{1}{11}$	66	$\frac{3}{1}$
16	$\frac{2}{1}$, $\frac{5}{12}$	67	$\frac{4}{21}$
17	$\frac{1}{4}$	68	$\frac{2}{1}$
23	$\frac{1}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{4}$	71	$\frac{5}{1}$
24	$\frac{3}{2}$	73	$\frac{3}{8}$
26	$\frac{2}{1}$	77	$\frac{1}{8}$
27	$\frac{3}{4}$	78	$\frac{3}{1}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{10}{21}$
31	$\frac{3}{1}$	79	$\frac{1}{1}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{4}$
33	$\frac{8}{21}$	83	$\frac{1}{8}$
34	$\frac{1}{1}$	84	$\frac{5}{12}$
36	$\frac{1}{12}$	86	$\frac{2}{1}$
38	$\frac{2}{1}$	87	$\frac{3}{8}$
41	$\frac{3}{4}$	89	$\frac{5}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{8}{33}$
42	$\frac{1}{6}$	90	$\frac{6}{35}$
44	$\frac{4}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{70}$	92	$\frac{7}{2}$
47	$\frac{1}{1}$	94	$\frac{3}{2}$
48	$\frac{1}{12}$, $\frac{6}{1}$	95	$\frac{7}{15}$
49	$\frac{9}{56}$	96	$\frac{4}{3}$
52	$\frac{2}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{2}{3}$,	98	$\frac{1}{1}$
55	$\frac{1}{15}$	100	$\frac{4}{15}$
56	$\frac{5}{2}$		

Tabula posterior
exhibens omnes valores negatiuos ipsius k centenario minores.

k	Rationes.	k	Rationes.
1	$\frac{1}{1}$	43	$\frac{8}{55}$
2	Omnes	44	$\frac{3}{20}$
4	$\frac{2}{1}$, $\frac{4}{15}$	47	$\frac{1}{8}$
9	$\frac{3}{1}$	49	$\frac{1}{7}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{8}$
11	$\frac{1}{4}$	64	$\frac{1}{8}$
13	$\frac{1}{4}$	67	$\frac{4}{38}$
16	$\frac{1}{4}$	70	$\frac{4}{35}$
25	$\frac{1}{5}$	74	$\frac{1}{10}$
26	$\frac{1}{6}$	76	$\frac{1}{10}$
27	$\frac{4}{21}$	78	$\frac{6}{55}$
28	$\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$	81	$\frac{1}{9}$
32	$\frac{1}{12}$	86	$\frac{3}{28}$
36	$\frac{1}{6}$, $\frac{9}{70}$	89	$\frac{1}{12}$
40	$\frac{2}{15}$	92	$\frac{1}{20}$
42	$\frac{2}{21}$	100	$\frac{1}{10}$

§. 17. Quemadmodum in nostris formulis pro k inventis, quae sunt

$$k = (nn - 1)xx \pm 2n \quad \text{et} \quad k = (nn + 4)vv \pm n,$$

loco x et y numeros fractos admisimus, ita etiam pro n fractiones admitti poterunt, dummodo ita fuerint comparatae, vt inde valores integri pro k reperiantur, quo obseruato investigatio harum formularum multo facilius institui poterit. Sumto enim $y = 1$, vt formula $x^4 + kxx + 1$ quadratum effici debeat, quaecunque eius fuerit radix, eam semper sub

ſub hac formula: $fxx \pm 1$ comprehendere licebit. Hinc autem ſtatim prodit $k = (ff - 1)xx \pm 2f$, quae erat formula noſtra prior, in qua ſi ſtatuatur $x = 2v$ et $2f = g$, prodit altera formula $k = (gg - 4)vv \pm g$, cui reſpondet ratio $\frac{x}{y} = \frac{2v}{1}$.

§. 18. Quod ſi iam loco g fractiones introducere velimus, facile patet ſtatui debere $g = \frac{a}{bb}$, ac praeterea $v = bz$: hoc enim modo prodibit $k = \frac{(aa - 4b^4)}{bb}zz \pm \frac{a}{bb}$, cui reſpondet ratio $\frac{2\,z}{1}$, atque hic pro a et b eiusmodi numeros accipi oportet, vt pro k prodeant numeri integri. Requiritur ergo vt numerus $aazz \pm a$, hoc eſt vt $azz \pm 1$ diuiſionem per per bb admittat, tum enim erit

$$k = a \cdot \frac{azz \pm 1}{bb} - 4bbzz;$$

hocque adeo in genere praeſtari poteſt, ponendo $a = b^4 + 1$, erit enim

$$k = \frac{(b^4 - 1)^2 zz}{bb} \pm \frac{b^4 + 1}{bb}.$$

Hic iam ponatur $z = \frac{t}{b^4 - 1}$, vt habeatur $k = \frac{tt \pm b^4 + 1}{bb}$, vbi ergo $tt \pm 1$ per bb diuiſibile reddi debet, vnde prodit $k = \frac{tt \pm 1}{bb} \pm bb$. Quomodocunque autem haec formula euoluatur, omnes numeri in ea contenti iam in formulis ſuperioribus contineri videntur.

§. 19. Hinc igitur patet, in Analyſi adhuc deſiderari methodum certam, cuius ope omnes valores ipſius k aſſignari atque adeo quousque libuerit continuari queant. Quin etiam ex formula fracta fortaſſe eiusmodi numeri erui poſſe videntur, qui in formulis integris ſupra exhibihibitis non contineantur; veluti ſe mihi obtulit iſte numerus $k = 131$, quem primo intuitu ex formulis ſupra datis deriuari poſſe non videbatur, cum tamen in formula $(nn - 4)zz + n$ contineatur, ſi poſito $z = 6$ pro n vel fractio $\frac{11}{4}$ vel $\frac{25}{9}$ ſumatur. Poſtea vero deprehendi hunc ipſum numerum ex formula $k = 21zz + 110$ oriri; num autem hoc ſemper eueniat, etiamnunc dubitare licet, vnde perfecta ſolutio etiamnunc plane vires Analyſeos ſuperare videtur. Quaeſtio igitur iſta maximi momenti ſequenti modo proponi poteſt:

Inuenire methodum, cuius ope omnes numeri integri aſſignari queant, qui ex formula $(nn - 4)zz + n$ *reſultare poſſint, ſi loco litterarum* n *et* z *non ſolum numeri integri ſed etiam fracti accipiantur.*

Huius autem quaeſtionis enodatio certe inſignia incrementa in Analyſin Diophanteam eſſet illatura.

INVESTIGATIO SVPERFICIERVM QVARVM NORMALES AD DATVM PLANVM PRODVCTAE SINT OMNES INTER SE AEQVALES.

Auctore
L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 28 Decemb. 1777.

§. 1.

Referat tabula planum, ad quod omnes normales ſunt producendae, et pro ſuperficie quaeſita conſtituatur inter tres coordinatas $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, haec aequatio differentialis: $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, atque conſtat, normalem ex ſuperficie Z ad planum productam eſſe $ZN = z\sqrt{(1 + pp + qq)}$, quam ergo conſtantem eſſe oportet. Sit igitur $z\sqrt{(1 + pp + qq)} = a$, atque vt irrationalitas tollatur, ponatur $p = \text{tang.}\,\omega\,\text{ſin.}\,\Phi$ et $q = \text{tang.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\Phi$; tum enim normalis ZN ita exprimetur: $z\sqrt{(1 + \text{tang.}\,\omega^2)} = \frac{z}{\text{coſ.}\,\omega} = a$, ſicque erit $z = a\,\text{coſ.}\,\omega$, quo valore ſubſtituto aequatio illa differentialis hanc induet formam: Tab. I. Fig. 1.

$$-a\,\partial\omega\,\text{ſin.}\,\omega = \partial x\,\text{tang.}\,\omega\,\text{ſin.}\,\Phi + \partial y\,\text{tang.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

ideoque erit

$$-a\,\partial\omega\,\text{coſ.}\,\omega = \partial x\,\text{ſin.}\,\Phi + \partial y\,\text{coſ.}\,\Phi.$$

Sicque adepti ſumus aequationem, ex qua valores x et y per angulos ϕ et ω definiri poterunt.

§. 2. Cum enim prima pars huius aequationis $-a\,\partial\omega \cos.\omega$ ſponte ſit integrabilis, etiam alteram partem integrabilem reddi oportet. Per notam iam integralium reductionem integratio ita inſtituatur:

$$-a \sin.\omega = x \sin.\phi - \int x\,\partial\phi \cos.\phi + y \cos.\phi + \int y\,\partial\phi \sin.\phi;$$

vnde habebimus

$$-a \sin.\omega = x \sin.\phi + y \cos.\phi + \int \partial\phi\,(y \sin.\phi - x \cos.\phi),$$

vbi poſtremum membrum integrabile eſſe nequit, niſi ſit $y \sin.\phi - x \cos.\phi$ functio ſolius anguli ϕ, quae ſit Φ', vt inde fiat $\int \Phi'\,\partial\phi = \Phi$; quo facto aequatio integralis erit

$$-a \sin.\omega = x \sin.\phi + y \cos.\phi + \Phi.$$

§. 3. Habemus igitur has duas aequationes:

I. $y \sin.\phi - x \cos.\phi = \Phi'$.

II. $x \sin.\phi + y \cos.\phi = -a \sin.\omega - \Phi$,

ex quibus facile eliciuntur coordinatae x et y, quippe quae reperiuntur

$$x = -\Phi \sin.\phi - \Phi' \cos.\phi - a \sin.\phi \sin.\omega \text{ et}$$

$$y = \Phi' \sin.\phi - \Phi \cos.\phi - a \sin.\omega \cos.\phi.$$

Praeterea vero erit tertia coordinata $z = a \cos.\omega$; ita vt iam omnes tres coordinatae per binos angulos variabiles exprimantur, ſcil. ϕ et ω.

§. 4. Quo has formulas magis ad vſum accomodemus, ponamus $a \sin.\omega = -v$ et $-\Psi \sin.\phi - \Phi' \cos.\phi = t$

et

et $-\Phi \cos. \phi + \Phi' \sin. \phi = u$, vt obtineamus has formulas: $x = v \sin. \phi + t$ et $y = v \cos. \phi + u$. Nunc vero erit $z = \sqrt{(aa - vv)}$. Hic autem obſeruetur, ambas litteras t et u functiones eſſe ſolius anguli ϕ, inde autem colligimus

$$t \sin. \phi + u \cos. \phi = -\Phi;$$
$$u \sin. \phi - t \cos. \phi = +\Phi'.$$

§. 5. Nunc vero notetur litteras Φ et Φ' ita a ſe inuicem pendere, vt ſit $\partial \Phi = \Phi' \partial \phi$; prior autem formula differentiata praebet

$$\partial t \sin \phi + t \partial \phi \cos. \phi + \partial u \cos. \phi - u \partial \phi \sin. \phi = -\Phi' \partial \phi,$$

cui ſi addatur altera aequatio in $\partial \phi$ ducta, orietur haec:

$$\partial t \sin. \phi + \partial u \cos. \phi = 0,$$

vnde colligitur $\operatorname{tang}. \phi = -\frac{\partial u}{\partial t}$.

§. 6. Hinc iam pro u functio quaecunque ipſius t accipi poteſt. Concipi igitur poterit curua quaecunque CU per coordinatas $CT = t$ et $TU = u$ determinata, ad quam ſi in U ducatur tangens $U\Theta$, innoteſcet angulus ad Θ, qui ſit θ, eritque $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{tang}. \theta$, ideoque $\phi = -\theta$. Tum ergo erit $x = t - v \sin. \theta$ et $y = u + v \cos. \theta$. Iam in normali ducta et producta in V capiatur pro lubitu interuallum $UV = v$, indeque ad axem ducto perpendiculo VX euidens eſt fore interuallum $CX = CT - US$, ideoque $= t - v \sin. \theta = x$. Simili modo erit recta $XV = TU + VS = u + v \cos. \theta = y$. Si ergo in V erigatur perpendiculum $VZ = z = \sqrt{(aa - vv)}$, punctum Z erit in ſuperficie quaeſita. Patet ergo fore rectam $UZ = a$. Conſequenter ſi centro U in plano verticali ſuper recta UV deſcribatur Tig. I. Fig. 2.

 cir-

circulus radio $UZ = a$, totus hic circulus erit in ſuperficie quaeſita; vnde intelligimus totam hanc ſuperficiem ſemper eſſe cylindrum, cuius axis ſecundum datam curuam arbitrariam incuruatur, quemadmodum iam dudum a me et aliis eſt obſeruatum. Hic autem imprimis ipſa Analyſis eo perducens ſpectari meretur.

Alia Solutio.

§. 7. In aequatione pro ſuperficie quaeſita, quae erat $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, ponatur $p = \frac{r}{z}$ et $q = \frac{s}{z}$, vt prodeat aequatio huius formae: $z\,\partial z = r\,\partial x + s\,\partial y$; tum vero erit normalis ad ſuperficiem

$$ZN = \sqrt{(zz + rr + ss)},$$

quae cum debeat eſſe conſtans $= a$, erit

$$zz = aa - rr - ss,$$

ideoque

$$z\,\partial z = -r\,\partial r - s\,\partial s,$$

vnde ergo fiet

$$0 = r\,\partial x + s\,\partial y + r\,\partial r + s\,\partial s,$$

ſiue

$$r(\partial x + \partial r) + s(\partial y + \partial s) = 0.$$

Iam ponatur porro $x + r = t$ et $y + s = u$, atque aequatio ſolutionem quaeſtionis continens erit $r\,\partial t + s\,\partial u = 0$.

Tab. I. Fig. 3. §. 8. Haec autem aequatio facillime conſtruitur, deſcribendo curuam quamcunque CU, coordinatis $CT = t$ et $TU = u$ determinatam. Si enim ad hanc curuam ex U ad axem ducatur normalis UP, voceturque angulus $CPU = \phi$, qui amplitudinem curuae metietur, ſiquidem axis CP ad

cur-

curuam fuerit normalis; tum erit tang. $\Phi = \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\sin. \Phi}{\cos. \Phi}$. Cum nunc ex aequatione inuenta fit $\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{s}{r}$, ftatui debebit $\frac{s}{r} = -\frac{\sin. \Phi}{\cos. \Phi}$; quamobrem fiat $r = v \cos. \Phi$ et $s = -v \sin. \Phi$, hocque modo aequationi inuentae erit fatisfactum, quaecunque etiam quantitas variabilis pro v accipiatur.

§. 9. Hinc igitur cum fit $x = t - r$ et $y = u - s$, erit $x = t - v \cos. \Phi$ et $y = u + v \sin. \Phi$; tertia vero coordinata tum erit $z = \sqrt{(a a - v v)}$. Quocirca fi in normali producta PU capiatur interuallum $UY = v$ et ex Y ad axem perpendiculum demittatur YX, erit

$$CX = CT - TX = t - v \cos. \Phi,$$
$$XY = TU + SY = u + v \sin. \Phi,$$

ficque erit, vt in praecedente conftructione, $CX = x$ et $XY = y$. Praeterea vero fi in Y perpendiculariter erigatur $YZ = z$, erit recta $YZ = \sqrt{(a a - v v)}$ et $UZ = a$; vnde patet, fuperficiem quaefitam defcribi, fi centrum circuli, radio a defcripti, fecundum curuam CU ita promoueatur, vt planum circuli perpetuo ad curuam CU fit normale. Hoc enim modo peripheria circuli ipfam fuperficiem quam quaerimus defcribet.

§. 10. Ex hac facillima conftructione patet, curvam CU penitus arbitrio noftro relinqui, neque adeo opus effe, vt eius natura certa aequatione inter t et u exprimatur; fed eam pro lubitu duci atque adeo ex partibus diuerfiffimis componi poffe. Haec fcilicet curua CU functionem illam arbitrariam inuoluit, quam huiusmodi problemata, quae circa functiones duarum variabilium verfantur,

 per

per integrationem recipere debent, loco constantis, quae in integrationibus ordinariis introduci solet.

§. 11. Ceterum, quia huiusmodi superficies per motum continuum circuli generantur, dum directio motus perpetuo ad planum circuli est normalis, hic regula *Guldini* notissima in vsum vocari potest, si quidem velimus tam ipsam superficiem genitam quam solidi ea inclusi quantitatem definire. Scilicet tota superficies solidi hoc modo geneti secundum hanc regulam reperitur, si peripheria circuli, quae est $= 2\pi a$, multiplicetur per viam a centro grauitatis circuli descriptam, quae cum sit longitudo curuae CU, superficies istius solidi erit $= 2\pi a \cdot CU$; ipsa autem eius soliditas reperietur, si area istius circuli, quae est πaa per eandem viam centri grauitatis, siue arcum CU multiplicetur, ita vt soliditas haec futura sit $\pi aa \cdot CU$.

VA-

VARIAE SPECVLATIONES SVPER AREA TRIANGVLORVM SPHAERICORVM.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 29 Ianuar. 1778.

§. 1.

Primus, qui aream trianguli ſphaerici definire docuit, erat, teſte Walliſio, Albertus Girard, qui demonſtrauit, aream trianguli ſphaerici ſemper proportionalem eſſe exceſſui ſummae ternorum angulorum ſuper duobus rectis, atque adeo ipſam aream inueniri, ſi iſte exceſſus, in arcum circuli maximi conuerſus, per radium ſphaerae multiplicetur. Quemadmodum autem area trianguli ſphaerici ex eius lateribus ſit determinanda, inueſtigationem multo difficiliorem poſtulat. Inueni autem iam olim egregium theorema, quo iſta determinatio facile inſtitui poteſt, quod ita ſe habet: *Si latera trianguli ſphaerici denotentur litteris* a, b, c, *area vero eiusdem trianguli ponatur* $= \Delta$, *tum ſemper erit*

$$\operatorname{cof.} \tfrac{1}{2}\Delta = \frac{1 + \operatorname{cof.} a + \operatorname{cof.} b + \operatorname{cof.} c}{4 \operatorname{cof.} \frac{1}{2} a \operatorname{cof.} \frac{1}{2} b \operatorname{cof.} \frac{1}{2} c},$$

cuius veritas non niſi per longas ambages, ſiue ex theoremate

mate Girardi, siue immediate per calculum integralem ostendi potest. Vtramque igitur demonstrationem hic in medium attulisse operae erit pretium.

Problema.

Tab. I. Fig. 4. *Si trianguli sphaerici AZB super basi AB exstructi bina latera AZ et BZ suis differentialibus augeantur, vt inde oriatur triangulum AzB, inuestigare augmentum quod hinc areae trianguli AZB accessit.*

Solutio.

§. 2. Posita basi huius trianguli $AB = a$ vocentur eius latera $AZ = x$ et $BZ = y$, ita vt latera trianguli aucti futura sint $Az = x + \partial x$ et $Bz = y + \partial y$. Porro vero vocentur anguli $BAZ = \Phi$ et $ABZ = \psi$, vt prodeant anguli elementares $ZAz = \partial\Phi$ et $ZBz = \partial\psi$, quibus positis constat trianguli elementaris ZAz aream esse $= \partial\Phi(1 - \text{cos.}\, x)$, trianguli vero $ZBz = \partial\psi(1 - \text{cos.}\, y)$. Quoniam igitur haec duo triangula elementaria exhibent augmentum areae trianguli Δ, habebimus hanc aequationem:

$$\partial\Delta = \partial\Phi(1 - \text{cos.}\, x) + \partial\psi(1 - \text{cos.}\, y).$$

§. 3. Nunc igitur angulos Φ et ψ ex calculo eliminemus, eorumque loco ipsa latera x et y introducamus ope praeceptorum Trigonometricorum, quae nobis praebent

$$\text{cof.}\, \Phi = \frac{\text{cof.}\, y - \text{cof.}\, a\, \text{cof.}\, x}{\text{fin.}\, a\, \text{fin.}\, x} \quad \text{et} \quad \text{cof.}\, \psi = \frac{\text{cof.}\, x - \text{cof.}\, a\, \text{cof.}\, y}{\text{fin.}\, a\, \text{fin.}\, y}$$

hinc igitur per differentiationem colligimus

$$-\partial\Phi\, \text{fin.}\, \Phi = \frac{\partial x\, \text{cof.}\, a - \partial x\, \text{cof.}\, x\, \text{cof.}\, y - \partial y\, \text{fin.}\, x\, \text{fin.}\, y}{\text{fin.}\, a\, \text{fin.}\, x^2},$$

eodemque modo erit

$$-\partial\psi\, \text{fin.}\, \psi = \frac{\partial y\, \text{cof.}\, a - \partial y\, \text{cof.}\, x\, \text{cof.}\, y - \partial x\, \text{fin.}\, x\, \text{fin.}\, y}{\text{fin.}\, a\, \text{fin.}\, y^2}.$$

At

At vero cum ſit $\text{coſ.}\,\Phi = \frac{\text{coſ.}\,y - \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,x}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,x}$, erit

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,a^2 - \text{coſ.}\,x^2 - \text{coſ.}\,y^2 + 2\,\text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,y)}}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,x},$$

ſimilique modo erit

$$\text{ſin.}\,\psi = \frac{\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,a^2 - \text{coſ.}\,x^2 - \text{coſ.}\,y^2 + 2\,\text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,y)}}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,y}.$$

Quoniam hae ambae formulae radicales ſunt eaedem, ponamus breuitatis gratia

$$\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,a^2 - \text{coſ.}\,x^2 - \text{coſ.}\,y^2 + 2\,\text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,y)} = v,$$

vt habeamus

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{v}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,x} \text{ et } \text{ſin.}\,\psi = \frac{v}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,y}.$$

§. 4. His igitur valoribus ſubſtitutis nanciſcemur hos valores differentiales:

$$\partial\Phi = -\frac{\partial x\,\text{coſ.}\,a + \partial x\,\text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,y + \partial y\,\text{ſin.}\,x\,\text{ſin.}\,y}{v\,\text{ſin.}\,x} \text{ et}$$

$$\partial\psi = -\frac{\partial y\,\text{coſ.}\,a + \partial y\,\text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,y + \partial x\,\text{ſin.}\,x\,\text{ſin.}\,y}{v\,\text{ſin.}\,y}.$$

Hinc igitur incrementum areae quaeſitum erit

$$\partial\Delta = \left\{\frac{\begin{array}{l} -\text{coſ.}\,a[\partial x\,\text{ſin.}\,y(1 - \text{coſ.}\,x) + \partial y\,\text{ſin.}\,x(1 - \text{coſ.}\,y)] \\ +\partial x\,\text{ſin.}\,y[\text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,y(1 - \text{coſ.}\,x) + \text{ſin.}\,x^2(1 - \text{coſ.}\,y)] \\ +\partial y\,\text{ſin.}\,x[\text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,y(1 - \text{coſ.}\,y) + \text{ſin.}\,y^2(1 - \text{coſ.}\,x)] \end{array}}{v\,\text{ſin.}\,x\,\text{ſin.}\,y}\right\},$$

quod euolutum induet hanc formam:

$$v\,\partial\Delta = \left\{\begin{array}{l} +\partial x\,\text{ſin.}\,x(1 - \text{coſ.}\,y) + \frac{\partial x\,\text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,y(1 - \text{coſ.}\,x)}{\text{ſin.}\,x} - \frac{\partial x\,\text{coſ.}\,a(1 - \text{coſ.}\,x)}{\text{ſin}\,x} \\ +\partial y\,\text{ſin.}\,y(1 - \text{coſ.}\,x) + \frac{\partial y\,\text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,y(1 - \text{coſ.}\,y)}{\text{ſin.}\,y} - \frac{\partial y\,\text{coſ.}\,a(1 - \text{coſ.}\,y)}{\text{ſin.}\,y} \end{array}\right\}.$$

Hic iam notetur eſſe

$$\frac{1 - \text{coſ.}\,x}{\text{ſin.}\,x} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}x \text{ et } \frac{1 - \text{coſ.}\,y}{\text{ſin.}\,y} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}y,$$

 hinc

hinc ergo termini elementum ∂x inuoluentes erunt

$$\partial x \,\text{fin.}\, x(1-\text{cof.}\, y)+\partial x \,\text{cof.}\, x \,\text{cof.}\, y \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}x-\partial x \,\text{cof.}\, a \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}x.$$

Quoniam autem non folum eft $\text{tang.}\, \frac{1}{2}x=\frac{1-\text{cof.}\, x}{\text{fin.}\, x}$, fed etiam $\text{tang.}\, \frac{1}{2}x=\frac{\text{fin.}\, x}{1+\text{cof.}\, x}$, in primo membro loco fin. x fcribatur $(1+\text{cof.}\, x)\,\text{tang.}\, \frac{1}{2}x$, vt ∂x vbique multiplicatum fit per $\text{tang.}\, \frac{1}{2}x$, ficque iftud membrum reducetur ad hanc formam:

$$\partial x \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}x\,(1+\text{cof.}\, x-\text{cof.}\, y-\text{cof.}\, a).$$

Eodem modo alterum membrum erit

$$\partial y \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}y\,(1+\text{cof.}\, y-\text{cof.}\, x-\text{cof.}\, a),$$

ficque tota noftra aequatio ita erit expreffa:

$$v\,\partial\Delta=\partial x \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}x\,(1+\text{cof.}\, x-\text{cof.}\, y-\text{cof.}\, a)$$
$$+\partial y \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}y\,(1+\text{cof.}\, y-\text{cof.}\, x-\text{cof.}\, a).$$

§. 5. Quodfi iam breuitatis gratia ponamus $\text{cof.}\, a+\text{cof.}\, x+\text{cof.}\, y=s$, erit

$$v\,\partial\Delta=\partial x \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}x\,(1-s+2\,\text{cof.}\, x)$$
$$+\partial y \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}y\,(1-s+2\,\text{cof.}\, y);$$

quae aequatio hoc modo repraefentari poteft:

$$v\,\partial\Delta=(1-s)(\partial x \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}x+\partial y \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}y)$$
$$+2\,\partial x \,\text{cof.}\, x \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}x+2\,\partial y \,\text{cof.}\, y \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}y.$$

Cum nunc fit $\text{tang.}\, \frac{1}{2}x=\frac{1-\text{cof.}\, x}{\text{fin}\, x}$, erit

$$\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}x \,\text{cof.}\, x=\frac{\text{cof.}\, x-\text{cof.}\, x^2}{\text{fin.}\, x}=\frac{\text{cof.}\, x-1+\text{fin.}\, x^2}{\text{fin.}\, x}$$
$$=\text{fin.}\, x-\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}x.$$

Eodem modo erit $\text{tang.}\, \frac{1}{2}y \,\text{cof.}\, y=\text{fin.}\, y-\text{tang.}\, \frac{1}{2}y$, hisque valoribus fubftitutis orietur haec aequatio:

$$v\,\partial\Delta=-(1+s)(\partial x \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}x+\partial y \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}y)$$
$$+2\,\partial x \,\text{fin.}\, x+2\,\partial y \,\text{fin.}\, y.$$

§. 6.

§. 6. Haec poſtrema forma ideo notatu maxime eſt digna, quod membrum dextrum abſolute ſit integrabile, ſi diuidatur per $1+s$. Facta enim hac diuiſione noſtra aequatio erit

$$\frac{v\partial\Delta}{1+s} = -\partial x \text{ tang. } \tfrac{1}{2}x - \partial y \text{ tang. } \tfrac{1}{2}y + \frac{2\partial x \text{ fin. } x + 2\partial y \text{ fin. } y}{1+\text{cof. } a+\text{cof. } x+\text{cof. } y};$$

vbi notetur eſſe $\int \partial x \text{ tang. } \frac{1}{2}x = -2l \text{ cof. } \frac{1}{2}x$, ſimilique modo $\int \partial y \text{ tang. } \frac{1}{2}y = -2l \text{ cof. } \frac{1}{2}y$, ac denique

$$2\int \frac{\partial x \text{ fin. } x + \partial y \text{ fin. } y}{1+\text{cof. } a+\text{cof. } x+\text{cof. } y} = -2l(1+\text{cof. } a+\text{cof. } x+\text{cof. } y)$$
$$= -2l(1+s),$$

ſic igitur per integrationem reperimus

$$\int \frac{v\partial\Delta}{1+s} = +2l \text{ cof. } \tfrac{1}{2}x + 2l \text{ cof. } \tfrac{1}{2}y - 2l\, \overline{1+s}$$
$$= +2l \frac{\text{cof. } \frac{1}{2}x \text{ cof. } \frac{1}{2}y}{1+s},$$

at vero hoc modo membrum ſiniſtrum non eſt integrabile; cui ergo ſequenti modo remedium afferetur.

§. 7. Cum enim poſuerimus $s = \text{cof. } a + \text{cof. } x + \text{cof. } y$, ſtatuamus inſuper $\text{cof. } \frac{1}{2}a \text{ cof. } \frac{1}{2}x \text{ cof. } \frac{1}{2}y = q$, vt habeamus hanc aequationem:

$$\int \frac{v\partial\Delta}{1+s} = +2l \frac{q}{(1+s)\text{ cof. } \frac{1}{2}a},$$

vbi porro fiat $\frac{q}{1+s} = p$, ita vt ſit

$$\int \frac{v\partial\Delta}{1+s} = +2l \frac{p}{\text{cof. } \frac{1}{2}a},$$

quae aequatio denuo differentiata praebet $\frac{v\partial\Delta}{1+s} = +\frac{2\partial p}{p}$, vnde conficitur $\partial\Delta = +\frac{2\partial p(1+s)}{pv}$, quae ergo formula integrationem admittet, ſi modo fuerit $\frac{v}{1+s}$ functio quaedam ipſius p, id

G 2 quod

quod iam certo affeuerare poſſumus, propterea quod $\partial\Delta$ deſignat differentiale ipſius areae trianguli.

§. 8. Ad hoc oſtendendum obſeruaſſe iuuabit eſſe

$$vv+(1+s)^2 = 2(1+\text{coſ.}\,a+\text{coſ.}\,x+\text{coſ.}\,y+\text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,x + \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,y+\text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,y+\text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,y) = 2(1+\text{coſ.}\,a)(1+\text{coſ.}\,x)(1+\text{coſ.}\,y).$$

Conſtat autem eſſe $1+\text{coſ.}\,a = 2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}a^2$;

$$1+\text{coſ.}\,x = 2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}x^2 \text{ et } 1+\text{coſ.}\,y = 2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}y^2,$$

quare cum poſuerimus $q = \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}x\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}y$, erit

$$vv+(1+s)^2 = 16qq \text{ ideoque } v = \sqrt{[16qq-(1+s)^2]}$$

hincque porro

$$\frac{v}{(1+s)} = \sqrt{\left(\frac{16qq}{(1+s)^2}-1\right)}.$$

§. 9. Cum igitur aequatio noſtra differentialis fuiſſet $\frac{v\partial\Delta}{1+s} = +\frac{2\partial p}{p}$, ob $p = \frac{q}{1+s}$ ea induet hanc formam:

$$\partial\Delta\sqrt{(16pp-1)} = \frac{2\partial p}{p}, \text{ ideoque } \partial\Delta = \frac{2\partial p}{p\sqrt{(16pp-1)}}.$$

Fiat iam $p = \frac{1}{r}$, vt habeatur $\partial\Delta = -\frac{2\partial r}{\sqrt{(16-rr)}}$, vnde integrando colligimus $\Delta = C + 2\,\text{Arc. coſ.}\,\frac{r}{4}$ et loco r valore ſubſtituto, qui eſt

$$r = \frac{1}{p} = \frac{1+s}{q} = \frac{1+\text{coſ.}\,a+\text{coſ.}\,x+\text{coſ.}\,y}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}x\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}y}$$

noſtra aequatio integralis erit

$$\Delta = C + 2\,\text{Arc. coſ.}\,\frac{1+\text{coſ.}\,a+\text{coſ.}\,x+\text{coſ.}\,y}{4\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}x\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}y}.$$

§. 10. Nunc ergo totum negotium eo redit, vt valor constantis per integrationem ingressae C indagetur, quem scilicet ex casu quodam cognito erui oportet; manifestum autem est aream trianguli euanescere debere, quando alterum binorum crurum x vel y euanescit. Ponamus igitur esse $y = 0$, tum vero necesse est, vt fiat $x = 0$, hoc ergo casu constituto nostra aequatio erit

$$0 = C + 2 \text{ Arc. cof. } \frac{2 + 2 \text{ cof. } a}{4 \text{ cof. } \frac{1}{2} a^2}.$$

Quoniam vero $4 \text{ cof. } \frac{1}{2} a^2 = 2 + 2 \text{ cof. } \frac{1}{2} a$ et Arc. cof. $1 = 0$, euidens est statui debere $C = 0$, ita vt habeamus

$$\Delta = 2 \text{ Arc. cof. } \frac{1 + \text{cof. } a + \text{cof. } x + \text{cof. } y}{4 \text{ cof. } \frac{1}{2} a \text{ cof. } \frac{1}{2} x \text{ cof. } \frac{1}{2} y},$$

vnde concluditur

$$\text{cof. } \tfrac{1}{2} \Delta = \frac{1 + \text{cof. } a + \text{cof. } x + \text{cof. } y}{4 \text{ cof. } \frac{1}{2} a \text{ cof. } \frac{1}{2} x \text{ cof. } \frac{1}{2} y},$$

quae ipsa expressio cum theoremate supra memorato egregie conuenit, si modo loco x et y scribantur litterae b et c.

Alia demonstratio Geometrica theorematis initio allati.

§. 11. Sit igitur A B C triangulum sphaericum propositum, cuius latera vocentur a, b, c, et anguli iis oppositi α, β, γ, area vero, quam quaerimus, designemus charactere Δ. Cum igitur ex theoremate Girardi sit Tab. I. Fig. 5.

$$\Delta = \alpha + \beta + \gamma - 180^0, \text{ erit cof. } \Delta = -\text{cof. } (\alpha + \beta + \gamma).$$

Nunc vero ex compositione angulorum constat esse

$$\text{fin. } (\alpha + \beta) = \text{fin. } \alpha \text{ cof. } \beta + \text{cof. } \alpha \text{ fin. } \beta \text{ et}$$

$$\text{cos}.(\alpha+\beta) = \text{cos}.\alpha \,\text{cos}.\beta - \text{sin}.\alpha \,\text{sin}.\beta,$$

vnde colligitur

$$\begin{aligned}\text{cos}.(\alpha+\beta+\gamma) &= \text{cos}.(\alpha+\beta)\,\text{cos}.\gamma - \text{sin}.(\alpha+\beta)\,\text{sin}.\gamma\\ &= \text{cos}.\alpha\,\text{cos}.\beta\,\text{cos}.\gamma - \text{cos}.\alpha\,\text{sin}.\beta\,\text{sin}.\gamma\\ &\quad - \text{cos}.\beta\,\text{sin}.\alpha\,\text{sin}.\gamma - \text{cos}.\gamma\,\text{sin}.\alpha\,\text{sin}.\beta,\end{aligned}$$

consequenter habebimus

$$\begin{aligned}\text{cos}.\Delta = &+ \text{cos}.\alpha\,\text{sin}.\beta\,\text{sin}.\gamma + \text{cos}.\beta\,\text{sin}.\alpha\,\text{sin}.\gamma + \text{cos}.\gamma\,\text{sin}.\alpha\,\text{sin}.\beta\\ &- \text{cos}.\alpha\,\text{cos}.\beta\,\text{cos}.\gamma.\end{aligned}$$

§. 12. Ex Trigonometria sphaerica autem nouimus esse

$$\text{cos}.\alpha = \frac{\text{cos}.a - \text{cos}.b\,\text{cos}.c}{\text{sin}.b\,\text{sin}.c};$$

$$\text{cos}.\beta = \frac{\text{cos}.b - \text{cos}.a\,\text{cos}.c}{\text{sin}.a\,\text{sin}.c} \text{ et}$$

$$\text{cos}.\gamma = \frac{\text{cos}.c - \text{cos}.a\,\text{cos}.b}{\text{sin}.a\,\text{sin}.b},$$

hincque colligimus porro

$$\text{sin}.\alpha = \frac{\sqrt{(1 - \text{cos}.a^2 - \text{cos}.b^2 - \text{cos}.c^2 + 2\,\text{cos}.a\,\text{cos}.b\,\text{cos}.c)}}{\text{sin}.b\,\text{sin}.c};$$

$$\text{sin}.\beta = \frac{\sqrt{(1 - \text{cos}.a^2 - \text{cos}.b^2 - \text{cos}.c^2 + 2\,\text{cos}.a\,\text{cos}.b\,\text{cos}.c)}}{\text{sin}.a\,\text{sin}.c} \text{ et}$$

$$\text{sin}.\gamma = \frac{\sqrt{(1 - \text{cos}.a^2 - \text{cos}.b^2 - \text{cos}.c^2 + 2\,\text{cos}.a\,\text{cos}.b\,\text{cos}.c)}}{\text{sin}.a\,\text{sin}.b}.$$

Ponamus igitur breuitatis gratia

$$\sqrt{(1 - \text{cos}.a^2 - \text{cos}.b^2 - \text{cos}.c^2 + 2\,\text{cos}.a\,\text{cos}.b\,\text{cos}.c)} = v,$$

ita vt sit

$$\text{sin}.\alpha = \frac{v}{\text{sin}.b\,\text{sin}.c};\ \text{sin}.\beta = \frac{v}{\text{sin}.a\,\text{sin}.c} \text{ et } \text{sin}.\gamma = \frac{v}{\text{sin}.a\,\text{sin}.b};$$

quibus valoribus substitutis fiet

$$\begin{aligned}\text{cos}.\Delta = &\frac{vv(\text{cos}.a - \text{cos}.b\,\text{cos}.c)}{\text{sin}.a^2\,\text{sin}.b^2\,\text{sin}.c^2} + \frac{vv(\text{cos}.b - \text{cos}.a\,\text{cos}.c)}{\text{sin}.a^2\,\text{sin}.b^2\,\text{sin}.c^2}\\ &+ \frac{vv(\text{cos}.c - \text{cos}.a\,\text{cos}.b)}{\text{sin}.a^2\,\text{sin}.b^2\,\text{sin}.c^2} - \frac{(\text{cos}.a - \text{cos}.b\,\text{cos}.c)(\text{cos}.b - \text{cos}.a\,\text{cos}.c)(\text{cos}.c - \text{cos}.a\,\text{cos}.b)}{\text{sin}.a^2\,\text{sin}.b^2\,\text{sin}.c^2},\end{aligned}$$

sic-

ſicque erit

$$\text{ſin.}\,a^2\,\text{ſin.}\,b^2\,\text{ſin.}\,c^2\,\text{coſ.}\,\Delta$$
$$= vv(\text{coſ.}\,a + \text{coſ.}\,b + \text{coſ.}\,c - \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,b - \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,c - \text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,c)$$
$$- \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,c + \text{coſ.}\,a^2\,\text{coſ.}\,b^2 + \text{coſ.}\,a^2\,\text{coſ.}\,c^2 + \text{coſ.}\,b^2\,\text{coſ.}\,c^2$$
$$- \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,b\,\text{coſ.}\,c\,(\text{coſ.}\,a^2 + \text{coſ.}\,b^2 + \text{coſ.}\,c^2) + \text{coſ.}\,a^2\,\text{coſ.}\,b^2\,\text{coſ.}\,c^2.$$

§. 13. Quo nunc has formulas non parum complicatas commodius tractare liceat, ponamus primo breuitatis gratia $\text{coſ.}\,a = A$; $\text{coſ.}\,b = B$; $\text{coſ.}\,c = C$, vt habeamus

$$(1 - A^2)(1 - B^2)(1 - C^2)\,\text{coſ.}\,\Delta = vv(A + B + C - AB - AC - BC)$$
$$- ABC + AABB + AACC + BBCC$$
$$- ABC(AA + BB + CC) + AABBCC,$$

vbi iam erit

$$vv = 1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2\,ABC.$$

§. 14. Quoniam hic ternae litterae A, B, C aequaliter in calculum ingrediuntur, ita vt tanquam radices cuiuspiam aequationis cubicae ſpectari queant; ad calculum contrahendum non parum conferet ſtatui

$$A + B + C = P$$
$$AB + AC + BC = Q$$
$$ABC = R,$$

hincque facile colligitur fore

$$AA + BB + CC = PP - 2\,Q$$

ideoque

$$vv = 1 - PP + 2\,Q + 2\,R.$$

Dein-

Deinde notetur formulam $(1 - A^2)(1 - B^2)(1 - C^2)$ eſſe productum ex his duabus formulis:

$$(1 + A)(1 + B)(1 + C) = 1 + P + Q + R,$$

et ex

$$(1 - A)(1 - B)(1 - C) = 1 - P + Q - R,$$

ſicque noſtra aequatio hanc induet formam:

$$(1 + P + Q + R)(1 - P + Q - R) \operatorname{coſ.} \Delta$$
$$= (1 - PP + 2Q + 2R)(P - Q) - R + QQ - 2PR - R(PP - 2Q) + RR$$

cuius membrum dextrum euolutum dat

$$P - Q - R - QQ + 2PQ + RR - P^3 + PPQ - PPR,$$

quod per $1 - P + Q - R$ diuiſum praebet quotientem $P - Q - R + PP$, conſequenter noſtra aequatio hanc induet formam:

$$(1 + P + Q + R) \operatorname{coſ.} \Delta = P - Q - R + PP.$$

§. 15. Hactenus igitur deducti ſumus ad hanc aequationem: $\operatorname{coſ.} \Delta = \frac{P - Q - R + PP}{2 + P + Q + R}$, vnde porro colligimus

$$1 + \operatorname{coſ.} \Delta = \frac{(1 + P)^2}{1 + P + Q + R} = 2 \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} \Delta^2,$$

conſequenter habebimus

$$\operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} \Delta = \frac{1 + P}{\sqrt{2(1 + P + Q + R)}}.$$

Cum igitur ſit

$$1 + P + Q + R = (1 + A)(1 + B)(1 + C)$$
$$= (1 + \operatorname{coſ.} a)(1 + \operatorname{coſ.} b)(1 + \operatorname{coſ.} c),$$

angulis dimidiis introductis erit

$1 + P$

$$1 + P + Q + R = 8 \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} a \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} b \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} c.$$

Quare cum fit

$$1 + P = 1 + \operatorname{cof.} a + \operatorname{cof.} b + \operatorname{cof.} c;$$

hinc tandem impetramus iftum valorem:

$$\operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} \Delta = \frac{1 + \operatorname{cof.} a + \operatorname{cof.} b + \operatorname{cof.} c}{4 \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} a \,.\, \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} b \,.\, \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} c},$$

quae eft altera demonftratio theorematis initio commemorati.

§. 16. Haec cogitandi occafionem mihi dedit theorema a Celeb. Profeffore Lexell in medium allatum, circa omnia triangula fphaerica eiusdem areae fuper eadem bafi exftruenda, quo acutiffime demonftrauit, omnes vertices horum triangulorum femper in quodam circulo minore fphaerae effe fitos; quae elegantiffima proprietas non nifi per plures ambages ex noftro theoremate deriuari poteft; verum fequens confideratio viam planiffimam ad hoc praeftandum aperiet.

De eximiis proprietatibus binorum circulorum parallelorum inter fe aequalium in fuperficie fphaerica.

§. 17. Sint MN et mn duo huiusmodi circuli paralleli, et quia fumuntur inter fe aequales, ab aequatore AB vtrinque aequaliter erunt remoti, perinde atque ab vtroque polo P et p. Hic prima proprietas, quae fe offert, in hoc confiftit, quod quilibet arcus circuli maximi Ee, inter hos duos parallelos interceptus, ad vtrumque aequaliter inclinetur, atque ab aequatore in O in duas partes Tab. I. Fig. 6.

tes aequales fecetur. Si enim per punctum O ducatur meridianus O P p, binos parallelos secans in H et h, ob angulos H O E et h O e inter se aequales ambo trilinea H O E et h O e manifesto inter se erunt aequalia et similia, ideoque tam erit O E = O e, quam angulus O E H = O e h. Praeterea hic obseruasse iuuabit, si iste arcus Ee vsque ad semicirculum continuetur, eum iterum in circulum minorem m n incidere, scilicet in eius puncto, quod puncto E diametraliter opponitur.

Tab. I. Fig. 7. §. 18. Ducatur nunc inter eosdem parallelos insuper alius arcus circuli maximi F f, ad vtrumque perinde inclinatus atque arcus E e, et manifestum est non solum hos duos arcus E e et F f inter se esse aequales, sed etiam circulorum minorum arcus E F et e f. Quare cum in hoc quadrilineo E F e f non solum latera opposita, sed etiam anguli oppositi sint inter se aequales, istud quadrilineum rite vocari posset parallelogrammum sphaericum, propterea quod omnibus proprietatibus parallelogrammorum est praeditum. Euidens enim est, istud quadrilineum etiam ab vtraque diagonali E f et F e in duo trilinea aequalia secari, scilicet tam area trilinei e f F quam E e F erit semissis areae parallelogrammi E e f F.

Fig. 8. §. 19. Exstrui nunc concipiatur super eodem arcu E F, tanquam basi, aliud huiusmodi parallelogrammum sphaericum E F ζ ε, atque facile intelligitur, areas horum duorum parallelogrammorum E F f e et E F ζ ε esse inter se aequales. Hic enim prorsus eodem modo, vti in plano, ambo trilinea E e ε et F f ζ inter se perfecte sunt aequalia, a quibus si trilineum commune o e ζ auferatur, quadrilinea resi-

reſidua $E o \zeta \varepsilon$ et $F o e f$ erunt inter ſe aequalia; quibus ſi addatur trilineum $E o F$, ambo parallelogramma integra erunt etiam aequalia; ſicque etiam euictum eſt, omnia parallelogramma ſphaerica, inter binos circulos parallelos et aequales, ſuper eadem baſi EF exſtructa, eſſe inter ſe aequalia.

§. 20. Cum igitur talia parallelogramma ſphaerica a diagonalibus in duas partes aequales diuidantur, etiam omnia trilinea ſuper eadem baſi EF exſtructa, et in altero parallelo mn terminata, areas habebunt inter ſe aequales; in hac ſcilicet figura quatuor habebuntur trilinea inter ſe aequalia, ſcilicet: 1. EfF; 2. EeF; 3. $E\zeta F$; 4. $E\varepsilon F$.

§. 21. Haec autem trilinea ideo non vocamus triangula, quia eorum baſis EF non eſt arcus circuli maximi, quemadmodum in triangulis ſpaericis ſtatui ſolet. Facile autem haec trilinea in triangula ſphaerica conuertuntur, ſi ab E ad F ducatur arcus circuli maximi $E\alpha F$, quo praedictis trilineis, idem augmentum $EF\alpha E$ accedit, ita vt nunc etiam omnia triangula ſphaerica ſuper eadem baſi $E\alpha F$ exſtructa, quorum vertices in alterum parallelum mn incidunt areas habeant aequales, ſi modo termini baſeos E et F in altero parallelo illi oppoſito MN fuerint aſſumti; ſicque iam clare euictum eſt, ſi ſuper baſi quacunque innumera conſtituantur triangula ſphaerica, quorum areae ſint inter ſe aequales, eorum vertices ſemper ſitos eſſe in circulo quodam ſphaerae minore. Hoc obſeruato problema clariſſimi Profeſſoris Lexell ſequenti modo facillime reſolui poterit.

Problema.

Tab. I. Fig. 9. *In superficie sphaerica super data basi E F omnia triangula sphaerica exstruere, quorum area sit data $= \Delta$, vbi quidem Δ designat arcum circuli maximi, qui per radium sphaerae multiplicatus producat aream praescriptam:*

Solutio.

§. 22. Sit igitur E F ipsa basis proposita $= a$, et totum negotium huc redit, vt inueniantur poli P et p, qui quaesito satisfaciant; his enim inuentis si ex polo p interuallo $p\,e = \mathrm{P\,E}$ describatur circulus minor $e\,f$, omnium triangulorum super basi E F exstructorum, et in circulo minori $e\,f$ terminatorum areae erunt inter se aequales; tantumque superest, vt ex area proposita Δ positio polorum P et p determinetur.

§. 23. Cum igitur E F sit arcus circuli maximi $= a$, ponatur $\mathrm{E\,P} = \mathrm{F\,P} = x$ et angulus $\mathrm{E\,P\,F} = \omega$, eritque ex Trigonometria sphaerica $\operatorname{cos.} \omega = \frac{\operatorname{cos.} a - \operatorname{cos.} x^2}{\operatorname{fin.} x^2}$, ideoque

$$1 - \operatorname{cos.} \omega = \frac{1 - \operatorname{cos.} a}{\operatorname{fin.} x^2} = 2 \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2} \omega^2.$$

Quare cum fit $1 - \operatorname{cos.} a = 2 \operatorname{fin.} \frac{1}{2} a^2$, erit $\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \omega = \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} a}{\operatorname{fin.} x}$, hinque viciffim $\operatorname{fin.} x = \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} a}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \omega}$. Ex cognito autem angulo ω innotefcit tota area fegmenti fphaerici inter binos femicirculos P E p et P F p, quippe quae erit $= 2\,\omega$. Scilicet arcus

arcus circuli maximi $= 2\omega$ per radium ſphaerae $= 1$ multiplicatus dabit aream huius ſegmenti.

§. 24. Quaeramus nunc etiam aream trianguli EPF, quem in finem vocetur angulus $PEF = PFE = \Phi$, ita vt ſumma trium angulorum huius trianguli ſit $= \omega + 2\Phi$, vnde area huius trianguli erit $= \omega + 2\Phi - \pi$. Quare ſi etiam ab e ad f arcus circuli maximi $e\omega f$ ducatur, erit quoque area trianguli ſphaerici $pe\omega f = \omega + 2\Phi - \pi$. Hinc ergo area quadrilateri ſphaerici $EFfe$ inter arcus circulorum maximorum Ee; Ff; EF et $e\omega f$ comprehenſi erit $2\omega - 2(\omega + 2\Phi - \pi) = 2\pi - 4\Phi$, cuius ſemiſſis manifeſto praebet aream trianguli ſphaerici EFe.

§. 25. Cum igitur punctum e ſit etiam in circulo minori ef, erit triangulum EeF vnum ex illis triangulis infinitis, quae ſuper baſi EF exſtruere oportet, cuius area debet eſſe $= \Delta$, ſicque adepti ſumus hanc aequationem $\Delta = \pi - 2\Phi$, vnde colligimus angulum $\Phi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\Delta$. Cum igitur angulus Δ detur, ſuper baſi data EF exſtruantur vtrinque anguli aequales $FEP = EFP = 90 - \frac{1}{2}\Delta$. Sicque innoteſcet polus P, ideoque et ei oppoſitus p, ex quo ſi interuallo $pe = PE$ deſcribatur circulus minor ef, omnia triangula ſuper baſi EF exſtructa et in peripheria circuli minoris ef terminata habebunt ipſam aream propoſitam $= \Delta$.

§. 26. Quo haec constructio facilior reddatur, ex polo P in medium baſis Π ducatur arcus normalis $P\Pi$, et quia in triangulo $EP\Pi$ habetur latus $E\Pi = \frac{1}{2}a$, cum

 angulo

angulo $PE\Pi = 90 - \frac{1}{2}\Delta$, hinc colligitur latus $EP = x$; cuius tangens eſt $\text{tang.}\, x = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2} a}{\text{ſin.}\, \frac{1}{2}\Delta}$. Nunc igitur inuenta quantitate arcuum EP et FP eorum interſectio dabit polum P, ex cuius oppoſito p circulus minor interuallo $pe = x$ deſcriptus praebet loca verticum omnium triangulorum ſuper baſi EF deſcribendorum, quae conſtructio egregie conuenit cum ea, quam clariſſimus Lexell inuenit.

VTRVM

VTRVM HIC NVMERVS: 1000009. SIT PRIMVS, NEC NE, INQVIRITVR

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 16 Mart. 1778.

§. 1.

Cum hic numerus manifesto sit summa duorum quadratorum, scilicet: $1000^2 + 3^2$, quaestio huc redit: num iste numerus adhuc alio modo in duo quadrata diuidi queat? Si enim id nullo modo fieri potest, hic numerus certe erit primus; sin autem adhuc alio modo talis resolutio succedat, tum non erit primus, atque tum adeo eius diuisores assignare licebit. Quare si vnum quadratum statuamus $= xx$, inquirendum est, vtrum altera pars, scilicet: $1000009 - xx$ euadere queat quadratum, praeter casus $x = 3$ et $x = 1000$, id quod sequenti modo explorari poterit.

§. 2. Quoniam iste numerus desinit in 9, alterum quadratum necessario diuidi poterit per 5, atque adeo per 25. Statuamus igitur, hanc formulam $1000009 - xx$ esse diuisibilem per 25, ac perspicuum est, necessario esse debere $x = 25a + 3$; tum enim habitur haec formula:

1000000

$$1000000 - 6 \cdot 25\, a - 25^2 \cdot a\, a$$

quae diuisa per 25 abit in hanc: $40000 - 6\, a - 25\, a\, a$, quae ergo forma quadratum esse debet.

§. 3. Hic duo casus sunt considerandi, prouti a fuerit vel numerus par, vel imper. Sit pro priori casu $a = 2\, b$, et facta diuisione per 4. quadratum esse debet haec formula:

$$A = 10000 - 3\, b - 25\, b\, b.$$

Pro altero casu sit $a = 4\, c + 1$, et formula quadratum reddenda erit

$$B = 39969 - 224\, c - 400\, c\, c,$$

quae vtique quadratum impar esse potest: sin autem pro eodem casu statuamus $a = 4\, d - 1$, haec resultat formula:

$$C = 39981 + 176\, d - 400\, d\, d,$$

quae, quia per 8 diuisa relinquit 5, quadratum nunquam esse potest, ita vt tantum binae formulae A et B sint examinandae.

Euolutio formulae.

$$B = 39969 - 224\, c - 400\, c\, c.$$

§. 4. Hic igitur litterae c successiue omnes valores 0, 1, 2, 3, etc. tam positiuos quam negatiuos tribuamus, et quoniam a numero absoluto 39969 subtrahi debet formula $400\, c\, c \pm 224\, c$, prout c fuerit numerus vel positiuus vel negatiuus, istos numeros successiue subtrahendos in duabus columnis, vna cum eorum differentiis annotemus:

c	$400\,cc - 224\,c$	Diff.	c	$400\,cc + 224\,c$	Diff.
0	0	176	0	0	624
1	176	976	1	624	1424
2	1152	1776	2	2048	2224
3	2928	2576	3	4272	3024
4	5504		4	7296	

Vbi ſtatim patet, pro vtroque caſu differentias continuo creſcere per 800.

§. 5. Iſtae igitur differentiae a numero illo abſoluto 39969 continuo ſubtrahantur, id quod commode etiam per binas columnas fieri poterit; vbi ergo videndum erit, an vsquam numeri quadrati reſultent.

39969	39969	31089	28849
177	624	4176	4624
39793	39345	26913	24225
976	1424	4976	5424
38817	37921	21937	18801
1776	2224	5776	6224
37041	35697	16161	12577
2576	3024	6576	7024
34465	32673	9585	5553
3376	3824	7376	
31089	28849	* 2209	

 §. 6.

§. 6. In vtroque hoc calculo vnicum occurrit quadradratum $2209 = 47^2$; vnde patet, numerum propofitum non effe primum, quemadmodum in differtatione, Tomo XIX. nouor. Commentar. *De tabula numerorum primorum vsque ad millionem et vltra continuanda*, inferta, eft confignatus, fed habere diuifores; ad quos inueniendos notetur, hoc quadratum prouenifse ex valore $c = -10$, vnde fit $a = -39$; tum vero colligitur $x = 25a + 3 = -972$, hincque

$$1000009 - xx = 55225 = 235^2,$$

ita vt hanc duplicem refolutionem habeamus:

$$1000^2 + 3^2 = 972^2 + 235^2,$$

hinc transponendo

$$1000^2 - 235^2 = 972^2 - 3^2,$$

vnde fequitur

$$(1000 - 235)(1000 + 235) = (972 - 3)(972 + 3),$$

fiue $1235 \cdot 765 = 969 \cdot 975$. Hinc fit $\frac{1235}{975} = \frac{969}{765}$, quae fractiones deprimuntur ad hanc fimpliciffimam: $\frac{19}{15}$, vnde denique denique concluditur, noftrum numerum cum fumma quadratorum $19^2 + 15^2$ communem habere diuiforem, qui ergo erit 293, atque reuera reperimus effe

$$1000009 = 293 \cdot 3413.$$

Ex quo patet, in tabulam memoratae differtationis, vbi omnes numeri primi intra 1000000 et 1002000 contenti exhibentur, errorem irrepfiffe, inde natum, quod confideratio diuiforis primi 293 eft praetermiffa.

Euo-

Euolutio formulae

$$A = 10000 - 3b - 25bb.$$

§. 7. Haec formula eſt pars centeſima formulae $1000009 - xx$, ad quam igitur euoluendam iterum duo caſus ſunt diſtinguendi, alter quo b eſt numerus par, alter vero quo impar. Pro priori caſu euidens eſt, niſi b ſit numerus pariter par, formulam propoſitam quadratum eſſe non poſſe. Sit igitur $b = 4c$, et forma reſultans, per 4 diuiſa, fiet $2500 - 30 - 100cc$, quae num quadratum eſſe queat, praeter caſum $c = 0$, haud difficulter apparebit. Primo enim euidens eſt, eſſe non poſſe $c = \pm 1$; deinde pariter ſumi nequit $c = \pm 2$. Sit igitur $c = \pm 3$, et formula noſtra euadet $2500 - 900 \pm 9 = 1600 \pm 9$, quod quadratum eſſe nequit. Sin autem ſumatur $c = \pm 4$ fiet

$$2500 - 1600 \pm 12 = 900 \pm 12,$$

certe non quadratum. Denique ſumto $c = \pm 5$, pariter quadratum oriri nequit: prodit enim

$$2500 - 2500 \pm 15 = 0 \pm 15.$$

§. 8. Pro altero caſu, vbi b numerus impar, ſtatuatur primo $b = 4d + 1$, ac formula propoſita euadet

$$9972 - 212d - 400dd,$$

quae diuiſa per 4 fit

$$2493 - 53d - 100dd,$$

quae caſu $d = 0$ manifeſto non eſt quadratum. Sumatur igitur $d = \pm 1$, prodibitque 2393 ± 53, pariter non quadratum; at caſus $d = \pm 2$, praebet 2093 ± 106; caſus vero $d = \pm 3$ dat 1593 ± 159, ex quorum neutro quadratum reſultat, neque ex caſu $d = \pm 4$, quippe qui dat 893 ± 212.

I 2 Caſus

Casus denique $d = -5$ praebet $-7 + 265$. Sit denique b numerus formae $4d - 1$, prodibitque

$$9978 + 188\,d - 400\,dd$$

qui numerus, cum sit par, neque tamen per 4 diuisibilis, quadratum esse nequit.

§. 9. Quo vis huius calculi magis eluceat, examinemus adhuc alium huiusmodi numerum in duo quadrata resolubilem, qui sit $1000081 = 1000^2 + 9^2$, et videamus vtrum adhuc alio modo in duo quadrata resolui possit, quorum alterum, vti in casu praecedente, necessario per 5 debet esse diuisibile. Posito igitur vno quadrato $= xx$, videamus an reliqua pars $1000081 - xx$ possit esse quadratum per 5 siue per 25 diuisibile.

§. 10. Hunc in finem statuamus $x = 25y + 9$, fietque formula illa $1000000 - 18 \cdot 25\,y - 25^2 yy$, quae per 4 diuisa abit in hanc simplicem: $40000 - 18\,y - 25\,yy$. Sit nunc primo y numerus par, h. e. $y = 2a$, et formula iterum per 4 diuisa ita se habet:

$$A = 10000 - 9\,a - 25\,aa.$$

Secundo pro numero impari statuatur 1°. $y = 4b + 1$, prodibitque

$$B = 39957 - 272\,b - 400\,bb,$$

qui numerus est impar et per 8 diuisus relinquit 5, ideoque quadratum esse nequit, vnde penitus omitti debet formula B. 2°. Statuamus $y = 4c - 1$, et formula erit:

$$C = 39993 + 128\,c - 400\,cc,$$

vbi

vbi numerus 39993 per 8 diuiſus relinquit 1, ideoque propiori examini eſt ſubiiciendus.

Euolutio formulae

$$C = 39993 + 128\,c - 400\,.\,cc.$$

§. 11. Quoniam hic a numero abſoluto 39993 ſucceſſiue ſubtrahi debent numeri in forma $400\,.\,cc \pm 128\,c$ contenti, in ſubſidium calculi, vt ſupra, ſubtrahendos numeros cum differentiis, prouti c fuerit vel poſitiuum vel negatiuum, in ſequenti tabula apponamus:

c	$400\,cc - 128\,c$	Diff.	c	$400\,cc + 128\,c$	Diff.
0	0		0	0	
1	272	272	1	528	528
2	1344	1072	2	1856	1328
3	3216	1872	3	3984	2128

Vbi iterum differentiae continuo 800 creſcunt.

§. 12. Subtrahamus ergo a numero abſoluto 39993 continuo has differentias octingentis creſcentes, qui calculus ita ſe habebit:

39993	39993	30633	29353
272	528	4272	4528
39721	39465	26361	24825
1072	1328	5072	5328
38649	38137	21289	19497
1872	2128	5872	6128
36777	36009	15417	13369
2672	2928	6672	6928
34105	33081	8745	6441
3472	3728	7472	
30633	29353	1273	

Hic igitur nullum plane quadratum occurrit

Euolutio formulae.

$$A = 10000 - 9a - 25aa.$$

§. 13. Ponamus loco a numerum parem, qui adeo debebit esse pariter par, sitque idcirco $a = 4e$, ita vt facta diuisione per 4 oriatur haec forma: $2500 - 9e - 100ee$. Hic igitur a numero absoluto successiue subtrahi debent numeri in forma $100ee \pm 9e$ contenti, qui igitur in sequenti tabula, prouti e fuerit numerus vel positiuus vel negatiuus, referuntur:

e	$100ee - 9e$	Diff.	$109ee + 9e$	Diff.
0	0		0	
1	91	91	109	109
1	382	291	418	309
3	873	491	927	509

Has igitur differentias ducentis crescentes a numero absoluto 2500 continuo subtrahamus, sequenti modo:

2500	2500
91	109
2409	2391
291	309
2118	2082
491	509
1627	1573
691	709
936	864
891	
45	

vbi igitur nulli occurrunt quadrati, praeter 2500, qui autem numerus ad quadratum notum 1000^2 perducit.

§. 9. Sit nunc a numerus impar, ac primo quidem formae $4f + 1$, vnde formula nostra euadit,

$$9966 - 236f - 4ff,$$

qui numerus cum sit impariter par, quadratum esse nequit. Statuamus ergo $a = 4f - 1$, et formula prodit

9984

$$9984 + 164f - 4ff,$$

ideoque pariter par; at per 4 diuiſa ea abit in hanc:

$$2496 + 41f - 100ff.$$

Hic igitur a numero abſoluto numeri in forma $100ff \pm 41f$ ſunt ſubtrahendi, qui, prouti f fuerit numerus poſitiuus vel negatiuus, ita ſe habebunt:

f	$100ff - 41f$	Diff.	f	$100ff + 41f$	Diff.
0	0		0	0	
		59			141
1	59		1	141	
		259			341
2	318		2	482	
		459			541
3	777		3	1023	

Subtrahantur iam differentiae ducentis creſcentes a numero abſoluto:

2496	2496
59	141
2437	2355
259	341
2178	2014
459	541
1719	1473
659	741
1060	732
859	
201	

Quoniam igitur in toto hoc calculo nullum quadratum occurrit, certum eſt numerum propoſitum 1000081 vnico tantum

tum modo in duo quadrata resolui posse, ideoque certo esse numerum primum, qualis in tabula dissertationis memoratae exhibetur; atque hic imprimis memorabile est, quod tam facili calculo de hac veritate sumus certiores facti.

§. 15. Dolendum autem est, hanc methodum non ad omnes numeros explorandos adhiberi posse, sed restringi ad eos tantum numeros, qui non solum sint summae duorum quadratorum, sed qui desinant insuper in 1 vel 9; quia de his tantum valet, quod alterum quadratum diuisibile sit per 5.

§. 16. Interim tamen hac methodo omnes plane numeri in forma $4n+1$ contenti et siue in 1 siue in 9 desinentes pari successu examinari possunt; quandoquidem nouimus, si tales numeri in duo quadrata resolui queant, alterum certo per 5 esse diuisibile. Tum autem, calculo secundum praecepta data instituto, si reperiatur, numerum propositum vnico modo in duo quadrata resolui posse, id certum erit signum, illum esse primum: sin autem hoc duobus pluribusue modis fieri queat, inde eius factores assignare licebit, eo modo, quo supra vsi sumus. Quod si vero eueniat, vt numerus propositus nullo plane modo in duo quadrata diuidi queat, tum id etiam erit signum, talem numerum non esse primum, etiamsi eius factores hinc definire non licet; tantum autem concludere licet, duos ad minimum factores habere primos formae $4n-1$.

COMMENTATIO IN PAPPI ALEXANDRINI THEOR. XVI. LIB. IV.

Auctore

F. T. SCHVBERT.

Conuentui exhibita die 2 Maji, 1793.

§. 1.

Propositiones geometricae, quas loc. cit. *Pappus* methodo synthetica demonstrat, ob elegantiam et simplicitatem suam, maxima omnino attentione sunt dignae. Verum syntheticae demonstrationis prolixitate deterritus, aliam analyticam quaesivi, quae quidem primo aggressu ad calculum perduxit satis prolixum: mox tamen tam constans apparuit ordo ac uniformitas, ut ope commodarum substitutionum formulae satis redderentur concinnae. Quum analytice progrediendo rem generalius tractare semper liceat, quum praeterea haec materia, ob plures casus sub generali Theorematis enunciatione contentos, Analysi magis videatur adaptata quam Synthesi, quum ea denique arcte connexa sit cum Problemate, quo datis tribus circulis quartus quaeritur, qui omnes tres tangat: haud inutilis mihi videtur materiae huius evolutio analytica. Ipsa vero propositio haec est:

In

In Diametro DE circuli DLE, cuius centrum A, aſſumto quovis puncto F, et ſuper DF, EF, deſcriptis ſemicirculis circa centra B, C, tumque deſcripto circulo e centro a, majorem circulum A intus, binos reliquos extus tangente; deinde circulo circa centrum b, tangente circulum a binosque e circulis A, B, C; porro circulo c, tangente circulum b eosdemque binos e circulis A, B, C, et ſic porro; deinde e ſingulis centris a, b, c, demiſſis perpendiculis ad diametrum DE: iſtae perpendiculares ſemper erunt multipla diametrorum circulorum, ad quos referuntur, ſecundum hanc legem, ut exponens multipli ſemper aequetur numero exprimenti, quotus quisque in ordine ſit circulus, incipiendo a circulo a. Sic erit $a\alpha = 1 . Ll$, $b\beta = 2\,Mm$, $c\gamma = 3\,Nn$, etc.

Methodo analytica id inprimis obtinendum eſt, quod vires Syntheſeos ſuperare videtur, ut demonſtretur, legem hanc, ſi pro uno vel altero circulo vera ſit, in infinitum poſſe extendi, unde ſequente ordine videtur eſſe procedendum.

Theorema.

§. 2. *Iisdem ſuppoſitis, erit normalis $a\alpha$ diametro Ll circuli a aequalis.*

Demonſtratio.

Ponantur radii circulorum $AD = A$, $BD = B$, $CE = C$, $aL = a$, vt ſit $AB = A - B$, $Aa = A - a$, $Ba = B + a$, $BC = B + C$, $Ca = C + a$. Quum itaque ſit in Triangulo ABa,

$$\operatorname{cof} aBC = \frac{AB^2 + Ba^2 - Aa^2}{2AB \cdot Ba},$$

et in Triangulo BCa,

$$\operatorname{cof} aBC = \frac{BC^2 + Ba^2 - Ca^2}{2BC \cdot Ba},$$

nan-

nancifcimur hanc aequationem:

$$(B+C)[(A-B)^2+(B+a)^2-(A-a)^2] = (A-B)[(B+C)^2+(B+a)^2-(C+a)^2], \text{ h. e.}$$

$$(B+C)(B^2-AB+Ba+Aa) = (A-B)(B^2+BC+Ba-Ca),$$

feu factis legitimis reductionibus,

$$B^2(B+C-A+a)-AC(B-a)=0,$$

unde fit

$$a = \frac{B(A-B)(B+C)}{B^2+AC}.$$

Eft autem in figura noftra $B+C=A$, $A-B=C$, quibus valoribus fubftitutis habemus

$$a = \frac{AB(A-B)}{A^2-AB+B^2} = \frac{ABC}{C^2+AB}.$$

Praeterea eft

$$\sin ABa = \frac{\sqrt{[2A.2B.2a.2(A-B-a)]}}{2(A-B)(B+a)},$$

per tria latera Trianguli ABa, unde reperitur

$$a\alpha = (B+a)\sin ABa = \frac{2\sqrt{[ABa(A-B-a)]}}{A-B}.$$

Vbi fi introducatur valor radii a modo repertus, ob

$$ABa = \frac{A^2B^2C}{C^2+AB}, \text{ et } A-B-a = \frac{C^3}{C^2+AB},$$

oritur normalis

$$a\alpha = \frac{2ABC}{C^2+AB} = 2a = Ll. \text{ Q. E. D.}$$

§. 3. Notatu omnino digna eft forma, quam hic pro radio a invenimus. Numerator fcilicet ABC eundem perpetuo fervat valorem pro ceteris omnibus radiis bM, cN, etc. uti mox videbimus. Denominator autem fub hac forma generali comprehenditur: n^2C^2+AB, feu $n^2(A^2+B^2)-$

(2 n^2

$(2n^2 - 1) AB$, quae abit in $A^2 + B^2 - AB = C^2 + AB$, posito $n = 1$; ut itaque n sit ipse ille factor vel exponens, de quo in Theoremate §. 1. sermo fuit.

Problema.

§. 4. *Invenire radium Mb circuli b, qui tres circulos A, B, a tangat.*

Solutio.

Quum circulus C problemati aeque satisfaciat ac circulus b, praevidere iam licet, aequationem inventum iri quadraticam, cuius una radix praebebit radium $C = A - B$, altera radium Mb, quem ponamus $= b$. Est autem in Triangulis bBa, bBA, aBA,

$$\cos bBa = \frac{Ba^2 + Bb^2 - ab^2}{2Ba \cdot Bb} = \frac{B(B + a + b) - ab}{B(B + a + b) + ab},$$

$$\cos bBA = \frac{BA^2 + Bb^2 - Ab^2}{2BA \cdot Bb} = \frac{Ab - B(A - B - b)}{Ab + B(A - B - b)},$$

$$\cos aBA = \frac{BA^2 + Ba^2 - Aa^2}{2BA \cdot Ba} = \frac{Aa - B(A - B - a)}{Aa + B(A - B - a)}.$$

Ex iisdem Triangulis habetur

$$\sin bBA = \frac{2\sqrt{[ABb(A - B - b)]}}{Ab + B(A - B - b)}, \text{ et}$$

$$\sin aBA = \frac{2\sqrt{[ABa(A - B - a)]}}{Aa + B(A - B - a)}.$$

Ponatur compendii causa

$$A - B = C,\ A + B = D,\ B + a = E,\ B - a = F.$$

Vnde ob $bBa = bBA - aBA$, reperitur

$$\cos bBa = \frac{(Da - BC)(Db - BC) + 4AB\sqrt{[ab(C - a)(C - b)]}}{CC(B + a)(B + b)}.$$

At supra inveneramus $\cos bBa = \frac{BE + Fb}{(B + a)(B + b)}$, quibus valoribus aequatis adipiscimur:

$$4AB\sqrt{ab(C - a)(C - b)} = b(CCF + BCD - DDa) \\ + BC(CE + Da - BC).$$

Coefficiens ipfius b eft

$$=BC(C+D)-a(CC+DD)=2AB(A-B)-2a(AA+BB),$$

coefficiens autem producti BC eft $=a(C+D)=2Aa$. Quare fi integrae aequationis quadratum fumatur, prodibit

$$4A^2B^2ab(C^2-Ca-Cb+ab)=b^2[ABC-a(A^2+B^2)]^2+2ABCab[ABC-a(A^2+B^2)]+A^2B^2C^2a^2.$$

Eft autem $ABC-a(A^2+B^2)=-\frac{A^2B^2C}{C^2+AB}$ (§. 2.), unde pofito breuitatis gratia $C^2+AB=m$, vt fit $a=\frac{ABC}{m}$ (§. 2.), et integra aequatione in $\frac{m^2}{A^3B^3C^2}$ ducta, nancifcimur

$$4b[Cm-ABC-(m-AB)b]=ABbb-2ABCb+ABCC,$$

five ob $m-AB=CC$,

$$4bCC(C-b)=AB(C-b)^2.$$

Vnde fponte patet, aequationis huius quadraticae binas effe radices

$$1.)\ b=C,\ \text{et}\ 2.)\ b=\frac{ABC}{4CC+AB},\ \text{feu}$$

$$b=\frac{AB(A-B)}{4(A^2+B^2)-7AB}.\ \text{Q. E. I.}$$

§. 5. Hinc iam clarius perfpicitur lex, iuxta quam radii a, b, etc. progrediuntur. Prior nempe radix dat radium circuli C, altera radium circuli b, quorum uterque circulos A, B, a, tangit, quemadmodum in Problemate requiritur. Quum itaque feries circulorum tangentium, quae in infinitum continuari poteft, incipiat a circulo a, erit pro circulo a, index $n=1$, adeoque pro circulo b, $n=2$, pro circulo vero C, $n=0$, quibuscum formula generalis fupra affumta (§. 3.) perfecte convenit, in qua fi ponatur $n=0$, fit

fit radius $= \frac{ABC}{AB} = C$; at posito $n = 2$, radius est
$$= \frac{ABC}{4CC + AB} = b.$$

Theorema.

§. 6. *Perpendicularis $B\beta$ e centro b ad diametrum DE demissa aequalis est duplo diametri Mm circuli b, seu $b\beta = 4b$.*

Demonstratio.

Per §. 4. habemus
$$\sin bBA = \frac{2\surd[AB b(C - b)]}{C(B + b)},$$
ideoque
$$b\beta = Bb \sin bBA = \frac{2\surd[AB b(C - b)]}{C}.$$
Ibidem autem inuenimus $b = \frac{ABC}{4CC + AB}$, unde fit
$$AB b = \frac{A^2 B^2 C}{4CC + AB}, \text{ et } C - b = \frac{4C^3}{4CC + AB}.$$
Quocirca erit normalis
$$b\beta = \frac{4ABC}{4CC + AB} = 4b. \quad \text{Q. E. D.}$$

§. 7. Priusquam generalem Theorematis nostri demonstrationem aggrediamur, haud inutile erit peculiariter adhuc considerare circulum tertium c, quo melius ordinem successionis radiorum perspiciamus. Quoniam formulae §. 4. levi mutatione huic casui applicantur, haec disquisitio haud nimis erit prolixa.

Problema.

§. 8. *Invenire radium Nc circuli c, qui circulos A, B, b tangat.*

So-

Solutio.

Quum hic circulus c ad circulum b prorsus se habeat, ut circulus b ad circulum a, ideoque radius $Nc = c$ ex radio b eodem prorsus modo inveniatur ut radius b ex radio a, omnes formulae §. 4ti adhiberi hic possunt, si in iis loco radii a substituatur b, et c loco radii b. Habemus itaque

$$4A^2B^2bc(C-b)(C-c) = cc[ABC - b(A^2+B^2)]^2$$
$$+ 2ABCbc[ABC - b(A^2+B^2)] + A^2B^2C^2b^2.$$

Quare posito hic $b = \frac{ABC}{m}$, ut sit

$$m = 4CC + AB \text{ (§. 4.), et}$$
$$ABC - b(A^2+B^2) = \frac{ABC(3A^2+3B^2-7AB)}{m}$$
$$= \frac{ABC(3CC-AB)}{m}, \text{ et } C - b = \frac{4C^3}{m},$$

integra aequatione in $\frac{m^2}{A^2B^2C^2}$ ducta nanciscimur

$$16ABC^2c(C-c) = cc(3CC-AB)^2$$
$$+ 2ABCc(3CC-AB) + A^2B^2C^2, \text{ siue}$$
$$cc(9C^4 + 10ABC^2 + A^2B^2) - 2ABCc(5CC+AB)$$
$$+ A^2B^2C^2 = 0.$$

Aequatio haec in factores sponte ita dissoluitur

$$[c(CC+AB) - ABC][c(9CC+AB) - ABC] = 0,$$

ut itaque binae radices sint $c = \frac{ABC}{CC+AB}$, et

$$c = \frac{ABC}{9CC+AB} = \frac{AB(A-B)}{9(A^2+B^2)-17AB}. \text{ Q. E. I.}$$

§. 9. Prior radix idem est cum a radio circuli a (§. 2.), qui nempe circulos A, B, b pariter tangit. Utraque vero radix a et c ex radio b inventa, qui erat

$$= \frac{ABC}{n^2(A^2+B^2)-(2n^2-1)AB} \text{ (§. 5.), posito } n = 2,$$

sub

ſub eadem forma continetur, ſi in ea loco n ſubſtituatur $n-1$ et $n+1$. Eandem legem generalem eſſe, mox oſtendemus.

Theorema.

§. 10. *Normalis $c\gamma$ e centro c ad diametrum DE ducta aequalis eſt triplo diametri Nn circuli c.*

Demonſtratio.

Si in expreſſione pro ſin bBA inventa (§. 4. 6.) ſubſtituamus c loco b, fiet

$$\sin cBA = \frac{2\sqrt{[ABc(C-c)]}}{C(B+c)}, \text{ proinde}$$

$$c\gamma = Bc \sin cBA = \frac{2\sqrt{[ABc(C-c)]}}{C}.$$

Quare quum ſit $c = \frac{ABC}{9CC+AB}$ (§. 8.), reperitur

$$ABc = \frac{A^2B^2C}{9CC+AB}, \text{ et } C-c = \frac{9C^3}{9CC+AB},$$

conſequenter

$$c\gamma = \frac{6ABC}{9CC+AB} = 6c, \text{ ſeu } c\gamma = 3Nn. \text{ Q. E. D.}$$

Theorema.

§. 11. *Si in ordine circulorum tangentium a, b, c, etc. circulus c ſit ntus, generatim eſt radius $c = \frac{ABC}{n^2C^2+AB}$.*

Demonſtratio.

Ponamus, hanc formam valere ad circulum $(n-1)$ tum usque, ita ut repertus ſit radius proxime antecedens $b = \frac{ABC}{(n-1)^2C^2+AB}$, tum vero aequatio generalis, qua radius conſequens c per antecedentem b exprimitur, haec eſt (§. 8.)

$$4A^2B^2bc(C-b)(C-c) = cc[ABC-b(A^2+B^2)]^2$$
$$+2ABCbc[ABC-b(A^2+B^2)]+A^2B^2C^2b^2.$$

 Poſi-

Posito iam breuitatis gratia $m = (n-1)^2 C^2 + AB$, ut sit

$$b = \frac{ABC}{m}, \quad C - b = \frac{(n-1)^2 C^3}{m}, \text{ et}$$

$$ABC - b(A^2 + B^2) = \frac{ABC(n^2C^2 - 2nC^2 - AB)}{m},$$

integra aequatione per $\frac{A^2B^2C^2}{mm}$ divisa, resultabit

$$4(n-1)^2 ABCCc(C-c) = cc(n^2C^2 - 2nC^2 - AB)^2$$
$$+ 2ABCc(n^2C^2 - 2nC^2 - AB) + A^2B^2C^2, \text{ sive}$$
$$cc[n^2C^4(n-2)^2 + 2ABC^2(n^2 - 2n + 2) + A^2B^2]$$
$$- 2ABCc[C^2(n^2 - 2n + 2) + AB] + A^2B^2C^2 = 0,$$

ubi coefficiens primi termini cc aequalis est producto

$$(n^2C^2 + AB)[(n-2)^2C^2 + AB],$$

quo cum termino ultimo $A^2B^2C^2$ comparato concludere licet, integram aequationem factores agnoscere,

$$c(n^2C^2 + AB) - ABC, \text{ et } c[C^2(n-2)^2 + AB] - ABC,$$

quorum factorum productum actu esse reperitur. Hinc aequationis nostrae binae resultant radices

$$1.)\ c = \frac{ABC}{(n-2)^2C^2 + AB}, \text{ et } 2.)\ c = \frac{ABC}{n^2C^2 + AB};$$

quarum prior praebet radium circuli antecedentis a, altera circuli consequentis c.

Ostendimus itaque, si lex haec vera sit pro $n-1$, eandem quoque valere pro n et $n-2$. Quum itaque veritas formulae peculiariter demonstrata sit casibus $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ (§. 5. 3. 4. 9.); sequitur, eam in genere veram esse, quemcunque numerum integrum n denotet, sive affirmativum sive negativum. Q. E. D.

§. 12. Cum in formula nostra non nisi quadratum numeri n occurrat, ea numeris negativis non minus conve-

nit

nit quam positivis, quod etiam cuivis figuram intuenti statim patebit, dum infra lineam D E idem circulorum a, b, c ordo locum habet ac supra eam. Quinimo infra videbimus, vel numeros fractos non excludi. Praeterea formula $c = \frac{ABC}{n^2 C^2 + AB}$ docet, crescente numero n radios circulorum c, d, etc. perpetuo decrescere, non autem penitus evanescere, nisi n abeat in infinitum: unde patet, ab E ad D usque innumeros dari circulos tangentes, quod per se patet.

Theorema.

§. 13. *Pro quovis circulo nto generaliter verum est, perpendiculum e centro ad basin D E demissum aequari diametro eiusdem circuli in numerum n ductae.*

Demonstratio.

Perpendiculum $c\gamma$ in genere est $= \frac{2\sqrt{[ABc(C-c)]}}{C}$ (§. 10.), ubi si substituatur $c = \frac{ABC}{n^2 C^2 + AB}$ (§. 11.), erit

$$C - c = \frac{n^2 C^3}{n^2 C^2 + AB}, \text{ et } ABc(C-c) = \frac{n^2 A^2 B^2 C^4}{(n^2 C^2 + AB)^2},$$

proinde

$$c\gamma = \frac{2nABC}{n^2 C^2 + AB} = 2nc, \text{ seu } c\gamma = n \,.\, Nn. \text{ Q. E. D.}$$

§. 14. Iam itaque ad completam atque generalem Theorematis nostri (§. 1.) demonstrationem pervenimus, cuius ad casus quosdam speciales applicationem adhuc ostendamus. Talis est, si circuli b, c, etc. non ut in Fig. 1. circulos A, B, sed circulos B, C tangant, ut in Fig. 2. videre licet: ad quem casum novum calculum instituere haud opus erit. Quia enim loco circuli A, quem B intus tangebat, introducitur alius C, quem B extus tangit, patet,

 ra-

radium C ratione radii A oppositum habere situm. Si nempe, manente puncto contactus F fixo, circuli C radius continuo decrescat, donec evanescat, circulus C in punctum abit; et si radius C ulterius decrescat, seu negativum induat valorem, circulus C circulum B intus tanget: ubi si radius eius maior fiat radio B, circulus C idem est quod in Fig. 1. circulus A. Quare quum sit $C = A - B$, in omnibus formulis loco A substituendum est $-C$, loco C autem $-C - B = -(B + C) = -A$. Quapropter ex §. 4. habemus radium b per aequationem secundi gradus, cuius altera radix $= -A$, altera

$$= \frac{BC(B+C)}{4(B^2+C^2)+7BC} = \frac{ABC}{4A^2-BC}, \text{ ob } A = B + C.$$

Circulus nempe A circulos B, C, a, extus non minus tangit quam circulus b, quod radix prior indicat. Radius c reperitur vel $= a$, vel $= \frac{ABC}{9AA-BC}$ (§. 8.), seu generatim

$$c = \frac{ABC}{(n-2)^2 AA - BC}, \text{ et } c = \frac{ABC}{n^2 AA - BC} \text{ (§. 11.)}.$$

Veritas harum formularum etiam inde patet, quod in omnibus Triangulis, quae ad eas perduxerunt, latera Ba, Bb, etc. manent constanter $B + a$, $B + b$, etc. latus autem $AB = A - B$ abit in $BC = B + C$, et latus Aa vel Ab in Ca vel Cb, unde loco $A - a$, $A - b$, substituere oportet $C + a$, $C + b$, etc.

Theorema.

§. 15. *Propositio generalis (§. 1. 13.) non minus vera est casu quem Figura 2. repraesentat.*

Demonstratio.

Expressionem radii c esse generalem, modo ostendimus (§. 14.). Quoniam itaque hocce casu reperitur

sin

$$\sin c\,B\,C = \frac{2\sqrt{[B\,C\,c\,(B+C+c)]}}{(B+C)(B+c)},$$

erit normalis

$$c\,\beta = \frac{2\sqrt{[B\,C\,c\,(B+C+c)]}}{B+C}.$$

Quare cum ſit in genere $c = \frac{A\,B\,C}{n^2\,A^2 - B\,C}$ (§. 14.), ſequitur

$$A + c = \frac{n^2\,A^3}{n^2\,A^2 - B\,C}, \text{ et}$$

$$B\,C\,c\,(B+C+c) = \frac{n^2\,B^2\,C^2\,A^4}{(n^2\,A^2 - B\,C)^2},$$

conſequenter

$$c\,\beta = \frac{2\,n\,A\,B\,C}{n^2\,A^2 - B\,C} = 2\,n\,c. \text{ Q. E. D.}$$

§. 16. Alium caſum ſpecialem *Figura tertia* ob oculos ponit. Loco circuli C ſcilicet aſſumitur eiusdem circuli diameter F E, ut itaque primus circulus *a* tangat circulos A, B, et rectam F E. Ceteri circuli *b*, *c*, etc. manent quales erant in *Fig. 1.* ideoque ii omnes per circulum *a* eodem prorſus modo determinantur ac ſupra. Radius autem primus *a* per circulos A, B, C, alio iam modo determinari debet, ſiquidem circulus C evaneſcit. Quodſi itaque hunc caſum tanquam ſub generali Theoremate (§. 1.) comprehenſum conſiderare, ideoque formulas generales ad eum extendere velimus, ſic erit ratiocinandum. Circulus *a* iis in formulis erat *primus*, dum ſemicirculum C ſequebatur: numerus enim *n* pro circulis ſupra lineam D E ſitis accipiebatur poſitivus, pro circulis autem infra D E negativus (§. 12.): unde recte pro circulo C ſtatuimus $n = 0$ (§. 5.), quoniam dimidia eius pars ſupra, altera infra lineam D E iacet, ideoque hic circulus aequo iure poſitivis ac negativis annumerari poteſt: unde pro illo non poteſt non eſſe $n = 0$. Noſtro vero caſu (Fig. 3.) ſemicirculus C evaneſcit, ceterique omnes Tab. II. Fig. 3.

nes circuli a, b, c, etc. per hunc ſemicirculum regrediuntur, unde pro quolibet numerus n dimidia unitate diminui debet, ut pro circulo a fiat $n = \frac{1}{2}$, pro circulo b, $n = \frac{3}{2}$, et generatim loco n ſubſtituatur $n - \frac{1}{2}$. His poſitis formula pro radio c generalis foret (§. 11.)

$$c = \frac{A\,B\,C}{(n - \frac{1}{2})^2 C^2 + A\,B} = \frac{4\,A\,B\,C}{(2\,n - 1)^2 C^2 + 4\,A\,B},$$

ubi eſt $C = A - B$: et Theorema noſtrum generale (§. 13.) pro hoc caſu ſic enunciari deberet: normalis

$$c\gamma = 2\,(n - \tfrac{1}{2})\,c = (2\,n - 1)\,c.$$

§. 17. Hanc legem ſaltem in circulo a locum habere, facile patet. Eſt nempe

$$\sin A\,B\,a = \frac{2\sqrt{(A\,B\,a\,(A - B - a))}}{(A - B)(B + a)} \text{ in } \Delta\,A\,B\,a.$$

Eſt vero etiam in $\Delta\,a\,B\,\alpha$, $\sin A\,B\,a = \frac{a\,\alpha}{B\,a} = \frac{a}{B + a}$, unde fit $(A - B)^2\,a\,a = 4\,A\,B\,a\,(A - B - a)$, ideoque $a = 0$, et $a = \frac{4\,A\,B\,(A - B)}{(A - B)^2 + 4\,A\,B}$; eundemque valorem nacti fuiſſemus, ſi in formula generali (§. 16.) poſuiſſemus $n = \frac{1}{2}$. Valor prior $a = 0$ indicat punctum, et quidem punctum D, circulis A, B et diametro D E commune. Lex igitur aſſumta in circulo a locum habet; cum autem merito dubitari poſſit, utrum pro n numeros fractos aſſumere liceat, formulas noſtras hanc univerſalitatem vere admittere, paucis adhuc verbis demonſtrabimus.

Problema.

§. 18. *Formulam pro radio generalem invenire, caſu quem Fig. 3. exhibet.*

Solu-

Solutio.

Cum excepto circulo a, reliqui omnes b, c, etc. per antecedentem et circulos A, B, eodem plane modo determinentur ac in Fig. 1. erit etiam hic in genere (§. 11.) pro radio c,

$$4\,A^2 B^2 b\, c\,(A - B - b)(A - B - c)$$
$$= c\,c\,[A\,B\,(A - B) - b\,(A^2 + B^2)]^2$$
$$+ 2\,A\,B\,(A - B)\,b\,c\,[A\,B\,(A - B) - b\,(A^2 + B^2)]^2$$
$$+ A^2 B^2 (A - B)^2 b^2.$$

Ponamus iam, legem assumtam usque ad radium antecedentem b qui est $(n - 1)$tus, veram esse, ita ut sit

$$b = \frac{4\,A\,B\,(A - B)}{(2\,n - 3)^2 (A - B)^2 + 4\,A\,B} \quad (\text{§. } 16.),$$

et brevitatis gratia ponamus

$$(2\,n - 3)^2 (A - B)^2 + 4\,A\,B = m, \text{ et } A - B = C,$$

ita ut sit

$$b = \frac{4\,A\,B\,C}{m}, \text{ et } A - B - b = \frac{(2\,n - 3)^2\,C^3}{m},$$
$$A\,B\,(A - B) - b\,(A^2 + B^2) =$$
$$\frac{A\,B\,C}{m}\,(4\,n^2 C^2 - 12\,n\,C^2 + 5\,C^2 - 4\,A\,B).$$

Unde aequatione in $\frac{m\,m}{A^2 B^2 C^2}$ ducta nanciscimur

$$16\,(2\,n - 3)^2 A\,B\,C^2 c\,(C - c) =$$
$$c\,c\,[4\,n^2 C^2 - 12\,n\,C^2 + 5\,C^2 - 4\,A\,B]^2$$
$$+ 8\,A\,B\,C\,c\,[4\,n^2 C^2 - 12\,n\,C^2 + 5\,C^2 - 4\,A\,B]$$
$$+ 16\,A^2 B^2 C^2, \text{ sive}$$

$$c\,c[(2\,n - 1)^2 C^2 + 4\,A\,B]\,[(2\,n - 5)^2 C^2 + 4\,A\,B]$$
$$- 8\,A\,B\,C\,c[(4\,n^2 - 12\,n + 13)\,C^2 + 4\,A\,B]$$
$$+ 16\,A^2 B^2 C^2 = 0.$$

Est

Eſt autem

$$(4n^2 - 12n + 13)C^2 = \frac{(2n-1)^2}{2} C^2 + \frac{(2n-5)^2}{2} C^2,$$

unde poſito

$$(2n-1)^2 C^2 + 4AB = M;$$
$$(2n-5)^2 C^2 + 4AB = N;$$

aequatio noſtra fit:

$$MNcc - 4(M+N)ABCc + 16A^2B^2C^2 = 0;$$

cuius binae radices ſunt

$$c = \frac{2ABC}{MN}[M + N \pm (M - N)], \text{ ſeu}$$
$$c = \frac{4ABC}{N}, \text{ et } c = \frac{4ABC}{M}, \text{ h. e.}$$
$$c = \frac{4ABC}{(2n-5)^2 C^2 + 4AB}, \text{ et } c = \frac{4ABC}{(2n-1)^2 C^2 + 4AB}.$$

Poſterior cum forma generali ſupra aſſumta (§. 16.) prorſus congruit, unde eius generalitas eſt demonſtrata. Q. E. I.

§. 19. Pro *tertio* circulo c eſt $n = 3$, ideoque $c = \frac{4ABC}{25C^2 + 4AB}$; prior autem radix fit

$$= \frac{4ABC}{C^2 + 4AB} = a \text{ (§. 17.)},$$

ſiquidem circulus a Problemati aeque ſatisfacit. Poſito autem pro circulo b, $n = 2$, reperitur

$$b = \frac{4ABC}{9C^2 + 4AB}, \text{ et } b = \frac{4ABC}{C^2 + 4AB} = a.$$

Prolongata etenim recta $a\alpha$ infra DE, donec fiat $\alpha a' = a\alpha = a$, circulus radio a e centro a' deſcriptus circulos A, B, a, non minus tanget quam circulus b.

Theorema.

§. 20. *Eodem caſu pro quovis circulo nto in genere verum eſt, normalem $c\gamma$ e centro c ad baſin DE eſſe $= (2n-1)c$.*

De-

Demonſtratio.

Normalis $c\gamma$ per radios A, B, c, poſito $A - B = C$, generaliter ita exprimitur (§. 10.): $c\gamma = \frac{2\sqrt{[ABc(C-c)]}}{C}$, ubi ſi ſubſtituatur

$$c = \frac{4ABC}{(2n-1)^2C^2+4AB} \text{ (§. 18.), erit}$$

$$C - c = \frac{(2n-1)^2C^3}{(2n-1)^2C^2+4AB},$$

ideoque normalis

$$c\gamma = \frac{4(2n-1)ABC}{(2n-1)^2C^2+4AB} = (2n-1)c. \quad \text{Q. E. D.}$$

§. 21. Quum expreſſio $2n-1$ ſit terminus generalis ſeriei numerorum *imparium*, ſeu $2n-1$ numerus $n$tus impar, ſequitur, ſi circuli a, b, c, etc. ſecundum numeros naturales 1, 2, 3, etc. numeri m autem iuxta numeros impares 1, 3, 5, etc. progrediantur, quemvis radium circuli c in ordine $n$ti fore $= c = \frac{4ABC}{m^2C^2+4AB}$, et normalem $c\gamma = mc$, ubi eſt m numerus $n$tus impar.

§. 22. Inſignis haec elegantia et ſimplicitas legis, quam in omnibus hiſce caſibus obſervavimus, non minus locum habet in intervallis normalium $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, etc. ſi ea per radios, ad quos referuntur, generaliter exprimamus. Eſt nempe ubique

$$\beta\gamma^2 = (b+c)^2 - (b\beta - c\gamma)^2.$$

Quum itaque caſu *Figurae primae*, ſi c ſit circulus $n$tus, ſit

$$b\beta = 2(n-1)b, \text{ et } c\gamma = 2nc, \text{ (§. 13.)},$$

reperitur

$$\beta\gamma^2 = b^2(1-4n^2+8n-4) + 2bc(1+4n^2-4n) + cc(1-4n^2), \text{ ſive}$$

$$\beta\gamma^2 = -bb(4nn-8n+3)+2bc(4nn-4n+1)$$
$$-cc(4nn-1), \text{ h. e.}$$
$$\beta\gamma^2 = (2n-1)[-bb(2n-3)+2bc(2n-1)-cc(2n+1)].$$

Si itaque m fit numerus impar $n$tus, feu $m = 2n-1$, erit per ternos numeros impares continuo ordine fibi fuccedentes,

$$\beta\gamma^2 = m[-(m-2)bb+2mbc-(m+2)cc].$$

Pofito e. gr. $n = 3$, ideoque $m = 5$, erit

$$\beta\gamma^2 = 5(-3bb+5.2bc-7cc).$$

Pofito $n = 1$, erit pro circulis C et a, $C\alpha^2 = C^2 + 2Ca - 3a^2$. Eft autem revera

$$C\alpha^2 = Ca^2 - a\alpha^2 = (C+a)^2 - 4a^2 = C^2 + 2Ca - 3a^2.$$

§. 23. In *Figura tertia* eft $b\beta = (m-2)b$, et $c\gamma = mc$ (§. 21.). Unde habemus

$$\beta\gamma^2 = -bb(m^2-4m+3)+2bc(m^2-2m+1)-cc(m^2-1),$$

feu

$$\beta\gamma^2 = (m-1)[-(m-3)bb+2bc(m-1)-(m+1)cc],$$

ubi m eft numerus $n$tus impar $= 2n-1$, ideoque $m-1 = 2n-2$ numerus $n$tus par, fi o habeatur pro primo. Quodfi ergo numerus $n$tus par ponatur $= l$, habemus pro hoc cafu $\beta\gamma^2 = l[-(l-2)bb+2bcl-(l+2)cc]$, quae expreffio perfecte fimilis eft praecedenti.

Facile plures adhuc cafus fpeciales Problematis noftri finguntur, quae quomodo ex formulis noftris generalibus dijudicentur, hactenus dicta fatis oftendunt.

DE

DE LA DESCENTE D'UN CORPS
SUR UN PLAN INCLINÉ
DONT LES DEUX EXTRÉMITÉS SONT APPUYÉES SUR UN FOND ÉLASTIQUE.

Par
NICOLAS FUSS.

Présenté à l'Académie le 27 Janvier 1794.

§. 1.

Dans un Mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie dans la derniere Conférence de l'année passée, j'avois examiné le mouvement d'un corps qui descend, en glissant, sur un plan incliné mobile autour d'une extrémité & dont l'autre extrémité repose sur un fond élastique. Quoique dans ce Mémoire j'aye complettement déterminé le mouvement tant du corps que du plan incliné sur lequel il descend, pour un cas déterminé, & quoique la méthode, de laquelle j'y ai fait usage, puisse être facilement appliquée à tout autre cas; je ne pouvois guères être content de la solution de ce Problème, qui ne laisse pas d'être imparfaite, entant que je me suis vu dans la nécessité de recourir à des voyes d'approximation, n'ayant pas trouvé traitables les équations différentielles du second degré que les principes de Mécanique m'avoient fournies. On voit au premier coup d'oeil qu'on jette fur ces équations, que la principale difficulté qui s'oppofe à la folution complette du problème mentionné, vient de la variabilité de l'inclinaifon du plan. Il eft donc à préfumer qu'on réuffira mieux, en conçevant que la defcente du corps fe faffe fur un plan dont les deux extrémités font appuyées fur un fond élaftique & qui eft arrangé de maniere qu'il ne puiffe pas changer d'inclinaifon, quoiqu'il change de place. Le mouvement qui aura lieu ici, fera le fujet des recherches fuivantes.

Tab. II. Fig. 4. §. 2. Je fuppofe donc que le mouvement du corps fe faffe fur la face d'un Prisme triangulaire, dans un plan perpendiculaire à fes arrètes. Le triangle rectangle A B C repréfente la fection du Prisme faite par ce plan paffant par le centre de gravité du corps. La face BC du Prisme repofe fur les refforts B D & C E parfaitement égaux en force & en longueur, & afin que la face A C garde conftamment la même inclinaifon, ou que la face B C refte toujours parallèle au plan horizontal D E, je conçois la face A B enchaffée dans une couliffe verticale, de maniere que le Prisme puiffe monter & defcendre librement & fans frottement. Tout étant ainfi préparé, il s'agit de déterminer le mouvement d'un corps qui, placé en A, gliffe, en vertu de fa pefanteur, le long de la face A C du Prisme, & le mouvement du Prisme même qui, cédant à l'action du corps & comprimant les refforts fur lesquels il repofe, les racourcit & s'affaiffe.

§. 3. Soit l'angle d'inclinaifon de la face A C du Prisme B A C $= \alpha$, le poids du corps $=$ P, celui du Prisme me $= M$, & la longueur des reſſorts $BD = CE = a$, c'eſt-à-dire telle qu'elle eſt dans l'état initial, le corps ſe trouvant encore en repos en A, & le poids qu'ils ſoutiennent étant $P + M = Q$. Suppoſons qu'après t ſecondes de tems, à compter de l'inſtant où le corps eſt parti du point A, il ſoit parvenu jusqu'en Y, & que le Prisme A B C ſe ſoit affaiſſé de l'intervalle $AO = BT = s$, ayant pris la poſition O T U; & en tirant Y X parallèle à D E & mettant $AX = x$ & $XY = y$, à cauſe de $OX = x - s$ & de l'angle $TOU = \alpha$, nous aurons $y = (x - s)\,\text{tang.}\,\alpha$. Tab. II. Fig. 5.

§. 4. Examinons à préſent les forces qui agiſſent ſur le corps, & nous voyons qu'outre ſa propre peſanteur P, il eſt ſollicité par la preſſion que le Prisme exerce contre lui, dans la direction Y R perpendiculaire ſur la face O U. Nous nommerons cette force Π, & le frottement qui agit dans la direction Y O, contraire à la direction du mouvement, nous la mettrons $= \lambda\,\Pi$. En décompoſant ces deux forces Π & $\lambda\,\Pi$ ſelon la direction verticale O X & ſelon la direction horizontale A Y, nous aurons en tout:

$$\text{Selon } OX \text{ la force } \begin{cases} +P \\ -\Pi\,\text{ſin.}\,\alpha \\ -\lambda\,\Pi\,\text{coſ.}\,\alpha \end{cases}$$

$$\text{Selon } XY \text{ la force } \begin{cases} +\Pi\,\text{coſ.}\,\alpha \\ -\lambda\,\Pi\,\text{ſin.}\,\alpha \end{cases}$$

en vertu de quoi les deux équations qui contiennent la détermination du mouvement du corps P ſur le plan incliné feront:

$$\text{I. } \frac{P\,\partial\partial x}{2g\,\partial t^2} = P - \Pi\,\text{ſin.}\,\alpha - \lambda\,\Pi\,\text{coſ.}\,\alpha,$$

$$\text{II. } \frac{P\,\partial\partial y}{2g\,\partial t^2} = \Pi\,\text{coſ.}\,\alpha - \lambda\,\Pi\,\text{ſin.}\,\alpha,$$

 dans

dans lesquelles, comme l'on ſçait, g marque la hauteur, de laquelle un corps tombe dans la premiere ſeconde de ſa chûte, & où l'élément du tems ∂t eſt ſuppoſé conſtant.

§. 5. Conſiderons maintenant le mouvement du Priſme même qui, tandis que le corps gliſſe ſur la face A C, s'affaiſſe, avec le corps, dans la direction verticale A D. Ici nous voyons d'abord qu'outre le poids Q il y a encore trois autres forces qui agiſſent dans cette direction ſur le Priſme, ſavoir 1°.) une force Π ſin. α, qui eſt engendrée par la preſſion du corps contre le Priſme, ſelon la direction Y Q perpendiculaire à O U; 2°.) une force $\lambda\,\Pi$ coſ. α, partie du frottement que le Priſme ſouffre du corps, & qui s'oppoſe à l'élévation du Priſme que les reſſorts comprimés tendent à effectuer; 3°.) enfin, la force des reſſorts étant en raiſon inverſe de leur longueur, & cette longueur étant $TD = UE = a - s$, lorſque le corps eſt parvenu jusqu'en Y, on aura, pour cette poſition, la force des reſſorts $= \frac{aQ}{a-s}$, force qui réſiſte à la deſcente du Priſme. De là nous tirons pour le mouvement du Priſme même l'équation ſuivante:

$$\text{III.}\quad \frac{Q\,\partial\partial s}{2g\,\partial t^2} = Q - \frac{aQ}{a-s} + \Pi\,\text{ſin.}\,\alpha + \lambda\,\Pi\,\text{coſ.}\,\alpha.$$

Ces trois équations renferment la ſolution complette du Problème propoſé. Voyons quels ſont les moyens que l'Analyſe nous préſente pour la réſolution de ces trois équations.

§. 6. La voye qui paroît devoir nous conduire le plus facilement à notre but, c'eſt de faire disparoître la preſſion Π dans la troiſième équation. Pour cet effet nous déduirons ſa valeur de la premiere & ſeconde, en les combinant de cette maniere: I. ſin. α — II. coſ. α, ce qui nous donne

$P\,\partial\partial x$

$$\frac{P\,\partial\partial x\,\text{fin.}\,\alpha - P\,\partial\partial y\,\text{cof.}\,\alpha}{2g\,\partial t^2} = P\,\text{fin.}\,\alpha - \Pi.$$

Or comme $y = (x - s)\,\text{tang.}\,\alpha$ (§. 3.), on aura en prenant les fecondes differentielles

$$\partial\partial y = (\partial\partial x - \partial\partial s)\,\text{tang.}\,\alpha,$$

par conféquent

$$\partial\partial x\,\text{fin.}\,\alpha - \partial\partial y\,\text{cof.}\,\alpha = \partial\partial s\,\text{fin.}\,\alpha,$$

& partant

$$\frac{P\,\partial\partial s\,.\,\text{fin.}\,\alpha}{2g\,\partial t^2} = P\,\text{fin.}\,\alpha - \Pi,$$

d'où l'on obtient la preffion:

$$\Pi = P\,\text{fin.}\,\alpha\,(1 - \tfrac{\partial\partial s}{2g\,\partial t^2}).$$

§. 7. Subftituons cette valeur dans notre troifième équation, elle deviendra

$$\frac{Q\,\partial\partial s}{2g\,\partial t^2} = -\frac{Q\,s}{a-s} + P\,\text{fin.}\,\alpha\,(\text{fin.}\,\alpha + \lambda\,\text{cof.}\,\alpha)\,(1 - \tfrac{\partial\partial s}{2g\,\partial t^2}).$$

Mettons pour abrêger $\frac{Q}{P} = \frac{P+M}{P} = \delta$, &

$$\text{fin.}\,\alpha\,(\text{fin.}\,\alpha + \lambda\,\text{cof.}\,\alpha) = m,$$

& notre équation dégagée de la preffion fera

$$\frac{\delta\,\partial\partial s}{2g\,\partial t^2} = -\frac{\delta\,s}{a-s} + m - \frac{m\,\partial\partial s}{2g\,\partial t^2},$$

que nous repréfenterons ainfi:

$$(\delta + m)\,\partial\partial s = 2g\,\partial t^2\,(m - \tfrac{\delta\,s}{a-s}).$$

§. 8. Le premier ufage que nous ferons de l'équation que nous venons de trouver, fera de chercher à fon aide une expreffion finie pour la preffion Π, par curiofité feulement; car l'ayant fait fortir du calcul, nous n'en avons plus befoin pour la détermination du mouvement. Or l'équation trouvée dans le paragraphe précédent nous donne

$\partial\partial s$

$$\frac{\partial \partial s}{2 g \partial t^2} = \frac{m - \frac{\delta s}{a - s}}{\partial + m},$$

valeur qui, ſi nous la ſubſtituons dans la formule trouvée pour la preſſion (§. 6.) nous la donne ſous cette forme:

$$\Pi = \frac{P\, \mathit{ſin.}\, \alpha}{\delta + m} \cdot \frac{\delta a}{a - s},$$

expreſſion moyennant laquelle on ſera en état de déterminer pour chaque point Y la preſſion que le corps y exerce ſur le plan incliné, dès que l'affaiſſement s du Priſme ſera connu.

§. 9. Pour déterminer cet affaiſſement, je reprens l'équation du §. 7. & je la multiplie par $2 \partial s$, pour avoir

$$2 (\delta + m) \partial s \partial \partial s = 4 g \partial t^2 (m \partial s - \tfrac{\delta s \partial s}{a - s}),$$

dont la premiere intégrale eſt

$$(\delta + m) \partial s^2 = 4 g \partial t^2 (C + m s - \delta \int \tfrac{s \partial s}{a - s}).$$

Mais à cauſe de

$$\frac{s \partial s}{a - s} = \frac{a \partial s}{a - s} - \partial s,$$

le dernier terme deviendra

$$\int \frac{s \partial s}{a - s} = - a\, l\, (a - s) - s,$$

& partant notre équation ſera

$$(\delta + m) \partial s^2 = 4 g \partial t^2 [C + (\delta + m) s + \delta\, a\, l\, (a - s)],$$

où la conſtante C eſt déterminée par la conſideration de l'état initial, & par la condition que la vîteſſe du Priſme $\frac{\partial s}{\partial t}$ eſt nulle au commencement, où $s = 0$, deſorte que $C = - \delta\, a\, l\, a$, ce qui étant ſubſtitué notre équation une fois

fois intégrée aura cette forme:

$$(\delta + m)\,\partial s^2 = 4\,g\,\partial t^2\,[\delta\,a\,l\,\tfrac{a-s}{a} + (\delta + m)\,s].$$

§. 10. Jusqu'ici tout nous a réussi à souhait; mais cette équation paroît être le terme de nos succès; car en séparant les variables, il en résulte

$$\partial t = \frac{\partial s\,\sqrt{(\delta + m)}}{\sqrt{4\,g\,[\delta\,a\,l\,\frac{a-s}{a} + (\delta + m)\,s]}},$$

formule dont l'intégration ultérieure est impossible. Heureusement la nature du Problème favorise une supposition qui leve toutes les difficultés, & qui nous met en état d'achever notre solution d'une maniere très satisfaisante. Car si l'on considère que l'affaissement s du Prisme est produit par le seul mouvement du corps, & que par conséquent il ne sauroit jamais devenir bien considérable, on comprendra facilement que la fraction $\frac{s}{a}$ sera toujours & dans tous les cas une fraction assez petite, pour qu'en convertissant en série le logarithme de $\frac{a-s}{a}$, on puisse, sans hésiter, négliger le cube de cette fraction $\frac{s}{a}$, de même que toutes ses puissances supérieures, & mettre simplement

$$l\,\frac{a-s}{a} = (1 - \frac{s}{a}) = -\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa},$$

& de cette façon on aura

$$\partial t = \frac{\partial s\,\sqrt{(\delta + m)}}{2\,\sqrt{g\,(m\,s - \frac{\delta\,s\,s}{2\,a})}},$$

équation que nous multiplierons par $\frac{2\,\sqrt{\delta\,g}}{\sqrt{2\,a\,(\delta + m)}}$, pour l'avoir sous cette forme:

 $2\,\partial t$

$$\frac{2\,\partial t\sqrt{\delta g}}{\sqrt{2a(\delta+m)}}=\frac{\partial s}{\sqrt{(\frac{2mas}{\delta}-ss)}}.$$

§. 11. Afin de rendre le calcul plus commode, nous mettrons $\frac{ma}{\delta}=b$ & $\sqrt{\frac{\delta g}{2a(\delta+m)}}=n$, & nous aurons

$$2n\,\partial t=\frac{\partial s}{\sqrt{(2bs-ss)}},$$

& en prenant les intégrales:

$$2nt=\text{Arc. cof.}\,\frac{b-s}{b},$$

où il n'eft pas néceffaire d'ajouter une conftante, parceque t évanouit en mettant $s=0$, comme cela doit être. De cette équation nous tirons:

$$\text{cof. }2nt=\frac{b-s}{b},$$

& par conféquent l'affaiffement du Prisme pour le tems t fera

$$s=b-b\,\text{cof. }2nt=2b(\text{fin. }nt)^2.$$

§. 12. Afin de déterminer le lieu du corps defcendant, pour un tems quelconque je reprens la premiere de nos trois équations:

$$\frac{P\,\partial\partial x}{2g\,\partial t^2}=P-\Pi(\text{fin. }\alpha+\lambda\,\text{cof. }\alpha),$$

laquelle, en y fubftituant à la place de la preffion Π fa valeur

$$\Pi=P\,\text{fin. }\alpha\left(1-\frac{\partial\partial s}{2g\,\partial t^2}\right),$$

& mettant au lieu de fin. α (fin. $\alpha+\lambda$ cof. α) la lettre m, pourra être repréfentée ainfi:

$$\frac{\partial\partial x}{\partial t}=2g\,\partial t(1-m)+\frac{m\,\partial\partial s}{\partial t},$$

dont

dont l'intégrale premiere eſt

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 2\,g\,(1 - m)\,t + \frac{m\,\partial s}{\partial t},$$

& la ſeconde intégrale

$$x = g\,(1 - m)\,t\,t + m\,s.$$

Dans ces deux intégrations nous n'avons pas ajouté de conſtantes, parceque tant la vîteſſe verticale $\frac{\partial x}{\partial t}$, que l'eſpace parcouru, ou la deſcente verticale x deviennent zero d'elles mêmes, en mettant $t = 0$, comme la nature du Problème l'exige. Enfin l'eſpace que le corps a parcouru ſur la face O U du plan ſera

$$O\,Y = \frac{O\,X}{cof.\,\alpha} = \frac{x - s}{cof.\,\alpha} = \frac{(1 - m)\,(g\,t\,t - s)}{cof.\,\alpha}.$$

§. 13. Moyennant ces formules que nous venons de trouver, nous ſommes en état d'aſſigner, pour un intervalle de temps quelconque, écoulé depuis le commencement du mouvement, l'affaiſſement du Priſme, le raccourciſſement & la force des reſſorts, ſur lesquels il repoſe, la preſſion du corps & l'eſpace qu'il a parcouru, & par conſéquent le Problème eſt complettement réſolu.

§. 14. L'expreſſion que nous avons trouvée ci-deſſus (§. 11.) pour la quantité de l'affaiſſement du Priſme, ſavoir $s = 2\,b\,(\text{ſin.}\;n\,t)^2$ fait voir que cet affaiſſement ſera nul toutes les fois que $\text{ſin.}\,\frac{180^\circ.\,n\,t}{b\,\pi} = 0$; & qu'il ſera le plus grand, toutes les fois que $\text{ſin.}\,\frac{180^\circ.\,n\,t}{b\,\pi} = 1$. Le premier cas arrive, lorsque

$$t = \frac{b\,\pi}{n},\ \frac{2\,b\,\pi}{n},\ \frac{3\,b\,\pi}{n},\ \frac{4\,b\,\pi}{n},\ \&c.$$

l'autre cas aura lieu, lorsque

 $t =$

$$t = \frac{b\pi}{2n},\ \frac{3b\pi}{2n},\ \frac{5b\pi}{2n},\ \frac{7b\pi}{2n},\ \&c.$$

De là on voit que, pendant que le corps defcend fur la face indéfinie A C, ou O U du Prisme, le Prisme fe baiffe & fe relève alternativement, & obtient une efpèce de mouvement ofcillatoire, & que le plus grand affaiffement poffible fera $s = 2b = \frac{2ma}{\delta}$, le tems d'une ofcillation entiere étant $= \frac{b\pi}{n}$.

§. 15. De ce que nous venons d'obférver touchant le mouvement du Prisme, on doit conclure que le corps même acquerra une efpece de mouvement ondulatoire, c'eft-à-dire que la courbe qu'il décrit fera douée d'une infinité de points de flexion contraire. Pour faire voir ceci encore plus clairement, nous chercherons l'angle de courbure, que nous nommerons Φ, & fachant que

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{\partial y}{\partial x} = \left(1 - \frac{\partial s}{\partial x}\right)\text{tang.}\,\alpha,$$

à caufe de

$$\partial s = 4\,b\,n\,\partial t\,\text{fin.}\,n\,t\,\text{cof.}\,n\,t = 2\,b\,n\,\partial t\,\text{fin.}\,2\,n\,t,$$

$$\partial x = 2\,g\,(1 - m)\,t\,\partial t + 2\,b\,m\,n\,\partial t\,\text{fin.}\,2\,n\,t,$$

nous aurons

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{b\,n\,\text{fin.}\,2\,n\,t}{g\,(1 - m)\,t + b\,m\,n\,\text{fin.}\,2\,n\,t},$$

& par conféquent

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{g\,t - b\,n\,\text{fin.}\,2\,n\,t}{g\,t + \frac{b\,m\,n}{1 - m}\,\text{fin.}\,2\,n\,t} \times \text{tang.}\,\alpha.$$

§. 16. Cètte expreffion nous fait voir que l'angle de courbure fera égal à l'inclinaifon du plan, ou bien que

$\Phi = \alpha,$

$\Phi = \alpha$, toutes les fois que fin. $2nt = 0$, c'eft-à-dire Tab. II. Fig. 6.

$$t = \frac{b\pi}{2n}, \frac{2b\pi}{2n}, \frac{3b\pi}{2n}, \frac{4b\pi}{2n}, \text{\&c.}$$

ce qui font exactement les époques, où l'affaiffement a été nul & où il a été le plus grand. En prenant donc l'intervalle A F $= 2b$, & tirant la ligne droite indéfinie F G parallèlement à A B, la ligne courbe décrite par le corps, touchera alternativement les lignes indéfinies A B & F G, la premiere dans les points A′, A″, A‴, &c. qui répondent au tems $t = \frac{b\pi}{n}, \frac{2b\pi}{n}, \frac{3b\pi}{n}$, &c. l'autre dans les points F, F″, F‴, &c. qui répondent au tems $t = \frac{b\pi}{2n}, \frac{3b\pi}{2n}, \frac{5b\pi}{2n}$, &c. De plus nous voyons que $\Phi < \alpha$, toutes les fois que fin. $2nt$ pofitif, & que $\Phi > \alpha$, toutes les fois que fin. $2nt$ eft négatif.

§. 17. Voyons quel fera l'angle de courbure au commencement en A, lorsque $t = 0$, ou bien, parceque la pofition $t = 0$ laiffe la tangente de l'angle Φ indéfinie, lorsque t eft très petit & fin. $2nt = \frac{2nt}{b}$. Pour ce cas nous aurons

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{g - 2nn}{g + \frac{2mnn}{1-m}} \times \text{tang.}\,\alpha.$$

§. 18. Examinons auffi l'endroit de la courbe, où l'angle de courbure eft le plus petit, ce qui arrive lorsque

$$\text{tang.}\,\Phi = \left(1 - \frac{\partial s}{\partial x}\right)\text{tang.}\,\alpha,$$

eft un *Minimum*, & partant

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{b\,n\,\text{fin.}\,2nt}{g(1-m)t + b\,m\,n\,\text{fin.}\,2nt}$$

 un

un *Maximum.* Cette condition nous fournit l'équation fuivante:

$$2\,n\,\text{cof.}\;2\,n\,t\,[g\,(1-m)\,t + b\,m\,n\,\text{fin.}\;2\,n\,t] = \text{fin.}\;2\,n\,t\,[g\,(1-m) + 2\,b\,m\,n\,n\,\text{cof.}\;2\,n\,t],$$

qui fe reduit à $2\,n\,t = \text{tang.}\;2\,n\,t$, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque t eft infiniment petit, cas pour lequel nous avons trouvé tantôt

$$\text{tang.}\;\Phi = \frac{g - 2\,n\,n}{g + \frac{2\,m\,n\,n}{1-m}} \times \text{tang.}\;\alpha.$$

QVA-

DE QVADRILATERIS QVIBVS CIRCVLVM TAM INSCRIBERE QVAM CIRCVMSCRIBERE LICET.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuentui exhib. die 14 Aug. 1794.

§. 1.

Si quadrilateri circulo inscripti omnia latera fuerint cognita, notum est eius aream, radium circuli circumscripti, angulos, diagonales, etc., satis concinne per ipsa latera exprimi posse. Sin autem de quadrilateris agitur circulo circumscriptis, tum latera sola non sufficiunt ad determinandam aream, radium circuli inscripti, diagonales, angulos, puncta contactus, etc.; sed praeter latera postremorum elementorum vnum insuper cognitum esse debet vt reliqua definiri queant. Hanc inuestigationem nuper suscipiens cum in varias incidissem expressiones admodum simplices et commodas, eas heic exhibere eo minus dubito, quod ansam praebuerint nonnullas proprietates nouas et singulares eorum quadrilaterorum demonstrandi, quibus circulum tam inscribere quam circumscribere licet. Quo autem omnia in promtu sint quibus in nostra hac disquisitione indigemus, con-

consultum videtur exordium sumere a sequente problemate satis noto saepiusque soluto.

Problema I.

§. 2. *Datis omnibus lateribus quadrilateri circulo inscripti, inuenire radium huius circuli.*

Solutio.

Tab. III. Fig. I. Sint latera $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ et $DA = d$, radius vero circuli quadrilatero $ABCD$ circumscripti vocetur $AO = R$, atque manifestum est fore

$$AC^2 = 2R^2(1 - \text{cos}.\, AOC).$$

Est vero angulus $AOC = 2B$, consequenter

$$AC^2 = 4RR\,\text{sin}.\, B^2.$$

Porro cum sit

$$AC^2 = aa + bb - 2ab\,\text{cos}.\, B = cc + dd - 2cd\,\text{cos}.\, D$$

ob $D = 180^0 - B$ erit

$$aa + bb - 2ab\,\text{cos}.\, B = cc + dd + 2cd\,\text{cos}.\, B,$$

vnde deducitur

$$\text{cos}.\, B = \frac{aa + bb - cc - dd}{2(ab + cd)},$$

quo valore substituto habebimus

$$AC^2 = \frac{cd(aa + bb) + ab(cc + dd)}{ab + cd},$$

quod etiam ita repraesentari potest:

$$AC^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}.$$

Quodsi iste valor cum supra inuento comparetur, prodibit

$$R^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{4(ab + cd)\,\text{sin}.\, B^2}.$$

At

At vero eſt

$$\text{ſin. } B^2 = (1 - \text{coſ. } B)(1 + \text{coſ. } B),$$

vnde quoniam, denotante k ſemiſummam omnium laterum, fit

$$1 - \text{coſ. } B = \frac{(c+d)^2 - (a-b)^2}{2(ab+cd)} = \frac{2(k-a)(k-b)}{ab+cd},$$

$$1 + \text{coſ. } B = \frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{2(ab+cd)} = \frac{2(k-c)(k-d)}{ab+cd},$$

conſequenter

$$\text{ſin. } B^2 = \frac{4(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)}{(ab+cd)^2};$$

hoc valore ſubſtituto radius quaeſitus circuli quadrilatero A B C D circumſcripti ita exprimetur:

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)}}.$$

Corollarium 1.

§. 3. Cum ſuperficies trianguli A D C ſit $\frac{1}{2} cd$ ſin. D $= \frac{1}{2} cd$ ſin. B, ſuperficies vero trianguli A B C $= \frac{1}{2} ab$ ſin. B; ſi ſuperficiem totius quadrilateri littera Σ deſignemus, habebimus

$$\Sigma = \frac{1}{2}(ab + cd) \text{ ſin. } B$$

ſiue, ſubſtituto loco ſin. B valore ſupra inuento,

$$\Sigma = \sqrt{(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)},$$

haecque ſuperficies eſt maxima quam quatuor rectae a, b, c, d, includere poſſunt, ideo quod quadrilaterum circulo eſt inſcriptum.

Corollarium 2.

§. 4. Quod ambas diagonales noſtri quadrilateri attinet, eas ſequenti modo ſatis commode per latera exprimere licet:

$$AC = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}},$$
$$BD = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}},$$

vnde sequentia Theoremata notissima derivantur:

I. $AC.BD = ac + bd.$

II. $\frac{AC}{BD} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$

Corollarium 3.

§. 5. Pro angulis quadrilateri, quoniam neque sinus neque cosinus eorum satis commode exprimuntur, quaeramus tangentes dimidiorum angulorum, quae, subsidio formularum supra exhibitarum, ob tang. $\frac{1}{2}\zeta^2 = \frac{1 - cos.\zeta}{1 + cos.\zeta}$, sequenti modo facillime definiuntur:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(k-a)(k-d)}{(k-b)(k-c)}},$$
$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(k-b)(k-a)}{(k-c)(k-d)}},$$
$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(k-c)(k-b)}{(k-d)(k-a)}},$$
$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}D = \sqrt{\frac{(k-d)(k-c)}{(k-a)(k-b)}}.$$

Scholion.

§. 6. His de quadrilatero circulo inscripto praemissis, considerabimus in sequenti problemate quadrilaterum circulo circumscriptum, et praeter latera primo vnum punctorum contactus vt datum spectando, radium circuli inscripti, superficiem, angulos, diagonales et distantias angulorum a centro circuli inscripti determinabimus.

Problema 2.

§. 7. *Datis quatuor lateribus quadrilateri circulo circumscripti, vna cum puncto quolibet contactus, inuenire radium circuli inscripti.*

Solu-

Solutio.

Sint, vt supra, latera $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, tum vero ponatur: Tab. III. Fig. 2.

$$AP = AS = f,$$
$$BP = BQ = a - f = g,$$
$$CQ = CR = b - g = h,$$
$$DR = DS = c - h = i.$$

Vocetur porro radius circuli inscripti $oP = r$, & ductis ex centro o ad angulos rectis oA, oB, oC, oD, erit

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}A = \tfrac{r}{f};\ \ \text{tang.}\tfrac{1}{2}C = \tfrac{r}{h};$$
$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}B = \tfrac{r}{g};\ \ \text{tang.}\tfrac{1}{2}D = \tfrac{r}{i};$$

Cum igitur sit $\frac{1}{2}(A + B + C + D) = 180^0$, necesse est vt fiat $\text{tang.}\frac{1}{2}(A + B + C + D) = 0$. At vero est

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A + B) = \tfrac{(f + g)r}{fg - rr},$$
$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(C + D) = \tfrac{(h + i)r}{hi - rr}.$$

Hinc sequitur fore

$$\tfrac{f + g}{fg - rr} + \tfrac{h + i}{hi - rr} = 0,$$

ex qua aequatione adipiscimur radium circuli quadrilatero $ABCD$ inscripti

$$r = \sqrt{\tfrac{hi(f + g) + fg(h + i)}{f + g + h + i}},$$

quae expressio, ob $f + g = a$ et $h + i = c$, ad hanc concinniorem reducitur:

$$r = \sqrt{\tfrac{ahi + cfg}{a + c}}.$$

Corollarium 1.

§. 8. Quod ad superficiem quadrilateri attinet, quam supra charactere Σ designauimus, cuique obuium est eam

 hic

hic fore $\Sigma = \frac{1}{2} r (a + b + c + d)$, quae porro expreſſio, quoniam in omni quadrilatero circulo circumſcripto ſummae laterum oppoſitorum ſunt aequales, ad hanc reducitur: $\Sigma = r (a + c)$, ita vt ſit

$$\Sigma = \sqrt{(a + c)(a h i + c f g)}.$$

Corollarium 2.

§. 9. Inuento radio r anguli quadrilateri per tangentes dimidiorum angulorum ſupra §. 7. exhibitos definiuntur, ex quibus porro facile conficiuntur coſinus angulorum integrorum, qui ſunt

$$\text{coſ. } A = \frac{ff - rr}{ff + rr}; \quad \text{coſ. } C = \frac{hh - rr}{hh + rr},$$
$$\text{coſ. } B = \frac{gg - rr}{gg + rr}; \quad \text{coſ. } D = \frac{ii - rr}{ii + rr},$$

qui valores ſi adhibeantur, diagonales quadrilateri ſequenti modo per latera & radium circuli inſcripti exprimuntur:

$$AC = \sqrt{\frac{gg(a - b)^2 + rr(a + b)^2}{gg + rr}};$$
$$BD = \sqrt{\frac{ff(a - d)^2 + rr(a + d)^2}{ff + rr}}.$$

Corollarium 3.

§. 10. Ductis porro ex centro o circuli inſcripti ad angulos quadrilateri rectis oA, oB, oC, oD, ob $A o^2 = ff + rr$, ſubſtituendo loco rr valorem inuentum erit

$$A o^2 = \frac{(f + g)(f + h)(f + i)}{f + g + h + i},$$

quod autem quadratum, vna cum quadratis reliquarum diſtantiarum, ſequenti modo concinnius repraeſentari poteſt:

$$A o^2 = \frac{a d (f + h)}{a + c}; \quad C o^2 = \frac{c b (h + f)}{a + c};$$
$$B o^2 = \frac{b a (g + i)}{a + c}; \quad D o^2 = \frac{d c (i + g)}{a + c}.$$

Scho-

Scholion.

§. 11. Commode hic vſu venit, vt ſubſidio litterarum f, g, h, i, quibus ſegmenta laterum, a punctis contactus formata, deſignauimus, omnia per formulas tam ſimplices exprimi queant, quod, ipſis lateribus ſoloque ſegmento f in calculo relictis, non eueniſſet. In ſequente problemate, eiusque corollariis alia atque alia elementa tanquam cognita ſpectabimus, eorumque ope reliqua determinabimus.

Problema 3.

§. 12. *Datis quatuor lateribus quadrilateri circulo circumſcripti, vna cum angulo quolibet, inuenire puncta contactus.*

Solutio.

Maneant denominationes ſupra vſurpatae, vocetur-que inſuper angulus $BAD = 2\alpha$ & intervallum $AP = AS = x$, eruntque reliqua laterum ſegmenta

$$BP = BQ = a - x,$$
$$CQ = CR = b - a + x,$$
$$DR = DS = d - x,$$

quibus loco f, g, h, i ſubſtitutis ex §. 7. habebimus:

$$rr = \frac{a(b-a+x)(d-x) + cx(a-x)}{a+c},$$

quae expreſſio, ſi euoluatur, loco $\frac{ad}{a+c}$ vero breuitatis gratia p ſcribatur, ob $c + a - b = d$, ad hanc ſimpliciorem formam reducitur:

$$rr = p(b - a + 2x) - xx.$$

 At

At vero eſt $\frac{r}{x} = \text{tang.}\,\alpha$, conſequenter $rr + xx = \frac{xx}{\text{coſ.}\,\alpha^2}$, ideoque

$$xx = 2px\,\text{coſ.}\,\alpha^2 - p(a-b)\,\text{coſ.}\,\alpha^2,$$

vnde prodit ſegmentum quaeſitum:

$$x = p\,\text{coſ.}\,\alpha^2 \pm \text{coſ.}\,\alpha\,\sqrt{[pp\,\text{coſ.}\,\alpha^2 - p(a-b)]},$$

quo inuento reliqua puncta contactus etiam innoteſcunt.

Corollarium 1.

§. 13. Quodſi quaeratur radius circuli quadrilatero cuius omnia latera vna cum angulo quolibet ſunt data, inſcripti, ob $r = x\,\text{tang.}\,\alpha$ & $\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\alpha = \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2\alpha$, erit iſte radius:

$$r = \tfrac{1}{2}p\,\text{ſin.}\,2\alpha \pm \text{ſin.}\,\alpha\,\sqrt{[pp\,\text{coſ.}\,\alpha^2 - p(a-b)]},$$

qui igitur valor ſemper eſt realis, quoties $b > a$. Quando autem $b < a$, ne ſolutio fiat impoſſibilis, neceſſe eſt vt ſit $\text{coſ.}\,\alpha > \sqrt{\frac{a-b}{p}}$; tum autem ſemper duae ſolutiones locum habebunt, ob ſignum ambiguum radici praefixum. Quoniam enim, conſtituto inter latera $AB = a$ et $AD = d$, angulo $BAD = 2\alpha$, duplici modo quadrilaterum conſtrui poterit, cuius reliqua latera ſint $BC = b$ et $DC = c$, quorum altero, angulo gibbo praedito, quoque circulum inſcribere licet, duo vt emergant valores tam pro ſegmento x quam pro radio r, vtique neceſſe eſt.

Corollarium 2.

§. 14. Datis autem angulis quadrilateri $A = 2\alpha$, $B = 2\beta$, $C = 2\gamma$, $D = 2\delta$, vna cum radio circuli inſcripti r, quoniam

$$\frac{1}{tang.\zeta} + \frac{1}{tang.\eta} = \frac{fin.(\zeta+\eta)}{fin.\zeta\, fin.\eta},$$

latera sequenti modo exprimentur:

$$AB = a = \frac{r\, fin.(\alpha+\beta)}{fin.\alpha\, fin.\beta},$$
$$BC = b = \frac{r\, fin.(\beta+\gamma)}{fin.\beta\, fin.\gamma},$$
$$CD = c = \frac{r\, fin.(\gamma+\delta)}{fin.\gamma\, fin.\delta},$$
$$DA = d = \frac{r\, fin.(\delta+\alpha)}{fin.\delta\, fin.\alpha},$$

hincque superficies quadrilateri erit

$$\Sigma = r\,r\left[\frac{fin.\gamma\, fin.\delta\, fin.(\alpha+\beta) + fin.\alpha\, fin.\beta\, fin.(\gamma+\delta)}{fin.\alpha\, fin.\beta\, fin.\gamma\, fin.\delta}\right].$$

Corollarium 3.

§. 15. Si denique latera fuerint data, vna cum radio circuli inscripti, tum angulos sequenti modo definire licebit. Cum supra §. 13. inuenerimus

$$r = \tfrac{1}{2} p \text{ fin. } 2\,\alpha \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} p\, p \text{ fin. } 2\,\alpha^2 - p\,(a-b) \text{ fin. } \alpha^2)},$$

si loco fin. α^2 scribatur $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \text{fin. } 2\,\alpha^2)}$, erit

$$r\,r - p\,r \text{ fin. } 2\,\alpha + \tfrac{1}{2} p\,(a-b)$$
$$= \tfrac{1}{2} p\,(a-b)\sqrt{(1 - \text{fin. } 2\,\alpha^2)},$$

vnde porro, sumtis denuo quadratis, aequatione ordinata et resoluta elicitur:

$$\text{fin. } 2\,\alpha = \frac{r^3 + \frac{1}{2} r\,(a-b)\,[p \pm \sqrt{(\frac{b\,c\,p}{a+c} - r\,r]}}{p\,[r\,r + \frac{1}{4}(a-b)^2]},$$

Simili modo, mutatis mutandis, pro reliquis angulis quadrilateri reperitur:

$$\text{fin. } 2\,\beta = \frac{r^3 + \frac{1}{2} r\,(b-c)\,[p' \pm \sqrt{(\frac{c\,d\,p'}{a+c} - r\,r)}]}{p'\,[r\,r + \frac{1}{4}(b-c)^2]},$$

fin. 2

$$\text{fin. } 2\gamma = \frac{r^3 + \frac{1}{2} r (c - d) [p'' \pm \sqrt{(\frac{d a p''}{a + c} - r r)}]}{p'' [r r + \frac{1}{4} (c - d)^2]},$$

$$\text{fin. } 2\delta = \frac{r^3 + \frac{1}{2} r (d - a) [p''' \pm \sqrt{(\frac{a b p'''}{a + c} - r r)}]}{p''' [r r + \frac{1}{4} (d - a)^2]},$$

existente $p = \frac{a d}{a + c}$; $p' = \frac{b a}{a + c}$; $p'' = \frac{c b}{a + c}$ et $p''' = \frac{d c}{a + c}$. Omnes hi valores semper erunt reales, nisi fuerit $r r > \frac{a b c d}{(a + c)^2}$, ita vt maximus valor, quem r recipere potest, sit $r = \frac{\sqrt{a b c d}}{a + c}$.

Idem quoque ex solutione sequentis problematis patebit.

Problema 4.

§. 16. *Inter omnia quadrilatera a lateribus a, b, c, d, formata, illud inuenire cuius circulus inscriptus sit maximus.*

Solutio.

Maneant omnes denominationes supra introductae, et quaeratur segmentum x lateris a in quadrilatero conditioni praescriptae satisfaciente. Cum igitur supra §. 12 inuenerimus:

$$r r = p (b - a + 2 x) - x x,$$

differentietur haec aequatio, eritque

$$\frac{r \partial r}{\partial x} = p - x = 0,$$

vnde sequitur $x = p = \frac{a d}{a + c}$. Hinc porro sequitur fore quadratum radii circuli inscripti

$$r r = p (b - a) + p p$$

Est vero

$$b - a + p = \frac{b c + a (b - a - c - d)}{a + c} = \frac{b c}{a + c},$$

ideo-

ideoque

$$rr = \frac{abcd}{(a+c)^2} \text{ et } r = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c}.$$

Corollarium 1.

§. 17. Cum igitur in hoc quadrilatero ſit $x = \frac{ad}{a+c}$, quaeramus etiam reliqua laterum ſegmenta, quae ſupra litteris f, g, h, i, inſigniuimus, ac reperiemus

$$g = a - x = \frac{ab}{a+c},$$
$$h = b - a + x = \frac{bc}{a+c},$$
$$i = d - x = \frac{cd}{a+c},$$

vnde ſtatim intelligitur fore

$$fh = \frac{abcd}{(a+c)^2} = rr,$$
$$gi = \frac{abcd}{(a+c)^2} = rr,$$

Corollarium 2.

§. 18. Inuentis autem his ſegmentis f, g, h, i, tangentes dimidiorum angulorum quadrilateri ex §. 7. deſumtae ita ſe habebunt:

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\tfrac{bc}{ad}}; \text{ tang.} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\tfrac{cd}{ba}};$$
$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\tfrac{da}{cb}}; \text{ tang.} \tfrac{1}{2} D = \sqrt{\tfrac{ab}{dc}},$$

vnde ſequitur fore

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} A \,.\, \text{tang.} \tfrac{1}{2} C = 1,$$
$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} B \,.\, \text{tang.} \tfrac{1}{2} D = 1,$$

conſequenter $A + C = 180^0$ et $B + D = 180^0$, ita vt hoc quadrilaterum ſimul circulo ſit inſcriptibile.

Scholion 1.

§. 19. Quodſi igitur ex lineis a, b, c, d, quadrilaterum formetur ita comparatum, vt ei circulum ſimul inſcribere et circumſcribere liceat, ob $a + c = b + d = k$, eius area erit

$$\Sigma = \sqrt{a\,b\,c\,d}.$$

tum vero radius circuli circumſcripti

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{abcd}},$$

et radius circuli inſcripti

$$r = \frac{\sqrt{abcd}}{a + c},$$

qui ſimul, vt vidimus, eſt media proportionalis inter binorum laterum oppoſitorum ſegmenta iuxta angulos oppoſitos ſita, cum ſit

$$rr = fh = gi,$$

quemadmodum etiam ſimilitudo triangulorum APo et oRC nec non BQo et oSD declarat.

Scholion 2.

§. 20. His expeditis operae pretium videtur examinare, quomodo huiusmodi quadrilatera, quibus ſimul circulum inſcribere et circumſcribere licet, conſtruantur, id quod vel pure geometrico modo, vel analytice, ope formularum ſupra traditarum effici poterit, prouti ſcilicet alia atque alia elementa vt data ſpectantur.

Problema.

§. 22. *Dato circulo quadrilaterum circumſcribere, cui denuo circulum circumſcribere liceat.*

Con-

Conſtructio.

Dato circulo, cuius centrum in o, pro lubitu inſcribatur quadrilaterum $a\,b\,c\,d$, in cuius latera e centro o demittantur perpendicula $o\,p$, $o\,q$, $o\,r$, $o\,s$, quibus ad peripheriam circuli vsque productis, per puncta interſectionis P, Q, R, S agantur rectae A B, B C, C D, D A lateribus quadrilateri $a\ b\ c\ d$ parallelae, eritque A B C D quadrilaterum circulo dato circumſcriptum, cui, ob $A + C = a + c = 180°$ et $B + D = b + d = 180°$, denuo circulum circumſcribere licebit. Tab. III. Fig. 3.

Lemma.

§. 22. *Si quadrilatero A B C D circulus inſcribi poterit, tum etiam ſimili quadrilatero* a b c d *circulum inſcribere licebit.* Fig. 4 et 5.

Demonſtratio.

Sit O centrum circuli quadrilatero A B C D inſcripti, ex quo ad angulos ducantur rectae O A, O B, O C, O D. Tum vero biſecentur anguli a et d quadrilateri $a\ b\ c\ d$ rectis $a\,o$ et $d\,o$, atque ex earum interſectione o ducantur rectae $o\,c$ et $o\,b$, et cum ſit angulus $D\,A\,O = d\,a\,o$ et angulus $A\,D\,O = a\,d\,o$, erit triangulum A O D ſimile triangulo $a\,o\,d$, conſequenter $A\,O : a\,o = A\,D : a\,d$. Eſt vero, ob ſimilitudinem quadrilaterorum, $A\,D : a\,d = A\,B : a\,b$, hincque $A\,o : a\,o = A\,B : a\,b$, vnde ſequitur fore $\Delta\,A\,O\,B \backsim \Delta\,a\,o\,b$, ideoque angulum $A\,B\,O = a\,b\,o$, ergo etiam anguli C B O et $c\,b\,o$ erunt aequales, hinc ob $ABO = CBO$, erit quoque $a\,b\,o = c\,b\,o$. Cum igitur omnes quatuor anguli quadrilateri $a\,b\,c\,d$ a rectis $a\,o$, $b\,o$, $c\,o$, $d\,o$, biſecentur,

tur, punctum o necessario est centrum circuli huic quadrilatero inscripti.

Problema 6.

§. 23. *Dato circulo quadrilaterum inscribere, cui denuo circulum inscribere liceat.*

Constructio.

Describatur pro lubitu circulus, eique secundum §. 21.
Tab. III. Fig. 6. circumscribatur quadrilaterum P Q R S, cui denuo circulum inscribere liceat. Ex centro O circuli huic quadrilatero P Q R S circumscripti ducantur ad angulos rectae O P, O Q, O R, O S, quae circulum datae magnitudinis eodem centro O descriptum secent in punctis A, B, C, D. Iungantur haec puncta rectis A B, B C, C D, D A, eritque A B C D quadrilaterum simile quadrilatero P Q R S. At hoc quadrilaterum circulo est circumscriptum, ergo vi lemmatis, §. 22, etiam quadrilatero A B C D circulum inscribere licebit.

Problema 7.

§. 24. *Datis quatuor lateribus quadrilaterum construere, cui circulum tam inscribere quam circumscribere liceat.*

Solutio.

Sint latera data a, b, c, d, quae autem ita comparata esse debent, vt oppositorum summae sint aequales, hoc est $a + c = b + d$. Ex his lateribus quaeratur valor radii

Tab. IV. Fig. 1.

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{abcd}}.$$

Hoc radio describatur circulus, et sumto in eius peripheria, pro arbitrio, puncto A, intervallo $AB = a$ et $AD = d$ fececetur peripheria in B et D; tum vero centro B, radio $BC = c$ fecetur peripheria in C, et ductis A B, B C, C D, D A, quadrilatero circulo inscripto A B C D quoque circulum inscribere licebit, cuius radius $r = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c}$.

Problema 8.

§. 25. *Datis duobus lateribus et angulo intercepto, quadrilaterum construere cui circulum tam inscribere quam circumscribere liceat.*

Solutio.

Constitutis lateribus datis $AB = a$, $AD = d$, ita vt angulum $BAD = 2\alpha$ includant, per puncta B, A, D, describatur circulus. Tum vero angulus B A D bifariam secetur recta A o, in qua capiatur interuallum

$$Ao = \frac{(a+d)\cos.\alpha}{2\cos.2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{(a+d)^2\cos.\alpha^2}{4\cos.2\alpha^2} - \frac{ad}{\cos.2\alpha}\right)}.$$

Porro ex puncto o in rectas A B et A D demittantur perpendicula oP et oS, et centro o, radio $oP = oS$ describatur circulus, cuius ex B et D ducantur tangentes B C et D C, eritque A B C D quadrilaterum quaesitum.

Analysis.

Vocetur interuallum $Ao = x$, eritque

$oP = r = x \sin.\alpha$,

$AP = AS = x \cos.\alpha$,

$DR = DS = d - x\cos.\alpha$,

$BP = BQ = a - x\cos.\alpha$,

$CR = CQ = \frac{r^2}{AP} = \frac{x\sin.\alpha^2}{\cos.\alpha}$.

 Hinc,

Hinc, cum ſit ex §. 19. $fh = gi$, hoc eſt AP.CR = BP.DR, habebimus hanc aequationem reſoluendam:

$$xx \text{ ſin. } \alpha^2 = (a - x \text{ coſ. } \alpha)(d - x \text{ coſ. } \alpha)$$

quae euoluta abit in hanc:

$$xx \text{ coſ. } 2\alpha = (a + d) x \text{ coſ. } \alpha - ad,$$

ex qua porro deducitur interuallum

$$A o = x = \frac{(a+d) \text{ coſ. } \alpha}{2 \text{ coſ. } 2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{(a+d)^2 \text{ coſ. } \alpha^2}{4 \text{ coſ. } 2\alpha^2} - \frac{ad}{\text{coſ. } 2\alpha}\right)}.$$

Corollarium.

§. 26. Ex ſigno ambiguo parti irrationali praefixo ſequitur duplicem dari valorem pro interuallo $A o$, quorum vnus ſuppeditat centrum circuli quadrilatero reuera inſcripti, alter vero dat centrum circuli qui quatuor tangit latera producta alius quadrilateri eidem circulo inſcripti et a priore tantum poſitione diuerſi, quod quo clarius perſpiciatur, ſequenti exemplo hunc caſum illuſtrabimus.

Exemplum.

§. 27. Sit $a = 10$, $d = 5\frac{1}{2}$ et angulus $2\alpha = 120^0$,
Tab. IV. eritque $x = -\frac{31 \pm \sqrt{(31^2 + 16 \cdot 110)}}{4}$, ideoque $x = + 5,291$ et
Fig. 2. $x = - 20,791$. Conſtitutis igitur rectis $AB = 10$ et $AD = 5\frac{1}{2}$, ita vt angulus $BAD = 120^0$, biſecetur angulus iſte recta $o'o$, ſumtisque in ea interuallis $Ao = 5,291$ et $Ao' = 20,791$, punctum o erit centrum circuli latera quadrilateri ABCD circulo inſcripti contingentis in punctis P, Q, R, S; punctum vero o' erit centrum circuli, qui latera alius quadrilateri ABC′D, eidem circulo inſcripti, et tantum poſitione a quadrilatero ABCD diuerſi, producta tangit in punctis P′, Q′, R′, S′.

Pro-

Problema 9.

§. 28. *Si circulo dato circumſcribatur quadrilaterum circulo inſcriptibile, ita vt anguli ſint datae magnitudinis, inueſtigare eius latera, aream et radium circuli circumſcripti.*

Solutio.

Cum circulus, cui circumſcribendum eſt quadrilaterum, ſit datus, eius radius tanquam vnitas ſpectari poterit, qua reliqua metiuntur. Tum vero, quoniam quadrilaterum circulo debet eſſe inſcriptibile, ſumma angulorum oppoſitorum duobus rectis aequalis ſit neceſſe eſt; vnde ſi in formulis ſupra §. 14. exhibitis ponatur $r = 1$, $\gamma = 90^0 - \alpha$ et $\delta = 90^0 - \beta$, quatuor latera ſequenti modo exprimentur: Tab. IV. Fig. 1.

$$AB = a = \frac{\sin.(\alpha+\beta)}{\sin.\alpha\,\sin.\beta},$$

$$BC = b = \frac{\cos.(\alpha-\beta)}{\cos.\alpha\,\sin.\beta},$$

$$CD = c = \frac{\sin.(\alpha+\beta)}{\cos.\alpha\,\cos.\beta},$$

$$DA = d = \frac{\cos.(\alpha-\beta)}{\sin.\alpha\,\cos.\beta}.$$

Hinc cum ſit

$$a\,c = \frac{4\sin.(\alpha+\beta)^2}{\sin.2\alpha\,\sin.2\beta},$$

$$b\,d = \frac{4\cos.(\alpha-\beta)^2}{\sin.2\alpha\,\sin.2\beta},$$

erit ſuperficies quadrilateri

$$\Sigma = \sqrt{abcd} = \frac{4\sin.(\alpha+\beta)\cos.(\alpha-\beta)}{\sin.2\alpha\,\sin.2\beta}.$$

Tum vero ob $AC = 2R\sin.2\beta$ et $BD = 2R\sin.2\alpha$, habebimus

$$AC.BD = 4RR\sin.2\alpha\sin.2\beta.$$

Con-

Conſtat autem eſſe

$$AC.BD = ac + bd = \frac{4[\sin.(\alpha+\beta)^2 + \cos.(\alpha-\beta)^2]}{\sin.2\alpha \sin.2\beta},$$

vnde concluditur fore

$$RR = \frac{\sin.(\alpha+\beta)^2 + \cos.(\alpha-\beta)^2}{\sin.2\alpha^2 \sin.2\beta^2},$$

hincque nanciſcimur radium circuli quadrilatero circumſcripti

$$R = \frac{\sqrt{(1+\sin.2\alpha \sin.2\beta)}}{\sin.2\alpha \sin.2\beta}.$$

Quin etiam perimetrum quadrilateri ſatis concinne exprimere licet. Eſt enim

$$a+b+c+d = \frac{8\sin.(\alpha+\beta)\cos.(\alpha-\beta)}{\sin.2\alpha \sin.2\beta}.$$

Problema 10.

§. 29. *Si circulo dato inſcribatur quadrilaterum circulo circumſcriptibile, ita vt anguli ſint datae magnitudinis, inueſtigare latera, aream et radium circuli inſcripti.*

Solutio.

Cum poſito $\gamma = 90^0 - \alpha$ et $\delta = 90^0 - \beta$ ex §. 14. habeamus

$$a = \frac{r\sin.(\alpha+\beta)}{\sin.\alpha \sin.\beta}, \quad b = \frac{r\cos.(\alpha-\beta)}{\cos.\alpha \sin.\beta},$$
$$c = \frac{r\sin.(\alpha+\beta)}{\cos.\alpha \cos.\beta}, \quad d = \frac{r\cos.(\alpha-\beta)}{\sin.\alpha \cos.\beta},$$

conſequenter

$$R = \frac{r\sqrt{(1+\sin.2\alpha \sin.2\beta)}}{\sin.2\alpha \sin.2\beta},$$

quoniam circulus, cui quadrilaterum eſt inſcriptum, vt datus ſpectatur, eius radium pro vnitate ſumamus, qua omnia dimetiuntur, eritque radius circuli quadrilatero inſcripti

$$r = \frac{\sin.2\alpha \sin.2\beta}{\sqrt{(1+\sin.2\alpha \sin.2\beta)}},$$

con-

consequenter latera

$$a = \frac{4 \cos.\alpha \cos.\beta \sin.(\alpha+\beta)}{\sqrt{(1+\sin.2\alpha \sin.2\beta)}},$$
$$b = \frac{4 \sin.\alpha \cos.\beta \cos.(\alpha-\beta)}{\sqrt{(1+\sin.2\alpha \sin.2\beta)}},$$
$$c = \frac{4 \sin.\alpha \sin.\beta \sin.(\alpha+\beta)}{\sqrt{(1+\sin.2\alpha \sin.2\beta)}},$$
$$d = \frac{4 \cos.\alpha \sin.\beta \cos.(\alpha-\beta)}{\sqrt{(1+\sin.2\alpha \sin.2\beta)}},$$

vnde porro deducitur area

$$\Sigma = \frac{4 \sin.2\alpha \sin.2\beta \sin.(\alpha+\beta) \cos.(\alpha-\beta)}{1+\sin.2\alpha \sin.2\beta},$$

et perimeter

$$a+b+c+d = \frac{8 \sin.(\alpha+\beta) \cos.(\alpha-\beta)}{\sqrt{(1+\sin.2\alpha \sin.2\beta)}}.$$

Problema 11.

§. 30. *Datis radiis circulorum quadrilatero A B C D inscripti et circumscripti, inuenire distantiam centrorum.* Tab. IV. Fig. 3.

Solutio.

Sit o centrum circuli inscripti, O vero circuli circumscripti, vocenturque, vt hactenus, radii $oP = r$, $OA = R$, ac demissis ex punctis O et o in latus A B perpendiculis O V, o P, tum vero ex O in o P perpendiculo O T, erit distantia centrorum $Oo = D = \sqrt{(TO^2 + To^2)}$. Est vero

$$TO = \tfrac{1}{2} AB - AP = \frac{r \sin.(\alpha-\beta)}{2 \sin.\alpha \sin.\beta},$$

et ob $OV = \sqrt{(AO^2 - AV^2)} = \sqrt{(RR - \tfrac{1}{4} AB^2)}$, erit

$$To = oP - OV = r - \sqrt{(RR - \tfrac{1}{4} AB^2)}.$$

Ponatur nunc breuitatis gratia

$$\cos.(\alpha+\beta) = m; \quad \cos.(\alpha-\beta) = n;$$

atque habebimus

$$\sin.(\alpha+\beta)=\sqrt{(1-mm)},$$
$$\sin.(\alpha-\beta)=\sqrt{(1-nn)},$$
$$\cos.\,\alpha\cos.\,\beta=\frac{m+n}{2},$$
$$\sin.\,\alpha\sin.\,\beta=\frac{n-m}{2},$$
$$\sin.\,2\,\alpha\sin.\,2\,\beta=nn-mm.$$

Cum igitur ſupra §. 29. inuenerimus

$$R=\frac{r\sqrt{(1+\sin.\,2\,\alpha\sin.\,2\,\beta)}}{\sin.\,2\,\alpha\sin.\,2\,\beta},$$

facta ſubſtitutione erit

$$R=\frac{r\sqrt{(1+nn-mm)}}{nn-mm}.$$

Notetur autem eſſe

$$TO=\frac{r\sqrt{(1-nn)}}{n-m},$$
$$To=\frac{r(nn+mn-1)}{nn-mm},$$

vnde porro conficitur

$$Oo=D=\frac{r\sqrt{(1+mm-nn)}}{nn-mm}.$$

Cum igitur ſit

$$RR=\frac{rr(1+nn-mm)}{(nn-mm)^2},$$
$$DD=\frac{rr(1+mm-nn)}{(nn-mm)^2},$$

perſpicuum eſt fore

$$RR-DD=\frac{2rr}{nn-mm},$$
$$RR+DD=\frac{2rr}{(nn-mm)^2},$$

vnde iſta aequatio elicitur

$$(RR-DD)^2=2rr(RR+DD)$$

ex

ex qua denique deducitur

$$DD = RR + rr \pm r\sqrt{(4RR + rr)}$$

vbi fignum fuperius valet pro circulo qui latera quadrilateri circulo infcripti producta tangit, fignum vero inferius pro circulo ipfi quadrilatero infcripto. Veluti in exemplo fupra §. 27. exhibito erit $OB = R = 7,858$, $oP = r = 4,581$ et $o'P' = r' = 18$, hincque fit

$$Oo = \sqrt{[RR + rr - r\sqrt{(4RR + rr)}]} = 2,782,$$

$$Oo' = \sqrt{[RR + r'r' + r'\sqrt{(4RR + r'r')}]} = 28,565.$$

Scholion 1.

§. 31. Intererat noffe quid hic fignificent duae folutiones, vbi tantum vnica locum habere videbatur. Quoniam autem in praefenti disquifitione folummodo agitur de diftantia centrorum circuli eidem quadrilatero reuera infcripti et circumfcripti, reiecta priore folutione quadratum huius diftantiae ita per folos radios exprimitur:

$$DD = RR + rr - r\sqrt{(4RR + rr)},$$

vbi igitur euidens eft effe debere

$$RR + rr > r\sqrt{(4RR + rr)}, \text{ hoc eft } R > r\sqrt{2}.$$

Scholion 2.

§. 32. Cum hic diftantia centri circuli quadrilatero infcripti a centro circuli eidem quadrilatero circumfcripti per folos radios horum circulorum tam commode definiatur; notari meretur idem adhuc commodius praeftari poffe pro diftantia centrorum circulorum eidem triangulo infcripti et circumfcripti. Eft enim quadratum huius diftantiae aequale quadrato radii maioris dempto duplici rectangulo ex ambobus radiis facto. Hoc est, seruatis denominationibus supra adhibitis, fit $DD = RR - 2Rr$, quod sequenti modo facillime demonstratur.

Tab. IV. Fig. 4. Sit o centrum circuli triangulo ABC inscripti, O vero centrum circuli eidem triangulo circumscripti. Ex angulo A agatur per centrum o recta AD, circulum circumscriptum secans in D. Ex hoc puncto D ducatur diameter DE in eumque ex o perpendiculum oT, eritque:

$$Oo^2 = DD = OT^2 + oT^2.$$

Est vero

$$OT = OD - DT = R - DT \text{ et } oT^2 = Do^2 - DT^2,$$

consequenter

$$DD = RR - 2R.DT + Do^2.$$

Ductis iam chordis CD, BD et BE euidens est angulos CVD et DBE, vtpote rectos, esse aequales, tum vero quoque aequales esse angulos BED et DCV, eidem arcui DB insistentes. Hinc sequitur triangula CVD et EBD esse similia ideoque $DV : CD = BD : DE$, consequenter

$$CD.BD = DV.DE = 2R.DV.$$

Quod si autem ducatur recta Co, liquet esse angulum

$$CoD = oAC + oCA,$$

nec non angulum

$$oCD = oCE + DCE.$$

Est vero

$$oCE = oCA \text{ et } DCE = oAC,$$

vnde

vnde ſequitur fore angulos CoD et oCD aequales, ideoque

$$Do = CD = BD \text{ et}$$

$$Do^2 = CD \,.\, BD = 2R \,.\, DV,$$

quo valore ſubſtituto habebimus

$$DD = RR - 2R(DT - DV)$$

ſiue ob

$$DT - DV = TV = oP = r, \text{ erit}$$

$$DD = RR - 2Rr.$$

INTEGRATIO FORMVLAE

$$\frac{\partial z}{(3 - zz)\sqrt[3]{(1 + zz)}}$$

ALIARVMQVE NON NVLLARVM.

Auctore

STEPH. RVMOVSKI.

Conuentui exhib. die 22 Ian. 1795.

§. 1.

Vt ſignum radicale cubicum ex formula elidatur, ponatur $\sqrt[3]{(1 + zz)} = x\sqrt[3]{4}$ et prodibit

$$\frac{\partial z}{(3 - zz)\sqrt[3]{(1 + zz)}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}\, x\, \partial x}{(1 - x^3)\sqrt{(4x^3 - 1)}}.$$

Poſt inſtituta non nulla tentamina obſervavi formulae modo inventae integrationem perfici poſſe ponendo

$$x = \sqrt[3]{(1 - 3y + 3yy)},$$

ut ſcilicet quantitas ſigno radicali affecta evadat quadratum; prodit enim

$$x^3 = 1 - 3y + 3yy,$$
$$4x^3 - 1 = 3 - 12y + 12yy = 3(1 - 2y)^2,$$

Hinc

Hinc

$$\sqrt{(4x^3-1)} = (1-2y)\sqrt{3} \text{ et}$$
$$1-x^3 = 3y(1-y).$$

Differentiando autem obtinebitur

$$x\partial x = \frac{-\partial y(1-2y)}{\sqrt[3]{(1-3y+3yy)}};$$

fubftitutis his valoribus in formula noftra evadit

$$\frac{\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}x\partial x}{(1-x^3)\sqrt{(4x^3-1)}} = \frac{-\frac{1}{4\sqrt{3}}\partial y\sqrt[3]{2}}{y(1-y)\sqrt[3]{(1-3y+3yy)}}.$$

§. 2. Pro eruendo integrali formulae modo inventae fiat $y = \frac{1}{1+u}$, vt fit $\partial y = -\frac{\partial u}{(1+u)^2}$

$$y(1-y) = \frac{u}{(1+u)^2},$$

nec non

$$\sqrt[3]{(1-3y+3yy)} = \frac{\sqrt[3]{(1-u+uu)}}{(1+u)^{\frac{2}{3}}}.$$

Id circo habebitur

$$\frac{\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}x\partial x}{(1-x^3)\sqrt{(4x^3-1)}} = \frac{\frac{1}{4\sqrt{3}}\partial u(1+u)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{2}}{u\sqrt[3]{(1-u+uu)}},$$

multiplicando autem fupra et infra per $\sqrt[3]{(1+u)}$ loco unius formulae obtinebimus binas, fcilicet

$$\frac{\partial u}{u\sqrt[3]{(1+u^3)}} + \frac{\partial u}{\sqrt[3]{(1+u^3)}},$$

qua-

quarum utraque seorsim est integrabilis, et quidem prior posito $\sqrt[3]{(1+u^3)}=v$ dat

$$\frac{\partial u}{u\sqrt[3]{(1+u^3)}}=\frac{v\,\partial v}{v^3-1}=\frac{v\,\partial v}{(v-1)(vv+v+1)},$$

qua discerpta in partes secundum factores denominatoris nanciscimur

$$\frac{v\,\partial v}{v^3-1}=\frac{\frac{1}{3}\partial v}{v-1}-\frac{\frac{1}{3}v\,\partial v}{vv+v+1}+\frac{\frac{1}{3}\partial v}{vv+v+1},$$

et sumtis integralibus obtinebitur:

$$\int\frac{v\,\partial v}{v^3-1}=\tfrac{1}{3}\,l\,\frac{v-1}{\sqrt{(vv+v+1)}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{A\ tang.}\,\frac{1+2v}{\sqrt{3}}.$$

Est autem $v=\sqrt{(1+u^3)}$, introducta igitur variabili u et facta debita reductione oritur

$$\int\frac{\partial u}{u\sqrt[3]{(1+u^3)}}=\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt[3]{(1+u^3)}-1}{u}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{A\ tang.}\,\frac{1+2\sqrt[3]{(1+u^3)}}{\sqrt{3}}.$$

§. 3. Integrale alterius formulae $\frac{\partial u}{\sqrt[3]{(1+u^3)}}$ erui potest ponendo $u=\frac{r}{\sqrt[3]{(1-r^3)}}$; verum pro ulteriori reductione commodius perficienda consultius erit ponere $u=\frac{1}{r}$, ut prodeat formula similis praecedenti, signo tantum contrario affecta, nempe $-\frac{\partial r}{r\sqrt[3]{(1+r^3)}}$, cuius adeo integrale

eodem

eodem modo procedendo habebitur

$$-\int\frac{\partial r}{r\sqrt[3]{(1+r^3)}}=-\tfrac{1}{2}l\frac{\sqrt[3]{(1+r^3)}-1}{r}-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{A tang.}\frac{1+2\sqrt[3]{(1+r^3)}}{\sqrt{3}}.$$

atque in locum r reſtituto eius valore $\frac{1}{u}$ prodit

$$\int\frac{\partial u}{\sqrt[3]{(1+u^3)}}=-\tfrac{1}{2}l[\sqrt[3]{(1+u^3)}-u]-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{A tang.}\frac{u+2\sqrt[3]{(1+u^3)}}{u\sqrt{3}}.$$

Hinc

$$\int\frac{\partial u}{u\sqrt[3]{(1+u^3)}}+\int\frac{\partial u}{\sqrt[3]{(1+u^3)}}=l\frac{\sqrt[3]{(1+u^3)}-1}{u[\sqrt[3]{(1+u^3)}-u]}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{A tang.}\frac{1+2\sqrt[3]{(1+u^3)}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{A tang.}\frac{u+2\sqrt[3]{(1+u^3)}}{u\sqrt{3}}.$$

Cum vero ſit $u=\frac{1-y}{y}$, et $y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{(4x3-1)}}{2\sqrt{3}}$ fiet

$$u=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{(4x3-1)}}{\sqrt{3}+\sqrt{(4x3-1)}}=\frac{\sqrt{3}-z}{\sqrt{3}+z}\ \text{et}$$

$$\sqrt[3]{(1+u^3)}=\frac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{(4x3-1)}}=\frac{\sqrt[3]{2(1+zz)}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}+z},$$

ſurrogatis his valoribus reſultabit neglecto factore numerico

$$\int\frac{\partial z}{(3-zz)\sqrt[3]{(1+zz)}}=\tfrac{1}{2}l\frac{[-1+\sqrt[3]{2(1+zz)}]\sqrt{3}-z}{[-1+\sqrt[3]{2(1+zz)}]\sqrt{3}+z}-\tfrac{1}{2}l\frac{\sqrt{3}-z}{\sqrt{3}+z}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{A tang.}\frac{[1+2\sqrt[3]{(1+zz)}]\sqrt{3}+z}{(\sqrt{3}+z)\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{A tang.}\frac{[1+\sqrt[3]{(1+zz)}]\sqrt{3}-z}{(\sqrt{3}-z)\sqrt{3}},$$

Hinc fimul apparet fubftitutio, qua formula propofita facilius redditur integrabilis, ponendo fcilicet $z = \frac{(1-u)\sqrt{3}}{1+u}$; verum non nifi cafu quodam in eam incidere licuiffet.

§. 4. Evoluto integrali formulae propofitae occafionem arripui tentandi integrationem formularum

$$\frac{\partial z}{(3+zz)\sqrt[3]{(1+3zz)}} \text{ et } \frac{\partial z}{(3-zz)\sqrt[3]{(1-3zz)}};$$

et cum rem fuccedere pro prima obfervaffem, operae pretium effe exiftimavi integrale illius ope allatae fubftitutionis evolvere. Pro integranda igitur formula

$$\frac{\partial z}{(3+zz)\sqrt[3]{(1+3zz)}}.$$

concinnitatis gratia pofito $\sqrt[3]{(1+3zz)} = 2x$, habebitur $zz = \frac{8x^3-1}{3}$, hinc $3+zz = \frac{8(1+x^3)}{3}$ ac $\partial z = \frac{4xx\partial x\sqrt{3}}{\sqrt{(8x^3-1)}}$. fubftitutis his valoribus obtinebitur

$$\frac{\partial z}{(3+zz)\sqrt[3]{(1+3zz)}} = \frac{\frac{3}{4}x\partial x\sqrt{3}}{(1+x^3)\sqrt{(8x^3-1)}}.$$

Ponatur iam vt ante

$$x = \frac{\sqrt[3]{(1-3y+3yy)}}{\sqrt[3]{2}}, \text{ fiet}$$

$$x^3 = \frac{1-3y+3yy}{2},$$

$$1+x^3 = \frac{3(1-y+yy)}{2},$$

nec

nec non

$$\sqrt{(8x^3 - 1)} = (1 - 2y)\sqrt{3}.$$

Differentiando autem cum fit

$$x\,\partial x = -\frac{\frac{1}{2}\partial y(1-2y)\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{(1-3y+3yy)}},$$

resultabit

$$\frac{\frac{3}{4}x\,\partial x\sqrt{3}}{(1+x^3)\sqrt{(8x^3-1)}} = \frac{-\frac{1}{4}\partial y\sqrt[3]{2}}{(1-y+yy)\sqrt[3]{(1-3y+3yy}}.$$

§. 5. Statuatur nunc vt supra $y = \frac{1}{1+u}$, habebitur

$$\partial y = -\frac{\partial u}{(1+u)^2},$$

$$1 - y + yy = \frac{1+u+uu}{(1+u)^2},$$

$$1 - 3y + 3yy = \frac{1-u+uu}{(1+u)^2}.$$

Proinde

$$\frac{-\frac{1}{4}\partial y\sqrt[3]{2}}{(1-y+yy)\sqrt[3]{(1-3y+yy)}} = \frac{\frac{1}{4}\partial u\sqrt[3]{2}(1+u)^2}{(1+u+uu)\sqrt[3]{(1-u+uu)}}.$$

Formula modo inuenta si multiplicetur supra et infra per $\sqrt[3]{(1+u)}$, prodit

$$\frac{-\frac{1}{4}\partial y\sqrt[3]{2}}{(1-y+yy)\sqrt[3]{(1-3y+3yy)}} = \frac{\frac{1}{4}\partial u(1+u)\sqrt[3]{2}}{(1+u+uu)\sqrt[3]{(1+u^3)}},$$

et si porro ducatur in $1-u$, habebitur

$$\frac{-\frac{1}{4}\partial y\sqrt[3]{2}}{(1-y+yy)\sqrt[3]{(1-3y+3yy)}}=\frac{\frac{1}{4}\partial u(1-uu)\sqrt[3]{2}}{(1-u^3)\sqrt[3]{(1+u^3)}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\partial u\sqrt[3]{2}}{(1-u^3)\sqrt[3]{(1+u^3)}}-\frac{\frac{1}{4}uu\partial u\sqrt{u\,2}}{(1-u^3)\sqrt[3]{(1+u^3)}},$$

nacti igitur sumus rursum binas formulas, quarum utraque est integrabilis.

§. 6. Pro expedienda integratione formulae

$$\frac{\frac{1}{4}\partial u\sqrt[3]{2}}{(1-u^3)\sqrt[3]{(1+u^3)}},$$

ponatur $u=\frac{1}{r}$ et habebitur:

$$\frac{\frac{1}{4}\partial u\sqrt[3]{2}}{(1-u^3)\sqrt[3]{(1+u^3)}}=\frac{-\frac{1}{4}rr\partial r\sqrt[3]{2}}{(r^3-1)\sqrt[3]{(1+r^3)}},$$

fiat porro $\sqrt[3]{(1+r^3)}=v\sqrt[3]{2}$, prodibit

$$\frac{-\frac{1}{4}rr\partial r\sqrt[3]{2}}{(r^3-1)\sqrt[3]{(1+r^3)}}=\frac{-\frac{1}{4}v\partial v}{v^3-1}.$$

Evoluto integrali ipsius $\frac{v\partial v}{v3-1}$ nanciscimur

$$-\int\frac{v\partial v}{v3-1}=\frac{1}{3}l\frac{\sqrt{(vv+v+1)}}{v-1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{A tang.}\frac{1+2v}{\sqrt{3}}.$$

Cum vero sit $v=\frac{\sqrt[3]{(1+r^3)}}{\sqrt[3]{2}}$ et $r=\frac{1}{u}$, fiet $v=\frac{\sqrt[3]{(1+u^3)}}{u\sqrt[3]{2}}$

sub-fubftituto hoc valore in locum v, et facta debita reductione obtinebitur

$$\frac{\frac{1}{4}\partial u\sqrt[3]{2}}{(1-u^3)\sqrt[3]{(1+u^3)}}=\frac{1}{12}l\sqrt{(1-u^3)}$$

$$-\tfrac{1}{8}l[\sqrt[3]{(1+u^3)}-u\sqrt[3]{2}]-\frac{1}{4\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\,\frac{u+\sqrt[3]{4(1+u^3)}}{u\sqrt{3}}.$$

§. 7. Pari modo elicitur integrale alterius formulae $\frac{\frac{1}{4}uu\partial u\sqrt[3]{2}}{(1-u^3)(\sqrt[3]{(1+u^3)}}$, pofito enim $\sqrt[3]{(1+u^3)}=v\sqrt[3]{2}$ prodit

$$\frac{\frac{1}{4}uu\partial u\sqrt[3]{2}}{(1-u^3)\sqrt[3]{(1+u^3)}}=\frac{\frac{1}{4}v\partial v}{1-v^3},$$

atque evolvendo integrali ipfius $\frac{v\partial v}{1-v3}$ obtinebitur

$$\int\frac{v\partial v}{1-v3}=\tfrac{1}{3}l\frac{\sqrt{(1+v+vv)}}{1-v}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\,\frac{1+2v}{\sqrt{3}},$$

et reftituto valore ipfius $v=\frac{\sqrt[3]{(1+u^3)}}{\sqrt[3]{2}}$ oritur

$$-\tfrac{1}{4}\int\frac{uu\partial u\sqrt[3]{2}}{(1-u^3)\sqrt[3]{(1+u^3)}}=-\tfrac{1}{12}l\sqrt{(1+u^3)}$$

$$+\tfrac{1}{8}l[\sqrt{2}-\sqrt[3]{(1+u^3)}]+\frac{1}{4\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\,\frac{1+\sqrt[3]{4(1+u3)}}{\sqrt{3}},$$

confequenter

$$\int \frac{\frac{1}{4}\partial u(1-uu)\sqrt[3]{2}}{(1-u^3)\sqrt[3]{(1+u^3)}} = \frac{1}{8} l \frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{(1+u^3)}}{\sqrt[3]{(1+u^3)}-u\sqrt[3]{2}}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\frac{1+\sqrt[3]{4(1+u^3)}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\frac{u+\sqrt[3]{4(1+u^3)}}{u\sqrt{3}}.$$

Cum iam fit $u = \frac{1-y}{y}$, et $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{(8x^3-1)}}{2\sqrt{3}}$, atque $\sqrt{(8x^3-1)} = z\sqrt{3}$, fiet $u = \frac{1-z}{1+z}$, fubftituto hoc valore in integrali modo evoluto refultabit

$$\int \frac{\partial z}{(3+zz)\sqrt[3]{(1+3zz)}} = \frac{1}{8} l \frac{z+1-\sqrt[3]{(1+3zz)}}{z-1+\sqrt[3]{(1+3zz)}}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\frac{1+z+2\sqrt[3]{(1+3zz)}}{(1+z)\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\frac{1-z+2\sqrt[3]{(1+3zz)}}{(1-z)\sqrt{3}}.$$

§. 8. Hinc rurfum perfpicitur integrationem formulae huius perfici potuiffe fubftitutione $z = \frac{1-u}{1+u}$, atque per analogiam concludere licuit formulam $\frac{\partial z}{(3-zz)\sqrt[3]{(1-3zz)}}$ integrabilem reddi fubftitutione $z = \frac{(1-u)\sqrt{-1}}{1+u}$ fiue $z = \frac{1-u}{(1+u)\sqrt{-1}}$; nam utroque cafu fit $zz = -\frac{(1-u)^2}{(1+u)^2}$; verum cum haec fubftitutio perducat ad integrale imaginarium, formulae $\frac{\partial z}{(3-zz)\sqrt{(1-3zz)}}$ fequentibus fubftitutionibus integrale per logarithmos et arcus circulares expreffum obtinebitur.

§. 9. Fiat $\sqrt[3]{(1-3zz)} = x$, et facta debita fubftitutione prodibit

∂z

$$\frac{\partial z}{(3 - zz)\sqrt[3]{(1 - 3zz)}} = \frac{-\frac{3}{2}x\partial x\sqrt{3}}{(8 - x^3)\sqrt{(1 - x^3)}}.$$

Statuatur porro $x^3 = 4y - 4yy$, ut fit $\sqrt{(1 - x^3)} = 1 - 2y$: unde refultabit

$$\frac{-\frac{3}{2}x\partial x\sqrt{3}}{(8 + x^3)\sqrt{(1 - x^3)}} = \frac{-\frac{1}{2}\partial y\sqrt{3}}{(2 + y - yy\sqrt[3]{(4y - yy)}]}.$$

Iam cum fit $2 + y - yy = (1 + y)(2 - y)$, facta refolutione habebitur

$$\frac{-\frac{1}{2}\partial y\sqrt{3}}{(2+y-yy)\sqrt[3]{(4y-4yy)}} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}\partial y}{(1+y)\sqrt[3]{(4y-4yy)}}$$

$$\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}\partial y}{(2 - y)\sqrt[3]{(4y - 4yy)}}.$$

Integrale prioris partis obtinetur ponendo primum $y = \frac{u-1}{u+1}$, hinc fit

$$\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}\partial y}{(1 + y)\sqrt[3]{(4y - 4yy)}} = \frac{-\frac{1}{4\sqrt{}}\partial u}{u\sqrt[3]{(uu - 1)}};$$

et ftatuendo $\sqrt[3]{(uu - 1)} = v$, ut fit $uu = 1 + v^3$, habebitur

$$2lu = l(1 + v^3) \text{ et}$$

$$\frac{\partial u}{u} = \frac{\frac{3}{2}vv\partial v}{1 + v^3},$$

ac tandem

$$\frac{-\frac{1}{4\sqrt{3}}\partial u}{u\sqrt[3]{(uu-1)}}=\frac{-\frac{1}{8}v\,\partial v\sqrt{3}}{1+v^3}.$$

Integratio alterius partis commode perficitur ſubſtitutione $y=\frac{2}{1+r}$, prodit enim $2-y=\frac{2r}{1+r}$, ac

$$\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}\partial y}{(2-y)\sqrt[3]{(4y-4yy)}}=\frac{\frac{1}{4\sqrt{3}}\partial r}{r\sqrt[3]{(rr-1)}},$$

adeoque eodem modo quo formula praecedens ad rationalitatem perducitur. Integralibus eorum ulterius evolvendis ſuperſedere poſſe me exiſtimo.

AP-

APPLICATION DE LA ROUE HYDRAULIQUE SEGNERIENNE À L'EXPLOITATION DES MINES.

Par Mr. KRAFFT.

Présenté à l'Académie le 20 Août, 1795.

Parmi les diverſes eſpeces de forces motrices dont on fait uſage dans la Mécanique, celle de l'eau l'emporte à pluſieurs égards ſur toutes les autres; elle ſert ſurtout très-avantageuſement au mouvement des Machines qu'on emploie dans l'exploitation des Mines. Quand les approfondiſſemens des puits des Mines ſont deja avancés conſidérablement & qu'il s'agit d'en extraire les minerais & les matieres du roc; on s'y ſert, comme l'on ſçait, du Baritel à eau à double rangée de Godets & à refrein, & ce n'eſt qu'au defaut de l'eau, qu'on admet les Baritels à chevaux. Pour élever les eaux ſouterraines de ces puits ſoit au jour ſoit à la hauteur des Galleries d'écoulement, on a deux ſortes de Machines, les Pompes & les Machines à air; or celles cy élévant les eaux par l'élaſticité d'une maſſe d'air comprimé, ont l'eau qui le comprime, pour premier moteur; & les Piftons des Pompes font mis en jeu par des Roues hydrauliques à Godets ou à Palettes — par les Machines à colonne d'eau — ou par celles à feu — & ce n'eft que quand on manque d'eau, qu'on à récours pour cet effet aux Machines à chevaux; enfin pour bocarder à fec ou à eau les pierres de gangue & les minerais, l'arbre du Bocard qui fouleue les Pilots, reçoit fon mouvement de l'une ou de l'autre efpece de Roues hydrauliques. On voit par cet aperçu, que l'eau dans ces fortes de Machines fert de force motrice de quatre manieres différentes; par fon poids — par fon choc — par fa preffion portée de bas en haut — & par la force elaftique des vapeurs qui s'en degagent dans l'état d'ebullition. Or on fcait que l'eau offre de plus une cinquieme éfpece de force motrice, qui refulte de la réaction que l'eau exerce lorsqu'elle s'ecoule d'un vafe par une ouverture convenablement placée. C'eft le celebre Mr. de Segner qui le premier a donné, il y a long-tems, l'idée & la theorie d'une éfpece alors abfolument nouvelle de Roues hydrauliques fondée fur ce nouveau principe (*) & deux autres illuftres Mathématiciens, Mrs Euler le père & le fils ont demontré enfuite dans plufieurs Mémoires (**), que la Roue

(*) Segneri Machinae cuiusdam hydraulicae theoria geometrica. Eiusdem computatio formae atque virium machinae hydraulicae nuper defcriptae. Goettingae 1750.

(**) Recherches fur l'effet d'une Machine hydraulique propofée par M. Segner; par M. L. Euler Mém. de l'Acad. de Berliu. 1750.

Application de la Machine hydraulique de M. Segner à toutes fortes d'ouvrages. Par le même Mém. de Berlin. 1752.

Théorie plus complette des Machines qui font mifes en mouvement par la reaction de l'eau. Par le même. Mém. de Berlin. 1754.

Eno-

Roue hydraulique Segnerienne offre de très-grands avantages sur toutes les Roues hydrauliques ordinaires mises en mouvement par le choc de l'eau.

Quand c'est l'eau qu'on emploie pour mouvoir les Machines; il importe par tout, & dans l'exploitation des Mines peut-être plus qu'en aucune autre occasion, de tirer le plus grand parti possible de la chute & de la quantité d'eau données; & c'est par cette raison qu'il vaudroit bien la peine & la depense, de faire dans les Mines des essais en grand qui puissent servir à y établir la pratique de la Roue Segnerienne. J'ai fait construire pour cet effet un Modele de cette Machine en grandeur mediocre, en preférant à cet égard & pour plus de simplicité la forme primitive que son illustre Inventeur lui avoit donnée, à celle que Mr. Euler a projettée ensuite; les expériences que j'ai faites avec ce Modele, bien qu'en petit, m'ont confirmé dans l'idée, que cette Machine pourroit bien avantageusement être employée dans les travaux des Mines. Occupé de ces sortes d'expériences & partant de la theorie que Mr. Euler en avoit établie, j'ai trouvé moyen d'en abréger beaucoup tout le calcul, & de le réduire à autant de simplicité qu'il semble qu'on le puisse desirer pour la pratique. N'ayant trouvé nulle part qu'on ait fait usage de cette Machine dans l'exploitation des Mines, & presumant que tout ce qui pourroit y contribuer ne sauroit manquer d'avoir quelque inte-

 ret,

Enodatio quaestionis, quomodo vis aquae cum maximo lucro ad molas aliava opera impendi possit. Auct. J. A. Eulero. Goettingae 1714.

De motu et reactione aquae per tubos mobiles transfluentis. Auct. L. Eulero. Nov. Comm. Petrop. T. VI.

rêt, je me propose dans ce Mémoire d'exposer les solutions que j'ai trouvées, des Problemes qui se présentent dans la pratique de cette Machine, & de les eclaircir par des applications rélatives aux travaux des Mines.

Esquisse de la Machine.

§. 1. Dans la figure de la Planche V^{me} OO est un axe vertical, fixé par des barres C*a* au milieu d'un vaisseau cylindrique C C B B, qui est surmonté d'un bassin A A C C évasé & asses spatieux pour contenir l'eau qu'un reservoir lui fournit par seconde. Ce vaisseau peut tourner librement avec son axe O O & ses pivots N N entre les traces M M, & communique par des embouchures comme E faites près de sa base avec plusieurs tuyaux droits & perpendiculaires à l'axe O O, comme E F, tous égaux & placés dans un même plan horisontal. Chaque pareil tuyau E F est fermé à l'autre bout F, mais percé à l'un de ses cotés près du bout & dans le milieu de sa hauteur d'un orifice lateral *m*, qui est garni d'un petit bout de tuyau dont la position est perpendiculaire au plan vertical passant par l'axe & le tuyau E F. L'eau qui coule d'un reservoir dans le tuyau A B, échappe horizontalement par les orifices *m*, & y exerce sur les tuyaux E F dans une direction horizontale & perpendiculaire à leur longueur, une force de réaction qui imprime au vaisseau A A B B un mouvement de rotation dans le sens opposé & qui rend la Machine capable de vaincre une resistance. Appellons le tuyau A B le tuyau d'injection, & les tuyaux comme E F les tuyaux de decharge. Il est clair d'ailleurs, que si la Machine est garnie de plus d'un tuyau de decharge E F, leurs orifices lateraux *m* doivent être placés tous du même coté, de maniere que l'eau échap-

pe

pe de tous en même ſens & que conſequemment les forces de réaction qu'elle exerce ſur ces tuyaux, s'accordent à tourner la Machine dans une même direction.

Soit maintenant

a . . . la hauteur conſtante à la quelle l'eau eſt entretenue dans le tuyau d'injection au deſſus des axes G F des tuyaux de decharge.

b . . . la longueur G m de chaque tuyau de decharge, ou la diſtance du milieu de chaque orifice m au milieu de l'axe de rotation de la Machine.

h^2 . . . l'amplitude de la partie cylindrique C C B B du tuyau d'injection.

e^2 . . . l'amplitude de la partie ſuperieure evaſée du même tuyau, ou la ſurface ſnperieure de l'eau dans le baſſin du tuyau d'injection.

k^2 . . . l'amplitude de chaque tuyau de decharge.

f^2 . . . l'amplitude de chaque orifice des tuyaux de decharge.

n . . . le nombre des tuyaux de decharge dont la Machine eſt garnie.

D . . . la dépenſe d'eau par ſeconde, ou le volume d'eau qu'il faut par ſeconde pour l'entretenir dans le tuyau d'injection à la hauteur conſtante $= a$.

v . . . la hauteur due à la viteſſe avec la quelle l'eau échappe de chaque orifice.

u . . . la hauteur due à la viteſſe du mouvement de rotation de chaque orifice autour du milieu de l'axe de la Machine.

t . . . le tems de revolution de la Machine exprimé en secondes.

μ . . . le nombre des revolutions que la Machine acheue par seconde.

R . . . la force de réaction que l'eau exerce sur chaque tuyau de decharge, exprimée par le volume d'une masse d'eau dont le poids lui est égal.

E . . . l'effet de la Machine, ou le produit d'un fardeau à élever par la hauteur à la quelle il est élevé par seconde, de façon que, designant cette hauteur par h & le fardeau par le volume Q d'une masse d'eau dont le poids lui est egal, on a $E = Q \cdot h$.

g . . . la hauteur par la quelle les graves tombent librement dans la premiere seconde de leur chute, ou, les mesures étant prises en pieds de Rhin, $g = 15,625$.

π . . . la peripherie du Cercle, le diametre ètant $= 1$.

Elémens généraux du Calcul de la Machine.

§. 2. Les denominations précédentes étant établies, on a les élémens suivans du calcul de la Machine:

I.) La vitesse avec la quelle l'eau échappe de chaque orifice de decharge, étant $= 2\sqrt{(gv)}$ & tous les orifices étant égaux; il s'ecoule de tous les orifices ensemble & dans une seconde de tems, une masse d'eau dont le volume $= 2nf^2\sqrt{(gv)}$. Tel doit être aussi le volume d'eau que le reservoir fournit par seconde au tuyau d'injection pour l'y entretenir à la hauteur constante $= a$; ce qui donne $D = 2nf^2\sqrt{(gv)}$.

II.)

II.) La viteffe de rotation de chaque orifice autour du milieu de l'axe de la Machine étant $= 2\sqrt{(gu)}$, & chaque orifice parcourant dans une feconde de tems l'efpace $= 2\pi\mu b$; on a $\pi\mu b = \sqrt{(gu)}$ & par là $t = \frac{\pi b}{\sqrt{(gu)}}$.

III.) La force de réaction que l'eau exerce fur tous les tuyaux de decharge enfemble, étant $= nR$; cette force multipliée par la viteffe des points de la Machine aux quels elle eft appliquée, donne le moment mécanique de la Machine $= 2nR\sqrt{(gu)}$ & ce moment étant égal à l'effet de la Machine, on a $E = 2nR\sqrt{(gu)}$.

Or Mr. Euler à demontré par des principes les mieux établis de l'Hydrodynamique que $v(1 - \frac{f^4}{e^4}) = a + u$ & $R = 2f^2[v - \sqrt{(vu)}]$ & que, fi $f^2 < e^2$, le mouvement de l'eau qui échappe par les orifices de decharge & le mouvement de rotation de la Machine parviennent bientôt à l'uniformité. (*) Faifant donc la furface fuperieure de l'eau dans le baffin du tuyau d'injection plufieurs fois plus grande que l'amplitude des orifices de decharge, & par confequant $\frac{f^4}{e^4}$ étant une fraction très-petite; on aura $v = a + u$, moyennant quoi & à caufe de $D = 2nf^2\sqrt{(gv)}$, on obtient

$$E = 2D(\sqrt{v} - \sqrt{u})\sqrt{u}.$$

Pour rendre ces équations plus propres au but de ce Mémoire, j'introduis une nouvelle variable z, telle que $a = uz$, & par là ces équations fe changent en celles-cy:

$D =$

(*) Voyes les Mémoires cités cy-deffûs.

$$D = 2nf^2\sqrt{(ga)}\cdot\sqrt{\tfrac{1+z}{z}},$$
$$\pi\mu b = \sqrt{\tfrac{ga}{z}}\ \&\ E = \tfrac{2Da}{1+\sqrt{(1+z)}};$$

Ces élémens généraux du calcul nous conduisent aux solutions des Problêmes suivans:

Probleme 1.

§. 3. *La Roue Segnerienne, la hauteur constante de l'eau dans le tuyau d'injection, & la dépense d'eau étant données: trouver l'effet que la Roue est capable de produire, & son tems de revolution.*

Solution.

Les quantités b, f^2, n, a & D étant données, qu'on cherche un angle Φ par l'équation $\sin.\Phi = \frac{2nf^2\sqrt{(ga)}}{D}$ & on aura

1.) pour l'effet que la Roue est capable de produire

$$E = Da\,.\,\frac{\cos.\Phi}{\cos.\frac{1}{2}\Phi^2}.$$

2.) pour le tems de revolution de la Roue

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{b\,\tan g.\Phi}{\sqrt{a}},\ \&\ \text{partant}\ \mu = \frac{\sqrt{g}}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{a}}{b\,.\,\tan g.\Phi}.$$

Demonstration.

La hauteur constante de l'eau dans le tuyau d'injection étant $= a$, il est impossible que $D < 2nf^2\sqrt{(ga)}$. Faisant donc $\frac{2nf^2\sqrt{(ga)}}{D} = \sin.\Phi$; on aura

$$\sin.\Phi = \sqrt{\tfrac{z}{1+z}};\ z = \tan g.\Phi^2;\ \&$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{(1+z)}} = \frac{\cos.\Phi}{\cos.\frac{1}{2}\Phi^2}.$$

Mo-

Moyennant ces fubftitutions les équations trouvées cy-deffûs fe changent en celles données dans la Solution.

Corollaires.

1.) Si la depenfe d'eau n'etoit que $D = 2nf^2\sqrt{(ga)}$; la Roue n'auroit ni effet ni rotation; car à caufe de $\Phi = 90°$; on auroit $E = 0$ & $t = \infty$, & l'eau échapperoit par les orifices de decharge avec une viteffe $= 2\sqrt{(ga)}$, à caufe de $u = 0$ & partant $v = a$.

2.) Si la depenfe d'eau diminuoit au point que $D < 2nf^2\sqrt{(ga)}$; il eft evident qu'elle ne fuffiroit pas à entretenir l'eau dans le tuyau d'injection à la hauteur conftante $= a$; les expreffions pour E & t deviennent imaginaires dans ce cas à caufe de fin. $\Phi > 1$.

3.) L'effet de la Machine étant $E = Qh$; on a, la hauteur h étant donnée, le fardeau que la Machine eft capable de porter à cette hauteur dans une feconde de tems,

$$Q = \frac{Da}{h} \cdot \frac{\text{cof. } \Phi}{\text{cof. } \frac{1}{2}\Phi^2},$$

& reciproquement, le fardeau Q étant donné, on a

$$h = \frac{Da}{Q} \cdot \frac{\text{cof. } \Phi}{\text{cof. } \frac{1}{2}\Phi^2},$$

& la Machine eft capable d'élever dans une feconde de tems un fardeau

$$Q = \frac{Da}{h} \cdot \frac{\text{cof. } \Phi}{\text{cof. } \frac{1}{2}\Phi^2},$$

à une hauteur $= h$.

4.) À cauſe de
$$\frac{\text{coſ.}\, \Phi}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2}\Phi^2} = 1 - \text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\Phi^2,$$
on a auſſi $E = Da\,(1 - \text{tang.}\, \frac{1}{2}\Phi^2)$.
Or le plus grand effet poſſible de la Machine étant $E = Da$; il eſt viſible que ce plus grand effet ne ſauroit jamais avoir lieu dans la pratique; car il faudroit pour cela que $\Phi = 0$, & $\mu = \infty$ & que par conſéquent la rotation de la Machine fut infiniment rapide.

5.) La quantité $Da\,.\,\text{tang.}\, \frac{1}{2}\Phi^2$ exprime le dechet dont l'effet de la Machine eſt plus petit que ſon plus grand effet poſſible. Plus donc, par un arrangement practicable de la Machine, l'angle Φ eſt rendu petit: plus elle approche du plus haut degré de perfection. L'angle Φ nous offre donc le moyen le plus commode de juger, jusqu'à quel point une pareille Machine eſt avantageuſement conſtruite, ainſi qu'on voit par la Table ſuivante:

L'angle φ	Effet. Da mult. par	Dechet. Da mult. par
$90°$	0	1
$70°\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$60°$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$53°$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$48°$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$44°\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$
$41°\frac{1}{2}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$
$39°$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$
$37°$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$
$35°$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$
&c.	&c.	&c.

6.) Plus l'angle Φ eſt petit; plus eſt grande la viteſſe de rotation de la Machine à cauſe de $u = \frac{a}{z} = \frac{a}{tang. \Phi^2}$. Or ayant ſin. $\Phi = \frac{2nf^2 \sqrt{(ga)}}{D}$, on voit que la grandeur de l'angle Φ depend du nombre des tuyaux de decharge, de l'amplitude de leurs orifices, de la hauteur conſtante de l'eau dans le tuyau d'injection & de la depenſe d'eau qui ſe fait par ſeconde. Si donc dans l'arrangement de la Machine ces quantités étoient telles qu'il en reſulteroit une valeur trop petite de l'angle Φ; la viteſſe de rotation pourroit augmenter au point, que la reſiſtance de l'air proportionelle au carré de cette viteſſe, épuiſeroit tout l'effet de la Machine. Puisque donc l'effet de la Machine eſt également nul, lorsque $\Phi = 90°$ [Coroll. 1.] & conſéquemment lorsque la viteſſe de rotation & partant auſſi la reſiſtance de l'air $= 0$; il doit y avoir une valeur de l'angle Φ qui produit une viteſſe de rotation telle, que la reſiſtance de l'air qui en reſulte, diminue l'effet de la Machine le moins poſſible. Mr. Euler en ſuppoſant la hauteur $a = 12$ pieds & $D = 1$ pied cube, trouve en conſéquence d'une eſtimation hypothetique de la ſurface de toutes les eminences de la Machine frappées par l'air, que ce cas du Minimum doit avoir lieu lorsque l'effet de la Machine vaut $\frac{7}{8} D a$ avec un dechet $= \frac{1}{8} D a$, & qu'alors le dechet que la reſiſtance de l'air apporte de plus à cet effet, eſt $= \frac{1}{20} D a$; il en ſuppoſe autant pour le dechet cauſé par le frottement des pivots de la Machine, de maniere que dans ce cas du Minimum l'effet reel ſera $= (\frac{7}{8} - \frac{1}{10}) D a = \frac{31}{40} D a$ ou bien $E = \frac{3}{4} D a$. Pour appliquer nos équations à ce même cas, on voit par la Table précédente que le dechet de $\frac{1}{8} D a$ ſuppoſe $\Phi = 39°$ ou plus exactement $\Phi = 38°, 56', 33''$, &

T 2 que

que par conſéquant les valeurs des quantités n, f^2, a & D devroient être telles qu'il en reſulte $\phi = 38^\circ, 56', 33''$; moyennant quoi nous aurions $D = 3,18198 . n f^2 \sqrt{(g a)}$; $\mu b = 0,39389 \sqrt{(g a)}$ & $E = \frac{3}{4} D a$, & ces formules s'accordent parfaitement dans leur reſultat avec celles de Mr. Euler. Mais comme la determination du Minimum qui avoit donné cette valeur de l'angle ϕ, n'eſt qu'hypothetique & même tirée du cas particulier $a = 12$ & $D = 1$ & que c'eſt plus des experiences que de la theorie qu'on ſauroit s'attendre à de plus ſures concluſions à ce ſujet, nous ferons ici abſtraction de la reſiſtance de l'air & du frottement des pivots de la Machine, pour donner les ſolutions de nos Problemes dans leur plus grande généralité, d'autant plus que dans les travaux des Mines on pourroit bien être ſouvant dans le cas de ſe contenter volontiers de tirer de la Machine Segnerienne un plus grand parti que d'aucune autre, même ſi ce parti n'etoit pas le plus grand qu'il y auroit moyen de tirer de la même Machine.

7.) Il eſt demontré par la theorie des Roues hydrauliques à Palettes ou mûes par l'impulſion de l'eau qu'avec une depenſe d'eau $= D$ & une chute d'eau $= a$ elles ne produiſent que tout au plus un effet $E = \frac{2}{9} D a$ ſans tenir encore compte des reſiſtances du frottement & du milieu, & en ſuppoſant que pour le plus grand effet poſſible la viteſſe des Palettes doit égaler le tierce de la viteſſe de l'eau. Donc desque l'arrangement d'une Machine Segnerienne eſt tel que l'angle ϕ ne ſurpaſſe $70^\circ \frac{1}{2}$, on voit par la Table précédente, que, la depenſe & la chute d'eau étant les mêmes de part & d'autres, ſon effet ſurpaſſe celui d'une Roue hydraulique ordinaire à Palettes, pour le moins

dans

dans le rapport de 9 à 4, & que, si les circonstances permettent de diminuer cet angle jusqu'à $\Phi = 35^\circ$, ce rapport sera celui de 4 à 1.

8.) L'expression trouvée cy-dessus (Coroll. 4.) pour l'effet de la Machine $E = D a (1 - \text{tang.} \frac{1}{2} \Phi^2)$, est susceptible de diverses transformations qui pourroient être utiles dans le calcul; car à cause de

$$1 - \text{tang.} \tfrac{1}{2} \Phi^2 = \frac{2 \,.\, \text{tang.} \frac{1}{2} \Phi}{\text{tang.} \Phi} = \frac{\text{sin.} \Phi}{\text{cos.} \frac{1}{2} \Phi^2 \, \text{tang.} \Phi},$$

& ayant

$$\text{tang.} \Phi = \frac{\sqrt{(g\, a)}}{\pi \,\mu\, b} \;\&\; \text{sin.} \Phi = \frac{2\, n f^2 \sqrt{(g\, a)}}{D},$$

on a aussi

$$E = \frac{2 \pi \,.\, D a \,.\, \mu b}{\sqrt{(g\, a)}} \,.\, \text{tang.} \tfrac{1}{2} \Phi,$$

& encore

$$E = \frac{2\, \pi \,.\, \mu\, b \,.\, n f^2 a}{\text{cos.} \frac{1}{2} \Phi^2},$$

& en eliminant la quantité a, & à cause de $\text{cos.} \Phi = \frac{2 \pi \,.\, \mu b \,.\, n f^2}{D}$ on a aussi

$$E = \frac{2 \pi \,.\, \mu b \,.\, D^2}{g \,.\, n f^2} \,.\, \text{sin.} \tfrac{1}{2} \Phi^2.$$

Exemple 1.

§. 4. Soit construite une Roue Segnerienne à huit tuyaux de decharge, chacun de douze pieds de long, & de cinq pouces quarrés d'ouverture; que l'eau soit entretenue dans le tuyau d'injection à la hauteur de neuf pieds par une depense de dix pieds cubes par seconde. On demande l'effet de la Machine & son tems de revolution.

 Par

Par ces données on a $n = 8$; $b = 12$; $f^2 = \frac{5}{144}$; $a = 9$ & $D = 10$.

Calcul.

pour Φ.	pour E.	pour t & μ.
$lg = 1,1938200$	$l.\text{coſ}.\Phi = 9,8763978$	$l\pi = 0,4971498$
$la = 0,9542425$	$l\,\text{coſ}.\frac{1}{2}\Phi^2 = 9,9425814$	$lb = 1,0791812$
$lga = 2,1480625$	$9,9338164$	$l\,\text{tang}.\Phi = 9,9423609$
$l\sqrt{(ga)} = 1,0740312$	$lD = 1,0000000$	$1,5186919$
$lf^2 = 8,5406075$	$la = 0,9542425$	$l\sqrt{(ga)} = 1,0740312$
$l2n = 1,2041200$	$lE = 1,8880589$	$l.t = 0,4446607$
$0,8187587$	$E = 77,278$	$t = 2,784$
$lD = 1,0000000$		$l\mu = 9,5553392$
$l\,\text{ſin}.\Phi = 9,8187587$		$\mu = 0,359$
$\Phi = 41^\circ, 12', 32''.\frac{1}{2}$		

L'effet que cette Roue eſt capable de produire, eſt donc d'éléver dans une ſeconde de tems à la hauteur d'un pied un fardeau égal au poids de 77, 278 pieds cubes d'eau ou un poids de $5409\frac{1}{2}$ livres, en prenant 70 livres pour le poids d'un pied cube d'eau; elle ſera donc capable d'élé-ver un fardeau de $\frac{5409\frac{1}{2}}{h}$ livres à la hauteur de h pieds dans une ſeconde de tems; & elle achevera chaque revolution en 2, 784 ſecondes, ou elle ſera 0, 359 revolutions dans une ſeconde de tems.

Re-

Remarques.

1.) Une Roue hydraulique à Palettes ne produiroit avec la même depense & la même chute d'eau, qu'un effet $E = 20$; ces deux effets sont en raison de 386 à 100.

2.) Le dechet dans cette Roue n'est qu'un septieme du plus grand effet possible, comme on le voit par la Table précédente, ce qui fait voir qu'elle est avantageusement construite, & il n'y a guerre moyen practicable de tirer un plus grand parti de la même depense & de la même chute d'eau.

3.) Dans l'exploitation d'un puits de 150 Toises de profondeur, on compte pour le poids du Cable 2100, pour la chaine d'accrochement 72, pour le sac à neuf mesures 66 & pour neuf mesures de matiere 900 livres, de façon que la plus grande charge telle qu'elle est à la place d'assemblage du puits, est de 3138 livres. Mettant donc $\frac{5409,5}{h} = 3138$, on a $h = 1,724$ pieds; la Roue pourra donc élever le fardeau de 3138 livres à la hauteur de 1,724 pieds par seconde & par consequent elle acheveroit chaque extraction de la profondeur de 150 Toises en 8 minutes 42 secondes, ce qui feroit 55 extractions dans un Poste, si même la charge, au lieu de diminuer à chaque moment de son élévation, demeuroit pendant toute sa montée aussi forte qu'elle étoit à la place d'assemblage.

4.) Ce qui semble causer le plus de difficulté dans l'application de la Roue Segnerienne à l'extraction des minerais & des matieres du roc, est la maniere de la faire aller alternativement à contre-sens. Pour arreter la Roue, afin

afin de detacher de la chaine d'accrochement le ſac plein arrivé à l'embouchure du puits & d'en ſubſtituer un autre vuide prèt à descendre, on pourroit ſe ſervir des mêmes moyens dont on ſe ſert pour arreter les Baritels à eau, c'eſt de fermer la porte du Canal par le quel l'eau eſt conduite dans le tuyau d'injection & de ſerrer encor la Machine même ou bien une Roue à refrein qu'on y auroit appliquée pour cet effet. Enſuite pour faire aller la Machine à contre-ſens, il faudroit fermer les orifices de decharge & en ouvrir d'autres dans une poſition diametralement oppoſée. Pour cet effet il faudroit que chaque tuyau de decharge eut deux orifices diametralement oppoſés, & pour abreger l'operation d'en fermer & ouvrir les uns alternativement afin que l'extraction ſoit auſſi peu interrompue que poſſible, il ſeroit practicable de faire entrer le bout de chaque tuyau de decharge dans une eſpece de boëte que l'on puiſſe tourner à clef autour de lui & qui eut deux orifices correspondans qui ne fuſſent pas abſolument diametralement oppoſés l'un à l'autre, de façon qu'en tournant un peu cette boëte l'un des orifices du tuyau de decharge ſe ferme & que l'autre s'ouvre en même tems. On trouveroit peut-être moyen de faire de façon que ces mouvemens ſoient exécutés par la Machine même & ſans main d'oeuvre. Il ſeroit auſſi bon ſous ce point de vue, d'arranger la Machine de maniere que le nombre des tuyaux de decharge ſoit auſſi petit que poſſible.

5.) Cette difficulté n'a point lieu dans l'application de la Roue Segnerienne à l'exploitation des eaux ſouterraines des puits; les montées & les deſcentes alternatives des Piſtons des Pompes y étant produites par la ſeule Ma-

Manivelle, la Roue continuant à tourner dans un même ſens.

Exemple 2.

§. 5. Soit conſtruite une Roue Segnerienne à onze tuyaux de decharge, chacun de cinq pieds de long & de cinq pouces quarrés d'ouverture; que l'eau ſoit entretenue dans le tuyan d'injection à la hauteur de neuf pieds par une depenſe de dix pieds cubes d'eau par ſeconde. On demande l'effet de la Machine & ſon tems de revolution.

Par ces données on a $n = 11$; $b = 5$; $f^2 = \frac{5}{144}$ $a = 9$ & $D = 10$.

Calcul.

Le calcul de cette Roue fait comme dans l'exemple précédant donne

$\Phi = 64^0.\ 56'.\ 22''$;	$t = 2,832$
$E = 53,55$.	$\mu = 0,353$.

L'effet que la Roue eſt capable de produire, eſt donc d'éléver dans une ſeconde de tems à la hauteur d'un pied un fardeau égal au poids de $53,55$ pieds cubes d'eau ou un poids de $3748\frac{1}{2}$ livres; elle ſera donc capable d'éléver $\frac{3748\frac{1}{2}}{h}$ livres à la hauteur de h pieds par ſeconde.

Remarques.

1.) Une Roue hydraulique ordinaire à Palettes ne produiroit avec la même depenſe & la même chute d'eau

 qu'un

qu'un effet $E = 20$. Ces deux effets ſont en raiſon de 268 à 100.

2.) Malgré cela cette Roue n'eſt pas avantageuſement conſtruite; la grandeur de l'angle $\Phi = 64^{0}\,56'$ indique, qu'il y a un dechet de plus d'un tierce du plus grand effet poſſible; & ce dechet vaut effectivement $\frac{2}{5}\,D\,a$. Il eſt donc certain qu'une Roue Segnerienne mieux arrangée que celle-cy, tireroit un effet plus grand de cette même depenſe & chute d'eau, ſans avoir à craindre que la rotation de la Machine ne devint trop rapide; il faudroit pour cet effet rendre plus petit l'angle Φ en diminuant la quantité nf^2, c'eſt à dire, en diminuant le nombre des tuyaux de decharge ou bien l'amplitude de leurs orifices, & augmenter leur longueur pour obvier à une trop grande rapidité du mouvement de rotation de la Roue.

3.) La Roue de cet exemple appliquée à l'exploitation du puits ſuppoſé cy deſſus, ne pourroit élever le fardeau de 3138 livres qu'à la hauteur de 1,194 pieds par ſeconde; il lui faudroit pour chaque extraction 12'.34''; elle ne feroit que 38 extractions dans un Poſte; au lieu, que, trois tuyaux de decharge étant ſupprimés & la longueur de chacun portée à 12 pieds, comme dans l'exemple 1, elle en fait 55 dans le même tems.

Probleme 2.

§. 6. *La depenſe d'eau, la hauteur à la quelle on ſe propoſe de l'entretenir dans le tuyau d'injection d'une Roue Segnerienne, & l'effet que la Roue doit produire, étant donnés: trouver l'arrangement de la Roue.*

So-

Solutio.

Les quantités D, a et E étant données; qu'on cherche un angle Φ par l'équation $\text{cos.}\,\Phi = \frac{E}{2Da - E}$; & on aura

1.) pour trouver ou la longueur b des tuyaux de decharge ou le nombre μ des tours que la Machine doit faire par seconde, l'équation $\mu b = \frac{\sqrt{(ga)}}{\pi\,\text{tang.}\,\Phi}$.

2.) pour trouver ou le nombre n des tuyaux de decharge ou l'amplitude f^2 de leurs orifices, l'équation $n f^2 = \frac{D\,.\,\text{sin.}\,\Phi}{2\sqrt{(ga)}}$.

Demonstration.

L'équation $E = Da\,.\,\frac{\text{cos.}\,\Phi}{\text{cos.}\,\frac{1}{2}\Phi^2} = \frac{2\,Da\,.\,\text{cos.}\,\Phi}{1 + \text{cos.}\,\Phi}$, donne $\text{cos.}\,\Phi = \frac{E}{2Da - E}$. Connoissant l'angle Φ on a les expressions pour μb & $n f^2$ par celles qui ont été données dans le Probleme précédant.

Corollaires.

1.) Si l'effet proposé étoit $E = Da$; l'arrangement de la Machine est impracticable; car à cause de $\Phi = 0$ on auroit $\mu b = \infty$.

2.) Si l'effet proposé étoit $E > Da$; l'arrangement est impossible; car à cause de $\text{cos.}\,\Phi > 1$ l'angle Φ deviendroit imaginaire; aussi est il impossible qu'une Machine quelconque tire d'une depense d'eau $= D$ & d'une chute d'eau $= a$, un effet $E > Da$.

3.) La ſolution ne donne que le produit μb & le produit $n f^2$; donc des deux quantités μ & b l'une ou l'autre reſte indeterminée & pourroit être priſe arbitrairement, ce qui a lieu auſſi pour l'une ou l'autre des deux quantités n & f^2. On voit par les équations données, que plus l'effet E approche de la quantité Da, plus l'angle Φ devient petit; & que la diminution de l'angle Φ augmente le produit μb & diminue le produit $n f^2$. Mais la pratique ne permet pas que le produit μb ſoit exceſſivement grand, ni que le produit $n f^2$ ſoit exceſſivement petit; car la difficulté de l'execution & ſouvant les circonſtances locales mettent des bornes à la longueur b des tuyaux de decharge; on ne ſauroit non plus augmenter trop le nombre μ, parcequ'une trop grande viteſſe de rotation de la Machine ne laiſſeroit pas d'augmenter trop les reſiſtances de l'air & du frottement des pivots de la Machine. De même on ne ſauroit faire $n < 1$, ni donner une trop petite amplitude f^2 aux orifices de decharge, pour ne point trop augmenter le frottement & l'etranglement de l'eau qui doit y paſſer, & pour empecher que ces orifices ne ſe bouchent pas des matieres étrangéres melées à l'eau.

4.) Ayant fixé l'amplitude f^2 des orifices de decharge, on fera l'amplitude k^2 des tuyaux de decharge convenablement plus grande; Mr. Segner eſt d'avis qu'il ſuffit de faire les diametres des tuyaux environ quadruples de ceux des orifices, & l'amplitude du tuyau d'injection égale à la ſomme des amplitudes des tuyaux de decharge ou $h^2 = n \cdot k^2$. Enfin pour ce qui regarde l'amplitude e^2 du baſſin ſuperieur; il faut ſe rappeller qu'elle doit être conſidérablement plus grande que celle des orifices de decharge,

charge, ayant ſuppoſé dans les élémens du calcul de la Machine que $1 - \frac{s^4}{e^4}$ ne différoit pas ſenſiblement de l'unité.

5.) On pourroit ſe diſpenſer dans ce calcul, de l'emploi de l'angle ϕ; car à cauſe de coſ. $\phi = \frac{E}{2Da - E}$, on a

$$\text{ſin.}\,\phi = \frac{2\sqrt{[Da(Da-E)]}}{2Da-E} \ \&\ \text{tang.}\,\phi = \frac{2\sqrt{[Da(Da-E)]}}{E},$$

Subſtituant ces valeurs on a

$$\mu b = \frac{\sqrt{g}}{2\pi} \cdot \frac{E}{\sqrt{[D(Da-E)]}} \ \&\ nf^2 = \frac{D}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\sqrt{[D(Da-E)]}}{2Da-E}.$$

Mais outre que ces équations ſont plus compliquées que les précédentes, l'angle ϕ nous procure l'avantage de voir d'abord, ſi la depenſe & la chute d'eau qu'on emploie, ſont dans un rapport convenable à l'effet qu'on ſe propoſe de produire; car ayant vu, qu'on peut tres-bien & ſans aucun inconveniant dans la pratique admettre l'angle $\phi = 39^\circ$; on en tirera les concluſions ſuivantes:

1.) Si l'angle ϕ qui reſulte de l'équation coſ. $\phi = \frac{E}{2Da - E}$ eſt trop grand, & ſurpaſſe 39°; c'eſt une marque ſure, qu'avec la depenſe & la chute d'eau données on pourra obtenir un effet plus grand que celui qui eſt propoſé, ou bien qu'on pourra produire l'effet propoſé avec une depenſe & une chute d'eau moindres que celles qu'on y a deſtinées; car l'équation donnée fait voir qu'en augmentant la quantité E ou en diminuant la quantités Da on diminue l'angle ϕ.

2.) Si l'angle ϕ qu'on trouve, eſt trop petit, étant moindre que 39°; c'eſt une marque que la depenſe & la chute

 d'eau

d'eau données pourront à peine produire l'effet proposé sans qu'il y ait à craindre que la Machine ne devienne sujette dans la pratique à l'un ou l'autre des inconvenians mentionnés cy dessus, c'est à dire, que les produits μb & nf^2 ne deviennent l'un trop grand & l'autre trop petit.

Exemple 1.

§. 7. Qu'on emploie une depense d'eau de quatre pieds cubes par seconde & qu'on se propose d'entretenir l'eau dans le tuyau d'injection d'une Roue Segnerienne à la hauteur de trente cinq pieds; on demande l'arrangement de la Machine pour qu'elle soit capable d'élever un fardeau de 5180 livres à la hauteur d'un pied par seconde.

Par ces données on a $D = 4$; $a = 35$; $Q = 74$; $h = 1$, & partant $E = 74$.

Calcul.

pour Φ	pour μb	pour nf^2
$l\,E$ – – – $= 1,8692317$	$l \frac{\sqrt{g}}{\pi} = 0,0997602$	$l\,D = 0,6020600$
$l(2Da - E) = 2,3138672$	$l \sqrt{a} = 0,7720340$	$l\,\text{sin.}\,\Phi = 9,9699989$
$l\,\text{cos.}\,\Phi = 9,5553645$	$0,8717942$	$0,5720589$
$\Phi = 68^\circ 56' 51''$	$l\,\text{tg.}\,\Phi = 0,4146344$	$l\,2\sqrt{g} = 0,8979400$
	$l\,\mu b = 0,4571598$	$l \sqrt{a} = 0,7720340$
	$\mu b = 2,8652$	$1,6699740$
		$l\,nf^2 = 8,9020849$
		$nf^2 = 0,079815$

Comme

Comme on peut prendre des valeurs arbitraires pour μ ou pour b, & de même auſſi pour n ou pour f^2; ſuppoſons qu'il ſoit praſticable de faire $b = 10$ pieds; on aura $\mu = 0,28652$. Faiſant $n = 2$, on aura $f^2 = 0,039907$ pieds quarrés $= 5,7$ pouces quarrés; la Roue ſera donc garnie de 2 tuyaux de de charge, chacun de 10 piéds de long & de 5,7 pouces quarrés d'ouverture; elle ſera 0,28652 revolutions par ſeconde ou une revolution en $3\frac{1}{2}$ ſecondes & elle ſera capable d'élévei un fardeau de $\frac{5180}{h}$ livres à la hauteur de h pieds par ſeconde.

Remarques.

1.) Une Roue hydraulique ordinaire à Palettes ne produiroit avec la même depenſe & la même chute d'eau qu'un effet $E = 31$. Ces deux effets ſont en raiſon de 24 à 10.

2.) Quelques praſticables que ſoient les dimenſions de cette Roue; la trop grande valeur de l'angle Φ indique, que la depenſe d'eau avec ſa chute eſt trop forte à l'égard de l'effet au quel elle eſt deſtinée, & qu'on doit admettre un grand dechet qui monte jusqu'à la moitié du plus grand éffet poſſible, pour ne faire produire à la Roue qu'un effet auſſi inferieur au plus grand effet poſſible. On pourroit donc avec la même depenſe & la même chute d'eau produire un effet conſidérablement plus grand que l'effet propoſé, ou bien on pourroit produire l'effet propoſé avec une depenſe & une chute d'eau conſidérablement moindres que celles qu'on y a deſtinées. Car comme on peut tres-bien ad-

admettre $\Phi = 39^0$; on a $\frac{D\,a}{E} = \frac{\text{cof.}\,\frac{1}{2}\,\Phi^2}{\text{cof.}\,\Phi} = 1,1434$ & conféquemment en confervant les valeurs $D = 4$ & $a = 35$ on a $E = 122$; ou bien auffi en confervant la valeur $E = 74$, on a $D\,a = 85$ & ce produit eft à celui de l'exemple en raifon de 10 à 16.

Exemple 2.

§. 8. Qu'on emploie une depenfe d'eau de deux pieds cubes par feconde & qu'on ait une chute d'eau telle, qu'on puiffe entretenir l'eau dans le tuyau d'injection d'une Roue Segnerienne à la hauteur de quarante deux pieds & demi; on demande l'arrangement de la Machine pour qu'elle foit capable d'élever un fardeau de 5180 livres à la hauteur d'un pied par feconde.

Par ces données on a $D = 2$; $a = 42,5$; $Q = 74$; $h = 1$, & partant $E = 74$.

Calcul.

Le Calcul de cette Roue donne

$\Phi = 39^0.\ 34'.\ 17''$; $\mu\,b = 9,9256$ pieds
$n\,f^2 = 3,5598$. pouc. quarrés.

Suppofons qu'il foit practicable de faire $b = 15$ pieds & on aura $\mu = \frac{2}{3}$. Faifant $n = 1$, on obtient $f^2 = 3,5598$ pouc. quarrés. La Roue ne portera donc qu'un feul tuyau de decharge, de 15 pieds de long & de $3\frac{1}{2}$ pouces quarrés d'ouverture, elle achevera chaque revolution en $1\frac{1}{2}$ feconde, & fera ſera capable d'élévet un fardeau de $\frac{5160}{h}$ livres à la hauteur de h pieds par ſeconde.

Remarques.

1.) La Roue trouvée pour l'exemple précédant a toutes ſes dimenſions bien practicables. La hauteur du tuyau d'injection de $41\frac{1}{2}$ pieds eſt encore moindre que celle des Pompes moyennes, & bien inferieure à celle des hautes Pompes dont on ſe ſert dans les trauvaux des Mines. La chute d'eau de $4?\frac{1}{2}$ pieds eſt auſſi celle que demandent les Roues ordinaires à Godets, qui elles mêmes ont ordinairement un diametre de 6 Toiſes & encore par deſſûs une élévation du reſervoir d'eau de 5 à 6 pieds. La depenſe d'eau de 2 pieds cubes par ſeconde fait une conſomtion de 134400 ſceaux en 24 heures à meſure de 90 livres par ſceau, ou de 44800 ſceaux dans un Poſte, & cette conſomtion eſt encore inferieure à celle qui a lieu dans les Roues hydrauliques ordinaires. L'effet de la Roue eſt ſuffiſant pour les travaux de l'extraction des minerais & des matieres du roc.

2.) Quant à l'épuiſement des eaux ſouterraines par le moyen de cette Roue, admettons que la charge de l'eau dans une Pompe, le poids des tirans & des tiges & le frottement y compris, monte à 10000 livres; la Roue pourra élévet ce fardeau avec une viteſſe de c, 518 pieds par ſeconde, & ſuppoſant 40 pouces à chaque levée du piſton, elle l'achevera en $6\frac{2}{5}$ ſecondes.

Problême 3.

§. 9. *La Roue Segnerienne, la chute d'eau & l'effet que la Machine doit produire, étant donnés; trouver la depenſe d'eau neceſſaire pour cet effet & le tems de revolution de la Roue.*

Solution.

Les quantités n, b, f^2, a & E étant données: qu'on cherche un angle Φ par l'équation

$$\text{tang.}\,\Phi + \text{ſin.}\,\Phi = 4\sqrt{g}\,.\,\frac{nf^2\,.\,a\sqrt{a}}{E},$$

& on aura

1.) pour la depenſe requiſe d'eau

$$D = \frac{E\,.\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2}{a\,.\,\text{coſ.}\,\Phi}.$$

2.) pour le tems de revolution de la Roue

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\,.\,\frac{b\,.\,\text{tang.}\,\Phi}{\sqrt{a}}.$$

Demonſtration.

À cauſe de $2nf^2\sqrt{(ga)} = D\,\text{ſin.}\,\Phi$ &

$$E = \frac{D\,a\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2} \text{ on a}$$

$$\frac{2nf^2a\,.\,\sqrt{(ga)}}{E} = \text{tang.}\,\Phi\,.\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2 = \frac{\text{tang.}\,\Phi\,(1+\text{coſ.}\,\Phi)}{2},$$

& partant

$$\text{tang.}\,\Phi + \text{ſin.}\,\Phi = \frac{4nf^2a\,.\,\sqrt{(ga)}}{E}.$$

Connoiſſant l'angle Φ on a les expreſſions pour D & t par les Problemes précédans.

Corol-

Corollaires.

1.) L'équation donnée pour l'angle Φ est du quatrième degré. Les quantités D & t étant nécessairement positives; il faut qu'il soit $\Phi < 90°$, & cette racine de l'équation qui est la seule qu'il importe ici de connoitre, se trouve le plus commodement par la regle de fausse position à l'aide des tables des sinus & des tangentes.

2.) L'angle Φ qu'on trouve par ce calcul, fait voir, si la Machine est avantageusement construite ou non. §. 6. Coroll. 5.

Exemple.

Soit construite une Roue Segnerienne à un seul tuyau de decharge, de 15 pieds de long & de 3, 5598 pouces quarrés d'ouverture; on demande la depense d'eau nécessaire pour que, l'eau étant entretenue à la hauteur de $4\frac{1}{2}$ pieds dans le tuyau d'injection, la Roue produise un effet $= 74$. Par ces données on a $n = 1$; $b = 15$; $f^2 = \frac{3,5598}{144}$; $a = 42\frac{1}{2}$ & $E = 74$.

Calcul.

pour (tang. Φ + sin. Φ)	pour Φ
$l\,4\sqrt{g} = 1,1989700.$	Φ Tang. Φ + sin. Φ.
$l\,n f^2 = 8,3930631.$	$39°, 34'$ . . $1,4632681.$
$l\,a = 1,6283889.$	$39°, 35'$ . . $1,4639819.$
$l\sqrt{a} = 0,8141944.$	$0,0007138.$
$2,0346164.$	erreur de
$l\,E = 1,8692317.$	la 1 hyp. $= 0,0002049.$
l (tang. Φ + sin. Φ) $= 0,1653847.$	$7138 : 2049 = 60'' : 17''.2$
tang. Φ + sin. Φ $= 1,4634730.$	Donc $\Phi = 39°, 34', 17''.2$

Moyennant cet angle Φ on trouve $D = 2$ pieds cubes & $t = 1\frac{1}{2}$ fecondes, comme cy-deffûs §. 8.

Problême 4.

§. 10. *La Roue Segnerienne, l'effet qu'elle doit produire & la depenfe d'eau étant donnés: trouver la hauteur requife de l'eau dans le tuyau d'injection, & le tems de revolution de la Roue.*

Solution.

Les quantités n, f^2, b, E & D étant données; qu'on cherche un angle ω par l'équation

$$\text{fin. } 2\omega = \frac{2nf^2}{D} \sqrt{\left(\frac{2g.E}{D}\right)},$$

& enfuite deux angles Φ par les équations

$$\text{fin. } \tfrac{1}{2}\Phi = \frac{\text{fin. }\omega}{\sqrt{2}} \text{ \& fin. } \tfrac{1}{2}\Phi = \frac{\text{cof. }\omega}{\sqrt{2}},$$

& on aura

1.) pour la hauteur requife de l'eau dans le tuyau d'injection

$$a = \frac{E.\text{cof. }\frac{1}{2}\Phi^2}{D.\text{cof. }\Phi},$$

2.) pour le tems de revolution de la Roue

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{b.\text{tang.}\Phi}{\sqrt{a}}.$$

Demonftration.

Ayant

$$2nf^2\sqrt{(ga)} = D.\text{fin.}\Phi \text{ \& } E = Da.\frac{\text{cof.}\Phi}{\text{cof.}\frac{1}{2}\Phi^2}$$

on trouve, en éliminant la quantité a,

$D^3 =$

$$D^3 = \frac{2\, n^2 f^4 g\, E}{(1 - cos.\, \Phi) \cdot cos.\, \Phi}.$$

Or la plus grande valeur poſſible de la quantité

$$(1 - cof.\, \Phi) \cdot cof.\, \Phi \text{ étant } = \tfrac{1}{4},$$

la plus petite valeur poſſible de D^3 ſera $D^3 = 8\, g \cdot n^2 f^4 \cdot E$. Faiſant donc

$$\frac{8\, g \cdot n^2 f^4 \cdot E}{D3} = fin.\, 2\, \omega^2; \text{ on aura}$$

$$(1 - cof.\, \Phi) \cdot cof.\, \Phi = \tfrac{1}{4}\, fin.\, 2\, \omega^2,$$

ce qui donne cof. $\Phi = \frac{1 \mp cof.\, 2\, \omega}{2}$, & partant

$$1 - cof.\, \Phi = 2 \cdot fin.\, \tfrac{1}{2}\, \Phi^2 = \frac{1 \pm cof.\, 2\, \omega}{2},$$

de façon que

$$fin.\, \tfrac{1}{2}\, \Phi = \frac{fin.\, \omega}{\sqrt{2}} \text{ \& auſſi } fin.\, \tfrac{1}{2}\, \Phi = \frac{cof.\, \omega}{\sqrt{2}}.$$

Ayant trouvé l'angle Φ on a les expreſſions pour *a* & *t* comme cy-deſſûs.

Corollaire.

Il y a deux hauteurs de l'eau dans le tuyau d'injection qui ſatisfont également au Probleme; l'une & l'autre, accompagnée d'un dechet différent & d'une viteſſe différente de la rotation de la Roue, produit le même effet avec la même depenſe d'eau.

Exemple.

Soit conſtruite une Roue Segnerienne à 8 tuyaux de decharge, chacun de 12 pieds de long & de 5 pouces quarrés d'ouverture; ſoit la depenſe d'eau de 10 pieds cubes par ſeconde & que la Machine doive produire un effet = 77, 278. On demande la hauteur requiſe de l'eau dans le tuyau d'injection & le tems de revolution de la Roue.

Par ces données on a $n = 8$; $b = 12$; $f^2 = \frac{5}{144}$; $D = 10$ & $E = 77, 278$.

Le calcul fait d'aprés la folution précédante donne $\omega = 29^\circ, 50', 48''. 6$; $\Phi = 41^\circ, 12', 32''. 4$, & auffi $\Phi = 75^\circ, 39', 33''. 2$. La premiere valeur donne $a = 9$ pieds; $t = 2, 8$ fec.; $E = 77, 28$; la feconde $a = 19, 46$ pieds, $t = 8, 4$ fec.; $E = 77, 28$. Dans le premier cas le dechet vaut $\frac{1}{7}$, dans le fecond $\frac{5}{8}$ du plus grand effet poffible.

Combinaifon de la Roue Segnerienne avec un Tambour ou avec une Manivelle.

Pl. V. §. 11. Dans l'extraction des Minerais & des matieres du roc, le fardeau eft attaché à une corde qui fe roule fur la circonférence d'un Tambour horizontal ou vertical. Dans l'épuifement des eaux des Mines, la tige du Pifton de la Pompe qui les éléve, eft fixée à une Manivelle. Pour appliquer la Roue Segnerienne à tourner ce Tambour ou cette Manivelle, foit l'effieu de la Roue garni d'une circonférence dont le nombre de dents $= x$; foit auffi l'effieu du Tambour ou de la Manivelle garni d'une telle circonference dont le nombre de dents $= y$. Pofons le rayon du Tambour ou la longueur du bras de la Manivelle $= c$, & $\frac{x}{y} = \lambda$. L'engrainement des dents étant établi, chaque revolution de la Roue Segnerienne fera accompagnée de λ revolutions du Tambour ou de la Manivelle qui par conféquant acheveront $\mu\lambda$ revolutions dans une feconde de tems. Or

I.) Si la Roue eft combinée avec un Tambour, comme à chaque revolution du Tambour le fardeau eft élévé vé à la hauteur $= 2\pi . c$, il ſera élévé dans une ſeconde de tems à la hauteur $h = 2\pi . \mu \lambda c$, & puisque $Q h = E$, ou Q deſigne le volume d'une maſſe d'eau dont le poids eſt ègal au fardeau, on trouvera le fardeau que la Roue eſt capable d'éléver à cette hauteur dans une ſeconde de tems, par l'équation $Q = \frac{E}{2\pi \mu \lambda c}$.

II.) Si la Roue eſt combinée avec une Manivelle qui tient au Piſton d'une Pompe, comme à chaque revolution de la Manivelle le Piſton acheve ſon jeu; le tems de chaque jeu du Piſton ſera $= \frac{1}{\mu \lambda}$ ſec. & celui d'une levée $= \frac{1}{2\mu \lambda}$ ſec. $= \theta$. Or par la levée du Piſton le fardeau eſt élévé à la hauteur $= 2 c$; il ſera donc élévé dans une ſeconde de tems à la hauteur $h = 4 \mu \lambda c$, & le fardeau que la Roue eſt capable d'éléver à cette hauteur dans une ſeconde de tems, ſe trouve par l'équation $Q = \frac{E}{4 \mu \lambda c}$.

Appliquons ces équations aux ſolutions des Problêmes ſuivans: *)

Problême 5.

§. 12. *La Roue Segnerienne, la depenſe & la hauteur de l'eau dans le tuyau d'injection, le Tambour ou la Manivelle & les nombres de dents des Roues dentées, étant donnés: trouver le fardeau que la Machine eſt capable d'éléver & la hauteur à la quelle elle l'éléve dans une ſeconde de tems.*

So-

*) J'ai repreſenté dans la Planche auſſi les cas où le Tambour vertical & la Manivelle ſeroient fixés à l'eſſieu de la Roue Segnerienne même. Pour ces cas on a $\lambda = 1$.

Solution.

Les quantités n, f^2, b, D, a, c & λ étant données: qu'on cherche l'angle Φ par l'équation $\sin. \Phi = \frac{2 n f^2 \sqrt{(g a)}}{D}$; ensuite

I.) Si c'est un Tambour auquel la Roue est combinée, on aura

$$Q = \frac{D b . \sqrt{a}}{\lambda c . \sqrt{g}} . \text{tang.} \tfrac{1}{2} \Phi \;\&\; h = \frac{2 \lambda c . \sqrt{(g a)}}{b . \text{tang.} \Phi}.$$

II.) Si c'est une Manivelle; on aura

$$Q = \tfrac{1}{2} \pi . \frac{D b . \sqrt{a}}{\lambda c . \sqrt{g}} . \text{tang.} \tfrac{1}{2} \Phi;$$

$$\theta = \tfrac{1}{2} \pi . \frac{b . \text{tang.} \Phi}{\lambda . \sqrt{(g a)}}, \;\&$$

$$h = \frac{4}{\pi} . \frac{\lambda c . \sqrt{(g a)}}{b . \text{tang.} \Phi},$$

de sorte que $h . \theta = 2 c$.

Demonstration.

Les quantités b, a & Φ étant données, on a

$$\mu = \frac{\sqrt{(g a)}}{\pi b . \text{tang.} \Phi};$$

on a aussi

$$E = \frac{D a . \text{cos.} \Phi}{\text{cos.} \tfrac{1}{2} \Phi^2}.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions pour Q, h & θ (§. 11.), on obtient celles de la Solution.

Corollaires.

1.) La valeur de l'angle Φ fera voir, si la Roue est avantageusement construite ou non. (§. 6. Coroll. 5.).

2.) Puisque, si $\Phi = 90°$, l'effet de la Roue est nul; on aura toujours $Q < \frac{D b}{\lambda c} \sqrt{\frac{a}{g}}$ pour un Tambour; & $Q < \tfrac{1}{2} \pi . \frac{D b}{\lambda c} \sqrt{\frac{a}{g}}$ pour une Manivelle.

Exem-

Exemple.

Que la Roue Segnerienne du §. 8. ſoit garnie d'une Lanterne à quatre fuſeaux & combinée avec un Tambour horizontal de ſix pieds en rayon & portant une roue dentée de 61 dents.

Par ces données on a $D = 2$; $a = 42,5$; $b = 15$; $\Phi = 39°, 34', 17''$; $x = 4$; $y = 61$; & $c = 6$. Le calcul donne $Q = 45,239$ & $h = 1,635$.

La Machine élévera donc 3166,73 livres à la hauteur de 1,635 pieds par ſeconde. Telle eſt ordinairement la plus forte charge des Minerais à extraire dans l'exploitation des puits de 150 Toiſes de profondeur. (§. 4.).

Si la même combinaiſon eut été faite avec une Manivelle de 3 pieds de longueur; on auroit $Q = 142,12$; $h = 0,52$; $2c = 6$ & $\theta = 11\frac{1}{2}$. La Machine pourra donc élever $9943\frac{1}{2}$ livres d'eau des Mines, la hauteur de la levée du Piſton ſera de 6 pieds & le Piſton ſera cinq levées par Minute; & telle eſt auſſi la charge & la pratique ordinaire dans l'extraction de ces eaux. (§. 8.).

Problême 6.

§. 13. *Le fardeau à élever, la hauteur à la quelle il doit être élevé par ſeconde, la depenſe & la chute d'eau étant donnés, trouver l'arrangement néceſſaire de la Roue Segnerienne & celui du Tambour ou de la Manivelle.*

Solution.

Les quantités Q, h, D & a étant données, qu'on cherche l'angle Φ par l'équation $\text{coſ.}\,\Phi = \frac{Q \cdot b}{2Da - Qb}$ & on aura

1.) pour l'arrangement de la Roue

$$\mu b = \frac{\sqrt{(g a)}}{\pi \cdot tang. \Phi} \ \& \ n f^2 = \frac{D . sin. \Phi}{2 \sqrt{(g a)}},$$

ces deux équations ferviront pour determiner les quantités b, μ, f^2 & n felon le Probl. 2.

2.) pour celui du Tambour

$$\lambda c = \frac{b . b . tang. \Phi}{2 \sqrt{(g a)}}.$$

3.) pour celui de la Manivelle

$$\lambda c = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b b . tang. \Phi}{\sqrt{g a}},$$

& cette valeur de λc fervira dans l'un & l'autre cas à determiner les deux quantités λ & c, en prenant l'une ou l'autre à volonté autant que d'autres confidérations le permettent.

Demonftration.

Elle refulte immediatement du Problême 2. (§. 6.) & des équations trouvées cy-deffûs (§. 11.).

Corollaires.

1.) La valeur de l'angle Φ fera voir, fi l'effet qu'on fe propofe d'obtenir par la Machine, eft en jufte proportion avec la depenfe & la chute d'eau qu'on y emploie (§. 6.).

2.) S'il s'agit de l'extraction des Minerais & par conféquant d'un Tambour, on fçait que les Cables, en raifon du fardeau, doivent avoir $2\frac{1}{4}$ jusqu'à $2\frac{1}{2}$ pouces de diametre, & qu'à cet égard, à caufe de la roideur de ces cordes, il n'eft pas permis de diminuer le rayon du Tambour au-delà d'un certain point. Ce rayon eft ordinairement pour le moins de 6 pieds.

3.)

3.) S'il s'agit de l'extraction des eaux des Mines; la longueur de la Manivelle est determinée par la demi-hauteur de la levée du Piston de la Pompe, & cette hauteur depend de la quantité des eaux souterraines qui s'accumulent dans un tems donné, du diametre de la Pompe & de la vitesse du Piston.

4.) Si la Roue Segnerienne est donnée & qu'il s'agit de determiner l'arrangement du Tambour ou celui de la Manivelle; les équations précédantes admettent les transformations suivantes: À cause de

$$\text{cos. } \Phi = \frac{Q . b}{2 D a - Q b} \text{ \& sin. } \Phi = \frac{2 n f^2 \sqrt{(g a)}}{D},$$

& partant

$$\text{tang. } \Phi = \frac{2 n f^2 (2 D a - Q b) \sqrt{(g a)}}{D . Q b}, \text{ on a}$$

$$\lambda c = \frac{n f^2 b (2 D a - Q b)}{D . Q} \text{ pour le Tambour}$$

$$\text{\& } \lambda c = \tfrac{1}{2} \pi n f^2 b \frac{(2 D a - Q b)}{D . Q} \text{ pour la Manivelle.}$$

Exemple.

Soit comme dans l'exemple précédant, un fardeau de 3166, 73 livres à élever à 1, 635 pieds de hauteur par seconde, & qu'on ait pour produire cet effet, une depense d'eau de 2 pieds cubes par seconde avec une chute de 42, 5 pieds. On aura $Q = 45, 239$; $h = 1, 635$; $D = 2$ & $a = 42, 5$ & par là $\Phi = 39^\circ, 34', 17''$; $\mu b = 9, 9256$ & $n f^2 = 3, 5598$ & par ces équations la Roue Segnerienne sera determinée comme dans le §. 8. Pour combiner cette Roue avec un Tambour, on a $\lambda c = 0, 393443$ à cause de $b = 15$. Or comme il faut prendre pour le moins $c = 6$, on trouve pour le rapport des nombres des dents des deux roues dentées $\lambda = 0,065574 = \frac{4}{61}$.

§. 14. Tirons de ce qui précéde, les ſuivantes

Concluſions générales:

1.) Les Roues Segneriennes ſont capables de produire un effet qui, abſtraction faite des réſiſtances du milieu & du frottement, égale au moins ſept-huitiemes du plus grand effet qu'il eſt poſſible de produire par une depenſe & une chute d'eau données (§. 3.). Admettons qu'on puiſſe produire le même effet par le moyen des Roues hydrauliques à Godets; les Roues Segneriennes ſemblent pourtant l'emporter ſur celles-cy par leur conſtruction qui eſt moins compliquée & moins couteuſe; & on pourra s'en ſervir ſurtout avantageuſement lorsqu'on a peu d'eau avec une grande chute, ou reciproquement.

2.) Quoique les Roues hydrauliques à Godets ſoient les plus uſitées dans les travaux des Mines: il y a cependant des cas où l'on eſt dans la neceſſité de recourir à celles à Palettes; comme l'effet de celles-cy n'égale qu'environ deux neuviemes du plus grand effet poſſible; les grands avantages des Roues Segneriennes ſemblent être incontestables dans ce cas là.

3.) Ces ſortes de Roues pourront auſſi être employées avantageuſement à bocarder les Minerais, & à mettre en jeu les ſoufflets des fonderies.

PHY-

PHYSICA.

DE ORDINE FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.

Dissertatio X.

DE STRATO SECVNDO FIBRARVM VENTRICVLI SINISTRI.

Pars IV.

Auctore

C. F. WOLFF.

Conventui exhib. die 19 Sept. 1793.

Fasciarum ordinis quarti primae et secundae progressus et finis.

Ortae a crena partim, partim a superiori et medio fasciculo terminali fasciae quinque quarti ordinis fibrarum in strato secundo, quemadmodum in praecedenti huius dissertationis parte explicatum est, oblique, et ad angulum semirectum *a*), per superiorem ventriculi superficiem ex sedibus illis originis suae adscendunt. Prima earum *b*), notabilis, a

a) Tab. VII. 41. 42. 43. 44. 46. 49. 51. 53.
b) Tab. VII. 41.

a ſuperiori crenae ad radiatam regionem parte orta, fibris, obliquis omnino, propioribus quam caeterae ductui transuerſo, adſcendit, et ſub annularem fasciculum ſe recipit. Latius hanc fasciam in cordibus aliis imprimis in robuſtioribus ſe extendere vidi, vt partem fere ſuperiorem regionis radiatae occuparet, caeterasque fibras, quae ſe ſub illam recipiunt in hoc corde, tegeret. Vti ſublimior omnino his caeteris fibris, quas tegit, collocata fasciola eſt; tanquam ſingulare ſtratum fibrarum fere in hac regione radiata conſiderari poteſt, imprimis in illis cordibus, vbi maior latiorque inuenitur, quod quidem ad ſtratum ſecundum potius quam fibrae flabellatae pertineret. Veram nec vnquam ſuper totam radiatam partem ventriculi ad apicem vsque hae fibrae extenduntur, nec, quo vsque ſe extendunt, a ſtrato externo ſeparari facile poſſunt; vt tanquam lamina potius interior ſtrati externi, ſi maiorem partem occupent, flabellatasque fibras tegant, quam proprium ſtratum fibrarum conſiderandae eſſe videantur. Fascia ſecunda *a*), orta a crenae parte ſequente, fibris, quaſi radiatim diſperſis, magis quam praecedens fascia oblique adſcendit, ideoque maximam partem ſub ipſam eam fasciam ſe recipit *b*), caeteris fibris longioribus *c*) ad marginem vsque excurrit, vbi ſub annularem ſe recipit fasciculum *d*).

Fascia tertia.

Tertia fascia *e*) ab vltima crenae parte *f*) ea ratione oritur, vt neque a tegentibus eam fibris in proxima ad cre-

a) Tab. VII. 42. 43.
b) Tab. VII. 42.
c) Tab. VII. 43.
d) Tab. VII. 39. 40.
e) Tab. VII. 44. 40. 45.
f) Tab. VII. 44. F.

crenam parte ſeparari, neque hae fibrae tegentes porro a ſtrato externo ſolui & diſtingui ſatis potuerint. Quare aliquam earum fibrarum portionem, in icone expreſſam, relinquere neceſſe fuit. Ad laminam certe interiorem ſtrati externi hae fibrae vna cum fascia prima pertinent, quae passim facilius, difficilius alibi a ſtrato ſolvuntur. Fascia tertia ipſa tamen primo initio cum lamina interiori ſtrati externi connexa, progreſſu mox ſoluitur ab illa, libera que et diſtincta oblique verſus marginem adſcendit *a*), ſedem que in eo occupat proximam ſub fasciculo annulari et flectitur in ſuperficiem inferiorem.

Quarta: Fibrae flabellatae maiores. (Tab. VII. 47. 40. 48. Tab. IX. 11. 14. 19. 16. 17. 18.)

Haec fascia tertia *b*), coniuncta cum quarta *c*), flabellatas fibras maiores ſuperficiei inferioris efficit. Quarta, quemadmodum dictum eſt, a portione media *d*) fasciculi terminalis ſuperioris producta, ita priori tertiae fasciae ſe adiungit, vt iam in ſuperiori ſuperficie ſimili eodemque prorſus ductu ambae fasciae contiguae vbique ferantur, nec facile a ſe invicem diſtinguantur; vt vnam quaſi latiorem fasciam in ipſa iam ſuperiori ſuperficie, eoque magis in inferiori, efficiant. Haec latior primo inſigniter oblique adſcendit *e*), deinde flexa transverſalis fere ad marginem ventri-

a) Tab. VII. 40. 45.
b) Tab. VII. F. 40. 45.
c) Tab. VII. 47. 45. 48.
d) Tab. VII. 47. 49. 45. 48.
e) Tab. VII. 47. 44.

triculi pervenit *a*), vbi, dum in inferiorem intrat ſuperficiem *b*), ea ratione directionem mutat, vt primis fibris *c*), propinquis fasciculo annulari, recta omnino adſcendat, ſequentibus deinde *d*) magis magisque ſucceſſive a longitudinali hoc ductu in oblique adſcendentem flectatur, vltimis demum *e*) transverſim omnino ſtriam verſus progrediatur. Sic radiatim hae fibrae diſperſae flabelliformem expanſionem, in ſuperiori iam ſuperficie quodammodo apparentem *f*), maxime tamen inſignem in inferiori *g*), efficiunt. Haec, vti et maior eſt ea, quam continuo dicam, et fibris conſtat latioribus multo ſolitis planioribus que, in quas fibrae ſuperioris ſuperficiei abeunt; fibras *flabelliformes maiores* vocavi. Hae fibrae maximam partem ſub fasciculum annularem *h*) ſe recipiunt *i*), vltima earum portione *k*) excepta, quae in transverſum fere flexa ad ſtriam vsque procurrit, in eiusque vltimam partem et in principium fasciculi terminalis inferioris ſe inſerit. Vti enim fasciae, a crena ſubortae, prima et ſecunda, in ſuperiori iam ſuperficie ſub illum annularem fasciculum ſe recipiabant *l*); ſequentes, tertia et quarta, et, quam hae efficiunt, flabellata fascia, flexa circa marginem ven-

---

a) Tab. VII. 40. 45. 48.
b) Tab. IX. 11. 19.
c) Tab. IX. 13. 14. 16.
d) Tab. IX. 16. 17.
e) Tab. IX. 18.
f) Tab. VII. F. 47. — 40. 45. 48.
g) Tab. IX. 14. 19. — 16. 17. 18.
h) Tab. IX. 8. 11. — 15. 15.
i) Tab. IX. 16. 17.
k) Tab. IX. 18.
l) Tab. VII. 41. 43. 40.

ventriculi, *a*) inferiorem que nacta ſuperficiem, *b*) ſimili modo in hac ſucceſſiue ſub illum ſe recipere pergunt, in qua re ſcilicet ſimiles ſunt radiatis ſtrati externi, quarum locum in ſecundo ſtrato occupant.

Quinta. Fibrae flabellatae minores. (Tab. VII. 50. 48. F. Tab. IX. 19. 20. 21. 22.).

Faſcia denique quinta a ſublimori portione faſciculi terminalis medii *c*) producta, primo oblique ex fasciculo adſcendit, deinde, vbi ſublimior portio a profundiori ſecedit, curuari illius fibrae incipiunt ſimul et diſpergi in faſciam latiorem. *d*). Haec quaſi transuerſa ad marginem peruenit, flexa que in inferiorem tranſit ſuperficiem. Dum per ſuperiorem vero progreditur, dum porro per inferiorem pergit; quaedam continuo fibrae ſub flabellatas maiores ſe recipiunt. *e*) Maior pars tamen earum ſingulari, quo dicam, modo terminatur. Hae fibrae, vti in ſuperiori, ſic et in inferiori ſuperficie, tenues ad finem vsque continuant, quare, quod et minorem fasciam efficiunt, a ſolo medio fasciculo terminali ſubortam, *minores* has *flabellatas* fibras vocare viſum eſt reſpectu maiorum, quae latas planas fibras collectae producunt, maiorem que ex duabus ſubortae fasciam efficiunt. Ubi per maiorem partem ſuperficiei inferioris continuauerunt fibrae, flabellatae minores et propius iam ad fasciculum acceſſerunt terminalem inferiorem, quem verſus pro-

a) Tab. VII. 40. 45. 48.
b) Tab. IX. 11. 19.
c) Tab. VII. 51.
d) Tab. VII. 48. F.
e) Tab. IX. 22.

progrediuntur, euanescunt, *a*) ita vt aperturam omnino, nullis, neque interiorum ſtratorum fibris, neque reticulari ventriculi ſtructura interna, repletam, in hac apicis ventriculi parte relinquant. *b*) Neque in vllam partem inſeruntur, neque ſub alias, quae nulla hic exiſtunt, flbras ſe recipiunt. Nimirum vbi ad oram *c*) aperturae huius ventriculi fibrae flabellatae minores perueniunt, flexae circa oram in cauitatem ventriculi ea ratione deſcendunt, vt ad parietem eundem, quem exterius hactenus texerant ſe applicent, et retrorſum oblique, baſin et marginem verſus, interius continuent, fibrisque ſe immiſceant parietalibus internis.

Apertura ventriculi ſiniſtri in ſtrato ſecundo (Tab. IX. 23. 24. Tab. VII. 54. 55. 52. F.).

Vera ergo in hac circa apicem parte in ſtrato ſecundo ſiniſtri ventriculi apertura datur, ora aequali terminata, qua digitus in cauitatem immitti poteſt. Figura haec oblonga eſt, fere ouali. Sedem occupat ipſam foci inferioris, *d*) quam fibrae ſtrati externi efficiunt, eoque aperturam tegunt. Incipit extremitate altera poſteriori, *e*) in ſuperficie inferiori ad principium fere fasciculi terminalis inferioris, vbi et focus fibrarum radiatarum inferiorum incipit. Extendit ſe inde oblique ſecundum marginem ſiniſtrum huius fasciculi, *f*) in quem extremitates fibrarum radiatarum infe-

a) Tab. IX. 23.
b) Tab. IX. 22.
c) Tab. VI. 53. 68. 69. 70. 75. 76. 79.
d) Tab. IX. 23.
e) Tab. IX. i.

feriorum *a*) inferuntur. Terminatur in ipſo centro focorum. *b*). Includitur ergo et efficitur dexterius dicto margine ſiniſtro fasciculi terminalis inferioris, *c*) ſiniſterius reflexis in ſuperficiem ventriculi internam flabellatis fibris minoribus, *d*) poſterius, vbi incipit, margine anteriori fasciae flabellatae maioris, *e*) anterius in ſede centri focorum margine fasciae flabellatae minoris. *f*) Clauditur in integro corde ſolo ſtrato externo, extremitatibus ſcilicet fibrarum radiatarum inferiorum, quas in icone relictas extribui *g*) vbi ſe illae in fasciculum terminalem inferiorem inſerunt, focumque efficiunt inferiorem, *h*) et inuolucro cordis communi, membrana externa et adipe. Haec ergo tenuiſſima procul dubio parietis ventriculi ſedes eſt. Quo magis inde baſin verſus adſcendit paries, eo craſſior euadit.

Varietates.

Varietates in ordine quarto fibrarum vix, niſi eatenus, reperi, vt minus eleganter in cordibus nonnullis fibrarum ſtructuram expreſſam inuenerim. Ortus tamen non ſolum vbique, non ſolum directio fibrarum et inſertio, ſed

 flabel-

a) Tab. IX. k.
b) Tab. IX. 24. Tab. VII. 55.
c) Tab. IX. i.
d) Tab. IX. 22.
e) Tab. IX. 18.
f) Tab. IX. 24. Tab. VII. 55.
g) Tab. IX. k.
h) Tab. VII. 52. 53. 55. 68. 69. 72. 75. 76. 78. 79.

flabelliformis quoque diſtributio in ſingulis, quae hactenus vidi, cordibus omnino eadem fuit.

Comparatio ordinum quartorum externi et ſecundi ſtrati.

Ad quartum extermi ſtrati ordinem hic quartus ſecundi ſimili fere ratione ſe habet, ac tertius ordo ſecundi ad tertium externi ſtrati ſe habuit. Omnibus modis differre ab illo, nec quidquam cum eo commune habere primo quidem intuitu videtur. Omnibus recta conſideratis, analogia manifeſta eſt. Uterque quartus ordo a parte crenae anteriori, radiatae ventriculi parti reſpondente, oritur. Tum oblique externus *a*) deſcendit fibris ſuis marginem et apicem verſus. Interior adſcendit oblique baſin verſus et marginem *b*). Ille in ſuperiori iam ſuperficie ventriculi fibris curuatis ſub procurrentem minorem ſe recipit. *c*). Hic flexus circa marginem *d*) inferiorem ingreditur ſuperficiem *e*) et ad ſtriam vsque ſe extendit. *f*) Sic directione fibrarum, ſitu et ſede, et magnitudine, qui differt, qui tota ideo natura differre videtur, quartus ſecundi ſtrati ordo a quarto externi nonniſi in eo tamen differt, in quo et caeteri omnes ſecudi ſtrati ordines a ſuis in externo ſibi reſpondentibus ordinibus differunt; caeterum omnino analogus illi et ſimillimus eſt. Differt nimirum ſola directione fibrarum, qua totum ſtratum ſecundum ab externo ſtrato differre, in ſuper-

a) Tab. VI. 84. 90. 92. 97.
b) Tab. VII. 41. 42. 43. 44. 45. 49. 51. 52.
c) Tab. IV. 89. 90. 91. 96. 97.
d) Tab. VII. 40. 45. 48. F.
e) Tab. IX. 13. 14. 19. 20.
f) Tab. IX. 17. 18.

percoribus iam monui. Uterque ordo, a crena fubortus, marginem verfus, externus defcendendo aliquantum oblique, adfcendendo fecundus, progreditur. Tum externus vero prope marginem continuo curuatis fibris verfus apicem ventriculi tendit, inferiorem fuperficiem euitando. Interior marginem tranfit, ad ftriam vsque fe extendit. Quod fola ergo directione fibrarum eiusque in binis ordinibus differentia, efficitur. Idem in tertiis, idem que in fecundis ordinibus factum. Simili enim modo ad marginem tertius ordo in ftrato externo vbi peruenit, curuatis fibris ad apicem ventriculi fe flectit, *a*) euitando fuperficiem inferiorem, dum in fecundo ftrato is tertius ordo marginem tranfiens *b*) ad ftriam vsque continuat. *c*) Similiter et ordo fecundus in ftrato externo fibris curuatis ad marginem apicem verfus flectitur, *d*) dum idem in fecundo ftrato ordo ad ftriam tranfit. *e*) Et in ipfis primis ordinibus, qui ambo in inferiori fuperficie orti collocati que exiftunt, externum admodum apicem verfus tendere vides *f*), dum interior continuo ftriam quaerit. *g*) Differentia ergo inter quartum externi et fecundi ftrati ordinem nulla alia quam communis fecundi ab externo differentia eft. At analogia inter vtrumque ordinem manifefta. Quo enim maxime fe quartus ordo in ftrato externo diftinguere videtur, quae tanquam fingularis in eo

a) Tab. IV. 72. 73. 73. 74. 77. 78. 82.
b) Tab. VII. 32. 39.
c) Tab. IX. 4. 11. 9. 15.
d) Tab. IV. 46. 47. 48. 54. 61. 62. 70. 71.
e) Tab. VII. H. 30. Tab. IX. p. x. q. 3.
f) Tab. VI. 34. 38. 40. 42. 43. 41. 44. 46.
g) Tab. IX. l. m. c.

eo ſtructura conſiderari poſſet, quod fibrae ſcilicet eius omnes ſub procurrentem minorem ſe recipiunt, ea non minus in ſtrato ſecundo occurrit, vbi paucis fibris exceptis, quae ſtriam nanciscuntur, *a*) reliquae omnes in ſuperiori et inferiori ſuperficie ſub annularem fasciculum, analogum procurrenti, ſe recipiunt. *b*). Vt quae cauſa fuerit diſtinguendi ordinis quarti a caeteris fibris in ſtrato externo, eodem et in ſecundo hanc quartam partem fibrarum a caeteris, baſi propioribus, ſimili modo diſtinguat.

Externum ſtratum curuatum, deſcendens, ſecundum rectum, transuerſum eſt.

Non quidem omnino transuerſum eſt hoc ſtratum ſecundum, cum plurimae fasciae eius et fibrae oblique descendant, aliae adſcendant oblique, paucae in inferiori tantum ſuperficie transuerſim ducantur. Verum inter omnia tamen reliqua ſtrata proximum hoc eſt ductui transuerſali; cum parum pleraeque fibrae, ſiue deſcendant oblique, ſiue adſcendant, ab eo ductu ſint diuerſae; ſequens autem tertium ſtratum adeo adſcendat, externum deſcendat, vt longitudinali propiora ſint ambo haec ſtrata, quam transuerſali. Quare his fere characteribus, quae hactenus deſcripſi, ſiniſtri ventriculi ſtrata, externum, ſiue primum, et ſecundum, inſigniri et diſtingui, breuibus quidem, poſſe videntur, vt externum *oblique deſcendens* et *curuatum* eſſe dicas, ſecundum *transuerſum* et *rectum*. Hoc enim ſinguli fere ordines ſtrati externi proprium habent, vt a primo initio quidem,

a) Tab. IX. 17. 18.

b) Tab. VII. 41. 42. 43. Tab. IX. 11. 16. 17.

dem, at parum tamen tantummodo, defcendere oblique incipiant; *a*) deinde, vti ex crena progrediuuntur, magis magisque ad defcendentem ductum vergant; *b*) denique vbi prope ad marginem accefferunt ventriculi, vel in margine ipfo, *c*) vel vbi tranfierunt marginem, continuo adeo curventur, vt parum a longitudinali ductu differant. Sic in margine ipfo et prope marginem in inferiori fuperficie infigniter curuatas vides fibras ordinis fecundi parallelas fere *d*) margini defcendere, quae in fuperiori hactenus fuperficie vix anguli femirecti obliquitatem habuerunt. *e*) Sic ad marginem vsque tertii et quarti ordinis fibrae in ftrato externo leniter defcendunt, *f*) vbi propius accedunt ad marginem ilico curuatae ipfum petunt apicem ventriculi. *g*) Secundum contra ftratum; qua oritur a crena directione, quo ductu progreditur, *h*) eodem et fuper marginem tranfit fere et continuat per inferiorem fuperficiem; *i*) vt et rectum hoc refpectu et transuerfum ob dictas fuperius caufas fecundum hoc ftratum merito vocari poffit. Solus fecundus ordo

---

a) Tab. IV. 60. 65. 75. 85. 97.

b) Tab. IV. 58. 73. 84.

c) Tab. IV. 46. 47. 48. 54. 61. 62. 70. 73. 82. 88.

d) Tab. VI. 54. 56. 57. 51. 59.

e) Tab. IV. 46. 47 p. 48. 49. 50. 52.

f) Tab. IV. 73. 73. 73. 79. 78. 81. 84. 87. 92. 94.

g) Tab. IV. 77. 78. 74. 88. 93.

h) Tab. VII. G. B. E. 27. 26. 31 — f. 36. 34. 35. — 37. 38. 39. 40.— 42. 44. 47. 40. 45. 48.

i) Tab. IX. p. x. q. 3. — 4. 11. 6. 15. — 14. 19. 16. 18. — 19. 20. 21. 22.

ordo in hoc corde imprimis aliquatenus a recto, quo per superiorem superficiem progrediebatur, *a*) ductu declinare in inferiori videtur *b*).

a) Tab. VII. G. E. H. 28.
b) Tab. IX. p. x. q. 3.

EXPOSITIO METHODI NOVAE AQVAM PVTRIDAM VEL CORRVPTAM DEPVRANDI.

Auctore

TOBIA LOWITZ.

Convent. exhib. die 30 Januarii 1794.

§. 1.

Aquam, naturae donum, hominibus quam maxime neceſſarium, aeſtiuo tempore in calidis praeſertim regionibus ad corruptionem maxime procliuem eſſe, notiſſimum eſt, et quanta non raro calamitas inde oriatur, nautarum inprimis experientia conſtat; talis enim corrupta aqua ad alimenta ſi adhibeatur, perniciosiſſimos immo lethales eius vſu excitari morbos putredinoſos neceſſe eſt; quam ob rem dubitari ſane non poteſt, quin methodi inuentio, qua aquae corruptio vel prohiberi vel corrupta iam aqua corrigi queat, ad publicam generis humani ſalutem haud parum conferre cenſenda ſit.

Proſtant quidem variae iam, a variis naturae ſcrutatoribus in lucem prolatae, aquae corruptae emendandae methodi; at ſingulae propriis ſibi laborant defectibus. Neque enim modo earum, quotquot ſunt, nulla votis ex omni parte respondet; sed omnes quoque vel operosae nimis et diuturnae sunt, vel peregrinis materiis addendis perficiuntur adeo suspectis, vt, ne quid detrimenti inde capiat hominum, qui iis vtuntur, sanitas, merito pertimescendum esse videatur.

§. 2. Errant, qui opinantur, aquae corruptioni praevia illius depuratione obstaculum poni posse. Aqua quidem perfecte pura ipsamet haud corrumpitur; sed omnis eius corruptio partim a partium heterogenearum putrefactione, quas aqua e ligneis in quibus seruatur vasis soluit, partim ab animalculis in ea subinde genitis, originem repetit. Quae cum ita sint: aquae putridae emendandae methodus omnis materiarum additione absoluitur, quas ita comparatas esse oportet, vt omnes eas, quae in putrefactionem abire possunt, partes vel destruant, vel, quod praestat, absorbeant ita, vt aqua iis prorsus liberetur; deinde quoque additamenta ista talis sint indolis, necesse est, vt aquae partes solubiles, quibus inquinari posset, nullas praebeant. Vtraque ista conditio in carbone vegetabili probe exusto locum obtinet.

§. 3. Anno 1788 contigit, vt carbonum vim in adimendo odore foetido aquae putridae primus obseruarem; qua de re inter complura alia circa carbones experimenta Ill. Academiam sine mora certiorem feci *).

Atque ea quidem obseruatio mea tanti mihi sane momenti visa est, vt permultis eam confirmare aliis tentaminibus, et magis magisque perficere omni studio allaborarem, quorum non descriptionem modo Ill. Societati Oeconomicae Petropolitanae anno 1790 exposui, sed successum quoque prae-

*) Nov. Act. T. VI. anno 1790. Histoire pag. 63.

praesentibus huius societatis celeberrimis membris, atque ipso Excellentissimo eiusdem Praeside comite Anhalt reapse comprobavi; atque ipsa dissertatio ista mea operibus dictae societatis inserta est *).

Neque etiam silentio hic praeterire mihi fas est, copiarum Rossicarum, Danubii et Sereti ripas quae tenebant, plurimos duces Illustrissimos, quos inter Principem Repnin et Excell. Dn. de Bock nominare sufficiat, datis ad societatem litteris significavisse, quantopere mea depurandae aquae methodus sanitati exercitus fuerit proficua; et quidni commemorem quoque, eam in variis etiam Germaniae locis ad vsum fuisse revocatam.

§. 4. Veritati tamen historicae id quoque debeo, vt moneam, Cl. D. Kels, meorum aquae putridae emendandae tentaminum inscium, eodem fere, quo ego, tempore, vti postea compertum habui, nec nisi paulo ante me, Goettingae similia experimenta aeque fausto successu instituisse **), quod lubentissime illi concedo, cum ipse non haeserit confiteri, se in inuestiganda carbonum virtute generatim spectata, me duce sua tentamina adiisse.

§. 5. Licet praecipua, quae mense Iulii 1790 institui, hoc de argumento tentamina mea eodem anno typis iam impressa sint; haud tamen reor alienum, eadem nunc Illustri quoque Academiae Scientiarum exponere; quandoquidem

 ab

*) Труды вольнаго Экономическаго Общества 1791. г. ** Стр. 119. Auswahl ökonomischer Abhandlungen. 2. B. 1791. S. 211.

**) Crells chemische Annalen 1792. B. 1. S. 198.

ab illo inde tempore istis experimentis nonnulla addere nova mihi licuit.

EXPER. I.

Vt viderem possitne carbonum additione arceri aquae putrefactio, die 20 mensis Iulii 1790 tres lagenas vitreas, singulas 16 aquae purae libris impleui. Harum vni vncias sex carbonum pulueris subtilissime contriti, alteri duas eiusdem crasse contusi, tertiae nihil admiscui. Omnes tres lagenas operculo clausas aestiuo tempore aprico exposui. Elapso biduo, ea, cui nihil adieci, aqua odorem spirabat mucidum; dum contra ea, in binis reliquis lagenis per integrum adeo annum seruata, eius odoris ne hilum quidem contraxisset.

EXPER. II.

Cum vidissem, aquam in lagenis seruatam putrefactioni perfecte resistere, quia vasa vitrea ei nullas omnino partes solubiles porrigunt; idem experimentum in duobus vasis ligneis adapertis institui. Elapsis quatuor septimanis aqua non mixta in summam abierat corruptionem ita, vt foeditissimo infecta odore, saporem haberet nauseosum, coloremque ostenderet flavum, turbidumque. In altero vero vase ligneo, in quo 40 aquae libris 6 Vnciae pulueris carbonum admixtae fuerant, aqua, colorem paulo lactescentem si excipias, aliam mutationem vel corruptionem plane nullam subierat, ita, vt absque vlla vel nauseae vel periculi metu potui inseruire potuisset.

§. 6. Lactescens non nihil turbidusque color, quo aqua hoc in casu infici solet, isque merito aegre ferendus, du-

duplici modo destrui potest, vel filtratione per parvam pulveris carbonum copiam, vel etiam carbonum candentium aquae injiciendorum adminiculo. His e tentaminibus satis manifestum est, carbonum accessu putrefactionem ab aquis arceri immo corruptas aquas a vera iam putredine liberari posse.

Quibus praemissis, ea nunc tentamina aggrediar, quorum ope corruptae iam aquae emendandae methodum investigare tentaui.

§. 7. Quam exercent carbones in aquam putridam vim, eam anno 1788 primum obseruare mihi contigit: cum eo ipso anno dolium aqua marina Oceani septentrionalis plenum, experimentis eam vt subjicerem, curante Societate oeconomica obtinuissem. Aqua haec longinque aduecta a doleo colorem valde flavum contraxerat, et putredinem foetido odore spirabat. Decem huius aquae librae, admixtis sex vnciis pulueris carbonum, ingrato et odore et colore statim sese exuerunt, et destillationi per retortam subiectae purissimam aquam destillatam largiebantur, residuumque in retorta superstes ad siccitatem fere redactum, aqua elixiuatum et filtratum limpidissimum praebuit liquorem, qui, peracta evaporatione et crystallisatione, sal commune mihi suppeditavit purissimum albissimumque.

Destillatio vero huius aquae per se, id est, sine carbonum additione, aquam mihi praebuit destillatam foetidam, et e fusci coloris residuo sal commune obtinui valde impurum. Tentaminum horum euentus docet, duplicem carbonum eamque non contemnendam dotem esse, vnam, quod

aquam

aquam putridam corrigant, alteram, quod ſal commune depurent.

§. 8. Etſi deſcripta in paragrapho antecedente experimenta ad plura eaque vtiliſſima eiusdem generis tentamina me non impellere non potuerunt: multa tamen, quibus fungebar, officia ſtudio illi et ardori meo obſtacula opposuere ita, vt non niſi anno 1790 rem aggredi potuerim. Ad ſequentia mea tentamina aquam adhibui valde impuram.

EXPER. III.

Carbonum candentium in tali aqua extinctio nulli fère vſui fuit; odor foeditus paululum quidem diminuebatur, colorem vero flavum et ſaporem nauſeoſum ſuperſtites inveni. Praeterea quoque carbones maximam aquae copiam in poros ſuos rapere deprehendi.

EXPER. IV.

Quatuor aquae putridae vncias, admixta dimidia pulveris carbonum drachma, odore putrido ſtatim quidem liberatas reperi, neque tamen eae continuata ſubinde filtratione, niſi colorem ex nigro et fuſco flaveſcentem oſtenderunt.

EXPER. V. et VI.

Vna pulueris carbonum drachma, licet 4 aquae vnciis odorem et colorem flavum ademiſſet, impedire tamen non potuit, quominus aqua turbida ſemper filtrum tranſiret. Idem admixtis duabus pulueris carbonum drachmis fieri obſervavi.

EX-

EXPER. VII.

Tribus demum pulueris carbonum drachmis optatam tentaminum meorum metam attigi. Aqua enim non tantum colorem flauum saporemque nauseosum foetoremque prorsus amisit, sed aquae etiam purissimae ad instar limpida filtrum transiit, vnde concludere licet, 100 aquae putridae partes pondere captas $9\frac{3}{8}$ pulueris carbonum partes, vt perfectissima depuratio obtineatur, exigere.

§. 9. Reperta horum experimentorum ope minima, qua aqua putrida corrigi queat, carbonum quantitate, eximiam tamen illam credidi, et ad alia experimenta me accinxi, quibus aquam putridam minori carbonum copia depurare mihi liceret. Iam pridem expertus fui, istam carbonum vim depuratricem tunc inprimis maxime efficacem esse, si depurando liquori sal quoddam insit medium immo et acidum, praecipue vero vitriolicum, ita vt ipsa acida minimam, salia vero media maiorem, et reliqua demum corpora maximam carbonum quantitatem, vt depurentur, requirant. Acidum vitriolicum aquae exigua quantitate si misceatur, haud ingratum ipsi saporem conciliat, constat quoque peritissimorum medicorum testimoniis, quos inter Hallerum, Werlhoffium, Zimmermannum, Tissotum, Weikartum, Quarinum nominasse sufficiat, tantum abesse, vt acidum hoc valde dilutum sanitati hominum detrimenti quid adferat, vt potius salutari virtute gaudeat, qua fit, vt morbis putredinosis atque scorbuticis, quibus nauigantes vexantur, obicem ponat. Adde, quod variis in locis nautae iam pridem ad conseruandam aquae salubritatem, teste Cl.

Cl. Aruido Laxe *), acido vti vitriolico soleant. Quae cum mecum reputarem; nullus dubitaui, ad meorum quoque tentaminum successus acidum vitriolicum in auxilium vocare; quem in finem sequentia feci pericula.

EXPER. VIII.

Quatuor aquae putridae vnciae, admixtis octo olei vitrioli guttis et pulueris carbonum drachma dimidia, omnem odorem coloremque flauum perdidere, nec parua haec carbonum quantitas obstitit, quominus filtrum facile transirent (§. 10. Exper. 14. 15. et 16.). At vero haud mediocris erat aquae aciditas.

EXPER. IX.

Quatuor acidi vitriolici guttae, cum sesqui drachma pulueris carbonum, aquam aeque quidem, ac ante, puram, sed saporis etiamnum nimis aciduli, praebuerunt.

EXPER. X.

Tres olei vitriolici guttae cum sesquidrachma pulueris carbonum puram eamque vix ac ne vix quidem acidulam aquam suppeditauerunt.

EXPER. XI.

Duae olei vitrioli guttae et dimidia pulueris carbonum drachma aquam turbidam largiebantur.

EX-

* Abhandlungen der schwedischen Akademie der Wissenschaften Th. 2 1781. S. 235 — 240.

EXPER. XII.

Vna olei vitrioli gutta cum vna carbonum drachma turbidam ac ante aquam ſuppeditauit.

EXPER. XIII.

Duae demum olei vitrioli guttae et vna carbonum drachma optatiſſimum mihi in 4 aquae putridae vnciis effectum praeſtiterunt ita, vt aqua non obſtante exigua carbonum quantitate limpidiſſima et absque vlla difficultate per filtrum trafiret. E tentamine hoc concludere licet, 100 aquae putridae partibus $3\frac{1}{4}$ partes pulueris carbonum miſcendas eſſe.

In experimento hoc id inprimis maxima attentione dignum videtur, quod aqua haec non odorem modo foetidum, ſed omnem quoque ab acido vitriolico oriundam aciditatem, prorſus perdiderit, idque adeo perfecte, vt acidi ne veſtigium quidem vel guſtu vel chartae ſucco heliotropico tinctae adminiculo detegi potuerit. Pondera miſcendi acidi vitriolici et aquae vti 1 ad 1270: volumina autem vti 1 ad 2540 ſe haberi reperi.

§. 10. Facile quidem ſuſpicari liceret, cineres in carbonum puluere forte ſuperſtites id effeciſſe, vt iſta, quam dixi, aciditas tolleretur omnis; verum enim vero, carbones tentaminibus his impenſos, e propoſito ab omni adhaerente cinere omni ſtudio liberari curaui; vnde ipſos carbones in vitriolicum acidum vim deſtructricem exerere, non eſt quod dubitem; neque etiam id inficias ire licebit, fieri poſſe, vt alcali volatile, omnibus in corporibus putreſcentibus praefens fymbolum quoque fuum hac in re ex parte conferat.

Quaecunque autem fit huius phoenomini ratio; olei vitriolici hac in re vtilitas et infignis, et manifefta eft, id quod etiam fequentibus experimentis fimpliciffimis confirmatur.

EXPER. XIV. XV. et XVI.

Si quatuor aquae deftillatae vnciis non nifi paruam pulueris carbonum copiam, e. g. 10. 20 vel 30 grana admifcentur; aqua haec nullo modo clara puraque fed turbida femper et aegre per filtrum tranfit; quin etiam quiete quantumuis diuturna carbonum adeo puluere iam ad fundum depofito, ex nigro fufci coloris eft. Contra vero, fi, antequam carbonum puluis addatur, eidem aquae quantitati vnicam tantum olei vitriolici guttam admifceas; admiftus deinceps carbonum puluis in floccos fe conglomerat, ftatimque fundum petit et aqua extemplo clara limpidaque filtrum penetrat.

Magna pulueris carbonum quantitate et id efficitur, vt aqua absque vllo acidi auxilio clara filtrum tranfeat.

Phoenominorum horum cauffam me hodienum latere lubens confiteor, eaque vlteriori indagine videntur digniffima, vnde data oportunitate eadem novo examini fubjicere mihi animus eft.

EXPER. XVII. et XVIII.

Vt explorarem, num obtinenda e praevio acidi vitriolici acceffu vtilitas admixto cinere vel fale tartari iterum

rum auferatur; quatuor aquae destillatae vnciis, quibus olei vitriolici 6 guttas et 20 pulueris carbonum grana admiscueram, ad perfectam acidi saturationem cineris vulgaris vegetabilis 10 grana adieci: hoc tamen non obstante aqua aeque facile et limpida, ac si nihil cineris addidissem, filtrum penetrauit, et oriundi inde innocui plane tartari vitriolati exigua quantitas, aquae ingratum saporem conciliavit nullum.

Eodem modo res se habuit, cum ad acidi saturationem cineris necessarii largiore quantitate vterer.

EXPER. XIX.

Aquae destillatae vnciis quatuor 5 cineris et 20 pulveris carbonum grana admiscui. Hocce quoque in casu aqua filtrum lubens transiit.

§. 11. Haecce tentamina eorum inprimis in gratiam institui, qui acidi vitriolici in aqua potui ordinario destinata effectus nocivos pertimescendos esse arbitrantur. Enimvero tentaminum horum testimonio patet, acidum vitriolicum etiamsi in se ipso reapse nocuum esset, tamen eo, quo dixi, modo in emendanda aqua putrida absque vllo periculi metu adhiberi posse, immo ob egregium, quem praestat, vsum adhiberi debere; non enim modo ipso carbonum pulvere denuo expellitur; sed si forte acidi maior, quam quae carbonum vi vinci queat, copia aquae addita fuerit; ista acidi pars abundans exigua cinerum quantitate, absque vllo inde oriundo incommodo, vinci potest; neque enim aqua depuranda hinc saporem contrahit ingratum salinum vllum, neque etiam acidi vitriolici vsus aufertur.

§. 12. Permultis aliis adhuc tentaminibus compertum mihi habeo, olei vitriolici hac in re vicem alia etiam acida, tam mineralia quam vegetabilia, nec non ſalia neutra, nitrum, ſal commune caeteraque ſubire poſſe Salis communis, loco olei vitriolici adhibendi, tunc inprimis hac in re vſus eſt, quando aqua putrida depuranda coquendis cibis deſtinatur. Hoc enim in caſu, antequam carbonum pulvis additur, tantam ſalis huius, quanta condiendis cibis conuenit, quantitatem addere iuvat.

Cel. D. Kels ad augendam vim carbonum calcis vivae additamentum commendauit. Tentamina haec, cumprimum ea in Annalibus chemicis celeberr. de Crell deſcripta legi, ipſemet inſtitui eundemque effectum vidi; neque tamen diffiteor, me obſeruaſſe, oleum vitrioli et ſal commune calci vivae palmam hac in re praeripere.

§. 13. Ex acidi vitriolici additamento alia quoque in depuranda aqua putrida redundat vtilitas. Aqua nimirum vnico tantum carbonum pulvere depurata, licet poſt filtrationem perfecte clara ſit et limpida, elapſo aliquo tempore, immo nichthemero, aliquantulum lacteſcit; addito vero vitriolico aliove quolibet acido, per longum tempus illibata manet.

Initio ita ſenſi, vt lacteſcentiam hanc a materia mucoſa in aquis depuratis ſuperſtite derivandam eſſe, opinarer. At noviſſimis tentaminibus reperi, lacteſcentiam iſtam in puriſſima etiam aqua deſtillata, quin etiam in aqua ſuper carbonum pulvere deſtillata, per largam pulveris carbonum copiam filtrata, locum habere.

§. 14.

§. 14. Aquarum corruptarum ſtagnantium, quales natura variis in locis offert, pariter fluvialium, a ſubtiliſſimas, quas vehunt, particulis limoſis turbidarum depuratio longe facilius ſuccedit; hoc enim in caſu praeter carbonum puluerem nullo alio additamento opus eſt. Aquae nimirum hae impurae filtrentur per ſaccum linteum conoideum, carbonum puluere ad dimidium vel duas tertias partes repletum, quem adeo rapide tranſeunt, vt brevi larga earundem copia perfecte depurari poſſit.

Aquae naturales et artificiales ſulphureo-hepatico odore impraegnatae pulueris carbonum ope pari facilitate ingrato ſuo odore liberari poſſunt.

§. 15. Quamuis ſupra deſcriptis experimentis, quae ſit inter pondera aquae depurandae et pulueris carbonum ipſi admiſcendi proportio, determinaverim: tamen, cum tantilla ſit huius pulueris grauitas ſpecifica, reſpectu aquae; non ſuperfluum duxi, proportionem iſtam etiam ratione voluminum inueſtigare, eo inprimis conſilio, vt, quorum intereſt meam aquae depurandae methodum ad vſum reuocare, ſcire exacte queant, quanta pulueris carbonum copia debeatur datae, qua pro maritimo itinere ſibi provident, aquae quantitati. Experimentis igitur hunc in finem accurate inſtitutis inueni, 100 aquae putridae partes, ſi earundem depuratio vnico carbonum adminiculo, absque vllo acidi additamento abſolui debeat, 20 partes pulueris carbonum, volumine captas, eiusdemque probe compreſſi requirere. Si vero acidum vel Sal commune carbonibus iungere placeat; 100 aquae partes ſex tantum partes pulueris carbonum compreſſi exigunt.

§. 16. Ea quam hic vltimo ſtabiliui, carbonum quantitas, fallor, an tanta certe non eſt, vt impedire queat, quominus mea aquae depurandae methodus ad vſum introducatur, praecipue ſi, quae inde redundat, inſignis vtilitas perpendatur. Quo accedit etiam, quod varia dentur huius carbonum conſumtionis quaſi compendia, e quibus ſequentia potiſſimum hic commemorare non erit alienum:

1.) Remanens in ſacco filtri poſt priorem aquae putridae depurationem carbonum puluis non eſt nullius vſus reputandus atque reiiciendus: ſed probe exſiccatus, vt nouas acquirat ſuperficies, alii aquae depurandae portioni exponendas, eidem vſui iterum iterumque inſeruire poteſt.

2.) Deperdita iam prorſus virtus carbonum depuratrix reſtituitur, ſi puluis eorum reiterato vſu detritus igne clauſo candeſcentiae exponitur. Operatio haec licet operoſa ſit ac moleſta; accidere tamen forte poteſt, vt maxime e re ſit, eius effectum noſſe et ad vſum reuocare.

3.) Cum nautis quotidiano fere igne opus ſit: ſuperſtites in focis carbones collegiſſe et in vſum aſſeruaſſe iuuabit.

§. 17. Si quis forte obiicere vellet, carbonum pulverem ob eam, qua eſt, inſignem leuitatem et poroſitatem magnam aquae copiam abſorbere, qua aquae dulcis iactura, nautis certe aegerrime ferenda, eius quae ex mea aquae depurandae methodo redundat, vtilitatis pars haud

haud mediocris nauigantibus eriperetur: ei me fequentibus, quae ftrenue inftitui, experimentis, quibus explorare allaboraui, quanta aquae copia a certa pulueris carbonum quantitate abforbeatur, refpondere poffe confido. In his experimentis ea inter carbonum et aquae quantitates proportione, quam adhibito acido vitriolico experim. XIII. ftatui ad amuffim vfus fum.

EXPER. XX. et XXI.

Centum aquae libris vncias 39 pulueris carbonum addidi, poftea huic miftioni olei vitrioli tot guttas affudi, vt aqua aciduli faporis non nihil acquireret, quod non nifi feptem huius acidi drachmis affufis accidere reperi; quo facto, filtrationem per faccum linteum ponderis mihi cogniti adgreffus fum. Filtratio adeo prompta fuit, vt quinque minutis 40 aquae librae tranfirent. Poftquam filtratio 25 minutorum fpatio abfoluta omnis fuiffet: 5 adhuc aquae turbidae libras manu expreffi; quo facto, fuperftitem in facco carbonum puluerem augmentum ponderis 63 vnciarum acquifiuiffe deprehendi. Cum igitur haec eadem aquae copia fit, quae 39 vnciis carbonum abforbetur: fequitur, a 100 aquae libris iacturam 5 librarum carbonum dicta proportione admixtorum abforptione fieri.

Tentamine hoc cum 10 pulueris carbonum vnciis et 40 aquae libris iterato, ponderis augmentum 15 vnciarum pulueri carbonum acceffiffe reperi, ex quibus binis tentaminibus concludere licet, pulueris carbonum quantitatem quamcunque pondere captam aequalem cum dimidia aquae copiam abforbere et intra poros fuos retinere.

§. 18. Quo autem omnis omnino aquae dulcis iactura penitus euitetur: aquae depurandae tanta aquae marinae copia, quanta ad falsedinem cibis coquendis debitam requiritur, vtiliter admisceri posse mihi visa est.

Cum ad manus mihi esset aqua marina ex oceano septentrionali hausta tres centesimas salis partes continens et lapsu temporis foetido odore hepatico imbuta: illam ad experimentum sequens adhibere mihi placuit.

EXPER. XXII.

Libris 20 aquae dulcis corruptae cibis coquendis aptum salsedinis gradum, affusis decem aquae marinae libris, conciliari reperi. Postquam 6 pulueris carbonum vncias addidissem, quibus omnis odor foetidus plane fuit sublatus; aquam infudi filtro per quod limpida transiit, filtrataeque pondus 28 librarum fuit; ex quo manifestum est, aquae productae quantitatem pondere illam superasse, quam depurare propositum fuit.

Placuit mihi tentamen facere, an iusculum e carne bubula additisque radicibus atque hordeo perlato aqua marina sueta arte culinaria paratum gustui aeque ac sola dulci aqua paratum et sale conditum, gratum esset futurum. Quid multis; faustum mihi fuit omen et omnia e votis succedebant suaveque comedi iusculum, conscius mihi methodum meam classi nauali cunctisque nauigantibus, eam si sequi velint, magnae vtilitati fore.

§. 19. Aquarum vna altera plus, minusue olet, quo in casu quantitas pulueris carbonum adhibenda non ab odo-

odoris intenſitate ſed a mucilaginis, qua turbida eſt, quantitate dependet; nam experientia me docuit, ad aquae foetidiſſimae depurationem non raro quantitatem carbonum ſufficere ea, quam aqua odorem minus ingratum ſpargens exigit, haud parum minorem; id quod et meis propriis confirmatur experimentis et iis quae protulit Cl. Buchholz *).

Mihi nimirum experimentum cum 4 vnciis alius aquae, ſemidrachma pulueris carbonum et olei vitrioli guttis duabus ſucceſſit. Cl. Buchholz 3 drachmis pulueris carbonum, nullo adhibito oleo vitriolico, 12 vncias aquae penitus putridae depurarit. His ex tentaminibus patet, ad 100 aquae putridae partes pondere captas depurandas auxiliante nempe acido vitriolico, fere $1\frac{1}{2}$ partem pulueris carbonum ſufficere.

§. 20. Acidorum ſaliumque vel calcis viuae additamento non eſt in depurandis aquis alia virtus tribuenda, niſi ea, quod carbonum viribus opem ferant, eo, quod in partes extractiuas atque mucilaginoſas agunt, easque deſtruunt; in ipſas vero partes foetidas nulla plane eorum vis eſt. Hac de re quicunque voluerit, ſeſe ipſemet experimentis conuincere poteſt. Soli carbones hac in operatione primarias agunt partes; ſolus carbo deſtruendis non foetidis modo, verum etiam mucilaginoſis partibus aptus et idoneus eſt; omnia vero cetera additamenta non niſi remedia ſecundaria aeſtimanda ſunt, autocratricibus carbonum viribus opitulantia.

*) Grens Journal der Physik 7 Stück.

§. 21. Falleretur, qui crederet, aquae putredine corruptae depurationem adhibito carbonum puluere lente nec nisi gradatim fieri. Carbonum puluis hoc in negotio tanta celeritate munere suo fungitur, vt adiecta aquae putridae debita carbonum quantitate, odor ipso hoc commistionis momento absque vlla mora omnino euanescat; ex quo vno iam manifestum est, quam longe carbo omnibus notis hucusque et celebratissimis aquae corruptae emendandae mediis praecellat.

§. 22. Qua sit methodo vtendum, quando aquae putridae quantitas magna depuranda est, fas est, vt exponam.

Aquae depurandae tantum, diurna necessitas quantum postulat, vasi aperto infundatur, additaque olei vitrioli vel salis communis vel aquae marinae debita copia, adiiciatur passim carbonum puluis, cuius ne peccetur quantitate, sacculo conoideo subinde haurienda e mixto est aquae parua portio, quae si limpida transeat; omnis aquae quantitas per saccum magnum percolanda, eaque pura atque vsui apta erit.

§. 23. Id quoque monendum est, me obseruasse, aquae carbonum ope depuratae insignem adeo suauitatem conciliari posse, acido aëreo si impregnetur; methodus autem, qua id effici potest, adeo est operosa, vt communi vsui inseruire nequeat. Hocce modo Cl. Buchholz in conventu Academiae scientiarum Erfordinae corruptam aquam selteranam citissime omnino emendauit ita, vt a recente distingui neutiquam potuerit.

§. 24. Reſtat denique, vt de ipſa pulueris carbonum praeparatione verba faciam:

1.) Carbones aquae putridae depurandae deſtinati, ne quid particularum empyreumatico-oleoſarum in iis relinquatur, probe exurendi ſunt: eae enim ſi in carbone ſuperſtites delitescerent, ſpes optati carbonum effectus irrita redderetur.

2.) Exuſti ſueta arte carbones et refrigerati ab adhaerente cinere follis ope purgentur. Ea quoque adhibenda cautio eſt, ne dum extinguuntur carbones et in puluerem rediguntur, fumo aliisue ſordibus pinguibus inquinentur.

3.) Carbones in puluerem redigi ſubtiliſſimum intereſt; tenuiſſimi enim pulueris maior ſuperficies auctae carbonum quantitatis vices ſubit; vnde conſumtionis carbonum in hoc negotio haud contemnendum compendium obtinetur.

4.) In futurum vſum, carbonum puluerem vaſis puris ligneis aſſeruari, et tali loco reponi conuenit, quo fumo aditus non pateat, qui ſi accederet, virtutem carbonum vel imminuere vel adeo deſtruere omnino poſſet.

Ceterum ex quo ligni genere carbo praeparatus ſit, nihil intereſt, modo eae, quas diximus, praeparationis regulae ſedulo obſeruentur. Carbonum vegetabilium vices, etiam animales, oſſa ad nigredinem exuſta, tenere poſſunt;

 immo

immo adeo neceſſitate vrgente, ipſe lithantrax, praeuia combuſtione omnibus oleoſis particulis orbatus et in puluerem redactus, aquae corruptae emendandae inſeruit; quo tamen in caſu, ob particulas metallicas, quibus hoc carbonum genus grauidum eſſe ſolet, acido non eſſe vtendum, notari conuenit.

§. 25. Quae in ſuperioribus expoſui, ſequentibus aphorismis ſuccincte complecti conſultum mihi viſum eſt, quo facilius ea et vno quaſi obtutu pateſcerent:

1.) Aqua puriſſima ipſamet corruptioni nequaquam ſubiecta eſt, nec corrumpitur niſi partibus heterogeneis, quas e vaſis, quibus aſſeruatur, elicit (§. 2.).

2.) Inter omnia cognita hucusque aquae corruptae emendandae media, quod carboni vegetabili antecelleret vel aequipolleret, datur nullum (§. 1.).

3.) Carbonum vis in depuranda aqua putrida adeo efficax eſt, vt eodem, quo carbo contritus aquae admiscetur, momento odor putridus omnis diſpareat (§. 21.).

4.) Acidorum ſaliumque neutrorum calcisque viuae licet in ipſas partes foetidas vis nulla ſit; attamen, cum in partes mucilaginoſas agant, adminiculo ſunt carbonibus ita, vt minor horum quantitas requiratur (§. 20.).

5.) Oleum vitriolicum et ſal commune ceteris additamentis auxiliaribus praeferenda ſunt. Sal commune adhibendum eſt, ſi aqua depuranda coquendis cibis deſtinatur. (§. 12.).

6.)

6.) Addito carbonum puluere, aquae per longum temporis interuallum corruptio pertimescenda est nulla. (§. 5.) Exper. II.).

7.) Carbonum candentium in aqua putrida extinctio nullius vsus est (Exper. III).

8.) A nimis parua pulueris carbonum quantitate, nullo adhibito acido, odor quidem foetidus destruitur; neque tamen aqua clara filtrum facile transit; adhibita vero, antequam carbones admisceantur, exigua acidi vitriolici copia, parua iam carbonum quantitas sufficit, vt aqua filtratu facilis reperiatur (Exper. VIII. XIV. XV. XVI.).

9.) Alio additamento accedente nullo, 100 aquae putridae partes, vt perfecte depurentur, pondere $9\frac{3}{8}$ (Exper. VII), volumine vero 20 partes pulueris carbonum exigunt.

10.) Accedente oleo vitriolico, 100 aquae partes non nisi $3\frac{1}{4}$ pondere (Exper. XIII.), volumine autem 6 carbonum partes postulant (§. 15.).

11.) Addenda aquae putridae carbonum quantitas alia est, propter maiorem minoremue partium mucilaginosarum copiam (§. 19.).

12.) Duodecim aquae putridae vnciis 6 olei vitriolici guttae adfundendae sunt (Exp. XII.).

13.) Olei vitrioli exigua quantitas aquae addita, admixto dein carbonum puluere, partim destruitur, immo plane omnis euanescit (§. 9. Exp. XIII.).

14.)

14.) Superstitem forsan aciditatem pellere si placeat absque eo, vt saporis inde oriundi quid pertimescendum sit, id addita tantilla cineris quantitate obtinebitur (§. 10. Exp. XVII. XVIII. et XIX.).

15.) Aquae naturales impurae quam facillime depurari possunt; non enim nisi per saccum carbonum puluere repletum eas filtrari necesse est (§. 14.).

16.) Aqua putrida debita carbonum pulueris quantitate mixta adeo filtrum promte permeat, vt per saccum modicae magnitudinis 30 immo 40 aquae librae 5 minutorum interuallo transfluant.

Nauigaturi, quorum forsan e re esse videretur, aquae penum ante iam, quam ventis vela dant, carbonibus misceri, quamuis ipse ego olim ita senserim, dubito nunc, num optime sibi sint consulturi, iter enim facturi fruantur pura, dum suppetit, aqua, nec nisi hac deficiente, vel deprauata, mea eius emendandae methodo, facillima illa et prompta, vtantur. Nollem vero, vt hac in re meum potius iudicium, quam praxis nauticae testimonium, sequantur; ita tamen sentio, vt, si nautae ante quam mare petunt, aquae suae supellectili carbones miscere vellent, tantilla acidi vitrioli, cinerum ope facillime deinceps pellendi, quantitate vtendum esse existimem.

ME-

MEMOIRE X.
SUR LE TALC,

Par

Mr. BASILE SEWERGUINE.

Présenté à l'Académie le 27 Février, 1794.

Avant de paſſer plus loin dans mes recherches ſur les pierres de roche compoſées, dont j'ai tenté deux fois de faire quelques eſſays, & avant de deployer tout en détail la claſſification que j'en ai hazardée, il faut que je conſidére les parties plus ſimples, dont ces éſpéces de pierre ſont ordinairement compoſées, car c'eſt la nature des parties conſtituantes, qui doit être fixée avant que l'on puiſſe juger avec plus de decifion ſur leurs *compoſées a)*. Mais afin que ces nouvelles recherches ayent plus d'interet pour les amateurs de la Mineralogie, je me propoſe ici particulierement de donner de tems en tems des deſcriptions de mi-

a) On diſtingue actuellement la mineralogie par l'inſtruction du mineralogiſte de Saxe en pluſieurs parties. On a pu remarquer que dans la conſideration des pierres de roches compoſées, mon bût principal étoit toujours cette partie de la mineralogie, qui regarde plutôt *l'oryctognoſie* que la *geognoſie*, car on ne peut rien decider ſur la nature des montagnes, avant de connoitre la nature des roches qui les conſtituent.

mineraux originairement Ruſſes. Perſonne ne doute de l'utilité qui en pourra reſulter. Les deſcriptions des plantes & des animaux étrangers ont eu toujours les plus grands ſuccés & pour les progrés de la ſcience & pour le bien public. Un eſſay ſur l'oryctographie de Ruſſie les doit avoir auſſi. Les richeſſes du regne mineral s'accroiſſent depuis quelque tems conſiderablement en Ruſſie; on parviendra à connoitre leur nature, leur lieu natal, leurs varietés & toutes les particularités, dont elles ſe diſtinguent des productions étrangéres. J'avoue que nos illuſtres ſavans comme Mr. Pallas, Renowantz, Herrman &c. n'ont guère laiſſé de vue cet objet important dans les voyages intereſſants qu'ils ont fait, mais leur but ayant été trop vaſte, comme l'eſt toujours le but d'un voyageur philoſophe, ils n'ont pu s'occuper de toutes les moindres particularités, que l'on decouvre dans le regne mineral, par des obſervations plus proches. En outre on y voit toujours faire de nouvelles decouvertes, qui ont pu échaper à leur curioſité. Tous ces motifs m'engagèrent de faire du moins quelques eſſays ſur un objet ſi digne d'attention à tous égards. Cependant je ne paſſerai que brêvement les objets, qui ſont decrits dans les ouvrages des auteurs cités, je n' aſſiſterai que ſur ceux, dont les descriptions ſont inſuffiſantes, ou qui nous manquent entiérement. J'avoue que ces premieres tentations ne peuvent être qu'imparfaites, ce ſera au tems & aux obſervations repetées de remplir les vuides qu'on y trouvera. Pour garder plus d'ordre dans mes deſcriptions, je ſuivrai l'arrangement ſyſtematique de mineraux, que nous a fourni le celebre Profeſſeur Gmelin dans la 13^{me} édition du ſyſteme de la Nature du chevalier de Linnée.

Eſpe-

Eſpéces.

1. Tal. ſpuma maris. Ecume de mer, *Kil* des Tatares.

Si l'on s'attache au nom ſeul de cette ſubſtance, on doutera avec raiſon de ſon exiſtance en Ruſſie. Selon la mineralogie de Cronſtedt *a*) c'eſt une ſubſtance argilleuſe, que l'on trouve dans la Crimmée & que les Turcs employent à la fabrication de leurs pipes à Tabac. Mais on trouve tout à fait le contraire dans la *Deſcription de la Tauride*, d'où cette terre remarquable tire ſon origine. Elle n'y eſt employée que pour fouler les draps & laver les linges. L'échantillon que j'ai devant moi eſt du village de Sobli 20 Werſtes d'Achmetſchet *b*). Ses caractères exterieures ſont les ſuivants. *c*).

1.) *Couleur.* Elle eſt de couleur verdatre & en partie bleuvâtre & griſe, lorsqu'elle eſt ſeiche, avec quelques taches plus blanches.

a) Nach des Herrn Werners Ausgabe. Leipzig 1780. B. 1. Th. 1. S. 191.

b) C'eſt le même que la Societé Economique libre poſſede de cet endroit.

c) J'ai ſuivi dans mes deſcriptions la methode du celebre Werner, excepté que la maniere dont j'ai reuni les caractères extérieurs & fait ſuivre l'un après l'autre m'a parue pouvoir ajouter à la clarté de l'idée, qui l'on ſe forme d'un mineral quelconque. On comprend ſous *l'apparence exterieure*, la forme exterieure, la ſurface & la lueur exterieure, & ſous *l'apparence interieure*, la lueur interieure, l'endroit de la fracture & la figure des morceaux detachés. Voyez Werners von den äußerlichen Kennzeichen der Foßilien. Leipzig 1774. P. 86. Tab. I.

2.) *Apparence extérieure.* Elle vient en maſſes informes avec une ſurface liſſe & matte.

3.) *Apparence intérieure.* Elle eſt matte a), compacte & tirant fortement ſur l'aïr, que les Allemands deſignent par le terme: rempli de pailles ou de fetus (ſplittrig) dans les endroits de la fracture; elle ſe briſe en morceaux ordinairement un peu plats & convexes d'un côté, à coins aſſez aigus.

4.) *Transparence.* Elle eſt opaque & ſeulement très peu demitransparente ſur les coins.

5.) *Traït.* Elle devient luiſante dans l'endroit ou on la frotte.

6.) *Dureté.* Elle eſt molle ſans tacher les doigts & ſe laiſſant facilement couper.

7.) *Attouchement.* Elle eſt graſſe au toucher.

8.) *Peſanteur.* Sa gravité ſpecifique b) = 1,9937.

9.) *Odeur.* Etant humectée elle donne une odeur argilleuſe.

10.) *Gout.* Elle happe un peu à la langue & a le gout ordinaire des argilles.

Qualités. Elle ſe delaye facilement dans la bouche & on y decouvre entre les dents quelques particules plus dures, comme ſi elles étoient ſablonneuſes. Elle abſorbe prom-

a) Il faut en excepter les endroits, qui ſont devenu luiſants par le frottement entre les mains.

b) Les gravités ſpecifiques ont été fixées en compagnie avec Mr. l'Academ. Lowitz par une balance hydroſtatique.

promptement l'eau, ne produisant que peu de boules; etant battue avec de l'eau elle s'ecume facilement & tombe ensuite en poussiere, quand il n'y avoit que peu d'eau; mais elle forme une sorte de gelée, quand on en ajoute un peu plus. Elle se gonfle en partie au feu, mais ne s'y fond pas & y perd une partie de son poids. Au reste on n'y decouvre ni du sable ni de terre calcaire.

C'est donc plutôt une terre à foulons argilleuse, qui se distingue de celle de Mr. Werner (Cronst. Miner. §. 80.) par la couleur, par l'air qu'elle a dans l'endroit de la fracture, par la forme de morceaux detachés, par le peu de demitransparence, que la nôtre a sur les coins, & par ce qu'elle happe un peu à la langue. Quoique Mr. Werner semble douter de la capacité des terres à foulons de s'ecumer avec l'eau, cependant c'est decidé, que lorsqu'on lavoit les mains avec la nôtre, elle s'ecumoit comme du savon.

On la nomme *Smectis* dans la *Description de la Tauride*, & la carrière, dit on, qui la contenoit, en est epuisée. Le Smectis actuel est tiré auprés du village Beikirman sur la pente d'une colline composée de marne cretacée. Voyez son usage &c. dans l'ouvrage citée p. 26. &c.

2. Talc. fullonum. Terre à foulons.

Mr. Hoffman *a*) place cette substance parmi les éspéces talcqueuses. Il semble que l'éspéce précédente lui est analogue. Voici les caractères de la terre à foulons nouvellement decouverte à Bogoroditzk dans le Gouvernement de

 Tou-

a) Bergmännischer Journal St. 2. 1789. S. 157.

Toula, & dont on a envoyé quelques échantillons pour la Societé économique libre de St. Pétersbourg.

1.) *Couleur.* Elle eſt de couleur griſe melée de couleur blanc obſcur, avec quelques taches jaunes ou blanchatres à cauſe des parties hétérogenes qui s'y mêlent.

2.) *Apparence extérieur.* Elle vient en maſſes informes avec une ſurface liſſe & matte; Elle eſt un peu ſchiſteuſe dans l'endroit de la naiſſance.

3.) *Apparence intérieur.* Elle eſt matte, terreuſe, inégale dans l'endroit de la fracture & ſe briſe en morceau indeterminés à angles obtus.

4.) *Transparence.* Elle eſt tout à fait opaque.

5.) *Trait.* Elle acquiert une foible lueur ſemblable à de la graisſe dans l'endroit, où elle eſt frottée.

6.) *Dureté.* Elle eſt plus molle que la precedente & produit un trait gris ſur le papier blanc, ce que la précedente ne fait pas à cauſe de ſa plus grande dureté.

7.) *Attouchement.* Elle eſt graſſe au toucher.

8.) *Peſanteur:* La gravité ſpecifique = 2, 3200.

9.) *Odeur.* Etant humectée elle donne un odeur argilleuſe.

10. *Gout.* Elle a le gout ordinaire des argilles & ne happe point à la langue.

Qualité. Elle abſorbe l'eau plus lentement que la précédente & s'y delaye plus difficilement. Elle s'éclate

avec

avec bruit au feu, elle s'y dureit & blanchit. On peut y ajouter le caractére, que lorsqu'on en a frotté un morceau de papier et qu'on écrit enſuite avec une plume ſur l'endroit frotté, le trait de la plume reſte inalterable, tandis que dans la même épreuve avec la précedente, le trait ſe delaye ſur le papier au moment qu'on le fait.

Toutes les deux ſubſtances me ſemblent avoir plus de droit d'être placées parmis les ſubſtances argilleuſes.

3. T. porcellanum. Terre à porcellaine.

Celle de Glouchoff dans le gouvernement de Nowgorod Sewerskoy, que l'on apporte à Pétersbourg & à Moscou pour la fabrique de porcellaine à Dmitroff, ſemble appartenir ici. Les caractéres extérieurs ſont les ſuivants.

1.) *Couleur.* Elle eſt de couleur tout à fait blanche un peu laiteuſe.

2.) *Apparence extérieure.* Elle eſt matte à l'éxterieure & d'une forme indeterminée.

3.) *Apparence intérieure.* Elle eſt matte, terreuſe, compacte d'un grain trés fin dans l'endroit de la fracture & ſe briſe en morceaux indeterminés à angles un peu aigus.

4.) *Transparence.* Elle eſt tout à fait opaque.

5.) *Trait.* Elle devient luiſante dans l'endroit, où elle eſt frottée.

6.) *Dureté.* Elle eſt molle, ſe laiſſant briſer entre les doigts.

7.) *Attouchement.* Elle eſt très graſſe au toucher presque comme du talc commun à l'extérieur, mais un peu maigre dans l'intérieure.

8.) *Peſanteur.* La gravité ſpecifique = 2, 1730.

9.) *Odeur.* Argilleuſe.

10.) *Gout.* Elle happe fortement à la langue.

Qualités. Elle ſe delaye facilement dans la bouche, elle y devient très visqueuſe & repand une odeur d'argille. On n'y decouvre aucune particule ſablonneuſe entre les dents. Elle eſt apyre. La poudre fait une foible effervescence avec les acides mineraux.

J'ai dit plus haut qu'elle eſt employée à la fabrication de la porcellaine de Dmitroff; mais quand on compare ſes caractères extérieurs avec ceux de la terre à porcellaine de Saxe, que Mr. Werner a decrite, on trouvera que la nôtre en differe, & particulierement parceque celle de Saxe ne happe que très peu à la langue. C'eſt la cauſe qui m'engagea de fixer les caractéres extérieurs de la nôtre. Mais celle de Saxe appartient elle reéllement à l'ordre de ſubſtances talcqueuſes?

4. T. chlorites. Terre de Schoerl.

Je ne l'ai point rencontré ſur les criſtaux de roche de Siberie, mais je ſuis très porté à croire *a*) que la *maſſe verte endurcie* que recouvre le Schoerl verd en aiguilles ſur la ſurface du Quarz blanc de Catherinebourg & qui lui donne un air de velours; & *b*) que ce *ſchoerl verd decom-*

poſé.

poſé, qui ſe trouve aux environs de la minière Eliſabetskoy 15 Werſtes de Catherinebourg, lui ſont analogues. Quant au ſecond, c'eſt une maſſe compoſée viſiblement de Schoerl de couleur verte ſale, de Talc argentin, en partie verdâtre, & de Mica noir. Les caractéres extérieurs du Schoerl ſont les ſuivants.

1.) *Couleur.* Il eſt de couleur verte ſale avec une teinte bleue ſale, que l'on remarque plus clairement à la lumière.

2.) *Apparence extérieure.* Il eſt criſtalliſé en priſmes applaties, dont les deux cotes oppoſés ſont plus larges à l'égard des autres, ordinairement à 6 cotés inegaux. Ces priſmes ont quelque fois la longueur de plus d'un pouce à la largeur d'un quart de pouce. On pourroit ſe repreſenter ces priſmes encore mieux comme des tables allongées de l'épaiſſeur de 3 de 4 & de plus de lignes à deux coins pointus. Ces criſtaux ſont ſtriés le long des priſmes & luiſants à la ſurface avec des endroits mats & fortement decompoſés.

3.) *Apparence intérieure.* Il eſt tout à fait mat, irregulierement feuilleté, & ſouvent ochreux dans les endroits de la fracture, & ſe briſe en tables allongées, ou en morceaux ordinairement plats priſmatiques.

4.) *Transparence.* Il eſt opaque.

5.) *Trait.* Étant raclé avec le canif, il donne quoique aſſez difficilement une poudre blanchâtre.

 6.)

6.) *Dureté.* Il ne donne aucune étincelle avec le briquet, mais il coupe le verre ordinaire & se laisse racler un peu avec le canif.

7.) *Pesanteur.* Sa gravité specifique = 3, 9577.

Il a une forte odeur d'argille. Enfin il est si entremelé de particules de mica noir, qu'on le trouve presque parmis ses moindres particules. Quand je compare ses parties les plus decomposées avec la description de la chlorite des Auteurs, qui est verte, écailleuse, friable & qui étant humectée donne une odeur argilleuse, je commence à presumer, ou que la chlorite est un schoerl decomposé, ou qu'elle est la matière, qui donne naissance au Schoerl, sans nier cependant, que cette même matiére dans d'autres circonstances, puisse produire de la Hornblende & même des grenats etc.

5. T. squamosum, Terre de Talc.

L'académicien Herrman dit qu'on en trouve de couleur blanche dans les miniéres d'or de Catherinebourg & dans les minières de cuivre de Louguinine sur le Mias *). Le Quartz ferrugineux contenant les pyrites aurifères de Beresofskoy à Catherinebourg & même le grés jaune tigré, que quelques auteurs designent par le nom de Gneuss **) du même endroit, sont souvent entremelés de paillettes de talc argentin, qui en se degageant de la matrice peuvent avoir formé la terre de Talc.

Le

*) Beschreibung des uralischen Erzgebürges Th. 2. S. 326.
**) Crells chemische Annalen St. 3. 1793. S. 254.

Le même auteur fait mention du talc blanc & mat de Bolimbaecha, *) où ce talc recouvre ſelon lui en couches les mines de fer. L'académie poſſede ce talc de l'endroit cité, & ſuivant la comparaiſon que j'en ai faite, elle approche beaucoup de la terre talqueuſe du celebre Werner. **). Ses caracteres ſont:

1.) *Couleur.* Elle eſt de couleur blanche.

2.) *Apparence éxterieure:* Elle eſt en forme de terre très fine conglutinée, & très peu luiſante à la ſurface.

3.) *Apparence intérieure:* Elle eſt farineuſe, presque matte en dedans; ſes moindres particules ſont extraordinairement fines & ſemblent être écailleuſes.

4.) *Trait.* Elle tache fortement les doigts.

5.) *Dureté.* Elle eſt friable au moindre attouchement.

6.) *Attouchement.* Elle eſt très graſſe au toucher.

7.) *Peſanteur.* Elle eſt très legere.

8.) *Odeur & gout.* Elle repand une odeur argilleuſe lorsqu'on en prend dans la bouche, où elle devient en même tems visqueuſe; elle happe un peu à la langue.

Cependant ſi c'eſt une vraye terre talqueuſe, elle doit être très impure & melangée ſuivant les experiences chymiques que j'en ai faites.

*) Crells chemiſche Annalen St. 6. 1793. S. 504. No. 77.
**) Cronſt. Mineral. 1 Th. S. 918.

6. Talc. radiatum. Talc étoileux.

J'ai trouvé deux fois parmis les pierres roulées des environs de St. Pétersbourg des échantillons de cette forte, dont l'une étoit composée de Feldspath blanc avec du talc argentin en lamelles très fines, de quelques lignes de largeur, & d'un pouce & de plus de longueur & disposées en en étoiles.

L'autre étoit du Feldspath rouge avec du talc doré en feillets étoileux.

7. Talc. cosmeticum. Talc commun.

L'Académie en possede plusieurs échantillons de la minière Elisabetskoy 15 werstes de Catherinebourg.

Quand les lamelles du Talc sont parallelement jointes ensemble, & que leurs bords sont à decouvert & obtus, ceci produit une varieté du talc commun, qui fait le passage le plus évident à l'asbest. Il y a un tel morceau du même endroit, qui a la couleur matte argentine du talc avec sa molesse &c., mais qui est aussi bien fibreux, comme les vrayes éspéces d'asbest le sont ordinairement. On pourroit designer cette variété par le nom de *talc fibreux*.

Le Talc commun de Belojarsk *) est en longues feuillets argentines & contient de longues aiguilles ou prismes de Schoerl verd, comme on voit par l'échantillon que l'académie en possede.

Le

*) Des Herrn Hofrath Herrmann Verzeichniß der Bergarten = Sammlung, u. s. w. in Crells Annalen St. 6. 1793. No. 75.

Le Talc de Pyſchma (Herrm. No. 78.) eſt en petites paillettes de couleur argentine griſe foncée & en partie decompoſé dans une roche qui contient des aiguilles de Schoerl & de mica. Sa gravité ſpecifique = 2, 9746.

Le Talc de Bruſſianka ſus l'Jſſet (Herrm. No. 79.) eſt en trés petites paillettes de couleur argentine griſe claire dans une roche, qui contient outre le talc de la Hornblende, des grains de fer & du Feldſpath jaunatre. Sa gravité ſpecifique = 2, 8903.

J'ai parlé plus haut du Talc de Bolymbaëcha, qui me ſemble participer beaucoup de la nature argilleuſe.

Le Quartz gras du mont Woetz en Olonetz eſt ſouvent recouvert de paillettes de Talc argentin, comme on voit par pluſieurs échantillons, que l'académie en poſſede.

L'éſpéce rémarquable de Roche quartzeuſe bleuvatre, dont Mr. le conſeiller de cour Laxmann avoit envoyé pluſieurs échantillons à Pétersbourg ſous le nom de Lapis Lazuli du Baikal, contient ſouvent outre le mica, du talc argentin en pailletes trés minces.

Enfin la matrice des grenats d'Olonetz eſt du Talc argentin en feuillets aſſez larges, & qui fait ſouvent le paſſage au ſchiſte micacé.

Mr. Hoffmann *) fait mention du talc jaune avec une

*) Bergmänniſcher Journal St. 2. 1789. No. 161.

une forte lueur presque metallique dans de la ſteatite de l'Ochſenkopf auprés de Schwarzenberg. L'académie a reçu nouvellement une ſerpentine trouvée au delas de 100 werſtes de Catherinebourg ſur le chemin de Tobolsk derriere le village Belojarskaya, que ſon Excellence Monſieur le lieutenant Géneral & Gouverneur de Perme Wolkoff avoit la bonté de lui envoyer, & qui contient du talc jaune verdatre en paillettes d'une lueur presque metallique.

Et enfin il faut que je faſſe mention du talc plus dure de couleur de plomb, onduleux & vermiculeux (wurmförmiger Talk) avec des fueillets diſpoſés en recouvrement les unes ſur les autres dans une roche calcaire, contenant de longues fibres de Tremolite, qui a été trouvée, dans la partie du Sud du lac Baikal entre les ruiſſeaux Beſimennaja, Sljudenka & Smejenka, & dont Mr. le Conſeiller de Cour Laxman a fourni quelques échantillons. Mais ce talc ſemble faire le paſſage au Mica.

8. T. Brianzonicum. Craye de Briançon.

Mr. l'académicien Herrman fait mention d'une eſpece qui en approche & que l'on trouve ſur le ruiſſeau Uktunsk dans les Ourales; *) mais je n'en ai vu aucun échantillon vraiment Ruſſe.

9. T. Smectis.

L'Illuſtre éditeur de la 13^{me} édition du ſyſteme du Chévalier de Linnée diſtribue cette éſpéce en pluſieurs varietés.

a.)

*) Beſchr. des uraliſch. Erzgeb. Th. 2. S. 326.

a.) Steatites Solidior.

1.) Opacus.

2.) Diaphanus, Speckstein.

b.) Steatites mollior.

1.) Subdiaphanus, Spanische Kreide.

2.) Subopacus, Seifenstein.

c.) Steatites cryſtallis hexaëdro priſmaticis in pyramidem hexaëdram terminatis.

Il ſemble que pluſieurs de ces varietés nous manquent, du moins je n'en ai vu aucun échantillon qui ſoit reellement Ruſſe. Quoiqu'on faſſe mention de la Steatite de Mourſinſk & du fleuve Irtyſch, mais comme je n'en connois aucune preuve, je me reſerve d'en donner la deſcription quand il ſera plus decidé qu'elle vienne de ces endroits; j'en ai vu cependant en petites parcelles de couleur verte jaunatre dans quelque roche melangée roulée des environs de St. Pétersbourg.

10. Talc. ollaris. Pierre ollaire.

Mr. l'Académicien comprend ſous le nom de pierre ollaire au No. 74. du Catalogue cité une éſpéce de roche, dont la baſe eſt de la nature de la Serpentine avec une quantité de Talc blanc & de petits grains de fer. Afin que l'on en puiſſe ſe former une idée plus éxacte, il faut que j'en ajoute les caractères extérieurs.

1.) *Couleur.* Elle eſt de couleur verte griſâtre & claire.

2.)

2.) *Apparence extérieure.* Elle vient en maſſes de figure indeterminée ordinairement trés decompoſée à l'extérieur.

3.) *Apparence intérieure.* Elle eſt compacte d'un grain très fin & inegale dans les fractures avec une très foible lueur, & ſe briſe en morceaux à coins irreguliers, qui ne ſont pas tout à fait aigus.

4.) *Transparence.* Elle eſt opaque.

5.) *Trait.* Le canif y produit un trait blanchâtre.

6.) *Dureté.* Elle coupe quoique aſſez difficilement le verre ordinaire, ſans donner des étincelles avec le briquet, elle eſt caſſante.

7.) *Attouchement.* Elle eſt maigre au toucher excepté les endroits où elle eſt entremelée de Talc.

8.) *Peſanteur.* Sa gravité ſpecifique = 2, 6163.

Si l'on compare ces caractères avec ceux qui ont été fixés pour la pierre ollaire par Mr. Werner (Cronſt. Miner. p. 219.) on trouvera que la pierre ollaire de notre Académicien en differe totâlement, & la baſe de la ſienne ſemble effectivement n'être qu'une ſerpentine, & qu'enfin elle participe beaucoup plus de la roche, qu'on deſigne par le nom de Schneideſtein. C'eſt ce que notre auteur ſemble indiquer lui même dans ſon ouvrage Beſchreib. des Ural. Erzgeb. Th. 2. S. 324.

Quant à la ſubſtance nommée pierre ollaire au No. 75. du catalogue, elle participe encore moins de la nature de de cette éſpéce & elle n'eſt ſuivant l'echantillon, que j'ai devant moi, qu'une terre endurcie, nommée Steinmark de couleur blanc jaunatre avec des cavités remplies d'ochre de fer, qui eſt produite, comme notre auteur ajoute avec beaucoup de vraiſemblance, par la decompoſition de criſtaux de fer qui y etoient renfermés.

Ainſi ni la pierre ollaire des environs de Belojarſk au No. 74. ni celle de Pyſchma au No. 75. du catalogue cité ne peuvent appartenir içi, vû qu'elles n'ont pas les caractères propres à la vraye pierre ollaire, quand même elles soyent employées pour la fabrication des pots en Sibérie. Je dirois le même de la pierre ollaire de Troizkaja, qui ſuivant les échantillons que j'en ai vu tout recemment n'eſt que de la Serpentine dont je parlerai à l'article de cette ſubſtance.

11. T. ſchiſtoſum. Talc ſchiſteux.

On trouve du vrai talc Schiſteux ſur le Bilimbaëcha dans les Ourales, comme on peut juger par le catalogue intereſſant de notre académicien, & ſe perſuader encore plus par les échantillons qu'il en a envoyé à Pétersbourg. En voici les caractères extérieures.

1.) *Couleur.* Il eſt de couleur jaune foncé tirant ſur l'argentin.

2.) *Apparence extérieure.* Il eſt feuilleté, ſchiſteux, luiſant & quelque fois mat dans l'etat de decompoſition.

3.) *Apparence intérieure.* Il eſt luiſant argentin, feuilletés en feuillets un peu convexes d'un côté & concaves de l'autre; il se brise en morceaux schisteux de la même forme que les feuillets, & à coins obtus.

4.) *Transparence.* Il est opaque.

5.) *Trait.* Il est le couleur jaune plus claire dans l'endroit où on l'egratique, & un peu mat.

6.) *Dureté.* Il n'est pas dûr, se cassant assez facilement entre les mains & se laissant facilement couper.

7.) *Attouchement.* Il est gras au toucher.

8.) *Pesanteur.* Sa gravité specifique = 2, 4125.

9.) *Odeur.* Etant humecté il donne une odeur argilleuse probablement à cause de son état decomposé.

Reflexions sur le genre du Talc.

1.) J'ai cité plus haut l'Ecume de mer de la Crimmée, la terre à foulons de Bogoroditzk, la terre à porcellaine de Glouchoff & la terre talcqueuse de Bolymbaecka; Quant aux deux premieres, toute leur apparence & les experiences chymiques nous persuadent qu'elles participent beaucoup plus de la nature argilleuse que de celle de la terre talqueuse. L'analyse chymique que Mr. Wiegleb a faite avec la premiere, semble prouver le contraire, mais son écume de mer étoit elle la même avec celle qu'on retire de cet endroit? il seroit à souhaiter pour oter toutes les doutes à l'egard des substances du regne mineral, que les chymistes ajoutent avec la precision de Mr. Werner les caractères extérieures des substances dont ils donnent l'analyse chimique. La Mineralogie n'en feroit que profiter. Personne ne doute que l'Ecume de mer puisse contenir quelques

ques moindres particules de terre talqueuſe; mais en contient elle en plus grande quantité à l'egard de la terre argilleuſe?

La terre à foulons de Bogoroditzk appartient ſelon toute apparence à l'ordre de ſubſtances argilleuſes; pour la terre à porcellaine de Glouchoff & la terre talcqueuſe de Bolymbaecha, il ſeroit encore à ſouhaiter qu'on en faſſe l'analyſe chymique, pour pouvoir aſſigner avec plus de ſureté la place, qu'elles doivent occuper dans le Syſteme.

2.) Quant aux ſyſtemes en géneral, il ſemble que la reflexion que j'ai faite à l'occaſion de la chlorite y puiſſe être de quelque utilité. Même les varietés ont de nos jours leurs noms propres & voila ce qui fait le comble de confuſion dans quelques mineralogies modernes. Il nous manque à l'egard d'elles de regles & de point fixe, d'où on pourroit les enviſager, & de la vient qu'on confond ſi ſouvent les éſpéces & même les genres avec les varietés. On a pris depuis long-tems pour baſe de claſſifieation les parties conſtituantes, mais j'oſerois ajouter qu'il puiſſe avoir des cas, où même les parties conſtituantes ne ſoyent qu'accidentelles & alors elles ne feroient qu'une varieté. Pour agir avec plus de ſureté il falloit diſtinguer avec preciſion tout ce qui eſt conſtant dans les corps du regne mineral, & tout ce qui n'eſt qu'acidentel & changeant.

3.) Mais la perfection d'un ſyſteme qui ſert de fil d'Ariadne dans le chaos du regne mineral, depend encore de l'exactitude de definitions des corps dont il s'agit, & c'eſt ce qui nous manque encore à l'egard des éſpéces. Il

 faut

faut avouer que le petit ouvrage ſur les ſignes extérieurs du celebre mineralogiſte de Saxe eſt un chef d'oeuvre de mineralogie à cauſe de la precifion, de la clareté & de l'exactitude des definitions, mais on a mal employé ſes regles, car à la place de definir l'eſpéce, on fait une enumeration entiére de toutes ſes varietes, en les liant par la particule *oder, oder* & de là vient encore la confuſion, qui regne dans ces ſortes de definitions. Car en diſant par ex que telle ou telle éſpéce eſt jaune *ou* blanche on ſe contradie & on confond l'idée qu'on s'en forme. Il ne falloit dire ſelon moi, dans les definitions des éſpéces que tout ce qui les caracteriſe entre elles, & il falloit que tout ce que l'on dit dans la definition de l'éſpéce, puiſſe être retrouvé dans les varietés & même dans chaque individu; on remarquera à la fin les aberrations qui forment les varietés. Ce n'eſt pas en citant toutes les aberrations de l'éſpéce, qui nous en fait former une idée claire, c'eſt en fixant avec exactitude ſes caractères ſpecifiques & conſtans. Pour plus de clareté j'ai preferé la maniere, que j'ai employe dans mes deſcriptions mineralogiques.

4.) Enfin il ſemble que le Schoerl bleu ou la Cyanite ait plus de droit ſur le genre du talc, que ſur chaque autre dans le ſyſteme du regne mineral.

SUR

SUR
LES SERPENTINES RUSSES,

Par

Mr. BASILE SEWERGUINE.

Préſenté à l'Académie le 26 Juin 1794.

Le genre de la Serpentine contient ſuivant le plan de l'éditeur du Syſteme du Chevalier de Linnée (13. Edit.) la pierre néphrétique, la ſerpentine proprement dite, le Schiſte chloritique & la ſerpentine cryſtalliſée. Celles de ces éſpéces qui ſe trouvent en Ruſſie, feront comme auparavant l'objet de mes recherches.

1. S. Nephreticus.

Pierre Nephretique.

Mr. le Surintendant des mines Renovantz cite d'en avoir trouvé dans la miniere Semenowſkaya, qui eſt ſituée dans une vallée au delas de 37 Werſtes du Mont Smeyewſkoy vers le ſudoſt. Elle s'y trouve ſelon lui en blocs

 con-

confiderables de couleur verdâtre, mais elle eft presque molle & fe brife en morceaux à coins indeterminés étant d'ailleurs trés ductile fous le marteau; elle devient jaunâtre au feu & s'y durcit: les ecailles ou les fetus qu'elle prefente dans fon état naturel s'y perdent & elle prend alors l'air d'une pierre Sablonneufe. Voyez Mineral. geographifche Nachrichten von den altaifchen Gebirgen ꝛc. Reval 1788. pag. 216. &c.

Comparée avec la defcription que Mr. Werner a faite du Nephrite (Cronft. Min. pag. 185. &c.) la ferpentine Nephretique du Catalogue de Mr. l'académicien Herrman au No. 66. lui eft analogue. Pour être en état d'en juger plus decifivement j'ai cru devoir ajouter ici fes caractères extérieures, qui font:

1.) *Couleur.* Elle eft de couleur verte tirant un peu fur la couleur bleuvâtre, avec des taches oblongues noires.

2.) *Apparence extérieure.* Elle vient en maffes informes. L'échantillon que j'ai devant moi eft un morceau detaché d'un plus grand bloc; elle eft liffe à la furface avec une lueur de graiffe ou d'huile, en général reffemblant beaucoup à de la corne. Elle fe brife en morceaux indéterminés à coins affez aigus, avec quelque convexité.

3.) *Apparence intérieure.* Elle n'a aucune lueur à l'intérieur. Elle contient des fetus ou des pailles, qui font un peu verdâtres & plus gros dans l'endroit de la fracture, mais blanches, plus fines & femblables à des écailles à l'extérieur.

4.)

4.) *Transparence.* Elle eſt en général demitransparente dans les endroits, qui ont retenus leur couleur verte naturelle, femblable à de la corne, mais elle acquiert une transparence plus grande dans de l'eau chaude & alors elle approche par ſes ſiſſures interieures en quelque maniere du ſpath fluor. Les taches noires qu'on y remarque n'ont aucune transparence & reſtent opaque même dans de l'eau chaude.

5.) *Trait.* Elle donne une poudre fine blanche quand on l'egratique avec un canif. La Serpentine produit ſur lui un trait blanc trés fin par ſes coins tranchans.

6.) *Dureté.* Elle n'eſt pas dûre ſe laiſſant aſſez facilement couper avec le canif, mais elle eſt trés ductile ſe laiſſant difficilement briſer en morceaux.

7.) *Attouchement.* Elle eſt graiſſeuſe à l'attouchement.

8.) *Peſanteur.* Sa gravité ſpecifique a été trouvée par la balance Hydroſtatique = 2, 6089 : 1, 0000.

Elle vient ſuivant le catalogue, des environs du village Tſchertaſch. L'eau chaude la rend plus transparente, comme je l'ai dit plus haut & lui donne l'air du ſpath fluor. Elle eſt devenu plus transparente dans la ſolution echauffée de l'alcali mineral, & encore plus dans du vinaigre echauffée. Elle a obtenu presque la transparence & l'eclat du verre ſur les coins les plus fines dans cette derniere expérience, & la couleur verte y étoit presque effacée. Etant mis dans les acides mineraux elle y acquiert au commencement une couleur verte jaunatre plus vive &

les

les taches noires oblongues deviennent plus exprimées. Mais ces phenomenes changent auffitot qu'on y verfe de l'eau bouillante. Elle perd tout d'un coup toute fa transparence, fa couleur verte s'efface entierement, & elle acquiert une couleur blanche bleuvatre foiblement luifante, ce qui n'eft cependant que fuperficielle & recouvre le refte de la maffe en maniere d'écorce d'une demi ligne d'epaisfeur. Cependant cette experience nous pourroit conduire à faire des deffinages blanches argentines affez conftantes fur la pierre nephretique. Au refte l'eau forte n'en a reçu aucune teinte verte pour preuve qu'elle ne contient point de parties cuivreufes, comme l'ont penfé quelques auteurs à l'égard de la pierre néphretique. La Leffive du fang produifit un fediment de bleu de Pruffe. L'acide vitriolique n'avoit aucun effet. Enfin elle devient blanche, matte & opaque à la flamme de la lampe des emailleurs.

La Hornblende du même catalogue au No. 31. a tout à fait les mêmes proprietés, fi non qu'elle eft encore plus fibreufe à l'interieur que la précédente. Elle vient des environs du ruiffeau Refchetka. Sa gravité fpecifique eft à l'eau = 2, 5724 : 1, 0000.

Et enfin il y a quelques ferpentines ruffes qui font recouvertes d'une matiere femblable à la pierre nephretique que j'ai decrite.

2. Serpentin. genuinus.
Serpentine.

La ferpentine fe trouve en Ruffie en auffi grande quantité & avec autant de variations de couleur, & de parties

ties hétérogenes qui s'y mêlent, qu'elle ne cedera guere en cela ni à la Saxe, qui en eſt ſi riche, ni aux Italiens, qui la poſſedent ſi belle. Je vais fixer les caractères de la ſerpentine Ruſſe d'aprés un bel échantillon, que j'ai devant moi & qui ſe trouve ſur le chemin de Tobolſk 100 werſtes de Cathérinebourg, au delas du village Beloyarſkaya ſur la gauche de la rivière Pyſchma:

1.) *Couleur.* Elle eſt de couleur verte noiratre, de ſorte que les pailles, qu'elle contient ſont de couleur verte jaunatre, tandis que le reſte de la maſſe eſt noiratre, ce qui lui donne la couleur melée de verd jaunatre & de noir.

2.) *Apparence extérieure.* Elle vient en maſſes compactes, informes & rudes, & ſe briſe en morceaux indéterminés à coins plus obtus, que dans la pierre nephretique.

3.) *Apparence intérieure.* Elle eſt matte dans l'endroit de la fracture, excepté les pailletes jaunes luiſantes hétérogénes dont elle eſt melée. Elle eſt inégale & preſente des fetus, qui ſont un peu plus gros, que dans la pierre nephretique & de couleur verte jaunatre.

4.) *Transparence.* Elle eſt demitransparente ſur les coins dans un moindre degrés que la pierre nephretique.

5.) *Trait.* Elle donne une poudre matte blanchâtre, quand on l'egratigne avec un canif; la pierre nephretique produit ſur lui un trait blanchatre rude.

6.) *Dureté*: Elle n'eſt pas trés dure ſe laiſſant couper avec le canif; elle eſt moins ductile que la pierre nephretique.

7.) *Attouchement*: Elle eſt aſſez douce au toucher.

8.) *Peſanteur*: Sa grauité ſpecifique = 2, 4158.

Elle n'a aucune odeur argilleuſe. Les acides mineraux ne font que la diſſoudre trés lentement, & acquierent une teinte vive jaune à cauſe des parties de fer qu'ils en retirent. Elle devient matte & griſe ſemblable à de l'argille devant la flamme de la lampe des emailleurs.

Elle eſt enduite d'une écorce jaunatre terreuſe, douce au toucher & qui contient quelques fibres d'asbeſt, & plus les parties de la maſſe s'approchent de l'écorce, plus elles deviennent terreuſes & changent par gradation leur couleur verte noiratre en une couleur verte plus claire & jaunatre ou jaune.

J'ai remarqué ſur presque toutes les roches argilleuſes, que dans l'état de decompoſition elles ſont presque toujours enduites d'une écorce argilleuſe entremelée de beaucoup de mica. Cet asbert dans l'écorce terreuſe de notre ſerpentine n'eſt il pas comme le mica des roches argilleuſes, l'effet d'une ſolution reiterée des particules talcqueuſes, ou une reproduction produite par la décompoſition de la Serpentine? L'Asbeſt n'eſt il aux pierres talcqueuſes ce que le mica eſt aux pierres argilleuſes?

Un

Un autre échantillon du même endroit, qui avoit une ſemblable écorce d'asbeſt à l'exterieur, contenoit une venule d'asbeſt argentin, qui y paſſoit en forme de fil recourbé.

Au reſte la ſerpentine eſt pour la pluspart homogéne. Elle ne contient que trés peu de paillettes de talc jaune & peut être de Feldſpath, ce que je preſume parceque j'en produiſit quelques étincelles avec le briquet. Pluſieurs de ces pailletes ſont réellement ſpathiques & deviennent blanches par l'action des acides mineraux.

La Ruſſie poſſede beaucoup de varietés de la ſerpentine, comme l'eſt par exemple celle de Catherinebourg, qui eſt noire avec des taches oblongues vertes.

a.) La Serpentine de Mr. l'académicien Herrman au No. 62. du catalogue cité & qui vient de Pyſchma, differe de celle que j'ai decrite, en ce qu'elle eſt de couleur foncée noiratre presque égale par toute la maſſe. Elle eſt plus demitransparente ſur les coins & ne préſente point de fetus dans l'endroit de la fracture, mais y reſſemble plutôt à de la pierre de corne. Je dirois qu'elle y fait le paſſage à la pierre nephrétique. Au reſte elle eſt plus décompoſée que la précedente, & de couleur pour la pluspart noire peu agreable. Elle ſe briſe en morceaux irregulierement quarrés & raboteux à cauſe de fiſſures ſemblables qu'elle contient interieurement, & qui ſont l'effet de ſon état de décompoſition. Elle n'eſt point enduite d'une écorce asbeſtique, comme la precedente, peut être parceque c'étoit ſa maſſe entiere qui a été attaquée par la décompoſition, qui

 n'eſt

n'eft point achevée. Elle a l'air graiffeux verdâtre à la furface, qui approche beaucoup de l'asbert ligneux. La gravité fpecifique = 2, 5826.

b.) La ferpentine du No. 63. du même endroit eft de couleur verdâtre noire; elle ne prefente point de fetus dans l'endroit de la fracture & y eft fimplement inégale. Elle a une quantité de petits trous, comme fi elle étoit rongée par les vers, & qui contiennent fouvent une terre blanchâtre. L'auteur du catalogue prefume qu'ils proviennent de la decompofition des grains de Feldfpath qui y giffoit, c'eft ce qui eft trés vraiffemblable, quoique je n'en ai point remarqué dans l'échantillon que j'ai devant moi. Elle devient terreufe & presque talcqueufe à la furface, & de couleur verte plus claire par la décompofition. La gravité fpecifique = 2, 4294.

c.) Enfin la ferpentine du No. 65. reffemble au No. 62. fi non qu'elle n'aproche pas autant de la pierre de corne & qu'elle eft d'un grain fin dans quelques endroits de la fracture. Elle eft enduite d'une écorce nephretique de couleur verte claire & femblable à de l'asbert ligneux avec des taches jaunes ochreufes. Elle eft plus dûre que la varieté precedente: La gravité fpecifique = 2, 7041.

3. S. fiffilis.

Schifte chloritique.

Quand la chlorite ou la terre de Schoerl, dont j'ai fait mention à l'Éfpece 4. du genre premier au No. *a.*) quand

quand cette terre, dis je, eſt plus endureie, plus compacte & paſſe en même terms à l'air ſchiſteux, alors provient ſelon moi, ce ſchiſte chloritique, dont les auteurs forment une éſpéce d'un genre particulier.

Telle eſt la matrice des grenats ferrugineux que l'on trouve ſur le lac Onega en Olonetz, dont voici les caracteres extérieures.

1.) *Couleur*: Elle eſt de couleur verte foncée uniforme.

2.) *Apparence extérieure*: Elle eſt peu luiſante à l'exterieur avec l'apparence du ſchiſte talcqueux, & ſe briſe en morceaux un peu plats à coins, qui ne ſont pas trés aigus.

3.) *Apparence intérieure*: Elle eſt luiſante, compacte, inégale, d'un grain fin paſſant à l'air feuilletté & ſchiſteux dans l'endroit de la fracture.

4.) *Transparence*: Elle eſt tout à fait opaque.

5.) *Trait:* Elle perd ſa couleur quand on l'égratigne avec le canif & donne une poudre fine, douce au toucher & verte ne changeant que peu de nuance à l'égard de la maſſe entière.

6.) *Dureté:* Elle cede en dureté aux éſpéces precedentes ſe laiſſant plus facilement couper avec le canîf. Il

 arrive

arrive qu'elle donne des étincelles avec le brisquet, mais ce n'eſt que dans les endroits, qui contiennent quelques grains de grenats.

7.) *Attouchement:* Elle n'eſt pas tout à fait rude au toucher.

8.) *Peſanteur:* ſa gravité ſpecifique = 3, 2250.

Les acides mineraux n'y agiſſent que trés lentement ſans changer ſa couleur. Le ſchiſte chloritique la retient encore quelque tems à la flamme de la lampe des emailieurs.

Enfin il faut que je rémarque encore à l'égard du ſchiſte chloritique, que j'y ai obſervé des endroits, qui par la poſition des feuillets entamés repreſentent l'air de velours juſtement comme la chlorite du mémoire precedent. Outre les grenats rouges ferrugineux, on y obſerve quelques longues priſmes de ſchoerl noir mal exprimé.

4. S. criſtalliſatus.

Serpentine criſtalliſée.

Peut-être n'eſt ce que la chlorite ou la terre de Schoerl reproduite ſous la forme d'aiguilles par une ſolution nouvelle. Du moins la chlorite de l'éſpece 4. du genre premier au No. *a.*) eſt entremelée par toute ſa maſſe d'une quantité de trés petites aiguilles vertes, qui deviennent

nent ensuite plus longues & qu'on retrouve aprés par toute la masse du Quartz sous le nom de Schoerl en aiguilles.

Réflexions sur le genre de la serpentine.

Si les caractéres des mineraux dependoient uniquement de la qualité & de la quantité des parties constituantes, il n'y auroit ni de difficulté ni de confusion dans la distinction de leurs genres & de leurs éspéces. Des differentes parties constituantes & leurs differentes proportions auroient produit differentes proprietés, qui seroient constantes autant que les proportions resteroient les mêmes; mais leurs caractéres dependent encore de la sorte de formation, & des moindres circonstances qui l'accompagnet, de sorte que deux sujets avec les mèmes parties constituantes & aveo la même proportion, mais de differente formation, ou accompagnés de différentes circonstances dans l'acte de la formation, auront différens caractéres extérieurs. De là vient que la serpentine, quant aux parties constituantes, reste toujours la même, ou peut être avec quelque variation peu importante; mais elle varie considérablement quant aux caractéres extérieurs qui sont l'éffet de la formation. On a remarqué par exemple que la Serpentine de Tobolsk presente des fetus dans l'endroit de la fracture. La varieté *a.*) de Pyschma ne les a pas & ressemble plutòt à de la pierre de corne. La varieté *b.*) y est inégale & la variété *c.*) est d'un grain fin. Ce sont donc des varietés de la même éspéce, & alors l'espece doit retenir toujours les caracteres, par les quels on la réconnoit dans toutes ses varietés. Cette reflexion nous presente la méthode qu'il falloit employer pour fixer les éspéces. Ce n'est pas, comme je

l'ai

l'ai déja dit autre fois en citant toutes ſes varietés, mais en fixant les ſignes, que l'on retrouve dans toutes ſes variations & dans les individus même. Ces ſignes ſeroient peut-être à l'égard de la ſerpentine, l'apparence extérieure, le degrés de la transparence, la dureté, l'attouchement, la peſanteur & principalement les proprietés chymiques; la couleur, l'apparence intérieure, du moins en partie, & le trait peuvent varier dans cette éſpéce, ce qu'on indique aprés avois fixé les vrais caracteres de l'éſpece. Le grand art de la mineralogie conſiſte donc à trouver ces ſignes conſtans, par les quels on réconnoit les corps dans toutes leurs varietés. Mais c'eſt en même tems la choſe la plus difficile; même les ſignes que j'ai cité pour la ſerpentine comme plus conſtans, peuverit ou changer, quoique en moindre degrés. Pour les proprietés chymiques enfin, je n'y comprend pas ſeulement la quantité & la qualité des parties conſtituantes que l'on découvre par l'analyſe, mais les differens phénomenes qu'elles produiſent avec les acides, au feu, ſeules ou avec les alcalis &c. Les premières peuvent y varier auſſi ſuivant les circonſtances, mais pour les phenomènes, ils reſtent toujours les mêmes au tant que l'éſpece exiſte.

2.) Quant aux pailles ou fetus que l'on rémarque dans l'endroit de la fracture de quelques mineraux, on pourroit ajouter à la diſtinction que le trés celebre Werner en a faite, celle qu'on peut deriver 1.) de leur largeur ou de la longueur 2.). De la couleur, 3.) de la groſſeur, & 4.) de leur forme plus ou moins aigue ou obtuſe. J'en donnerai les exemples. Les pailles de la Serpentine ſont plus

larges,

larges, & celles de la pierre nephrétique oblongues; encore les pailles de la ſerpentine ſont de couleur verte jaunatre, & celles de la pierre nephretique blanchatres; les pailles de la ſerpentine ſont plus aigus, & ne ſont pas ſi obrondes que dans la pierre nephretique; & enfin les pailles de la ſerpentine ſont plus gros, tandis qu'elles ſont plus fines dans la pierre nephretique. On trouvera de ſemblables differences entre le marbre & le quartz rouge compacte d'Olonetz.

3.) Enfin la ſteatite ſemble avoir plus de droit d'être placée dans ce genre, que la ſerpentine criſtalliſée.

MÉMOIRE SUR LA CYANITE.

Par
Mr. *BASIL. SEWERGIN.*

Présenté à l'Académie le 17 Novembre 1794.

La substance qui est l'objet de ce mémoire ne manqua pas, comme beaucoup d'autres, d'obtenir des noms differens, preuve que les Minéralogistes ne sont pas d'accord sur sa nature & sur ses propriétés rélatives. On lui a donné les noms de Cyanite, de Schoerl bleu, de Sappare, de Beril feuilleté & de Talc cristallisé bleu. Elle semble n'avoir été découverte que depuis cinq ans, du moins ce n'étoit que dans l'année 1789, qu'elle parvint à la connaissance des Minéralogistes selon quelques uns de ses caracteres distinctifs. Mr. de *Saussure* le fils, *a*) *Sage* *b*) & puis le feu Mr. de *Born* *c*), & le minéralogiste de Saxe *Hoffmann* *d*), sont

a) Journal de physique 1789. Mars. p. 213.

b) Journ. de phys. jul. p. 39.

c) Ind. fossil. I. p. 33.

d) Bergmännischer Journal 1789. I. S. 393.

ſont ceux, par les obſervations desquels cette ſubſtance eſt devenu plus connue & plus rémarquable. Le Mont St. Gothard dans la Suiſſe eſt l'endroit, d'où l'on en a tiré les plus beaux échantillons; mais elle a été decouverte auſſi ſur le Greiner en Tyrole, dans l'Écoſſe prés de Betrophnoi-Banſchire, dans l'Eſpagne, prés de Lyon en France, dans l'Autriche & dans les Carpathes.

Il y a environs deux ans que Mr. l'académicien Herrmann nous envoya des Cyanites de Siberie avec la rémarque, qu'il les avoit découvert en 1792. aux environs du village Bruſſianskaya 47 Werſtes de Catherinebourg, il en a donné depuis une notice plus ample dans les annales chymiques de Mr. de Crell pour l'année 1793.

Comme j'ai eu l'occaſion d'examiner ces Cyanites Ruſſes, & comme l'académie a bien voulu me permettre d'éxaminer auſſi les Cyanites de St. Gothard, qu'elle a reçu nouvellement par la bonté d'Érmengildo Pini, qui les lui avoit envoyé avec quelques autres mineraux étrangers trés récommandables par leur beauté, je prends la liberté de preſenter ici les réſultats des obſervations que j'ai faites la deſſus.

Il y a deux queſtions qui ſe preſentent d'abord à réſoudre à l'égard de la Cyanite: 1.) Quelle différence existe entre cette éſpéce de pierre & toutes les autres qui lui ſont ſemblables, & alors avec quel droit on en peut faire une éſpéce particuliere: & 2.) quelle difference il y a entre nos Cyanites Ruſſes & celles de St. Gothard. L'une & l'autre ſont d'importance pour la mineralogie & pour la perfection de l'oryctographie de notre pays, dont je m'occupe depuis quelque tems.

Pour refoudre la queftion première, le plus fûr moyen eft de fixer les caracteres de la fubftance & de les comparer avec ceux des fubftances, qui lui font les plus femblables. Et comme le *Schoerl* eft l'éfpéce de pierre, qui en approche le plus, c'eft lui qui exige le plus d'attention pour atteindre le but mentionné. Je mettrai les caracteres de celui-ci à coté des caractéres de la Cyanite, pour appercevoir d'un coup d'oeil & l'analogie & la difference de ces deux fubftances.

Cyanite en barres de St. Gothard	*Schoerl en barres de Saxe.*
1.) Elle eft ordinairement de couleur *bleu de faphir*, tirant quelque fois plus ou moins fur le verd & fur le gris.	1.) De couleur noir obfcure.
2.) Elle eft criftallifée en forme de prisme applati à 4 cotés; on y trouve deux cotés oppofés toujours deux fois plus larges que les deux autres; en un mot ce criftal à la forme des barres de fer, ordinaires en miniature. Les	2.) prismatique à 3 & 9 cotés & pointue par 3 faces; rude, & droite.

coins

coins des côtés plus étroites font fouvent coupé par deux faces en forme de carêne; quelque fois l'un des côtés plus étroites eft coupé en carêne, tandis que l'autre oppofé eft creufé en gouttiére. Au refte ce cryftal prismatique ne fe termine guère en piramide. L'un des criftaux de St. Gothard a prés de 3 pouces de longueur fur quelques lignes de largeur. Enfin il y a une circonftance qui eft toute particulière aux cryftaux de la Cyanite, c'eft qu'ils prefentent ordinairement des *Courbures onduleufes*, comme on le voit dans les feuillets du Talc.

3.) Les cryftaux ne font *pas ftriés* le long des prismes; ils font unis, luifants & *quelque fois* vitreux à la furface & toujours avec des articulations transverfales. Le grand criftal de St. Gothard avoit 7 articulations vifibles.

3.) Fortement ftrié le long des prismes.

4.) La Cyanite *n'a aucune lueur* dans la fracture transversale. Elle y est matte, feuilletée ne presentant que les coins des feuillets dont elle est composée, & souvent terreuse par la decomposition.	4.) Luisant & vitreux dans l'endroit de la fracture.
5.) Les crystaux de St. Gothard sont ordinairement solitaires, & rarement entassés ensemble.	5.) Le même.
6.) Les crystaux plus grands se brisent assez facilement en prismes plus petits, qui se rompent enfin en feuillets trés minces. D'ailleurs la Cyanite se brise en morceaux indeterminés à coins assez aigus.	6.) Il se brise en morceaux indeterminés à coins un peu aigus.
7.) Le grand crystal de St. Gothard est presque transparent; au reste la Cyanite n'est ordinairement que demitransparente, & souvent presque opaque.	7.) Pour la pluspart opaque.
8.) On y voit un trait blanc grisatre, quand elle a été raclé par le canif.	8.) Le même.

9.)

9.) A l'égard de la dureté de la Cyanite, on trouve cette différence remarquable, qu'elle est beaucoup plus dûre selon sa longueur, que dans sa largeur: c'est à dire que dans la premiere direction, elle reçoit facilement des empreintes d'un morceaux tranchans de Spath calcaire, & dans la direction transversale, elle ne se laisse racler que par le Quartz.	9.) Il ne cede que peu en dureté au Quartz; également dûr par toute sa masse.
10.) Sa pesanteur specifique est envers l'eau = 3517: 1000.	10.) Pesante en moindre degré. *a*)

Tels sont les caractères de la Cyanite de St. Gothard. La Cyanite de Russie a en général les mêmes proprietés, excepté quelques aberrations, par les quelles elle ne constitue qu'une simple varieté. Au reste il y a deux sortes de Cyanite Russe. L'une qui presente des crystaux isolés, plus dures & plus exprimés dans du Quartz de couleur blanche sale, c'est une Cyanite en forme de tables allongées. L'autre est un assemblage de feuillets quarrées prismatiques, entassées les unes sur les autres dans différens

a) Kronstedts Mineralogie herausgegeben von Werner. p. 168. Cependant il y a des Shoerls qui ne differe pas autant de la Cyanite, & particulierement le Schoerl prismatique blanc, qu'on a nommé *Schoerlite.*

rens fens, & melée de beaucoup de mica argentin. Cette derniere a tant de reffemblance au Talc, que chacun la prendrait pour tel au premier coup d'oeil. Je la nommerois Cyanite feuilletée. Voici les caractères par les quels ces Cyanites de Ruffie different de celles de St. Gothard.

1.) La couleur bleue eft rarement égale par toute la maffe; mais ordinairement les prismes ne font teints de bleu que dans le milieu, tandis qu'ils font grifâtres & argentins fur les côtés, de forte qu'on ne voit qu'une bande bleue qui paffe le long du prisme; fouvent ces prismes n'ont que des ftries bleues longitudinales fur un fond blanc.

2.) Quoique les prismes des Cyanites Ruffes ayent en general la même forme, cependant ils font fi minces, que fouvent leur épaiffeur n'excede celle du papier le plus fin. La Cyanite feuilletée n'eft qu'un affemblage de feuillets allongées quarrées melées & entaffées les unes fur les autres dans différentes directions. Il faut remarquer que ces feuillets oblongues font compofé auffi d'une nombreufe quantité d'autres lames plus minces & quarrées d'une maniere comme le font ordinairement les cryftaux fpathiques. Les courbures onduleufes que j'ai remarqué dans la Cyanite de St. Gothard font encore plus vifibles ici, par les quelles, jointes à la couleur grife argentine, la Cyanite feuilletée approche beaucoup du Talc. — La Cyanite en table eft rude & droite.

3.) La Cyanite feuilletée a parfaitement la lueur du Talc, fes prismes ou plutôt fes lames font articulées. — La Cyanite en table eft un peu plus matte, & trés legerement ftriée à la furface.

4.)

4.) Toutes les deux ſont mattes à l'intérieur.

5.) J'ai déja dit plus haut que la Cyanite en table eſt en cryſtaux iſolés; les lames de la Cyanite feuilletée ſont ramaſſées & raſſemblées en une maſſe.

6.) Ces Cyanites ſe rompent en morceaux indeterminés à coins un peu obtus, & puis en feuillets plus minces.

7.) Elles ne ſont que démitransparentes ſur les coins.

8.) Enfin à l'egard du trait, de la dureté & de la peſanteur ſpecifique, on ne remarque presque aucune différence. Mr. Herrman avance, que la peſanteur ſpécifique de la Cyanite Ruſſe eſt = 3622 : 1000.

Au reſte toutes les Cyanites ſont peu fuſibles ſans addition. Les feuillets dont elles conſiſtent deviennent plus viſibles & argentines devant la flamme de la lampe des émailleurs jusqu'a ce qu'elles s'uniſſent enfin pour former une boule demivitrifiée griſâtre. — La Cyanite de St. Gothard ſemble être plus fuſible que celles de Ruſſie. Le Borax, l'alkali mineral, & le ſel microcosmique n'y agiſſent que trés lentement & produiſent des boules vitrifiées griſâtres. Le ſel microcosmique les diſſout avec quelque effervefcence.

Les acides n'agiſſent que trés lentement & ſans aucune effervefcence par la voye humide ſur les Cyanites. Elles y retiennent la couleur bleue, quand elles n'ont pas éprouvé auparavant l'action du feu. L'alcali phlogiſtiqué y produit pourtant quelque peu de ſediment bleu.

Suivant l'analyſe chymique de Mr. Struve *a*) la Cyanité de St. Gothard contient $51\frac{1}{2}$ part. de terre ſiliceuſe, $5\frac{1}{2}$ de terre alumineuſe, $30\frac{1}{2}$ de terre talcqueuſe 4 de terre calcaire, 5 de fer, & $3\frac{1}{2}$ de l'eau & de perte par cent.

Et la Cyanite Ruſſe donne ſuivant Mr. Herrman *b*) $\frac{23}{100}$ de terre ſiliceuſe, $\frac{29}{100}$ de terre talcqueuſe, $\frac{20}{100}$ de terre argilleuſe, $\frac{3}{100}$ de terre calcaire, $\frac{2}{100}$ du fer & $\frac{3}{100}$ de perte.

Enfin toutes les Cyanites ſont des pierres paraſitiques, qu'on voit accompagnées pour la pluspart du Talc, dans des roches compoſées feuilletées ſecondaires, où elles occupent le plus ſouvent les endroits les plus proches de la ſurface & les plus decompoſés. Elles ne donnent point d'indices de veines metalliques. Mais je reviens ſur la Cyanite de St. Gothard.

La matrice en eſt une roche compoſée qui conſiſte de Talc ſchiſteux argentin avec quelques particules de Feldſpath, qui fait qu'on en retire quelques etincelles avec le briquet. Cette roche contient encore beaucoup de mica noir; & c'eſt là, où on trouve les cryſtaux de Cyanite plus ou moins grands & parfaits. Souvent on n'y voit que des empreintes de Cyanites qui y giſſoient. La couleur bleue des Cyanites y fait ſouvent par pluſieurs nuances le paſſage dans la couleur verte d'aigue marine en retenant cependant les caractères qui leur ſont propres. Pluſieurs de ces Cyanites ſont mattes à la ſurface & bleues ſeulement par le milieu

a) Crells chemiſche Annalen 1790. T. 1. St. 1. p. 55.

b) Crells chemiſche Annalen 1793. T. 1. St. 5. p. 394.

lieu tandis qu'elles ſont griſatres vers les bords. Quelque fois elles ſont bleues à la ſurface tandis qu'elles ſont griſatres ou melée de bleu & de gris dans l'intérieur ou dans l'endroit de la fracture. Au reſte toute la maſſe ſemble être en état de decompoſition & melée d'ochre ferrugineuſe; même le mica y eſt pour la plus part ochreux & decompoſé.

Un autre échantillon du même endroit eſt encore plus ſchiſteux & decompoſé, qui outre la Cyanite bleue & de différentes nuances, contient du Schoerl de couleur de grenats & de differente groſſeur.

La matrice de la Cyanite en table de Ruſſie eſt un Quartz ferrugineux, & la Cyanite feuilletée n'eſt entremelée que du mica argentin. La prémiere ſe trouve à côté gauche de la riviere Brouſſianka, & l'autre aux environs du village Brouſſianſkaya ſur l'oueſt des Ourales, 47 verſtes de Catherinebourg, les ſeuls endroits, où on a trouvé les Cyanites ruſſes. Mr. Herrman avance, que les Cyanites reſtant long tems expoſées à l'action de l'air ſe decompoſent & deviennent griſes à la ſurface tandis qu'elles ſont bleues à l'interieur. Mais il y a d'autres, comme j'ai avancé plus haut qui ſont griſes en dedans tandisque qu'elles reſtent bleues à la ſurface.

J'ai dit plus haut qu'un des prismes de Cyanite de St. Gothard a prés de 3 pouces de longueur. Mr. Herrman nous fait connoitre une Cyanite Ruſſe, qui avoit $3\frac{1}{2}$ pouces de Paris de longueur ſur une $\frac{1}{2}$ pouce de largeur & $\frac{1}{10}$ de pouce d'epaiſſeur. Mais cette derniere eſt ſtriée le long des prismes, ce que je n'ai pu obſerver dans les Cyanites de St. Gothard.

Enfin les Cyanites de St. Gothard ſont accompagnées de la Tremolite, du Talc étoileux, de la Tourmaline & de la Chlorite. Les collines de Ruſſie renfermant les Cyanites, ont dans leur voiſinage & dans l'étendue de 1, 2 à 3 verſtes à l'entour du Granit, du Talc, de pierre ollaire, de la Syenite, de la Hornblende, de Schiſte argilleux, de Schiſte de corne & de pierre Calcaire *a*). On n'a trouvé de la Tremolite chez nous qu'aux environs du village Koſſulina 30 werſtes de Cathérinebourg (c'eſt la Zéolite de Herrmann) & auprès du lac Baikal *b*), d'où on en a tiré les plus beaux morceaux. Pour la Chlorite & la Tourmaline on eſt pas certain ſur les endroits, où elles ſe trouvent en Ruſſie.

Il me reſte à examiner par quel droit cette ſubſtance porte le nom propre de Cyanite & au quel des differens genres de pierre elle puiſſe appartenir.

Quant au nom de Cyanite, on ſçait bien qu'il vient du mot grec Κυανος, qui veut dire bleu, & que les anciens avoient déjà employé le nom *Cyanos* pour deſigner une certaine Gemme bleue, qu'ils avoient diſtingué en *Cyanos mas* & *femina* & qui ſe trouvoit dans la Scythie, dans l'Iſle de Chypre & dans l'Egypte, *c*) *Agricola* la tient pour un Saphir

a) Herrmann à l'endroit cité.

b) Analyſée par Mr. l'Acad. Lowitz in Crells Annalen 1794. B. 1. St. 2. p. 182.

c) Plin. Hiſt. Natur. Lib. XXXVII. Cap. 38.

phir *a*). Par le peu d'attention, que les anciens emploÿoient aux caractères des corps naturels, on ne ſait qu'imparfaitement les ſubſtances, qu'on trouve nommé dans Pline &c. La Scythie, l'Egypte & l'Iſle de Chypre a t-il fourni réellement des vrais Sapphirs anciennement? Quant au *Sapphir* des anciens, la ſeule addition de Pline *nusquam tamen perlucidae* nous deſigne qu'il n'étoit pas ce que nous comprenons maintenant ſous ce nom *b*). Peut ètre que le Sapphir des anciens eſt ce que Pline nomme *Adamas Cyprius*, la cinquieme éſpéce des diamans qu'il cite *c*) en diſant: *Poſt hos Cyprius vocatur, in Cyprio repertus, vergens in aëreum* (coeruleum) *colorem* &c. Peut-être que le *Cyanos* des anciens deſignoit le vrai Sapphir, & alors ce ſeroit injuſte de donner ce nom à une ſubſtance qui ne l'eſt pas?

Quoiqu'il en ſoit le Schoerl & le Beril ſont les ſubſtances avec les quelles la Cyanite pourroit étre le plus facilement confondus, ce qui lui a fait donner auſſi les noms de Schoerl bleu & de Beril feuilleté. Mais on appercevera bientôt la différence quand on conſidere, que cette ſubſtance n'a ni tout à fait la forme des Schoerls & des Berils, ni leurs ſtries longitudinales, ni l'air vitreux dans l'endroit de la fracture, ni la maniere de ſe rompre, ni la dureté, qui preſente des phénomenes ſi remarquables dans la Cyanithe. Il faut y ajouter qu'elle en differe encore par ſon moindre degrés de fuſibilité, & par la plus grande quantité de terre talcqueuſe, que l'on y trouve par l'analyſe chymique.

a) Lib. I. de Natura foſſilium.

b) Plin. Lib. XXXVII. Cap. 39.

c) Plin. Lib. XXXVII. Cap. 15.

Il fembre donc que la Cyanite ait tout le droit de porter un nom différent & de former une éfpece particuliere. Et fi j'aurois un fyftême à faire, je placerois la Cyanite parmis les fubftances talqueufes. L'ordre argilleux finiroit par le Mica; l'ordre talqueux fuivroit immédiatement aprés avec la Hornblende, puis viendroit la Cyanite, puis le Talc, &c. je m'authoriferois en cela par la reffemblance que la Cyanite feuilletée a avec le Talc. Puis j'en ferois trois varietés c'eft à dire.

1.) *La Cyanite en barres,* Cyanites prismaticus, du Mont St. Gothard.

2.) *La Cyanite en tables.* Cyanites tabularis, de la riviere Brouffianka.

3.) *La Cyanite feuillettée.* Cyanites lamellaris, du village Brouffianskaya.

Il feroit inutile d'alleguer ici toutes les éfpéces de pierres bleues qu'on connoit, d'autant plus que ce n'eft pas la couleur qui decide; on fait mention du Schoerl bleu; je ne l'ai pas vû & je ne fcais s'il differe effectivement de la Cyanite. D'ailleurs que le Schoerl puiffe paffer au Cyanite, ceci eft trés vraifemblable par le Schoerl décompofé de la minière Elifabetskoy à Cathérinebourg, dont j'ai fait mention dans ma differtion fur le Talc & qui aproche affez de la Cyanite par la forme des criftaux & par le manque de lueur dans l'endroit de la fracture.

Enfin

Enfin j'ai obſervé du Feldſpath bleu criſtalliſé parfaitement de la forme de Cyanite, mais pointu par un bout, vitreux & ſpathique, qu'il ne faut pas confondre avec la Cyanite, il eſt criſtalliſé en tables presque auſſi larges que longues, &, comme j'ai dit, pointue par un bout. Quelques uns de ces criſtaux ſont chatoyant. Ils ſe trouvent en quantité & comme s'ils étoient collés (car ils ſe detachent trés facilement) ſur la ſurface décompoſée d'une roche granitique, qui conſiſte de Quartz blanc & brun, de Feldſpath, de Mica noir, de quelques grenats & de ce Feldſpath cyanitique. Elle vient de la mer blanche, & on en a pluſieurs échantillons au Cabinet d'hiſtoire naturelle de l'académie.

Quant à la formation des Cyanites c'eſt un problême, qui reſte à reſoudre, comme dans beaucoup d'autres criſtalliſations du regne mineral. Rémarquons ſeulement qu'en général les criſtalliſations heterogenes ſont les plus frequentes ſur la ſurface de leurs matrices, & que particulierement les criſtalliſations argilleuſes & talqueuſes ſont les plus frequentes ſur la ſurface de leur matrice, quand elle a ſejourné longtems à l'air libre & qu'elle y eſt en partie décompoſée. J'ai vu beaucoup de roches quartzeuſes & particulierement celles qui contenoient beaucoup de Feldſpath, qui aprés avois reſté long-tems expoſées à l'action de l'air libre devenoient ferrugineuſe ou ochreuſes & argilleuſes à la ſurface, qui ſe couvroit en même tems d'une quantité de mica criſtalliſé en feuillets, tandis qu'il n'y en avoit que trés peu dans l'intérieur. J'ai dû cette rémarque aux obſervations que j'ai faites ſur les pierres de roches compoſées des environs de la Reſidence, & qui ſemblent prouver

1.)

1.) Qu'en géneral les criſtalliſations doivent être les plus frequentes vers la ſurface de la terre, par la même cauſe, par la quelle elles ſont les plus nombreuſes vers la ſurface de leur matrices. & 2.). Que les terres melangées n'ont beſoin ſouvent que de trés peu de menſtrue pour ſe réſoudre & pour former des criſtaux, comma ça pû être le cas à la ſurface des roches compoſées mentionnées. La Nature ſemble pouvoir les diſpoſer à la criſtalliſation ne faiſant que les humecter ou d'en faire une pate molle, pourvû qu'elles ſoyent bien attenuées.

MÉ-

TABLEAU PHYSIQUE ET TOPOGRAPHIQUE DE LA TAURIDE.

Par
P. S. PALLAS.

Présenté à l'Académie le 29 Janv. 1795.

Minéralogie & Géographie Physique.

La Presqu'isle de la Tauride est, pour la Géographie physique & la Minérographie, un des plus singuliers pays qui existent sur la terre. Ses montagnes, élevées jusqu'à plus de douze cent pieds, sont presque taillées à pic le long de la côte méridionale, où regne une mer très-profonde, s'applanissent par degrès, & à la fin insensiblement, vers le Nord, & se perdent en pentes douces dans la grande plaine, peu élevée au dessus du niveau de la mer & qui occupe la plus grande partie de la surface de ce pays.

Dans un pays qui a des montagnes si élevées, que quelque part la neige & la glace s'y conserve pendant tout l'été, qui d'ailleurs est isolé par la mer; on devroit, selon les loix générales de la Nature, s'attendre à trouver les *trois ordres* de montagnes: les *primitives* granitiques, pour cen-

centre d'élévation; les schisteuses *sécondaires*, & les *tertiaires* à couches horizontales melées de pétrifications; ou bien, comme en Sicile, un noyau ou *centre volcanique* & les couches sécondaires & tertiaires sur les contours. Mais en Tauride il n'existe ni l'un, ni l'autre de ces arrangements observés dans tous les autres pays de montagne. L'on ne voit, dans l'escarpement maritime de toute la haute chaine des alpes de la Tauride, rien que des couches sécondaires du dernier ordre, inclinées sur l'horizont à un angle plus ou moins approchant de celui de 45 degrés & presque toutes plus ou moins parallèles, posées dans une direction qui varie entre le Sud-ouest & le Nord-ouest. Toutes ces couches sont donc coupées par la direction de la côte & on les voit toutes à découvert sur l'escarpement maritime des montagnes, comme les feuillets d'un livre ou les tomes d'une bibliotheque. Elles présentent effectivement un côde, où le Physicien peut aller s'instruire & où il lira bien des choses, qui peuvent contribuer à éclaircir la structure du glôbe & la formation de ses couches externes. À voir cette suite immense de couches innombrables, appliquées les unes aux autres, pour la plûpart inclinées obliquement vers le Sud-est ou vers l'Est, c'est à dire vers leur tranche ou l'escarpement des montagnes, l'on est tenté de supposer de deux choses l'une: ou que le noyau principal de cette chaine de montagnes s'est affaissé dans l'abyme de la mer; ou que toute cette masse de couches à été soulevée, au dessus des eaux, pas une force immense, agissante à une très-grande profondeur. Cette dernière supposition paroitra incroyable, lorsqu'en prenant l'épaisseur de cette masse de couches, posées successivement les unes au dessus & à coté des autres, sur une longueur de plus de

130

130 verstes de côte, dépuis Balaclava jusqu'à Théodosie; on devroit évaluer la profondeur de ce foyer, qui auroit soulevé & renversé cette masse de couches énorme, à plus de soixante & cinq mille toises, qui est l'espace à peu près qu'occupe l'épaisseur de ces conches variées, diagonalement inclinées. Mais dans quelque sens qu'on le prenne, l'on pourra considerer la Tauride comme une masse de couches discoïde, dont le bord méridional est soulevé à plus de douze cent pieds audessus du niveau de la mer & forme des hautes montagnes continues, au lieu que la partie septentrionale se rapproche insensiblement de l'assiette horizontale & se perd dans la plaine.

L'on remarque très-distictement, dans la partie montagneuse de la Tauride, *deux Ordres* de montagnes formées à des époques differentes, & des *couches* de dépôts *posterieures* à ces deux époques & très-modernes.

Le prémier *Ordre des montagnes* est composé de ces couches dont j'ai d'abord parlé, qui se présentent sur tout l'escarpement de la côte méridionale, fortement inclinées à l'horizont & dont je donnerai d'abord le détail. Cet ordre de montagnes s'étend en longueur, depuis le monastère de de St. George & la pointe du Chersonêse qui porte le même nom, jusqu'à la montagne de Karadàgh, voisine de Théodosie, & occupent une largueur variable de vingt à trente Verstes, même au delà, à prendre dépuis la côte dans l'interieur des terres. Les montagnes qui la composent, sont les plus haute de la Tauride & forment surtout trois élévations principales, le *Tchaterdagh*, reputé la plus haute montagne de la presqu'isle, dont la hauteur perpendiculaire

 peut

peut étre eftimée à 1300 pieds & qui répond à peu près au milieu de la côte montagneufe; & les *trois Yaëllas* qui font une efpèce d'Alpes continues, très élevées, efcarpées du côté de la mer & applaties en plaines immenfes, inclinées vers le Nord & fillonnées de vallons. Des deux côtés ces alpes font féparées du Tchaterdagh, dont elles égalent presque la hauteur, par deux vallons très-profonds & rétrecis, qui coupent la chaine du Nord au Sud & font pente tant vers le Nord, ou elles donnent origine aux deux rivières Salghir & Alma, que vers le Sud où elle fe réuniffent dans la vallée d'Aloûfchta.

À mefure que ces montagnes à couches fécondaires diminuent en hauteur vers l'interieur des terres, leurs couches, en bien des endroits, prennent auffi une inclinaifon plus douce & enfin les couches du *fécond ordre des montagnes* qui font toutes calcaires & remplies de coquillages étrangers à la mer noire, viennent les récouvrir & font elles-mêmes, à leur tour, efcarpées & fouvent taillées à pic du côté des hautes montagnes, douces & de plus en plus applanies du coté de la plaine; comme fi leurs bords méridionaux euffent été foulevés, tandis que vers la plaine leurs couches fuffent reftées dans l'affiette horizontale. Auffi ces couches s'élevent-elles toujours en pente douce vers les hautes montagnes & plus vifiblement là, où elles y touchent & où il regne ordinairement des vallées transverfales fort larges qui féparent les deux ordres de montagnes, & dont les angles oppofés ne montrent aucune correfpondance.

Enfin l'on trouve dans quelques endroits de la côte méridionale, fur le bord de la mer, des couches pierreufes hori-

horizontales, compoſées de gravier, de cailloux & de coquilles calcinées, communes dans la mer noire, qui ſont appliquées au pied des eſcarpements du prémier ordre de montagnes, ſur la coupe oblique de ſes couches & ſont évidemment un depôt bien plus moderne de la mer, lorsque ſon niveau étoit encore plus élevé ſur cette côte; élévation dont on trouve encore partout les traces incontroverſibles.

Prémier ordre des Montagnes.

Le prémier ordre des montagnes de la Tauride conſiſte de couches variées, mais pour la plûpart répetées avec peu de difference ſur toute la longueur de la chaine. Elles ſont en partie des roches dures, en partie d'une conſiſtence friable, comme pourries, & quelquefois même presque terreuſes.

La roche dure la plus ordinaire & la plus géneralement répetée dans cet ordre de montagnes, eſt *l'ancienne roche calcaire.* Elle eſt d'un gris plus ou moins foncé ou blanchâtre, ordinairement jaunâtre, plus rarement rougeâtre de ſes félures fréquentes; ſa caſſure eſt ordinairement coquillêre, ſon grain auſſi fin que celui de la roche cornée, avec laquelle elle a ſouvent une grande reſſemblance. Dans quelques montagnes elle eſt aſſez entière pour pouvoir ſervir en architecture au lieu de marbre. Rarement elle contient des traces de pétrifications & ce ſont alors ſurtout quelques madréporites ou milleporites, & des entroques très-épars, ſouvent presqu'effacés. En quelques endroits, ſurtout dans les hautes parties de la chaine, elle eſt plus noirâ-

 tre

tre & de la nature de la pierre puante. Ordinairement on la voit en couches très-épaiſſes, mais irrégulièrement fendues & diviſées, tellement qu'on à ordinairement de la peine à démeler la véritable inclinaiſon & la direction de ſes couches, lesquelles ſont ſouvent courbées ſuivant la forme externe de la montagne qu'elles forment & quelquefois ſemblent cariées ou caverneuſes, comme ſi le mouvement des vagues les avoit rongées. Les montagnes, formées de cette roche, ſont ordinairement les plus pélées & ſouvent ſans bois, excepté quelques genêvriers mal venus & quelques arbuſtes épineux. À la ſurface des montagnes, cette roche ſemble ſe décompoſer en limon jaune ou rougâtre, de la couleur des fêlures qui s'y trouvent; auſſi eſt elle melée de tant de terre argilleuſe, qu'on ne peut s'en ſervir pour bruler de la bonne chaux. Cette roche forme les plus gros maſſifs de montagnes dans le prémier ordre & l'on eſt quelquefois tenté de la prendre pour la baſe des autres; mais les cas ou on la rencontre en couches moins épaiſſes, qui viennent ſe ranger évidemment entre les autres couches d'une nature differente, prouvent qu'elle eſt intercalaire & du même ordre que celles-ci. Au reſte cette roche calcaire eſt très-ſouvent coupée en tout ſens de veines d'un ſpath calcaire jaunâtre rhomboidal, ou d'un ſpath compoſé de prismes réunis. Quelquefois, lorsqu'elle eſt appliquée aux couches de brêche, elle ſe trouve elle-même parſemée des mêmes cailloux roulés qui compoſent la brêche.

Après la roche calcaire, la ſubſtance la plus commune, dans le premier ordre des montagnes, eſt un *ſchiſte argilleux* tres-feuilleté & très-varié dans ſes couches. Le plus ſouvent ſa ſubſtance eſt ſi peu ſolide, qu'il ſe fèle à l'air l'air comme les bôles & ſe ramollit par les eaux. Dans cet état il eſt ordinairement d'un gris plus ou moins foncé, quelquefois presque noir, comme imbû de manganêſe, ou bien d'un blanc jaunâtre. D'autres couches ou feuillets ſont bruns ou noirâtres & petrifiés par le principe martial ou phlogiſtique qui eſt venû s'y meler plus abondament. Rarement ces couches argilleuſes ſont effervescence avec les acides & jamais je n'ai pû y obſerver des corps organiſés bien conſervés, quoique les couches de ſchiſte ſablonneux qui ſe melent dans les maſſifs du ſchiſte argilleux, en contiennent quelquefois. Dans ces maſſifs, ſouvent très-étendus, de ces ſchiſtes argilleux, les eaux des ſources, les torrents & les coulées de pluye ont ordinairement creuſé les plus profonds ravins, & c'eſt ſur ces éſpaces glaiſeux qu'on rencontre, ſur la côte & dans les montagnes, les ſentiers les plus dangereux, où l'on risque cent fois dans la journée d'être précipité avec ſon cheval & le ſeroit très-ſouvent, ſi l'excellente raçe des chevaux montagnards n'étoit pas ſi ſure du pied & ſi accoutumée à grimper ſur ces ſentiers que le piêton ne franchit ſouvent qu'avec horreur, & que ces chevaux ſavent pourſuivre par les plus mauvaiſes deſcentes, ſans guide & ſans qu'on touche à la bride.

Ces ſchiſtes argilleux contiennent ordinairement un principe ſalin, ſurtout le *ſel amer* qui ſe manifeſte là, où les petites veines d'eau ont leur écoulement ſur les eſcarpemens de la côte. Dans la partie orientale de la chaine, depuis Alouſchta jusqu'à Kôz, cette ſalinité des bandes de glaiſe eſt plus perceptible, auſſi eſt-ce dans ces cantons, ſurtout dans la vallée de Soudagh, que le Caprier, le Fuſtet, le Soumagh & quelques autres arbriſſeaux & plantes ſalines
ſe

ſe plaiſent préferablement, au lieu que la Tragante aime à croitre ſur les montagnes de brêche.

Les couches diverſicolores de ce ſchiſte argilleux alternent de differente épaiſſeur & varient continuellement pour la couleur & la conſiſtance. On les trouve ſouvent coutournées & ondoyées comme les fibres d'un bois veiné. Dans quelques endroits, voiſins des plus hautes montagnes, on les voit arrangées en compartiments, comme les concamerations de certaines mines de fer ocreuſes, mais ſur une méſure gigantesque; alors les lames, qui forment ces compartiments, ſont ordinairement ferrugineuſes & differentes de la maſſe arrangée en couches concentriques qui les remplit. — Les groſſes couches de ſchiſte argilleux reſſemblent quelquefois à la roche trapèzoïde (Trap) & ſont presque de la nature de cette roche.

Très-ſouvent interpoſé au ſchiſte argilleux, par feuillets & couches médiocres & minces, mais auſſi quelquefois en gros maſſifs de couches homogènes qui forment des montagnes entières, on trouve un *ſchiſte ſabloneux* ou *grais en couches*, qui eſt la troiſième roche des hautes montagnes de la Tauride. À cauſe de ſa nature calçaire, ce grais fait ordinairement effervefcence avec les acides, ou ſe trouve coloré par un ocre martial qui lui ſert alors de ciment. Dans les montagnes plus élevées ce grais eſt ſouvent très quartſeux, comme un ſchiſte corné, & contient de frequents filons criſtalliſés en quarts laiteux ou transparent. En pluſieurs endroits l'on trouve des nombreuſes couches parallèles de ce Schiſte, ſeulement de quelques lignes ou pouces d'épaiſſeur, entrelardées de couches étroites de glaiſe. Quelquequefois des couches de ce grais, plus épaiſſes & poſées presque perpendiculairement ſur leur tranche, au milieu de la bande argilleuſe degradée, s'élevent comme des pans de murs & répreſentent, par les fentes qui les diviſent en quartiers parallélepipêdes, une maçonnerie en pierres de taille. J'ai trouvé, prés de Soûdàgh, de ces couches, dont les quartiers, diſtanciés d'un quart ou d'un demi-pouce, étoient conſolidés par un ciment d'une autre nature, melé de ſchiſte broyé; & dans ce ciment, coulé pour ainſi dire entre les quartiers, j'ai rémarqué des fragments de coquilles & de belemnites, tandis qu'entre les couches du grais même il y avoit du bois charbonné, applati dans le ſens des couches renverſees.

Dans la même proportion que ce ſchiſte ſabloneux, l'on trouve auſſi, dans l'ordre des couches de ces hautes montagnes, une groſſe *Brêche* (Breccia) ou Poudingue, formée de cailloux roulés de different volume, rarement de la groſſeur d'un melon, dont le ciment eſt tantôt quartſeux & ſabloneux, plus ou moins dur, comme dans la pierre meulière de Koutlak, tantôt calcaire ou martial, tantôt enfin une eſpèce de bôle d'un rouge foncé; & dans ce dernier cas ces brêches ont très-peu de conſiſtance & tombent en ruine. Dans la ſuite de ces brêches, l'on trouve ſouvent des couches conſiderables d'une bonne mine de fer limoneuſe rouge qui contient des frequents rognons encroutés, dont le noyau eſt d'une ocre differente. Ces mines de fer ſont ſurtout abondantes dans la vallée de Soudagh.

Les maſſifs de grais ou de brêches dures qui ſont ſituées au milieu entre deux larges bandes du ſchiſte argilleux déſtructible, réduites en vallons, forment ordinairement des hautes crêtes eſcarpées & heriſſées de rochers, dont la direction ſuit la poſition ou l'allignement des couches.

Les quatre eſpèces de couches que je viens d'expoſer, la roche calcaire, le ſchiſte argilleux, le grais & les brêches, ſont l'ingrédient principal des montagnes de la Tauride du prémier ordre & en forment les plus grandes maſſes, repetées à l'infini, variées en couleur, en grain & autres petites circonſtances, mais au fond & collectivement toujours les mêmes, d'un bout de la chaine à l'autre.

Les roches moins communes qui viennent ſe ranger dans l'ordre des couches de ces montagnes ſont: 1°. une roche ſingulière ſemblable à un granitelle; 2°. une roche trapézoïde griſe; 3°. un baſalte noirâtre en couches, melé de ſchoerl, & 4°. une ſerpentine en groſſes maſſes.

Là *Roche granitoïde* dont je n'ai jamais vû la pareille dans l'ordre des couches ſécondaires, eſt une pierre blanchâtre, compoſée d'un melange de quarts, de ſpath calcaire & de paillettes de hornblende noir. Elle fait feu au briquet & effervefcence avec les acides. Quelques éceuils détachés ſur la côte, à l'embouchure de la petite rivière de Lambat, & une partie de la groſſe montagne Ayou-dagh qui s'avance dans la mer entre Lambat & Yourzoûf, conſiſtent de cette roche, qui ſe trouve ici dans le rang des couches ſécondaires.

La *roche trapézoïde* poreuſe qui eſt diviſée en fragments angulaires de differcnte forme & groſſeur, forme une groſſe

groſſe montagne, qui porte le nom de *Koſtéel*, entre Alouſchta & Lambat; montagne dont une partie à été précipitée, parceque le ſoutien que les couches argilleuſes molles du voiſinage lui prétoient, eſt venû à manquer. Cette roche reſſemble à celle dont on trouve une montagne aux environs de Verho-Ouralskoy, dont les petits fragments détachés reſſemblent à des biſcuits de ſoldats, d'ou la montagne à pris le nom de *Soukharnaya Ghora* (montagne aux biſcuits): ſeulement les fragments de la roche taurique ſont plus inégaux & ſouvent beaucoup plus grands. C'eſt une pierre très-dure à caſſer, d'un gris blanchâtre, extérieurement comme cariée ſur les ſurfaces des fragments, mais d'un grain ſerré ſur la caſſure, laquelle eſt ſemée de particules reſſemblantes au Hornblende. Cette roche, auſſi bien que la précedente, méritent d'étre analyſées chymiquement.

Le *baſalte en couche*, parſemé de ſchoerl, ſe trouve en très-peu d'endroits, comme à Balaklâve, entre Foros & Mouhalatka, près de Kikenéis & à Yourzouf. Ses couches ont exactement la poſition des autres roches ſécondaires qui compoſent les montagnes de la Tauride & ſont analogues à ce que les mineurs de Saxe appellent *Wakke*.

La *ſerpentine* enfin ſe trouve ſeulement dans un ſeul endroit de la Tauride, la vallée romaneſque d'Aloûpka. Les ruines giganteſques d'une immenſe roche renverſée, qui rempliſſent cette belle vallée, entre leſquelles s'élancent les lauriers qui ſont un de ſes plus beaux ornements, ſont toutes de cette roche verdâtre, tachetée, qui prend un très-beau poli. On y voit auſſi, parmis les maſſes immenſes, entaſſées ſans ordre, des fragments de roche de pluſieures toiſes, compoſées de petits feuillets criſtalliſés ſans ordre, dont la ſubſtance ſemble moitié ſerpentine, moitié calcaire. Il eſt probable que le rocher, donc les blocs immanſes ſont entaſſés ſans ordre au fond de cette vallée, s'élevoit jadis entre deux couches de la roche calcaire, dont les fragments bordent les deux lizières de ce tas de ruines, & entre deux maſſifs du ſchiſte argilleux. Les ſources nombreuſes & abondantes qui ſe déchargent dans cette vallée, en entrainant les ſupports de glaiſe, ont miné & renverſé ce rocher enorme, qui eſt le ſeul de cette nature de roche dans toute la Tauride.

Mais dans cette même Tauride il n'exiſte aucune trace de granite veritable, ni de feldſpath, ou de gneiſſ, de ſchiſte micacé & corné, qui ſont les véritables matrices des métaux précieux. Pas même parmis les fragments roulés de la côte, ou les pierres de transport contenues dans les brêches ou poudingues: où pourtant le quarts eſt aſſez abondant & où toutes les autres pierres, qui compoſent les montagnes de la Tauride, ſont faciles à diſtinguer.

En géneral les roches dures de la chaîne taurique: la roche calcaire, les brêches ſolides, le grais, le trap, forment les hautes montagnes; le trap & la roche calcaire, celles qui ſont arrondies & en gros maſſifs; les brêches & les grais en couches ſe préſentent ſous la forme de longues crètes, heriſſées de rochers. Les vallons & les ravins ſont toujours creuſés dans les bandes de ſchiſte argilleux que les eaux peuvent entamer, ou dans les brêches friables & deſtructibles. Dans aucune de ces roches qui ſe ſuccèdent & ſe rélèvent alternativement, excepté la roche calcaire & le grais

grais ſchiſteux, je n'ai pû trouver la moindre trace de pétrification; & dans celles-là elles ſont peu fréquentes, extrèmement éparſes & oblitterées: ce qui indique une haute antiquité & de grandes viciſſitudes que ces couches ont dû ſubire. Je n'ai auſſi trouvé aucune trace de filons métalliques & même aucun veſtige de métalléité, excepté les mines de fer ſusmentionnées & quelques pyrites cryſtalliſés. Les filons & veines de ſpath calcaire ſolide ou cryſtalliſé, dans la roche calcaire, & de quarts cryſtalliſé dans le grais, ſont abſolument privées de principes métalliques & ſans continuité. La teinte de manganêſe eſt très-peu prononcée dans quelques couches de ſchiſte argilleux, & la calamine ne ſe montre nulle part, non plus que les autres demi-métaux. Cependant la nature de cette chaine reſſemble infiniment aux montagnes du Palatinat, de l'Iſtrie & de Bohême, qui contiennent des mines de mercure, dont aucune trace ne s'eſt jusqu'ici manifeſtée en Tauride. Nulle part auſſi je n'ai trouvé le moindre indice de charbons foſſils à la ſurface, quoique les ſources de pétrole, fort communes ſur la presquiſle de Kertch, indiquent quelque couche bitumineuſe profonde, peut-être incendiée.

Les ruines de montagnes, telles qu'on en voit dans la vallée d'Aloupka, ſe trouvent encore à pluſieurs autres endroits, ou les ſources ont creuſé des précipices dans les bandes ſchiſteuſes, ou miné le pied de rochers eſcarpés. Les plus rémarquables ſont à Témirdji, à la montagne de Koſtéel & aux environs de Nikita-boûroûn. En d'autres endroits des rochers immenſes, encore ſur pied, ménacent ruine. On voit, par exemple, entre Liména & Siméus, près de la mer, & au paſſage de Topék-boghaſſi, ſur le haut des mon-

 tag-

tagnes entre Liména & Aloupka, des rochers ſi obliquement ſuspendus & avancés ſur leur baſes, que leur aſpect fait frémir le paſſant & qu'à chaque pluye il s'en détache des quartiers & des pans de roche entiers.

C'eſt de même par le creuſement que les ſources & même les flòts de la mer opérent dans les bandes ſchiſteuſes, qu'il arrive au pied de l'eſcarpement des montagnes maritimes & ſur les bords de la mer même, des affaiſſements de terreins conſiderables, dans pluſieurs endroits, ſurtout entre Mouhalatka & Koûtchoûk-koy. On en eut un exemple tout récent, depuis la conquête de la Tauride, à ce village de Koûtſchoûk-koy même, où une grande étendue du vallon, qu'une eau courante avoit miné, eſt venue à gliſſer en s'avançant dans la mer, avec les jardins & maiſons établies ſur ce terrein. On y voit encore maintenant les deux bords élevés, desquels ce terrein, en s'affaiſſant, s'eſt detaché & les décombres des couches de pierre calcaire qui furent entrainées dans la ruine des couches meubles. Cette cataſtrophe (qui arriva le 10 Février 1786. dans un temps où l'on reſſentit des tremblemens de terre dans pluſieurs parties de l'Europe, ſurtout en Hongrie) fut accompagnée d'un évenement ſemblable vers l'autre extremité de la chaine montagneuſe de la Tauride, entre Koûroû-Ozén & Alouſchta, où même aujourd'hui les hauteurs le long de la côte ſont encore fort mal-raſſiſes & pleine de crévaſſes dangereuſes que les chevaux des voyageurs ne franchiſſent qu'avec une eſpéce de frayeur.

C'eſt au reſte ces montagnes du prémier ordre qui produiſent les principales ſources des rivières de la Tauri-

de

de & les couches inclinées, furtout du fchifte argilleux, font les conducteurs de ces fources, dont les plus confiderables fuivent la pente génerale de ces couches vers le Nord & produifent les plus longues rivières de la Tauride, l'Oûfén, le Belbek, le Katcha, l'Almâ, le Salghir, les Karaffous & l'Indal; au lieu que les fources qui ruiffellent de l'efcarpement maritime, n'ont pas affez de longueur pour fe réunir en rivière, à l'exception du feul torrent de Yalta, mais coulent toutes directement à la mer.

Sécond ordre des montagnes de la Tauride.

Les montagnes calcaires plus modernes, à couches presque partout horizontales ou très-peu inclinées, que je comprend fous le fecond ordre des montagnes de la Tauride & qui récouvrent diftinctement le pied, abaiffé vers le nord, des montagnes du prémier ordre, commencent à l'extremité de la Cherfonêfe héracléotique, qu'ils occupent toute entière & bordent la chaine du prémier ordre, du côté du Nord, presqu'en fegment de cercle jusqu'à Théodofie. Leur lizière commence exactement au Monaftère de St. George, paffe le torrent Bïyoûk-Ouzén près d'Inkerman, fuit delà à peu près le cours du petit torrent d'Ay-thodor jusqu'au village de Schulu, eft marquée alors par une large vallée qui continue, toujours entre la bande calcaire moderne & les montagnes plus anciennes, en tirant au Nord-Eft, vers Albât où cette ligne de démarcation entre les deux ordres de montagnes paffe le Belbek. Elle croife enfuite fur les petits torrents qui s'uniffent pour former le Katcha, paffe fur les fources du Bodryk, & fur l'Alma même, atteint le Salghir à quelque diftance au deffous de fa fource rémarquable, traverfe alors le Tounàs, qui aide à former le Karasraſſoû, au deſſous de Yéniſalà; tourne inſenſiblement, en ſegment de cercle, d'abord à l'Eſt, puis vers l'Eſt-Sud-Eſt, entre la vieille Crimée ou le Cimmérium des anciens & Elboûsloû, & ſe dirige enfin vers la vallée qui eſt à l'Eſt de la haute montagne de Karadagh & la ſépare des montagnes baſſes ſituées derrière Théodoſie, ou elles ſe perdent en coteaux & en plaine.

Cette bande calcaire forme ſes plus hauts éſcarpements là où elle avoiſine les montagnes du prémier ordre, & toujours du coté qui les régarde, au lieu que presque toutes ſes montagnes s'applaniſſent inſenſiblement vers le Nord-oûeſt ou le Nord. Elle répreſente ordinairement des montagnes allongées en dos d'âne, eſcarpées d'un côté qui eſt comme coupé en ſcie; & la longueur de ces montagnes répond toujours, avec peu de déviation, à la direction principale de l'oueſt à l'eſt qui eſt auſſi celle des montagnes longues du prémier ordre & de la poſition de leurs couches. Les plus fortes élévations de la bande calcaire ou du ſecond ordre de montagnes ſe trouve des deux cotés du Belbek, entre cette rivière & le Katſcha d'un coté & le Bïyouk-Ouzén de l'autre, puis entre les deux Karaſſoùs & auprès de la vieille Crimée, ou ſe préſente la grande montagne Aghermyſch appartenante à cette bande. Sur la Cherſonêſe elle s'applanit inſenſiblement vers le niveau de la mer, qu'elle cotoye cependant avec un eſcarpement à pic aſſez élevé. Vers la plaine au Nord de Symphéropol & de Théodoſie, ainſi que ſur toute la presqu'iſle de Kèrtch, les couches calcaires, dévenues parfaitement horizontales, courent ſous terre à peu d'élévation au deſſus du niveau de la mer.

Cet

Cet ordre de montagnes confifte d'une pierre calcaire molle, marneufe ou cretacée, furtout dans les plus fortes élévations, où elle eft fouvent en maffe ou en couches très-épaiffes. Les baffes couches font toutes paitries de fragmens de coquilles froiffées & de menus grains, qui font de très-petits limaçons incruftés en guife d'oolithes, que l'on voit former des groffes couches presque fans autre melange. Dans les hautes montagnes de marne & de craye, furtout aux environs du Salghir & des Karaffous, les pétrifications font plus clairfemées, mais elles font des plus rares & des mieux confervées. Cette pétrification furtout qu'on nomme la pierre lenticulaire, dont on ne connoit pas encore l'original récent, s'y trouve dans la plus grande abondance & de la plus grande perfection, de toute grandeur & de toutes les varietés, rempliffant fouvent des couches continues, au milieu de la marne crayeufe dépourvue d'autres pétrifications. Les oftracites font plus rares, mais d'une groffeur & d'un poid énorme, & de differentes efpéces. L'huitre diluvienne péfante, une efpèce d'huitre de la longueur de la main, une autre huitre large, plate fur un côté, liffe & ailée, l'huitre en crête de coq, & la gryphite, font les plus rémarquables d'entre ces pétrifications. On y trouve encore plus rarement des petites bélemnites & des buccins ou limaçons de mer moulés. Toutes ces coquilles, entièrement pétrifiées, indiquent une haute antiquité & aucune d'elle ne fe trouve maintenant dans les mers voifines. Mais l'on rencontre fouvent, dans la même couche qui les contient, des petites coquilles de St. Jaques & des Pètoncles à peine calcinés, communs fur la côte.

À travers cet ordre de montagnes les rivières de la Tauride prennent leur cours. Ces montagnes présentent les paysages les plus variés & les plus romanesques, mais peu de bois & de verdure, laquelle s'y dessèche dans les grandes chaleurs de l'été. Nombre de plantes curieuses & rares y trouvent leur sol natal sur les pentes pelées marneuses. Les vallons & plaines, situées entre ces montagnes, sont au contraire un sol naturellement amandé par la marne calcaire qui s'y mêle, & très-fécond en bled dans les années moins seches. Les arbres fruitiers de toute espèce & la vigne, y réussissent très-bien, mais les légumes, qui n'y viennent qu'à la faveur des arrosements fréquents, sont d'une qualité très-médiocre. Les carottes & les bêtes-raves y perdent la couleur & le gout, & blanchissent parfaitement après quelques générations. Le sol, ordinairement peu profond, est partout calcaire & ne héberge ni les sousliks, ni d'autres petits animaux nuisibles à l'agriculture, qui ne se multiplient que dans la plaine. On voit souvent dans les endroits couverts de taillis (car les gros arbres ne viennent que le long des rivières), une couche de terreau, d'un demipied tout au plus, audessus de la marne pure. Dans d'autres endroits un limon jaunâtre récouvre cette marne à une épaisseur considerable & comme par tas. Sur le chemin d'Akmetchêt à Baktschisaray on voit un monticule coupé à pic par le petit torrent Bodryk, lequel consiste presqu' entièrement de marne calcaire, à la sommité près qui est un tas de limon, lequel ne s'est point répandû sur les flancs de ce monticule.

Les couches calcaires du sécond ordre des montagnes, enfin dévenues horizontales, continuent à peu de profondeur sous le sol des plaines de la Tauride bien audelà de de la moitié, & s'étendent de même fur toute la presqu'ifle de Kertfch, ce qui contribue beaucoup à la fertilité de ces plaines. Il femble que ces couches fervent de conducteurs à l'humidité des montagnes & rafraichiffent le fol qui les récouvre, de forte que l'herbe y croit plus abondante & fe conferve mieux dans les plus grandes chaleurs & même dans les années de fechereffe.

Couches de depots modernes.

Entre Kôz & Soudàgh, près de Parthenit, & au Promontoire d'Iphigénie j'ai rémarqué des couches compofées de gros gravier lié par un ciment calcaire, quelquefois melées de coquillages peu calcinés, entiers ou froiffés, & ayant toute l'apparence d'un dépôt de la mer trés-rècent. Ces couches horizontales pofent immédiatement fur la tranche des couches obliques du prémier ordre de montagues. Elles ont peu d'élévation au deffus du niveau de la mer préfente, qu'elles furpaffent rarement de plus d'une toife & demi. Leur groffeur eft inégale, & fouvent l'on voit que les flots les ont dépofé fur un fond cannelé par des petits ravins, dont la couche inferieure conferve la trace & dans lesquels le depôt fuperieur eft venû fe mouler. Les coquilles, melées dans ces couches, font les mêmes efpèces qui fe trouvent aujourd'huy dans la mer noire, & tout indique que ces couches font d'une formation très-moderne. En comparant leur élévation au deffus de la mer, avec les traces qu'on trouve fur les bords de la mer d'Azov, de l'ancien niveau de cette mer, il paroit probable qu'elles furent formées avant que la mer noire s'eut frayé le paffage de la Propontide pour fon écoulement & qu'elle s'eft mife au niveau de la méditerranée. Il eft probable, qu'en bien d'autres pays on trouveroit de femblables couches de dépots nouveaux, fi on avoit partout, comme ici, le moyen de déterminer leur age par les circonftances. Auffi je ne doute pas qu'il n'y ait de ces couches fur plufieurs autres points de la côte de la Tauride que je n'ai point examinés.

Lacs falés de la Tauride.

La plaine de la Tauride montre en beaucoup d'endroits, furtout vers les bords de la mer & du Sivafch, ainfi que vers Pérécop, un terrain faumâtre, qui femble dériver de ce que la mer récouvroit anciennement une grande partie de cette plaine, comme auffi du défert entre le Dnepr & le Berda. Si la falinité de ces plaines eft moins générale, que celle des plaines cafpiennes, c'eft que la pente du terrein des prémières qui panche partout vers la mer, à contribué à le déffaler, dans le laps du temps, par les eaux de pluye & la fonte des neiges.

Probablement la même élévation anterieure du niveau de la mer, à donné origine aux nombreux *lacs falés* fitués fur la côte, dans toute la circonférence du pays plat de la Tauride. Ces lacs étoient évidament des anfes de la mer, à l'entrée desquelles le roulement des vagues avoit jadis formé des barres, en y amoncelant le fable & le limon du fond de la mer. Lorsque le niveau de cette mer eft venû à baiffer par l'écoulement des eaux à l'ouverture de la Propontide, ces barres refterent à fec & les baffins des anfes, maintenant féparés de la mer, perdent affez d'eau, par l'évaporation, pour cryftallifer le fel de la maffe d'eau marine qui eft reftée renfermée dans leurs concavités larges & peu profondes. Tous les ifthmes qui féparent ces lacs de la mer,

mer, ſont ſabloneux, étroits & ſi bas, que dans certains endroits, par un gros temps qui bat la côte, la mer les inonde quelquefois. Je ne veus pourtant pas ſoutenir qu'aucun de ces lacs n'aye auſſi quelque ſource ſalée qui le nourriſſe; mais je crois pouvoir aſſurer que la plûpart n'en ont pas & doivent leur ſalure uniquement à la maſſe d'eau marine qui leur eſt reſtée. Et ſi la diminution de la quantité de leur ſel n'eſt pas encore bien évidente, c'eſt que les lacs dont on tire le plus de ſel, ſont d'une circonférence trop grande, pour que la quantité otée puiſſe ſitôt dévenir ſenſible ſur le total du contenû. Le temps apprendra ſi cette diminution ne ſe fera pas enfin ſentir.

Le *Sivaſch* ſemble avoir eu une origine toute ſemblable. Les vents d'eſt & de nord-eſt ſont extremement violents ſur la mer d'Azov & pouſſent les vagues & le ſable qu'elles entrainent, vers la côte orientale de la Tauride. Lorsque la mer étoit encore plus élevée, ces vents ont du former une longue barre à quelque diſtance de la côte & parallèle à cette côte, par la réflexion des vagues; cette barre, maintenant miſe à ſec, eſt la langue de terre d'Arabat (Arabatskaya Strelka) dont la forme même, ſa côte très-unie & ſableuſe du coté de l'orient, & ſon élévation uniforme & peu conſiderable, indiquent l'origine. — Le Sivaſch ſeroit ſurement devenû un grand lac ſalé, s'il n'avoit pas conſervé, par le détroit de Tonkoy, une communication directe avec la mer d'Azov, qui ne lui donne pourtant pas aſſez de circulation pour préſerver ſes eaux de la pourriture, laquelle ſe fait ſentir au loin pendant l'été & l'automne.

Les Lacs ſalés les plus rémarquables de la Tauride ſont:

1. Aux environs de Pérécop: le vieu lac (*Staroë Ofero*) de 15 verftes de circonférence, & qui fourni le meilleur fel & la plus grande quantité de ce qui en eft porté dans l'interieur de l'Empire; le lac rouge (*Krasnoë Ofero*) de 24 verftes; le lac rond ou *Adamàn*, d'environ fix verftès; le lac *Kiyat* ou *Tarkhan* de 20 verftes, & *Kerlèoût* de deux verftes de tour; tous les cinq à peu de verftes de diftance les uns des autres & formant, avec quelques autres lacs, qui ne dépofent point de fel, une chaine entre les deux mers, pas loin de l'ifthme de Pérécop.

2. La Lac de *Yénitsghé* ou Tonkoë, fur l'extrémité de la langue de terre d'Arabàt, de 13 verftes de cinconférence & très-riche en fel.

3. Dans le Diftrict de Keuzlévé ou d'Eupatorie les fept Lacs *Saak*, *Konrat*, *Adji-bafchi*, *Saltan-Ali*, *Kenegfér*, *Terekly-âs*, & *Kerleôut*, dont le prémier furtout, qui à quinze verftes de tour, fourni tout le fel pour l'exportation du port d'Eupatorie.

4. Dans le cercle de Théodofie: le lac *Kotafch*, de 23 verftes de tour, celui de *Scheik-Ali*, qui eft d'une verfte feulement, & celui de *Koïti*.

5. Dans les environs de Kertfch: les trois lacs *Mif-fir*, *Itar-Altfchik* & *Oûzoûn*.

Il y a en outre quelques lacs falés dans le défert des Nogais vers Pétrofskoy, quelques autres dans le voifi-

nage

nage de Kilburn, & un ſur l'Isle de Taman, qui ſemblent avoir éu la même origine que ceux de la Tauride.

Sur les éruptions vaſeuſes de la presqu'isle de Kertſch & l'Isle de Tamàn.

Le phénomêne qui arriva au mois de Février de cette année (1794.) ſur l'Isle de Tamàn, & qui à fait du bruit dans le public, mérite bien qu'on en parle avec quelque détail. Si je ne ſuis pas en état d'en développer, jusqu'à l'évidence, les cauſes naturelles, trés-abſtruſes ſans doute, je crois du moins pouvoir en donner une idée vraye & claire.

Toute l'Isle de Tamàn eſt un pays plat, qui n'a que quelques coteaux & collines peu élevées au deſſus du niveau de la mer, & qui reſſemble parfaitement au terrein de la presqu'isle de Kertſch. On n'y voit, à la ſurface, que des couches de limon mêlé de ſable, des lits de marne, & de coquilles marines, paitries dans une mine de fer limoneuſe, quelquefois cryſtalliſées dans leur creux de ſélenites rouges. Par cette déſcription du pays & de ſes couches l'on peut déja conclurre, qu'il ne peut y exiſter un vray foyer de volcan. Auſſi le phénomêne qu'on avoit d'abord pris pour un volcan, eſt d'une nature tout à fait differente & plus rare ſur nôtre globe, que ne le ſont les volcans. La presqu'isle de Kertſch & l'Isle de Taman avoient dépuis longtemps, en pluſieurs endroits, des ſources abondantes de pétrôle, & des gouffres ou ſiphons plus ou moins conſidèrables qui régorgent d'un limon ſalé & mélé de beaucoup de gaz élaſtique. De ces gouffres (Пучины) qui

qui ſe ſont ouverts tant ſur la plaine, que ſur le haut des collines, j'ai trouvé trois ſur la presqu'isle de Kertſch, & ſur l'Isle de Taman il en exiſte en ſept ou huit endroits, tant petits que grands, quelques uns presque bouchés ou totalement deſſechés, d'autres en pleine action & ſurtout un ſur la colline la plus voiſine de la nouvelle fortereſſe projettée de Taman, du diamêtre de pluſieures toiſes, qui bouillonne continuellement, à cauſe de l'abondance du gâz qui ſe développe au milieu de la vaſe liquide laquelle déborde & s'écoule lentement. Outre ce gouffre qui eſt ſur une pente de cette colline du coté du Temroukskoy limàn, le haut de la même colline montre trois mornes conſiderables qui ſont évidamment formés par la vaſe vomie de trois pareils gouffres jadis ouverts. Deux de ces mornes ont à leur pied des petits lacs demicirculaires d'une eau ſalée & qui ſent le pétrôle. Or, des perſonnes, établies à Yénikoul dépuis 25 à 20 ans, ſe rappellent une exploſion arrivée ſur cette colline, accompagnée de feu & des mêmes phénomênes qu'on à rémarqué à l'éruption arrivée au mois de Février 1794. ſur la partie de l'Isle de Tamàn qui touche à la Sévernaya koſſa (pointe du Nord) & au golfe de Tamàn, & ſelon la tradition des Tatares tous les gouffres ou ſources de vaſe exiſtans ſur la presqu'isle de Kertſch & l'Isle de Tamàn, ſe ſont annoncé, à leur commencement, par un éclat de feu & de fumée & une exploſion plus ou moins forte.

Quand on s'approche avec ces connoiſſances préalables du prétendu Volcan, on n'a pas de peine à démêler au prémier coup d'oeuil, que c'eſt un nouveau gouffre vaſeu qui s'eſt ouvert par une exploſion des gaz ſouterreins,

ſur

ſur le ſommet d'une colline douce qui ſubſiſtoit déja à cet endroit; mais c'eſt la plus grande & la plus abondante éruption de ce genre qui ſoit arrivée dans ces cantons. — L'endroit, où le nouveau gouffre s'eſt ouvert, étoit un petit creux ſur le haut de la colline, où les eaux de neige & de pluye ſe conſervoient ordinairement longtemps, & qui ſemble avoir été la trace d'une très-ancienne éruption de ce genre arrivée au même endroit, laquelle avoit déjà récouverte la ſurface de la colline, d'un limon mélé de fragments de pierres marneuſes, dont la nature ſe trouve trés alterée par la végétation & l'influence de l'atmoſphêre. L'exploſion s'eſt faite à cet endroit avec un fracas ſemblable à celui du tonnerre & avec l'apparition d'une gerbe de feu qui n'a duré qu'environ l'eſpace de trente minutes, accompagnée d'une fumée épaiſſe. Cette fumé & l'ébullition plus forte, qui lancoit une partie de la vaſe au loin, a durée jusqu'au lendemain, après quoi la vaſe liquide a continué à déborder lentement & a formé ſix coulées, lesquelles, du faite de la colline, ſe ſont répandues irregulièrement vers la plaine. La maſſe de vaſe qui forme ces coulées, épaiſſes de trois jusqu'à cinq archines, peut être évaluée à plus de cent mille toiſes cubes. Au mois de Juillet toutes ces coulées étoient deſſechées à la ſurface, extrèmement raboteuſes & fendillées comme un terrein argilleux; le gouffre qui eſt au centre de ces coulées, ſe trouvoit bouché par la vaſe pareillement deſſechée, de façon à pouvoir paſſer deſſus ſans risque. Mais le bouillonnement affreux qu'on entendoit encore diſtinctement dans l'interieur de la montagne, prouvoit aſſez que ſes entrailles n'étoient pas encore auſſi tranquilles que ſon exterieur. La vaſe que le gouffre à répandû eſt, ainſi que celle de presque tous les gouffres femblables, une argille peu confiftente, d'une cendré bleuâtre, toute homogêne, melée de points ou atomes de mica brillants. Les fragments de fchifte marneux, calcaire & fableux, qui y font melés en petite proportion, femblent être arrachés des couches fuperpofées au foyer d'où l'explofion eft partie, & les criftaux & lames brillantes de pyrites qu'on trouve fur ces pierres, prouvent que la chaleur de ce foyer n'étoit pas affez forte pour affecter les couches qui contenoient ces pyrites. Auffi la vafe n'eft-elle fortie que tiède de ce gouffre & la gerbe de feu probablement n'a été produite que par l'air phlogiftiqué, le quel probablement fut caufe de l'explofion.

Tout indique que le foyer de l'action étoit au desfous du niveau de la mer. Ce n'eft dont que par des conjectures qu'on peut raifonner de fa nature & des caufes du phénomêne arrivé. D'entre ces conjectures voici ce que l'on pourroit avancer de plus probable. — L'abondance des fources de pétrôle, fur toute l'isle de Tamàn & la presqu'isle de Kertfch, rend plus que vraifemblable qu'une couche de charbons de terre très-profonde brûle depuis bien de fiècles fous ces terres, & caufe peut-être cette efpéce de vapeur dont l'isle de Tamàn, par un temps calme, eft presque toujours couverte. Lorsque la mer trouve quelqu'ouverture pour faire irruption dans les cavités incendiées de ces couches, il eft naturel à penfer que l'expanfion, operée par l'eau réduite en état de vapeur, & le développement de differens gaz, doit forcer & fracaffer les couches fuperieures & chercher des iffues pour fe faire jour. Cette iffue une fois trouvée & ouverte, l'expanfion des gâz élaftiques melés à la vafe (qui pourroit n'être que le mélange

lange des cendres du charbon ou d'un fchifte bitumineux, melées à l'eau de mer) en la bourfouflant, doit faire régorger cette vafe par cette iffue, & les couches fracaffées; en s'affaiffant fur la maffe liquide, en augmenteront encore l'effufion par le gouffre ouvert, jusqu'à ce que tout foit révenû à l'équilibre.

Les champs de Granite de la Plaine des Nogais.

Les plaines habitées par les Tatares nogais ayant autrefois appartenû à la Crimée & fe trouvant encore actuellement jointes au Gouvernement de la Tauride : il ne fera pas hors de nôtre plan de donner une idée concife de leur conftitution naturelle, d'autant plus, qu'elle eft en rélation avec la mineralogie de la Tauride, & qu'on y trouve à nud, & presqu'en plaine parfaite, la roche primitive granitique, qui manque aux montagnes élevées de la Tauride.

Des couches calcaires horizontales, remplies de coquilles broyées, continuent presque fans interruption, depuis le pied des promontoires du Caucafe, par toute la plaine qui environne la mer d'Azov, jusqu'au Don. Entrecoupées par le cours de cette rivière, elles récommencent dans les hauteurs qui cotoyent la branche occidentale de ce fleuve, furnommée Akfay, & regnent fur la côte feptentrionale de la Palus Méotide, formant tantôt des coteaux, tantôt s'abaiffant en plaine. Ce n'eft qu'à la petite rivière Berda, qui coupe ce pays, en prenant, fon cours droit à la mer, que ces couches calcaires dont on voit de toutes femblables dans la plaine de la Tauride, difparoiffent.

— À leur place ſuccède immédiatement la *roche granitique*, avec des modifications & des circonſtances ſingulières, très-intereſſantes pour la Phyſique de la terre & qui méritent d'être detaillées ici autant que le plan & l'étendue de ce Mémoire le permettent.

Le champ de granite qui forme la rive occidentale de la petite riviére Berda, étant un peu plus élevé que la plaine à l'orient de cette rivière, où finiſſent les couches calcaires, ſemble avoir contrainte cette rivière au cours qu'elle tient & en eſt comme bordé. Le *Granite* qui ſe préſente à découvert le long du Berda, ainſi que ſur les autres petites rivières qui, entre-elle & les Moloſchnyé-vody, ont leur cours à la mer, n'eſt pas un granite en maſſe ou en maſſifs uniformes, ſtratifiés en gros lits presque horizontaux, comme on en voit dans les montagnes élevées; ſes *couches* ſont précipitées à un angle de 45 degrés ou plus approchant de la perpendiculaire, vers le Sudeſt; ſouvent ondoyées, quelquefois briſées & derangées par des fentes ou des plans perpendiculaires d'une matière étrangère, & en quelques endroits viſiblement fracaſſées, comme par un affaiſſement. Elles ſont alternativement de granitelle, d'un granite feuilleté ou comme ſchiſteux, & de Gneiſs ou ſchiſte micacé, toutes évidement contemporaines. Les couches du granite ſolide ſont de differente èpaiſſeur: dans une étendue de 25 à trente toiſes on paſſe ſouvent ſur la tranche de ſept à huit couches granitiques de couleur, de grain & de mélange tout à fait differents, entremelées quelquefois de pluſieures couches de ſchiſte micacé.

Les

Les *Granites* ſolides paroiſſent quelquefois comme ſtriés dans le ſens des couches, par l'arrangement de leurs parties integrantes, ſurtout du mica, & ſouvent ondoyés comme un bois veiné. Aſſez ſouvent ce n'eſt qu'un *Granite ſimple*, compoſé de quarts & de feldſpath rouge ou gris; plus ſouvent le mica entre pour completter le melange. Le *Granitelle* contient quelquefois du mica étoilé. Le *Granite feuilleté* conſiſte des veritables ingredients du granite, ſouvent ſi peu cimentés, pour ceder aux efforts de la main; mais il eſt cependant poſé entre les couches de granite veritable, & par conſequent point de ſeconde formation. Le *Gneiſs* enfin, dont la poſition entre les Granites prouve auſſi ſont antiquité, a quelquefois pour ingrédient un talc argentin; l'on en a auſſi trouvé melé de ſchoerl & de grênats en manière de *Mourkſtein*.

La plaine que ce plateau de granite forme, depuis le Berda jusqu'à la petite rivière Karsſak, eſt presque partout unie, & n'a d'élevation, au deſſus des petites rivières peu rapides qui le parcourent, que ſept à 8 toiſes: élevation que les couches calcaires, à l'eſt du Berda, égalent en bien des endroits. Cette plaine, pour la plûpart révêtue de gazon & de terreau, montre en bien des endroits la roche toute nue, & tous les lits de rivières ſont coupées dans le granite, ſans aucune apparence de couches plus modernes. En peu d'endroits la roche s'éleve en mornes ou en coteaux peu élevés, & la plus conſiderable de ces élevations eſt celle, que les Nogais appellent *Karſſak*, peu éloignée de la petite rivière de ce nom, & formée par un puiſſant noyau allongé ou filon de quarts, qui paroit métallique.

 Ce

Ce plateau granitique, ſi ſingulièrement conſtitué, s'étend, en rémontant vers le Nord, jusqu'aux cataractes du Dnêpr, mais disparoit, ainſi que toute autre couche pierreuſe, dans tout le voiſinage de la mer, depuis Moloſchnyé-vody jusqu'au Bough, où des couches calcaires s'ingèrent de nouveau; au lieu qu'au deſſus de l'Inghoûlets, jusque vers Elizabeth, le granite regne & forme, avec celui des cataractes & du Berda, une élevation en ſegment de cercle.

Une telle ſituation de la roche primitive en plaine, ſans aucun récouvrement de couches ſécondaires ou tertiaires, qui n'en occupent que la circonference, ſurtout du coté du Nord; jointe à l'inclinaiſon précipitée des couches granitoïdes vers la mer & les plaines baſſes de Perècop, jusqu'ou les couches calcaires de la Tauride penchent de même; enfin les briſements que ces couches graniteuſes ſemblent avoir ſouffertes: pourront faire penſer avec beaucoup de vraiſemblance, qu'un maſſif de montagnes primitives, jadis conſidérablement élevé au Nord de la mer noire, dans des temps bien anterieurs à l'hiſtoire eſt venu à s'affaiſſer dans un des abymes formés primordialement à l'interieur de nôtre globe, & s'eſt abaiſſé en plateau peu élevé. D'aprés cette idée, les alpes de la Tauride ne feroient qu'un reſte des couches tertiaires aſſiſes jadis ſur ce noyau elevé de granite, & la plaine au nord de Pérecop auroit été formée par les atterriſſements du Dnêpr, qui continuent encore à augmenter.

Toute hazardée que paroit cette hypothèſe, elle pourra peut-être gagner en vraiſemblance, par un examen géologique plus attentif des provinces voiſines de la mer noire,

noire, ainſi que du Caucaſe d'un côté, & des montagnes de la Bulgarie & de l'Anatolie de l'autre: dont l'interruption, par une mer profonde & renfermée de toute part, ne ſemble pas être dans l'orde naturel & primitif des choſes.

Botanique & èconomie de la Tauride.

Le terrein de la Tauride doit être diviſé, pour la botanique & pour l'économie, 1°. en plaine; 2°. pays calcaire; & 3°. pays de montagnes: lesquels different par une infinité de points, tant pour les productions végétales que pour d'autres propriétés. Dans le pays de montagne on doit encore diſtinguer la montagne & ſa pente ſeptentrionale, des vallées du midi de la côte maritime, qui ont deux climats tout à fait oppoſés.

La *plaine* qui eſt parfaite, s'étend dépuis Pérécop jusque vers Simphéropol, ou elle s'éléve inſenſiblement, ſur toute la largeur entre le Sivaſch & le Tarkhanskoy-koût, qui eſt l'angle occidental formé par la presqu'isle. Elle s'étend auſſi, avec quelques ondulations, dépuis Arabât & Théodoſie, ſur toute la presqu'isle de Kertſch. Cette plaine eſt en partie limoneuſe, ſouvent couverte de terreau, quelquefois ſabloneuſe. Sa partie maritime, ſurtout le Tarkhanskoy-koût & le voiſinage de lacs ſalés, eſt plus aride & pelée, à cauſe de la ſalure de ſon terrein. À l'exception de ces landes ſaumâtres, toute la plaine eſt aſſez bien couverte d'herbe & de paturage, ſurtout la partie ſous la quelle s'étendent les couches calcaires & avec elles l'humidité de la partie montagneuſe. La Bothanique de toute cette plaine n'a presque rien d'extraordinaire qui la diſtingue

gue de plaines du Dnêpr, elle eſt presque auſſi uniforme & ſimple que celle des bonnes plaines entre le Volga & le Don & n'a que quelques Centaurées qui la diſtinguent & dont l'une eſt la nourriture principale des brebis. La terre, au reſte, eſt en grande partie labourable & produit, à moins d'une ſechereſſe extraordinaire, d'excellent froment. Les pâturages conviennent ſuperieurement bien aux Dromadaires, aux chevaux & aux bêtes à laines. Mais l'eau eſt aſſez rare dans toute la plaine & les puits qu'on à été obligé de faire, ſont ſouvent très-profonds.

Le *pays calcaire* eſt cette bande de montangnes marneuſes & cretacées du ſecond ordre, dont j'ai fait mention ci-deſſus, qui forment la lizière de la partie montagneuſe. Si cette partie n'étoit pas traverſée par toutes les rivières de la Tauride qui arroſent ſes beaux valons, & ſi ſon terrein n'étoit pas en grande partie en pente vers le Nord, ſon aridité ſeroit extrême. Mais tel qu'elle eſt, avec une couche de terreau ſouvent ſi mince, que la marne blanche ou la pierre calcaire perce au jour, on y voit des champs très-fertiles en blêd, des vallées riantes, remplies de jardin, & aſſez de paturage. Une partie de ce pays, ſurtout le long du Katſcha & du Belbèk, convient très-bien à la vigne & produit un petit vin pétillant & agréable, qui reſſemble ſouvent au vin de champagne & pourroit dévenir excellent par un bon traitement & par l'age. — Le nombre de plantes curieuſes & rares qui viennent dans ce terrein, eſt très-conſiderable & auſſitôt qu'on approche du pais calcaire, on voit changer le département de Flore & paroitre nombre d'eſpéces qu'on chercheroit envain dans toute la vaſte étendue de l'Empire de Ruſſie. —

Diffe-

Differentes cultures utiles peuvent réuſſir dans cette partie de la Tauride. Parmi les plantes teinturières le Fuſtet, la Gaude, la Vouêde, la Garance & le Safran y viennent ſauvages, ainſi qu'un grand nombre de plantes médicinales & odoriférantes, par exemple la Sauge, la Rûe, le Thym, la Péone, le Colchique, la Cigue, la Violette &c. cinq ou ſix eſpéces de lin ſauvage, qu'il conviendroit d'eſſayer oeconomiquement, y ſont naturelles & très-copieuſes. Les plus belles plantes de pâturage & les gramens les plus récommendables pour les prés artificiels y ſont tout auſſi communs. Les bois viennent ſeulement en taillis, n'y ayant pas une aſſez grand épaiſſeur de terreau pour pouvoir pouſſer des racines profondes, excepté dans les vallons & le long des fleuves, où les Peupliers noirs & lombards & les arbres fruitiers ſont d'une belle venue & où il ſe trouve quelquefois de très-gros chênes, parmis lesquels le plus rémarquable, donc le tronc à jusqu'à trente pieds de circonference, ſe trouve près du village de Sourén.

Cans ce pays toutes les ſources & les eaux courantes ſont très-calcaires & dures, mais ſaines, froides & abondantes. Les perſonnes attaquées d'aigreurs trouvent, dans l'uſage de ces eaux, un remêde ſûr & agréable. La manière de batir qu'on y pratique, en maçonnant les pierres marneuſes & calcaires du pays, avec la glaiſe calcaire, peu conſiſtente, qui s'y trouxe parmis les montagnes pierreuſes, quoique facile & bonne contre les chaleurs d'été, n'en rien moins que convenable à la ſanté, parceque cette maçonnerie conſerve longtemps l'humidité & l'imbibe toujours de nouveau. Elle eſt pourtant la plus géneralement réçue en Tauride & encore préferable à celle qu'on adopte dans les plaines dépourvues de pierres, ou des briques de glaiſe non cuite ſont les materiaux.

Dans la bande calcaire les anciens habitans de la Tauride, ou peut être des moines grecs, ont travaillé d s grottes nombreuſes dans la roche molle, partout où des précipices eſcarpés leurs préſentoient des lieux de ſureté, & ces grottes ſont très-ſouvent riches en ſalpêtre de houſſage. On trouve même, dans les petites anſes de la baye de Sévaſtopòl & aux environs d'Inkermàn, des pans enti rs de la roche rongés & degradés par la géneration du nitre, & cette roche pourroit ſervir préferablement pour des ſalpetrières artificielles; comme la plaine en offre au contraire à chaque village, par les anciens tas de cendres que la coutume des Tatares y a prudemment conſervés.

Le *pays de montagne* eſt ſi varié pour l'élévation, l'expoſition, le ſol & les productions, qu'on ne peut pas en donner une idée générale. Les profonds vallons des rivières qui en découlent vers le Nord & les pentes des hautes montagnes qui les environnent, ſont bien garnies de belles forêts de haute futaye, melés de toute ſorte de bois, comme Chêne, Hêtre, Charme, Tilleul, Ormeaux de deux eſpéces, Frêne de deux eſpéces, Sorbier, Cormier, Aubepine de pluſieures eſpéces, Peuplier noir, Tremble, Coudrier, Aubier, Cornoullier, Bois de St. Lucie, Mérifier, Poiriers ſauvages de pluſieures eſpéces, Pruniers & Pommiers ſauvages, &c. Les montagnes les plus rocailleuſes & pélées abondent en Génièvre, dont on trouve deux ſortes, le Genièvre cèdre, qui forme un gros tronc & ſe prête à la taille, comme l'ormeau & le ſaule, & le Genièvre d'Eſpagne

ſpagne à fruit rouge. — Les gradins de l'eſcarpement maritime abondent auſſi en forêts & produiſent ſurtout beaucoup de Pin maritime, qui peut ſervir pour couper des planches & ſurtout pour le goudron.

Les hautes plaines alpines, dépourvues de bois, qui, du haut de l'eſcarpement maritime de la chaine, déſcendent en pente douce vers les vallons du Nord, offrent un excellent pâturage aux troupeaux pendant les chaleurs de l'été, lorsque ſur les plaines baſſes les herbes commencent à ſe deſſecher. Mais les neiges y tiennent jusqu'au mois de May & même, pendant le reſte de l'été, on y trouve des creux abrités par des roches, & des entonnoirs en précipice, creuſés jadis par l'écoulement des eaux, où la neige & la glace ſe conſervent en tout temps. Ces plaines, toujours fraiches, ſeroient auſſi propres à l'éducation des bêtes à laine de bonne raçe, que les montagnes d'Aſturie le ſont à celles d'Eſpagne, & ces troupeaux, qui ont déja naturellement acquiſe une toiſon très fine & longue, s'annobliroient, au delà de toute attente, dans les montagnes de la Tauride, par le mélange de bons béliers du Kerman, de la Calabre ou de l'Eſpagne, & trouveroient leur campement d'hyver dans la partie occidentale de la bande calcaire & ſurtout ſur la Cherſonêſe héracléotique ou l'hyver eſt ordinairement doux & ſans neige.

Enfin les belles vallées démicirculaires & en amphithéatre que l'eſcarpement des hautes montagnes forme le long de la côte méridionale, à commencer par celle de Phóros, jusqu'à celle de Kôz & d'Otoûz, vallées qui jouiſſent du climat de l'Anatolie & de l'Aſie mineure, vallées où l'hyver ſe fait à peine ſentir, où les primevères & les ſafrans printaniers pouſſent en Fevrier & quelquefois au mois de Janvier, où le chêne ſouvent conſerve pendant l'hyver des feuilles vertes: ces vallées ſont pour la Botanique & pour l'oeconomie la partie la plus eſtimable de la Tauride & peut-être de tout l'Empire. Là, le laurier toujours verdoyant comme la gloire de nôtre *Immortelle* SOUVERAINE, l'Olivier ſi heureuſement aſſocié à l'autre, le Figuier, le Micoucoulier, le Grénadier, le Celtis, reſtes peut être de l'ancienne culture grecque; le Frêne mannifère, le Therebentinier, le Soumach, le Baguenaudier, le Ciſte à feuille de ſauge, l'Emerus, & le Fraiſier-arbouzier de l'Aſie mineure, croiſſent partout en plein vent. Le dernier ſurtout occupe les rochers maritimes les plus eſcarpés & fait, pendant la faiſon d'hyver, leur plus bel ornement, par ſon beau feuillage toujours verd & l'écorce rouge de ſes gros troncs. Dans ces vallées le Noyer & tous les arbres fruitiers ſont les plus communs de la forêt, ou plutôt la forêt n'eſt ſouvent qu'un jardin fruitier, abandonné à ſoi même. On y voit les Capriers ſpontanèment diſſemés ſur les bords de la mer. Les Vignes ſauvages & domeſtiques s'élévent à l'envie ſur les plus hauts arbres, rétombent, ſe rélevent encore, & forment, avec la Viorne fleurie, des guirlandes & des berceaux ſans aucun emploi de l'art. La réunion des belles horreurs que préſentent des montagnes élevées jusqu'aux nues & des roches immenſes tombées en ruines, avec les jardins & la verdure la plus riche, les fontaines & caſcades naturelles qui ruiſſellent de tout côté, enfin le voiſinage de la mer qui offre un lointain ſans bornes, rendent ces vallées les plus pittoresques & les plus charmantes que le génie poëtique le plus exalté puiſſe imaginer

ou

ou peindre. La vie ſimple des bons montagnards Tatares, qui habitent ces vallées paradiſiaques, leurs chalêts couverts de terre, à moitié taillés dans le roc ſur la pente des montagnes, & presque cachés dans l'épais feuillage des jardins environnans, les troupeaux de chêvres & de petites brebis répandus ſur le flanc des rochers ſolitaires des environs, & le ſon de la flûte du berger réſonnant entre ces roches, tout retrace ici l'age d'or de la nature, tout fait aimer la vie ſimple, champêtre & ſolitaire, & l'on récommence à cherir le ſéjour des mortels, que les horreurs des guerres, le déteſtable esprit de fourberie commerçante répandû dans les grandes villes, & le luxe, accompagné des vices de la grande ſociété, rendent presqu'inſupportable au ſage récueilli.

Dans ces belles vallées les cultures les plus utiles de l'Europe méridionale & de l'Aſie mineure peuvent être établies pour le bien de la Ruſſie, qui ne poſſède nulle part un clîmat ſi beau. Les fruits les plus parfaits y viendront ſans peine & y exiſtent dejà en partie. On peut y cultiver les Oliviers & les Figuiers de bonnes raçes. Le Séſame, autre plante à l'huile, annuelle, n'y manquera jamais. Les Orangers, les Citronniers & ſurtout le Cedrat plus hardï, y ſupporteront l'hyver avec très-peu d'abris & de ſoin. Les vins y viendront de plus en plus parfaits, ſi l'on fera le choix des ceps avec connaiſſance, ſi on multipliera cette culture dans les differens ſites & ſur differens terreins, dont on réconnoit déjà à préſent l'effet ſur la qualité, & ſi l'on s'appliquera mieux à la confection du moûſt & à la conſervation des vins. Les apothicaires pourront y cultiver un grand nombre d'excellens ſimples & de plan-

 tes

tes teinturières, qu'on tire encore des isle de l'Archipêl, de la Grèce, de l'Asie mineure & de la Perse. Quelques-unes, par exemple la Scammonée, le Thérebentivier, le Frêne qui produit la Manne, le Fustet, le Soumagh, le Tournesol dont on tire la couleur bleue, y sont déjà sauvages. On pourroit y introduire plusieurs bois durs & utils de l'étrangers, surtout des bois colorés, qu'on employe en marquetterie; le Cyprês, le Chêne qui donne la noix de galle & les glands recherchés pour les fabriques de maroquins, le Liège, le Chêne qui produit le Kermes; peut être même la Canne à sucre réussiroit dans quelques vallées.

En géneral la Botanique de la partie montagneuse de la Tauride est si riche & si rémarquable, que le nombre de ses plantes qui ne se trouvent point dans le reste de l'Empire, surpasse plusieures centaines, parmis lequel nombre il y a une afféz grande varieté d'espéces nouvelles comme on pourra juger d'après la Spécification des espéces que j'ai pû observer pendant mon sejour en Tauride & que je ne veut même pas garantir comme complette.

Zoologie de la Tauride.

La Tauride n'est point riche ni en espéces, ni en individus de *Quadrupêdes* sauvages. Le Liêvre seul y est en très-grand nombre, & le Chevreuil, ainsi que le Rénard, assez commun. Le Taisson & le Loup y sont peu frequents, & le Cerf qui se trouve seulement dans les forêts qui environnent le Tchaterdagh, est encore plus rare. L'Ours & l'Ecureuil manquent tout à fait au pays. La Marte, le Putois

Putois ordinaire & tigré, la Gerboiſe & le Souſlik n'y ſont pas fort communs & ces derniers ſe trouvent ſeulement dans la plaine. Le Surmulot s'y eſt introduit dépuis longtemps. La Muſaraigne y eſt d'une très-petite eſpéce; la Chauve-ſouris de pluſieures.

La *volaïlle* ſauvage eſt plus fréquente dans la presqu'iſle. La plus commune ſont les Perdrix griſes & dans le temps du paſſage, les Cailles qui ſe raſſemblent en automne ſur la côte méridionale, pour paſſer delà en foule vers l'Anatolie. Pendant l'hyver les grandes Outardes & les Cannes pétieres ſont très-communes & volent par petites troupes. La Dèmoiſelle de Numidie fréquente ſurtout les lacs ſalés de la plaine & vole auſſi en troupe, au lieu que la grande Grûe eſt très-rare. Le Hibou, les petits Ducs & d'autres oiſeaux nocturnes trouvent une rétraite agréable dans les rochers caverneux, & font de nuit entendre leur cris dans toutes les vallées de la partie montagneuſe. La Corneille, le Choucas (qui nait ſouvent tout blanc); le Coracias, la Pie, l'Etourneau, le Merle, la Grive & le Gûepier ſont fréquents partout. Le Roſſignol & d'autres petits oiſeaux inſectivores n'y font presque que paſſer & y conſtruiſent rarement des nids. Les eſpéces de petits oiſeaux granivores n'y ſont pas variées. La Tauride n'à ni Coqs de bruyère, ni Tetras, ni Faiſan: quoique le Tetras arrive pendant l'hyver jusqu'à la mer d'Azof & que les Faiſans s'étendent le long du Kouban, jusqu'à Tamàn. Pour les oiſeaux aquatiques il n'y a pas de pays plus pauvre que la Tauride. Sur les côtes maritimes on voit à peine quelques volées de petits Canards & quelques Mouettes; le Pelican avec le Cormorant ſe tiennent ſeulement dans la mer d'A-

zof

zof & ſur le Boſphòre. Les Becaſſines ne paroiſſent qu'au paſſage.

Les rivières très-rapides, pierreuſes & ordinairement baſſes, nourriſſent peu de *poiſſons*, excepté la Truite, des petits Barbots & des Ablettes. Mais les côtes maritimes ſont aſſez poiſſonneuſes & nourriſſent une grande varieté de poiſſons. Les plus nombreuſes eſpéces ſont la Cépole (Kephàl) le petit Macquereau & l'Alòſe avec une eſpéce de Sardines. Ces poiſſons ſont de paſſage, font tout le tour de la mer noire & en ſortent par la Propontide. Le Macquereau eſt excellent à ſaler, la Cépole pour boucaner, & les fraix ſechés de ce dernier poiſſon ſont fort eſtimés des Levantins. l'Aloſe & la Sardine ſont auſſi de paſſage ſur la côte, mais on n'eſt pas encore attentif à en faire la pêche. Une eſpéce de Turbot, la Sole, la Limande, la Scorpêne, les Boulerots de mer, le Galéa ou Loche de mer, quelques Spares &c. font ordinairement le gros de la marée. Dans le détroit du Boſphòre & ſur les côtes de la mer d'Azof il ſe fait une pêche conſiderable d'Eſturgeons de differentes eſpéces, qui y entrent pour frayer & pour hyverner, attirés ſurtout par les embouchures du Kouban & du Don, qui rendent l'eau de la Palus-méotide moins ſalée.

Les *amphibies* de la Tauride ſe bornent à peu d'eſpéces. La Vipère y eſt très-rare & ſe trouve ſeulement dans la plaine, ainſi que la Couleuvre. Le grand Serpent jaune eſt le plus commun dans les montagnes & ſouvent de près d'une toiſe de longueur. Le Lézard verd ſe trouve, dans le pays calcaire, d'une groſſeur démeſurée. Une autre eſpéce de Lézard à ventre couleur de feu eſt commune partout, & une

une troisième, fort effilée, se tient entre les roches & semble plutôt voler que marcher. Le grand Lézard sans pieds (Lacerta apoda) est commun sur la côte méridionale comme dans le Caucase.

La Tauride ne produit pas une grande varieté *d'Insectes*, surtout de Papillons; ce qui est d'autant plus extraordinaire, vû la grande varieté de plantes qu'elle produit. Je n'ai observé qu'une trentaine d'espéces nouvelles, qui manquent aux autres provinces méridionales de l'Empire & que la Tauride a peut-étre de communs avec l'Anatolie, le Caucase & la Moldavie. Les grandes Scolopendres mordantes y sont parmis les plus communs insectes & hébergent partout sous les pïerres. La Tarentule & le Phalange venimeux sont ici plus rares que sur les plaines caspiennes. Entre les ruines des roches de la côte méridionale on observe en grand nombre une espéce de Carabe gigantesque, qui est du plus beau poli d'acier, mais qui lance à plusieurs pieds une liqueur d'une acreté brulante, laquelle ote l'usage de l'oeuil qu'elle atteint pour plusieurs jours. La Tauride a le bonheur d'être délivrée des cousins & des autres Insectes volants qui piquent & qui infestent en si grand nombre nos autres provinces méridionales. Il n'en existe que d'une espéce à peine visible, qu'on ne rémarque, lorsqu'elle vole, pas plus qu'un atôme, & qui cependant mord la peau en y laissant un point sanglant. Ce petit insecte qui ressemble aux moucherons du Banat, n'a fait son apparition que dépuis peu, surtout dans les marais d'Inkerman.

On prend sur les côtes rocailleuses de la mer noire differentes espéces de Crabes & de Crevettes, très-bonnes à

 man-

manger. Les bancs d'huitres qui ſe trouvent ſur pluſieurs points de cette côte, produiſent des Huitres d'un gout exquis, dont la coquille eſt plus mince & plus colorée que dans les mers de l'Europe. Les Moules ſe trouvent partout, mais celles de la baye de Théodoſie ſont d'une grandeur & d'un gout extraordinaire. L'on trouve ſouvent dans ces moules des petites perles en grand nombre & d'un bel orient. Les Patelles ſont très-communes ſur toute la côte méridionale. Au reſte on ne trouve dans la mer voiſine que peu de coquillâges: quelques petits buccins & limaçons de mer, quelques pétoncles & tellines, le manche de couteau (*Solen*) & des petites huitres de St. Jacque ſont à peu près tout ce qu'on trouve en ce genre. La mer noire produit très-peu de Zoophytes & de vers. Malheureuſement les Vers qui rongent les vaiſſeaux ſont répandus ſur toute la côte jusqu'au Bosphôre & cauſent un grand dommage à la marine Impériale. Les Tulipes de mer, l'Oeuillet de mer & une petite eſpéce de Bourſe marine (Aſcidium) ſont presque les ſeuls êtres animés que cette mer produit attachés ſur les roches. Une eſpéce de Méduſe (Meduſa cruciata) y nage, ſurtout pendant l'été, en grand nombre & quelques petits êtres inviſibles à l'oeuil nud, rendent quelquefois, dans le temps des grandes chaleurs, la mer phosphorique.

J'en viens aux animaux domeſtiques, qui ſont une grande partie des richeſſes de la Tauride & dont l'amélioration, par des bonnes races, ajoutera encore à ce fond de richeſſes.

Les animaux domeſtiques qui proſpêrent le plus en Tauride, ſont: le Chameau à deux boſſes, que Mr. le Comte de de Buffon nomme improprement le Dromadaire, le Chéval, la Chêvre & la Brébis. Les Boeufs y réuſſiſſent moins & ſont d'une petite raçe, & les Bufles ſont entretenus en petit nombre ſeulement dans les parties des montagnes maritimes couvertes de forêts & d'herbes ſucculentes. — Les *Chameaux* pourroient être beaucoup multipliés dans les plaines de la Tauride, ſurtout ou le ſel eſt voiſin, & dans l'angle le plus occidental de la presqu'iſle, connû ſous le nom de *Tarkhandïp* ou Tarkhanskoy-Koût, ou le terrein eſt généralement ſalé. La raçe des chameaux blancs ſeroit ſurtout récommendable, à cauſe de la laine plus propre à récevoir toute ſorte de teïnture. Cet animal me ſemble d'ailleurs d'une grande utilité aux armées, pour les tranſports, & pour tirer l'artillerie des paſſages les plus difficiles. Dans les guerres d'Europe le chameau peut encore être d'une autre utilité & ſervir à l'infanterie pour mettre en ſuite toute cavallerie ennemie, qui ſe préſentera pour l'attaquer. Car aucun cheval qui n'eſt pas accoutumé à voir des chameaux, peut le ſupporter, mais prend le mord au dent à la prémière vue de cet animal.

Les *Chevaux* Tatares ſont d'une qualité ſi bien connue, ſurtout pour l'uſage de la cavallerie legêre, que je n'ai pas béſoin d'appuyer ſur cet article. Mais les bons effets que dépuis peu l'introduction d'étalons turcs & arabes à operé ſur quelques haras de propriétaires riches, montre que cette raçe ſeroit encore ſuſceptible d'un perfectionnement conſiderable par le croiſement des races. Je crois que des étalons eſpagnols & anglois produiroient un grand changement, ſurtout pour la taille de ces chevaux. Il eſt à eſperer, que la raçe des chevaux, que les Coſaques de la mer noire commencent à établir ſur l'iſle de Tamàn & le long des bords du Koubàn, ſurpaſſera encore cette raçe tatare, ſurtout s'ils ont ſoin de ſe procurer des étalons de la grande raçe d'Abaſſie.

Les *Bêtes à laine* de la Tauride ſont de deux qualités très-differentes pour la toiſon, quoique par la chair également excellentes. Celles de *la plaine* ſont plus grandes, mais portent une laine rude, melée de poils, qui ne peut ſervir qu'aux feutres & aux autres uſages groſſiers. Les agneaux de cette raçe donnent d'excellentes peaux friſées pour le commerce & celles qui naiſſent ſur toute l'étendue du Tarkhanskoy-koût, & qui ſont pour la plûpart griſes, ſe vendent ſurtout pour la Pologne, à des prix ſi conſiderables, qu'il en réſulte une branche de commerce importante. Les *brebis de montagne*, quoique petites, ſont très-eſtimables pour leur toiſon, qui eſt naturellement longue, égale, ſoyeuſe, très-propre à la filature & déviendra bien plus parfaite lorsqu'on établira, avec des béliers étrangers, un troupeau de bonne raçe, d'ou l'on pourra, à meſure qu'ils viendront à naitre, fournir aux troupeaux des particuliers des bons béliers. Ainſi en excluant inſenſiblement ceux du pays, & iſolant les bons troupeaux, on parviendroit enfin à perfectionner toute la raçe du pays & à pourvoir nos fabriques de drap, d'une laine pour le moins égale en bonté à celle d'Angleterre. Le régime actuel de ces troupeaux eſt déja en pluſieurs endroits tel qu'il doit étre, & tel qu'on l'obſerve en Eſpagne; on les conduit aux approches des chaleurs, ſur les hautes plaines alpines, & en hyver on les fait paitre dans les vallées chaudes du pays calcaire & ſur la Cherſonêſe, où l'hyver eſt toujours fort dou-

douce. Le feul inconvenient pour les brebis eft, dans ce pays, la grande abondance d'herbes & d'arbriffeaux épineux, furtout du Paliurus, qui accroche & diminue la toifon, & qu'il faudroit s'attacher à détruire le plus qu'il eft poffible, furtout là où les troupeaux doivent fouvent paffer.

Il feroit auffi néceffaire pour la pureté des bêtes à laine, que les nombreufes *Chêvres* qu'on entretient en Tauride, & qui font très-néceffaires pour les fabriques de maroquins, fuffent féparées des brébis, pour empècher l'âbatardiffement. Les chêvres diminuiroient moins le pâturage propre aux brêbis & profpèreroient plus fur les roches les plus efcarpées & dans les pays couverts de charmille & d'arbriffeaux épineux, où les brébis ne doivent point ètre admifes. On pourroit en Tauride tirer un grand parti de ce duvet d'hyver que les chêvres perdent au printemps & qu'on pourroit alors, ou en les peignant fous le ventre en hyver, rèceuillir en grande quantité. Ce duvet d'une fineffe & d'une èlafticité qui furpaffe les laines les plus fines, eft une des matières prémières des fchalis fi eftimés, du Cachemire & du Tybet, qu'on met à fi haut prix; & fi nous n'en avont pas encore des fabriques, le duvet brut pourroit fe vendre plus cher que la foye, aux Anglois qui le récherchent.

Les *Bêtes à cornes,* même les *Bufles* ne parviennent pas en Tauride à une taille avantageufe. Les paturâges fucculents y font trop rares & le bétail de la Tauride eft, comme celui du Caucafe, rapetiffé, & maigre pendant la plus grande partie de l'année. Il en eft d'autant plus propre au labourage & plus lefte pour les transports, & l'on

 voit

voit les Boeufs des Tatares & des Tſcherkeſſes courir au grand trot, presqu'à l'égal des chevaux. C'eſt tout le contraire ſur les plaines de l'Iſle de Tamàn & du Yéi, ou les Coſaques de la mer noire ont amené le gros bétail d'Ucraine, qui y proſpêre tellement, que la raçe du pays ſurpaſſera la colonie arrivée & ſera avec le temps d'une grande reſſource pour les Capitales, comme la Tauride de ſon coté devra l'être par les productions, par les cultures qui y fleuriſſent déja, ou qu'on pourra y introduire encore, & par la ſoye, pour la quelle on y trouve toutes les facilités requiſes.

CATA-

CATALOGUE
DES ESPÈCES DE VÉGETAUX SPONTANÉS OBSERVÉS EN TAURIDE. (*)

Salicornia *herbacea.*
—— —— *foliata.*
* Jasminum *fruticans.*
Liguſtrum *vulgare.*
* Olea *europaea.*
Circaea *lutetiana.*
—— *alpina.*
Veronica *ſpicata.*
—— *ſpuria.*
* —— *Buxbaumiana.*
—— *ſerpyllifolia.*
—— *Anagallis.*
—— *Beccabunga.*
—— *Chamaedrys.*
—— *Pſeudo-chamaedrys* Jacq.
—— *urticifolia* Jacq.
Veronica *auſtriaca.*
—— *auſtriaca β multifida.*
—— *agreſtis.*
—— *arvenſis.*
* —— *hederifolia.*
* —— *β. minor.*
—— *verna.*
Verbena *officinalis.*
Lycopus *europaeus.*
—— *pinnatifidus.*
Ziziphora *capitata.*
* Salvia *officinalis.*
* —— *pinnifolia* (nov.)
* —— *Habliziana* (nov.)
—— *Horminum.*
—— *nemoroſa.*
—— *nutans.*

(*) Les noms marqués d'une étoile, indiquent les eſpèces qui ne ſe trouvent pas dans les autres Gouvernements de l'Empire de Ruſſie, excepté un petit nombre de celles qui ſont familières à quelques parties du Caucaſe.

Salvia *auſtriaca* Jacq.
—— *glutinoſa.*
—— *Sclarea.*
—— *Aethiopis.*
—— *verticillata.*
Valeriana *Locuſta.*
* —— *dioica.*
Polycnemum *arvenſe.*
—— —— *triandrum.*
—— —— *alternifolium.*
* Crocus *autumnalis.*
* —— *vernalis.*
* —— *Bulbocodium.*
Gladiolus *communis.*
Iris *germanica.*
— *pumila,* trium colorum.
Cyperus *flavens.*
Scirpus *paluſtris.*
—— *ſylvaticus.*
—— *mucronatus.*
—— *lacuſtris.*
Phalaris *phleoides.*
—— *arundinacea.*
Panicum *viride.*
—— *crus corvi.*
* —— *dactylon.*
Phleum *nodoſum.*
* —— *crinitum.*
—— *ſchoenoides.*
Schoenus *aculeatus.*

Alopecurus *pratenſis.*
* —— —— *vaginatus* (nov.)
Milium *effuſum.*
* Milium *maritimum* (nov.)
Agroſtis *Spica venti.*
—— *ſerotina.*
—— *pungens.*
—— *capillaris.*
Aira *aquatica.*
—— *arundinacea.*
—— *coerulea.*
—— *praecox.*
Melica *ciliata.*
—— *coerulea.*
Poa *alpina.*
— *β vivipara.*
— *trivialis.*
— *pratenſis.*
— *anguſtifolia.*
*— *Eragroſtis.*
— *compreſſa.*
— *nemoralis.*
— *aſpera.*
* Briza *Eragroſtis.*
* —— *viridis.*
Dactylis *glomerata.*
Cynoſurus *criſtatus.*
* —— —— *echinatus.*
* —— —— *durus.*
Feſtuca *ovina.*

Fe-

Festuca *elatior.*
Bromus *squarrosus.*
—— *β pubescens.*
—— *inermis.*
—— *mollis.*
—— *asper.*
—— *sterilis.*
—— *tectorum.*
* —— *madritensis.*
* —— *pinnatus.*
* —— *distachyos.*
Stipa *pennata.*
—— *capillata.*
* Avena *fatua.*
—— *sterilis.*
Arundo *epigejos.*
—— *calamagrostis.*
Lolium *perenne.*
—— *temulentum.*
—— *tenue?*
Elymus *arenarius.*
* —— *Caput medusae.*
* —— *hordeaceus* (nov.)
Hordeum *nodosum.*
* —— *maritimum.*
* —— *bulbosum.*
—— *murinum.*
* Triticum *hispanicum.*
— — *cristatum.*
Triticum *junceum.*
— — *repens.*
* — — & *nova* aliquot.
* Holosteum *umbellatum.*
* Globularia *vulgaris.*
Dipsacus *laciniatus.*
Scabiosa *arvensis.*
* —— *transylvanica.*
* —— *leucantha?*
* —— *stellata.*
Scabiosa *ucranica.*
* —— *cretacea* (nov.)
* Sherardia *arvensis.*
* — — *muralis.*
* — — *minuta* (nov.)
* Asperula *arvensis.*
* — — *odorata.*
* — — *cynanchica.*
Gallium *rubioides.*
—— *uliginosum.*
—— *spurium.*
—— *verum.*
—— *Mollugo.*
—— *glaucum.*
* —— *purpureum.*
* —— *parisiense.*
—— *Aparine.*
* Crucianella *angustifolia.*

Rubia *tinctorum.*
Plantago *major.*
— — *media.*
— — *lanceolata.*
— — *maritima.*
— — *Cynops.*
Cornus *mascula.*
— — *sanguinea.*
Camphorosma *monspeliaca.*
Alchemilla *vulgaris.*
* Bufonia *tenuifolia.*
Cuscuta *europaea.*
— — *maior* Buxbaum.
Hypecoum *pendulum.*
Potamogeton *crispum.*
— — — *pusillum.*
Heliotropium *europaeum.*
* — — — *supinum.*
Myosotis *scorpioides.*
— — *Lappula.*
* — — *saxatilis* (nov.)
Lithospermum *officinale.*
— — — *arvense.*
* — — — *purpureo-coerulum.*
— — — *dispermum.*
Anchusa *angustifolia.*
* — — *tinctoria.*
* — — *annua* (nov.)
* — — *italica.*
Cynoglossum *officinale.*
* — — — *cheirifolium.*
* Symphytum *orientale.*
* Cerinthe *minor.*
Onosma *echioïdes.*
— — *simplicissima.*
* — — *taurica* (an orientalis?)
Asperugo *procumbens.*
Lycopsis *arvensis.*
Echium *vulgare.*
Echium *italicum.*
* — — *creticum.*
Messerschmidia *Argunia.*
Androsace *maxima.*
— — — *Chamaesyce.*
Primula *veris.*
— — *uniflora.*
* Cyclamen *europaeum.*
* Lysimachia *verticillata* (nov.)
— — — *vulgaris.*
— — — *numularia.*
Anagallis *arvensis* β. phoenicea.
Convolvulus *arvensis.*
— — — *sepium.*
* — — — *scammonea.*
— — — *procumbens* (nov.)
* — — — *soldanella.*
* — — — *cantaber.*

Con-

Convolvulus *maritimus.* (C. terrestris *Lin.*)
* — — — *Dorycnium.*
* — — — *lineatus.*
— — — *pusillus* (nov.)
Campanula *rapunculoides.*
— — — *sibirica.*
— — — *medium.*
* — — — *hybrida.*
Verbascum *thapsus.*
— — — *phlomoides.*
— — — *Lychnitis.*
* Verbascum *Boerhavii.*
— — — *nigrum.*
* — — — *graecum* (a V. sinuato *Lin.* distinctum).
* — — — *pinnatifidum.* (Vahl.)
Datura *Stramonium.*
Hyoscyamus *niger.*
* — — — *albus.*
Physalis *Alkekengi.*
Solanum *Dulcamara.*
— — *nigrum.*
Rhamnus *catharticus.*
* — — *Paliurus.*
Evonymus *vulgaris.*
— — — *latifolius.*
— — — *verrucosus.*
Hedera *Helix.*
Vitis *vinifera.*
Illecebrum *capitatum.*
Thesium *linophyllum.*
Vinca *minor.*
Cynanchum *acutum.*
Asclepias *Vincetoxicum.*
— — *nigra.*
Herniaria *glabra.*
* — — *hirsuta.*
Chenopodium *urbicum.*
— — — *murale.*
— — — *album.*
Chenopodium *hybridum.*
— — — *Botrys.*
— — — *glaucum.*
* — — — *Vulvaria.*
— — — *maritimum.*
* Beta *Cycla?*
* Salsola *Tragus.*
— — *rosacea.*
— — *Soda.*
— — *sativa.*
— — *altissima.*
— — *prostrata.*
— — *muricata.*
Ulmus *campestris.*
* Velezia *rigida.*
Gentiana *Centaurium.*
— — *Cruciata.*

* Eryngium *maritimum.*
— — *campeſtre.*
Bupleurum *rotundifolium.*
* — — *ſemicompoſitum.*
— — *junceum.*
Tordylium *Anthriſcus.*
* Caucalis *grandiflora.*
* — — *latifolia.*
— — *daucoides.*
* — — *orientalis.*
* Artedia *ſquamata.*
Daucus *mauritanicus.*
* — — *polygamus.* Jacq.
* — — *muricatus.*
* Bunium *bulbocaſtanum.*
Conium *maculatum.*
Selinum *Carvifolia.*
— — *auſtriacum* Jaq.
— — *Monnieri.*
— — *ſylveſtre.*
Peucedanum *officinale.*
— — — *Silaus.*
* Crithmum *maritimum.*
* Cachrys an *Libanotis?*
* Ferula *orientalis.*
Laſerpitium *aquilegifolium.*
* — — *prutenicum.*
* Tordylium *maximum.*
* Heracleum *Panaces?*
* — — — *auſtriacum.*

* Heracleum *elegans.*
— — — ? *puſillum.*
Sium *latifolium.*
— *falcaria.*
* Oenanthe *globuloſa?*
* Phellandrium *mutellina.*
Coriandrum *teſticulatum.*
Scandix *Pecten.*
— — *infeſta.*
— — *Cerefolium.*
— — *Antriscus.*
— — *nodoſa.*
Chaerophyllum *ſylveſtre.*
— — — *hirſutum.*
— — — *bulboſum.*
Chaerophyllum *aureum.*
* Imperatoria *Oſtruthium.*
Seſeli *Hippomarathrum.*
— *annuum.*
— *dichotomum* (nov.)
— *glaucum.*
Paſtinaca *ſativa.*
* Smyrnium *perfoliatum.*
Pimpinella *Saxifraga.*
— — *dioica.*
Apium graveolens.
* Rhus *Coriaria.*
— *Cotinus.*
Viburnum *Lantana.*
— — *Opulus.*

Sam-

Sambucus *Ebulus.*
— — *nigra.*
* Tamarix *tetrandra.* (nov.)
— — *decandra.*
Alfine *media.*
Statice *coriaria.*
— *trigona.*
— *Limonium.*
Linum *hirſutum.*
— *narbonenſe.*
— *tenuifolium.*
— *alpinum.*
— *ſtrictum.*
— *flavum.*
* — *arboreum?*
* — *puſillum* (nov.)
* Craſſula *caeſpitoſa* Cavanill.
* Galanthus *nivalis.*
* Leucoium *aeſtivum.*
* Allium *flavum.*
— *deſcendens.*
— *ſubalpinum* (nov.)
Tulipa *gesneriana.*
Ornithogalum *luteum.*
* — — *transverſale.* (nov.)
* — — *proliferum* (nov.)
* — — *marginatum.* (nov.)
Ornithogalum *pyrenaicum.*
— — *narbonenſe.*
* — — *umbellato* affine, fol. piloſis.
Scilla *amoena.*
* — *bifolia.*
* — *autumnalis.*
Aſphodelns *luteus.*
* — — *tauricus* (nov.)
Anthericum *ramoſum.*
Aſparagus *officinalis.*
— — *officinalis.* β volubilis.
Convallaria *maialis.*
— — *Polygonatum.*
Hyacinthus *comoſus.*
— — *botryoides.*
* — — *ſarmaticus* (nov.)
* Hyacinthus *fuliginoſus* (nov.)
Juncus *effuſus.*
— — *articulatus.*
— — *bulboſus.*
— — *piloſus.*
Berberis *vulgaris.*
* Rumex *Patientia.*
* — — *aegyptius.*
— — *maritimus.*
— — *Acetoſa.*

Triglochin *paluſtre.*
* Colchicum *vernum.*
Aliſma *Plantago.*
Epilobium *hirſutum.*
— — *montanum.*
Stellera *Paſſerina.*
Polygonum *amphibium.*
— — *Perſicaria.*
— — *aviculare.*
— — — *maritimum.*
— — — *Convolvulus.*
— — — *dumetorum.*
* Laurus *nobilis.*
Butomus *umbellatus.*
* Cercis *ſiliquaſtrum.*
Dictamnus *albus.*
* Ruta *graveolens.*
* — *linifolia.*
Zygophyllum *Fabago.*
Tribulus *terreſtris.*
* Arbutus *Andrachne.*
Pyrola *rotundifolia.*
Saxifraga *tridactylites.*
* — — *petraea.*
Scleranthus *annuus.*
* Gypſophila *glomerata.* (nov.)
— — *paniculata.*
Saponaria *officinalis.*
— — *Vaccaria.*

* Dianthus *barbatus.*
* — — *carthuſianorum.*
— — *prolifer.*
* — — *ſaxatilis* (nov.)
Cucubalus *Behen.*
— — — *otites.*
Silene *nocturna.*
— *nutans.*
* Silene *conoidea.*
— — *noctiflora.*
— — *Armeria.*
— — *alpina.*
Stellaria *paniculata.*
* Arenaria *faſciculata* Jacq.
— — *trinervia.*
— — *ſerpyllifolia.*
— — *larycifolia.*
* Garidella *Nigellaſtrum.*
* Sedum *album.*
— — *acre.*
* — — *ſaxatile* (nov.)
Agroſtema *Githago.*
* — — *coronaria.*
Lychnis *dioica.*
Ceraſtium *vulgare.*
— — *viscoſum.*
— — *ſemidecandrum.*
— — *pentandrum.*
— — *repens.*
— — *aquaticum.*

Pega-

Peganum *Harmala.*
Nitraria *Schoberi.*
Portulaca *oleracea.*
Lythrum *Salicaria.*
* — — *hyſſopifolia.*
Agrimonia *Eupatoria.*
* Reſeda *Luteola.*
* — *lutea.*
* Euphorbia *myrſinites.*
* — — *β maritima.*
* — — *rubra* Cavanill.
* — — *canescens.*
* — — *Peplis.*
— — *exigua.*
* — — *Paralias.*
— — *ſegetalis.*
— — *helioſcopa.*
— — *platyphyllos.*
— — *ſylvatica.*
* — — *pumila* (nov.)
* — — *glareoſa* (nov.)
— — *verrucoſa.*
* Punica *Granatum.*
Amygdalus *nana.*
* Prunus *Mahaleb.*
— — *domeſtica.*
— — *avium.*
— — *ſpinoſa.*
Crataegus *Aria.*
* — — *Chamaemespilus.*
Crataegus *torminalis.*
* — — *monogyna.*
* — — *Oxyacantha.*
* — — *digyna.*
* — — *orientalis.*
Sorbus *aucuparia.*
* — *domeſtica.*
Meſpilus *germanica.*
* — — *Pyracantha.*
— — *Cotoneaſter.*
Pyrus *communis.*
* — *nivalis.*
* — *Malus.*
— *Cydonia.*
Spiraea *crenata.*
— — *Filipendula.*
* Roſa *Eglanteria.*
* — *ſpinoſiſſima.*
— *villoſa.*
— *gallica.*
— *alpina.*
* — *pumila.*
Rubus *caeſius.*
* — *ſacer.* (Schreber).
Fragaria. *vesca.*
Potentilla *rupeſtris.*
— — *recta.*
— — *argentea.*
— — *hirta.*
— — *verna.*

Po-

Potentilla *reptans.*
Geum *urbanum.*
* —— *potentilloides.* (nov.)
Capparis *ſpinoſa.*
Chelidonium *Glaucium.*
—— —— *corniculatum.*
* —— —— *violaceum.*
—— —— *maius.*
Papaver *hybridum.*
* —— *Argemone.*
—— *Rhoeas.*
—— *dubium.*
Tilia *europaea.*
Ciſtus *Fumana.*
* —— *italicus.*
—— *Helianthemum.*
* —— *ſalvifolius.*
* —— *aegyptius.*
Poeonia *tenuifolia.*
* —— *triternata.* (nov.)
* —— *hybrida.*
* Delphinium *Aiacis.*
—— —— *Conſolida.*
* —— —— *tauricum* (nov.)
* Nigella *damaſcena.*
* —— *arvenſis.*
* —— *doliata.* (nov.)
Anemone *Pulſatilla.*
* Clematis *Vitalba.*
Thalictrum *medium.*
Adonis *apennina.*
—— *aeſtivalis.*
Ranunculus *Ficaria.*
—— —— *ſceleratus.*
—— —— *illyricus.*
—— —— *lanuginoſus.*
—— —— *acris.*
* —— —— *arvenſis.*
—— —— *nivalis.*
* — — — *tauricus* (nov.)
— — — *muricatus.*
— — — *falcatus.*
— — — *aquatilis.*
* Aiuga *orientalis.*
* — *genevenſis.*
* Teucrium *ſalicifolium.*
* — — *Laxmanni.*
— — *Chamepithys.*
— — *Scordium.*
— — *Chamedrys.*
* — — *montanum.*
— — *Polium.*
* Satureia *Iuliana.*
* Thymbra *ſpicata.*
Nepeta *nuda.*
* —— *pannonica.*
—— *ucranica.*
—— *Cataria.*
* Sideritis *ſyriaca.*
* — — *montana.*

Men-

Mentha *ſylveſtris.*
—— *hirſuta.*
—— *aquatica.*
Glechoma *hederacea.*
Lamium *maculatum.*
—— *purpureum.*
—— *amplexicaule.*
Betonica *officinalis.*
Stachys *ſylvatica.*
—— *germanica.*
* —— *lanata.*
—— *recta.*
—— *annua.*
* —— *tenuifolia* (nov.)
Ballote *nigra.*
Marrubium *peregrinum.*
— — *vulgare.*
Leonurus *Cardiaca.*
Phlomis *tuberoſa.*
—— *Herba venti.*
Clinopodium *vulgare.*
Origanum *vulgare?*
Thymus *vulgaris.*
—— *Zygis.*
—— *alpinus.*
* —— *patavinus.*
* —— *villoſus?*
Meliſſa *officinalis.*
* Scutellaria *peregrina.*
* —— —— *orientalis.*
Prunella *vulgaris.*
* —— *alba* (nov.)
Rhinanthus *Criſta galli.*
Euphraſia *officinalis.*
— — *odontites.*
— — *lutea.*
* — — *viſcoſa.*
Melampyrum *arvenſe.*
* Lathraea *Squamaria.*
Pedicularis *tuberoſa.*
Orobanche *cernua.*
— — *maior.*
* Antirrhinum *Elatine.*
—— —— *ſpurium.*
—— —— *minus.*
—— —— *geniſtifolium.*
* —— —— *linifolium.*
Scrophularia *aquatica.*
* —— —— *lucida?*
—— —— *vernalis?*
* Celſia *orientalis.*
* Vitex *Agnus caſtus.*
Myagrum *rugoſum.*
— — *perfoliatum.*
— — *ſativum.*
— — *paniculatum.*
* — — *auſtriacum.*
* — — *orientale.*
Anaſtatica *ſyriaca.*
* Draba *aizoides.*

Draba *verna.*
— *muralis.*
Lepidium *perfoliatum.*
— — *petraeum.*
— — *latifolium.*
— — *ſalinum.*
— — *ruderale.*
Thlaſpi *arvenſe.*
— *campeſtre.*
— *hirſutum.*
— *Burſa.*
* Cochlearia *Coronopus.*
— — — *Draba.*
* Iberis *ſaxatilis.*
* — *ſempervirens.*
* — *amara.*
Alyſſum *alpeſtre.*
— *montanam.*
— *calycinum.*
— *minimum.*
— *incanum.*
— *campeſtre.*
* Alyſſum *clypeatum.*
* Clypeola *Ionthlaſpi.*
* Dentaria *pinnata.*
Cardamine *amara.*
* — — *praecox* (nov.)
Siſymbrium *amphibium.*
— — *Sophia.*
— — *altiſſimum.*
Siſymbrium *ſtrictiſſimum.*
— — *Loeſelii.*
* — — *orientale.*
Eryſimum *officinale.*
— — *Barbarea.*
— — *cordifolium* (nov.)
— — *repandum.*
— — *Cheirantoides.*
— — *hieracifolium.*
Cheiranthus *eryſimoides.*
— — *alpinus.*
— — *montanus.*
— — *odoratiſſimus* (nov.)
Heſperis *triſtis.*
— *matronalis.*
— *verna.*
* Arabis *alpina* β grandiflora.
Turritis *hirſuta.*
Braſſica *campeſtris.*
— *orientalis.*
Sinapis *arvenſis.*
— *laevigata.*
— *nigra.*
— *alba.*
Raphanus *tenellus.*
Bunias *orientalis.*
* — *Cakile.*
Iſatis *tinctoria.*
Crambe *orientalis.*

* Cleo-

* Cleome *ornithopodioides.*
Geranium *cicutarium.*
*— — *ciconium.*
— — *tuberoſum.*
— — *robertianum.*
*— — *lucidum.*
*— — *molle.*
— — *columbinum.*
— — *diſſectum.*
— — *ſanguineum.*
Althaea *officinalis.*
* — *cannabia.*
— *hirſuta.*
Alcea *ficiſolia.*
Malva *rotundifolia.*
Lavatera *thuringica.*
Hibiſcus *Trionum.*
Fumaria *bulboſa.*
* — *Marſchalliana* (nov.)
— *officinalis* cum β. variet. ſaxatili.
Polygala *vulgaris.*
* — *magna* Jacquin.
* Geniſta *piloſa.*
Ononis *arvenſis.*
— *alopecuroides.*
* — *minuta.*
* Anthyllis *vulneraria.*
Orobus *luteus.*
— *hirſutus.*
Orobus *niger*
— *pyrenaicus.*
— *pannonicus* Jacquin.
* Lathyrus *Aphaca.*
* — — *Niſſolia.*
— — *hirſutus.*
— — *tuberoſus.*
— — *pratenſis.*
— — *latifolius.*
Vicia *pannonica* Jacq.
— *piſiformis.*
— *Cracca.*
— *ſativa.*
— *lutea.*
* — *bithynica* et aliae.
Ervum *tetraſpermum.*
— *hirſutum.*
Piſum *maritimum.*
* Cicer *arietinum.*
Cytiſus *ſupinus.*
Glycirrhiza *glabra.*
— — *echinata.*
* Coronilla *Emerus.*
* — — *coronata.*
* — — *valentina?*
— — *varia.*
* Ornithopus *ſcorpioides.*
* Scorpiurus *vermiculata.*
* Hedyſarum *tauricum* (nov.)
— — *cretaceum* (nov.)

* Hedyſarum *ſupinum* (nov.)
— — *Onobrychis.*
* — — *Buxbaumianum.*
Galega *officinalis.*
* Aſtragalus *narbonenſis.*
— — *Onobrychis.*
— — *piloſo* affinis(nov.)
— — *Cicer.*
— — *glyciphyllus.*
— — *trimeſtris.*
— — *phyſodes.*
— — *hamoſus.*
— — *depreſſus.*
* — — *cretaceus* (nov.)
* — — *dichopterus*(nov.)
* — — *tragacanthae* affinis (Vahl.)
* — — *macrocarpus*(nov.
* Pſoralea *bituminoſa.*
* Trifolium *M. coerulea.*
— — *M. officinalis.*
— — *repens.*
* — — *ſubterraneum.*
— — *pratenſe.*
— — *alpeſtre.*
— — *arvenſe.*
— — *ſtellatum.*
* — — *fragiferum.*
* — — *pannonicum.*
— — *procumbens.*
* Lotus *ſiliquoſus.*
— *corniculatus.*
* — *Dorycnium.*
Trigonella *monſpeliaca.*
— — *ruthenica.*
— — *corniculata.*
Medicago *falcata.*
— — *lupulina.*
— — *maritima.*
* — — *ſcutellata.*
* — — *coronata.*
* — — *minima.*
Hypericum *perforatum.*
— — — *hirſutum.*
* — — — *pulchrum.*
* Geropogon *glabrum.*
Tragopogon *orientale.*
— — *porrifolium.*
* Scorzonera *humilis* β latifolia.
— — *hiſpanica.*
— — *laciniata.*
Picris *hieracïoides.*
Sonchus *oleraceus.*
— *maritimus.*
Lactuca *Scariola.*
— *ſaligna.*
Chondrilla *iuncea.*
Prenanthes *viminea.*
Leontodon *Taraxacum.*
* — — *hirtum?*

Leon-

Leontodon *alpinum.*
* Hieracium *Taraxaci.*
— — *Pilosella.*
— — *cymosum.*
— — *murorum.*
— — *molle.*
Crepis *bursifolia.*
— *foetida.*
— *biennis.*
Lapsana *communis.*
* — *stellata.*
* — *Zacintha.*
Cichorium *Intybus.*
* Scolymus *hispanicus.*
Arctium *Lappa.*
Serratula *arvensis.*
* — — *salicifoliae* affinis.
Carduus *lanceolatus.*
— — *nutans.*
— — *acanthoides.*
— — *crispus.*
— — *pycnocephalus.*
— — *syriacus.*
— — *eriophorus.*
* — — *mollis.*
— — *cyanoides* polyclonos.
* Cnicus *Acarna.*
Onopordum *Acanthium.*
* Carlina *lanata.*
Bidens *tripartita.*

Eupatorium *cannabinum.*
Chrysocoma *Linosyris.*
— — *biflora.*
— — *villosa.*
Tanacetum *vulgare.*
Artemisia *campestris.*
— — *rupestris.*
* — — *maritima.*
— — *Absinthium.*
— — *pontica.*
— — *vulgaris.*
Gnaphalium *arenarium.*
Xeranthemum *annuum.*
Conyza *squarrosa.*
Erigeron *acre.*
Tussilago *Farfara.*
* — — *hybrida.*
* — — *Petasites.*
Senecio *vulgaris.*
— — *sylvaticus.*
— — *erucaefolius.*
Aster *Amellus.*
— *acris.*
— *Tripolium.*
Cineraria *alpina.*
Inula *Helenium.*
— *suaveolens.*
— *dysenterica.*
— *salicina.*
— *germanica.*

* Inula *enſifolia.*
Bellis *perennis.*
Chryſanthemum *inodorum.*
— — — *corymbiferum*
— — — *millefoliatum*
* Matricaria *ſuaveolens.*
* Anthemis *maritima.*
— — *arvenſis.*
— — *Cotula.*
— — *tinctoria.*
Achillea *tomentoſa.*
— — *Ptarmica.*
— — *Millefolium.*
— — *nobilis.*
* Centaurea *Crupina.*
— — *Picris* (nov.)
— — *montana.*
* — — *Cineraria.*
— — *Cyanus.*
— — *Scabioſa.*
* — — *tatarica.*
— — *Iacea.*
— — *alba.*
* — — *Calcitrapa.*
* — — *ſolſtitialis.*
Echinops *Ritro.*
Viola *odorata.*
— *hirta.*
— *canina.*
*— *procera.*

Viola *tricolor.*
Orchis *bifolia.*
— *pyramidalis.*
* — *coriophora.*
— *morio.*
— *maſcula.*
— *militaris.*
* — *abortiva.*
* Satyrium *hircinum.*
Ophrys *ovata.*
* — *inſectifera.*
Serapias *latifolia.*
* —— *grandiflora.*
—— *rubra.*
Cypripedium *Calceolus.*
Ariſtolochia *Clematices.*
Arum *maculatum.*
Ceratocarpus *arenarius.*
— — — *maritimus* (Atriplex *pedunculata* Lin.)
Chara *vulgaris.*
Lemna *minor.*
Typha *anguſtifolia.*
Sparganium *erectum.*
Carex *leporina.*
—— *vulpina.*
—— *bryzoides.*
—— *digitata.*
—— *tomentoſa.*

Carex

Carex *panicea.*
—— *anomala.*
—— *acuta.*
Betula *Alnus* β. glutinofa.
* Urtica *pilulifera.*
— — *urens.*
— — *dioica.*
Xanthium *ftrumarium.*
Amaranthus *Blitum.*
—— —— *viridis.*
* Poterium *Sanguiforba.*
Quercus *Robur.*
* —— *Cerris.*
Fagus *fylvatica.*
Carpinus *Betulus?*
Corylus *Avellana.*
Pinus *fylveftris.*
* —— *maritima.*
* Croton *tinctorium.*
* Momordica *Elaterium.*
Bryonia *alba.*
* Andrachne *telephioides.*
Salix *fragilis.*
—— *purpurea.*
—— *Caprea.*
—— *alba.*
Vifcum *album.*
* Piftacia *Terebinthus.*
Cannabis *fativa.*
Humulus *Lupulus.*
* Tamus *communis.*
Populus *alba.*
—— *tremula.*
—— *nigra.*
* —— β. italica.
Mercurialis *perennis.*
* —— —— *annua.*
* Iuniperus *Oxycedrus.*
—— —— *Sabina?*
* Taxus *baccata.*
* Ephedra *diftachya.*
Rufcus *aculeatus.*
Andropogon *Ifchaemum.*
Cenchrus *racemofus.*
* Aegilops *ovata.*
* — — *fquarrofa.*
* Valantia *hifpida.*
Parietaria *officinalis.*
— — *iudaica.*
* — — *lufitanica.*
Atriplex *portulacoides.*
— — *laciniata.*
— — *haftata.*
— — *patula.*
Acer *campeftre.*
—— *platanoides.*
* Celtis *orientalis.*
Fraxinus *excelfior.*
* — — *Ornus.*
* Diofpyros *Lotus.*

* Fi-

* Ficus *Carica.*
* Equisetum *atratum* (nov.)
* —— —— *maximum* (nov.)
—— —— *limosum.*
Acrostichum *ilvense.*
Pteris *aquilina.*
Polypodium *vulgare.*
—— —— *Filix mas.*
* Asplenium *Ceterach.*
—— —— *trichomanoides.*
—— —— *Ruta muraria.*
Fontinalis *antipyretica.*

Polytrichum *commune.*
Mnium *fontanum.*
Bryum *apocarpum.*
—— *murale.*
—— *rurale.*
—— *caespiticium.*
Hypnum *filicinum.*
Iungermannia *dilatata.*
Lichenes, praesertim *rupestres,* plurimi.
Fungi *paucissimi.*

TERRA

TERRA STRONTIANA IN SPATHO PONDEROSO CEU PARS EIVS CONSTITVTIVA SECVNDARIA DETECTA.

Auctore

TOBIA LOWITZ.

Convent. exhib. die 7 Mai, 1795.

§. 1.

Noui cuiusdam inventi chemici veritatem nihil certe pulchrius et evidentius commonſtrat, quam ſingularis caſus iſte, vbi eiusmodi inuentum fortuito non duobus tantum diuerſis iisque longe diſtantibus locis, ſed variis etiam et plane diverſiſſimis conditionibus ita in lucem prodit, vt inuentorum neuter de alterius inuento quidquam exploratum habuerit. Eamque ob rem huius generis quaſi colliſiones, tantum abeſt, vt inuentoribus diſplicere queant, vt iis potius pergratae eſſe debeant. Eiusmodi colliſionis caſum celebre terrae ſtrontianae inuentum quodammodo nobis offert.

§. 2. Tribus iam abhinc annis, anno nimirum 1792, cum terram ponderoſam ſalitam e ſpatho ponderoſo Siberico in vſus medicos praepararem; in mentem mihi venit, vltimam poſt ſalis huius cryſtalliſationem ſuperſtitem muriae partem examini chemico ſubiicere. Hunc in finem muriae aqua dilutae particulas metallicas in ea contentas ſaturati lixivii ſanguinis ope praecipitaui, filtratumque poſtea liquorem lentae euaporationi expoſui. Initio cryſtalli ſalis digeſtiui apparuerunt; his ſollicite a ſuperſtite lixivio ſegregatis et euaporatione ad cuticulae cryſtalliſationis apparitionem vsque continuata, lixivium in loco frigido repoſitum in maſſam ſolidam ſalinam radioſam eamque in aëre libero ſiccam prorſus et permanentem penitus coagulabatur.

§. 3. Hac praecipue cum maſſa ſalina, ſalis medii terrei naturam prodente, vtpote quae omni attentione digna mihi viſa eſt, ſequentia tentamina praeliminaria inſtitui:

EXPER. I.

Maſſa illa ſalina cum aequali aquae copia mixta inſignem frigoris gradum excitabat, ocyſſime et omnino prorſus ſoluebatur. Solutio haec filtrata et euaporata locoque frigido repoſita longiſſimas cryſtallos aciculares formabat, quae aëri libero expoſitae breui albeſcentes in puluerem denique ſateſcebant.

EXPER. II.

Cryſtalli iſtae parua aquae copia iterum iterumque ſolutae et, euaporationis loco, ſpontaneae exhalationi ſubiectae pulchras easque diſtinctas generauerunt cryſtallos prisматicas ſublongas hexagonas cryſtallis calcis ſalitae quoad formam ſimillimas quidem, ab his vero eo valde diſcrepantes, tès, quod aëri libero expoſitae ſiccae plane permanerent, quin ipſam cryſtalliſationis aquam amitterent, dum contra calx ſalita aëris humorem auidiſſime attrahens breui deliqueſceret.

Terra porro ponderoſa ſalita cryſtallos tabulares maiorem aquae copiam, vt ea ſoluantur, requirentes, format.

EXPER. III.

50 ſalis noſtri omni cryſtalliſationis aqua antea orbati grana in tigillo noti ponderis per horam integram vehementiſſimo igne fuſa, trium tantum granorum detrimentum patiebantur.

Atque hinc acidum ſalis in ſale hoc eadem, ac in terra ponderoſa ſalita et calce ſalita, vi retinetur.

EXPER. IV.

Duae ſalis huius drachmae 10 ſpiritus rectificatiſſimi drachmis accedente coctione magna ex parte ſoluebantur. Atque calida adhuc ſolutio haec ſpirituoſa filtrata et loco frigido expoſita pulcherrimam ſubiit cryſtalliſationem, tenuiſſimas cryſtallos aciculares exhibentem, quae decantato ſuperſtite liquore, omne fere vitri ſpatium amoeniſſimo ſpectaculo occupauerunt.

Liquor ab iis decantatus et ad dimidium vsque euaporatus, dum refrigereſceret, ſimilem exhibuit cryſtalliſationem.

EXPER. V.

Lixiuio cauftico et fpiritu falis armoniaci cauftici, ad falis noftri folutionem aqnofam affufis, folutio plane non turbatur.

EXPER. VI.

Solutionis vero falis tartari ope larga terrae albiffimae copia e falis noftri folutione feparatur.

EXPER. VII.

Terrae huius probe edulcoratae pars aliqua acido nitri foluta, dum euaporatur, paruas quidem fed pulcherrime determinatas cryftallos octoëdricas fumma pelluciditate praeditas et aqua facile folubiles progenerat.

Terra ponderofa eodem cum acido octoëdricas quidem cryftallos quoque producit, fed opacas eas et minus diftinctas, et aqua folutu longe difficiliores.

Calx autem nitrata prismata quadrilatera, quae in aëre libero deliquefcunt, exhibet.

EXPER. VIII.

Cryftallulus falis illius noftri nitrofi, carboni candenti iniecta, nullum detonationis fignum prodidit.

EXPER. IX.

Salis huius nitrofi pars in tigillo ad candefcentiam vsque igni expofita valde initio intumefcens acido nitri omnino

nino prorſus liberabatur. Superſtes poſt calcinationem terra haec, ſolis radiis ſi exponatur, in tenebroſum translata locum nullam plane phoſphoreſcentiam oſtendit. Ceterum calcis vivae ad inſtar cauſtici ſaporis eſt.

EXPER. X.

Terra haec calcinata cum aqua pura cocta, aquae calcis tam ſapore quam odore ſimillimam largiebatur ſolutionem, quae aëris acceſſu ocyſſime cuticula terrea ſeſe induebat.

EXPER. XI.

Aquae aëre fixo impraegnatae acceſſu ſolutio iſta perinde ac aqua calcis ſtatim lacteſcens magnam terrae copiam deponit; haecce terra ſuperaddita largiore eiusdem aquae copia iterum plane ſoluitur.

Hisce tribus e tentaminibus inſignis terrae noſtrae ignotae cum terra calcarea ſimilitudo eluceſcit.

EXPER. XII. et XIII.

a) Cum aceto glaciali aqua diluto terra noſtra ſalis tartari ope praecipitata (Exper. VI.) inter ſolutionis euaporationem paruas cryſtallulos prismaticas compreſſas quadrilateras, quae in aëre ſiccae permanent, progenerat.

b) Terra vero ponderoſa eodem cum acido cryſtallos prismaticas hexagonas longe minorem, qua ſoluantur, aquae copiam requirentes ſuppeditat.

Calx autem acetata plumoſas exhibet cryſtallos.

§. 4. Sequentia experimenta comparativa cum ignota nimirum nostra terra salita, terraque ponderosa salita et calce salita, ita institui, vt singulorum horum salium purissimorum drachmam dimidiam 6 aquae purae unciis dissoluerem et solutionibus his in parvas portiones partitis indicata in tentaminibus salia adderem.

EXPER. XIV.

Additis solutionibus dictis aliquot spiritus vitriolici guttis, terrae ponderosae salitae et nostri salis solutiones, statim lactescentes, puluerem album non solubilem deponebant; calcis autem salitae solutio nullam plane mutationem prodidit.

EXPER. XV.

Crystallulorum salis Glauberiani additamentum eundem prorsus effectum producebat.

Duo igitur haec experimenta mirabilem nostrae terrae cum terra ponderosa conuenientiam exhibent.

EXPER. XVI.

Acidum sacchari solutionem salis nostri perinde quidem ac eam calcis salitae, sed tardius aliquantulum turbavit. Terrae vero ponderosae solutio ne minimam quidem mutationem subiit.

Hocce experimentum maiorem terrae nostrae cum terra calcarea similitudinem prodit.

EXPER. XVII.

Alcali vegetabile ſaccharatum omnibus tribus ſolutionibus quam citiſſimam inducebat lacteſcentiam et pulueris non reſolubilis praecipitationem.

EXPER. XVIII.

Acidi phoſphori puriſſimi additione omnes tres ſolutiones pelluciditatem ſuam prorſus illibatam conſervabant.

EXPER. XIX.

Soda vero phoſphorata in ſingulis ſolutionibus ſubitam et copioſam pulveris albi praecipitationem efficiebat.

EXPER. XX.

Borax ſingulas ſolutiones turbauit et ſedimentum album praecipitauit.

EXPER. XXI.

Eundem effectum alcali quoque vegetabile borraxatum exſeruit.

EXPER. XXII.

Acidi tartari puri in ſolutiones has nullus plane effectus fuit.

EXPER. XXIII.

Cryſtalli tartari tartariſati puriſſimae terrae ponderoſae ſalitae ſolutionem immutatam prorſus reliquerunt;

In

In ea autem calcis ſalitae ſubito largam calcis tartariſatae copiam pulveris non reſolubilis ſub forma praecipitaverunt.

Noſtri demum ſalis ſolutio initio limpiditatem ſeruavit, per horae vero quadrantem ad vitri fundum et parietes multitudo parviſſimarum quidem, ſed pellucidiſſimarum cryſtallulorum multifarie figuratarum concrevit.

Docente igitur hoc experimento terra noſtra ignota ab utraque terra, a calcarea nempe et ponderoſa, diſcrepantiam monſtrat.

EXPER. XXIV. et XXV.

Alcali vegetabile arſenicatum et ſoda ſuccinata nullam dictarum ſolutionum turbaverunt.

EXPER. XXVI.

Spiritu ſulphuris Beguini affuſo, noſtri ſalis et terrae ponderoſae ſalitae ſolutiones ſedimenti albi non nihil depoſuerunt; calcis autem ſalitae ſolutio nullam mutationem oſtendit.

Notandum hoc loco id quoque eſt, ubicunque in experimentis his expoſitis ſolutiones turbabantur, oriunda inde ſedimenta reſpectu gravitatis ipſorum ita ſe habuiſſe, vt terra ponderoſa grauiſſimum ſemper, terra vero noſtra multo levius, leviſſimum denique terra calcarea produceret.

§. 5.

§. 5. Ex tentaminibus his luculenter quidem patet, ſal noſtrum ſal medium eſſe terreum: ſed plurimae eiusdem proprietates peculiares indicant, terram in eo contentam ad nullum hucusque notarum terrarum genus referri poſſe. Iam enim, licet terra noſtra acidi vitriolici ope e ſua in acidis ſolutione eodem omnino ac terra ponderoſa modo ſub pulveris non reſolubilis forma praecipitetur (Exp. XIV. XV.), ſales tamen medii, quos duae hae terrae cum acidis ſalis, nitri et aceti generant, non forma tantum, ſed ſolubilitatis quoque gradu, toto coelo a ſe invicem diſcrepant (Exp. I. II. VII. XII.).

Terrae demum calcarea, muriatica et aluminis, acido muriatico praecipue nuptae, ſales exhibent quam difficillime in cryſtallos concreſcentes, aërisque humorem ſumma aviditate attrahentes. Noſtra contra terra eodem cum acido facillime abit in cryſtallos, quae aëri libero expoſitae, deliqueſcentiae loco, propriam potius cryſtalliſationis aquam amittunt et in pulverem ſiccum fateſcunt (Exp. I.).

Atque his omnibus probe perpenſis, fieri non potuit, quin tunc iam temporis, terram hanc meam e ſpatho ponderoſo obtentam nouam plane et ignotam hucusque terram genericam eſſe, ſuſpicarer. At ſtrontianam eam eſſe terram, vtpote cuius non niſi nomen ipſi datum noueram, nullo modo in mentem mihi venire potuit; ſiquidem nouisſime detectae huius terrae notae characteriſticae et proprietates profunde eo tempore me latuerunt; quo et id accedit, quod noveram, priores eiusdem inuentores eam in peculiari quodam, a ſpatho ponderoſo toto coelo diverſo fosſili, ſtrontianites quod audit, detegiſſe.

§. 7. Cum in eiusmodi inuentis chemicis summa adhiberi cautio debeat; ne forte praecipitatum iudicium ferrem, haud abs re mihi visum est, inuenti mei mentionem ante nullam facere, quam salis illius terrei maiorem copiam collegissem terramque eiusdem omni, qua fieri potest, examine chemico strenue essem perscrutatus. Hunc in finem ab illo inde tempore colligendi salis huius nullam praetermisi occasionem, ita, vt quotiescunque terram ponderosam salitam praepararem, semper aliqua eiusdem copia potitus essem, eaque non ex una eademque tantum spathi ponderosi specie, sed, quod mihi quidem imprimis memoratu dignum visum est, e variis etiam eiusdem varietatibus, iisque variis e locis profectis.

§. 8. Collectis iam quatuor salis illius unciis, mense demum Octobris anni praeterlapsi Annales chemicos Celeber. Crellii annorum 1793. et 1794. consecutus sum; in quibus cum egregiam Celeb. Klaprothii de terra Strontiana dissertationem legerem, summa admiratione affectus fui, cum omnes fere a Celeb. Klaprothio detectas terrae strontianae proprietates cum iis meae terrae supra expositis quam pulcherrime congruere cernerem. Perlecta hac dissertatione, ad plenam similitudinis, quae inter istas terras intercedit, demonstrationem, nihil reperi, quod desiderari posse videretur, nisi, vt eam quoque notatu dignam a peritissimo illo Viro detectam proprietatem, qua terra strontiana salita flammam incensi spiritus vini amoenissimo colore rubro carmineo imbuit, in mea quoque terra reperirem. Susceptoque statim hac de re tentamine, maxima mea voluptate hanc quoque proprietatem in meo etiam sale obtinere vidi, ita, vt perfectissima terrae meae e spatho ponderoso obtententae cum terra ſtrontiana ſimilitudo extra omnem dubitationem poſita eſſe iure mihi meritoque videatur.

§. 9. Antequam vlteriora, quae ipſemet inſtitui, hoc de argumento tentamina exponam; omnium, quae de ipſo ſtrontianite hucusque innotuerunt, momentorum et Celeber. imprimis Klaprothii experimentorum praemittere expoſitionem conſultum mihi videtur.

Memorabile hoc foſſile hodienum nullibi occurrit, niſi in Scotia in vena plumbifera montis granitoſi penes Strontiam. Notae externae lapidis huius hae ſunt: color ipſi albus eſt, plerumque vero virideſcens; ſemipellucidus eſt, ſubnitens, ſubdurus, friabilis; radiis in cunei formam conglommeratis, ſpatho ponderoſo amorpho inſertis. Initio foſſile hoc Witherites Werneri eſſe viſum eſt. At teſtantibus experimentis a Celeber. Blumenbachio, Sulzero et Crawfortio inchoatis, magna inter duo haec foſſilia diſcrepantia obtinet. (*)

E Witherite aër fixus nullo igne expellitur: Strontianites vero eo quidem liberatur; neque tamen niſi multo vehementiori igne, quam quidem is eſt, quem vllum lapidum calcareorum genus poſtulat.

Strontianites calcinatus, aqua vehementi cum calore ſoluitur, minimo vero aëris liberi acceſſu iterum praecipitatur.

(*) Blumenbachs Handbuch der Naturgeſchichte. 1791. S. 608.
Duncan's medical commentaries. Dec. II. Vol IV. pag. 436.
Memoirs of the Society of Mancheſter. Vol. III. pag. 599.

Solutio eiusdem in acido nitri tabulares largitur cryſtallos rubino ſpinello aemulas. Obſeruante Cel. D. Ashio charta ſolutione hac imbuta et exſiccata, dum incenditur, pulcherrima ardet flamma purpurea: Witherites autem, ceteris omnibus paribus, albam flaueſcentem paululum flammam gignit.

Hisce ex criteriis laudati Viri Celeberrimi, Strontianiten propriam terram primitiuam continere, ſuſpicati ſunt.

§. 10. Primaria autem momenta, quibus Cel. Klaproth propriam Strontianitis naturam eiusdemque a Witherite differentiam ingenioſe cauteque inſtitutis tentaminibus pulcherrime comprobauit, ſequentibus abſoluuntur: (*)

1.) Strontianites grauitate ſpecifica gaudet 3, 675. Witherites vero 4, 300.

2.) Centum Strontianitis grana in tigillo porcellaneo per duas horas vehementiſſimo igni furni aenemii expoſita non niſi ſemigrani iacturam pondere experta ſunt; quae iactura particulis aqueis expulſis adſcribenda eſſe videtur. Calcinatione vero per 5 horas continuata pondus 6 granis diminutum fuit. Calcinatus hoc modo Strontianites linguam ſapore cauſtico afficit. Cum quatuor aquae vnciis coctus aquam ſuppeditat aquae calcis guſtatu ſimilem, quae aëris liberi acceſſu breui tempore cruſtula terrea ſe induebat. Addito huic aquae acido vitriolico, terra ſtrontiana vitriolata ſub flocculorum forma fundum petiit. Iniectus mercurius ſubli-

(*) Crells chemiſche Annalen. 1793. St. 9. S. 189.

ſublimatus in calcem ex fuſco rubram conuertebatur, qui color, addita maiori huius aquae copia, in aurantium abiit.

Centum Witheritis grana igne pari modo tractata, nullam fère ponderis iacturam patiebantur, nec aqua cum ipſis cocta ſaporem vllum nacta eſt, ita, vt ipſis adeo reagentibus examinata, ab aqua puriſſima ne hilum quidem diſcreparet.

3.) Vncia dimidia Strontianitis in tigillo argillaceo igni vehementiſſimo furni porcellani expoſita, ipſam tigilli materiam aggrediendo diſſoluendoque in duriſſimum vitrum viridis coloris fuſa eſt.

Witherites pari modo tractatus eodem fere modo ſeſe habuit.

4.) Tentamine illo cum 100 granis vtriusque foſſilis in tigillis noti ponderis iterato; Strontianites 30; Witherites vero 22 granorum detrimentum pondere oſtenderunt.

5.) 100 Strontianitis grana acido ſalis, dum ſoluebantur, 30; 100 Witheritis autem grana ſimili ſolutione non niſi 22 grana amiſerunt.

Hisce ex tentaminibus tam via ſicca quam humida inſtitutis patet, Strontianiten terrae Strontianae $69\frac{1}{2}$; acidi aërei 30 partes et aquae dimidiam partem: Witheriten vero terrae ponderoſae 78; et aëris ſixi 22 partes, in centenario continere.

6.) Strontianitis in acido ſalis ſolutio lenta euaporatione pulchras longasque cryſtallos aciculares gignit, quae aëris humorem nullum attrahunt et aqua facillime ſolvuntur.

7.) Cryſtalli hae ſufficienti ſpiritus vini non admodum dephlegmati copia caloris adminiculo ſolutae ſpiritui id ſingulare conciliant, vt charta bibula, goſſypium, aliave eiusmodi corpora laxa ſolutione hac ſpirituoſa imbuta et incenſa amoena flamma rubra ardeant.

Duae igitur hae proprietates terrae ſtrontianae ſalitae, forma nimirum cryſtallorum acicularis et modo dicta flammam incenſi ſpiritus rubro colore tingendi facultas terrae huius a ponderoſa ceteriſque terris primitivis dignoſcendae optima ſuppeditant indicia.

8.) E Strontianitis cum nitroſo acido connubio cryſtalli ſurgunt, probe determinatae octoëdricae, ſumma pelluciditate praeditae, in aëre libero non deliqueſcentes.

Witherites eidem acido nuptus licet octoëdras quoque ſingat cryſtallos; hae tamen ab illis ſemipelluciditate formaeque inconſtantia et difficiliori cum aqua connubio facillime diſtinguuntur.

9.) Strontianitis in acido aceti frigore conſtricti ſolutio paruas cryſtallulos pellucidas, in aëre ſiccae quae permanent, et tenues rhombos tabellares exhibent, largiebatur.

Witherites vero hoc cum acido non niſi maſſam informem in aëre deliqueſcentem ſuppeditavit.

10.)

10.) Reactionem acidi vitriolici quod attinet; inter bina haec fossilium genera primo quidem intuitu similitudo quaedam intercedere videtur. 60 nimirum Strontianitis grana, in retorta cum duabus olei vitriolici vnciis cocta, solutionem suppeditaverunt limpidissimam, quae vero, addita aqua, statim praecipitabatur. Nonnullarum autem aquae guttarum additione solutio illa coagulabatur nec non lacteam induebat faciem. Vnica solutionis illius limpidae guttula 4 aquae vnciis addita aquam confestim turbando terram strontianam vitriolatam pulueris sub forma deposuit. Per aliquot dierum interuallum in solutione illa concentrata crystalluli stellares et fasciculares oriebantur.

Haec eadem phoenomena Witherites quoque simili modo cum acido vitriolico tractatus prodidit.

11.) In solutionibus tam Strontianitis quam Witheritis muriaticis alcali volatile omni acido aëreo orbatum nullam omnino terrarum praecipitationem movit: quae vero praecipitatio, supperaddita postea vel minima alcali aërati portione, extemplo subsecuta est.

12.) 100 grana Strontianitis in acido marino soluta, acidique vitriolici ope praecipitata, 114 terrae Strontianae vitriolatae grana largiebantur.

13.) 8 aquae purae vnciis, coctionis adeo auxilio, non nisi tria terrae strontianae vitriolatae grana soluebantur.

14.) Guttis tribus solutionis terrae Strontianae salitae ad vnius grani tartari vitriolati in 6 aquae destillatae

tae vnciis ſolutionem additis, liquor plane non turbatus fuit; poſtero vero die ſedimentum conſpiciebatur.

Idem experimentum cum terra ponderoſa ſalita ſusceptum, ipſo miſtionis momento ſolutionem ſubito turbari, docuit.

15.) Pulcherrima denique et memoratu vel maxime digna terrae ſtrontianae proprietas a Celeberrimis Viris Klaprothio et Kirwanio detecta *), in eo vertitur, quod terra haec calcinationis ope aëre fixo omnique alio connubio plane orbata et aqua calida ſoluta, poſt refrigerationem in cryſtallos concreſcit.

Cel. Klaproth ſtrontianitis fruſtulum 160 granorum carboni excauato incluſum in tigillo optime clauſo et in loco furni porcellani calidiſſimo expoſitum calcinationi ſubiecit. Vehementiſſimo hoc igne ſtrontianites, ne minimum quidem fuſionis veſtigium prodens, omnem omnino amiſit aërem fixum, indeque $49\frac{1}{2}$ granorum decrementum ſubiit. Atque calcinatum hoc foſſile in puluerem redactum bisque ſingulis vicibus vna cum aquae deſtillatae libra coctum penitus fere ſoluebatur. Prior harum ſolutionum filtrata et in vitro obturato repoſita poſt horam dimidiam cryſtallos gignere incipiebat, quae ad oculum quaſi creſcentes pulcherrimam cryſtallorum congeriem formabant.

Cryſtalli hae perfecte pellucidae formaque aciculari aggregationem planitierum exhibuerunt innumeris filamentis

*) Crells chemiſche Annalen 1794. St. 2. S. 99.

tis irretitarum, ita, vt criſtalliſationis huius figura eam cryſtallorum ſalis armoniaci vel argentum nativum Potoſianum, cui cryſtalliſatio magnorum foliorum dentriticorum eſſe ſolet, perfecte imitaretur.

In altera vero Strontianitis calcinati ſolutione, non niſi praeterlapſis aliquot diebus, cryſtalluli, eaeque non plumoſae, ſed paruas tabulas quadratas oblongas marginibus acuminatis referentes, apparuere. Cryſtalli hae terrae ſtrontianae purae cauſtico gaudent ſapore; aëri libero expoſitae pelluciditatem amittentes albeſcunt, acidisque ſine vlla plane efferueſcentia placide ſolvuntur.

Hac vnica iam eaque mira cryſtalliſandi facultate terra ſtrontiana maximam ſibi ab omnibus ceteris terris primitiuis hactenus notis diſtinctionem vendicat, vtpote quarum, ſi purae ſint, nulla artificialem cryſtalliſationem admittit.

§. 11. Omnibus igitur hisce modo expoſitis momentis in Cel. Klaprothii diſſertatione ſtabilitis, cum terrae ſtrontianae propria eaque generica natura extra omne dubium poſita ſit: huius terrae acceſſu terrarum primitiuarum numerum nona ſpecie auctum conſpicimus, quae nimirum iam nouem ſunt ſequentes: ſilicea, calcarea, muriatica, argillacea, ponderoſa, Auſtralis, quam Cel. Wedgwood detegit; Zirconia, ſpathi adamantini vel Corundina, quas Cel. Klaprothio debemus; denique Strontiana.

§. 12. Noviſſimam hanc terram quod attinet, nihil certe pulchrius accidere potuit eo, quod eadem fortuito

 longe

longe in diverſiſſimis foſſilibus in ſtrontianite nimirum et ſpatho ponderoſo ſeſe obtulerit. Strontianites enim, ceu proprium huius terrae foſſile, praeter terram hanc acido aëreo nuptam alieni nihil complectitur. In ſpatho autem ponderoſo terra Strontiana, non niſi parce in eo reperiunda, partem eiusdem conſtituentem peregrinam vel paraſiticam quaſi conſtituit.

§. 13. Magni nunc quidem momenti mihi viſum eſt, terra haec ſitne fortuito quaſi non niſi quibusdam ſpathis ponderoſis, an in vniuerſum omnibus admixta, experiri, et 20 diuerſiſſimis ſpathi ponderoſi tam Sibirici quam Anglici, Saxonici, Hercinici et Ungarici ſpeciebus, ad examen hunc in finem revocatis, ne vllam tamen hactenus illius expertem reperi; quin ipſe adeo Witherites tam Sibiricus quam Anglicus terram ſtrontianam fovet.

§. 14. Vt cognoſcerem, ſitne terra ſtrontiana ſpatho ponderoſo mechanice tantum an chemice admiſta; experimenta inſtitui ſequentia:

EXPER. XXVII.

Unciam unam ſpathi ponderoſi amorphi in puluerem ſubtiliſſimum redacti vna cum vncia acidi ſalis aqua debite diluti validae et diuturnae expoſui coctioni. In filtrato poſtea liquore, praeter ferreo-metallicas, quas acidum ſalis e ſpatho ſoluit, terrenas partes omnino nullas in eo detegere mihi licuit.

EX-

EXPER. XXVIII.

Spathum ponderosum dum funditur cum alcali, cum aliquam partem indestructam relinquere semper soleat: operae pretium mihi visum est, lateatne et in hac superstite parte terra Strontiana, experiri. Suscepto itaque hunc in scopum experimento, e duodecim superstitis eiusmodi spathi indestructi unciis, iis iterum iterumque cum alcali colliquatis, operatione finita revera perinde ac e recente spatho ponderoso proportionatam prorsus terrae strontianae salitae copiam assecutus sum.

Duo haec experimenta luculenter satis euincunt, terram strontianam spatho ponderoso reuera chemice inhaerere, eamque simili, ac ipsa terra ponderosa, modo cum acido vitriolico combinatam esse.

Cum igitur terra haec dicto modo in omni spatho ponderoso deprehendatur (§. 13.); meo quidem iudicio ea iam huius fossilis definitio statuenda esse videtur, vt dicatur *Terra ponderosa et strontiana vitriolico acido adunatae.*

§. 16. Terram strontianam cum natura in vniuersum in spatho ponderoso acido vitriolico vnitam suppeditet; fallor, an fieri potest, vt terram hanc etiam vnam acido vitriolico nuptam aliquando inueniamus, sicuti ea in strontianite vnico acido aëreo vnita prostat. Nullo hactenus successu hunc in finem ego quidem varias e satis copiosa mea spathorum ponderosorum collectione species examinaui; et hac in re spes ea, quam praecipue de peculiari illa spathi ponderosi fascicularis specie conceperam, quae Herciniae in vena Laurentia (Lorenz=Gegentrum) occurrit, egregie me fefellit.

§. 17. Hisce iam propoſitis, eorum quoque experimentorum expoſitionem aggrediar, quorum eventus parum aberat, quin efficeret, vt propriam terrae ſtrontianae naturam in dubium vocarem.

Explorata ſcilicet terrae ſtrontianae in ſpatho omni ponderoſo praeſentia, in mentem mihi venit explorare, ſitne terra noſtra ſpathis etiam calcareis admixta, quae ponderoſo praecipue ſpatho ſaepiſſime paraſitice inſident; cuius rei criterium ab expoſita terrae noſtrae facultate, flammam incenſi ſpiritus rubro colore imbuendi, facillime et tutiſſime repeti poſſe, mihi videbatur.

EXPER. XXIX.

10 igitur cryſtallulorum pyramidalium ſpathi calcarei granis ponderoſo cuidam ſpatho Vngarico inſidentibus debita acidi ſalis copia ſolutis, ſolutioneque ad ſiccitatem inſpiſſata, ortam inde calcem ſalitam ſiccam ſpiritu rectificatiſſimo ſolui. Charta bibula ſolutione hac ſpirituoſa impraegnata et ad candelam incenſa, maxima mea voluptate eamdem prorſus, qua ipſius terrae ſtrontianae ſalitae ſolutio ſpirituoſa ardere ſolet, pulcherrimam flammam multo carmineo colore intermixtam conſpexi, et amoeno huic phoenomino ſiſus, examinatum hoc ſpathum calcareum multam terram ſtrontianam aëratam in ſinu ſuo ſovere, laetabundus conieci.

§. 18.

§. 18. Neque tamen diuturna fuit iſta laetitia mea; rem enim paucis vt abſoluam, phoenomenon illud flammae rubrae omnes ceterae, quas deinceps ad examen reuocare mihi licuit, ſpathi calcarei ſpecies, nec non creta, quin ipſum adeo ſpathum Islandicum puriſſimum et pellucidiſſimum exhibuerunt; ex quo ſuſpicari coepi, proprietatem illam ipſi adeo terrae calcareae communem eſſe. Inſtituto hunc in finem experimento, rem reuera ita ſe habere, reperi: iam enim ſolutio ſpirituoſa e puriſſimis calcis ſalitae cryſtallis facta, ſimili prorſus modo amoeno illo colore rubro arſit.

Cum igitur proprietas illa flammam rubro colore imbuendi duobus diuerſis terrarum generibus communis ſit, detegendae terrae ſtrontianae praeſentiae ea neutiquam inſeruire iam poteſt; hocque intuitu nouiter detecta haec terrae calcareae proprietas grata quidem mihi, at iucunda neutiquam, fuit.

§. 19. Repertis itaque nonnullis terrae noſtrae cum terra ponderoſa, potiſſimum autem cum calcarea, ſimilitudinibus: ſatis numeroſae earundem diſcrepantiae impedire non potuerunt, quominus de ipſa et propria terrae ſtrontianae natura ſubdubitare inciperem, exiſtimans, fieri poſſe, vt terra haec noſtra nihil aliud forte ſit, niſi memoratarum terrarum, ponderoſae videlicet et calcareae, intime inter ſe mixtarum productum.

§. 20. Atque ſuſpicioni illi meae haec praecipue argumenta favere et pondus addere, mihi quidem videbantur. Terrarum nimirum abſorbentium a ſe inuicem diſcrepantiae ex proprietatibus ſalium mediorum, earum ope cum acidis producendorum, potiſſimum dignoſcuntur. Conſtat porro, varia ſalium terreorum genera, vna eademque in ſolutione contenta, cryſtalliſationis adminiculo pulcherrime a ſe invicem ſecedere, dum ſingula in proprias ſuas concreſcant cryſtallos. Haecce variorum ſalium vna ſolutorum per cryſtalliſationem a ſe inuicem ſpontanea ſeceſſio non niſi ea conditione ſit, vt ſalia illa nulla reciproca in ſe inuicem attractione polleant. At conſtat contra, dari varia eiusmodi quoque ſalia, quae iunctim ſoluta tantum abeſt, vt per cryſtalliſationem a ſe inuicem ſegregentur, vt potius homogeneum et omnino ſui generis ſal, in cryſtallos ab iis ſalium illud conſtituentium toto coelo diſcrepantes abiens, progenerent. Exemplum huius rei maxime manifeſtum ſal de Seignette, e duobus ſalibus neutris, ex alcali nempe vegetabili tartariſato et ſoda tartariſata conflatum, exhibet.

Atque hanc praecipue peculiarem nonnullorum ſalium proprietatem perpendens, non potui, quin exiſtimarem, haud immerito quaeri potuiſſe, an ſalia iſta, e terra ſtrontiana parata, notas ſuas diſcrepantes ſimili quoque intimo duorum ſalium, ex terra nempe ponderoſa calcareaque cum acidis iunctim conflatorum, connubio debeant?

§. 21. Cum poſitiones chemicae experimentis potius, quam ſolis hypotheſibus fulciri debeant; dubiorum meorum, poſtquam rei cardinem in momentis ſupra expoſitis verſari intellexiſſem, ſolutio ex ſequentibus experimentis facile repeti poſſe mihi viſa eſt.

EX-

EXPER. XXX.

Vnciam vnam calcis ſalitae ſiccae et duas terrae ponderoſae ſalitae, probe mixtas, debitaque aquae copia iunctim ſolutas et filtratas, lenta euaporatione ad cryſtalliſationem diſpoſui. Initio non niſi terrae ponderoſae ſalitae cryſtalli concreverunt, vltima demum ſolutionis portio puram calcem ſalitam continebat, ita, vt ne minimam quidem naturae ipſius mutationem in ea deprehendere mihi licuerit.

Teſtante igitur experimenti huius eventu, duo haec ſalia vna ſoluta nullum plane ineunt conſortium, ſimplici enim cryſtalliſatione a ſe inuicem quam perfectiſſime ſegregantur.

§. 22. Cum autem ad obtinendam terram ſtrontianam ſalitam ſpathi ponderoſi reſolutio non niſi vehementiori igne adiutore fiat; obiicies forte, fieri poſſe, vt binae terrae iſtae, calcarea et ponderoſa, intenſo illo igne intimum illud, quod ſuſpicari licet, connubium inire et aliquam ipſius naturae ſuae mutationem pati cogantur.

At hodienum artificialis eiusmodi terrarum mutationis exemplum proſtat plane nullum; pone enim, omnes hucusque notas terras primitiuas vehementiſſimo ignis gradu in maſſam homogeneam vitream confundi; hoc tamen non obſtante, terrae hae intime confuſae perfectiſſime ita ſeiungi a ſe inuicem iterum poſſunt, vt ſingulas, ſaluis omnibus ipſarum notis characteriſticis, ſeorſim obtinere liceat. Haec tamen veritas non obſtitit, quominus ſequens experimentum adgrederer.

EX-

EXPER. XXXI.

Calcem ſalitam et terram ponderoſam ſalitam antecedentis experimenti, mixtas, iunctim ſolutas et ad ſiccitatem iterum inſpiſſatas, vehementiſſimo igni expoſui, fuſasque per horam integram in iſto ignis gradu detinui, poſteaque materiam refrigeratam et aqua ſolutam, ad cryſtalliſationem diſpoſui. Finita hac operatione, bina iſta ſalia a ſe inuicem divulſa obtinui, ita, vt calcem ſalitam perinde ac antea (Exper. XXX.) immutatam plane in ſolutionis muria deprehenderem.

Vt nihil hac in re intentatum relinquerem, ſequens etiam experimentum inſtitui:

EXPER. XXXII.

Solutioni ex vna calcis ſalitae et duabus terrae ponderoſae ſalitae vnciis conſtanti ſucceſſiue eousque acidum vitriolicum addidi, donec nihil amplius inde ad fundum delaberetur. Hoc facto, ſpathum ponderoſum et gypſum praecipitationis huius ope iunctim regenerata, ſpiritus rectificatiſſimi auxilio, ab addito ſuperuacuo acido liberaui, materiamque probe ſiccatam et cum dupla ſalis tartari quantitate mixtam, eodem modo ac ipſum ſpathum ponderoſum tractari conſuevit, in tigillo igni fuſorio expoſui, terrasque ab acido vitriolico liberatas, et aqua lotas acido ſalis ſolui, ſolutionemque ad cryſtalliſationem diſpoſui. At ne hac quidem manipulatione valde complicata vllam terrae calcareae mutationem conciliare mihi licuit.

§. 23.

§. 23. Hisce igitur tentaminibus illa, cuius ſupra mentionem feci, ſuſpicio mea, terram nimirum ſtrontianam non niſi terram eſſe calcaream intimiori aliquo terrae ponderoſae acceſſu mutatam, fallor an funditus euellitur? ita vt de generica terrae noſtrae natura ne vllum quidem iam dubium ſupereſſe poſſit. Verum enim vero obiicere quis forte poſſet, eiusmodi mutationes corporum, licet noſtrae arti negatae ſint, naturae tamen viribus effici poſſe: at hoc qui obiicere voluerit, haud patet, qua ratione negare poſſet, idem pari iure de ceteris quoque terris ſimplicibus aſſeri poſſe. Sed, quid multis? Si vel centum quoque nouas terras detegi contingeret, dummodo ſingulae peculiari quadam nota praeditae eſſent; eas ad vnam omnes primitiuas cenſeri oporteret, donec experimentis vel in ſimpliciores reſolui vel arte transmutari vna in alteram poſſent.

§. 24. Terrae ſtrontianae in ſpatho ponderoſo detegendae cum terrae ponderoſae ſalitae praeparatio primam occaſionem mihi praebuiſſet; magni mea interfuit, duorum horum ſalium proprietates diagnoſticas vlterius explorare. Ex ipſa enim hac cognitione commodior binas has terras a ſe inuicem diuellendi methodus repetenda eſſe videbatur. Hunc in finem aquae cryſtalliſationis copiam in ſalibus noſtris contentam, eorumque diuerſas ſoluendi facultates ſequentibus experimentis comparatiuis inueſtigari, ante omnia neceſſarium eſſe duxi.

EXPER. XXXIII. et XXXIV.

a) 100 grana cryſtallorum terrae Strontianae ſalitae in vitro noti ponderis cineri calidiſſimo impoſui; expulſa omni plane humiditate vel cryſtalliſationis aqua, ſal calidum adhuc ſtatera examinatum ponderis 46 granorum decrementum oſtendit.

b) 100 grana terrae ponderoſae ſalitae eodem modo tractata, non niſi 11 granorum iacturam paſſa ſunt.

Terra igitur ſtrontiana ſalita, aquae cryſtalliſationis copiam quod attinet, ponderoſam ſalitam multum praecedit; ſiquidem illa 46, haec vero non niſi 11 aquae partes in centenario continet.

EXPER. XXXV. et XXXVI.

a) Aquae ad 135 gradus de l'Islianos calenti ſucceſſiue et accedente tritura eo vsque terram ſtrontianam ſalitam cryſtalliſatam et pulueriſatam admiſcui, donec vltima addita ſalis portio non iam ſolueretur. Hoc facto, 608 filtratae pleneque ſaturatae ſolutionis huius grana in vitro noti ponderis ad perfectam ſiccitatem vsque euaporaui, expulſisque denique vehementiori calore ipſis quoque omnibus aquae cryſtalliſationis particulis, 211 ſicciſſimi noſtri ſalis grana remanſerunt. Cum igitur 54 ſalis noſtri omni cryſtalliſationis aqua deſtituti partes 100 grana eiusdem ſalis cryſtallorum ſub forma efficiant (Exper. XXXIII.); reſidua illa poſt euaporationem 211 ſalis ſicci grana ante ſolutionem neceſſario $390\frac{20}{27}$ granis ſalis cryſtalliſati reſpondebant; quibus a ſaturatae ſolutionis pondere 608 nimirum granorum ſubtractis; reſiduum $217\frac{7}{27}$ granorum aquae copiam indicat, quam dicta cryſtallorum quantitas, vt perfecte ſolueretur, requirebat. Hinc, vnam ſalis noſtri cryſtalliſati partem in ſupra dicta temperatura 135 graduum non niſi 0,556 aquae par-

partes, vt soluatur, postulare, atque vnam aquae partem 1, 790 salis partes soluere, patet.

b) Eodem prorsus modo eademque temperatura terram quoque ponderosam salitam tractaui. 886 perfecte saturatae huius salis solutionis grana evaporata, 224 grana salis siccissimi reliquerunt. Hinc vna huius salis pars 2, 638 aquae partes, vt soluatur, postulat, et vna aquae parte non nisi 0, 393 salis partes solvuntur.

§. 25. Vt salium illorum eam, quam alcohol vini solueret, copiam accurate cognoscerem, tantam eorundem pulverisatorum copiam, quae omnis solui non potuisset, cum alcohole omni phlegmate perfectissime orbato in vitris mixtam, per aliquot horas accedente frequentiori agitatione 100 graduum calori exposui, filtratasque deinde solutiones, vti supra, in vitris noti ponderis ad summam siccitatem vsque euaporaui.

EXPER. XXXVII. et XXXVIII.

a) 1542 grana saturatae solutionis terrae Strontianae salitae plane exsiccata, 68 salis siccissimi grana reliquerunt. In dicta igitur temperatura 100 graduum vna alcoholis parte 0, 046 partes salis aqua crystallisationis carentis solvuntur: vnaque salis eiusmodi sicci pars, vt soluatur, 21, 676 alcoholis partes postulat.

Crystallorum autem sub forma vna alcoholis pars 0, 088 partes salis soluit, et vna salis pars 11, 250 alcoholis partes requirit (Exper. XXXIII.).

b) 1974 ſolutionis terrae ponderoſae ſalitae grana duo tantum ſalis ſicciſſimi grana reliquerunt. Hinc vna alcoholis pars c, 001 partes ſalis recipit; vnaque ſalis pars 968 alcoholis partes poſtulat.

§. 26. Cum in expoſitis his experimentis ſalia aqua cryſtalliſationis gaudentia adhibuiſſem: haud ſuperfluum mihi viſum eſt, tentamina illa cum ſalibus, omnibus particulis aqueis antea orbatis, repetere, vt pateſceret, annon ipſa haec cryſtalliſationis aqua ad ſoluenda ſalia aliquid conferat. Hunc in finem terram tam ponderoſam quam ſtrontianam ſalitam cryſtalliſationis aqua prorſus antea orbatas ſimili plane modo ac in antecedentibus tentaminibus cum alcohole maxime dephlegmato tractaui.

EXPER. XXXIX. et XL.

a) 1300 grana ſolutionis terrae ſtrontianae ſalitae ad ſiccitatem evaporata 42 ſalis ſicciſſimi grana reliquerunt. Hinc ſequitur, vnam alcoholis partem c, c33 ſalis noſtri partes ſoluere; vnamque ſicciſſimi huius ſalis partem 29,952 alcoholis partes requirere.

b) 5512 grana ſaturatae ſolutionis terrae ponderoſae ſalitae non niſi vnum ſalis granum relinquebant.

Experimentis his docentibus cryſtalliſationis aqua ad ſoluenda ſalia noſtra in ſpiritu rectificatiſſimo revera ſymbolum ſuum in antecedentibus experimentis quodammodo contulit.

EX-

EXPER. XLI.

1184 grana faturatae folutionis terrae Strontianae falitae fpirituofae ebullitionis adminiculo factae poft plenariam evaporationem 168 falis ficciffimi grana reliquerunt.

Accedente igitur coctione vna alcoholis pars 0, 142 Salis noftri ficciffimi partes foluit; vnaque falis pars auxiliante ebullitione 7, 00 alcoholis partes tantum exigit.

Nota. Solutio haec fpirituofa faturata feruidiffima adhuc filtretur, oportet; fiquidem maxima foluti falis pars inter ipfam refrigerationem repente ac pulcherrime in cryftallos aciculares floribus Benzoinis fimillimas concrefcit.

§. 27. Atque duae hae falium noftrorum diuerfae qualitates, facillima nimirum vnius et difficillima alterius in fpiritu vini folubilitas pulcherrimam fane duarum harum terrarum a fe inuicem divellendarum methodum fuppeditant, qua id quoque obtinetur, vt qua fuerint proportione mixtae, cognofcatur. Ipfum autem medii huius vfum infra, vbi de terrae ftrontianae e fpatho ponderofo fegregatione fermo mihi erit, vberius exponam.

§. 28. Cum terra ftrontiana, praeter multas, quibus gaudet, alias cum calce fimilitudines, acido falis iuncta hanc quoque in alcohole folubilitatem cum calce falita communem habeat; non alienum mihi videbatur, explorare, quantum haec duo falia, copiam, qua fpiritu folvuntur, quod attinet, a fe inuicem diffideant.

EXPER. XLII.

840 grana folutionis calcis falitae fpirituofae, fatis frigida temperatura 144 nimirum graduum, factae, euaporatione ad ficcitatem redacta, 360 falis ficciffimi grana reliquerunt, indeque dicta in temperatura vna alcoholis parte 0, 75 calcis falitae ficciffimae partes foluuntur; vnaque falis pars 1, 33 fpiritus maxime dephlegmati partes postulat.

EXPER. XLIII.

Eadem temperatura 144 graduum vna terrae ftrontianae falitae pars 90 alcoholis partes, vt foluatur, poftulat; vnaque hinc alcoholis parte non nifi 0, 011 falis noftri partes folvuntur.

EXPER. XLIV.

Coctionis adminiculo Alcohol tam ingentem calcis falitae copiam recipit, vt eam accurate neutiquam definire liceat; duae enim calcis falitae ficciffimae partes vna alcoholis parte perfecte foluebantur, folutioque haec, cuius fpiffiffima erat confiftentia, inter refrigerandum ociffima coagulatione in maffam folidam conuertebatur: atque ob infignem hanc calcis falitae folubilitatem fit, vt folutio fpirituofa, licet minori falis copia imbuta fit, frigori expofita regularem cryftallorum concrefcentiam prorfus nullam admittat.

Terra igitur ftrontiana falita non facillima tantum fua in fpiritu vini cryftallifabilitate, fed longe difficiliore quoque fua in eodem folubilitate, a terra calcarea infigni ter difcrepat.

§. 29.

§. 29. Ad ſtabiliendam proportionem, qua pura terra ſtrontiana et ponderoſa in ſalibus noſtris contineantur, ſequentia tentamina adgreſſus ſum:

EXPER. XLV. et XLVI.

a.) Solutis in aqua pura 100 terrae ſtrontianae ſalitae omni cryſtalliſationis aqua orbatae granis, plenariam terrae praecipitationem ſalis tartari ope ſuſcepi: obtenta hoc modo terra ſtrontiana aërata probe edulcorata et ſiccata 68 grana ponderauit.

b.) 100 terrae ponderoſae ſalitae ſicciſſimae grana ſimili tractatione 89 terrae ponderoſae aëratae grana largiebantur.

Atque, cum docente Celeb. Klaprothio, 100 terrae ponderoſae aëratae partes 22 aëris fixi partes complectantur (§. 10. n. 4.), terram ponderoſam ſalitam ſicciſſimam 31 acidi ſalis, et 69 terrae ponderoſae purae partibus conſtare, patet.

EXPER. XLVII.

Terra ſtrontiana quia vehementiore igne ipſam tigilli materiam aggreditur (§. 10. n. 3.), calcinationem eiusdem ad praeceptum peritiſſimi Klaprothii ita adornaui, vt tigillum accurate carbone integro et reſidua inter carbonem et internum tigilli parietem interſtitia arena replerem. Factam deinceps in ipſo carbone cauitatem 43 terrae ſtrontianae aëratae granis probe replevi, hacque cauitate carbonaceo operculo obſtructa, tigillum exactiſſime limo oblinitum per horas

horas duas vehementiſſimo furni aenemii igni expoſui. Omnibus refrigeratis, relaxatisque tam tigilli quam carbonis operculis; calcinatam et in vnam maſſam ſatis duram quam pulcherrime contractam terram, e carbonis cauitate facillime eximendam, 14 ponderis granorum decrementum ſuſtinuiſſe, deprehendi.

Atque hinc ſequitur, terram meam ſtrontianam aëratam in centenario $32\frac{1}{2}$ acidi aërei, terrae vero purae $67\frac{1}{2}$ centenas partes continuiſſe; quae proportio haud ita multum ab ea diſſidet, quam Cel. Klaprothius in ipſo ſtrontianite reperit (§. 10. n. 5.).

Terra igitur ſtrontiana ſalita omni aqua cryſtalliſationis orbata 54 acidi marini ſicci et 46 terrae purae partes in centenario continet.

§. 30. Terrae meae e ſpatho ponderoſo elicitae cum illa ſtrontianitis ſimilitudinem etſi expoſitae hucusque eiusdem proprietates manifeſto ſane comprobant: ea tamen, vt plane extra omne dubium poneretur, ſupererat, vt experimenta quoque circa plane ſingularem illam a Celeb. viris Klaprothio et Kirwano detectam purae huius terrae cryſtalliſandi facultatem inſtituerem.

EXPER. XLVIII.

25 calcinatae meae terrae grana (EXP. XLVII.) vna cum aquae purae uncia coctioni tradita plane fere ſoluebantur. Solutio haec fervidiſſima adhuc per chartam bibulam trajecta inque vitro probe clauſo loco quieto repoſita,

ta, nondum refrigerata, elapſo 5 tantum horae minutorum interuallo, maxima mea voluptate mirabili cum celeritate ad vitri fundum et latera inſignem multitudinem diſtinctarum cryſtallulorum prismaticarum quadrilaterarum depoſuit, quae ſumma pelluciditate ſua cryſtallorum ſalinarum aggregatum perfectiſſime referebant.

§. 31. Notandum hic loci id quoque eſt, calcem viuam a terra ſtrontiana calcinata, cauſticitatis gradum quod attinet, multis paraſangis ſuperari; admodum enim parua eiusdem molecula vix ac ne vix quidem linguae admota, lapidis cauſtici ad inſtar, vehementiſſimum et urentem dolorem excitat.

Aqua frigida terrae huic calcinatae in puluerem redactae adfuſa efferueſcentiam et ſtrepitum eo, qui in calce viva obſeruatur, longe fortiorem quoque ſuſcitat. Hocce in caſu id praecipue memoratu dignum mihi viſum eſt, terram noſtram pulueriſatam, affuſa aqua frigida, ocyſſime in duriſſimam maſſam mortario lapideo, in quo tentamen hoc inſtitui, tam pertinaciter adhaerentem abire, vt eam nulla fere vi avellere potuerim, quae tamen indurata initio masſa poſt aliquot tempus, adfuſa maiori aquae copia, ſponte molleſcit. Calcem viuam contra, conſtat, affuſa aqua in ſubtiliſſimum puluerem dilabi.

Ad ſolutionem aquoſam ipſam feruidam adhuc quod attinet, quam aquam ſtrontianam nuncupare poſſe iudico; ea aquam calcis tam odore nauſeoſo quam acri ſapore multum ſuperat.

Cryſtallorum vero ex iſta terrae noſtrae aqua ſegregatarum ſaporem cauſticum valde diminutum, immo fere deletum deprehendi.

§. 32. Cum, docente Cel. Hoffmanno*), partes metallicae, ſolutionem terrae ponderoſae ſalitae inquinantes, omnes praecipitentur, ſimulac ſolutioni illi ſufficiens terrae ponderoſae, ſiue calcinatae ſiue aëratae, copia additur; neceſſarium mihi viſum eſt, inueſtigare, annon et ipſa quoque terra ſtrontiana cum metallicis illis particulis hoc artificio vna praecipitetur; ſiquidem ex hoc quoque euentu terrae noſtrae e ſpatho ponderoſo ſegregandae modus deriuari poſſe videbatur.

EXPER. XLIX.

Terrae ſtrontianae ſalitae cryſtalliſatae grana 10 in duabus aquae purae unciis ſolui, ſolutis 12 terrae ponderoſae aëratae grana addidi et miſtionem per aliquot tempus digeſtioni et coctioni ſubieci. Filtrata deinde ſolutio et ad ſiccitatem euaporata, terrae ſtrontianae ſalitae loco, 11 terrae ponderoſae ſicciſſimae grana ſuppeditauit, quae, duabus alcoholis drachmis digeſta, non nihil terrae ſtrontianae ſalitae non decompoſitae prodiderunt.

Superſtes in tentamine hoc, poſt coctionem et filtrationem, terra ſtrontiana aërata, acido ſalis ſoluta filtrataque et ad ſiccitatem euaporata, praeter terram ſtrontianam ſalitam, terrae quoque ponderoſae ſalitae aliquam copiam largiebatur.

Hocce

*) Crells chemiſche Annalen. 1792. B. 1. S. 155.

Hocce ex tentamine, terram ſtrontianam ſalitam terrae ponderoſae aëratae acceſſu reapſe quidem, ſed imperfecte tantum deſtrui, liquet. Fieri tamen poſſet, vt perfecta ſalis noſtri contingeret deſtructio, ſi miſtio diuturniori digeſtioni nec non coctioni ſubiiceretur.

Nota. Fatendum mihi quidem eſt, pro faciliori terrae ſtrontianae e ſpatho ponderoſo ſegregatione me contrarium potius experimenti huius eventum in votis habuiſſe; quodſi enim terrae ponderoſae acceſſu ſalia ſolummodo metallica, ſalua terra ſtrontiana ſalita, deſtruerentur; vno eodemque artificio amborum ſalium, terrae nimirum ſtrontianae et ponderoſae ſalitae, a particulis metallicis depurationem efficere liceret.

§. 33. Enumeratis potioribus momentis, ex quorum cognitione terrae ſtrontianae e ſpatho ponderoſo eliciendae methodum repetere allaboraui, ſupereſt, vt ipſum procedendi modum exponam.

I. Duae ſpathi ponderoſi in pulverem ſubtiliſſimum redacti librae cum ſesqui vel duabus ſalis tartari probe ſiccati libris mixtae tigilloque immiſſae, igne ſenſim ſenſimque aucto, fundantur. Materia haec per horae quadrantem in fluore detenta infundatur mortario metallico et in puluerem redigatur.

Nota. Etſi Chemicorum nonnulli materiae ſolum ignitionem vel calcinationem per aliquot horas loco plenariae fuſionis commendant: mihi tamen ideo praecipue eius fuſio placet, quia mixtorum in ſe inuicem actio hac ratione valde fubleuatur. Indubiis enim experimentis perfuafus fum, fpathi ponderofi indeftructi copiam accedente fufione longe minorem quam fimplici mixtorum calcinatione, remanere.

II. Fufa et puluerifata illa materia cum 150 circiter aquae purae libris validiori vni coctioni in aheno ftanno obducto fubiiciatur. Omnibus deinde particulis terreis ad fundum depofitis, liquor falinus et limpidus decantetur, fedimentumque terreum facco linteo conoideo, vt omnis liquor reliquus defluat, infundatur.

Nota. Quamuis iterata colliquatae materiae cum aqua lotura ad omnes particulas falinas remouendas conduceret; de induftria tamen non nifi vnicam fuafi, idque ea de caufa, quia in fubfequentibus lotionibus tenuiffimae particulae terreae per omnem fuperfufae aquae molem fufpenfae natant, ita, vt ne quantumuis diuturna quidem quiete fundum petant: praeterea experimento compertum habeo, tenuiores has particulas terreas, ad fundum aegerrime fecedentes, ipfius terrae ftrontianae magnam vim continere. Ceterum parua illa falis copia, quae imperfecta hac lotione cum terris mixta relinquitur, nullius fere momenti eft; fiquidem poftea fub falis digeftiui forma facile feparatur.

III. Separato omni liquore, terra e facco eximatur et 10 aquae libris mifceatur, acidoque falis marini foluatur, ea tamen conditione, vt in faturationis fine fuperuacua aliqua acidi copia fupperaddatur. Hoc facto, folutio filtretur per faccum linteum, fpathique ponderofi irrefoluti pars in facco remanens, vt par-

tium

tium ſalinarum nulla iactura fiat, aliquoties aqua pura elixivietur.

IV. Filtratus liquor euaporatione ad cryſtalliſationis punctum eousque redigatur, donec nihil iam cryſtallorum terrae ponderoſae ſalitae oriatur: cryſtalli huius ſalis, decantato ſuperſtite liquore, ſollicite ſemper aqua pura abluendae ſunt, ne quid ipſius terrae ſtrontianae ſalitae, vtpote quae omnis in vltimae muriae portione colligi debet, cum adhaerente iis liquore perdatur.

Nota. Licet ſupervacua acidi ſalis copia partes quoque metallicas ſoluat (§. 32.); hoc tamen incommodo non obſtante, alia ex parte duplex inde vſus colligitur; primo nimirum eo certius omnes omnino terrae ſtrontianae particulae cum terra ponderoſa vna ſolvuntur; deinde ipſa hac acidi abundantia terra ponderoſa ſalita in maiores cryſtallos concreſcit, quo fit, vt ſuperſtes liquor eo perfectius et facilius ab iis decantari poſſit.

V. Simulac reſiduus poſt omnem terrae ponderoſae ſalitae ſegregationem liquor, terram ſtrontianam ſalitam heterogeneis particulis valde inquinatam continens, vlteriori evaporatione ſal digeſtivum ſuppeditat: omnia ad ſiccitatem vsque inſpiſſentur, omnibusque acidi ſalis ſuperuacui particulis fortiori igne expulſis, maſſa ſalina ſicca quadruplo vel ſexduplo aquae purae iterum iterumque ſoluatur, contentaeque in ſolutione hac partes metallicae puriſſimi lixivii ſanguinis ope praecipitentur.

Nota. Ad lixivium ſanguinis, huic ſcopo impendendum, quod attinet; plurimum intereſt, illud ab omni inquinamento acidi vitriolici praecipue vel tartari vitriolati liberum prorſus eſſe; ſecus enim ſi ſit, aliqua ipſius quoque terrae ſtrontianae pars ſub pulueris irreſolubilis forma praecipitatur.

VI. Praecipitatis cunctis particulis metallicis, liquor filtratus denuo ad perfectam ſiccitatem reuocetur. Relicta deinde maſſa ſalina, terra ſtrontiana ſalita ſaleque digeſtiuo et aliqua terrae ponderoſae ſalitae copia conſtans, redigatur in puluerem ſubtiliſſimum, cui in vitrum vel cucurbitam, veſica bubula obturandam, immiſſo ſextuplum vel octuplum pondus ſpiritus rectificatiſſimi ſuperaffundatur, et mixtio per horae quadrantem in arenae balneo coquatur. Solutio haec ſpirituoſa feruidiſſima adhuc per chartam bibulam transfundatur, ſaliaque heterogenea non ſoluta, in filtro remanentia, recenti ſpiritus rectificatiſſimi portione abluantur.

VII. Solutio haec filtrata, initio prorſus limpida, inter refrigerandum mox aliquam ſalis digeſtiui, ſimul ſoluti, copiam pulueris albi arenoſi ſub forma deponit; hoc puluere ad fundum depoſito, decantatoque liquore et in loco frigido depoſito, terra ſtrontiana ſalita in pulcherrimas cryſtallos aciculares tenerrimas longiſſimasque, omnem fere vitri capacitatem ſuauiſſimo oculorum ſpectaculo replentes, concreſcit. Liquor ſuperſtes, ad dimidium euaporatus, loco frigido ſimilem largitur cryſtalliſationem; hisque euaporationibus

nibus et cryſtalliſationibus ad finem perductis, puriſſimam ac ſplendidiſſimam habebis terram ſtrontianam ſalitam.

Notanda.

1.) Si cui forte operoſa aliquantulum illa (n. V.) particularum metallicarum ſegregatio, quae lixivii ſanguinis ope fit, diſpliceat; ea etiam ſuperſedere licet, terrae ponderoſae ſalitae muriam euaporatione ad ſiccitatem redactam cum ſpiritu rectificatiſſimo immediate coquendo poſteaque ſolutionem ad cryſtalliſationem diſponendo; licet enim iam ſalia metallica ſpiritu vna ſoluantur; tamen, cum cryſtalliſationem admittant nullam, poſt ſalis noſtri concreſcentiam, in ſuperſtite vltima liquoris parte ſoluta remanent, atque ſic ſua ſponte ſegregantur. Notandum tamen eſt, obtentas hoc in caſu cryſtallos, pleniſſime vt depurentur, denuo ſolui alcohole et cryſtalliſari debere.

2.) Hac in operatione ſpiritu quam maxime dephlegmato vtaris, oportet, idque eum praecipue in finem, vt, quantum fieri poteſt, minima ſalis digeſtiui et terrae ponderoſae ſalitae copia vna ſoluatur.

3.) Quod attinet ad ſolubilitatis gradum ſalis digeſtiui, tentamen, ex propoſito hac de re ſuſceptum, me docuit, 278 Alcoholis maxime dephlegmati partes, ipſius adeo coctionis adminiculo, non niſi vnam depurati huius ſalis partem ſoluere; praeſente tamen terra ſtrontiana ſalita, me obſeruante, eadem alcoholis quantitate vberior aliquantulum dicti ſalis copia ſoluitur.

4.)

4.) Quo terra ſtrontiana ſalita in diſtinctiores concreſcat cryſtallos, id quoque e re eſt, centenis filtratae antea ſolutionis ſpirituoſae partibus ſtatim poſt ſalis digeſtiui ſegregationem vnam vel duas circiter aquae purae centenas partes admiſceri; neglecto enim hoc artificio, ob aquae cryſtalliſationis defectum, non niſi tenerrimam et lanuginoſam quaſi cryſtalliſationem obtinebis.

5.) Addita illa parua aquae copia id quoque emolumenti affert, vt ſuperſtes in ſolutione ſal digeſtivum in vltima muriae parte colligatur, quo fit, vt terrae ſtrontianae ſalitae cryſtalli eo minus inquinentur.

6.) Monendum quoque, vltimam ſolutionis ſpirituoſae muriam, ſalibus metallicis abundantem, neutiquam reiiciendam eſſe, ex ea enim ad ſiccitatem euaporata, alcoholis beneficio, multum adhuc terrae ſtrontianae ſalitae extrahi poteſt.

7.) Alcoholis quo minor iactura fiat, ſpiritum poſt ſingulas ſalis concreſcentias euaporationis loco per retortam abſtrahere expedit.

§. 34. Secundum ſupra expoſitum experimentum (§. 32. Exper. XLIX.) terrae ſtrontianae e ſpatho ponderoſo ſegregatio ſequenti quoque modo, ſi placeat, inſtitui poteſt:

Spatho ponderoſo per fuſionem cum alcali reſoluto, liberatae ab acido vitriolico terrae et aqua lotae acido ſalis ea cautione ſoluantur, vt in ipſo, quan-

quantum fieri poteſt, ſaturationis ſine nonnihil ſuperuacui acidi ſuperaddatur. Filtrato dein liquore, et ſuperſtite in filtro ſpathi ponderoſi irreſoluti parte probe elutriata, ſolutioni tanta terrae ponderoſae aëratae copia admiſceatur, quae ad impenſam experimento ſpathi ponderoſi copiam in ratione 7 ad 100 ſe habeat, ſubtracta tamen illa ſpathi parte, quae poſt fuſionem cum alcali indeſtructa remanſit. Hoc facto, omnia ebullitionis ope ad ſiccitatem vsque inſpiſſentur. Omnibus poſtea aqua feruida ſolutis et filtratis, remanens in filtro ſedimentum, terra ſtrontiana aërata particuliſque metallicis et ea terrae ponderoſae aëratae parte, quae ſuperuacua addita fuerat, conſtans, iterum iterumque acido ſalis ſoluatur, ſolutioque filtrata ad ſiccitatem inſpiſſetur, quo praeſtito, remanens maſſa ſalina, in puluerem ſubtiliſſimum contrita, cum 6 vel 8 ſui ponderis alcoholis vini partibus perinde omnino, ac in antecedente proceſſu, tractetur.

Nota. Licet hic procedendi modus nonnullis antecedentis methodi moleſtiis careat; alio tamen eoque haud parui momenti incommodo et ille laborat: docente enim ſupra allegato experimento (Exper. XLIX.), facile fieri poteſt, vt aliqua terrae ſtrontianae ſalitae pars, poſt terrae ponderoſae aëratae acceſſum, deſtructioni ſe ſubducat ita, vt eam, quo nulla pretioſi huius ſalis iactura fiat, finita terrae ponderoſae ſalitae cryſtalliſatione, huius quoque ex ſalis muria ſeorſim adhuc elicere debeas. Atque vnius inſignis huius incommodi de cauſa expoſita in antecedente paragrapho methodus primum vtique ſibi locum vendicat.

Praeter expofitas duas has terrae ftrontianae e fpatho ponderofo eliciendae methodos aliam inuenire nullam mihi licuit; immo valde equidem dubito, fore, vt alia eaque minus laboriofa vnquam inueniatur.

§. 35. Contentae in fpatho ponderofo terrae ftrontianae copiam vt determinarem, fequentia experimenta inftitui, quam tamen inueftigationem, monendum eft, magnis difficultatibus laborare; fieri enim fere non poteft, quin, propter admodum complicatam illam ac laboriofam et diuturnam procedendi methodum, aliqua ipfius noftrae terrae iactura fit pertimefcenda.

EXPER. L.

Spathi ponderofi Siberici amorphi albi tres ponderis medicinalis librae, per omnia ad fupra expofitae methodi regulas tractatae (§. 33.), in operationis fine 430 grana terrae ftrontianae falitae omni cryftallifationis aqua orbata largiebantur. Obtenta autem haec falis noftri copia haudquaquam omni huic experimento impenfae fpathi ponderofi quantitati, fed 252 tantum drachmis eiusdem refpondet; fiquidem in proceffu hoc 36 fpathi non deftructi drachmae remanferunt, vtpote quae ab impenfis illis tribus libris vel 288 drachmis fubtrahendae funt. In ea autem fpathi parte, quae deftructionem recufat, proportionalem terrae ftrontianae vitriolatae quoque copiam latere, fupra defcripto experimento luculenter fatis comprobatur (§. 14. Exper. XXVIII). Docente igitur hoc experimento 100 examinati fpathi ponderofi partes 2, 8 terrae ftrontianae falitae ficciffimae partes largiuntur.

Cum

Cum porro, ſecundum ſupra allegata experimenta (§. 29. Exper. XLV. et XLVII.), 100 terrae ſtrontianae ſalitae partes terrae ſtrontianae aëratae 68, cauſticae vero 46 largiantur partes; cumque, ſecundum experimentum Celeb. Klaprothii (§. 10. n. 12.), 69½ terrae ſtrontianae purae grana acido vitriolico iuncta 114 terrae ſtrontianae vitriolatae grana ſuppeditent; illa in experimento hoc meo ex 252 drachmis vel 15120 granis ſpathi ponderoſi obtenta 430 grana terrae ſtrontianae ſalitae 292 terrae ſtrontianae aëratae, cauſticae vero 197, et vitriolatae 323 grana largiri, neceſſe eſt. Atque hinc ſequitur, ſpathum illud ponderoſum Sibiricum, experimento huic impenſum, in centenis partibus 2, 14 terrae ſtrontianae vitriolatae, purae vero huius terrae 1, 30 centenas partes continere.

EXPER. LI.

Vt experirer, ſitne illa terrae ſtrontianae quantitas in qualibet ſpathi ponderoſi ſpecie vna eademque ſemper, an in diuerſis diuerſa: aliam ſpathi ponderoſi ſpeciem eamque ſaxonicam ſimili examini ſubiicere placuit. Quo facto, ex 11220 plane deſtructi huius ſpathi granis 468 terrae ſtrontianae ſalitae, cryſtalliſationis aqua carentis, grana conſecutus ſum; hinc adhibitum huic experimento ſpathum terrae ſtrontianae vitriolatae 3, 13, eiusdem vero terrae purae 1,91 partes in centenario continere, liquet.

Duo igitur haec tentamina, terrae ſtrontianae et ponderoſae rationem in variis ſpathi ponderoſi ſpeciebus variare quoque poſſe, monſtrant.

§. 36. Terrae ſtrontianae quanquam parua tantum copia in ſpatho ponderoſo continetur; nihilominus tamen ſpes mihi eſt, fore, vt ea, quae de vniuerſali eiusdem in foſſili hoc praeſentia detegere mihi licuit, chemicis haud ingrata ſint; quia nunc quidem ſingularis haec terra, deficiente etiam, quod ſaepiſſime vſu venit, ipſo ſtrontianite, ex ſpatho ponderoſo, cuius nulla penuria eſt, vbicunque obtineri poteſt, atque adeo ſponte quaſi ſeſe offert, quotiescunque in pharmacopolis terra ponderoſa ſalita paratur, cuius quippe iam inde ab aliquo tempore et vbique frequens in medicina vſus eſt. Semper enim terra ſtrontiana ſalita in ſalis illius muria, quam pharmacopoli ceu inutilem reiiciunt, deprehenditur.

§. 37. In paruis quoque ſpathi ponderoſi portionibus, terrae ſtrontianae praeſentia vt detegatur; ſequenti modo procedendum eſt:

Spathi examinandi ad minimum 100 grana cum duplo ſalis tartari in tigillo confundantur; elixiviatis aqua feruida partibus ſalinis, terra acido ſalis ſoluatur; ſoluta filtretur et ad ſiccitatem vsque inſpiſſetur, ea tamen conditione, vt, ſiccatis omnibus, aucto igne, ſupervacuae etiam particulae acidae probe expellantur: deinde ſicciſſima haec maſſa ſalina contrita et vitro paruo immiſſa cum duabus ſpiritus rectificatiſſimi drachmis coquatur, calidaque adhuc ſolutio filtrata ad ſiccitatem inſpiſſetur. Reſidua nunc parva ſalis copia duplici ſubiicienda eſt examini: primo nimirum ea per aliquot tempus aëri libero humidiori exponatur, vt pateſcat, an aëris ea humorem attrahat: quod ſi accideret, indicio eſſet, eam calcem ſalitam eſſe: ſin vero ſicca

pror-

prorſus permaneat maſſa, ſtrontianam terram ſalitam eam eſſe, ſuſpicari licet; qua de re vt certior ſias, ſalem iterum iterumque vna vel duabus alcoholis drachmis ſolve et ſolutioni chartulam bibulam immerge forcipula capiendam et poſtea candela incendendam; quae vnius eiusdemque chartulae in ſolutionem immerſiones et adhaerentis ei ſpiritus deflagrationes continuo eousque repetendae ſunt, donec omnis ſolutio hoc modo conſumta fuerit. Quodſi iam inter crebriores has deflagrationes flammulas ſubinde peculiari colore rubro carmineo gaudentes conſpexeris, terrae ſtrontianae praeſentia extra omnem dubitationis aleam poſita erit.

Nota. Hoc in examine, ſi terrae ſtrontianae praeſentiam ex deflagrationis colore colligere velis, non exercitio tantum aliquo, ſed praevia etiam exſpectandi coloris notitia nec mediocri attentione opus eſt, accidit enim, vt, ob parcam admodum terrae noſtrae praeſentiam, iſtum flagrantis ſpiritus colorem fruſtraneo plane eventu exſpectes; accidit quoque, vt in prioribus deflagrationibus nihil omnino rubri coloris videas, in vlterioribus tamen, vbi chartula omni iam iam ſale impraegnata fuerit, inter ordinariam ſpiritus flammam ſparſim tantum rubram ſubinde flammulam animaduertas. Si proprietas haec flammam rubram producendi terrae ſtrontianae vni propria eſſet; ea terrae huius detegendae facillimum certe modum ſuppeditaret; ſed, cum ea calci quoque communis ſit (§. 18.), difficilius illud iudicium eſt, neque ex flammae rubrae apparitione terram ſtrontianam adeſſe concludere ante licet, quam, terram calcaream abeſſe, fuerit exploratum.

§. 38. Terra ſtrontiana ſi forte aliis quoque foſſilibus admixta aliquando reperiretur, id quod ob vniverſalem eiusdem in ſpatho ponderoſo diſtributionem multum veritatis prae ſe fert; talium foſſilium analyſin chemicam hodie iam ſatis operoſam, longe difficiliorem fieri et complicatiorem, neceſſe eſt.

§. 39. Ad terrae noſtrae a terra ponderoſa ſegregationem quod attinet, terrae ſtrontianae ſalitae in alcohole ſolubilitas optimum eius efficiendi medium nobis ſuppeditat, quia terra ponderoſa ſalita cum ſpiritu rectificatiſſimo conſortium fere omne reſpuit (§. 26. Exper. XL.).

Facilis quoque eius a terra ſilicea ſegregatio ſit, oportet, quippe quae acidorum connubium admittit nullum.

Terram magneſiam et aluminis quod attinet, ſtrontianae ab iis ſeparatio, praeuia terra in acido ſalis ſolutione, acidi vitriolici ope ſuſcipienda eſſe mihi videtur, vtpote quod acidum nominatis cum terris ſalia media generat, quae a terra ſtrontiana vitriolata pulueris irreſolubilis ſub forma praecipitata ſolutione in aqua facile ſeparare licet.

Terrae denique calcareae ſegregationem acidi vitriolici ope ita efficiendam eſſe exiſtimo, vt mixtarum terrarum in acido ſalis ſolutio tanta aquae copia diluatur, qua oriunda calx vitriolata in liquore ſoluta maneat, dum ipſa terra ſtrontiana vitriolata ſub pulueris irreſolubilis forma interim praecipitatur.

De

De ceteris terris, Auſtrali nimirum, Zirconia et Corundina nil dico, quia hae, niſi propriis in ſuis foſſilibus, nulli alio hactenus corpori minerali adunatae ſunt inuentae.

Notandum demum hic loci id quoque eſt, ipſius terrae ponderoſae praeſentiam, quam hodiernum facillime detegi poſſe putauerunt, quibuscunque ea in foſſilibus occurreret, nunc quidem difficiliorem detectu redditam eſſe, quia terra ſtrontiana eodem reagente, ac terra ponderoſa, quin eodem prorſus phoenomeno (Exper. XIV. XV.) praeſentiam ſuam manifeſtat. In foſſilium igitur examine, quotiescunque terrarum ſolutiones multa aqua dilutas acidi vitriolici acceſſu turbari obſeruabimus, oriundum inde ſedimentum ſitne terra ſtrontiana an ponderoſa vitriolata, vlteriori indagine diſpiciendum eſſe, iudicabimus.

§. 40. Ob nonnullas, quas terrae ſic dictae abſorbentes cum ſalibus alcalinis communes habent, proprietates, chemicis terras iſtas terrarum alcalinarum nomine deſignare placuit. Hocce intuitu terra ſtrontiana omnibus, quae hucusque innotuerunt, terris, quin ipſi terrae calcareae palmam longe praeripit; ſiquidem noua haec terra, pura ſi fuerit, non maiori tantum cauſticitatis et in aqua ſolubilitatis gradu, ſed cryſtalliſandi quoque facultate ad ſalia alcalina multo propius accedit, quo ipſo fit, vt ea inter terras abſorbentes et ſalia alcalina medium quaſi locum fere occupet; quibus ſalinis proprietatibus ſi terra ſtrontiana paulo magis excelleret; vtrum terris an ſalibus al-

alcalinis annumeranda ea ſit, iure meritoque dubitari poſſe videretur.

Cum permulta ſint, quae circa memorabilem hanc terram genericam ſuſcipienda ſuperſunt, experimenta, vlteriores, quas hoc de argumento inſtituere licebit, disquiſitiones alii diſſertationi reſeruare animus mihi eſt.

PLAN-

PLANTAE NOVAE
EX
HERBARIO ET SCHEDIS DEFVNCTI
Botanici *Iohannis Sievers.*

Defcriptae a

P. S. PALLAS.

Conuentui exhib. die 14 Mai. 1795.

Quum nuper Academia noftra Virum iuvenem acutiffimum et doctiffimum *Iohannem Sievers*, Hanoveranum, ftrenuum fi quis unquam et indefeffum Botanicum, propter Rhabarbari culturam a Collegio Imperiali medicorum misfum, in commercium litterarium fibi adfcifceret, fpes erat fore, ut novis ille laboribus et itinere quod in Buchariam minorem in que Tibetanam usque regionem tunc parabat, nova inventa et obfervationes fcientiis adderet, et curiofiffimis praefertim ignotae et inacceffae illius regionis vegetabilibus Botanicam ditaret. Hanc fpem, magna conceptam fiducia, eripuit infelix fors, quae medio e curriculo, praemature laffum vitae, huc Petropolin ad breve tempus reducem et in Sibiriam denuo abiturientem, fuftulit (d. VI. Aprilis MDCCXCV.), et expectationes omnium qui illum norant, praefertim vero mea vota, femper itineri in iftas regiones inftituendo intenta, triftiffime fefellit.

Ne tamen pereat illaudata memoria viri de Botanica optime meriti et qui fe totum, media etiam inter pericula, quae adire paratus erat, huic fcientiae devovebat: liceat hic fragmenta inventorum eius botanicorum proponere: plantas, quas praefertim aeftate anni 1793, quum veri Rhabarbari patria inveftigaturus, iter per Kirgifios et Songarica deferta, ab Irti fluvio usque ad Lacum *Alagüll*, fecundum Sinenfium fines occidentales, fufceperat, collegit, quaeque illuftre praebituras fpecimen divitiarum Florae afiaticae, quae ulteriore per Buchariam peregrinatione, Plantarum Scientiae accedere potuiffent, quae vero feriorem aliquem peregrinatorem nunc manent, qualem defuncto noftro ardore, fcientia, aptitudine et patientia, ad faeva et graviffima quaeque perferenda, aequalem diu forte quaefituri non invenient.

Robinia iubata. Tab. VI.

Robinia ramis abbreviatis villofis; petiolis elongatis fpinefcentibus, confertis, deflexis; pedunculis unifloris.

Robinia cauda cameli. *Sievers.*

Singularis et omnium Sibiricarum huius generis curiofiffima fpecies, quam hyeme, circa occidentalem finum Lacus *Baïcal* (*Kultuk*) equeftri itinere vectus, adinvenit indefeffus nofter botanicus, furculis fingularibus, quafi iubatis fupra nives eminentem, et ob fimilitudinem defoliatae ftirpis, nomine triviali (minus tamen apto) *caudae cameli* dota-

dotavit, quippe quam etiam Buraeti, eius regionis incolae, eodem ſignificatu *Tümmenaeghüll* appellare ſolent. Creſcit praeſertim circa fluviolos alpeſtres *Küddü* et *Soon-murin*, a latere meridionali Jugi altiſſimi *Chamar-daban* fluentes.

Frutex ex eadem radice erigens *ſurculos* plures, ſimpliciſſimos, erectos, ſesquipedales et bipedales, craſſitie fere digiti minimi, adtenuatos, undique tomento cano villoſiſſimos, *ligno* flaveſcente, *cortice*, ſub tomento viridi-flavo, ſubaureolo.

Rami alterni, breviſſimi, pollice plerumque breviores, raro ſesquipollicares, tomentoſi, toti operti petiolis foliorum ſpineſcentibus, debilibus, bi-vel tripollicaribus, priorum annorum, deorſum deflexis, ferrugineis, hinc inde cano pubeſcentibus, confertiſſimis.

Folia in apicibus ramorum pauca, plerumque quadrijuga vel et quinqueiuga, petiolis ſpinescentibus elongatis, deorſum directis. *Foliola* lanceolata pubeſcentia.

Flos ex apice ramorum ſolitarius, nutans; recens non viſus. *Legumen* cylindraceum, durum, teſtaceum; *ſemina* aliquot, ſubgloboſa, atomis pulverata, fere vt Robiniae *pygmeae*.

2. Robinia tragacanthoides. Tab. VII.

Robinia ramoſiſſima, foliis biiugis, petiolis ſpineſcentibus; ſpinis reflexo patentibus; pedunculis unifloris.

Procreſcit praeſertim e fiſſuris rupium in valle granitoſa, anguſta, ad Lacum *Balak-Tſchillek*, in vicinia *Noor-*

 Sais-

Saiſſan; Iulio iam deflorata et legumina ſenſim matureſcens.

Frutex pumilus inconditus, patulus, ramoſiſſimus, *ramis* pluribus inferius calamo cygneo craſſioribus, ſubflexuoſis, incondite ſubdiviſis, ſpinoſiſſimis. *Cortex* obſolete flavus, laevigatus; *lignum* flaveſcenti-albidum.

Ramuli, *ſpinis* alternis, ſemipollicaribus, robuſtis, ex albicante baſi luteſcentibus, reflexo-patentibus, baſi utrinque armatis *ſpina laterali*, retrorſum inflexa, breviore, ſtipulari. *Gemmae* ex alis ſpinarum foliiferae et floriferae.

Folia biiuga, petiolo ſpineſcente, foliolis ſericeo-caneſcentibus, lanceolatis, apice ſpinula mucronatis, baſi anguſtioribus.

Pedunculi e ſingula gemma ſolitarii, uniflori, flore nutante. *Calyx* inſignis, cylindraceus, truncatus, ligulis quatuor ſuperis, acutis quadridentatus, inferne integer, villoſo-caneſcens, perſiſtens, cum legumine ſubferrugineus. — *Corolla* (quantum ex emarcidis liquet) anguſta, vexillo elongata, vt in *Rob. feroce*, ſimiliterque flava. *Legumina* brevia, vix dupla calycis, cylindraceo-depreſſa, cano-villoſa, longo acumine ſpineſcente mucronata, qui ſupereſt a ſtylo diu perſiſtente.

Nota.

His nunc duabus additis ad *Robinias*, in *flora Roſſica* deſcriptas et delineatas, prodit numerus *ſpecierum* huius generis *ſibiricarum* ſeptenarius, cui octavam ſpeciem addendam

dam esse nunc cultura edoctus sum: Videlicet *Robiniam* in in citati *operis Vol. I. tab. 42. p. 69.* delineatam, quam tunc pro *varietate Robiniae caraganae* habui, vere distinctam esse speciem nunc liquet, adeo affinem Caraganae, ut est *R. ferox, R. pygmeae,* Semina scilicet, quae olim, tanquam pumilae huius Robiniae, per studiosos in transbaïcalensi regione relictos, adlata fuerant, dederunt omnino Robiniam a Caragana, in hortis vulgatissima, non diversam. Sed obtinui postea sincera *pumilae* speciei, in arenosis ad Selengam, inque Davuria crescentis, ovibus adeo gratae, semina, e quibus educatae plantae, a prima inde aetate, distinctissimam naturam loquebantur. Etenim non solum multo lentius, et tenuiore surculo excreverunt, sed etiam ab initio procumbenti situ, foliis minutioribus, obtusioribus, spinula rhacheos magis acuminatis, differebant. Attamen character inter utramque speciem distinctivus aegre enunciatur: maxime differt *Altagana*, a *Caragana* vulgari, spinis stipularibus planis, paulo robustioribus et leguminibus crassioribus, ante maturitatem compresso-latis.

3. Sophora argentea. Tab. VIII.

Sophora petiolis diphyllis spinescentibus, pedunculis racemoso-multifloris, terminalibus.

Robinia argentea *Sievers.*

Habitus summa affinitas et similitudo mira cum Robinia Halodendro; sed character plane diversus. Quum inflorescentia nondum cognita sit, in incerto manet, an ad Sophoras sit referenda, vel novi generis existimanda planta. Observavit illam Botanicus noster, in Campis arenoso-ſalſugineis circa *Noor-ſaiſſan* et aliis Songarici deſerti locis, praeſertim in collibus arenoſis ad fl. *Bekun*, in Irtin influentem, Iunio iam defloratam et legumina fere matura proferentem.

Frutex mediocris, erectus; *ramis* dichotomo ſubdiviſis, tenuibus, ſtrictis, virgatis; *cortice* antiquiorum pallide-gryſeo, iuniorum cano-albeſcente. *Lignum* tenue, fragile, intus ſubfiſtuloſum. *Spinae* ramorum altereruae, tenues, ſed rigidae, rectiſſimae, patentes, e petiolis antiquatis.

In ramulis annotinis herbaceis, ſpithamalibus: *petioli* alterne ſparſi, ſpineſcentes, diphylli: *Foliola* lato-lanceolata, utrinque ſericeo alba, cano-ſubargentea, apice vix ſpinula rhacheos notata.

Racemi in extremis ramulorum quadriflori et multiflori, exſtipulati, nudi: *pedunculis* unifloris capillaribus. *Flores* ignoti, ſaepius abortientes. *Calyx* ad legumina minimus, emarcidus, calyculatus. *Stamina* omnia diſtincta, e quorum proportione flos vix 4 linearum longitudine fuiſſe videtur. *Legumen* plano-lanceolatum, monoſpermum, ſubmembranaceum, marginatum, pallido gryſeum. *Semen* unicum in medio, reniforme, compreſſum, gryſeo-vireſcens.

4. Tamarix ſongarica. Tab. X. fig. 4.

Tamarix floribus octandris, decandrisque; foliis filiformibus, carnoſis.

Schan-

Schanginia *Sievers.*

Elegantiſſimus hic fruticulus in campis ſalino-ſqualidis, limoſis, e regione excubiarum Sinenſium *Börö-Taſtaghan* Songariae, et in arenoſo-ſalſis circa *Noor-Saiſſan*, ſimul cum Tamarice gallica, Lectus cum flore et fructu, ſub finem Iulii.

Fruticulus lignoſus, rigidus, exiguus, inconditus, diffuſo-adſurgens, *truncis* inferioribus proſtratis, craſſiuſculis, cortice lacero tectis. *Ramuli* annui recti, digitales vel dodrantales, albidi, laeves.

Folia circa ramulos annuos alterna, filiformi-ſubclavata, ſubtrigona, carnoſa, obtuſa, crebra, ex alis gemmaſcentia.

Flores in ſummitate ramorum plurium, in foliorum alis ſeſſiles, ſpicam efficientes, paulo maiores, quam in Tamarice gallica. *Structuram* floris ex ipſis *Sieverſii* verbis optime intelligemus, qui plantae characterem, tanquam novi crediti generis, ſequenti modo adumbravit:

Perianthium monophyllum, quinquefidum, perſiſtens, lacinulis concavis, auctis, erecto-patentibus, corolla dimidio brevioribus, baſi cinctum *ſquamulis* tribus aut quatuor, facie lacinularum perianthii.

Corolla albida, ſubcoriacea; *Petala* 5. unguibus breviſſimis, laminis rotundatis, patenti-revolutis.

Stamina: filamenta 10. ſaepe 8. corolla paulo longiora; *antherae* erectae, hinc ſulcatae.

Piſtil-

Pistillum: germen ovale, superum, conico-acuminatum, glabrum; *styli* tres, erecto-patentes, brevissimi, *stigmata* simplissima, persistentia.

Pericarpium: capsula siliculiformis, conico-acuta, foliolis calycis et petalorum persistentibus vestita, succulenta, unilocularis, bivalvis.

Semina 4, raro 5, columnaeformia, penicillo, vel pappo penicilliformi obvoluta, libera, erecta.

Nota.

Praeter hanc novam speciem hucusque notis speciebus [*Tamarici* gallicae (*pentandrae*), T. germanicae (*decandrae*) et T. *arabicae*] additam; quintam nuper adinveni [T. tauricam (*octandram*)], quae in Chersonesi Tauricae maritimis capiose crescit, et distinctissima est, licet T. gallicae facie proxima. Hanc suo loco describam.

5. Ribes saxatilis.

Ribes ramis sparse spinosis, racemis fructiferis erectis.

Species media inter Ribes alpinam et R. diacantham; habitu grossulariae, fructu Ribesii. Lecta in montibus granitosis Songariae, iam cum fructu Junio.

Frutex erectiusculus; *ramis* incondite-alternis, rectis; *cortice* antiquiore fusco, iuniore gryseo-testaceo; annuis ramulis pallidis. Spinae in ramis sparsae, solitariae, setaceo-rigidae, rectae, a gemmis remotae, in antiquiori ligno subdetritae.

Folia

Folia longius petiolata, bafi cuneiformia, obtufe-triloba, lobis una alterave incifura.

Racemi floriferi et fructiferi erecti, e ramulis lateralibus foliiferis, feptem vel octoflori, pedunculis longiufculis, bracteis linearibus, pedunculi longitudine. *Florum* petata exigua, patula, livido-virefcentia. *Baccae* globofae, maturae rubrae, acidulae, mole vix Ribis rubrae.

6. Ribes fragrans. Tab. IX.

Ribes inerme, furculis ramofis erectis, foliis fubquinquangulo-trilobatis, racemis fructiferis erectis.

Ribes Pneobalfamum *Sievers.*

Mongolis *Ukirin-Niddu* (i. e. oculus vaccinus).

Fragrantiffima haec fui generis, habitat in montibus Mongoliae finitimis, altioribus, praefertim circa origines Tfchikoi fluvii, in iugis faxo deftructo obtectis (*Roffypi*), foli expofitis, fummis, ubi nulla fylva viget.

Frutex inermis, erecto-procumbens, fefquipedalis, facie amoenus: *Cortice* fubteftaceo; *ramis* alternis, annuis *refina* exfudante flaviffima prominulo-punctatis.

Folia poft deflorationem explicanda, alterna, longius petiolata, glabra, coriacea, obfolete quinqueangula, triloba vel fubquinqueloba; ferrata; *fubtus* valde venofa, magis glauca, *fupra* viridiora. Exfudant, in fuperficie inferiore, guttulis luteis creberrimis, *refinam* balfamicam fragrantiffi-

 mam

mam (*uti tota planta*), odore meliſſae graviore, ad R. nigram ſubaccedente, cui et tota facie admodum ſimilis.

Racemi florentes, inter folia primum prorumpentia, breves, ſubdecem flori, conferti, erecto-rigidi, floribus campanulatis, albis, profunde quinquefidis, odoratiſſimis compoſiti. *Petala* lanceolata, acuta, patentia: *bracteae* deciduae, minores quam in R. *procumbente*.

Racemi *fructiferi* elongati, itidem erecti, niſi quod nonnulli ob gravitatem fructus declinati. *Fructus* magnitudo ſumma R. rubrae; *baccae* rubicundae, ſuaviſſimi ſaporis.

7. Ribes triſte.

Ribes inerme, ſurculis ſimpliciſſimis vergatis, ſuperius foliiferis, racemiferisque; racemis pendulis.

Ribes melancholicum *Sievers.*

Mongolis *Chat-chur* (i. e. palus).

Haec ſpecies occurrit circa ſumma montium cacumina Jugi *Jablennoi*, et in ripis fluvioli alpini *Tſchikokan*, ut et paſſim in altioribus iugorum Mongoliae ſinitimorum; radice inter ſaxa reptante.

Frutex e radice reptante *ſurculis* pluribus, bi vel tripedalibus, erectis, epidermide lacera, tenuiſſima veſtitis, ſimpliciſſimis, nudis.

Folia in ſummitatibus ſurculorum rara, forma ut in R. rubra.

Ra-

Racemi florentes, aeque ac fructiferi, penduli, glabri.

Corollae planiusculae, extus rubicundae, intus flavescentes: *petalis* revolutis. *Baccae* parvae, nigrae, insipidae, scatentes succo atro-rubro, ad tingenda vina praestantissimae.

8. Rosa berberifolia. Tab. X. fig. 5.

Rosa spinis recurvatis, foliis simplicibus, sessilibus, spinae geminae interiectis.

An Rosa persica *Jussieu.*

Curiosissimum, simul elegantissimum hunc fruticem Defunctus noster legit circa fluvium *Uldshar*, ad meridiem Jugi *Tarbagatai* in Lacum *Allagül* deserti Songarici influentem, ubi cum aliis rarissimis plantis occurrit; Junio iam plerisque calycibus defloratis.

Fruticuli pedales et sesquipedales, subdiffusi, erecto-procumbentes, spiraliter flexi, *stolonibus* e radice longissime reptantes. *Ramuli* iuniores subsimplices, interdum subramosi, virgati, tenues, albidi, altero latere purpurascentes, laevigati. *Spinae* robustissimae, hamoso-subrecurvae, albo-pallidae, alternatim simplices et geminatae.

Folia alterna, in axillis spinarum geminatarum sessilia, coriacea, glabra, ovata, argute inciso-serrata, basi integra et quandoque subcordata. *Stipulae* praeter spinas nullae.

Pedunculi laterales vel terminales gemini, spinis aliquot rectis, foliisque adspersi, uniflori, unus post alterum

 floren-

florentes. *Calyx* infidens *germini* craffo, fpinis fetaceis mollibus adfperfo; *laciniae* quinque, lanceolato-acuminatae, concavae, extus fpinulis fimilibus fetaceis, rarioribus adfperfae. *Petala* quinque flaviffima, ad bafin eleganter punicea macula notata, patentia, decidua.

Pericarpium globofo-depreffum, viridi-pallens, ficcum, fubftrigofum, fpinulisque hifpidum; coronatum *calyce* perfiftente; continens cavo (nequidquam pilofo) *femina* ad 25 oblonga, nigra, in orbem confertim difpofita, nigricantia.

9. Moluccella diacanthophylla. Tab. XI.

Moluccella foliis tripartitis, laciniis linearibus incifis mucronatis; fpinis geminis axillaribus, fetaceis.

Planta nova generis minime numerofi, lecta in montibus granitofis, verfus *Chafyltafch* montem, altiffimo iugo *Tartagatai* Songariae finitimum, et in fchiftofis aridis, ad Lacum *Baltak-tfchillek*, Lacui *Saiffan* vicino, copiofiffima. Florefcit Junio, fine Julii fummilatibus adhuc florens, dum iam femina in plerisque matura. Planta fragrans, odore Marrubii gratiore.

Radix perennis, craffitie faepe digiti, gryfeo fufca, e pluribus funiculis quafi contorta, perpendicularis.

Cauliculi annui plures fubfpithamaei, erecti, fimpliciffimi, graciles, laevigati, quadranguli, ad folia intercepti.

Folia cruciatim oppofita, bafi cuneiformia, feffilia, incifo trifida, laciniis incifo fubdivifis, omnibus apicibus fpinula

nula terminatis. In cauliculis tenerioribus, flore carentibus, et ad infima foliorum paria *ſpinae* nullae axillares; in plerisque *ſpinae* e ſingula folii ala geminae, ſetaceae, tenuiſſimae, patentes. *Summitates* ſurculorum duobus tribusue *verticillis*, plerumque quadrifloris, florentes, ſingulo calyce ſpinis ternis ſtipato, foliis verticillorum inermibus. Flores, in breviſſimo pedunculo communi, ex axilla folii ſingula bini.

Calyces magni, ſeſſiles, infundibuliformes, glabri, quinquefiſſi, lacinia ſupera profundius ſciſſa: *Laciniae* omnes lanceolatae, nervo exaratae, ſpinula terminatae.

Corrolla calyce multo longior, carneo-rubeſcens: *galea* recta, villoſa, oblongo-linearis, extremo bifida, laciniis emarginato-inciſis; *labium* tripartitum, compreſſum, lacinia media bilobata, lateralibus lanceolatis, parvis.

Semina quatuor oblonga, nuda.

10. Rheum leucorrhizum.

Rheum foliis transverſe ovalibus depreſſis, panicula ſeminifera divaricata, calycis foliolis binis multoties maioribus.

Rheum nanum *Sievers.*

Hanc novam Rhei ſpeciem detexit noſter inter montes quartzoſo-ſchiſtoſos, nudos, circa fluvios *Dshar-gurban* et *Kurtſchum* deſerti Songarici, Iunio iam ſemina matura

 paſſim

passim ferentem et hinc inde adhuc deflorescentem. Videtur etiam nuper circa fluv. *Buchturma*, ab amicissimo *Schangin* lecta fuisse. Admodum affinis est *Rheo caspico* (tatarico *Lin.*) quod etiam in salsuginosis circa *Uldschar* fl. et Lacum *Alagüll* Sieversio observante provenit, sed radicis natura, calyce, et natali solo semper est distinctissimum.

Kirgisi et accolae eius regionis Rossi asseverarunt: radicem huius plantae remedium esse universale contra morbum caducum; id quod forte, in casu verminoso, per setoso pungentem huius radicis substantiam, qua vermes pelli posse videntur, explicari poterit. Petioli et caules succulenti edules, grate acidi, scatentes succo sale acetosellato imbuto.

Radix alba (contra regulam generis) communiter tricruris, ramis interdum subarticulatis compressis, fere perpendiculariter descendens, gustu insipido, minime rhabarbarino, submucilaginoso; sed manducata, vi texturae suae setosae, pungit.

Folia radicalia communiter tria, ut in *Rh. caspico*, diametro 4 ad 6 pollicum, ad terram appressa, trivenia, valde venosa, glabra, coriacea, orbiuclato-transverse ovalia, basi productiuscula; per oram confertim asperata denticulis minutissimis, acutis, cartilagineo-rigidis.

Petioli paulo longiores quam in *Rh. caspico*, compressi, laeves, solidi, succulenti.

Cau-

Caulis florens ſpithameus, ſulcatus, paniculatus, ſtrictior; *ſeminifer* ſemipedalis et pedalis, panicula dichotomo-compoſita, ramoſiſſima, divaricata, ambitu ſubgloboſa, rigida, nuda.

Folium caulinum rarius unum vel alterum.

Calyces perſiſtentes in ſemine, quinqueſidi: *laciniis* binis ovatis, flore fere maioribus, ovatis (quod in nulla alia ſpecie); tribus parvis, lanceolatis. *Semina* magna, bi-vel trialata, alis purpuraſcentibus, latis.

OB.

OBSERVATIONS MINÉRALOGIQUES DANS UN VOYAGE

fait, pour conôitre les roches, dont la châine Ouralienne eſt compoſée en la traverſant de l'*Oueſt* vers l'*Eſt*.

avec un Profil.

Par

B. F. J. HERMANN.

Préſenté à l'Académie le 4 Juin. 1795.

Tab. XII. Le but principal de ce voyage étoit de connôitre les roches & les pierres, dont la chaine ouralienne eſt compoſée, en la traverſant presque droitement par ſa largeur d'une pente à l'autre, dans une diſtance aſſez conſidérable; je ſuis donc monté du *coté occidental* ſur ſa plus grande hauteur, qui ſe trouve aux environs de la ville de *Catérinebourg* en descendant d'ici ſur la *pente orientale* jusqu'au point, où les couches du terrein portent les mêmes caractères des montagnes d'une formation *tertiaire*, comme celles dans le contré, où j'ai commencé mes obſervations.

J'ai

J'ai pris ce point aux environs de la ville de *Perme*, capitale du Gouvernement & de l'ancien duché de *Permie*; elle eſt ſituée ſous 57°. 50′. lat. & 74°. 10′. longitude ſur la rivière de *Kama*, qui, pas loin de la ville, reçoit la *Tſchouſſovaya*, & dans celle-ci tombe la *Sylva*; toutes les deux prennent leurs ſources ſur les plus grandes hauteurs des monts Ourals, & notamment dans cette partie de la chaîne, qu'on appelle *Oural de Cathérinebourg*.

Tout le terrein aux environs de la ville de *Perme* & des embouchures des rivières ſusnommées conſiſtent de montagnes à *couches* ou *tertiaires* (Floetzgebürge) c'eſt-à-dire de collines, de monticules & de *couches argileuſes* & *ſabloneuſes*, de *ſchiſtes marneux*, de *pierre calcaire ſtratifiée*, de *marne* & de *Gyps*; quelqu'unes des couches calcaires contiennent des *coquilles petrifiées*, comme des *pectinites*, *térébratulites* &.

Entre l'embouchure de la *Tſchouſſovaya* & de *Perme* les rivages de la *Kama* ſont presque partout formés de *Gyps*, qui en pluſieurs endroits eſt accompagné de collines d'*argille*, de *marne* & de *ſable*; l'on trouve les montagnes gypſeuſes ſurtout dans les environs du village de *Perevoloſchnaya*, d'où elles continuent, en montant la *Sylva*, jusqu'à *Koungour*; ici on rencontre une caverne fameuſe dans le gyps, laquelle cependant eſt tombée en ruine aujourd'hui, de ſorte, qu'on ne pourroit pas la voir ſans le plus grand danger.

Les rivages de la *Tſchouſſovaya* ſont formés pour la plûpart (ſur une très grande diſtance) de *couches argileu-*

ſes & *marneuſes*, lesquelles ſe trouvent auſſi en divers endroits ſur touts les deux côtés de la *Kama*, entre autre aux environs de *Motawilica*, fonderie de cuivre, où l'on trouve une *marne blanchâtre*, la quelle eſt employée à la fuſion du cuivre; elle eſt en partie *ſchiſteuſe* & remplie de petits rognons de *pierre à feu* griſe & rougeâtre; mais les couches les plus communes du terrein de la *Kama* ſont celles de *ſable*, lesquelles s'elevent quelquefois en collines d'une hauteur aſſez conſidérable; on les rencontre très fréquemment entre la *Kama* & la *Sylva*, de même qu'entre la *Babka* & l'*Iren*, où l'on exploite une grande quantité des *mines de cuivre ſabloneuſes*, impregnées de *bleu* & de *vert* de cuivre & mélées quelquefois de *mine vitreuſe* & de *mine griſe* ou *Fahlerz*; mais au de là de la rivière d'*Iren* & aux environs de la petite rivière de *Koungourka*, le pays eſt presque partout composé de *marne* & de *pierre à chaux*; c'eſt ici qu'on trouve pluſieurs cavités ou foſſes produites ſans doute de l'ecroulement des cavernes ſouterreines dans la pierre calcaire.

Entre la *Sylva* & la *Babka* il y a des couches d'une *marne* calcaire blanche, la quelle eſt exploitée des habitans des villages *Sſchilna* & *Kriliſova*, & employée à la fuſion des mines de cuivre. Pas loin du village de *Syriak*, ſitué ſur la petite rivière du même nom, on a trouvé du *bois gagatiſé* dans une *pierre ſabloneuſe*; il y en a des couches d'une épaiſſeur presque de trois pieds; quoique il eſt très luiſant dans ſa caſſure & aſſez compacte, ſes anneaux ſont encore très aiſément à reconnoître; expoſé à l'air il ſe décompoſe & devient friable; dans quelques endroits il eſt parſemé de *pyrite* en très petits points.

En

En defcendant la *Kama* on trouve dans le voifinage d'*Ocansky* du *tuf calcaire* en rochers très confidérables, & quelques fois affez pittorésques; ils renferment des grottes & des fources d'une clarté parfaite.

De tout ce que j'ai dit jusqu'ici de la nature du pays des environs de *Perme* on voit aifément, qu'il n'y ait que des couches & des montagnes d'une formation *tertiaire*, & que les montagnes *fécondaires* & *primitives* en font encore bien eloignées, comme nous verrons dans la fuite.

De *Perme* le chemin conduit au village de *Krilova*; au commencement le terrein eft plât, marécageux & en plufieurs endroits couvert d'un fable fin de rivière; mais à 15 ou 20 verftes de la ville il devient un peu plus haut & entrecoupé de collines & de monticules, formés de *marne fabloneufe* & de *couches d'argille*, melées des *galets* de *pierre à chaux*, de *fchifte* & de *jaspe*; il eft de cette nature jusqu'au village de *Krilova* fitué fur la *Babka*, où l'on rencontre des montagnes *fabloneufes*, *fchifteufes* & *gypfeufes*, qui continuent le long de cette rivière; c'eft ici qu'on trouve la première fois fur cette route le *gyps* fi rémarquable autant à caufe de fon abondance, que de fa proximité avec des fources falées aux environs de la *Kama*; il commence fur la rivière de *Sylva* encore loin au de là de *Koungour*, d'où il fuit pour la plûpart la rive droite de ce fleuve jusqu'à la *Kama*, en montant celle-ci jusqu'aux environs du village de *Polesnoë* & en traverfant par conféquent un terrein de plus de 100 verftes; en plufieurs endroits on le voit en couches efcarpées, de forte qu'on puiffe aifément obferver leur difpofition; pour la plûpart

 elles

elles ne ſont que peu inclinées, & compoſées d'une infinité des grands & des petits blocs de *Gyps* ſans aucune figure determinée, dont la cohéſion eſt interrompue par une terre jaunâtre calcaire, impregnée un peu d'acide vitriolique, qui s'eſt gliſſée partout dans les fentes & dans les petits cavités du gyps; on la trouve ſurtout entre les couches, lesquelles en ſont aſſez diſtinctement ſeparées.

Touts ces blocs gypſeux, quoique diſpoſés en couches continues, n'ont pourtant pas beaucoup de ſolidité; ils ſont très caverneux & comme rongés; leur épaiſſeur eſt de quelques verchoks jusqu'à 2, 3 & 4 arſchines; cependant on en trouve des grandes maſſes *iſolées*, qui quelquefois ſont un peu plus compactes. La couleur de ce gyps eſt blanche ou griſe ou jaunâtre; il eſt d'une texture pour la plûpart criſtalline & grenue, mais ſouvent il eſt aſſez compacte & ſemblable à un bon albâtre; néanmoins les morceaux de cette qualité ſont rarement ſi grands, pour les pouvoir employer à la ſculpture; quelquefois il eſt conglutiné en forme de *breche*, & dans les fiſſures des grands blocs on trouve du *gyps ſtrié*, & de la *ſélénite* dans la terre farineuſe, dont toutes les maſſes gypſeuſes ſont melées; dans quelques endroits celle-là eſt endurcie en couches ſchifteuſes, melées d'une infinité des petits morceaux de gyps & de ſélènite; de reſte il eſt très ſujet à la décompoſition, parceque ils ſe détachent continuéllement beaucoup de fragmens, qui pour la plûpart tombent dans les rivières, où les rochers gypſeux ſont l'un ou l'autre de leurs cotés. Quant à leur ſuperficie, ils ſont presque partout couverts d'une couche de terre végétale aſſez épaiſſe, de couleur rougeatre ou griſe & de nature marneuſe.

La

La plus grande largeur de cette chaîne gypſeuſe ſe trouve entre la *Sylva* & la *Tſchouſſovaya* en continuant ſon cours jusqu'à l'embouchure de la dernière rivière dans la *Kama*; elle ſe rétire d'ici vers la *Koëva* & vers les environs de *Solykamsky*, où elle disparôit ſous les couches de ſable & de marne ſi communes dans ce contré, & qui ſont ici avec le gyps, ainſi comme ailleurs, les compagnons inſépa rables des ſources ſalées. —

Du village de *Krilova* jusqu'à la ville de *Koungour* il y a 20 verſtes; tout ce contré eſt rempli des monticules & des collines, formées pour la plûpart de gyps & de marne, méme la ville eſt bâtie ſur le gyps; mais au delà de *Koungour* il n'y en a plus; c'eſt une pierre calcaire ſtratifiée, qu'ici ſe rencontre très ſouvent. Mais on trouve auſſi du ſchiſte argileux noirâtre, de la pierre puante & de la pierre ſabloneuſe compacte.

Près du *Sélo Kloutſchevskoé*, 53 verſtes de *Koungour*, on trouve une montagne iſolée, nomée *Gorodiſchtſchaya Gora*, au pied de la quelle il y a une ſource ſulfureuſe, dont l'analyſe eſt inféré dans la déſcription de voyage de Mr. l'Académicien *Georgi*. La partie inférieure de cette montagne conſiſte d'une pierre calcaire griſâtre avec une infinité des petites cavités, remplies de ſpat calcaire, cryſtalliſé en rhombes; du moins le pied de la montagne eſt de cette qualité, où ſe trouve la ſource ſoufrée; mais la partie ſupérieure, & ſurtout le ſommet de la montagne, eſt formé d'une pierre calcaire plus compacte, de couleur blanche, & remplie de Coquilles & de Coraux, transformés en ſpat calcaire blanc & jaunâtre; d'ailleurs prêsque toute la montagne eſt couverte d'une terre végétale noire, ce qui lui donne de loin un air volcanique. La ſource éxhale une odeur forte de foie de ſoufre; autrefois ſes eaux couloient en beaucoup plus grande quantité; à preſent elle eſt prêsque ſeche en été, quoique le terrein d'alentour eſt aſſez marécageux.

Du *Sélo Kloutſchevskoé* le chemin conduit à la fortéreſſe de *Biſérsky*. Le pays eſt ici peu montagneux & partout couvert d'une couche épaiſſe de terre végétale; aux environs du village de *Bükova* il y a des couches de marne griſe & jaunâtre, & de la breche calcaire, melée de quelques fragmens de ſchiſte noire & de jaſpe rouge; jusqu'à la riviere de *Biſert* on compte encore 10 verſtes; la gauche de ſes côtes eſt formée d'une marne griſe & rougeâtre, qui ſe décompoſe très-aiſément; elle renferme quelques impreſſions des feuilles & d'autres corps du regne végétal.

Entre la fortereſſe de *Biſérsky* & celle de *Kirguiſchansky* le terrein eſt plât, marécageux & couvert de bois; on ne rémarque que des couches de pierre de ſable, & de pierre calcaire noirâtre, qui eſt une véritable pierre puante; & de cette qualité eſt auſſi tout le pays entre la fortereſſe de *Kirguiſchansky* & celle de *Grobovsky* jusqu'à la petite rivière nommée *Graesnouca*, où l'on rencontre une pierre calcaire noirâtre, remplie de coraux & de coquilles petrifiées; c'eſt ici, qu'on trouve les *derniéres* pétrifications en prenant le chemin de *Perme* à *Cathérinebourg* & les *premiéres*, quand on fait la route de la derniére ville jusqu'à celle-là, car de *Perme* jusqu'à la *Grésnouca*, ſur un un chemin de plus de 300 verſtes, on ne rencontre que des couches & des montagnes d'une *formation tertiaire;* mais au de là de la *Gresnouca* bientôt les montagnes *primitives* élévent leurs ſommets. Dans tout le pays aux environs de *Perme* & de *Koungour* il n'y a point de minéraux, exceptée la mine de cuivre ſabloneuſe, la mine de fer paluſtre & une inépuiſable richeſſe des ſources ſalées.

Comme au de là de la *Grésnouca* on ne trouve plus de petrifications jusqu'aux environs de la fabrique de fer de *Kammensky* en traverſant la chaîne ouralienne, faiſant le chemin par *Cathérinebourg*, de l'Oueſt vers l'Eſt dans une ligne presque droite, ſuppoſant donc que tout ce contré n'étoit jamais ſubmergé de la mer, & n'étant pas par conſéquent couvert de couches produites par la précipitation de ce fluide, j'ai cru qu'il ſoit intéreſſant pour l'histoire du nôtre globe de faire un profil de cette chaîne de montagnes, en y remarquant de diſtance en diſtance toutes les roches, autant qu'il eſt poſſible, qu'on rencontre ſur cette route jusqu'au point, où l'on trouve derechef les vestiges du séjour de la mer; voici donc la déſcription de ce que j'ai obſervé & marqué ſur le *profil ci-joint.* (voyez la Planche XII.).

La *Grésnouca* coule à la droite de la fortéreſſe de *Grobovsky* vers la *Tſchouſſovaya.* Sur l'endroit, où elle eſt marquée ſur le profil, l'on trouve des bancs très-conſidérables d'une pierre calcaire ſtratifiée, remplie d'une infinité des coraux & des vers cruſtacés; l'épaiſſeur de ſes couches va d'un quart jusqu'à une archine & plus, avec une inclinaiſon du ſud verd le nord. La couleur eſt brune & noirâtre, tachetée de blanc; elle eſt dure, & prend un beau poli;

poli; ce qu'elle a de particulier eſt, que beaucoup de ſes fiſſures tant pérpendiculaires qu'horizontales contiennent de la pierre à feu noire très dure, mais peu transparente, de ſorte qu'elle reſſemble presque plutôt à une jaspe noire (ſauf la caſſure, qui n'eſt pas conchoïde) qu'au petroſilex; auſſi ne contient-elle point de pétrifications, quoique elle eſt ſi intimement liée avec ſa matrice, que ſouvent un morceau eſt moitié pierre à feu & moitié pierre calcaire, ſans pouvoir remarquer leur réunion. Les bancs de la dernière ſe décompoſent en grands morceaux ſans aucune figure déterminée, ils ſont remplies quelquefois de groupes entiéres des madrépores.

De la *Grésnouca* jusqu'à la forteréſſe de *Grobovskaya*, dont l'éloignément ne fait que deux verſtes, le chemin conduit par une belle plaine, couverte de terre noire trés-fértile; pas loin de la forteréſſe la petite rivière *Outka* tombe dans la *Tſchouſſovaya*, & aux environs de toutes les deux on trouve des grands blocs de pierre calcaire compacte, couleur de chair, & traverſée de ſpat calcaire blanc d'une caſſure rhomboïdale à feuilles groſſes & larges. Quoique cette pierre ſe trouve ſi près de la *Grésnouca*, & prêsque ſur le même horizont, cependant elle ne contient point de petrifications; ſa texture eſt très-compacte & la caſſure eſt prêsque ſemblable au pétroſilex; quelques centaines de toiſes de la forteréſſe on trouve la petite riviere appelée *Pardovica* au pied d'une montagne nommée *Grobovskaya Gora*, qui eſt d'une hauteur aſſez conſidérable. En traverſant la *Pardovica* on voit s'élever de ſes eaux beaucoup de blocs & de bancs de la ſusdite pierre calcaire, mais qui ne paroiſſent qu'addoſſés ſur le pied de la montagne, car cellicelle-ci confifte d'une pierre de fable fort curieufe. La dispofition de fes bancs n'eft point de tout *ftratifiée*, excepté quelques endroits fur le fommet, où les injures des faifons ont décompofés quelques morceaux dans une direction presque feuilletée; le tout eft bâti en blocs énormes, fendues en direction differente & difpofés en bancs, dont l'épaiffeur va d'une quart jusqu'à 3 archines; elles font compofées de grains de Quartz blanc & jaunâtre peu arrondis & rudes au toucher; ils font très-fortement liés enfemble fans cément vifible, melés d'un peu de mica & colorés en quelques endroits de bandes rougeâtres, produites d'une ocre ferrigineufe, dont ils font impregnés; les grains quartzeux paroiffent presque criftallins, & effectivement la pierre renferme quelques cavités, dont les parois font heriffés de criftaux quarzeux, mais très-minces. Pas loin d'ici, en remontant la *Tfchouffovaya*, aux environs des fabriques de *Bilimbaefsky* on trouve la montagne appelée *Tfchirkovskaya Gora*, femblable à celle de *Grobovskaya*. Toutes les deux font compofées de pierre de fable, mais je ne faurois pas me convaincre, qu'elles doivent leur exiftence à une formation *tertiaire*, ou qu'on doit les ranger parmi les montagnes à couches, comme on a coutume de faire avec toutes les pierres fabloneufes; je crois plutôt que leur formation tombe dans une époque bien plus antérieure & peut-être dans le même tems avec les roches fchifteufes, ainfi nomées *fécondaires*, comme p. e. le *fchifte micacé*, (Glimmerfchiefer) la pierre de *Norka* &c. Au refte, tant la pierre de *Grobovskaya*, que celle de *Tfchirkovskaya*, font employées très utilement chez beaucoup de fabriques de fer Ouraliennes comme pierre à fourneaux.

De la fortereffe de *Grobovskaya* le chemin conduit à la fabrique de *Bilimbaefsky*, appartenante à fon Exc. Mr. le Comte de *Stroganov;* le terrein eft plât, couvert de terre noire; il continue d'être de cette nature jusqu'à 2 verftes; ici l'on trouve une montagne alongée & peu elevée, formée de la même pierre calcaire compacte & rougeâtre, comme celle de *Grobovskaya;* mais fa texture eft encore plus fine & fa furface, expofée à l'air, fe décompofe en une poudre blanche, femblable à la craie. Vient enfuite une plaine marécageufe, à la fin de la quelle s'éleve une colline, compofée d'une efpèce de Quartz, qui entre le pétrofilex & le Quartz tient le milieu; d'ici on paffe une montagne, formée de *fchifte micacé* fort quarzeux. Enfin on arrive à la petite rivière de *Roskovalica*, la quelle eft 10 verftes éloignée de la *Gresnouca.* On trouve ici une montagne, dont la roche eft un *Trappe* gris, parfemé de petites feuilles noires de *Hornbleinde;* quoique cette pierre foit d'un tiffu affez fin, mais à peine on en peut tirer quelques étincelles avec le briquet. Immédiatement après cette roche fuit une pierre calcaire compacte & rougeâtre, femblable en tout à celle de *Grobovskaya*, & après avoir paffé une petite plaine cette pierre fe montre encore à la rivière de *Tfcheremschanka,* où elle fe décompofe auffi en farine blanche; dans le terrein bas de fes environs il y a des grands morceaux de Quartz blanc difperfés. La pierre calcaire continue fur une diftance de 4 à 5 verftes en formant une petite chaîne de monticules, fur lesquelles on exploite une grande quantité des *mines de fer hématitiques* & *ocraceufes*, nichées dans des couches argilleufes rouges & jaunes, qui répofent fur la dite pierre calcaire, comme on s'en peut convaincre dans plufieurs carrieres; elle eft cependant un peu différente de celle,

celle, que nous avons vu jusqu'ici, car ſa couleur eſt plus blanche, tirant ſur le gris, & le tiſſu tient le milieu entre le compacte & le grenu.

Jusqu'à la *Tſchuſſovaya*, laquelle eſt encore 6 verſtes éloignée de la *Tſcheremſchanka*, il y a partout de la pierre calcaire, & au delà de celle-là on trouve quelques petites montagnes, qui de même en ſont formées, mais d'une couleur noirâtre & griſe, & traverſée de veines de ſpat calcaire blanc; ſon tiſſu eſt auſſi un peu plus grenu, néanmoins elle appartient encore plus à l'eſpèce compacte que grénu. Parmi ces montagnes calcaires l'on trouve des petites élévations, compoſées d'une eſpèce de Quartz presque ſemblable au petroſilex; peu après on arrive à la rivière de *Bilimbaëca*, dans les environs de la quelle on exploite beaucoup de mines de fer. A la droite de l'étang, qui contient les eaux pour mouvoir les machines de la fabrique, il ſe montre à nud une pierre calcaire noirâtre & griſe d'un tiſſu presque ſalin ou grenu, & à la gauche un rocher de *ſchiſte micacé* en couches aſſez minces, & feuilletées en lignes tortueuſes; à 400 ou 500 toiſes plus loin il y a pluſieurs mines de fer, dont le minerai répoſe ſur une pierre calcaire parfaitement ſaline ou grenue; mais le grain eſt très fin & le tiſſu fort ſerré; ſa couleur eſt pour la plûpart blanche, tirant ſur le gris & le jaune.

Toutes les mines de fer, qu'on exploite ici, ſe trouvent addoſſées ſur cette pierre, qui s'éleve en collines & en ſommets, couverts immediatement de couches de *Talk* blanc & gris, & d'argille rouge, dans lesquelles les mines ſont diſpoſées en couches tant horizontales que perpendiculaires; elles

 con-

consistent pour la plûpart en *géodes hèmatitiques*; jamais on ne les a trouvé audessous de la pierre calcaire.

En continuant la route de *Bilimbaefsky* sur le chemin de *Cathérinebourg* bientôt le terrein devient plus élevé & fort montagneux; la première montagne, la quelle il faut passer, est nommée *teplaya Gora* (la montagne chaude) à cause de la peine, qu'il se faut donner, pour la monter; elle est composée d'un *schiste micacé* de couleur argentine, rempli de veines quarzeuses assez épaisses, dans les quelles pourtant on ne remarque aucuns indices de minérai. Le sommet consiste du même schiste, mais il contient plus d'argille & beaucoup moins de mica, de sorte qu'il est ce qu'on appelle *schiste corné* proprement dit; sa couleur est grise & noirâtre, & il est de même veiné de beaucoup de Quartz. Le sommet de cette montagne est le commencement d'un petit plateau, qui s'étend jusqu'à la rivière & la fabrique de *Schaïtanka*, aux environs de la quelle s'élevent plusieurs montagnes, dont les unes consistent de *Hornbleinde* noire pure, sans aucun mélange de Feldspath ou de Quartz visible, & les autres d'une espèce de *Porphyrite* d'une pâte argileuse ou de *trappe*, parsémé de Feldspath jaunâtre, mais qui ne fait pas feu contre le briquet.

Au de là de ces montagnes on traverse une vallée, dans laquelle le ruisseau *Talitza* a son cours; elle mouille le pied d'une montagne, qui est la plus haute dans cette partie de la chaîne ouralique, & toutes les eaux, qui prennent leurs sources dans ces environs, en sont separées; celles, qu'on rencontre jusqu'ici, se vont joindre vers l'*Ouest* avec la *Tschoussovaya*; mais au de là de cette ligne de démarmarcation toutes les rivières vont tomber vers l'*Eſt* dans l'*Iſſet*. On ſera ſans doute curieux de ſavoir de quelle roche cette montagne eſt compoſée, & pluſieurs Minéralogiſtes decidéront ſans héſiter, que ce doit être du *Granit;* mais en la montant on rencontre premièrement ſur ſon pied du *ſchiſte talqueux* (Schneideſtein) parſemé de petits cryſtaux de *pyrite;* plus haut il change avec le *ſchiſte corné*, & enfin le ſommet eſt compoſé de l'eſpèce de *Porphyrite*, dont j'ai fait mention ci-deſſus, conſiſtante d'une pâte griſe *argileuſe*, melée d'une grande quantité de *Feldſpat* jaunâtre, criſtalliſé en lames quadrangulaires & rhomboïdales.

Il faut dire cependant que, quoique cette montagne faſſe la pointe la plus haute de la chaîne, en traverſant les monts Ourals ſur le chemin de Cathérinebourg, elle n'eſt pas le ſommet le plus haut de toutes les montagnes ouraliennes, pas même dans la partie, qu'on appelle *Oural de Cathérinebourg;* d'ailleurs le *Granit* n'en eſt pas loin, car en deſcendant la montagne, dont le ſommet fait un petit plateau, on le trouve bientôt; il eſt pour la plûpart d'un grain fin, & s'étend ſur une élevation, qui fait une eſpèce de dos pendant pluſieurs verſtes; il contient quelques filons de Quartz blanc & gras, pour la plûpart d'une épaiſſeur fort conſidérable, mais ſans aucuns indices de minérai.

Aux environs du village de *Réſchéta*, ſitué preſque ſur la plus grande hauteur de ce contré, il n'y a point d'autres roches, que de Granit, dont le mélange différe cependant beaucoup; quelquefois le Quartz, une autrefois le Feldſpat & même ſouvent le Mica y predomine; celui-là eſt toujours blanc ou gris, le Feldſpat jaunâtre & le Mica nôire ou ar-

 gen-

gentin. Tout près du village il y a des rochers très-considérables, dont les sommets s'élévent à nud sur une grande hauteur, composés de *Siénit*, c'est à dire d'une espèce de Granit, dans lequel, au lieu de Mica, la Hornbleinde y est melée; à deux verstes d'ici, parmi les montagnes de Granit, il se trouve un schiste formé de *Hornbleinde* noire très fine & de grains quartzeux blancs.

De ce village jusqu'à la petite rivière de *Kamenka* on compte 12 verstes; c'est le contré le plus sauvage, qu'on voit sur ce chemin, herissé de rochers de Granit, dont la plûpart est tombé en ruine, ayant en même tems un air fort pittoresque; il est bâti en grands blocs, entassés les uns sur les autres, qui souvent sont assez arrondis; son grain est pour la plûpart fin, il est de couleur grise, à cause de mica noire, & assez dur, pour prendre quelque polityre. Les rocs les plus hauts & les plus escarpés se trouvent aux environs de la *Kamenka;* mais d'ici jusqu'à la ville de *Cathérinebourg* les montagnes s'abaissent insensiblement & sont pour la plus grande partie couvertes de terre & de bois; le *Granit* cependant s'y trouve toujours, souvent fendu de grands filons de Quartz. Sur quelques endroits on rencontre, outre le Granit, aussi des montagnes de *Gneiss*, & de *schiste micacé,* traversées de même de filons quartzeux.

Aux environs de *Cathérinebourg*, & principalement autour des lacs *Issetskoe* & *Tschertaskoe*, le Granit domine partout; mais il y a aussi d'autres roches, comme le *Siénit*, le *Gneiss*, le *schiste micacé* & *talqueux*, la *Serpentine*, la *pierre calcaire saline* &c. À la rive gauche de l'*Isset* la ville est bâtie sur une montagne composée d'une pâte argileuse grise, melée

melée de très petits grains de Quartz, de Mica & de Hornbleinde Elle n'eſt paroît guère ſchiſteuſe, car les bancs font d'une épaiſſeur conſidérable, & ſe caſſent en grands morceaux rhomboïdales; ils font inclinées un peu du Nord vers le Sud. Ce rocher ſe décompoſe aiſément à ſa ſuperficie en petits morceaux anguleux. Il contient quelques rognons & petites veines de Quartz, qui eſt pour l'ordinaire un peu oriferant, & dans le voiſinage de celui-ci la roche eſt toujours melée de petits cubes de pyrite.

Immédiatement après ce rocher ſuit une pierre noirâtre melée de criſtaux de fer octaëdres, c'eſt ce qu'on appelle *pierre olaire* ou *Schneideſtein.* Les mêmes criſtaux ſe trouvent dans une eſpèce de *Gneiſs*, qui, entre la ville & la fabrique de *Vercneïſſetsky*, avec un ſchiſte noir de Hornbleinde, environnent l'*Iſſet.* Avec la *pierre olaire* on trouve auſſi de la *ſerpentine* noirâtre, tirant ſur le verd, traverſée de quelques petites veines d'*Asbeſt*, & du *ſchiſte argilleux* noire un peu gras au toucher, dont font compoſées quelques collines, qui ſuivent l'*Iſſet* de la ville vers le chemin de *Tobolsky* jusqu'à deux verſtes. La rive droite au contraire eſt environnée de *Granit* gris & de *Siénit*, melé de beaucoup de Hornbleinde noire & verte, en feuilles aſſez conſidérables, & quelquefois criſtalliſées en prismes hexaëdres à ſommets triédres.

Les vallées, dont la chaîne de ces montagnes ici eſt interrompue, font couvertes d'Argille rouge & de ſable, provenants de la décompoſition des roches pour la plûpart granitiques. En ſuivant le chemin de *Cathérinebourg* vers la fabrique de *Kamensky* on ne rencontre d'abord que des roches

ches de *Granit*, s'élevant en fommets nuds & confiftans en blocs enormes, qui font entaffés les uns fur les autres fouvent d'une telle maniere, que de loin on croit voir des temples antiques tombées en ruine; ces blocs font d'une longueur de 4 jusqu'à 5 toifes, fur une épaiffeur d'une à deux toifes fans caffures ni fentes; ils font presque toujours plus ou moins arrondis, autant qu'ils font découverts de la terre végétale; mais il n'y a que quelqu'uns de ces rochers, qui font ammoncélés en fi grands blocs, car y fe trouve auffi du Granit difpofé en *bancs* presque horizontales, & dont l'épaiffeur fouvent ne furpaffe pas une demie arfchine. C'eft furtout cette variation, qu'on employe pour les bâtimens de *Cathérinebourg;* il eft pourtant à préfumer, que ces couches n'enfoncent pas beaucoup, parceque la profondeur la plus grande des carrieres ne furpaffe guere une toife, & à caufe des bancs trop épais, qui fe rencontrent dans la profondeur, on eft bientôt obligé de changer le lieu de fon ouvrage.

Le mélange de ce *Granit*, tant en couches qu'en blocs, eft le même; c'eft toujours du *Quartz* blanc ou gris, du *Feldfpat* jaunâtre & du *Mica* noire ou argentin, dont il eft compofé; le premier y prédomine, & le Mica lui donne toujours une couleur grife; fon grain eft fort uni, & toute la maffe d'une fonte très-égale; à peine on y remarque quelques petits rognons de Quartz & de *Feldfpat;* non obftant de tout cela il fe décompofe très aifement, & tout le terrein d'alentour eft rempli de fable granitique; fouvent il fe détache même en grands blocs & morceaux.

Le Granit continue jusqu'à 10 verftes de la ville, où il paroit fe perdre fous des montagnes d'une *Serpentine* verte,

verte, qui éléve ses sommets à une hauteur assez considérable; cette serpentine est sans doute une continuation de celle, qui, faisant une chaîne entière des rochers serpentins, très-riche en Asbéste, environ ne la rivière de *Pyschma* sur un grand éspace d'étendue. Au de là de la *Serpentine* le *Granit* se montre derechef; mais son grain est ici plus delié & les parties constituantes un peu plus grandes. C'est dans le voisinage de cet endroit, & 6 verstes du village de *Kossoulina*, où se trouve la belle *aventurine*, dont j'ai eu l'honneur d'envoyer à l'Académie quelques échantillons.

Jusqu'à la rivière de *Bobrovka* on parcoure une belle plaine, couverte d'une couche de terre végétale très-considérable, & sur la quelle on ne rencontre point de pierre, exceptés quelques grands blocs de Quarz blanc & gras, qui sont dispersés dans le terrein. Entre la *Bobrovka* & la *Broussianka* on passe quelques monticules, composés de *Serpentine* & de pierre de *Talk*, melé d'une quantité des rognons quartzeux. C'est aussi dans ces environs & proprement dans des blocs & filons de Quartz, dont le *schiste talqueux* est traversé, que j'ai trouvé le *Cyanite* ou *Talk cristallisé bleu* (autrefois nommé *Schoerl bleu*) dont l'Académie a reçue également quelques exemplaires. La pierre talqueuse est de couleur grise & parsemée de grains de fer d'une figure indeterminée; il y est melé aussi du Quarz & de la *Hornbleinde* verte; & en quelques endroits la roche est traversée de *Talk* noire pure, en forme de filons, dont les parties consistent en lames cristallines; d'ailleurs la pierre est disposée en bancs épais, qui sont employés à la construction des poëls.

À deux verftes de ces montagnes talqueufes on arrive à la rivière de *Brouffianka*, où eft fituee la *Slobode* du même nom; ici les collines ne font formées que de *Granit* jaunâtre, melé de peu de mica. Partout dans la terre végétale on voit difperfé une grande quantité des blocs de Quartz. Mais peu après vient une petite fource, appellée *Kloutfchik*, dont les rivages font bordés de *Siénit*, confiftant de beaucoup de *Hornbleinde* noire où verdâtre, de *Feldfpat* jaune & de fort petits grains de *Quarz;* ce que cette roche a de commun avec toutes les pierres de fon efpèce eft, qu'elle fe décompofe en petits fragmens cuboïdes & rhomboïdales, au lieu que le *Granit veritable* fe décompofe ou en blocs entiers, fans aucune figure determinée, ou en fable; mais le *Siénit* devient par la fuite plutôt *argille* ferrigineufe, que *fable* proprement dit.

Du *Kloutfchik* on paffe encore par une plaine, couverte de la terre végétale la plus fertile, jusqu'à la rivière *Kamifchenka;* partout il n'y a ici d'autres pierres que des grands blocs de Quartz difperfés dans le terrein; mais auprès du village de *Pokrovsky* on trouve des rocs très confidérables de *Porphyre*, qui s'élevent du lit des eaux & de fes rivages fur une diftance de 15 à 20 toifes; il eft compofé de *Jaspe* rouge, tirant fur le violet, de *Feldfpat* blanc en petits rhombes & de quelques grains de *Quartz* & de *Hornbleinde;* il eft bâti en grands blocs cuboïdes, il eft dur & prend un beau poli; ce qu'il a de remarquable eft, que dans quelques unes de fes fentes il fe trouve de la *Calcedoine* blanche & bleuâtre en petits rognons & nids.

En

En descendant la Kamyſchenka, & ayant paſſé un terrein bas, couvert de terre noire, on arrive après 4 verſtes à un moulin ſitué au pied de quelques rochers, qui ſont ici une élévation, qui va ſe joindre aux montagnes, les quelles environnent l'*Iſſet*, qui ne coule, que deux verſtes de cet endroit; c'eſt ici, qu'on trouve une pierre, laquelle a toute la reſſemblance avec la fameuſe *Grauvake* du *Harz;* elle eſt de même accompagnée d'un *ſchiſte noire* aſſez dur, faiſant ſouvent feu contre le briquet, avec cette différence pourtant, que ce ſchiſte eſt rempli de coquilles pétrifiées, changées en ſpat calcaire blanc. La *Grauvake* contient quelques venicules de pyrite de ſoufre, qu'on a voulu exploiter autrefois; elle eſt diſpoſée en bancs très-épais, fendus en toute direction, & inclinés un peu vers l'horizont. Le moulin ſe trouve entre deux montagnes, dont l'une conſiſte de cette *Grauvake* & l'autre d'une *pierre calcaire* compacte rougeâtre ſans aucunes petrifications. Immédiatement ſur la *Grauvake* eſt addoſſée une *pierre ſabloneuſe* d'un grain ſi gros, qu'elle repréſente plutôt une breche ſiliceuſe en couches presque perpendiculaires; puis ſuit une marne griſe, entièrement décompoſée ſur la ſurface & couverte d'une couche épaiſſe de mines de fer ocraceuſe endurcie, remplie d'une grande quantité de vermiculites.

À 15 verſtes d'ici on arrive à la fabrique de fer impériale de *Kamensky*, ſituée ſur la petite rivière *Kamenka*, qui, dans une diſtance de 2 verſtes, va ſe joindre à l'*Iſſet*. Tout le terrein eſt une plaine presque égale, entrecoupée de ruiſſeaux & pourvue d'eminences fort peu élevées. Les roches ne ſont viſibles que dans les hautes rivages, dont l'*Iſſet* & la *Kamenka* ſont bordées; elles ſont formées pour la plûpart de pierre calcaire compacte rougeâtre, semblable tout entière à celle de *Grobovskaya* &c. & qui de même fait ici le fonds dans les carrières des mines de fer, très abondantes dans ces environs; outre celle-là il se trouve aussi de la pierre calcaire *stratifiée*, remplie de coquilles & de coraux changés en spat calcaire blanc ou en pierre à fusil; c'est surtout auprès de la fabrique, à la rive gauche de la Kamenka, où l'on trouve une grande muraille très-escarpée de pierre calcaire en *couches inclinées*, parmi les quelles la pierre à fusil s'est infiltrée, en envélopant sur plusieurs endroits des *Madrépores, Tubipores* & *Millepores*.

Il est pourtant à remarquer, que quoique les fentes de ces couches soient remplies de petrifications, la pierre calcaire elle même n'en contient point; à coté de ces roches s'éleve une montagne, sur la quelle les couches calcaires paroissent addossées; elle consiste d'une espèce de *Porphyrite*, dont la base est un *trappe* gris ou *argille endurcie*, melée de *Feldspat* & de gros grains de *Quartz* fort distingués. Le pied & la pente orientale de cette montagne sont couverts de *pierre de sable* & de *schiste marneux*.

Toutes les environs de la *Kamenka* & de l'*Isset* sont pourvûes des roches pareilles; en outre on trouve aussi des *breches siliceuses* & *calcaires*, & d'*ardoise noire*. La pierre calcaire *compacte*, couleur de chair ou blanchâtre, se rencontre dans toutes les minières de fer; mais jamais elle ne contient de pétrifications. Parmi les pierres calcaires *stratifiées* il y en a, qui contiennent à la verité beaucoup de coquilles, mais on en trouve encore plus, qui n'en ont point.

De

De la fabrique de *Kamensky* jusqu'à l'Ostrog *Kaltschedansky* on compte 18 verstes; c'est presque une plaine parfaite, qu'on y parcoure, couverte de la meilleure terre végétale, & ce n'est que tout près de l'Ostrog, qu'on trouve quelques monticules, les *dernières* de toute la chaîne Ouralienne sur cette route; ils sont formés de *pierre de sable* d'un grain fin, de *marne* jaunâtre & d'*ardoise*, couverts pour la plûpart ou de *terre noire*, ou de *sable* ou de *glaise rouge*. Sur la rive gauche de la *Kaltschedanka* il y a une colline isolée, couverte d'*argille rougeâtre*, dont l'intérieur consiste d'un *schiste vitriolique* noire, rempli de *pyrite*; parmi les couches de schiste il se trouve du *bois fossile* noire, cassant & luisant, qui contient souvent de *succin* jaune, tirant sur le rouge, en grains, dont la grandeur pourtant ne surpasse guere celle des pois. Quoique ce bois fossile ressemble au *jayet*, il ne s'emflame pourtant pas; il brûle seulement. Tout le terrein d'alentour, qui fait ici le fin de la *pente orientale* de la chaîne Ouralienne, porte les caractères d'une *formation tertiaire*, ne contenant que des roches à oouches, à peu près comme les environs de *Perme* & de *Koungour*, qui représentent le pied des monts Ourals sur *le coté occidental*.

Il suit donc de ces observations que de la *Grésnouca* jusqu'à la *Kamischenka*, ce qui fait 165 verstes, sur toute cette largeur de la chaîne Ouralienne on ne trouve point de *roches à couches* proprement dite ou d'une formation tertiaire, point de pétrifications & par conséquent point d'indices, que jadis la mer y ait residée, car toutes les montagnes sont formées de roches, qu'on appelle *primitives*, ou du moins *sécondaires;* il est cependant à remarquer, qu'elles ne suivent aucun ordre, &

 plu-

plusieurs espèces viennent immédiatement les unes après les autres, & paroissent addossées reciproquement; & que la *pierre calcaire compacte* ne se trouve guere dans cette largeur de la chaîne, ni sur les grandes hauteurs, mais toujours sur les pentes; la *pierre calcaire saline* au contraire ne se rencontre jamais parmi les montagnes *tertiaires;* ses roches sont dispersées sans ordre, à ce qu'il paroît, entre les montagnes *primitives,* même sur les plus grandes élévations; au reste les sommets *les plus hauts* de la chaîne entière sont toujours formés de *Granit*, de *Siénit*, de *Porphyrite* ou de *Serpentine,* qui, avec la *pierre calcaire saline,* & des divers *schistes micacés, cornés, argilleux* & *talqueux,* remplissent ici toute la largeur du dos le plus elévé de la chaîne Ouralienne.

OBSER-

OBSERVATIONES QVAEDAM
CIRCA VERA
STIGMATA ET FRVCTIFICATIONEM PERIPLOCAE
GRAECAE L.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Conventui exhib. die 6 Nov. 1795.

Promisi olim in Act. Acad. Elect. Palat. Vol. III. phys. vbi de veris genitalibus masculinis et fructificationis apparatu Asclepiadearum disserui, me alia occasione partes fructificationis Periplocae graecae, quae non parum ab illis abludit, quoque esse descripturum: promisso itaque satisfacio, sperans, analysin earum nunc completam satis & ad liquidum esse deductam.

Calyx huius plantae parvus, monophyllus, quinquefidus ac persistens: laciniis ovatis, antice parum acuminatis.

Corol-

Corolla monopetala, plana, quinquefida: laciniis linearibus, antice truncatis ac emarginatis.

Ex laciniarum angulis efferunt se *cornicula* quinque longa, introrſum inflexa ac purpurea, quorum unumquodque ad baſin ſuam cum duobus acutis, triangularibus concoloribus que fulcris eſt concretum, quae ſemper interiectum et ex aduerſo corniculi poſitum ſtamen complecti quaſi videntur. Decem haec fulcra, quorum alterum quodque dextrum alterius corniculi cum ſiniſtro alterius proxime adiacentis, & ſic quoque vice verſa, rectum, in mediam ipſis occurrentem laciniam profundum applicatum ſulcum exprimit, cum quinque ſuis corniculis illam efficiunt partem, quam Dn. de Linné in hoc plantarum genere Nectarium dicit.

Penitus amputata corolla nectarii que fulcris cum corniculis ſuis, quinque albicantia, lata, brevia et introrſum inflexa *ſtamina* tunc conſpiciuntur, quae cum ſuis flaveſcentibus et a tergo longis albis que pilis obſitis antheris ſuper floris partes infra et inter illa poſitas, veri fornicis ſpeciem reddunt. Quinque haec ſtamina, ſi a baſi ſua reſcindere illa libuerit, cum ſummo ſuo apice in ſpongioſo infra illa poſito craſſo corpori accreta, nec non ipſas eorum antheras, ſub initium certe floreſcentiae, quodammodo adhuc cohaerentes inter ſe reperies.

Sub antherarum fornicem ducunt quinque ampla orbiculata foramina, intervallo, quod has invicem ſeparat, formata, et per quae non fuſum tantum ſeu columellam cum maiori parte ſpongioſi in illa nixi corporis, ſed et, ſi paulo longius proceſſeris, quinque alba, liquore obducta,

niten-

nitentia animadvertis *capitula* (vid. fig. 2. a.), fuper inferiorem fpongiofi corporis marginem paululum eminentia, in medio ferme fupra memoratorum foraminum orbiculatorum collocata, propiusque vertici in aliquanto brevem, perpendiculariter pendentem pedunculum (fig. 2. b.), fuper inferiorem fpongiofi corporis marginem paululum eminentia, in medio ferme fupra memoratorum foraminum orbiculatorum collocata, propiusque vertici in aliquanto brevem, perpendiculariter pendentem pedunculum (fig. 2. b.) prolongata, qui fpongiofi corporis peripheriae preffius infidet. Quae nitentia capitula nifi maiori, eodem faltem iure *Nectariorum* nomine digna funt, quam ifta nectarii fulcra.

Antherae, quarum funt quinque, uti affolent, ex duobus loculis conftant, et pollen, quod continent, fulphuris eft coloris. Quaelibet eius particula formae eft ellipticae, et quafi ex quatuor compreffis globulis compofita (vid. fig. 1.); clarius adhuc perfpicitur haec conformatio, fi in olei guttam illas demiferis, in quo multo pellucidiores fiunt, ftatimque flavicans fuum femen mafculum cum ifto aequabiliter permifcent. Clariffime autem vera illarum ftructura in aqua manifeftatur, in qua confeftim intumefcunt, fuos que quatuor globulos multo melius definitos oftendunt. Tunc ulli Phalaenarum pupulae haud difpares funt, fi fuperiorem globulum pro capite et pectore, ambos magis eminentes globulos laterales autem pro thecis alarum, ac inferiorem pro ventre illius accipimus.

Quod fi igitur ftamina quoque cum fuis antheris refecueris: fuper fuperiorem et exteriorem fpongiofi corporis marginem quinque aequabiliter inter fe diftantes, e flavo

 bruni

bruni coloris, cochleari-vel fpathulaeformes lamellas (fig. 2. c.) impactas reperies, quae in inferiori parte tenuiffimo, brevi, bruno pedunculo (fig. 2. d.) inftructae funt, cuiusque ope cum aliquanto craffiore albicante pedunculo (fig. 2. b.) fupradictorum albicantium, nitentium capitulorum (fig. 2. a.) cohaerent. Eaque harum lamellarum eft facies, flore iam diu patente, polline que iam pridem loculis fuis exclufo. Illo autem tempore, quo antherae adhuc claufae (quod in flore nondum explicato folum animadvertimus) vel in eo funt, vt polline fuo fe exonerant, illae albo humore, unguento fimili prorfus funt obductae, qui eis valde nitentem faciem praebet. Qui albus humor muliebris cum quovis oleo aequabiliter permifceri poteft, vt clare perfpicias, eum ipfum oleofae effe naturae; uti quoque pulvifculi antherarum aeque parum in illo intumescunt, ac in quovis oleo, fed naturalem fuam figuram ac magnitudinem fervant, valde clari pellucidi que in eo evadentes. Quaevis anthera ad polline confpergendas duas, proxime ad vtrumque latus fuum pofitas fpathulaeformes lamellas femper fuum confert, ita quidem, vt dexter illius loculus pollen fuum in finiftrum dimidium alterius, et finifter loculus in dextrum alterius fpathulaeformis lamellae apprimat. Atque ex hoc ordine harum partium, ceu verorum ftigmatum confperfio cum polline circumcirca perficitur. Confperfio itaque ac foecundatio hic, quoad rem ipfam, eadem fit ratione, qua in plerisque ceteris plantis huiusce ordinis naturalis, hac ftructurae tantum differentia, quod in Periploca graeca vulgaribus in aperto pofitis antheris, maximoque numero, fed minimorum ab illis exclaforum pulvifculorum utatur natura, in iftis contra eundem hunc finem non per antheras, fed modo per quinque duplices vel decem fingulos,

los, illorum respectu vero maximos, ac in occulto positos pulvisculos assequatur. Semen autem masculinum, quod verum esse oleum in plantis dudum evici, in vtroque casu eadem fere ratione, nempe in Periploca graeca a spathulaeformibus lamellis, atque in illis ab interiore loculorum planitie, in quibus clavae (vid. fig. 3. e.) illae masculae, vel, vt ita dicam, librae similes partes reconditae latent, suctu immediato attrahitur, spongioso corpori supportatur, quo mediante dein stylorum apicibus cum eo concretis suggeritur. Quas si spathulaeformes lamellas cum ipsorum suppendentibus albis capitulis a sede sua divellere tentaveris, animadvertes, eas nullibi firmius, quam eo in loco, quo ipsorum uterque concurrit pedunculus, cum spongioso corpore esse concretas, ceterum autem leviter tantum cum eo cohaerere. Simul etiam invenies, ipsum corpus spongiosum in his quinque locis, uti universa eorum figura requirit, ad hunc finem praecipue esse excisum, et hoc modo obtusae quinquangularis placentae speciem habere, in cuius angulis ibi, ubi uterque fuit pedunculus, semper ab imo in altum sulcus sensim coarctatus apparet, ac in loco spathulaeformis lamellae planiusculus et ad eam perfecte aptatus laevis sese ostendit scrobiculus. Corpus spongiosum in inferiori latere paululum est convexum, et avulsum a columella, quâ nititur, in medio rotundam aperit foveolam, cui superior columellae extremitas antea inserta eique accreta fuit. Ipsa brevis columella nihil aliud est, quam duplex in aperto positus stylus, corollae basi prorsus contecti ovarii. Quamvis hi ambo styli ex unico tantum membro constare ac firmiter inter se concreti esse videantur: facili tamen negotio, si unum illorum in regione ovarii transverse dissecueris, ab imo sursum ab altero disiungi, atque in

 duo

duo aequalia dimidia findi poffunt. Cuiusvis illius extremitas eft apex obtufus, et nonnihil in latus inclinans, qui femen mafculinum ex fpongiofo corpore imbibit, ovarioque commendat.

Ovarium, ut fupra dictum, a corollae bafi ubique inclufum ac circumdatum eft; haec autem aeque parum, ac in Afclepiade, illi eft accreta, fed tegumenti loco tantum ei infervit, ea tamen differentia, quod hic in medio duplici ftylo liberum permittat exitum, in illa autem aliisque huius generis plantis eundem unâ concludat. Similiter, ac ftylus, duplex et fuboblongum eft, eâdem vero facilitate, quâ ifte, haud difiungitur.

Plantam itaque hanc, quatenus genuinis antheris, polline copiofo foetis, eundemque folito more excludentibus adhuc gaudeat, ab univerfaliore florum ftructura ad fingularifflmam illam Contortarum L. facile omnium, quae veram Gynandriae fpeciem prae fe ferunt, tranfitum quafi facere, imo hac in re, quod potiffimum mireris, ab ipfa etiam Periploca africana L. quippe quae partibus fuis genitalibus mafculinis cum iis plane convenit, maxime differre, indeque hanc et graecam fub eodem, fc. Periplocae genere ftare non poffe, palam eft. Similiter Apocynum Sibiricum Iacq. hort. vindob. Cent. 3. p. 37. tab. 66. it. eiusd. Mifcell. auftr. Vol. I. p. 9. tab. 1. fig. 1. rariffimo in hoc ordine naturali exemplo, antheris polliniferis inftructum effe, ipfe Auctor illuftris obfervavit. Qua occafione, virum hunc, omnium fermone celebratiffimum, thefin meam de veris Afclepiadearum genitalibus mafculinis, eorundemque functione (vid. Act. Acad. Elect. Palat. Vol. III. phyf.) minus

nus bene apprehediſſe, locum que illum diſſertationis meae, germanico idiomate conſcriptae, quem in Miſcell. auſtr. Vol. I. pag. 6. linguae huius non ſatis gnarus, ſenſu plane contrario latine reddidit, ad verbum ita exprimendum eſſe: „ Clavae illae flavae et planae ex tota ſua ſtructura evi„ dentiſſime et praeciſe ſunt id, quod in aliis plerisque „ plantis ipſi antherarum pulvisculi (non antherae) ſunt, „ adeoque ſenſu proprio vera ſeminis maſculini organa „ litemque ſic bona gratia inter nos componi poſſe, admonere velim.

Explicatio figurarum.

Fig. 1. Pulviſculi aliquot antherarum Periplocae graecae L. magnitudine aucta.

— 2. *a.* Capitulum nitens, ſeu nectarium.

b. Eiusdem pedunculus.

c. Lamella ſpathulaeformis, ſeu ſtigma.

d. Eiusdem pedunculus ſeu cauda.

— 3. *e. e.* Clavae maſculae binae Aſclepiadis fruticoſae L. magnitudine aucta.

f. f. Earundem pedunculi.

g. Mitrula nigricans, antherae ſimulacrum.

POLYGONI SPECIES NOVA, DESCRIPTA AB

JOAN. LEPECHIN.

Conuentui exhib. die 11 Februar. 1796.

Celeberrimus atque mihi amicissimus Laxmann, consiliarius collegiorum ac eques vlteriores regrones Sibiriae peragrans, variarum rariarum plantarum legit semina, mihi que benevole commicare non recusavit, e quibus enatae plantae nunc lete in horto academico vegetant; et ex quarum penu nunc in medium profero pulchram polygoni speciem, quam in tesseram amicitiae gratique animi nominare placet.

Polygonum Laxmanni.

Estque illud polygonum caule diffuso, paniculis laxis, axillaribus, floribus octandris, trigynis, foliis lanceolato - Linearibus, glabris, acutis.

Descriptio.

Radix perennis, descedens, fibris pluribus badeis ad terrae superficiem circumdatus, mox deinde in ramos modo trans-

transuerſe repentes, modo oblique deſcendentes fibrillis rarioribus inſtructos diviſa, e flavo badia.

Ex hac radice ſurgit caulis vltra pedem altus, pennae anſerinae craſſicie, valde diffuſus, paſſim diſtortus, ſubdecumbens, vaginis exaridis, membranaceis inſtructus, ab initio roſeo colore tinctus, qui color in articulis aſcendentibus in badium mutatur.

Folia caulina ex ipſis geniculis alternatim exeuntia, ſeſtilia rameis triplo, et quod excurrit, longiora, lineri-lanceslata, glabra, emarceſcentia, vena media elevata, ſubtus conſpicua.

Ex alis ſuperiorum articulorum protruduntur modo alternativo rami geniculuti, per dihotomiam diviſi, cauli conformes, glabri. Folia ad genicula ramorum modo oppoſita, non rato tripla, lanceolato-lineria, acuta, ſeſſilia, laete viridia.

In ſummitatibus ramorum vbique ex alis prodeunt pedunculi ſuſtentantes flores paniculatos, propris pedicellis inſtructos, modo ſimplicibus, modo bifariam diviſis.

Flores calyciflori, regulares in quinque lacinias ſubrotundas, albidas profunde ſciſſi.

Stamina: Filamenta octo, brevia, ſimplicia, antherae incumbentes, polline cinnabarino foetae.

Styli

Styli tres, breviſſimi, ſimplices, germen triquetrum; vti et ſemen, longitudine calycis, glabrum, acuminatum.

Sapor foliorum acido-auſterus. Creſcit in vlteriori Sibiria ad fluvium Vrakan.

Celeberrimus olim Samuel Gottlieb Gmelin in continuatione Florae Sibiricae Tom. III. No. 43. propoſuit ſpeciem polygoni ex herbario ſicco indefeſſi Stelleri depromptam, hisque notis diſtinctam, quod ſit *polygonum caule diffuſiſſimo, ſpicis laxis, floribus octandris, trigynis, ſeminibus aequalibus, foliis lanceolatis;* quaeque ſpecies proxime ad noſtram accedere videtur; aſt totus habitus externus, folia breviora, latiora et magis obtuſa; caulis non tam elevatus, nudus, ad geniculos quaſi barbatus, geniculi magis diſtantes vt in icone Tab. XI. fig. 2. videre eſt, ſpeciem hanc a noſtra diverſam eſſe ſuadent.

Tab.XIII. Fig. 1.) ſiſtit caulem florentem. 2.) Radicem. 3.) Flores ad lentem auctos. 4.) Ramulum cum ſeminibus maturis. 5.) Semen ad lentem auctum.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DE PERTVRBATIONE MOTVVM MARTIS.

Auctore

F. T. SCHVBERT.

Conuentui exhib. die 26 Febr. 1795.

§. 1.

Postquam omnes planetarum motus ope theoriae *Neutonianae* perfecte fuerant explicati, motus nempe regulares seu *Kepleriani* per actionem reciprocam *binorum*, irregulares autem seu *perturbationes* per actionem *trium* corporum: unum adhuc restabat phaenomenon, quod leges *Neutonianas* respuere videbatur, aut saltem omnibus recentioris analyseos subsidiis e legibus istis derivari non poterat. Causa haec fuit, quare plures astronomi de ipsa phaenomeni huius, puta *aequationis motus medii secularis*, veritate eo magis dubitarunt, quod de duobus tantum aut tribus systematis nostri planetis observationes eam praedicare viderentur. Veruntamen cum haec aequatio in motu Saturni Iovisque sit admodum sensibilis, binorum horum planetarum theoria gravissimum astronomiae physicae problema fuit, quod Academia

mia Parisiensis astronomis saepius proposuit, et in quo solvendo maximi geometrae diu licet frustra fuerunt occupati. Negotium hoc intricatum, variis tentaminibus frustra susceptis, perfecte tandem successit viro celeberrimo *De la Place*, qui modo prorsus novo opus aggressus, sine ulla hypothesi, e sola theoria *Neutoniana*, pro motu Saturni Iovisque perturbato aequationes deduxit, quibus uterque motus cunctis observationibus perfecte accommodatur, atque aequatio ista nomine *secularis* celebrata optime explicatur. Methodus itaque, qua magnus ille geometra usus, nodum hunc Gordium tam feliciter solvit, cum aliis methodis palmam praeripere videatur, operae pretium existimavi, ceterorum planetarum perturbationes ex iisdem formulis computare, atque nunc theoriam perturbationum *Martis*, quam astronomi parum perquisivisse videntur, e formulis hisce computatam, eo potius cum Academia communicabo, cum inter eam Martisque aequationes ab astronomo celeberrimo *De la Lande* repertas ingens intercedat differentia.

§. 2. Demonstratione formularum hic supersedere licet, siquidem eae ab acutissimo auctore plenarie fuerunt evolutae, idque in libro qui in omnium astronomorum manibus est (*Theorie de Jupiter & de Saturne, par M. de la Place; dans l'Histoire de l'Acad. Roy. des Sc. de Paris*, Année 1785, 1786.). Formam tamen formularum tantisper immutabimus, quo facilius seorsim possint intelligi et computari.

Sit itaque distantia media Martis a Sole per distantiam mediam planetae turbantis M a Sole divisa $= a$,

motus medius planetae M per motum Martis medium divisus $= n$,

lon-

longitudo heliocentrica media prioris $= M$, Martis $= ♂$,
$M - ♂ = w$,

eccentricitas Martis $= \gamma$, planetae $M = \gamma'$,

longitudo nodi afcendentis Martis cum ecliptica $= I$,
planetae $M = I'$,

inclinatio ad eclipticam Martis $= \eta$, planetae $M = \eta'$,

longitudo aphelii Martis $= \pi$, planetae $M = \pi'$,

motus medius Martis annuus $= N$,

et maffa M in partibus maffae Solis $= m$.

Sit porro $\frac{2a}{1+a^2} = \alpha$, et ftatuatur

$$(1 - \alpha \cos w)^{-\frac{1}{2}} = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} \cos w + \varepsilon^{(2)} \cos 2w + \ldots + \varepsilon^{(i)} \cos iw,$$

$$(1 + a^2 - 2a \cos w)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} b^{(0)} + b^{(1)} \cos w + b^{(2)} \cos 2w + \ldots + b^{(i)} \cos iw,$$

$$(1 + a^2 - 2a \cos w)^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2} c^{(0)} + c^{(1)} \cos w + c^{(2)} \cos 2w + \ldots + c^{(i)} \cos iw,$$

ita ut fit

$$\varepsilon^{(0)} = 1 + \frac{1.3}{4^2} \alpha^2 + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.8} \alpha^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12} \alpha^6 + \text{cet.} = S,$$

$$\frac{2\varepsilon^{(1)}}{\alpha} = 1 + \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3.5.7.9}{4.4.8.8} \cdot \frac{\alpha^4}{3} + \frac{3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12} \cdot \frac{\alpha^6}{4} + \text{cet.} = T,$$

$$\tfrac{1}{2} b^{(0)} = \frac{\varepsilon^{(0)}}{\sqrt{(1+a^2)}}, \quad b^{(1)} = \frac{\varepsilon^{(1)}}{\sqrt{(1+a^2)}}, \text{ et generatim } b^{(i)} = \frac{\varepsilon^{(i)}}{\sqrt{(1+a^2)}}:$$

tumque quilibet coëfficiens $b^{(i)}$ e binis antecedentibus, $b^{(i-1)}$, $b^{(i-2)}$, ope huius formulae reperietur,

$$b^{(i)} = \frac{2(i-1)(1+a^2) b^{(i-1)} - (2i-3) a b^{(i-2)}}{(2i-1) a},$$

 et

et coëfficientes $c^{(i)}$ e coëfficientibus $b^{(i)}$ ope huius formulae;

$$c^{(i)} = \frac{(2i+1)(1+a^2)\,b^{(i)} - 2(2i+1)\,a\,b^{(i+1)}}{(1-aa)^2}.$$

Differentialia denique ita capta, ut nonnisi litera a variabilis statuatur, ope sequentium formularum eruantur:

$$\frac{\partial b^{(i)}}{\partial a} = \frac{i+(i+1)a^2}{a(1-a^2)}\,b^{(i)} - \frac{(2i+1)}{1-a^2}\,b^{(i+1)},\ \text{et}$$

$$\frac{\partial\partial b^{(i)}}{\partial a^2} = \frac{i+(i+1)a^2}{a(1-a^2)}\left(\frac{\partial b^{(i)}}{\partial a}\right) + \frac{(i+1)a^4+(4i+1)a^2-i}{a^2(1-aa)^2}\,b^{(i)}$$

$$- \frac{2i+1}{1-a^2}\left(\frac{\partial b^{(i+1)}}{\partial a}\right) - \frac{2(2i+1)a}{(1-aa)^2}\,b^{(i+1)}.$$

Vnde patet, omnes coëfficientes $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $\frac{\partial b^{(i)}}{\partial a}$, $\frac{\partial\partial b^{(i)}}{\partial a^2}$, ope binarum serierum S, T, reperiri.

§. 3. Denominationibus his adhibitis, omnes aequationes motum Martis turbatum definientes ita exprimentur:

1.) Motus annuus *nodorum* respectu fixarum,

$$A = \tfrac{N}{4}\,m\,a\,a\,c^{(1)}\left[\tfrac{\tan g\,\eta'}{\tan g\,\eta}\cos(I-I') - 1\right] = \mathfrak{A}\left[\tfrac{\tan g\,\eta'}{\tan g\,\eta}\cos(I-I') - 1\right];$$

2.) Motus annuus *apsidum* respectu fixarum,

$$B = \tfrac{N}{4}\,m\,a\,a\,c^{(1)} + \tfrac{N}{4}\cdot\tfrac{\gamma'}{\gamma}\,m\,a\left[2b^{(1)} - 2a\left(\frac{\partial b^{(1)}}{\partial a}\right) - aa\left(\frac{\partial\partial b^{(1)}}{\partial a^2}\right)\right]\times$$

$$\times\cos(\pi-\pi') = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos(\pi-\pi');$$

3.) Variatio annua *inclinationis*, $C = +\mathfrak{A}\tan g\,\eta'\sin(I-I')$;

4.) Variatio annua *eccentricitatis*, $D = +\mathfrak{B}\gamma\sin(\pi-\pi')$;

5.) Aequatio ab eccentricitate independens *radii vectoris*

$$= -\tfrac{m}{6}a^2\left(\frac{\partial b^{(0)}}{\partial a}\right) - \left[\frac{2a(a-b^{(1)})}{1-n} + a^2\left(1-\left(\frac{\partial b^{(1)}}{\partial a}\right)\right)\right]\frac{m\,\mathrm{cos}\,w}{n(2-n)} - \ldots$$

$$-\left[\frac{2ab^{(i)}}{1-n} + a^2\left(\frac{\partial b^{(i)}}{\partial a}\right)\right]\frac{m\,\mathrm{cos}\,iw}{i^2(1-n)^2-1} = -\tfrac{m}{6}a^2\left(\frac{\partial b^{(0)}}{\partial a}\right) - E^{(i)}\mathrm{cos}\,iw;$$

6.) Aequatio ab eccentricitate independens *longitudinis*

$$= -\left[\left(1+\frac{3}{(1-n)^2}\right)(a-b^{(1)}) + \frac{2a}{1-n}\left(1-\frac{\partial b^{(1)}}{\partial a}\right)\right]\frac{m\,a\,\mathrm{fin}\,w}{n(2-n)} -$$

$$-\left[\left(i^2+\frac{3}{(1-n)^2}\right)b^{(i)} + \frac{2a}{1-n}\left(\frac{\partial b^{(i)}}{\partial a}\right)\right]\frac{m\,a\,\mathrm{fin}\,iw}{i[i^2(1-n)^2-1]} = -F^{(i)}\mathrm{fin}\,iw$$

7.) Aequatio ab eccentricitate fimplice dependens *radii vectoris*

$$= -m\gamma f^{(i)}\mathrm{cof}(iw+u) + m\gamma' g^{(i)}\mathrm{cof}[(i-1)w+v] = G;$$

8.) Aequatio ab eccentricitate fimplice dependens *longitudinis*

$$= -m\gamma h^{(i)}\mathrm{fin}(iw+u) + m\gamma' k^{(i)}\mathrm{fin}[(i-1)w+v] = H;$$

ubi u, v, funt anomaliae mediae Martis et planetae M.

§. 4. In aequationibus E et F (5. et 6.) litera i fucceffive omnium numerorum integrorum ac pofitivorum, $+1$, $+2$, $+3$, etc. valores induit; in aequationibus autem G et H (7. et 8.) litera i praeterea numeris negativis, -1, -2, -3, etc. aequari debet. Coëfficientes f, g, h, k, fequentibus determinantur aequationibus:

$$f^{(i)} = \frac{2i^3(1-n)^2 + i^2(1-n)(3n-1) - 3}{i(1-n)^2[i(1-n)-2][i^2(1-n)^2-1]}\,a\,b^{(i)} +$$

$$+ \frac{i^3(1-n)^2 + i^2(1-n) - 3}{i(1-n)[i(1-n)-2][i^2(1-n)^2-1]}\,a^2\left(\frac{\partial b^{(1)}}{\partial a}\right) +$$

$$+ \frac{\tfrac{1}{2}a^3}{i(1-n)[i(1-n)-2]}\left(\frac{\partial\partial b^{(i)}}{\partial a^2}\right);$$

g

$$g^{(i)} = \frac{(i-1)(2i-1)ab^{(i-1)} + [i^2(1-n)-1]a^2\left(\frac{\partial b^{(i-1)}}{\partial a}\right)}{i(1-n)[i(1-n)-1][i(1-n)-2]} +$$

$$+ \frac{a^3\left(\frac{\partial\partial b^{(i-1)}}{\partial a^2}\right)}{2i(1-n)[i(1-n)-2]};$$

$$h^{(i)} = \frac{i^5(1-n)^4 - i^4(2-n)(1-n)^3 + 2i^3(2-n)(1-n)^2 - i^2(1-n)(7-11n) + 10i(1-n) - 6}{i(1-n)^2[i(1-n)-1][i^2(1-n)^2-1][i(1-n)-2]}ab^{(i)} +$$

$$+ \frac{i^4(1-n)^3 + 3i^3(1-n)^2 - 2i^2(1-n)(2-3n) + 12i(1-n) - 12}{2i(1-n)[i(1-n)-1][i^2(1-n)^2-1][i(1-n)-2]}aa\left(\frac{\partial b^{(i)}}{\partial a}\right) +$$

$$+ \frac{a^3}{i(1-n)[i(1-n)-1][i(1-n)-2]}\left(\frac{\partial\partial b^{(i)}}{\partial a^2}\right);$$

$$k^{(i)} = \frac{(i-1)(2i-1)[i^2(1-n)^2 - 2i(1-n) + 4]}{2i(1-n)[i(1-n)-1]^2[i(1-n)-2]}ab^{(i-1)} +$$

$$+ \frac{i^3(1-n)^2 + i^2(1-nn) + 2i(1-n) - 4}{2i(1-n)[i(1-n)-1]^2[i(1-n)-2]}aa\left(\frac{\partial b^{(i-1)}}{\partial a}\right) +$$

$$+ \frac{a^3}{i(1-n)[i(1-n)-1][i(1-n)-2]}\left(\frac{\partial\partial b^{(i-1)}}{\partial a^2}\right).$$

In formulis hisce coëfficientes f, g, h, k, definientibus, in quibus i omnes numeros integros, ± 1, ± 2, etc. excepto valore $i = 0$, repraesentat, probe notandum est: *primo* valores $b^{(i)}$, $\frac{\partial b^{(i)}}{\partial a}$, $\frac{\partial\partial b^{(i)}}{\partial a^2}$, eosdem manere, sive i valorem recipiat positivum, sive negativum; *deinde* casu $i = \pm 1$, ponendum esse $b^{(i)} = b^{(1)} - a$, et $\frac{\partial b^{(i)}}{\partial a} = \frac{\partial b^{(1)}}{\partial a} - 1$. Ceterum aequationes E, G, in distantiam Martis a Sole mediam, F et

F et H autem in numerum $\frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{3,14159\ldots} = 206264,8$ ducere oportet, quo priores partibus radii orbis Martis, posteriores minutis secundis exprimantur.

§. 5. Aequationes C, D, et pars aequationum A, B, sensu stricto non sunt seculares sed periodicae, quarum autem periodus a motu relativo apheliorum nodorumve ($\pi - \pi'$, $I - I'$) dependens tantum non infinita est, quae itaque speciem aequationum secularium, quarum quippe periodus vere infinita est, mentiuntur. Quare proprie planetarum non dantur aequationes seculares nisi motus aphelii $= \frac{N}{4} m a a c^{(1)}$ et nodi $= - \frac{N}{4} m a a c^{(1)}$, qui posterior proprie est motus nodorum Martis cum orbita planetae turbantis, et pars duntaxat motus nodorum cum ecliptica; eaeque duo aequationes solae tanquam seculares in astronomia vulgo considerari solent. Cum tamen ob motum apsidum nodorumque lentissimum, reliquae aequationes intervallo satis longo vix sensibiliter mutentur, cum secularibus eas coniungere omnino oportet. Quia vero non sunt absolute uniformes, ingenti temporis intervallo elapso, valor earum sensibiliter mutatur, ideoque correctionem requirit, quae non, velut aequationes ipsae, tempori elapso, sed temporis quadrato potentiisve altioribus proportionalis esse debet, quoniam alias non correctio sed pars aequationis foret. Cum unius anni intervallo motus illi ab uniformitate sensibiliter recedere nequeant, ipsi motus annui supra reperti tanquam *celeritates* pro hac epocha considerari poterunt, si quodvis tempus t integris annis exprimatur; haec autem celeritas alia epocha valde remota alium induet valorem. Quodsi e. gr. certa epocha T assumta elementa fuerint γ, γ', π, π', I, I', eadem epocha celeritas, qua eccentricitas γ mutatur, erit

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = D = L \gamma' \sin(\pi - \pi') \ (\S.\ 3.),$$

ubi est

$$L = \tfrac{N}{4} m a \left[2 b^{(1)} - 2 a \left(\frac{\partial b^{(1)}}{\partial a}\right) - a^2 \left(\frac{\partial \partial b^{(1)}}{\partial a^2}\right)\right]$$

quantitas sensu stricto constans. Sit iam alia epocha, e. gr. mille annis ante epocham T, eccentricitas planetae $M = \gamma''$, longitudo aphelii Martis $= p$, planetae $M = p'$; eritque hac nova epocha $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = L \gamma'' \sin(p - p') = D'$, proinde incrementum celeritatis intervallo mille annorum $= D - D'$, unius autem anni $= \frac{D - D'}{1000}$, quod similem ob causam tanquam *celeritas* incrementi, $\frac{\partial D}{\partial t}$ considerari potest: unde habemus $\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \partial \gamma}{\partial t^2} = \frac{D - D'}{1000}$. Cum autem γ sit functio temporis t, per theoriam differentiarum, posteaquam tempus quantitate t crevit, h. e. t annis elapsis, valor eccentricitatis γ erit

$$= \gamma + t \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\partial \partial \gamma}{\partial t^2} + \text{cet.} = \gamma + t D + \frac{t^2 (D - D')}{2000},$$

proinde variatio eccentricitatis post t annos est $= t D + \frac{t^2 (D - D')}{2000}$, et ante t annos erat $= - t D + \frac{t^2 (D - D')}{2000}$, ita ut $+ \frac{t^2 (D - D')}{2000}$ sit correctio quaesita. Valor elementorum γ'', p, p', quorum ope quantitas D' computatur, aut e formulis B, C, (§. 3.) aut e motu eorum seculari per observationes cognito reperitur. Eodem modo, cum sit motus aphelii $\delta \pi = B t$, reperitur casu quo t numerus ingens, $\delta \pi = B t + \frac{t^2 (B - B')}{2000}$, et $\delta I = A t + \frac{t^2 (A - A')}{2000}$, ubi A', B', sunt valores aequationum A, B, ante mille annos. Ceterum in hacce correctione computanda variabilitatis inclinationum η, η', rationem habere haud opus est.

§. 6.

§. 6. In calculo numerico iuxta formulas noſtras inſtituendo facile quidem praevidere licebat, nonniſi Iovis tellurisque actiones in Martem fore ſenſibiles. Ipſo tamen calculo inſtituto expertus ſum, Saturni Venerisve effectum unum minutum ſecundum non excedere. Valores, quos literae in formulis noſtris contentae, ex actione Iovis tellurisve ſuſcipiunt, ſequens tabella exhibet, in quo epocha aſſumta eſt annus 1750.

Pro actione

	Iovis	Telluris
a	0,292962	1,523690
n	0,158790	1,882660
γ	0,093310	0,093310
γ'	0,048151	0,016802
m	$\frac{1}{1067,195}$	$\frac{1}{319160}$
N	689100″	689100″
$\pi-\pi'$	$-38^{0}.54'$.	$-127^{0}.11'$
$I-I'$	$-50^{0}.40'$.	——
η	$1^{0}.51'$.	$1^{0}.51'$.
η'	$1^{0}19'10''$	0
$b^{(0)}$	2,045118	1,503693
$b^{(1)}$	0,302931	0,528042
$b^{(2)}$	0,066811	0,266187
$b^{(3)}$	0,016342	0,147403
$b^{(4)}$	0,004196	0,085298
$b^{(5)}$	0,001112	0,048419

	Iovis	Telluris
$c^{(0)}$	2,444798	1,938258
$c^{(1)}$	1,040254	1,619255
$\frac{\partial b^{(0)}}{\partial a}$	0,324020	−1,334050
$\frac{\partial b^{(1)}}{\partial a}$	1,106015	−0,875538
$\frac{\partial b^{(2)}}{\partial a}$	0,473776	−0,627362
$\frac{\partial b^{(3)}}{\partial a}$	0,171882	−0,447568
$\frac{\partial b^{(4)}}{\partial a}$	0,058439	−0,331402
$\frac{\partial\partial b^{(0)}}{\partial a^2}$	1,338789	2,813797

	Iovis	Telluris
$\frac{\partial\partial b^{(1)}}{\partial a^2}$	0,793223	1,824218
$\frac{\partial\partial b^{(2)}}{\partial a^2}$	1,873300	1,506013
$\frac{\partial\partial b^{(3)}}{\partial a^2}$	1,255027	1,705468
$\mathfrak{A}$	+14″,413	+ 2″,030
$\mathfrak{B}$	− 2″, 691	−0″,0757
$\mathfrak{B}\,\gamma$	− 0″, 251	−0″,0071
A	− 7″,90	− 2″,030
B	+ 12″, 32	+ 2″,076
C	− 0″, 257	0
D	$+\frac{0,7643}{1000000}$	$+\frac{0,0273}{1000000}$

§. 7. Ad correctionem aequationum fecularium quadrato temporis proportionalem (§. 5.) quod attinet, facile patet, eam in actione telluris haud fenfibilem fore. Quodfi itaque pro Iove cum Celeb. *De la Lande* ftatuamus, ante mille annos feu anno 750 fuiffe $I - I' = -45^0\,3'$, $\pi - \pi' = -40^0\,17'$, et cum Cel. *De la Place*, $\gamma' = 0{,}04681$; $\eta' = 1^0\,20'\,27''$; eodem tempore fuiffe reperietur eccentricitas Martis $= \gamma - 1000\,D = 0{,}09331 - 0{,}00079 = 0{,}09252$. Quibus valoribus fubftitutis, nancifcimur $A' = -7'', 036$; $B' = +12'', 40$ et $D' = + \frac{0{,}7804}{1000000}$: proinde $A - A' = -0'', 864$; $B - B' = -0'', 08$ et $D - D' = - \frac{0{,}0161}{1000000}$. Habemus igitur ex actione Iovis atque telluris coniunctim, intervallo t annorum, ab anno 1750 inchoando,

motum nodorum Martis cum ecliptica, $A = -t.\,9'', 93 - tt.\,0'', 000432$;
motum aphelii Martis, $B = +t.\,14'', 396 - tt.\,0'', 00004$;
variationem inclinationis Martis ad eclipticam, $C = -t.\,0'', 257$;
variationem eccentricitatis Martis, $D = +t.\,\frac{0{,}7916}{1000000} - tt.\,\frac{0{,}00008}{1000000}$.

Aequationes A, B, motum *verum* refpectu fixarum referunt, vnde refpectu punctorum aequinoctialium erit

motus nodorum $= +t.\,40'', 37 - tt.\,0'', 000432 = A$,
motus apfidum $= +t.\,64'', 70 - tt.\,0'', 00004 = B$,

ac intervallo 100 annorum poft annum 1750,

$$A = 4037'' - 4'', 32 = 1^0\,7'\,12'', 7;$$
$$B = -6470'' - 0'', 4 = 1^0\,47'\,49'', 6;$$
$$C = -25'', 7;$$
$$D = +0{,}00007916 - 0{,}00000008 = +0{,}00007908.$$

Ex

Ex obſervationibus Cel. *De la Lande* concludit motum ſecularem A = $1^{0}\ 6'\ 22''$, et e tabulis *Halleyanis* B = $1^{0}\ 56'\ 40''$, e *Keplerianis* autem B = $1^{0}\ 40'\ 0''$. (V. *Aſtronomie par M. de la Lande.* §. 1341. 1320.) Medium arithmeticum praebet B = $1^{0}\ 48'\ 20''$: quarum determinationum conformitas cum noſtro calculo ſatis evidens eſt. Meminiſſe autem oportet, motum nodorum Martis apparentem ſiue ex obſervationibus deductum, motu reali eclipticae e perturbationibus motus telluris oriundo, nonnihil immutari.

§. 8. Si ope numerorum, quos tabula praecedens continet, aequationes periodicas (§. 3. n. 5. 6. 7. 8.) computemus, ſequentes reperiemus valores.

Pro actione

	Iovis	Telluris		Iovis	Telluris
$\frac{m}{6} a^2 \left(\frac{\partial b^{(0)}}{\partial a}\right)$	+ 0, 0000043	− 0, 0000016	$g^{(+2)}$	− 0, 101707	− 0, 340253
$E^{(1)}$	− 0, 0000514	+ 0, 0000130	$g^{(-2)}$	− 0, 003874	− 32, 75480
$E^{(2)}$	+ 0, 0000446	− 0, 0000035	$g^{(+3)}$	+ 0, 247742	− 0, 164049
$E^{(3)}$	+ 0, 0000045	− 0, 0000008	$h^{(+1)}$	+ 0, 304584	+ 12, 667551
$F^{(1)}$	− 24″, 42	− 7″, 336	$h^{(-1)}$	− 0, 159283	− 199, 0224
$F^{(2)}$	+ 13″, 62	+ 0″, 99	$h^{(+2)}$	− 1, 308871	− 1, 83840
$F^{(3)}$	+ 1″, 18	+ 0″, 19	$h^{(-2)}$	+ 0, 103107	− 105, 6105
$f^{(+1)}$	− 0, 081233	− 5, 820511	$h^{(+3)}$	+ 0, 148920	− 0, 237878
$f^{(-1)}$	+ 0, 065623	+ 21, 574146	$h^{(-3)}$	+ 0, 009982	+ 10, 43905
$f^{(+2)}$	− 0, 450670	+ 0, 658440	$k^{(+1)}$	+ 0, 576807	− 0, 784784
$f^{(-2)}$	− 0, 048187	− 44, 33782	$k^{(-1)}$	− 0, 002140	− 522, 1009
$f^{(+3)}$	+ 0, 086242	+ 0, 220596	$k^{(+2)}$	− 0, 261297	− 0, 336201
$f^{(-3)}$	− 0, 006312	+ 7, 390379	$k^{(-2)}$	− 0, 011621	− 80, 06065
$g^{(+1)}$	− 0, 045795	+ 0, 738740	$k^{(+3)}$	+ 0, 384873	+ 0, 132879
$g^{(-1)}$	− 0, 015366	+ 42, 02359			

§. 9. Si iam numeros E, *f*, *g*, in diſtantiam Martis a ſole mediam = 1, 52369; numeros F, *h*, *k*, in numerum 206264, 8; praetereaque numeros *f*, *g*, *h*, *k*, in maſſam planetae turbantis, numeros *f*, *h*, in eccentricitatem Martis, numeros autem *g*, *k*, in eccentricitatem planetae turbantis ducamus; ſi porro radius orbis telluris ponatur = 1000000, longitudines mediae heliocentricae, Martis = ♂, Iovis = ♃, telluris = ♁, ac loco poſterioris ſubſtituatur longitudo geocentrica Solis = ⊙, ita vt ſit ♁ = 180° + ⊙, et et pro Iove angulus commutationis $w = ♃ - ♂$, pro actione telluris autem $w = ♁ - ♂ = 180^0 + \odot - ♂$; ſi denique ponatur anomalia media Martis $= \zeta$, Iovis $= \eta$, telluris ſeu Solis $= \theta$; omnes aequationes Martis periodicae ex actione Iovis tellurisque iunctim oriundae erunt ſequentes.

Aequatio radii vectoris $= -4 + 78 \cos(♂ - ♃)$
$- 68 \cos 2(♂ - ♃) - 7 \cos 3(♂ - ♃) + 11 \cos(♂ - ♃ - \zeta)$
$- 9 \cos(♂ - ♃ + \zeta) + 60 \cos[2(♂ - ♃) - \zeta] + 6 \cos[2(♂ - ♃) + \zeta]$
$- 11 \cos[3(♂ - ♃) - \zeta] + 1 \cos[3(♂ - ♃) + \zeta] - 3 \cos\eta - 7 \cos(♂ - ♃ - \eta)$
$+ 17 \cos[2(♂ - ♃) - \eta] - 1 \cos[2(♂ - ♃) + \eta] + 20 \cos(♂ - \odot)$
$+ 5 \cos 2(♂ - \odot) - 1 \cos 3(♂ - \odot) - 2 \cos(♂ - \odot - \zeta)$
$+ 9 \cos(♂ - \odot + \zeta) + 20 \cos[2(♂ - \odot) + \zeta] + 3 \cos[3(♂ - \odot) + \zeta]$
$+ 3 \cos[2(♂ - \odot) + \theta] + 3 \cos[3(♂ - \odot) + \theta]$;

Aequatio longitudinis $= - 24'',4 \sin(♂ - ♃)$
$+ 13'',6 \sin 2(♂ - ♃) + 1'',2 \sin 3(♂ - ♃) + 5'',5 \sin(♂ - ♃ - \zeta)$
$+ 2'',9 \sin(♂ - ♃ + \zeta) - 23'',6 \sin[2(♂ - ♃) - \zeta]$
$- 1'',9 \sin[2(♂ - ♃) + \zeta] + 2'',7 \sin[3(♂ - ♃) - \zeta]$
$+ 5'',4 \sin\eta + 2'',4 \sin(♂ - ♃ - \eta) - 3'',6 \sin[2(♂ - ♃) - \eta]$
$+ 7'',3 \sin(♂ - \odot) + 1'' \sin 2(♂ - \odot) - 12'' \sin(♂ - \odot + \zeta)$
$+ 6'',4 \sin[2(♂ - \odot) + \zeta] - 5'',7 \sin[2(♂ - \odot) + \theta]$.

§. 10. Cel. *De la Lande* juxta methodum *Clairaltianam* computavit aequationem longitudinis Martis ex actione Iovis oriundam $= - 25'',7 \sin(♂ - ♃) + 12'',2 \sin 2(♂ - ♃)$

+ 9'',

$+9'',2 \sin(♂-♃-\zeta)-1'',4 \sin(♂-♃+\zeta)-17'',6 \sin[2(♂-♃)-\zeta]$
$+1'',6 \sin[2(♂-♃)+\zeta]$, et ex actione telluris,

$$=+7''\sin(♂-☉)+1''\sin 2(♂-☉)-35'',8\sin(♂-☉+\zeta)$$
$$-15'',7\sin[2(♂-☉)+\zeta]-14'',8\sin[2(♂-☉)+\theta),$$

si nempe idem pro massa telluris valor substituatur, quem hic adhibuimus (V. *Hist. de l'Ac. Roy. des Sc. Année 1758, pag. 12. sqq.* et *Année 1761, pag. 259. sqq.*). Motum autem nodorum Martis ex actione Iouis atque telluris oriundum eundem prorsus invenit, quem hic reperimus (V. *Ibid. Année 1758. pag. 261. et Année 1761, pag. 404.*) Vnde perspicimus, valores aequationum ab eccentricitate independentium vtraque methodo eosdem fere, aequationum autem ab eccentricitate dependentium admodum diversos prodire.

DE

DE VARIATIONE OBLIQVITATIS ECLIPTICAE ET ANNI SOLARIS.

Auctore

F. T. SCHVBERT.

Conventui exhib. die 22 Iun. 1795.

§. 1.

Postquam obliquitatem eclipticae a vetustissimis temporibus ad nostram usque aetatem continuo decrevisse, observationes extra dubium posuerant, physicam diminutionis huius caussam sufficientem Astronomi in actione planetarum in tellurem per theoriam Neutonianam detexerunt, siquidem e calculo iuxta hanc theoriam instituto sequitur, ab Hipparchi aetate ad hunc usque diem obliquitatem 16 vel 17 minutis circiter decrevisse, quod cum observationibus bene convenit. Quod autem ope theoriae ita lucramur, non tantum in eo consistit, quod iam cuiusvis phaenomeni coelestis rationem reddere licet sufficientem, sed potius in eo, quod de motuum coelestium natura cognitionem magis distinctam atque certam acquirimus, iudiciumque ferre possumus longe iuftius, quam per folas obfervationes fieri unquam potuiffet. Gravis enim ifta quaeftio, utrum diminutio eclipticae fit perennis an vero periodica, utrum itaque fieri poffit, ut ecliptica cum aequatore unquam coincidat, per calculum folummodo folvi poteft. Si nempe calculus eiusmodi diminutionis huius expreffionem praebuerit quae nonnifi finus aut cofinus continet, certo concludere licet, eam non effe perennem fed periodicam; atque expreffionis illius valores maximi et minimi affignabunt limites, quos obliquitas transgredi nunquam poterit. Idem de motu punctorum aequinoctialium ex actione planetarum oriundo tenendum eft. Cum inde annus tropicus neceffario mutetur, quaeftio oritur haud levioris momenti, utrum haec variatio fit exigua et periodica, an vero differentia anni fiderei et tropici fieri poffit enormis. Vtramque hancce quaeftionem plenarie hic difcutere non inutile duxi, cum ea, quantum equidem fciam, nondum pro merito fit explorata.

§. 2. Quoniam variatio obliquitatis et anni, quam indagandam nobis hic propofuimus, e motu orbitae telluris oritur, in motum nodorum variationemque inclinationis plani orbitae telluris cum alio plano fixo inquirere oportet, ubi quidem pro fixo illud planum affumere licet, quod fitum eclipticae certa quadam epocha e. gr. anno 1700 determinavit. Qua disquifitione eodem prorfus modo inftituta, quo motus nodorum inclinationisque variatio planetarum reperiuntur, e formulis iftis notiffimis, quae motum fecularem five momentaneum definiunt, per integrationem aliae funt deducendae, quae non amplius a nodis & inclinationibus planetarum variabilibus, fed nonnifi a quantitatibus conftantibus dependent per epochas elementorum iftorum

torum determinandis, quae ideo per omnia ſecula quamvis remota aeque valent. Ex his tandem formulis integralibus variatio obliquitatis et motus punctorum aequinoctialium facile reperiuntur. Integrationem hanc primus feliciter ſuſcepit docuitque in egregia ſua diſſertatione infra (*) citata Cel. *De la Grange*. Quare analyſi atque demonſtratione formularum hic vacare licet, quia methodus, qua magnus ille geometra ad formulas ſuas pervenit, nemini Aſtronomorum ignota eſſe poteſt.

§. 3. Aſſumta itaque cum Cel. *De la Grange* epocha 1700, et pro hoc anno longitudine nodi aſcendentis *Saturni* $= 3^s\ 21^0\ 5'\ 6''$, *Iovis* $= 3^s\ 7^0\ 34'\ 9''$, *Martis* $= 1^s\ 17^0\ 24'\ 41''$, *Veneris* $= 2^s\ 13^0\ 57'\ 52''$, *Mercurii* $= 1^s\ 14^0\ 40'\ 18''$, inclinatione orbitae ♄ $= 2^0\ 30'\ 10''$, ♃ $= 1^0\ 19'\ 10''$, ♂ $= 1^0\ 51'\ 0''$, ♀ $= 3^0\ 23'\ 20''$, ☿ $= 6^0\ 59'\ 20''$, maſſa denique ☉ $= 1$, ♄ $= \frac{1}{3358,4}$, ♃ $= \frac{1}{1067,195}$, ♂ $= \frac{1}{1846082}$, ♀ $= \frac{1}{278777}$, ☿ $= \frac{1}{2025810}$; poſita porro longitudine nodi aſcendentis verae orbitae telluris cum plano eclipticae anno $1700 = I$, inclinatione vtriusque plani $= \eta$, atque compendii cauſa $\tan\eta \sin I = p$, $\tan\eta \cos I = q$: formulae Cel. *De la Grange*, valores angulorum I, η, pro quovis tempore definientes hae ſunt:

$$\begin{aligned} p = &+ 5823'' \cos(t.\ 50\tfrac{1}{3}'') - 1414'' \sin(t.\ 50\tfrac{1}{3}'') \\ &+ 611'' \cos(t.\ 24'', 7577) - 432'' \sin(t.\ 24'', 7577) \\ &- 6631'' \cos(t.\ 29'', 4953) - 1444'' \sin(t.\ 29'', 4953) \\ &- 200'' \cos(t.\ 32'', 8181) + 225'' \sin(t.\ 32'', 8181) \\ &- 1174'' \cos(t.\ 42'', 6532) - 776'' \sin(t.\ 42'', 6532) \\ &+ 1571'' \cos(t.\ 45'', 1934) + 3841'' \sin(t.\ 45'', 1934); \end{aligned}$$

(*) *Théorie des variations ſéculaires des élémens des Planètes; Mém. de Berlin, Année 1781 & 1782.*

$$q = -5823'' \sin(t.\,50\tfrac{1}{3}'') - 1414'' \cos(t.\,50\tfrac{1}{3}'')$$
$$- 611'' \sin(t.\,24'',7577) - 432'' \cos(t.\,24'',7577)$$
$$+ 6631'' \sin(t.\,29'',4953) - 1444'' \cos(t.\,29'',4953)$$
$$+ 200'' \sin(t.\,32'',4181) + 225'' \cos(t.\,32'',8181)$$
$$+ 1174'' \sin(t.\,42'',6532) - 776'' \cos(t.\,42'',6532)$$
$$- 1571'' \sin(t.\,45'',1934) + 3841'' \cos(t.\,45'',1934);$$

ubi eſt t numerus annorum poſt 1700 elapſorum. Hinc itaque pro quovis tempore ante vel poſt 1700 datur

$$\text{tang}\, \mathrm{I} = \tfrac{p}{q}, \text{ et } \text{tang}\, \eta = \sqrt{(p^2 + q^2)}.$$

Tab. IV. Fig. 5.

§. 4. Sit iam A Q planum aequatoris, C E eclipticae fixae anno 1700, c E orbitae telluris quovis alio tempore t annos poſt 1700, ideoque C E $c = \eta$, C, c, punctum vernale annis 1700 et $1700 + t$, E C c = E et E c Q = E + ε obliquitas eclipticae annis 1700 et $1700 + t$, C E = I et c E = I — i longitudo nodi orbitae telluris annis 1700 et $1700 + t$: eritque poſt t annos a 1700 computando, augmentum obliquitatis eclipticae $= \varepsilon$, et proceſſus punctorum aequinoctialium iuxta longitudinem, ſeu C E — c E $= i$. Eſt autem in triangulo C E c, $\cos(\mathrm{E} + \varepsilon) = \cos \mathrm{E} \cos \eta - \sin \eta \cos \mathrm{I}$, et $\frac{\sin \mathrm{I}}{\sin(\mathrm{E} + \varepsilon)} = \frac{\sin(\mathrm{I} - i)}{\sin \mathrm{E}}$ quare cum ε, i et η aliquot gradus, non excedant, ideoque ſinus eorum angulis, coſinus autem unitati aequales ponere liceat, prior aequatio praebet

$$\cos \mathrm{E} - \varepsilon \sin \mathrm{E} = \cos \mathrm{E} - \eta \sin \mathrm{E} \cos \mathrm{I}, \text{ h. e.}$$
$$\varepsilon = \eta \cos \mathrm{I} = q;$$

poſterior autem

ſin

$$\sin E' \sin I' = \sin E \sin I + \varepsilon \cos E \sin I - i \sin E \cos I, \text{ h. e.}$$
$$i = \varepsilon \cot E \tang I = \eta \sin I \cot E = p \cot E.$$

Pofito igitur $E = 23^0\ 29'$, fequentes binas aequationes nanciſcimur:

I. *incrementum obliquitatis eclipticae* $= \varepsilon =$

$$\begin{aligned}
&- 5823'' \sin(t.\ 50''\tfrac{1}{3}) - 1414'' \cos(t.\ 50\tfrac{1}{3}'') \\
&- 611'' \sin(t.\ 24'',7577) - 432'' \cos(t.\ 24'',7577) \\
&+ 6631'' \sin(t.\ 29'',4953) - 1444'' \cos(t.\ 29'',4953) \\
&+ 200'' \sin(t.\ 32'',8181) + 225'' \cos(t.\ 32'',8181) \\
&+ 1174'' \sin(t.\ 42'',6532) - 776'' \cos(t.\ 42'',6532) \\
&- 1571'' \sin(t.\ 45'',1934) + 3841'' \cos(t.\ 45'',1934);
\end{aligned}$$

II. *proceſſus punctorum aequinoctialum iuxta longitudinem* $= i = - 3253'' \sin(t.\ 50\tfrac{1}{3}'') + 13404'' \cos(t.\ 50\tfrac{1}{3}'')$

$$\begin{aligned}
&- 995'' \sin(t.\ 24'',7577) + 1407'' \cos(t.\ 24'',7577) \\
&- 3324'' \sin(t.\ 29'',4953) - 15263'' \cos(t.\ 29'',4953) \\
&+ 518'' \sin(t.\ 32'',8181) - 460'' \cos(t.\ 32'',8181) \\
&- 1787'' \sin(t.\ 42'',6532) - 2703'' \cos(t.\ 42'',6532) \\
&+ 8841'' \sin(t.\ 45'',1934) + 3615'' \cos(t.\ 45'',1934).
\end{aligned}$$

§. 5. Ex his aequationibus, caſu $t=0$ reperitur $\varepsilon=0$ et $i=0$, quemadmodum oportet: caſu $t = +100$, $\varepsilon = -61'',6$; $i = + 23'',4$; caſu $t = -100$, $\varepsilon = +61'',4$; $i = -28'',8$; caſu $t = -1800$, $\varepsilon = +978'',4$; $i = -1325'',8$. Vnde ſequitur, vi actionis planetarum in tellurem, obliquitatem eclipticae decreviſſe tam ſeculo decimo ſeptimo quam decimo octavo $61\tfrac{1}{2}''$, ab *Hipparchi* autem aetate vsque ad 1700 $16'\ 18'',4$; ideoque *Hipparchi*

chi aetate fuiſſe $= 23^{0}\,45\frac{1}{3}'$, quod cum obſervationibus bene convenit. Praeterea inde ſequitur, actione planetarum puncta aequinoctialia progreſſa eſſe ſeculo decimo ſeptimo $28''{,}8$; ſeculo decimo octavo $23''{,}4$; et ab *Hipparchi* aetate ad annum 1700 $22'\,5''{,}8$. Quare ſi ſupponamus, motum retrogradum punctorum aequinoctialium verum ſeu obſervatum ab *Hipparchi* aetate quotannis fuiſſe $= 50\frac{1}{3}''$, ideoque intervallo octodecim ſeculorum $= 25^{0}\,10'$, huic quantitati addere oportet $22'\,6''$ ſeu progreſſum ex actione planetarum oriundum, quo reperiatur motus *medius* retrogradus, qui idcirco erit $= 25^{0}\,32'\,6''$, adeoque quotannis $= 51''{,}07$. In genere motus punctorum aequinoctialium *medius* reperitur, ſi a *vero* ſeu obſervato illa portio ſubtrahatur, quae actioni planetarum periodicae debetur.

§. 6. Forma aequationum I et II (§. 4.), quae non arcus ſed tantummodo ſinus coſinusve continent, extra dubium ponit, utrumque hunc eclipticae motum non perennem eſſe ſed periodicum. Vnde iam tota disquiſitio nobis hic propoſita in eo verſatur, ut utriusque expreſſionis periodi valoresque maximi et minimi eruantur. Cum Cel. *De la Grange* calculum hunc, ob difficultates quibus obnoxius eſt, non ulterius ſit proſecutus (*), laborem hunc, ob utilitatem quam praeſtare videtur, libenter ſuſcepi. Problema in eo conſiſtit, ut temporis t valores definiantur ii, ad quos aequationes I et II fiunt maxima vel minima. Cum autem omni ſinui innumeri competant arcus, forma aequationum oſtendit, innumeros eiusmodi ipſius t valores, innu-

(*) V. *loc. cit. Année 1782, pag. 290.* „Il ſeroit difficile d'en fixer les periodes & les *maxima* & *minima.*„

innumerasque ideo periodos repertum iri. Quamobrem cum periodi ſint admodum longae, et fieri nullo modo poſſit ut eae omnes reperiantur, ſufficit, aliquot periodos aetati noſtrae proximas determinare, quia ceterae cum aeternitate quaſi confunduntur.

§. 7. Aequationis I (§. 4.) maxima et minima reperiuntur ponendo $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$, unde naſcitur aequatio

III. $0 = 50\frac{1}{3}\,[1414 \sin (t.\, 50\frac{1}{3}'') - 5823 \cos (t.\, 50\frac{1}{3}'')]$
$+ 24{,}7577\,[43$[illegible] $\sin (t.\, 24'',7577) - 611 \cos (t.\, 24'',7577)]$
$+ 29{,}4953\,[1444 \sin (t.\, 29'',4953) + 6631 \cos (t.\, 29'',4953)]$
$- 32{,}8181\,[225 \sin (t.\, 32'',8181) - 200 \cos (t.\, 32'',8181)]$
$+ 42{,}6532\,[776 \sin (t.\, 42'',6532) + 1174 \cos (t.\, 42'',6532)]$
$- 45{,}1934\,[3841 \sin (t.\, 45'',1934) + 1571 \cos (t.\, 45'',1934)]$;

cuius radices t nonniſi tentando, ideoque calculo valde prolixo atque taedioſo, reperire licet. Calculum hunc in finem a nobis inſtitutum hic referre inutile foret: vnde nonniſi confectaria e calculo reſultantia proferemus, quorum exactitudinem ſine difficultate probare quisque poterit. Sequentes itaque radices aequationis III computavimus:

1.) $t = -31657{,}56$; 2.) $t = -16617{,}5$;
3.) $t = -3867{,}1$; 4.) $t = +4963{,}66$;
5.) $t = +18074{,}29$; 6.) $t = +33285{,}53$:

unde patet, noſtrum ſeculum medium fere eſſe inter omnes valores maximos et minimos, ideoque praeſentem eclipticae obliquitatem a media vix differre poſſe. His iam valoribus loco t in aequatione I ſubſtitutis, valores ipſius ε reſpondentes reperiuntur ſequentes:

1.)

1.) $\varepsilon = + 15556'',3 = + 4^0\ 19'\ 16'',3$;
2.) $\varepsilon = - 9897'',5 = - 2^0\ 44'\ 52'',5$;
3.) $\varepsilon = + 1468'',7 = + 24'\ 28'',7$;
4.) $\varepsilon = - 2126'',2 = - 35'\ 26'',2$;
5.) $\varepsilon = + 8791'',2 = + 2^0\ 26'\ 31'',2$;
6.) $\varepsilon = - 10494'',3 = - 2^0\ 54'\ 54'',3$;

quos revera esse valores maximos, optime probatur, si singuli temporis t valores numero centenario augeantur minuanturque, et pro hisce temporibus $t \pm 100$ valores ε respondentes ex aequatione I computentur. Sic invenimus

1.) $\varepsilon = + 15553'',3$ casu $t = - 31757,56$ et $t = - 31557,56$;
2.) $\varepsilon = - 9895'',2$ casu $t = - 16717,5$ et $t = - 16517,5$;
3.) $\varepsilon = + 1465'',4$ casu $t = - 3967,1$ et $t = - 3767,1$;
4.) $\varepsilon = - 2125'',0$ casu $t = + 5063,66$ et $t = + 4863,66$;
5.) $\varepsilon = + 8789'',5$ casu $t = + 18174,29$ et $t = + 17974,29$;
6.) $\varepsilon = - 10492'',2$ casu $t = + 33385,53$ et $t = + 33185,53$.

§. 8. Quoniam obliquitas praesenti seculo $61'',6$ (§. 5.), ideoque intervallo 44 annorum $27'',1$ decrescit, posita cum *Mayero* obliquitate anno 1756 $= 23^0\ 28'\ 16''$, anno 1770 ea erit $= 23^0\ 28'\ 43'',1 = E$, quovis autem alio tempore $= E + \varepsilon$: unde sequentia resultant consectaria. Anno 29958 ante Christum natum obliquitas eclipticae fuit maxima, puta $= 27^0\ 48'$; exinde continuo decrevit per intervallum 15040 annorum, donec anno 14917 minima $= 20^0\ 44'$ fuit. Iam rursus crevit per intervallum 12750 annorum ad annum 2167, ubi fuit maxima $= 23^0\ 53'$. Dehinc 8831 annos continuo decrescit, fitque anno 6664 post C. n. minima $= 22^0\ 53'$. Deinde

13111 annos ad annum 19774 crefcet, ubi maxima $=$ $25^0\ 55''$ erit. Tunc iterum per intervallum 15211 annorum decrefcet, donec anno 34986 minima $= 20^0\ 34'$ fiet. Dantur itaque plures periodi admodum diverfae, quarum breviffima eft 8800, maxima 15000 annorum. Integro autem hoc intervallo 65000 annorum omnes obliquitatis variationes arcum duntaxat $7\frac{1}{4}°$ comprehendunt, fiquidem ea a $20°\ 34'$ ad $27°\ 48'$ crefcit, vnde pro obliquitate media affumere licet $e = 24°\ 11'$, ut itaque praefens obliquitas $43'$ circiter minor fit media.

§. 9. Patet itaque, obliquitatem eclipticae intra arctos limites $20^0\ 34'$ et $27^0\ 48'$ contineri. Dubium autem hic oriri poffet, aliis forfan periodis remotioribus limites longe largiores prodire, atque obliquitatem multo magis crefcere ac decrefcere immo evanefcere poffe. Quare non inutile erit limites determinare, quos obliquitas nunquam excedere poffit. Cum aequationis I bini quivis termini eundem angulum contineant, alter quidem finum, alter cofinum huius anguli, fitque eorum forma

$$A \sin \alpha t + B \cos \alpha t = C,$$

integra aequatio maximum induet valorem, fi omnes fex termini C fuerint maximi, iisdemque fignis + vel — affecti. Quare cum C fit maximum, fi

$$A \cos \alpha t - B \sin \alpha t = 0, \text{ feu } \tan \alpha t = \tfrac{A}{B},$$

valor termini cuiuscunque C,

$$\text{ob } \sin \alpha t = \frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}, \ \cos \alpha t = \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}},$$

maximus erit

$$= \frac{A^2 + B^2}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = \sqrt{(A^2 + B^2)},$$

 omni-

omniumque ſex terminorum ita comparatorum ſumma valorem ipſius ε maximum praebebit. Sic e. gr. primi bini termini aequationis I dant

$$C = \sqrt{(5823^2 + 1414^2)} = 5992'',2;$$

omniumque terminorum ſumma valorem praebet maximum

$$\varepsilon = \pm 5992'',2 \pm 748'',3 \pm 6786'',4 \pm 301'',0$$
$$\pm 1407'',3 \pm 4149'',9 = \pm 19385'' = \pm 5^\circ 23' 5''.$$

Nunquam itaque fieri poteſt, vt obliquitas $> 28^\circ 52'$ aut $< 18^\circ 6'$ ſit, ita vt variationes eius *poſſibiles* arcu $10^\circ 46'$ comprehendantur. Variationes autem *reales* limitibus longe arctioribus continebuntur, quia relatio angulorum $\alpha\, t$, eorumque coefficientium A, B, ſemper impediet, quo minus omnes termini uno eodemque tempore fiant $= \sqrt{(A^2 + B^2)}$. Sic gravis illa quaeſtio de variatione obliquitatis eclipticae plenarie ſoluta videtur, quare ad alteram partem, variationem ſcilicet anni, progredi licet.

§. 10. Quoniam e perturbationibus planetarum aequationem ſecularem axium transverſorum orbitarum non oriri, hodie extra dubium poſitum eſt, omnes revolutiones telluris circa ſolem proprie ſic dictas, h. e. omnes *annos ſidereos* aequales eſſe oportet, neque datur variatio ſeu aequatio anni ſiderei medii. Cum autem *annus tropicus* ſidereo tanto brevior ſit, quantum temporis ſol impendit ad illum arcum deſcribendum, per quem puncta aequinoctialia iſto anno receſſerunt, omnes anni tropici tunc tantummodo aequales eſſe poſſunt, ſi motus punctorum aequinoctialium perpetuo ſit uniformis. Quare cum motus horum punctorum ex actione ſolis atque lunae in tellurem ſphaeroidicam oriun-

oriundus ſit uniformis, ille autem motus, qui ex actione planetarum in tellurem ſphaericam oritur et aequatione II (§. 4.) definitur, uniformis eſſe nequeat, quoniam a ſinubus angulorum variabilium dependet: longitudo anni tropici *media* erit illa, quae ab actione ſolis lunaeque ſola dependet, atque annus tropicus *medius* reperitur, ſi ab anno vero ſeu obſervato ea portio ſubtrahatur, quae ex actione planetarum oritur, h. e. motus punctorum aequinoctialium *annuus* ex actione planetarum oriundus et per motum ſolis medium in tempus converſus. Quoniam obſervationibus non annus ſidereus ſed tropicus determinari ſolet, motus ſolis medius hinc nanciſci videbitur aequationem ſecularem additivam aut ſubtractivam, prout motus iſte annuus retrogradus fuerit aut directus.

§. 11. Cum aequatio II definiat motum punctorum aequinoctialium integrum intervallo t annorum, motus *annuus* inde reperitur pro quovis tempore t ante vel poſt epocham 1700, ſi aequatio iſta differentietur, tumque loco ∂t unus annus, h. e. $\partial t = 1$ ponatur: atque hic motus annuus ductus in numerum $\frac{24\,h}{59'\,8'',3} = \frac{86400}{3548,3} = 24,3497$ differentiam dabit inter annum tropicum *verum* et *medium*. Sic nanciſcimur numerum *minutorum ſecundorum temporis ſolaris, quo annus tropicus verus maior eſt medio*, ſequente aequatione expreſſum:

$$\text{IV. } \frac{\partial i}{\partial t} \times 24,3497 = k = -79'',641 \sin(t\,.\,50\tfrac{1}{3}'') \\ -19'',331 \cos(t\,.\,50\tfrac{1}{3}'') - 4'',112 \sin(t\,.\,24'',7577) \\ -2'',907 \cos(t\,.\,24'',7577) + 53'',144 \sin(t\,.\,29'',4953) \\ -11'',573 \cos(t\,.\,29'',4953) + 1'',781 \sin(t\,.\,32'',8181)$$

$$+ 2'',008 \operatorname{cof}(t.32'',8181) + 13'',612 \operatorname{fin}(t.42'',6532)$$
$$- 8'',999 \operatorname{cof}(t.42'',6532) - 19'',286 \operatorname{fin}(t.45'',1934)$$
$$+ 47'',166 \operatorname{cof}(t.45'',1934);$$

quae quantitas ab anno vero fubtractus medium, anno autem medio additus verum praebet. Pofito $t = 0$, anno 1700 invenitur $k = + 6'',364$, unde fequitur, annum 1700 $6\frac{1}{3}$ minutis fecundis maiorem effe medio, quovis autem alio tempore $k - 6'',364$ effe tempus, quo annus tropicus verus intervallo t annorum ab anno 1700 crevit.

Maximus valor, quem quantitas k excedere nunquam poteft, eodem modo ut fupra (§. 9.) reperitur, addendo radices ex fumma quadratorum binorum quorumvis coëfficientium eidem angulo refpondentium: ficque nafcitur valor maximus $k = \pm 217'' = \pm 3'\,37''$, unde patet, annum tropicum verum a medio nunquam ultra $3\frac{2}{3}$ differre poffe, atque fummam, quae inter duo quosque annos veros intercedere poffit, differentiam effe $= 7\frac{1}{4}'$.

§. 12. Haec de anno tropico in genere iam demonftravit Cel. *De la Grange* (*loc. cit. pag.* 289. 290.). Quo vero de variationibus anni et aequatione feculari folis apparente iuftam et diftinctam acquiramus cognitionem, eodem modo quo fupra ufi fumus, periodi quaerendae funt noftrae aetati proximae, valoresque iis refpondentes maximi et minimi quantitatis k. Quem in finem differentiale aequationis IV nihilo aequandum eft, novaeque aequationis fic prodeuntis, fcilicet

$$\text{V. } 0 = 50\tfrac{1}{3}[19,331 \operatorname{fin}(t.50\tfrac{1}{3}'') - 79,641 \operatorname{cof}(t.50\tfrac{1}{3}'')]$$
$$+ 24,7577[2,907 \operatorname{fin}(t.24'',7577) - 4,112 \operatorname{cof}(t.24'',7577)]$$

+

$$+29,4953[11,573\sin(t.29'',4953)+53,144\cos(t.29'',4953)]$$
$$-32,8181[\ ,008\sin(t.32'',8181)-1,781\cos(t.32'',8181)]$$
$$+42,6532[8,999\sin(t.42'',6532)+13,612\cos(t.42'',6532)]$$
$$-45,1934[47,166\sin(t.45'',1934)+19,286\cos(t.45'',1934)],$$

radices t non quidem omnes, ſed ſaltem minimae quaerendae ſunt.

§. 13. Calculo non parum taedioſo aequationis huius binas radices inveni, 1.) $t=-4892,5$; 2.) $t=+5948,0$; valoresque reſpondentes maximos, 1.) $k=+47'',1$; 2.) $k=-47'',6$; caſu denique $t=+470$, $k=0$; unde ſequentia reſultant conſectaria. Ante annum 3192 ante C. *n.* annus tropicus *verus* maior erat *medio*, annusque 3192 ex omnibus intervallo plurium millium annorum elapſis maximus erat, videlicet 47″ longior quam medius. Ab anno 3192 inde ad initium noſtri ſeculi annus tropicus continuo decrevit, atque anno 1700 6 minutis ſecundis duntaxat annum medium ſuperabat. Anno 2170 annus verus medio exacte aequalis erit. Deinde autem per intervallum 5478 annorum brevior erit medio, et continuo decreſcet usque ad annum 7648, ubi 47″, 6 brevior erit medio. Tunc iterum creſcendo ad medium anni valorem propius propiusque accedet. Videmus hinc, quam arcti variationibus anni tropici praeſcripti ſint limites, et quales in genere fuerint anni variationes ſintque futurae. Ceterum continua anni diminutio a vetuſtiſſimis temporibus ad noſtrum aevum per 5000 annorum intervallum, cum obſervationibus bene convenit, e quibus plures Aſtronomi diminutionem anni vel aequationem ſecularem ſolis additivam concluſerunt.

§. 14. Confectaria ex hocce calculo deducta ob duplicem rationem videri possunt incerta, quia nempe perturbationes telluris ex actione *Urani* oriundae prorsus sunt neglectae, praetereaque massae planetarum hic assumtae non satis certae sunt. Calculus autem abunde docet, perturbationes quas tellus a *Saturno* suffert, iam esse vix sensibiles, unde eo potius actionem *Urani* negligere licet. Ad massas planetarum quod attinet, *Saturni Iovisque* massae nulli dubio sunt obnoxiae, actio vero *Martis* atque *Mercurii* in tellurem tam exiguae sunt, ut levis error circa massas eorum commissus, in quantitatibus hic repertis differentiam sensibilem producere nequeat. Non autem diffitendum est, circa massam *Veneris*, a cuius actione motus eclipticae inprimis dependet, si ingens error fuerit commissus, periodos a nobis computatas inde non parum mutatum iri: valores autem maximi, quos nosse plurimum refert, nonnisi levem mutationem inde sufferent. Quare cum per optimas aevi nostri observationes satis constet, *Veneris* massam a valore hic assumto non multum differre posse, confectaria e calculo nostro deducta nulli incertitudini magni momenti subiecta videntur. Cum tamen hic *Veneris* massa quarta fere parte maior sit assumta telluris massa, motus autem nodorum planetarum observati *Veneris* massam telluris massa minorem indicare videantur, non inutile foret, integrum huncce calculum ex alia pro massa *Veneris* hypothesi denuo instituere: quem quidem laborem alio tempore fortasse aggrediemur.

OBSER-

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES
FAITES
À L'OBSERVATOIRE DU COLLEGE ACADÉMIQUE DE MITAU.

Par
M. BEITLER.

Extrait des lettres de l'auteur à l'Acad. Krafft.

I.)

Obfervation de l'Eclipfe partiale de la Lune, arrivée dans la nuit du 11. au 12. Octobre 1791, faite à l'Obfervatoire académique de *Mitau* en Courlande avec un Telefcope de *Nairne*, groffiffant 40 fois.

Temps vrai aftronomique.			Immerfions.
H.	M.	S.	
13.	36.	31.	Commencement douteux.
	42.	17.	*Ariftarchus* au bord de l'ombre.
	43.	24.	*Ariftarchus* entré.
	49.	22.	*Keplerus* au bord de l'ombre.
	50.	58.	Milieu de *Keplerus* au bord.
	52.	12.	*Keplerus* entré.
	52.	30.	*Sinus Syrticus* au bord.
	54.	26.	*Sinus Syrticus* entré.
	55.	58.	*Plato* au bord de l'ombre.
	57.	32.	*Plato* entré.
	58.	32.	*Copernicus* au bord.

Temps

Temps vrai astronomique. H.	M.	S.	Immerſions.
14.	0.	52.	*Copernicus* entré.
	8.	4.	*Mare Serenitatis* au bord.
	16.	46.	*Poſidonius* au bord de l'ombre.
	19.	2.	*Poſidonius* entré.
	19.	40.	*Mons Beroſus* Hevelii au bord. Long. $=+33^0$. Latit. $=+30^0$. dans la Carte de *Mayer*.
	21.	12.	*Mons Beroſus* entré.
	44.	18.	*Mare Criſium* entré.
			Emerſions.
15.	30.	17.	*Grimaldus* au bord de l'ombre.
	32.	21.	*Grimaldus* ſorti.
	44.	53.	*Sinus Syrticus* au bord.
	47.	19.	*Sinus Syrticus* ſorti.
	55.	51.	*Ariſtarchus* au bord.
	56.	20.	*Ariſtarchus* ſorti.
	57.	17.	*Copernicus* au bord.
	59.	28.	*Copernicus* ſorti.
16.	23.	5.	*Plato* au bord de l'ombre.
	23.	53.	*Plato* ſorti.
	30.	5.	*Mare Serenitatis* ſorti.
	37.	55.	*Mare Criſium* ſorti.
	43.	29.	Fin douteuſe.
	44.	19.	La fin paroit certaine.
	48.	33.	Fin de la Penombre; douteuſe. En regardant la Lune avec le Teleſcope ſon diſque me parut parfaitement clair.

Vers

II.) Eclipſes des Satellites de Jupiter obſervées au même Obſervatoire en 1792 & 1795 avec une Lunette achromatique de Dollond à triple Objectif, groſſiſſant 80 fois.

Temps vrai de l'Obſervation. 1792.	Temps vrai calculé ſur les Tables.	Difference.	O.	Circonſtances.
30. Avril. 10^h.34'.16'',2	10^h.35'.42'',8. W. 10. 36. 24, 8. *w.* 10. 34. 9, 8. L.	+ 86,''6 + 128, 6 — 6, 4	$9\frac{1}{2}$'''.	Emerſion du II. Satellite. Le Ciel ſerein, les Bandes diſtinctes.
6. Mai. 9. 11. 19, 1	9. 11. 31, 4. W. 9. 11. 23, 3. L.	+ 12, 3 + 4, 2	10.	Emerſion du I. Satellite. Les Bandes mediocrement diſtinctes. Crepuſcule. Diſtance de la pleine Lune = 25°.
20. Mai. 13. 0. 35, 5	13. 0. 53, 9. W. 13. 0. 36, 4. L.	+ 18, 4 + 0, 9	$11\frac{1}{2}$.	Emerſion du I. Satellite. Les Bandes diſtinctes. Hauteur de ♃ = 8°.
16. Juin. 10. 46. 58. 47. 14.	10. 52. 2, 6. W. 10. 46. 35, 7. L.	+ 228, 6 — 38, 3	15.	Immerſion ſoupçonnée du III. Satellite. Immerſion certaine. Les bandes obſcures & confuſes. Le ciel couvert de beaucoup de nuages. L'atmoſphere chargée de vapeurs.
Temps vrai de l'Obſervation en 1795. 27. Sept. 6. 35. 43, 8 36. 49, 8	6. 36. 1, 8. L.	+ 18, 0	12.	Emerſion du I. Satellite. Le Satellite a toute ſa clarté. Bonne Obſervation, non obſtant le crepuſcule.
22. Nov. 5. 33. 3, 0 35. 7, 0	5. 32. 54, 8. L.	— 8, 2	12.	Emerſion du II. Satellite. Le Satellite a toute ſa clarté. Le bord de Jupiter n'étoit pas toujours bien arrondi, & ſes bandes mediocrement viſibles. Les Satellites alternativement clairs & obſcurs. Nuages & clair de Lune.
28. Nov. 5. 31. 40, 7	5. 31. 25, 5. L.	— 15, 2	15.	Emerſion du I. Satellite. Les bandes n'étoient pas viſibles, & le diſque de la Planete mal arrondi à cauſe des vapeurs & du voiſinage de grands nuages. Hauteur de ♃ environ 11°.

III.) Occultations de quelques Etoiles obſervées au même Obſervatoire avec la même Lunette.

1792. le 3. Septemb. à { 9^h. 49'. 43'', 0. t. vr. Immerſion de l'étoile μ ♓. à 2'' ou 3'' près.
{ 10. 44. 43, 5. t. vr. Emerſion de l'étoile μ ♓. Obſervation très exacte.

1795. le 24. Novemb. à 9^h. 30'. 5'', 6. t. vr. Immerſion de l'étoile μ de la Baleine. Très bonne Obſervation. L'émerſion ne pouvoit pas être obſervée.

Vers le milieu de l'Eclipſe la Lune avoit encore une foible lumiere rougeatre vers le bord boreal de ſon disque. Le reſte de la partie eclipſée paroiſſoit teint d'une lumiere cendrée très foible, enſorte qu'on pouvoit à peine encore diſtinguer en quelque façon la tache d'*Ariſtarchus*. À cauſe des nuages transparens, qui ſe mirent ſouvent devant la Lune, les taches ne ſe preſenterent pas toujours aſſés diſtinctement, & il étoit difficile de bien reconnoitre les limites de l'ombre vraie & de la Penombre.

II. Eclipſes des Satellites de Jupiter.

(*Voyez le tableau cy-joint.*)

Ce Tableau eſt partagé en cinq colonnes. Dans la ſeconde colonne j'ai mis le moment de l'immerſion ou emerſion *du centre* de chaque ſatellite, rigoureuſement calculé ſur les tables. La lettre W indique, que le calcul correſpondant fût fait ſur les tables de feu *M. de Wargentin*, inferées dans le Recueïl publié à *Berlin* en 1776. La lettre *w* au contraire ſe rapporte aux dernieres tables pour le II. Satellite, du même Auteur, imprimées dans le *Nautical Almanac* pour 1779 & dans les Ephemerides aſtronomiques de *Berlin* pour 1782. Enfin la lettre L marque, que le calcul fut fait ſur les nouvelles tables de *M. de Lambre*, qu'on trouve dans la III^{me} Edition de l'Aſtronomie de *M. de la Lande*. Au reſte j'ai cru pouvoir me diſpenſer de comparer mes trois dernieres Obſervations aux anciennes tables; puisque ſans doute les Aſtronomes ne ſe ſerviront à l'avenir que des nouvelles, uniquement fondées ſur la Theorie, & ſeules ſuſceptibles d'être encore rectifiées par de bon-

bonnes obſervations, pour ètre portées au dernier degré de perfection. La troiſieme colonne fait voir la difference entre le moment de l'immerſion ou emerſion *du Centre* calculé, & celui de l'obſervation; c'eſt à dire, de la derniere ou premiere apparition *du ſegment*, dont la lumiere pouvoit faire une impreſſion ſenſible ſur la retine de mes yeux, en retranchant le dernier moment du premier. La quatrieme colonne annonce en lignes duodécimales l'Ouverture du Diaphragme, qui placé ſur l'Objectif, dont l'ouverture eſt de 40 ou presque $40\frac{3}{4}$ lignes, me laiſſa encore, quoiqu' avec peine, un peu entrevoir le ſatellite, quand il avoit encore avant l'immerſion, ou quand il avoit déja repris après l'émerſion, toute ſa clarté.

III. Occultations de quelques Etoiles.
Voyes le même Tableau.

IV. Obſervation de l'Occultation de Jupiter & de ſes Satellites par la Lune, faite à l'Obſervatoire du College académique de *Mitau*, le 23. Septembre 1795.

Ce n'étoit que le 24. Septembre après midi, que le Ciel fut aſſés ſerein pour me permettre de prendre des hauteurs du Soleil. Les hauteurs correſpondantes que j'obtins le 25. le 28 & le 30. du même mois, de mème que le 5. Octobre, me convainquirent, que je pouvois aſſés compter ſur la regularité de la marche de ma Pendule, pour ne pas craindre l'erreur d'une ſeconde dans la détermination du temps vrai de mon obſervation. Le tableau ſuivant du minuit du 24. Sept. & des midis vrais obſervés les jours nommés moyennant mon horloge à pendule, vérifiera ſuffiſamment mon aſſertion. Le

	Temps de la Pendule.	Temps moyen	Erreur de l'Index.	Retardation diurne	Nombre des Couples des Haut. correſpondantes
	H. M. S.	H. M. S.	M. S.	S.	
Le 24 Sept. Minuit	12.5. 5, 3	11.51.46, 3	+13.19, 0		16.
Le 25 Sept. Midi	12.4.52, 5	11.51.36, 1	+13.16, 4	−5,2	21.
Le 28 Sept. Midi	12.3.37,14	11.50.35,77	+13. 1,37	−5,0	21.
Le 30 Sept. Midi	12.2.47, 3	11.49.56, 6	+12.50, 7	−5,3	22.
Le 5 Octob. Midi	12.0.46,44	11.48.24, 0	+12.22,44	−5,6	30.

Je pouvois donc avec raiſon ſuppoſer, que le 23. Sept. à Midi l'erreur de l'Index dévoit être $= + 13'.26'',4$ ſans craindre une erreur ſenſible dans la détermination du temps. Cela étant, mon Obſervation eſt la ſuivante:

Temps de la Pendule de Vulliamy	Temps vrai	Temps moyen.	
H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	
7. 47. 49.	7.42.13,7	7.34.24,2	Le IV. Satellite diſparoît derriere le Disque de la Lune.
58. 0.	52.24,9	44.35,2	Le III. Satellite diſparoît derriere le Disque de la Lune.
8. 3. 17.	57.42,0	49.52,2	Le I. Satellite diſparoît derriere le Disque de la Lune.
6. 56.	8. 1.21,0	53.31,1	Commencemet de l'immerſion, ou premier Contact exterieur des bords de Jupiter & de la Lune.
10. 8,5	4.33,6	56.43,6	Fin de l'immerſion, ou premier Cont. interieur des bords de ♃ & de la ☾.
18. 1.	12.26,2	8. 4.36,2	Le II. Sat. diſparoît, ſuivant M. le Candidat *Beck*, qui fit cette Obſervat. avec un Teleſc. Gregor. de 2 pieds.
49. 4.	43.29,8	35.39,2	Ce ne fut qu'à cet inſtant que je pouvois être aſſuré du Commencement de l'Emerſion. Obſervation *douteuſe*.
51. 57.	46.22,8	38.32,2	Fin de l'Emerſion, ou ſecond Contact exterieur des bords de Jupiter & de la Lune.

L'in-

L'inſtrument que j'employai pour cette Obſervation fût une Lunette achromatique de *Dollond*, à triple Objectif, groſſiſſant 80. fois, avec 4′. lignes d'Ouverture. Non obſtant la bonté de ce bel Inſtrument, il me fut impoſſible de ſaiſir le moment précis du Commencement de l'Emerſion, & je crois, que le cas eſt très rare, ou l'on peut ſe flatter d'obtenir une bonne Obſervation de ce Phenomene au bord éclairé de la Lune. Ce n'eſt que dans le cas quand la ſortie ſe fait au bord obſcur, qu'on peut eſperer de s'aſſurer des momens rigoureuſement exacts des quatre Contacts à obſerver dans l'occultation d'une Planete par notre Satellite.

Pour calculer le moment de la Conjonction géocentrique je me ſuis ſervi des Tables ſolaires de M. *de Zach*, des nouvelles Tables de Jupiter fondées ſur la Théorie de M. *de la Place*, & des Tables lunaires de *Mayer*, corrigées par M. *Maſon* & encore perfectionnées par M. *de Lambre*, telles qu'on les trouve dans la troiſieme Edition de l'Aſtronomie de M. *de la Lande*. Tant dans le Calcul de la Longitude de Jupiter, que dans celui des Argumens pour les lieux de la Lune, j'ai employé les vrais lieux du Soleil, corrigés de l'Aberration & de la Nutation. En combinant les Obſervations des deux Contacts exterieurs, je trouvai enfin, en ſuppoſant le demidiametre apparent de Jupiter = 21″, 28, les Réſultats ſuivans.

Temps moyen de *Mitau*, du Moment de la Conjonction géocentrique apparente, ou affectée de l'Aberration, par l'ob-

ſervation	du premier Contact exterieur,	$7^h. 49'. 53'', 9$
	du premier Contact interieur,	7. 49. 54, 1
	du dernier Contact exterieur,	7. 49. 53, 7
	Milieu	7. 49. 53, 9
	Equation du temps	+ 7. 49, 9
	Temps vrai de la Conj. géoc. app. de la ☾ avec ♃	7. 57. 43, 8

En

En retranchant les élongations & Latitudes obſervées des élongations & Latitudes calculées de la Lune à Jupiter, j'obtins la difference *algebrique* des erreurs des Tables de Jupiter & de la Lune, ou l'erreur des Tables de la Lune par rapport à Jupiter

en Longitude $= + 21'', 5$
en Latitude $= + 18, 3$

dont il faut diminuer les Élongations & Differences des Latitudes calculées pour les momens des Obſervations.

Par la combinaiſon du premier Contact interieur avec le ſecond Contact exterieur, il reſulte

Temps moyen de *Mitau* du Moment de la Conjonction géocentrique apparente ou affectée de l'Aberration, par l'Obſervation

du premier Contact exterieur	$7^h. 49'. 54'', 6$
du premier Contact interieur	7. 49. 54, 9
du ſecond Contact exterieur	7. 49. 54, 4
Milieu — — —	7. 49. 54, 6
Equation du tems =	+ 7. 49, 9
Temps vrai de *Mitau* de la ☌ geoc. apparente de la ☾ avec ♃	7. 57. 44, 5

Et la difference des erreurs des Tables de la Lune & de Iupiter

en Longitude $= + 21'', 5$
en Latitude $= + 18, 0.$

En prenant enfin le milieu entre les Reſultats des deux Combinaiſons on aura

Temps moyen de *Mitau* de la Conjonction géocentrique apparente de la Lune avec Iupiter — — —	$7^h. 49'. 54'', 3.$
Temps vrai — — — —	7. 57. 44, 2.

Difference des Erreurs des Tables de Iupiter & de la Lune

en Longitude $= + 21'', 7$
en Latitude $= + 18, 1.$

L'Aberration de Iupiter n'ayant été dans le temps de l'obſervation que de $- 0'', 6$ en Longitude, on trouveroit, en negligeant l'Aberration de la Lune, comme les Aſtronomes ſont accoutumés de le faire, le moment de la Conjonction géocentrique vraie, ou dégagée de l'Aberration, ſeulement de $1'', 1$ plus tard. Mais en prenant tout à la rigueur on doit dire, que puisque l'Aberration de la Lune eſt auſſi préciſement $= - 0'', 6$, la dite Conjonction géocentrique vraie, ou le moment quand les Centres de Iupiter, de la Lune & de la Terre ſe trouverent dans le même plan perpendiculaire à l'Écliptique, tomba exactement au même inſtant que la Conjonction géocentrique apparente.

V. Obfervation de l'Occultation de l'Étoile μ de la Baleine par la Lune, faite au même Obfervatoire le 30. Septembre 1795.

Temps de la Pendule de *Vulliamy*.			Temps vrai.			Temps moyen			
H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.	
11.	34.	56.	11.	32.	20, 7	11.	22.	8, 0	Immerfion.
12.	31.	14.	12.	28.	39, 6	12.	18.	26,0	Emerfion

En prenant le Lieu de l'Étoile du Catalogue de *Bradley*, je trouvai

Longitude en 1760	$= 1^s.$	$8^0.$	$34'.$	$25'',00$
Préceffion en 35, 75 ans =			$+ 29.$	$59, 51$
Variation en 35, 75 ans =				$+ 0, 85$
Longitude moyenne le 30 Septembre 1795 - -	$= 1^s.$	$9^0.$	$4'.$	$25'',36$
Aberration en Longitude =				$+ 17, 19$
Nutation - - - =				$- 16, 08$
Inégalité annuelle de la Préceffion =				$- 0, 35$
Longitude vraie ou apparente le 30 Septembre 1795	$= 1^s.$	$9^0.$	$4'.$	$26'',12$
Latitude auftrale en 1760 =		$5^0.$	$34'.$	$54'',00$
Variation en 35, 75 ans =				$- 8, 27$
Latitude moyenne le 30 Septembre 1795 - - =		$5^0.$	$34'.$	$45'',73$
Aberration en Latitude =				$- 1. 02$

Lati-

Latitude auftrale apparente ou vraie
le 30 Septembre 1795 = 5°. 34′. 44″,71

Faifant encore le Calcul fur les mêmes excellentes Tables du Soleil & de la Lune, comme dans l'obfervation précedente, j'obtiens

L'erreur des Tables { en Longitude = + 4″, 5
en Latitude = + 11, 7 }

les quelles quantités les Tables donnent de trop, ou qui fe trouvent en retranchant la longitude ou latitude obfervée de la longitude ou latitude calculée. J'ajoute cette explication pour eviter l'ambiguité, parceque d'autres Aftronomes habitués de rétrancher le lieu calculé du lieu obfervé auroient marqué ces deux erreurs avec le figne de la fouftraction. La Conjonction géocentrique arriva par mes Calculs très rigoureux, en partant du moment

{ de l'immerfion à 11^h. 52′. 11″, 8 } temps moyen
{ de l'émerfion à 11^h. 52. 12, 1 } de Mitau.

Milieu - - - - = 11^h. 52′. 12″, 0. } temps moyen
Équation du temps = + 10′. 13″, 5 }

Temps vrai de *Mitau* de
la Conjonct. géoc. = 12^h. 2′. 25″, 5.

Dans ces Calculs je fuppofai la hauteur corrigée du Pole à *Mitau* = 56°. 28′. 34″. qui fe deduit de la hauteur apparente = 56°. 39′. 7″. dans l'hyppothefe de l'applatiffement de la terre = $\frac{1}{300}$. Je mettois la difference du Méridien de mon Obfervatoire à celui des dittes Tables de la Lune = 1^h. 25′. 33″., & je crois ces deux élemens de ma ma poſition géographique bien vérifiès par mes obſervations, & par les Calculs rigoureux de M. le Prof. *Gerſtner* à Prague, ceux de M. *Piazzi* à Palermo & les miens propres, qui tous les trois ſont exactement d'accord en les examinant de près. J'ai donc lieu d'eſperer, que la dite Longitude de mon Obſervatoire ſe verifiera encore par ces deux obſervations exactes & leurs Reſultats rigoureuſement calculés que j'ai l'honneur de préſenter à l'Illuſtre Academie Imperiale des Sciences, en les comparant à de bonnes obſervations correſpondantes, faites par des Aſtronomes en des obſervatoires, dont la poſition géographique eſt bien determinée.

NONNVLLAE OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PETROPOLI IN SPECVLA DOMESTICA ANNO 1795 INSTITVTAE.

Auctore
P. INOCHODZOW.

Conventui exhib. die 17 Martii 1795.

Postquam ab illustrissima Academia Scientiarum novum obtinui habitaculum prope hortum eius botanicum, ad confinium urbis australe situm, & ab observatorio academico tribus circiter werstis procul remotum; ubi pro usu meo, in loco observandis corporum coelestium phaenomenis apto, parvam speculam lateritiam licet omni ornatu ac magnificentia plane destitutam, tamen satis solidam exstruendam curavi. Appropinquante eclipsi lunari transtuli die $\frac{10}{23}$ Iulii in hanc novam Vraniae sedem necessariam suppellectilem instrumentorum astronomicorum, quibus antehac in expeditione ad determinandas variorum imperii Russici locorum positiones geographicas munitus, et postea redux in observatorio academico usus eram. Sunt autem illa: quadrans bipedalis Londini a Sisson fabrefactus, telescopium Gregorianum 2 pedum a Schort elaboratum, tubus achromatimaticus Dollondianus 12 pedum et alter eiusdem artificis trium pedum, bina horologia pendula Parisiis a le Paute constructa; omnia egregiae bonitatis.

Interea ut de situ speculae meae, quam ex observatorio academico post domos alia que aedificia videre non licet, aliquo modo certus essem, collineavi ad obiecta prope meridianum observatorii erecta et speculae vicina; inter haec occurrit templum legionis praetorianae Ismailowiensis, quod a specula distat exacte versus occidentem ad dimidiam werstam, vel non nihil ultra; unde differentiam meridianorum inter speculam et observatorium duorum aut trium scrupulorum temporis secundorum orientem versus assumi posse existimo. At haec ulteriori indagine et pluribus huic scopo inservientibus observationibus definienda ac stabilienda est.

Progredior ad latitudinem speculae: multis ac tutis observationibus altitudinum meridianarum in observatorio academico habitis edoctus, errorem quadrantis mei subtractivum esse $2'.\ 46''$, quem nunc etiam altitudinibus observatis applicare non haesitavi.

Ex Altitudinibus Solis culminantis, et quidem limbi eius borealis seu superioris.

Dies obſerv. St. novi.	Altitud. Solis.	Error. Quadrant.	Refract. — paral.	Semidiam. Solis.	Declinat. Sol. boreal.	Latitudo.
Iulii 27	49°. 37′. 36″.	—2′. 46″	0′. 43″.	15′. 48,5	19°. 13′. 17″.	59°. 54′. 59″,5
— 28	49. 23. 56.				18. 59. 31	54. 52,5
— 29	49. 9. 50.		0. 44.	49	18. 45. 26	54. 55
— 30	48. 55. 20.				18. 31. 3	55. 2
— 31	48. 40. 45.		0. 44½.		18. 16. 21	54. 55,5
Auguſt 6	47. 6. 30.			50	16. 40. 8,5	55. 0
— 9	46. 15. 44.		0. 47.		15. 51. 16	54. 55
— 12	45. 40. 25.		0. 48.	50,5	15. 16. 3	55. 2,5
— 16	44. 8. 31½.		0. 53.	51	13. 43. 50,5	54. 49
— 18	43. 30. 7½.		0. 54.	52	13. 5. 24	54. 48,5
— 21	42. 30. 49.		0. 56.	52,5	12. 6. 12	54. 57,5
— 22	42. 10. 46.		0. 57.		11. 46. 4	54. 53,5
— 26	40. 48. 25.		0. 59½.	53,5	10. 23. 45	54. 59
— 27	40. 27. 26.		1. 0½.		10. 2. 46	55. 0
— 30	39. 23. 40.		1. 3.	54,5	8. 58. 50	54. 53,5
Sept. 1	38. 40. 30.		1. 5.	55	8. 15. 28,5	54. 44,5
— 3	37. 56. 20.	—2″. 46.	1. 6.		7. 31. 34,5	59. 55. 1,5
					Medium ex 17.	59. 54. 56.

Ex altitudinibus fixarum meridianis: ex repetitis aſſumſi medias, et declinationes illarum apparentes computavi ad diem 1 Septembris.

Nomin

Nomin. Fixar.	Altit. obſerv.	Error Quadr.	Refract.	Declinat. apparens.	Latitudo.
δ Aquilae	$32^{h}.52'.43''$	$1'.46''$	$1'.43''$	$2^{\circ}.43'.20''$	$59^{\circ}.55'.6''$
α Sagittae	47. 42. 38	— —	1. 1	17. 33. 31	54. 40
γ Aquil.	40. 16. 49	— —	1. 15	10. 7. 45	54. 57
α Aquil.	38. 29. 48	— —	1. 24	8. 20. 21	54. 43

Medium 59. 45. 51, 5.

Vnde latitudo ſpeculae ſtatui poteſt 59. 54. 54.

Eſt vero latitudo obſervatorii academici 59. 56. 23.

adeoque differentia latitudinum - - 1. 29.

et diſtantia breviſſima inter obſervatorium et ſpeculam $2\frac{1}{2}$ werſtarum.

Pro obſervando partiali Lunae deliquio ſupra memorato, diebus $\frac{14}{25}$, $\frac{16}{27}$ et $\frac{20}{31}$ Iulii cepi altitudines Solis correſpondentes, et motum horologii bene exploratum habui, ſed veſperaſcente die obſervationis $\frac{20}{31}$ Iulii nubes coelum obducebant et Lunam obvelatam detinebant, ita vt nihil de eclipſi cum praeciſione annotare conceſſum fuit; ſuſpicabar tantummodo inter fiſſuram nubium per exiguum temporis intervallum hora 8 va minuto 49 + initium defectionis Lunae coepiſſe, quod tamen valde dubium erat. Eclipſes Satellitum Iovialium etiam non ex ſententia ſucceſſere: nam planeta in ſignis auſtralibus verſans in ipſa culminatione non niſi ad 9 altitudinis gradus ſupra horizontem evehebatur, et plerumque in aere vaporoſo ac craſſo haerebat, unde emerſiones iuſto ſerius et immerſiones citius conſequebantur; ſubiungo tamen paucas, quas obſervare mihi licuit.

$\frac{8}{19}$ Aug. Emersio I^{mi} satellitis $8^h. 16'. 25''$. T. V. coelo vaporoso dubia.

$\frac{14}{25}$ Aug. Emersio 2^{di}: $9^h. 19'. 52''$. coelo sereno, prope primum satellitem consecuta, hinc ad aliquot secunda subdubia.

$\frac{15}{26}$ Aug. Emersio 1^{mi}: $10^h. 11'. 40''$. observatio bona.

$\frac{29}{9}$ $\frac{\text{Aug.}}{\text{Sept}}$ Immersio 4^{ti}: 8. 32. 58.
vel 33. 0. aere vaporoso dubia.

$\frac{31}{11}$ $\frac{\text{Aug.}}{\text{Sept.}}$ Emersio 1^{mi}: $8^h. 37'. 20''$. ob eandem causam dubia.

Omnes hae observationes institutae sunt telescopio Gregoriano, et pro quavis illarum tempus verum per altitudines solis correspondentes repertum est.

Emersio 1^{mi} satellitis d. $\frac{15}{26}$ Aug. collata cum momento ephemeridum Berolinensium praebet differentiam meridianorum $1^h. 7'. 59''$, adeoque inter observatorium academicum et speculam domesticam 11 secundorum temporis, quam tamen minuendam adhuc esse, supra dixi.

COM-

COMMENTATIO
DE ECLIPSI SOLIS
Anno 1791 die $\frac{23 \text{ Mart.}}{3 \text{ April}}$ obſervata.

Auctore
STEP. RVMOVSKY.

Conuentui exhib. die 25 Aug. 1796.

§. 1.

De Eclipſi hac egi iam in Tomo VII. novorum Actorum, verum cum ibi tres tantum obſervationes ad calculum revocaverim, coactus fui correctionem Latitudinis Lunae in medio reliquere. Poſtquam vero compos factus fuerim obſervationis Eclipſis annularis Cantabrigiae in America a *Samuele Webber* inſtitutae aliarumque non nullarum, in animum induxi integrum computum maiori cura repetere, ut ſtabilirem correctionem Latitudinis et Longitudinem Cantabrigiae. Obſervationes, quas ad calculum revocavi, ſunt ſequentes.

Die 2 Apr.	Cantabrigiae initium	18^h.	$1'$.	$27''$.	t. v.
	Contactus I. internus	19.	8.	7.	
	Contactus II. internus	19.	12.	56.	
	Finis	20.	28.	26.	
Die 3 Apr.	Grenovici initium	0.	18.	41.	
	Finis	3.	6.	47.	

Die

Die 3. Apr.	Parisiis initium	$0^h. 33'. 42''$. t. v.
	Finis	3. 17. 37.
	Manhemii initium	1. 10. 55.
	Finis	3. 47. 42.
	Erlangae initium	1. 26. 27.
	Finis	3. 6. 18.
	Palermae initium	2. 7. 0.
	Finis	3. 56. 5.
	Petropoli initium	2. 56. 27.
	Finis	5. 21. 27.

§. 2.) Antequam ulterius progrediar, e re esse existimo praemittere Elementa, quibus conclusiones, quae sequuntur, superstructae sunt

Elementa ex Tabulis astronomicis Maieri deducta Anno 1791.

Temp. verum Grenovici Temp. med.	2. Apr. $22^h.45'.43''$. 22. 49. 2,4.	2. Apr. $23^h.57'.12''$. 0. 0. 30,5	3. Apr. $1^h.12'.42''$. 1. 15. 59,3	3. Apr. $2^h. 7'.40''$. 2. 10. 59,8	3. Apr. $3^h.13'.52''$. 3. 17. 8.
Long. med. ☉	$11^0.42'.11'',4$	$11^0.45'. 7'',6$	$11^0.48'.13'',3$	$11^0.50'.29''$.	$11^0.53'.12''$,
- - vera	13. 37. 29,5	13. 40. 22,7	13. 43. 31,3	13. 45. 44,9	13. 48. 27,2
Mot. hor. ☉	2. 27,5				2. 27,5
$\frac{1}{2}$ Diam. ☉	16. 1,9				16. 1,8
Long. ☽ vera	12. 43. 38,8	13. 19. 39,6	13. 57. 41,3	14. 25. 21,5	14. 58. 41,0
Lat. ☽ bor.	50. 18,6	47. 0,5	43. 30,8	40. 58,0	37. 55,1
Parall. aequat.	54. 47,7	54. 47,0	54. 46,5	54. 44,9	54. 43,8
$\frac{1}{2}$ Diam. ☽	14. 55,8	14. 55,6	14. 55,5	14. 55,1	14. 54,8

§. 3.

§. 3. His praefuppofitis et ratione diametri aequotoris ad axem telluris affumta 230:229 pro qualibet obfervatione huius Eclipfis computavi Parallaxim Longitudinis et Latitudinis Lunae nec non Diametrum eiusdem apparentem, ac obtinui.

	Parall. Longit.	Parall. Latit.	½ Diam. appar.
Cantabrigiae pro initio	23′. 4″, 8	49′. 15″, 6	896″, 9
pro contactu I.	21. 54, 1	47. 34, 2	899, 8
pro contactu II.	21. 42, 0	47. 23, 6	900, 0
pro fine	16. 42, 4	43. 58, 0	902, 9
Grenovici pro initio	18. 4, 5	34. 49, 4	905, 6
pro fine	38. 11, 5	27. 10, 1	902, 3
Parifiis pro initio	19. 41, 7	32. 11, 6	906, 0
pro fine	39. 55, 6	24. 41, 1	902, 5
Manheim pro initio	25. 1, 7	30. 32, 0	905, 6
pro fine	42. 30, 3	4. 27, 3	901, 1
Erlangae pro initio	27. 9, 3	29. 48, 3	905, 3
pro fine	43. 25, 4	24. 19, 7	900, 8
Palermae pro initio	32. 41, 6	18. 26, 0	906, 0
pro fine	45. 59, 0	14. 14, 5	901, 9
Petropoli pro initio	35. 17, 1	33. 55, 6	901, 8
pro fine	42. 51, 7	32. 11, 5	897, 8

Vnde denotante δ correctione fummae femidiametrorum Solis et Lunae, δ' differentiae eorundem, y correctione Latitudinis Lunae et π Parallaxis aequatoreae pro tempore coniunctionis refultabunt fequentes expreffiones:

Cantabrig. ex initio	$19^h.58'.\ 0''.$	$+2,16\delta-0,07y+0,97\pi$
ex fine	19. 57. 25.	$-2,16\delta-0,03y+0,68\pi$
I.	35.	$+4,32\delta-0,04y+0,29\pi=0$
ex contactu I.	19. 57. 32.	$+2,28\delta'+0,75y+0,21\pi$
II.	19. 57. 45.	$-2,32\delta'-0,87y+1,60\pi$
II.	$-$ 13.	$+4,60\delta+1,62y-1,39\pi=0$
Grenovici ex initio	0. 42. 20.	$+2,31\delta+0,75y-0,18\pi$
ex fine	0. 41. 32.	$-2,31\delta-0,92y-1.92\pi$
III.	48.	$+4,62\delta-1,65y+1,72\pi=0$
Parisiis ex initio	0. 51. 41.	$+2,40\delta-1,04y-0,16\pi$
	0. 50. 51.	$-2,40\delta+1,04y-2,05\pi$
IV.	50.	$+4,80\delta-2,08y+1,89\pi=0$
Manheim ex initio	1. 16. 11.	$+2,39\delta-1,15y-0,34\pi$
ex fine	1. 15. 19.	$-2,39\delta+1,04y-2,14\pi$
V.	52.	$+4,78\delta-2,19y+1,80\pi=0$
Erlangae ex initio	1. 26. 22.	$+2,47\delta-1,20y-0,42\pi$
ex fine	1. 25. 13.	$-2,40\delta+1,40y-2,18\pi$
VI.	69.	$+4,87\delta-2,24y+1,76\pi=0$
Palermae ex initio	1. 36. 20.	$+3,64\delta-2,93y-0,31\pi$
ex fine	1. 34. 32.	$-3,44\delta+2,67y-2,50\pi$
VII.	108.	$+7,08\delta-5,60y+2,19\pi=0$
Petropoli ex initio	2. 43. 18.	$+2,29\delta-0,76y-0,42\pi$
	2. 42. 49.	$-2,19\delta+0,38y-1,87\pi$
VIII.	39.	$+4,48\delta-1,14\ y+0,95\pi=0$

§. 4.

§. 4. Aequationes IV. VII. et VIII. hic prolatae differunt aliquantum ab iis, quae comparent in Tomo VII. Novorum Actorum. Praeter exiguum errorem, qui ibi irrepsit in computum observationis Petropoli habitae, origo huius discrepantiae praecipue in eo sita est, quod ibi supputato uno tantum loco Lunae motum horarium illius in Longitudinem constanter eundem adhibuerim, talem nempe, qualem Tabulae praebuerunt, cum computatis pluribus locis Lunae alium motum illius pro initio aliumque pro fine Eclipsis adhibendum obtinuerim. Si aequationes nunc erutas perpendamus, patebit aequationibus III. IV. VII. et VIII. satisfactum iri quam proxime ponendo $\delta = -5'',5$, $y = 10''$ et $\pi = -2''$, aequationes tantum I. et VI. respuunt hos valores. Verum de initio Cantabrigiensi notari convenit illud observatum fuisse in altitudine 5 circiter graduum, idcirco facile evenire potuit, ut in momentum initii error aliquot minutorum secundorum irrepserit; imo aeque faventibus circumstantiis raro contingit, ut initium eadem cum praecisione ac finis observetur.

§. 5. Cum momenta contactuum internorum Cantabrigiae observata maioris praecisionis sint capacia, ad momenta coniunctionis ex iis deducta exigi conveniet momenta ex initio et fine Eclipsis elicita, ut appareat quodnam eorum ad veritatem propius accedat. Aequatio ex contactibus internis deducta est

$$-13 + 4,60\,\delta' + 1,62\,y - 1.39\,\pi = 0$$

in qua si ponatur

$$\delta' = 0 \text{ et } \pi = -2 \text{ fiet } y = 6\tfrac{1}{2}''.$$

Quodsi ex mente quorundam astronomorum in Eclipsibus correctio semidiametri Solis statuatur $= - 3\frac{1}{2}$ et Lunae $= - 2$, habebitur correctio differentiae semidiametrorum $= - 1'', 5$, substituto hoc valore in aequatione supra allata oritur $y = 10''$ quam proxime, atque momentum coniunctionis

ex contactu interno I. $19^h. 57'. 35'', 7$.

II. $19. 57. 36, 5$.

Iam vero si in expressionibus momentorum coniunctionis ex initio et fine conclusis pro δ, y et π substituantur supradicti valores, oritur momentum coniunctionis

ex initio $19^h. 57'. 45'', 5$.

ex fine $19. 57. 35, 0$.

Vnde concludere licet observationem initii cantabrigiae non aeque certam esse ac finem Eclipsis.

§. 6. Quod attinet observationem Erlangae institutam, cum nullum adsit criterium diiudicandi, utrum in observatione initii an finis Eclipsis insit error aliquot minutorum secundorum, atque in gratiam illius neque valores pro δ, y et π assignatos immutare, neque in omnibus reliquis observationibus errores non contemnendos supponere liceat, pro definienda Longitudine Erlangae nihil aliud restat, quam ut ex binis determinationibus sumatur medium, nisi cui in hoc negotio observatio finis praeferenda videatur observationi initii.

§. 7. In expressionibus igitur supra relatis posito $\delta = - 5'', 5$, $\delta' = - 1'', 5$, $y = + 10''$ et $\pi = - 2''$ momenta coniunctionis et differentiae meridianorum orientur sequentes:

Con-

	Tempus coniunct.	Differ. merid. a Lutet. Paris.
Contabrigiae ex initio	$19^h. 57'. 46''$	$4^h. 53'. 32''$. occ.
ex I. Cont. intern.	19. 57. 36.	53. 42.
ex II. Cont. intern.	19. 57. 37.	53. 41.
ex fine	19. 57. 35.	53. 43.
Grenovici ex initio	0. 41. 59.	0. 9. 19.
ex fine	0. 41. 57.	0. 9. 21.
Parisiis ex initio	0. 51. 18.	
ex fine	0. 51. 18.	
Manhemii ex initio	1. 15. 47.	0. 24. 29. or.
ex fine	1. 15. 47.	0. 24. 29.
Erlangae ex initio	1. 25. 57.	0. 34. 39.
ex fine	1. 25. 41.	0. 34. 23.
Palermae ex initio	1. 35. 31.	0. 44. 13.
ex fine	1. 35. 22.	0. 44. 4.
Petropoli ex initio	2. 43. 10.	1. 51. 52.
ex fine	2. 43. 8.	1. 51. 50.

§. 8. Pro momento coniunctionis ad meridianum Grenovicensem $0^h. 41'. 58''$. reperitur Longitudo Solis vera $13^\circ. 42'. 14'', 1$. Longitudo autem Lunae $13^\circ. 42'. 11'', 5$. Vnde sequitur Tabulas Lunares Maieri aberrare in Longitudinem $3''$ tantum in defectu, si Longitudo Solis nulla egeat correctione, in Latitudinem vero $10''$ itidem in defectu.

ADDITAMENTVM
AD
COMMENTATIONEM PRAECEDENTEM
DE ECLIPSI SOLIS.

Auctore

STEPH. RVMOVSKY.

Convent. exhib. die 27 Octob. 1796.

Post praelectam coram conventu Academico Commentationem de Eclipsi Solis, quae anno 1791 observata est variis in locis Europae nec non Cantabrigiae in America, Vir Celeber. *Bode,* astronomus Berolinensis, compotem me fecit observationis eiusdem Eclipseos in America Philadelphiae habitae, atque cum ex contactibus internis Cantabrigiae observatis correctionem differentiae semidiametrorum Solis et Lunae obtinuissem $= - 1\frac{1}{2}$, sine mora memet accinxi ad computanda momenta similium contactuum Philadelphiae observata visurus, utrum illa pro differentia semidiametrorum eandem datura sint correctionem, quam praebuit observatio Cantabrigiensis, et quam Celeber. *la Landus* reperisse se significavit in litteris ad Celeber. *Zach* datis, insertisque Vol. II. Supplementorum ad Calendarium astronomicum Berolinense pag. 101.

Ob-

Obſervatio Philadelphiae inſtituta ita ſe habet

Initium Sole oriente die 3. Apr.	$5^h. 45'. 30''$. t. m.
Annulus formatur circiter - -	6. 50. 30.
—— —— rumpitur - -	6. 54. 47.
Finis Eclipſis - - -	8. 7. 2.

Sumtis pro baſi Elementis in diſſertatione praecedente relatis, Longitudine Philadelphiae a Grenovico verſus occidentem numerata $5^h. 0'. 46''$ prodit.

	Pro I. Cont. interno.	Pro II. Cont. interno.	Pro fine Eclipſis.
Longit. ☉ media	$11^\circ. 44'. 44''$.	$11^\circ. 44'. 55'',5$	$11^\circ. 47'. 53'',5$
Longit. ☉ vera	13. 40. 0.	13. 40. 10, 6	13. 43. 11, 2
Longit. ☽ vera	13. 15. 0, 2	13. 17. 10, 4	13. 53. 33. 8
Latit. ☽ Bor.	47. 26.	47. 14, 2	43. 53, 0
Parall. aequat.	54. 47.		54. 46, 5
$\frac{1}{2}$ Diam. ☽	14. 55, 6		14. 55. 5

Porro aſſumta Latitudine Philadelphiae $39^\circ. 36'. 55''$. et ratione diametri aequatoris ad axem telluris = 230 : 229 angulus inter Zenith apparens et Geocentricum compehenſus reperitur $14'. 47''$, et calculo parallaxium expedito prodit

	Parall. Long.	Parall. Latit.	$\frac{1}{2}$ Diam. ☽
Pro I. Contactu	$24'. 41'',3$	$47'. 11'',1$	$898'',9$
Pro II. Contactu	24. 34, 3	47. 7, 0	399, 1
Pro fine -	20. 42, 3	44. 4, 1	902, 1

Hinc

Hinc denotante δ' correctione differentiae ſemidiametrorum Solis et Lunae, ſummae eorundem δ, Latitudinis Lunae y et parallaxis aequatoreae π, pro momentis coniunctionis in tempore vero ſequentes oriuntur expreſſiones: Die 2 Aprilis

Ex contact.	I.	$19^h. 42'. 43''$	$+ 2,22\,\delta' - 0,52\,y + 1,46\,\pi$
	II.	$19. 42. 20$	$- 2,19\,\delta' + 0,40\,y + 0,63\,\pi$
Ex fine		$19. 41. 22$	$- 2,15\,\delta - 0,01\,y + 0,82\,\pi$

Si in expreſſione ex fine elicita ponatur $\delta = -5\frac{1}{2}$ $y = +10$ et $\pi = -2$, pro ut ſuadet maior pars obſervationum in Europa inſtitutarum, prodit momentum coniunctionis ad meridianum Philadelphiae $19^h. 41'. 33''$. Quodſi binarum reliquarum expreſſionum ſecunda ſubtrahatur a prima fit

$$23 + 4,41\,\delta' - 0,92\,y + 0,83\,\pi = 0.$$

Vbi ponendo $y = 10$ et $\pi = -2$ prodit $\delta' = -2'',7$; demtis vero a momento contactus interni primi, ut pote circiter obſervati, 3 aut 4 minutis ſecundis reperitur $\delta = -2,1$. Hinc apparet obſervationem Philadelphiae pariter ac Cantabrigiae habitam eandem quam proxime pro differentia ſemidiametrorum praebere correctionem; perfectus etenim conſenſus hic minime eſt expectandus.

Quodſi in binis prioribus expreſſionibus ponatur $\delta' = -1\frac{1}{2}$, $y = 10$ et $\pi = -2$ prior dat momentum coniunctionis $19^h. 42'. 32''$, poſterior vero $19^h. 42. 26''$, ex quo apparet, ut momenta coniunctionis ex contactibus internis elicita ad conſenſum redigantur cum ſimili momento ex fine deducto, momenta utriusque contactus integro minuto primo eſſe

esse minuenda; demto vero a primo tantum contactu minuto primo, prout censet cel. *la Landus*, correctio pro differentia semidiametrorum prodiret + 10″, 7 quod neutiquam admitti potest.

Constituto itaque momento coniunctionis ad meridianum Philadelphiae 2. April. $19^h. 41'. 33''$, cum ad meridianum Parisinum sit 3. April. $0^h. 51'. 18''$ t. v. prodit Longitudo Philadelphiae $5^h. 9' 46''$ a meridiano Parisino versus occidentem numerata, quae a Cel. Maskelyne statuitur $5^h. 9'. 54''$.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE

Anno 1768 et 1769 a Johanne Islenieff in Jakutsk inſtitutae, quarum potiora momenta recenſuit.

STEPH. RVMOVSKY.

Conventui exhib. die 25 Juin. 1795.

In diario obſervationum a *Johanne Islenieff* in Jakutsk inſtitutarum reperitur ſeries obſervationum meteorologicarum, quae incipit anno 1768 die $\frac{13}{24}$ Junii et terminatur die $\frac{26.\ \textit{Iulii}}{6.\ \textit{Aug.}}$ anni ſequentis. Cum nusquam hic loci per tantum temporis intervallum et tam ſedulo temperies aëris et variationes athmoſpherae fuerint obſervatae, operae pretium facturum me arbitratus ſum, ſi ſumma earum capita breviter expoſuero.

Temperies aëris et ſtatus coeli qualibet die quater annotatus eſt: 1.) ante meridiem hora 8, 2.) circa ipſum meridiem, 3.) poſt meridiem hora 4 ac denique 4.) nunc brevi poſt occaſum Solis, nunc hora 8 poſt meridiem. In obſervationibus his duo thermometra adhibita ſunt, alterum ſcala Del'iſliana inſtructum, alterum Reaumuriana; altitudines barometricae menſuratae ſunt pede Pariſino in 12 pollices, ac pollice illius in 12 lineas diviſo, quarum quae-vis

vis procul dubio aeſtimando in 10 partes dividebatur. Quo vero facilius obſervationes hae cum obſervationibus Petropoli factis conferri queant, altitudines barometricas in Jakutsk obſervatas ad eandem menſuram revocavi, iuxta quam obſervationes Petropoli inſtituuntur, lineas ſcilicet eiusque decimas partes ad partes centeſimas pollicis reduxi.

Altitudines Barometricae.

Anno 1768.

Menſis.	D. h.	Altit. max.	Therm.	D. h.	Altit. min.	Therm.	Var.	Med.
Iunius	24. 8. *a*.	27,20	123.	27. 8. p.	26,76	$116\frac{1}{2}$	0,44	26,98
Iulius	1. 4. p.	27,16	116.	22. 4. p.	26,17	128	0,99	26,66
Auguſt.	22. 8. *a*.	27,48	131.	18. 4. p.	26,79	129	0,69	27,13
Septem.	21. 8. *a*.	27,90	156.	7. 4. p. 8. 8. *a*.	26,50	141 137	1,40	27,20
Octob.	25. 8. *a*.	27,76	169.	5. 8. *a*.	26,41	161	1,35	27,18
Novem.	22. 8. *a*.	27,83	194.	11. mer.	26,54	194	1,29	27,18
Decem.	17. 8. *a*.	28,06	*	16. mer.	26,91	*	1,15	27,18
			Anno	1769.				
Iann.	27. 8. *a*.	28,07	197.	5. 4. p.	27,08	*	0,99	27,57
Febr.	1. 8. *a*	27,81	197.	8. 4. p.	27,10	186	0,71	27,45
Mart.	12. 8. *a*.	27,61	184.	29. mer.	26,91	150	0,70	27,26
April.	1. 8. *a*.	27,59	166.	23. 8. *a*.	26,42	145	1,17	27,00
Maius	4. 8. *a*.	27,38	152.	18. mer. 24. 4. p.	26,91	129 118	0,47	27,14
Iunius	2. 8. *a*.	27,37	135.	7. 4. p.	26,97	113	0,58	27,08

Vbi *a* horam antemeridianam, *p* poſt meridianam, et *mer.* meridiem ſignificat.

* Mercurius intra bulbum latuiſſe eſt obſervatus.

Maxima itaque altitudo barometri intervallo 12 mensium obſervata eſt Anno 1769 ante meridiem die 27 Iann. 28, 07 poll. altitudo haec manſit fere invariata ad diem 29, coelo ut plurimum ſereno et frigore in dies creſcente.

Minima barometri altitudo obſervata eſt 26, 17 poll. die 22 Iulii Anno 1768. Hinc concluditur variatio intervallo 12 menſium 1, 90, medium inter maximam et minimam 27, 12.

Vt obſervationes hae facilius comparari queant cum obſervationibus Petropoli eodem tempore inſtitutis, iuvabit illas ex Tomo XIV. novorum Commentariorum excerptas hic exhibere.

1768.

	Altit. max.	Altit. min.	Variat.	Med.
Iunius	2. 28, 40	18. 27, 60	0, 80	28, 00
Iulius	13. 28, 25	28. 27, 55	0, 70	27, 90
Auguſt.	2. 28, 20	16. 27, 50	0, 70	27, 85
Septem.	16. 28, 72	29. 27, 37	1, 35	28, 04
Octob.	12. 28, 67	22. 27, 24	1, 43	27, 95
Novem.	30. 28, 44	13. 27, 35	1, 09	27, 89½
Decemb.	3. 38, 74	15. 26, 98	1, 76	27, 86

1769.

1769.

	Altit. max.	Altit. min.	Variat.	Med.
Iann.	9. 28, 90	18. 26, 84	2, 06	27, 87
Februar.	25. 28, 66	17. 27, 58	1, 08	28, 12
Mart.	18. 28, 70	28. 27, 74	0, 96	28, 12
April.	16. 28, 64	19. 28, 78	0, 86	28, 21
Maius	13. 28, 65	10. 27, 80	0, 84	28, 22
Iunius	14. 28, 64	26. 27, 48	0, 81	28, 06

Intra ultimos igitur fex menfes anni 1768 altitudo maxima barometri Petropoli fuit die 3 Dec. 28, 74.
Iakutski vero - - die 17 Dec. 28, 06.

Minima barometri altitutodo eodem temporis intervallo Petropoli obfervata eft die 22. Oct. - - 27, 24.
Iakutski - - - - 25. Oct. - - 26, 41.

Vbi id notari convenit, quod maxima aeque ac minima barometri altitudo Petropoli ac Iakutski eodem menfe contigerit, et differentia inter maximam et minimam utrobique fuerit circiter eadem.

Altitudo maxima barometri intra primos fex menfes anni 1769 Petropoli obfervata eft die 9 Iann. 28, 90.
Iakutski - - - - 27 Iann. 28, 07.

Minima barometri altitudo eodem temporis intervallo obfervata eft Petropoli die 18 Iann. - - 26, 84.
Iakutski - - - 22 Iul. - - - 26, 17.

Hic rursum evenit, ut differentia inter maximam et minimam altitudinem barometri prodeat utrobique fere eadem.

Cum itaque constanter altitudo barometri per integrum annum Iakutski minor quam Petropoli fuerit observata, concludere licet urbem Iakutsk magis supra superficiem maris esse elevatam.

Observationes thermometricae.

Supra iam innui duo thermometra ad mensurandos gradus caloris et frigoris fuisse adhibita; in thermometro De l'Isliano divisio scalae continuabatur ad 228 grad. in Reaumuriano autem ad 42 grad infra punctum congelationis, quae cum perfecte congruere sint observata, sufficiet hic gradus caloris et frigoris iuxta scalam De l'Islianam exhibuisse.

Menses	Altit. max.		Stat.	Altit. min.		Stat.	Variat.
	D. h.	grad.	Bar.	D. h.	grad.	Bar.	grad.
Iun.	30. 4. p.	114	26. 9,2	22. mer.	125 $\frac{1}{2}$	27. 0,4	11 $\frac{1}{2}$
Iul.	7. 4. p.	110	26. 8,2	20. 8. a	130 $\frac{1}{2}$	27. 2,2	20 $\frac{1}{2}$
August	14. 4. p.	120	27. 2,0	31. t. die	142	27. 3,0	22
Sept.	3. 4. p.	132	27. 0,	21. 8. a	156	27. 10,8	24
Octobr.	1. mer.	147	27. 0,0	20 } 8. a	192	27. 5,0	45
Nov.	1. tot. die	184	27. 5,5	27 } 8. a	210	27. 10,5	29
Dec.	1. mer.	188	27. 2,2	20. mer.			

Minima thermometri altitudo mense Decembri mensurari non potuit, nam mercurius in thermometro quo hucusque ob-

obſervationes factae ſunt, die 11 Decembris hora 4 pomeridiana infra ultimum punctum diviſionis ſc. infra 228 gradus deſcendit, haeſitque in tubo immobilis ad diem ſequentem barometro monſtrante primum 27. 6 dein 27. 8, 8; quamobrem die 12 Decembris hora 8 pomeridiana obſervator expoſuit aeri libero aliud thermometrum, in quo diviſio ſcalae continuata fuit usque ad 245 grad.

Die 13 hora 8 antemeridiana aeque ac pomeridiana thermometrum hoc monſtrabat 207. gr. Die 14 hora 8 pomeridiana mercurius deſcendit ad 228 grad, et die ſequenti hora 8 matutina immotus haeſit ad 229 grad, cui cum obſervator digitum applicuiſſet, ſubito mercurius decidit in bulbum, ibique latuit ad diem 19, quo tandem meridie adſcendit ad 199 grad. cum mane hora 8 adhuc in bulbo latuiſſe fuerit obſervatus barometro monſtrante 27. 9, 4.

Anno 1769.

Menſe iannuario maxima altitudo obſervata eſt die 25 hora 4 pomeridiana 183 grad. barometro monſtrante 27. 8, 2, minima vero, prout menſe praecedenti notari non potuit; nam mercurius primum diebus 3. 4 et 5 infra punctum diviſionis 245 deſcendiſſe et per triduum intra bulbum latuiſſe obſervatus eſt barometro monſtrante modo 27. 5, 0. Interiecto die 6 Decembris, quo altitudo mercurii obſervata eſt 205 grad. ſequentibus continuis octo diebus ſc. 7. 8. 9. 10. 11. 12 et 13 mercurius manſit intra bulbum et non niſi die 14 hora 8 matutina ad 199 grad. adſcendiſſe eſt obſervatus. Durante hoc frigiore barometri altitudo fuit varia non maior tamen 27. 10, 2 nec minor 27. 7, 0 coelo ut pluri-

plurimum sereno, horizonte tantum densis vaporibus tecto, et spirante vento N O.

Menses.	Altit. max.		Stat. Bar.	Altit. min.		Stat. Bar.	Variat.
	D. h.	grad.		D. h.	gr.		gr.
Febr.	28. 4. p.	166.	27. 3,8	12. mer.	201.	27. 8,7	35
Mart.	30. 8. p.	148.	27. 1,0	10. 8. a.	194.	27. 4,9	36
April.	30. 4. p.	140.	27. 0,0	24. 8. a.	164.	27. 1,0	24
Maius.	23. 4. p.	113.	26. 11,5	6. 8. a.	153.	27. 3,2	40
Iunius.	17. 4. p.	110.	26. 10,3	1. 8. a	136.	27. 4,2	26

Vt de temperie aeris, quae regnat Jakutski, certius iudicium ferri queat, consultum esse credidi pro singulis diebus determinare statum medium thermometri, atque illis in classes distributis colligere, quot vicibus temperies aeris regnaverit intra 100 et 110 grad. dein intra 110 et 120 et ita porro usque ad limitem 200 et 210 grad.; quoties autem mercurius infra 210 gradus descendisse, vel in bulbis thermometrorum latuisse observatus est, omnes hos dies in unam summam coniectos exhibere, id quod sequenti tabula complexus sum.

Status

Status thermometri inter

Menfes.	110 et 120	120 et 130	130 et 140	140 et 150	150 et 160	160 et 170	170 et 180	180 et 190	190 et 200	200 et 210	infra 210
1768 Iun.	4										
Iul.	16	15									
Aug.	-	19	11	1							
Sept.	-	-	6	20	4						
Oct.	-	-	-	-	3	9	12	7			
Nov.	-	-	-	-	-	-	-	5	16	9	
Dec.	-	-	-	-	-	-	-	4	9	7	11
1769. Ian.	-	-	-	-	-	-	-	2	5	14	10
Febr.	-	-	-	-	-	1	4	14	9		
Mart.	-	-	-	-	8	9	11	3			
April.	-	-	-	14	13	3					
Mai.	1	14	7	8	1						
Iun.	16	10									
	37	58	24	43	29	22	27	35	39	30	21

Tabula haec fiftit ftatum thermometri incipiendo a 27 Iunii 1768 usque ad 27 Iunii 1769. Hinc fequitur currente integro anno 21 dies frigidiores fuere 210 grad. 51 dies frigidiores fuere 200 grad. 80 dies frigidiores 190 grad. 115 frigidiores 180 grad. 142 dies frigidiores 170 gr. 164 frigidiores 160 grad. et 193 frigidiores 150. E contra 37 dies calidiores 120 grad. 95 dies calidiores 130 grad. 119 dies calidiores 140 grad. et denique 162 calidiores 150 grad.

Status Coeli Anno 1768.

Iunius.

Incipiendo a 14 Iunii ad finem huius mensis dies sereni numerari potuerunt 8, subnubili 3 et nubili 5: pluit die 14, larga pluvia decidit 22. pluit et tonat 28.

Iulius.

Dies sereni hoc mense fuere 12, 11. subnubili et 9 maiori ex parte nubili, inter quos larga pluvia decidit diebus 13 et 30, parca nonies, tonat et fulgurat bis nempe die 16 et 31. Ventus W spiravit per unum diem, S per duos, totidem S W et N W et denique N per 5 dies.

Augustus.

Dies sereni notati sunt 8, subnubili 9 et nubili 14. pluvia copiosa die 10 et parca per 4 dies sc. 3. 9. 17. et 18. Ventus N. & W. spiravit per unum diem, O. per tres dies, per totidem S O, N W per 5 et N O per 7 dies.

September.

Dies sereni quatuor tantum fuere, 11 subnubili et 15 nubili, pluit semel die 8. ningit vero septies diebus 11. 12. 16. 19. 20. 24 et 25. Ventus N O spriravit per 7 dies N W per 8, S O per 9 et S W per 4 dies.

October.

Dies sereni numerari poterant 12, subnubili 9 et nubili 10, ningit quater nempe 4. 5. 23 et 24. Die 26 conspecta est aurora borealis. Ventus N spiravit per unum diem, S W. per duos, N O per tres et N W per 6 dies.

Intra

Intra diem 18 et 19 fluvius Lena glacie tegitur, die 18 thermometro monſtrante 180 gr. et die 19 hora 8 ante meridiem 192 grad.

November.

Dies ſereni hoc menſe numerabantur 8, ſubnubili 13, nubili 9; ningit quinquies nempe diebus 3. 4. 5. 29 et 30, Aurorae boreales conſpectae ſunt 5 et 14. Ventus NO ſpiravit per 6 dies, NW per duos, SW ſemel et totidem SO.

Hucusque per dies ſubnubilos intelligebam coelum per vices ſparſis nubibus inquinatum, hic vero et menſibus ſequentibus Decembri et Januario intelligi volo non coelum nubibus inquinatum, ſed aerem vaporibus congelatis repletum.

December.

Pro ſerenis hoc menſe haberi potuerunt 12 dies, et totidem pro ſubnubilis, pro nubilis vero 7. Nix cecidit una vice die 18. Parhelia viſa ſunt diebus 20. 22 et 27. Aurora borealis 26. Ventus NO ſpiravit per 15 dies, NW aeque ac W per duos, N itidem ac W per unum.

1796.

Ianuarius.

Dies ſereni hoc menſe numero fuerunt 14, ſubnubili 11. et nubili 6. Ningit una vice die 18. Perhelia conſpecta ſunt diebus 1. 14. 15 et 30. Venti per hunc menſem regnabant ut plurimum NO et NW.

Februarius.

Dies ſereni hoc menſe obſervati ſunt 10, ſubnubili 12 et nubili 9. Nix cecidit diebus 9. 7. 19 et 28. Ventus N O ſpiravit per 15 dies et N W per quatuor.

Martius.

Pro ſerenis hoc menſe haberi potuerunt 8 dies, pro ſubnubilis 11, pro nubilis 12. Ningit quater nempe diebus 17. 19. 22. et 24. Die 1. conſpecta eſt aurora borealis, Ventus N O ſpiravit per 5 dies, N W per 12 et S W per duos.

Aprilis.

Dies ſereni hoc menſe fuere 12, ſubnubili 8, nubili 10. Ningit quinquies 14. 15. 17. 20 et 23. Ventus N W. ſpiravit per 11 dies, N O per 7. S W. per 3, et S O per duos.

Maius.

Dies ſereni 3 tantum hoc menſe obſervati ſunt, nubili 13 et ſubnubili 15. Ningit ſemel die 2, pluit quinquies, 1. 12. 18. 19. 29. Ventus O ſpiravit per 1 diem, S W per 3. S O per 5, N O per 7 et N W per 13.

Die 19 glacies in fluvio Lena ſolvi incipit, et die 23 Lena prorſus a glacie liberatur.

Iunius.

Dies ſereni hoc menſe usque ad diem 27 fuere 5, nubili 8, ſubnubili 13. pluit quinquies diebus 4. 9. 14. 21. 22. pluit et tonat die 11. Ventus N ſpiravit per tres dies

dies, N O itidem per tres, S. per duos, S O per unum et denique N W per 10 dies.

Hinc ſequitur numerum dierum ſerenorum, ſubnubilorum et nubilorum intervallo duodecim menſium Iakutski ad aequalitatum proxime acceſſiſſe, nam facile furi potuit ut aliquot dies ſerenos ideo inter ſubnubilos numeraverim, quod coelum mane tantum et veſperi ſparſis nubibus fuerit inquinatum.

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À ST. PÉTERSBOURG
ANNÉE MDCCXCII.

D'après le nouveau Stile.

Présenté à Académie le 6 Mai 1793.

I. Baromètre.

1.) Hauteurs extrèmes, Variation, le Milieu & Hauteur moyenne pour chaque mois de l'année 1792.

m. signifie *matin* ou *avant-midi* & s. *soir* ou *après-midi*.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variation.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour & heure	P. cent.	jour & heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	28.56	le 16 à 12 h.m.	27.27	le 7 à 4 h.m.	129	27.91	28.039
Février	28.83	le 16 à 5 h.s.	27.54	le 5 à 6 h.m.	129	28.18	28.194
Mars	28.52	le 21 à 2 h.s.	27.72	le 27 à 9 h.m.	80	28.12	28.206
Avril	28.34	le 21 après m.	27.37	le 17 à 10 h.m.	97	27.85	28.083
Mai	28.52	le 31 à 9 h.m.	27.50	le 10 à 12 h.s.	102	28.01	28.097
Juin	28.50	le 1 à 4 h.m.	27.62	le 23 à 9 h.m.	88	28.06	28.067
Juillet	28.33	le 11 à 6 h.m.	27.92	le 2 à 12 h.m.	41	28.12	28.117
Août	28.59	le 1 à 6 h.s.	27.73	le 21 à 8 h.m.	86	28.16	28.058
Septembr	28.68	le 17 à 1 h.s.	27.64	le 12 à 7 h.m.	104	28.16	28.166
Octobre	28.59	le 3 av. mid	27.76	le 26 à 4 h.m.	83	28.17	28.237
Novembr.	28.72	le 4 à 12 h.m.	27.13	le 19 à 12 h.s.	159	27.92	27.997
Décembr.	28.69	le 2 à 12 h.m.	26.86	le 8 à 5 h.m.	183	27.77	27.769

2.)

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a surpassé quelques points principaux de l'échelle, avec la hauteur qui répond à chaque demi-mois.

Mois.	Au dessus de 27. 80 jours.h	27. 90 jours.h	28. 00 jours.h	28. 10 jours.h	28. 20 jours.h	un demi-mois au dessus de Pouces. mill.
Janvier	24. 9	23. 0	20. 9	13. 21	10. 7	28. 075
Février	22. 15	19. 17	18. 7	16. 11	13. 20	28. 189
Mars	29. 8	28. 10	26. 16	22. 8	16. 22	28. 217
Avril	28. 4	26. 11	21. 2	14. 2	8. 9	28. 085
Mai	25. 14	23. 18	22. 2	19. 5	13. 14	28. 176
Juin	27. 3	24. 18	19. 7	13. 13	7. 10	28. 038
Juillet	31. 0	31. 0	22. 4	17. 9	10. 2	28. 126
Août	29. 5	24. 17	15. 13	11. 15	6. 7	28. 001
Septbr.	28. 17	27. 12	25. 1	18. 5	11. 17	28. 179
Octobr.	30. 19	29. 7	25. 12	20. 22	17. 12	28. 281
Novbr.	22. 22	20. 11	15. 10	11. 21	7. 18	28. 008
Décbr.	16. 5	14. 15	12. 0	7. 16	5. 7	27. 845

3.)

3.) Variations confidérables & fubites.

Mois.	Temps jour	heure.	Diff. heur.	Baromètr. P.	cent.	Différ. cent.	Therm. degrés.	Vent.	Atmofphère.
Janv.	4.	11. s.	31	28.	28	−72	159	SE.	ciel couv., enfuite neige.
	6.	6. m.		27.	56		152	Ou. fort.	c. en partie couvert.
	6.	2. s.	14	27.	66	−39	156	Ou. fort.	c. en partie ferein.
	7.	4. m.		27.	27		167	Ou.	c. en part. fer., enf. couv. neige
	7.	6. s.	30	27.	30	+67	165	NOu.	c. couvert.
	8.	12. s.		27.	97		183	NOu.	ciel ferein.
	11.	12. m.	24	28.	12	−50	182	E.	brouillard, c. en part. couv.
	12.	12. m.		27.	62		174	E ff.	ciel en partie ferein.
	14.	3. m.	39	27.	52	+95	177	Ou. fort.	c. ferein, enfuite nuages.
	15.	6. s.		28.	47		183	Ou.	ciel ferein.
Févr.	2.	12. m.	36	28.	26	−70	152	calme.	c. couvert, neige, brouillard.
	2.	12. s.		27.	56		149	SE.	ciel couv. pluie & neige
	12.	6. m.	24	27.	75	+50	187	N.	c. ferein. Parhélie.
	13.	6. m		28.	25		187	N.	c. en partie ferein.
	24.	12. s.	24	28.	05	+56	152	Ou. fort.	c. couv., beaucoup de neige.
	25.	12. s.		28.	61		180	E. calme.	c. ferein.
Mars	25.	6. s.	18	28.	15	−37	148	Ou.	c. couvert, pluie & neige.
	26.	12. m.		27.	78		152	calme.	c. ferein, brouillard.
Avril	15.	12. m.	18	28.	31	−38	150	NOu. fort.	c. en partie ferein.
	16.	6. m.		27.	93		153	Ou. fort.	neige, c. couv, enf. en part. fer.
	16.	6. s.	16	28.	02	−65	151	Ou.	c. en partie ferein.
	17.	10. m.	9	27.	37	+35	152	N. fort.	beaucoup de neige, c. couv.
	17.	7. s.		27.	72		157	NOu. fort.	c. en partie ferein.

3.) Va-

3.) Variations confidérables & fubites.

Mois.	Temps jour.	heure.	Diff. heur.	Baromètr. P.	cent.	Variat. cent.	Therm. degrés.	Vent.	Atmofphère.
Avril	21.	12. s.	27	28.	34	— 62	156	SOu. fort.	c.fer, enf. couv. neige & pluie.
	23.	3. m.		27.	72		148	SOu. ff.	c. couvert, pluie.
Mai.	1.	10. m.	24	28.	27	— 57	144	SOu. fort.	ciel ferein.
	2.	10. m.		27.	70		136	S. ff.	c. couvert, pluie.
Sept.	16.	2. s.	22	28.	17	+ 51	126	SOu. ff.	peu de pluie, c. en part. couv.
	17.	12. m.	41	28.	68	— 51	135	calme.	c. en grande partie ferein.
	19.	5. m.		28.	17		134	S.	pluie, c. couvert.
Oct.	25.	12. m.	17	28.	27	— 51	146	NOu.	c. couvert, beauc. de pluie,
	26.	5. m.	16	27.	76	+ 36	146	NOu. fort.	nuages.
	26.	9. s.		28.	12		154	N.	ciel ferein.
Nov.	4.	12. m.	24	28.	72	— 49	159	N. SOu.	c. ferein, enf. couv. Prife de la riviere & debacle.
	5.	12. m.		28.	23		148	SOu. fort.	c. couv. verglas, pluie
	7.	5. m.	18	27.	94	+ 46	146	N.	brouillard, c. couvert.
	7.	11. s.	29	28.	40	— 49	152	NE.	ciel couvert.
	9.	4. m.		27.	91		148	Ou.	c. ferein.
	10.	11. m.	22	28.	03	— 71	148	NOu.	parhélie, c. à demi-couv. enfuite pluie.
	11.	9. m.	26	27.	32	+120	146	Ou. fort.	pluie, c. couv. enfuite neige.
	12.	11. m.	24	28.	52	— 40	159	Ou.	c. ferein, enfuite couvert.
	13.	11. m.		28.	12		147	SOu.	pluie, c. couvert.
	18.	11. s.	24	27.	93	— 80	154	NOu.	c. couvert, neige.
	19.	11. s.	24	27.	13	+ 55	155	SOu.	c. couvert, neige & pluie.
	20.	11. s.	19	27.	68	+ 51	159	NOu. fort.	ciel couvert.
	21.	6. s.		28.	19		168	Ou.	ciel ferein.

3.) Variations ſubites & extraordiaires.

Mois.	Temps. jour.	heure.	Diff. heur.	Baromètr. P.	cent.	Variat. cent.	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Nov.	25.	11. s.		28.	24		156	Ou. fort.	c. en partie couv., neige.
	26.	11. s.	24	27.	45	— 79	146	NOu. ff.	c. ſerein.
	27.	11. s.	24	28.	13	+ 68	162	SOu. calme	c. ſerein.
Déc.	Nov. 30.	3. s.		27.	76		150	Ou.	c. en partie couv. enſ. neige.
	Dec. 2.	12. m.	45	28.	69	+ 93	163	Ou.	c. ſerein, enſuite couvert.
	6.	4. m.	88	26.	97	— 172	154	SE. calme.	c. couvert.
	7.	5. m.		27.	39		159	SE.	c. couvert.
	8.	5. m.	24	26.	86	— 53	152	calme.	brouillard, c. couv. neige.
	9.	2. s.	33	27.	83	+ 97	159	NOu.	ciel couvert.
	10.	9. m.	19	27.	17	— 66	150	Ou. fort.	ciel couvert.
	18.	3. s.		27.	98		162	E. fort.	peu de neige, c. couvert.
	19.	6. s.	27	27.	29	— 69	160	E. fort.	de même.
	21.	3. m.	33	27.	78	+ 49	159	S.	c. couvert.

m. ſignifie heure de *matin* ou *avant-midi:* *s.* heure de *ſoir* ou *après-midi.*

Les déſcentes ſont déſignées par —, & les montées par +.

4.) Reſumé des obſervations Baromètriques.

La plus grande hauteur du Baromètre = 28. 83, le 16 Février, à 5 heures après-midi. Thermomètre de Délisle 172°, vent S E, ciel ſerein.

La

La plus petite hauteur = 26. 86, le 8 Décembre, à 5 heures matin. Thermometre 152^0, calme, brouillard, ciel couvert & neige.

La variation totale = 197 centiemes d'un pouce de France.

Le milieu = 27. 845.

La hauteur moyenne = 28,085 ou 28 $\frac{85}{1000}$ pouces de France, qui correſpond à une hauteur de 29 pouces 11 $\frac{1}{2}$ lignes d'Angleterre.

Cette hauteur moyenne, par laquelle j'entend la ſomme de toutes les hauteurs obſervées du Baromètre, diviſée par leur nombre, ſe trouve pendant les ſix mois d'été, depuis le 1 Mai jusqu'au premier Novembre = 28. 124: & pendant les ſix mois d'hyver qui précédent, c'eſt à dire depuis le 1 Novembre 1791 jusqu'au 1 Mai 1792 = 28. 090. Elle a donc été plus grande en été qu'en hyver de $\frac{34}{1000}$ de pouce; ce qui eſt contraire à ce qu'on obſerve communement.

Le fecond tableau fait voir, que la hauteur barométrique a été

au deffus de	en 1792	depuis le 1 Novembre 1791 jusqu'au 1 Mai 1792.	de puis le 1 Mai 1792 jusqu'au 1 Novembre 1792.
27. 80	316 jours 1 heure	149 jours 0 heure	172 jours 10 heures
27. 90	293 — 16 —	137 — 15 —	161 — 0 —
28. 00	243 — 11 —	119 — 2 —	129 — 15 —
28. 10	187 — 4 —	92 — 18 —	100 — 21 —
28. 20	129 — 1 —	69 — 12 —	66 — 14 —
	183 jours au deffus de 28. 107.	91 jours au deffus de 28. 110.	92 jours au deffus de 28. 126.

Le mois le plus variable a été celui de Novembre: enfuite ceux de Décembre & de Janvier. Les moindres variations fe trouvent aux mois de Juin, Juillet & Août.

La défcente la plus confidérable de 172 centiemes de pouces, ou de $20\frac{1}{2}$ lignes a eu lieu le 2 à 6 Octobre en 88 heures, ou en 3 jours 16 heures. Celles du 18 & du 25 Novembre, de 80 & de 79 centiemes de pouce, ou de $9\frac{1}{2}$ lignes en 24 heures de temps, font encore fort remarquables.

Les montées les plus confidérables ont été, de 120 centiemes, ou de $14\frac{1}{2}$ lignes en 26 heures de temps, le 11 Novembre; enfuite de 97 centiemes, ou de $11\frac{2}{3}$ lignes en

33 heures le 8 Décembre; de 95 centiemes, ou de $11\frac{1}{2}$ lignes en 39 heures le 14 Janvier, & de 93 centiemes, ou de $11\frac{1}{4}$ lignes en 45 heures le 30 Novembre.

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes, & leur différence, avec l'état moyen du froid & de la chaleur pour chaque mois de l'année 1792.

Mois.	Hauteurs extrêmes.				Différence.	Etat moyen.	
	Au plus bas		Au plus haut.			Froid moyen.	Chaleur moyen.
	Degré.	jour & heure.	Degré.	jour & heure.	Degré	Degré.	Degré.
Janvier	192	le 11 à 7 h. m.	152	le 5 à 10 h. s.	40	176°,1	170°,0
Février	187	le 12&13 à 7. h. m.	148	le 3 à 2 h. s.	39	172, 5	163, 0
Mars	189	le 5 & 9 à 6. h. m.	138	le 29 à 2 h. s.	51	163, 7	154, 5
Avril	164	le 21 à 6. h. m.	126	le 25 à 2 h. s.	38	151, 8	142, 7
Mai	150	le 14 à 5. h. m.	115	le 31 à 2 h. s.	35	141, 2	133, 2
Juin	140	le 26 à 6. h. m.	112	le 1 à 2 h. s.	28	130, 9	122, 7
Juillet	131	le 1. 14 & 28 à 6. h. m	108	le 22 à 2 h. s.	23	124, 2	116, 4
Août	141	le 14&15 à 6. h. m	114	le 2 à 2 h. s.	27	132, 9	124, 1
Sept.	142	le 17 à 6. h. m.	121	le 22 & 25 à 2. h. s.	21	134, 6	126, 5
Octobr.	161	le 28 à 6. h. m.	134	le 23 à 2 h. s.	27	148, 9	143, 1
Novem.	168	le 21 à 10 h. s.	143	le 9 à 12 h. midi.	25	156, 6	151, 1
Décem.	169	le 1 à 7 h. m.	148	le 11 à 2 h. s.	21	157, 4	158, 5

 2.)

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Le froid a été plus grand que							La chaleur a été plus grande que							
	190 jours	180 jours	170 jours	160 jours	150 jours	140 jours	130 jours	110 jours	120 jours	130 jours	140 jours	150 jours	160 jours	170 jours	180 jours
Janv.	1	17	21	30	31	31	31						7	13	27
Févr.		8	19	24	29	29	29					3	11	20	28
Mars		7	10	13	27	31	31				1	17	21	26	29
Avril				4	15	30	30			2	10	25	30	30	30
Mai					1	20	29		2	8	26	31	31	31	31
Juin							16		12	24	30	30	30	30	30
Juillet							3	2	24	31	31	31	31	31	31
Août						3	20		3	29	31	31	31	31	31
Sept.						2	28			24	30	30	30	30	30
Octobr.				1	12	29	31				9	29	31	31	31
Nov.				10	25	30	30					18	27	30	30
Déc.				10	31	31	31					7	28	31	31

Le plus grand froid a été de 192 degrés, le 11 Janvier à 7 heures du matin. Baromètre 28. 14, vent d'Eſt, brouillard, enſuite ciel ſerein.

La plus grande chaleur de 108 degrés, a été obſervé le 22 Juillet à 2 heures après-midi. Baromètre 28.10, vent fort du Sud, ciel en partie ſerein.

La

La différence entre ces deux temperatures extrèmes eſt = 84 degrés de Délisle, qui répondent à $44\frac{3}{4}$ degrés de Reaumur.

Le froid moyen; c'eſt à dire la ſomme de toutes les hauteurs thermometriques obſervées le matin & le ſoir, ou avant & après le coucher du Soleil, diviſée par leur nombre, a été.

I. Pour l'année entiere, depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1792 = $149^{0},2$, qui répondent à $\frac{2}{5}$ degré de chaleur d'après la graduation de Réaumur.

II. Pour l'hyver de 1791 à 1792

depuis le 1 Novembre 1791 jusqu'au 1 Mai 1792 = $162^{0},9$, ou $6\frac{1}{3}$ degrés de froid d'après Réaumur.

depuis le 1 Décembre 1791 jusqu'au 1 Avril 1792 = $167^{0},6$, ou $9\frac{2}{5}$ degrés de froid.

III. Pour l'été de 1792.

depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre = $134^{0},4$, ou $8\frac{1}{3}$ degrés de chaleur d'après Réaumur.

depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre = $129^{0},0$, ou $11\frac{1}{4}$ degrés de chaleur.

De même, la chaleur moyenne: c'eſt à dire, la ſomme de toutes les hauteurs thermométriques obſervées à 2 heures après-midi, diviſée par leur ſomme:

I. Pour l'année entiere, depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1792 = $141^{0},7$, ou $4\frac{1}{2}$ degrés de chaleur d'après Réaumur.

II.

II. Pour l'hyver de 1791 à 1792.

depuis le 1 Novembre 1791 jusqu'au 1 Mai 1792 $= 156^0, 0$; ou $3\frac{1}{4}$ degrés de froid

depuis le 1 Décembre 1791 jusqu'au 1 Avril 1792 $= 160^0, 4$; ou $5\frac{1}{2}$ degrés de frod

III. Pour l'été de 1792

depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre $= 127^0, 7$; ou $12\frac{1}{5}$ degrés de chaleur.

depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre $= 122^0, 4$; ou $14\frac{3}{4}$ degrés de chaleur.

Le froid a été en 1792, plus grand que 190^0, en 1 jour

Il a été entre - - - - - -	180 & 190	degrés	en 31 jours
	170 & 180	——	en 18 ——
	160 & 170	——	en 42 ——
& entre	150 & 160	——	en 79 ——

ou bien il a gelé en cette année en 171 jours, & par conséquent il n'a gelé point du tout en 195 jours.

Mais dans l'hyver de 1791 à 1792, le froid a été plus grand que 190^0 en 1 jour: il a ensuite été

entre	180 & 190	degrés	en 31 jours
	170 & 180	——	en 21 jours
	160 & 170	——	en 34 jours
& entre	150 & 160	——	en 89 jours

ainsi il a gelé dans cet hyver en 176 jours, c'est à dire depuis le 25 Septembre 1791, où il avoit commencé à geler, jusqu'au 14 Mai 1792, jour de la dernier gelée, ce qui fait un intervalle de 231 jours; de sorte que dans cet intervalle il n'a gelé point du tout en 55 jours, savoir 3 jours

jours en Septembre depuis le 25^e, 6 jours en Novembre, 4 jours en Mars, 15 jours en Avril & 13 jours jusqu'au 14 Mai.

La Chaleur a été en 1792 plus grande que 110 degrés, en 2 jours:

elle a été entre	120 & 110	degrés	en 39	jours
	130 & 120	——	en 77	jours
	140 & 130	——	en 50	jours
& entre	150 & 140	——	en 84	jours.

Ainsi le Thermomètre a été au dessus du point de congélation en 250 jours; de sorte qu'il a gelé continuellement en 116 jours: savoir 31 en Janvier, 26 en Février, 15 en Mars, 5 en Avril, 2 en Octobre, 12 en Novembre & 25 en Décembre.

Depuis la derniere gelée du 14 Mai, jusqu'au 5 Octobre, où il a recommencé à geler, se sont écoulés 144 jours, & parmi ceux-ci la chaleur a été plus grande que 110 degrés en 2 jours: elle a été

entre	120 & 110	degrés	en 39	jours
	130 & 120	——	en 75	jours
	140 & 130	——	en 25	jours
	150 & 140	——	en 3	jours

3.) Énumération détaillée des jours de grand froid, pour les ſix mois de l'hyver de 1791 à 1792, ou depuis le 1 Novembre 1791 jusqu'au 1 Mai 1792, ce qui fait un intervalle de 182 jours.

Le froid a ſurpaſſé 190° en 1 jour, ſavoir le 11 Janvier.
Le froid a été entre

		jours.
180 & 190	Le 8 — 10. 12 — 16. 23 — 30 Janvier, le 7. 10 — 14. 17. 26 Février, & le 4 — 10 Mars - - - - - - -	31
170 & 180	Le 6. 7. 22 Décembre, le 17. 21. 22. 31 Janvier, le 5. 6. 8. 9. 15. 16. 18 — 20. 25. 28 Février, & le 11. 12. 13 Mars - -	21
160 & 170	Le 2. 4 — 8. 12. 13 Novembre, le 18. 21. 23. 24. 31 Décembre, le 1 — 4. 6. 7. 18 — 20 Janvier, le 1. 21. 22. 27. 29 Février, le 1. 2. 15 Mars, & le 14. 18. 20. 21 Avril - - - - - - - - - - - -	34

4.) Énumeration détaillée des jours de grande chaleur, pour les ſix mois de l'été de 1792, ou depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1792: ce qui fait un intervalle de 184 jours.

La

La chaleur a furpaffé 110^0 degrés en 2 jours, le 20 & 22 Juillet.

Elle a été entre

		jours.
120 & 110	Le 21. 31 Mai, le 1 — 3. 8 — 13. 15. 18. 22 Juin, le 1. 4 — 12. 15 — 19. 21. 23 — 26. 30. 31 Juillet, & le 1. 2. 3 Août. -	39
130 & 120	Le 20. 23. 27 — 30 Mai, le 5 — 7. 14. 16. 17. 19 — 21. 23. 24. 29 Juin, le 2. 3. 13. 14. 27. — 29 Juillet, le 4 — 29 Août, & le 2 — 16. 18. 20 — 27 Septembre - -	75
140 & 130	Le 1 — 4. 7 — 10. 14 — 19. 21. 24 — 26 Mai, le 4. 25 — 28. 30 Juin, le 30. 31 Août, le 1. 17. 19. 28. 30 Septembre, & le 1. 16 — 20. 22 — 24 Octobre - - - -	41

III. Vent.

1.) Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année 1792.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord.	NE.	Est.	SE.	Sud.	SOu.	Ouest.	NOu.
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janv.	4	15	9	3	0	0	11	11	0	1	5	3
Févr.	8	14	6	1	0	1	8	6	0	0	14	0
Mars	10	16	4	1	1	3	2	3	2	1	19	0
Avril	4	11	11	4	3	0	1	3	1	5	13	4
Mai	4	10	12	5	0	0	4	0	8	5	4	10
Juin	4	15	6	5	2	3	5	9	4	2	4	1
Juillet	10	15	6	0	0	2	7	4	3	6	9	0
Août	5	15	10	1	0	11	4	1	2	2	10	1
Sept.	7	7	13	3	0	0	3	10	3	7	6	1
Octob.	7	12	10	2	2	4	8	2	2	6	4	3
Nov.	1	18	9	2	1	1	4	1	1	7	11	4
Déc.	6	20	5	0	1	1	3	9	2	5	6	4
Année 1792.	70	168	101	27	10	26	60	59	28	47	105	31
du 1 Nov. 1791. au 1 Mai. 1792.	38	92	39	13	5	5	41	36	9	10	65	11
du 1 Mai au 1 Nov. 1792.	37	74	57	16	4	20	31	26	22	28	37	16

2.)

2.) Rapport de la force des vents & des quatre plages, pour chaque mois de l'année 1792: tiré du Tableau précédent

Mois.	Degré de Force.	Rapp. des quatre plages			
		Nord	Eſt	Sud	Oueſt.
Janvier	310	2	16	6	7
Février	234	1	11	3	14
Mars	219	2	5	5	19
Avril	340	5	3	5	17
Mai	361	5	4	10	12
Juin	327	4	11	9	6
Juillet	207	1	10	8	12
Août	268	6	10	4	11
Septembre	323	1	8	11	10
Octobre	281	6	11	6	8
Novembre	297	3	5	5	17
Décembre	213	4	8	9	10
Année 1792.	280	40	102	81	143
du 1 Nov. 1791. au 1 Mai 1792.	264	14	61	33	74
du 1 Mai au 1 Nov. 1792.	294	22	54	49	59

3.)

3.) Direction des vents forts

Direction.	Jours & Mois.	Nombre des Jours.
Nord.	le 7 Mars, le 13. 17 Avril - -	3.
NE.	le 6. 8 Mars, le 2. 3. 4. 7 Août, le 1. 2. 27. 28 Oct., le 11. Nov. & le 16 Décembre - - -	12.
Est.	le 11. 12. 16. 19. 26. 27. 28 Janv. le 4. 14. 15. 22. 23. 25 Février, le 6. 18 Juin. le 13. 30 Juillet, le 18. 19 Août, le 4. 5 Oct., le 2 Nov. & le 19 Décembre - -	23.
SE.	le 18. 20 Janv., le 8 Févr., le 2 Avril, le 12. 19. 20. 21. 22 Juin, le 6. 9. 12. 14. 22. 23. 24. 26 Sept., le 15 Oct., & le 1. 22 Décembre - - - -	20.
Sud.	le 26 Mars, le 2. 3. 27. 29. 30. 31 Mai, le 11 Juin, le 22. 23 Juillet, le 25 Sept., le 16 Octobre & le 19 Novembre - - - - -	13.
SOu.	le 5 Janv., le 4. 22. 28. 29 Avril, le 1. 10. 21 Mai, le 1. 13 Juin, le 21 Juillet, le 11. 13. 15. 16 Sept., le 17. 30 Oct., le 5. 8. 24 Novembre - - -	20.

Di-

Direction.	Jours & Mois.	Nombre des Jours.
Oueſt.	le 6, 14 Janv., le 15 Mars, le 10. 16. 23. 27. 30 Avril, le 12. 13 Mai, le 24 Juin, le 9 Juillet, le 8. 22. 29. 30. 31 Août, le 7. 8 Sept., le 20 Oct., le 9. 13. 26 Nov. & le 10 Décembre -	24.
NOu.	le 9. 15. 18 Avril, le 7. 8. 11. 24. 25. 28 Mai, le 1 Sept., le 26 Oct., & le 20. 27 Novembre -	13.

Direction.	Parmi ces vents ſe trouvoient être les plus violens, ceux	Nombre des Jours.
Nord.	du 17 Avril - - - - -	1.
NE.	du 6 Mars & du 11 Novembre -	2.
Eſt.	du 12. 19 Janvier, du 15 Février, & du 5 Octobre - -	4.
SE.	du 12. 20. 22 Juin, du 23. 24 Sept. & du 15 Octobre - -	6.
Sud.	du 2. 3. 29 Mai - - -	3.
SOu.	du 22. 28 Avril, du 10 Mai, du 1 Juin, & du 16 Septembre -	5.
Oueſt.	du 23. 30 Avril, du 24 Juin & du 31 Août - - - - -	4.
NOu.	du 28 Mai & du 27 Novembre -	2.

Reſumé des obſervations ſur les vents.

Les mois les plus ventueux ont été ceux de Mai, d'Avril & de Septembre. Ceux de Juillet, de Décembre & de Mars ont été les plus calmes.

Le

Le vent dominant a été celui de l'Oueſt, & après lui celui de l'Eſt. Le premier a regné le plus aux mois d'Avril, de Mars & de Novembre. Les vents de l'Eſt ont été les plus fréquens en Janvier.

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel. ſerein			Brouillard	Pluie. forte		Neige. forte	
	ſerein	nuages.	couvert.		forte	petite	forte	petite
	jours.	jours	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janvier.	5	18	8	8			1	10
Février.	9	10	10	9		1	2	8
Mars.	9	13	9	7		6		7
Avril.	9	15	6	1		8	1	4
Mai	9	20	2		2	12	1	1
Juin.	7	11	12		9	9		
Juillet	13	15	3	1	4	5		
Août	1	23	7	2	4	13		
Septembre	5	19	6	6	3	8		
Octobre	3	16	12	2	4	9		8
Novembre	3	9	18	3	3	10		11
Décembre	0	5	26	2		2	1	14
Année 1792.	73	174	119	41	29	83	6	63
					112		69	
du 1 Nov. 1791. au 1 Mai 1792.	33	79	70	34	3	27	9	57
					30		66	
du 1 Mai au 1 Novembr. 1792.	38	104	42	11	26	56	1	9
					82		10	

Il a neigé pour la derniere fois le 13 Mai: il a recommencé à neiger le 2 Octobre, après un intervalle de 142 jours.

L'intervalle entre la premiere neige du 16 Octobre 1791, & de la derniere du 13 Mai 1792 est de 210 jours.

Le nombre des jours sereins a été le plus grand en Juillet, & celui des jours couverts l'a été en Décembre, où il n'y avoit pas même un seul jour de ciel entièrement serein. Les brouillards ont été les plus fréquens en Février. En Mai & en Juin il n'y en avoient point du tout.

Il a plu le plus en Juin & ensuite en Août. Il a neigé le plus en Décembre.

Il n'a grélé que 2 fois le 12 Mai & le 2 Octobre.

Le nombre des orages a été 13, le 10. 27 Mai, le 13. 18. 19 Juin, le 13. 23. 24. 25. 27. 31 Juillet, & le 24. 25 Août. Ceux du 25 Juillet & du 24 Août ont été les plus forts. Il a fait des éclairs de nuit le 26 Février & le 23 Septembre.

Je n'ai observé que deux aurores boréales le 27 Août & le 13 Octobre: mais j'ai vu 8 parhélies le 10. 12. 22 Janvier, le 12. 29 Février, le 10 Novembre & le 17. 18 Décembre. Et un paraséléne le 5 Mars.

La riviere Néva débacla le 11 Avril, 126 jours après sa troisieme prise en 1791. Baromètre 28. 25, Thermomètre 145^d, ciel serein & vent de l'Ouest. La riviere charia des glaces le 12 — 21. & le 24 Avril.

La riviere fut reprise deux fois 1.) le 5 Novembre matin par un froid de 157^d. Barometre 28, 45 à 28, 3c, Vent fort du SOu., ciel couvert, verglas & ensuite pluie; après avoir charié des glaces depuis le 3 Novembre. Mais elle ne resta prise que pendant quelques heures après quoi elle debacla & charia des glaces jusqu'au 22 Novembre, où elle fut prise pour la seconde fois, ainsi 225 jours après sa debacle en printemps. Le froid au moment de cette seconde prise fut de 168 à 162 degrés de Délisle, Baromètre 28. 14, vent du SOu., ciel serein, ensuite couvert.

EX.

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES FAITES À MOSCOU.

ANNÉE MDCCXCII.

Par

M. le Confeiller de Colléges & Chevalier Stritter.

I. Baromètre.

Hauteurs extrèmes, Variation, Milieu & Hauteur moyenne pour chaque mois de l'année 1792.

Mois.	Au plus haut P. cent.	Au plus haut jour & heure.	Au plus bas P. cent.	Au plus bas jour & heure.	Variation cent.	Milieu P. cent.	Hauteur moyenne P. cent.
Janvier	27. 79	le 16 à 10 h. s.	26. 58	le 7 à 2 h. s.	121	27. 18	27. 30
Février	27. 84	le 28 à 2 h. s.	26. 84	le 10 à 10 h. s.	100	27. 34	27. 35
Mars	27. 71	le 31 à 10 h. s.	26. 71	le 6 à 2 h. s.	100	27. 21	27. 30
Avril	27. 75	le 2 m. & s.	26. 79	le 19 à 10 h. s.	96	27. 27	27. 49
Mai	27. 63	le 31 m. & s.	26. 88	le 11 à 6 h. m.	75	27. 26	27. 34
Juin	27. 75	le 1 à 6 h. m.	27. 04	le 17 à 10 h. s. le 15 & le 29.	71	27. 39	27. 38
Juillet	27. 54	le 20 à 6. h. m.	27. 04	le 2 m. & s.	50	27. 29	27. 28
Août	27. 50	le 1. 2 & 3 m.	26. 42	le 30 à 6 h. m.	108	26. 96	27. 85
Septembre	27. 21	le 29 à 6 h. m.	26. 67	le 1 à 6 h. m.	54	26. 94	27. 95
Octobre	27. 21	le 22 m. & s.	26. 83	le 27. 28 & 29.	38	27. 02	27. 04
Novembre	27. 71	le 23 & le 24.	26. 67	le 15. 16 & 17.	104	27. 19	27. 18
Décembre	27. 67	le 30 & le 31.	26. 42	le 6 à 2 h. s.	125	27. 05	27. 46
An. 1792	27. 84	Février.	26. 42	Août & Décemb.	142	27. 13	27. 38

 II.

II. Thermomètre.

Hauteurs extrêmes, & état moyen du froid & de la chaleur, pour chaque mois de l'année 1792.

Mois.	Hauteurs Extremes. Au plus bas Degré	jour & heure.	Au plus haut Degré.	jour & heure.	Milieu Degré.	Etat moyen. Froid moyen Degré.	Chaleur moyenne Degre.
Janvier	202	le 17 à 6 h. m.	152	le 4. 6. 7 à 2 h. s.	177	179	159
Février	185	le 15 & 27 à 6 h. m.	146	le 23 à 2 h. s.	165	167	157
Mars	197	le 8 à 6 h. m.	141	le 28 & 30 à 2 h. s.	169	164	151
Avril	162	le 15 à 6 h. m.	119	le 26 à 2 h. s.	141	147	139
Mai	147	le 2 à 6 h. m.	108	le 23 à 2 h. s.	127	138	124
Juin	133	le 6 à 6 h. m.	106	le 11 à 2 h. s.	120	128	118
Juillet	133	le 31 à 6 h. m.	105	le 22 à 2 h. s.	119	126	112
Août	142	le 8 à 6 h. m.	110	le 21 à 2 h. s.	126	132	120
Septembre	143	le 26 à 6 h. m.	114	le 19 à 2 h. s.	129	133	120
Octobre	164	le 30 à 6 h. m.	133	le 1 à 2 h. s.	149	149	144
Novembre	172	le 12 à 10 h. s.	139	le 4 à 2 h. s.	155	157	151
Décembre	175	le 3 à 10 h. s.	146	le 29 à 2 h. s.	161	161	156
An. 1792	202	En Janvier.	105	En Juillet.	153	148	138

h. m. signifie *heure du matin* ou *avant midi.*

h. s. signifie *heure du soir* ou *aprés midi.*

m. & s. toute la journée.

Le

Le froid moyen depuis le 1 Novembre 1791 jusqu'au 1 Mai 1792 a été de - - - - - 162$^{\partial}$.

& depuis le 1 Mai 1792 jusqu'au 1 Novemb. 1792 - 134.

La chaleur moyenne depuis le 1 Novembre 1791 jusqu'au 1 Mai 1792 a été de - - - - 152.

& depuis le 1 Mai 1792 jusqu'au 1 Novemb. 1792 - 123.

La derniere gelée de 153° a été obfervée le 23 Avril, à 6 heures du matin.

Il a recommencé à geler le 11 Octobre, le froid ayant été à 6 heures du matin de 152$^{\partial}$.

L'intervalle entre ces deux époques eft de 171 jours.

III. Vent.

Mois.	Calme ou Vent doux. jours.	Vent fort. jours.	Vent très-fort. jours.
Janvier	18	6	7
Février	11	13	5
Mars	15	13	3
Avril	9	11	10
Mai	3	18	10
Juin	5	15	10
Juillet	4	20	7
Août	1	15	15
Septembre	8	14	8
Octobre	4	21	6
Novembre	7	19	4
Décembre	8	10	13
An. 1792.	93 jours.	175 jours.	88 jours.

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel				Pluie		Neige		Grêle
	ſerein	demi-couvert	couvert	Brouillard	forte	petite	forte	petite	
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janvier	5	7	19				4	15	
Février	3	6	20			2	2	16	
Mars	1	8	22			2	3	12	
Avril	1	9	20		1	7	3	7	
Mai	2	14	15		3	9			1
Juin	1	4	25		8	18			2
Juillet	4	12	15	1	9	11			1
Août	0	11	20		9	10			1
Septembre	9	13	8		1	4			
Octobre	0	1	30	2	5	8		12	
Novembre	2	6	22	1	1	10	2	17	
Décembre	0	1	30	5		2	4	20	
An. 1792	28	82	246	9	37	83	18	99	5

La

La derniere neige tomba le 23 Avril, & il recommença à neiger le 3 d'Octobre.

L'intervalle entre cette derniere & premiere neige eſt de 163 jours.

Il a tonné 19 fois, le 27 Avril, le 14. 16. 17. 19. 20. 24. 28 Juin, le 2. 5. 16. 23. 25. 26. 27. 31 Juillet, le 20. 29 Août & le 17 Septembrc.

Il n'y a eu qu'une aurore boréale d'obſervée, le 2 Décembre: 2 parhélies le 12 & 25 Janvier, & 3 paraſelénes le 12. 31 Janvier & le 3 Décembre.

2.

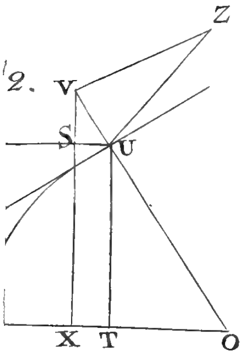


Fig. 3.

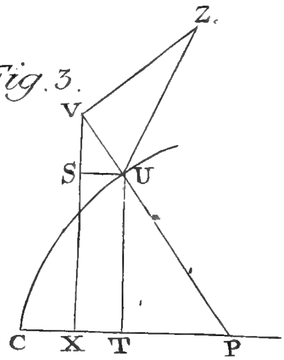


Fig 6.

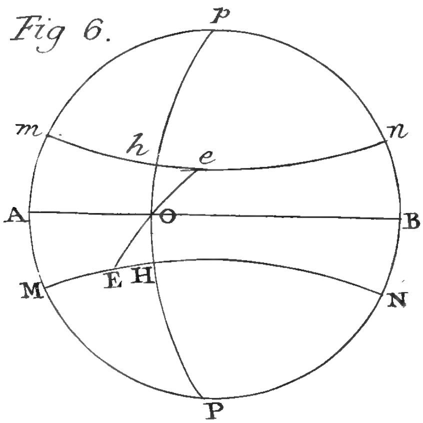


Fig. 8.

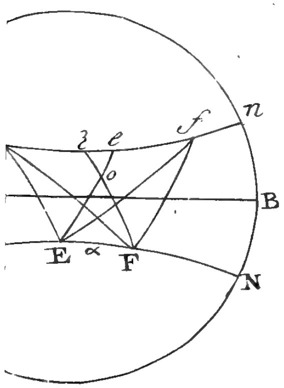


Fig. 9.

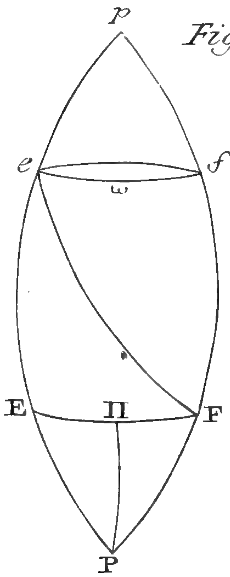


Fig 1

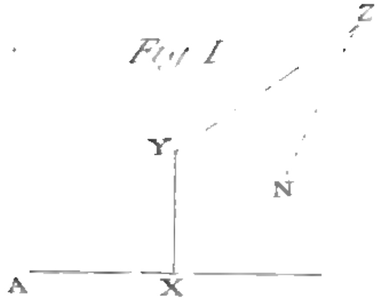


Fig. 2.

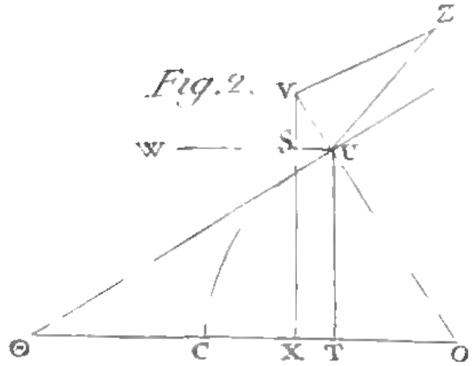


Fig 3

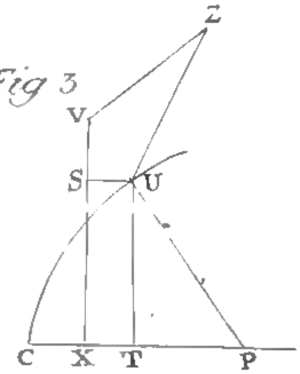


Fig 4

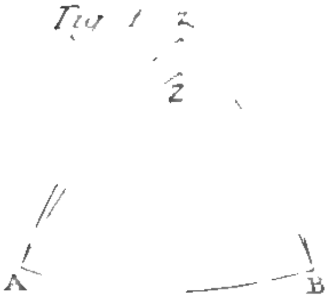


Fig 5

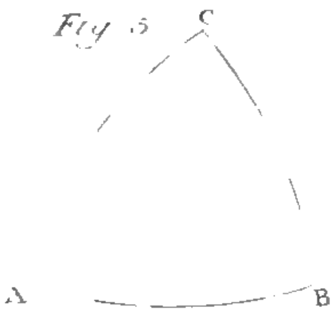


Fig 6

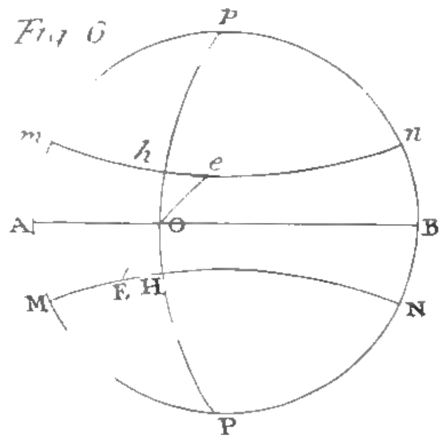


Fig. 7.

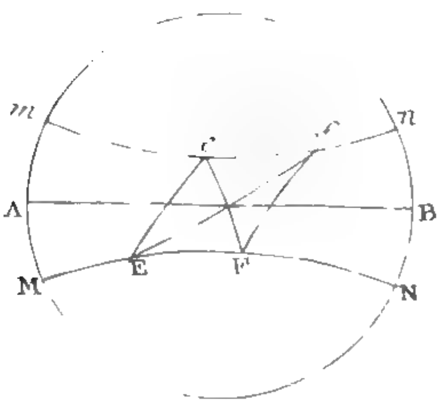


Fig 8

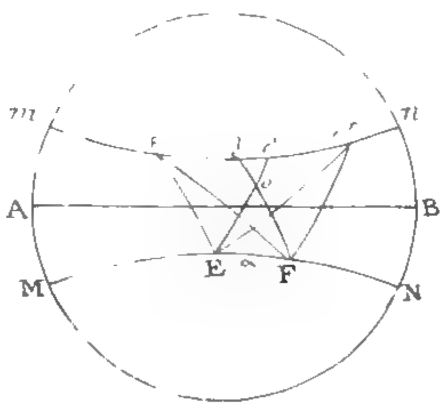
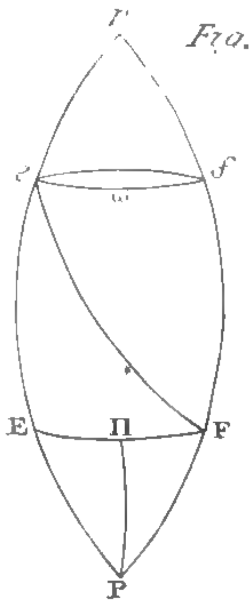


Fig. 9.



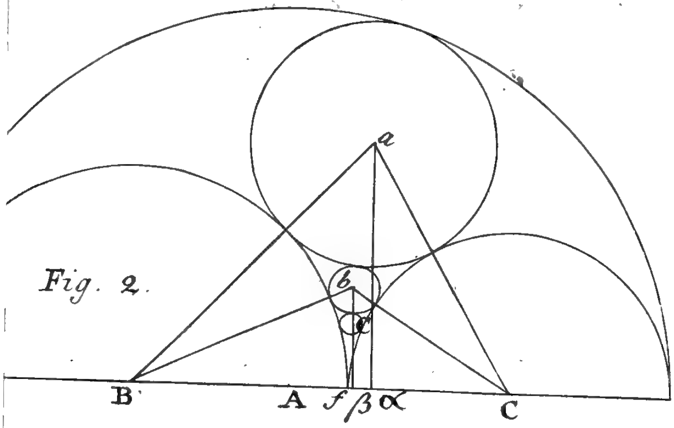


Fig. 2.

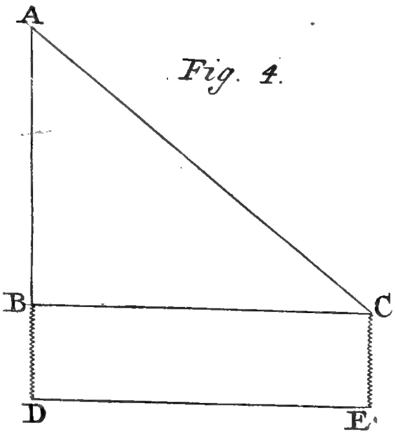


Fig. 4.

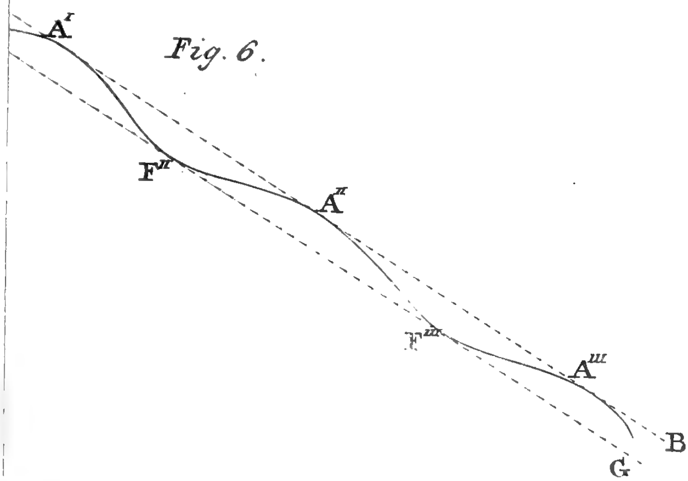


Fig. 6.

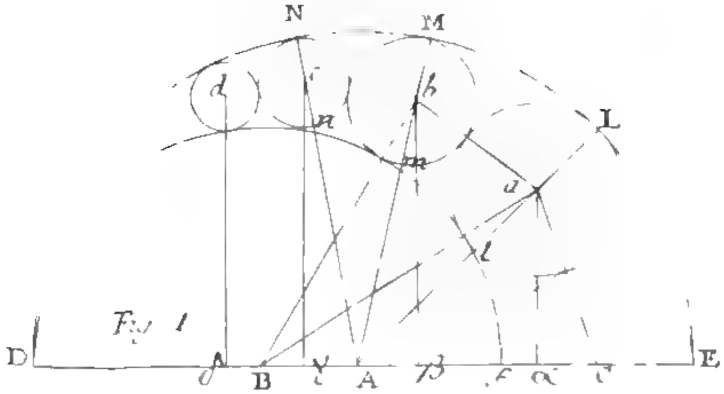


Fig 1
N
M
L
D
B
A
E

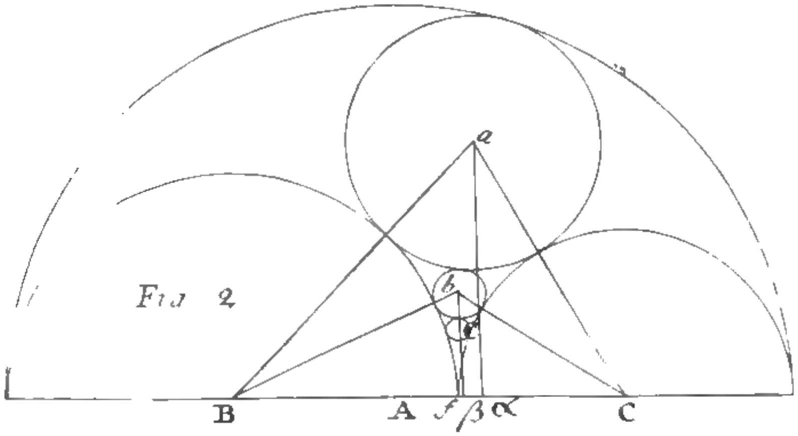


Fig 2
a
b
B
A
C

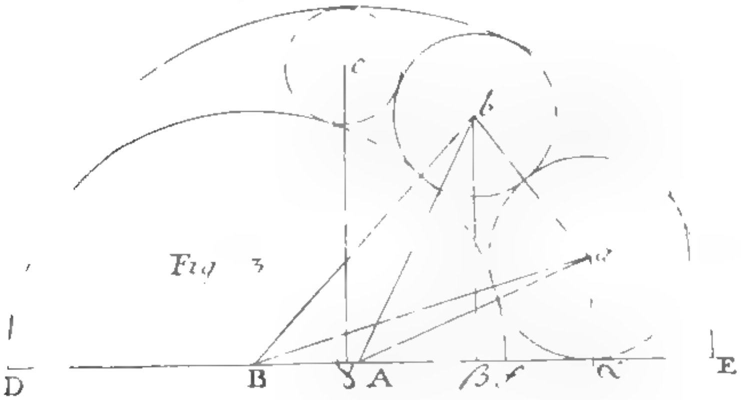


Fig 3
D
B
A
E

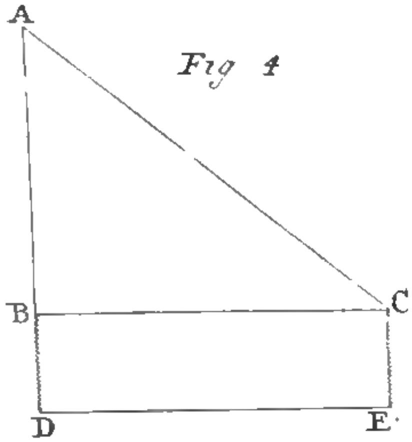


Fig 4
A
B
C
D
E

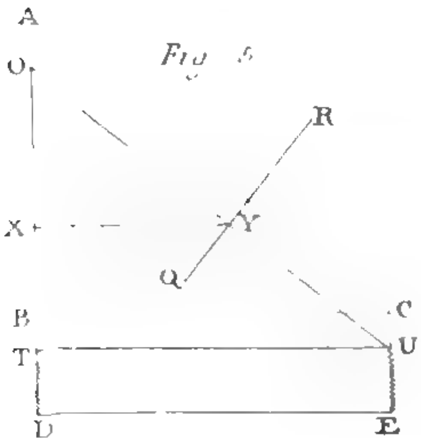


Fig 5
A
O
R
X
Y
Q
B
C
T
U
D
E

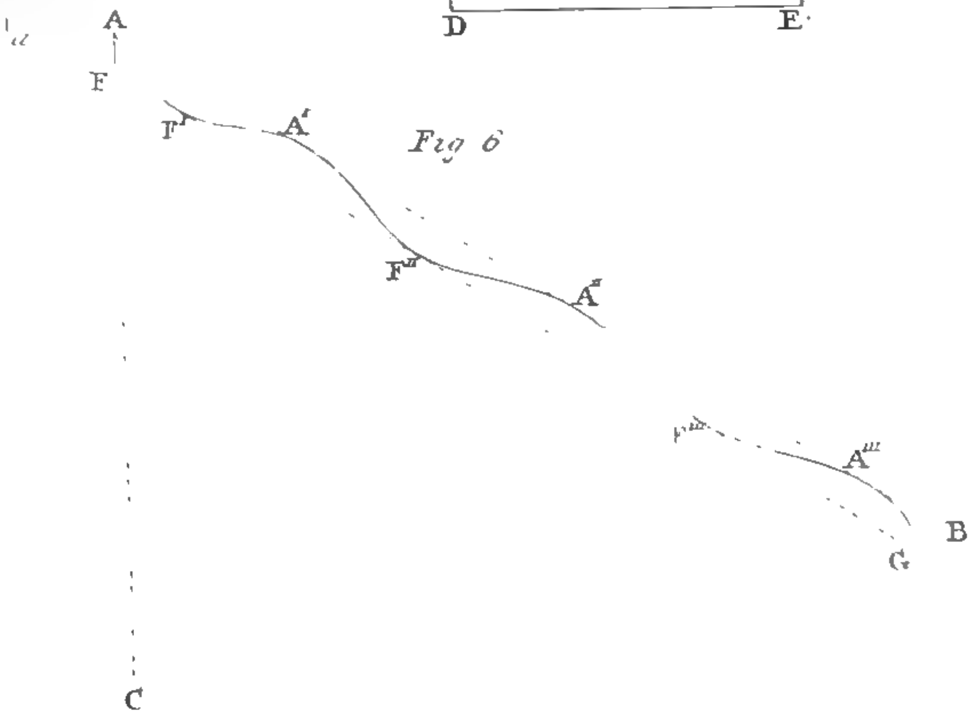


Fig 6
A
F
C
B
G

Fig. 2.

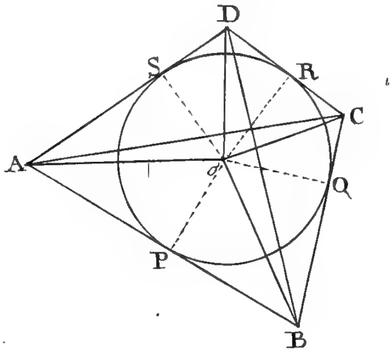


Fig 4

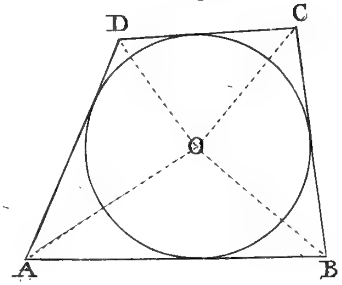


Fig 6

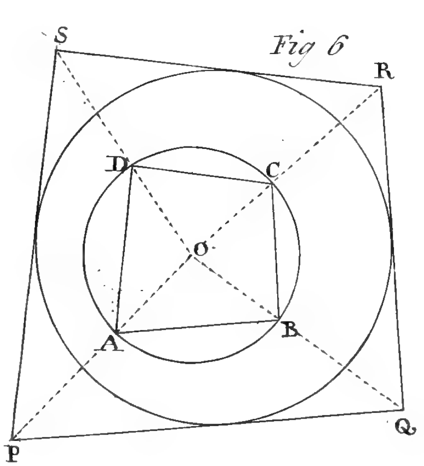


Fig 1

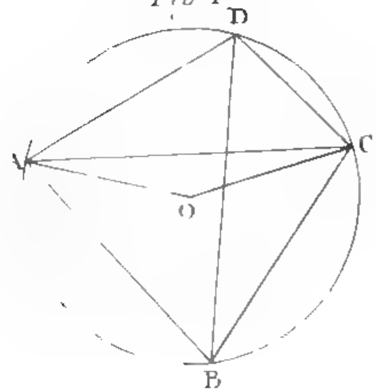


Fig 2

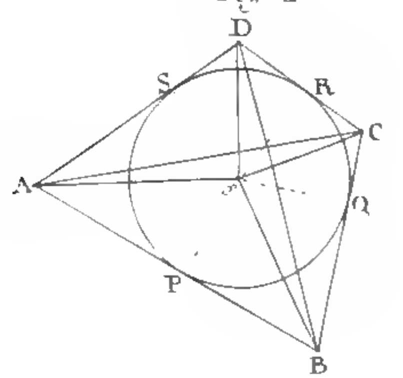


Fig 3

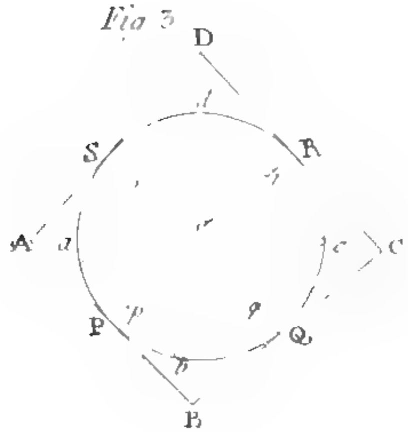


Fig 4

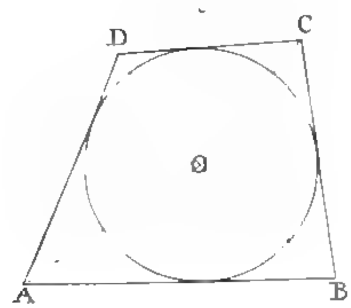
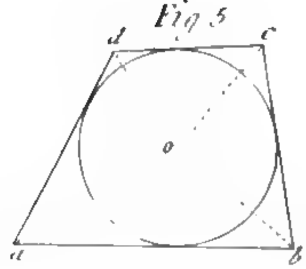


Fig 5



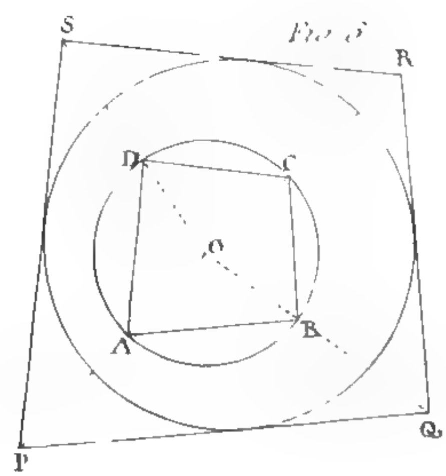


Fig. 1.

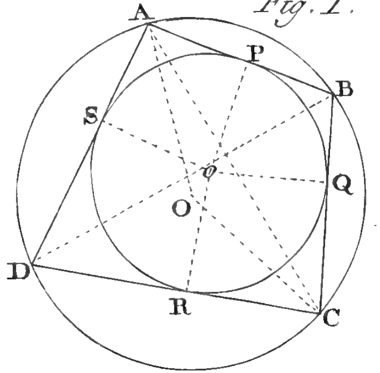


Fig. 2.

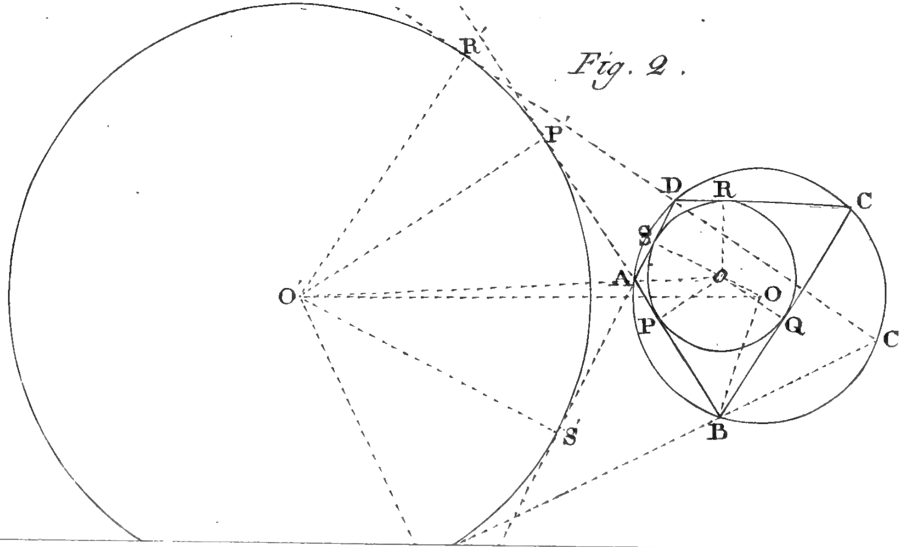


Fig. 1

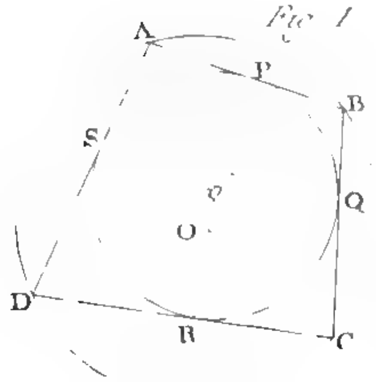


Fig. 2

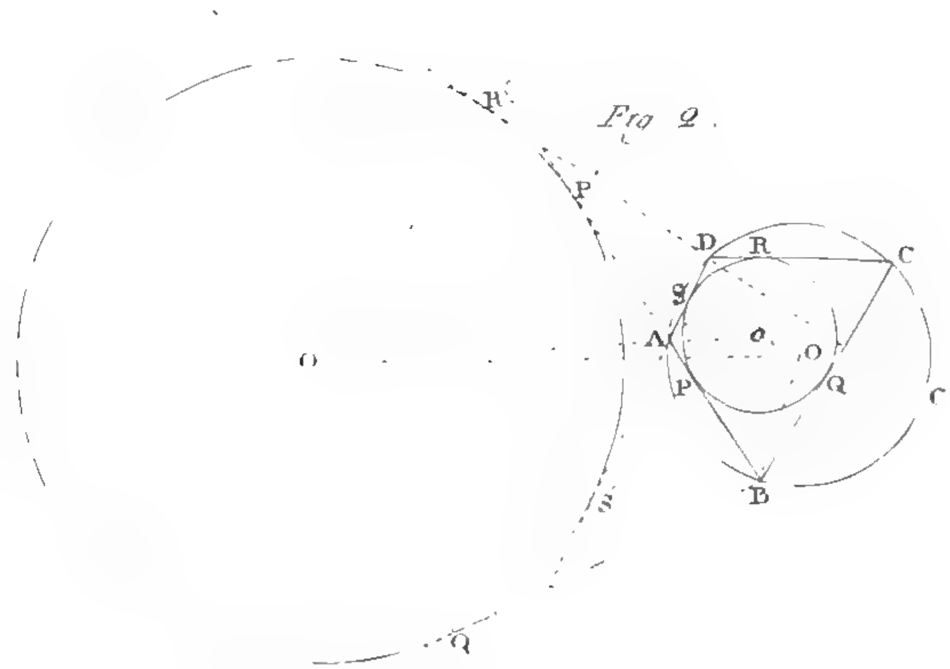


Fig. 3

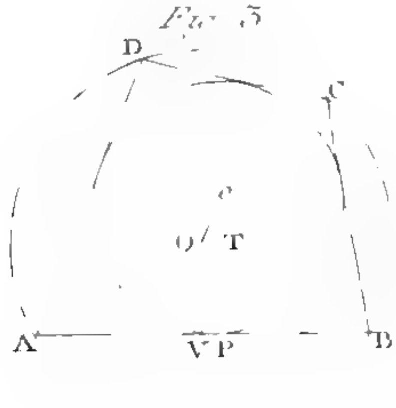


Fig. 4

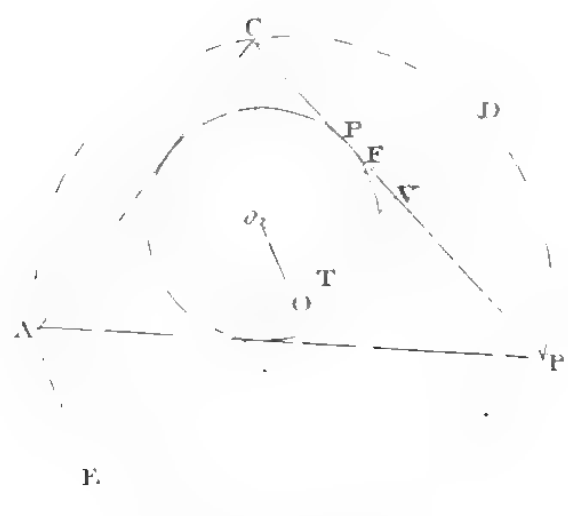
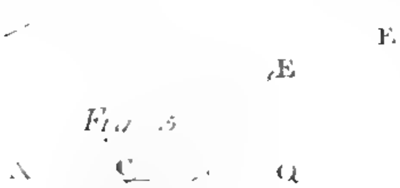
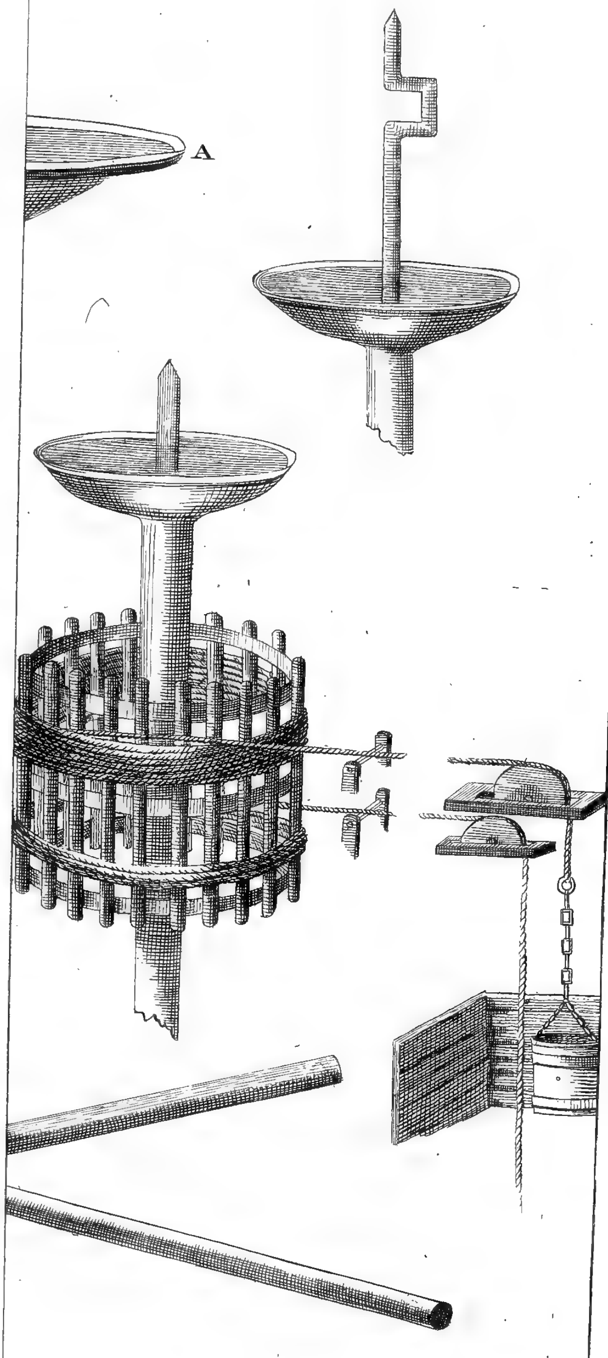
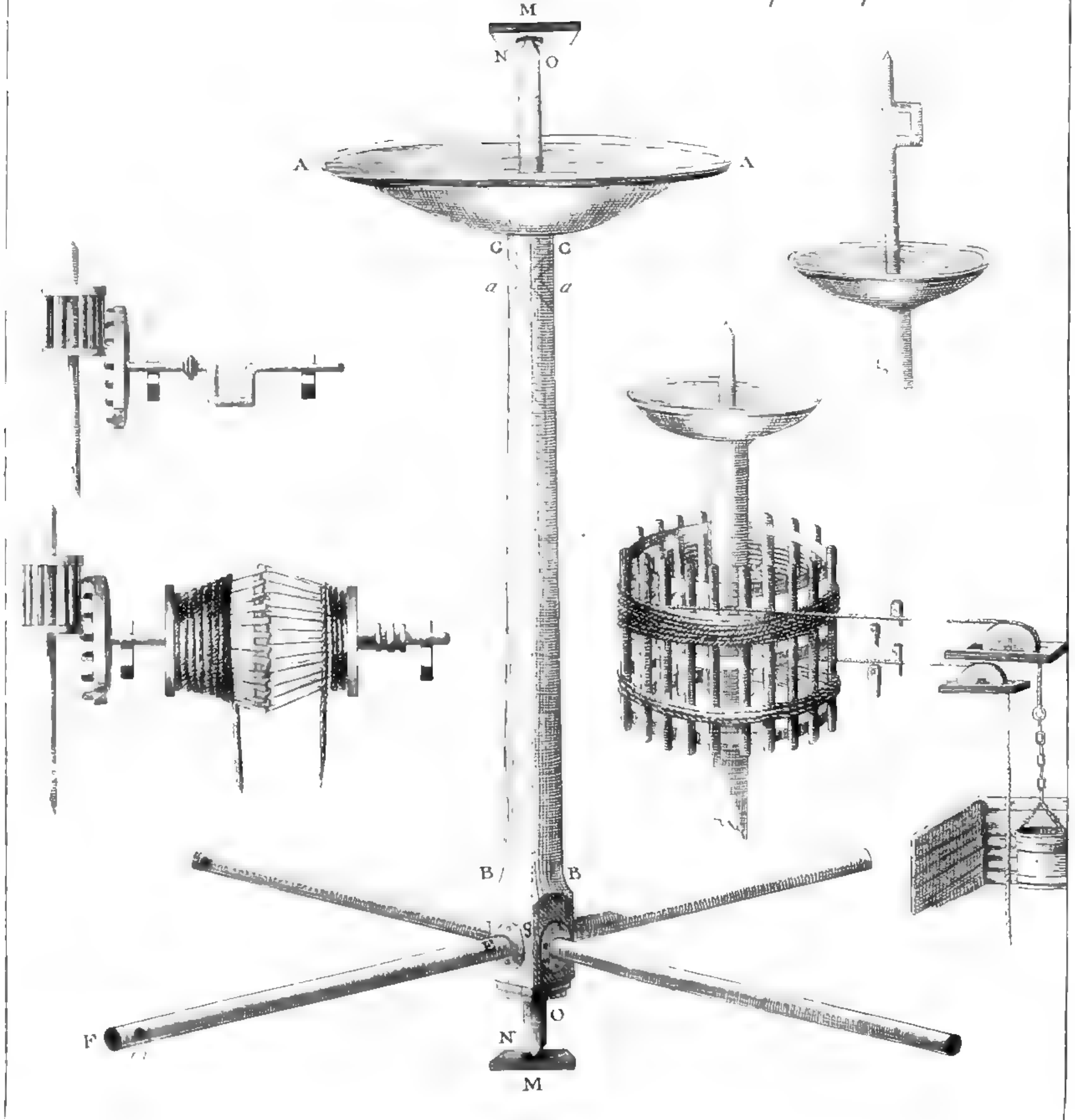
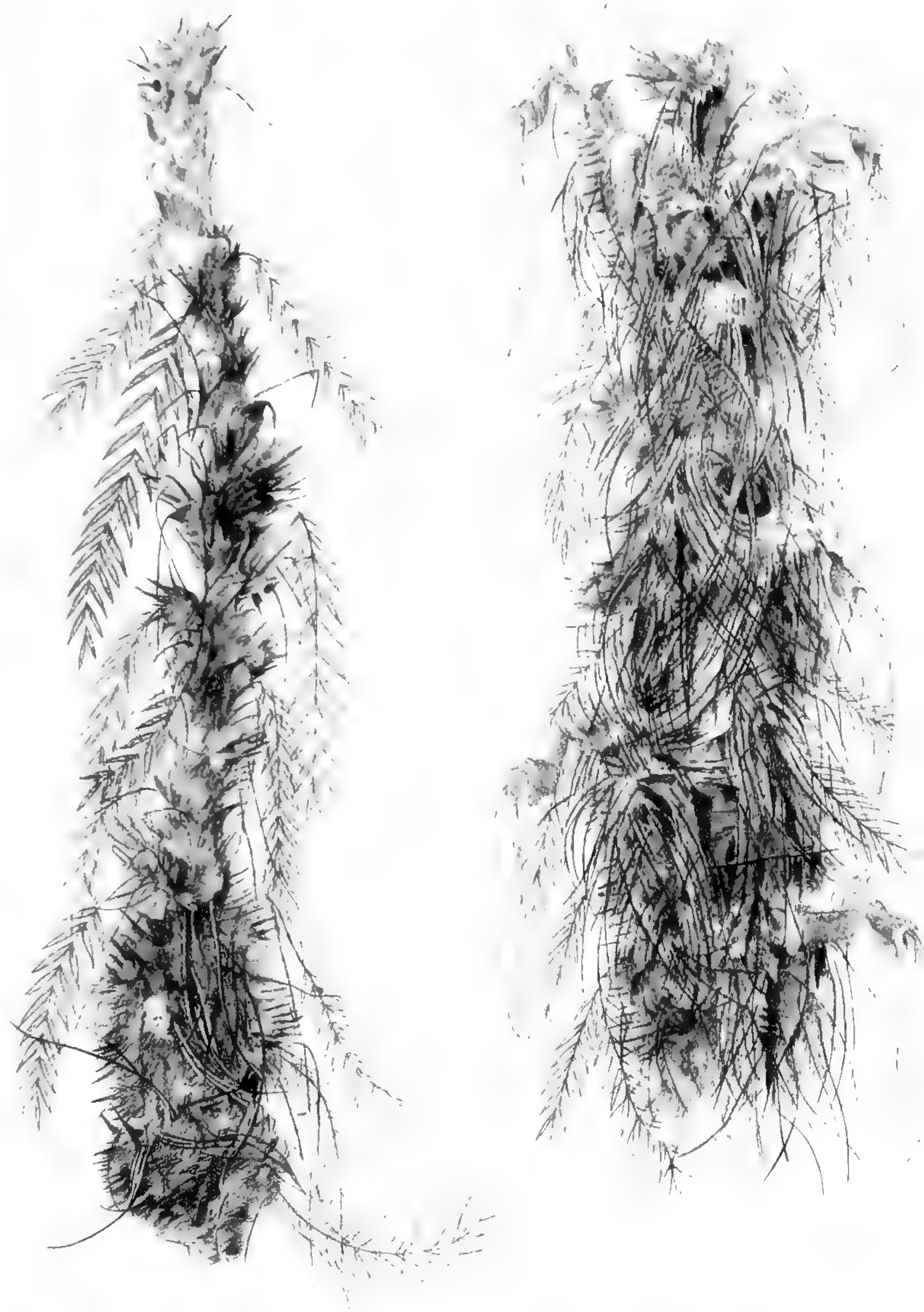


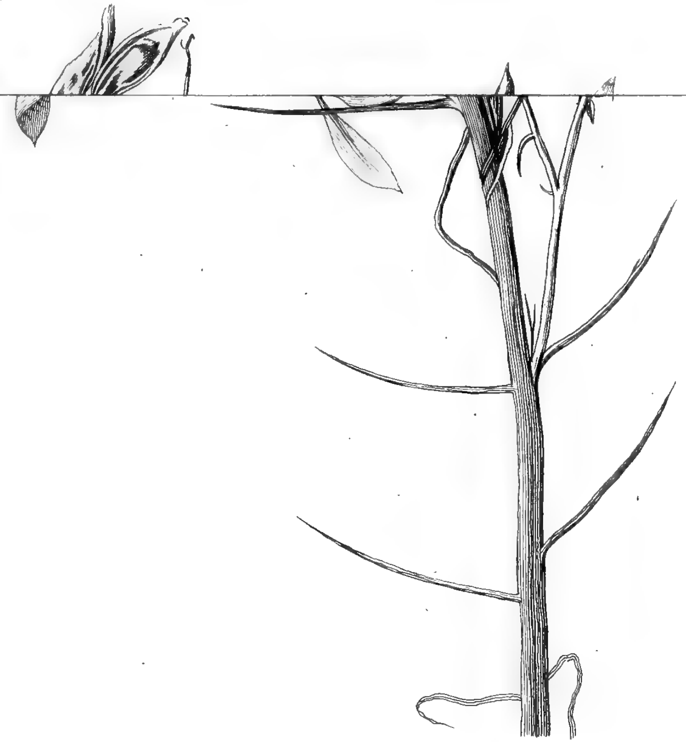
Fig. 5




A


M
N
O
A
A
G
G
a
a
B
B
S
E
F
O
N
M





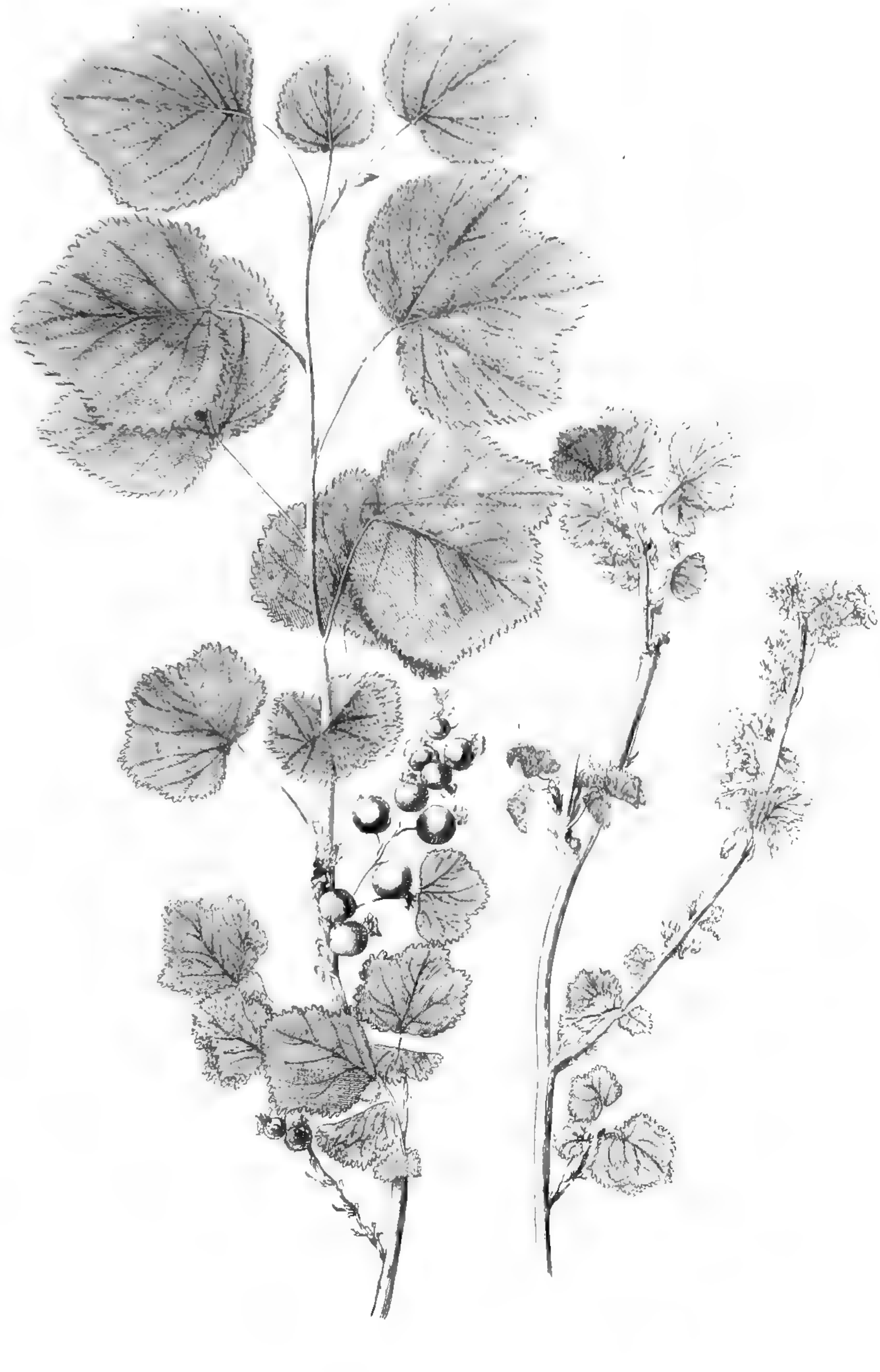


Fig. 3.

Fig. I.

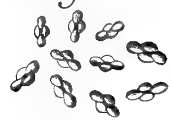


Fig. 2.

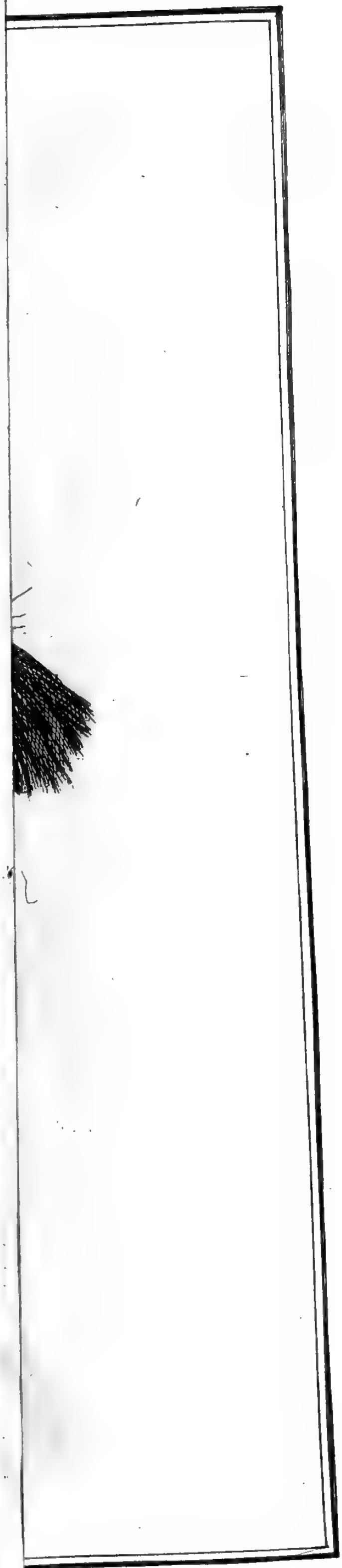
Fig. 5

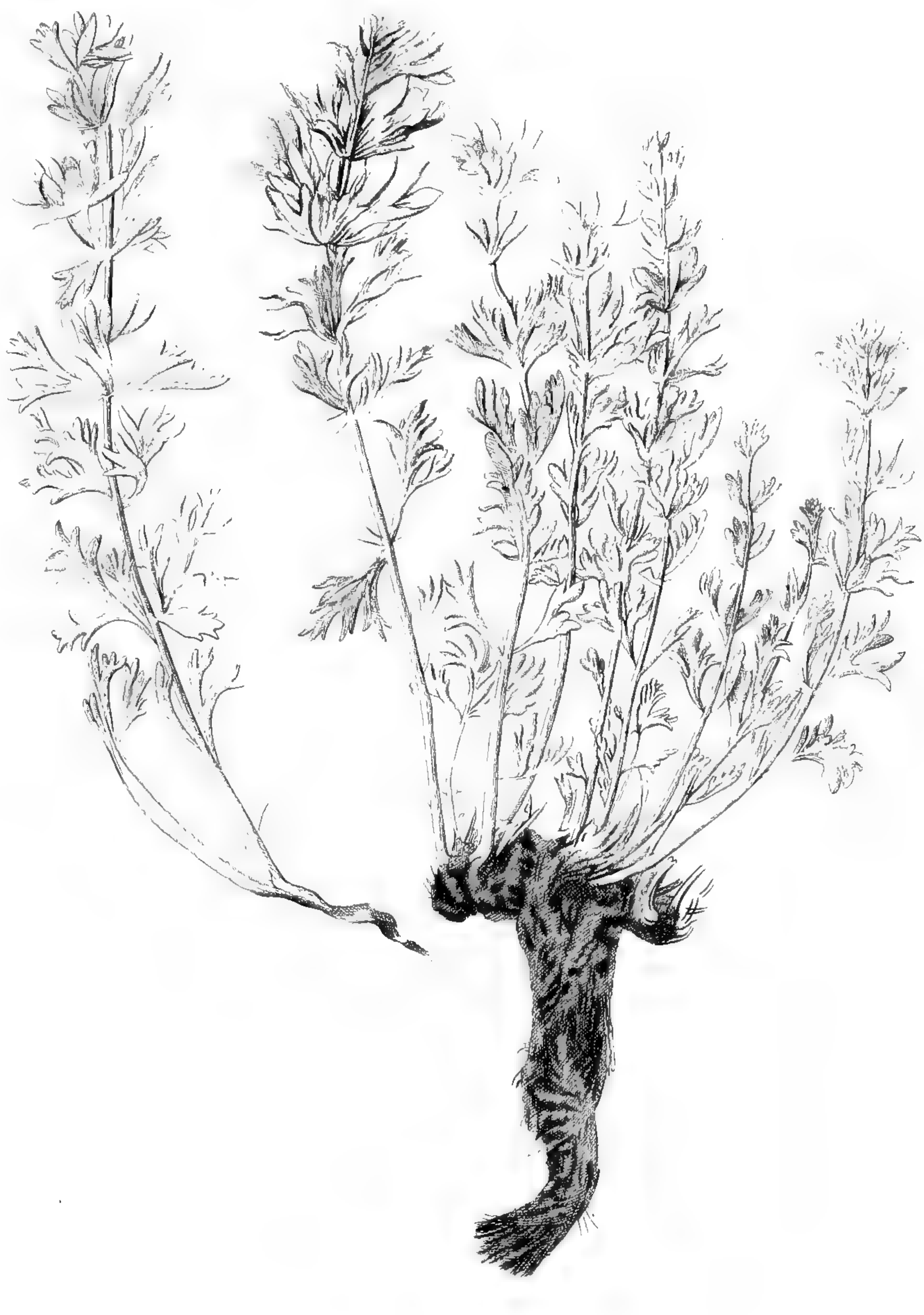
Fig. 4.

Fig. 3

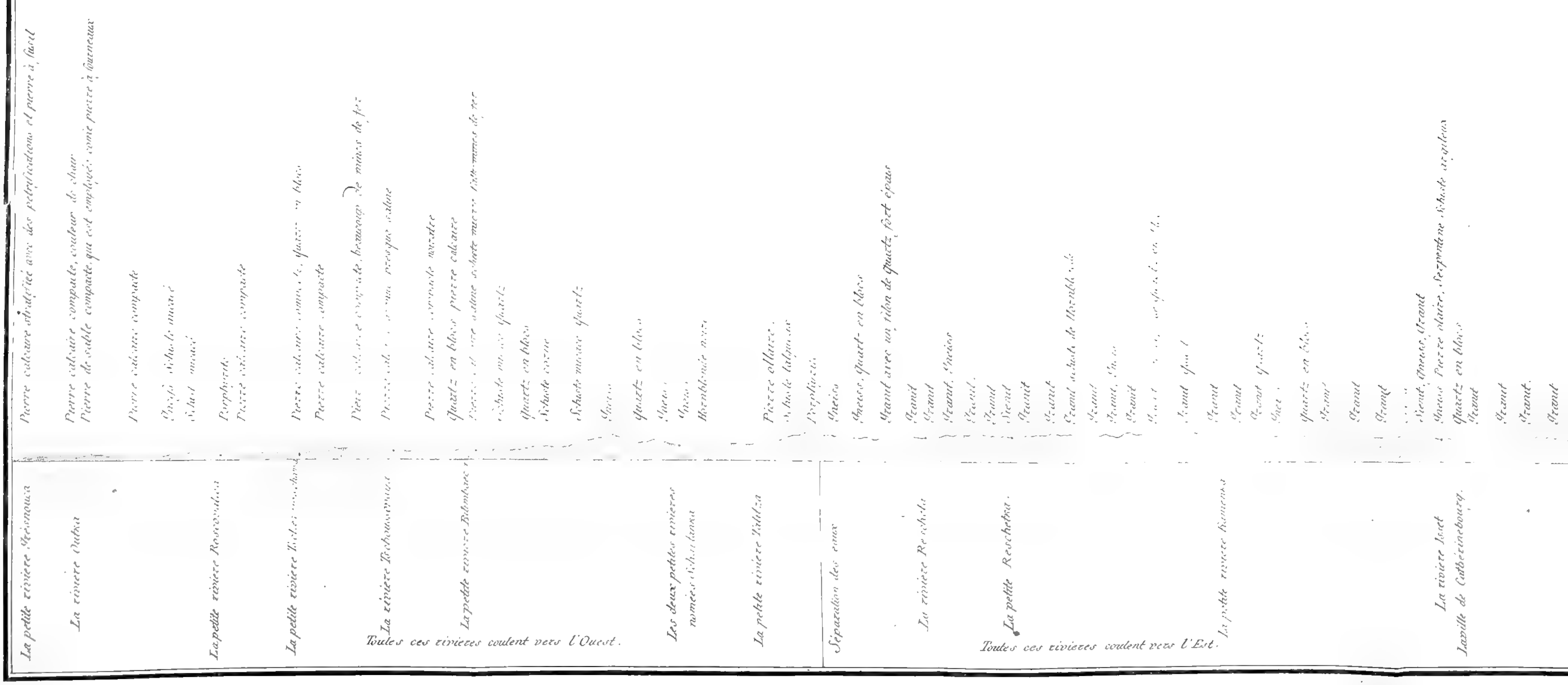
Fig. I

Fig. 2.

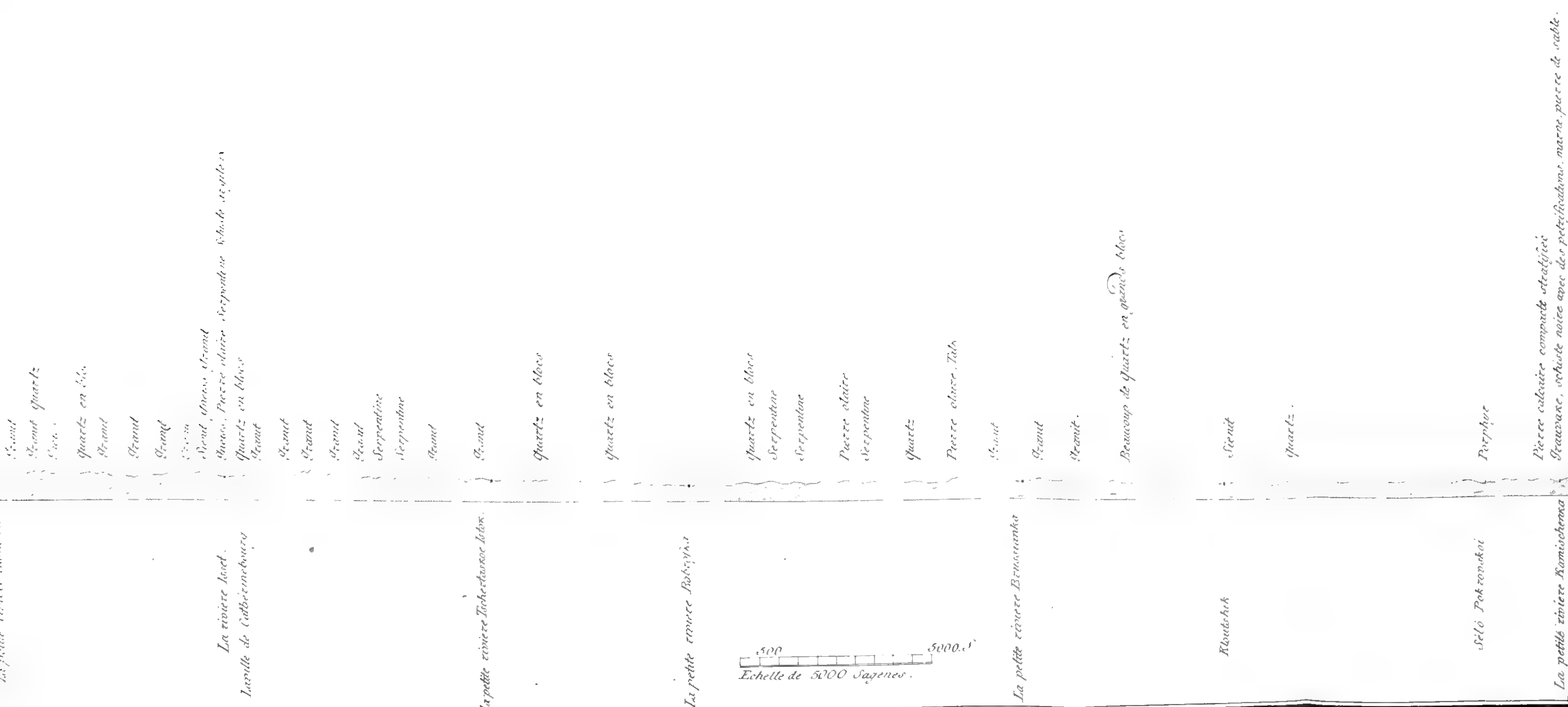




Profil
de la Chaine des montagnes Oura
par sa largeur de l'Ouest ver



Profil
...haine des montagnes Ouraliennes
...sa largeur de l'Ouest vers l'Est.



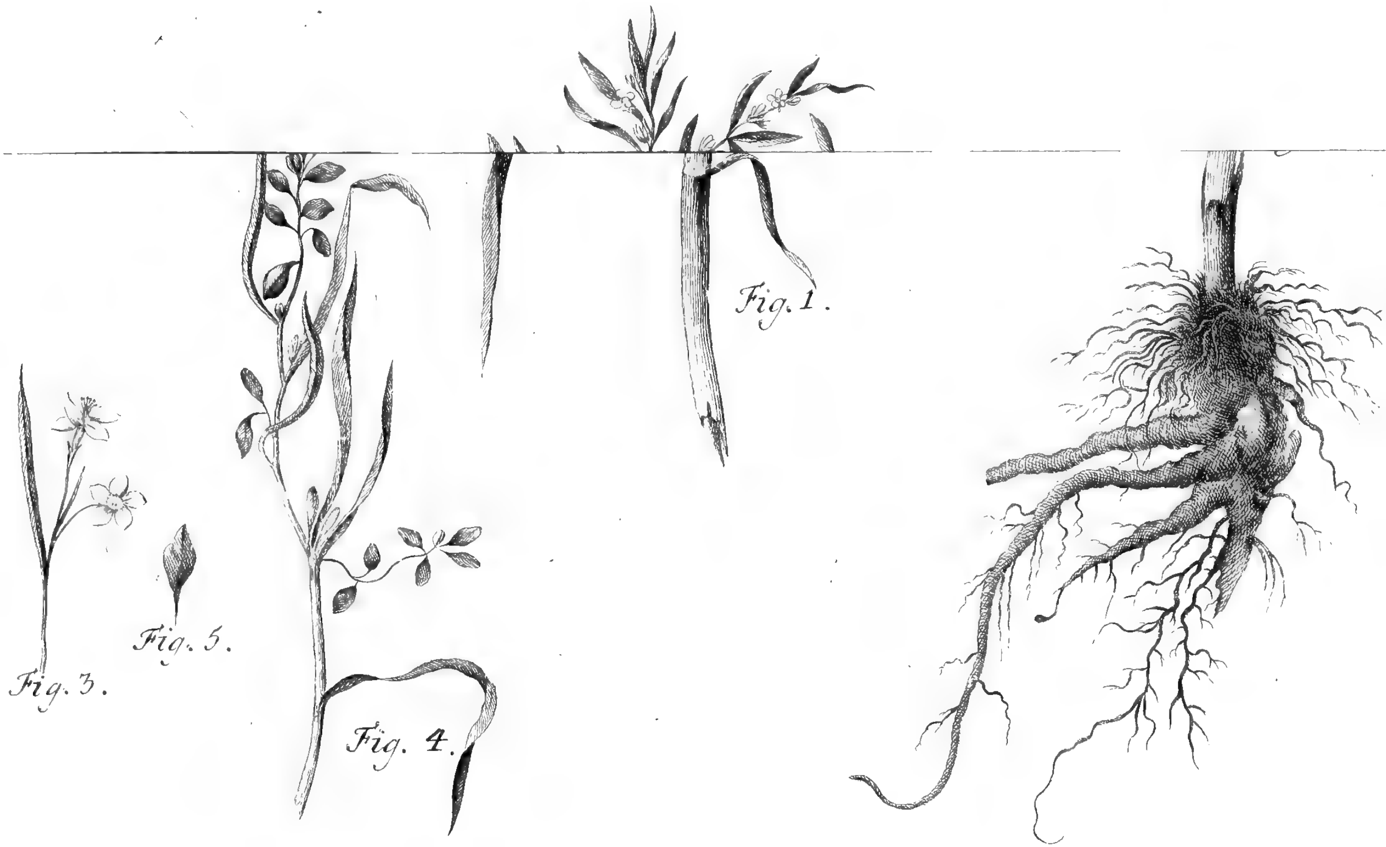


Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 4.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.