NOVA ACTA

ACADEMIAE CAESAREAE LEOPOLDINO-CAROLINAE GERMANICAE
NATURAE CURIOSORUM.

TOMUS LXXXVI.

CUM TABULIS XXIX.

Abhandlungen

der

Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

86. Band.

Mit 29 Tafeln.

Halle, 1906.
Buchdruckerei von Ehrhardt Karras in Halle a. S.

Für die Akademie in Commission bei W. Engelmann in Leipzig.

NOVA ACTA

ACADEMIAE CAESAREAE LEOPOLDINO-CAROLINAE GERMANICAE
NATURAE CURIOSORUM.

TOMUS LXXXVI.

CUM TABULIS XXIX.

Abhandlungen

der

Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

86. Band.

Mit 29 Tafeln.

Halle, 1906.
Buchdruckerei von Ehrhardt Karras in Halle a. S.

Für die Akademie in Commission bei W. Engelmann in Leipzig.

Seiner Majestät

Wilhelm II.

Deutschem Kaiser und Könige von Preussen

ihrem hohen Schirmherrn

dem erhabenen Gönner und Beförderer aller wissenschaftlichen Arbeit
des deutschen Volkes

widmet die

Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie
der Naturforscher

diesen sechsundachtzigsten Band ihrer Abhandlungen

durch den Präsidenten

Dr. **Albert Wangerin.**

Inhalt des LXXXVI. Bandes.

Vorstand der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

Gegründet am 1. Januar 1652. Deutsche Reichsakademie seit dem 7. August 1687.

Präsidium.

A. Wangerin in Halle a. S., Präsident.

J. Volhard in Halle a. S., Stellvertreter.

Adjunkten.

I. Kreis: **J. Hann** in Wien;
E. Mach in Wien;
G. Stache in Wien.

II. Kreis: **E. Wiedemann** in Erlangen;
R. Hertwig in München.

III. Kreis: **K. B. Klunzinger** in Stuttgart.

IV. Kreis: **A. Weismann** in Freiburg.

V. Kreis: **G. A. Schwalbe** in Strassburg.

VI. Kreis: **R. Lepsius** in Darmstadt.

VII. Kreis: **E. Strasburger** in Bonn.

VIII. Kreis: **M. H. Bauer** in Marburg.

IX. Kreis: **E. H. Ehlers** in Göttingen.

X. Kreis: **K. Brandt** in Kiel.

XI. Kreis: **J. Volhard** in Halle.

XII. Kreis: **E. Haeckel** in Jena.

XIII. Kreis: **C. Chun** in Leipzig;
F. Zirkel in Leipzig.

XIV. Kreis: **A. Ladenburg** in Breslau.

XV. Kreis: **C. A. Jentzsch** in Berlin;
R. Credner in Greifswald.

Sektionsvorstände und deren Obmänner.

I. Mathematik und Astronomie:

J. Lüroth in Freiburg, Obmann;
R. Helmert in Potsdam;
G. Cantor in Halle.

II. Physik und Meteorologie:

G. B. von Neumayer in Neustadt a. H., Obmann;
E. Riecke in Göttingen;
E. Mach in Wien.

III. Chemie:

O. Wallach in Göttingen, Obmann;
H. Landolt in Berlin;
J. Volhard in Halle.

IV. Mineralogie und Geologie:

F. Zirkel in Leipzig, Obmann;
H. Credner in Leipzig;
W. Branco in Berlin.

V. Botanik:

H. G. A. Engler in Dahlem-Steglitz bei Berlin, Obmann;
S. Schwendener in Berlin;
Graf zu Solms-Laubach in Strafsburg.

VI. Zoologie und Anatomie:

F. E. Schulze in Berlin, Obmann;
E. H. Ehlers in Göttingen;
M. Fürbringer in Heidelberg.

VII. Physiologie:

C. von Voit in München, Obmann;
S. Exner in Wien;
W. Engelmann in Berlin.

VIII. Anthropologie, Ethnologie und Geographie:

G. C. Gerland in Strafsburg, Obmann;
A. Penck in Berlin;
J. Ranke in München.

IX. Wissenschaftliche Medizin:

E. von Leyden in Berlin, Obmann;
W. O. von Leube in Würzburg;
H. Waldeyer in Berlin.

NOVA ACTA.
Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher
Band LXXXVI. Nr. 1.

Über die gleicheckig-gleichflächigen, diskontinuierlichen und nichtkonvexen Polyeder.

Von

Prof. Dr. Max Brückner.
Oberlehrer am Gymnasium zu Bautzen.

—

Mit 29 Tafeln Nr. I—XXIX.

Eingegangen bei der Akademie am 1. September 1905.

HALLE.
1906.
Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.

Inhalt.

1*

Seite

IV. Kapitel. Die Polyeder des Dyakishexekontaedertypus.

§ 1. Die gleichflächigen und die gleicheckigen Polyeder erster Art des Dyakishexekontaedertypus.

Berichtigung.

In Note IX S. 339 heissen die drei letzten Zahlen der Spalte Nr. 2: 1,8089; 18,719 und 4,4189.

In Note X S. 340 sind die Werte von $B_{15}G_5$ für Nr. 1, 2, 6 und 8 die folgenden: 1,9169; 1,3331; 8,2352 und 7,8064. — B_1B_{15} für Nr. 1 ist 3,2392.

§ 3. Die Stephanoide und ihre Gruppierungen im Doppelpyramidentypus.

III. Kapitel

§ 1. Die gleichflä

§ 2. Die Sph

§ 3. Die nichtkonvexen Polyeder erster und zweiter Klasse des Hexakisoktaedertypus.

Seite

IV. Kapitel. Die Polyeder des Dyakishexekontaedertypus.

§ 1. Die gleichflächigen und die gleicheckigen Polyeder erster Art des Dyakishexekontaedertypus.

§ 2. Die Sphenoidgruppierungen des Dyakishexekontaedertypus.

§ 3. Die Gruppierungen von Stephanoiden $St'_5\binom{2}{1}$ im Dyakishexekontaedertypus.

Einleitung.

Die von ebenen Flächen begrenzten Gebilde im Raume haben um so frühzeitiger die Aufmerksamkeit der Mathematiker in Anspruch genommen, ein je höherer Grad von Regelmässigkeit, um ganz allgemein zu sprechen, ihnen zukommt. Die Lehre von den regulären Polyedern, den fünf platonischen Körpern, gehört bereits dem Altertum an, ebenso wie die Lehre von den regulären ebenen Figuren, wenngleich deren Theorie, ausgedehnt auf die sternförmigen Polygone und auf Vielecke von beliebiger Kantenzahl — man denke an die Kreisteilung — erst in der Neuzeit im wesentlichen zum Abschluss gebracht wurde. Von den uns durch Pappus überlieferten halbregulären Polyedern des Archimedes, die auch weiterhin vielfacher Betrachtung unterworfen wurden — wir erinnern nur an die Arbeiten von Kästner, Catalan u. a. — schritt man, verhältnismässig spät, unter Verzichtleistung auf die Forderung der Regelmässigkeit der Begrenzungsflächen zu den sog. gleicheckigen Polyedern fort, deren erste ausführliche Beschreibung bei Hessel zu finden ist. Die Lehre von den gleichflächigen Polyedern, den jenen reziproken, war dann eine naheliegende Folgerung, die u. a. Catalan zog. Nach Verallgemeinerung des Begriffes des regelmässigen Polygons auf die Vielecke mit sich selbst schneidendem Perimeter gelangte man auch für die räumlichen Gebilde zu einer erweiterten Auffassung, und Kepler beschrieb bereits zwei jener regulären Sternpolyeder, deren allgemeine Theorie den Inhalt der schönen Abhandlungen von Poinsot, Cauchy und Chr. Wiener bildet.[1]) Die eingehendsten Untersuchungen endlich über Sternpolyeder ganz im allgemeinen, seien sie gleicheckig oder

---

[1]) Hierzu vergl.: S. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der math. Wissenschaften. Leipzig 1876. Kap. I. Zur geschichtl. Entwickelung der Lehre von den Sternpolygonen und Sternpolyedern in der Neuzeit.

gleichflächig oder beides zugleich, verdanken wir E. Hess, der in einer längeren Reihe von Mitteilungen und Abhandlungen die Geometrie bezw. Gestaltenlehre mit einer beträchtlichen Anzahl neuer Raumfiguren beschenkt hat.[1]) Der Begriff des zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeders, d. h. eines Vielflaches, das von lauter unter sich kongruenten oder symmetrisch-gleichen Flächen begrenzt wird und dessen Ecken sämtlich kongruent oder symmetrisch (im Legendreschen Sinne) sind, ist eine Verallgemeinerung des ursprünglichen Begriffes des regulären Polyeders, wobei lediglich von der Regelmässigkeit der Grenzflächen und Ecken abgesehen wird. Setzt man überdies voraus, dass die Flächen eines solchen Polyeders konvexe Vielecke seien und dass die Gesamtoberfläche einen kontinuierlichen Zusammenhang besitzt, verlangt man ferner, dass keine überstumpfen Flächenwinkel an dem Gebilde vorkommen, so ergeben sich nur neun solcher konvexer gleicheckig-gleichflächiger Polyeder, von denen acht von E. Hess eingehend beschrieben worden sind.[2]) Unter Verzichtleistung auf die eben angeführten Beschränkungen erhält man einerseits die nichtkonvexen, andererseits die diskontinuierlichen gleicheckig-gleichflächigen Polyeder, über die wir E. Hess einige Angaben verdanken; doch sind die mehrfach an verschiedenen Stellen seiner Arbeiten von ihm angekündigten weiteren Ausführungen unterblieben. Einer an mich im Jahre 1901 seinerseits brieflich ergangenen Aufforderung, diese erweiterte Untersuchung fort- bezw. auszuführen, verdankt die folgende Arbeit ihre Entstehung. Um ein Gesamtbild der Theorie der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder allgemein verständlich und für den Leser wenigstens bis zu einem gewissen Grade unabhängig von den vorhergehenden Arbeiten geben zu können, ist es nötig, eine Reihe allgemeiner Begriffe und Definitionen, sowie eine Anzahl Sätze über die Polygone, Polyeder und ihre Ecken überhaupt, voranzustellen. Das erscheint um so angezeigter, als wir ausser den kurzen Angaben[3]) von Hess keine zusammenhängende Darstellung der

---

[1]) Über diese Abhandlungen und die mannigfachen Untersuchungen anderer vergl. M. Brückner, Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte. Leipzig 1900. Wir citieren dieses Buch künftig kurz unter V. u. V.

[2]) E. Hess, Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder. Cassel 1876; künftig kurz unter „Hess" citiert.

[3]) In der Mitteilung: Ueber einige merkwürdige nichtkonvexe Polyeder. Marburger Berichte. Januar 1877. Nr. 1.

allgemeinen Theorie der nichtkonvexen Polyeder besitzen.[1]) Nur die Arbeiten[2]) von A. F. Möbius, die bekanntlich in der Entdeckung der auch nach ihm benannten einseitigen Polyeder gipfeln, stellen einen höchst beachtenswerten Beitrag zur Theorie der von ihm als „aussergewöhnliche" bezeichneten nichtkonvexen Vielflache dar. Der Vollständigkeit wegen sollen im § 3 des ersten Kapitels sämtliche gleicheckig-gleichflächigen Polyeder, also auch die konvexen und die bereits beschriebenen diskontinuierlichen und die, der Anzahl nach sehr geringen, nichtkonvexen Polyeder mit angeführt werden. Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass sich die folgenden Untersuchungen nur auf Gebilde des dreidimensionalen Euklidischen Raumes erstrecken, die Gültigkeit der Axiome der Euklidischen Stereometrie also durchweg vorausgesetzt ist. Überdies sei von vornherein hervorgehoben, dass sich die Betrachtungen, wenigstens der Einzelpolyeder, in erster Linie auf deren Morphologie beschränken und insoweit wesentlich der Topologie zuzurechnen sind; doch sollen auch die metrischen Beziehungen nicht ganz vernachlässigt werden, wenngleich in dieser Hinsicht vieles weiteren Untersuchungen zugewiesen werden muss. Durch die genaueren Ausführungen über die zeichnerische Wiedergabe der Grenzflächen der Polyeder und deren Darstellung im Modell hoffen wir zugleich einen brauchbaren Beitrag zur darstellenden Geometrie zu geben. Was die Figuren betrifft, so sind die zum Verständnis des Textes benötigten besonders planimetrischen Zeichnungen auf den Tafeln 1, 2, ... 20 zu finden, die in Lichtdruck ausgeführten, nach Photographien der Polyedermodelle hergestellten Abbildungen auf den Tafeln 21, 22 ... 28, 29. Bis auf einige wenige Figuren, die bereits auf den Tafeln in meinem Buche V. u. V. gegeben wurden, sind sämtliche hier dargestellten Typen, die neu gefunden wurden, zum ersten Male veröffentlicht.

---

[1]) Vergl. die Bemerkungen in V. u. V. S. 213 Nr. 160 usw.

[2]) A. F. Möbius, Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders. 1865. Gesammelte Werke, Bd. II.

I. Kapitel.

Allgemeiner Teil.

§ 1. Die Flächen und die Ecken eines Polyeders. Die Formel von Hess.

1. **Von den Grenzflächen eines Polyeders.** Unter einem Polygon (n-eck) soll hier nur ein System von n Strecken (Kanten) in der Ebene verstanden werden, die dergestalt mit einander verbunden sind, dass jeder der beiden Endpunkte einer Strecke mit einem Endpunkte einer anderen Strecke zusammenfällt. Gelangt man dabei beim Durchlaufen des Streckenzuges, von einem beliebigen Endpunkte ausgehend, durch sämtliche Strecken nach dem Ausgangspunkte zurück, so heisst das Polygon kontinuierlich (z. B. das Polygon $ABDFEC$, Fig. 1 Taf. 1), andernfalls diskontinuierlich. Ein diskontinuierliches Polygon besteht aus zwei oder mehr kontinuierlichen Polygonen (vergl. das Sechseck ACE; BDF Fig. 2 Taf. 1). Die allgemeine Definition schliesst aber nicht aus, dass Endpunkte anderer als aufeinanderfolgender Strecken zusammenfallen; z. B. besitzt der Streckenzug $ABDAEC$ (Fig. 3 Taf. 1) in A die Endpunkte von vier Strecken. Wir bezeichnen auch diese Figur als Sechseck, denn sie lässt sich durch einfache Verschiebung der Strecken aus Fig. 1 erhalten. Ebenso schliesst die Definition nicht aus, dass Strecken teilweise zusammenfallen, wie bei dem Sechseck $ABCDEF$ (Fig. 4 Taf. 1). Durchläuft man den Streckenzug, den Perimeter des Polygons, in einem festgesetzten Sinne, so erteilt man ihm dadurch ein rechtes und linkes Ufer, die man durch Schraffierung unterscheiden kann. Es möge das schraffierte Ufer stets als positives, das andere als negatives bezeichnet sein. Indem man bei Polygonen mit sich nicht schneidendem Perimeter das innere Ufer schraffiert, schreibt

man dem Polygone einen einfachen positiven Inhalt zu, bei äusserer Schraffierung einen einfachen negativen. Nach Schraffierung eines beliebigen Polygons kommen dessen Zellen bestimmte positive oder negative Koëffizienten zu, mit denen ihr absoluter Flächeninhalt zu multiplizieren ist. Man erhält diese Koëffizienten, indem man aus der unendlichen Aussenebene, die den Koëffizienten Null hat, den Perimeter überschreitend, der Reihe nach in sämtliche Zellen dringt und den vorhergehenden Zellenkoëffizienten um 1 erhöht oder erniedrigt, je nachdem man den Perimeter von dem unschraffierten zum schraffierten Ufer oder umgekehrt schneidet (Meister-Möbiussche Regel). Je nach der vorher festgelegten Schraffierung erhalten dann die Zellen verschiedene Koëffizienten, wie die beiden Sechsecke Fig. 2 und 5 Taf. 1 erkennen lassen. Der Gesamtinhalt des diskontinuierlichen Sechsecks Fig. 2 ist dann gleich der Summe der beiden Dreiecke ACE und BDF, während der Inhalt des Sechsecks Fig. 5, ebenso wie der des Sechsecks Fig. 1 bei passender Konstruktion der Figuren offenbar Null ist.[1]) Drückt man den absoluten Betrag eines positiven Zellenkoëffizienten durch den Grad der Färbung der Gesamtfläche aus, so sind die Zellen des Koëffizienten Null ungefärbt zu lassen, während die Zellen mit negativen Koëffizienten auf der Rückseite der Fläche, eventuell mit verschiedenem Grade, zu färben sind. Ist ein Polygon Grenzfläche eines Polyeders, so nehmen an dessen Oberfläche nur Zellen mit positiven und negativen Koëffizienten Teil, während die Zellen mit dem Koëffizienten Null herausfallen.

Zur weiteren Charakterisierung eines Polygons dienen seine Winkel. Liegt der Perimeter eines Polygons in bestimmter Weise schraffiert vor, so beginne man die Durchlaufung des Streckenzuges mit irgend einer Kante so, dass die schraffierte Seite links bleibt und fixiere so für jede Kante einen positiven Sinn. Auch für alle Winkel sei ein bestimmter Drehsinn als positiv festgelegt, z. B. der dem Uhrzeigersinn entgegengesetzte. Dann heisse Umfangswinkel der Winkel, in welchem eine Kante in positivem Sinne gedreht werden muss, um in die positive Lage der nächsten Kante zu kommen. Alle Umfangswinkel liegen also zwischen 0 und 2π. Gibt man dem Polygone die umgekehrte

[1]) Das Analoge gilt für die beiden Sechsecke Fig. 6 und Fig. 3 Taf. 1.

Schraffierung, kehrt also den positiven Sinn aller Strecken um, so sind die neuen Umfangswinkel bei Beibehaltung des vorigen Drehsinns an jeder Ecke die Ergänzung der vorigen zu 2π. Die Summe aller Umfangswinkel sei im ersten Falle $U = a \,.\, 2\pi$, im zweiten $U' = a' \,.\, 2\pi$, wobei a und a' jedesmal die Art des Polygons genannt wird. Dabei gilt wegen $U + U' = n \,.\, 2\pi$ die Relation:

$$1) \qquad a + a' = n,$$

d. h. die Summe der beiden Artzahlen eines ebenen Polygons ist gleich der Zahl seiner Kanten.

Innenwinkel (kurz: Winkel) des Polygons heisse derjenige, um den eine Kante im positiven Sinne gedreht werden muss, um mit der negativen Richtung der vorhergehenden Kante zusammenzufallen. Ein Innenwinkel liegt stets auf der schraffierten Seite des Perimeters, und ergänzt den Umfangswinkel derselben Ecke zu π oder 3π, je nachdem er kleiner oder grösser als ein gestreckter ist. Ist J die Summe der Winkel eines Polygons, $\varkappa$ die Zahl seiner überstumpfen Innenwinkel, so ist:

$$J + U = \varkappa \,.\, 3\pi + (n - \varkappa)\pi,$$

und wegen $U = a \,.\, 2\pi$: $\qquad J = [n + 2(\varkappa - a)]\pi.$

Hat man also $J = q \,.\, \pi$ bestimmt,[1]) so ergibt sich die Art des Polygons zu:

$$2) \qquad a = \frac{n + 2\varkappa - q}{2}.$$

Ist $\varkappa = 0$, so heisse das Polygon konvex, andernfalls nichtkonvex. Für ein konvexes Polygon, das nur Zellen mit positiven Koëffizienten haben kann, stimmt die Artzahl a mit dem höchsten Koëffizienten (der innersten Zelle) überein, wenn im Innern ein Punkt existiert, dem sämtliche Kanten ihr schraffiertes Ufer zuwenden, und sie bedeutet hier die Anzahl von Kreisbedeckungen bei Projektion des Perimeters auf die Peripherie eines das Gesamtpolygon umschliessenden Kreises aus dessen in jener innersten Zelle gelegenen Zentrums —. Bei Umkehrung der Schraffierung des Perimeters

[1]) Vergl. hierzu: V. u. V. S. 4 Nr. 5.

erhält man, da $J + J' = 2n\pi$ ist, $q' = 2n - q$, $\varkappa' = n - \varkappa$, also $a' = \frac{n - 2\varkappa + q}{2}$, d. h. wiederum: $a + a' = n$.[1])

Vertauscht man also bei einem Polyeder die Aussenseite mit der Innenseite der Oberfläche, d. h. kehrt den Sinn jeder Grenzfläche um, so ersetzt man die Art a jeder einzelnen Grenzfläche durch $n - a$. — Die sämtlichen Betrachtungen gelten für diskontinuierliche Polygone ebenso wie für kontinuierliche.

2. **Von den Ecken eines Polyeders.** Der Untersuchung der Ecken eines beliebigen Polyeders muss dessen Definition vorangestellt werden. Wir verstehen unter einem Polyeder schlechthin eine Reihe oder mehrere Reihen von ebenen Polygonen, die im Raume derart mit einander verbunden sind, dass je ein Polygon jede seiner Kanten (Kanten des Polyeders) mit einem und nur einem anderen Polygon gemein hat. Setzt man dabei voraus, dass alle Polygone so mit einander verbunden werden können, dass man beim Fortschreiten von der als oberen Seite festgesetzten Seite eines ersten Polygons über die Kanten der Reihe nach nur auf Oberseiten aller übrigen Polygone gelangt,[2]) so heisst das Polyeder zweiseitig. Für solche Polyeder gilt, dass man nach Bezeichnung sämtlicher Ecken der Polygone diese so schreiben kann, dass sämtliche Kanten des Polyeders zweimal, aber im entgegengesetzten Sinne, auftreten: Möbiussches Kantengesetz. Gilt dieses Gesetz nicht, so ist das Polyeder einseitig (Möbiussches Polyeder). Die weiteren Definitionen und Sätze beziehen sich im allgemeinen nur auf zweiseitige Polyeder.

Unter einer Ecke eines Polyeders versteht man das Gesamtgebilde der Flächen und Kanten in einem gemeinsamen Eckpunkte mehrerer Polygone, deren die Ecke also mindestens drei besitzt. Beschreibt man um eine Ecke eines Polyeders eine Kugel (die die übrigen Ecken ausschliesst) so bestimmen die Flächen der Ecke auf dieser ein sphärisches Polygon, dessen Kanten im Winkel- bezw. Bogenmass

---

[1]) Man kann also die Schraffierung immer so wählen, dass $a \leq \frac{n}{2}$ ist.

[2]) Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass man in negative Zellen der Oberseite gelangt.

gemessen gleich den Innenwinkeln oder Kantenwinkeln der Ecke sind, dessen Winkel mit den Flächenwinkeln der Ecke übereinstimmen. Ist auch nur ein Flächenwinkel überstumpf, so heisse die Ecke nichtkonvex, sonst konvex. Ein Polyeder heisse nichtkonvex, wenn mindestens eine seiner Ecken nichtkonvex ist. Es braucht also ein nichtkonvexes Polyeder keine überstumpfen Kantenwinkel zu besitzen.[1]) — Eine Ecke ist mit ihrem sphärischen Polygone gleichzeitig kontinuierlich oder diskontinuierlich. Bildet man die Polarfigur des sphärischen Polygons, d. h. dasjenige sphärische Polygon, dessen Kanten die Polaren (Hauptkreise) zu den Ecken des ursprünglichen Polygons und umgekehrt sind, so bestimmt dieses die Polarecke der ursprünglichen. Für die Artbestimmung eines sphärischen Polygons kommen nun zwei Zahlen in Betracht, von denen die eine α_s sich auf die in Winkelmass ausgedrückten Kanten, die andere α_n sich auf die Umfangswinkel bezieht. Für die Polarfigur des Polygons ist dann $\alpha'_s = \alpha_n$ und $\alpha'_n = \alpha_s$. Es genügt also, direkt aus der Figur des Polygons α_n und aus der Polarfigur α'_n zu bestimmen. Sind nun $\omega_1, \omega_2 \ldots$ die Winkel des Polygons, $\sigma_1, \sigma_2 \ldots$ seine Kanten, $\omega'_1, \omega'_2 \ldots$ und $\sigma'_1, \sigma'_2 \ldots$ bezw. die Winkel und Kanten des Polarpolygons, so gilt zunächst für ein gewöhnliches Polygon: $\omega_i + \sigma'_i = \pi$, also $\Sigma\omega_i + \Sigma\sigma'_i = n\,.\,\pi$ oder

$$\Sigma\omega_i - (n-2)\pi + \Sigma\sigma'_i = 2\pi.$$

Es ist aber $\Sigma\omega_i - (n-2)\pi$ der sphärische Exzess des Polygons oder seine Fläche F in Winkelmass gemessen, und $\Sigma\sigma'_i = \Sigma u_i$, d. h. die Kantensumme des Polarpolygons gleich der Summe U der Umfangswinkel des ursprünglichen Polygons, sodass $F + U = 2\pi$ ist. Für ein beliebiges Polygon ist dann:

$$F + U = \alpha_n \,.\, 2\pi, \tag{3}$$

worin α_n die obengenannte Artzahl der Ecke ist. Andererseits ist für das Polarpolygon $F' + U' = \alpha'_n \,.\, 2\pi = \alpha_s \,.\, 2\pi$. Dabei ist auch $U' = \Sigma\sigma_i$, d. h. gleich dem Umfang, $F' = D$ (der sog. sphärische Defekt) für das ursprüngliche Polygon. Die Bestimmung der Zahl α_n aus der Figur des sphärischen Polygons auf der Kugel hat den Vorteil, dass man direkt die Flächenteile

[1]) Fedorow bezeichnete nichtkonvexe Polyeder ohne überstumpfe Kantenwinkel als Koiloëder.

ablesen kann, während die Bestimmung der Summe der Umfangswinkel nach demselben Prinzipe, auch für überstumpfe Winkel, erfolgt, wie bei den ebenen Polygonen. Werden bei einem sphärischen n-eck zugleich die Seiten und die Winkel durch ihre Ergänzungen zu 2π ersetzt, so sind die Artzahlen für das neue n-eck: $2n - \alpha_n$ und $2n - \alpha_s$.

Wir erläutern das Gesagte zunächst an den sphärischen Dreiecken, deren es acht Typen gibt (Fig. 7—14 Taf. 1). Der Einfachheit wegen wählen wir die drei Punkte A_1, A_2, A_3 der Kugel, durch welche die drei die sämtlichen Dreiecke bildenden Hauptkreise zu legen sind, als die Ecken eines Oktanten, dessen Fläche $\frac{\pi}{2}$ ist. Wir haben dann bei Beachtung der Schraffierung des Perimeters für die Flächen und Umfangswinkel der acht Dreiecke die folgenden Werte, aus denen sich die beigesetzten Artzahlen α_n ergeben, während α_s aus der polaren Figur zu entnehmen ist. Es ist der zweite und dritte, der sechste und siebente Typus polar zu einander, die übrigen Typen sich selbst polar zugeordnet, d. h. autopolar, wovon man sich leicht durch Konstruktion der Polarfiguren überzeugen kann.[1]) Es ist für den

1. Typus (Fig. 7) $F = \frac{\pi}{2}$. $U = 3 . \frac{\pi}{2}$. $\alpha_n = 1$. $(\alpha_s = 1)$.

2. Typus (Fig. 8) $F = 7 . \frac{\pi}{2}$. $U = 3 . \frac{3\pi}{2}$. $\alpha_n = 4$. $(\alpha_s = 2)$.

3. Typus (Fig. 9) $F = 3 . \frac{\pi}{2} + 1 . \left(2 . \frac{\pi}{2}\right) = 5 . \frac{\pi}{2}$. $U = 3 . \frac{\pi}{2}$. $\alpha_n = 2$. $(\alpha_s = 4)$.

4. Typus (Fig. 10) $F = 3 . \frac{\pi}{2} + 4 . \left(2 . \frac{\pi}{2}\right) = 11 . \frac{\pi}{2}$. $U = 3 . \frac{3\pi}{2}$. $\alpha_n = 5$. $(\alpha_s = 5)$.

5. Typus (Fig. 11) $F = 3 . \frac{\pi}{2}$. $U = 2 . \frac{\pi}{2} + 1 . \frac{3\pi}{2} = 5 . \frac{\pi}{2}$. $\alpha_n = 2$. $(\alpha_s = 2)$.

6. Typus (Fig. 12) $F = 5 . \frac{\pi}{2}$. $U = 1 . \frac{\pi}{2} + 2 . \frac{3\pi}{2} = 7 . \frac{\pi}{2}$. $\alpha_n = 3$. $(\alpha_s = 3)$.

7. Typus (Fig. 13) $F = 5 . \frac{\pi}{2} + 1 . \left(2 . \frac{\pi}{2}\right) = 7 . \frac{\pi}{2}$. $U = 2 . \frac{\pi}{2} + 1 . \frac{3\pi}{2} = 5 . \frac{\pi}{2}$. $\alpha_n = 3$. $(\alpha_s = 3)$.

8. Typus (Fig. 14) $F = 5 . \frac{\pi}{2} + 2 . \left(2 . \frac{\pi}{2}\right) = 9 . \frac{\pi}{2}$. $U = 1 . \frac{\pi}{2} + 2 . \frac{3\pi}{2} = 7 . \frac{\pi}{2}$. $\alpha_n = 4$. $(\alpha_s = 4)$.

---

[1]) Die Flächenkoëffizienten sind so zu bestimmen, dass der auf der nicht schraffierten Seite des Perimeters liegende „äussere“ Teil der übrigen Kugelfläche den Koëffizienten Null hat. Das Übrige ergibt sich von selbst.

Für die an Polyedern auftretenden n-kantigen Ecken kommt nur die Artzahl α_n (kurz mit α bezeichnet) in Betracht, die, wenn die Aussenseite des Polyeders mit der Innenseite vertauscht wird, d. h. alle ebenen Kantenwinkel und alle Flächenwinkel gleichzeitig durch ihre Ergänzungen zu 2π ersetzt werden, in $2n-\alpha$ übergeht. An dem in Fig. 15 Taf. 1 dargestellten Polyeder kommen sämtliche zu den eben angeführten acht Typen gehörigen dreikantigen Ecken vor. Wir denken uns zunächst das ganze Gebilde an der äusseren Seite gefärbt und bezeichnen die Flächenwinkel, die immer auf der ungefärbten Seite des Polyeders zu messen sind, mit w_k bezw. w_g, je nachdem sie kleiner oder grösser als π sind, die Kantenwinkel in gleicher Weise mit s_k bezw. s_g. (Sie sind auf der Aussenseite des Polyeders zu rechnen, also $\gtreqless \pi$, je nachdem sie als Innenwinkel ihres Polygons $\gtreqless \pi$ sind.) Dann ist für die

Ecke A:	$w_k = 3.$		$s_k = 3.$		vergl. Typus 1.	$\alpha = 1.$
Ecke B:	$w_g = 3.$		$s_k = 3.$		vergl. Typus 2.	$\alpha = 4.$
Ecke C:	$w_k = 2.$	$w_g = 1.$	$s_k = 1.$	$s_g = 1.$	vergl. Typus 5.	$\alpha = 2.$
Ecke D:	$w_k = 1.$	$w_g = 2.$	$s_k = 2.$	$s_g = 1.$	vergl. Typus 6.	$\alpha = 3.$

Vertauscht man die Aussenseite dieses Polyeders Fig. 15 mit seiner Innenseite, denkt sich also die Färbung auf der entgegengesetzten Seite angebracht, und schreibt dann A' statt A u. s. w., so ist für die:

Ecke A':	$w_g = 3.$		$s_g = 3.$		vergl. Typus 4.	$\alpha = 5.$
Ecke B':	$w_k = 3.$		$s_g = 3.$		vergl. Typus 3.	$\alpha = 2.$
Ecke C':	$w_k = 1.$	$w_g = 2.$	$s_k = 1.$	$s_g = 2.$	vergl. Typus 8.	$\alpha = 4.$
Ecke D':	$w_k = 2.$	$w_g = 1.$	$s_k = 1.$	$s_g = 2.$	vergl. Typus 7.	$\alpha = 3.$

Zum Schlusse sei noch eine vierkantige nichtkonvexe Ecke (und ihr sphärisches Polygon) betrachtet, wie sie besonders häufig an den später zu berücksichtigenden Polyedern auftreten. Wir konstruieren das sphärische Polygon Fig. 16 Taf. 1 durch vier Hauptkreise so, dass die gesamte Kugeloberfläche durch sie in 24 kongruente rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke zerlegt wird. Für das Polygon $A_1 A_2 A_3 A_4$ sind bei der angegebenen Schraffierung die Umfangswinkel in A_1, A_2, A_3, A_4 bezw. $2.\frac{\pi}{3}$, $5.\frac{\pi}{3}$, $4.\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, also $U = 4\pi$. Die Fläche ist $4.\left(2.\frac{\pi}{6}\right) + 16.\left(1.\frac{\pi}{6}\right)$, d. h. $F = 4\pi$. Hiernach ist $\alpha = 4$. Für die entgegengesetzte Schraffierung ist, wie man sich leicht nach Zeichnung der neuen Figur überzeugt, für die Umfangswinkel in derselben Reihenfolge: $4 \cdot \frac{\pi}{3}, 1 \cdot \frac{\pi}{3}, 2 \cdot \frac{\pi}{3}, 5 \cdot \frac{\pi}{3}$, d. h. $U' = 4\pi$ und $F' = 16 \cdot \left(1 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + 4 \cdot \left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 4\pi$, d. h. es ist α wiederum gleich 4. Eine solche vierkantige überschlagene Ecke der Art $\alpha = 4$ besitzt zwei überstumpfe Kantenwinkel und zwei ebensolche Flächenwinkel und geht bei Umfärbung des Polyeders in sich selbst über.

Die Art einer diskontinuierlichen Ecke ist gleich der Summe der Artzahlen der sie konstituierenden Einzelecken. — Die eingangs gegebene Definition der Ecke eines Polyeders schliesst nicht aus, dass zwei (oder mehrere) ihrer nicht aufeinander folgenden Kantenwinkel in einer Ebene liegen, wie dies Taf. 1 Fig. 4 andeutet, wenn man an Stelle dieses Sechsecks ein sechskantiges sphärisches Polygon setzt, dessen Hauptkreisbogen AB und DE längs AE zusammenfallen. Ein solcher Fall tritt z. B. sicher ein, wenn die Polyederecke den Kantenwinkel A des Sechsecks Fig. 6 besitzt. Dann enthält die äussere Oberfläche des Polyeders eine Flächenzelle mit dem Koëffizienten $+2$. Einen ähnlichen Fall haben wir, wenn die Ecke A des Sechsecks Fig. 3 zur Bildung einer Polyederecke beiträgt, bei welcher dann zwei verschiedene Zellen entgegengesetzten Vorzeichens einer und derselben Grenzfläche in einer Ebene liegen, während das dazwischen befindliche Stück der Oberfläche den Koëffizienten Null hat, also eine (scheinbare!) Öffnung des Polyeders darstellt. (Vergl. z. B. die Polyeder Taf. 24 Fig. 4 und Taf. 26 Fig. 12.)

3. **Die Formel von Hess und die Einteilung der nichtkonvexen Polyeder.** Den weiteren Betrachtungen wird die allgemeinste Definition des Polyeders zu Grunde gelegt, das nur stets zweiseitig vorausgesetzt ist. Bildet man die Summe der Polarecken seiner sämtlichen Ecken, indem man von einem beliebigen Punkte des Raumes Normalen auf die Innenseiten sämtlicher Grenzflächen fällt und durch je zwei solcher Normalen, die zwei sich in einer Kante des Polyeders schneidenden Grenzflächen entsprechen, Ebenen legt, so wird das von diesen sämtlichen Ebenen auf der um das gemeinsame Zentrum der Normalecken beschriebenen Kugel erzeugte Netz

von sphärischen Polygonen die Kugel ein oder mehrere Male bedecken. Die Anzahl dieser Kugelbedeckungen ist die Artzahl A des Polyeders. Nun ist die Fläche F eines solchen Polygons, wenn α die Artzahl der Ecke, U die Summe der Flächenwinkel des Polygons und zugleich die Summe w der ebenen Winkel der Ecke des Polyeders ist, gegeben durch $F = \alpha \, . \, 2\pi - w$. Beträgt also die Summe aller Polygone A Kugeln, so ist

$$2\pi \Sigma\alpha - \Sigma w = A \, . \, 4\pi.$$

Dabei ist für ein Polygon $w = n\pi + 2\varkappa\pi - 2a\pi$. Summiert man über sämtliche Flächen des Polyeders, so kommt:

$$\Sigma w = \pi \Sigma n + 2\pi \Sigma\varkappa - 2\pi \Sigma a.$$

Es ist aber Σn die Kantenzahl sämtlicher Flächen, d. h. die doppelte Kantenzahl des Polyeders, so dass bei Tilgung des Faktors 2π aus den vorhergehenden die Gleichung resultiert:

$$4) \qquad 2A = \Sigma a + \Sigma\alpha - \Sigma\varkappa - K.$$

Diese für die Art A aller zweiseitigen Polyeder gültige Formel von Hess, in der Σa und $\Sigma\alpha$ die Summe der Artzahlen aller Flächen und Ecken, $\Sigma\varkappa$ die Zahl der am Polyeder vorhandenen überstumpfen Kantenwinkel und K die der Kanten bedeutet, ist der allgemeinste Ausdruck des Eulerschen Satzes, in dessen speziellere Form für konvexe Polyeder (und Koiloëder) sie übergeht, wenn $\Sigma\varkappa = 0$ ist (Wieners Formel), während sie für Polyeder der Art $A = 1$ (Eulersche Polyeder) zu $f + e = K + 2$ wird, da sämtliche a und α dann 1 sind. Die Formel gilt auch für diskontinuierliche Polyeder und ist dann gleichwertig mit $A = \Sigma A_i$, wenn die A_i die Artzahlen der i Einzelpolyeder sind. Besitzt ein konvexes Polyeder die Art A, so ist, falls es einen Punkt gibt, aus dem alle positiven Normalen auf die Grenzfläche deren Innenseite treffen, A zugleich die Zahl der Kugelbedeckungen, wenn man die Oberfläche des Polyeders aus jenem Punkte auf eine das ganze Polyeder umschliessende Kugel projiziert und stimmt mit dem höchsten vorkommenden Koëffizienten der räumlichen Zellen überein. Bestimmt man nämlich nach Festsetzung der äusseren Oberfläche eines Polyeders den Inhalt der Zellen des Raumes, in die dieser durch die Fläche des Polyeders geteilt wird, in analoger Weise wie den der Zellen eines ebenen Polygons, indem man hier, aus dem Aussenraum mit dem Koëffizienten Null kommend, der folgenden Zelle einen um $\pm a$ verschiedenen Koëffizienten beilegt, je nachdem die Grenzflächenzelle mit dem Koëffizienten a von der äusseren (gefärbten) Seite zur inneren oder umgekehrt durchschritten wird, so ergibt sich der gesamte Inhalt des Polyeders als die algebraische Summe aller Zellen (mal dem Einheitswürfel) und hat für konvexe Polyeder einen bestimmten positiven Wert. Für nichtkonvexe Polyeder **kann** sich die Summe, falls positive und negative Zellen auftreten, auf Null reduzieren. Nichtkonvexe Polyeder, deren sämtliche Grenzflächen aus gleichviel Paaren kongruenter Zellen mit entgegengesetzten Vorzeichen bestehen, also an sich schon den Flächeninhalt Null besitzen, wonach auch die Oberfläche des Polyeders Null ist, haben stets den Inhalt Null[1]) (ohne dass sie einseitig sind!). Wir bezeichnen solche nichtkonvexe Polyeder als nichtkonvexe Polyeder **zweiter Klasse** oder kurz als **Nullpolyeder**. Für jedes andere nichtkonvexe Polyeder, als erster Klasse bezeichnet, kann die Wahl der Aussenseite der Oberfläche stets so getroffen werden, dass der Inhalt positiv ist. Es sind nun diese Polyeder erster und zweiter Klasse noch durch ein anderes charakteristisches Merkmal zu unterscheiden. Wir untersuchen die Änderung der Artzahl A eines Polyeders bei Vertauschung seiner Innen- und Aussenseite. An Stelle der Grössen Σa, $\Sigma \alpha$, $\Sigma \varkappa$ treten in der Formel von Hess für das neue Polyeder:

$$\begin{aligned} \Sigma a' &= \Sigma(n-a) = \Sigma n - \Sigma a = 2K - \Sigma a, \\ \Sigma \alpha' &= \Sigma(2m-\alpha) = 2\Sigma m - \Sigma\alpha = 4K - \Sigma\alpha, \\ \Sigma\varkappa' &= \Sigma(n-\varkappa) = 2K - \Sigma\varkappa, \end{aligned}$$

und da $K' \equiv K$ bleibt, so wird:

$$2A' = \Sigma a' + \Sigma\alpha' - \Sigma\varkappa' - K = 2K - (\Sigma a + \Sigma\alpha - \Sigma\varkappa - K),$$

d. h. es ist:

$$5) \qquad A' + A = K,$$

oder: **Die Summe der beiden Artzahlen jedes Polyeders ist gleich der Anzahl seiner Kanten.** Für ein nichtkonvexes Polyeder erster

[1]) Bezeichnet P irgend einen Punkt ausserhalb der Oberfläche eines Vielflaches und Pf das Volumen einer Pyramide über der Grenzfläche f mit der Spitze P, so ist die ΣPf, unabhängig von der Lage von P, der Inhalt des Vielflaches (Möbius a. a. O. S. 494. V. u. V. S. 70). Es ist aber $\Sigma Pf = 0$, wenn jedes $f = 0$ ist. —

Klasse kann die „Färbung“ der Oberfläche stets so gewählt werden, dass $A < \frac{K}{2}$ wird. Für ein Nullpolyeder ist $A = A' = \frac{K}{2}$, wenn bei Vertauschung der Färbung jede Fläche und jede Ecke in sich selbst übergeht, also $a = a'$, $\varkappa = \varkappa'$ und auch $\alpha = \alpha'$ ist.[1]) Zu jeder positiven Zelle besitzt ein solches Polyeder eine, absolut genommen, gleiche Zelle negativen Vorzeichens, die bei Vertauschung der Art des Polyeders nur ihre Vorzeichen wechseln.

4. **Die polare Reziprozität der Polyeder.** Zu jedem Polyeder P lässt sich mit Beziehung auf eine beliebig gewählte Kugel, die nur das gesamte Polyeder P einschliesst, ein zweites Polyeder P' so konstruieren, dass die Ebenen der Grenzflächen von P' die Polarebenen zu den Ecken von P als Polen sind, die Ecken von P' die Pole zu den Grenzflächen von P als Polarebenen, und umgekehrt. Die Anzahl der Kanten beider Polyeder ist die gleiche; die Zahl der Flächen des einen ist gleich der Zahl der Ecken des anderen und umgekehrt. Zwei solche Polyeder P und P' heissen polarreziproke. Ist P' isomorph mit P, so heisst P (bez. P') autopolar. Zwei polarreziproke Polyeder sind gleichzeitig zweiseitig oder einseitig. Besitzt P eine umbeschriebene Kugel, so sind die Ebenen der Flächen von P' die Tangentialebenen in den Ecken von P an diese Kugel und das Polyeder P' besitzt sonach eine einbeschriebene Kugel. Polarreziproke Polyeder sind gleichzeitig konvex oder nichtkonvex, kontinuierlich oder diskontinuierlich. Die Artzahl A zweier polarreziproker Polyeder ist dieselbe, d. h. polarreziproke nichtkonvexe Polyeder gehören gleichzeitig zur ersten oder zweiten Klasse.[2])

§ 2. Über die Bestimmung der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder höherer Art.

1. **Die gleicheckigen und die gleichflächigen Polyeder erster Art.** Die Bestimmung der gleichflächig-gleicheckigen Polyeder im Sinne der in der Einleitung vorangestellten allgemeinsten Definition, die die diskontinuier-

[1]) Es wird sich zeigen, dass fast alle gleicheckig-gleichflächigen Nullpolyeder den angeführten Bedingungen genügen. Das Weitere vergl. in Kap. II § 3 Nr. 5 und Kap. IV § 4 Nr. 8.

[2]) Weiteres hierüber vergl. E. Hess a. a. O. S. 15.

lichen konvexen und die nichtkonvexen Gebilde einschliesst, erfordert die Voranstellung der Theorie der nur gleicheckigen bezw. nur gleichflächigen Polyeder erster Art, wie auch historisch das Problem der vollständigen Aufzählung dieser Polyeder das ältere ist. Indem man auf verschiedenen für diese Polyeder gültigen Sätzen fusste, gelangte man auf mehrerlei Weise zu ihrer Auffindung. Hessel[1]) geht zur Ableitung aller gleicheckigen Polyeder erster Art davon aus, dass sich deren sämtliche Gestalten durch bestimmtes Abschneiden der Ecken und Kanten aus dem regelmässigen n-seitigen Prisma, dem Oktaeder und Hexaeder, dem Ikosaeder und Dodekaeder erhalten lassen. Es sind dann die Archimedeischen Polyeder spezielle Fälle (Varietäten) dieser allgemeineren. Die Symmetrieebenen und Achsen der gleicheckigen Polyeder sind sonach dieselben, wie die der ursprünglichen Prismen und regulären Polyeder, sofern sie nur durch die Konstruktion nicht verloren gegangen sind. Auf Grund der Voraussetzungen, die über das Abschneiden der Ecken und Kanten zu treffen sind, erschliesst man, dass jedes gleicheckige Polyeder eine umbeschriebene Kugel besitzt. Es ist leicht ersichtlich, dass dieses Abschneiden selbst nichts anderes bedeutet, als die Kombination mehrerer Polyeder desselben Achsensystems. — Einen anderen Ausgangspunkt nimmt E. Hess, nachdem er sich in seinen früheren Arbeiten zunächst wesentlich an Hessel angeschlossen hatte, in seinem grundlegenden Werke,[2]) in dem er an die Spitze seiner Untersuchungen die Frage nach denjenigen Teilungen der Kugeloberfläche stellt, wonach dieselbe mit einem Netze von gleichen und ähnlichen sphärischen Polygonen, deren Kanten Teile von Hauptkreisbogen sind, lückenlos überdeckt wird. Zu diesen gleichflächigen Netzen bestimmt er die zugeordneten oder speziell konjugierten gleicheckigen Netze, denen die gleicheckigen Polyeder einbeschrieben, die gleichflächigen Polyeder umbeschrieben sind. Mit der vollständigen Erledigung des Netzproblems ist auch die Klassifikation aller gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder erster Art geleistet, und es zeigt sich die vollständige Übereinstimmung mit den Ergebnissen Hessels. Der Satz über die um- bezw. einbeschriebene

[1]) Hessel, Übersicht der gleicheckigen Polyeder und Hinweisung auf die Beziehungen dieser Körper zu den gleichflächigen Polyedern. Marburg 1871.

[2]) E. Hess, Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung etc. Leipzig 1883.

Kugel bildet also hier den Ausgangspunkt für die Konstruktion der beiden Klassen von Polyedern, und deren polarreziproke Zuordnung ist ebenfalls leicht zu erweisen.[1]) Die Symmetrieachsen und Ebenen der Polyeder sind identisch mit denen der Netze, die lediglich die des „Doppelpyramidentypus", des „Hexakisoktaedertypus" und des „Dyakishexekontaedertypus" sind. — Auch zur Auffindung der gleicheckigen und der gleichflächigen Polyeder höherer Art hat Hess durch Betrachtung der die Kugel mehrfach bedeckenden Netze die Grundlagen geschaffen;[2]) doch ist das allgemeine Problem z. Z. noch unerledigt, da es bisher nur gelungen ist, die festen, aber nicht die beweglichen Netze vollständig abzuleiten. Die Bestimmung der gleicheckigen oder gleichflächigen diskontinuierlichen und nichtkonvexen Polyeder höherer Art ist also ebenfalls noch ein ungelöstes Problem. Doch beweist Hess, dass auch jedes gleichflächige Polyeder höherer Art eine einbeschriebene, jedes gleicheckige Polyeder höherer Art eine umbeschriebene Kugel besitzt.[3]) — Die Zusammenstellung und Untersuchung der gleicheckigen und der gleichflächigen Polyeder erster Art, soweit sie für unsere Arbeit erforderlich ist, soll vor Betrachtung der Polyeder jedes Typus seinen Ort finden.

2. **Allgemeine Sätze über die gleicheckig-gleichflächigen Polyeder höherer Art und die Methoden ihrer Ableitung.** Jedes Polyeder, das zugleich gleicheckig und gleichflächig ist, nimmt an den Eigenschaften beider Polyederklassen teil, besitzt also sowohl eine ein- wie umbeschriebene Kugel. Das gilt also in erster Linie für dergl. Polyeder erster Art, zu denen ausser den fünf regulären Polyedern nur das quadratische und rhombische Sphenoid gehören, d. h. die Hemiedrien der geraden quadratischen Säule und des rechtwinkligen Parallelepipeds. Der gleiche Satz gilt aber auch für alle solche Polyeder höherer Art, d. h. deren sämtliche Flächen berühren eine einbeschriebene Kugel und die sämtlichen Ecken liegen auf einer umbeschriebenen Kugel, so dass die umbeschriebenen Kreise der Grenzflächen kongruente (kleine) Kreise dieser letzteren Kugel

[1]) Hess, a. a. O., S. 251.
[2]) Kugelteilung. S. 434 ff.
[3]) a. a. O. S. 435.

sind. Die innersten Zellen der Grenzflächen sind die kongruenten bezw. symmetrisch-gleichen Flächen der innersten räumlichen Zelle des gleicheckig-gleichflächigen Polyeders und begrenzen also ein *gleichflächiges Polyeder erster Art*. Daraus folgt, dass für das polarreziproke Polyeder, das ebenfalls gleicheckig und gleichflächig ist, die Ecken die eines *gleicheckigen Polyeders erster Art* sind, d. h. dass die äussersten Doppelebenen der Ecken des Polyeders höherer Art ein der Kugel eingeschriebenes gleicheckiges Polyeder der ersten Art begrenzen.[1]) Sind P und P' zwei polarreziproke gleicheckig-gleichflächige Polyeder höherer Art, so ist das die innerste Zelle von P [von P'] bildende gleichflächige Polyeder — der „*Kern*“ von P [bezw. P'] — polarreziprok dem die Ecken von P' [von P] bildenden gleicheckigen Polyeder, — der „*Hülle*“ von P' [bezw. P]. Ist P ein *autopolares* gleicheckig-gleichflächiges Polyeder, so sind Kern und Hülle polarreziproke Polyeder; doch gilt der Satz nicht umgekehrt. Zwei Polyeder P und P', die jedes polarreziproken Kern und Hülle besitzen, brauchen, obgleich die Kerne und Hüllen beider dieselben (isomorphen) Polyeder sind, *nicht* autopolar zu sein, sondern es ist eines das polarreziproke des anderen. Wir nennen solche Polyeder P und P' *parapolar*. — Auf Grund der oben angeführten Sätze ergeben sich nun die folgenden Konstruktionen, mittels deren die sämtlichen gleicheckig-gleichflächigen Polyeder, auch die diskontinuierlichen und nichtkonvexen, gefunden werden können, da die Sätze für diese ihre Gültigkeit behalten. Es sind Verallgemeinerungen derjenigen Konstruktionen der regulären Polyeder höherer Art, die wir *Poinsot* und *Cauchy* verdanken. Die erste Konstruktionsmethode geht von den gleicheckigen Hüllen aus. Legt man nämlich durch die Eckpunkte eines gleicheckigen Polyeders erster Art Diagonalebenen, und betrachtet diejenigen Flächen, die, indem sie *eine* Kugel berühren, ein gleichflächiges Polyeder erster Art bilden, so ergeben sich in diesen Flächen die Grenzflächen von gleicheckig-gleichflächigen Polyedern höherer Art, wenn in jeder Ecke der Hülle gleichviel solcher Flächen auftreten und daselbst kongruente bezw. symmetrisch-gleiche geschlossene Ecken (kontinuierliche oder diskontinuierliche) bilden. Dabei kann die Grenzfläche selbst konvex oder nichtkonvex, kontinuierlich oder nicht sein. In den

[1]) Beweis: Hess, Kugelteilung. S. 447.

folgenden Untersuchungen wird diese Methode häufig in erster Linie verwandt werden, um die mögliche Existenz von Polyedern höherer Art zu erschliessen, während die Konstruktion der Grenzflächen und die weitere Betrachtung der Polyeder sich auf Grund der folgenden zweiten Methode der Ableitung ergeben wird.

Bringt man die Ebene einer ersten Grenzfläche eines gleichflächigen Polyeders erster Art zum Schnitt mit sämtlichen Ebenen der Flächen dieses Polyeders, d. h. konstruiert man die sog. vollständige Figur des gleichflächigen Polyeders, so erhält man in jener ersten Ebene die Spuren sämtlicher Ebenen des inneren Kerns eines oder mehrerer gleicheckig-gleichflächiger Polyeder, deren Grenzflächen also von einer gewissen Anzahl dieser Spuren gebildet werden. Um diese Grenzflächen zu finden, hat man diejenigen Schnittpunkte der Spuren aufzusuchen, die auf einer Kugel so wie die Ecken eines gleicheckigen Polyeders erster Art liegen. Diese Schnittpunkte müssen also Punkte eines Kreises sein, und durch jeden Schnittpunkt müssen gleichviel Spuren laufen, da die Ecken des zu findenden Polyeders von gleichviel Ebenen begrenzt werden. Bilden dabei die Verbindungskanten ein konvexes Polygon, dessen sämtliche Kanten dem Mittelpunkt des Kreises ihre Innenseite zukehren, so ist das gefundene Polyeder ein konvexes, und zwar sicher ein diskontinuierliches, wenn das Polygon selbst diskontinuierlich ist.[1]) Andernfalls ist das Polyeder stets nichtkonvex. — Diese Methode hat den Vorzug, dass sich die Konstruktion in der Ebene der Grenzfläche des gleichflächigen Polyeders leichter ausführen und übersehen lässt als die Legung der Ebenen durch die Ecken der gleicheckigen Hülle. Über die Einzelheiten der Konstruktion ist später an Ort und Stelle Auskunft zu geben. Wir bringen im folgenden § zunächst eine vollständige Tabelle aller gleicheckig-gleichflächigen Polyeder, die der ersten Art sowie die bereits erledigten konvexen Polyeder höherer Art inbegriffen und geben damit zugleich ein Schema für die Einteilung der Polyeder. Dabei beachte man folgende Bemerkungen. Die verschiedenen Varietäten der „Kerne" und „Hüllen" sind durch gewisse Parameter σ, τ und s, t charakterisiert, deren Bedeutung später ausführlich erläutert wird,

[1]) Doch können kontinuierliche Polygone zu diskontinuierlichen Polyedern gehören.

ebenso wie die Achsen- und Symmetrieverhältnisse der drei Typen, des Doppelpyramidentypus, des Hexakisoktaedertypus und des Dyakishexekontaedertypus, denen sämtliche gleicheckig-gleichflächigen Polyeder nach den allgemeinen Erläuterungen zugehören müssen. Es dient diese Zusammenstellung nur zur vorläufigen Orientierung und nur diejenigen Polyeder sollen ausführlich charakterisiert werden, die im folgenden nicht weiter zur Sprache kommen; diese anderweit beschriebenen und abgebildeten Polyeder sind durch ein *) angezeigt, auch ist auf die diesbezüglichen Quellenschriften hingewiesen.[1]) Hierüber sei noch bemerkt, dass mit K und H der innere Kern bezw. die äussere Hülle bezeichnet ist.

§ 3. Klassifikation der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder.

Wir teilen die Polyeder (das Beiwort „gleicheckig-gleichflächig" wird auch künftig meist weggelassen, wenn kein Irrtum möglich ist) in erster Linie in die konvexen und nichtkonvexen, die konvexen in kontinuierliche und diskontinuierliche ein, während die nichtkonvexen zunächst in die beiden Abteilungen der zweiseitigen und einseitigen Polyeder zerfallen u. s. w.

I. Konvexe Polyeder.

(Sie sind stets zweiseitig.)

A. Kontinuierliche Polyeder.

a) Reguläre Polyeder.

(Die Polyeder sind begrenzt von regulären Polygonen, also auch gleichkantig.)

*) .... α) Reguläre Polyeder erster Art. Dies sind die fünf den Elementen angehörenden Platonischen Polyeder: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder und Dodekaeder, von denen das zweite und vierte, sowie das dritte und fünfte polarreziprok sind, das erste autopolar ist.

[1]) Es beziehen sich also für die unter *) angeführten Polyeder die Angaben der Figuren auf die Tafeln in V. u. V.; während die Angaben bei den übrigen Polyedern, so weit sie sich vorfinden, auf die Figuren der Tafeln der vorliegenden Abhandlung hinweisen.

β) Reguläre Polyeder höherer Art. K und H sind reguläre Polyeder erster Art. Die vier Kepler-Poinsotschen Sternpolyeder:

*).... 1. Das Keplersche zwölfeckige Sternzwölfflach der dritten Art. K: Das Dodekaeder. H: Das Ikosaeder.

*).... 2. Das Poinsotsche zwölfflächige Sternzwölfeck der dritten Art. K: Das Dodekaeder. H: Das Ikosaeder.

*).... 3. Das Poinsotsche zwanzigflächige Sternzwölfeck der siebenten Art. K: Das Ikosaeder. H: Das Ikosaeder.

*).... 4. Das Keplersche zwanzigeckige Sternzwölfflach der siebenten Art. K: Das Dodekaeder. H: Das Dodekaeder.

Es sind die Polyeder 1. und 2., sowie 3. und 4. polarreziprok zu einander. (Erste vollständige Ableitung: Poinsot, Memoire sur les polygones et les polyèdres. J. de l'éc. polyt. 10 cah. t. IV. à Paris 1810. S. 16—46. Die weiteren Abhandlungen von Bertrand, Cauchy, Cayley, Wiener u. a. s. V. u. V. S. 176 ff. Abbildungen bei Wiener, Über Vielecke und Vielflache. Leipzig 1864. Auch V. u. V. Tafel VII, IX, X u. XI.)

b) Nichtreguläre Polyeder.

(Sie sind nur gleicheckig und gleichflächig, aber nicht gleichkantig.)

*).... α) Nichtreguläre Polyeder erster Art: Das quadratische und rhombische Sphenoid (Doppelpyramidentypus). (V. u. V. Taf. VI Fig. 41a und Fig. 44.)

β) Nichtreguläre Polyeder höherer Art. Solcher gibt es neun, von denen die acht ersten, dem Dyakishexekontaedertypus zugehörend, von Hess ausführlich behandelt sind; die Abbildungen sind in V. u. V. gegeben. Es sind die Polyeder 1. und 2., 3. und 4., 5. und 6., 7. und 8. polarreziprok.

*).... 1. Das $20 . (3 + 2 . 3)_2$-flächige $60\,(3)_1$-Eck[1]) der 5. Art. K: Das Ikosaeder. H: Die Archimedeische Varietät (kurz: A. V.) des $(12 + 20 + 30)$-flächigen 60-Ecks. (Hess a. a. O. S. 40 ff. V. u. V. S. 207 Nr. 154. Die Abbildung daselbst auf Taf. IX Fig. 17.)

---

1) Über diese abgekürzte, von Hess eingeführte Bezeichnungsweise, die die Zahl und Art der Grenzflächen und Ecken angibt, vergl. V. u. V. S. 165 Nr. 126.

*).... 2. Das $20 . (3+2 . 3)_2$-eckige $60 (3)_1$-Flach der 5. Art. *K*: Die A. V. des Deltoidhexekontaeders. *H*: Das Dodekaeder. (Hess a. a. O. S. 52 ff. V. u. V. S. 207.)

*).... 3. Das $20 . (3+2 . 3)_4$-flächige $60 . (3)_1$-Eck der 25. Art. *K*: Das Ikosaeder. *H*: das $(12+20)$-flächige $12 . 5$-Eck für $t = \frac{\sqrt{5}+2}{5}$. (Hess a. a. O. S. 46 ff. V. u. V. S. 208 Nr. 155. Die Abbildung ebenda Taf. XI Fig. 14.)

*).... 4. Das $20 . (3+2 . 3)_4$-eckige $60 (3)_1$-Flach der 25. Art. *K*: Das Pentakisdodekaeder für $\tau = 5(\sqrt{5}-2)$. *H*: Das Dodekaeder. (Hess, a. a. O. S. 59 ff. V. u. V. S. 208; abgebildet auf Taf. XII Fig. 10 und 16.)

*).... 5. Das $30 . (4+4+4)_3$-flächige $2 . 60 (3)_1$-Eck der 15. Art. *K*: Das Triakontaeder. *H*: Das $(12+20+30)$-flächige $2 . 60$-Eck für $s = \frac{11+3\sqrt{5}}{19}$, $t = \frac{21\sqrt{5}+20}{95}$. (Hess a. a. O., S. 70 ff. V. u. V. S. 210 Nr. 157. Die Abbildung findet sich dort Taf. XI Fig. 4 und Taf. XII Fig. 7.)

*).... 6. Das $30 . (4+4+4)_3$-eckige $2 . 60 (3)_1$-Flach der 15. Art. *K*: Das Dyakishexekontaeder für $\sigma = \frac{11-3\sqrt{5}}{4}$, $\tau = \frac{21\sqrt{5}-20}{19}$. *H*: Das $(12+20)$-flächige 30-Eck oder Triakontagon. (Hess, a. a. O. S. 87. V. u. V. S. 210; abgebildet Taf. XII Fig. 11 und 17.)

*).... 7. Das $30 . (4+4+4)_5$-flächige $2 . 60 (3)_1$-Eck der 45. Art. *K*: das Triakontaeder. *H*: Die A. V. des $(12+20+30)$-flächigen $2 . 60$-Ecks. (Hess, a. a. O. S. 78. V. u. V. S. 211 Nr. 158. Das Polyeder ist auf Taf. XII in Fig. 8 und 20 abgebildet.)

*).... 8. Das $30 . (4+4+4)_5$-eckige $2 . 60 (3)_1$-Flach der 45. Art. *K*: Die A. V. des Dyakishexekontaeders. *H*: Das Triakontagon. (Hess, a. a. O. S. 90 ff. V. u. V. S. 211 nebst den Figuren 12 und 21 auf Taf. XII.)

9. Das $48 . (6)_2$-eckige $48 . (6)_2$-Flach der 24. Art. *K*: Das Hexakisoktaeder für $\sigma = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$, $\tau = 3-\sqrt{2}$. *H*: Das polarreziproke $(6+8+12)$-flächige $2 . 24$-Eck. (Vergl. diese Arbeit Kap. III § 3 Nr. 6.)

B. Diskontinuierliche Polyeder.

a) Reguläre Polyeder.

Ein diskontinuierliches gleicheckig-gleichflächiges Polyeder wird als regulär bezeichnet, wenn die einzelnen es konstituierenden Polyeder regulär sind, überdies aber Kern und Hülle ebenfalls reguläre Polyeder erster Art sind. Das Polyeder ist also stets auch gleichkantig. Von den drei hierher gehörenden Individuen, die sämtlich autopolar sind, gehört das erste dem Hexakisoktaedertypus, die beiden anderen dem Dyakishexekontaedertypus an. Diese oft beschriebenen Polyeder sind später beiläufig nochmals erwähnt. Die Art ist wie bei allen diskontinuierlichen konvexen Polyedern natürlich gleich der Anzahl der konstituierenden Einzelpolyeder.

*).... 1. Eine Kombination zweier Tetraeder (die sog. stella octangula Keplers). *K*: Das Oktaeder. *H*: Das Hexaeder. (V. u. V. Taf. VII Fig. 20.)

*).... 2. Zwei symmetrische Gruppierungen von je fünf Tetraedern. *K*: Das Ikosaeder. *H*: Das Dodekaeder. (Die eine Gruppierung zeigt V. u. V. Taf. IX Fig. 11.)

*).... 3. Eine Kombination von zehn Tetraedern, deren *K* das Ikosaeder, deren Hülle das Dodekaeder ist. Das Polyeder ist die Kombination zweier symmetrischer Polyeder Nr. 2 und kann auch als $20.(6)_2$-eckiges $20.(6)_2$-Flach der 10. Art bezeichnet werden. (V. u. V. Taf. IX Fig. 3.)

b) Nichtreguläre Polyeder.

Wir ordnen diese Polyeder, deren Kern und Hülle gleichflächig bezw. gleicheckig von der ersten Art, aber nicht mehr regulär ist, in drei Klassen ein, je nachdem die Einzelkörper des diskontinuierlichen Polyeders erster oder höherer Art, gleichkantig oder ungleichkantig sind, und in jeder Klasse wird nach dem Achsentypus geordnet, dem die Polyeder zugehören.

α) Die Einzelkörper sind von der Art $A = 1$ und regulär, d. h. gleichkantig, sodass auch das Gesamtpolyeder gleichkantig ist.

Dem Doppelpyramidentypus gehören eine Reihe autopolare Gruppierungen von $n \geq 2$ Tetraedern an. (Vergl. Kap. II § 2 Nr. 7.)

Im Hexakisoktaedertypus gibt es eine Reihe autopolarer Gruppierungen von je zwölf Tetraedern, die als Spezialfälle der Kombinationen quadratischer Sphenoide erhalten werden (vergl. Kap. III § 2 Nr. 5 und als Beispiel Fig. 11 Taf. 22), deren *K* und *H* polarreziproke Hexakisoktaeder bezw. $(6 + 8 + 12)$-flächige 2.24-Ecke besonderer Varietät sind; und eine autopolare Gruppierung von sechs Tetraedern, deren K das Tetrakishexaeder für $\tau = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ist. (Vergl. Kap. III § 2 Nr. 5 und Fig. 6 Taf. 23.)

Dem Dyakishexekontaedertypus gehören die folgenden beiden einander polarreziproken Polyeder an:

*) .... 1. Eine Gruppierung von fünf Hexaedern. K: Das Triakontaeder. H: Das Dodekaeder. Man kann das Polyeder auch als $20(6)_2$-eckiges $30(4)_1$-Flach der 5. Art bezeichnen. (Hess, a. a. O. S. 68. V. u. V. Taf. XII Fig. 24.)

*) .... 2. Eine Gruppierung von fünf Oktaedern, oder das $20(6)_2$-flächige $30(4)_1$-Eck der 5. Art. (Hess, a. a. O. S. 39. V. u. V. Taf. IX Fig. 6.) Vergl. hierzu den Anhang zu Kap. IV § 2 der vorliegenden Arbeit.

β) Die Einzelkörper sind von der Art $A = 1$ und nicht gleichkantig. Es sind quadratische oder rhombische Sphenoide.

Die dem Doppelpyramidentypus angehörenden zahlreichen Gruppierungen werden in Kap. II § 2 dieser Abhandlung besprochen.

Dem Hexakisoktaedertypus gehören drei Hauptgruppierungen von je zwölf stets quadratischen Sphenoiden und vier Hauptgruppierungen von je zwölf rhombischen Sphenoiden an, deren K und H das allgemeinste gleichflächige bezw. gleicheckige Polyeder des Typus ist. Für die speziellen Polyeder erster Art des Typus treten an Stelle der zwölf Sphenoide unter Umständen deren sechs, und die rhombischen Sphenoide werden für bestimmte Werte σ und τ des Kernes zu quadratischen. Die vollständige Behandlung dieser Gruppierungen gibt Kap. III § 2.

Vom Dyakishexekontaedertypus existieren fünf Hauptgruppierungen von je 30 rhombischen Sphenoiden, die unter Umständen zu quadratischen werden. Ihre Besprechung bildet den Inhalt von Kap. IV § 2.

γ) Die Einzelkörper des diskontinuierlichen Polyeders sind von höherer Art. Es existieren zwei von E. Hess gefundene einander polarreziproke Anordnungen von je fünf Poinsotschen regulären Sternpolyedern, deren K eine besondere Varietät des Deltoidhexekontaeders, deren Hülle das diesem reziproke $(12 + 20 + 30)$-flächige 60-Eck ist. (Vergl. über die zugehörigen Kugelnetze: Hess, Marburger Berichte 1878 Nr. 2, sowie V. u. V. S. 213 Nr. 159 und für die Polyeder selbst den Anhang zu Kap. IV § 2 der vorliegenden Schrift. Die Abbildungen sind die Figuren 4 und 10 auf Taf. 26.)

II. Nichtkonvexe Polyeder.

A. Zweiseitige Polyeder.

(Das Möbiussche Kantengesetz erfüllende Polyeder.)

Wie vordem gezeigt, zerfallen diese Polyeder in zwei Hauptklassen, je nachdem der Inhalt positiv, von Null verschieden, erhalten werden kann (nichtkonvexe Polyeder erster Klasse), oder identisch Null ist (nichtkonvexe Polyeder zweiter Klasse oder Nullpolyeder).

a) Nichtkonvexe Polyeder erster Klasse.

α) Kontinuierliche Polyeder.

Diese Polyeder gehören sämtlich den beiden Haupttypen mit mehr als einer Hauptachse an. Sie sind zum Teil (Nr. 1, 2, 4, 5) von E. Hess in den Marb. Ber. 1877 (nicht ohne Irrtümer) angegeben.[1])

Dem Hexakisoktaedertypus gehören die folgenden drei in Kap. III § 3 Nr. 6 beschriebenen Polyeder an:

1. Das $8 . 3 (5)_4$-eckige $24 (2 + 2 + 1)$-Flach der 18. Art. *K*: Die A. V. des Triakisoktaeders. *H*: Die A. V. des $(6 + 8 + 12)$-flächigen 24-Ecks. (Fig. 6 Taf. 24.)

2. Das $24 (5)_2$-eckige $8 . 3 (2 + 2 + 1)_2$-Flach der 18. Art. *K*: Die A. V. des Deltoidikositetraeders. *H*: Die A. V. des $(6 + 8)$-flächigen $8 . 3$-Ecks (Fig. 5 Taf. 24). Polarreziprok dem vorigen.

3. Das $48 (5)_3$-eckige $48 (4 + 1)_2$-Flach der 36. Art. *K*: Das Hexakisoktaeder für $\sigma = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$, $\tau = 3 - \sqrt{2}$. *H*: Das polarreziproke $(6 + 8 + 12)$-flächige $2 . 24$-Eck. Das Polyeder ist autopolar. (Fig. 12 Taf. 25.)

Vom Dyakishexekontaedertypus sind die folgenden in Kap. IV § 5 Nr. 1 beschriebenen Polyeder:

*) .... 4. Das $12 (5 + 5)_4$-eckige $12 (5 + 5)_4$-Flach der 18. Art. *K*: Das Dodekaeder. *H*: Das Ikosaeder. Das Polyeder ist autopolar. (Hess, Marb. Ber. 1877 S. 7. V. u. V. Taf. IX Fig. 7.)

---

[1]) Einige Modelle solcher Polyeder wurden von Hess auf der Ausstellung der Deutsch. Math. Vereinigung in München 1893 vorgeführt (vergl. d. Katalog). Ihre Abbildungen s. V. u. V., die übrigen in dieser Schrift.

*).... 5. Das $20(3+3)_2$-eckige $20(3+3)_2$-Flach der 10. Art; autopolar (das sog. Keilikosaeder). *K*: Das Ikosaeder. *H*: Das Dodekaeder. (Hess, ebenda S. 7. V. u. V. Taf. VIII Fig. 26.)

6. Das $60(2+2+2)_6$-eckige $60(2+1+2+1)_3$-Flach der 120. Art ($A = 120$, $A' = 60$). *K*: Das Pentakisdodekaeder für $\tau = \frac{4\sqrt{5}+5}{11}$. *H*: Das hierzu polarreziproke $(12+20)$-flächige 12.5-Eck. Das Polyeder ist autopolar (Fig. 3 Taf. 28).

7. Das $2.60(3)_3$-eckige $30(4+4+4)_7$-Flach der 75. Art. *K*: Das Triakontaeder. *H*: Das $(12+20+30)$-flächige 2.60-Eck für $s = \frac{5\sqrt{5}+7}{19}$, $t = \frac{3\sqrt{5}+8}{19}$. (Fig. 11 Taf. 26.)

8. Das $30(4+4+4)_7$-eckige $2.60(3)_1$-Flach der 75. Art, dem vorigen polarreziprok (Fig. 7 Taf. 25).

β) Diskontinuierliche Polyeder.

Diese Polyeder sind Kombinationen von den soeben aufgezählten Polyedern II A, a) α) und zwar der Polyeder 4., 1. und 2.

1. Eine Kombination von fünf Polyedern Nr. 4. Kern und Hülle stimmen überein mit denen der Polyeder I B, b) γ).

2. Eine Kombination von fünf Polyedern Nr. 1. *K*: Eine besondere Varietät des Dyakishexekontaeders. *H*: Ein besonderes $(12+20+30)$-flächiges 2.60-Eck.

3. Eine Kombination von fünf Polyedern Nr. 2. *K* und *H* ebenfalls die allgemeinsten Polyeder des Typus. Das Polyeder ist polarreziprok dem vorigen. (Über diese drei Polyeder s. Kap. IV § 5 Nr. 2.)

b) Nichtkonvexe Polyeder zweiter Klasse.

Bei dem grossen Reichtum hier zu verzeichnender Gestalten sollen an dieser Stelle nur die kontinuierlichen Polyeder, soweit sie nicht grössere Gruppen bilden, einzeln aufgezählt werden, während wir für die diskontinuierlichen Polyeder im wesentlichen nur die Hinweise auf die §§ der vorliegenden Arbeit, in denen sie behandelt sind, zusammenstellen können.

α) Kontinuierliche Nullpolyeder.

Dem Doppelpyramidentypus gehören die sog. Stephanoide 1. und 2. Ordnung St_n und St'_p an, deren ausführliche Beschreibung den Inhalt von Kap. II § 3 bildet. Diese von überschlagenen Vierecken zweiter Art begrenzten Polyeder mit vierkantigen Ecken vierter Art sind teils kontinuierliche, teils diskontinuierliche Polyeder (vergl. Fig. 20—24 Taf. 21, Fig. 17—20 Taf. 22) und konstituieren als Einzelpolyeder den grössten Teil der diskontinuierlichen Nullpolyeder des Hexakisoktaeder- und Dyakishexekontaedertypus.

Dem Hexakisoktaedertypus gehören vier kontinuierliche Nullpolyeder an, die in Kap. III § 3 Nr. 5 beschrieben sind:

1. Das $8 . 3 (6)_6$-eckige $24 (2 + 2 + 2)_3$-Flach der 36. Art. *K*: Die A. V. des Triakisoktaeders. *H*: Die A. V. des $(6 + 8 + 12)$-flächigen 24-Ecks (Fig. 3 Taf. 24).

2. Das dem vorigen polarreziproke Polyeder (Fig. 9 Taf. 24).

3. Das $24(6)_6$-eckige $24(6)_3$-Flach der 36. Art. *K*: Das Ikositetraeder für $\sigma = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\tau = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$. *H*: Das hierzu polarreziproke $(6+8+12)$-flächige 24-Eck. Das Polyeder ist autopolar (Fig. 4 Taf. 24).

4. Das $48(6)_5$-eckige $48(6)_3$-Flach der 72. Art. *K*: Das Hexakisoktaeder für $\sigma = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$, $\tau = 3-\sqrt{2}$. *H*: Das dazu reziproke $(6 + 8 + 12)$-flächige $2 . 24$-Eck. Dieses Polyeder ist ebenfalls autopolar (Fig. 11 Taf. 25).

Vom Dyakishexekontaedertypus sind fünf kontinuierliche Nullpolyeder, deren vier, Nr. 5—8, von Hess in den Marb. Ber. 1877 Nr. 1 S. 12 angedeutet wurden (das fünfte dort angegebene Polyeder existiert nicht). Diese vier Polyeder besitzen alle zu Seitenflächen überschlagene Sechsecke dritter Art und die Ecken sind sechskantig von der sechsten Art. Je zwei der Polyeder sind einander polarreziprok zugeordnet. Die ausführliche Beschreibung findet sich Kap. IV § 4 Nr. 8. (Die Gestalten dieser Polyeder zeigen die Figuren 2, 1 und 3 Taf. 27 und Fig. 5 Taf. 26.)

9. Das $120(6)_5$-eckige $120 (6)_3$-Flach der 180. Art. Der Kern dieses autopolaren Nullpolyeders ist das Dyakishexekontaeder für $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-7}{4}$, $\tau = 8-3\sqrt{5}$. (Vergl. Kap. IV § 4 Nr. 8 und Fig. 5 Taf. 29.)

β) Diskontinuierliche Nullpolyeder.

Die konstituierenden Einzelpolyeder sind entweder die Stephanoide des Doppelpyramidentypus oder kontinuierliche Nullpolyeder des Hexakisoktaedertypus.

$\alpha\alpha$) Die Einzelpolyeder sind Stephanoide. Hierher gehören zunächst eine grosse Zahl der Stephanoide des Doppelpyramidentypus selbst und gewisse Gruppierungen von solchen Polyedern in dem allgemeinsten Polyeder des Typus. (Vergl. Kap. II § 3.)

Dem Hexakisoktaedertypus gehören drei Klassen von Gruppierungen von je sechs Stephanoiden $St'_4\binom{2}{1}$ an, die in Kap. III § 3 besprochen sind.

Vom Dyakishexekontaedertypus sind elf Klassen von Stephanoidgruppierungen, nämlich sechs Klassen von Gruppierungen von je zwölf bezw. sechs Stephanoiden $St'_5\binom{2}{1}$ und fünf Klassen von Gruppierungen von je zwölf $St'_5\binom{3}{1}$, über die in § 3 und 4 des IV. Kap. berichtet wird. Die in II A, b, α, aufgeführten Polyeder sind z. T. Grenzfälle solcher Stephanoidgruppierungen.

$\beta\beta$) Die Einzelpolyeder sind andere kontinuierliche Nullpolyeder, nämlich die Polyeder 1., 2., 3. Die ausführliche Behandlung der hierher gehörenden drei Polyeder des Dyakishexekontaedertypus bringt Kap. IV § 5 Nr. 2.

B. Einseitige Polyeder.

Die hier zu verzeichnenden sechs kontinuierlichen Polyeder gehören sämtlich dem Dyakishexekontaedertypus an und bildet ihre Betrachtung den Inhalt von Nr. 3 des Schlussparagraphen vorliegender Abhandlung. Diskontinuierliche gleicheckig-gleichflächige Möbiussche Polyeder scheinen nicht zu existieren. Das einzige im Dyakishexekontaedertypus aufgefundene diskontinuierliche einseitige Polyeder ist nur gleicheckig. (Vergl. den Schluss dieser Arbeit.)

Nach dieser Übersicht der sämtlichen gleicheckig-gleichflächigen Polyeder wenden wir uns den Einzeluntersuchungen zu. Hier klassifizieren wir die Polyeder nach den Achsen bezw. Symmetrie-Ebenen, die ihnen zukommen, je nachdem sie dem Doppelpyramidentypus, dem Hexakisoktaedertypus oder dem Dyakishexekontaedertypus zugehören. Dabei wird jedesmal eine ausführliche Behandlung der die Kerne und Hüllen bildenden gleichflächigen bezw. gleicheckigen Polyeder erster Art vorauszuschicken sein.

II. Kapitel.

Die Polyeder des Doppelpyramidentypus.

§ 1. Die gleicheckigen und die gleichflächigen Polyeder erster Art.

1. **Die vollzähligen Polyeder des Typus.** Solcher sind zwei gleichflächige und zwei ihnen polarreziproke gleicheckige anzuführen. a) Das ebenrandige $(2+n)$-eckige $2n$-Flach, d. h. die gerade n-seitige Doppelpyramide, ein gleichflächiges Polyeder, dessen Seitenflächen $2n$ gleichschenklige Dreiecke sind und von dessen Ecken eine regulär n-kantig, die n übrigen im allgemeinen $(2+2)$-kantig sind. Für die A. V. sind die vierkantigen Ecken regulär. Das dazu reziproke Polyeder, das dieselben Achsen und Symmetrieebenen besitzt wie jenes, ist das prismatische $(2+n)$-flächige $2n$-Eck, d. h. das gerade n-seitige Prisma mit regulären Deckflächen. Die Ecken sind $(2+1)$-kantig; für die A. V. sind die vierkantigen Grenzflächen Quadrate. Die Numerierung der Ecken und Flächen beider Polyeder ist dadurch in Beziehung gesetzt, dass die Flächen der Doppelpyramide Tangentialebenen in den Ecken des Prismas an dessen umbeschriebene Kugel sind. Es seien $1, 2, 3, \ldots\ldots n$ die „oberen" Flächen des gleichflächigen, bezw. Ecken des gleicheckigen Polyeders, $1', 2', 3', \ldots\ldots n'$ die entsprechenden „unteren" Flächen bezw. Ecken. Für die Achsen sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Ist $\boldsymbol{n=2p+1}$, so hat das gleichflächige Polyeder, dessen Mittelpunkt O sei und dessen n-kantige Ecken A und A' sind, neben den Hauptachsen OA und OA' n unter gleichen Winkeln gegen einander geneigte, senkrecht zur Hauptachse in O stehende Nebenachsen $OB_1, OB_2, \ldots\ldots OB_n$ nach den Ecken $B_1, B_2, \ldots B_n$ und n dergl. Kantenachsen, d. h. Achsen nach den Mitten der

Kanten $B_1 B_2$, $B_2 B_3$, ..., die die Verlängerungen OB' der Eckenachsen OB sind. — Die Eckenachsen des gleichflächigen Polyeders sind zugleich die Flächenachsen des reziproken gleicheckigen Polyeders und die OB' sind zugleich Kantenachsen für beide Polyeder. Ist $n = 2p$, so besitzt das gleichflächige Polyeder neben den Hauptachsen OA, OA' $2p$ Eckenachsen, von denen p die Verlängerungen der anderen sind: OB_1, OB'_1, OB_2, OB'_2, ... OB_p, OB'_p und $2p$ Kantenachsen OC_1, OC'_1, OC_2, OC'_2, ... für die das nämliche gilt (Fig. 17 Taf. 1). Die Eckenachsen OB_i bezw. OB'_i des gleichflächigen Polyeders fallen mit den Flächenachsen des reziproken Polyeders zusammen. Die Bezeichnung der Flächen des ersten Polyeders sei dann so gewählt, dass $\triangle B_1 B_2 A$ mit 1), $\triangle B_2 B_3 A$ mit 2), u. s. w. in demselben Sinne, bezeichnet ist; das $\triangle B_1 B_2 A'$ mit 1') u. s. w. — Für spätere Betrachtungen wird die Einführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems nötig. Wir setzen stets die senkrecht nach oben stehende Koordinatenachse als positive z-achse fest, die auf den Beschauer zu gerichtete horizontale Achse als positive x-achse und die auf der xz-ebene senkrecht stehende nach rechts verlaufende Achse als positive y-achse. Wir orientieren dann die zuletzt angeführten Polyeder so im Raume, dass die Hauptachse OA mit der positiven z-achse, die Kantenachse OC_1 mit der positiven x-achse zusammenfällt, so dass die Ebene 1) der y-achse parallel läuft, die Ecke 1) des gleicheckigen Polyeders also die y-koordinate Null hat. — Symmetrieebenen des Polyeders sind dann: Die mit der xy-ebene zusammenfallende Hauptsymmetrieebene durch die $2n$ Nebenachsen und n, unter gleichen Winkeln gegen einander geneigte senkrecht zur xy-ebene stehende Symmetrieebenen durch die Hauptachse. Ist b die Länge aller gleichen Eckenachsen des gleichflächigen Polyeders, so ist die Länge der gleichen Kantenachsen $b \cdot \cos \frac{180^0}{n}$. Die Gleichungen der Flächen und die Koordinaten der Ecken beider Polyeder lassen sich leicht aufstellen. b) An zweiter Stelle ist das ebenrandige $(2 + p + p)$-eckige $2 \cdot 2p$-Flach und das polarreziproke prismatische $(2 + p + p)$-flächige $2 \cdot 2p$-Eck anzuführen. Letzteres entsteht aus dem gleicheckigen Polyeder unter a), indem dessen $p\,(= n)$ Seitenkanten durch rechteckige Schnitte, senkrecht zu den Kantenachsen abgestumpft werden. Die neuen Deckflächen werden dadurch halbreguläre $(p + p)$-ecke mit abwechselnd gleichen Kanten, gleichen Winkeln und abwechselnd gleichen und symmetrischen Ecken, je p rechten und p linken. Die Seitenflächen sind abwechselnd kongruente Rechtecke. Das reziproke gleichflächige Polyeder ist eine Doppelpyramide, deren ebener Rand ein halbreguläres $(p+p)$-kant ist; die Seitenflächen sind ungleichseitige Dreiecke, gleichviel rechte und linke. Wir beschränken uns nur auf den Fall, der später in Frage kommt, dass p eine gerade Zahl ist. Dann besitzt das gleichflächige Polyeder neben den Hauptachsen OA, OA' p gleiche, zur Hauptachse senkrechte Nebenachsen OB_1, OB_2, ... $OB_{\frac{p}{2}}$, OB_1', OB_2', ... $OB'_{\frac{p}{2}}$, wobei die OB'_i die Verlängerungen der OB_i sind (vergl. Fig. 18 Taf. 1 für $p = 10$) und p gleiche, von den vorigen an Länge verschiedene, Nebenachsen $C_1, C_2, \ldots . C_{\frac{p}{2}}$, C_1', C_2', ... $C'_{\frac{p}{2}}$. Je zwei aufeinanderfolgende Achsen OB und OC bilden stets den Winkel von $\frac{180^0}{p}$. Wir werden das gleichflächige Polyeder im Raume stets so orientieren, dass die Hauptachse OA mit der positiven z-achse, die Achse OC_1 mit der positiven x-achse zusammenfällt. Das Dreieck AB_1C_1 sei die Fläche mit der Bezeichnung 1), AC_1B_2 die Fläche 2) u. s. w. in demselben Umlaufssinne um die Hauptachse OA. Das Spiegelbild der Fläche i) gegen die sämtliche Nebenachsen enthaltende Hauptsymmetrieebene des Polyeders sei die Fläche i'). Das polare gleicheckige Polyeder hat die Eckenachsen des gleichflächigen zu Flächenachsen und die Bezeichnung der Ecken korrespondiert mit der der Flächen des gleichflächigen Polyeders, sodass die Ecke 1) die erste Ecke links von der nach vorn liegenden Symmetrieebene durch OA und die Flächenachse OC_1 ist. Symmetrieebenen sind nämlich ausser der genannten Hauptsymmetrieebene die beiden Gruppen von je p durch die Hauptachse gelegten und unter gleichen Winkeln gegen einander geneigten Ebenen durch die p Achsen OB_i, OB_i' und die p Achsen OC_i, OC_i'. — Ist b die Länge jeder der gleichen Nebenachsen OC, so sei $b \cdot \sigma$ die Länge jeder der gleichen Achsen OB, wobei σ ein reeller Parameter > 1 ist. Ist $\sigma = 1$, so geht das gleichflächige Polyeder in ein Polyeder a) von gleicher Flächenzahl $2 \cdot 2p$ über; wird $\sigma = \frac{1}{\cos\frac{180^0}{p}}$, so ergibt sich ein Polyeder a) von der halben Flächenzahl $2p$. Sind b und bs die Abstände der beiden Arten von Rechtecken des prismatischen $(2+p+p)$-flächigen $2 \cdot 2p$-Ecks von dessen Mittelpunkte, wobei $s < 1$ ebenfalls ein reeller Parameter ist, so ergibt sich für $s = 1$ das reguläre $2p$-seitige Prisma, für

$s = \frac{\cos 180^0}{p}$ das reguläre p-seitige Prisma. Für polarreziproke Polyeder ist $s \cdot \sigma = 1$. Die analytisch-geometrische Behandlung der zugeordneten Polyeder ist auch hier leicht durchzuführen.

2. **Die hemiedrischen und hemigonischen Polyeder erster Art des Typus.** Die hier aufzuzählenden gleichflächigen Polyeder besitzen nur die Hälfte der Flächen, die gleicheckigen Polyeder nur die Hälfte der Ecken der vorher beschriebenen vollzähligen Polyeder. a) Für das ebenrandige $(2+n)$-eckige $2n$-Flach ergibt sich die plagiedrische Hemiedrie,[1]) natürlich nur für gerades $n = 2p$, wenn von den Flächen der beiden Pyramiden nur die abwechselnden oberen und unteren, $1, 3, 5, 7 \ldots$ und $2', 4', 6', \ldots$ erhalten bleiben, nämlich das sog. kronrandige $(2+2p)$-eckige $2p$-Flach $\left(\text{für } p = \frac{n}{2}\right)$. Die Grenzflächen sind Deltoide (V. u. V. Taf. VI Fig. 40 b). Das dazu reziproke kronrandige $(2+2p)$-flächige $2p$-Eck $\left(p = \frac{n}{2}\right)$, die plagiedrische Hemigonie des n-seitigen regulären Prismas für gerades n entsteht aus diesem durch Abstumpfung der abwechselnden Ecken der beiden Deckflächen mittels dreiseitiger Schnitte durch die drei Nachbarecken (V. u. V. Taf. VI Fig. 40a). Die Seitenflächen des Polyeders sind gleichschenklige Dreiecke, die für die A. V. zu gleichseitigen werden. Die Deckflächen sind um den Winkel $\frac{180^0}{p}$ um die Hauptachse gegen einander gedrehte reguläre p-ecke. Wir nehmen weiterhin dieses Abschneiden der Ecken stets so ausgeführt an, dass die Ecke 1) des vollzähligen Polyeders erhalten bleibt.

Die rhomboedrische Hemiedrie[1]) des ebenrandigen $(2+n)$-eckigen $2n$-Flaches ergibt sich für $n = 4p'$, wenn je zwei abwechselnde Paare der unteren und oberen Flächen beibehalten werden, also entweder die Flächen $1, 2, 3', 4', 5, 6, 7' \, 8' \ldots$ oder die Flächen $1, 2', 3', 4, 5, 6' \ldots \overline{n-2}', \overline{n-1}' \, n$. Die zwei entstehenden Polyeder, unterbrochen-kronrandige $(2+2p')$-eckige $2 \cdot 2p'$-Flache mit je $2p'$ rechten und linken ungleichseitigen dreieckigen Grenzflächen, sind kongruent. Dasselbe gilt für die beiden rhomboedrischen Hemigonien des $n = 4p'$-seitigen Prismas, unterbrochen-kronrandigen

[1]) Über diese der Krystallographie entlehnten Ausdrücke vergl. z. B. P. Groth. Phys. Krystallographie. Leipzig 1885. S. 291 u. S. 337.

$(2+2p')$-flächigen $2.2p'$-Ecken, die als Deckflächen zwei kongruente um $\frac{180^0}{p'}$ gegen einander gedrehte halbreguläre $(p'+p')$-ecke, als Seitenflächen $2p'$ gleichschenklige Trapeze haben, und dadurch erhalten werden, dass je zwei abwechselnde Paare von Ecken derselben Deckfläche des n-seitigen Prismas mittels trapezförmiger Schnitte durch die vier Nachbarecken getilgt werden.

b) Durch dieselben Konstruktionsmethoden ergeben sich die Hemiedrien bezw. Hemigonien für das allgemeinste vollzählige Polyeder des Typus. Die plagiedrische Hemiedrie des $(2+p+p)$-eckigen $2.2p$-Flaches ist das sägerandige $(2+2p)$-eckige $2p$-Flach, dessen Seitenflächen Trapezoide sind (V. u. V. Taf. VI Fig. 43b). Je nachdem man die eine oder andere Hälfte der abwechselnden Flächen des vollzähligen Polyeders beibehält, erhält man das rechte oder linke von zwei symmetrischen Polyedern. Das reziproke sägerandige $(2+2p)$-flächige $2p$-Eck (V. u. V. Taf. VI Fig. 43a) hat zu Seitenflächen ungleichseitige Dreiecke, zu Deckflächen reguläre p-ecke, die um einen Winkel φ gegen einander gedreht sind. Dabei ist $0 < \varphi < \frac{180^0}{p}$, denn für $\varphi = \frac{180^0}{p}$ wird das Polyeder zur gleichen Hemigonie des regulären Prismas.

Für dasselbe vollzählige gleicheckige Polyeder ergeben sich natürlich wiederum zwei hemigonische Polyeder, je nachdem man seine linken oder rechten Ecken tilgt; doch ist dies später nicht von Belang, da die Ecke 1) des vollzähligen Polyeders stets erhalten bleiben soll. Die rhomboedrische Hemiedrie des $(2+p+p)$-eckigen $2.2p$-Flaches, konstruierbar nur für $p=2p'$, ist das unterbrochen-kronrandige $(2+2p')$-eckige $2.2p'$-Flach (V. u. V. Taf. VI Fig. 42b für $p'=3$). Dasselbe vollzählige Polyeder gibt wieder zu mehreren Halbflächnern Veranlassung, die aber hier nicht kongruent sind. Dies erhellt sofort bei Betrachtung der rhomboedrischen Hemigonie des prismatischen $(2+p+p)$-flächigen $2.2p$-Ecks für $p=2p'$ (V. u. V. Taf. VI Fig. 42a). Bezeichnet man die abwechselnd gleichen Kanten der Deckfläche des vollzähligen Polyeders mit k und k', die an Länge verschiedenen zweiten Diagonalen mit d_2 und d'_2, je nachdem sie parallel einer Kante k oder k' sind, so ist für die eine Hemigonie die Deckfläche ein $(p'+p')$-eck mit den abwechselnd gleichen Kanten k und d_2, für die andere Hemigonie ein $(p'+p')$-eck mit den je p' Kanten k' und d'_2. Diese Deckflächen werden nur kongruent für $k = k'$, d. h. wenn das vollzählige Polyeder zum regulären Prisma wird. Soll auch jetzt die Ecke 1) des vollzähligen Polyeders erhalten bleiben, so ergeben sich zwei verschiedene hemigonische Polyeder, je nachdem die eine oder die andere von 1) ausgehende Kante der Deckfläche mit getilgt wird. Die Seitenflächen beider Hemigonien sind gleichschenklige, aber verschiedene Trapeze, mit den parallelen Kanten k, d_2 bezw. k', d'_2. — Für die Betrachtung der äusseren Hüllen der zu untersuchenden Sphenoidgruppierungen des Doppelpyramidentypus werden wir die Hemigonien zu berücksichtigen haben, während die Konstruktion der vollständigen Figuren der inneren Kerne der vollzähligen gleichflächigen Polyeder natürlich die Figuren der Halbflächner schon mitergibt.

3. **Konstruktion der vollständigen Figuren der gleichflächigen Polyeder des Typus.** a) Die vollständige Figur der n-seitigen Doppelpyramide wird für weitere Verwendung nur für gerades n konstruiert (Fig. 12 Taf. 2, $n = 8$). Ihre innerste Zelle ist das von den Spuren der Ebenen 2) n) und 1') gebildete gleichschenklige Dreieck AB_1B_2, die Grenzfläche 1) des gleichflächigen Polyeders. Sämtliche Achsen B und C schneiden die Ebene dieser Fläche auf der Spur 1'), und da die Grösse der Schenkel $AB_1 = AB_2$ beliebig ist, nur von der Höhe der Doppelpyramide abhängig, so sind nur die Distanzen der „Achsenpunkte“ B und C auf der Geraden 1') für die Konstruktion zu berechnen. Ist O der Mittelpunkt der Doppelpyramide, so sei $OC_1 = \varrho$, wenn C_1 die Mitte der Basis B_1B_2 der Fläche 1) ist. Nun ist $\sphericalangle\, C_1OB_2 = \frac{180^0}{n}$, $\sphericalangle\, C_1OC_2 = 2 \cdot \frac{180^0}{n}$ u. s. w. Allgemein ist $\sphericalangle\, C_1OC_i = (2i-2)\frac{180^0}{n}$, also $\sphericalangle\, C_1OB_i = (2i-3) \cdot \frac{180^0}{n}$; $(i = 2, 3 \ldots)$. Folglich gilt für die gesuchten Achsenpunkt-Distanzen:

$$C_1C_i = \varrho \cdot \tan \frac{(2i-2) \cdot 180^0}{n}$$

$$C_1B_i = \varrho \cdot \tan \frac{(2i-3) \cdot 180^0}{n}.$$

Die Achsenpunkte auf der anderen Hälfte der Spur 1') haben die korrespondierenden gleichen Distanzen. Zur Konstruktion der Spuren sämtlicher Ebenen der Doppelpyramide auf der Ebene 1) beachte man die folgenden

Tatsachen. α) Die Spuren aller Ebenen 2) 3) 4) ... n) gehen durch A. β) Die Spur der Ebene $\frac{n}{2}+1$) läuft parallel 1'). γ) Die Ebenen 1), 1'), i) und i') scheiden sich in einem Punkte, der auf einer Achse B oder C liegt, je nachdem i gerade oder ungerade ist. Ist i gerade, so schneiden sie sich auf der Achse $B_{\frac{i}{2}+1}$; für ungerades i liegt der Schnittpunkt auf $C_{\frac{i+1}{2}}$. Daraus folgt: Die Spur der Ebene i geht durch den Achsenpunkt $B_{\frac{i+2}{2}}$ oder $C_{\frac{i+1}{2}}$, je nachdem i eine gerade oder ungerade Zahl ist. Mit α) ist also jede dieser Spuren konstruierbar. Dies gilt natürlich nur, so lange $i < \frac{n}{2}+1$ ist; für spezielle Werte von n ergibt sich aber leicht die weitere Konstruktion. δ) Es sind parallel die Ebenen 1') und $\frac{n}{2}+1$), 2') und $\frac{n}{2}+2$), ... allgemein i') und $\frac{n}{2}+i$). Es sind also auch die Spuren dieser Ebene in der Ebene 1) parallel, wodurch die Richtung aller Spuren i') bestimmt ist. Diese sind also konstruierbar bei Berücksichtigung des ersten Satzes unter γ).

b) Auch die vollständige Figur des gleichflächigen ebenrandigen $(2+p+p)$-eckigen $2 . 2p$-Flaches wird nur für gerades p hier untersucht. (Vergl. Fig. 13 Taf. 2 für $p=4$ und Fig. 2 Taf. 3 für $p=10$). Das von den Spuren der Ebenen 2) 1') $2p$) in der Ebene 1) gebildete ungleichkantige Dreieck AB_1C_1 ist die Grenzfläche des gleichflächigen Polyeders und die innerste Zelle der vollständigen Figur. Sämtliche Achsen B und C schneiden die Spur 1') und es sind also zunächst wieder die Distanzen der Achsenpunkte zu bestimmen. Ist O der Mittelpunkt des Polyeders und setzt man $OC_1=b$, $OB_1=b\sigma$ und die Hauptachse $OA=b.\tau$, wobei $\sigma>1$ (s. früher), τ ein beliebiger Parameter >0 ist, so sind die Kanten der Grenzfläche 1):

$$AC_1=b\sqrt{1+\tau^2},\quad AB_1=b\sqrt{\sigma^2+\tau^2},\quad B_1C_1=b.\sqrt{1+\sigma^2-2\sigma\cos\frac{180^0}{p}}.$$

Sind λ und μ die Innenwinkel des Dreiecks B_1OC_1 in C_1 und B_1, so ist

$$\frac{\lambda+\mu}{2}=\frac{p-1}{p}.90^0 \text{ und } \tan\frac{\lambda-\mu}{2}=\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\cot\frac{90^0}{p}, \text{ (Tangentialsatz)}$$

wonach λ und μ zu berechnen sind. Beachtet man nun die Dreiecke OC_1B_2, OC_1C_2, OC_1B_3 u. s. w. in der Ebene des Dreiecks OB_1C_1, so ergeben sich die Distanzen $C_1 B_2$, $C_1 C_2$ u. s. w. jeweils durch den sinus-satz, und es ist allgemein:

$$C_1 B_i = b \,.\, \frac{\sin (2i-3)\dfrac{180^0}{p}}{\sin\left[\lambda-(2i-3)\dfrac{180^0}{p}\right]}; \quad C_1 C_i = b \,.\, \frac{\sin (2i-2)\dfrac{180^0}{p}}{\sin\left[\lambda-(2i-2)\dfrac{180^0}{p}\right]}; \quad i = 2, 3, 4 \ldots$$

so lange $(2i-3).\frac{180^0}{p}$ bezw. $(2i-2)\frac{180^0}{p} < \lambda$ ist. Alsdann ergeben sich die Achsenpunkte auf 1') in dem über B_1 hinausliegenden Strahle dieser Geraden. Es sind diese Achsenpunkte, von B_1 ausgehend: $C'_{\frac{p}{2}}$, $B'_{\frac{p}{2}}$, $C'_{\frac{p}{2}-1}$, $B'_{\frac{p}{2}-1}$ u. s. w., und man findet den vorigen Betrachtungen analog aus den Dreiecken OB_1C' bezw. OB_1B' ganz allgemein ausgedrückt:

$$B_1 C'_{\frac{p}{2}-i} = b.\sigma \frac{\sin (2i+1)\dfrac{180^0}{p}}{\sin\left[\mu-(2i+1)\dfrac{180^0}{p}\right]}; \quad B_1 B'_{\frac{p}{2}-i} = b.\sigma \frac{\sin (2i+2)\dfrac{180^0}{p}}{\sin\left[\mu-(2i+2)\dfrac{180^0}{p}\right]}; \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

so lange wiederum die Nenner positiv sind. Für $\sigma = 1$ ergibt sich die reguläre $2p$-seitige Doppelpyramide; es wird dann $\lambda = \mu$, die Achsendistanzen in beiden Strahlen der Geraden 1') werden bezw. gleich, denn es ist:

$$C_1 B_i = B_1 C'_{\frac{p}{2}-(i-2)}; \quad C_1 C_i = B_1 B'_{\frac{p}{2}-(i-2)}; \quad i = 2, 3 \ldots$$

Für die Konstruktion sämtlicher Spuren in der Ebene der Fläche 1) gelten folgende Tatsachen. Wir unterscheiden dabei die Ebenen 1, 2, ... $2p$ und 1', 2' ... $2p'$ in solche mit geradem und ungeradem Index (1, 3, 5 ... bezw. 2, 4, 6 ...).

α) Sämtliche Spuren 2) 3) ... $2p$ der oberen Flächen gehen durch A. β) Die Spuren der oberen Ebenen mit geradem Index gehen der Reihe nach durch A und einen der Achsenpunkte B oder C; 2) durch C_1, 4) durch B_2, 6) durch C_2 u. s. w. bis $2p-4$) durch $B'_{\frac{p}{2}}$, $2p-2$) durch $C'_{\frac{p}{2}}$, $2p$ durch B_1. Denn es schneiden sich 1), 1'), 2ν) und $2\nu'$) in einem Punkte derjenigen Symmetrieebene, für welche 1) und 2ν), 1') und $2\nu'$) Spiegelbilder sind, d. h. in einem Achsenpunkte. γ) Alle Spuren unterer Ebenen mit geradem Index $2\nu'$ gehen durch die gleichen Achsenpunkte wie 2ν. δ) Parallele Ebenen (die also parallele Spuren ergeben) sind 1) und $\overline{p+1'}$), 2) und $\overline{p+2'}$), 3) und

$\overline{p+3}'$ u. s. w. Da nun mit 2ν auch $\overline{p+2\nu}'$ eine gerade Zahl ist, weil p gerade ist, so sind durch δ) und γ) zunächst auch die Spuren sämtlicher unteren Ebenen mit geradem Index bestimmt. ε) Es sei nun $2\nu'$ irgend eine untere Fläche von geradem Index und $\overline{2\nu_1+1}'$ irgend eine untere Fläche von ungeradem Index. Dann ist die letztere Fläche stets das Spiegelbild der vorhergehenden gegen eine bestimmte Symmetrieebene E durch die Hauptachse des Polyeders. Bestimmt man gegen dieselbe Ebene E das Spiegelbild der Fläche 1), so ist dies stets eine obere Fläche von geradem Index $2\nu_2$, die für Konstruktionen bei bestimmtem p sofort anzugeben ist. Dann schneiden sich 1) und $2\nu_2$, sowie $2\nu'$) und $\overline{2\nu_1+1}'$) je in einer Geraden dieser Ebene E; der Schnittpunkt dieser Geraden liegt zugleich in allen Ebenen, auch in 1). Es schneiden sich also die Spuren der drei Ebenen $2\nu'$), $\overline{2\nu_1+1}'$) und $2\nu_2$) in einem Punkte der Ebene 1), d. h. die Spur $\overline{2\nu_1+1}'$ geht in 1) durch den bereits konstruierten Schnittpunkt von $2\nu_2$) und $2\nu'$). Es lassen sich danach alle Spuren der unteren Ebenen mit ungeradem Index bestimmen, da für jede solche Spur leicht mindestens zwei solcher Schnittpunkte sich angeben lassen. ζ) Die noch fehlenden Spuren der oberen Ebenen mit ungeradem Index ergeben sich durch Berücksichtigung von α) und δ) nach Erledigung von ε). Danach ist die Möglichkeit der Zeichnung der vollständigen Figur erwiesen, die für bestimmte Werte von p überdies leicht auszuführen ist.[1])

§ 2. Die Sphenoidgruppierungen des Doppelpyramidentypus.

1. **Das quadratische und rhombische Sphenoid.** Ehe wir die diskontinuierlichen konvexen Polyeder des Doppelpyramidentypus untersuchen, führen wir die beiden gleicheckig-gleichflächigen Polyeder erster Art ein, deren Kombinationen jene sämtlich sind, das quadratische und rhombische Sphenoid. Ersteres ist die Hemiedrie des gleichflächigen Oktaeders mit zwei gleichen zu einander senkrechten Nebenachsen und einer von diesen

[1]) Für die Zeichnung sei bemerkt, dass die Achsendistanzen nach Wahl eines nicht zu kleinen Massstabes etwa bis auf Viertelmillimeter genau abzutragen sind. Zur Konstruktion der Parallelen diene ein gut funktionierendes Parallelenlineal. Punkte, in denen sich mehrere Spuren schneiden, gestatten dabei eine fortwährende Kontrolle der exakten Ausführung.

verschiedenen zu beiden senkrechten Hauptachse, sowie die Hemigonie der zu jenem Oktaeder reziproken gleicheckigen quadratischen Säule. Das rhombische Sphenoid ist die Hemiedrie des gleichflächigen Oktaeders mit drei zu einander senkrechten verschiedenen Eckenachsen und die Hemigonie des rechtwinkligen Parallelepipeds mit drei verschiedenen Flächenachsen. In jedes solche Parallelepiped lassen sich zwei rhombische Sphenoide einschreiben, die als rechtes und linkes unterschieden werden, da sie nur symmetrisch sind. Lässt man die beiden Nebenachsen b und b' des Parallelepipeds konstant, so werden die rhombischen Sphenoide zu quadratischen, wenn die Hauptachse a entweder gleich b oder gleich b' wird. Die beiden eingeschriebenen quadratischen Sphenoide sind dann jeweils kongruent. Für $a = b = b'$ werden die Sphenoide zu Tetraedern. Bezeichnet man den kleineren Winkel, den die beiden sich schneidenden Kanten beider Sphenoide in der zur Hauptachse senkrechten Ebene des Parallelepipeds bilden, mit ω, so sind für $\omega < \frac{\pi}{2}$ die Sphenoide rhombisch, für $\omega = \frac{\pi}{2}$ quadratisch, ohne Rücksicht auf die Länge der Hauptachse, d. h. der variable Winkel ω bestimmt die Gestalt des Sphenoids, wenn der Radius des Umkreises jener Deckfläche des Parallelepipeds 1 gesetzt wird, und dessen Höhe eine konstante Grösse hat.

2. **Die Sphenoidgruppierungen im $(2+p+p)$-flächigen $2.2p$-Eck.** Da sämtliche diskontinuierlichen konvexen gleicheckig-gleichflächigen Polyeder des Doppelpyramidentypus Kombinationen von quadratischen oder rhombischen Sphenoiden (bezw. Tetraedern) sind, so ist ihre Art A gleich der Anzahl der die Gruppierung bildenden Einzelkörper; die Ecken sind stets dreikantig von der ersten Art und die Flächen sind ungleichseitige, gleichschenklige oder gleichseitige Dreiecke. Die Hülle ist reziprok dem inneren Kern; es sind alle diese Polyeder autopolar. Wir werden die Untersuchung ausschliesslich auf die Betrachtung der äusseren Hüllen gründen und nur bei den Beispielen auf die inneren gleichflächigen Kerne hinweisen.

Sphenoidgruppierungen im $(2+p+p)$-flächigen $2.2p$-Eck sind nur möglich, wenn p eine gerade Zahl ist, denn sie kommen dadurch zu Stande, dass die $p+p$ Ecken jeder Deckfläche sich zu je 2.2 so anordnen lassen, dass je vier Ecken der oberen und unteren Deckfläche die eines rechtwinkligen Parallelepipeds sind. Es existieren also so viel verschiedene Sphenoidgruppierungen in demselben Hüllpolyeder, als solcher Anordnungen zulässig sind. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem p doppelt oder einfach gerade ist.

Es sei zunächst $p = 4\lambda$, d. h. $2p$ durch 8 teilbar. Die zu den beiden verschiedenen Kanten des $(p+p)$-ecks gehörenden Bogen seien α und β, so dass $p\alpha + p\beta = 2\pi$, also $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2\lambda}$ ist. Es sei nun die Ecke 1 des $2 . 2p$-Ecks stets die erste Ecke eines ersten Sphenoids, also ihre „Gegenecke" $4\lambda+1$. Die der Kante $1, 4\lambda+1$ gegenüberliegende Kante des Sphenoids bilde mit der Richtung jener den spitzen Winkel ω, der eine bestimmte Funktion von α und β ist und den Zentriwinkel der kleineren Kante der Deckfläche des Parallelepipeds darstellt, dem das Sphenoid eingeschrieben ist. Der Zentriwinkel ω' der grösseren Kante ist die Ergänzung von ω zu π. Wir schreiben nun für jede mögliche Gruppierung das erste Sphenoid an, nachdem wir zunächst die übereinanderliegenden Ecken des Hüllpolyeders wie folgt fixiert haben:

$8\lambda-2$,	$8\lambda-1$	8λ	1	2	3	.....	$2\lambda+1$	....
$\overline{8\lambda-2}'$	$\overline{8\lambda-1}'$	$8\lambda'$	$1'$	$2'$	$3'$	.....	$\overline{2\lambda+1}'$	....
$4\lambda-1$	4λ	$4\lambda+1$	$4\lambda+2$	$4\lambda+3$	.....	$6\lambda+1$	....	
$\overline{4\lambda-1}'$	$4\lambda'$	$\overline{4\lambda+1}'$	$\overline{4\lambda+2}'$	$\overline{4\lambda+3}'$	.....	$\overline{6\lambda+1}'$	....	

Dabei sind die Ecken $1, 2\lambda+1, 4\lambda+1, 6\lambda+1, \ldots$ um je einen Quadranten von einander entfernt; die Kante $1, 2$ gehört zum Winkel α, die Kante $8\lambda, 1$ bezw. $2, 3$ zum Winkel β. Wir betrachten zunächst diejenigen Gruppierungen, in denen ω von der Form $i\alpha + (i-1)\beta$ oder $(i-1)\alpha + i\beta$ ist. Es sei:

der Winkel ω:	also ω':	und das erste Sphenoid
α	$(2\lambda-1)\alpha + 2\lambda\beta$	$1,\ 4\lambda+1,\ 2',\ \overline{4\lambda+2}'$
β	$2\lambda\alpha + (2\lambda-1)\beta$	$1,\ 4\lambda+1,\ 4\lambda',\ 8\lambda'$
$2\alpha+\beta$	$(2\lambda-2)\alpha + (2\lambda-1)\beta$	$1,\ 4\lambda+1,\ 4',\ \overline{4\lambda+4}'$
$\alpha+2\beta$	$(2\lambda-1)\alpha + (2\lambda-2)\beta$	$1,\ 4\lambda+1,\ \overline{4\lambda-2}',\ \overline{8\lambda-2}'$
....	....	....

$$\begin{cases} i\alpha+(i-1)\beta \\ (i-1)\alpha+i\beta \end{cases} \begin{cases} (2\lambda-i)\alpha+(2\lambda-i+1)\beta \\ (2\lambda-i+1)\alpha+(2\lambda-i)\beta \end{cases} \begin{cases} 1,\ 4\lambda+1,\ 2i',\ 4\lambda+2i' \\ 1,\ 4\lambda+1,\ 4\lambda-2\overline{i+2}',\ 8\lambda-2\overline{i+2}' \end{cases}$$

. . . .

bis:

$$\begin{cases} \lambda\alpha+(\lambda-1)\beta \\ (\lambda-1)\lambda+\lambda\beta \end{cases} \begin{cases} \lambda\alpha+(\lambda+1)\beta \\ (\lambda+1)\alpha+\lambda\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} 1,\ 4\lambda+1,\ 2\lambda',\ 6\lambda' \\ 1,\ 4\lambda+1,\ \overline{2\lambda+2}',\ 6\overline{\lambda+2}' \end{cases}$$

Alle diese Gruppierungen sind solche rhombischer Sphenoide[1]) und zwar sind stets 2λ rechte und 2λ linke Sphenoide vorhanden. Denn neben $1,\ 4\lambda+1,\ 2i',\ 4\lambda+2i'$ haben wir stets das Sphenoid $1',\ \overline{4\lambda+1}'\ 2i,\ 4\lambda+2i$ desselben Parallelepipeds. Die Anzahl solcher Gruppierungen für $p=4\lambda$ ist $2\lambda=\frac{p}{2}$. — Für $p=8$ ergeben sich z. B. vier Gruppierungen, wie aus den Figuren 1, 2, 3, 4 Taf. 2 ersichtlich ist. Jedes der Rechtecke ist die Deckfläche eines Parallelepipeds, dem zwei Sphenoide einbeschrieben sind. — Für $\omega=i\alpha+(i-1)\beta$ bezw. $(i-1)\alpha+i\beta$ gehören also stets zwei Sphenoide zusammen, ein rechtes und ein linkes. Ist aber $\omega=i\alpha+i\beta$, so haben wir zunächst nur Gruppierungen von rechten oder linken Sphenoiden. Es sei:

der Winkel ω:	also ω':	dann ist das erste Sphenoid:	oder:
$\alpha+\beta$	$(2\lambda-1)(\alpha+\beta)$	$1,\ 4\lambda+1,\ 3'\ \overline{4\lambda+3}'$	$1,\ 4\lambda+1,\ \overline{8\lambda-1}',\ \overline{4\lambda-1}'$
$2\alpha+2\beta$	$(2\lambda-2)(\alpha+\beta)$	$1,\ 4\lambda+1,\ 5'\ 4\lambda+5'$	$1,\ 4\lambda+1,\ 8\lambda-3',\ 4\lambda-3'$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$i\alpha+i\beta$	$(2\lambda-i)(\alpha+\beta)$	$1,\ 4\lambda+1,\ \overline{2i+1}',\ \overline{4\lambda+2i+1}'$	$1,\ 4\lambda+1,\ \overline{8\lambda-2i+1}',\ \overline{4\lambda-2i+1}'$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$(\lambda-1)\alpha+(\lambda-1)\beta$	$(\lambda+1)(\alpha+\beta)$	$1,\ 4\lambda+1,\ 2\overline{\lambda-1}',\ 6\lambda-1'$	$1,\ 4\lambda+1,\ 6\lambda+3',\ \overline{2\lambda}+3'$

Es sind dies $\lambda-1$ Gruppierungen von 4λ rechten Sphenoiden und $\lambda-1$ Gruppierungen von 4λ linken Sphenoiden, also $\frac{p}{2}-2$ Gruppierungen. Für $p=8$ $(\lambda=2)$ ergeben sich z. B. zwei solcher sog. „gedrehter" Gruppierungen, eine von acht rechten und eine von acht linken rhombischen Sphenoiden. Fig. 5 Taf. 2 zeigt die acht oberen Kanten, zu denen diejenigen unteren acht Kanten gehören, die man erhält, wenn man die Figur in dem einen

[1]) Dass sie für bestimmte Längen der Hauptachse des Hüllpolyeders in quadratische übergehen, wird hier nicht berücksichtigt.

oder anderen Sinne um den Winkel $\alpha + \beta$ um den Mittelpunkt dreht. — Die noch fehlende letzte Gruppe $\lambda\alpha + \lambda\beta$, deren erstes Sphenoid $1, 4\lambda + 1, \overline{2\lambda+1}', \overline{6\lambda+1}'$ ist, ist eine Kombination von $2 . 2\lambda$ quadratischen Sphenoïden, die aber gleichsam zu den Gruppierungen $i\alpha + (i-1)\beta$ gehört, denn es sind je zwei Sphenoide in einer quadratischen Säule erhalten. Vergl. Fig. 6 Taf. 2 für $p = 8$, $\lambda = 2$. Endlich ist nun noch zu beachten, dass die je zwei Gruppierungen von linken und rechten Sphenoiden für $i\alpha + i\beta$ sich zu einer Gruppierung von 8λ Sphenoiden zusammenfassen lassen. In jeder Ecke des Hüllpolyeders fallen dann zwei Ecken zweier Sphenoide zusammen, und je zwei Flächen zweier Sphenoide liegen in einer Ebene. Dieses Vorkommnis tritt zum ersten Male auf, wenn $\lambda = 2$, d. h. $p = 8$ ist, denn für $\lambda = 1$ ergeben sich ersichtlich für gleiche Koëffizienten von α und β nur quadratische Sphenoide. Wir haben also für $\boldsymbol{p = 4\lambda}$ das Resultat: Es gibt $\frac{p}{2}$ Gruppierungen von je p rhombischen Sphenoiden, $\frac{p}{2}$ rechten und $\frac{p}{2}$ linken, ferner $2\left(\frac{p}{4} - 1\right)$ Gruppierungen von p dergl. Sphenoiden, von denen gleichviel nur rechte oder nur linke Sphenoide enthalten und endlich $\frac{p}{4} - 1$ Gruppierungen von je $2p$ Sphenoiden, bei denen je zwei Sphenoide eine Ecke des Hüllpolyeders gemeinsam haben und je zwei Flächen in einer Ebene des Kernpolyeders liegen, also in Summa im $2 . 2p$-Eck $\frac{5}{4}\,p - 3$ Gruppierungen rhombischer Sphenoide; dazu kommt nur eine Gruppe quadratischer Sphenoide. Als Beispiel geben wir später wegen weiterer Verwendung den Fall $p = 4$.

Es seien nun die Sphenoide für den Fall zu untersuchen, dass $\boldsymbol{p = 4\lambda - 2}$ ist, also die Ecken des Hüllpolyeders die folgenden sind:

$8\lambda-6$	$8\lambda-5$	$8\lambda-4$	1	2	$3 \ldots$	$4\lambda-3$	$4\lambda-2$	$4\lambda-1$	4λ	$4\lambda+1$
$\overline{8\lambda-6}'$	$\overline{8\lambda-5}'$	$\overline{8\lambda-4}'$	$1'$	$2'$	$3' \ldots$	$\overline{4\lambda-3}'$	$\overline{4\lambda-2}'$	$\overline{4\lambda-1}'$	$4\lambda'$	$\overline{4\lambda+1}'$

Der Bogen zwischen den Ecken 1 und $4\lambda - 1$ ist π; die um $\frac{\pi}{2}$ von 1 abstehenden Punkte sind keine Ecken. Wir untersuchen wieder zunächst die Fälle, in denen je ein rechtes und ein linkes Sphenoid einem Parallelepiped eingeschrieben sind, d. h. der kleinere Bogen von der Form $i\alpha + (i-1)\beta$ oder $(i-1)\alpha + i\beta$ ist. Es ergibt sich das folgende Schema (da jetzt $(2\lambda - 1)(\alpha + \beta) = \pi$ ist), so lange $i < \lambda$ bleibt:

der Winkel ω:	also ω':	das erste Sphenoid ist:
$\begin{cases}\alpha\\ \beta\end{cases}$	$\begin{cases}(2\lambda-2)\alpha+(2\lambda-1)\beta\\ (2\lambda-1)\alpha+(2\lambda-2)\beta\end{cases}$	$\begin{cases}1,\ 4\lambda-1,\ 2',\ 4\lambda'\\ 1,\ 4\lambda-1,\ \overline{4\lambda-2}',\ \overline{8\lambda-4}'\end{cases}$
$\begin{cases}2\alpha+\beta\\ \alpha+2\beta\end{cases}$	$\begin{cases}(2\lambda-3)\alpha+(2\lambda-2)\beta\\ (2\lambda-2)\alpha+(2\lambda-3)\beta\end{cases}$	$\begin{cases}1,\ 4\lambda-1,\ 4',\ \overline{4\lambda+2}'\\ 1,\ 4\lambda-1,\ \overline{4\lambda-4}',\ \overline{8\lambda-6}'\end{cases}$
. . . .	. . . .	. . . .
$\begin{cases}i\alpha+(i-1)\beta\\ (i-1)\alpha+i\beta\end{cases}$	$\begin{cases}(2\lambda-i-1)\alpha+(2\lambda-i)\beta\\ (2\lambda-i)\alpha+(2\lambda-i-1)\beta\end{cases}$	$\begin{cases}1,\ 4\lambda-1,\ 2i',\ \overline{4\lambda+2i-2}'\\ 1,\ 4\lambda-1,\ \overline{4\lambda-2i}',\ \overline{8\lambda-2i-2}'\end{cases}$
. . . .	. . . .	. . . .
bis:		
$\begin{cases}(\lambda-1)\alpha+(\lambda-2)\beta\\ (\lambda-2)\alpha+(\lambda-1)\beta\end{cases}$	$\begin{cases}\lambda\alpha+(\lambda+1)\beta\\ (\lambda+1)\alpha+\lambda\beta\end{cases}$	$\begin{cases}1,\ 4\lambda-1,\ \overline{2\lambda-2}',\ \overline{6\lambda-4}'\\ 1,\ 4\lambda-1,\ \overline{2\lambda+2}',\ 6\lambda'\end{cases}$

Dabei ist im allgemeinen Falle das andere Sphenoid des ersten Parallelepipeds:

$$\begin{cases}1',\ \overline{4\lambda-1}',\ 2i,\ 4\lambda+2i-2,\\ 1',\ \overline{4\lambda-1}',\ 4\lambda-2i,\ 8\lambda-2i-2.\end{cases}$$

Wird $i=\lambda$, so ist $\omega=\begin{cases}\lambda\alpha+(\lambda-1)\beta\\ (\lambda-1)\alpha+\lambda\beta\end{cases}$, $\omega'=\begin{cases}(\lambda-1)\alpha+\lambda\beta\\ \lambda\alpha+(\lambda-1)\beta\end{cases}$, d. h. es ist nur ω mit ω' vertauscht, also die zweite Gruppierung mit der ersten identisch. Danach ergab sich: Für $p=4\lambda-2$ ist die Zahl der Anordnungen rhombischer Sphenoide, je $\frac{p}{2}$ rechter und linker $2\lambda-1$ oder $\frac{p}{2}$.

Ist $\omega=i\alpha+i\beta$, so erhält man die folgende Übersicht:

ω:	ω':	das erste Sphenoid:	oder:
$\alpha+\beta$	$(2\lambda-2)(\alpha+\beta)$	$1,\ 4\lambda-1,\ 3',\ \overline{4\lambda+1}'$	$1,\ 4\lambda-1,\ \overline{8\lambda-5}',\ \overline{4\lambda-3}'$
$2\alpha+2\beta$	$(2\lambda-3)(\alpha+\beta)$	$1,\ 4\lambda-1,\ 5',\ \overline{4\lambda+3}'$	$1,\ 4\lambda-1,\ \overline{8\lambda-7}',\ \overline{4\lambda-5}'$
$i\alpha+i\beta$	$(2\lambda-i-1)(\alpha+\beta)$	$1, 4\lambda-1, \overline{2i+1}', \overline{4\lambda+2i-1}'$	$1, 4\lambda-1, \overline{8\lambda-2i-3}', \overline{4\lambda-2i-1}'$
$(\lambda-1)\alpha+(\lambda-1)\beta$	$2\lambda(\alpha+\beta)$	$1,\ 4\lambda-1,\ \overline{2\lambda-1}',\ 6\lambda-3'$	$1,\ 4\lambda-1,\ 6\lambda-1',\ \overline{2\lambda+1}'$

Es ergeben sich also $2(\lambda-1)$ Anordnungen von p rhombischen Sphenoiden, und zwar $\lambda-1$ Anordnungen nur rechter und $\lambda-1$ solcher nur linker Sphenoide. Ihre Vereinigung gibt dann wiederum $\lambda-1$ Anordnungen von $2p$ Sphenoiden, bei denen je zwei Ecken in eine Ecke des Hüllpolyeders fallen und je zwei Flächen verschiedener Sphenoide in einer

Ebene des Kernes liegen. Ist also $p = 4\lambda - 2$, so existieren im ganzen $5\lambda - 4$ oder $\frac{5p-2}{4} - 1$ Gruppierungen rhombischer Sphenoide; stets quadratische Sphenoide gibt es hier nicht. — Wir betrachten nun zunächst die hemigonischen Hüllpolyeder und die dann noch zulässigen Gruppierungen von Sphenoiden.

3. **Die Sphenoidgruppierungen, deren Hüllen hemigonische Polyeder des $2 . 2p$-Ecks sind.** Wir untersuchen die Hemigonien zunächst für den Fall, dass für das vollzählige Polyeder $p = 4\lambda$ ist. Dabei sei die Hälftezahl der Ecken stets so gewählt, dass die Ecke 1) mit erhalten bleibt. Für die plagiedrische Hemigonie sind dann die noch vorhandenen Ecken: $\ldots 8\lambda - 1, 8\lambda', 1, 2', 3, 4', 5 \ldots\ldots 2\lambda - 1, 2\lambda', 2\lambda + 1, \overline{2\lambda + 2}', \ldots 4\lambda - 1, 4\lambda', 4\lambda + 1, \ldots 6\lambda - 1, 6\lambda', 6\lambda + 1, \ldots 8\lambda - 1, 8\lambda', 1 \ldots$ Aus dieser Angabe ersieht man sofort, dass die Gruppierungen rhombischer Sphenoide, für die $\omega = i\alpha + i\beta$ war, im hemigonischen Polyeder nicht möglich sind, da die vier Eckenzahlen $1, 4\lambda + 1, \overline{2i + 1}', \overline{4\lambda + 2i + 1}'$ des ersten Sphenoids sämtlich ungerade sein müssten. Es ergibt sich also auch keine plagiedrische Hemigonie quadratischer Sphenoide. Die Sphenoidgruppierungen des vollzähligen Polyeders, für die $\omega = i\alpha + (i-1)\beta$ oder $(i-1)\alpha + i\beta$ ist, ergeben dagegen sämtlich plagiedrische Hemigonien, und zwar an Zahl deren ebensoviel als es vollzählige Gruppierungen gibt. Denn es sind die beiden Sphenoide $1, 4\lambda + 1, 2i', \overline{4\lambda + 2i}'$ und $1, 4\lambda + 1, \overline{4\lambda - 2i + 2}', \overline{8\lambda - 2i + 2}'$ vorhanden, natürlich immer nur das eine oder andere der beiden Sphenoide, die demselben $(2 + 2 + 2)$-flächigen $2 . 4$-Eck eingeschrieben sind, so dass diese Gruppierungen das Aussehen von „gedrehten" Sphenoiden erhalten. Für die erste rhomboedrische Hemigonie sind die noch vorhandenen Ecken: $\ldots 8\lambda, 1, 2', 3', 4, 5, 6', 7', \ldots 4i, 4i + 1, \overline{4i + 2}', \overline{4i + 3}', \ldots$ Es lassen also die Zahlen der unten verbleibenden Ecken bei Division durch 4 die Reste 2 oder 3. Für die Gruppierungen im vollzähligen Polyeder, für welche

$$\omega = \begin{cases} i\alpha + (i-1)\beta \\ (i-1)\alpha + i\beta \end{cases} \text{ und das erste Sphenoid } \begin{cases} 1, 4\lambda + 1, 2i', \overline{4\lambda + 2i}' \\ 1, 4\lambda + 1, \overline{4\lambda - 2i + 2}' \; \overline{8\lambda - 2i + 2}' \end{cases}$$

ist, sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem i gerade oder ungerade ist. Ist $i = 2\mu + 1$, so ist $2i' = \overline{4\mu + 2}'$ und $\overline{4\lambda + 2i}' = \overline{4\lambda + 4\mu + 2}'$, d. h.

beide Zahlen lassen bei Division durch 4 den Rest 2; das erste der beiden angeschriebenen Sphenoide ist also möglich; dagegen fällt das zweite Sphenoid fort, denn es ist $\overline{4\lambda-2i+2}' = \overline{4\lambda-4\mu}'$ durch 4 ohne Rest teilbar. Ist $i=2\mu$, so ist $2i' = 4\mu'$, d. h. das erste der beiden Sphenoide ist unmöglich; dagegen ist $\overline{4\lambda-2i+2}' = \overline{4\lambda-4\mu+2}'$ und $\overline{8\lambda-2i+2}' = \overline{8\lambda-4\mu+2}'$, d. h. das zweite Sphenoid ist vorhanden. Wir haben also soweit λ rhomboedrisch-hemigonische Gruppierungen. Was nun die Gruppierungen für $\omega = i\alpha + i\beta$ anbetrifft, so unterscheiden wir zunächst $i<\lambda$ von $i=\lambda$, d. h. die rhombischen Sphenoide von den quadratischen. Es sei vorerst $i<\lambda$. Ist $i=2\mu$, so ist das erste Sphenoid $1,\ 4\lambda+1,\ \overline{4\mu+1}',\ \overline{4\lambda+4\mu+1}'$ oder $1,\ 4\lambda+1,\ \overline{8\lambda-4\mu+1}',\ \overline{4\lambda-4\mu+1}'$, d. h. beide sind unmöglich; ist dagegen $i=2\mu+1$, so ist das erste Sphenoid: $1,\ 4\lambda+1,\ \overline{4\mu+3}',\ \overline{4\lambda+4\mu+3}'$ oder $1,\ 4\lambda+1,\ \overline{8\lambda-4\mu-1}',\ \overline{4\lambda-4\mu-1}'$; diese beiden Sphenoide sind möglich, denn die Zahlen lassen sämtlich bei Division durch 4 den Rest 3. Wir haben also für ungerades i zwei Gruppierungen von je $\frac{p}{2}$ gedrehten Sphenoiden, demnach existiert auch eine Gruppierung von p rhombischen Sphenoiden, $\frac{p}{2}$ rechten und $\frac{p}{2}$ linken, bei denen je zwei Ecken in einen Punkt, je zwei Flächen in eine Ebene fallen und deren Ecken die eines unterbrochen kronrandigen $\left(2+2.\frac{p}{2}\right)$-flächigen $2.2.\frac{p}{2}$-Ecks sind. Zum ersten Male treten diese Gruppierungen auf, wenn für das vollzählige Polyeder $p=8$, d. h. $\lambda=2$, also $i=1$, $\mu=0$ ist. Die Sphenoide der vollzähligen Gruppierungen sind:

1, 9, 3', 11'	5, 13, 7', 15'		1, 9, 15', 7'	5, 13, 3', 11'
2, 10, 4', 12'	6, 14, 8', 16'	und	2, 10, 16', 8'	6, 14, 4', 12'
3, 11, 5', 13'	7, 15, 9', 1'		3, 11, 1', 9'	7, 15, 5', 13'
4, 12, 6', 14'	8, 16, 10', 2'		4, 12, 2', 10'	8, 16, 6', 14'

Es sind dann die beiden hemigonischen Gruppierungen die der Sphenoide:

1, 9, 3', 11'	5, 13, 7', 15'	und	1, 9, 15', 7'	5, 13, 3', 11'
4, 12, 6', 14'	8, 16, 10', 2'		4, 12, 2', 10'	8, 16, 6', 14'

Dazu kommt das Polyeder, das durch die Vereinigung dieser beiden Gruppierungen entsteht. — Nun ist der Fall $i=\lambda$ zu untersuchen. Für gerades λ ist eine erste rhomboedrische Hemigonie wieder unmöglich. Ist dagegen $\lambda = 2\mu + 1$, so ist das erste Sphenoid $1, 8\mu + 5, \overline{4\mu + 3'}, \overline{12\mu + 7'}$, wie die Zahlen anzeigen, möglich, d. h. es existiert eine rhomboedrisch-hemigonische Kombination quadratischer Sphenoide, wenn λ eine ungerade Zahl, d. h. p von der Form $8\mu + 4$ ist. (Dieser Fall tritt zum ersten Male für $\mu = 0$, $p = 4$ ein.)

Wir untersuchen nun die zweite rhomboedrische Hemigonie. Die noch vorhandenen Ecken sind jetzt: $\overline{8\lambda - 1'}, 8\lambda', 1, 2, 3', 4', \ldots\ldots \overline{4i - 1'}, 4i'$, $4i + 1, 4i + 2, \overline{4i + 3'}, \overline{4i + 4'} \ldots\ldots$, d. h. die unteren verbleibenden Ecken des vollzähligen Polyeders lassen bei Division durch 4 den Rest 0 oder 3. Wir beginnen wieder mit Betrachtung der Gruppierungen, für die $\omega = i\alpha + (i-1)\beta$ oder $\omega = (i-1)\alpha + i\beta$ ist, wobei die beiden Sphenoide $1, 4\lambda + 1, 2i' \; \overline{4\lambda + 2i'}$ und $1, 4\lambda + 1, \overline{4\lambda - 2i + 2'}, \overline{8\lambda - 2i + 2'}$ sind. Ist $i = 2\mu + 1$, so ist $2i' = \overline{4\mu + 2'}$, $\overline{4\lambda + 2i'} = \overline{4\lambda + 4\mu + 2'}$, d. h. beide lassen bei Division durch 4 den Rest 2, also ist die Gruppierung unmöglich. Dagegen ist $\overline{4\lambda - 2i + 2'} = \overline{4\lambda - 4\mu - 1'}$, lässt also bei Division durch 4 den Rest 3, und $\overline{8\lambda - 2i + 2'} = \overline{8\lambda - 4\mu'}$, d. h. das Sphenoid ist möglich. — Ist dagegen $i = 2\mu$, so ist für das erste Sphenoid $2i' = 4\mu'$, $\overline{4\lambda + 2i'} = \overline{4\lambda + 4\mu'}$, d. h. es ist vorhanden, während hier das zweite Sphenoid nicht existiert, denn $\overline{4\lambda - 2i + 2'} = \overline{4\lambda - 4\mu + 2'}$ ergibt bei Division durch 4 den Rest 2. — Für den Fall $\omega = i\alpha + i\beta$ und $i < \lambda$ ergab das vollzählige Polyeder zunächst gedrehte rhombische Sphenoide, deren erstes $1, 4\lambda + 1, \overline{2i + 1'}, \overline{4\lambda + 2i + 1'}$ oder $1, 4\lambda + 1, \overline{8\lambda - 2i + 1'}, \overline{4\lambda - 2i + 1'}$ war. Ist nun $i = 2\mu + 1$, so sind die beiden Sphenoide $1, 4\lambda + 1, \overline{4\mu + 3'}$, $\overline{4\lambda + 4\mu + 3'}$ und $1, 4\lambda + 1, \overline{8\lambda - 4\mu - 1'}, \overline{4\lambda - 4\mu - 1'}$, d. h. beide sind möglich. Ist dagegen $i = 2\mu$, so sind beide Sphenoide nicht vorhanden. Für den Fall quadratischer Sphenoide, d. h. $i = \lambda$ ergibt sich das erste Sphenoid mit der Bezeichnung $1, 4\lambda + 1, \overline{2\lambda + 1'}, \overline{6\lambda + 1'}$; ist λ gerade, so ist eine zweite rhomboedrische Hemigonie unmöglich. Ist aber $\lambda = 2\mu + 1$, so kommt das Sphenoid $1, 8\mu + 5, \overline{4\mu + 3'}, \overline{12\mu + 7'}$, welches existiert. Wir haben also zwei rhomboedrisch-hemigonische Gruppierungen quadratischer Sphenoide, wenn λ eine ungerade Zahl, d. h. p von der Form $8\mu + 4$ ist ($\mu = 0, 1, 2 \ldots$); dagegen existieren nie plagiedrisch-hemigonische Gruppierungen quadratischer Sphenoide.

Weit geringer an Zahl sind die hemigonischen Gruppierungen, die sich aus dem vollzähligen Polyeder ergeben, wenn $p = 4\lambda - 2$ ist. Untersuchen wir zuvörderst die plagiedrische Hemigonie. Die verbleibenden Ecken sind: $1, 2', 3, 4', \ldots . 4\lambda - 1, 4\lambda', 4\lambda + 1, \overline{4\lambda - 2}', \ldots$ Für $\omega = i\alpha + (i-1)\beta$ und $(i-1)\alpha + i\beta$ sind die beiden ersten Sphenoide $1, 4\lambda - 1, 2i', \overline{4\lambda + 2i - 2}'$ und $1, 4\lambda - 1, \overline{4\lambda - 2i}', \overline{8\lambda - 2i - 2}'$. Diese bleiben erhalten, d. h. für $p = 4\lambda - 2$ gibt es soviel plagiedrische Hemigonien rhombischer Sphenoide, als es vollzählige Anordnungen gibt, also $2\lambda - 1$ oder $\frac{p}{2}$ Anordnungen von je $\frac{p}{2}$ Sphenoiden. Es bleibt stets das eine der beiden Sphenoide erhalten, das den $(2+2+2)$-flachen eingeschrieben ist, da man die Ecke 1) beibehält; lässt man aber die Ecken $2, 4, 6, \ldots$ und $1', 3', 5', \ldots$ bestehen, so erhält man natürlich die andere Gruppierung, die stets den Eindruck gedrehter Sphenoide machen. — Für $\omega = i\alpha + i\beta$ ergeben sich keine plagiedrischen Hemigonien, weil sowohl $\overline{2i+1}'$ als auch $\overline{4\lambda + 2i - 1}'$ stets ungerade sind. Für die beiden rhomboedrischen Hemigonien sind die verbleibenden Ecken von der Form $1, 2', 3', \ldots 4\mu, 4\mu + 1, \overline{4\mu + 2}', \overline{4\mu + 3}' \ldots$ bezw. $1, 2, 3', 4', \ldots 4\mu + 1, 4\mu + 2, \overline{4\mu + 3}', \overline{4\mu + 4}', \ldots$ Nun ist aber die obere Ecke $4\lambda - 1$ des ersten Sphenoids von der Form $4\mu + 3$, also ist überhaupt keine rhomboedrische Hemigonie möglich.

4. **Beispiel: Die Sphenoidgruppierungen im $(2+4+4)$-flächigen $2.2.4$-Eck und seinen Hemigonien.** Nach den allgemeinen Betrachtungen ergeben sich im vollzähligen $2.2.4$-Eck zwei Gruppierungen von je vier im allgemeinen rhombischen Sphenoiden, wenn $\omega = \alpha$ und $\omega = \beta$ und eine Gruppierung von vier stets quadratischen Sphenoiden, wenn $\omega = \alpha + \beta$ ist, die hier einzeln angeführt werden sollen, da solche vollzählige Gruppierungen diskontinuierliche Polyeder des Hexakisoktaedertypus konstituieren. Die Einzelpolyeder sind:

$$\alpha)\left\{\begin{array}{l}1,\ 5,\ 2',\ 6'.\\ 1',\ 5',\ 2,\ 6.\\ 3,\ 7,\ 4',\ 8'.\\ 3',\ 7',\ 4,\ 8.\end{array}\right. \qquad \beta)\left\{\begin{array}{l}1,\ 5,\ 4',\ 8'.\\ 1',\ 5',\ 4,\ 8.\\ 2,\ 6,\ 3',\ 7'.\\ 3,\ 7,\ 2',\ 6'.\end{array}\right. \qquad \alpha+\beta)\left\{\begin{array}{l}1,\ 5,\ 3',\ 7'.\\ 3,\ 7,\ 1',\ 5'.\\ 2,\ 6,\ 4',\ 8'.\\ 4,\ 8,\ 2',\ 6'.\end{array}\right.$$

In der vollständigen Figur des $2.2.4$-Flaches (Fig. 13 Taf. 2) sind die in der Ebene 1) des gleichflächigen Kernes liegenden Grenzflächen des ersten Sphenoids jeder Gruppe die durch die Spuren $5, 2', 6'$; $5, 4', 8'$; $5, 3', 7'$ gebildeten Dreiecke und in den Figuren 18 Taf. 2 und 20 Taf. 1 sind die Grenzflächen jedes der rhombischen Sphenoide nochmals gezeichnet. Die schraffierten Zellen jedes Dreiecks sind die Teile der Oberfläche des diskontinuierlichen Polyeders, die nicht durch Polyederzellen verdeckt werden und es geben die Ziffern in den übrigen Zellen die Koëffizienten der hinter ihnen liegenden körperlichen Zellen des Gesamtpolyeders an, das von der Art $A = 4$ sein muss. Orientiert man das gleicheckige Hüllpolyeder jeder Kombination so, dass seine Nebenachsen mit den gleichbenannten des gleichflächigen Kernpolyeders zusammenfallen, so hat das erste rhombische Sphenoid $\alpha)$ die Ecken 2, 6, 7′, 3′; das zweite $\beta)$: 2, 6, 1′, 5′; das quadratische die Ecken 2, 6, 8′, 4′. Die Figuren 4, 2 und 6 auf Tafel 21 zeigen diese drei Gruppierungen von je vier Sphenoiden. — Sämtliche Hemigonien, die zugleich Hemiedrien des inneren Kernes sind, bestehen aus nur zwei Sphenoiden. Für die beiden plagiedrischen Hemigonien

$$\alpha)\begin{cases}1,\ 5,\ 2',\ 6'.\\3,\ 7,\ 4',\ 8'\end{cases}\quad \text{und}\quad \beta)\begin{cases}1,\ 5,\ 4',\ 8'.\\3,\ 7,\ 2',\ 6'\end{cases}$$

— die quadratischen Sphenoide für $\alpha + \beta)$ liefern keine solche Hemigonie — ist das Hüllpolyeder das sägerandige $(2 + 2 . 4)$-flächige $2 . 4$-Eck, wie die Figuren 8 und 15 auf Tafel 21 erkennen lassen. Die Hemiedrie des vollzähligen gleichflächigen Polyeders ergibt sich durch Tilgung der Hälfte der Spuren in der vorher angeführten vollständigen Figur (Vergl. Fig. 21 u. 22 Taf. 2) als ein $(2 + 2 . 4)$-eckiges $2 . 4$-Flach, und zwar sind die $2 . 4$ Flächen Trapezoide. Für jede der beiden rhomboedrischen Hemigonien ergibt sich je eine Gruppierung von zwei rhombischen Sphenoiden und die Kombination zweier quadratischer Sphenoide. Die erste rhomboedrische Hemigonie lässt die Sphenoide

$$\alpha)\begin{cases}1,\ 5,\ 2',\ 6'\\3',\ 7',\ 4,\ 8\end{cases}\quad \text{und}\quad \alpha+\beta)\begin{cases}1,\ 5,\ 3',\ 7'\\4,\ 8,\ 2',\ 6'\end{cases}$$

bestehen, deren Kombination die in den Figuren 16 und 7 Tafel 21 dargestellten Polyeder sind. Die Seitenflächen der Hüllen, der unterbrochen kronrandigen $(2 + 2 . 2)$-flächigen $2 . 2 . 2$-Ecke, sind gleichschenklige Trapeze. Die inneren Kerne, rhomboedrische Hemiedrien des vollzähligen Polyeders, deren Flächen vier rechte und vier linke ungleichseitige Dreiecke sind, erkennt man in den Figuren 19 Taf. 1 und 23 Taf. 2. Die zweite rhomboedrische Hemigonie ergibt die Gruppierungen

$$\beta)\begin{cases}1,\ 5,\ 4',\ 8'\\ 2,\ 6,\ 3',\ 7'\end{cases}\text{(Fig. 10 Taf. 21)}\quad\text{und}\quad\alpha+\beta)\begin{cases}1,\ 5,\ 3',\ 7'\\ 2,\ 6,\ 4',\ 8'\end{cases}\text{(Fig. 9 Taf. 21).}$$

Die von den vorigen verschiedenen Figuren des inneren hemiedrischen Kernes sind in Fig. 19 u. 20 Taf. 2 dargestellt. Damit sind alle Sphenoidgruppierungen des 2.2.4-Ecks und seiner Hemigonien vollständig erledigt.

5. **Die Sphenoidgruppierungen im prismatischen $(2+n)$-flächigen $2n$-Eck.** Ist das Hüllpolyeder von Sphenoidgruppierungen das reguläre n-seitige Prisma, so muss n stets eine gerade Zahl sein. Hier sind ebenfalls zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem n durch 4 teilbar ist oder nicht. Es sei zunächst $n=4\lambda$. Diese Hüllpolyeder sind aus dem allgemeinen Polyeder, dem $(2+p+p)$-flächigen $2.2p$-Eck zu erhalten, wenn $\alpha=\beta$ wird. Dann ist $2p=n$, und die beiden dort unterschiedenen Fälle werden: a) für $p=4\lambda:2p=n=8\lambda$ und b) für $p=4\lambda-2:2p=n=8\lambda-4$, d. h. beide n sind durch 4 teilbar. Die zwei damals zu berücksichtigenden Gruppierungen $i\alpha+(i-1)\beta$ und $(i-1)\alpha+i\beta$ werden dabei stets identisch. Überdies wird aber auch das letzte Sphenoid im zweiten Falle stets quadratisch, d. h. es gibt für $n=4\lambda$ stets auch quadratische Sphenoide. Die Ecken des Hüllpolyeders sind jetzt die folgenden:

$4\lambda-1$	4λ	1	2	$3\ldots\lambda$	$\lambda+1$	$\lambda+2\ldots2\lambda$	$2\lambda+1$	$2\lambda+2\ldots3\lambda$	$3\lambda+1$	$3\lambda+2\ldots$
$\overline{4\lambda-1}'$	$4\lambda'$	$1'$	$2'$	$3'\ldots\lambda'$	$\overline{\lambda+1}'$	$\overline{\lambda+2}'\ldots2\lambda'$	$\overline{2\lambda+1}'$	$\overline{2\lambda+2}'\ldots3\lambda'$	$\overline{3\lambda+1}'$	$\overline{3\lambda+2}'\ldots$

wobei die in die Quadranten fallenden Punkte wiederum stärker markiert sind. Die dem allgemeinen Falle $i\alpha+(i-1)\beta$ entsprechenden Sphenoidgruppierungen sind:

1) $1,\ 2\lambda+1,\ 2',\ \overline{2\lambda+2}'$
2) $1,\ 2\lambda+1,\ 4',\ \overline{2\lambda+4}'$
. . . .
i) $1,\ 2\lambda+1,\ 2i',\ \overline{2\lambda+2i}'$;
. . . .

Ist nun λ eine gerade Zahl, so schliesst die Reihe rhombischer Sphenoide mit der $\frac{\lambda}{2}$-ten Gruppierung:

$\frac{\lambda}{2}$) $1,\ 2\lambda+1,\ \lambda',\ 3\lambda'$.

Dazu kommt aber noch die $\frac{\lambda}{2}+1\big)$-te Gruppierung quadratischer Sphenoide:

$$\left.\frac{\lambda}{2}+1\right)\ 1,\ 2\lambda+1,\ \overline{\lambda+1}',\ 3\lambda\overline{+1}'.$$

Ist λ ungerade, so fällt die letzte Anordnung in den Quadranten, ergibt also das quadratische Sphenoid:

$$\left.\frac{\lambda+1}{2}\right)\ 1,\ 2\lambda+1,\ \overline{\lambda+1}',\ \overline{3\lambda+1}'.$$

Es sei dies an einigen Beispielen erläutert. Für $n=8\,(\lambda=2)$ ergibt sich die Gruppierung von vier rhombischen Sphenoiden, deren erstes 1, 5, 2', 6' ist und die Gruppierung von vier quadratischen Sphenoiden, dessen erstes die Ecken 1, 5, 3', 7' besitzt. Diese beiden Kombinationen zeigen die Figuren 17 und 11 Tafel 21. Die in der vollständigen Figur der regulären 8-seitigen Doppelpyramide enthaltenen Grenzflächen finden sich Fig. 12 u. 14 Taf. 2 dargestellt. Für $n=12$, $(\lambda=3)$ und $n=16$, $(\lambda=4)$ sind in den Figuren 7, 8, 9, 10, 11 Taf. 2 die Anordnungen der Deckflächen der je λ 2.4-Ecke gezeichnet, denen jeweils zwei der Sphenoide, ein rechtes und ein linkes, wie bei allen diesen Gruppierungen eingeschrieben ist. Es ergeben sich für $n=12$ eine Gruppierung rhombischer und eine quadratischer Sphenoide, deren erstes 1, 7, 2', 8' bezw. 1, 7, 4', 10' ist; für $n=16$ erhält man zwei Gruppierungen rhombischer Sphenoide mit den ersten Einzelkörpern 1, 9, 2', 10' bezw. 1, 9, 4', 12', und eine Gruppierung quadratischer Sphenoide, deren erstes 1, 9, 5', 13' ist. Auch diese Beispiele bestätigen das allgemeine Ergebnis: Ist $n=4\lambda=4.2\mu$, so existiert neben μ Gruppierungen rhombischer eine Gruppierung quadratischer Sphenoide; ist $n=4\lambda=4(2\mu-1)$, so ist die Anzahl der Kombinationen rhombischer Sphenoide $\mu-1$ oder $\frac{\lambda-1}{2}$, die der quadratischen wiederum gleich 1. Die Anzahl der Sphenoide in einer Gruppierung ist stets $2\lambda=\frac{n}{2}$. Wir untersuchen nun die Gruppierungen gedrehter Sphenoide, d. h. nur linker oder nur rechter, von denen wir je das erste in folgender Übersicht anschreiben:

1. Gruppierung) $1,\ 2\lambda+1,\ 2',\ \overline{2\lambda+2}'$ oder $1,\ 2\lambda+1,\ 4\lambda',\ 2\lambda'$;
2. Gruppierung) $1,\ 2\lambda+1,\ 3',\ \overline{2\lambda+3}'$ oder $1,\ 2\lambda+1,\ \overline{4\lambda-1}',\ \overline{2\lambda-1}'$

. . . .

i. Gruppierung) $1,\ 2\lambda+1,\ i+1',\ 2\lambda+\overline{i+1}'$ oder $1,\ 2\lambda+1,\ \overline{4\lambda-i+1}',\ \overline{2\lambda-i+1}'$

. . . .

$\lambda-1$. Gruppierung) $1,\ 2\lambda+1,\ \lambda',\ 3\lambda'$ oder $1,\ 2\lambda+1,\ \overline{3\lambda+2}',\ \overline{\lambda+2}'$.

Die λ-te Gruppierung ist identisch mit der bereits vorhandenen Gruppierung quadratischer Sphenoide; es fallen dann das links und rechts gedrehte Sphenoid in eins zusammen. Es ergeben sich also $2(\lambda-1)=2\left(\frac{n}{4}-1\right)$ Kombinationen von je $2\lambda=\frac{n}{2}$ rechts oder links gedrehten Sphenoiden. Als Beispiel sei wieder $n=8$ gewählt. Die vier rechten bezw. linken Sphenoide sind hier:

$$\begin{cases}1,\ 5,\ 2',\ 6'\\ 2,\ 6,\ 3',\ 7'\\ 3,\ 7,\ 4',\ 8'\\ 4,\ 8,\ 5',\ 1'\end{cases} \quad\text{und}\quad \begin{cases}1,\ 5,\ 8',\ 4'\\ 8,\ 4,\ 7',\ 3'\\ 7,\ 3,\ 6',\ 2'\\ 6,\ 2,\ 5',\ 1'.\end{cases}$$

Die eine der beiden Kombinationen zeigt Fig. 5 Taf. 21; die Grenzfläche des diskontinuierlichen Polyeders Fig. 15 Taf. 2. Die Vereinigung zweier solcher entsprechender Gruppierungen gedrehter Sphenoide ergibt eine Gruppierung von n rhombischen Sphenoiden, $\frac{n}{2}$ rechten und $\frac{n}{2}$ linken, derart, dass in jeder Ecke des Hüllpolyeders zwei Sphenoidecken zusammenfallen und je zwei Flächen zweier Sphenoide in einer Ebene des Kernes liegen. Für $n=8$ ergibt sich das in Fig. 18 Taf. 21 dargestellte diskontinuierliche Polyeder, dessen Grenzfläche Fig. 16 Taf. 2 zeigt. Unter den nicht durch Polyederzellen überdeckten Oberflächenteilen sind hier solche mit dem Zellenkoëffizienten 2 vorhanden, da das den Grenzflächen zweier Sphenoide gemeinsame Dreieck doppelt zu zählen ist. — Wir erläutern nun den Zusammenhang dieser gedrehten Sphenoide des regulären Prismas mit denen des allgemeinsten gleicheckigen Polyeders des Typus. Ist der Winkel, den die Deckkante des ersten gedrehten Sphenoids mit der Grundkante bildet, gleich α, so ist $\alpha=\frac{2\pi}{n}$. Die Drehwinkel für die aufeinanderfolgenden Sphenoide sind nun $\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha, \ldots\ldots (\lambda-1)\alpha$ oder $\left(\frac{n}{4}-1\right)\alpha$. Die Gruppierungen mit den Winkeln $2\alpha,\ 4\alpha, \ldots\ldots 2\mu\alpha$ ergeben sich dann aus den allgemeinen Gruppierungen $i\alpha+i\beta$ für $\beta=\alpha$. Solcher Gruppierungen sind für

$n = 4\lambda = 4 . 2\mu$ an Zahl $\mu - 1$, d. h. $\frac{n}{8} - 1$ vorhanden; für $n = 4\lambda = 4(2\mu - 1)$ ebenso $\mu - 1$, d. h. $\frac{n-4}{8}$. Die Gruppierungen mit den Winkeln $\alpha, 3\alpha, 5\alpha, \ldots (2\mu - 1)\alpha$ für $n = 8\mu$ und $\alpha, 3\alpha, 5\alpha \ldots (2\mu - 3)\alpha$ für $n = 4(2\mu - 1)$ ergeben sich aus den allgemeinen Gruppierungen $i\alpha + i\beta$ für $\beta = 0$ und ungerades i, während man für gerades i wieder die vorigen Gruppierungen erhält. Wir erläutern das an den folgenden Beispielen, indem wir nur die eine Art gedrehter Sphenoide, z. B. die linken berücksichtigen. Für das $(2 + p + p)$-flächige $2 . 2p$-Eck sei zunächst $2p = 8\lambda = 16$. Hier gab es $\frac{p}{4} - 1 = \lambda - 1$, d. h. eine Gruppierung gedrehter Sphenoide, also gibt es, für $\beta = 0$, nur eine Gruppierung gedrehter rhombischer Sphenoide im 8-seitigen regulären Prisma. Ist $2p = 8\lambda = 24$, so hat man $\lambda - 1 = 2$ Gruppierungen gedrehter Sphenoide u. s. w. Allgemein gilt: Die Anzahl der Anordnungen gedrehter rhombischer Sphenoide einer Art im n-seitigen regulären Prisma ist gleich der Zahl der Anordnungen gedrehter Sphenoide im $2p = 2n$-seitigen allgemeinen Prisma für $\beta = 0$, d. h. $\frac{n}{4} - 1$; davon sind für $n = 8\lambda$ $\frac{n}{8} - 1$, für $n = 4(2\lambda - 1)$ $\frac{n-4}{8}$ auch aus dem $2p = n$-seitigen allgemeinen Prisma für $\beta = \alpha$ herzuleiten.

Es sei nun der zweite Fall des $(2 + n)$-flächigen $2n$-Ecks zu untersuchen, für den $n = 2(2\lambda + 1)$ ist. Hier kann es nur Anordnungen gedrehter, linker oder rechter, Sphenoide geben. Die Ecken des Hüllpolyeders sind die folgenden:

$4\lambda + 2$	1	2	$3 \ldots\ldots 2\lambda + 1$		$2\lambda + 2$	$2\lambda + 3 \ldots\ldots\ldots$
$\cdot$	$\times$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\times$	$\cdot$
$\overline{4\lambda + 2'}$	$1'$	$2'$	$3' \ldots\ldots \overline{2\lambda + 1'}$		$\overline{2\lambda + 2'}$	$\overline{2\lambda + 3'} \ldots\ldots\ldots$

In die Quadranten fallen keine Ecken, also sind quadratische Sphenoide unmöglich. Die Gruppierungen rhombischer Sphenoide sind:

1. Gruppierung) $1, 2\lambda + 2, 2', \overline{2\lambda + 3'}$ und $1, 2\lambda + 2, \overline{4\lambda + 2'}, \overline{2\lambda + 1'}$
2. Gruppierung) $1, 2\lambda + 2, 3', \overline{2\lambda + 4'}$ und $1, 2\lambda + 2, \overline{4\lambda + 1'}, 2\lambda'$.

. . . .

i. Gruppierung) $1, 2\lambda + 2, \overline{i + 1'}, \overline{2\lambda + i + 2'}$ und $1, 2\lambda + 2, \overline{4\lambda - i + 3'}, \overline{2\lambda - i + 2'}$

. . . .

λ. Gruppierung) $1, 2\lambda + 2, \overline{\lambda + 1'}, \overline{3\lambda + 2'}$ und $1, 2\lambda + 2, \overline{3\lambda + 3'}, \overline{\lambda + 2'}$.

Es gibt also $\lambda = \frac{n-2}{4}$ Gruppierungen rechter und ebensoviel linker Sphenoide, sowie die gleiche Anzahl von Gruppierungen, die durch die Vereinigung je zweier solcher Kombinationen entstehen. Die einfachen Gruppierungen enthalten je $\frac{n}{2}$ Sphenoide. Als Beispiel sei $n = 6\ (\lambda = 1)$ angeführt. Taf. 21 Fig. 3 zeigt das aus drei linken rhombischen Sphenoiden gebildete Polyeder, dessen Grenzfläche in der vollständigen Figur Taf. 2 Fig. 24 durch die Spuren der Ebenen $4, 2', 5'$ in der Ebene 1 der sechsseitigen regulären Doppelpyramide gebildet wird. Mit der aus drei rechten Sphenoiden bestehenden Kombination zusammen ergibt sich das Polyeder Taf. 21 Fig. 1, dessen Grenzfläche Taf. 3 Fig. 1 keiner Erläuterung weiter bedarf.

6. **Die Sphenoidgruppierungen, deren Hüllen hemigonische Polyeder des regulären Prismas sind.** Es sei für das reguläre Prisma $n = 4\lambda$. Bilden wir die plagiedrische Hemigonie, so sind die verbleibenden Ecken ... $4\lambda', 1, 2', 3, 4', 5, 6' \ldots\ldots 2\lambda - 1, 2\lambda', 2\lambda + 1, \overline{2\lambda + 2}', \overline{2\lambda + 3} \ldots\ldots$ Ist also λ gerade, so existieren die sämtlichen plagiedrischen Hemigonien mit rhombischen Sphenoiden der ersten Klasse, dagegen keine quadratischen Sphenoide. Ist λ ungerade, so existieren für sämtliche rhombischen Sphenoide und auch für das System quadratischer Sphenoide die plagiedrische Hemigonie. Beispiel: Für $n = 8\ (\lambda = 2)$ gibt es eine Anordnung rhombischer Sphenoide, nämlich die Kombination von $1, 5, 2', 6'$ und $3, 7, 4', 8'$, Taf. 21 Fig. 12. Die Figur der Grenzfläche ist Taf. 1 Fig. 21. Was die plagiedrische Hemigonie der gedrehten Sphenoide anbetrifft, so existiert, wie aus der allgemeinen Tabelle in Verbindung mit dem obigen Schema der Ecken hervorgeht, eine solche nur für die 1. 3. 5. ... Anordnung, d. h. für die Anordnungen mit ungeradem Index. Ist also λ eine gerade Zahl, so hat die $(\lambda - 1)$-te Anordnung ungeraden Index und ist vorhanden. Es existieren somit für $\lambda = 2\mu$ die Anordnungen mit den Indices $1, 3, 5 \ldots (2\mu - 1)$, d. h. $\mu = \frac{\lambda}{2}$ Anordnungen. Ist λ ungerade, so hat die $(\lambda - 1)$-te Anordnung geraden Index, fehlt also; für $\lambda = 2\mu - 1$ sind somit die Anordnungen der Indices $1, 3, 5 \ldots 2\mu - 3$ vorhanden, d. h. es sind $\mu - 1 = \frac{\lambda - 1}{2}$ Anordnungen möglich, deren letzte das Sphenoid $1, 2\lambda + 1, \overline{\lambda - 1}', \overline{3\lambda - 1}'$ enthält. Beispiel: Für $n = 8\ (\lambda = 2)$ ist die Anzahl der gedrehten plagiedrisch-hemigonischen Anordnungen $= 1$.

Die Sphenoide sind $1, 5, 2', 6'$ und $3, 7, 4', 8'$. Es sind also dieselben beiden Sphenoide, die die plagiedrische Hemigonie der vier rhombischen Sphenoide der ersten Klasse ergab; dazu findet sich aber noch die Hemigonie der entgegengesetzt gedrehten Sphenoide $1, 5, 8', 4'$ und $7, 3, 6', 2'$. Also existiert auch die plagiedrische Hemigonie für die Vereinigung beider Gruppierungen. Diese vier rhombischen Sphenoide zeigt Taf. 21 Fig. 13. Die Figur der Grenzfläche ist Taf. 2 Fig. 17.

Wir betrachten nun die rhomboedrischen Hemigonien. Wie bereits früher bemerkt, wollen wir auch hier deren zunächst zwei unterscheiden. Es mögen vorerst aus dem allgemeinen Schema die folgenden Ecken erhalten bleiben: $\ldots\ \overline{4\lambda-1}',\ 4\lambda,\ 1,\ 2',\ 3',\ 4,\ 5\ \ldots\ \overline{4\mu-1}',\ 4\mu,\ 4\mu+1,\ \overline{4\mu+2}',\ \overline{4\mu+3}',\ \ldots$ d. h. die oberen Ecken sind von der Form 4μ und $4\mu+1$. Sollen also rhomboedrische Hemigonien möglich sein, so darf $2\lambda+1$ bei Division durch 4 nur den Rest 1 lassen (da der Rest 0 ausgeschlossen ist), d. h. λ muss eine gerade Zahl sein. Wir setzen also $\lambda = 2\mu$ $(n = 8\mu)$; die Punkte sind dann: $\overline{8\mu-1}',\ 8\mu,\ 1,\ 2',\ 3',\ \ldots\ 4\mu,\ 4\mu+1,\ \overline{4\mu+2}',\ \overline{4\mu+3}'\ \ldots$, d. h. die gestrichelten Indices lassen bei Division durch 4 die Reste 2 und 3. Die frühere Tabelle der Sphenoide lautet dann jetzt:

$$\left.\begin{array}{rl}
1) & 1,\ 4\mu+1,\ 2',\ \overline{4\mu+2}' \\
2) & 1,\ 4\mu+1,\ 4',\ \overline{4\mu+4}' \\
\multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
i) & 1,\ 4\mu+1,\ 2i',\ \overline{4\mu+2i}' \\
\multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\frac{\lambda}{2}=\mu) & 1,\ 4\mu+1,\ 2\mu',\ 6\mu'
\end{array}\right| \text{(rhombische Sphenoide).}$$

$$\mu+1)\ \ 1,\ 4\mu+1,\ \overline{2\mu+1}',\ \overline{6\mu+1}'\ \Big\}\ \text{(quadratische Sphenoide).}$$

Man liest aus ihr ab, dass es rhomboedrische Hemigonien nur für die 1., 3., 5. ... Anordnung gibt, allgemein für die i-te nur dann, wenn i eine ungerade Zahl ist; d. h.: Ist in $n = 4\lambda = 8\mu$ μ eine ungerade Zahl, so gibt es $\frac{\mu+1}{2}$ rhomboedrisch-hemigonische Anordnungen rhombischer Sphenoide und eine Anordnung dergl. quadratischer Sphenoide. Ist aber μ eine gerade Zahl, so gibt es $\frac{\mu}{2}$ Anordnungen rhombischer Sphenoide und keine quadratischen. Beispiel: Für $n = 8$, also $\mu = 1$ sind die noch vorhandenen Ecken für die Hemigonie: 1, 2', 3', 4, 5, 6', 7', 8. Es existiert also die Kombination der beiden rhombischen Sphenoide 1, 5, 2', 6' und 4, 8, 3', 7', und die Kombination der beiden quadratischen Sphenoide 1, 5, 3', 7' und 4, 8, 2', 6'. Betrachten wir nun die sog. zweite rhomboedrische Hemigonie. Die verbleibenden Ecken sind jetzt: 1, 2, 3', 4', 5, 6 ..... $\overline{4\mu - 1}'$, $4\mu'$, $4\mu + 1$, $4\mu + 2$, ... Soll die Ecke $2\lambda + 1$ vorhanden sein, so muss also λ wieder eine gerade Zahl sein. Jetzt lassen aber die gestrichelten Indices bei Division durch 4 die Reste 0 oder 3. Betrachten wir die vorher angegebene Tabelle der Sphenoide, so ergibt sich sofort, dass nur die 2. 4. ... Anordnung möglich ist, d. h. die i-te Anordnung existiert nur, wenn i eine gerade Zahl ist. Ist also in $n = 4\lambda = 8\mu$ μ eine gerade Zahl, so existieren die rhomboedrisch-hemigonischen Gruppierungen 2) 4) 6) ... μ), d. h. $\frac{\mu}{2}$ Anordnungen rhombischer Sphenoide und keine quadratischen. Ist aber μ eine ungerade Zahl, so gibt es die rhomboedrisch-hemigonischen Gruppierungen 2) 4) 6) ... $\mu + 1$, d. h. $\frac{\mu+1}{2}$ Gruppierungen rhombischer Sphenoide und eine Anordnung quadratischer Sphenoide. — Fassen wir die beiden rhomboedrischen Hemigonien zusammen, so ergibt sich das Schlussresultat: Sei in $n = 4\lambda = 8\mu$ μ gerade oder ungerade, so gibt es μ bezw. $\mu + 1$ rhomboedrische Hemigonien rhombischer Sphenoide des n-seitigen regulären Prismas, zwei rhomboedrische Hemigonien quadratischer Sphenoide aber nur, wenn μ ungerade ist. — Es ist leicht zu zeigen, wie sich diese Gruppierungen aus den Hemigonien des allgemeinsten Polyeders des Typus ableiten lassen. Dabei ist zu bemerken, dass je zwei Gruppierungen kongruent sind, wenn man nur die A-achse mit der A'-achse vertauscht. — Rhomboedrische Hemigonien gedrehter Sphenoide gibt es aus leicht ersichtlichen Gründen nicht. — Ist nun endlich für das reguläre Prisma $n = 2\,(2\lambda + 1)$, so ist jede plagiedrische Hemigonie unmöglich, weil die Ecke $2\lambda + 2$ wegfallen würde, und ebensowenig gibt es rhomboedrische Hemigonien.

7. Über die Gruppierungen sekundärer quadratischer Sphenoide. Es war bereits in Nr. 1 dieses § gezeigt worden, dass jedes rhombische Sphenoid auf zweierlei Weise durch bestimmte Wahl der Länge der Hauptachse des 2.4-Ecks, dessen Hemigonie es ist, in ein quadratisches Sphenoid übergeführt werden kann. Die Bedingungen für das Auftreten solcher

„sekundärer" quadratischer Sphenoide in den vollzähligen und hemigonischen Polyedern des Typus wären anzugeben, doch wollen wir uns auf die Untersuchung des regulären Prismas, für welches $n = 4\lambda$ ist, beschränken. Der Radius des Umkreises der Deckfläche sei ϱ, die Höhe des Prismas sei h. Das erste Sphenoid der i-ten Gruppierung hat die Ecken $1, 2\lambda+1, 2i', \overline{2\lambda+2i'}$, also ist seine Deckkante $\overline{1, 2\lambda+1} = 2\varrho$. Die anderen Kanten seien $\overline{1, 2i'} = k_i$ und $\overline{2i', 2\lambda+1} = k'_i$; überdies ist $\overline{2i, 2i'} = h$. Nun ist der zur Kante $\overline{1, 2}$ des Prismas gehörende Zentriwinkel $\frac{\pi}{2\lambda}$, also der zur Kante $\overline{1, 2i}$ gehörende Zentriwinkel $(2i-1)\frac{\pi}{2\lambda}$. Demnach ist der Peripheriewinkel $1, 2\lambda+1, 2i$ gleich $(2i-1)\frac{\pi}{4\lambda}$. Er sei mit w_i bezeichnet. Dann sind die beiden Sehnen:

$$\overline{1, 2i} = 2\varrho \,.\, \sin w_i \quad \text{und} \quad \overline{2i, 2\lambda+1} = 2\varrho \,.\, \cos w_i.$$

Da nun $k_i^2 = \overline{1, 2i}^2 + h^2 = 4\varrho^2 \sin^2 w_i + h^2$

$k'^2_i = \overline{2i, 2\lambda+1}^2 + h^2 = 4\varrho^2 \cos^2 w_i + h^2$ und $\overline{1, 2\lambda+1}^2 = 4\varrho^2$ ist, so ergeben sich quadratische Sphenoide, wenn

$$\left.\begin{array}{r} 4\varrho^2 \sin^2 w_i + h^2 = 4\varrho^2 \\ \text{und } 4\varrho^2 \cos^2 w_i + h^2 = 4\varrho^2 \end{array}\right\} \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{array}{l} h = 2\varrho \cos w_i \\ \text{und } h = 2\varrho \sin w_i \end{array}\right. \quad \text{ist; d. h.:}$$

Ist die Hauptachse des n-seitigen Prismas

$$h = 2\varrho \cos \frac{2i-1}{4\lambda}\pi \qquad \text{oder} \quad h = 2\varrho \sin \frac{2i-1}{4\lambda}\pi,$$

so geht die i-te Gruppierung rhombischer Sphenoide (der ersten Klasse) in eine Gruppierung quadratischer Sphenoide über.

Ist für ungerades λ $i = \frac{\lambda+1}{2}$, so werden die beiden Werte von h gleich, nämlich $\varrho\sqrt{2}$. In diesem Falle wird das Sphenoid, da es an und für sich schon quadratisch war, zum Tetraeder. Für gerades λ wird die $\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)$-te Anordnung für denselben Wert von h zur Gruppierung von Tetraedern, d. h. es gibt Gruppierungen von 4, 6, 8, 10 ... Tetraedern, deren Hüllen vollzählige $n = 8, 12, 16$ ..... seitige Prismen sind. — Für die gedrehten Sphenoide ist $w_i = \frac{1}{2} . i . \frac{2\pi}{4\lambda} = \frac{i\pi}{4\lambda}$, also $h = 2\varrho \cos \frac{i\pi}{4\lambda}$ und $h = 2\varrho \sin \frac{i\pi}{4\lambda}$, d. h. für $i = 1, 2, 3 \ldots \lambda-1$ ergeben sich je zwei Gruppierungen links und rechts gedrehter quadratischer Sphenoide. — Analoge Betrachtungen gelten für die Gruppierungen im $(4\lambda - 2)$-seitigen regulären Prisma, nur sind Tetraeder unmöglich.

Für die Hemigonien gehen die rhombischen Sphenoide unter den gleichen Bedingungen wie den eben abgeleiteten zweimal in quadratische über, die quadratischen einmal in Tetraeder. Es gibt also Gruppierungen von Tetraedern, wenn es solche stets quadratischer Sphenoide gibt. Diese Fälle mögen zum Schlusse noch zusammengestellt werden. a) Für $n = 4\lambda$ und ungerades λ, d. h. $n = 4(2\mu + 1)$ existieren plagiedrisch-hemigonische Gruppierungen von $\lambda = \frac{n}{4} = 3, 5, 7 \ldots$ Tetraedern, deren Hülle das kronrandige $(2 + n)$-flächige n-Eck ist. b) Für $n = 4\lambda$ und gerades $\lambda = 2(2\mu' - 1)$ gibt es rhomboedrisch-hemigonische Gruppierungen von $2\mu' = \frac{\lambda}{2} + 1$, d. h. $2, 4, 6 \ldots$ Tetraedern, deren Hülle das unterbrochen-kronrandige $[2 + 4(2\mu' - 1)]$-flächige $2 . [4 . (2\mu' - 1)]$-Eck ist. — Die den angestellten Betrachtungen analogen leicht durchzuführenden Untersuchungen sekundärer quadratischer Sphenoide und Tetraeder im $(2 + p + p)$-flächigen $2 . 2p$-Eck und seinen Hemigonien übergehen wir, zumal die Resultate weiterhin keine allgemeine Verwendung finden. Damit sind die diskontinuierlichen konvexen Polyeder des Doppelpyramidentypus erledigt.

§ 3. Die Stephanoide und ihre Gruppierungen im Doppelpyramidentypus.

1. Definition und allgemeine Betrachtung der Stephanoide St_n und St'_p. Die Stephanoide[1]) sind zweiseitige nichtkonvexe, gleicheckig-gleichflächige[2]) autopolare Polyeder des Doppelpyramidentypus, die von kongruenten überschlagenen Vierecken zweiter Art begrenzt werden, und deren kongruente vierkantige Ecken von der vierten Art sind. Da jede Grenzfläche aus zwei gleichen Zellen verschiedenen Vorzeichens besteht, so ist ihr Inhalt Null; es verschwindet somit der Gesamtinhalt der Oberfläche und damit auch das Volumen des Polyeders („Nullpolyeder"). Es

---

[1]) Wir behalten diese von Hess, Marb. Ber. 1877 S. 9, für die einfachsten Polyeder solcher Art zuerst eingeführte Benennung bei.

[2]) Über noch allgemeinere Polyeder, die diese Stephanoide als Spezialfälle einschliessen, vergl. die Anm. in Nr. 5 § 3.

sind zwei Ordnungen von Stephanoiden zu unterscheiden, [St_n und St'_p], die wir zunächst im folgenden definieren wollen. Wir beginnen mit der Definition der St_n. Es seien, wie früher, die Ecken eines n-seitigen regulären Prismas $1, 2, 3, \ldots n$ und $1', 2', 3', \ldots n'$. Auch für die Achsen, die übrigens erst später bei der Konstruktion der Stephanoide aus dem inneren Kernpolyeder wieder in Frage kommen, werden die schon gewählten Bezeichnungen beibehalten. Es sollen nun unter i' und i_1' die Benennungen irgend zweier Eckpunkte der unteren Deckfläche des Prismas verstanden werden, wobei $i_1' > i'$. In der oberen Deckfläche markieren wir die Punkte $i - \mu$ und $i_1 + \mu$, und zwar möge der Punkt i' so gewählt sein, dass $i - \mu \geq 1$ und überdies $n - [(i_1 + \mu) - (i - \mu)] > i_1' - i'$ ist. Dann bilden die Kanten $\overline{i - \mu, i'}$; $\overline{i', i_1 + \mu}$; $\overline{i_1 + \mu, i_1'}$; $\overline{i_1', i - \mu}$ ein überschlagenes Viereck zweiter Art mit kongruenten Zellen entgegengesetzten Vorzeichens und es lassen sich solcher Vierecke $2n$ in dem Prisma konstruieren, so dass jedes Viereck jede Kante mit je einem zweiten Viereck gemein hat, jede Kante also zweimal, und zwar in entgegengesetztem Sinne genommen, vorkommt, das erhaltene geschlossene Vielflach also zweiseitig ist. In jeder Ecke kommen vier Kanten zusammen. Das einfachste Stephanoid ergibt sich, wenn $i' = 2'$, $\mu = 1$, also $i - \mu = 1$, $i_1' = 3$, somit $i_1 + \mu = 4$ ist. Der kleinste Wert von n, für den sich dieses einfachste Stephanoid konstruieren lässt, ist $n = 5$. Die Flächen eines solchen St_5 im fünfseitigen regulären Prisma sind:

$$1, 2', 4, 3';\quad 2, 3', 5, 4';\quad 3, 4', 1, 5';\quad 4, 5', 2, 1';\quad 5, 1', 3, 2'; \text{ und}$$
$$1', 2, 4', 3;\quad 2', 3, 5', 4;\quad 3', 4, 1', 5;\quad 4', 5, 2', 1;\quad 5', 1, 3', 2.$$

Es wird also die zweite Flächenreihe aus der ersten erhalten, indem man die gestrichelten mit den nichtgestrichelten Zahlen vertauscht. Jede Kante kommt zweimal vor: $1, 2'$ und $2', 1$ u. s. w. Jede Ecke des Polyeders ist vierkantig: z. B. hat die Ecke 1 die Kanten $1, 2'$; $1, 5'$; $1, 4'$; $1, 3'$. Die an ihrer Bildung teilnehmenden Flächen sind $1, 2', 4, 3'$; $1, 5', 3, 4'$; $1, 4', 5, 2'$; $1, 3', 2, 5'$; so dass wir im Punkte 1 die Kantenwinkel $2', 1, 3'$; $3', 1, 5'$; $5', 1, 4'$; $4', 1, 2'$ haben. Die Ecke ist also überschlagen-vierkantig, d. h. zwei ihrer Flächenwinkel sind grösser als π. Beachtet man nun den Sinn der Kantenwinkel, so erweisen sich der erste und vierte von anderem Sinne als die beiden mittleren, wir haben also bei zweien die Ergänzung zu 2π zu nehmen, so dass die Ecke auch zwei überstumpfe Kantenwinkel besitzt. Sie ist also die Ecke vierter Art Fig. 16 Taf. 1. Von genau der gleichen Beschaffenheit sind, wie leicht ersichtlich, die Ecken jedes Stephanoides St_n bei beliebigem n. Was die Art A eines St_n anbetrifft, so finden wir folgendes. Die Art jeder der $2n$ Grenzflächen ist $a=2$; für jede der $2n$ Ecken ist $\alpha=4$. Die Zahl der überstumpfen Kantenwinkel ist $2.2n$, die Zahl der Kanten $4n$, als ist $2A = 2n.2+2n.4-4n-4n$, d. h. $A = 2n$. Bei Umkehrung der Färbung des Polyeders wird $a'=2$, $\alpha'=4$, $\Sigma\varkappa'=4n$, also ist auch $A'=2n$, d. h. $A'=K-A$, was nach den allgemeinen Erläuterungen die charakteristische Bedingung für ein Nullpolyeder ist. Ehe wir auf die weitere spezielle Untersuchung der St_n eingehen, definieren und besprechen wir die zweite Ordnung der Stephanoide, die St'_p.

Es sei vorgelegt ein kronrandiges $(2+2p)$-flächiges $2p$-Eck, dessen Deckflächen reguläre p-ecke, dessen Seitenflächen $2.p$ gleichschenklige Dreiecke sind. Wir bezeichnen die Ecken der oberen Deckfläche mit $1, 3, 5, \ldots . 2p-1$, die der unteren mit $2', 4', 6' \ldots . 2p'$ und zwar in der Reihenfolge, dass die Seitenflächen $1, 2', 3$; $2', 3, 4'$; $3, 4', 5$; $\ldots . 2p-1, 2p', 1$; $2p', 1, 2$ sind. Nun markieren wir in der unteren Deckfläche die Punkte $2i'$ und $2i_1'$, in der oberen die Punkte $2i-1-2\mu$ und $2i_1+1+2\mu$, wo μ irgend eine ganze positive Zahl, einschliesslich der Null ist; nur seien die i, i_1 und μ so gewählt, dass $2i-1-2\mu \geq 1$ ist, und $2p-[(2i_1+1+2\mu) -(2i-1-2\mu)] > 2i_1'-2i'$ bleibt. Dann ist das überschlagene Viereck zweiter Art $2i-1-2\mu$, $2i_1'$, $2i_1+1+2\mu$, $2i'$ die Fläche eines solchen Stephanoides St'_p zweiter Ordnung, deren es $2p$ besitzt. Der einfachste Fall ergibt sich, wenn $i=1$, $\mu=0$, $i_1'=i'+1$ ist. Dann lautet die Fläche $1, 4', 5, 2'$, und zwei ihrer Kanten, nämlich $1, 2'$ und $5, 4'$ fallen mit Kanten des Hüllpolyeders zusammen. Dieser Fall tritt übrigens zum erstenmal für $p=4$ auf. Bemerkungen über die Ecken und die Art eines St'_p erledigen sich bei Berücksichtigung der folgenden weiteren Untersuchung. Die Fläche eines solchen Stephanoides St'_p ist zugleich die Fläche eines gewissen Stephanoides erster Ordnung, d. h. das St'_p ist ein Teilpolyeder eines diskontinuierlichen St_n, wie sich sofort ergibt, wenn auf den unbeschriebenen Kreisen der beiden Deckflächen des kronrandigen $(2+2p)$-flächigen $2p$-Ecks zwischen je zwei aufeinander folgenden Ecken in der Mitte des Bogens je eine neue Ecke interpoliert wird. Diese neuen Ecken bilden mit den bereits vorhandenen die Ecken eines $2p$-seitigen regulären Prismas und das St'_p ist also die Hemigonie und Hemiedrie eines bestimmten St_{2p}. Die vollständige Figur des $(2+2p)$-eckigen $2p$-Flaches ist in der Tat in der des ebenrandigen $(2+n)$-eckigen $2n$-Flaches für $n = 2p$ enthalten. Man findet also die sämtlichen möglichen St'_p, wenn man in der vollständigen Figur eines solchen $2n$-Flaches die Spuren $2, 4, 6 \ldots$ und $1', 3', 5' \ldots$ unterdrückt. Wenngleich die St'_p keine holoedrischen Polyeder sind, sollen sie doch zunächst für sich der Betrachtung unterzogen werden, da schon unter ihnen diskontinuierliche Polyeder existieren.

2. **Die Stephanoide zweiter Ordnung St'_p.** Die beiden Diagonalen der Grenzfläche eines St'_p im kronrandigen $(2+2p)$-flächigen $2p$-Eck sind Diagonalen der regulären p-eckigen Deckflächen, wobei eine Diagonale auch durch die Kante des p-ecks ersetzt sein kann. Ist φ der Zentriwinkel zur Kante des p-ecks im umgeschriebenen Kreis, also $= \frac{360^0}{p}$, so gehören die Diagonalen des p-ecks zu den Zentriwinkeln $2\varphi, 3\varphi, \ldots. \lambda\varphi$, wobei λ alle Werte bis $p-1$ annehmen kann. Man erhält nun eine Grenzfläche eines St'_p, wenn man irgend zwei Punkte der unteren Deckfläche, $2i'$ und $2i'_1$, deren Verbindungsdiagonale zum Winkel $\lambda\varphi$ gehört, mit zwei Punkten $2i-1-2\mu$ und $2i+1+2\mu$ der oberen Deckfläche verbindet, deren Diagonale also den Zentriwinkel $(\lambda+1+2\mu)\cdot\varphi$ besitzt. Ist 1 die erste obere Ecke, so sind die unteren Ecken $\overline{2(\mu+1)}'$ und $\overline{2(\mu+1+\lambda)}'$ und die zweite obere Ecke ist $\overline{2(2\mu+1+\lambda)+1}$. Wir bezeichnen das Stephanoid, dessen Fläche diese Ecken besitzt, mit $St'_p\binom{\lambda+1+2\mu}{\lambda}$, nach den Koëffizienten der Winkel, die zu den Diagonalen der Grenzfläche gehören. Es fragt sich nun, wieviel und welche verschiedenen St'_p für ein bestimmtes p existieren.

Es sei vorerst p ungerade $(p \geqq 5)$. Wir nehmen zunächst, wie immer bei den folgenden Untersuchungen, an, dass die Diagonale in der unteren Deckfläche kleiner sei, als die in der oberen, da wir sonst nur die Deckflächen zu vertauschen brauchen, um dasselbe Stephanoid wieder zu erhalten. Bestimmen wir jetzt den Maximalwert $\bar{\lambda}$ von λ. Da für diesen offenbar nur $\mu = 0$ zulässig ist, so muss, damit die obere Diagonale die grössere bleibt, $p-(\bar{\lambda}+1) > \bar{\lambda}$ sein, d. h. $\bar{\lambda} < \frac{p-1}{2}$. Es ist also das Maximum von λ:

$$\bar{\lambda} = \frac{p-3}{2}.$$

Es sind nun allgemein solche Werte von μ zulässig, für die $p-(\lambda+1+2\mu) > \lambda$ ist, d. h. es muss $\mu < \frac{p-(2\lambda+1)}{2}$ sein. Das zu einem gegebenen Werte von λ mögliche Maximum von μ ist also:

$$\bar{\mu} = \frac{p-(2\lambda+1)}{2} - 1.$$

Da nun zu $\bar{\lambda}$ nur $\mu = 0$, zu jedem folgenden um 1 kleineren λ eine um 1 grössere Anzahl der μ gehört, zu $\lambda = 1$ aber die Werte $\mu = 0, 1, 2 \ldots \frac{p-5}{2}$, so ist die Anzahl aller möglichen Stephanoide St'_p bei ungeradem p gleich der Summe $1+2+3+\ldots+\frac{p-3}{2}$, d. h. gleich $\frac{(p-1)\,(p-3)}{8}$.

Beispiel: Für $p = 7$ ergibt sich $\bar{\lambda} = 2$. Es existieren also die möglichen Werte: $\lambda = 1$, $\mu = 0$ und 1; $\lambda = 2$, $\mu = 0$ und die drei vorhandenen St'_7 sind: $St'_7\binom{2}{1}$, $St'_7\binom{4}{1}$, $St'_7\binom{3}{2}$.

Nicht alle diese St'_p brauchen aber kontinuierliche Polyeder zu sein. Es gilt vielmehr der Satz: Haben in $St'_p\binom{\lambda+1+2\mu}{\lambda}$ die Zahlen p, λ und $\lambda+1+2\mu$ einen gemeinsamen Faktor σ, so ist das Stephanoid eine Gruppierung von σ Stephanoiden $St'_{\frac{p}{\sigma}}\left|\begin{matrix}\frac{\lambda+1+2\mu}{\sigma}\\ \frac{\lambda}{\sigma}\end{matrix}\right|$; dabei ist σ stets eine ungerade Zahl, da p ungerade ist. Ist aber p eine Primzahl, so sind alle St'_p kontinuierlich.

Es sei z. B. $p = 15$, $\lambda = 3$, $\mu = 1$. Dann ist $St'_{15}\binom{6}{3} = 3\,.\,St'_5\binom{2}{1}$.

Es sei nun zweitens p eine gerade Zahl ($p > 4$). Wir bestimmen zunächst wieder die zulässigen Werte von λ. Für den Maximalwert $\bar{\lambda}$ ist nur $\mu = 0$ möglich; also ist $p-(\bar{\lambda}+1) > \bar{\lambda}$, d. h. $\bar{\lambda} < \frac{p-1}{2}$, oder $\bar{\lambda} = \frac{p-2}{2}$. Zur Bestimmung der in Frage kommenden Werte von μ haben wir die Ungleichung $p-(\lambda+1+2\mu) > \lambda$, d. h. $\mu < \frac{p-(2\lambda+1)}{2}$. Daher ist das zu einem gegebenen λ gehörige Maximum von μ: $\bar{\mu} = \frac{p-(2\lambda+2)}{2}$. Die Anzahl der existierenden St'_p in diesem Falle geraden p's ist nun leicht zu bestimmen. Zu $\bar{\lambda}$ gehört nur $\mu = 0$, d. h. ein Wert von μ; zu jedem um 1 kleineren λ gehört ein weiterer Wert von μ, also ist die Zahl aller möglichen St'_p, da zu $\lambda = 1$ die Werte $\mu = 0, 1, 2 \ldots \frac{p-4}{2}$ gehören: $1+2+3+\ldots+\frac{p-2}{2}$ d. h. $\frac{p(p-2)}{8}$. Dies gibt den Satz: Die Anzahl der möglichen St'_{2m} ist gleich der Anzahl der St'_{2m+1}. Unter diesen St'_p sind wiederum diskontinuierliche Polyeder, wenn p, λ und $\lambda+1+2\mu$ einen gemeinschaftlichen Faktor σ haben. Dieser kann nie gerade sein, da $\lambda+1+2\mu$ und λ nie gleichzeitig gerade sein können. Für $p = 12$ z. B. ergibt sich, wenn $\lambda = 3$, $\mu = 1$ ist, die diskontinuierliche Gruppierung $St'_{12}\binom{6}{3} = 3\, St'_4\binom{2}{1}$. Hierüber sei noch bemerkt, dass $St'_4\binom{2}{1}$ das Stephanoid zweiter Ordnung mit der geringsten Zahl der Flächen und Ecken ist.

3. **Die Stephanoide erster Ordnung St_n.** Die beiden Diagonalen der Grenzfläche eines St_n im n-seitigen Prisma sind Diagonalen der regulären n-kantigen Deckflächen, wobei die eine Diagonale durch die Kante des n-ecks ersetzt sein kann. Ist wieder φ der Zentriwinkel zur Kante des n-ecks im umbeschriebenen Kreis, d. h. $\varphi = \frac{360^0}{n}$, so gehören die Diagonalen in der unteren Deckfläche zu $\lambda\varphi$ ($\lambda = 1, 2 \ldots$), die der oberen zu $(\lambda+2\mu)\cdot\varphi$. Sind $1, 2 \ldots n$ die oberen, $1', 2', 3' \ldots n'$ die unteren Ecken des Prismas, so sei die erste Fläche des Stephanoides $1, \overline{1+\mu}', 1+2\mu+\lambda, \overline{1+\mu+\lambda}'$, und dieses selbst werde mit $St_n\binom{\lambda+2\mu}{\lambda}$ bezeichnet. Wir unterscheiden wieder ungerades und gerades n. Es sei n zunächst ungerade. Für den Maximalwert $\bar{\lambda}$ ist jetzt nur $\mu = 1$ zulässig. Da wir wieder voraussetzen, dass die Diagonale in der oberen Deckfläche grösser als die der unteren ist, so ist offenbar $n-(\bar{\lambda}+2) > \bar{\lambda}$, d. h. $\bar{\lambda} < \frac{n-2}{2}$, und da n ungerade ist, $\bar{\lambda} = \frac{n-3}{2}$. Für μ gilt nun die Ungleichung $n-(\lambda+2\mu) > \lambda$, d. h. $\mu < \frac{n-2\lambda}{2}$; also ist das Maximum von μ zu einem bestimmten λ: $\bar{\mu} = \frac{n-(2\lambda+1)}{2}$. Z. B. gehört zu $n = 5$, $\lambda = 1$ und $\mu = 1$, d. h. es existiert nur das eine Stephanoid $St_5\binom{3}{1}$ für $n = 5$. — Die Anzahl der möglichen Stephanoide eines bestimmten n ist, da zu $\bar{\lambda}$ nur $\mu = 1$, zu jedem um 1 kleineren λ eine um 1 grössere Anzahl der μ gehört, gleich der Summe $1+2+\ldots+\frac{n-3}{2}$, d. h. $\frac{(n-1)(n-3)}{8}$.

Da nun für ungerades n die plagiedrische Hemigonie des n-seitigen Prismas nicht existiert, so gilt der Satz: **Für ungerades n ist kein St_n eine Kombination von mehreren St'.** Dagegen gibt es Stephanoide erster Ordnung, die Kombinationen dergleichen solcher geringerer Eckenzahl sind: Haben in $St_n \binom{\lambda+2\mu}{\lambda}$ die drei Grössen n, λ, $\lambda+2\mu$ einen gemeinsamen Faktor σ, der verschieden von 2 ist, weil n ungerade sein soll, so ist das St_n diskontinuierlich und besteht aus σ Stephanoide erster Ordnung $St_{\frac{n}{\sigma}} \left| \begin{matrix} \frac{\lambda+2\mu}{\sigma} \\ \frac{\lambda}{\sigma} \end{matrix} \right|$ $= St_{\frac{n}{\sigma}} \left| \begin{matrix} \frac{\lambda}{\sigma} + 2\frac{\mu}{\sigma} \\ \frac{\lambda}{\sigma} \end{matrix} \right|$. Da $\frac{\lambda}{\sigma} + 2\frac{\mu}{\sigma}$ um eine gerade Zahl grösser ist als $\frac{\lambda}{\sigma}$, so erkennt man sofort, dass es sich um Stephanoide erster Ordnung handelt. Es ist z. B. $St_{15} \binom{9}{3} = 3\, St_5 \binom{3}{1}$. Ist n eine Primzahl, so sind natürlich sämtliche St_n kontinuierliche Polyeder. **Es sei nun n gerade.** Für den Maximalwert $\bar{\lambda}$ gilt wieder $\bar{\lambda} < \frac{n-2}{2}$, denn für $\lambda = \frac{n-2}{2}$ werden die beiden Diagonalen der Grenzflächen gleich, also ist $\bar{\lambda} = \frac{n-4}{2}$. Ferner ist $\mu < \frac{n-2\lambda}{2}$, also, da n gerade, jener Wert also eine ganze Zahl ist: $\bar{\mu} = \frac{n-2(\lambda+1)}{2}$. Die Zahl aller möglichen St_n ist $1+2+3+\ldots\frac{n-4}{2}$, d. h. $\frac{(n-2)(n-4)}{8}$. Es gibt also für $n = 6, 8, 10 \ldots$ ebensoviel Stephanoide erster Ordnung wie für $n = 5, 7, 9 \ldots$, d. h. **die Anzahl der St_{2m} ist gleich der Anzahl der St_{2m-1}.** Die Stephanoide St_n für gerades n zerfallen nun in drei verschiedene Gruppen, von denen die erste kontinuierliche, die beiden anderen diskontinuierliche Polyeder enthält. a) Die Zahlen n, λ und $\lambda+2\mu$ haben keinen allen drei gemeinsamen Faktor. Dann muss, da n gerade ist, λ ungerade sein. Diese St_n sind kontinuierlich. b) Die Zahlen n, λ, $\lambda+2\mu$ haben bei ungeradem λ den gemeinsamen ungeraden Faktor σ, so dass $n = m\sigma$, $\lambda = \lambda'\sigma$, $\mu = \mu'\sigma$. Dann ist $St_n \binom{\lambda+2\mu}{\lambda} = \sigma \,.\, St_m \binom{\lambda'+2\mu'}{\lambda'}$. Da $2\mu'$ gerade ist, so sind die Einzelpolyeder sicher Stephanoide St. Beispiel: Es ist $St_{24} \binom{15}{9} = 3\, St_8 \binom{5}{3}$. c) Es sei λ gerade. Dann ist:

$$St_n \binom{\lambda+2\mu}{\lambda} = 2 \,.\, St_{\frac{n}{2}} \left| \begin{matrix} \frac{\lambda}{2}+\mu \\ \frac{\lambda}{2} \end{matrix} \right|,$$

wenn μ eine gerade Zahl ist, und

$$St_n\binom{\lambda+2\mu}{\lambda} \equiv 2\ St'_{\frac{n}{2}}\begin{vmatrix}\frac{\lambda}{2}+\mu\\ \frac{\lambda}{2}\end{vmatrix},$$

wenn μ eine ungerade Zahl ist. Jedes der $St_{\frac{n}{2}}$ oder $St'_{\frac{n}{2}}$ kann dabei für sich wieder diskontinuierlich sein, wie nach den vorhergehenden Kriterien zu entscheiden ist. Beispiele:

$$St_{42}\binom{18}{10} \equiv 2\ St_{21}\binom{9}{5}, \qquad St_{42}\binom{18}{6} \equiv 2\ St_{21}\binom{9}{3} \equiv 2\,.\,3\ St_7\binom{3}{1},$$
$$St_{42}\binom{18}{4} \equiv 2\ St'_{21}\binom{9}{2}, \qquad St_{42}\binom{18}{12} \equiv 2\ St'_{21}\binom{9}{6} \equiv 2\,.\,3\ St'_7\binom{3}{2}.$$

Damit ist die blosse Aufzählung der Stephanoide beider Ordnungen für beliebiges n geleistet. Die Ableitung der Flächen dieser Polyeder in der vollständigen Figur der n-seitigen regelmässigen Doppelpyramide bedarf nur der folgenden Bemerkung. Neben der ersten Fläche $1,\ \overline{1+\mu}',\ 1+\lambda+2\mu,\ \overline{1+\lambda+\mu}'$ treffen in der Ecke 1 noch drei Flächen zusammen. Die vier von 1) ausgehenden Kanten, die die Ecke daselbst bilden, sind $1,\ \overline{1+\mu}'$; $1,\ \overline{1+\lambda+\mu}'$; $1,\ \overline{n+1-\mu}'$; $1,\ \overline{n+1-\lambda-\mu}'$. Die Fläche dieses Stephanoides, das ja ein autopolares Polyeder ist, wird also erhalten, wenn man in der vollständigen Figur der n-seitigen Doppelpyramide in der Fläche 1 die Spuren der Ebenen $\overline{1+\mu}'$, $\overline{1+\lambda+\mu}'$, $\overline{n+1-\mu}'$ und $\overline{n+1-\lambda-\mu}'$ bestimmt, und zwar wird die vierkantige Stephanoidfläche von diesen Spuren in der eben geschriebenen Reihenfolge gebildet. Hierüber sei noch bemerkt, dass die St_n für $\lambda = 1$ stets nur körperliche Zellen mit den Koëffizienten $+1$ und -1 besitzen, so dass für diese Stephanoide die gesamte Fläche jedes Grenzvierecks an der äusseren, am Modell sichtbaren Oberfläche des Körpers teil hat. Über die weiteren Einzelheiten gibt die Betrachtung der folgenden Beispiele Aufschluss.

4. **Beispiele: Die Stephanoide St'_7, St_8 und St_{10}.** Die drei bereits angeführten Stephanoide zweiter Ordnung für $p = 7$, nämlich $St'_7\binom{2}{1}$, $St'_7\binom{3}{1}$ und $St'_7\binom{3}{2}$ sind konstituierende Teilkörper gewisser diskontinuierlicher St_{14}, hier aber für sich als kontinuierliche Nullpolyeder zu betrachten, deren Hülle das kronrandige $(2+2\,.\,7)$-flächige $2\,.\,7$-Eck, deren Kern das reziproke $(2+2\,.\,7)$-eckige $2\,.\,7$-Flach ist. Diese drei Polyeder zeigen die Figuren 21,

20 und 22 auf Tafel 21. Die Grenzflächen sind in der vollständigen Figur der regelmässigen 14-seitigen Doppelpyramide, Fig. 3 Taf. 3 enthalten, in der also nur die Hälfte der Spuren für die benötigten Flächen in Frage kommen, es sind die gestrichelten Spuren getilgt zu denken. Die Grenzflächen der drei Polyeder in der genannten Reihenfolge sind: $2'$, $4'$, $14'$, $12'$ (vergl. Fig. 4 Taf. 3); $4'$, $6'$, $12'$, $10'$ (Fig. 3 Taf. 3) und $2'$, $6'$, $14'$, $10'$ (Fig. 5 Taf. 3). Für die Schraffierung dieser Grenzflächen gelten die folgenden Bemerkungen ebenso wie für die Schraffierung aller auf den Tafeln dargestellten Polyederflächen, bei denen Zellen entgegengesetzten Vorzeichens an der Bildung der Oberfläche des Polyeders teilnehmen. Halten wir uns der Einfachheit wegen an Fig. 4 Taf. 3. Es sei die Zelle MNQ der Fläche positiv, also die Zelle QOP negativ. Es zeigt nun die senkrechte Schraffierung stets an, dass die Oberseite der Fläche die äussere Fläche des Polyeders bildet, die wagrechte Schraffierung, dass die Unterseite der Figur die äussere sichtbare Fläche des Körpers ist. Daraus folgt: Der Koëffizient des Flächenteils am Polyeder ist positiv, wenn der Flächenteil der positiven Flächenzelle angehört und senkrecht schraffiert ist, oder wenn er der negativen Flächenzelle angehört und wagrecht schraffiert ist; der Koëffizient des Flächenteils am Polyeder ist negativ, wenn der Flächenteil der negativen Flächenzelle angehört und senkrecht schraffiert ist, oder wenn er der positiven Flächenzelle angehört und wagrecht schraffiert ist. Es sind also von der Fläche Fig. 4 Taf. 3 am Polyeder gefärbt (aussen positiv) die Zellen MNR und QSP, ungefärbt (aussen negativ) die Zellen RNQ und OSP. Längs der Kante $MRQP$ grenzt diese erste Fläche des Stephanoids an die Kante $PQRM$ einer zweiten Fläche, so dass in jeder Teilstrecke der Kante Zellen gleichen Vorzeichens beider Flächen an einander gefügt sind.[1])

Die Stephanoide erster Ordnung St_s sind nicht dargestellt und hier nur mit Rücksicht darauf erwähnt, dass gewisse von ihnen Teilpolyeder diskontinuierlicher Vielflache des Hexakisoktaedertypus sind. Es sind die drei Polyeder $St_8\binom{3}{1}$, $St_8\binom{5}{1}$ und $St_8\binom{4}{2}$, von denen das letzte diskontinuierlich

[1]) Bei komplizierteren Polyedern werden wir später bei den aneinander zu heftenden Kanten diese Teilstrecken durch griechische Buchstaben von einander trennen.

ist, denn es ist mit $2 \cdot St'_4 \binom{2}{1}$ identisch. Wir haben zwei Stephanoide zweiter Ordnung, weil der obere Klammerindex um eine ungerade Zahl grösser ist als der untere. Die Ecken dieser Einzelpolyeder im achtseitigen regulären Prisma sind $1, 2', 3, 4', 5, 6', 7, 8'$ und $2, 3', 4, 5', 6, 7', 8, 1'$. Wir geben zunächst für jedes der drei Stephanoide die erste Fläche und die erste Ecke an:

$St_8 \binom{3}{1}$:	Die Fläche ist:	$1, 2', 4, 3'$;	Die Ecke ist:	$1 - 7', 8', 2', 3'$.
$St_8 \binom{5}{1}$:	„ „ „:	$1, 3', 6, 4'$;	„ „ „:	$1 - 6', 7', 3', 4'$.
$St_8 \binom{4}{2}$:	„ „ „:	$1, 2', 5, 4'$;	„ „ „:	$1 - 6', 8', 2', 4'$.

Betrachten wir allein das letzte Polyeder weiter. Die Fläche 1, d. h. die in der Ebene 1 des inneren Kernes liegende Fläche hat die Ecken $7, 3, 8', 2'$ der äusseren prismatischen Hülle, während der in der Ebene 8 liegenden Fläche des Stephanoides die Ecken $6, 2, 7', 1'$ des Prismas zukommen, wenn Pyramide und Prisma zusammenfallende Nebenachsen von gleicher Benennung besitzen. Diese Bemerkung wird genügen bei Bestimmung dieser Stephanoide als Teilpolyeder von diskontinuierlichen Körpern des Hexakisoktaedertypus.

Die Stephanoide St_{10}. Von den sechs hier möglichen Individuen sind nach den allgemeinen Betrachtungen vier kontinuierlich, nämlich die Stephanoide $St_{10} \binom{3}{1}$, $St_{10} \binom{5}{1}$, $St_{10} \binom{7}{1}$ und $St_{10} \binom{5}{3}$, deren Modelle in Fig. 23 Taf. 21 und Fig. 19, 17 und 20 Taf. 22 dargestellt sind. Dagegen sind diskontinuierlich die beiden folgenden: $St_{10} \binom{6}{2} \equiv 2 \cdot St_5 \binom{3}{1}$, Fig. 18 Taf. 22 und $St_{10} \binom{4}{2} \equiv 2 \cdot St'_5 \binom{2}{1}$, Fig. 24 Taf. 21. Die Grenzflächen dieser sämtlichen Stephanoide sind in der vollständigen Figur der zehnseitigen Doppelpyramide (Fig. 6 Taf. 3) enthalten, und zwar wird die erste Fläche in der Ebene 1 der Doppelpyramide jeweils von den hier beigeschriebenen Spuren gebildet: $St_{10} \binom{3}{1}$: $2', 3', 10', 9'$, die für sich gezeichnete Fläche ist Fig. 7 Taf. 3. — $St_{10} \binom{5}{1}$: $3', 4', 9', 8'$ in Fig. 8 Taf. 3. — $St_{10} \binom{7}{1}$: $4', 5', 8', 7'$ in Fig. 6 Taf. 3. — $St_{10} \binom{5}{3}$: $2', 5', 10', 7'$ in Fig. 9 Taf. 3. — $St_{10} \binom{6}{2}$: $3', 5', 9', 7'$ in Fig. 10, Taf. 3 und $St_{10} \binom{4}{2}$: $2', 4', 10', 8'$ in Fig. 11 Taf. 3. Die vier kontinuierlichen Stephanoide bedürfen keiner weiteren Erläuterung. Von den beiden diskontinuierlichen Stephanoiden ist das erste die Kombination zweier Stephanoide erster Ordnung, deren jedes für sich in einem fünfseitigen Prisma enthalten ist, da die $2 \cdot 10$ Ecken eines regulären zehnseitigen Prismas zugleich die von zwei, um 36° um die Hauptachse gegen einander gedrehten fünfseitigen Prismen sind. Das zweite diskontinuierliche Stephanoid erklärt sich dadurch, dass das reguläre zehnseitige Prisma zwei plagiedrische Hemigonien zulässt, bei deren erster die Ecke 1 erhalten bleibt, während sie bei der zweiten wegfällt. Die in beiden Hemigonien enthaltenen $St'_5\binom{2}{1}$ sind es, aus denen das $St_{10}\binom{4}{2}$ kombiniert ist. Es sind also bei $St_{10}\binom{6}{2}$ die Ecken der beiden Teilstephanoide $\left.\begin{matrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 1' & 3' & 5' & 7' & 9'\end{matrix}\right\}$ und $\left.\begin{matrix}2 & 4 & 6 & 8 & 10\\ 2' & 4' & 6' & 8' & 10'\end{matrix}\right\}$, bei $St_{10}\binom{4}{2}$ aber: $\left.\begin{matrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 2' & 4' & 6' & 8' & 10'\end{matrix}\right\}$ und $\left.\begin{matrix}2 & 4 & 6 & 8 & 10\\ 3' & 5' & 7' & 9' & 1'\end{matrix}\right\}$. In beiden Fällen ergibt sich das eine Teilstephanoid durch Drehung des anderen um 36° um die Hauptachse des Prismas. — Einer näheren Betrachtung unterziehen wir noch die $St_{10}\binom{6}{2} = 2\,St_5\binom{3}{1}$, da sie als Teilpolyeder von Gruppierungen im Dyakishexekontaedertypus auftreten. Die Doppelpyramide sei im Raume wieder so orientiert, dass die Achse A senkrecht von unten nach oben und eine Symmetrieebene durch sie und vier Kanten der Doppelpyramide direkt auf den Beschauer zu verläuft. Die erste obere Fläche rechts von dieser Symmetrieebene ist die Fläche 1, auf die die übrigen so folgen, dass 10 die letzte Fläche links der Symmetrieebene ist. Die Lage der Flächen 1′, … 10′ ist dann bekannt. Orientiert man das reziproke Prisma so, dass die Flächen der Doppelpyramide parallel sind den Tangentialebenen an die umbeschriebene Kugel des Prismas in dessen Ecken, und numeriert die Ecken des Prismas demgemäss, so gilt für die Ecken und Flächen des Stephanoides: Die Fläche 1 wird gebildet durch die Spuren der Ebenen 3′, 5′, 7′, 9′ und hat die Ecken 4, 10′, 8, 2′ des Prismas; und zwar verbindet 3′ die Ecken 4 und 10′, 5′ die Ecken 4 und 2′, 7′ die Ecken 8 und 10′, endlich 9′ die Ecken 8 und 2′. Danach ist die Lage der ersten Fläche des Stephanoides in Doppelpyramide und Prisma vollkommen bestimmt und die übrigen Flächen und Ecken sind leicht einander zuzuordnen. Diese Bemerkung wird für die späteren Untersuchungen genügen.

5. Die Stephanoidgruppierungen im $(2+p+p)$-flächigen $2.2p$-Eck.

Die Eckpunkte der beiden Deckflächen eines $(2+p+p)$-flächigen $2.2p$-Ecks bilden je die Ecken von zwei regulären p-ecken, die um den Winkel α gegen einander gedreht sind, d. h. die Ecken sind die zweier regulärer

p-seitiger Prismen. Es sind also in dem allgemeinsten Polyeder des Typus als Hüllpolyeder alle die Gruppierungen von je zwei Stephanoiden möglich, wie sie im $(2+p)$-flächigen $2p$-Eck existieren. Sie lassen sich leicht aufzählen; kontinuierliche gleicheckig-gleichflächige Stephanoide gibt es hier nicht.[1]) Von besonderem Interesse für später sind die hemigonischen Gruppierungen. Sind $1, 2, 3 \ldots 2p-1, 2p$ bezw. $1', 2', 3' \ldots . 2p-1', 2p'$ die oberen und unteren Ecken des $2 . 2p$-Ecks, so gehören die Ecken mit geradem Index dem einen, die mit ungeradem Index dem anderen Stephanoid an. Beide können überdies kontinuierliche oder diskontinuierliche St oder St' sein. Es ist sofort ersichtlich, dass plagiedrische Hemigonien nicht vorhanden sein können, weil mit den Ecken $2, 4, 6, 8 \ldots$ des einen Stephanoids zugleich die Ecken $1', 3', 5', 7' \ldots$ des anderen verschwänden. Rhomboedrische Hemigonien sind überhaupt nur möglich, wenn p eine gerade Zahl ist. Da bei einer solchen Hemigonie die Ecken i und i' nie gleichzeitig vorhanden sind, so können nur Stephanoide St' auftreten. Also beginnt die Reihe möglicher Stephanoide mit $p = 8$. Wir betrachten, wegen späterer Verwendung nur den Fall $p = 10$. Von den sechs möglichen Stephanoidgruppierungen des vollzähligen Polyeders bleibt für die Hemigonie nur

[1]) Dagegen existieren sowohl gleicheckige, als ihnen reziproke gleichflächige Polyeder, Stephanoide im weiteren Sinne, auf die hier, da sie nirgends erwähnt sind, wenigstens für den einfachsten Fall hingewiesen werden soll. Verbindet man die Ecken eines prismatischen $(2+3+3)$-flächigen $2 . 2 . 3$-Ecks wie zur Konstruktion eines $St_6\,\binom{3}{1}$ im regulären 6-seitigen Prisma, so erhält man ein Stephanoid mit zwölf Flächen, von denen je sechs untereinander kongruent, von den anderen sechs aber verschieden sind. Beide Arten von Vierecken bestehen je aus kongruenten Zellen entgegengesetzten Vorzeichens; das erhaltene Stephanoid ist also nur gleicheckig. Die Flächen sind die zweier gerader dreiseitiger Doppelpyramiden, die um 60^0 gegen einander um die Hauptachse gedreht sind, und deren Hauptachsen überdies verschiedene Längen besitzen. — Das hierzu reziproke gleichflächige Polyeder hat zum inneren Kern das ebenrandige $(2+3+3)$-eckige $2 . 2 . 3$-Flach. Die Ecken sind die zweier um 60^0 um die Hauptachse gegen einander gedrehten prismatischen $(2+3)$-flächigen $2 . 3$-Ecke (dreiseitige reguläre Prismen), die gemeinsamen Mittelpunkt, aber verschiedene Haupt- und Nebenachsen haben. Die Grenzflächen dieses Stephanoids sind $2 . 6$ überschlagene Vierecke, von denen je sechs unter sich kongruent, den anderen sechs aber nur symmetrisch sind. Jedes Viereck besitzt zwei Zellen, die nicht kongruent sind, so dass der Inhalt einer einzelnen Grenzfläche nicht Null ist. Dagegen verschwindet der Inhalt der Summe je zweier symmetrischer Grenzflächen (vergl. Fig. 12 Taf. 3), so dass die Gesamtoberfläche und der Inhalt des Stephanoids wieder Null wird. Wird der innere Kern zur regulären 6-seitigen Doppelpyramide, so ergibt sich wieder das autopolare gleicheckig-gleichflächige Stephanoid $St_6\,\binom{3}{1}$.

die Gruppierung der $2.2.St'_5\binom{2}{1}$ zu untersuchen. Diese Hemigonie besteht aus $2\,St'_5\binom{2}{1}$, von denen das eine durch Drehung um den Winkel α um die Hauptachse mit dem anderen zur Deckung kommt. Die Hülle ist ein unterbrochen kronrandiges $(2+2.5)$-flächiges $2.2.5$-Eck, dessen Deckflächen kongruente, um 36^0 gegen einander gedrehte halbreguläre Zehnecke sind. Die Ecken dieser Zehnecke sind die von zwei um den Winkel α gegen einander gedrehten regulären Fünfecken. Ist $\alpha = 0$, so geht das Polyeder in ein $St'_5\binom{2}{1}$ über; ist $\alpha = 36^0$, so entsteht ein $St_{10}\binom{1}{2} \equiv 2\,St'_5\binom{2}{1}$. Das Modell einer solchen Stephanoidgruppierung zeigt Fig. 19 Taf. 21. Da das Polyeder nach seinen Ecken die Hemigonie des prismatischen $(2+2.10)$-flächigen $2.2.10$-Ecks ist, so ist es nach den Flächen die Hemiedrie des diesem reziproken Polyeders; der Kern ist somit ein unterbrochen kronrandiges $(2+2.5)$-eckiges $2.2.5$-Flach (Skalenoeder), dessen Fläche in der vollständigen Figur des vollzähligen gleichflächigen Polyeders enthalten ist. Um die Grenzfläche des Stephanoids zu finden, zeichnet man also die vollständige Figur der Ebenen eines $(2+2.10)$-eckigen $2.2.10$-Flaches und tilgt die Hälfte der Spuren, wie es Fig. 2 Taf. 3 anzeigt. Betrachten wir die gegenseitige Anordnung der Flächen des Kernpolyeders und der Ecken des Hüllpolyeders noch genauer. Wir orientieren das ebenrandige $(2+2.10)$-eckige $2.2.10$-Flach im Raume so, dass die Hauptachse A senkrecht nach oben verläuft, die erste Nebenachse C_1 wagrecht nach vorn. Fig. 18 Taf. 1, die stereographische Projektion aus dem Achsenende A' der Hauptachse auf die Hauptsymmetrieebene zeigt dann die Anordnung der übrigen Nebenachsen. Die schraffierten Flächen sind die für die Hemiedrie verbleibenden Flächen, d. h. die des unterbrochen kronrandigen $(2+2.5)$-eckigen $2.2.5$-Flaches. Orientiert man das Hüllpolyeder in entsprechender Weise, so sind die Flächenbenennungen des Kernpolyeders zugleich die Eckenzahlen des Hüllkörpers und man ersieht die folgende Zuordnung. Die erste Stephanoidfläche wird in der Ebene 1 durch die Spuren der Flächen 3', 7', 19', 15' gebildet (Fig. 2 Taf. 3). Die Ecken dieser Fläche auf dem Hüllpolyeder sind die folgenden: Es schneiden sich die Flächen 1, 3', 7' im Punkte 5 der Hülle, 1, 15', 19' im Punkte 17; 1, 13', 15' im Punkte 19' und 1, 7', 19' im Punkte 3'. Bedeuten also in dem Schema:

				⊙												⊙			
1	2			5	6			9	10			13	14			17	18		
		3′	4′			7′	8′			11′	12′			15′	16′			19′	20′
		*				*								*				*	
		⊙																⊙	

die Zahlen sowohl Ecken- wie Flächenindices, so wird die Stephanoidfläche in der Ebene 1 von den Spuren der Flächen * gebildet, und besitzt die Ecken ⊙. Die weitere Zuordnung der Ecken und Flächen lässt sich danach leicht übersehen, wenn man die Gerade zum Kreise schliesst. Dieses Schema wird später weitere Dienste zu leisten haben, wenn es sich um die Untersuchung der Gruppierungen von Stephanoiden im Dyakishexekontaedertypus handelt. Jedenfalls sind im vorstehenden die kontinuierlichen und diskontinuierlichen Nullpolyeder des Doppelpyramidentypus erschöpft und es sei nur noch bemerkt, dass weder kontinuierliche noch diskontinuierliche nichtkonvexe Polyeder erster Klasse, die zugleich gleicheckig und gleichflächig sind, für diesen Typus existieren.

III. Kapitel.

Die Polyeder des Hexakisoktaedertypus.

§ 1. Die gleichflächigen und die gleicheckigen Polyeder erster Art des Hexakisoktaedertypus.

1. Übersicht dieser Polyeder. Zum Typus des Hexakisoktaeders gehören die folgenden gleichflächigen und die ihnen polar entsprechenden gleicheckigen vollzähligen Körper erster Art, d. h. solche, die sämtliche Symmetrieebenen des Typus besitzen:

(Gleichflächige Polyeder).	(Gleicheckige Polyeder).
1. Das $(6+8+12)$-eckige $2 . 24$-Flach oder Hexakisoktaeder.	1. Das $(6+8+12)$-flächige $2 . 24$-Eck (kurz: $2 . 24$-Eck).
2. Das $(6+8+12)$-eckige 24-Flach oder Deltoidikositetraeder.	2. Das $(6+8+12)$-flächige 24-Eck (kurz: 24-Eck).
3. Das $(6+8)$-eckige $8 . 3$-Flach oder Triakisoktaeder.	3. Das $(6+8)$-flächige $8 . 3$-Eck (kurz: $8 . 3$-Eck).
4. Das $(6+8)$-eckige $6 . 4$-Flach oder Tetrakishexaeder.	4. Das $(6+8)$-flächige $6 . 4$-Eck (kurz: $6 . 4$-Eck).
5. Das Rhombendodekaeder.	5. Das Kubooktaeder.
6. Das (reguläre) Oktaeder.	6. Das (reguläre) Hexaeder.
7. Das (reguläre) Hexaeder.	7. Das (reguläre) Oktaeder.

Alle Körper des Typus sind in dem ersten enthalten, nach dem er deshalb benannt wird. Die Körper 6. und 7. sind die bekannten regulären; die 5. sind archimedeische Polyeder, während die übrigen allgemeinere

Körper darstellen, die nur gewisse archimedeische Körper als spezielle Fälle enthalten.[1]) Das allen Körpern gemeinsame Achsensystem entsteht bei dem allgemeinsten gleichflächigen Polyeder des Typus dadurch, dass sämtliche Ecken mit dem Mittelpunkte der einbeschriebenen Kugel verbunden werden. a) Die sechs $(4+4)$-kantigen Ecken geben, da je zwei diametral gegenüber liegen, sechs zu je zweien eine Achse bildende Strahlen; diese drei Achsen sind vierzählig, da der Körper in Bezug auf sie als Rotationsachsen vier identische Stellungen darbietet. Die sechs Strahlen ergeben auf einer konzentrischen Kugel ein sphärisches Netz von acht kongruenten regulären Dreiecken, dem als einbeschriebenes Polyeder ein reguläres Oktaeder, als umbeschriebenes ein reguläres Hexaeder entspricht. Die Endpunkte dieser Achsen seien mit A_1, A_2, A_3 bezw. A'_1, A'_2, A'_3 bezeichnet (vergl. Fig. 1 Taf. 4). b) Die acht $(3+3)$-kantigen Ecken geben acht Strahlen, die vier dreizählige Achsen bilden. Auf der Kugel ergeben sie ein Netz von sechs kongruenten sphärischen Quadraten, dem als einbeschriebenes Polyeder ein reguläres Hexaeder, als umbeschriebenes ein reguläres Oktaeder entspricht. Die Endpunkte der Achsen seien mit C_1, C_2, C_3, C_4 bezw. C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 bezeichnet. c) Die zwölf $(2+2)$-kantigen Ecken geben zwölf Strahlen, die sechs zweizählige Achsen bilden. Auf der Kugel entsteht ein sphärisches Netz, das als einbeschriebenes Polyeder das Kubooktaeder, als umbeschriebenes das Rhombendodekaeder besitzt. Die Endpunkte der Achsen seien $B_1, B_2, \dots B_6$ bezw. $B'_1, B'_2, \dots B'_6$. Symmetrieebenen sind die drei Ebenen durch je zwei der Achsen A, sowie die sechs Ebenen durch die Achsen A und die ihnen benachbarten C, die insgesamt die Oberfläche der konzentrischen Kugel in 48 symmetrisch-gleiche Dreiecke, 24 rechte und 24 linke, zerlegen. Je drei benachbarte Strahlen, nämlich ein vier-, drei- und zweizähliger, bestimmen also eine dreiflächige Ecke, deren körperlicher Winkel den 48-sten Teil der Kugel beträgt und deren Flächenwinkel bezw. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{2}$ sind. Bezeichnet man für das allgemeinste Polyeder des Typus die Länge der drei Strahlen nach den betr. Ecken mit A, B, C, so sind die Winkel, die diese Strahlen unter einander bilden, die folgenden. Der Winkel des vierzähligen gegen den zweizähligen Strahl, $\sphericalangle A|B$, ist $\varphi = 45^0$; der des vier-

[1]) Vergl. V. u. V. die Figuren der Polyeder auf Tafel VII.

zähligen gegen den dreizähligen, $\sphericalangle A|C$, sei χ, dann ist $\cos\chi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ und $\chi = 54^0\ 44'\ 8''$; der Winkel $C|B$ endlich sei ψ; so ist $\cos\psi = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ und damit $\psi = 35^0\ 15'\ 52''$. Legt man durch die Endpunkte je dreier benachbarter Strahlen A, B, C Ebenen, so erhält man die 48 Grenzflächen des Hexakisoktaeders, die ungleichkantige Dreiecke sind, und zwar 24 rechte und 24 linke Flächen. Der polar-reziproke Körper entsteht, wenn man in den Endpunkten der Strahlen Ebenen senkrecht zu ihnen legt. Die vorhin angegebene zentrale Ecke ist die Polarecke zu jeder Ecke des entstehenden gleicheckigen $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks, das 24 rechte und 24 linke Ecken besitzt. Die gleichflächigen Körper 2. bis 7. ergeben sich aus dem ersten für bestimmte Längen der Strahlen A, B, C. Es werde für alle Körper, da nur das Verhältnis der Strahlen in Frage kommt, die Länge C des dreizähligen Strahles als konstant angenommen. Für das Hexaeder ist dann, wenn dessen vier- und zweigliedriger Strahl mit A_h und B_h bezeichnet werden:

$$A_h = \frac{C\sqrt{3}}{3} \text{ und } B_h = \frac{C\sqrt{6}}{3}.$$

Für die übrigen Körper sei nun $A = A_h \cdot \tau$, $B = B_h \cdot \sigma$, worin τ und σ zwei reelle Parameter sind, die nur für das Hexaeder zugleich 1 sind; sonst sind sie $\geqq 1$, damit das zugehörige Polyeder konvex ist. Die Maximalwerte sind $\tau = 3$ und $\sigma = \frac{3}{2}$ für das Oktaeder; für $\tau > 3$ und $\sigma > \frac{3}{2}$ ergeben sich wiederum nichtkonvexe Polyeder (Koiloëder nach Fedorows Bezeichnung).

2. **Analytisch-geometrische Behandlung der gleichflächigen Polyeder erster Art des Typus.** Zur analytisch-geometrischen Behandlung der sämtlichen Polyeder des Hexakisoktaedertypus bietet sich das System der drei Achsen A von selbst dar. In dem rechtwinkligen Koordinatensystem sei der Strahl A_1 die senkrecht nach oben gerichtete positive z-achse, der Strahl A_2 die wagrecht nach vorn gerichtete positive x-achse und der Strahl A_3 die wagrecht nach rechts gerichtete positive y-achse. Für die acht von den drei Ebenen durch je zwei der Achsen gebildeten Oktanten ergeben sich dann (wie fernerhin stets vorausgesetzt) die Vorzeichen der Koordinaten in der Reihenfolge:

			(x) (y) (z)			(x) (y) (z)
6)	1. Oktant	$(A_2\, A_3\, A_1)$	: + + +	5. Oktant	$(A_2\, A_3\, A'_1)$	: + + —
	2. „	$(A_2\, A_3'\, A_1)$	: + — +	6. „	$(A_2\, A'_3\, A'_1)$	: + — —
	3. „	$(A'_2\, A'_3\, A_1)$	: — — +	7. „	$(A'_2\, A'_3\, A'_1)$	: — — —
	4. „	$(A'_2\, A_3\, A_1)$	: — + +	8. „	$(A'_2\, A_3\, A'_1)$	: — + —

Alsdann durchsetzen die Achsen C_1, C_2, C_3, C_4 bezw. den 1., 2., 4. und 3. Oktanten; die Achsen B liegen in den Ebenen durch je zwei der Achsen A und zwar B_1 in $A_1 A_2$, B_2 in $A_1 A_3$, B_3 in $A_2 A_3$, B_4 in $A_1 A'_3$, B_5 in $A_1 A'_2$ und B_6 in $A_2 A'_3$. Die x-, y- und z-koordinaten der Ecken A, B, C des Hexakisoktaeders sind dann die im folgenden angeführten, wenn zur Abkürzung noch $\frac{C}{\sqrt{3}} = a$ gesetzt ist, wobei also a die halbe Kante des Hexaeders ist, dessen Ecken die Punkte C sind:

$$A_1\,(0,\ 0,\ a\tau);\quad A_2\,(a\tau,\ 0,\ 0);\quad A_3\,(0,\ a\tau,\ 0).$$

Die Koordinaten von A'_1, A'_2, A'_3 sind die entgegengesetzt gleichen.

$$C_1\,(a, a, a);\quad C_2\,(a, -a, a);\quad C_3\,(-a, a, a);\quad C_4\,(-a, -a, a).$$
$$B_1\,(a\sigma, 0, a\sigma);\ B_2\,(0, a\sigma, a\sigma);\ B_3\,(a\sigma, a\sigma, 0);\ B_4\,(0, -a\sigma, a\sigma);\ B_5\,(-a\sigma, 0, a\sigma);$$
$$B_6\,(a\sigma, -a\sigma, 0).$$

Die Koordinaten der B' und C' sind wieder die der B und C mit entgegengesetzten Vorzeichen. Jede der 48 Grenzflächen des Hexakisoktaeders ist nun durch drei Punkte, A, B, C, bestimmt, wie die folgende Zusammenstellung angibt, in der die erste vor den drei Achsen stehende Fläche durch diese selbst, die zweite ihr parallele Fläche durch die Achsen bestimmt ist, die man erhält, wenn man die ungestrichelten Buchstaben mit gestrichelten vertauscht, und umgekehrt (vergl. Fig. 1 Taf. 4):

1), 48), $A_1 B_1 C_1$.	7), 46), $A_1 B_2 C_3$.	13), 39), $A_2\, B_1\, C_2$.	19), 29), $A'_2 B'_3 C_4$.
2), 41), $A_1 B_1 C_2$.	8), 47), $A_1 B_2 C_1$.	14), 40), $A_2\, B_6\, C_2$.	20), 30), $A'_2 B_5\, C_4$.
3), 42), $A_1 B_4 C_2$.	9), 35), $A_3 B_2 C_1$.	15), 25), $A'_3 B_6\, C_2$.	21), 31), $A'_2 B_5\, C_3$.
4), 43), $A_1 B_4 C_4$.	10), 36), $A_3 B_3 C_1$.	16), 26), $A'_3 B_4\, C_2$.	22), 32), $A'_2 B'_6 C_3$.
5), 44), $A_1 B_5 C_4$.	11), 37), $A_2 B_3 C_1$.	17), 27), $A'_3 B_4\, C_4$.	23), 33), $A_3\, B'_6 C_3$.
6), 45), $A_1 B_5 C_3$.	12), 38), $A_2 B_1 C_1$.	18), 28), $A'_3 B'_3 C_4$.	24), 34), $A_3\, B_2\, C_3$.

Die Gleichungen der 48 Ebenen sind leicht aufzustellen, da von jeder Ebene drei Punkte bekannt sind. Da die Abschnitte der Ebenen auf den drei Koordinatenachsen, absolut genommen, immer dieselben drei Grössen sind, so enthalten die Gleichungen nur drei Koëffizienten, in denen neben den veränderlichen beiden Parametern σ und τ nur die Konstante a auftritt, von der lediglich die absolute Grösse des Polyeders abhängt. Je acht Gleichungen haben in x, y, z dieselben absoluten Koëffizienten und unterscheiden sich nur durch deren Vorzeichen. Für die Aufeinanderfolge dieser gilt das oben gesagte. Die 48 Gleichungen für die links durch ihre Nummer angegebenen Flächen sind:

$$7)\left\{\begin{array}{llllllllr}
1), & 2), & 5), & 6), & 44), & 45), & 48), & 41), & \pm(\tau-\sigma)x \pm \tau(\sigma-1)y \pm \sigma z - \sigma\tau a = 0. \\
8), & 3), & 4), & 7), & 43), & 46), & 47), & 42), & \pm\tau(\sigma-1)x \pm (\tau-\sigma)y \pm \sigma z - \sigma\tau a = 0. \\
12), & 13), & 20), & 21), & 30), & 31), & 38), & 39), & \pm\sigma x \pm \tau(\sigma-1)y \pm (\tau-\sigma)z - \sigma\tau a = 0. \\
11), & 14), & 19), & 22), & 29), & 32), & 37), & 40), & \pm\sigma x \pm (\tau-\sigma)y \pm \tau(\sigma-1)z - \sigma\tau a = 0. \\
9), & 16), & 17), & 24), & 27), & 34), & 35), & 26), & \pm\tau(\sigma-1)x \pm \sigma y \pm (\tau-\sigma)z - \sigma\tau a = 0. \\
10), & 15), & 18), & 23), & 28), & 33), & 36), & 25), & \pm(\tau-\sigma)x \pm \sigma y \pm \tau(\sigma-1)z - \sigma\tau a = 0.
\end{array}\right.$$

Zur Bestimmung der Relationen der Ableitungskoëffizienten σ und τ der speziellen aus dem Hexakisoktaeder entstehenden gleichflächigen Körper und zur Aufstellung der Gleichungen ihrer Grenzflächen gehen wir von den Winkeln benachbarter Flächen des allgemeinen Körpers aus. Dieser besitzt Kanten dreierlei Art. Die Kanten AB, BC, AC verbinden bezw. achtkantige mit vierkantigen, sechskantige mit vierkantigen und achtkantige mit sechskantigen Ecken. Bezeichnet man die Winkel, die zwei benachbarte Ebenen in ihnen besitzen mit $\omega_{8,4}$, $\omega_{6,4}$ und $\omega_{8,6}$, so ist für das Hexakisoktaeder jeder dieser Winkel verschieden von Null, während für die speziellen Körper, bei denen 2, 4, 6 oder 8 Flächen in eine Ebene fallen, einer oder zwei dieser Winkel den Wert Null besitzen. Es ergibt sich nämlich das

Deltoidikositetraeder	für $\omega_{8,6} = 0.$	Rhombendodekaeder	für $\omega_{6,4} = 0,\ \omega_{8,4} = 0.$
Triakisoktaeder	„ $\omega_{6,4} = 0.$	Oktaeder	„ $\omega_{6,4} = 0,\ \omega_{8,6} = 0.$
Tetrakishexaeder	„ $\omega_{8,4} = 0.$	Hexaeder	„ $\omega_{8,4} = 0,\ \omega_{8,6} = 0.$

Drückt man nun in bekannter Weise die cosinus der Winkel zweier Nachbarflächen durch die Koëffizienten der Gleichungen dieser aus, so ergeben sich für die cosinus der oben genannten Winkel am Hexakisoktaeder die Werte:

$$8)\quad\begin{cases}\cos\omega_{8,6} = \dfrac{2\tau(\sigma-1)(\tau-\sigma)+\sigma^2}{(\tau-\sigma)^2+\tau^2(\sigma-1)^2+\sigma^2},\\[2ex] \cos\omega_{6,4} = \dfrac{\tau^2(\sigma-1)^2+2\sigma(\tau-\sigma)}{(\tau-\sigma)^2+\tau^2(\sigma-1)^2+\sigma^2},\\[2ex] \cos\omega_{8,4} = \dfrac{(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2+\sigma^2}{(\tau-\sigma)^2+\tau^2(\sigma-1)^2+\sigma^2}.\end{cases}$$

Setzt man diese Werte der Reihe nach gleich 1, so hat man die Relationen zwischen σ und τ für die drei zuerst genannten speziellen Körper, die vereinfacht wie folgt lauten; es ist für das

$$9)\quad\begin{cases}\text{Deltoidikositetraeder:} & \tau = \dfrac{\sigma}{2-\sigma} \text{ oder } \sigma = \dfrac{2\tau}{1+\tau}.\\[2ex] \text{Triakisoktaeder:} & \tau = 2\sigma \text{ oder } \sigma = \dfrac{\tau}{2}.\\[2ex] \text{Tetrakishexaeder:} & \sigma = 1,\ \tau \text{ beliebig zwischen 1 und 2.}\end{cases}$$

Für die drei übrigen Polyeder gelten stets zwei dieser Relationen gleichzeitig, wodurch sich aus 9) für σ und τ bestimmte Werte ergeben Es ist für das

$$10)\quad\begin{cases}\text{Rhombendodekaeder:} & \tau = 2\sigma \text{ und } \sigma = 1, \text{ also } \tau = 2.\\[2ex] \text{Oktaeder:} & \tau = \dfrac{\sigma}{2-\sigma} \text{ und } \tau = 2\sigma, \text{ also } \sigma = \dfrac{3}{2},\ \tau = 3.\\[2ex] \text{Hexaeder:} & \tau = \dfrac{\sigma}{2-\sigma} \text{ und } \sigma = 1, \text{ also auch } \tau = 1.\end{cases}$$

Archimedeische Varietäten sind diejenigen, in denen sämtliche Flächenwinkel gleich sind. Aus den Formeln 8) ergeben sich durch Gleichsetzung je zweier bestimmter Werte unter Berücksichtigung der Bedingungen 9) für diese archimedeischen Varietäten die folgenden Ableitungskoëffizienten: Für das Tetrakishexaeder ist $\omega_{8,6} = \omega_{6,4}$, also $\tau = \frac{3}{2}$, $\sigma = 1$. Für das Triakisoktaeder wird $\omega_{8,6} = \omega_{8,4}$ und $\tau = \sqrt{2}+1$, $\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Für das Deltoidikositetraeder ist $\omega_{6,4} = \omega_{8,4}$ und $\tau = 2\sqrt{2}-1$, $\sigma = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$. Für die A. V. des Hexakisoktaeders selbst endlich ist $\omega_{8,4} = \omega_{6,4} = \omega_{8,6}$ und es ergibt sich $\tau = \frac{3(3+\sqrt{2})}{7}$, $\sigma = \frac{3(4+\sqrt{2})}{14}$.

Für die späteren Diskussionen ist es empfehlenswert, die Abhängigkeit der Koëffizienten σ und τ geometrisch übersichtlich darzustellen. Deutet man σ und τ als rechtwinklige Koordinaten, wobei die positive σ-achse wagrecht nach rechts, die positive τ-achse senkrecht nach oben verläuft, so stellen die Gleichungen $\sigma = 1$ und $\tau = 2\sigma$ zwei Gerade dar (vergl. Fig. 2, Taf. 8), von denen die erste, C_1 der Figur, parallel der τ-achse im Abstande 1, die zweite, C_2, durch die Punkte $\sigma = 1$, $\tau = 2$, und $\sigma = \frac{3}{2}$, $\tau = 3$ läuft. Die dritte Kurve C_3, deren Gleichung $\tau = \frac{\sigma}{2-\sigma}$ ist, ist ein Hyperbel durch die Punkte $\sigma = 1$, $\tau = 1$ und $\sigma = \frac{3}{2}$, $\tau = 3$. Die Werte der σ und τ, welche Punkten dieser drei Kurven innerhalb der angegebenen Grenzwerte zugehören, bestimmen konvexe Individuen der ersten drei speziellen Körper, während die genannten Grenzwerte selbst eben den drei übrigen speziellen Körpern zugehören. Alle konvexen Hexakisoktaeder besitzen solche σ und τ, die innerhalb des von den drei Kurven begrenzten Flächenstückes liegen.[1]) — Ehe wir für die Körper 2)—7) die Gleichungen der Grenzflächen aus denen der Flächen des allgemeinsten Polyeders 1) unter Berücksichtigung der vereinfachenden Bedingungen 9) und 10) ableiten, sind für die Bezeichnungen dieser Grenzflächen jedesmal die nötigen Angaben zu machen.[2])

Das Deltoidikositetraeder. Die Ecken einer vierkantigen Grenzfläche, die ein Deltoid ist, sind zwei Punkte B und je ein Punkt A und C. Die Kanten AC des allgemeinen Polyeders kommen hier zum Verschwinden. Durch die Punkte A und C sei die Fläche bestimmt. Die Bezeichnungen der Flächen sind dann die folgenden, wobei für die Achsen und die beiden vor sie gesetzten Flächen die frühere Bemerkung gilt:

1), 24) : $A_1 C_1$	4), 22) : $A_1 C_3$	7), 19) : $A_2 C_2$	10), 14) : $A_2' C_4$
2), 23) : $A_1 C_2$	5), 17) : $A_3 C_1$	8), 20) : $A_3' C_2$	11), 15) : $A_2' C_3$
3), 21) : $A_1 C_4$	6), 18) : $A_2 C_1$	9), 13) : $A_3' C_4$	12), 16) : $A_3 C_3$.

[1]) Es wird kaum zu Irrtümern Veranlassung geben, wenn wir später kurz von einer „Triakisoktaedergeraden“ (nämlich C_2) bezw. einem „Hexaederpunkte“ (dem Schnittpunkte von C_1 und C_3) u. s. w. sprechen.

[2]) Note I zeigt tabellarisch die entsprechenden Flächen des Hexakisoktaeders und der speziellen Körper des Typus, wobei nur das Oktaeder und Hexaeder nicht berücksichtigt sind, weil sie beide nicht als Hüllpolyeder der weiterhin zu betrachtenden diskontinuierlichen und nichtkonvexen Polyeder höherer Art auftreten.

Die Gleichungen dieser 24 Grenzflächen, die neben der Konstanten a nur noch den einen Parameter τ enthalten, und bei denen die Reihenfolge der Vorzeichen der Koëffizienten die früher angegebene ist, sind dann:

1), 2), 3), 4), 21), 22), 24), 23), $\pm(\tau-1)x \pm (\tau-1)y \pm 2z - 2\tau a = 0.$
6), 7), 10), 11), 14), 15), 18), 19), $\pm 2x \pm (\tau-1)y \pm (\tau-1)z - 2\tau a = 0.$
5), 8), 9), 12), 13), 16), 17), 20), $\pm(\tau-1)x \pm 2y \pm (\tau-1)z - 2\tau a = 0.$

Das Triakisoktaeder. Jede gleichschenklig-dreikantige Grenzfläche besitzt zwei Ecken A und eine Ecke C; die Kanten BC des allgemeinen Polyeders sind verschwunden. Die Bezeichnung der Flächen ist die folgende:

1), 17) : $A_1 A_2 C_1$	4), 20) : $A_2 A_1' C_4'$	7), 15) : $A_2 A_3' C_2$	10), 24) : $A_3 A_1' C_4'$
2), 18) : $A_2 A_3 C_1$	5), 13) : $A_2 A_1' C_3'$	8), 16) : $A_1 A_2 C_2$	11), 21) : $A_3 A_1' C_3'$
3), 19) : $A_2 A_3 C_4'$	6), 14) : $A_2 A_3' C_3'$	9), 23) : $A_1 A_3 C_1$	12), 22) : $A_1 A_3' C_2$.

Auch die Gleichungen dieser 24 Grenzflächen enthalten neben der Konstanten a nur noch den einen Parameter τ. Sie sind:

1), 8), 20), 13), 4), 5), 17), 16), $\pm x \pm (\tau-2)y \pm z - \tau a = 0.$
9), 12), 24), 21), 10), 11), 23), 22), $\pm(\tau-2)x \pm y \pm z - \tau a = 0.$
2), 7), 19), 14), 3), 6), 18), 15), $\pm x \pm y \pm (\tau-2)z - \tau a = 0.$

Das Tetrakishexaeder. Jede gleichschenklig-dreikantige Grenzfläche hat zwei Ecken C und eine Ecke A; die Kanten AB des Hexakisoktaeders sind verschwunden. Die Flächen sind:

1), 24) : $A_1 C_1 C_2$	4), 22) : $A_1 C_1 C_3$	7), 13) : $A_2 C_1 C_4'$	10), 16) : $A_3' C_2 C_3'$
2), 18) : $A_1 C_2 C_4$	5), 21) : $A_3 C_1 C_3$	8), 23) : $A_2 C_1 C_2$	11), 17) : $A_3' C_2 C_4$
3), 19) : $A_1 C_3 C_4$	6), 12) : $A_3 C_1 C_4'$	9), 15) : $A_2 C_2 C_3'$	14), 20) : $A_2' C_3 C_4$

und ihre Gleichungen:

1), 3), 19), 24), $\pm(\tau-1)x \pm z - \tau a = 0.$
4), 2), 18), 22), $\pm(\tau-1)y \pm z - \tau a = 0.$
8), 14), 20), 23), $\pm x \pm (\tau-1)z - \tau a = 0.$
7), 15), 9), 13), $\pm x \pm (\tau-1)y - \tau a = 0.$
5), 11), 17), 21), $\pm y \pm (\tau-1)z - \tau a = 0.$
6), 16), 10), 12), $\pm(\tau-1)x \pm y - \tau a = 0.$

Dabei ist die Reihenfolge der Vorzeichen für jede Gleichung:

$$++)\quad -+)\quad +-)\quad --).$$

Das Rhombendodekaeder. Es entsteht, wenn vier bestimmte Flächen des Hexakisoktaeders oder zwei des Triakisoktaeders oder Tetrakishexaeders in eine Ebene fallen. Die Gleichungen seiner Flächen ergeben sich am einfachsten aus denen des letztgenannten Körpers, wenn man τ den Wert 2 gibt. Jede der zwölf Flächen ist ein Rhombus, dessen Kante $a\sqrt{3}$, dessen Diagonalen $2a$ und $2a\sqrt{2}$ sind und wird eindeutig durch zwei gegenüberliegende Ecken A bestimmt. Die Reihenfolge der Vorzeichen ist die eben angeführte.

1) A_1, A_2,	3) A_1, A_2',	10) A_1', A_2,	12) A_1', A_2',	$\pm x \pm z - 2a = 0$.
2) A_1, A_3,	4) A_1, A_3',	11) A_1', A_3,	9) A_1', A_3',	$\pm y \pm z - 2a = 0$.
6) A_2, A_3,	7) A_2', A_3,	5) A_2, A_3',	8) A_2', A_3',	$\pm x \pm y - 2a = 0$.

Die einfachen Gleichungen der Flächen des Oktaeders und Hexaeders übergehen wir.

3. **Die vollständige Figur des Hexakisoktaeders.** Die Ebene der Fläche 1) dieses Körpers werde von den Ebenen aller übrigen Flächen in Geraden geschnitten, deren Bezeichnung dieselbe sei, wie die der erzeugenden Flächen. Die Achsen des Polyeders schneiden die Ebene 1), die als Zeichenebene gewählt ist, in Punkten — „Achsenpunkten" — die übereinstimmend mit den Achsen selbst A, B, C genannt werden. Die Fläche 1) wird in der Zeichenebene durch die Spuren dreier Ebenen gebildet, die durch das Zentrum O des Polyeders und die drei Achsen A_1, B_1 und C_1 gehen. In diesen Ebenen, die Symmetrieebenen des Polyeders sind, liegt eine bestimmte Zahl weiterer Achsen, deren Schnittpunkte mit der Ebene 1) also auf jenen drei, die Fläche 1) bildenden Geraden liegen, und deren Abstände von A_1, B_1, C_1 auf diesen Geraden zu berechnen sind, die zugleich die Spuren der Ebenen 2), 8), 12) des Polyeders vorstellen (vergl. die vollständige Figur der A. V. des Hexakisoktaeders Fig. 1 Taf. 5). Zur Bestimmung der weiteren genannten Achsenpunkte betrachtet man die Strahlensysteme der Achsen in den drei Symmetrieebenen OA_1B_1, OB_1C_1 und OA_1C_1. In der Ebene OA_1B_1 ergibt sich das in Fig. 2 Taf. 4 gezeichnete Strahlensystem. Es ist OA_1 gleich der Achse A, d. h. gleich $\frac{C}{\sqrt{3}}\cdot\tau$, OB_1 gleich der Achse B, d. h. gleich $\frac{C\sqrt{6}}{3}\cdot\sigma$. Als Masseinheit für alle diese vorkommenden Längen

sei im folgenden stets die Achse C genommen. Die Winkel der Strahlen $OA_1 \mid OB_1$, $OA_1 \mid OB_5$ und $OB_1 \mid OA_2$ betragen sämtlich $\varphi = 45^0$. Bezeichnet man die Winkel OB_1A_1 und OA_1B_1 mit λ und μ, so hat man zur Berechnung der verlangten Grössen A_1B_1, B_1A_2 und A_1B_5 die Gleichungen:

$$\frac{\lambda+\mu}{2} = 90^0 - \frac{\varphi}{2}, \quad \tan\frac{\lambda-\mu}{2} = \frac{A-B}{A+B}\tan\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad A_1B_1 = A\frac{\sin\varphi}{\sin\lambda},$$

$$B_1A_2 = B\frac{\sin\varphi}{\sin(\lambda-\varphi)}, \quad A_1B_5 = A\frac{\sin\varphi}{\sin(\mu-\varphi)}.$$

Das Strahlensystem in der Ebene OB_1C_1 ist das in Fig. 3 Taf. 4 gezeichnete. Hier sind die vorkommenden Winkel der Strahlen:

$$\sphericalangle B_1OC_1 = C_2OB_1 = \psi = 35^0\,15'\,52''. \quad \sphericalangle C_1OA_3 = \chi = 54^0\,44'\,8''.$$

Wird $\sphericalangle OB_1C_1 = \lambda'$, $OC_1B_1 = \mu'$ gesetzt, so haben wir das Gleichungssystem:

$$\tan\frac{\lambda'-\mu'}{2} = \frac{C-B}{C+B}\tan\frac{\lambda'+\mu'}{2}, \quad \frac{\lambda'+\mu'}{2} = 90^0 - \frac{\psi}{2}, \quad B_1C_1 = C\frac{\sin\psi}{\sin\lambda'},$$

$$B_1C_2 = B\frac{\sin\psi}{\sin(\lambda'-\psi)}, \quad C_1A_3 = C\frac{\sin\chi}{\sin(\mu'-\chi)}.$$

Das Strahlensystem in der Ebene OA_1C_1 endlich ist das in Fig. 5 Taf. 5. Es ist hier $\sphericalangle A_1OC_1 = A_1OC_4 = \chi$, $\sphericalangle C_1OB_3 = \psi$. Nach Einführung von $\sphericalangle OC_1A_1 = \lambda''$ und $\sphericalangle OA_1C_1 = \mu''$ ist das zu lösende Gleichungssystem:

$$\tan\frac{\lambda''-\mu''}{2} = \frac{A-C}{A+C}\tan\frac{\lambda''+\mu''}{2}, \quad \frac{\lambda''+\mu''}{2} = 90^0 - \frac{\chi}{2}, \quad A_1C_1 = C\frac{\sin\chi}{\sin\mu''},$$

$$C_1B_3 = C\frac{\sin\psi}{\sin(\lambda''-\psi)}, \quad A_1C_4 = A\frac{\sin\chi}{\sin(\mu''-\chi)}.$$

Bei der vorstehenden Berechnung war angenommen, wie es für die A. V. des Hexakisoktaeders gültig ist, dass $A>C>B$ ist. Gelten andere Ungleichungen, so sind für die Bestimmung der Winkel λ und μ u. s. w. in bekannter Weise Änderungen zu treffen. Eine Zusammenstellung der berechneten neun Abschnitte auf den drei Hauptgeraden der vollständigen Figur für verschiedene Werte von σ und τ, d. h. verschiedene Varietäten des Hexakisoktaeders, die später Verwendung finden, zeigt die Tabelle in Note II. Die beiden ersten Spalten geben die Werte σ und τ; alle weiteren

Grössen sind mit C als Einheit gemessen. An Stelle der Grösse A_1C_4 tritt für gewisse Varietäten, die durch *) hervorgehoben sind, die Grösse C_1C_4', wenn also die Achse C_4' die Spur A_1C_1 schneidet. Die obigen Formeln der Berechnung bedürfen dann einer einfachen Korrektur. Sind die im vorstehenden angegebenen neun Punkte A, B, C in der vollständigen Figur nach den berechneten Werten konstruiert, so ergeben sich die sämtlichen übrigen Achsenpunkte als Schnittpunkte von Geraden, die durch je zwei oder mehrere der neun Punkte zu legen sind. Ist nämlich M irgend eine Achse des Polyeders, so sei α) diejenige Fläche, die sich durch Spiegelung der Fläche 1) an irgend einer der Symmetrieebenen durch die Achse M ergibt. Die Ebenen aller Flächen, die bei Drehung des Polyeders um die Achse M mit 1) oder α) zur Deckung kommen, schneiden sich dann in einem Punkte der Achse M, und da dieser Achsenpunkt M auf 1) liegt, so schneiden sich in ihm in der vollständigen Figur die Spuren der Ebenen der genannten Flächen. Für sämtliche Achsenpunkte in der vollständigen Figur sind hier die durch sie verlaufenden Spuren zusammengestellt:

A_1 (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8); A_2 (2, 15, 33, 45, 44, 28, 10); A_3 (12, 30, 44, 41, 39, 21, 6);
C_1 (12, 11, 10, 9, 8); C_2 (12, 32, 33, 17, 4); C_3 (10, 26, 39, 19, 4); C_4 (8, 40, 39, 34, 33);
B_1 (2, 12, 13); B_2 (10, 23, 6); B_3 (8, 43, 44); B_4 (6, 33, 36); B_5 (2, 38, 39); B_6 (4, 44, 47).

Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass sich für besondere Varietäten des Hexakisoktaeders in einzelnen dieser Punkte mehr als die angeführten Flächen schneiden. — Nun ist ersichtlich, dass durch die bereits auf den drei Spuren 2) 8) und 12) liegenden berechneten Achsenpunkte zunächst die folgenden weiteren Spuren bestimmt sind: 4, (A_1, C_2); 6, (A_1, A_3); 10, (A_2, C_1); 33, (A_2, C_4); 39, (A_3, C_4) und 44, (A_2, C_3). Es sind dies die Spuren der Ebenen der sämtlichen Flächen α), die im Verein mit den Flächen 2) 8) 12) die Spiegelbilder der Fläche 1) an den sämtlichen Symmetrieebenen des Hexakisoktaeders bilden. Andererseits sind durch diese Spuren die noch fehlenden Achsenpunkte bestimmt, nämlich C_3 durch den Schnitt von 10), 39), 4); die Achsenpunkte B durch je zwei Gerade: B_2 (6, 10), B_4 (6, 33), B_5 (2, 39), B_6 (4, 44). Mit den bisher bestimmten neun Spuren sind als zweite Gruppe von Geraden die Spuren der zu jenen Ebenen parallelen Ebenen bestimmt, da jede von diesen Spuren überdies durch wenigstens einen der

Achsenpunkte geht. Es läuft z. B. die Spur der Ebene 5) parallel der Spur 44) und durch den Punkt A_1, kurz: 5 (44, A_1). Die zweite Gruppe der Geraden ist dann: 5 (44, A_1); 13 (39, B_1); 23 (33, B_2); 38 (12, B_5); 36 (10, B_4); 47 (8, B_6); 45 (6, A_2); 43 (4, B_3); 41 (2, A_3).

Sind nun α) und β) zwei Flächen der ersten und zweiten Gruppe, von denen α) das Spiegelbild von 1) an der Symmetrieebene E sei, und ist γ) das Spiegelbild der Fläche β) an derselben Symmetrieebene, so schneiden sich 1) und α), sowie β) und γ) in Geraden l und l' jener Symmetrieebene; der Schnittpunkt von l und l' liegt also auf der Ebene der Fläche 1), d. h. die drei Spuren α), β), γ) schneiden sich in der vollständigen Figur in einem Punkte. Dabei sind die Fälle zu tilgen, in denen dieser Punkt mit einem der Achsenpunkte identisch ist. Bestimmt man für sämtliche Flächen α) und β) die in Frage kommende dritte Fläche γ), so erhält man die dritte Gruppe der Geraden. Bedeutet $\frac{\alpha}{\beta}$, dass die Gerade γ) durch den Schnittpunkt von α) und β) läuft, so ist diese dritte Gruppe die folgende:[1])

$$14\left(\frac{8}{23}, \frac{33}{13}, \frac{39}{47}\right);\ 16\left(\frac{4}{13}, \frac{10}{43}, \frac{39}{36}\right);\ 18\left(\frac{2}{23}, \frac{10}{41}, \frac{33}{5}, \frac{44}{36}\right);$$

$$20\left(\frac{6}{13}, \frac{12}{45}, \frac{39}{5}, \frac{44}{38}\right);\ 22\left(\frac{4}{23}, \frac{12}{43}, \frac{33}{38}\right);\ 24\left(\frac{8}{13}; \frac{33}{47}, \frac{39}{23}\right);$$

$$25\left(\frac{2}{36}, \frac{10}{5}, \frac{33}{41}, \frac{44}{23}\right);\ 27\left(\frac{4}{38}, \frac{12}{23}, \frac{33}{43}\right);\ 29\left(\frac{4}{36}, \frac{10}{13}, \frac{39}{43}\right);$$

$$31\left(\frac{6}{38}, \frac{12}{5}, \frac{39}{45}, \frac{44}{13}\right);\ 35\left(\frac{8}{38}, \frac{10}{47}, \frac{12}{36}\right);\ 37\left(\frac{8}{36}, \frac{10}{38}, \frac{12}{47}\right);$$

$$42\left(\frac{2}{47}, \frac{4}{41}, \frac{6}{43}, \frac{8}{45}\right);\ 46\left(\frac{2}{43}, \frac{4}{45}, \frac{6}{47}, \frac{8}{41}\right).$$

Die noch fehlenden 14 Ebenen sind die Parallelebenen zu denen der dritten Gruppe. Da jede ihrer Spuren durch einen Achsenpunkt in der Zeichnung geht, so werden diese Spuren mit Benutzung derer der dritten Gruppe ebenso gefunden, wie die zweite Gruppe aus der ersten. Es sind die folgenden 14 Ebenen: 40 (14, C_4); 26 (16, C_3); 28 (18, A_2); 30 (20, A_3); 32 (22, C_2); 34 (24, C_4); 15 (25, A_2); 17 (27, C_2); 19 (29, C_3); 21 (31, A_3); 9 (35, C_1); 11 (37, C_1); 3 (42, A_1) und 7 (46, A_1).

[1]) Die mehrfache Angabe kann zur Kontrolle der Genauigkeit der Zeichnung dienen.

Hiermit sind die Spuren sämtlicher Flächen des Hexakisoktaeders in dessen vollständiger Figur bestimmt, da die Ebene der Fläche 48) die Zeichenebene in der unendlichweiten Geraden schneidet.

4. **Die vollständigen Figuren der speziellen gleichflächigen Polyeder erster Art des Typus.** Bei ihrer Konstruktion treten unter Umständen dadurch Vereinfachungen ein, dass sie eine Symmetrielinie besitzen, die übrigens selbst keine Ebenenspur bedeutet.

a) Das Deltoidikositetraeder (vergl. hierzu die vollständigen Figuren Taf. 4 Fig. 4 und Taf. 7 Fig. 1). Zur Bestimmung der ganzen Figur berechne man die Distanzen $A_1 C_1$, $C_1 B_3$, $A_1 B_1 = A_1 B_2$ und $A_1 A_2 = A_1 A_3$. Es liegen A_2, B_3, A_3 in gerader Linie, die senkrecht zu $A_1 C_1$ ist. Die zu verwendenden Gleichungen, mit Hilfe deren die Werte in Note III berechnet wurden, sind:

$$A_1 C_1 = C \frac{\sin \chi}{\sin \lambda}, \quad C_1 B_3 = C \frac{\sin \psi}{\sin (\mu - \psi)}, \quad A_1 B_1 = B \frac{\sin \varphi}{\sin \lambda'}, \quad A_1 A_2 = \frac{A}{\cos \lambda'}.$$

Dabei sind die Winkel λ, μ und λ' durch die Gleichungen bestimmt:

$$\tan \frac{\lambda - \mu}{2} = \frac{C - A}{C + A} \tan \frac{\lambda + \mu}{2}, \quad \frac{\lambda + \mu}{2} = 90^0 - \frac{\chi}{2},$$

$$\tan \frac{\lambda' - \mu'}{2} = \frac{B - A}{B + A} \tan \frac{\lambda' + \mu'}{2}, \quad \frac{\lambda' + \mu'}{2} = 90^0 - \frac{\varphi}{2}.$$

Die Ebenen durch die Achsen (die Spuren durch die Achsenpunkte) sind, abgesehen von der Ebene 1):

A_1 (2, 3, 4); A_2 (5, 13, 21, 22, 16, 8, 2); A_3 (4, 11, 19, 23, 21, 14, 6);
C_1 (5, 6); C_2 (6, 15, 16, 9, 3); C_3 (3, 10, 19, 20, 5); C_4 (16, 19);
B_1 (6, 7, 2); B_2 (4, 12, 5); B_3 (21); B_4 (4, 16, 17) und B_5 (2, 18, 19).

Durch die Achsen A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1 sind nun schon die Geraden bestimmt: 2 (A_1, B_1, A_2); 4 (A_1, B_2, A_3); 5 (A_2, C_1, B_2); 6 (B_1, C_1, A_3); 21 (A_2, B_3, A_3) und überdies die Gerade 3 $(21, A_1)$. Dann ergibt sich: $C_2 \left(\frac{13}{6}\right)$ und $C_3 \left(\frac{5}{3}\right)$. Hierdurch wiederum sind die Geraden 16 (A_2, C_2) und 19 (A_3, C_3) bestimmbar, und damit die Achsenpunkte $C_4 \left(\frac{16}{19}\right)$, $B_4 \left(\frac{4}{16}\right)$ und $B_5 \left(\frac{19}{2}\right)$. Die nächste

Gruppe von Geraden ist: 23 $(2, A_3)$; 22 $(4, A_2)$; 17 $(5, B_4)$; 18 $(6; B_5)$; 12 $(16, B_2)$; 7 $(19, B_1)$ und die übrigen noch fehlenden Geraden sind dann: 9 $\left(\frac{2}{12}, \frac{5}{23}, C_2\right)$; 8 $\left(\frac{3}{7}, \frac{17}{19}, A_2\right)$; 11 $\left(\frac{3}{12}, \frac{16}{18}, A_3\right)$; 14 $\left(\frac{3}{17}, \frac{5}{7}, A_3\right)$; 13 $\left(\frac{3}{18}, \frac{6}{12}, A_2\right)$; 10 $\left(\frac{4}{7}, \frac{6}{22}, C_3\right)$; 15 $\left(\frac{7}{21}, C_2\right)$ und 20 $\left(\frac{12}{21}, C_3\right)$.

b) Das Triakisoktaeder (s. die vollständige Figur Taf. 4 Fig. 10, sowie die Wertetabelle Note IV). Durch die Gleichungen:

$$B_1A_1 = B_1A_2 = B \tan 45^0 = B, \quad C_1A_1 = C_1A_2 = C\frac{\sin\chi}{\sin\mu},$$
$$C_1C_3 = C_1C_4' = C\frac{\sin 2\psi}{\sin(\lambda - 2\psi)}, \quad \tan\frac{\lambda-\mu}{2} = \frac{A-C}{A+C}\tan\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \frac{\lambda+\mu}{2} = 90^0 - \frac{\chi}{2}$$

sind die Achsen A_1, A_2, A_3, C_1, C_3, C_4', B_1 und die angeführten Achsenpunktdistanzen auf den Geraden 8), 2), 9) und 16) gegeben. Die Achsenpunkte sind:

A_1 (8, 12, 24, 20, 13, 21, 9); A_2 (8, 7, 6, 5, 4, 3, 2); A_3 (4, 16, 13);
C_1 (2, 9); C_2 (6, 24); C_4' (9, 15, 16, 6, 11); C_3 (2, 16, 22, 19, 24);
B_1 (8); B_2 (2, 13, 14); B_3 (4, 9, 10); B_4 (6, 13, 18) und B_6 (24, 4, 23).

Danach sind nach den vier ersten Geraden weiter gegeben: 4 (A_2, A_3); 13 (A_1, A_3); 6 (A_2, C_4'); 24 (A_1, C_3), wodurch man noch die folgenden Achsen findet: $C_2\left(\frac{6}{24}\right)$; $B_2\left(\frac{2}{13}\right)$; $B_3\left(\frac{4}{9}\right)$; $B_4\left(\frac{6}{13}\right)$ und $B_6\left(\frac{4}{24}\right)$. Die übrigen Geraden sind endlich: 18 $(2, B_4)$; 23 $(9, B_6)$; 20 $(4, A_1)$; 5 $(13, A_2)$; 14 $(6, B_2)$; 10 $(24, B_3)$; 3 $\left(\frac{18}{24}, A_2\right)$; 7 $\left(\frac{9}{14}, A_2\right)$; 11 $\left(\frac{8}{10}, C_4'\right)$; 12 $\left(\frac{2}{10}, A_1\right)$; 15 $\left(\frac{2}{20}, C_4'\right)$; 19 $\left(\frac{8}{14}, C_3\right)$; 21 $\left(\frac{14}{16}, A_1\right)$ und 22 $\left(\frac{5}{9}, C_3\right)$.

c) Das Tetrakishexaeder (vergl. hierzu die vollständige Figur Taf. 4 Fig. 8, sowie die Tabelle in Note V). Durch die Gleichungen

$$C_1C_2 = 2C\sin\psi, \quad A_1C_1 = A_1C_2 = C\frac{\sin\chi}{\sin\lambda}, \quad C_1B_3 = C_2B_6 = C\frac{\sin\psi}{\sin(\mu-\psi)};$$
$$A_1C_4 = A_1C_3 = A\frac{\sin\chi}{\sin(\lambda-\chi)}, \quad \tan\frac{\lambda-\mu}{2} = \frac{C-A}{C+A}\tan\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \frac{\lambda+\mu}{2} = 90^0 - \frac{\chi}{2}$$

sind die Achsenpunkte A_1, C_1, C_2, C_3, C_4, B_3, B_6 und die angeführten Distanzen auf den Geraden 8), 2) und 4) gegeben. Die Achsen sind:

A_1 (2, 3, 4); A_2 (6, 10, 19);
C_1 (4, 5, 6, 7, 8); C_2 (8, 9, 10, 11, 2); C_3 (2, 13, 23, 17, 6); C_4 (10, 21, 23, 15, 4);
B_1 (8); B_2 (3, 16, 6); B_3 (4, 18, 19); B_4 (10, 12, 3); B_5 (23); B_6 (19, 22, 2).

Durch die drei ersten Geraden mit ihren Achsen sind dann weiter gegeben: 23 (C_3, C_4); 6 (C_1, C_3); 10 (C_2, C_4); 19 (B_3, B_6) und ferner: 3 (8, A_1). Hiermit sind die noch fehlenden Achsenpunkte bestimmt, nämlich: $B_2\left(\frac{3}{6}\right)$, $B_4\left(\frac{3}{10}\right)$, da die Achsenpunkte A_2, B_1, B_5 bezw. die Mitten der Strecken B_3B_6, C_1C_2 und C_3C_4 sind. Es folgen schliesslich die Geraden: 12 (6, B_4); 16 (10, B_2); 18 (2, B_3); 22 (4, B_6); 7 $\left(\frac{2}{12}, C_1\right)$; 9 $\left(\frac{4}{16}, C_2\right)$; 13, (7, C_3); 15 (9, C_4); 17 $\left(\frac{10}{18}, C_3\right)$; 21 $\left(\frac{6}{22}, C_4\right)$; 5 (21, C_1) und 11 (17, C_2).

Was endlich das Rhombendodekaeder anbetrifft, so spricht die vollständige Figur (Taf. 4 Fig. 7) für sich selbst, da das Verhältnis der Diagonalen der rhombischen Grenzfläche bekannt ist. Damit sind sämtliche für die Diskussion der zu besprechenden Polyeder nötigen vollständigen Figuren konstruiert.

5. **Das gleicheckige (6 + 8 + 12)-flächige 2.24-Eck und die speziellen gleicheckigen Polyeder erster Art des Typus.** Die gleicheckigen Polyeder sind die polarreziproken der gleichflächigen in Bezug auf eine feste Kugel um das Zentrum der letzteren als Direktrix. Wir nehmen als Radius dieser Kugel die konstante dreizählige Achse C, die Flächenachse des Oktaeders. Dann sind dessen beide andere Achsen $A_o = C\sqrt{3}$, die Eckenachse des Oktaeders, und $B_o = \frac{C}{2}\sqrt{6}$, die Kantenachse des Oktaeders. Das allgemeinste gleicheckige Polyeder des Typus, das (6 + 8 + 12)-flächige 2.24-Eck, wird nun aus dem Oktaeder durch gerade, zu den Achsen senkrechte Abstumpfung der Ecken und Kanten erhalten. Seien die vierzähligen und zweizähligen Flächenachsen des entstandenen Körpers A' und B', so ist $A' = A_o . t$ und $B' = B_o . s$, worin t und s reelle Parameter, kleiner als 1, sind. Da nun wegen der Polarität $AA' = C^2$ und $BB' = C^2$, aber auch $A_o . A_h = C^2$ und $B_o . B_h = C^2$ ist, so ist $\sigma . s = \tau . t = 1$, d. h. $s = \frac{1}{\sigma}$, $t = \frac{1}{\tau}$. Die Ecken des gleicheckigen Polyeders sind die Pole zu den Ebenen des gleichflächigen

Polyeders als Polarebenen in Bezug auf die Kugel vom Radius C, und seine Flächen sind die Polarebenen zu den Ecken des Hexakisoktaeders in Bezug auf dieselbe Kugel. Es lassen sich also die Gleichungen der Grenzebenen und die Koordinaten der Ecken des gleicheckigen Polyeders sofort angeben. Die Polarebene einer Ecke x_1, y_1, z_1 des gleicheckigen Polyeders in Bezug auf die Kugel $x^2+y^2+z^2-C^2=0$ ist nun:

$$x.x_1+y.y_1+z.z_1-C^2 = 0,$$

und ein Vergleich mit der Gleichung der Ebene 1) des gleichflächigen Polyeders zeigt, dass die Koordinaten des dieser Ebene polar zugeordneten Punktes x_1, y_1, z_1 sind:

$$\begin{aligned} x_1 &= C\sqrt{3}\,\frac{\tau-\sigma}{\sigma\tau} = C\sqrt{3}\,(s-t) = A_o\,(s-t), \\ y_1 &= C\sqrt{3}\,\frac{\sigma-1}{\sigma} = C\sqrt{3}\,(1-s) = A_o\,(1-s), \\ z_1 &= C\sqrt{3}\,.\frac{1}{\tau} = C\sqrt{3}\,.\,t = A_o t, \end{aligned}$$

so dass also, unabhängig von A_o, die Proportion gilt:

$$11) \qquad x_1 : y_1 : z_1 = (s-t):(1-s):t.$$

Bezeichnet man die 48 Ecken des gleicheckigen Polyeders mit denselben Zahlen, wie die ihnen polaren Flächen des gleichflächigen Polyeders, so kann man die Koordinaten dieser Ecken aus den Gleichungen jener Flächen sofort abschreiben. Setzen wir die obigen Werte der Koordinaten des ersten Eckpunktes $x_1 = \lambda$, $y_1 = \mu$, $z_1 = \nu$, so sind die Koordinaten der 48 Ecken:

$$12) \quad \left|\begin{array}{llllllll} & & & & & & & \\ 1), & 2), & 5), & 6), & 44), & 45), & 48), & 41): \\ 8), & 3), & 4), & 7), & 43), & 46), & 47), & 42): \\ 12), & 13), & 20), & 21), & 30), & 31), & 38), & 39): \\ 11), & 14), & 19), & 22), & 29), & 32), & 37), & 40): \\ 9), & 16), & 17), & 24), & 27), & 34), & 35), & 26): \\ 10), & 15), & 18), & 23), & 28), & 33), & 36), & 25): \end{array}\right. \begin{array}{ccc} (x) & (y) & (z) \\ \pm\lambda, & \pm\mu, & \pm\nu. \\ \pm\mu, & \pm\lambda, & \pm\nu. \\ \pm\nu, & \pm\mu, & \pm\lambda. \\ \pm\nu, & \pm\lambda, & \pm\mu. \\ \pm\mu, & \pm\nu, & \pm\lambda. \\ \pm\lambda, & \pm\nu, & \pm\mu. \end{array}$$

Die Reihenfolge der Vorzeichen ist dabei die bisher immer innegehaltene.

Aus 11) ergibt sich nun weiter:

13) $$t = \frac{\nu}{\lambda + \mu + \nu}; \quad s = \frac{\lambda + \nu}{\lambda + \mu + \nu}.$$

Bedeutet für das allgemeine $(6 + 8 + 12)$-flächige $2 \cdot 24$-Eck k_1 die gemeinsame Kante einer sechseckigen und achteckigen Grenzfläche, k_2 die gemeinsame Kante eines Sechsecks und Vierecks und k_3 die gemeinsame Kante eines Vierecks und Achtecks, so ist:

14) $$\begin{cases} k_3 = 2\mu = 2A_o\,(1 - s), \\ k_1 = (\lambda - \mu)\sqrt{2} = A_o\,(2s - t - 1)\sqrt{2}, \\ k_2 = (\nu - \lambda)\sqrt{2} = A_o\,(2t - s)\sqrt{2}. \end{cases}$$

Denn es bedeutet μ bei dem Polyeder zugleich die halbe Kante des Vierecks, λ den Radius des umbeschriebenen Kreises einer achteckigen Grenzfläche und ν den Radius der einbeschriebenen Kugel des Polyeders, die die Ebene der achteckigen Flächen berührt. Kommen nur die Verhältnisse der Kanten in Frage, so ist an Stelle von 14) zu schreiben:

15) $$\begin{cases} k_1 : k_2 : k_3 = (2s - t - 1) : (2t - s) : (1 - s)\sqrt{2} \text{ oder} \\ k_1 : k_2 : k_3 = (\lambda - \mu) : (\nu - \lambda) : \mu\sqrt{2}. \end{cases}$$

Aus dem ersten System dieser Gleichungen ergibt sich durch Auflösung nach t und s:

16) $$t = \frac{2k_1 + 2k_2 + k_3\sqrt{2}}{4k_1 + 2k_2 + 3k_3\sqrt{2}}, \quad s = \frac{4k_1 + 2k_2 + 2k_3\sqrt{2}}{4k_1 + 2k_2 + 3k_3\sqrt{2}}.$$

Die archimedeische Varietät des Polyeders folgt für $k_1 = k_2 = k_3$, d. h. für $t = \frac{3 - \sqrt{2}}{3}$, $s = \frac{4 - \sqrt{2}}{3}$.

Für die speziellen Polyeder des Hexakisoktaedertypus ergeben sich dann die folgenden besonderen Relationen und Werte.[1])

[1]) Die Werte für die Koordinaten der Ecken der speziellen gleicheckigen Polyeder sind aus der Zusammenstellung 12) der Koordinaten der Ecken des $(6 + 8 + 12)$-flächigen $2 \cdot 24$-Ecks in Verbindung mit Note I abzulesen, indem man für jedes spezielle Polyeder die entsprechenden Relationen (24-Eck: $\lambda = \mu$, $8 \cdot 3$-Eck: $\lambda = \nu$, $6 \cdot 4$-Eck: $\mu = 0$) berücksichtigt. Die Tabellen für die Ecken aller dieser Polyeder sind danach leicht aufzustellen.

a) Das $(6+8+12)$-flächige 24-Eck. Hier ist $k_1 = 0$, folglich nach 14): $s = \frac{t+1}{2}$. Es ist $\lambda = \mu = A_0 \frac{1-t}{2}$, $\nu = A_0 t$; $t = \frac{2k_2 + k_3\sqrt{2}}{2k_2 + 3k_3\sqrt{2}}$, $s = \frac{2k_2 + 2k_3\sqrt{2}}{2k_2 + 3k_3\sqrt{2}}$. $k_2 : k_3 = (3t-1):(1-t)\sqrt{2}$. Die archimedeische Varietät ergibt sich für $(\nu-\lambda)\sqrt{2} = 2\mu$ oder für $k_2 = k_3$, d. h. wenn $t = \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$, $s = \frac{4+\sqrt{2}}{7}$ ist.

b) Das $(6+8)$-flächige 8.3-Eck. Es ist $k_2 = 0$, also nach 14): $s = 2t$. $k_1 : k_3 = (3t-1):(1-2t)\sqrt{2}$. $\lambda = \nu = A_0 t$, $\mu = A_0(1-2t)$; $t = \frac{2k_1 + k_3\sqrt{2}}{4k_1 + 3k_3\sqrt{2}}$. Die archimedeische Varietät ergibt sich für $k_1 = k_3$, d. h. für $(\lambda-\mu)\sqrt{2} = 2\mu$, so dass $t = \sqrt{2}-1$, $s = 2(\sqrt{2}-1)$ ist.

c) Das $(6+8)$-flächige 6.4-Eck. Für $k_3 = 0$ wird nach 14): $s = 1$. Damit ist $\lambda = A_0(1-t)$, $\mu = 0$, $\nu = A_0 t$; $t = \frac{k_1 + k_2}{2k_1 + k_2}$. $k_1 : k_2 = (1-t):(2t-1)$. Für die archimedeische Varietät ist $k_1 = k_2$, $\lambda - \mu = \nu - \lambda$, d. h. $t = \frac{2}{3}$, $s = 1$.

d) Das Kubooktaeder. Hier ist gleichzeitig $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, d. h. $s = 1$, $t = \frac{1}{2}$, $\lambda = \nu = \frac{A_0}{2}$, $\mu = 0$.

e) Das Oktaeder. Es ist $k_1 = k_3 = 0$, also $s = t = 1$.

f) Das Hexaeder. Es ist $k_1 = k_2 = 0$, also $s = \frac{2}{3}$, $t = \frac{1}{3}$.

Zum Schlusse sei folgende Bemerkung beachtet. Für die Koordinatenwerte λ, μ, ν des allgemeinen $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks gilt offenbar auf Grund der oben angeführten anderweiten Deutung dieser Grössen: $\mu < \lambda < \nu$. Sind also für irgend eine Ecke eines solchen Polyeders die Koordinaten ξ, η, ζ gefunden, und gelten für deren absolute Werte nachgewiesenermassen die Bedingungen $\xi \leqq \eta \leqq \zeta$, so ist $\lambda = \eta$, $\mu = \xi$, $\nu = \zeta$. —

§ 2. Die Sphenoidgruppierungen des Hexakisoktaedertypus.

1. **Allgemeine Ableitung der sieben Gruppierungen.** Wir beginnen die Untersuchung der zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder höherer Art des Hexakisoktaedertypus mit den diskontinuierlichen konvexen Polyedern. Sie sind sämtlich Kombinationen von rhombischen oder quadratischen Sphenoiden, von denen die ersteren unter Umständen in quadratische Sphenoide, die letzteren in Tetraeder übergehen. Für den allgemeinsten gleichflächigen inneren Kern, bezw. das allgemeinste gleicheckige Hüllpolyeder bestehen diese Gruppierungen aus zwölf Einzelkörpern mit kongruenten bezw. symmetrisch-gleichen dreieckigen Grenzflächen und dergl. dreikantigen Ecken, so dass die Art jeder Fläche und Ecke eins, die Art des Polyeders gleich der Anzahl 12 der konstituierenden Sphenoide ist. Für die speziellen Polyeder des Typus als Kern und Hülle reduziert sich die Zahl der Sphenoide unter Umständen auf 6, so dass dann auch $A = 6$ ist. Wir wenden uns nun einer genaueren Betrachtung der Ecken des $(6 + 8 + 12)$-flächigen $2 \cdot 24$-Ecks und der Flächen des ihm polarreziproken Hexakisoktaeders zu, um zunächst die Existenz der möglichen Sphenoidgruppierungen zu erschliessen.

Die 48 Ecken des $(6 + 8 + 12)$-flächigen $2 \cdot 24$-Ecks lassen sich auf dreierlei Weise als die Ecken von je drei prismatischen $(2 + 2 \cdot 4)$-flächigen $2 \cdot 2 \cdot 4$-Ecken anordnen, deren Hauptachsen die Achsen A_1, A_2, A_3 des $2 \cdot 24$-Ecks sind. Denn es liegen diese 48 Ecken dreimal in sechs parallelen, senkrecht zu den Hauptachsen A befindlichen Ebenen, deren äusserste die Ebenen der achteckigen Grenzflächen des Polyeders selbst sind. Diese Anordnungen der 48 Ecken in Bezug auf die drei Achsen A_1, A_2, A_3 sind:

Die 48 Flächen des Hexakisoktaeders lassen sich auf dreierlei Weise als die Flächen von je drei ebenrandigen $(2 + 2 \cdot 4)$-eckigen $2 \cdot 2 \cdot 4$-Flachen anordnen, deren Hauptachsen die Achsen A_1, A_2, A_3 des Hexakisoktaeders sind. Denn es liegen diese 48 Flächen dreimal zu acht in sechs Zonen um die Achsen A, dass z. B. die Flächen je einer Zone um die Achse A_1 die Spiegelbilder einer anderen Zone um diese Achse gegen die Ebene durch A_2 und A_3 sind. Diese Anordnungen der 48 Flächen in Bezug auf die drei Achsen A_1, A_2, A_3 sind:

A_1:

a)	1,	8,	7,	6,	5,	4,	3,	2.
b)	12,	9,	24,	21,	20,	17,	16,	13.
c)	11,	10,	23,	22,	19,	18,	15,	14.
c')	29,	28,	25,	40,	37,	36,	33,	32.
b')	30,	27,	26,	39,	38,	35,	34,	31.
a')	44,	43,	42,	41,	48,	47,	46,	45.

A_2:

a)	12,	13,	14,	32,	31,	30,	29,	11.
b)	1,	2,	15,	33,	45,	44,	28,	10.
c)	8,	3,	16,	34,	46,	43,	27,	9.
c')	7,	4,	17,	35,	47,	42,	26,	24.
b')	6,	5,	18,	36,	48,	41,	25,	23.
a')	21,	20,	19,	37,	38,	39,	40,	22.

A_3:

a)	9,	10,	28,	27,	26,	25,	23,	24.
b)	8,	11,	29,	43,	42,	40,	22,	7.
c)	1,	12,	30,	44,	41,	39,	21,	6.
c')	2,	13,	31,	45,	48,	38,	20,	5.
b')	3,	14,	32,	46,	47,	37,	19,	4.
a')	16,	15,	33,	34,	35,	36,	18,	17.

Die Ecken a und a', b und b', c und c' erschöpfen jeweils sämtliche Ecken des $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks. In den von den Ecken (a, a'), sowie (b, b') und (c, c') gebildeten drei prismatischen $2.2.4$-Ecken existieren, wie in Kap. II § 2 Nr. 4 gezeigt ist, je drei Gruppierungen von je vier Sphenoiden, eine Gruppierung quadratischer Sphenoide, und zwei Gruppierungen rhombischer Sphenoide, so dass sich im ganzen zunächst neun Gruppierungen von Sphenoiden ergeben. Schreiben wir von jeder Gruppierung das eine Sphenoid an, das die Ecke 1 enthält, so erhalten wir

Die Flächen a und a', b und b', c und c' erschöpfen jeweils sämtliche Flächen des Hexakisoktaeders. Die von den Flächen (a, a'), sowie (b, b') und (c, c') gebildeten drei ebenrandigen $(2+2.4)$-eckigen $2.2.4$-Flache ergeben je drei Gruppierungen von je vier Sphenoiden, nämlich eine Gruppierung quadratischer Sphenoide, und zwei Gruppierungen rhombischer Sphenoide, so dass sich im ganzen neun Gruppierungen von Sphenoiden ergeben. Schreiben wir von jeder Gruppierung das eine Sphenoid an, das die Fläche 1 enthält, so erhalten wir

die neun Sphenoide, die sich unter Beachtung des früher in Kap. II § 2 Nr. 4 Besprochenen sofort aus den obigen drei Tabellen A_1), A_2), A_3) ablesen lassen:

α) Die Fläche (Ecke) 1 gehört der Reihe a) an:

Quadrat. Sphenoid:	1, 5, 42, 46.
1. Rhomb. „	1, 5, 41, 45.
2. „ „	1, 5, 43, 47.

β) Die Fläche (Ecke) 1 gehört der Reihe b) an:

Quadrat. Sphenoid:	1, 45, 18, 25.
1. Rhomb. „	1, 45, 36, 23.
2. „ „	1, 45, 5, 41.

γ) Die Fläche (Ecke) 1 gehört der Reihe c) an:

Quadrat. Sphenoid:	1, 41, 31, 20.
1. Rhomb. „	1, 41, 45, 5.
2. „ „	1, 41, 13, 38.

Von diesen hier aufgezählten neun Sphenoiden ist das erste rhombische unter α) und γ) identisch mit dem zweiten rhombischen unter β), während die quadratischen sämtlich von einander verschieden sind, so dass wir das Ergebnis haben: Es existieren im Hexakisoktaedertypus erstens drei verschiedene Gruppierungen von je zwölf quadratischen Sphenoiden, und zweitens vier verschiedene Gruppierungen von je zwölf rhombischen Sphenoiden. Dieser Satz hat Giltigkeit, mag man die Zahlen als Eckenzahlen eines $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks oder als Flächenzahlen eines Hexakisoktaeders auffassen. Wir wollen im weiteren die letztere Auffassung in erster Linie voraussetzen und sprechen dann von sieben Gruppen (oder Ordnungen) von Sphenoiden, die jeweils durch die Flächen des inneren Kernes charakterisiert sind. Bedeuten aber die Zahlen Eckenzahlen, so sprechen wir von sieben Klassen von Sphenoiden. Diese Gruppen, bezw. Klassen sind:

A. Quadratische Sphenoide.

nach den Flächen:	Erstes Sphenoid:	nach den Ecken:
1. Gruppe:	1, 5, 42, 46.	1. Klasse.
2. „	1, 45, 18, 25.	2. „
3. „	1, 41, 31, 20.	3. „

B. Rhombische Sphenoide.

nach den Flächen:	Erstes Sphenoid:	nach den Ecken:
1. Gruppe:	1, 5, 43, 47.	1. Klasse.
2. „	1, 45, 36, 23.	2. „
3. „	1, 45, 5, 41.	3. „
4. „	1, 41, 13, 38.	4. „

Ein diskontinuierliches, aus zwölf Sphenoiden gebildetes Polyeder gehört also in erster Linie nach seinen Flächen zu einer bestimmten Sphenoidgruppe, und nach diesen sollen die Polyeder geordnet werden, nach seinen Ecken aber zu einer bestimmten Klasse, die nicht mit der Gruppe identisch zu sein braucht, in den meisten Fällen auch nicht sein wird. Es gilt vielmehr der Satz: Ist P ein solches, aus zwölf quadratischen oder rhombischen Sphenoiden bestehendes diskontinuierliches Polyeder, das nach seinen Flächen zur i-ten Gruppe, nach seinen Ecken zur k-ten Klasse von A) oder B) gehört, so ist das polarreziproke Polyeder P' eine Gruppierung quadratischer oder rhombischer Sphenoide, die zur k-ten Gruppe und i-ten Klasse von A) bezw. B) gehört. Denn da jedes Einzelsphenoid offenbar für reziproke Polyeder gleichzeitig quadratisch oder rhombisch ist (die umbeschriebene Kugel des einen ist zugleich die einbeschriebene des anderen), so gehören reziproke Polyeder gleichzeitig zu einer Gruppe unter A) oder B). Der weitere Teil des Satzes aber findet seinen Beweis in der vollständigen Ableitung der Sphenoidgruppierungen und ihrer polarreziproken Verwandtschaft, womit sich die folgenden Einzeluntersuchungen zu befassen haben. Wir wenden uns zunächst den Gruppierungen quadratischer Sphenoide zu, die wir, von dem allgemeinsten gleichflächigen Polyeder ausgehend, für die speziellen inneren Kerne verfolgen.

2. **Übersicht der drei Gruppierungen quadratischer Sphenoide.** Wir schreiben für jede der drei Gruppierungen quadratischer Sphenoide, die ein diskontinuierliches Polyeder darstellen, dessen innerer Kern ein Hexakisoktaeder, dessen äussere Hülle im allgemeinen ein $(6+8+12)$-flächiges $2 \cdot 24$-Eck ist, jeweils die vier Sphenoide an, unter deren Grenzflächen die Fläche 1), sowie die dieser Fläche benachbarten Flächen des Hexakisoktaeders enthalten sind. Dann sind die vier ersten Sphenoide in jeder Gruppe die folgenden:

$$1.\ \text{Gr.}\begin{cases}1, & 5, & 42, & 46.\\ 2, & 6, & 43, & 47.\\ 8, & 4, & 41, & 45.\\ 12, & 31, & 19, & 40.\end{cases}\qquad 2.\ \text{Gr.}\begin{cases}1, & 45, & 25, & 18.\\ 2, & 44, & 23, & 36.\\ 8, & 42, & 19, & 32.\\ 12, & 20, & 34, & 26.\end{cases}\qquad 3.\ \text{Gr.}\begin{cases}1, & 41, & 20, & 31.\\ 2, & 48, & 30, & 21.\\ 8, & 46, & 26, & 17.\\ 12, & 39, & 5, & 45.\end{cases}$$

Um nun die Sphenoidgruppierungen kennen zu lernen, die an Stelle der allgemeinen für den Fall treten, dass die inneren Kerne der entstehenden diskontinuierlichen Polyeder die speziellen gleichflächigen Körper des Typus sind, brauchen wir nur mit Hilfe der in Note I gegebenen Tabelle die Zahlen der Flächen der vier angeführten Sphenoide durch die Benennungen in den speziellen Fällen zu ersetzen.

a) Aus dem Hexakisoktaeder ergibt sich das Deltoidikositetraeder, wenn jeweils zwei Flächen des ersteren, die eine Kante AC gemeinsam haben, in eine Ebene fallen. Das erste und dritte Sphenoid jeder Gruppe der obigen Aufzählung wird dann:

$$1.\ \text{Gr.}\begin{cases}1, & 3, & 23, & 22.\\ 1, & 3, & 23, & 22.\end{cases}\qquad 2.\ \text{Gr.}\begin{cases}1, & 22, & 20, & 9.\\ 1, & 23, & 10, & 15.\end{cases}\qquad 3.\ \text{Gr.}\begin{cases}1, & 23, & 10, & 15.\\ 1, & 22, & 20, & 9.\end{cases}$$

D. h.: Tritt an Stelle des Hexakisoktaeders als innerer Kern das Deltoidikositetraeder, so fallen je zwei Sphenoide der ersten Gruppe zusammen, und das diskontinuierliche Polyeder stellt eine Gruppierung von nur sechs quadratischen Sphenoiden dar. Die Sphenoide der zweiten und dritten Gruppe sind identisch; das diskontinuierliche Polyeder ist eine Gruppierung von zwölf Sphenoiden, bei denen je zwei Flächen verschiedener Sphenoide in einer Ebene liegen. Bedeuten aber die obigen Zahlen Eckenzahlen, und diese Auslegung ist ohne weiteres nach den vorhergehenden Betrachtungen zulässig, so liest man aus ihnen ab: Tritt an Stelle des $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks das $(6+8+12)$-flächige 24-Eck, so reduzieren sich die Sphenoide der ersten Klasse auf sechs, die der zweiten und dritten sind identisch, und zwar ergeben sich zwölf Sphenoide, von denen je zwei verschiedene je eine Ecke in einem Eckpunkte des Hüllpolyeders gemeinsam haben.

b) Lässt man immer zwei Flächen des Hexakisoktaeders mit gemeinsamer Kante BC in eine Ebene fallen, wodurch es in ein Triakisoktaeder übergeht, so wird das erste und vierte Sphenoid der obigen Tabelle für die

$$1.\ \text{Gr.}\begin{cases}1, & 20, & 22, & 11.\\ 1, & 5, & 19, & 15.\end{cases}\qquad 2.\ \text{Gr.}\begin{cases}1, & 5, & 15, & 19.\\ 1, & 20, & 11, & 22.\end{cases}\qquad 3.\ \text{Gr.}\begin{cases}1, & 16, & 20, & 5.\\ 1, & 16, & 20, & 5.\end{cases}$$

Es ergeben sich also folgende Sätze. Für das Triakisoktaeder als inneren Kern wird die erste und zweite Gruppe quadratischer Sphenoide identisch. Das diskontinuierliche Polyeder besteht wiederum aus zwölf Sphenoiden, bei denen je zwei Flächen verschiedener Sphenoide in eine Ebene fallen. Je zwei Sphenoide der dritten Gruppe aber fallen völlig zusammen, so dass sich nur sechs Sphenoide ergeben. Deutet man dieselben Zahlen als Eckenzahlen, so findet man: Ist die äussere Hülle des diskontinuierlichen Polyeders das $(6+8)$-flächige $8 \cdot 3$-Eck, so reduzieren sich die Sphenoide der dritten Klasse auf sechs, die der ersten und zweiten sind identisch, und es ergibt sich ein Polyeder, dessen Hülle das eben genannte $8 \cdot 3$-Eck ist, in dessen Ecken je zwei Ecken verschiedener Sphenoide zusammenfallen.

c) Fallen ferner je zwei Flächen des Hexakisoktaeders mit gemeinsamer Kante AB in eine Ebene, so dass aus ihm ein Tetrakishexaeder entsteht, so werden die beiden ersten Sphenoide der obigen Zusammenstellung für die:

$$\text{1. Gr.} \begin{cases} 1,\ 3,\ 18,\ 22. \\ 1,\ 3,\ 18,\ 22. \end{cases} \qquad \text{2. Gr.} \begin{cases} 1,\ 19,\ 16,\ 12. \\ 1,\ 19,\ 16,\ 12. \end{cases} \qquad \text{3. Gr.} \begin{cases} 1,\ 24,\ 14,\ 20. \\ 1,\ 24,\ 14,\ 20. \end{cases}$$

D. h.: Tritt an Stelle des Hexakisoktaeders das Tetrakishexaeder, so ergeben die erste und zweite Gruppe je sechs Sphenoide, während die Sphenoide der dritten Gruppe in parallele Ebenen entarten. Dem steht dual gegenüber: Tritt an Stelle des $(6+8+12)$-flächigen $2 \cdot 24$-Ecks das $(6+8)$-flächige $6 \cdot 4$-Eck, so reduzieren sich die zwölf Sphenoide der ersten und zweiten Klasse je auf sechs, während die Sphenoide der dritten Klasse illusorisch sind.

d) Wir erhalten als inneren Kern das Rhombendodekaeder, wenn die drei Flächen 1, 2, 12 der obigen Zusammenstellung in eine Ebene fallen. Dann sind die drei Gruppen:

$$\text{1. Gr.} \begin{cases} 1,\ 3,\ 11,\ 9. \\ 1,\ 3,\ 11,\ 9. \\ 1,\ 10,\ 8,\ 7. \end{cases} \qquad \text{2. Gr.} \begin{cases} 1,\ 10,\ 8,\ 7. \\ 1,\ 10,\ 8,\ 7. \\ 1,\ 3,\ 11,\ 9. \end{cases} \qquad \text{3. Gr.} \begin{cases} 1,\ 12,\ 3,\ 10. \\ 1,\ 12,\ 3,\ 10. \\ 1,\ 12,\ 3,\ 10. \end{cases}$$

D. h.: Die Sphenoide der dritten Gruppe entarten in parallele Ebenen, während die erste und zweite Gruppe sechs Sphenoide, die für beide Gruppen identisch sind, ergibt. Andererseits ergeben sich die Sphenoide erster und zweiter Klasse im Kubooktaeder als identische und zwar besteht die Gruppierung aus sechs Sphenoiden, bei denen je zwei Ecken in einer Ecke des Kubooktaeders zusammenfallen. Wir untersuchen nun die Sphenoide der drei Gruppen und ihre polarreziproke Verwandtschaft, indem wir uns der analytisch-geometrischen Methode bedienen.

3. **Die erste Gruppe der quadratischen Sphenoide.** Die vier Grenzflächen des ersten Sphenoids dieser Gruppe fallen in die Ebenen der Flächen 1, 5, 42, 46 des Hexakisoktaeders und die Ecken des Sphenoides bestimmen sich als die Schnittpunkte von je drei dieser Flächen. Für die Koordinaten des Schnittpunktes der Flächen 1), 5), 42) findet man:[1])

$$x = -\frac{2\sigma\tau^2(\sigma-1)a}{\tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2},\quad y = \frac{2\sigma\tau(\tau-\sigma)a}{\tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2},\quad z = \tau a.$$

Danach ist, da $\mu \leqq \lambda \leqq \nu$ sein muss: $x = -\lambda$, $z = \mu$, $y = \nu$, so lange $\frac{2\sigma\tau^2(\sigma-1)}{\tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2} > \tau$, d. h.:

$$17)\qquad \tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2 \leqq 2\sigma\tau(\sigma-1)$$

ist, und so lange $\frac{2\sigma\tau(\tau-\sigma)}{\tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2} \geqq \frac{2\sigma\tau^2(\sigma-1)}{\tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2}$, d. h. $\tau-\sigma \geqq \tau(\sigma-1)$

oder

$$18)\qquad \tau \geqq \frac{\sigma}{2-\sigma}$$

ist. Oder mit anderen Worten: Unter diesen Bedingungen ist die obige Ecke die Ecke 23) des $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks und die übrigen Ecken des ersten Sphenoides sind 15 (1, 5, 46): $+\lambda, -\nu, +\mu$; 37 (5, 42, 46): $-\nu, -\lambda, -\mu$; 29 (1, 42, 46): $+\nu, +\lambda, -\mu$, d. h. nach den Ecken ist das Polyeder der zwölf Sphenoide von der dritten Klasse (vergl. Tabelle A_1 in Kap. III § 2 Nr. 1). Wir deuten nun σ und τ wiederum als rechtwinklige Koordinaten und die Gleichungen zwischen σ und τ als solche von Kurven in

[1]) Wir bemerken, dass alle elementaren Rechnungen hier und im folgenden stets unterdrückt sind, besonders soweit sie sich auf Bestimmung der Schnittpunkte von Ebenen u. s. w. erstrecken.

der σ-τ-Ebene, um die Abhängigkeitsverhältnisse leicht übersehen zu können. Die Gleichung 17) ist dann die einer Kurve (vergl. Fig. 1 Taf. 8), die offenbar aus mehreren „Zweigen" besteht. Man erhält ein angenähertes Bild des Verlaufes dieser Kurvenzweige, wenn man für eine Reihe von Werten für σ zwischen 1 und $\frac{3}{2}$ (etwa immer um 0,05 fortschreitend), die zugehörigen Werte von τ aus der für τ sich jeweils ergebenden quadratischen Gleichung berechnet und einzeichnet. — Es hat sich nun bei der Untersuchung gezeigt, dass hier und in allen folgenden Fällen immer nur ein Zweig der zu diskutierenden Kurven für das in Frage kommende Gebiet von Werten σ, τ zu berücksichtigen ist. Wir werden deshalb ein für allemal diejenigen Kurvenzweige, die nicht zu gebrauchen sind, unterdrücken. — Der eine, für die Kurve 17) hier in Frage kommende Zweig geht zugleich durch $\sigma = 1$, $\tau = 1$ und $\sigma = \frac{3}{2}$, $\tau = 3$, und verläuft im übrigen völlig innerhalb des Gebietes der σ, τ für die konvexen Hexakisoktaeder; denn 17) gibt nach τ aufgelöst: $\tau = \frac{\sigma \pm \sqrt{2(\sigma - 1)}}{\sigma^2 - 2(\sigma - 1)}\sigma$, wobei das positive Vorzeichen der Wurzel eben unbrauchbar ist. Die σ und τ dieser Kurve[1]) C_4 sind die Werte, für welche $\lambda = \mu$, d. h. das Hüllpolyeder ein $(6 + 8 + 12)$-flächiges 24-Eck ist. Die Gleichung 18) gibt die Werte von σ und τ, für welche $\lambda = \nu$, d. h. das Hüllpolyeder das $(6 + 8)$-flächige $8 \cdot 3$-Eck wird. Es ist aber $\tau = \frac{\sigma}{2 - \sigma}$ die Gleichung der Kurve C_3, d. h. der Deltoidikositetraederkurve in der Figur, d. h. die Ungleichung $\tau > \frac{\sigma}{2 - \sigma}$ ist für alle konvexen Hexakisoktaeder erfüllt. Wir haben also diese nun in zwei Abteilungen zu zerlegen; a) zu $\tau^2(\sigma - 1)^2 + (\tau - \sigma)^2 \leq 2\sigma\tau(\sigma - 1)$ gehören die Hexakisoktaeder, deren σ, τ zwischen den Kurven C_3 und C_4 oder auf C_4 liegen, sowie die Deltoidikositetraeder auf C_3. b) Zu $\tau^2(\sigma - 1)^2 + (\tau - \sigma)^2 \geq 2\sigma\tau(\sigma - 1)$ gehören die Hexakisoktaeder innerhalb des Gebietes, begrenzt von den Kurven C_1, C_2, C_4 und alle Tetrakishexaeder und Triakisoktaeder. Für das Gebiet a) sind die Ecken der Sphenoidgruppierungen, wie schon bemerkt, von der dritten Klasse. Für das Gebiet b) hat die erste Ecke die Koordinaten

[1]) In allen Figuren dieser „Kurven" auf den Tafeln sind der Einfachheit der Darstellung wegen diese Kurven durch gerade Verbindungsstrecken oder Kreisbögen zwischen den Endpunkten angedeutet.

$x = -\mu$, $y = \nu$, $z = \lambda$, d. h. der Schnittpunkt der Flächen 1), 5), 42) ist die Ecke 24) und die Sphenoidgruppierung ist von der zweiten Klasse. Wir betrachten nun zunächst nur die Hexakisoktaeder a). Für sie gilt also:

$$19)\quad \lambda = \frac{2\sigma\tau^2(\sigma-1)a}{\tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2};\ \mu = \tau a;\ \nu = \frac{2\sigma\tau(\tau-\sigma)a}{\tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2}.$$

Danach ist für das von den Ecken gebildete $(6+8+12)$-flächige $2 \cdot 24$-Eck:

$$20)\quad \begin{cases} t = \dfrac{\nu}{\lambda+\mu+\nu} = \dfrac{2\sigma(\tau-\sigma)}{2\sigma^2(\tau-1)+\tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2}; \\ s = \dfrac{\lambda+\nu}{\lambda+\mu+\nu} = \dfrac{2\sigma^2(\tau-1)}{2\sigma^2(\tau-1)+\tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2}. \end{cases}$$

Für das Verhältnis der Kanten ergibt sich:

$$21)\quad \begin{cases} k_1 : k_2 : k_3 = [2\sigma^2(\tau-1)-\tau^2(\sigma-1)^2-(\tau^2-\sigma^2)] \\ \quad : [4\sigma(\tau-\sigma)-2\sigma^2(\tau-1)] : [\tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2]\sqrt{2}. \end{cases}$$

Wir untersuchen zunächst die folgenden speziellen Fälle. Es sei der Kern der Gruppierung die archimedeische Varietät des Hexakisoktaeders, d. h. $\sigma = \frac{3(4+\sqrt{2})}{14}$, $\tau = \frac{3(3+\sqrt{2})}{7}$, Werte, die tatsächlich innerhalb des hier behandelten Gebietes liegen. Dann sind die drei Koordinaten einer Ecke des äusseren $(6+8+12)$-flächigen $2 \cdot 24$-Ecks: $\lambda = \frac{3a}{2}\sqrt{2}$, $\mu = \frac{3(3+\sqrt{2})a}{7}$, $\nu = \frac{3(2+\sqrt{2})a}{2}$, so dass $t = \frac{3\sqrt{2}-2}{4}$, $s = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ wird. Für das Verhältnis der drei Kanten ergibt sich:
$k_1 : k_2 : k_3 = \frac{3(5-3\sqrt{2})}{7} : 3\sqrt{2} : \frac{6(3+\sqrt{2})}{7} = 1 : 13{,}07 : 11{,}66$ (mit einiger Annäherung). Die Fläche des aus zwölf Sphenoiden bestehenden diskontinuierlichen Polyeders ist in der vollständigen Figur 1 Taf. 5 der archimedeischen Varietät des Hexakisoktaeders das Dreieck $D_1D_2D_3$. Das Modell des Polyeders zeigt Fig. 6 Taf. 22. Wir fragen nun nach dem inneren Kern derjenigen Gruppierung, deren Hüllpolyeder die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen $2 \cdot 24$-Ecks ist. Ist $k_1 = k_2 = k_3$, so bestehen zwischen den λ, μ, ν die Gleichungen: $\lambda - \mu = \nu - \lambda = \mu\sqrt{2}$. Danach ist $\lambda = \tau(\sqrt{2}+1)a$, woraus

$$*) \ldots\ldots\ \tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2 = \frac{2\sigma\tau(\sigma-1)}{\sqrt{2}+1}$$

folgt. Da hiernach ν die einfachere Form $\frac{\tau-\sigma}{\sigma-1}(\sqrt{2}+1)a$ annimmt, so ergibt die Gleichung $\nu-\lambda=\tau\sqrt{2}$ die Relation $\tau-\sigma=\tau(\sigma-1)(3-\sqrt{2})$ und schliesslich $\sigma=\frac{\tau(4-\sqrt{2})}{\tau(3-\sqrt{2})+1}$. Die Einsetzung dieses Wertes in Gl. *) führt unter Benutzung der eben angeführten Relation zu $\sigma=3\tau(3\sqrt{2}-4)$. Die Gleichsetzung dieses Wertes für σ mit dem vorhergehenden ergibt $\tau=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{3}$ und damit $\sigma=2(2-\sqrt{2})$. Für diese Werte ist auf Grund der alllgemeinen Formeln $\lambda=\frac{2(3+2\sqrt{2})}{3}a$, $\nu=\frac{2(3\sqrt{2}+5)}{3}a$, $\mu=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{3}a$ zu finden, und damit natürlich $t=\frac{3-\sqrt{2}}{3}$, $s=\frac{4-\sqrt{2}}{3}$, d. h. die A. V. des 2.24-Ecks. Die Fläche dieses diskontinuierlichen Polyeders zeigt Taf. 6 Fig. 6; das Modell des Körpers ist auf Taf. 23 Fig. 3 dargestellt. Dieselben Werte für σ und τ sind direkt aus den Gleichungen 20) zu berechnen, wenn deren linke Seiten gleich den Werten s und t für die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks gesetzt werden. Wir untersuchen nun zunächst spezielle Kerne, dann spezielle Hüllen. Ist $\sigma=\frac{2\tau}{\tau+1}$, so wird das Hexakisoktaeder zum Deltoidikositetraeder. Die Werte der Koordinaten der Eckpunkte des Hüllpolyeders sind dann: $\lambda=\nu=\frac{2\tau a}{\tau-1}$, $\mu=\tau a$, d. h. das Hüllpolyeder ist ein $(6+8)$-flächiges 8.3-Eck, für welches $t=\frac{2}{\tau+3}$, $s=\frac{4}{\tau+3}$ ist. Für seine Kanten gilt: $k_1:k_3=(3t-1):(1-2t)\sqrt{2}=(3-\tau):(\tau-1)\sqrt{2}$ Es ergibt sich danach die A. V. des 8.3-Ecks, wenn dieses Verhältnis den Wert 1 hat, d. h. $\tau=2\sqrt{2}-1$ ist, also für die A. V. des Deltoidikositetraeders als inneren Kern. Wie aus der allgemeinen Übersicht schon bekannt, sind hier je zwei Sphenoide in eins zusammengefallen, so dass das diskontinuierliche Polyeder aus sechs Sphenoiden besteht. Die Grenzfläche in der Ebene 1) des Deltoidikositetraeders wird von den Spuren der Ebenen 3), 22), 23) gebildet. Vergl. Fig. 9 Taf. 4. Das Modell der Gruppierung zeigt Fig. 12 Taf. 22. — Es seien nun diejenigen Werte von σ und τ des Kernpolyeders zu bestimmen, die als äussere Hülle der Sphenoidgruppierung ein $(6+8+12)$-flächiges 24-Eck nach sich ziehen. Dann muss $\lambda=\mu$ sein. Das ergibt zwischen σ und τ die schon abgeleitete Relation:

$$\dagger) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \tau^2(\sigma-1)^2+(\tau-\sigma)^2=2\sigma\tau(\sigma-1),$$

d. h. der Kern ist eins der einfach-unendlich vielen Hexakisoktaeder, deren σ und τ diese Relation erfüllen. Es wird damit $\lambda = \mu = \tau a$, $\nu = \frac{\tau - \sigma}{\sigma - 1} a$ und $t = \frac{\tau - \sigma}{2\sigma\tau - \tau - \sigma}$, $s = \frac{\sigma(\tau - 1)}{2\sigma\tau - \tau - \sigma}$, d. h. $t = 2s - 1$. Die A. V. des 24-Ecks ergibt sich, wenn $\nu - \mu = \mu\sqrt{2}$, d. h. wenn $\sigma = \frac{\tau\sqrt{2}}{\tau + \sqrt{2} - 1}$ ist. Durch Einsetzung dieses Wertes in †) erhält man für σ und τ: $\sigma = 2(2 - \sqrt{2})$ und $\tau = 2$. Damit aber ist: $t = \frac{2\sqrt{2} + 1}{7}$, $s = \frac{4 + \sqrt{2}}{7}$, wie behauptet. — Das Hüllpolyeder der Gruppierung ist das $(6 + 8)$-flächige $8 \cdot 3$-Eck, wenn $\lambda = \nu$ ist. Das gibt die Bedingung: $\tau(\sigma - 1) = \tau - \sigma$, d. h. $\sigma = \frac{2\tau}{\tau + 1}$. Ist also der innere Kern bei der ersten Gruppe quadratischer Sphenoide das Deltoidikositetraeder, so ist die Hülle stets ein $(6 + 8)$-flächiges $8 \cdot 3$-Eck.

Wir untersuchen nur die Sphenoidgruppierungen mit Ecken zweiter Klasse, wenn das Hexakisoktaeder innerer Kern ist. Die Ecken des ersten Sphenoids sind jetzt: 24 (1, 5, 42): $-\mu, \nu, \lambda$; 16 (1, 5, 46): $\mu, -\nu, \lambda$; 38 (5, 42, 46): $-\nu, -\mu, -\lambda$; 30 (1, 42, 46): $\nu, \mu, -\lambda$; wobei:

$$22)\quad \lambda = \tau a,\ \mu = \frac{2\sigma\tau^2(\sigma - 1)a}{\tau^2(\sigma - 1)^2 + (\tau - \sigma)^2},\quad \nu = \frac{2\sigma\tau(\tau - \sigma)a}{\tau^2(\sigma - 1)^2 + (\tau - \sigma)^2}.$$

Damit ist:

$$23)\quad \begin{cases} s = \dfrac{2\sigma(\tau - \sigma) + \tau^2(\sigma - 1)^2 + (\tau - \sigma)^2}{2\sigma^2(\tau - 1) + \tau^2(\sigma - 1)^2 + (\tau - \sigma)^2}, \\[2ex] t = \dfrac{2\sigma(\tau - \sigma)}{2\sigma^2(\tau - 1) + \tau^2(\sigma - 1)^2 + (\tau - \sigma)^2}. \end{cases}$$

Für das Verhältnis der Kanten des Hüllpolyeders gilt:

$$24)\quad \begin{cases} k_1 : k_2 : k_3 = [\tau^2(\sigma - 1)^2 + (\tau - \sigma)^2 - 2\sigma\tau(\sigma - 1)] \\ \quad : [2\sigma(\tau - \sigma) - \tau^2(\sigma - 1)^2 - (\tau - \sigma)^2] : 2\sigma\tau(\sigma - 1)\sqrt{2}. \end{cases}$$

Betrachtet man z. B. die besondere Varietät des Hexakisoktaeders, für welche $\sigma = \frac{11}{10}$, $\tau = 2$ ist, so findet man $\mu = \frac{88}{85}$, $\lambda = \frac{170}{85}$, $\nu = \frac{396}{85}$ und damit $t = \frac{66}{109}$, $s = \frac{283}{327}$, $k_1 : k_2 : k_3 = 41 : 113 : 44\sqrt{2}$.

Ist der Kern der Sphenoidgruppierung, um zu den speziellen gleichflächigen Polyedern überzugehen, die hier in Frage kommen, das Triakisoktaeder, so ist $\tau = 2\sigma$ und es wird: $\lambda = 2\sigma a$, $\mu = \frac{8\sigma(\sigma-1)a}{4(\sigma-1)^2+1}$, $\nu = \frac{4\sigma a}{4(\sigma-1)^2+1}$, $t = \frac{2}{3+4\sigma(\sigma-1)}$, $s = \frac{3+4(\sigma-1)^2}{3+4\sigma(\sigma-1)}$. Dieselben Werte werden sich in der zweiten Gruppe der Sphenoide ergeben, da die Polyeder der ersten Gruppe, falls der Kern ein Triakisoktaeder ist, mit solchen der zweiten zusammenfallen. Dort werden wir sie behandeln. Es sei nun der Kern der Sphenoidgruppierung ein Tetrakishexaeder, d. h. $\sigma = 1$. Dann fallen wiederum je zwei Sphenoide zusammen, die Gruppierung besteht also aus sechs Sphenoiden. Die Grenzfläche 1) des ersten dieser Sphenoide wird durch die Spuren der Ebenen 3), 18), 22) gebildet (Fig. 5 Taf. 6). Die allgemeinen Koordinatenwerte der Ecke werden jetzt zu $\mu = 0$, $\lambda = \tau a$, $\nu = \frac{2\tau a}{\tau - 1}$. Hiernach ist $s = 1$, $t = \frac{2}{\tau+1}$, d. h.: Ist der Kern der ersten Gruppe quadratischer Sphenoide ein Tetrakishexaeder, so ist die Hülle ein (6+8)-flächiges 6.4-Eck. Die angeführte Figur gibt die Grenzfläche einer solchen Gruppierung für $\sigma = 1$, $\tau = \frac{3}{2}$, d. h. für die A. V. des Tetrakishexaeders. Für das Hüllpolyeder ist dann $s = 1$, $t = \frac{4}{5}$. Wir haben also diejenige spezielle Varietät des (6+8)-flächigen 6.4-Ecks, für welche $k_1 : k_2 = (1-t) : (2t-1) = 1 : 3$ ist. Das Modell des Polyeders zeigt Fig. 10 Taf. 22. — Die A. V. des Hüllpolyeders folgt aus $\frac{2}{\tau+1} = \frac{2}{3}$, d. h. für $\tau = 2$. Es gilt somit der Satz: Ist der Kern der ersten Gruppierung quadratischer Sphenoide das Rhombendodekaeder, so ist die Hülle des diskontinuierlichen aus sechs Sphenoiden bestehenden Polyeders die A. V. des (6+8)-flächigen 6.4-Ecks. Je zwei Flächen verschiedener Sphenoide fallen in eine Ebene, gewissermassen ein diskontinuierliches Sechseck zweiter Art bildend. Vergl. die Zeichnung der Fläche Fig. 7 Taf. 4 in der vollständigen Figur des Rhombendodekaeders. Das innere Sechseck hat den Koëffizienten 2, also sind auch seine äusseren, an der Oberfläche des Polyeders sichtbaren Teile doppelt überdeckt zu denken. Das Modell des Polyeders zeigt Fig. 4 Taf. 22. Wir kommen auf diesen Körper bei der zweiten Gruppe quadratischer Sphenoide zurück.

4. **Die dritte Gruppe der quadratischen Sphenoide.** Das erste Sphenoid der dritten Gruppe quadratischer Sphenoide hat die Flächen

1), 20), 31), 41) des Hexakisoktaeders und man findet als Koordinaten des Schnittpunktes der Flächen 1), 20), 31):

$$25)\qquad x = \frac{4\sigma\tau(\tau-\sigma)a}{\tau^2+(2\sigma-\tau)^2},\quad y = -\frac{\sigma a}{\sigma-1},\quad z = \frac{4\sigma^2\tau a}{\tau^2+(2\sigma-\tau)^2}.$$

Eine wie bei der vorigen Gruppe durchgeführte Untersuchung (s. am Ende dieser Nr. 4) zeigt nun, dass stets — unter [ ] den absoluten Betrag einer Grösse verstanden —: $[x] \leq [z] < [y]$ ist, denn es ist immer: $2\sigma \geq \tau$, und $\tau^2 + (2\sigma-\tau)^2 > 4\sigma\tau(\sigma-1)$. Dann ist aber:

$$25')\qquad \mu = [x],\quad \lambda = [z],\quad \nu = [y],$$

d. h. die Ecken des ersten Sphenoids sind: 16 (1, 20, 31): $\mu, -\nu, \lambda$; 23 (1, 20, 41): $-\lambda, \nu, \mu$; 28 (1, 31, 41): $\lambda, \nu, -\mu$ und 35 (20, 31, 41): $-\mu, -\nu, -\lambda$. Nach den Ecken haben wir also Sphenoidgruppierungen erster Klasse, d. h. alle der dritten Gruppe quadratischer Sphenoide angehörenden Polyeder sind zugleich von der ersten Klasse und polarreziprok den Polyedern dritter Klasse der ersten Gruppe. Mit Hilfe von 25) und 25') findet man für das von den Ecken gebildete 2.24-Eck:

$$26)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{4\sigma\tau(\sigma-1)+\tau^2+(2\sigma-\tau)^2}{4\tau^2(\sigma-1)+\tau^2+(2\sigma-\tau)^2}, \\ t = \dfrac{\tau^2+(2\sigma-\tau)^2}{4\tau^2(\sigma-1)+\tau^2+(2\sigma-\tau)^2}, \end{cases}$$

und berechnet für das Verhältnis der Kanten:

$$27)\qquad \begin{cases} k_1 : k_2 : k_3 = 4\tau(\sigma-1)(2\sigma-\tau) : [\tau^2+4\sigma\tau(\sigma-1)+(2\sigma-\tau)^2] \\ \qquad\qquad : 4\tau(\sigma-1)(\tau-\sigma)\sqrt{2}. \end{cases}$$

Wir untersuchen nun zunächst einige besondere Varietäten. Ist der Kern die A. V. des Hexakisoktaeders, d. h. $\sigma = \frac{3(4+\sqrt{2})}{14}$, $\tau = \frac{3(3+\sqrt{2})}{7}$, so ergibt sich für das die Hülle bildende $(6+8+12)$-flächige 2.24-Eck des diskontinuierlichen aus zwölf Sphenoiden gebildeten Polyeders die besondere Varietät $s = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $t = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}$. Dies sind aber die reziproken Werte von σ und τ für das Kernpolyeder des zweiten in der ersten Gruppe der quadratischen Sphenoide aufgeführten Vielflaches; wir haben in der Tat polarreziproke Vielflache; die Hülle des einen ist polarreziprok dem Kern des anderen und umgekehrt. Das besprochene Polyeder der dritten Gruppe zeigt das Modell Fig. 4 Taf. 23; die Grenzfläche Fig. 3 Taf. 6. Für die Kanten des Polyeders gilt: $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : \frac{5\sqrt{2}+2}{2} : (\sqrt{2}+1)$. Bestimmt man in der früher vorgezeichneten Weise diejenige Gruppierung der Sphenoide dieser dritten Gruppe, deren äussere Hülle die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen $2 \cdot 24$-Ecks ist, so erhält man $\sigma = \frac{2(3+2\sqrt{2})}{7}$, $\tau = \frac{2\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{7}$. Dies sind die reziproken Werte von $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$ und $\frac{3\sqrt{2}-2}{4}$, d. h. das durch diese Gruppierung gebildete diskontinuierliche Polyeder ist polarreziprok dem ersten allgemeinen Polyeder der ersten Gruppe. Wir untersuchen nun die Gruppierungen von Sphenoiden, die entweder spezielle Kerne oder spezielle Hüllen besitzen. Der Kern sei ein Deltoidikositetraeder. Dann nehmen die Grössen λ, μ, ν für $\sigma = \frac{2\tau}{\tau+1}$ die einfachere Form an:

$$\lambda = \frac{8\tau a}{(\tau-1)^2+4}, \quad \mu = \frac{4\tau(\tau-1)a}{(\tau-1)^2+4}, \quad \nu = \frac{2\tau a}{\tau-1}$$

und damit ist:

$$s = \frac{4(\tau-1)+(\tau-1)^2+4}{2(\tau^2-1)+(\tau-1)^2+4} = \frac{(\tau+1)^2}{3\tau^2-2\tau+3},$$

$$t = \frac{(\tau-1)^2+4}{2(\tau^2-1)+(\tau-1)^2+4} = \frac{\tau^2-2\tau+5}{3\tau^2-2\tau+3}.$$

Ferner wird: $k_1 : k_2 : k_3 = 2(4\tau-\tau^2-3) : (3-\tau)^2 : 2(\tau-1)^2 . \sqrt{2}$. Die Hülle ist also ein $2 \cdot 24$-Eck. Ist der Kern speziell die A. V. des Deltoidikositetraeders, d. h. $\tau = 2\sqrt{2}-1$, so ergibt sich $s = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $t = \frac{1}{2}$. Es sind s und t die reziproken Werte zu $\sigma = 2(2-\sqrt{2})$ und $\tau = 2$, für welche das Polyeder der ersten Gruppe als inneren Kern ein spezielles Hexakisoktaeder, als Hülle die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen 24-Ecks besass. Für die äusseren Hüllen aller Sphenoide der dritten Gruppe, deren innerer Kern ein Deltoidikositetraeder ist, gilt dann die aus der früheren durch Einsetzen von $\sigma = \frac{1}{s}$ und $\tau = \frac{1}{t}$ ableitbare Relation:

$$(1-s)^2 + (s-t)^2 = 2t(1-s).$$

Bei dem besprochenen Polyeder der dritten Gruppe, das überdies zugleich der zweiten Gruppe zugehört, ist das Verhältnis der Kanten des Hüllkörpers: $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : 1$. Das Modell dieses Körpers stellt Fig. 16 Taf. 22 dar; die Grenzfläche zeigt Fig. 11 Taf. 4.

Der Kern der dritten Gruppe quadratischer Sphenoide sei nun das Triakisoktaeder. Es ist $\tau = 2\sigma$. Danach wird $\lambda = \mu = 2\sigma a$, $\nu = \frac{\sigma a}{\sigma - 1}$, d. h.: Für das Triakisoktaeder als inneren Kern ergibt die dritte Gruppe quadratischer Sphenoide Polyeder, deren äussere Hülle ein $(6+8+12)$-flächiges 24-Eck ist. Die Werte für s und t sind: $s = \frac{2\sigma - 1}{4\sigma - 3}$, $t = \frac{1}{4\sigma - 3}$. Wählen wir als Beispiel die A. V. des Triakisoktaeders, $\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, so ergibt sich $s = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$ und $t = \frac{1}{2\sqrt{2}-1}$, d. h. die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen 24-Ecks. Das aus sechs Sphenoiden bestehende diskontinuierliche Polyeder zeigt Fig. 1 Taf. 22. Die Grenzfläche ist in der vollständigen Figur der A. V. des Triakisoktaeders Taf. 4 Fig. 10 das Dreieck $P_1 P_3 P_4$ und in Taf. 4 Fig. 6 für sich gezeichnet. Im allgemeinen gilt übrigens für die Kanten des Hüllpolyeders $k_2 : k_3 = (3 - 2\sigma) : 2(\sigma - 1)\sqrt{2}$. Jede solche Gruppierung ist reziprok einem Polyeder der ersten Gruppe, dessen Kern ein Deltoidikositetraeder, dessen Hülle ein $8 \cdot 3$-Eck ist. — Andere als die genannten Kerne und Hüllen können für quadratische Sphenoide der dritten Gruppe nicht auftreten, wie hier ausnahmsweise ausführlicher nachgewiesen werden soll. Die Gleichung $\lambda = \nu$, d. h.

$$28)\qquad \tau^2 + (2\sigma - \tau)^2 = 4\sigma\tau(\sigma - 1), \quad \text{oder} \quad 2\sigma^2(\tau - 1) = \tau^2$$

ergibt:

$$\tau = \sigma^2 \pm \sigma\sqrt{\sigma^2 - 2} \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{\tau}{\sqrt{2(\tau - 1)}}.$$

Es ist also τ reell für $\sigma \geq \sqrt{2}$. Für $\sigma = \sqrt{2}$ ist $\tau = 2$, für $\sigma = \frac{3}{2}$ ist $\tau = 3$ und $\tau = \frac{3}{2}$, d. h. die Kurve 28), nämlich die Kurve C_5 in Fig. 2 Taf. 8 läuft durch den Oktaederpunkt O und hat die Gerade $\tau = 1$ zur Asymptote. Für alle Punkte links der C_5, also auch innerhalb des Gebietes der konvexen Hexakisoktaeder ist stets $\tau^2 + (2\sigma - \tau)^2 > 4\sigma\tau(\sigma - 1)$, da der

Punkt $\sigma = 1$, $\tau = 1$ diese Ungleichung befriedigt. Für alle konvexen Hexakisoktaeder wird also $\lambda < \nu$, d. h. ein 8.3-Eck als Hülle ist unmöglich. Sollte endlich der Kern ein Tetrakishexaeder sein, d. h. $\sigma = 1$, so wäre stets $\nu = \infty$, d. h. solche Gruppierungen sind unmöglich.

5. **Die zweite Gruppe der quadratischen Sphenoide.** Das erste Sphenoid der zweiten Gruppe quadratischer Sphenoide besitzt die Flächen 1), 45), 25), 18) des Hexakisoktaeders. Der Schnittpunkt der Flächen 1), 45), 18) hat die Koordinaten:

$$x = \frac{\sigma\tau a}{\tau - \sigma}, \quad y = -\frac{2\sigma^2\tau a}{\sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2}, \quad z = \frac{2\sigma\tau^2(\sigma - 1)a}{\sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2}.$$

Wir beweisen nun, dass stets, für Werte von σ und τ, die konvexen Hexakisoktaedern zugehören, erstens $[z] < [y]$ und zweitens $[z] < [x]$ ist. Zum ersten gibt $[z] = [y]$ die Gleichung $\tau(\sigma - 1) = \sigma$, d. h. $\tau = \frac{\sigma}{\sigma - 1}$. Hiernach ist $\tau = \infty$ für $\sigma = 1$ und $\tau = 3$ für $\sigma = \frac{3}{2}$; d. h. zwischen $\sigma = 1$ und $\frac{3}{2}$ verläuft die Kurve $[z] = [y]$ oberhalb des Gebietes der konvexen Hexakisoktaeder; für diese selbst isf also $\tau < \frac{\sigma}{\sigma - 1}$ oder $[z] < [y]$. Zweitens ist $[z] = [x]$ gleichwertig mit der Gleichung $\frac{2\sigma\tau^2(\sigma - 1)}{\sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2} = \frac{\sigma\tau}{\tau - \sigma}$ oder

$$2\tau(\sigma - 1)(\tau - \sigma) = \sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2, \tag{29}$$

d. h. $\tau^2 - \frac{2\sigma}{3 - \sigma}\tau = \frac{\sigma^2}{(\sigma - 1)(3 - \sigma)}$, woraus $\tau = \frac{\sigma}{3 - \sigma}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{\sigma - 1}}\right)$ folgt. Da für $\sigma = 1$, $\tau = \infty$ ist, so hat die Kurve 29) die Gerade $\sigma = 1$ zur Asymptote; für $\sigma = \frac{3}{2}$ ist $\tau = 3$, d. h. die Kurve 29) verläuft ebenfalls oberhalb des Gebietes der konvexen Hexakisoktaeder. Für diese ist also stets $2\tau(\sigma - 1)(\tau - \sigma) < \sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2$, d. h. $[z] < [x]$. Untersuchen wir nun das Verhältnis von $[y]$ und $[x]$. Es wird $[y] \gtreqless [x]$, d h. $\frac{2\sigma^2\tau}{\sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2} \gtreqless \frac{\sigma\tau}{\tau - \sigma}$, je nachdem $2\sigma(\tau - \sigma) \gtreqless \sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2$ ist. Betrachten wir die Kurve

$$2\sigma(\tau - \sigma) = \sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2. \tag{30}$$

Für $\sigma = 1$ ist $2(\tau - 1) = 1$, d. h. $\tau = \frac{3}{2}$. Dies ist der Wert τ für die A. V. des Tetrakishexaeders, der in der Mitte zwischen Hexaederpunkt und Rhombendodekaederpunkt liegt. Für $\sigma = \frac{3}{2}$ ist $\tau = 3$, d. h. wir haben den Oktaederpunkt. Der in Frage kommende Zweig der Kurve 30) — die Kurve C_6 in Fig. 3 Taf. 8 —, verläuft also innerhalb des Gebietes der σ, τ der konvexen Hexakisoktaeder, denn es gilt für jeden der Kurvenpunkte $\tau = \frac{\sigma}{(\sigma - 1)^2}(1 - \sqrt{1 - 3(\sigma - 1)^2})$. Für das von der Geraden C_1 und den Kurven C_3 und C_6 eingeschlossene Gebiet ist $2\sigma(\tau - \sigma) < \sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2$. Für das über der Kurve C_6 liegende Gebiet ist dagegen $2\sigma(\tau - \sigma) > \sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2$. Wir haben demnach wiederum zwei Abteilungen der Hexakisoktaeder für die Sphenoide der zweiten Gruppe zu unterscheiden. — Für die erste Abteilung ist:

$$31) \qquad \mu = \frac{2\sigma\tau^2(\sigma - 1)a}{\sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2}, \quad \lambda = \frac{\sigma\tau a}{\tau - \sigma}, \quad \nu = \frac{2\sigma^2\tau a}{\sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2}$$

und σ und τ genügen der Bedingung $2\sigma(\tau - \sigma) > \sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2$. Der Schnittpunkt der Flächen 1), 45), 18) ist $x = +\lambda$, $y = -\nu$, $z = +\mu$, d. h. es ist die Ecke 15) des $(6 + 8 + 12)$-flächigen 2.24-Ecks. Die übrigen Ecken des Hüllpolyeders, die dem ersten Sphenoid zukommen, sind 28 (1, 45, 25): $\lambda, \nu, -\mu$; 6 (1, 18, 25): $-\lambda, \mu, \nu$; 48 (45, 18, 25): $-\lambda, -\mu, -\nu$, d. h. die Sphenoidgruppierung ist nach den Ecken von der zweiten Klasse. Dieser Abteilung gehören von den speziellen Gruppierungen alle die an, deren Kern ein Triakisoktaeder oder gewisse Tetrakishexaeder sind (vergl. Fig. 3 Taf. 8). — Für die zweite Abteilung ist:

$$32) \qquad \mu = \frac{2\sigma\tau^2(\sigma - 1)a}{\sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2}, \quad \lambda = \frac{2\sigma^2\tau a}{\sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2}, \quad \nu = \frac{\sigma\tau a}{\tau - \sigma}$$

wobei σ und τ der Bedingung $2\sigma(\tau - \sigma) < \sigma^2 + \tau^2(\sigma - 1)^2$ genügen. Der Schnittpunkt der Flächen 1), 45), 18) ist $x = +\nu$, $y = -\lambda$, $z = +\mu$, d. h. es ist die Ecke 14) des $(6 + 8 + 12)$-flächigen 2.24-Ecks. Die übrigen Ecken des Hüllpolyeders, die dem ersten Sphenoid angehören, sind: 29 (1, 45, 25): $\nu, \lambda, -\mu$; 21 (1, 18, 25): $-\nu, \mu, \lambda$ und 38 (45, 18, 25): $-\nu, -\mu, -\lambda$; d. h. nach den Ecken gehören die Sphenoidgruppierungen zur ersten Klasse.

Von speziellen Kernen finden sich hier die übrigen Tetrakishexaeder und alle Deltoidikositetraeder.

Wir betrachten nun zunächst die Sphenoidgruppierungen, deren Ecken von der ersten Klasse sind und für deren λ, μ, ν die Formeln 32) gelten. Es ist dann:

$$33)\quad \begin{cases} t = \dfrac{\sigma^2 + \tau^2(\sigma-1)^2}{2(\tau-\sigma)(\sigma\tau-\tau+\sigma)+\sigma^2+\tau^2(\sigma-1)^2}, \\ s = \dfrac{2\sigma(\tau-\sigma)+\sigma^2+\tau^2(\sigma-1)^2}{2(\tau-\sigma)(\sigma\tau-\tau+\sigma)+\sigma^2+\tau^2(\sigma-1)^2}, \end{cases}$$

und

$$34)\quad \begin{cases} k_1 : k_2 : k_3 = 2(\sigma+\tau-\tau\sigma)(\tau-\sigma) : [\sigma^2+\tau^2(\sigma-1)^2 - 2\sigma(\tau-\sigma)] \\ \qquad : 2\tau(\sigma-1)(\tau-\sigma)\sqrt{2}. \end{cases}$$

Diese Polyeder, bezw. Sphenoidgruppierungen, sind polarreziprok zu denen der zweiten Klasse der ersten Gruppe. Setzt man z. B. $\sigma = \frac{327}{283}$, $\tau = \frac{327}{198}$, d. h. den reziproken Wert von s und t jenes dort angeführten speziellen Polyeders, so ergibt sich $\mu = \frac{2}{11}\cdot\frac{327}{85}$, $\lambda = \frac{9}{11}\cdot\frac{327}{85}$, $\nu = \frac{327}{85}$, d. h. $t = \frac{1}{2}$, $s = \frac{10}{11}$, also die reziproken Werte von σ und τ für jenes Polyeder der ersten Gruppe. Danach wird beiläufig: $k_1 : k_2 : k_3 = 7 : 2 : 2\sqrt{2}$. — Ist der Kern der Gruppierung ein Deltoidikositetraeder, so ist $\sigma = \frac{2\tau}{\tau+1}$ zu setzen, und die Eckenkoordinaten erhalten die Werte $\mu = \frac{4\tau(\tau-1)a}{(\tau-1)^2+4}$, $\lambda = \frac{8\tau a}{(\tau-1)^2+4}$, $\nu = \frac{2\tau a}{\tau-1}$, d. h. dieselben Werte wie für die entspr. Gruppierungen der dritten Gruppe, mit denen sie zusammenfallen. Sie sind dort besprochen; die reziproken Polyeder sind die auf der Kurve C_4 der ersten Gruppe. — Wir lassen einstweilen die hierhergehörenden Polyeder, deren Kern ein Tetrakishexaeder ist, bei Seite, und wenden uns zu den Sphenoiden der zweiten Gruppe, die ihren Ecken nach zur zweiten Klasse gehören. Für die Werte λ, μ, ν gelten jetzt die Gleichungen 31) und danach ergibt sich für das s und t des von den Ecken gebildeten $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks:

$$35)\quad \begin{cases} s = \dfrac{2\sigma(\tau-\sigma)+\sigma^2+\tau^2(\sigma-1)^2}{2(\tau-\sigma)(\sigma\tau-\tau+\sigma)+\sigma^2+\tau^2(\sigma-1)^2}, \\ t = \dfrac{2\sigma(\tau-\sigma)}{2(\tau-\sigma)(\sigma\tau-\tau+\sigma)+\sigma^2+\tau^2(\sigma-1)^2}. \end{cases}$$

Für das Verhältnis der Kanten erhält man:

$$36)\ \begin{cases} k_1 : k_2 : k_3 = [\sigma^2 + \tau^2(\sigma-1)^2 - 2\tau(\sigma-1)] : [2\sigma(\tau-\sigma) - \sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2] \\ \qquad : 2\tau(\sigma-1)(\tau-\sigma)\sqrt{2}. \end{cases}$$

Für die speziellen Werte $\sigma = \frac{3(4+\sqrt{2})}{14}$, $\tau = \frac{3(3+\sqrt{2})}{7}$, d. h. wenn der Kern der Sphenoidgruppierung die A. V. des Hexakisoktaeders ist, wird $\lambda = 3a$, $\mu = \frac{3(3\sqrt{2}+1)}{17}a$, $\nu = \frac{3(13+5\sqrt{7})}{17}a$. Das Hüllpolyeder ist diejenige Varietät des $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks, für welche $s = \frac{5(6+\sqrt{2})}{31+8\sqrt{2}}$, $t = \frac{13+5\sqrt{2}}{31+8\sqrt{2}}$ und $k_1 : k_2 : k_3 = (8\sqrt{2}-3) : (5-2\sqrt{2}) : (3\sqrt{2}+1)$ ist. Die Fläche dieses Polyeders ist das Dreieck $E_1E_2E_3$ in der vollständigen Figur der A. V. des Hexakisoktaeders Fig. 1 Taf. 5 und Fig. 8 Taf. 5. Das Modell des Vielflaches ist durch Fig. 2 Taf. 23 dargestellt. Das polarreziproke Polyeder gehört dieser selben Abteilung der zweiten Gruppe quadratischer Sphenoide an. Denn setzt man $\sigma = \frac{31+8\sqrt{2}}{5(6+\sqrt{2})}$, $\tau = \frac{31+8\sqrt{2}}{13+5\sqrt{2}}$ in die allgemeinen Formeln ein, so erhält man $\lambda = \frac{31+8\sqrt{2}}{17}a$, $\mu = \frac{101\sqrt{2}+79}{17(7+4\sqrt{2})}a$, $\nu = \frac{7(69+37\sqrt{2})}{17(7+4\sqrt{2})}a$ und damit $s = \frac{4-\sqrt{2}}{3}$, $t = \frac{3-\sqrt{2}}{3}$. Das sind aber die reziproken Werte der σ und τ des vorher angeführten Polyeders. Die Fläche dieses zweiten diskontinuierlichen Vielflaches zeigt Fig. 6 Taf. 7, das Polyeder selbst ist in Fig. 5 Taf. 23 dargestellt.

Wir betrachten nun zunächst Sphenoidgruppierungen mit speziellen hierhergehörenden inneren Kernen und Hüllen. Der Kern der Gruppierung sei ein Triakisoktaeder, d. h. $\tau = 2\sigma$. Dann ist $\lambda = 2\sigma a$, $\mu = \frac{8\sigma(\sigma-1)a}{1+4(\sigma-1)^2}$, $\nu = \frac{4\sigma a}{1+4(\sigma-1)^2}$; $s = \frac{3+4(\sigma-1)^2}{3+4\sigma(\sigma-1)}$, $t = \frac{2}{3+4\sigma(\sigma-1)}$, d. h. die Hülle ist ein $(6+8+12)$-flächiges 2.24-Eck, für welches

$$k_1 : k_2 : k_3 = [4\sigma(\sigma-1)^2 - 3\sigma + 4] : [\sigma - 4\sigma(\sigma-1)^2] : 4\sigma(\sigma-1)\sqrt{2}$$

ist. Ist z. B. der Kern die A. V. des Triakisoktaeders, d. h. $\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, so haben die zwölf Sphenoide, bei denen je zwei Flächen in eine Ebene fallen, zur äusseren Hülle die besondere Varietät des $(6+8+12)$-flächigen $2 \cdot 24$-Ecks, für welche $s = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$, $t = \frac{1}{2}$ ist, für deren Kanten also die Proportion gilt: $k_1 : k_2 : k_3 = (2-\sqrt{2}) : 1 : \sqrt{2}$. Dieses diskontinuierliche Polyeder zeigt Fig. 2 Taf. 22. Die Fläche, bestehend aus den beiden Dreiecken $T_1 T_1' T_1''$ und $T_2 T_2' T_2''$ in der vollständigen Figur der A. V. des Triakisoktaeders (Fig. 10 Taf. 4) ist in Fig. 2 Taf. 6 für sich gezeichnet. Es fallen diese Sphenoide, wie schon bemerkt, mit den entsprechenden der ersten Gruppe zusammen; die reziproken Polyeder gehören aber dieser zweiten Gruppe zu. Es sind alle diejenigen, für welche die äussere Hülle das $(6+8)$-flächige $8 \cdot 3$-Eck ist, d. h. für welche $\lambda = \nu$ wird. Diese Bedingung ergab als zu befriedigende Gleichung zwischen den σ und τ des Kernpolyeders die bereits behandelte Gleichung der Kurve C_6, nämlich

$$\sigma^2 + \tau^2 (\sigma - 1)^2 = 2\sigma (\tau - \sigma).$$

Ihr genügt u. a. auch das Wertsystem $\sigma = \frac{2(3+\sqrt{2})}{7}$, $\tau = 2$, die reziproken Werte der s und t des vorher besprochenen Polyeders. Als Hülle ergibt sich die A. V. des $(6+8)$-flächigen $8 \cdot 3$-Ecks, in dessen Ecken je zwei Ecken verschiedener Sphenoide zusammenfallen. Das diskontinuierliche Polyeder zeigt Fig. 8 Taf. 23. Hierüber ist schliesslich zu bemerken, dass diejenigen Polyeder der zweiten Gruppe, deren innerer Kern das Triakisoktaeder ist, zu äusseren Hüllen $(6+8+12)$-flächige $2 \cdot 24$-Ecke haben, deren s und t die Gleichung $t^2 + (1-s)^2 = 2t(s-t)$ befriedigen, die sich aus der vorhin geschriebenen ergibt, wenn man in ihr σ und τ durch $\frac{1}{s}$ bezw. $\frac{1}{t}$ ersetzt.

Es liegt nun nahe, nach den aus quadratischen Sphenoiden der zweiten Gruppe gebildeten Polyedern zu fragen, die **autopolar** sind, bei denen also der innere Kern reziprok der äusseren Hülle ist. Sie können natürlich nur Werten σ und τ des Gebietes zwischen den Kurven C_1, C_2 und C_6 zugehören. Für sie ist $t = \frac{1}{\tau}$, $s = \frac{1}{\sigma}$. Setzen wir in den Gleichungen 35) die rechten Seiten bezw. gleich $\frac{1}{\sigma}$ und $\frac{1}{\tau}$, so erhalten wir durch Wegschaffung der Nenner zwei Gleichungen, deren eine Seite übereinstimmt; die Gleichsetzung der anderen Seiten ergibt dann nach naheliegender Vereinfachung

37) $$\sigma^2 + \tau^2 (\sigma - 1)^2 = 2(\tau - \sigma)^2.$$

Diese Gleichung zwischen σ und τ ist die Bedingung dafür, dass die zugehörigen Polyeder autopolar sind. Die durch die Gleichung dargestellte Kurve C_7 (s. Fig. 3 Taf. 8) verläuft, soweit sie für konvexe Kerne in Frage kommt, folgendermassen. Für $\sigma = 1$ wird $\tau = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$, d. h. es liegt eine bestimmte Varietät eines Tetrakishexaeders vor. Es wird für das zugehörige Hüllpolyeder der Gruppierung nach den allgemeinen Formeln in der Tat $t = 2-\sqrt{2} = \frac{1}{\tau}$, $s = 1$. Für $\sigma = \frac{3}{2}$ wird $\tau = 3$, und die Kurve C_7 verläuft zwischen $\sigma = 1$, $\tau = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ und $\sigma = \frac{3}{2}$, $\tau = 3$, wie sich leicht nachweisen lässt, innerhalb des Gebietes, das von den Kurven C_1, C_2 und C_6 begrenzt wird. Die auf ihr liegenden Werte von σ und τ gehören autopolaren Gruppierungen an, sie zerlegt das Gebiet der Gruppierungen mit Ecken zweiter Klasse in zwei Teilgebiete, und es sind die Polyeder des einen Teilgebietes polarreziprok zu solchen des anderen, wie durch ein besonderes Beispiel schon erhärtet war. Als Vertreter einer autopolaren Gruppierung quadratischer Sphenoide der zweiten Gruppe wählen wir das Polyeder, für welches $\tau = 2$ ist. Dann gibt die Gleichung 37) für σ den Wert $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Hiernach wird $\mu = a$, $\lambda = (1+\sqrt{3})a$, $\nu = (2+\sqrt{3})a$, also $t = \frac{1}{2}$, $s = \frac{\sqrt{3}}{2}$, und es ist $k_1 : k_2 : k_3 = \sqrt{3} : 1 : \sqrt{2}$. Das Modell dieses autopolaren Polyeders zeigt Fig. 11 Taf. 22; die Grenzfläche ist in Fig. 14 Taf. 6 gezeichnet. — Wir beweisen nun den Satz, dass alle diese autopolaren Gruppierungen quadratischer Sphenoide sogar solche von regulären Tetraedern sind. Zu dem Zwecke könnten wir direkt die Kanten der autopolaren Sphenoidgruppierungen aus den Eckenkoordinaten berechnen; einfacher aber verfahren wir hier, indem wir umgekehrt nach allen Sphenoiden der zweiten Gruppe fragen, deren drei Kanten gleich sind. Nun sind die bereits angegebenen Koordinaten der drei Ecken 15), 28), 6), bezw. $\lambda, -\nu, \mu$; $\lambda, \nu, -\mu$; $-\lambda, \mu, \nu$. Allgemein ist schon $\overline{28,6} = \overline{15,6}$, aber verschieden von $\overline{15,28}$. Ist aber $\overline{15,28}^2 = \overline{28,6}^2$, d. h. $4\nu^2 + 4\mu^2 = 4\lambda^2 + (\nu+\mu)^2 + (\nu-\mu)^2$, so ist $\nu^2 + \mu^2 = 2\lambda^2$. Die Einsetzung der allgemeinen Werte für λ, μ, ν aus 31) in diese Gleichung ergibt nach beiderseitiger Weghebung des sicher von Null verschiedenen Faktors $\sigma^2 + \tau^2(\sigma-1)^2$ die Bedingung:

$$2(\tau-\sigma)^2 = \sigma^2 + \tau^2(\sigma-1)^2$$

also wieder die Gleichung 37), d. h. für die der zweiten Gruppe quadratischer Sphenoide angehörenden autopolaren diskontinuierlichen Polyeder sind die konstituierenden Einzelkörper stets Tetraeder. Es existiert also im Hexakisoktaedertypus eine einfach unendliche Reihe von Gruppierungen von je zwölf Tetraedern, deren äussere Hülle und innerer Kern polarreziproke $(6+8+12)$-flächige 2.24-Ecke und Hexakisoktaeder sind. Die Kante eines Tetraeders ist $T = 2\sqrt{\mu^2+\nu^2}$, also da hier $\mu = \frac{\sigma\tau^2(\sigma-1)a}{(\tau-\sigma)^2}$, $\lambda = \frac{\sigma\tau a}{\tau-\sigma}$, $\nu = \frac{\sigma^2\tau a}{(\tau-\sigma)^2}$ ist, $T = \frac{2\sigma\tau a}{(\tau-\sigma)^2}\sqrt{\tau^2(\sigma-1)^2+\sigma^2}$ oder $T = \frac{2\sigma\tau a\sqrt{2}}{\tau-\sigma}$. Für das oben angeführte Beispiel wird diese Kante gleich $2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)a$. —

Wir haben nun endlich noch alle die Kombinationen quadratischer Sphenoide der zweiten Gruppe zu untersuchen, deren Kern ein Tetrakishexaeder ist. Durch die Kurve C_6 wird die Gerade $\sigma = 1$ in die beiden Strecken von $\tau = 1$ bis $\tau = \frac{3}{2}$ und von $\tau = \frac{3}{2}$ bis $\tau = 2$ zerlegt. Die erste Strecke gehört dem unter der Kurve C_6 liegenden Gebiete an, dessen Polyeder Ecken erster Klasse besitzen. Für solche Tetrakishexaeder ist $\mu = 0$, $\lambda = 2\tau a$, $\nu = \frac{\tau a}{\tau-1}$, also wird für das Hüllpolyeder jeder Gruppierung $s = 1$, $t = \frac{1}{2\tau-1}$. Es sind also die Hüllpolyeder $(6+8)$-flächige 6.4-Ecke, deren Parameter t von $t = 1$ $(\tau = 1)$ bis $t = \frac{1}{2}$ $\left(\tau = \frac{3}{2}\right)$ variieren. Diese Sphenoidgruppierungen sind reziprok zu denen der ersten Gruppe, deren Kern ein Tetrakishexaeder ist, denn die reziproken Werte der Parameter t von 1 bis $\frac{1}{2}$ sind die Werte von $\tau = 1$ bis $\tau = 2$, d. h. sämtliche verfügbaren Werte für τ. Die Grenzfläche eines Polyeders der zweiten Gruppe ist das von den Spuren 12), 16), 19) in der Ebene 1) gebildete Dreieck. Als Beispiel für diese Polyeder sei das gewählt, dessen Kern $\tau = \frac{5}{4}$ zugehört; dann ist $t = \frac{2}{3}$. Dieses Vielflach ist reziprok dem der ersten Gruppe, für welches $\tau = \frac{3}{2}$, $t = \frac{4}{5}$ ist. Da nun allgemein für die Sphenoide der zweiten Gruppe, deren Kern ein Tetrakishexaeder $\left(\tau < \frac{3}{2}\right)$ ist, die Kanten des Hüllpolyeders die Proportion $k_1 : k_2 = (1-t) : (2t-1) = 2(\tau-1) : (3-2\tau)$ befriedigen, so ist für das spezielle angeführte Polyeder $k_1 : k_2 = 1 : 1$, d. h. die Hülle ist die A. V. des $(6+8)$-flächigen 6.4-Ecks. Das Modell dieses Polyeders zeigt Fig. 5 Taf. 22; die Fläche Fig. 3 Taf. 5. Die Ecken des ersten Sphenoids des Polyeders sind die Ecken 9, 7, 14, 23 des 6.4-Ecks. Wir wenden uns nun zu den Sphenoiden der zweiten Gruppe mit Ecken zweiter Klasse, für welche der Kern ein Tetrakishexaeder ist, für die also $\frac{3}{2} < \tau < 2$ ist. Für die Eckenkoordinaten gilt jetzt: $\mu = 0$, $\lambda = \frac{\tau a}{\tau - 1}$, $\nu = 2\tau a$ und die Parameter des Hüllpolyeders sind $s = 1$, $t = \frac{2(\tau-1)}{2\tau-1}$. Die die Punkte $\frac{3}{2} < \tau < 2$ tragende Strecke der Geraden $\sigma = 1$ wird durch die Kurve C_7 in zwei Teile geteilt; für den einen Teil ist $\frac{3}{2} < \tau < \frac{2+\sqrt{2}}{2}$, für den anderen $\frac{2+\sqrt{2}}{2} < \tau < 2$. Die Sphenoide, die zu den Werten σ, τ des ersten Teiles der Strecke gehören, sind polarreziprok zu solchen der σ, τ des zweiten Teiles, während das Polyeder für $\tau = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ autopolar ist. Für diesen Wert fallen die zwölf, ein autopolares Polyeder bildenden Tetraeder in sechs zusammen. Für das die Hülle bildende $(6+8)$-flächige 6.4-Eck gilt: $k_1 : k_2 = 1 : (\sqrt{2}-1)$. Die Kante jedes der sechs Tetraeder ist $2(2+\sqrt{2})a$. Das Modell des Körpers zeigt Fig. 6 Taf. 23; die Fläche ist Fig. 6 Taf. 5 dargestellt. — Die Grenzwerte $\tau = \frac{3}{2}$ und $\tau = 2$ gehören polarreziproken Polyedern zu, denn für $\tau = \frac{3}{2}$ ist $t = \frac{1}{2}$ für $\tau = 2$ ist $t = \frac{2}{3}$. Im letzteren Falle ist das Kernpolyeder das Rhombendodekaeder und diese Gruppierung gehört zugleich der ersten Gruppe quadratischer Sphenoide an, deren Kern ein Tetrakishexaeder ist. Das Polyeder der zweiten Gruppe für $\tau = \frac{3}{2}$ hat zur äusseren Hülle das Kubooktaeder. In jeder Ecke dieses Kubooktaeders fallen zwei Ecken verschiedener Sphenoide zusammen. Dieses Polyeder zeigt im Modell Fig. 3 Taf. 22, seine schon besprochene Fläche ist Fig. 8 Taf. 4 wiedergegeben.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass die quadratischen Sphenoide der ersten und dritten Gruppe nicht zu Tetraedern werden können. Denn für die Sphenoide der ersten Gruppe dritter Klasse müsste z. B. die Kante

$\overline{15,23} = \overline{15,29}$ sein; also da $\overline{15,23}^2 = 4\lambda^2 + 4\nu^2$, und $\overline{15,29}^2 = (\nu-\lambda)^2 + (\nu+\lambda)^2 + 4\mu^2$ ist, so wäre $\lambda^2 + \nu^2 = 2\mu^2$, was unmöglich ist, da $\mu < \lambda < \nu$ sein soll. Analog ist der Nachweis in den übrigen Fällen. Da die Koordinaten der Ecken der Polyeder berechnet sind, lassen sich leicht weitere metrische Betrachtungen anstellen, z. B. die Oberfläche und der Inhalt der Polyeder berechnen; doch gehen wir hierauf nicht ein. Wir stellen vielmehr im folgenden nochmals übersichtlich mit Berücksichtigung der Figuren 1, 2, 3 auf Taf. 8 die polarreziproke Verwandtschaft der drei Gruppen quadratischer Sphenoide zusammen.

6. **Die polarreziproke Verwandtschaft der drei Gruppen quadratischer Sphenoide.** Durch die vorstehenden Untersuchungen hat sich ergeben, dass Gruppierungen quadratischer Sphenoide erster Klasse entweder zur zweiten oder dritten Gruppe, solche zweiter Klasse zur ersten oder zweiten Gruppe und die dritter Klasse zur ersten Gruppe gehören und es hat sich der früher hingestellte Satz, dass Sphenoidkombinationen i-ter Gruppe k-ter Klasse polarreziprok sind zu solchen k-ter Gruppe i-ter Klasse, als richtig erwiesen. Die Zuordnung der polarreziprok verwandten diskontinuierlichen Polyeder lässt sich leicht Gebiet für Gebiet, die Grenzkurven eingeschlossen, verfolgen. Wir bezeichnen für die Übersicht jedes Gebiet durch seine Ecken [Rd, O, H, A und B Punkte auf $\sigma = 1$, für die $\tau = \frac{3}{2}$ bezw. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ist], sowie seine Grenzkurven [$C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, C_7$], deren Gleichungen abgeleitet wurden, und stellen Gebiete und Grenzkurven polarreziproker Polyeder in bekannter Weise neben einander. Dabei sind bei jedem G e b i e t e die Polyeder der Grenzen zunächst im allgemeinen ausgeschlossen zu denken. Für das Innere jedes Gebietes ist der Kern des Polyeders ein Hexakisoktaeder, die Hülle ein $(6+8+12)$-flächiges 2.24-Eck, und zwar sind die Werte σ, τ [s, t] der Polyeder der linken Spalte stets die reziproken Werte der s, t [σ, τ] der Polyeder der rechten Spalte. Wo nicht anders bemerkt, enthalten die Gruppierungen je zwölf quadratische Sphenoide.

1. Gruppe. 2. Klasse.

Gebiet: $Rd - C_1 - H - C_4 - O - C_2 - Rd$.

Grenzen:

$Rd - C_1 - H$ {Kern: Tetrakishexaeder.
Hülle: 6.4-Ecke (6 qu. Sph.)

$H - C_4 - O$ {Kern: Hexakisoktaeder.
Hülle: 24-Ecke.

$O - C_2 - Rd$ {Kern: Triakisoktaeder.
Hülle: 2.24-Ecke.

2. Gruppe. 1. Klasse.

Gebiet: $A - C_1 - H - C_3 - O - C_6 - A$.

Grenzen:

$A - C_1 - H$ {Kern: Tetrakishexaeder.
Hülle: 6.4-Ecke (6 qu. Sph.)

$H - C_3 - O$ {Kern: Deltoidikositetraeder.
Hülle: 2.24-Ecke.

$O - C_6 - A$ {Kern: Hexakisoktaeder.
Hülle: 8.3-Ecke.

Dabei sind die Grenzpunkte entweder ausgeschlossen (H und O) oder nicht (Rd und A; vergl. 2. Gr. 2. Kl.).

1. Gruppe. 3. Klasse.

Gebiet: $H - C_4 - O - C_3 - H$.

Grenzen:

$H - C_4 - O$ s. 1. Gruppe. 2. Klasse.

$O - C_3 - H$ {Kern: Deltoidikositetraeder.
Hülle: 8.3-Eck.

—

3. Gruppe. 1. Klasse.

Gebiet: $H - C_3 - O - C_2 - Rd - C_1 - H$.

Grenzen:

$H - C_3 - O$ s. 2. Gruppe. 1. Klasse.

$O - C_2 - Rd$ {Kern: Triakisoktaeder.
Hülle: 24-Ecke.

$Rd - C_1 - H$ (Parallele Ebenen.)

Sämtliche Grenzpunkte sind hier ausgeschlossen.

2. Gruppe. 2. Klasse.

Gebiet: $Rd - C_1 - B - C_7 - O - C_2 - Rd$.

Grenzen:

Rd {Kern: Rhombendodekaeder.
Hülle: Ein 6.4-Eck.

$Rd - C_1 - B$ {Kern: Tetrakishexaeder.
Hülle: 6.4-Ecke (6 Sph.)

2. Gruppe. 2. Klasse.

Gebiet: $A - C_1 - B - C_7 - O - C_6 - A$.

Grenzen:

A {Kern: Ein best. Tetrakishexaeder.
Hülle: Kubooktaeder.

$A - C_1 - B$ {Kern: Tetrakishexaeder.
Hülle: 6.4-Ecke (6 qu. Sph.)

B: Kern und Hülle ein polarreziprokes Tetrakishexaeder und 6.4-Eck; die sechs Sphenoide sind Tetraeder.

$B - C_7 - O$: Kern und Hülle polarreziproke Hexakisoktaeder und 2.24-Ecke; die zwölf Sphenoide sind Tetraeder.

$O - C_2 - Rd$ {Kern: Triakisoktaeder.
Hülle: 2.24-Ecke.

$O - C_6 - A$ {Kern: Hexakisoktaeder.
Hülle: 8.3-Ecke.

Für den Punkt O ergibt sich auch hier keine Sphenoidgruppierung.

7. **Übersicht der vier Gruppierungen rhombischer Sphenoide.** Für die diskontinuierlichen Polyeder, die Gruppierungen von zwölf, im allgemeinen rhombischen[1]) Sphenoiden sind, deren innerer Kern ein Hexakisoktaeder, deren Hülle ein $(6+8+12)$-flächiges 2.24-Eck ist, sind im folgenden zunächst die je vier Sphenoide angegeben, die die Flächen 1), 2), 8), 12) des Hexakisoktaeders besitzen, bezw. die entsprechenden Ecken des 2.24-Ecks, wobei die Polyeder wieder nach den Flächen des Kernkörpers gruppiert sind. Die Zahlen liest man sofort aus den Tabellen A_1, A_2, A_3 in Nr. 1 dieses § ab, nur muss man beachten, dass die rhombischen Sphenoide rechte und linke sein können.

1. Gr.	2. Gr.	3. Gr.	4. Gr.
1, 5, 43, 47.	1, 45, 36, 23.	1, 45, 5, 41.	1, 41, 13, 38.
2, 6, 46, 42.	2, 44, 18, 25.	2, 44, 6, 48.	2, 48, 12, 39.
8, 4, 44, 48.	8, 42, 14, 37.	8, 42, 4, 46.	8, 46, 24, 35.
12, 31, 22, 37.	12, 20, 27, 35.	12, 20, 31, 39.	[12, 39, 2, 48].

Fassen wir die Zahlen als Eckenzahlen auf, so sprechen wir wieder von Polyedern erster bis vierter Klasse. Um die Sphenoidgruppierungen zu übersehen, die sich ergeben, wenn an Stelle des Hexakisoktaeders bezw. 2.24-Ecks als Kern und Hülle die speziellen Polyeder des Typus treten, benutzen wir wie früher die Tabelle in Note I und finden das Folgende.

a) Das Deltoidikositetraeder und das $(6+8+12)$-flächige 24-Eck. Die Flächen [Ecken] 1) und 8) jeder Gruppe [Klasse] fallen in eine Ebene [Ecke]. Es ergibt sich für die

1. Gr.	2. Gr.	3. Gr.	4. Gr.
1, 3, 21, 24.	1, 22, 17, 12.	1, 22, 3, 23.	1, 23, 7, 18.
1, 3, 21, 24.	1, 23, 7, 18.	1, 23, 3, 22.	1, 22, 12, 17.

d. h. die Sphenoide der ersten Gruppe gehen in ein System paralleler Ebenen über; die Sphenoide der zweiten und vierten Gruppe sind identisch; das Polyeder besteht aus zwölf Sphenoiden, wobei je zwei Flächen zweier verschiedener Sphenoide in eine Ebene fallen. Die Sphenoide der dritten Gruppe werden identisch mit den bereits behandelten sechs quadratischen Sphenoiden der ersten Gruppe. Sind die Zahlen Eckenzahlen, so zeigen sie,

[1]) Wir bezeichnen die quadratischen Sphenoide, in die für besondere Varietäten des 2.24-Ecks die rhombischen Sphenoide übergehen, auch hier als sekundäre quadratische Sphenoide.

dass die Polyeder, deren Hülle das $(6+8+12)$-flächige 24-Eck ist, für die zweite und vierte Klasse der Ecken identisch sind (dabei liegen je zwei Ecken verschiedener Sphenoide in einer Ecke des Hüllpolyeders), für die erste Klasse illusorisch werden.

b) Das Triakisoktaeder und das $(6+8)$-flächige $8 \cdot 3$-Eck. Hier fallen die Flächen 1) und 12) des Hexakisoktaeders in eine Ebene; die vier Gruppierungen sind dann:

$$1.\,\text{Gr.}\left\{\begin{matrix}1, & 20, & 10, & 23.\\ 1, & 5, & 14, & 18.\end{matrix}\right. \quad 2.\,\text{Gr.}\left\{\begin{matrix}1, & 5, & 18, & 14.\\ 1, & 20, & 10, & 23.\end{matrix}\right. \quad 3.\,\text{Gr.}\left\{\begin{matrix}1, & 5, & 20, & 16.\\ 1, & 20, & 5, & 16.\end{matrix}\right. \quad 4.\,\text{Gr.}\left\{\begin{matrix}1, & 16, & 8, & 17.\\ 1, & 16, & 8, & 17.\end{matrix}\right.$$

Ist der Kern des diskontinuierlichen Polyeders ein Triakisoktaeder, so fallen die Sphenoide der ersten und zweiten Gruppe zusammen, d. h. wir haben zwölf Sphenoide, bei denen je zwei Flächen verschiedener Sphenoide in einer Ebene liegen. Die Sphenoide der vierten Gruppe werden zu parallelen Ebenen, während die sechs Sphenoide der dritten Gruppe mit den quadratischen Sphenoiden dritter Gruppe identisch sind. Deuten wir die Zahlen als Eckenzahlen, so lesen wir ab, dass die Sphenoide der ersten und zweiten Klasse identisch sind (je zwei Sphenoidecken fallen in eine Ecke des $(6+8)$-flächigen $8 \cdot 3$-Ecks), die Sphenoide der vierten Klasse aber unmöglich werden.

c) Das Tetrakishexaeder und das $(6+8)$-flächige $6 \cdot 4$-Eck. Jetzt fallen die Flächen 1) und 2) des allgemeinen Kernes in eine Ebene und es wird die

$$1.\,\text{Gr.}\left\{\begin{matrix}1, & 3, & 18, & 22.\\ 1, & 3, & 22, & 18.\end{matrix}\right. \quad 2.\,\text{Gr.}\left\{\begin{matrix}1, & 19, & 12, & 16.\\ 1, & 19, & 12, & 16.\end{matrix}\right. \quad 3.\,\text{Gr.}\left\{\begin{matrix}1, & 19, & 3, & 24.\\ 1, & 19, & 3, & 24.\end{matrix}\right. \quad 4.\,\text{Gr.}\left\{\begin{matrix}1, & 24, & 8, & 23.\\ 1, & 24, & 8, & 23.\end{matrix}\right.$$

d. h. die Sphenoide der dritten und vierten Gruppe sind illusorisch, während die je sechs Sphenoide der beiden anderen Gruppen wieder die quadratischen Sphenoide sind, die für das Tetrakishexaeder als innerer Kern auftreten. Es erübrigt sich daher, die Sphenoide für diesen speziellen Kern und die entsprechende Hülle zu untersuchen. Das Gleiche gilt natürlich für das Rhombendodekaeder und Kubooktaeder. Wir beginnen die Einzeluntersuchung mit den Sphenoiden der ersten Gruppe und bemerken vorläufig, dass nur für die dritte Gruppe die Polyeder zugleich nach den Ecken dritter Klasse sind, während für die drei anderen Gruppen die Zuordnung der Klasse eine kompliziertere ist.

8. **Die erste Gruppe der rhombischen Sphenoide.** Das erste rhombische Sphenoid der ersten Gruppe hat die Flächen 1), 5), 43), 47). Die Koordinaten des Schnittpunktes von 1), 5) und 43) sind:

$$x = -\frac{2\sigma\tau^2(\sigma-1)a}{(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2}, \quad y = \frac{2\sigma\tau(\tau-\sigma)a}{(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2}, \quad z = \tau a.$$

Ist $\tau-\sigma = \tau(\sigma-1)$ oder $\sigma = \frac{2\tau}{\tau+1}$, so werden $[x]$ und $[y]$ unendlich, d. h. für das Deltoidikositetraeder als inneren Kern ergeben sich die bereits in der Übersicht angezeigten parallelen Ebenen. Es ist also für wirkliche Sphenoidgruppierungen stets $\tau-\sigma > \tau(\sigma-1)$. Damit ist aber, wie sich durch Beachtung der Zähler ergibt, immer $[y] > [x]$. Nach dem Verhältnis von $[x]$ zu $[z]$ haben wir zwei Fälle zu unterscheiden. Setzen wir $[x] = [z]$, so ist:

38) $$(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2 = 2\sigma\tau(\sigma-1).$$

Diese Gleichung stellt eine Kurve C_4 (vergl. Fig. 10 Taf. 7) dar, die durch die Punkte $\sigma = 1$, $\tau = 1$ und $\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, $\tau = \sqrt{2}+1$ geht, also mit einem Zweige innerhalb des Gebietes der konvexen Hexakisoktaeder verläuft. Sie teilt das ganze Gebiet in zwei Teilgebiete zwischen C_1, C_2 und C_4 und zwischen C_2, C_3 und C_4. Im ersteren ist $(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2 > 2\sigma\tau(\sigma-1)$, im letzteren aber $(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2 < 2\sigma\tau(\sigma-1)$. Also ist für die Sphenoidecken der Polyeder des ersten Gebietes $[x] < [z]$, d. h.:

39) $$\mu = \frac{2\sigma\tau^2(\sigma-1)a}{(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2}, \quad \lambda = \tau a, \quad \nu = \frac{2\sigma\tau(\tau-\sigma)a}{(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2}.$$

Die Ecken des ersten Sphenoides sind hier: 24 (1, 5, 43): $-\mu, \nu, \lambda$; 16 (1, 5, 47): $\mu, -\nu, \lambda$; 31 (1, 43, 47): $\nu, -\mu, -\lambda$; 39 (5, 43, 47); $-\nu, \mu, -\lambda$. Nach ihren Ecken gehören also die Sphenoidgruppierungen dieses Gebietes zur zweiten Klasse. — Dagegen ist für die Ecken der Polyeder des zweiten Gebietes:

40) $$\mu = \tau a, \quad \lambda = \frac{2\sigma\tau^2(\sigma-1)a}{(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2}, \quad \nu = \frac{2\sigma\tau(\tau-\sigma)a}{(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2}.$$

Die Ecken des ersten Sphenoides sind jetzt: 23 (1, 5, 43): $-\lambda, \nu, \mu$; 15 (1, 5, 47): $\lambda, -\nu, \mu$; 32 (1, 43, 47): $\nu, -\lambda, -\mu$; 40 (5, 43, 47): $-\nu, \lambda, -\mu$. Wir haben also Sphenoidgruppierungen vor uns, die nach ihren Ecken zur vierten Klasse gehören, d. h. die erste Gruppe der rhombischen Sphenoide enthält nach den Ecken Polyeder der zweiten und vierten Klasse. Für die Hexakisoktaeder der Kurve C_4 ist $\lambda = \mu$, d. h. die Hülle der zugehörigen diskontinuierlichen Polyeder ist ein $(6+8+12)$-flächiges 24-Eck. — Für die an zweiter Stelle aufgeführten Sphenoidgruppierungen, die nach ihren Ecken der vierten Klasse zugehören, sind die Werte s, t der $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecke gegeben durch:

$$41)\quad \begin{cases} s = \dfrac{2\sigma^2(\tau-1)}{2\sigma^2(\tau-1)+(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2}, \\[2ex] t = \dfrac{2\sigma(\tau-\sigma)}{2\sigma^2(\tau-1)+(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2}. \end{cases}$$

Für die Kanten des Hüllpolyeders gilt:

$$42)\quad \begin{cases} k_1 : k_2 : k_3 = [2\sigma\tau(\sigma-1)-(\tau-\sigma)^2+\tau^2(\sigma-1)^2] \\ \quad : 2\sigma[\tau-\sigma-\tau(\sigma-1)] : [(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2]\sqrt{2}. \end{cases}$$

Als Beispiele wählen wir die beiden Polyeder, bei denen das eine Mal der Kern, das andere Mal die Hülle die A. V. des betreffenden Körpers ist, deren σ und τ in beiden Fällen hier zulässige Werte sind. Es sei also $\sigma = \frac{3(4+\sqrt{2})}{14}$, $\tau = \frac{3(3+\sqrt{2})}{7}$, d. h. der Kern des diskontinuierlichen Polyeders die A. V. des Hexakisoktaeders. Es ist dann: $\lambda = 3a$, $\mu = \frac{3(3+\sqrt{2})}{7}a$, $\nu = 3(\sqrt{2}+1)a$, und damit: $s = \frac{18+\sqrt{2}}{23}$, $t = \frac{9\sqrt{2}+1}{23}$; $k_1 : k_2 : k_3 = (2\sqrt{2}-1) : 7 : (3+\sqrt{2})$. Die Fläche des diskontinuierlichen Polyeders ist in Fig. 1 Taf. 6 dargestellt,[1]) das Modell des Körpers zeigt Fig. 9 Taf. 23. — Ist $\sigma = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$, $\tau = \sqrt{2}+1$, d. h. der Kern eine gewisse besondere Varietät des Hexakisoktaeders, so wird $\lambda = (2\sqrt{2}+3)a$, $\mu = (\sqrt{2}+1)a$, $\nu = (3\sqrt{2}+5)a$, $t = \frac{3-\sqrt{2}}{3}$, $s = \frac{4-\sqrt{2}}{3}$, d. h. die Hülle des Polyeders ist die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen

---

[1]) Das Dreieck $L_1 L_2 L_3$ in der vollständigen Figur der A. V. des Hexakisoktaeders Fig. 1 Taf. 5.

2.24-Ecks. Dieses Polyeder zeigt im Modell Fig. 7 Taf. 22; seine Fläche ist in Fig. 11 Taf. 6 angegeben.

Für die Polyeder der Grenzkurve C_4 gilt das Folgende. Die Werte σ und τ erfüllen die Gleichung 38), und es wird für die zugehörigen Sphenoidgruppierungen, da $\mu = \lambda = \tau a$, $\nu = \frac{\tau-\sigma}{\sigma-1} a$ ist, die Hülle durch $t = \frac{\tau-\sigma}{2\sigma\tau-(\tau+\sigma)}$, $s = \frac{\sigma(\tau-1)}{2\sigma\tau-(\tau+\sigma)}$ bestimmt, so dass $t = 2s-1$ ist. Für den Schnittpunkt der Kurve C_4 mit der Triakisoktaedergeraden $\tau = 2\sigma$ ist $1-4(\sigma-1)^2 = 4(\sigma-1)$, d. h. $\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ und damit $\tau = \sqrt{2}+1$, wie schon angegeben wurde. Mit diesen Werten wird $t = \frac{1}{2\sqrt{2}-1}$, $s = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$, d. h.: Ist der Kern der Sphenoidgruppierung die A. V. des Triakisoktaeders, so ist die Hülle die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen 24-Ecks, während für andere 24-Ecke als Hüllen die Kerne Hexakisoktaeder sind, deren σ und τ aber die Gleichung 38) befriedigen. Es sei z. B. $\tau = 2$, also $\sigma = \frac{8}{7}$, dann ist $\mu = \lambda = 2a$, $\nu = 6a$ und $t = \frac{3}{5}$, $s = \frac{4}{5}$.

Da die Triakisoktaedergerade C_2 durch den Punkt $M\left(\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, \tau = \sqrt{2}+1\right)$ in zwei Strecken zerlegt wird, deren zugehörige Sphenoidgruppierungen verschiedenen Klassen angehören, so seien zunächst die Gruppierungen zweiter Klasse weiterer Betrachtung unterworfen. Mit den Werten 39) der λ, μ, ν ergibt sich für die Parameter s und t:

$$43)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{2\sigma(\tau-\sigma)+(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2}{2\sigma^2(\tau-1)+(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2}, \\ t = \dfrac{2\sigma(\tau-\sigma)}{2\sigma^2(\tau-1)+(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2}, \end{cases}$$

und für die Kanten k_1, k_2, k_3 des Hüllpolyeders erhält man die Proportion:

$$44)\qquad \begin{cases} k_1 : k_2 : k_3 = [(\tau-\sigma)^2-\tau^2(\sigma-1)^2-2\sigma\tau(\sigma-1)] \\ \quad : [2\sigma(\tau-\sigma)-(\tau-\sigma)^2+\tau^2(\sigma-1)^2] : 2\sigma\tau(\sigma-1)\sqrt{2}. \end{cases}$$

Es sei z. B.: $\sigma = \frac{11}{10}$, $\tau = 2$. Dann ist $\mu = \frac{8}{7}a$, $\lambda = 2a$, $\nu = \frac{36}{7}a$, $t = \frac{18}{29}$, $s = \frac{25}{29}$; $k_1 : k_2 : k_3 = 3 : 11 : 4\sqrt{2}$. Für die Grenzkurve C_4 ergeben sich aus 43) in Verbindung mit 38) natürlich wieder die bereits oben angeschriebenen Werte s und t für die 24-Ecke.

Es sei nun der Kern der Sphenoidgruppierung ein Triakisoktaeder, d. h. $\tau = 2\sigma$. Dann ist für die Polyeder, die ihren Ecken nach zur vierten Klasse gehören: $\mu = 2\sigma a$, $\lambda = \frac{8\sigma(\sigma-1)a}{1-4(\sigma-1)^2}$, $\nu = \frac{4\sigma a}{1-4(\sigma-1)^2}$, und damit: $t = \frac{2}{4\sigma(3-\sigma)-5}$, $s = \frac{2(2\sigma-1)}{4\sigma(3-\sigma)-5}$. Für die Kanten der Hüllpolyeder, die $(6+8+12)$-flächige 2.24-Ecke sind, ergibt sich die einfachere Proportion: $k_1 : k_2 : k_3 = [4\sigma(\sigma-1)-1] : 2(3-2\sigma) : [1-4(\sigma-1)^2]\sqrt{2}$. Beispiel: $\sigma = \frac{5}{4}$. Dann ist $t = \frac{8}{15}$, $s = \frac{4}{5}$ und $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 4 : 3\sqrt{2}$. Für die den Polyedern mit Ecken zweiter Klasse zugehörenden Sphenoidgruppierungen, deren Kern ein Triakisoktaeder ist, findet man: $\mu = \frac{8\sigma(\sigma-1)a}{1-4(\sigma-1)^2}$, $\lambda = 2\sigma a$, $\nu = \frac{4\sigma a}{1-4(\sigma-1)^2}$, also $t = \frac{2}{4\sigma(3-\sigma)-5}$, $s = \frac{3-4(\sigma-1)^2}{4\sigma(3-\sigma)-5}$ und $k_1 : k_2 : k_3 = [1-4\sigma(\sigma-1)] : [1+4(\sigma-1)^2] : 4(\sigma-1)\sqrt{2}$. Ist z. B. $\sigma = \frac{11}{10}$, also $\tau = \frac{11}{5}$, so kommt: $s = \frac{37}{42}$, $t = \frac{25}{42}$ und damit: $k_1 : k_2 : k_3 = 7 : 13 : 5\sqrt{2}$. Da für $\sigma = 1$ die rhombischen Sphenoide der ersten Gruppe, die also zur zweiten Klasse gehören, mit den früher bereits erledigten quadratischen Sphenoiden zusammenfallen, so liegt die Frage nach den sekundären quadratischen Sphenoiden, d. h. solchen die sich für bestimmte Werte der σ und τ des Kernpolyeders aus den rhombischen ergeben, nahe. Wir werden jedoch die Untersuchungen im folgenden von vornherein auf die Fälle beschränken, in denen ein positives Resultat gefunden wird. Für die Kanten der Grenzfläche 1) des ersten Sphenoids eines nach den Ecken der vierten Klasse zugehörigen Polyeders gilt:

$$\overline{15,23}^2 = 4\lambda^2 + 4\nu^2;\ \overline{15,32}^2 = 2(\nu-\lambda)^2 + 4\mu^2;\ \overline{23,32}^2 = 2(\nu+\lambda)^2 + 4\mu^2.$$

Da $\lambda = 0$ ausgeschlossen ist, so ergeben sich, wie die Untersuchung zeigt, nur sekundäre quadratische Sphenoide, wenn $\overline{15,23}^2 = \overline{23,32}^2$, d. h. $\nu - \lambda = \mu\sqrt{2}$ ist. Führt man hierin die Werte λ, μ, ν in σ und τ ein, so reduziert sich die Gleichung, indem sich σ weghebt, auf $\tau = \sqrt{2}+1$. Dies bedeutet die Gleichung einer Geraden C_5 (s. Fig. 10 Taf. 7) parallel der σ-achse durch den Punkt M für die A. V. des Triakisoktaeders. Es existiert also eine einfach unendliche Reihe von Hexakisoktaedern, für welche die rhombischen

Sphenoide der ersten Gruppe vierter Klasse zu quadratischen werden, wenn für das genannte Kernpolyeder bei beliebigem zulässigem σ der Parameter $\tau = \sqrt{2}+1$ ist. Die Werte von s und t für die Hüllen dieser Gruppierungen quadratischer Sphenoide ergeben sich aus den Gleichungen 41). Von besonderem Interesse ist nur diejenige Gruppierung, deren Kern die A. V. des Triakisoktaeders, deren Hülle die A. V. des 24-Ecks ist. Hier wird $\mu = \lambda = (\sqrt{2}+1)a$, $\nu = (\sqrt{2}+1)^2 \cdot a$ und die beiden Kanten gleicher Länge sind $2a\sqrt{2(10+7\sqrt{2})}$, während die dritte von ihnen verschiedene Kante des Sphenoids $2a(2+\sqrt{2})$ ist. — Endlich sei noch bemerkt, dass die rhombischen Sphenoide der ersten Gruppe, die nach ihren Ecken der zweiten Klasse zugehören, nicht quadratisch werden können, ausser natürlich für den bereits erledigten Grenzpunkt M, weil er zugleich dem Nachbargebiete angehört.

9. **Die vierte Gruppe der rhombischen Sphenoide.** Das erste Sphenoid wird von den Flächen 1), 41), 13), 38) gebildet. Der Schnittpunkt der Flächen 1), 13), 38) des Hexakisoktaeders hat die Koordinaten:

$$x = -\frac{2\sigma(\tau-\sigma)a}{2\sigma-\tau}, \quad y = -\frac{\sigma a}{\sigma-1}, \quad z = \frac{2\sigma^2 a}{2\sigma-\tau}.$$

Dabei ist, wie die Vergleichung der Werte zeigt, stets $[x] < [z]$, so lange $\tau < 2\sigma$ ist. Da $\tau = 2\sigma$ seiner Natur nach ausgeschlossen ist, da dann $[x] = [z] = \infty$ wird, für Triakisoktaeder als innere Kerne die Sphenoide in parallele Ebenen entarten, so ist:

$$45) \qquad \mu = \frac{2\sigma(\tau-\sigma)a}{2\sigma-\tau}, \quad \lambda = \frac{2\sigma^2 a}{2\sigma-\tau}, \quad \nu = \frac{\sigma a}{\sigma-1},$$

so lange $\frac{\sigma}{\sigma-1} \geqq \frac{2\sigma^2}{2\sigma-\tau}$, d. h. $\tau \leqq 2\sigma(2-\sigma)$ ist. Nun ist $\tau = 2\sigma(2-\sigma)$ die Gleichung einer Kurve C_6 (vergl. Fig. 12 Taf. 7), die durch $\sigma = 1$, $\tau = 2$ und $\sigma = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, $\tau = 2\sqrt{2}-1$, d. h. die A. V. des Deltoidikositetraeders, geht. Diese Kurve teilt also das Gebiet der konvexen Hexakisoktaeder in zwei Teilgebiete, für welche $\tau \lesseqgtr 2\sigma(2-\sigma)$ ist. Für das erste dieser Teilgebiete, sowie für die Kurve C_6 selbst gelten die unter 45) angegebenen Werte von λ, μ, ν und es sind also die vier Ecken des ersten Sphenoids der Gruppierung und ihre Koordinaten: 17 (1, 13, 38): $-\mu, -\nu, \lambda$; 34 (41, 13, 38): $\mu, -\nu, \lambda$;

28 (1, 41, 13): λ, ν, $-\mu$; 23 (1, 41, 38): $-\lambda$, ν, μ. Sonach gehören diese Sphenoidgruppierungen nach ihren Ecken zur ersten Klasse. Für die Parameter t und s der Hüllpolyeder ergibt sich:

46) $$\begin{cases} t = \dfrac{2\sigma - \tau}{2\sigma(\tau+1) - 3\tau}, \\ s = \dfrac{2\sigma^2 - \tau}{2\sigma(\tau+1) - 3\tau}. \end{cases}$$

Für die Kanten der $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecke gilt:

47) $$k_1 : k_2 : k_3 = (2\sigma - \tau) : \frac{2\sigma - \tau - 2\sigma(\sigma-1)}{2(\sigma-1)} : (\tau - \sigma)\sqrt{2}.$$

Die Hülle der Gruppierung ist die A. V. des 2.24-Ecks, wenn $k_1 = k_2 = k_3$ ist. Aus $k_1 = k_3$ folgt $\tau = \sigma\sqrt{2}$ und aus $k_2 = k_3$ folgt dann $\sigma = \frac{18 - \sqrt{2}}{14}$, $\tau = \frac{9\sqrt{2} - 1}{7}$. Das sind die reziproken Werte von $s = \frac{18 + \sqrt{2}}{23}$ und $t = \frac{9\sqrt{2}+1}{23}$, d. h. diese Gruppierung ist polarreziprok zu derjenigen der ersten Gruppe vierter Klasse, deren Kern die A. V. des Hexakisoktaeders ist. Nimmt man als Kern für die vierte Gruppierung rhombischer Sphenoide die A. V. des Hexakisoktaeders — die Werte $\sigma = \frac{3(4+\sqrt{2})}{14}$, $\tau = \frac{3(3+\sqrt{2})}{7}$ befriedigen die Bedingung $\tau < 2\sigma(2-\sigma)$ —, so ergibt sich $\mu = \frac{3(5+3\sqrt{2})a}{7}$, $\lambda = \frac{3(9+4\sqrt{2})a}{7}$, $\nu = 3(\sqrt{2}+1)a$, und damit $t = \sqrt{2} - 1$, $s = \frac{4+\sqrt{2}}{7}$. Ein Vergleich mit den Werten von σ und τ für den Kern des zweiten diskontinuierlichen Polyeders der ersten Gruppe vierter Klasse rhombischer Sphenoide zeigt die Reziprozität dieser zwei Gruppierungen. Es ist überdies für das hier besprochene Polyeder $k_1 : k_2 : k_3 = (2\sqrt{2}+1) : (3-\sqrt{2}) : (5+3\sqrt{2})$. Sein Modell zeigt Fig. 1 Taf. 23; die Zeichnung der Grenzfläche ist Fig. 7 Taf. 6, nämlich das Dreieck $H_1 H_2 H_3$ in der vollständigen Figur der A. V. des Hexakisoktaeders (Fig. 1 Taf. 5). Ist der Kern der Sphenoidgruppierungen ein Deltoidikositetraeder, d. h. $\tau = \frac{\sigma}{2-\sigma}$, so ergibt sich für λ, μ, ν, natürlich nur soweit die Deltoidikositetraeder auf Sphenoidgruppierungen erster Klasse führen:

$$\mu = \frac{2\sigma(\sigma-1)a}{3-2\sigma}, \quad \lambda = \frac{2\sigma(2-\sigma)a}{3-2\sigma}, \quad \nu = \frac{\sigma a}{\sigma - 1}$$

und damit $t = 3 - 2\sigma$, $s = 2\sigma(2-\sigma) - 1$. Die Hülle ist ein $(6+8+12)$-flächiges 2.24-Eck. Es sei z. B. $\sigma = \frac{5}{4}$, also $\tau = \frac{5}{3}$. Dann ist $\mu = \frac{5}{4}a$, $\lambda = \frac{15}{4}a$, $\nu = 5a$, $t = \frac{1}{2}$, $s = \frac{7}{8}$. Es ist also das Polyeder reziprok dem der ersten Gruppe, dessen Parameterwerte σ, τ der Gleichung der Kurve C_4 genügten. Für die A. V. des Deltoidikositetraeders, d. h. den Punkt V der Grenzkurve (vergl. Fig. 12 Taf. 7) mit den Koordinaten $\sigma = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, $\tau = 2\sqrt{2}-1$ ist $t = \sqrt{2}-1$, $s = 2(\sqrt{2}-1)$, d. h. $s = 2t$. Die Hülle ist also ein $(6+8)$-flächiges 8.3-Eck und zwar seine A. V. Bei dem diskontinuierlichen Polyeder, das von solchen zwölf „rhombischen" Sphenoiden gebildet wird, liegen also je zwei Flächen verschiedener Sphenoide in einer Ebene, nämlich in einer der 24 Ebenen des inneren Deltoidikositetraeders, während je zwei Ecken verschiedener Sphenoide in einer Ecke des umhüllenden $(6+8)$-flächigen 8.3-Ecks zusammenfallen, eine sechskantige Ecke zweiter Art bildend. Das Modell dieses Polyeders, dem wir bei Besprechung der zweiten Gruppe rhombischer Sphenoide wieder begegnen, zeigt Fig. 12 Taf. 23; die Fläche ist in Fig. 4 Taf. 7 gezeichnet.

Fragen wir allgemein nach denjenigen Sphenoidgruppierungen, deren Hülle ein 8.3-Eck ist, so folgt auch aus der Bedingung $s = 2t$ durch Einsetzen der allgemeinen Werte von s und t die Gleichung $\tau = 2\sigma(2-\sigma)$, d. h. die Gleichung der Kurve C_6. Für die Koordinaten der Ecken solcher Sphenoidgruppierungen gilt: $\mu = \frac{\sigma(3-2\sigma)a}{\sigma-1}$, $\lambda = \nu = \frac{\sigma a}{\sigma - 1}$ und damit $t = \frac{1}{5-2\sigma}$, $s = \frac{2}{5-2\sigma}$. Es sei z. B.: $\sigma = \frac{5}{4}$, $\tau = \frac{15}{8}$, d. h. der Kern eine besondere Varietät des Hexakisoktaeders, dessen σ, τ die Gleichung der Kurve C_6 befriedigen. Dann ist $\mu = \frac{5}{2}a$, $\nu = \lambda = 5a$, $t = \frac{2}{5}$, $s = \frac{4}{6}$, $(k_1 : k_3 = 1 : \sqrt{2})$, d. h. das Polyeder ist reziprok dem der ersten Gruppe, dessen Kern das Triakisoktaeder $\tau = \frac{5}{2}$, $\sigma = \frac{5}{4}$ ist. Es sind die Sphenoidgruppierungen der Kurve C_6 reziprok denen der ersten Gruppe vierter Klasse auf dem Teile MH der Triakisoktaedergeraden.

Wir betrachten nun das zweite Teilgebiet der Sphenoide der vierten Gruppe, für welches $\tau > 2\sigma(2-\sigma)$ ist. Es ist jetzt $[x] = \frac{2\sigma(\tau-\sigma)a}{2\sigma-\tau}$, $[y] = \frac{\sigma a}{\sigma - 1}$,

$[z]=\frac{2\sigma^2 a}{2\sigma-\tau}$. Dabei ist stets: $[x]<[z]$, $[y]<[z]$. Dann sind aber noch zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $[x]<[y]$ oder $[x]>[y]$ ist. Durch die Kurve $[x]=[y]$ oder $\frac{2(\tau-\sigma)}{2\sigma-\tau}=\frac{1}{\sigma-1}$, die Kurve C_7 in Fig. 12 Taf. 7, zerfällt das noch verfügbare Gebiet Rd, V, O wieder in zwei Teilgebiete. In dem ersteren, das von den Kurven C_6, C_3 und C_7 begrenzt wird, ist $[x]<[y]<[z]$, d. h.:

$$47)\qquad \mu=\frac{2\sigma(\tau-\sigma)a}{2\sigma-\tau},\quad \lambda=\frac{\sigma a}{\sigma-1},\quad \nu=\frac{2\sigma^2 a}{2\sigma-\tau},$$

während für das von den Kurven C_7, C_2, C_3 begrenzte letzte Gebiet $[y]<[x]<[z]$ ist, so dass

$$48)\qquad \mu=\frac{\sigma a}{\sigma-1},\quad \lambda=\frac{2\sigma(\tau-\sigma)a}{2\sigma-\tau},\quad \nu=\frac{2\sigma^2 a}{2\sigma-\tau}$$

wird. Wir betrachten zunächst die Polyeder für die Grenzkurve C_7. Die Gleichung dieser Kurve lässt sich schreiben:

$$\tau=\frac{2\sigma^2}{2\sigma-1}$$

und ihr Verlauf ist der in Fig. 12 Taf. 7 angedeutete. Denn für $\sigma=1$ ergibt sich $\tau=2$, d. h. der Rhombendodekaederpunkt; und der Schnittpunkt mit der Ikositetraederkurve ist $\sigma=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\tau=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$. Die durch diese Parameter definierte Sphenoidgruppierung ist a u t o p o l a r. Es gilt zunächst allgemein für die Polyeder der Kurve C_7: $\mu=\lambda=\frac{\sigma a}{\sigma-1}$, $\nu=\frac{\sigma^2 a}{(\tau-\sigma)(\sigma-1)}$, also $t=\frac{\sigma}{2\tau-\sigma}$, $s=\frac{\tau}{2\tau-\sigma}$, d. h. die Hüllpolyeder dieser Sphenoidgruppierungen sind $(6+8+12)$-flächige 24-Ecke. Für $\sigma=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\tau=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ ergibt sich nun: $t=2\sqrt{3}-3$, $s=\sqrt{3}-1$, d. h. die reziproken Werte der eben geschriebenen σ und τ. Dieses autopolare Polyeder ist der Grenzfall einer Reihe autopolarer Polyeder, die wir nachher zu besprechen haben. — Für ein weiteres Polyeder, dessen σ, τ die Gleichung der Kurve C_7 befriedigen, sei $\sigma=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, also $\tau=\frac{3\sqrt{2}+4}{4}$. Es wird für die Hülle $s=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $t=\sqrt{2}-1$. Wir betrachten nun das Gebiet zwischen den Kurven C_7, C_3, C_6 selbst. Für die Koordinaten der Hüllen der hierher gehörenden Sphenoidgruppierungen galten die Formeln 47) und die Ecken des ersten Sphenoids sind: 4 (1, 13, 38): $-\mu, -\lambda, \nu$; 46 (41, 13, 38): $\mu, -\lambda, -\nu$; 29 (1, 41, 13): $\nu, \lambda, -\mu$; 22 (1, 41, 38): $-\nu, \lambda, \mu$. Nach den Ecken gehören also diese Sphenoidkombinationen der vierten Gruppe zur zweiten Klasse. Es gilt für die Parameter der Hüllpolyeder:

$$49)\qquad \begin{cases} t = \dfrac{2\sigma(\sigma-1)}{2\sigma(\tau+1)-3\tau}, \\ s = \dfrac{2\sigma^2-\tau}{2\sigma(\tau+1)-3\tau}, \end{cases}$$

und für die Kanten hat man die Proportion:

$$50)\qquad k_1 : k_2 : k_3 = \frac{\tau-2\sigma(\tau-\sigma)}{2(\sigma-1)} : \frac{2\sigma(\sigma-1)-(2\sigma-\tau)}{2(\sigma-1)} : (\tau-\sigma)\sqrt{2}.$$

Es sei z. B. $\tau = 2$, $\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Dann ist $\mu = \frac{(5+3\sqrt{2})a}{2}$, $\lambda = (3+2\sqrt{2})a$, $\nu = \frac{(7+5\sqrt{2})a}{2}$, also $t = \frac{\sqrt{2}+1}{6}$, $s = \frac{3+\sqrt{2}}{6}$.

Ist der Kern der Sphenoidgruppierung ein Ikositetraeder, dessen σ und τ natürlich dem Teile UV der Kurve C_3 zugehören, so ist $\mu = \frac{2\sigma(\sigma-1)a}{3-2\sigma}$, $\lambda = \frac{\sigma a}{\sigma-1}$, $\nu = \frac{2\sigma(2-\sigma)a}{3-2\sigma}$ und damit $t = 2(2-\sigma)(\sigma-1)$, $s = 2\sigma(2-\sigma)-1$. Es sei z. B. $\tau = 2$, also $\sigma = \frac{4}{3}$. Dann ist $\mu = \frac{8}{3}a$, $\lambda = 4a$, $\nu = \frac{16}{3}a$, $t = \frac{4}{9}$, $s = \frac{7}{9}$.

Wir behandeln endlich die Sphenoide der vierten Gruppe, deren σ und τ dem letzten der Teilgebiete Rd, U, O zugehören, und für deren Hüllpolyeder die Koordinaten λ, μ, ν durch die Gleichungen 48) gegeben sind. Die Ecken des ersten Sphenoids sind dann: 5 (1, 13, 38): $-\lambda, -\mu, \nu$; 45 (41, 13, 38): $\lambda, -\mu, -\nu$; 30 (1, 41, 13): $\nu, \mu, -\lambda$; 21 (1, 41, 38); $-\nu, \mu, \lambda$; d. h. nach den Ecken gehören diese Sphenoide der vierten Gruppe zur vierten Klasse. Für die Parameter s und t der Hüllpolyeder findet man:

$$51)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{2\tau(\sigma-1)}{2\sigma(\tau+1)-3\tau}, \\ t = \dfrac{2\sigma(\sigma-1)}{2\sigma(\tau+1)-3\tau}, \end{cases}$$

und für die Kanten gilt jetzt die Proportion:

$$52)\qquad k_1 : k_2 : k_3 = \frac{2\sigma(\tau-\sigma)-\tau}{2\sigma-\tau} : 2(\sigma-1) : \sqrt{2}.$$

Da diese Polyeder zugleich der vierten Gruppe und vierten Klasse zugehören, so finden sich die polarreziproken Gruppierungen innerhalb dieses selben Gebietes. Wir fragen daher zunächst nach den autopolaren Polyedern. Für diese müssen die Bedingungen $t = \frac{\nu}{\lambda + \mu + \nu} = \frac{1}{\tau}$, $s = \frac{\lambda + \nu}{\lambda + \mu + \nu} = \frac{1}{\sigma}$ gelten. Aus beiden Gleichungen ergibt sich nach Einführung der λ, μ, ν für σ und τ die Relation:

$$2\sigma - \tau = 2\tau(\sigma - 1)^2.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch $\sigma = 1$, $\tau = 2$ und $\sigma = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\tau = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ und stellt also eine Kurve C_8 (vergl. Fig. 12 Taf. 7) innerhalb des Gebietes dar, die es in zwei Teilgebiete zerlegt. Die auf ihr liegenden Werte σ und τ definieren die autopolaren Polyeder, während die Sphenoidgruppierungen des einen Teilgebietes polarreziprok denen des anderen sind. Ein Beispiel für ein autopolares Polyeder, neben dem des bereits behandelten Grenzpunktes U, ergibt sich für $\sigma = \frac{4}{3}$, $\tau = \frac{24}{11}$. Es wird $\mu = 4a$, $\lambda = \frac{14}{3}a$, $\nu = \frac{22}{3}a$, $t = \frac{11}{24}$, $s = \frac{3}{4}$; $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 4 : 6\sqrt{2}$. Die Polyeder mit Ecken vierter Klasse, für welche der Kern ein Deltoidikositetraeder ist, dessen σ und τ also dem Teile UO der Kurve C_3 zugehören, sind reziprok zu solchen Polyedern, deren σ und τ der anderen Grenzkurve C_7 des Gebietes angehören. Es sei z. B. das Deltoidikositetraeder $\sigma = \sqrt{2}$, $\tau = \sqrt{2}+1$ gewählt. Dann ist $\mu = (2+\sqrt{2})a$, $\lambda = 2(2+\sqrt{2})a$, $\nu = 4(\sqrt{2}+1)a$ und $s = 2(\sqrt{2}-1)$, $t = \frac{3\sqrt{2}-4}{2}$. Das sind in der Tat die reziproken Werte von $\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, $\tau = \frac{3\sqrt{2}+4}{4}$. Überdies ist für dieses Polyeder bezw. seinen Hüllkörper: $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 2(\sqrt{2}-1) : \sqrt{2}$. Wir fragen nun zum Schlusse wieder nach den sekundären quadratischen Sphenoiden, die sich aus den rhombischen Sphenoiden der vierten Gruppe ergeben können. Es zeigt die durchgeführte Untersuchung, dass solche sekundäre quadratische Sphenoide nur für Werte σ, τ existieren, für welche die Polyeder nach den Ecken der ersten Klasse zugehören. Es sind dann die Quadrate der drei Kanten einer Grenzfläche:

$$\overline{17,34}^2 = 4\mu^2 + 4\lambda^2; \quad \overline{17,28}^2 = 2(\lambda+\mu)^2 + 4\nu^2; \quad \overline{28,34}^2 = 2(\lambda-\mu)^2 + 4\nu^2,$$

und eine zulässige Gleichung zwischen λ, μ, ν ergibt sich nur für $\overline{17,34}^2 = \overline{28,34}^2$, nämlich $\lambda + \mu = \nu\sqrt{2}$. Hieraus erhält man für σ und τ die Relation:

$$53)\qquad \tau = \frac{2\sigma\sqrt{2}}{2\sigma - 2 + \sqrt{2}}.$$

Für $\sigma = 1$ ist danach $\tau = 2$, für $\sigma = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ wird $\tau = 2\sqrt{2}-1$, d. h. die durch Gleichung 53) dargestellte Kurve C_9 (s. Fig. 12 Taf. 7) verläuft (wie eine genaue Diskussion zeigt) innerhalb des Gebietes Rd, H, V zwischen dem Rhombendodekaederpunkte Rd und dem Punkte V für die A. V. des Deltoidikositetraeders. Es sind die Gruppierungen sekundärer quadratischer Sphenoide, deren σ und τ dieser Kurve C_9 angehören, polarreziprok zu denjenigen Gruppierungen sekundärer quadratischer Sphenoide, deren σ und τ die Gleichung der Geraden C_5 in dem Gebiete der ersten Gruppe rhombischer Sphenoide befriedigen, und zwar entspricht der Punkt V der Kurve C_9 dem Punkte M jener Geraden.

10. **Die zweite Gruppe der rhombischen Sphenoide.** Das erste Sphenoid der Gruppierung wird von den Ebenen der Flächen 1), 23), 36), 45) des Hexakisoktaeders gebildet. Aus den Gleichungen von 1), 23), 36) findet man für den Schnittpunkt dieser Flächen:

$$x = -\frac{\sigma\tau a}{\tau - \sigma}, \quad y = -\frac{2\sigma\tau^2(\sigma-1)a}{\sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2}, \quad z = \frac{2\sigma^2\tau a}{\sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2}.$$

Vergleichen wir zunächst $[x]$ mit $[y]$. Es ist $[x] = [y]$, wenn

$$54)\qquad \sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2 = 2\tau(\sigma-1)(\tau-\sigma)$$

ist. Da für $\sigma = 1$ $\tau = \infty$ ist und für $\sigma = \frac{3}{2}$ $\tau = \frac{3(1+\sqrt{6})}{5}$, d. h. kleiner als 3 wird, so stellt Gleichung 54) eine Kurve C_{10} dar (vergl. Fig. 11 Taf. 7), die durch das Gebiet der konvexen Hexakisoktaeder läuft. Die Triakisoktaedergerade C_2 wird im Punkte V': $\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, $\tau = \sqrt{2}+1$ für die A. V. des Triakisoktaeders, geschnitten. Durch Einsetzung von $\sigma = \frac{2\tau}{\tau+1}$ findet man für den Schnittpunkt U' der Kurve C_{10} mit der Deltoidikositetraederkurve C_3

die Koordinaten $\tau = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} = 2,155..$, $\sigma = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1,366..$ Es wird also das Gebiet der konvexen Hexakisoktaeder durch C_{10} in zwei Teilgebiete zerlegt; in dem Gebiete $RdHU'V'$ ist $[x] > [y]$, d. h. $\sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2 > 2\tau(\sigma-1)(\tau-\sigma)$; in dem Gebiete $U'V'O$ ist $[x] < [y]$, d. h. $\sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2 < 2\tau(\sigma-1)(\tau-\sigma)$, während auf der Kurve C_{10} die Gleichung 54) besteht und $[x] = [y]$ ist. Vergleichen wir nun $[x]$ mit $[z]$. Es ist $[z] = [x]$, wenn

55) $$2\sigma(\tau-\sigma) = \sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2$$

ist. Dies ist die Gleichung einer Kurve C_{11} (Fig. 11 Taf. 7). Für $\sigma = 1$ ist $\tau = \frac{3}{2}$ (ein bestimmtes Tetrakishexaeder); für $\sigma = \frac{3}{2}$ ist $\tau = 3\sqrt{7} - 6 = 1,938..$ d. h. die Kurve C_{11} durchquert das Gebiet der konvexen Hexakisoktaeder, und zwar schneidet sie die Kurve C_3 im Punkte $\tau = 2\sqrt{2} - 1$ für die A. V. des Deltoidikositetraeders. Es zerfällt also durch C_{11} das obengenannte erste Gebiet $RdHU'V'$ in die zwei Teilgebiete RHM' und $RRdV'U'M'$. Im Gebiete RHM' ist $2\sigma(\tau-\sigma) < \sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2$, d. h. $[z] < [x]$; in den Gebieten $RRdV'U'M'$ und $U'V'O$ ist $2\sigma(\tau-\sigma) > \sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2$, d. h. $[z] > [x]$, während für die Kurve C_{11} $[z] = [x]$ ist. Vergleicht man endlich $[y]$ und $[z]$, so findet man, dass für alle Werte innerhalb der drei Gebiete $[z] > [y]$ ist, da stets $\tau < \frac{\sigma}{\sigma-1}$ ist für alle konvexen Hexakisoktaeder. Das Ergebnis der Gesamtuntersuchung ist also, dass die Sphenoidkombinationen der zweiten Gruppe nach den Ecken drei verschiedenen Klassen zugehören, die der Reihe nach zu diskutieren sind. Wir beginnen mit den Sphenoidgruppierungen des Gebietes $RRdV'U'M'$. Hier ist $x = -\lambda$, $y = -\mu$, $z = \nu$ für die von den Flächen 1), 23), 36) gebildete Ecke, d. i. die Ecke 5). Die drei übrigen Ecken des ersten Sphenoids sind also: 41 (45, 23, 36): $-\lambda, \mu, -\nu$; 15 (1, 45, 36): $\lambda, -\nu, \mu$; 28 (1, 45, 23): $\lambda, \nu, -\mu$; d. h. nach den Ecken gehören diese Sphenoidgruppierungen zur zweiten Klasse. Da $\mu = \frac{2\sigma\tau^2(\sigma-1)a}{\sigma^2-\tau^2(\sigma-1)^2}$, $\lambda = \frac{\sigma\tau a}{\tau-\sigma}$, $\nu = \frac{2\sigma^2\tau a}{\sigma^2-\tau^2(\sigma-1)^2}$, so ist:

56) $$\begin{cases} t = \dfrac{2\sigma(\tau-\sigma)}{(\tau\sigma+\sigma-\tau)(3\tau-\sigma-\sigma\tau)}, \\ s = \dfrac{2\sigma(\tau-\sigma)+\sigma^2-\tau^2(\sigma-1)^2}{(\tau\sigma+\sigma-\tau)(3\tau-\sigma-\sigma\tau)}. \end{cases}$$

Für die Kanten der Hüllpolyeder hat man die Proportion:

$$57)\quad \begin{cases} k_1 : k_2 : k_3 = [\sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2 - 2\tau(\sigma-1)(\tau-\sigma)] \\ \qquad : [2\sigma(\tau-\sigma) - \sigma^2 + \tau^2(\sigma-1)^2] : 2\tau(\sigma-1)(\tau-\sigma)\sqrt{2}. \end{cases}$$

Als Beispiele von Polyedern, die diesem Gebiete der zweiten Gruppe angehören, seien die folgenden gewählt. Der Kern des Polyeders sei die A. V. des Hexakisoktaeders. Für $\sigma = \frac{3(4+\sqrt{2})}{14}$, $\tau = \frac{3(3+\sqrt{2})}{7}$ ist $\lambda = 3a$ $\mu = \frac{3a}{4}\sqrt{2}$, $\nu = \frac{3(4+\sqrt{2})a}{4}$ und damit $t = \frac{1}{2}$, $s = \frac{15-2\sqrt{2}}{14}$. $k_1 : k_2 : k_3 = (2\sqrt{2}-1) : 1 : \sqrt{2}$. Die Fläche des Polyeders ist das Dreieck $K_1K_2K_3$ in der vollständigen Figur des Hexakisoktaeders, Fig. 1 Taf. 5. Nehmen wir die reziproken Werte von s und t des ebengenannten Polyeders, nämlich $\sigma = \frac{2(15+2\sqrt{2})}{31}$, $\tau = 2$, die ebenfalls der Bedingung zwischen σ und τ für das Gebiet genügen, so finden wir für das Hüllpolyeder $\lambda = \frac{4+\sqrt{2}}{2}a$, $\mu = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}a$, $\nu = \frac{10-\sqrt{2}}{2}a$ und damit $t = \frac{3-\sqrt{2}}{3}$, $s = \frac{4-\sqrt{2}}{3}$, d. h. die Hülle ist die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks. Dieses Polyeder, dessen Modell Fig. 10 Taf. 23 zeigt, und dessen Fläche in Fig. 2 Taf. 7 gezeichnet vorliegt, ist polarreziprok dem vorigen. Es gilt der Satz: *Die Sphenoidgruppierungen mit Ecken zweiter Klasse des Gebietes $RRdV'U'M'$ sind polarreziprok zu Polyedern desselben Gebietes.* Um diese Zuordnung klarzulegen, suchen wir die *autopolaren* Polyeder des Gebietes auf. Für sie ist $t = \frac{1}{\tau}$, $s = \frac{1}{\sigma}$. Man findet dann aus $\lambda + \mu + \nu = \sigma(\nu + \lambda)$ die Bedingung

$$58)\qquad \sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2 = 2(\tau-\sigma)^2.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve C_{12} (Fig. 11 Taf. 7) läuft zwischen den Punkten $\sigma = 1$, $\tau = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (d. i. ein bestimmtes Tetrakishexaeder) und $\sigma = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\tau = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ (d. i. das Deltoidikositetraeder des Punktes U'). Durch diese Kurve C_{12} wird das Gebiet der Polyeder zweiter Klasse in zwei Teilgebiete zerlegt und *die Polyeder des einen Teilgebietes sind polarreziprok den Polyedern des anderen.* In der Tat liegen die Werte der σ und τ der beiden oben angegebenen polarreziproken

Gruppierungen auf verschiedenen Seiten der Kurve C_{12}. Es existiert also eine einfach-unendliche Schar autopolarer diskontinuierlicher Polyeder des Hexakisoktaedertypus, aus zwölf rhombischen Sphenoiden bestehend, deren Kern ein Hexakisoktaeder, deren Hülle ein $(6+8+12)$-flächiges $2 . 24$-Eck ist. Dazu kommt ein diskontinuierliches Polyeder, dessen Kern ein Deltoidikositetraeder ist, das wir später betrachten werden. Bei Befriedigung der Bedingung 58) ist $\mu=\frac{\sigma\tau^2(\sigma-1)a}{(\tau-\sigma)^2}$, $\lambda=\frac{\sigma\tau a}{\tau-\sigma}$, $\nu=\frac{\sigma^2\tau a}{(\tau-\sigma)^2}$. Die Einsetzung dieser Werte in $t=\frac{\nu}{\lambda+\mu+\nu}$ und $s=\frac{\nu+\lambda}{\lambda+\mu+\nu}$ ergibt natürlich $t=\frac{1}{\tau}$ und $s=\frac{1}{\sigma}$. Für die Kanten der Hüllen dieser autopolaren Sphenoidgruppierungen ist: $k_1:k_2:k_3=[\tau(2-\sigma)-\sigma]:(2\sigma-\tau):\tau(\sigma-1)\sqrt{2}$. — Wir untersuchen nun die Polyeder zweiter Klasse, deren Kerne bezw. Hüllen spezielle Polyeder des Typus sind.

Der Kern sei zunächst ein Ikositetraeder. Für $\sigma=\frac{2\tau}{\tau+1}$ nehmen die allgemeinen Werte die speziellere Form an: $\mu=\frac{4\tau(\tau-1)a}{(\tau+1)(3-\tau)}$, $\lambda=\frac{2\tau a}{\tau-1}$, $\nu=\frac{8\tau a}{(\tau+1)(3-\tau)}$, so dass $t=\frac{4(\tau-1)}{(\tau+1)^2}$, $s=\frac{\tau(6-\tau)-1}{(\tau+1)^2}$ und $k_1:k_2:k_3=[3\tau(2-\tau)+1]:[\tau(\tau+2)-7]:2(\tau-1)^2\sqrt{2}$ wird. Sind die Kerne der Polyeder Deltoidikositetraeder, so sind also die Hüllen im allgemeinen $(6+8+12)$-flächige 2.24-Ecke. Es sei als Beispiel für σ und τ das Wertsystem $\sigma=\frac{4}{3}$, $\tau=2$ gewählt, das dem Stück $M'U'$ der Kurve C_3 angehört. Es wird $\lambda=4a$, $\mu=\frac{8}{3}a$, $\nu=\frac{16}{3}a$, $t=\frac{4}{9}$, $s=\frac{7}{9}$; $k_1:k_2:k_3=1:1:2\sqrt{2}$. Das Hüllpolyeder ist danach ein 2.24-Eck, dessen sechseckige Grenzflächen regulär sind. Das Modell dieser Sphenoidgruppierung zeigt Fig. 9 Taf. 22; die Grenzfläche ist in Fig. 1 Taf. 7 dargestellt und besteht also gewissermassen aus zwei, ein diskontinuierliches Sechseck bildenden Dreiecken. Als weitere Beispiele werden die angeführt, für welche die Werte σ und τ die Grenzwerte der Ikositetraederkurve in den Punkten U' und M' sind. Zunächst ist also $\sigma=\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, $\tau=2\sqrt{2}-1$ zu setzen, wenn der Kern des Polyeders die A. V. des Ikositetraeders ist. Hier wird $\mu=(2\sqrt{2}-1)a$, $\lambda=\nu=(3+\sqrt{2})a$, $t=\sqrt{2}-1$, $s=2(\sqrt{2}-1)$, $k_3=k_1$, $k_2=0$. Die Hülle des diskontinuierlichen Polyeders ist also die A. V. des $(6+8)$-flächigen 8.3-Ecks. Je zwei Flächen von zwei verschiedenen der zwölf Sphenoide fallen in eine Ebene; in jeder Ecke des Hüllpolyeders fallen zwei Ecken verschiedener Sphenoide zusammen. Das Modell dieses diskontinuierlichen Polyeders zeigt Fig. 12 Taf. 23; die Fläche ist Fig. 4 Taf. 7. Wir waren diesem Polyeder schon in der vierten Gruppe rhombischer Sphenoide begegnet, wofür sich der Grund sofort zeigen wird. — Für den zweiten Grenzwert, nämlich $\sigma = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\tau = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ des Punktes U' wird $\lambda = \mu = (2+\sqrt{3})a$, $\nu = (3+2\sqrt{3})a$, $t = 2\sqrt{3}-3$, $s = \sqrt{3}-1$, d. h. das Polyeder ist autopolar, wie denn in der Tat die Werte σ, τ der Gleichung der Kurve C_{10} genügen. Für die Kanten des Hüllpolyeders, ein $(6+8+12)$-flächiges 24-Eck gilt $k_2 : k_3 = 1 : \frac{\sqrt{3}+1}{2}\sqrt{2}$. Je zwei Flächen des diskontinuierlichen Polyeders liegen in einer Ebene des inneren Deltoidikositetraeders, je zwei Ecken zweier verschiedener der zwölf Sphenoide fallen in einer Ecke des Hüllpolyeders zusammen, gewissermassen eine sechskantige Ecke zweiter Art bildend, wie Fig. 8 Taf. 7 zeigt, bei der zwei Seitenflächen in einer Ebene liegen. Das Modell dieses autopolaren Polyeders zeigt Fig. 7 Taf. 23; die Fläche ist in Fig. 7 Taf. 5 gezeichnet.

Suchen wir nun ganz allgemein diejenigen Sphenoidgruppierungen, deren Hülle ein $(6+8+12)$-flächiges 24-Eck ist, so ergibt die Bedingung $\lambda = \mu$ für σ und τ wieder die Gleichung der Kurve C_{10}. Für diese einfach-unendliche Schar von Polyedern gilt $\mu = \lambda = \frac{\sigma\tau a}{\tau-\sigma}$, $\nu = \frac{\sigma^2 a}{(\sigma-1)(\tau-\sigma)}$, $t = \frac{\sigma}{2\tau(\sigma-1)+\sigma}$, $s = \frac{\tau(\sigma-1)+\sigma}{2\tau(\sigma-1)+\sigma}$, $k_2 : k_3 = [\sigma - \tau(\sigma-1)] : \tau(\sigma-1)\sqrt{2}$.

Die von diesen Sphenoiden gebildeten diskontinuierlichen Polyeder sind polarreziprok mit den vorhin behandelten Polyedern zweiter Klasse, deren innerer Kern ein Deltoidikositetraeder war, denn erstens erfüllen die obigen Werte s und t die Gleichung $t = 2s-1$, und zweitens erfüllen die Werte s und t jener Polyeder, nämlich die Werte $t = \frac{4(\tau-1)}{(\tau+1)^2}$, $s = \frac{\tau(6-\tau)-1}{(\tau+1)^2}$ die Gleichung, die sich aus $\sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2 = 2\tau(\sigma-1)(\tau-\sigma)$ ergibt, wenn $\sigma = \frac{1}{s}$, $\tau = \frac{1}{s}$ gesetzt wird, nämlich die Bedingung

$$t^2 + (1-s)^2 = 2(1-s)(s-t).$$

Es sind also die Polyeder der Kurve C_{10} und der Deltoidikositetraederkurve $M'U'$ polarreziprok. Für den Schnittpunkt U'

beider Kurven ergibt sich natürlich das schon behandelte autopolare Polyeder. — Ein Polyeder, dessen innerer Kern Werte σ, τ der Kurve C_{10} hat, ist das zu dem früher behandelten, für welches $\sigma = \frac{4}{3}$, $\tau = 2$ war, reziproke für $\sigma = \frac{9}{7}$, $\tau = \frac{9}{4}$. Es wird dann $\mu = \lambda = 3a$, $\nu = 6a$, $t = \frac{1}{2}$, $s = \frac{3}{4}$, $k_2 : k_3 = 1 : \sqrt{2}$. Das Modell dieses Polyeders zeigt Fig. 15 Taf. 22; die Fläche ist in Fig. 8 Taf. 6 dargestellt. Die Ecken, in denen je zwei Ecken verschiedener Sphenoide liegen, sind gewissermassen sechskantig von der zweiten Art und haben den Querschnitt Fig. 7 Taf. 7. — Der Gleichung der Kurve C_{10} genügt aber auch $\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, $\tau = \sqrt{2}+1$; in diesem Falle ist also der Kern der Sphenoidgruppierung die A. V. des Triakisoktaeders. Es ist dann: $\mu = \lambda = (\sqrt{2}+1)a$, $\nu = (\sqrt{2}+1)^2 a$, $t = \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$, $s = \frac{4+\sqrt{2}}{7}$; d. h. die Hülle des Polyeders ist die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen 24-Ecks. Dieses Polyeder ist also polarreziprok dem schon wiederholt erwähnten. Es ist im Modell in Fig. 8 Taf. 22 dargestellt; seine Fläche zeigt Fig. 2 Taf. 5. Das Polyeder gehört zugleich der ersten Gruppe rhombischer Sphenoide an, und ist also als solches reziprok zu dem genannten anderen, das zugleich der vierten Gruppe rhombischer Sphenoide angehört.

Fragen wir nach den Sphenoidgruppierungen, deren Kern ein Triakisoktaeder ist, soweit sie nach den Ecken zur zweiten Klasse gehören, so haben wir in den allgemeinen Formeln der Gruppe $\tau = 2\sigma$ zu setzen. Dann kommt: $\mu = \frac{8\sigma(\sigma-1)a}{1-4(\sigma-1)^2}$, $\lambda = 2\sigma a$, $\nu = \frac{4\sigma a}{1-4(\sigma-1)^2}$, also $t = \frac{2}{(2\sigma-1(5-2\sigma)}$, $s = \frac{3-4(\sigma-1)^2}{(2\sigma-1)(5-2\sigma)}$ und für die Kanten des Hüllpolyeders ergibt sich die Proportion: $k_1 : k_2 : k_3 = [1-4\sigma(\sigma-1)] : [1+4(\sigma-1)^2] : 4(\sigma-1)\sqrt{2}$. Es sind also die Hüllpolyeder im allgemeinen $(6+8+12)$-flächige 2.24-Ecke. Für $\sigma = \frac{11}{10}$ z. B. ist $\mu = \frac{11}{12}a$, $\lambda = \frac{11}{5}a$, $\nu = \frac{55}{12}a$, $t = \frac{25}{42}$, $s = \frac{37}{42}$ und $k_1 : k_2 : k_3 = 7 : 13 : 5\sqrt{2}$. Für die A. V. des Triakisoktaeders ergibt sich das bereits behandelte Polyeder, dessen Hülle die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen 24-Ecks ist.

Wir bestimmen endlich diejenigen Gruppierungen, deren Hülle ein 8.3-Eck ist. Dann ist $\lambda = \nu$ und die σ und τ sind die der Kurve C_{11}. Es wird dann $\lambda = \nu = \frac{\sigma\tau a}{\tau-\sigma}$, $\mu = \frac{\tau^2(\sigma-1)a}{\tau-\sigma}$ und damit $t = \frac{\sigma}{2\sigma+\tau(\sigma-1)}$, $s = \frac{2\sigma}{2\sigma+\tau(\sigma-1)}$.

Für die beiden Kanten des 8.3-Ecks gilt: $k_1 : k_3 = [\sigma - \tau(\sigma-1)] : \tau(\sigma-1)\sqrt{2}$. Es sei z. B. $\sigma = \frac{42}{37}$, $\tau = \frac{42}{25}$, Werte, die der Bedingung 55) genügen. Dann ist $\lambda = \nu = \frac{7}{2}a$, $\mu = \frac{7}{10}a$, $t = \frac{5}{11}$, $s = \frac{10}{11}$, d. h. dieses Polyeder ist polarreziprok dem vorhin behandelten. Es gilt der Satz: Die Polyeder aus rhombischen Sphenoiden der zweiten Gruppe, deren Kern die Triakisoktaeder von *Rd* bis *V'* sind, sind polarreziprok denen, für die die Werte σ, τ des Kernpolyeders der Kurve C_{11} angehören; die A. V. des Deltoidikositetraeders und des Triakisoktaeders als Kerne gehören polaren Polyedern zu, während für die anderen Grenzpunkte der beiden Kurven, die in die Gerade $\sigma = 1$ fallen $\left(\tau = 2 \text{ bezw. } \frac{3}{2}\right)$ die Sphenoidgruppierungen zu den quadratischen der zweiten Gruppe gehören, die sich für das Tetrakishexaeder als Kern ergeben hatten. Hiermit sind sämtliche Kombinationen der vierten Gruppe zweiter Klasse erledigt. Wir fragen nun bereits hier nach den Bedingungen, unter denen die rhombischen Sphenoide in sekundäre quadratische übergehen. Es sind die Quadrate der drei Kanten einer Grenzfläche: $\overline{5,41}^2 = 4\mu^2 + 4\nu^2$; $\overline{5,15}^2 = 4\lambda^2 + 2(\nu-\mu)^2$; $\overline{41,15}^2 = 4\lambda^2 + 2(\nu+\mu)^2$. Für $\mu = 0$ ist $\overline{5,15}^2 = \overline{41,15}^2 = 4\lambda^2 + 2\nu^2$. Diese quadratischen Sphenoide sind die stets quadratischen der zweiten Gruppe für $\sigma = 1$. Untersuchen wir nun die beiden anderen möglichen Fälle. Aus $\overline{5,41}^2 = \overline{5,15}^2$ folgt $\nu + \mu = \lambda\sqrt{2}$. Dies gibt für σ, τ die Relation: $(\tau-\sigma)\sqrt{2} = \sigma - \tau(\sigma-1)$, d. h. $\tau = \frac{\sigma(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-1+\sigma}$. Es ist dies die Gleichung einer Kurve C_{13} (vergl. Fig. 11 Taf. 7) zwischen dem Punkte S $\left[\sigma = 1,\ \tau = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$ und M' $\left[\sigma = \frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},\ \tau = 2\sqrt{2}-1\right]$, die im Gebiete der Gruppierungen zweiter Klasse zwischen den genannten Punkten verläuft. Für die Sphenoidgruppierungen dieser Reihe nehmen die Parameter t und s des Hüllpolyeders die einfachere Form an: $t = \frac{\sigma(2-\sqrt{2})}{\tau\sigma + \sigma - \tau}$, $s = \frac{\sigma + \tau(\sigma-1)(\sqrt{2}-1)}{\tau\sigma + \sigma - \tau}$, worin noch τ mittels der obigen Relation eliminiert werden kann. Es sei ferner $\overline{5,41}^2 = \overline{41,15}^2$. Dann ist $\nu - \mu = \lambda\sqrt{2}$. Dies gibt für σ und τ die Bedingungsgleichung: $\sigma - \sigma\tau + \tau = (\tau-\sigma)\sqrt{2}$, d. h. $\tau = \frac{\sigma(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1-\sigma}$. Die Gleichung ist die einer Kurve C_{14} (Fig. 11 Taf. 7) zwischen dem Punkte S und dem Punkte V' $\left[\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2},\ \tau = \sqrt{2}+1\right]$ für die A. V. des Triakisoktaeders.

Für die Werte s und t der Hüllpolyeder der Sphenoidgruppierungen dieser Reihe ergibt sich: $s = \frac{\sigma(\sqrt{2}+1)-\tau(\sigma-1)}{3\tau-\sigma-\sigma\tau}$, $t = \frac{\sigma\sqrt{2}}{3\tau-\sigma-\sigma\tau}$. Wir haben also das Ergebnis: Es gibt innerhalb des Gebietes der Sphenoide zweiter Gruppe zweiter Klasse zwei einfach unendliche Wertreihen der σ und τ, für welche die rhombischen Sphenoide zu sekundären quadratischen werden. Die Polyeder, deren σ und τ den Kurven C_{13} bezw. C_{14} zugehören, sind polarreziprok. Für den gemeinsamen Punkt beider Kurven $\sigma = 1$, $\tau = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ werden die Sphenoide zu Tetraedern. Das ist aber das bereits behandelte autopolare System von sechs Tetraedern, den quadratischen Sphenoiden der zweiten Gruppe angehörend.

Wir wenden uns nun zu den rhombischen Sphenoiden der zweiten Gruppe des Gebietes $V'U'O$. Jetzt ist $x = -\mu$, $y = -\lambda$, $z = \nu$, wobei $\mu = \frac{\sigma\tau a}{\tau-\sigma}$, $\lambda = \frac{2\sigma\tau^2(\sigma-1)a}{\sigma^2-\tau^2(\sigma-1)^2}$, $\nu = \frac{2\sigma^2\tau a}{\sigma^2-\tau^2(\sigma-1)^2}$ ist. Die Ecken des ersten Sphenoides der Gruppierung sind: 4 (1, 23, 36): $-\mu, -\lambda, \nu$; 42 (45, 23, 36): $-\mu, \lambda, -\nu$; 16 (1, 45, 36): $\mu, -\nu, \lambda$; 27 (1, 45, 23): $\mu, \nu, -\lambda$; d. h. die diskontinuierlichen Polyeder gehören nach ihren Ecken zur vierten Klasse. Die Parameter t und s des Hüllpolyeders werden:

$$59)\qquad \begin{cases} t = \dfrac{2\sigma(\tau-\sigma)}{(\tau\sigma+\sigma-\tau)(3\tau-\sigma-\sigma\tau)}, \\ s = \dfrac{2(\tau-\sigma)}{3\tau-\sigma-\tau\sigma}, \end{cases}$$

und für die Kanten des umhüllenden $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks erhält man die Proportion:

$$60)\qquad \begin{aligned} k_1 : k_2 : k_3 = {} & [2\tau(\sigma-1)(\tau-\sigma)-\sigma^2+\tau^2(\sigma-1)^2] \\ & : 2(\sigma-\tau\sigma+\tau)(\tau-\sigma) : [\sigma^2-\tau^2(\sigma-1)^2]\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Es sei z. B. $\tau = 6(\sqrt{2}-1)$, $\sigma = \frac{6(3-\sqrt{2})}{7}$. Dann ist $s = 2(\sqrt{2}-1)$, $t = \frac{1}{2}$, d. h. das diskontinuierliche Polyeder ist reziprok der in der vierten Gruppe zweiter Klasse angeführten Sphenoidkombination. — Ist der Kern der Sphenoidgruppierung ein Triakisoktaeder, natürlich nur für Werte σ, τ der Strecke $V'O$ der Geraden C_2, so ist: $\mu = 2\sigma a$, $\lambda = \frac{8\sigma(\sigma-1)a}{1-4(\sigma-1)^2}$, $\nu = \frac{4\sigma a}{1-4(\sigma-1)^2}$

und damit $t = \frac{2}{(2\sigma-1)(5-2\sigma)}$, $s = \frac{2}{5-2\sigma}$, so dass für die Kanten der Hüllpolyeder sich die Proportion $k_1 : k_2 : k_3 = [4\sigma(\sigma-1)-1] : 2(3-2\sigma) : [1-4(\sigma-1)^2]\sqrt{2}$ ergibt. Also ist auch hier die Hülle ein $(6+8+12)$-flächiges 2.24-Eck. Diese Sphenoidgruppierungen sind polarreziprok zu den Polyedern der vierten Gruppe, deren Werte σ und τ die Gleichung der Kurve C_6 befriedigen. Sie fallen zusammen mit Polyedern der ersten Gruppe der Strecke MH der Triakisoktaedergeraden. Es sei z. B. $\sigma = \frac{5}{4}$, $\tau = \frac{5}{2}$; dann ist $\mu = \frac{5}{2}a$, $\lambda = \frac{10}{3}a$, $\nu = \frac{20}{3}a$, $t = \frac{8}{15}$, $s = \frac{4}{5}$; $k_1 : k_2 : k_3 = 1:4:3\sqrt{2}$. Je zwei Flächen verschiedener Sphenoide liegen natürlich in einer Ebene. Dieses Polyeder zeigt Fig. 11 Taf. 23; die Fläche ist Fig. 15 Taf. 6; es ist reziprok dem beschriebenen der Gruppe 4 auf der Kurve C_6. Ist der Kern der Gruppierung ein Deltoidikositetraeder des Stückes $U'O$ der Kurve C_3, so ist $\mu = \frac{2\tau a}{\tau-1}$, $\lambda = \frac{4\tau(\tau-1)a}{4-(\tau-1)^2}$, $\nu = \frac{8\tau a}{4-(\tau-1)^2}$ und $s = \frac{2(\tau-1)}{\tau+1}$, $t = \frac{4(\tau-1)}{(\tau+1)^2}$. Es sei z. B. $\sigma = \sqrt{2}$, $\tau = \sqrt{2}+1$. Dann ist $s = \frac{2}{\sqrt{2}+1}$, $t = \frac{4}{3\sqrt{2}+4}$, d. h. das Polyeder ist reziprok dem der vierten Gruppe zweiter Klasse, dessen σ, τ auf der Kurve C_7 liegt. Die Polyeder der zweiten Gruppe endlich, deren σ und τ die Gleichung der Kurve $V'U' \equiv C_{10}$ befriedigen, deren Hülle also ein 24-Eck ist, sind polarreziprok denen der Ikositetraederkurve im Gebiete der vierten Gruppe zweiter Klasse, denn für $\tau = \frac{9}{4}$, $\sigma = \frac{9}{7}$ ergibt sich für die Hülle $t = \frac{1}{2}$, $s = \frac{3}{4}$, d. h. die reziproken Werte von σ und τ des dort angeführten Polyeders.

Wir betrachten endlich das Gebiet $RM'H$ der Sphenoide der zweiten Gruppe. Hier ist $[y] < [z] < [x]$ und für die Kurve C_{11} gilt $[z] = [x]$. Es sind also jetzt die Ecken des ersten Sphenoids der Gruppierung: 20 (1, 23, 36): $-\nu, -\mu, \lambda$; 39 (45, 23, 36): $-\nu, \mu, -\lambda$; 14 (1, 45, 36): $\nu, -\lambda, \mu$; 29 (1, 45, 23): $\nu, \lambda, -\mu$; d. h. nach den Ecken haben wir Gruppierungen erster Klasse vor uns. Es ist $\mu = \frac{2\sigma\tau^2(\sigma-1)a}{\sigma^2-\tau^2(\sigma-1)^2}$, $\lambda = \frac{2\sigma^2\tau a}{\sigma^2-\tau^2(\sigma-1)^2}$, $\nu = \frac{\sigma\tau a}{\tau-\sigma}$, und damit

$$61)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{2\sigma(\tau-\sigma)+\sigma^2-\tau^2(\sigma-1)^2}{(\tau\sigma+\sigma-\tau)(3\tau-\sigma-\sigma\tau)}, \\ t = \dfrac{\sigma-\tau(\sigma-1)}{3\tau-\sigma-\tau\sigma}, \end{cases}$$

wonach:

$$62)\quad k_1 : k_2 : k_3 = (\sigma + \tau - \sigma\tau) : \frac{\sigma^2 - \tau^2(\sigma-1)^2 - 2\sigma(\tau-\sigma)}{2(\tau-\sigma)} : (\sigma - 1)\sqrt{2}$$

ist. Es sei z. B. $\sigma = \frac{29}{25}$, $\tau = \frac{29}{18}$. Dann ist $s = \frac{10}{11}$, $t = \frac{1}{2}$, d. h. dieses Polyeder ist reziprok dem der ersten Gruppe rhombischer Sphenoide, das der zweiten Klasse angehörte, für welches $\sigma = \frac{10}{11}$, $\tau = 2$ war. Die Polyeder der Grenzkurve C_{11} sind schon besprochen. Ist endlich der Kern der Sphenoidgruppierung ein Deltoidikositetraeder des Teiles HM' der Kurve C_3, so ist $s = \frac{6\tau - \tau^2 - 1}{(\tau+1)^2}$, $t = \frac{3-\tau}{\tau+1}$. Ist z. B. $\sigma = \frac{5}{4}$, $\tau = \frac{5}{3}$, so kommt $t = \frac{1}{2}$, $s = \frac{7}{8}$ und das Polyeder ist reziprok dem angeführten der Grenzkurve C_4 der ersten Gruppe zweiter Klasse rhombischer Sphenoide. Hiermit sind alle Sphenoidkombinationen der zweiten Gruppe erledigt, und es sei nur noch bemerkt, dass sekundäre quadratische Sphenoide unter den Polyedern erster und vierter Klasse der zweiten Gruppe nicht existieren, soweit sie nicht als Grenzfälle der Gruppierungen der zweiten Klasse zugehören.

11. **Die dritte Gruppe der rhombischen Sphenoide.** Das erste Sphenoid der dritten Gruppe wird von den Ebenen 1), 5), 41), 45) des Hexakisoktaeders gebildet und der Schnittpunkt von 1), 5), 41) hat die Koordinaten $x = -\frac{\sigma\tau a}{\tau-\sigma}$, $y = \frac{\sigma a}{\sigma-1}$, $z = \tau a$. Für alle Werte von σ und τ, die konvexen Hexakisoktaedern zugehören, ist dann $[z] < [x] < [y]$, denn es wird $[z] = [x]$ für $\tau = 2\sigma$ und $[x] = [y]$ für $\sigma = \frac{2\tau}{\tau+1}$. Danach haben wir $\mu = \tau a$, $\lambda = \frac{\sigma\tau a}{\tau-\sigma}$, $\nu = \frac{\sigma a}{\sigma-1}$ zu setzen. Die Ecken des von den oben genannten vier Ebenen gebildeten ersten Sphenoids sind: 23 (1, 5, 41): $-\lambda, \nu, \mu$; 15 (1, 5, 45): $\lambda, -\nu, \mu$; 28 (1, 41, 45); $\lambda, \nu, -\mu$; 36 (5, 41, 45): $-\lambda, -\nu, -\mu$; d. h. wir haben nach den Ecken nur Sphenoidgruppierungen der dritten Klasse. Für die Parameter des $(6+8+12)$-flächigen $2 \cdot 24$-eckigen Hüllpolyeders findet man damit:

$$63)\quad \begin{cases} s = \dfrac{\sigma^2(\tau-1)}{\tau^2(\sigma-1) + \sigma(\tau-\sigma)}, \\ t = \dfrac{\sigma(\tau-\sigma)}{\tau^2(\sigma-1) + \sigma(\tau-\sigma)}, \end{cases}$$

und für ihre Kanten:

64) $k_1 : k_2 : k_3 = \tau(\sigma-1)(2\sigma-\tau) : \sigma(2\tau-\sigma-\sigma\tau) : \tau(\sigma-1)(\tau-\sigma)\sqrt{2}$.

Fragen wir nun zunächst nach den autopolaren Polyedern der Gruppe. Für sie ist $s = \frac{1}{\sigma}$, $t = \frac{1}{\tau}$ und es ergibt sich als Bedingung der Autopolarität:

65) $$\sigma^2(\tau-1) = \tau(\tau-\sigma).$$

Diese Gleichung ist die einer Kurve C_{15} (s. Fig. 13 Taf. 7) zwischen den Punkten $\sigma = 1$, $\tau = 1$ und $\sigma = \frac{3}{2}$, $\tau = 3$, die also das Gebiet der konvexen Hexakisoktaeder in zwei Teilgebiete zerlegt. Die Polyeder des einen Teilgebietes sind polarreziprok denen des anderen. Für das Gebiet *RdHO* ist $\sigma^2(\tau-1) < \tau(\tau-\sigma)$, für das andere Gebiet, zwischen den Kurven C_3 und C_{15} ist $\sigma^2(\tau-1) > \tau(\tau-\sigma)$. Es sei z. B. der Kern der Gruppierung die A. V. des Hexakisoktaeders, d. h. $\sigma = \frac{3(4+\sqrt{2})}{14}$, $\tau = \frac{3(3+\sqrt{2})}{7}$, Werte, die in das Gebiet *RdHO* gehören. Dann ist $\mu = \frac{3(3+\sqrt{2})a}{7}$, $\lambda = 3a$, $\nu = 3(\sqrt{2}+1)a$, $s = \frac{18+\sqrt{2}}{23}$, $t = \frac{9\sqrt{2}+1}{23}$, $k_1 : k_2 : k_3 = (\sqrt{2}-1) : (3-\sqrt{2}) : 1$. Dieses Polyeder ist im Modell dargestellt Fig. 14 Taf. 22; die Zeichnung der Grenzfläche ist Fig. 5 Taf. 7. Das ihm polare Polyeder gehört dem anderen Gebiete dieser selben dritten Gruppe an. Setzt man nämlich $\sigma = \frac{23}{18+\sqrt{2}} = \frac{18-\sqrt{2}}{14}$, $\tau = \frac{23}{9\sqrt{2}+1} = \frac{9\sqrt{2}-1}{7}$, so ergibt sich: $\mu = \frac{9\sqrt{2}-1}{7}a$, $\lambda = \frac{17+8\sqrt{2}}{7}a$, $\nu = (5+\sqrt{2})a$, $t = \frac{3-\sqrt{2}}{3}$, $s = \frac{4-\sqrt{2}}{3}$, d. h. die A. V. des 2.24-Ecks. — Um ein Beispiel eines autopolaren Polyeders anzuführen, setzen wir $\tau = 2$, also $\sigma = \sqrt{5}-1$. Es ist dann $\mu = 2a$, $\lambda = (\sqrt{5}+1)a$, $\nu = (3+\sqrt{5})a$, und es ergibt sich, wie notwendig, $t = \frac{1}{2}$, $s = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$; überdies ist $k_1 : k_2 : k_3 = (\sqrt{5}-1) : 2 : 2\sqrt{2}$. Für $\tau = 2\sigma$, d. h. wenn der Kern der Gruppierung ein Triakisoktaeder ist, wird $\mu = \lambda = 2\sigma a$, $\nu = \frac{\sigma a}{\sigma-1}$, also $t = \frac{1}{4\sigma-3}$, $s = \frac{2\sigma-1}{4\sigma-3}$, d. h. $t = 2s-1$. Die Hülle ist also ein $(6+8+12)$-flächiges 24-Eck. — Für $\sigma = \frac{2\tau}{\tau-1}$, d. h. ein Deltoidikositetraeder als Kern, wird $\mu = \tau a$, $\lambda = \nu = \frac{2\tau a}{\tau-1}$, also $t = \frac{2}{\tau+3}$, $s = \frac{4}{\tau+3}$ oder

$s = 2t$. Die Hülle ist somit ein $(6+8)$-flächiges 8.3-Eck. Es sind die Polyeder der einen Grenzkurve C_2 reziprok denen der anderen C_3; diese Sphenoidkombinationen aus je sechs Sphenoiden sind identisch mit den stets quadratischen Sphenoiden der dritten bezw. ersten Gruppe. Es sind überdies die einzigen quadratischen Sphenoide, in die die rhombischen der dritten Gruppe übergehen können.

12. **Die polarreziproke Verwandtschaft der vier Gruppen rhombischer Sphenoide.** Wir stellen nun im folgenden, der Nr. 6 dieses § analog, die vier Gruppen rhombischer Sphenoide zusammen, um die polarreziproke Zuordnung Gebiet für Gebiet und Kurve für Kurve leicht übersehen zu können, wobei es, nach dem früher bei den quadratischen Sphenoiden Gesagten, keiner weiteren Erläuterungen bedarf. Wo nicht anders bemerkt, sind die Sphenoide rhombische (vergl. hierzu Taf. 7 Fig. 10—13).

1. Gruppe. 2. Klasse.

Gebiet: $Rd—C_1—H—C_4—M—C_2—Rd$.

Grenzen:

$Rd—C_1—H$ (s. quad. Sph. Gr. 1).

$H—C_4—M \left\{\begin{array}{l}\text{Kern: Hexakisoktaeder.}\\ \text{Hülle: 24-Ecke.}\end{array}\right.$

$M \left\{\begin{array}{l}\text{Kern: Triakisoktaeder.}\\ \text{Hülle: 24-Eck.}\end{array}\right\}$ qu.Sph.

$M—C_2—Rd \left\{\begin{array}{l}\text{Kern: Triakisoktaeder.}\\ \text{Hülle: 2.24-Ecke.}\end{array}\right.$

1. Gruppe. 4. Klasse.

Gebiet: $M—C_4—H—C_3—O—C_2—M$.

Teilgebiete:

$\left\{\begin{array}{l}M—C_4—H—C_3—N—C_5—M.\\ N—C_5—M—C_2—O—C_3—N.\end{array}\right.$

Grenzen:

$M—C_4—H$ s. 1. Gruppe. 2. Klasse.

$H—C_3—O$ Parallele Ebenen.

2. Gruppe. 1. Klasse.

Gebiet: $R—C_1—H—C_3—M'—C_{11}—R$.

Grenzen:

$R—C_1—H$ (s. quad. Sph. Gr. 2).

$H—C_3—M' \left\{\begin{array}{l}\text{Kern: Deltoidikositetraeder.}\\ \text{Hülle: 2.24-Ecke.}\end{array}\right.$

$M' \left\{\begin{array}{l}\text{Kern: Deltoidikositetr.}\\ \text{Hülle: 8.3-Eck.}\end{array}\right\}$ qu.Sph.

$M'—C_{11}—R \left\{\begin{array}{l}\text{Kern: Hexakisoktaeder.}\\ \text{Hülle: 8.3-Ecke.}\end{array}\right.$

4. Gruppe. 1. Klasse.

Gebiet: $V—C_3—H—C_1—Rd—C_6—V$.

Teilbgebiete:

$\left\{\begin{array}{l}V—C_3—H—C_1—Rd—C_9—V.\\ Rd—C_9—V—C_6—Rd.\end{array}\right.$

Grenzen:

$V—C_3—H \left\{\begin{array}{l}\text{Kern: Deltoidikositetraeder.}\\ \text{Hülle: 2.24-Ecke.}\end{array}\right.$

$H—C_1—Rd$ Parallele Ebenen.

$O-C_2-M$ Kern: Triakisoktaeder.
Hülle: 2.24-Ecke.

$N-C_5-M$ quad. Sph. mit allgemeinem
Kern und Hülle.

2. Gruppe. 4. Klasse.

Gebiet: $O-C_2-V'-C_{10}-U'-C_3-O$.

Grenzen:

$O-C_2-V'$ Kern: Triakisoktaeder.
Hülle: 2.24-Ecke.

V' Kern: Triakisoktaeder
Hülle: 24-Eck
qu. Sph.

$V'-C_{10}-U'$ Kern: Hexakisoktaeder.
Hülle: 24-Ecke.

U' Kern: Deltoidikositetr.
Hülle: 24-Eck
autopolar. [$= U$].

$U'-C_3-O$ Kern: Deltoidikositetraeder.
Hülle: 2.24-Eck.

2. Gruppe. 2. Klasse.

Gebiet: $U'-C_{12}-S-C_1-R-C_{11}-M'-C_3-U'$.

Teilgebiete:

$U'-C_{12}-S-C_{13}-M'-C_3-U'$.
$S-C_1-R-C_{11}-M'-C_{13}-S$.

Grenzen:

$Rd-C_6-V$ Kern: Hexakisoktaeder.
Hülle: 8.3-Ecke.

$Rd-C_9-V$ quad. Sph. mit allgemeinem
Kern und Hülle.

2. Gruppe. 4. Klasse.

Gebiet: $Rd-C_6-V-C_3-U-C_7-Rd$.

Grenzen:

$Rd-C_6-V$ Kern: Hexakisoktaeder.
Hülle: 8.3-Ecke.

V' Kern: Deltoidikositetr.
Hülle: 8.3-Eck
quad. Sph.

$V-C_3-U$ Kern: Deltoidikositetraeder.
Hülle: 2.24-Ecke.

U Kern: Deltoidikositetr.
Hülle: 24-Eck
autopolar. [$= U'$].

$U-C_7-Rd$ Kern: Hexakisoktaeder.
Hülle: 24-Eck.

2. Gruppe. 2. Klasse.

Gebiet: $U'-C_{12}-S-C_1-Rd-C_2-V'-C_{10}-U'$.

Teilgebiete:

$U'-C_{12}-S-C_{14}-V'-C_{10}-U'$.
$S-C_1-Rd-C_2-V'-C_{14}-S$.

Grenzen:

$U'-C_{12}-S$ Kern: Hexakisoktaeder.
Hülle: 2.24-Ecke.

$S-C_{13}-M'$ Kern: Hexakisokt.
Hülle: 2.24-Ecke
qu. Sph.

$M'-C_3-U'$ Kern: Deltoidikositetraeder.
Hülle: 2.24-Ecke.

$S-C_1-R$ (s. quadr. Sph. 2. Gr.)

$R-C_{11}-M'$ Kern: Hexakisoktaeder.
Hülle: 8.3-Ecke.

$S-C_{14}-V'$ Kern: Hexakisokt.
Hülle: 2.24-Ecke
qu. Sph.

$V'-C_{10}-U'$ Kern: Hexakisoktaeder.
Hülle: 24-Ecke.

$S-C_1-Rd$ (s. quadr. Sph. 2. Gr.)

$Rd-C_2-V'$ Kern: Triakisoktaeder.
Hülle: 2.24-Ecke.

4. Gruppe. 4. Klasse.	4. Gruppe. 4. Klasse.
Gebiet: $Rd—C_7—U—C_8—Rd$.	Gebiet: $O—C_3—U—C_8—Rd—[C_2]—O$.
Grenzen:	Grenzen:
$Rd—C_7—U \begin{cases}\text{Kern: Hexakisoktaeder.}\\ \text{Hülle: 24-Ecke.}\end{cases}$	$O—C_3—U \begin{cases}\text{Kern: Deltoidikositetraeder.}\\ \text{Hülle: 2.24-Ecke.}\end{cases}$

$$U—C_8—Rd \begin{cases}\text{Kern: Hexakisoktaeder.}\\ \text{Hülle: 2.24-Ecke.}\end{cases}$$

3. Gruppe. 3. Klasse.	3. Gruppe. 3. Klasse.
Gebiet: $H—C_{15}—O—C_2—Rd—[C_1]—H$.	Gebiet: $H—C_{15}—O—C_3—H$.
Grenzen:	Grenzen:

$$H—C_{15}—O \begin{cases}\text{Kern: Hexakisoktaeder.}\\ \text{Hülle: 2.24-Ecke.}\end{cases}$$

$O—C_2—Rd \left\{\begin{matrix}\text{Kern: Triakisokt.}\\ \text{Hülle: 24-Ecke}\end{matrix}\right\}$ qu. Sph.	$O—C_3—H \left\{\begin{matrix}\text{Kern: Deltoidikosit.}\\ \text{Hülle: 8.3-Ecke.}\end{matrix}\right\}$ qu.Sph.

Die in dieser Zusammenstellung übersichtliche Zuordnung polarreziproker Gruppierungen ist in den vorhergehenden Einzeluntersuchungen wesentlich durch die Beispiele der Einzelfälle erhärtet worden. Es ist selbstverständlich, dass sich die Beweise für sämtliche Gebiete ganz allgemein führen lassen.[1]) Man fasse irgend zwei polarreziprok zugeordnete Gebiete ins Auge, z. B. die Sphenoide der ersten Gruppe vierter Klasse und der vierten Gruppe erster Klasse. Die Werte der s und t für die Hüllpolyeder sind in den beiden Gebieten durch die Gleichungen 41) und 46) gegeben. Es werde irgend ein Wert $\sigma = \sigma_1$, $\tau = \tau_1$ genommen, für welchen die Gleichungen 46) die Parameter s_1, t_1 der Hülle bestimmen. Für das reziproke Polyeder ist dann $\sigma = \frac{1}{s_1}$, $\tau = \frac{1}{t_1}$, d. h. $\sigma = \frac{2\sigma_1(\tau_1+1)-3\tau_1}{2\sigma_1{}^2-\tau_1}$, $\tau = \frac{2\sigma_1(\tau_1+1)-3\tau_1}{2\sigma_1-\tau_1}$.

Setzen wir diese Werte in 41) für σ und τ ein, so ergeben sich s und t der Hülle des Polyeders der ersten Gruppe als Funktionen von σ_1

[1]) Nur wegen der Weitläufigkeit der Rechnungen wurde davon abgesehen, diese allgemeinen Beweise durchgehends auszuführen.

und τ_1, etwa: $s = \Phi(\sigma_1, \tau_1)$, $t = \Psi(\sigma_1, \tau_1)$ und diese müssen identisch werden mit $\frac{1}{\sigma_1}$ und $\frac{1}{\tau_1}$, falls die beiden durch 41) und 46) definierten Polyeder polarreziprok sind. Zum Beweis, dass $\Phi(\sigma_1, \tau_1) \cdot \sigma_1 = 1$ ist, setze man $2\sigma_1(\tau_1 + 1) - 3\tau_1 = a$, $2\sigma_1{}^2 - \tau_1 = b$, $2\sigma - \tau_1 = c$ zur Abkürzung; dann ergibt sich nach einiger Rechnung: $\Phi(\sigma_1, \tau_1) = \frac{2c(a-c)}{2c(a-c) + (b-c)^2 - (a-b)^2} = \frac{2c(a-c)}{2c(a-c) + 2b(a-c) - (a^2 - c^2)}$ $= \frac{2c}{c + 2b - a}$. Führt man jetzt die a, b, c wieder ein, so folgt nach kurzer Rechnung $\Phi(\sigma_1, \tau_1) = \frac{1}{\sigma_1}$. Ebenso beweist man die zweite Gleichung $\Psi(\sigma_1, \tau_1) = \frac{1}{\tau_1}$.

§ 3. Die nichtkonvexen Polyeder erster und zweiter Klasse des Hexakisoktaedertypus.

1. **Übersicht der Stephanoidgruppierungen des Typus.** Nach Erledigung der diskontinuierlichen konvexen zugleich gleicheckigen und gleichflächigen (nicht regulären) Polyeder des Hexakisoktaedertypus wenden wir uns zur Betrachtung der nichtkonvexen Polyeder und beginnen mit denen der zweiten Klasse, deren Oberfläche und Inhalt Null ist. Die diskontinuierlichen Polyeder dieser Beschaffenheit, die sämtlich Gruppierungen von Stephanoiden sind, bilden wiederum geschlossene Gruppen, aus denen sich teilweise die weiteren Polyeder als spezielle Fälle ergeben. Wir beschäftigen uns daher zunächst mit den Stephanoidgruppierungen des Hexakisoktaedertypus.

Gruppierungen von Stephanoiden können im allgemeinen $(6+8+12)$-flächigen $2 \cdot 24$-Eck nicht existieren, da sich dessen Ecken dreimal nur als die dreier halbregulärer achtseitiger Prismen anordnen lassen, in diesen aber Stephanoidgruppierungen unmöglich sind. Sind aber diese Prismen regulär, d. h. die beiden Deckflächen jedes Prismas regelmässige Achtecke, so sind Stephanoidgruppierungen nicht ausgeschlossen. Nun gibt es im achtseitigen regulären Prisma zwar drei Arten von Stephanoiden, nämlich die $St_8\binom{3}{1}$, $St_8\binom{5}{1}$ und $St_8\binom{4}{2} = 2\,St'_4\binom{2}{1}$, von denen aber nur die letzten im Hexakisoktaedertypus realisierbar sind, wofür der Beweis nachträglich in Nr. 4 dieses § geführt ist. Untersuchen wir zunächst die Bedingungen, unter denen die Ecken des $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks sich auf regulären Achtecken anordnen lassen.

α) Sind die achteckigen Grenzflächen des 2.24-Ecks selbst reguläre Achtecke, so ist $k_1 = k_3$. Dies gibt nach dem Gleichungssystem 15) [in Kap. 3 § 1 Nr. 5 S. 91] für s und t die Bedingung:

66)
$$t = (\sqrt{2}+1)(s\sqrt{2}-1).$$

In diesem Falle bilden also die Ecken der Reihen $a) a')$ der drei Anordnungen A_1, A_2, A_3 [in Kap. 3 § 2 Nr. 1 S. 94] reguläre Achtecke.

β) Die Ecken der Reihen $b) b')$ in A_1, A_2, A_3 sind die regelmässiger Achtecke, wenn die Strecken $\overline{12,9}$, $\overline{9,24}$ u. s. w. gleich sind. Es ist aber $\overline{12,9}$ diejenige Diagonale der sechseckigen Grenzfläche des 2.24-Ecks, die parallel k_1 verläuft und gleich $k_1 + k_2$ ist, während $\overline{9,24} = k_3$ ist. Aus $k_1 + k_2 = k_3$ erhält man für s, t die Gleichung:

67)
$$t = (1-s)(\sqrt{2}+1).$$

γ) Die Ecken der Reihen $c), c')$ schliesslich bilden reguläre Achtecke, wenn die Strecken $\overline{11,10}$, $\overline{10,23}$ u. s. w. gleich sind. Nun ist $\overline{11,10} = k_2$, $\overline{10,23}$ aber ist diejenige Diagonale der achteckigen Grenzfläche, die parallel einer Kante k_3 verläuft und somit gleich $k_3 + k_1\sqrt{2}$ ist; also ergibt sich die Bedingung $k_3 + k_1\sqrt{2} = k_2$. Dann erhält man als Gleichung zwischen s und t:

68)
$$t = \frac{s}{\sqrt{2}}.$$

Von besonderen gleicheckigen Polyedern des Typus genügt den Bedingungen 66) und 67) gleichzeitig die A. V. des $(6+8)$-flächigen 8.3-Ecks, den Bedingungen 67) und 68) die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen 24-Ecks, da für das 8.3-Eck $k_2 = 0$, für das 24-Eck $k_1 = 0$ ist. — Beschreiben wir nun in jedes der drei achtseitigen Prismen eines den Bedingungen 66), 67) oder 68) genügenden 2.24-Ecks die beiden $St'_4\binom{2}{1}$, die zusammen ein diskontinuierliches $St_8\binom{4}{2}$ bilden, so ergibt sich ein aus sechs $St'_4\binom{2}{1}$ bestehendes diskontinuierliches Polyeder, dessen äussere Hülle ein 2.24-Eck ist und das 6.8 kongruente überschlagene Vierecke mit je zwei entgegengesetzt gleichen Zellen zu Grenzflächen hat. Die Gesamtoberfläche, sowie damit der Gesamtinhalt ist also gleich dem der einzelnen Stephanoide gleich Null (Nullpolyeder). Die Ecken sind im allgemeinen Falle die vierkantigen Ecken vierter Art der Stephanoide. Die Art A aller dieser Polyeder bestimmt sich aus der Art $A = 16$ des $St_8 \binom{4}{2}$ zu $3 \cdot 16 = 48$. Dasselbe Ergebnis liefert natürlich die Formel von Hess für das Gesamtpolyeder. Für dieses ist $\Sigma a = 48 \cdot 2$, $\Sigma \alpha = 48 \cdot 4$, $K = 48 \cdot 2$, $\Sigma \varkappa = 48 \cdot 2$, da jede vierseitige Grenzfläche zwei überstumpfe Winkel hat; also ist $2A = 48 \cdot 2 + 48 \cdot 4 - 48 \cdot 2 - 48 \cdot 2 = 48 \cdot 2$, d. h. $A = 48$, so lange die Hülle des Polyeders allgemein, d. h. ein $2 \cdot 24$-Eck ist. — Was nun den inneren Kern des diskontinuierlichen Polyeders betrifft, so entsteht er aus den $3 \cdot (2 \cdot 8)$ Flächen der drei regulären achtseitigen Doppelpyramiden, den inneren Kernen der $3\,St_8 \binom{4}{2}$. Die Hauptachsen dieser drei regulären Doppelpyramiden fallen mit den Achsen A_1, A_2, A_3 des $(6+8+12)$-flächigen $2 \cdot 24$-Ecks zusammen, d. h. ihre $3 \cdot (2 \cdot 8)$ Flächen sind die 48 Flächen eines Hexakisoktaeders. Bezeichnen wir nun ein Polyeder einer der genannten Gruppierungen mit P, sein polarreziprokes in Bezug auf die umbeschriebene Kugel mit P', so erfüllt der Kern von P' eine Bedingung zwischen σ und τ, die erhalten wird, wenn man in 66), 67) oder 68) t und s durch $\frac{1}{\tau}$ und $\frac{1}{\sigma}$ ersetzt. Da die $St_8 \binom{4}{2}$ autopolar sind, so wird das Polyeder P' ebenfalls eine Gruppierung von $St_8 \binom{4}{2}$ sein, nur brauchen P und P' nicht derselben der drei Gruppen zuzugehören. Vielmehr wird sich zeigen, dass reziproke Polyeder P und P' entweder der ersten und dritten oder beide der zweiten Gruppe angehören. Um nun die Ebenen des Hexakisoktaeders zu finden, die eine erste Fläche des Polyeders P' erzeugen, betrachten wir die erste Ecke der Stephanoidgruppierungen im $2 \cdot 24$-Eck. Diese erste Ecke eines Stephanoids $St_8 \binom{4}{2}$ sei die Ecke 1) des $2 \cdot 24$-Ecks. Gehört sie der Reihe a) an, so sind die von ihr ausgehenden Kanten in der Reihenfolge in der die Ebenen der Ecke durch sie gehen:[1] 1,43; 1,41; 1,45; 1,47. Die Fläche des reziproken Polyeders wird also durch den Schnitt der Ebenen 43), 41), 45), 47) mit der Ebene 1) des Hexakisoktaeders erzeugt. — Gehört die Ecke 1) des $2 \cdot 24$-Ecks der Reihe b) an, so sind die Kanten der Stephanoidecke 1,5; 1,36; 1,23; 1,41 und die Fläche des reziproken Polyeders wird durch die Geraden 5), 36), 23), 41 auf der Ebene 1) gebildet. Ist endlich die

[1]) Vergl. das für die Stephanoide $St_8 \binom{4}{2}$ in Kap. II § 3 Nr. 4 Abgeleitete.

Ecke 1) eine der Reihe c), so sind die Kanten der Stephanoidecke 1,13; 1,45; 1,5; 1,38 und die Fläche des reziproken Polyeders ist das von den Geraden 13), 45), 5), 38) in der Ebene 1) des Hexakisoktaeders gebildete überschlagene Viereck. Wir bezeichnen nun die Stephanoidgruppierungen in der Reihenfolge der eben abgeleiteten Grenzflächen als solche der ersten, zweiten und dritten Gruppe. Die inneren Kerne genügen dann den Bedingungen 66'), 67') und 68'), die sich aus 66), 67) und 68) ergeben, wenn man t und s durch $\frac{1}{\tau}$ und $\frac{1}{\sigma}$ ersetzt. Es wird:

66') $$\tau = \frac{\sigma(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-\sigma};$$

67') $$\tau = \frac{\sigma(\sqrt{2}-1)}{\sigma-1};$$

68') $$\tau = \sigma\sqrt{2}.$$

Diese Gleichungen deuten wir wieder als solche von Kurven in der Ebene der σ, τ (s. Fig. 4 Taf. 8). Es ist dann 66') eine Hyperbel C_4 durch die Punkte $\sigma = 1$, $\tau = 1$ und $\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, $\tau = \sqrt{2}+1$, d. h. die A.V. des Triakisoktaeders. Für die konvexen Hexakisoktaeder, deren Werte σ und τ der Bedingung 66') genügen, ist also jedenfalls $1 < \sigma \leqq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. — Die Gleichung 67') ist die einer Hyperbel C_5 durch die Punkte $\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, $\tau = \sqrt{2}+1$ und $\sigma = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$, $\tau = 2\sqrt{2}-1$. Der zweite Punkt definiert die A. V. des Deltoidikositetraeders, also ist für alle in Frage kommenden Hexakisoktaeder als innerer Kern: $\frac{\sqrt{2}+1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{4-\sqrt{2}}{2}$. Die Gleichung 68') endlich ist die einer Geraden C_6 durch die Punkte $\sigma = 1$, $\tau = \sqrt{2}$ und $\sigma = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$, $\tau = 2\sqrt{2}-1$. Es muss also für die Kernpolyeder der dritten Stephanoidgruppe $1 < \sigma < \frac{4-\sqrt{2}}{2}$ sein. Diese Grenzen für σ werden hinreichen, die Werte der Koordinaten der Ecken der Hüllpolyeder der Stephanoidgruppierungen nach ihrer Grösse eindeutig anzuordnen. Bezeichnen wir überdies die Koordinaten des Schnittpunktes D der Kurve C_4 mit der Geraden C_6 mit σ', τ', so finden wir aus $\frac{\sigma(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-\sigma} = \sigma\sqrt{2}$ für diese Koordinaten die Werte $\sigma' = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$, $\tau = 3-\sqrt{2}$.

2. **Die erste Gruppe der Stephanoide.** Die Ebene 1) des Hexakisoktaeders wird von den Ebenen 43), 41), 45), 47) in den Kanten der ersten Grenzfläche des diskontinuierlichen, aus sechs $St'_4\binom{2}{1}$ bestehenden Polyeders geschnitten, deren Ecken die Ecken 32), 23), 28), 15) des die Hülle des Polyeders bildenden (6+8+12)-flächigen 2.24-Ecks sind. Dabei sind diese Ecken die Schnittpunkte folgender Flächen: **23 (1, 43, 41); 28 (1, 41, 45); 15 (1, 45, 47); 32 (1, 47, 43).** Bestimmt man die Koordinaten des Schnittpunktes 15) der Ebenen 1), 45) und 47) aus deren Gleichungen, so findet man unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Bedingung 66′):

$$x = \frac{\sigma(\sqrt{2}-1)a}{\sigma-1}, \quad y = -\frac{\sigma a}{\sigma-1}, \quad z = \frac{\sigma(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{2}-\sigma},$$

und, da $1 < \sigma < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ ist,[1] $x = \lambda$, $y = -\nu$, $z = \mu$. Die Koordinaten der übrigen Ecken der Grenzfläche sind: 23) $-\lambda, \nu, \mu$; 32) $\nu, -\lambda, -\mu$; 28) $\lambda, \nu, -\mu$. Für das umhüllende (6+8+12)-flächige 2.24-Eck berechnet man aus den Werten der μ, λ, ν für die Parameter s und t:

69) $$s = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sigma)}{3-\sqrt{2}-\sigma}, \quad t = \frac{\sqrt{2}-\sigma}{3-\sqrt{2}-\sigma}.$$

Es ist also $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Nach den Ecken gehört somit das Polyeder dem dritten oben erläuterten Falle γ) zu, d. h.: Die reziproken Polyeder der ersten Stephanoidgruppe sind die der dritten Gruppe. Für die Kanten des Hüllpolyeders gilt allgemein:

70) $$k_1 : k_2 : k_3 = (2 + \sqrt{2} - 2\sigma\sqrt{2}) : 2(\sqrt{2}-\sigma) : 2(\sigma-1),$$

so dass in der Tat $k_3 + k_1\sqrt{2} = k_2$ ist. Die Grösse der beiden verschiedenen Kanten der Grenzfläche des Polyeders ist durch die Koordinaten der Ecken

---

[1]) Der Gang der Entwicklung wäre eigentlich der folgende: Aus den Gleichungen der 1), 43), 41), 45), 47) wären die Koordinaten der vier Ecken abzuleiten, deren Werte unter Berücksichtigung von $1 < \sigma < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ als λ, μ, ν zu klassifizieren und danach die Zahlen der Ecken aus deren Tabelle zu bestimmen. Wir nehmen in den folgenden Ableitungen des Textes diese Resultate gewissermassen vorweg und erhärten sie durch die Berechnungen.

leicht auszudrücken; man findet für die kleinere Kante $\overline{15,32} = \sqrt{2(\nu-\lambda)^2+4\mu^2}$, für die grössere Kante $\overline{15,28} = 2\sqrt{\nu^2+\mu^2}$, worin für λ, μ, ν noch die obigen Werte in σ, τ eingeführt werden können. — Als Beispiel sei zunächst das Polyeder betrachtet, dessen Kern die A. V. des Hexakisoktaeders ist. Es wird dann für $\sigma = \frac{3(4+\sqrt{2})}{14}$ $\lambda = 3a$, $\mu = \frac{3(3+\sqrt{2})a}{7}$, $\nu = 3(\sqrt{2}+1)a$, also $t = \frac{18+\sqrt{2}}{23\sqrt{2}}$, $s = \frac{18+\sqrt{2}}{23}$, und für die Kanten des 2.24-Ecks gilt: $k_1 : k_2 : k_3 = 1:(2\sqrt{2}+1):(\sqrt{2}+1)$. Als zweites Beispiel wählen wir das Polyeder, für dessen inneren Kern σ und τ die Werte σ' und τ' des Punktes D besitzen, nämlich $\sigma = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$, $\tau = 3-\sqrt{2}$. Es ist dann $\lambda = (2\sqrt{2}+1)a$, $\mu = (3-\sqrt{2})a$, $\nu = (5+3\sqrt{2})a$, hiernach $s = \frac{3\sqrt{2}+2}{7}$ und $t = \frac{3+\sqrt{2}}{7}$. Es wird also, da $t = \frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{\tau}$, $s = \frac{2}{3\sqrt{2}-2} = \frac{1}{\sigma}$ ist, in diesem Falle die äussere Hülle reziprok dem inneren Kerne. Das Polyeder ist aber nicht autopolar; vielmehr gehört das polarreziproke Polyeder der dritten Stephanoidgruppe zu. Für die Kanten des Hüllpolyeders ist $k_1 : k_2 : k_3 = 1:(\sqrt{2}+1):1$, d. h. die achteckigen Grenzflächen sind regulär. Das Modell des diskontinuierlichen aus sechs $St'_4\,(^2_1)$ bestehenden Nullpolyeders zeigt Fig. 10 Taf. 25; die Fläche ist in Fig. 9 Taf. 8 dargestellt. Wie das Modell zeigt, und wie auch aus der Figur der Grenzfläche des Polyeders zu erschliessen ist, (keiner der Achsenpunkte C liegt innerhalb der positiven oder negativen Zelle der Grenzfläche oder auf deren Perimeter), fällt sein innerer Kern völlig heraus, hat also den Koëffizienten Null. Korrespondierende Punkte der Kanten der Fläche sind mit gleichen (griechischen) Buchstaben bezeichnet. Von der Schraffierung gilt hier und in allen späteren Fällen das früher bei den Stephanoiden des Doppelpyramidentypus Bemerkte. Für die speziellen inneren Kerne, — es kommt nur die A. V. des Triakisoktaeders in Frage — fällt die Gruppierung mit der der zweiten Gruppe zusammen und soll erst später besprochen werden.

3. **Die dritte Gruppe der Stephanoide.** Die Ebene 1) des Hexakisoktaeders wird von den Ebenen 13), 45), 5), 38) in den Kanten der ersten Fläche des diskontinuierlichen Polyeders geschnitten. Die Ecken dieser Fläche sind: 28 (1, 45, 13); 17 (1, 13, 38); 23 (1, 5, 38); 15 (1, 5, 45). Bestimmt

man die Koordinaten des Schnittpunktes 28) der Flächen 1), 45) und 13) aus deren Gleichungen und berücksichtigt die Bedingung $\tau = \sigma\sqrt{2}$, so ergibt sich $x = \lambda$, $y = \nu$, $z = -\mu$ und zwar ist: $\mu = \sigma\sqrt{2}a$, $\lambda = \sigma\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)a$, $\nu = \frac{\sigma a}{\sigma - 1}$. Daraus berechnet man:

$$71)\qquad s = \frac{\sigma\sqrt{2}-1}{2\sigma - 3 + \sqrt{2}},\quad t = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sigma - 3 + \sqrt{2}},$$

und es ist somit $t = (\sqrt{2}+1)(s\sqrt{2}-1)$, wonach das diskontinuierliche Polyeder in Bezug auf die Ecken zum Falle α) gehört, d. h. das reziproke Polyeder gehört der ersten Stephanoidgruppe an. Für das Verhältnis der Kanten des Hüllpolyeders gilt:

$$72)\qquad k_1 : k_2 : k_3 = 1 : \frac{3 + \sqrt{2} - \sigma(2 + \sqrt{2})}{2(\sigma - 1)} : 1,$$

wie denn die achteckigen Grenzflächen stets regulär sind. Wir betrachten zunächst das reziproke Polyeder des ersten unter der vorigen Gruppe angeführten. Setzt man $\sigma = \frac{23}{18+\sqrt{2}} = \frac{18-\sqrt{2}}{14}$, so ergibt sich $s = \frac{4-\sqrt{2}}{3}$, d. h. die A. V. des 2.24-Ecks. Ferner wählen wir als Beispiel wiederum das Hexakisoktaeder für $\sigma = \sigma'$, $\tau = \tau'$. Es wird dann $\mu = (3-\sqrt{2})a$, $\lambda = (2\sqrt{2}+1)a$, $\nu = (5+3\sqrt{2})a$, $s = \frac{3\sqrt{2}+2}{7} = \frac{1}{\sigma}$, $t = \frac{3+\sqrt{2}}{7} = \frac{1}{\tau}$, $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : (\sqrt{2}+1) : 1$. Auch für dieses, dem betreffenden Polyeder der vorigen Gruppe reziproke Polyeder ist also Kern und Hülle polarreziprok. Wie nun die Werte der λ, μ, ν zeigen, fallen die Ecken der beiden Polyeder für den gleichen Wert a des Hexakisoktaeders zusammen, d. h. beide Polyeder besitzen eine gemeinsame umbeschriebene Kugel. Das Modell des zweiten Polyeders zeigt Fig. 8 Taf. 25; die Fläche ist in Fig. 8 Taf. 8 gezeichnet. Was die Zellenkoëffizienten des Polyeders anbetrifft, so diene das Folgende zur Erläuterung überhaupt. Während bei den Gruppierungen von Sphenoiden nur positive Koëffizienten räumlicher Zellen auftraten, besitzen die diskontinuierlichen Polyeder, die sich aus Stephanoiden zusammensetzen, wie diese positive und negative Flächenzellen und damit auch positive und negative räumliche Zellen. Das Polyeder kann dann in seiner „Oberfläche“ völlig geschlossen sein und doch im Innern räumliche Zellen des Koëffizienten Null enthalten, wie dies analog von den ebenen Polygonen bekannt ist.[1])

4. **Die zweite Gruppe der Stephanoide, sowie Schlussbetrachtungen über die Stephanoide des Typus im allgemeinen.** Die Ebenen 5), 36), 23), 41) bilden durch ihren Schnitt mit der Ebene 1) des Hexakisoktaeders die Fläche eines diskontinuierlichen aus sechs $St'_4\binom{2}{1}$ bestehenden Nullpolyeders. Die Ecken dieser Flächen sind die Ecken 15 (1, 5, 36); 23 (1, 5, 41); 28 (1, 41, 23); 5 (1, 23, 36) des 2.24-Ecks. Der Schnittpunkt 15) der Flächen 1), 5, 36) hat die Koordinaten $x=\lambda$, $y=-\nu$, $z=\mu$ und aus den Gleichungen der Flächen findet man mit Beachtung von $\tau=\frac{\sigma(\sqrt{2}-1)}{\sigma-1}$ die Koordinatenwerte $\mu=\frac{\sigma(\sqrt{2}-1)a}{\sigma-1}$, $\lambda=\frac{\sigma(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{2}-\sigma}$, $\nu=\frac{\sigma a}{\sigma-1}$. Für das umhüllende (6+8+12)-flächige 2.24-Eck gilt danach:

$$s=\frac{1-\sigma(2-\sqrt{2})}{3-\sqrt{2}-\sigma},\quad t=\frac{\sqrt{2}-\sigma}{3-\sqrt{2}-\sigma}. \tag{73}$$

Diese Werte befriedigen die Gleichung $t=(1-s)(\sqrt{2}+1)$, d. h. die reziproken Polyeder gehören dieser selben zweiten Gruppe an. Für die Kanten des Hüllpolyeders hat man die Proportion:

$$k_1:k_2:k_3=[\sigma(\sqrt{2}-1)-1]:(2\sqrt{2}-1-\sigma\sqrt{2}):(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sigma). \tag{74}$$

Als Beispiel nehmen wir nun dasjenige Polyeder, dessen innerer Kern reziprok der äusseren Hülle ist, d. h. das autopolare Polyeder der Gruppe. Ist E der Punkt der Kurve C_5 (vergl. Fig. 4 Taf. 8), dessen Koordinaten σ und τ charakteristisch für dieses Polyeder sind, so sind die Polyeder des einen Kurventeiles, von E bis zur A. V. des Triakisoktaeders, polarreziprok denen des anderen, von E bis zur A. V. des Deltoidikositetraeders, und die Polyeder der Grenzpunkte sind gleichfalls reziprok. Wie die Figur zeigt, gehören sie auch der ersten, bezw. dritten Gruppe der Stephanoide zu. Der Wert σ für den Kern des autopolaren Polyeders der zweiten Gruppe folgt aus

$$\frac{1-\sigma(2-\sqrt{2})}{3-\sqrt{2}-\sigma}=\frac{1}{\sigma},\ \text{d. h. aus}\ \sigma^2-(2+\sqrt{2})\sigma+\frac{4+\sqrt{2}}{2}=0.$$

[1]) Vergl. V. u. V. S. 30 Fig. 22.

Die brauchbare, innerhalb des Gebietes der konvexen Hexakisoktaeder gelegene Wurzel ist $\sigma = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right) = 1{,}25202$. Dazu gehört: $\tau = \sqrt{2}+\sqrt{\sqrt{2}-1} = 2{,}0578$. Für die Parameter s und t des umhüllenden $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Ecks ergibt sich aus 73):

$$s = \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{4-3\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-2}}, \quad t = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}-2+\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-2}},$$

und für dessen Kanten gilt die Proportion:

$$k_1 : k_2 : k_3 = (2\sqrt{2}-2)(1-\sqrt{2\sqrt{2}-2}) : [2\sqrt{\sqrt{2}-1}-2(2-\sqrt{2})]$$
$$: [(2-\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-2}-2(3-2\sqrt{2})].$$

Wie das Modell dieses diskontinuierlichen Polyeders, Fig. 8 Taf. 24 zeigt, und wie auch aus der Zeichnung der Grenzfläche des Polyeders, Fig. 7 Taf. 8 zu ersehen ist, fällt der innere Kern des Körpers völlig heraus. — Damit sind die drei angezeigten Gruppen der Stephanoide erledigt und es erübrigt nur noch den eingangs versprochenen allgemeinen Beweis zu führen, dass dies die einzig möglichen Stephanoidgruppierungen im Hexakisoktaedertypus sind. Betrachten wir die drei existierenden Stephanoide $St_8\binom{3}{1}$, $St_8\binom{5}{1}$ und $St_8\binom{4}{2}$ im regulären achtseitigen Prisma, so finden wir, dass die Nebenachsen des Prismas alle von gleicher Zähligkeit sind. Anders bei den drei achtseitigen Prismen, die die Ecken des 2.24-Ecks bilden. Hier sind, wenn A_1 eine Hauptachse eines Prismas ist, die Nebenachsen abwechselnd die übrigen Achsen A und vier Achsen B. Man habe nun eine Fläche irgend eines der drei Stephanoide in das achtseitige Prisma eingetragen. Legt man jetzt durch den Doppelpunkt des Vierecks und die Achse A_1 des Prismas eine Ebene, also senkrecht zu den Deckflächen des Prismas, so geht diese Ebene entweder durch eine Seitenkante des Prismas — wie bei $St_8\binom{4}{2}$, oder durch die Mitte einer Seitenfläche, wie bei $St_8\binom{3}{1}$ und $St_8\binom{5}{1}$. Diese letzteren Stephanoide sind aber dann im $(6+8+12)$-flächigen 2.24-Eck unmöglich, denn die Symmetrielinien der abwechselnden Seitenflächen des Stephanoides trügen bald einen Achsenpunkt B, bald einen Achsenpunkt A des Polyeders, was unstatthaft ist, wenn wir ein und dieselbe Fläche eines gleichflächigen Polyeders vor uns haben. Anders bei den

Stephanoiden $St_8\binom{4}{2}$, bei denen die Ebene durch den Doppelpunkt einer Fläche und die Hauptachse des achtseitigen Prismas durch eine Kante des Prismas geht, also für zwei benachbarte Flächen des Stephanoides nur eine Vertauschung der Nebenachsen B und A eintritt. In diesem Falle ist also von zwei Stephanoidflächen die eine ein Spiegelbild der anderen. Hiervon überzeugt man sich überdies auch durch Betrachtung der gezeichneten Figuren. Auch gelangt man zu demselben negativen Resultate, wenn man die Ecken der Stephanoidgruppierungen zu berechnen sucht. Genau dieselben Schlüsse führen auf die Unmöglichkeit von Stephanoiden in den sechsseitigen Prismen, die sich 2.24-Ecken mit regulären sechsseitigen Deckflächen einschreiben lassen.

5. **Die kontinuierlichen Nullpolyeder des Hexakisoktaedertypus.** Wir gehen für die Untersuchung der kontinuierlichen Nullpolyeder von den polarreziproken Gruppierungen von Stephanoiden aus, deren Kern die A. V. des Triakisoktaeders und Ikositetraeders ist. Es sei zunächst der Kern das Triakisoktaeder. An Stelle der Spuren der Ebenen 43), 45), 41), 47) und 5), 23), 41), 36) der ersten und zweiten Gruppe in der Ebene 1) des Hexakisoktaeders treten in der Ebene 1) des Triakisoktaeders die Spuren der Ebenen 10), 5), 16), 23) und 20), 14), 16), 18). Je zwei Flächen der ersten und zweiten Stephanoidgruppierung fallen in eine Ebene, denn das Viereck 10), 5), 16), 23) — vergl. Fig. 4 Taf. 5 — ist sowohl die Fläche im Triakisoktaeder, die an Stelle der Fläche 1) für die erste Gruppierung wie an Stelle der Fläche 12) für die zweite Gruppierung im Hexakisoktaeder tritt. Diese beiden Vierecke haben die Kante 16) gemein. Das Viereck $P_1 P_2 P_3 P_4$ hat die positive Flächenzelle $P_1 P_2 M$, die negative Flächenzelle $M P_3 P_4$. Dagegen besitzt das Viereck $P_1 P_5 P_4 P_3$ die positive Flächenzelle $N P_4 P_3$, die negative Flächenzelle $P_1 P_5 N$. Die positive Flächenzelle des letzten Vierecks tilgt sich in dem Dreiecke $O P_3 P_4$ mit der negativen Flächenzelle des ersteren, so dass das entstehende Polyeder zur Grenzfläche das Sechseck $P_1 P_2 P_3 P_1 P_5 P_4 (P_1)$ besitzt, dessen Zellen $P_1 P_2 M$ und $N O P_3$ positiv sind, während die Zellen $P_1 N P_5$ und $M O P_4$ das negative Vorzeichen besitzen. Die deltoidförmige Zelle $P_1 M O N$ hat den Koëffizienten Null, wie der Gesamtinhalt der Fläche Null ist. Das entstehende Polyeder hat also Sechsecke dritter Art zu Flächen,

die die Eigentümlichkeit besitzen, dass zwei ihrer Ecken in einem Punkte (einer Ecke des Polyeders) zusammenfallen und ist ein kontinuierliches nichtkonvexes Polyeder der zweiten Klasse. Jede Fläche besitzt drei einspringende (überstumpfe) und drei ausspringende Kantenwinkel (einspringend sind die Winkel bei P_4 und P_5, sowie der Winkel $P_3 P_1 P_5$). Die Ecke des Polyeders ist sechskantig von dem in Fig. 13 Taf. 3 gezeichneten Querschnitt. Zwei ihrer Flächen liegen in einer Ebene. Sie besitzt drei ausspringende und drei einspringende Flächenwinkel, sowie drei einspringende und drei ausspringende Kantenwinkel, nämlich die überstumpfen Flächenwinkel in D, E und F, die überstumpfen Kantenwinkel DE, EF und FA und ist von der Art $\alpha = 6$. Das Modell des Polyeders zeigt Fig. 3 Taf. 24. Der innere Kern hat den Koëffizienten Null und fällt völlig heraus, wie auch aus der Figur der Grenzfläche ersichtlich ist, die keinen Achsenpunkt C im Innern oder auf den Kanten besitzt. Die Koordinaten der Ecken des die äussere Hülle bildenden Polyeders ergeben sich aus den allgemeinen Formeln der zweiten Gruppe der Stephanoide des Typus für $\sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Es ist $\lambda = \mu = (\sqrt{2}+1)a$, $\nu = (\sqrt{2}+1)^2 . a$; $s = \frac{4+\sqrt{2}}{7}$, d. h. die Hülle ist die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen 24-Ecks. Die Ecken dieses 24-Ecks, die in der Ebene 1) des Triakisoktaeders liegen, ergeben sich aus den Ecken des 2.24-Ecks, die den Flächen des ersten bezw. zweiten Stephanoids im Hexakisoktaeder angehören nach Note I. Es sind die folgenden: $P_1 \equiv 8$, $(\lambda, -\nu, \lambda)$; $P_2 \equiv 15$, $(\nu, -\lambda, -\lambda)$; $P_5 \equiv 3$, $(-\lambda, -\lambda, \nu)$; $P_4 \equiv 13$, $(\lambda, \nu, -\lambda)$; $P_3 \equiv 12$, $(-\lambda, \nu, \lambda)$. Danach sind die Kanten der Grenzfläche:

$$P_1 P_2 = P_1 P_5 = \sqrt{4\lambda^2 + 2(\nu - \lambda)^2} = 2a(2+\sqrt{2});$$
$$P_2 P_3 = P_4 P_5 = P_1 P_4 = P_1 P_3 = \sqrt{4\lambda^2 + 2(\nu+\lambda)^2} = 2\sqrt{\lambda^2+\nu^2} = 2a(\sqrt{2}+1)\sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

Was schliesslich die Art A des Polyeders betrifft, so ergeben sich zu ihrer Berechnung mittels der Formel von Hess die Grössen $\Sigma\alpha = 24.6$, $\Sigma a = 24.3$, $K = 24.3$, $\Sigma\varkappa = 24.3$, d. h. $A = 36$. Man kann dieses Polyeder danach als $8 : 3(6)_6$-eckiges $24(2+2+2)_3$-Flach der 36. Art bezeichnen.[1])

[1]) Vergl. über dieses Polyeder die Angabe bei Hess, Marb. Ber. Nr. 1. 1877. S. 10.

Auf ein zweites kontinuierliches Nullpolyeder, das dem eben beschriebenen polarreziprok ist, führt nun die zweite und dritte Gruppierung der Stephanoide im Hexakisoktaedertypus, deren Kern die A. V. des Deltoidikositetraeders ist. Die Spuren in der Ebene 1) dieses Kernpolyeders sind die Geraden 3), 12), 23), 17) und 7), 3), 18), 22). Vergl. Fig. 5 Taf. 4. Durch Tilgung der Geraden 3) tritt an Stelle der beiden überschlagenen Vierecke $P_2P_3P_4P_1$ und $P_5P_4P_3P_1$ das Sechseck dritter Art $P_1P_2P_3P_1P_5P_4(P_1)$ mit drei ausspringenden und drei einspringenden Winkeln und abwechselnd positiven und negativen Flächenzellen. Da je zwei Zellen kongruent sind, so ist der Gesamtinhalt der Fläche und der Oberfläche des Polyeders, also auch dessen Inhalt Null. Auch bei der Grenzfläche dieses Polyeders fallen zwei Ecken in einem Punkte (P_1), d. h. einer Ecke des Hüllpolyeders zusammen. Da die deltoidförmige Zelle der Fläche den Koëffizienten Null hat, besitzt auch die innerste Zelle des Polyeders, das Deltoidikositetraeder, den Koëffizienten Null; doch ist das Polyeder ringsum geschlossen, da sämtliche Arten von Achsen das Innere der Grenzfläche oder wenigstens deren Kanten treffen. Die Ecke des Polyeders ist sechskantig von der sechsten Art und von derselben Gestaltung wie die des reziproken Polyeders. Fig. 9 Taf. 24 zeigt das Modell dieses Nullpolyeders. Die Koordinaten der Ecken des umhüllenden $(6+8)$-flächigen 8.3-Ecks ergeben sich aus den allgemeinen Werten der λ, μ, ν der Stephanoide der zweiten Gruppe für $\sigma = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$, nämlich $\mu = (2\sqrt{2}-1)a$, $\lambda = \nu = (3+\sqrt{2})a$; natürlich ist $s = 2(2\sqrt{2}-1)$, $t = \sqrt{2}-1$. Für die Koordinaten der Eckpunkte der Fläche $P_1P_2P_3P_1P_5P_4$ gilt: $P_1 \equiv 3, (\lambda, \lambda, -\mu)$; $P_2 \equiv 20, (-\lambda, -\mu, \lambda)$; $P_3 \equiv 7, (\lambda, -\lambda, \mu)$; $P_4 \equiv 14, (-\lambda, \lambda, \mu)$; $P_5 \equiv 24, (-\mu, -\lambda, \lambda)$. Danach sind die Kanten der Grenzfläche:

$$P_1P_2 = P_1P_5 = \sqrt{4\lambda^2 + 2(\lambda+\mu)^2} = 2a\sqrt{2(3+\sqrt{2})};$$

$$P_1P_3 = P_1P_4 = P_2P_3 = P_4P_5 = 2\sqrt{\lambda^2+\mu^2} = \sqrt{4\lambda^2+2(\lambda-\mu)^2} = 2a\sqrt{2(10+\sqrt{2})}.$$

Was endlich die Art des Polyeders betrifft, so ist hier $\Sigma\alpha = 24.6$, $\Sigma a = 24.3$, $K = 24.3$, $\Sigma\varkappa = 24.3$, d. h. $A = 36$, d. h. das Polyeder ist ein $24(6)_6$-eckiges $24(6)_3$-Flach der 36. Art.[1])

Hiermit sind die kontinuierlichen Nullpolyeder des Hexakisoktaedertypus gefunden, die sich aus den Stephanoidgruppierungen mit besonderen

[1]) Vergl. Hess, Marb. Ber. Nr. 1. 1877. S. 11.

Kernen ergeben. Eine Betrachtung der Grenzflächen der beiden Polyeder zeigt nun, dass deren Ecken identisch sind mit den Ecken der Flächen der beiden polarreziproken Gruppierungen der zweiten Gruppe rhombischer Sphenoide, deren Kern die A. V. des Triakisoktaeders und Deltoidikositetraeders ist (Fig. 2 Taf. 5 und Fig. 4 Taf. 7). Man kann in der Tat die Grenzflächen dieser Sphenoidgruppierungen als konvexe Sechsecke zweiter Art, $P_1 P_2 P_3 P_1 P_4 P_5$ auffassen, deren äussere Zellen den Koëffizienten 1 haben, während der inneren deltoidförmigen Zelle dann der Koëffizient $+2$ zu erteilen ist. Für die Zahlen der Formel von Hess hätte man dann: $\Sigma\alpha = 24.2$, $\Sigma a = 24.2$, $K = 24.3$, $\Sigma\varkappa = 0$, also $A = 12$, d. h. die Anzahl der Sphenoide, die das Polyeder bilden. Suchen wir nun alle diejenigen Sphenoidgruppierungen, deren Kerne spezielle Polyeder sind, derart, dass Ecken der beiden Grenzflächen zusammenfallen (damit mehr als dreikantige Flächen entstehen können), so sind die Hüllen ebenfalls spezielle Körper, da ja in der einen Ecke, und somit in allen (weil das Polyeder gleicheckig sein soll) mehr als drei Flächen durch einen Punkt gehen. Ausser den schon gefundenen beiden Sphenoidgruppierungen hat die genannten Eigenschaften nur die zweite Gruppierung rhombischer Sphenoide für den Fall, dass der Kern eine besondere Varietät des Deltoidikositetraeders $\left(\sigma = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \tau = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$, die Hülle das polarreziproke 24-Eck war, also die autopolare Gruppierung rhombischer Sphenoide im 24-Eck für $s = \sqrt{3} - 1$, $t = 2\sqrt{3} - 3$ (Fig. 7 Taf. 5). Wie man in Fig. 13 Taf. 6 sieht, bilden die Verbindungslinien der Ecken der beiden dreiseitigen Grenzflächen in der Reihenfolge $P_1 P_2 P_3 P_1 P_4 P_5 (P_1)$ ein Sechseck dritter Art mit je zwei positiven nnd negativen kongruenten Zellen und einer inneren deltoidförmigen Zelle des Koëffizienten Null. Dies ist die Fläche eines dritten kontinuierlichen Nullpolyeders, dessen Kern und Hülle polarreziproke Polyeder sind und das selbst autopolar ist. Das Modell zeigt Fig. 4 Taf. 24. Die Ecken des Polyeders sind sechskantige der sechsten Art von derselben Konfiguration wie bei den ersten beiden kontinuierlichen Nullpolyedern. Da, wie bei der Sphenoidgruppierung, die die Ecken mit dem Polyeder gemein hat, $\lambda = \mu = (2+\sqrt{3})a$, $\nu = (3+2\sqrt{3})a$ ist, so gilt für die Kanten des Hüllpolyeders: $k_2 : k_3 = 1 : \frac{\sqrt{3}+1}{2}\sqrt{2}$. Die Kanten der Grenzfläche sind die drei Kanten des rhombischen Sphenoids. Es ist:

$P_1P_2 = P_1P_4 = 2a\sqrt{9+5\sqrt{3}}$, $P_2P_3 = P_4P_5 = 4a\sqrt{7+4\sqrt{3}}$, $P_1P_3 = P_1P_5 = 2a\sqrt{33+19\sqrt{3}}$.

Für die Art A des Polyeders findet man, da $\Sigma\alpha = 24.6$, $\Sigma a = 24.3$, $K = 24.3$ und $\Sigma\varkappa = 24.3$ ist, $A = 36$ wie für die beiden vorigen Nullpolyeder. Sind hiermit die aus Sphenoidgruppierungen ableitbaren Nullpolyeder bereits erschöpft, so noch nicht die aus den allgemeinen Stephanoidgruppierungen sich ergebenden. Kehren wir zurück zu dem System von Stephanoiden der ersten und dritten Gruppe, die ein gemeinsames Kern- und Hüllpolyeder besitzen, für welche $\sigma = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$, $\tau = 3-\sqrt{2}$ und $s = \frac{3\sqrt{2}+2}{7}$, $t = \frac{3+\sqrt{2}}{7}$ ist. Fig. 1 Taf. 9 zeigt die beiden Grenzflächen $A_1A_2A_3A_4$ und $A_1A_3A_2A_5$ der beiden Stephanoidgruppierungen (vergl. Fig. 8 Taf. 8 und Fig. 9 Taf. 8) in einer vollständigen Figur des Hexakisoktaeders. Die Ecken des gemeinschaftlichen 2.24-Ecks der beiden Stephanoidgruppierungen sind nun zugleich die Ecken eines neuen Nullpolyeders, dessen Fläche das Sechseck $A_1A_4A_3A_1A_5A_2(A_1)$ ist. Diese Fläche besteht aus zwei positiven dreieckigen Zellen und einer negativen viereckigen Zelle, während die innere, die Fläche des Hexakisoktaeders enthaltende Zelle Null ist. Der Gesamtinhalt der Fläche, die Summe zweier Stephanoidflächen, ist Null. Die drei Kanten A_1A_2, A_2A_5 und A_5A_1 kehren dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises ihre Aussenseite, die übrigen die Innenseite zu. Die Winkel A_2 und A_5 sind überstumpf. Die Art der Fläche ist $a = 3$. Auch diese nichtkonvexe Grenzfläche hat zwei ihrer Ecken in einer Ecke des umhüllenden 2.24-Ecks, so dass die Ecken des Nullpolyeders, obgleich die Grenzfläche durch jede ihrer Ecken nur vier Ebenenspuren aufweist, sechskantig sind. Bei diesen sechskantigen Ecken liegen also zwei Seitenflächen in einer Ebene. Jede Ecke hat vier ausspringende und zwei einspringende Kantenwinkel (vergl. die Fig. 12 Taf. 6 der Ecke mit der Figur der Fläche des Polyeders) und von ihren Flächenwinkeln ist einer überstumpf, die fünf übrigen sind ausspringend. Die Art der Ecke ist $\alpha = 5$. Dann gilt für die Art des Polyeders die Gleichung $2A = 48.3 + 48.5 - 48.3 - 48.2$, d. h. $A = 72 = \frac{K}{2}$. Das Modell dieses autopolaren Nullpolyeders zeigt Fig. 11 Taf. 25, sowie Fig. 12 Taf. 26. Da die Grenzfläche von allen Arten Achsen A, B und C getroffen wird, so ist die Oberfläche des Polyeders eine geschlossene, aber der innerste Kern, das Hexakisoktaeder ist nicht realisiert. Die Koordinaten der Ecken einer Grenzfläche sind die der Flächen der Stephanoide der ersten und dritten Gruppe, d. h. es ist: $A_1 \equiv 23\ (-\lambda, \nu, \mu)$; $A_2 \equiv 15\ (\lambda, -\nu, \mu)$; $A_3 \equiv 28\ (\lambda, \nu, -\mu)$; $A_4 \equiv 17\ (-\mu, -\nu, \lambda)$; $A_5 \equiv 32\ (\nu, -\lambda, -\mu)$. Von den Kanten der Grenzfläche sind je zwei gleich und es sind diese Kanten nach aufsteigender Grösse

$$A_1 A_3 = A_2 A_5 = 2\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = 2a\sqrt{2(10-\sqrt{2})},$$
$$A_1 A_5 = A_1 A_4 = 2\sqrt{\nu^2 + \mu^2} = 2a\sqrt{2(27+12\sqrt{2})},$$
$$A_1 A_2 = A_3 A_4 = 2\sqrt{\lambda^2 + \nu^2} = 2a\sqrt{2(26+17\sqrt{2})},$$

da die sich zunächst aus den Koordinaten ergebenden Ausdrücke für die Quadrate der Kanten sich vereinfachen lassen, weil wegen der besonderen Werte von λ, μ, ν die Relationen $2\lambda = \nu - \mu$, $2\lambda\mu = \lambda^2 - \mu^2$ gelten und $\mu = (3-2\sqrt{2})a$, $\lambda = (2\sqrt{2}+1)a$, $\nu = (5+3\sqrt{2})a$ ist. Der Radius der umbeschriebenen Kugel des Polyeders hat den einfachen Wert $a\sqrt{7(9+4\sqrt{2})}$. — Weitere nichtkonvexe Polyeder der zweiten Klasse, deren Art also bei Vertauschung der beiden Oberflächenseiten umgeändert bleibt, existieren für den Hexakisoktaedertypus nicht, wenn die Polyeder zugleich gleicheckig und gleichflächig sein sollen. Denn erteilt man den beiden Dreiecken, aus denen die Grenzfläche irgend einer Sphenoidgruppierung für alle die Fälle zusammengesetzt ist, in denen der innere Kern ein besonderes (24-flächiges) Polyeder des Typus darstellt, ohne dass Ecken der beiden Dreiecke zusammenfallen, verschiedene Vorzeichen, so erhält man nichtkonvexe Polyeder, die zwar kongruente sechskantige Grenzflächen der Art $\alpha = 3$ und des Inhalts Null besitzen, wie sie Fig. 5 Taf. 1 zeigt, deren dreikantige Ecken aber in zwei gleichmächtige Gruppen von Ecken verschiedener Art zerfallen. Denn während die von drei Ecken A, C, E gebildete körperliche Ecke die Art 1 besitzt, hat eine von den drei Ecken B, D, F gebildete Polyederecke drei überstumpfe Kantenwinkel und ist von dem vierten Typus (vergl. die Tabelle in Kap. I § 1 Nr. 2), d. h. der Art $\alpha = 5$. Diese Polyeder sind also gleichflächig, aber nicht gleicheckig. Vertauscht man die Innenseite ihrer Oberfläche mit der Aussenseite, so geht jede Fläche in sich selbst über, ebenso das ganze Polyeder, dessen Art also $A = \frac{K}{2}$ ist. Eine weitere Betrachtung solcher Vielflache müssen wir als nur beiläufig der Anm.[1]) zuweisen.

6. **Die nichtkonvexen Polyeder erster Klasse des Hexakisoktaedertypus.** Von den drei im Hexakisoktaedertypus existierenden nichtkonvexen Polyedern erster Klasse sind zwei bereits von Hess angegeben worden. Ihre Ecken fallen mit denen der beiden ersten in voriger Nummer beschriebenen kontinuierlichen Nullpolyeder zusammen und beide Polyeder sind einander reziprok. Verbindet man die Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ in der vollständigen Figur der A. V. des Triakisoktaeders in der genannten Reihenfolge (Fig. 10 Taf. 4), so entsteht ein nichtkonvexes Fünfeck zweiter Art mit einer positiven deltoidförmigen Zelle und einer negativen dreikantigen Zelle, von deren fünf Winkeln zwei, die bei P_3 und P_4, überstumpf, die anderen konvex sind. Das von 24 solchen Flächen, deren Inhalt grösser als Null ist, begrenzte Polyeder hat also als Kern und Hülle, wie das Nullpolyeder, das die Ecken mit ihm gemein hat, die A. V. des Triakis-

---

1) Wir wählen als Beispiel eines solchen gleichflächigen, aber nicht gleicheckigen, Nullpolyeders das, dessen Kern das Rhombendodekaeder ist, und dessen Ecken die Ecken der A. V. des $(6+8)$-flächigen 4.6-Ecks sind. Dieses Polyeder zeichnet sich durch seine Einfachheit aus, denn es besitzt nur abwechselnde positive und negative Raumzellen des Koëffizienten 1, von denen je vier längs einer Geraden — den Geraden $A_1 N$ oder $A_2 N$ in der Figur der Grenzfläche, Fig. 9 Taf. 7 — zusammenhängen, während die sechs Komplexe von je vier so zusammenhängenden Zellen nur in den Achsenpunkten B, den Doppelpunkten des Sechsecks, einen punktuellen Zusammenhang besitzen. Das ganze Innere des Polyeders fällt heraus. Es ist $\Sigma a = 12.3$, $\Sigma \alpha = 12.1 + 12.5$, $K = 12.3$, $\Sigma \varkappa = 12.3$, d. h. $A = 18 = \frac{K}{2}$. Von den sechs den Körper bildenden Sphenoiden sind drei von innen, drei von aussen zu färben. — Die polarreziproken Polyeder sind natürlich gleicheckig, aber nicht gleichflächig. Ein solches Vielflach besitzt lauter sechskantige Ecken, die bei Umkehrung der Färbung in sich selbst übergehen, deren Art also $\alpha = 6$ ist. Die Flächen sind aber zwei Gruppen kongruenter Dreiecke, mit teils innerer, teils äusserer Färbung, also von der Art 1 bezw. 2. Wählen wir als Beispiel das zu dem eben beschriebenen polare Polyeder, dessen Kern die A. V. des Tetrakishexaeders, dessen Hülle das Kubooktaeder ist. Es ist $\Sigma a = 12.1 + 12.2$, $\Sigma \alpha = 12.6$, $K = 36$, $\Sigma \varkappa = 12.3$, denn jedes der innen gefärbten Dreiecke hat drei überstumpfe Winkel, d. h. $A = 18 = \frac{K}{2}$. Das Modell dieses Polyeders ist genau das der Fig. 3 Taf. 22, nur sind alle äusserlich sichtbaren dreieckigen Begrenzungsteile der Oberfläche abwechselnd schwarz und weiss gefärbt. Die auf dem inneren Tetrakishexaeder aufsitzenden körperlichen Zellen sind abwechselnd positiv und negativ, während die innerste Zelle selbst den Koëffizienten Null besitzt. Wir können hier auf diese Gruppe gleicheckiger oder gleichflächiger Nullpolyeder nicht weiter eingehen.

oktaeders und die A. V. des $(6+8+12)$-flächigen 24-Ecks. Jede der 24 kongruenten fünfkantigen Ecken des Polyeders, deren Querschnitt Fig. 9 Taf. 6 zeigt, besitzt zwei überstumpfe Kantenwinkel (CD und DE) und drei überstumpfe Flächenwinkel (C, D und E) und hat die Art $\alpha = 4$. Die Art A des Polyeders ist also (weil $\Sigma\alpha = 24.4$, $\Sigma a = 24.2$, $K = 12.5$, $\Sigma\varkappa = 24.2$) $A = 18$. Das Modell dieses 24-eckigen 8.3-Flaches der 18. Art ist in Fig. 6 Taf. 24 dargestellt. Was übrigens die Koordinaten der Ecken einer Grenzfläche und deren Kanten betrifft, so sind nur die bereits früher berechneten Werte abzuschreiben, denen die Kante $P_3P_4 = 2\lambda\sqrt{2} = 2(2+\sqrt{2})a$ hinzuzufügen ist. Vertauscht man bei diesem Polyeder die Aussenseite mit der Innenseite, so ist die Art $A' = K - A = 42$, d. h. verschieden von A. — Das diesem ersten Polyeder polarreziproke hat zum Kerne die A. V. des Deltoidikositetraeders, zur Hülle die A. V. des $(6+8)$-flächigen 8.3-Ecks. In der vollständigen Figur des Kernes (Fig. 4 Taf. 4) ergibt sich die Grenzfläche des Polyeders durch Verbindung der Punkte $P_1P_2P_3P_4P_5$ als konvexes Fünfeck zweiter Art mit lauter positiven Zellenkoëffizienten; doch wendet die Kante P_3P_4 dem Mittelpunkte der Fläche ihre Aussenseite zu. Die Ecken des nichtkonvexen Polyeders besitzen nur einen überstumpfen Flächenwinkel, längs dessen Kante zwei Flächen in den Geraden P_3P_4 an einander grenzen, während die übrigen Flächenwinkel und sämtliche Kantenwinkel konvex sind. Die Art der Ecke ist sonach $\alpha = 2$. Für dieses Polyeder, dessen Modell Fig. 5 Taf. 24 zeigt, ist $\Sigma a = 24.2$, $\Sigma\alpha = 24.2$, $K = 5.12$, $\Sigma\varkappa = 0$, also $A = 18$. Zu den bereits früher berechneten Kanten $P_1P_2 = P_1P_5$, $P_2P_3 = P_4P_5$ ist noch $P_3P_4 = 2\lambda\sqrt{2} = 2(3\sqrt{2}+2)a$ zu fügen.

Das dritte nichtkonvexe Polyeder erster Klasse im Hexakisoktaedertypus hat zum Kerne die besondere Varietät des Hexakisoktaeders, $\sigma = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$, $\tau = 3-\sqrt{2}$, für welche die Stephanoide der ersten und dritten Gruppe eine gemeinsame umbeschriebene Kugel besitzen und die zu einem kontinuierlichen Nullpolyeder führte. Verbindet man die Punkte, die die Ecken einer Fläche jenes Nullpolyeders bilden (vergl. Fig. 4 Taf. 9) in der Reihenfolge $A_1A_4A_3A_2A_5(A_1)$, so erhält man ein Fünfeck zweiter Art mit zwei positiven und einer negativen Flächenzelle (der absolut genommen kleinsten), das einen überstumpfen Winkel in A_3 besitzt. Das von 48 solchen Fünfecken begrenzte nichtkonvexe Polyeder, dessen Modell in Fig. 12 Taf. 25 dargestellt ist, hat 2.24 fünfkantige Ecken, 24 rechte und 24 linke, von der durch Fig. 10 Taf. 6 angedeuteten Gestalt des Querschnittes. Eine solche Ecke hat **einen** überstumpfen Kantenwinkel, den Winkel A_3 der Grenzfläche, und **einen** überstumpfen Flächenwinkel, dessen Kante A_3A_4 ist. Ihre Art ist $\alpha = 3$. Da also für das Polyeder $\Sigma a = 48.2$, $\Sigma \alpha = 48.3$, $K = 24.5$ und $\Sigma \varkappa = 48.1$ ist, so ergibt sich nach der Formel von Hess für seine Art der Wert $A = 36$. Das Polyeder ist **autopolar**. Für die Kanten der Grenzfläche hat man die Werte, die bei dem letzten kontinuierlichen Nullpolyeder angeführt sind, zu nehmen. Die Grenzfläche hat also nur drei nach ihrer Grösse verschiedene Kanten: A_2A_5, $A_1A_5 = A_1A_4 = A_2A_3$ und A_3A_4.

Es ist hier der Ort, auf jenes neunte in der Übersicht Kap. I § 3 angegebene konvexe kontinuierliche gleicheckig-gleichflächige Polyeder hinzuweisen, das den acht bereits von Hess beschriebenen konvexen kontinuierlichen Polyedern beizufügen ist. Allerdings muss man dann auch für konvexe Polyeder die Eigentümlichkeit für die Grenzfläche zulassen, dass zwei ihrer Ecken in einer Ecke des Hüllpolyeders zusammenfallen, sowie für die Ecke, dass zwei ihrer Seitenflächen in einer Ebene liegen und sich somit zum Teil überdecken. Verbindet man nämlich in der eben behandelten Figur des Hexakisoktaeders (Fig. 10 Taf. 8) die Punkte A in der Reihenfolge $A_2A_5A_1A_4A_3A_1(A_2)$, so ergibt sich ein konvexes kontinuierliches Sechseck zweiter Art mit drei äusseren Zellen des Koëffizienten 1 und einer inneren Zelle mit dem Koëffizienten 2. Das von 48 solchen Flächen begrenzte Polyeder besitzt sechskantige Ecken des Querschnittes α, β, γ, δ, ε, ζ wie Fig. 4 Taf. 6 zeigt, ohne überstumpfe ebene und Flächenwinkel, die von der Art $\alpha = 2$ sind. Die beiden Flächen $\alpha\beta \equiv A_4A_1A_5$ und $\delta\varepsilon \equiv A_2A_1A_3$ der Ecke liegen in einer Ebene. Die Art des Polyeders ist, da $\Sigma a = 48.2$, $\Sigma \alpha = 48.2$, $K = 48.3$ und $\Sigma \varkappa = 0$ ist, $A = 24$. Überdies ist das Polyeder **autopolar**. Es ist das einzige gleicheckig-gleichflächige kontinuierliche konvexe Polyeder des Hexakisoktaedertypus.[1])

[1]) Das Modell ist nicht dargestellt. Sein Äusseres stimmt mit Fig. 11 Taf. 25 überein, wenn man sich die nach dem Innern dieses Modells führenden, durch das Ausfallen der Flächenstücke $A_2A_1A_5$ der Grenzfläche bewirkten Öffnungen durch Fortsetzung der Ebenen $A_4A_1A_2$ und $A_5A_1A_3$ geschlossen denkt.

Zum Schlusse wäre nun noch die Frage zu beantworten, ob in der Tat mit den bisher besprochenen alle im Hexakisoktaedertypus möglichen diskontinuierlichen und nichtkonvexen Polyeder erschöpft seien. Ein strenger Beweis wird sich dafür umsoweniger führen lassen, als die unbeschränkte Variabilität der Grössen σ und τ der Kernpolyeder innerhalb des Gebietes der konvexen Hexakisoktaeder verlangen würde, eine unendliche Menge vollständiger Figuren des Hexakisoktaeders und der besonderen gleichflächigen Polyeder zu untersuchen. Es läge immerhin die Vermutung nahe, dass für besondere Werte von σ und τ sich weitere nichtkonvexe Polyeder ergäben. Doch beachte man folgende Bemerkungen. Sicher ist bereits die Reihe derjenigen Polyeder erschöpft, die Gruppierungen von Sphenoiden und Stephanoiden darstellen. Verfolgt man aber ein diskontinuierliches konvexes gleicheckig-gleichflächiges Polyeder zurück auf die kontinuierlichen Einzelpolyeder, so sind diese selbst konvex und gleicheckig-gleichflächig. Sind sie selbst von der ersten Art, so können es nur quadratische oder rhombische Sphenoide sein, da andere gleichflächig-gleicheckige Polyeder erster Art, ausser den regulären Polyedern,[1]) nicht existieren. Diese Polyeder sind aber gewiss erledigt. Bleibt die zweite Möglichkeit, dass bereits die Einzelpolyeder von höherer als erster Art sind. Solche gleicheckig-gleichflächige Polyeder müssten aber selbst dem Hexakisoktaedertypus angehören oder dem Doppelpyramidentypus, und deren sind keine vorhanden, ausser dem einen oben angeführten 48-Flach; d. h. es gibt keine weiteren diskontinuierlichen konvexen Polyeder. — Was nun die kontinuierlichen nichtkonvexen Polyeder beider Klassen anbetrifft, so sind trotz planmässigen Untersuchens der vollständigen Figuren aller irgendwie ausgezeichneten inneren Kerne keine weiteren als die beschriebenen Polyeder gefunden worden. Ob es deren noch geben kann, bleibt aber eine offene Frage, wiewohl es auffällig erscheinen muss, dass alle vorhandenen nichtkonvexen Polyeder beider Klassen in engen Zusammenhang mit den Sphenoid- und Stephanoidgruppierungen, die sicher vollständig erledigt sind, gebracht werden können.

[1]) Das Tetraeder trat tatsächlich als Spezialfall quadratischer Sphenoide auf!

IV. Kapitel.

Die Polyeder des Dyakishexekontaedertypus.

§ 1. Die gleichflächigen und die gleicheckigen Polyeder erster Art des Dyakishexekontaedertypus.

1. Übersicht dieser Polyeder. Zum Dyakishexekontaedertypus gehören die folgenden gleichflächigen und die ihnen polaren gleicheckigen Polyeder erster Art, denen sämtliche Symmetrieebenen des Typus zukommen:

(Gleichflächige Polyeder).	(Gleicheckige Polyeder).
1. Das (12 + 20 + 30)-eckige 2.60-Flach oder Dyakishexekontaeder.	1. Das (12 + 20 + 30)-flächige 2.60-Eck (kurz: 2.60-Eck).
2. Das (12 + 20 + 30)-eckige 60-Flach oder Deltoidhexekontaeder.	2. Das (12 + 20 + 30)-flächige 60-Eck (kurz: 60-Eck).
3. Das (12 + 20)-eckige 20.3-Flach oder Triakisikosaeder.	3. Das (12 + 20)-flächige 20.3-Eck (kurz: 20.3-Eck).
4. Das (12 + 20)-eckige 12.5-Flach oder Pentakisdodekaeder.	4. Das (12 + 20)-flächige 12.5-Eck (kurz: 12.5-Eck).
5. Das (12 + 20)-eckige 30-Flach oder Triakontaeder.	5. Das (12 + 20)-flächige 30-Eck (Triakontagon).
6. Das (reguläre) Ikosaeder.	6. Das (reguläre) Dodekaeder.
7. Das (reguläre) Dodekaeder.	7. Das (reguläre) Ikosaeder.

Alle diese Körper sind in dem ersten enthalten, nach dem der Typus daher benannt ist. Die Körper 6. und 7. sind regulär, die 5. sind archimedeische Polyeder, während die übrigen allgemeiner sind und nur archimedeische Varietäten besitzen. Das allen Körpern[1]) gemeinsame Achsensystem

[1]) S. Hess. Über die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder. Cassel 1876. S. 13 ff. Die Abbildungen der Polyeder s. V. u. V. Tafel VII.

entsteht bei dem allgemeinsten gleichflächigen Polyeder 1. des Typus dadurch, dass sämtliche Ecken mit dem Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel verbunden werden. Die zwölf $(5+5)$-kantigen Ecken des gleichflächigen Körpers 1. geben, da je zwei gegenüberliegen, zwölf zu je zweien eine Achse bildende Strahlen. Diese sechs Achsen sind fünfzählig und ergeben auf einer konzentrischen Kugel ein sphärisches Netz von 20 kongruenten regulären Dreiecken, dem als einbeschriebenes Polyeder das reguläre Ikosaeder, als umbeschriebenes das reguläre Dodekaeder entspricht. Die Endpunkte dieser Achsen seien mit $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ bezw. $G'_1, G'_2, G'_3, G'_4, G'_5, G'_6$ bezeichnet (vergl. Fig. 6 Taf. 9). Die 20 $(3+3)$-kantigen Ecken liefern 20 Strahlen, die zehn dreizählige Achsen bilden. Auf der Kugel ergeben sie ein sphärisches Netz von zwölf kongruenten regulären Fünfecken, dem als einbeschriebenes Polyeder das Dodekaeder, als umbeschriebenes das Ikosaeder zukommt. Die Endpunkte der Achsen seien $C_1, C_2, \ldots C_9, C_{10}$ bezw. $C'_1, C'_2, \ldots C'_9, C'_{10}$. Die 30 $(2+2)$-kantigen Ecken endlich liefern 30 Strahlen bezw. 15 Achsen, die zweizählig sind und auf der Kugel ein sphärisches Netz bilden, dem als einbeschriebenes Polyeder das Triakontaeder, als umbeschriebenes das $(12+20)$-flächige 30-Eck entspricht. Die Endpunkte dieser Achsen seien $B_1, B_2, \ldots B_{14}, B_{15}$ bezw. $B'_1, B'_2, \ldots B'_{14}, B'_{15}$. Die Ebenen der 15 grössten Kreise auf der konzentrischen Kugel durch die Achsen G, C, B sind die Symmetrieebenen des Dyakishexekontaeders. Je drei benachbarte Strahlen, nämlich ein zwei-, drei- und fünfzähliger Strahl, bestimmen also eine dreiflächige Ecke, deren körperlicher Winkel den 120. Teil der Kugelfläche beträgt und deren Flächenwinkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{5}$ sind. Bezeichnet man nun für das allgemeinste Polyeder des Typus die Länge der drei Strahlen nach den betreffenden Ecken mit G, C und B, so seien die Winkel die diese Strahlen unter einander bilden: $\sphericalangle\, G, B = \varphi$, $\sphericalangle\, G, C = \chi$, $\sphericalangle\, C, B = \psi$. Es gilt dann:

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\sin\frac{\pi}{10};\ \tan 2\varphi = 2, \qquad \varphi = 31^0\ 43'\ 2'',9.$$

$$\tan\chi = 3-\sqrt{5} = 2\tan^2\varphi; \qquad \chi = 37^0\ 22'\ 38'',5.$$

$$\tan\psi = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \tan^2\varphi;\ \tan 2\psi = \frac{2}{\sqrt{5}} = \sin 2\varphi; \qquad \psi = 20^0\ 54'\ 18'',6.$$

Es ist $\varphi+\chi+\psi=90^0$. Überdies seien noch für spätere Verwendung[1]) die Werte angeführt:

$$\cot\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \sin\varphi=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}},\ \cos\varphi=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}},\ \cos\psi=\frac{\cot\varphi}{\sqrt{3}},\ \sin\psi=\frac{\tan\varphi}{\sqrt{3}}.$$

Legt man durch die Endpunkte G, C, B je dreier benachbarter Strahlen Ebenen, so erhält man die 120 Grenzflächen des gleichflächigen Dyakishexekontaeders 1., die ungleichkantige Dreiecke sind, 60 rechte und 60 linke Flächen. Der polarreziproke Körper, das $(12+20+30)$-flächige 2.60-Eck, entsteht, falls man in den Endpunkten der Achsen senkrechte Ebenen zu ihnen legt. Die den 120. Teil der Kugel enthaltende Zentralecke ist die Polarecke zu jeder Ecke des gleicheckigen Polyeders, das 60 rechte und 60 linke (symmetrische) Ecken besitzt. Die gleichflächigen Polyeder 2.—7. ergeben sich nun aus dem ersten für bestimmte Verhältnisse der Länge der Strahlen G, C und B. Wir setzen die Länge der Achse C für alle Körper konstant. Bezeichnen wir dann für das Dodekaeder die Länge des fünfzähligen und zweizähligen Strahles mit G_d und B_d, so ist:

$$G_d=\frac{C}{\sqrt{3}}\cot\varphi\,.\cos\varphi;\quad B_d=\frac{C}{\sqrt{3}}\cot\varphi.$$

Für die übrigen gleichflächigen Polyeder setzen wir nun $B=B_d.\sigma$, $G=G_d.\tau$, worin σ und τ reelle Parameter sind, die nur für das Dodekaeder zugleich 1 sind; sonst sind sie $\geqq 1$, damit das zugehörige Polyeder konvex ist. Die Maximalwerte σ_m und τ_m ergeben sich für das Ikosaeder, für $\sigma>\sigma_m$ und $\tau>\tau_m$ werden die entstehenden Polyeder zu nichtkonvexen (Koiloëdern).

2. **Analytisch-geometrische Behandlung des Dyakishexekontaeders.** Zur analytisch-geometrischen Behandlung der sämtlichen Polyeder des Typus führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, das sich wegen der Relation $\varphi+\chi+\psi=90^0$ von selbst darbietet. Die Lage der positiven x-, y- und z-achse sei die gleiche wie bei dem Koordinatensystem im vorigen Kapitel, somit auch die Vorzeichen in den acht Oktanten.

---

[1]) Für die Rechnung beachte man auch folgende Relationen: $\cot\varphi=1+\tan\varphi$; $\cot^2\varphi=1+\cot\varphi=2+\tan\varphi$; $\tan^2\varphi=1-\tan\varphi=2-\cot\varphi$; $\cot^3\varphi=1+2\cot\varphi$; $\tan^3\varphi=2\tan\varphi-1$; $\cot^4\varphi=2+3\cot\varphi$; $\tan^4\varphi=2-3\tan\varphi$.

Es falle die Achse B_1 mit der positiven z-achse, die Achse B_{13} mit der positiven x-achse und die Achse B_{15} mit der positiven y-achse zusammen.[1]) Setzen wir dann noch zur Abkürzung $\frac{C}{\sqrt{3}} = a$, so sind die Koordinaten der $12 + 20 + 30$ Ecken des Dyakishexekontaeders die folgenden:

$$B_1\ (0,\ 0,\ a \cot\varphi.\sigma);\quad B_{13}\ (a\cot\varphi.\sigma,\ 0,\ 0);\quad B_{15}\ (0,\ a\cot\varphi.\sigma,\ 0);$$

$$B_2\left(\frac{a}{2}\cot\varphi.\sigma,\ \frac{a}{2}\sigma,\ \frac{a}{2}\cot^2\varphi.\sigma\right);\quad B_{11}\left(-\frac{a}{2}\sigma,\ -\frac{a}{2}\cot^2\varphi.\sigma,\ \frac{a}{2}\cot\varphi.\sigma\right);$$

$$B_{12}\left(-\frac{a}{2}\cot^2\varphi.\sigma,\ \frac{a}{2}\cot\varphi.\sigma,\ \frac{a}{2}\sigma\right);\quad B_3\left(\frac{a}{2}\cot\varphi.\sigma,\ -\frac{a}{2}\sigma,\ \frac{a}{2}\cot^2\varphi.\sigma\right);$$

$$B_7\left(-\frac{a}{2}\sigma,\ \frac{a}{2}\cot^2\varphi.\sigma,\ \frac{a}{2}\cot\varphi.\sigma\right);\quad B_{14}\left(-\frac{a}{2}\cot^2\varphi.\sigma,\ -\frac{a}{2}\cot\varphi.\sigma,\ \frac{a}{2}\sigma\right);$$

$$B_4\left(-\frac{a}{2}\cot\varphi.\sigma,\ \frac{a}{2}\sigma,\ \frac{a}{2}\cot^2\varphi.\sigma\right);\quad B_8\left(\frac{a}{2}\sigma,\ -\frac{a}{2}\cot^2\varphi.\sigma,\ \frac{a}{2}\cot\varphi.\sigma\right);$$

$$B_9\left(\frac{a}{2}\cot^2\varphi.\sigma,\ \frac{a}{2}\cot\varphi.\sigma,\ \frac{a}{2}\sigma\right);\quad B_5\left(-\frac{a}{2}\cot\varphi.\sigma,\ -\frac{a}{2}\sigma,\ \frac{a}{2}\cot^2\varphi.\sigma\right);$$

$$B_6\left(\frac{a}{2}\sigma,\ \frac{a}{2}\cot^2\varphi.\sigma,\ \frac{a}{2}\cot\varphi.\sigma\right);\quad B_{10}\left(\frac{a}{2}\cot^2\varphi.\sigma,\ -\frac{a}{2}\cot\varphi.\sigma,\ \frac{a}{2}\sigma\right).$$

Die Punkte $B'_1, B'_2, \ldots B'_{15}$ haben die jeweils entgegengesetzt gleichen Koordinaten.

$$G_1\ (0,\ a\cos^2\varphi.\tau,\ a\cot\varphi\cos^2\varphi.\tau);\quad G_2\ (0,\ -a\cos^2\varphi.\tau,\ a\cot\varphi\cos^2\varphi.\tau);$$
$$G_3\ (a\cot\varphi\cos^2\varphi.\tau,\ 0,\ a\cos^2\varphi.\tau);\quad G_4\ (-a\cot\varphi\cos^2\varphi.\tau,\ 0,\ a\cos^2\varphi.\tau);$$
$$G_5\ (a\cos^2\varphi.\tau,\ a\cot\varphi\cos^2\varphi.\tau,\ 0);\quad G_6\ (-a\cos^2\varphi.\tau,\ a\cot\varphi\cos^2\varphi.\tau,\ 0).$$

Die Punkte $G'_1 \ldots G'_6$ haben die jeweils entgegengesetzt gleichen Koordinaten.

$$C_1\ (a\tan\varphi,\ 0,\ a\cot\varphi);\quad C_2\ (-a\tan\varphi,\ 0,\ a\cot\varphi);\quad C_7\ (0,\ a\cot\varphi,\ a\tan\varphi);$$
$$C_8\ (0,\ -a\cot\varphi,\ a\tan\varphi);\quad C_9\ (a\cot\varphi,\ a\tan\varphi,\ 0);\quad C_{10}\ (a\cot\varphi,\ -a\tan\varphi,\ 0);$$
$$C_3\ (a,\ a,\ a);\quad C_4\ (a,\ -a,\ a);\quad C_5\ (-a,\ a,\ a);\quad C_6\ (-a,\ -a,\ a).$$

Für die Koordinaten der Punkte $C'_1, C'_2 \ldots C'_{10}$ gilt gleiches wie vorher. Jede der 120 mit einer Nummer versehenen Grenzflächen des Dyakishexekontaeders ist nun durch drei Punkte G, C und B bestimmt. Die Bezeichnung der Flächen und ihre Lage zu den Achsen möge man aus Fig. 6 Taf. 9 entnehmen. — Im ersten Oktanten liegen 15 Flächen des Polyeders;

[1]) Um nicht zu weitläufig zu werden, verweisen wir für die Lage der übrigen Achsen auf Fig. 6 Taf. 9, die einen raschen Überblick gestattet.

die 15 Flächen jedes der übrigen Oktanten sind die direkten oder indirekten Spiegelbilder der 15 Flächen des ersten Oktanten an den drei Koordinatenebenen, die Symmetrieebenen des Polyeders sind. Dreht man nun das System der 15 Flächen eines Oktanten um die durch seine Mitte verlaufende Achse C, so kommt es, abgesehen von der identischen Stellung, noch zweimal mit seinen Flächen zur Deckung, d. h. es bilden je drei Flächen eines Oktanten auf den Koordinatenachsen Abschnitte, die bei zyklischer Vertauschung der Koordinatenachsen zur Deckung kommen. Die Gleichungen solcher drei Flächen enthalten also dieselben Koëffizienten von x, y, z, zyklisch vertauscht. Daraus folgt mit dem Vorhergehenden, dass je $8 \cdot 3$ Flächen des Polyeders dieselben zyklisch vertauschten Koëffizienten besitzen, deren Vorzeichen sich nach dem Oktanten richtet, in dem die Fläche liegt. Die 120 Flächen des Dyakishexekontaeders zerfallen also in fünf Gruppen von je 24 Flächen, deren Gleichungen in Summa 15 Koëffizienten enthalten, die von den Parametern σ und τ abhängen und in denen neben der Konstanten $a = \frac{c}{\sqrt{3}}$ noch trigonometrische Funktionen des Winkels φ auftreten. Ist die Reihenfolge der Vorzeichen für die Koëffizienten wieder die frühere (Kap. III § 1 Nr. 2 unter 6.) und setzt man zur Abkürzung $\tau \cos^2 \varphi = \vartheta$, $a \sigma \tau \cos^2 \varphi = a \sigma \vartheta = d$, so sind die fünf Gruppen von Ebenen mit ihren Gleichungen und Koëffizienten die folgenden:

$$\text{1. Gruppe} \begin{cases} 1)\ 11)\ 20)\ 10)\quad 101)\ 111)\ 120)\ 110) & \pm a_1 x \pm b_1 y \pm c_1 z - d = 0. \\ 43)\ 53)\ 58)\ 48)\quad 63)\ 73)\ 78)\ 68) & \pm c_1 x \pm a_1 y + b_1 z - d = 0. \\ 25)\ 85)\ 86)\ 26)\quad 35)\ 95)\ 96)\ 36) & \pm b_1 x \pm c_1 y \pm a_1 z - d = 0. \end{cases}$$

$$75)\qquad \begin{cases} a_1 = (\sigma - 1)\,\vartheta \cot \varphi. \\ b_1 = \sigma - \vartheta. \\ c_1 = \vartheta \tan \varphi. \end{cases}$$

$$\text{2. Gruppe} \begin{cases} 2)\ 21)\ 30)\ 9)\quad 91)\ 112)\ 119)\ 100) & \pm a_2 x \pm b_2 y \pm c_2 z - d = 0. \\ 33)\ 52)\ 59)\ 38)\quad 62)\ 83)\ 88)\ 69) & \pm c_2 x \pm a_2 y \pm b_2 z - d = 0. \\ 15)\ 75)\ 76)\ 16)\quad 45)\ 105)\ 106)\ 46) & \pm b_2 x \pm c_2 y \pm a_2 z - d = 0. \end{cases}$$

$$76)\qquad \begin{cases} a_2 = \vartheta \cot \varphi - \frac{\sigma \vartheta}{2} - \frac{\sigma}{2} \cot \varphi. \\ b_2 = \vartheta - \frac{\sigma \vartheta}{2} \cot^2 \varphi + \frac{\sigma}{2}. \\ c_2 = \frac{\sigma}{2} \tan \varphi + \frac{\sigma \vartheta}{2} \cot \varphi - \vartheta \tan \varphi. \end{cases}$$

$$\text{3. Gruppe}\begin{cases} 12)\ 22)\ 29)\ 19)\quad 92)\ 102)\ 109)\ 99) & \pm a_3x \pm b_3y \pm c_3z - d = 0. \\ 34)\ 74)\ 77)\ 37)\quad 44)\ 84)\ 87)\ 47) & \pm c_3x \pm a_3y \pm b_3z - d = 0. \\ 5)\ 51)\ 60)\ 6)\quad 61)\ 115)\ 116)\ 70) & \pm b_3x \pm c_3y \pm a_3z - d = 0. \end{cases}$$

$$77)\qquad \begin{cases} a_3 = \frac{\sigma}{2}\cot\varphi - \frac{\sigma\vartheta}{2}. \\ b_3 = 2\vartheta - \frac{\sigma\vartheta}{2}\cot^2\varphi - \frac{\sigma}{2}. \\ c_3 = \frac{\sigma\vartheta}{2}\cot\varphi - \frac{\sigma}{2}\tan\varphi. \end{cases}$$

$$\text{4. Gruppe}\begin{cases} 3)\ 31)\ 40)\ 8)\quad 81)\ 113)\ 118)\ 90) & \pm a_4x \pm b_4y \pm c_4z - d = 0. \\ 23)\ 42)\ 49)\ 28)\quad 72)\ 93)\ 98)\ 79) & \pm c_4x \pm a_4y \pm b_4z - d = 0. \\ 14)\ 65)\ 66)\ 17)\quad 55)\ 104)\ 107)\ 56) & \pm b_4x \pm c_4y \pm a_4z - d = 0. \end{cases}$$

$$78)\qquad \begin{cases} a_4 = \frac{\sigma\vartheta}{2} + \vartheta\tan\varphi - \frac{\sigma}{2}\cot\varphi. \\ b_4 = \frac{\sigma\vartheta}{2}\cot^2\varphi - \vartheta\cot\varphi + \frac{\sigma}{2}. \\ c_4 = \vartheta - \frac{\sigma\vartheta}{2}\cot\varphi + \frac{\sigma}{2}\tan\varphi. \end{cases}$$

$$\text{5. Gruppe}\begin{cases} 13)\ 32)\ 39)\ 18)\quad 82)\ 103)\ 108)\ 89) & \pm a_5x \pm b_5y \pm c_5z - d = 0. \\ 24)\ 64)\ 67)\ 27)\quad 54)\ 94)\ 97)\ 57) & \pm c_5x \pm a_5y \pm b_5z - d = 0. \\ 4)\ 41)\ 50)\ 7)\quad 71)\ 114)\ 117)\ 80) & \pm b_5x \pm c_5y \pm a_5z - d = 0. \end{cases}$$

$$79)\qquad \begin{cases} a_5 = \frac{\sigma\vartheta}{2} - \vartheta + \frac{\sigma}{2}\cot\varphi. \\ b_5 = \frac{\sigma\vartheta}{2}\cot^2\varphi - \vartheta\tan\varphi - \frac{\sigma}{2}. \\ c_5 = \vartheta\cot\varphi - \frac{\sigma\vartheta}{2}\cot\varphi - \frac{\sigma}{2}\tan\varphi. \end{cases}$$

3. **Analytisch-geometrische Behandlung der speziellen gleichflächigen Polyeder des Dyakishexekontaedertypus.** Um die Relationen zwischen den Ableitungskoëffizienten σ und τ, bezw. ϑ, für die speziellen Körper des Typus zu erhalten, bestimmen wir wieder die Winkel zwischen benachbarten Flächen. Bezeichnen wir mit $w_{i,j}$ den Winkel zweier Flächen an einer Kante, die eine i-kantige mit einer j-kantigen Ecke des Dyakishexekontaeders verbindet, so ergibt sich das Deltoidhexekontaeder für $w_{10,6} = 0$, das Triakisikosaeder für $w_{6,4} = 0$ und das Pentakisdodekaeder für $w_{10,4} = 0$, während die drei letzten Polyeder des Typus je zwei Gleichungen

gleichzeitig erfüllen. Bestimmen wir nun $w_{6,4}$ als Winkel zwischen den Flächen 1) und 11), $w_{10,4}$ als Winkel zwischen 1) und 10), $w_{10,6}$ als Winkel zwischen den Flächen 1) und 2), so ergeben sich für die cosinus der Winkel, ausgedrückt durch die Koëffizienten der Gleichungen der betreffenden Ebenen die Werte:

$$\cos w_{6,4} = \frac{a_1^2 - b_1^2 + c_1^2}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2};$$

$$\cos w_{10,4} = \frac{-a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2};$$

$$\cos w_{10,6} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Das Pentakisdodekaeder ergibt sich für $\cos w_{10,4} = 1$, d. h. $a_1 = (\sigma - 1)\vartheta \cot\varphi = 0$, woraus $\sigma = 1$ folgt. Das Triakisikosaeder wird für $\cos w_{6,4} = 1$ erhalten, d. h. es ist $b_1 = \sigma - \vartheta = 0$, also $\sigma = \vartheta$, oder $\sigma = \tau \cos^2\varphi$. Für das Deltoidhexekontaeder ist $\cos w_{10,6} = 1$, d. h. $(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2$. Diese Gleichung lässt sich auf die Form bringen:

$$(b_1 a_2 - a_1 b_2)^2 + (c_1 a_2 - a_1 c_2)^2 + (c_1 b_2 - b_1 c_2)^2 = 0,$$

woraus folgt, dass die Quadrate links einzeln verschwinden. Diese drei Bedingungen ergeben, wenn man die Werte der Koëffizienten einführt und die Relationen berücksichtigt, die für die trigonometrischen Funktionen von φ gelten, für das Deltoidhexekontaeder jede dieselbe Gleichung $4\vartheta - \sigma - \sigma\vartheta\cot^2\varphi = 0$, d. h.:

$$\sigma = \frac{4\vartheta}{1 + \vartheta\cot^2\varphi} \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{\sigma}{(4 - \sigma\cot^2\varphi)\cos^2\varphi}.$$

Für die drei letzten Polyeder des Typus leitet man leicht dann die folgenden Werte für σ und τ ab: Für das Triakontaeder ist zugleich $\sigma = 1$ und $\sigma = \vartheta$, d. h. $\tau = \frac{1}{\cos^2\varphi}$. Für das Ikosaeder folgt aus $\sigma = \frac{4\vartheta}{1 + \vartheta\cot^2\varphi}$ und $\sigma = \vartheta$ $\sigma = \vartheta = 3\tan^2\varphi$, also $\tau = \frac{3\tan^2\varphi}{\cos^2\varphi}$. Für das Dodekaeder endlich ist wegen $\sigma = 1$ und $\sigma = \frac{4\vartheta}{1 + \vartheta\cot^2\varphi}$ $\vartheta = \frac{1}{4 - \cot^2\varphi} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} = \cos^2\varphi$.

Für die archimedeischen Varietäten der drei ersten speziellen Polyeder und des Dyakishexekontaeders findet man die Werte für σ und τ durch Gleichsetzung je zweier cosinus und Berücksichtigung der für σ und τ geltenden eben abgeleiteten Relationen, oder einfacher später aus den Werten von s und t, die für die archimedeischen Varietäten der gleicheckigen Polyeder gelten. Es ist für die A. V. des Pentakisdodekaeders $\sigma = 1$, $\tau = \frac{3(10-\sqrt{5})}{19}$; für die A. V. des Triakisikosaeders: $\sigma = \frac{7\sqrt{5}-5}{10}$, $\tau = 2\sqrt{5}-3$; für die A. V. des Deltoidhexekontaeders $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-9}{2}$, $\tau = \frac{4\sqrt{5}-5}{3}$. Für die A. V. des Dyakishexekontaeders schliesslich haben σ und τ die Werte: $\sigma = \frac{3(3\sqrt{5}+1)}{22}$, $\tau = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. Zur leichteren Übersicht bei späteren Diskussionen stellen wir die Bedingungsgleichungen für die speziellen Polyeder des Typus wieder als Kurven in einem rechtwinkligen Koordinatensystem der σ und τ dar (vergl. Fig. 4 Taf. 11). Es ist $\sigma = 1$ die Gleichung einer Geraden C_1 parallel der τ-achse durch die Punkte D (Dodekaeder: $\sigma = 1$, $\tau = 1$) und T (Triakontaeder: $\sigma = 1$, $\tau = \frac{1}{\cos^2\varphi} = 1{,}381\,..$). Zwischen D und T liegen die Werte von τ, die konvexen Pentakisdodekaedern zugehören. Die Gleichung $\tau = \frac{\sigma}{\cos^2\varphi}$ ist die einer Geraden C_2 durch T und den Punkt I (Ikosaeder: $\sigma = 3\tan^2\varphi = 1{,}146\ldots$, $\tau = \frac{3\tan^2\varphi}{\cos^2\varphi} = 1{,}583\ldots$). Zwischen T und I liegen auf C_2 die Punkte σ, τ, die zu konvexen Triakisikosaedern gehören. Die Gleichung $\tau = \frac{\sigma}{(4-\sigma\cot^2\varphi)\cos^2\varphi}$ endlich ist die einer Hyperbel C_3 durch die Punkte D und I. Auf ihr liegen zwischen D und I die Werte σ, τ für die konvexen Deltoidhexekontaeder. Das von den drei Kurven C_1, C_2, C_3 eingeschlossene Gebiet ist das der σ und τ der konvexen Dyakishexekontaeder.

Wir geben nun für die speziellen Körper des Typus die Gleichungen der Grenzflächen an, indem wir für deren Bezeichnung auf die Figur des Dyakishexekontaedernetzes (Fig. 6 Taf. 9) und die Note VI verweisen, die entsprechende Flächen der speziellen Polyeder und des allgemeinen auffinden lehrt.[1])

[1]) Vergl. überdies für die Netze der speziellen Polyeder des Typus die Tafeln in der „Kugelteilung“ von Hess.

Das Deltoidhexekontaeder. Die Gleichungen seiner 60 Flächen ergeben sich aus den Gleichungen der Flächen des Dyakishexekontaeders für $\tau \cos^2\varphi = \frac{\sigma}{4-\sigma\cot^2\varphi}$. Dann stimmen die Gleichungen der ersten und zweiten Gruppe überein, wobei $a_2 \equiv a_1$, $b_2 \equiv b_1$, $c_2 \equiv c_1$ ist. Ferner stimmen die Gleichungen der fünften Gruppe überein mit denen der vierten Gruppe und zwar ist $a_5 \equiv c_4$, $b_5 \equiv a_4$ und $c_5 \equiv b_4$. Die dritte Gruppe ergibt nur zwölf Gleichungen, da $b_3 = 0$ wird. Die Gleichungen, in denen stets $d = a\sigma$ ist, sind:

$$\text{1. Gruppe} \left\{\begin{array}{llllllllll} 4) & 13) & 12) & 3) & 48) & 57) & 58) & 49) & \pm a_1 x \pm b_1 y \pm c_1 z - d = 0. \\ 16) & 30) & 24) & 23) & 32) & 31) & 39) & 38) & \pm c_1 x \pm a_1 y \pm b_1 z - d = 0. \\ 7) & 43) & 42) & 8) & 19) & 54) & 53) & 20) & \pm b_1 x \pm c_1 y \pm a_1 z - d = 0. \end{array}\right.$$

$$a_1 = (\sigma - 1)\cot\varphi;\; b_1 = 3 - \sigma\cot^2\varphi;\; c_1 = \tan\varphi.$$

$$\text{2. Gruppe} \left\{\begin{array}{lllll} 14) & 11) & 47) & 50) & \pm a_3 x \pm c_3 z - d = 0. \\ 17) & 22) & 45) & 40) & \pm c_3 x \pm a_3 y - d = 0. \\ 1) & 27) & 35) & 60) & \pm c_3 y \pm a_3 z - d = 0. \end{array}\right.$$

Die Reihenfolge der Vorzeichen in jeder dieser Gleichungen ist:

$$+\,+);\quad -\,+);\quad +\,-);\quad -\,-).$$

Die Koëffizienten sind:

$$a_3 = (2 - \sigma\cot\varphi)\cot\varphi;\; c_3 = \sigma\cot\varphi - 2\tan\varphi.$$

$$\text{3. Gruppe} \left\{\begin{array}{lllllllll} 5) & 28) & 26) & 2) & 34) & 56) & 59) & 36) & \pm a_4 x \pm b_4 y \pm c_4 z - d = 0. \\ 19) & 29) & 25) & 10) & 33) & 46) & 51) & 37) & \pm c_4 x \pm a_4 y \pm b_4 z - d = 0. \\ 6) & 44) & 41) & 9) & 18) & 55) & 52) & 51) & \pm b_4 x \pm c_4 y \pm a_4 z - d = 0. \end{array}\right.$$

$$a_4 = (\sigma - 1)\cot^2\varphi;\quad b_4 = 2 - \cot\varphi;\quad c_4 = 1 + 2\tan\varphi - \sigma\cot\varphi.$$

Für spätere Verwendung fügen wir noch die speziellen Werte dieser Koëffizienten für die A. V. des Deltoidhexekontaeders bei. Für $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-9}{2}$ wird: $a_1 = b_1 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$, $c_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $c_3 = 5 - 2\sqrt{5}$, $a_4 = \sqrt{5} - 2$, $b_4 = a_3$, $c_4 = 2a_4$.

Das Pentakisdodekaeder. Hier ergeben sich ebenfalls nur drei Gruppen von Gleichungen, die aus den allgemeinen ersten drei Gruppen für $\sigma = 1$ folgen und in denen stets $d = a\tau\cos^2\varphi = a\vartheta$ ist.

$$\text{1. Gruppe} \left\{\begin{array}{lllll} 1) & 2) & 59) & 60) & \pm b_1 y \pm c_1 z - d = 0. \\ 24) & 23) & 38) & 37) & \pm c_1 x \pm b_1 z - d = 0. \\ 31) & 29) & 32) & 30) & \pm b_1 x \pm c_1 y - d = 0. \end{array}\right.$$

Die Vorzeichenfolge ist die oben angegebene und es ist $b_1 = 1 - \vartheta$, $c_1 = \vartheta \tan\varphi$.

$$\text{2. Gruppe}\begin{cases} 6)\ \ 5)\ \ 4)\ \ 3)\quad 57)\ 58)\ 55)\ 56) & \pm a_2x \pm b_2y \pm c_2z - d = 0. \\ 18)\ 17)\ 16)\ 15)\quad 45)\ 46)\ 43)\ 44) & \pm c_2x \pm a_2y \pm b_2z - d = 0. \\ 22)\ 21)\ 20)\ 19)\quad 41)\ 42)\ 39)\ 40) & \pm b_2x \pm c_2y \pm a_2z - d = 0. \end{cases}$$

$$a_2 = \frac{\tau - 1}{2}\cot\varphi;\quad b_2 = \frac{1 - \vartheta\tan\varphi}{2};\quad c_2 = \frac{\tan\varphi}{2}(1 + \vartheta\tan\varphi).$$

$$\text{3. Gruppe}\begin{cases} 10)\ \ 9)\ \ 8)\ \ 7)\quad 53)\ 54)\ 51)\ 52) & \pm a_3x \pm b_3y \pm c_3z - d = 0. \\ 28)\ 27)\ 26)\ 25)\quad 35)\ 36)\ 33)\ 34) & \pm c_3x \pm a_3y \pm b_3z - d = 0. \\ 14)\ 13)\ 12)\ 11)\quad 49)\ 50)\ 47)\ 48) & \pm b_3x \pm c_3y \pm a_3z - d - 0. \end{cases}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(\cot\varphi - \vartheta);\quad b_3 = \frac{\tau - 1}{2};\quad c_3 = \frac{1}{2}(\vartheta\cot\varphi - \tan\varphi).$$

Für einige besondere Varietäten nehmen die Koëffizienten die folgenden Werte an. Für $\tau = \frac{5 + 4\sqrt{5}}{11}$ wird: $b_1 = \frac{13 - 5\sqrt{5}}{22}$, $c_1 = \frac{4 + \sqrt{5}}{11}$, $a_2 = \frac{7 - \sqrt{5}}{22}$, $b_2 = a_2$, $c_2 = a_2\sqrt{5}$, $a_3 = \frac{3\sqrt{5} + 1}{22}$, $b_3 = \frac{2\sqrt{5} - 3}{11}$, $c_3 = 2a_2$, $d = a.\frac{9 + 5\sqrt{5}}{22}$. Für die Varietät $\tau = 5(\sqrt{5} - 2)$ ist: $b_1 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$, $c_1 = 5 - 2\sqrt{5}$, $a_2 = b_1$, $b_2 = \sqrt{5} - 2$, $c_2 = 2b_2$, $a_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $b_3 = \frac{5\sqrt{5} - 11}{2}$, $c_3 = a_3$, $d = a.\frac{3\sqrt{5} - 5}{2}$.

Das Triakisikosaeder. Die Gleichungen der Flächen dieses Polyeders erhält man aus den allgemeinen Gleichungen für $\sigma = \vartheta$. Dann fallen die Flächen der dritten Gruppe mit denen der zweiten, die der fünften mit denen der vierten zusammen, d. h. es ist $a_3 \equiv a_2$, $a_5 \equiv a_4$ u. s. w. Da $b_1 = 0$ ist, so werden je zwei Gleichungen der ersten Gruppe identisch und es lassen sich die 60 Flächen des Triakisikosaeders in die folgenden drei Gruppen bringen, wobei stets $d = a\sigma$ ist.

$$\text{1. Gruppe}\begin{cases} 10)\ \ 1)\ \ 60)\ \ 59) & \pm a_1x \pm c_1z - d = 0. \\ 49)\ 22)\ 50)\ 21) & \pm c_1x \pm a_1y - d = 0. \\ 30)\ 37)\ 29)\ 38) & \pm c_1y \pm a_1z - d = 0. \end{cases}$$

$$a_1 = (\sigma - 1)\cot\varphi;\quad c_1 = \tan\varphi.$$

$$\text{2. Gruppe}\begin{cases} 9)\ 11)\ 18)\ \ 2)\quad 56)\ 57)\ 34)\ 35) & \pm a_2x \pm b_2y \pm c_2z - d = 0. \\ 48)\ 42)\ 20)\ 23)\quad 54)\ 43)\ 31)\ 25) & \pm c_2x \pm a_2y \pm b_2z - d = 0. \\ 6)\ 14)\ 15)\ \ 5)\quad 51)\ 46)\ 39)\ 28) & \pm b_2x \pm c_2y \pm a_2z - d = 0. \end{cases}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(\cot\varphi - \sigma);\quad b_2 = \frac{1}{2}(3 - \sigma\cot^2\varphi);\quad c_2 = \frac{1}{2}(\sigma\cot\varphi - \tan\varphi).$$

$$\text{3. Gruppe}\begin{cases} 8)\ 12)\ 17)\ 3)\quad 55)\ 58)\ 33)\ 36)\quad \pm a_4x \pm b_4y \pm c_4z - d = 0.\\ 47)\ 41)\ 19)\ 24)\quad 53)\ 44)\ 32)\ 26)\quad \pm c_4x \pm a_4y \pm b_4z - d = 0.\\ 7)\ 13)\ 16)\ 4)\quad 52)\ 45)\ 40)\ 27)\quad \pm b_4x \pm c_4y \pm a_4z - d = 0.\end{cases}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(\sigma - \tan^2\varphi);\quad b_4 = \frac{1}{2}(\sigma\cot^2\varphi - 2\cot\varphi + 1);\quad c_4 = \frac{1}{2}(\cot^2\varphi - \sigma\cot\varphi).$$

Für die A. V. des Triakisikosaeders sind die Koëffizienten:

$$a_1 = \frac{5-2\sqrt{5}}{5},\quad c_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\quad a_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10},\quad b_2 = a_1,\quad c_2 = 2a_2,\quad a_4 = \frac{3\sqrt{5}-5}{5},$$

$$b_4 = a_2,\quad c_4 = \frac{\sqrt{5}}{5},\quad d = a\cdot\frac{7\sqrt{5}-5}{10}.$$

Das Triakontaeder. Um die Gleichungen seiner 30 Flächen abzuleiten, hat man in denen der Flächen des Triakisikosaeders $\sigma = 1$ zu setzen. Dann sind die Koëffizienten der dritten Gruppe identisch mit denen der zweiten und es verbleiben nur die beiden folgenden Gruppen, in denen $d = a$ ist.

$$\text{1. Gruppe}\begin{cases} 1)\ 30)\quad \pm c_1z - d = 0.\\ 14)\ 16)\quad \pm c_1x - d = 0.\\ 15)\ 17)\quad \pm c_1y - d = 0.\end{cases}$$

$$c_1 = \tan\varphi.$$

$$\text{2. Gruppe}\begin{cases} 3)\ 2)\ 5)\ 4)\quad 27)\ 26)\ 29)\ 28)\quad \pm a_2x \pm b_2y \pm c_2z - d = 0.\\ 11)\ 10)\ 13)\ 12)\quad 19)\ 18)\ 21)\ 20)\quad \pm c_2x \pm a_2y \pm b_2z - d = 0.\\ 7)\ 6)\ 9)\ 8)\quad 23)\ 22)\ 25)\ 24)\quad \pm b_2x \pm c_2y \pm a_2z - d = 0.\end{cases}$$

$$a_2 = \frac{\tan\varphi}{2},\quad b_2 = \frac{\tan^2\varphi}{2},\quad c_2 = \frac{1}{2}.$$

Die Gleichungen der Ebenen des Dodekaeders und Ikosaeders sind leicht anzuschreiben.[1]) Für spätere Verwendung werden hier nur die Koëffizienten für das Ikosaeder zusammengestellt:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 3\tan\varphi\,(2 - 3\tan\varphi) = \frac{3(5\sqrt{5}-11)}{2},$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0,\quad c_1 = c_2 = c_3 = 3\tan^3\varphi = 3(\sqrt{5}-2),$$

$$a_4 = a_5 = b_4 = b_5 = c_4 = c_5 = 3\tan^4\varphi = \frac{3(7-3\sqrt{5})}{2}.$$

[1]) Vergl. u. a. Hess, Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder, Cassel 1876, S. 24 ff.

4. Die vollständige Figur des Dyakishexekontaeders. Nach den ausführlichen Erläuterungen der vollständigen Figur des Hexakisoktaeders können wir uns hier kürzer fassen. — Den Ausgangspunkt für die Zeichnung bildet wieder das System der drei Geraden, der Spuren der Nachbarebenen 2), 10), 11) in der Ebene 1) des Dyakishexekontaeders, mit den Achsenpunkten, die auf diesen Geraden liegen. Die sämtlichen Spuren zerfallen wieder in vier Klassen, die der Reihe nach zu erledigen sind: α) Gerade, durch die Achsenpunkte bestimmt. β) Parallelgerade zu ihnen durch je einen Achsenpunkt. γ) Gerade durch die Schnittpunkte der Geraden der ersten und zweiten Klasse (α und β). δ) Parallelgerade zu den Geraden der dritten Klasse durch je einen Achsenpunkt. Die zur Bestimmung der Fundamentalachsenpunkte auf den drei ersten Geraden 2), 10), 11) dienenden Gleichungen sind im folgenden zusammengestellt, während die numerischen Werte der berechneten Abschnitte auf den drei Geraden für einige Varietäten des Dyakishexekontaeders, die in den späteren Entwicklungen auftreten, in Note VII vereinigt sind. Zur Orientierung über die Lage der Achsenpunkte sei auf Fig. 1 Taf. 10 verwiesen, die die Punkte G, C, B nebst den 15 durch sie bestimmten Geraden der ersten Klasse für die A. V. des Dyakishexekontaeders zeigt. Die für die Berechnung der Abschnitte der ersten drei Geraden nötigen Symmetrieschnitte durch das Polyeder sind nach dem beim Hexakisoktaeder bemerkten leicht zu entwerfen. Den Mittelpunkt des Polyeders bezeichnen wir mit O. Alle Strecken seien mit der Länge C des dreigliedrigen Strahles als Einheit gemessen.[1])

Die Achsenpunkte der Geraden 11). Hilfswinkel: $\sphericalangle C_1 B_1 O = \lambda$, $\sphericalangle B_1 C_1 O = \mu$. Es ist $\frac{\lambda+\mu}{2} = 90^0 - \frac{\psi}{2}$, $\tan\frac{\lambda-\mu}{2} = \frac{C-B}{C+B}\tan\frac{\lambda+\mu}{2}$; $B_1 C_1 = \frac{C\sin\psi}{\sin\lambda}$; $B_1 C_2 = \frac{B\sin\psi}{\sin(\lambda-\psi)}$; $B_1 G_4 = \frac{B\sin(\psi+\chi)}{\sin(\lambda-\psi-\chi)}$; $C_1 G_3 = \frac{C\sin\chi}{\sin(\mu-\chi)}$; $B_1 B_{13} = \frac{B}{\cos\lambda}$, denn $\sphericalangle B_1 O B_{13} = \varphi+\chi+\psi = 90^0$.

Die Achsenpunkte der Geraden 10). Hilfswinkel: $\sphericalangle G_1 B_1 O = \lambda'$, $\sphericalangle B_1 G_1 O = \mu'$; $\frac{\lambda'+\mu'}{2} = 90^0 - \frac{\varphi}{2}$; $\tan\frac{\lambda'-\mu'}{2} = \frac{G-B}{G+B}\tan\frac{\lambda'+\mu'}{2}$. Dann ist: $B_1 G_1 = B\frac{\sin\varphi}{\sin\mu'}$; $B_1 G_2 = \frac{B\sin\varphi}{\sin(\lambda'-\varphi)}$; $B_1 C_8 = \frac{B\sin(\varphi+\chi)}{\sin(\lambda'-\varphi-\chi)}$; $G_1 C_7 = \frac{G\sin\chi}{\sin(\mu'-\chi)}$; $B_1 B_{15} = \frac{B}{\cos\lambda'}$.

---

[1]) Alle folgenden Formeln gelten unverändert natürlich nur, wenn wie bei der A. V. des Dyakishexekontaeders $G > C > B$ ist; andernfalls ist über die Winkel λ und μ in bekannter Weise anders zu verfügen.

Die Achsenpunkte der Geraden 2). Hilfswinkel: $\sphericalangle G_1C_1O = \lambda''$, $\sphericalangle C_1G_1O = \mu''$; $\frac{\lambda''+\mu''}{2} = 90^0 - \frac{\chi}{2}$; $\tan \frac{\lambda''-\mu''}{2} = \frac{G-C}{G+C} \tan \frac{\lambda''+\mu''}{2}$. Es ist $C_1G_1 = \frac{C \sin \chi}{\sin \mu''}$; $G_1B_7 = \frac{G \sin \varphi}{\sin(\mu''-\varphi)}$; $G_1G_6 = G \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\mu''-2\varphi)}$; $C_1B_3 = C \frac{\sin \psi}{\sin(\lambda''-\psi)}$; $C_1C_4 = C \frac{\sin 2\psi}{\sin(\lambda''-2\psi)}$. In allen drei Fällen ist selbstverständlich stets: $B = C \frac{\sigma \cot \varphi}{\sqrt{3}}$; $G = C \frac{\tau \cot \varphi \cos \varphi}{\sqrt{3}}$ zu setzen.

Durch die Geraden der ersten Klasse durch je zwei oder mehrere der Achsenpunkte der drei Geraden 2), 10) und 11) werden sämtliche Achsenpunkte bestimmt (Fig. 1 Taf. 10). Die 118 Geraden sind die folgenden (für die Bedeutung der Symbole vergl. die Betrachtung der vollständigen Figur des Hexakisoktaeders!):

α) Die 15 Geraden der ersten Klasse: (Die Achsenpunkte auf ihnen sind der Figur zu entnehmen) 2) 10) 11) 4) 6) 8) 22) 39) 44) 57) 65) 76) 83) 98) 101). Diese 15 Geraden verlaufen für jede Varietät des Dyakishexekontaeders in der aus der Figur ersichtlichen Weise durch die Achsenpunkte.

β) Die 15 Geraden der zweiten Klasse: 119 $(2, B_{14})$; 111 $(10, B_{13})$; 110 $(11, B_{15})$; 56 $(65, B_7)$; 77 $(44, B_5)$; 64 $(57, B_3)$; 117 $(4, B_{11})$; 115 $(6, B_8)$; 113 $(8, B_{10})$; 99 $(22, B_{12})$; 82 $(39, B_9)$; 45 $(76, B_6)$; 38 $(83, B_4)$; 23 $(98, B_2)$; 20 $(101, B_1)$.

γ) Die 44 Geraden der dritten Klasse: 13 $\left(\frac{2}{20}, \frac{44}{23}, \frac{39}{77}, \frac{98}{119}, \frac{101}{82}\right)$; 15 $\left(\frac{4}{20}, \frac{76}{117}, \frac{101}{45}\right)$; 17 $\left(\frac{65}{115}, \frac{6}{20}, \frac{101}{56}\right)$; 19 $\left(\frac{57}{38}, \frac{8}{20}, \frac{22}{64}, \frac{83}{113}\right)$; 24 $\left(\frac{11}{64}, \frac{51}{45}, \frac{76}{115}, \frac{98}{110}, \frac{6}{23}\right)$; 26 $\left(\frac{65}{113}, \frac{8}{23}, \frac{98}{56}\right)$; 28 $\left(\frac{83}{111}; \frac{98}{38}, \frac{10}{23}\right)$; 30 $\left(\frac{2}{23}, \frac{44}{82}, \frac{39}{20}, \frac{98}{77}, \frac{101}{119}\right)$; 31 $\left(\frac{57}{99}, \frac{8}{38}, \frac{22}{20}, \frac{83}{64}, \frac{101}{113}\right)$; 33 $\left(\frac{10}{38}, \frac{83}{23}, \frac{98}{111}\right)$; 35 $\left(\frac{2}{38}, \frac{76}{119}, \frac{83}{45}\right)$; 37 $\left(\frac{11}{77}, \frac{65}{117}, \frac{44}{56}, \frac{4}{38}, \frac{83}{110}\right)$; 42 $\left(\frac{11}{23}, \frac{57}{110}, \frac{6}{45}, \frac{76}{64}, \frac{98}{115}\right)$; 46 $\left(\frac{10}{45}, \frac{65}{111}, \frac{22}{82}, \frac{39}{56}, \frac{76}{99}\right)$; 48 $\left(\frac{2}{45}, \frac{76}{38}, \frac{83}{119}\right)$; 50 $\left(\frac{4}{45}, \frac{76}{20}, \frac{101}{117}\right)$; 51 $\left(\frac{65}{20}, \frac{6}{56}, \frac{101}{115}\right)$; 53 $\left(\frac{65}{23}, \frac{8}{56}, \frac{98}{113}\right)$; 55 $\left(\frac{10}{56}, \frac{65}{82}, \frac{39}{99}, \frac{76}{111}\right)$; 59 $\left(\frac{11}{38}, \frac{65}{77}, \frac{44}{110}, \frac{4}{56}, \frac{83}{117}\right)$; 61 $\left(\frac{11}{115}, \frac{57}{23}, \frac{6}{64}, \frac{76}{110}, \frac{98}{45}\right)$; 63 $\left(\frac{57}{82}, \frac{4}{64}, \frac{39}{117}\right)$; 67 $\left(\frac{10}{64}, \frac{44}{111}, \frac{57}{77}\right)$; 69 $\left(\frac{57}{20}, \frac{8}{64}, \frac{22}{113}, \frac{83}{99}, \frac{101}{38}\right)$; 72 $\left(\frac{2}{77}, \frac{44}{20}, \frac{39}{119}, \frac{98}{82}, \frac{101}{23}\right)$; 74 $\left(\frac{10}{77}, \frac{44}{64}, \frac{57}{111}\right)$; 78 $\left(\frac{44}{99}, \frac{6}{77}, \frac{22}{115}\right)$; 80 $\left(\frac{11}{117}, \frac{65}{110}, \frac{44}{38}, \frac{4}{77}, \frac{83}{56}\right)$; 81 $\left(\frac{11}{113}, \frac{39}{110}, \frac{8}{82}\right)$;

85 $\left(\frac{57}{117}, \frac{4}{82}, \frac{39}{64}\right)$; 87 $\left(\frac{2}{82}, \frac{44}{119}, \frac{39}{23}, \frac{98}{20}, \frac{101}{77}\right)$; 89 $\left(\frac{10}{82}, \frac{65}{99}, \frac{22}{111}, \frac{39}{45}, \frac{76}{56}\right)$; 92 $\left(\frac{10}{99}, \frac{65}{45}, \frac{22}{56}, \frac{39}{111}, \frac{76}{82}\right)$;
94 $\left(\frac{57}{113}, \frac{8}{99}, \frac{22}{38}, \frac{83}{20}, \frac{101}{64}\right)$; 96 $\left(\frac{44}{115}, \frac{6}{99}, \frac{22}{77}\right)$; 100 $\left(\frac{2}{99}, \frac{11}{119}, \frac{20}{110}\right)$; 103 $\left(\frac{11}{82}, \frac{8}{110}, \frac{39}{113}\right)$;
105 $\left(\frac{11}{45}, \frac{57}{115}, \frac{6}{110}, \frac{76}{23}, \frac{98}{64}\right)$; 107 $\left(\frac{11}{56}, \frac{65}{38}, \frac{44}{117}, \frac{4}{110}, \frac{77}{83}\right)$; 109 $\left(\frac{2}{110}, \frac{11}{99}, \frac{22}{119}\right)$;
112 $\left(\frac{2}{117}, \frac{10}{119}, \frac{4}{115}, \frac{6}{113}, \frac{8}{111}\right)$; 114 $\left(\frac{2}{115}, \frac{10}{117}, \frac{4}{113}, \frac{6}{111}, \frac{8}{119}\right)$; 116 $\left(\frac{2}{113}, \frac{10}{115}, \frac{4}{111}, \frac{6}{119}, \frac{8}{117}\right)$;
118 $\left(\frac{2}{111}, \frac{10}{113}, \frac{4}{119}, \frac{6}{117}, \frac{8}{115}\right)$.

δ) Die 44 Geraden der vierten Klasse: 3 (118, G_1); 5 (116, G_1); 7 (114, G_1); 9 (112, G_1); 12 (109, C_1); 14 (107, G_3); 16 (105, G_4); 18 (103, C_2); 21 (100, C_1); 25 (96, C_3); 27 (94, G_5); 29 (92, G_2); 32 (89, G_2); 34 (87, G_6); 36 (85, C_5); 40 (81, C_2); 41 (80, G_3); 43 (78, C_3); 47 (74, C_7); 49 (72, G_6); 52 (69, G_5); 54 (67, C_7); 58 (63, C_5); 60 (61, G_4); 62 (59, G_3); 66 (55, G_2); 68 (53, C_6); 70 (51, C_9); 71 (50, C_{10}); 73 (48, C_4); 75 (46, G_2); 79 (42, G_4); 84 (37, G_3); 86 (35, C_4); 88 (33, C_8); 90 (31, G_5); 91 (30, G_6); 93 (28, C_8); 95 (26, C_6); 97 (24, G_4); 102 (19, G_5); 104 (17, C_9); 106 (15, C_{10}); 108 (13, G_6). Damit sind sämtliche Spuren erledigt, da die Ebene 120) die Ebene 1) in der unendlich weiten Geraden schneidet.

5. **Die vollständige Figur des Deltoidhexekontaeders** (vergl. Fig. 1 Taf. 15 und Fig. 1 Taf. 16). Bei Zeichnung der vollständigen Figur eines Deltoidhexekontaeders ist zu beachten, dass die Gerade durch die Achsen C_7 und G_1 Symmetrielinie der Figur ist, wodurch sich die Ausführung vereinfacht. Man berechnet die Abstände der Achsenpunkte auf dieser Symmetrielinie mit und es genügt dann die Bestimmung einer geringeren Anzahl Distanzen zur Festlegung der gesamten Figur, da die Spuren 27 (durch B_1) und 35 (durch B_{15}) senkrecht zur Symmetrielinie liegen. Das Gleichungssystem ist das folgende, wenn wir $G > B > C$ voraussetzen.

Die Achsenpunkte der Symmetrielinie. Der Mittelpunkt des Polyeders sei O. Hilfswinkel: $\sphericalangle G_1C_7O = \lambda$, $\sphericalangle C_7G_1O = \mu$; $\frac{\lambda+\mu}{2} = 90^0 - \frac{\chi}{2}$; $\tan\frac{\lambda-\mu}{2} = \frac{G-C}{G+C}\tan\frac{\lambda+\mu}{2}$; $G_1C_7 = \frac{C \sin\chi}{\sin\mu}$; $C_7B_{15} = C\frac{\sin\psi}{\sin(\lambda-\psi)}$; $C_7C'_8 = C\frac{\sin 2\psi}{\sin(\lambda-2\psi)}$; $G_1B_1 = G\frac{\sin\varphi}{\sin(\mu-\varphi)}$; $G_1G_2 = G\frac{\sin 2\varphi}{\sin(\mu-2\varphi)}$. Ist $2\varphi > \mu$, so berechnet man $C_7G'_2 = C\frac{\sin(2\psi+\chi)}{\sin(\lambda-2\psi-\chi)}$.

Die Achsenpunkte der Geraden 2). Hilfswinkel: $\sphericalangle G_1B_7O = \lambda'$, $\sphericalangle B_7G_1O = \mu'$; $\frac{\lambda'+\mu'}{2} = 90^0 - \frac{\varphi}{2}$; $\tan\frac{\lambda'-\mu'}{2} = \frac{G-B}{G+B}\tan\frac{\lambda'+\mu'}{2}$; $G_1B_7 = B\frac{\sin\varphi}{\sin\mu'}$; $G_1C_1 = G\frac{\sin\chi}{\sin(\mu'-\chi)}$; $G_1B_3 = G\frac{\sin(\chi+\psi)}{\sin(\mu'-\chi-\psi)}$; $B_7G_6 = B\frac{\sin\psi}{\sin(\lambda'-\varphi)}$; $B_7C'_4 = B\frac{\sin(\chi+\varphi)}{\sin(\lambda'-\chi-\varphi)}$.

Die Achsenpunkte der Geraden 8). Hilfswinkel: $\sphericalangle B_7C_7O = \lambda''$, $\sphericalangle C_7B_7O = \mu''$; $\frac{\lambda''+\mu''}{2} = 90^0 - \frac{\psi}{2}$; $\tan\frac{\lambda''-\mu''}{2} = \frac{B-C}{B+C}\tan\frac{\lambda''+\mu''}{2}$; $B_7C_7 = C\frac{\sin\psi}{\sin\mu''}$; $B_7G_4 = \frac{B\sin(\chi+\psi)}{\sin(\mu''-\chi-\psi)}$; $C_7G_5 = C\frac{\sin\chi}{\sin(\lambda''-\chi)}$. Die 58 Geraden in der vollständigen Figur zerfallen hier in drei Klassen: Die erste Klasse der Geraden ist durch die Achsenpunkte bestimmt. Diese Geraden mit den auf ihnen liegenden Achsenpunkten sind: 2 $(G_1G_6C_1C'_4B_7B_3)$; 3 $(G_1G_3C_5C'_{10}B_{12}B_2)$; 4 $(G_1G_4C_3C_9B_9B_4)$; 5 $(G_1G_5C_2C'_6B_6B_5)$; 7 $(G_3G_6C_7C_3B_6B'_{10})$; 8 $(G_4G_5C_7C_5B_7B'_{14})$; 16 $(G_2G_5C_1C_3B_2B'_{11})$; 23 $(G_2G_6C_2C_5B_4B'_8)$; 27 $(G_4G_3C_2C_1B_1)$; 33 $(G_3G_5C'_8C'_4B_9B'_8)$; 35 $(G_6G_5C'_{10}C_9B_{15})$; 37 $(G_4G_6C'_8C'_6B_{12}B'_{11})$; 52 $(G_4G_2C'_{10}C'_4B_5B'_{10})$; 55 $(G_2G_3C_9C'_6B_3B'_{14})$.

Die 12 Geraden der zweiten Klasse sind: 6 $(52, B_6)$; 9 $(55, B_7)$; 25 $(33, B_4)$; 29 $(37, B_2)$; 31 $(23, B_9)$; 39 $(16, B_{12})$; 53 $(7, B_5)$; 54 $(8, B_3)$; 56 $(2, B'_{14})$; 57 $(3, B'_{11})$; 58 $(4, B'_8)$; 59 $(5, B'_{10})$.

Die 32 Geraden der dritten Klasse sind durch die Schnittpunkte der vorhergehenden bestimmt und gehen jeweils durch einen Achsenpunkt. Es sind die folgenden: 10 $\left(G_6, \frac{3}{9}, \frac{27}{25}, \frac{33}{57}, \frac{55}{53}\right)$; 11 $\left(C_5, \frac{2}{6}, \frac{33}{56}, \frac{52}{25}\right)$; 12 $\left(G_3, \frac{4}{9}, \frac{35}{58}\right)$; 13 $\left(G_4, \frac{3}{6}, \frac{35}{57}\right)$; 14 $\left(C_3, \frac{5}{9}, \frac{37}{59}, \frac{29}{55}\right)$; 15 $\left(G_5, \frac{4}{6}, \frac{27}{29}, \frac{37}{58}, \frac{52}{54}\right)$; 17 $\left(C_3, \frac{2}{25}, \frac{6}{33}, \frac{52}{56}\right)$; 18 $\left(G_3, \frac{35}{6}, \frac{52}{57}\right)$; 19 $\left(G_6, \frac{4}{29}, \frac{8}{6}, \frac{27}{54}, \frac{52}{58}\right)$; 20 $\left(G_5, \frac{3}{25}, \frac{7}{9}, \frac{27}{53}, \frac{55}{57}\right)$; 21 $\left(G_4, \frac{35}{9}, \frac{55}{58}\right)$; 22 $\left(C_5, \frac{5}{29}, \frac{37}{9}, \frac{55}{59}\right)$; 24 $\left(C_2, \frac{8}{25}, \frac{16}{54}, \frac{33}{59}, \frac{35}{39}\right)$; 26 $\left(C_1, \frac{5}{25}, \frac{8}{39}, \frac{33}{54}, \frac{35}{59}\right)$; 28 $\left(C_2, \frac{2}{29}, \frac{7}{31}, \frac{35}{56}, \frac{37}{53}\right)$; 30 $\left(C_1, \frac{7}{29}, \frac{23}{53}, \frac{35}{31}, \frac{37}{56}\right)$; 32 $\left(G_5, \frac{23}{59}, \frac{27}{31}\right)$; 34 $\left(G_5, \frac{2}{39}, \frac{27}{56}\right)$; 36 $\left(G_6, \frac{5}{31}, \frac{27}{59}\right)$; 38 $\left(G_6, \frac{16}{56}, \frac{27}{39}\right)$; 40 $\left(C'_4, \frac{4}{39}, \frac{7}{58}, \frac{16}{53}\right)$; 41 $\left(C'_{10}, \frac{27}{9}, \frac{33}{53}, \frac{55}{25}\right)$; 42 $\left(G_4, \frac{2}{31}, \frac{7}{56}, \frac{23}{29}, \frac{35}{53}\right)$; 43 $\left(G_3, \frac{5}{39}, \frac{16}{25}, \frac{35}{54}\right)$; 44 $\left(C_9, \frac{27}{6}, \frac{37}{54}, \frac{52}{29}\right)$; 45 $\left(C'_6, \frac{3}{31}, \frac{8}{57}, \frac{23}{54}\right)$; 46 $\left(G_3, \frac{2}{53}, \frac{23}{56}, \frac{35}{29}, \frac{37}{31}\right)$; 47 $\left(C'_4, \frac{3}{54}, \frac{8}{31}, \frac{23}{57}\right)$; 48 $\left(C_9, \frac{3}{53}, \frac{7}{25}, \frac{27}{57}, \frac{33}{9}\right)$; 49 $\left(C'_{10}, \frac{4}{54}, \frac{8}{29}, \frac{27}{58}, \frac{37}{6}\right)$; 50 $\left(C'_6, \frac{4}{53}, \frac{7}{39}, \frac{16}{58}\right)$; 51 $\left(G_4, \frac{5}{54}, \frac{16}{59}, \frac{33}{39}, \frac{35}{25}\right)$. Damit sind die Spuren aller 58 übrigen Ebenen in der Ebene der Fläche 1) des Deltoidhexekontaeders bestimmt.

6. **Die vollständige Figur des Triakisikosaeders.** Sie ist bereits konstruierbar, wenn sämtliche Achsenpunkt-Distanzen auf der Symmetrieachse B_1C_2 der Grenzfläche 1) bestimmt sind, sowie die Länge von G_1G_2, da die Geraden 59) und 10) (vergl. Fig. 1 Taf. 12 und die Figur auf Taf. 20) senkrecht zur Symmetrieachse liegen. Man hat die Distanzen auf Grund der folgenden Gleichungen zu berechnen, wenn $G > B > C$ ist.

$$G_1G_2 = 2B \tan\varphi;\ \frac{\lambda+\mu}{2} = 90^0 - \frac{\psi}{2};\ \tan\frac{\lambda-\mu}{2} = \frac{B-C}{B+C}\tan\frac{\lambda+\mu}{2};\ B_1C_2 = C\frac{\sin\psi}{\sin\mu};$$

$$B_1G_4 = B\frac{\sin(\chi+\psi)}{\sin(\lambda-\chi)};\ B_1B'_{13} = \frac{B}{\cos\mu};\ B_1C_1 = B\frac{\sin\psi}{\sin(\mu-\psi)};\ B_1G_3 = B\frac{\sin(\psi+\chi)}{\sin(\mu-\psi-\chi)}.$$

Überdies verwende man im Interesse einer genauen Zeichnung: $B'_{13}G_6 = \frac{C_1B'_{13}}{C_1B_1}\cdot B_1G_1$ und $B'_{13}C'_{10} = \frac{B'_{13}G_3}{B_1G_3}\cdot B_1G_1\cdot[B_1G_1 = B\tan\varphi]$. Die Geraden zerfallen dann in die folgenden drei Klassen:

Die 14 Geraden der ersten Klasse: 2 $(G_1G'_5C_2C_6B_5B_6)$; 4 $(G_1G_4C_3C'_9B_4B_9)$; 6 $(G_1G_3C_5C'_{10}B_2B_{12})$; 8 $(G_1G_6C_1C_4B_3B_7)$ 10 $(G_1G_2C_7C_8B_1B_{15})$; 12 $(G_2G'_5C_1C_3B_3B_{11})$; 14 $(G_2G_3C_6C'_9B_3B_{14})$; 16 $(G_2G_4C_4C'_{10}B_5B_{10})$; 18 $(G_2G_6C_2C_5B_4B_8)$; 25 $(G_4G'_5C_5C_7B_7B_{14})$; 31 $(G_4G_6C_6C_8B_{11}B_{12})$; 44 $(G_3G'_5C_4C_8B_8B_9)$; 53 $(G_3G_6C_3C_7B_6B_{10})$; 59 $(G_6G'_5C'_{10}C'_9B'_{13}B_{15})$.

Die 12 Geraden der zweiten Klasse sind: 19 $(53, B_5)$; 24 $(44, B_4)$; 28 $(14, B_7)$; 33 $(8, B_{14})$: 36 $(12, B_{12})$; 39 $(6, B_{11})$; 42 $(25, B_3)$; 45 $(4, B_8)$; 48 $(31, B_2)$; 52 $(16, B_6)$; 56 $(18, B_9)$; 57 $(2, B_{10})$.

Die 32 Geraden der dritten Klasse endlich sind: 3 $\left(\frac{44}{57}, \frac{59}{36}, \frac{12}{42}, \frac{25}{24}\right)$; 5 $\left(\frac{14}{45}, \frac{59}{28}\right)$; 7 $\left(\frac{16}{39}, \frac{59}{52}\right)$; 9 $\left(\frac{31}{33}, \frac{59}{56}, \frac{53}{48}, \frac{18}{19}\right)$; 11 $\left(\frac{59}{57}, \frac{25}{36}, \frac{44}{42}\right)$; 13 $\left(\frac{59}{45}, \frac{4}{28}\right)$; 15 $\left(\frac{59}{39}, \frac{6}{52}\right)$; 17 $\left(\frac{59}{33}, \frac{53}{56}, \frac{8}{48}, \frac{31}{19}\right)$; 20 $\left(\frac{10}{42}, \frac{25}{19}\right)$; 21 $\left(\frac{44}{33}, \frac{8}{52}, \frac{16}{24}\right)$; 22 $\left(\frac{12}{45}, \frac{53}{36}, \frac{4}{19}\right)$; 23 $\left(\frac{10}{48}, \frac{31}{24}\right)$; 26 $\left(\frac{12}{57}, \frac{44}{36}, \frac{2}{42}, \frac{59}{24}\right)$; 27 $\left(\frac{16}{36}, \frac{18}{28}, \frac{10}{52}, \frac{12}{56}\right)$; 29 $\left(\frac{14}{57}, \frac{31}{28}, \frac{2}{48}\right)$; 30 $\left(\frac{16}{33}, \frac{44}{52}, \frac{8}{24}\right)$; 32 $\left(\frac{53}{33}, \frac{8}{56}, \frac{18}{48}\right)$; 34 $\left(\frac{10}{57}, \frac{2}{45}, \frac{4}{39}, \frac{6}{33}\right)$; 35 $\left(\frac{14}{36}, \frac{16}{28}, \frac{18}{52}, \frac{10}{56}\right)$; 37 $\left(\frac{53}{45}, \frac{4}{36}, \frac{12}{19}\right)$; 38 $\left(\frac{25}{39}, \frac{6}{56}, \frac{18}{42}\right)$; 40 $\left(\frac{8}{57}, \frac{10}{45}, \frac{2}{39}, \frac{4}{33}\right)$; 41 $\left(\frac{53}{42}, \frac{10}{19}\right)$; 43 $\left(\frac{25}{57}, \frac{2}{36}, \frac{59}{42}\right)$; 46 $\left(\frac{6}{57}, \frac{8}{45}, \frac{10}{39}, \frac{2}{33}\right)$; 47 $\left(\frac{44}{48}, \frac{10}{24}\right)$; 49 $\left(\frac{31}{57}, \frac{2}{28}, \frac{14}{48}\right)$;

50 $\left(\frac{18}{39}, \frac{25}{56}, \frac{6}{42}\right)$; 51 $\left(\frac{18}{36}, \frac{10}{28}, \frac{12}{52}, \frac{14}{56}\right)$; 54 $\left(\frac{18}{33}, \frac{31}{56}, \frac{59}{48}, \frac{8}{19}\right)$; 55 $\left(\frac{10}{36}, \frac{12}{28}, \frac{14}{52}, \frac{16}{56}\right)$; 58 $\left(\frac{4}{57}, \frac{6}{45}, \frac{8}{39}, \frac{10}{33}\right)$.

7. Die vollständigen Figuren des Pentakisdodekaeders und der speziellsten Polyeder des Dyakishexekontaedertypus. Zur Konstruktion der vollständigen Figur des Pentakisdodekaeders (vergl. Fig. 1 Taf. 13 und Fig. 1 Taf. 14) berechne man die Distanzen der Achsenpunkte auf der Symmetrielinie B_1G_1 der Fläche des Polyeders, sowie die Distanzen der Achsenpunkte auf der Geraden 2). Es ist $B_1C_1 = B_1C_2 = B \tan\psi$; $B_1G_3 = B_1G_4 = B\tan(\psi+\chi)$. Ist $\frac{\lambda+\mu}{2} = 90^0 - \frac{\varphi}{2}$, $\tan\frac{\lambda-\mu}{2} = \frac{G-B}{G+B}\tan\frac{\lambda+\mu}{2}$ für $G > B$, so ist $B_1G_1 = G\frac{\sin\varphi}{\sin\lambda}$; $B_1C_7 = B\frac{\sin(\varphi+\chi)}{\sin(\mu-\chi)}$; $B_1B_{15} = \frac{B}{\cos\lambda}$; $B_1G_2 = B\frac{\sin\varphi}{\sin(\lambda-\varphi)}$; $B_1C_8 = B\frac{\sin(\varphi+\chi)}{\sin(\lambda-\varphi-\chi)}$. Überdies benutze man $B_{15}G_5 = \frac{B_1C_1}{B_1G_1}\cdot G_1B_{15}$. Die Geraden der drei Klassen sind die folgenden.

Die 14 Geraden der ersten Klasse: 2 $(G_3G_4C_1C_2B_1)$; 3 $(G_1G_5C_2C_6B_6B_5)$; 6 $(G_1G_6C_1C_4B_7B_3)$; 8 $(G_2G_6C_2C_5B_4B_8)$; 9 $(G_2G_5C_1C_3B_2B_{11})$; 11 $(G_1G_4C_3C_9B_4B_9)$; 14 $(G_1G_3C_5C'_{10}B_2B_{12})$; 20 $(G_2G_4C_4C'_{10}B_5B_{10})$; 21 $(G_2G_3C_6C_9B_3B_{14})$; 34 $(G_4G_5C_5C_7B_7B_{14})$; 35 $(G_3G_6C_3C_7B_6B_{10})$; 43 $(G_4G_6C_6C_8B_{11}B_{12})$; 46 $(G_3G_5C_4C_8B_8B_9)$; 59 $(G_5G_6C_9C'_{10}B_{15})$.

Die 12 Geraden der zweiten Klasse: 15 $(46, B_4)$; 18 $(43, B_2)$; 26 $(35, B_5)$; 27 $(34, B_3)$; 40 $(21, B_7)$; 41 $(20, B_6)$; 47 $(14, B_{11})$; 50 $(11, B_8)$; 52 $(9, B_{12})$; 53 $(8, B_9)$; 55 $(6, B_{14})$; 58 $(3, B_{10})$.

Die 32 Geraden der dritten Klasse sind: 4 $\left(\frac{6}{18}, \frac{35}{53}, \frac{43}{26}, \frac{55}{59}\right)$; 5 $\left(\frac{3}{15}, \frac{34}{52}, \frac{46}{27}, \frac{58}{59}\right)$; 7 $\left(\frac{9}{27}, \frac{34}{15}, \frac{46}{58}, \frac{52}{59}\right)$; 10 $\left(\frac{8}{26}, \frac{35}{18}, \frac{43}{55}, \frac{53}{59}\right)$; 12 $\left(\frac{14}{41}, \frac{47}{59}\right)$; 13 $\left(\frac{11}{40}, \frac{50}{59}\right)$; 16 $\left(\frac{2}{15}, \frac{14}{40}, \frac{21}{26}, \frac{46}{47}\right)$; 17 $\left(\frac{2}{18}, \frac{11}{41}, \frac{20}{27}, \frac{43}{50}\right)$; 19 $\left(\frac{21}{50}, \frac{40}{59}\right)$; 22 $\left(\frac{20}{47}, \frac{41}{59}\right)$; 23 $\left(\frac{6}{41}, \frac{20}{15}, \frac{46}{55}\right)$; 24 $\left(\frac{3}{40}, \frac{21}{18}, \frac{43}{58}\right)$; 25 $\left(\frac{2}{26}, \frac{14}{15}, \frac{21}{47}, \frac{35}{40}\right)$; 28 $\left(\frac{2}{27}, \frac{11}{18}, \frac{20}{50}, \frac{34}{41}\right)$; 29 $\left(\frac{3}{18}, \frac{21}{58}, \frac{43}{40}\right)$; 30 $\left(\frac{9}{26}, \frac{11}{52}, \frac{35}{50}\right)$; 31 $\left(\frac{6}{15}, \frac{20}{55}, \frac{46}{41}\right)$; 32 $\left(\frac{8}{27}, \frac{14}{53}, \frac{34}{47}\right)$; 33 $\left(\frac{6}{53}, \frac{8}{18}, \frac{35}{55}, \frac{26}{59}\right)$; 36 $\left(\frac{3}{52}, \frac{9}{15}, \frac{34}{58}, \frac{27}{59}\right)$; 37 $\left(\frac{9}{50}, \frac{11}{26}, \frac{35}{52}\right)$; 38 $\left(\frac{8}{47}, \frac{14}{27}, \frac{34}{53}\right)$; 39 $\left(\frac{2}{40}, \frac{21}{15}, \frac{35}{47}, \frac{46}{26}\right)$; 42 $\left(\frac{2}{41}, \frac{20}{18}, \frac{34}{50}, \frac{43}{27}\right)$; 44 $\left(\frac{3}{27}, \frac{9}{58}, \frac{46}{52}, \frac{15}{59}\right)$; 45 $\left(\frac{6}{26}, \frac{8}{55}, \frac{43}{53}, \frac{18}{59}\right)$; 48 $\left(\frac{2}{47}, \frac{14}{26}, \frac{35}{15}, \frac{46}{40}\right)$; 49 $\left(\frac{2}{50}, \frac{11}{27}, \frac{34}{18}, \frac{43}{41}\right)$; 51 $\left(\frac{2}{52}, \frac{9}{55}\right)$; 54 $\left(\frac{2}{53}, \frac{8}{58}\right)$; 56 $\left(\frac{2}{55}, \frac{6}{52}\right)$; 57 $\left(\frac{2}{58}, \frac{3}{53}\right)$.

Die vollständigen Figuren der Ebenen des Triakontaeders, Ikosaeders und Dodekaeders können selbstverständlich in derselben Weise wie die der bisher besprochenen Polyeder nach Berechnung der Distanzen der Achsenpunkte gezeichnet werden; doch kommt man hier in noch einfacherem Verfahren zum Ziele. Die vollständige Figur des Triakontaeders (Fig. 5 Taf. 14) ist bestimmt, wenn man die vier Seiten des Quadrates $C_3C_5C_6C_4$ je zweimal nach dem goldenen Schnitt innen und aussen teilt, [in den inneren Punkten M (vergl. Fig. 3 Taf. 14), so dass also $\overline{C_3M_2}^2 = \overline{C_5M_1}^2 = \overline{C_3M_1}.\overline{C_3C_5}$ ist, in den äusseren Punkten O (vergl. Fig. 3 Taf. 17), so dass z. B. $\overline{C_3O_3}.\overline{C_5O_3} = \overline{C_3C_5}^2$ wird] und dann sämtliche Spuren zieht, wie es die Figuren zeigen. Die innerste Zelle ist die rhombische Fläche des Triakontaeders.[1]) Die vollständige Figur des Ikosaeders (Fig. 6 Taf. 8) ergibt sich, wenn man die drei Kanten des regulären Dreiecks $G_4G_5G'_6$ je zweimal innen nach dem goldenen Schnitte teilt [z. B. $\overline{G_4C_7}^2 = \overline{G_5C_5}^2 = \overline{G_4G_5}.\overline{G_4C_5}$] und die Geraden zieht, wie es die Figur anzeigt.[2]) Die vollständige Figur des Dodekaeders, Fig. 7 Taf. 10, spricht für sich selbst. Damit sind sämtliche in Frage kommenden Polyeder des Dyakishexekontaedertypus erschöpft.

8. **Das gleicheckige (12 + 20 + 30)-flächige 2.60-Eck und die speziellen gleicheckigen Polyeder des Typus.** Die gleicheckigen Polyeder des Dyakishexekontaedertypus sind die polarreziproken der besprochenen gleichflächigen in Bezug auf eine feste Kugel um das Zentrum dieser als Direktrix. Als Radius dieser Kugel nehmen wir die konstante dreizählige Achse C, die Flächenachse des Ikosaeders. Dessen beide andere Achsen, die fünfzählige G_i und die zweizählige B_i sind, wie sich aus $G_a.G_i = C^2$ und $B_a.B_i = C^2$ ergibt: $G_i = C\sqrt{3}\,\frac{\tan\varphi}{\cos\varphi}$, $B_i = C\sqrt{3}\,.\tan\varphi$. Das allgemeinste gleicheckige Polyeder, das (12 + 20 + 30)-flächige 2.60-Eck, wird nun aus dem Ikosaeder durch gerade, zu den Achsen senkrechte, Abstumpfung der Ecken und Kanten erhalten. Sind die fünfzählige und die zweizählige

---

[1]) Die Figuren sind nur soweit ausgeführt, wie sie im folgenden gebraucht werden. Vergl. Hess, Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder. Cassel 1876, S. 72 und V. u. V. Tafel II Fig. 18 (mit sämtlichen Spuren).

[2]) Vergl. V. u. V. Tafel II Fig. 17.

Flächenachse des entstandenen Körpers G' und B', so ist $G' = G_i . t$, $B' = B_i . s$, worin t und s reelle Parameter, kleiner als 1, sind. Nun ist wegen der Polarität $G'.G = G_d . G_i . t . \tau = C^2$, d. h. $t = \frac{1}{\tau}$, und ebenso ist $s = \frac{1}{\sigma}$.

Die Ecken des gleicheckigen Polyeders sind die Pole zu den Ebenen des gleichflächigen als Polarebenen in Bezug auf die Kugel vom Radius C, und seine Flächen sind die Polarebenen zu den Ecken des Dyakishexekontaeders in Bezug auf dieselbe Kugel: es lassen sich also die Gleichungen der Flächen und die Koordinaten der Ecken des gleicheckigen Polyeders leicht angeben. Nun zerfallen aber die Gleichungen der Ebenen des gleichflächigen Polyeders in fünf Gruppen von je 24 Ebenen; ebenso ordnen sich die Ecken des gleicheckigen Polyeders in fünf Gruppen von je 24 Ecken, deren Koordinaten wir durch Indices zu unterscheiden haben. Diese Koordinaten werden ebenso abgeleitet wie früher die des (6 + 8 + 12)-flächigen 2.24-Ecks; es sollen jedoch hier nur die Resultate zusammengestellt werden. Die absoluten Werte dieser Koordinaten enthalten entweder noch die Grösse C oder eine andere Konstante, wie G_i u. s. w.; wir werden bei den weiteren Gruppen nur das Verhältnis der Koordinaten angeben, da es allein später in Frage kommt, wie denn die absolute Grösse des Polyeders bei allen folgenden Betrachtungen gleichgültig ist. Endlich werden wir die Parameter s und t durch die Koordinaten der Ecken ausdrücken. Zunächst ist die

$$\text{1. Gruppe}\begin{cases} 1)\ 11)\ 20)\ 10)\quad 101)\ 111)\ 120)\ 110) & \pm x_1,\ \pm y_1,\ \pm z_1;\\ 43)\ 53)\ 58)\ 48)\quad 63)\ 73)\ 78)\ 68) & \pm z_1,\ \pm x_1,\ \pm y_1;\\ 25)\ 85)\ 86)\ 26)\quad 35)\ 95)\ 96)\ 36) & \pm y_1,\ \pm z_1,\ \pm x_1. \end{cases}$$

Die erste Kolonne enthält stets die x-koordinate, die zweite die y-koordinate, die dritte die z-koordinate des Punktes; die Reihenfolge der Vorzeichen ist die ein für allemal für die acht Oktanten festgestellte. Es ist, wie ein Vergleich der Gleichung der Ebene 1) des Dyakishexekontaeders mit der allgemeinen Form der Polargleichung $xx_1 + yy_1 + zz_1 - C^2 = 0$ ergibt:

$$x_1 = \frac{(\sigma-1)\,\vartheta \cot\varphi}{\sigma\tau\cos^2\varphi} C\sqrt{3} = (1-s)\cot\varphi . C\sqrt{3} = (1-s)\cot^2\varphi . G_i \cos\varphi;$$
$$y_1 = \frac{\sigma-\vartheta}{\sigma\tau\cos^2\varphi} C\sqrt{3} = \frac{t-s\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} C\sqrt{3} = \frac{t-s\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} . G_i\cos\varphi;$$
$$z_1 = \frac{\vartheta\tan\varphi}{\sigma\tau\cos^2\varphi} C\sqrt{3} = s\tan\varphi . C\sqrt{3} = s . G_i\cos\varphi.$$

Also haben wir für die Koordinaten x_1, y_1, z_1 die Proportion:

$$80)\qquad x_1 : y_1 : z_1 = (1-s)\cot^2\varphi : \frac{t-s\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} : s.$$

Ist $x_1 = 0$, so ergibt sich aus dem allgemeinen gleicheckigen Polyeder das (12+20)-flächige 12.5-Eck. Für dieses gilt also $s = 1$, wie aus $\sigma = 1$ für das reziproke Polyeder gleichfalls zu erschliessen ist. Ist $y_1 = 0$, so ergibt sich für das (12+20)-flächige 20.3-Eck die Relation: $t = s\cos^2\varphi$. Berechnet man aus der Proportion 80) die Parameter s und t, so erhält man:

$$81)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{z_1}{x_1\tan^2\varphi + z_1}; \\ t = \dfrac{(y_1 + z_1\cot\varphi)\sin\varphi\cos\varphi}{x_1\tan^2\varphi + z_1} = \dfrac{y_1\tan\varphi + z_1}{x_1\tan^2\varphi + z_1}.\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Ferner ist die

$$\text{2. Gruppe}\begin{cases} 2)\ 21)\ 30)\ 9) & 91)\ 112)\ 119)\ 100) & \pm x_2,\ \pm y_2,\ \pm z_2; \\ 33)\ 52)\ 59)\ 38) & 62)\ 83)\ 88)\ 69) & \pm z_2,\ \pm x_2,\ \pm y_2; \\ 15)\ 75)\ 76)\ 16) & 45)\ 105)\ 106)\ 46) & \pm y_2,\ \pm z_2,\ \pm x_2. \end{cases}$$

Für die durch Vergleichung der allgemeinen Gleichung der Polarebene mit der der Ebene 2) des Dyakishexekontaeders erschlossenen Werte der Koordinaten x_2, y_2, z_2 ergibt sich nach Einführung der Parameter s und t statt σ und τ die Proportion:

$$82)\qquad \begin{cases} x_2 : y_2 : z_2 = \left[\left(s\cot\varphi - \dfrac{1}{2}\right)\cos^2\varphi - \dfrac{t}{2}\cot\varphi\right] \\ \quad : \left[\left(s - \dfrac{1}{2}\cot^2\varphi\right)\cos^2\varphi + \dfrac{t}{2}\right] : \left[\left(\dfrac{1}{2}\cot\varphi - s\tan\varphi\right)\cos^2\varphi + \dfrac{t}{2}\tan\varphi\right]. \end{cases}$$

Hieraus findet man nach längerer Rechnung:

$$83)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{x_2 + y_2\tan\varphi + z_2\cot\varphi}{2\,(x_2\tan^2\varphi + z_2)}; \\ t = \dfrac{y_2\tan\varphi + z_2}{x_2\tan^2\varphi + z_2}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Weiter ist die

$$\text{3. Gruppe}\begin{cases} 12)\ 22)\ 29)\ 19) & 92)\ 102)\ 109)\ 99) & \pm x_3,\ \pm y_3,\ \pm z_3; \\ 34)\ 74)\ 77)\ 37) & 44)\ 84)\ 87)\ 47) & \pm z_3,\ \pm x_3,\ \pm y_3; \\ 5)\ 51)\ 60)\ 6) & 61)\ 115)\ 116)\ 70) & \pm y_3,\ \pm z_3,\ \pm x_3. \end{cases}$$

Hier ist:

$$84)\quad x_3 : y_3 : z_3 = \left(t\,\frac{\cot\varphi}{\cos^2\varphi} - 1\right) : \left(4s - \cot^2\varphi - \frac{t}{\cos^2\varphi}\right) : \left(\cot\varphi - t\,\frac{\tan\varphi}{\cos^2\varphi}\right).$$

Für $y_3 = 0$ fällt der Punkt 12) in die x, z-ebene, d. h. die gemeinsame Kante eines Sechsecks und Zehnecks verschwindet; es ergibt sich also als Bedingung für das $(12+20+30)$-flächige 60-Eck: $s = \frac{1}{4}\left(\cot^2\varphi + \frac{t}{\cos^2\varphi}\right)$. Für s und t des $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecks gilt jetzt wie die Rechnung zeigt:

$$85)\quad \begin{cases} s = \dfrac{x_3 \cot\varphi + y_3 + z_3 \cot^2\varphi}{2\,(x_3 \tan\varphi + z_3 \cot\varphi)}; \\[2ex] t = \dfrac{x_3 \cot\varphi + z_3}{x_3 \tan\varphi + z_3 \cot\varphi} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Wir schreiben nun die

4. Gruppe	3)	31)	40)	8)	81)	113)	118)	90)	$\pm x_4, \pm y_4, \pm z_4$;
	23)	42)	49)	28)	72)	93)	98)	79)	$\pm z_4, \pm x_4, \pm y_4$;
	14)	65)	66)	17)	55)	104)	107)	56)	$\pm y_4, \pm z_4, \pm x_4$.

Man findet:

$$86)\quad \begin{cases} x_4 : y_4 : z_4 = [\cos^2\varphi\,.\,(1 + 2s\tan\varphi) - t\cot\varphi] \\ \qquad : [(\cot\varphi - 2s)\cot\varphi\cos^2\varphi + t] : [\cos^2\varphi\,.\,(2s - \cot\varphi) + t\tan\varphi]. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$87)\quad \begin{cases} s = \dfrac{x_4 \cot\varphi + y_4 + z_4 \cot^2\varphi}{2\,(x_4 + y_4 + z_4)}; \\[2ex] t = \dfrac{y_4 + z_4 \cot\varphi}{x_4 + y_4 + z_4} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Endlich ist die

5. Gruppe	13)	32)	39)	18)	82)	103)	108)	89)	$\pm x_5, \pm y_5, \pm z_5$;
	24)	64)	67)	27)	54)	94)	97)	57)	$\pm z_5, \pm x_5, \pm y_5$;
	4)	41)	50)	7)	71)	114)	117)	80)	$\pm y_5, \pm z_5, \pm x_5$.

Dabei ist:

$$88)\quad \begin{cases} x_5 : y_5 : z_5 = \left[\dfrac{t}{2}\cot\varphi - \left(s - \dfrac{1}{2}\right)\cos^2\varphi\right] \\ \qquad : \left[\dfrac{1}{2}\cot^2\varphi\cos^2\varphi - s\cos^2\varphi\tan\varphi - \dfrac{t}{2}\right] : \left[\cos^2\varphi\cot\varphi\,.\left(s - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{t}{2}\tan\varphi\right], \end{cases}$$

und hieraus findet man:

$$89)\quad \begin{cases} s = \dfrac{x_5 \cot\varphi + y_5 + z_5 \cot^2\varphi}{2(x_5 + y_5 + z_5)}, \\ t = \dfrac{x_5 \cot\varphi + z_5}{x_5 + y_5 + z_5} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Bedeutet nun für das allgemeine (12 + 20 + 30)-flächige 2.60-Eck k_1 die gemeinsame Kante einer vierkantigen und zehnkantigen Grenzfläche, k_2 die einer sechs- und zehnkantigen Fläche und k_3 die einer vier- und sechskantigen Grenzfläche, so ist, wie ein Blick auf den Körper zeigt, $k_1 = 2x_1$, $k_3 = 2y_1$ (die Koordinate der Ecke 1)), und $k_2 = 2y_3$ (die Koordinate der Ecke 12)). Man findet nach einiger Vereinfachung die Proportion:

$$90)\quad k_1 : k_2 : k_3 = (1-s)\frac{\cot^2\varphi}{\sqrt{5}} : \left(s - \frac{t}{4\cos^2\varphi} - \frac{\cot^2\varphi}{4}\right) 2\cos^2\varphi : (t - s\cos^2\varphi).$$

Durch Nullsetzen der einzelnen Kanten ergeben sich wiederum die Bedingungen für die besonderen gleicheckigen Polyeder. Führt man die Werte für die trigonometrischen Funktionen des Winkels φ ein, so wird:

$$90')\quad \begin{cases} k_1 : k_2 : k_3 = (1-s)(3\sqrt{5} + 5) : [2(5 + \sqrt{5})s - 5t - (5 + 2\sqrt{5})] \\ \qquad\qquad : [10t - (5 + \sqrt{5})s]. \end{cases}$$

Für die Parameter s und t ergeben sich aus 90) bezw. 90') als Funktionen der Kanten k_1, k_2, k_3 die Ausdrücke:

$$91)\quad \begin{cases} s = \dfrac{k_1 \cot\varphi + 2k_2 + k_3}{3k_1 \tan\varphi + 2k_2 + k_3} = \dfrac{(\sqrt{5} + 1)k_1 + 4k_2 + 2k_3}{3(\sqrt{5} - 1)k_1 + 4k_2 + 2k_3}; \\ t = \dfrac{(k_1 \cot\varphi + 2k_2)\cos^2\varphi + k_3}{3k_1 \tan\varphi + 2k_2 + k_3} = \dfrac{(5 + 3\sqrt{5})k_1 + 2(5 + \sqrt{5})k_2 + 10k_3}{15(\sqrt{5} - 1)k_1 + 20k_2 + 10k_3}. \end{cases}$$

Die A. V. des (12 + 20 + 30)-flächigen 2.60-Ecks ergibt sich für $k_1 = k_2 = k_3$, d. h. für $s = \frac{3\sqrt{5} - 1}{6}$, $t = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Wir betrachten nun die besonderen gleicheckigen Polyeder. Das (12+20)-flächige 12.5-Eck wird für $k_1 = 0$ erhalten. Es ist dann $s = 1$, d. h.:

$$k_2 : k_3 = \left(1 - \frac{t}{4\cos^2\varphi} - \frac{\cot^2\varphi}{4}\right) 2\cos^2\varphi : (t - \cos^2\varphi)$$

oder $k_2 : k_3 = 5(\sqrt{5}-2)(1-t) : [10(\sqrt{5}-2)t-(3\sqrt{5}-5)]$. Für t ergibt sich als Funktion der Kanten: $t = \frac{(5+\sqrt{5})k_2+5k_3}{10k_2+5k_3}$. Die A. V. findet man aus $k_2 = k_3$, d. h. wenn $t = \frac{10+\sqrt{5}}{15}$ ist. Für $k_1 = 0$ und $k_3 = 0$ ergibt sich das (12+20)-flächige 30-Eck oder Triakontagon. Es ist dann $s = 1$, $t = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \cos^2\varphi$. Für $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ erhält man das Ikosaeder, für das also $s = 1$, $t = 1$ ist.

Für das (12+20)-flächige 20.3-Eck ist $k_3 = 0$. Dann ist $t = s\cos^2\varphi$ oder $s = \frac{5-\sqrt{5}}{2}.t$. Für die Kanten des Polyeders findet man:

$$k_1 : k_2 = 2(1-s) : (3s\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = 20(1-s) : [3(5-\sqrt{5})s-(5+\sqrt{5})],$$

wonach:

$$s = \frac{k_1\cot\varphi + 2k_2}{3k_1\tan\varphi + 2k_2} = \frac{(\sqrt{5}+1)k_1+4k_2}{3(\sqrt{5}-1)k_1+4k_2} \text{ und}$$

$$t = s\cos^2\varphi = \frac{(5+3\sqrt{5})k_1+2(5+\sqrt{5})k_2}{15(\sqrt{5}-1)k_1+20k_2} \text{ ist.}$$

Für $k_1 = k_2$ ergeben sich die Werte von s und t für die A. V. des 20.3-Ecks zu: $s = \frac{5+7\sqrt{5}}{22}$, $t = \frac{3+2\sqrt{5}}{11}$. Für $k_1 = 0$ ergibt sich wieder das Triakontagon. Die Werte von s und t des (12+20+30)-flächigen 60-Ecks endlich befriedigen die bereits angeführte Relation, die aus $k_2 = 0$ sich ergibt und mit Einsetzung der trigonometrischen Funktionen die Form $s = \frac{5-\sqrt{5}}{8}t + \frac{3+\sqrt{5}}{8}$ annimmt. Das Verhältnis der Kanten k_1 und k_3 ist hier:

$$k_1 : k_3 = (1-s) : (3s - \cot^2\varphi)\tan\varphi.$$

Daraus findet man:

$$s = \frac{k_1\cot\varphi + k_3}{3k_1\tan\varphi + k_3} = \frac{(\sqrt{5}+1)k_1+2k_3}{3(\sqrt{5}-1)k_1+2k_3} \text{ und}$$

$$t = \frac{k_1\cot\varphi\cos^2\varphi + k_3}{3k_1\tan\varphi + k_3} = \frac{(5+3\sqrt{5})k_1+10k_3}{15(\sqrt{5}-1)k_1+10k_3}.$$

Aus $k_1 = k_3$ ergibt sich für die A. V. des Polyeders: $s = \frac{9+5\sqrt{5}}{22}$, $t = \frac{15+12\sqrt{5}}{55}$. Ist $k_3 = 0$, so erhält man die Werte s und t für das

Dodekaeder: $s = \frac{1}{3}\cot^2\varphi$, $t = \frac{1}{3}\cot^2\varphi\cos^2\varphi$, d. h. $s = \frac{3+\sqrt{5}}{6}$, $t = \frac{5+2\sqrt{5}}{15}$. — Für spätere Diskussionen wird es vorteilhaft sein, auch hier die Beziehungen zwischen den s und t für die gleicheckigen Polyeder als Gleichungen von „Kurven“ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem der s, t zu deuten (vergl. Fig. 6 Taf. 12). Die in Frage kommenden drei Kurven sind nach dem eben Besprochenen die folgenden. Die der t-achse parallele Gerade C'_1 mit der Gleichung $s = 1$ für die $(12+20)$-flächigen 12.5-Ecke läuft durch den Ikosaederpunkt I $(1, 1)$ und den Triakontagonpunkt T $(1, \cos^2\varphi)$, für den $t = 0{,}72361$ ist. Die Gerade C'_2 mit der Gleichung $t = s\cos^2\varphi$ für das $(12+20)$-flächige 20.3-Eck geht durch den Punkt T und den Dodekaederpunkt D $\left(\frac{\cot^2\varphi}{3}, \frac{\cot^2\varphi\cos^2\varphi}{3}\right)$, für welchen $s = 0{,}87268$, $t = 0{,}63148$ wird. Die Gerade C'_3 endlich, deren Gleichung $t = 4s\cos^2\varphi - \cot^2\varphi\cos^2\varphi$ für die Parameter des $(12+20+30)$-flächigen 60-Ecks ist, verläuft durch I und D. Das von den drei Geraden C'_1, C'_2 und C'_3 gebildete Dreieck ist das Gebiet der Werte s und t für die konvexen $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecke.

§ 2. Die Sphenoidgruppierungen des Dyakishexekontaedertypus.

1. Allgemeine Ableitung der möglichen fünf Gruppierungen. Wir beginnen die Betrachtung der zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder höherer Art des Dyakishexekontaedertypus mit den diskontinuierlichen konvexen Vielflachen, die bis auf einige wenige (vergl. den Anhang dieses §) Gruppierungen von rhombischen oder quadratischen Sphenoiden sind. Die zuletzt genannten sind hier nur sekundären Charakters und ergeben sich aus den vorhergehenden für bestimmte Varietäten der inneren Kerne der Polyeder. Wir haben nun zunächst die im Typus möglichen fünf Gruppierungen von je 30 rhombischen Sphenoiden allgemein zu erschliessen. Hierzu kann man sowohl von dem inneren Kern als auch der äusseren Hülle, dem allgemeinen $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Eck ausgehen. Fassen wir zunächst das letztgenannte Polyeder ins Auge. Nach den Koordinaten der Ecken hatten wir fünf Gruppen solcher zu unterscheiden, wobei die Ecken jeder Gruppe dieselben zyklisch-vertauschten Koordinatenwerte besassen. Jetzt gruppieren wir die 120 Ecken fünfmal in der Weise, dass in jeder der fünf Gruppen jeder Anordnung diejenigen 24 Ecken enthalten sind, die in gleicher Weise zu den drei Achsen der fünf Koordinatensysteme liegen, die man erhält, wenn man die fünfmal zu je drei auf einander senkrechten B-achsen [$B_1 B_{13} B_{15}$, $B_2 B_{12} B_{11}$, $B_3 B_7 B_{14}$, $B_4 B_8 B_9$, $B_5 B_6 B_{10}$] zu Koordinatenachsen wählt. Die Lage der Ecken zu den fünf Koordinatensystemen ist dann bei den fünf Anordnungen in der Reihenfolge der früheren fünf Gruppen zu nehmen. Mit anderen Worten, wir gruppieren die 120 Ecken des $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecks auf fünferlei Weise als die 15.8 Ecken von 15 achteckigen $(2+2+2)$-Flachen, die sich in das 2.60-Eck beschreiben lassen, d. h. mit diesem die Ecken gemein haben. Fassen wir, um nicht sämtliche 120 Ecken fünfmal schreiben zu müssen, nur die senkrecht stehende mit der z-achse zusammenfallende Achse B_1 ins Auge, so sind die acht Ecken des ersten $(2+2+2)$-Flaches jeder der fünf Anordnungen die folgenden:

92)

1. Anordnung:	1,	11,	20,	10,	101,	111,	120,	110.
2. „	2,	21,	30,	9,	91,	112,	119,	100.
3. „	12,	22,	29,	19,	92,	102,	109,	99.
4. „	3,	31,	40,	8,	81,	113,	118,	90.
5. „	13,	32,	39,	18,	82,	103,	108,	89.

D. h. die Ecken des ersten $(2+2+2)$-Flaches jeder Anordnung sind die Ecken der ersten Reihe in den fünf Gruppen der ursprünglichen Eckengruppierung (s. vorige Nr.). Für die Achsen B_{13} und B_{15} lassen sich selbstverständlich die Ecken der $(2+2+2)$-Flache ebenso aus den beiden anderen Reihen der früheren Gruppen ablesen, während die Ecken der weiteren $(2+2+2)$-Flache erhalten werden, wenn man der Reihe nach die vier übrigen Koordinatensysteme mit dem ersten $B_1 B_{13} B_{15}$ zur Deckung bringt. Nun sind die Ecken jedes der $(2+2+2)$-Flache die zweier einbeschriebener rhombischer Sphenoide, d. h. die Ecken des 2.60-Ecks sind fünfmal die Ecken von je 30 rhombischen Sphenoiden. Die angestellten Betrachtungen lassen sich unter Anwendung des Polaritätsprinzips sofort auf die 2.60 Flächen des Dyakishexekontaeders übertragen. Diese 120 Flächen ordnen sich fünfmal als die 15.8 Flächen von 15 geraden Doppelpyramiden auf (im allgemeinen) rhombischer Basis, und die Tabelle 92) gibt die Flächen der ersten Doppelpyramide jeder Anordnung, deren Hauptachse mit der Achse B_1 zusammenfällt. Die abwechselnden Flächen jeder solchen Doppelpyramide ergeben durch ihre Ebenen ein rhombisches Sphenoid, d. h. die 2.60-Flächen des Dyakishexekontaeders sind fünfmal die Flächen von je 30 rhombischen Sphenoiden. Es ergeben sich also für jede Varietät des Dyakishexekontaeders fünf diskontinuierliche, aus je 30 Sphenoiden bestehende, gleicheckig-gleichflächige Polyeder, deren innerer Kern das ebengenannte Polyeder, deren 30.4-eckige Hülle das (12 + 20 + 30)-flächige 2.60-Eck ist. Denn die 30 Sphenoide bilden zwei Gruppen von je 15 rechten und linken Sphenoiden, die kongruent bezw. symmetrisch sind und eine gemeinsame umbeschriebene Kugel besitzen müssen; da der Gruppierung aber die Achsen des Dyakishexekontaedertypus zukommen, so liegen die Ecken zu je vier auf kongruenten kleinen Kreisen um die zweizähligen Achsen, sind also die eines (12 + 20 + 30)-flächigen 2.60-Ecks. — Wir gehen nun für die weitere Betrachtung von dem inneren Kern aus und benennen die fünf Gruppen in der Reihenfolge nach den Flächen wie beim Hexakisoktaedertypus. Schreiben wir für jede Gruppe diejenigen beiden Sphenoide an, deren gemeinsamer Kern die unter 92) jeweils angeführte Doppelpyramide ist, sowie diejenigen beiden zusammengehörigen Sphenoide, unter deren Flächen die Fläche 1) des Dyakishexekontaeders enthalten ist, so ergeben sich die folgenden fünf Gruppen.[1])

93)

1. Gruppe	1, 20, 110, 111. 10, 11, 101, 120.	Achse B_1.	1, 20, 110, 111. 10, 11, 101, 120.	1. Gruppe. Achse B_1.
2. Gruppe	2, 30, 100, 112. 9, 21, 91, 119.		1, 23, 99, 117. 22, 4, 98, 120.	2. Gruppe. Achse B_2.
3. Gruppe	12, 29, 99, 102. 19, 22, 92, 109.		1, 64, 56, 119. 2, 65, 57, 120.	3. Gruppe. Achse B_3.
4. Gruppe	3, 40, 90, 113. 8, 31, 81, 118.		1, 38, 115, 82. 39, 6, 83, 120.	4. Gruppe. Achse B_4.
5. Gruppe	13, 39, 89, 103. 18, 32, 82, 108.		1, 77, 45, 113. 8, 76, 44, 120.	5. Gruppe. Achse B_5.

[1]) Für die analytisch-geometrische Behandlung der fünf Sphenoidgruppen ist es vorteilhaft, stets auf die Sphenoide mit der Hauptachse B_1 zurückzugehen, während für die zeichnerische Darstellung es andererseits nötig wird, die Sphenoide der rechten Kolonne ins Auge zu fassen, da wir die vollständige Figur stets in der Ebene 1) des Dyakishexekontaeders entwerfen. Für die speziellen Körper des Typus müssen dann die Sphenoide der rechten Kolonne besonders bestimmt werden, da nicht immer die Fläche 1) des speziellen Körpers aus der Fläche 1) des Dyakishexekontaeders folgt (vergl. Note VI).

Die angeführten Zahlen sind nun zugleich die Eckenzahlen für je vier Sphenoide im $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Eck. An Stelle des Wortes Gruppe setzen wir dann Klasse und sprechen also von fünf Klassen rhombischer Sphenoide, wobei wir mit dem Worte Klasse gleichzeitig die bezw. Ecken des 2.60-Ecks treffen wollen. Wie früher ist der Begriff der Gruppe mit dem der Klasse nicht vertauschbar, vielmehr ist die Zuordnung hier eine weitaus kompliziertere als beim Hexakisoktaedertypus. Doch gilt auch jetzt der im Laufe der Untersuchung zu erhärtende Satz, dass die Sphenoidgruppierungen der i-ten Gruppe k-ter Klasse polarreziprok sind denen der k-ten Gruppe i-ter Klasse. Wir untersuchen zunächst die Änderungen der Gruppierungen für die speziellen Kerne und Hüllen. Wir ersetzen zu dem Zwecke die obigen allgemeinen Zahlen in 93) gemäss Note VI durch die Zahlen für die speziellen Polyeder, wobei wir sie sowohl als Zahlen für die Flächen wie für die Ecken auffassen dürfen, d. h. wir sprechen ebensowohl vom Triakisikosaeder wie vom $(12+20)$-flächigen 20.3-Eck u. s. w. Wir ordnen die Zahlen für die speziellen Körper in die fünf Kolonnen I—V und bezeichnen kurz mit 60, 20.3, 12.5, 30 sowohl die gleichflächigen wie gleicheckigen betr. Polyeder. Dann ergibt sich folgende Übersicht.[1])

94)

		I	II	III	IV	V
94)	60	4, 12, 49, 57	4, 12, 49, 57	14, 11, 50, 47	5, 26, 36, 56	15, 25, 37, 46
		3, 13, 48, 58	3, 13, 48, 58	11, 14, 47, 50	2, 28, 34, 59	10, 29, 33, 51
				*		[2])
	20.3	10, 1, 59, 60	9, 18, 35, 57	9, 18, 35, 57	8, 17, 36, 58	8, 17, 36, 58
		1, 10, 60, 59	2, 11, 56, 34	2, 11, 56, 34	3, 12, 55, 33	3, 12, 55, 33
		*				
	12.5	1, 2, 59, 60	6, 4, 56, 58	10, 8, 52, 54	6, 4, 56, 58	10, 8, 52, 54
		1, 2, 59, 60	3, 5, 57, 55	7, 9, 53, 51	3, 5, 57, 55	7, 9, 53, 51
		*				
	30	1, 1, 30, 30	3, 5, 28, 26	3, 5, 28, 26	3, 5, 28, 26	3, 5, 28, 26
		1, 1, 30, 30	4, 2, 27, 29	4, 2, 27, 29	4, 2, 27, 29	4, 2, 27, 29
		*				

[1]) Dabei bedeutet *), dass die Sphenoide in parallele Ebenen zerfallen sind, falls die Zahlen Flächenzahlen bedeuten, in zwei Paar Gegenecken (d. h. Sphenoide aus zwei Paar zusammenfallenden Ebenen bestehend), wenn die Zahlen Eckenzahlen sind.

[2]) Auch in diesem Falle sind die Sphenoide unter IV und V identisch, wie die Tabelle 95) zeigt, nur ergeben die an vierter und fünfter Stelle bei dem allgemeinen Dyakishexekontaeder

Die folgende Tabelle unter 95) zeigt die die Fläche 1) enthaltenden Sphenoide jeder Gruppe, wenn der Kern das links angeführte gleichflächige Polyeder ist. Bei Weglassung der immer beigefügten Fläche 1) gibt die Tabelle diejenigen sechs (bezw. zwölf) Spuren in der Ebene der Fläche 1) der speziellen gleichflächigen Polyeder des Typus, die von den übrigen Flächen der Sphenoide gebildet werden, denen eine Fläche in der Ebene 1) des inneren Kernes zukommt. Oder mit Beziehung auf die Zahlen als Eckenzahlen zeigt die Tabelle die je zwei Sphenoide bestimmter Klasse im umhüllenden gleicheckigen speziellen Polyeder, die die Ecke 1) gemeinsam haben, und bei Weglassung dieser Ecke 1) zeigen also die sechs (bezw. zwölf) übrigen Zahlen die Ecken an, nach denen die sechs [zwölf] Kanten von der Ecke 1) aus gerichtet sind. Diese sechs [zwölf] Kanten bilden also diskontinuierliche sechs [zwölf]-kantige Ecken (aus zwei [vier] dreikantigen gebildet) zweiter [vierter] Art für jedes der aus Sphenoiden zusammengesetzten diskontinuierlichen Polyeder.

		I	II	III	IV	V
95)	60	1, 6, 59, 53 1, 9, 56, 54	1, 6, 59, 53 1, 9, 56, 54	—	1, 29, 57, 39 1, 25, 58, 31	1, 29, 57, 39 1, 25, 58, 31
	20.3	—	1, 24, 45, 56 1, 19, 57, 52	1, 24, 45, 56 1, 19, 57, 52	1, 48, 39, 36 1, 42, 33, 28	1, 48, 39, 36 1, 42, 33, 28
	12.5	—	1, 18, 47, 52 1, 15, 50, 53	1, 27, 55, 40 1, 26, 58, 41	1, 18, 47, 52 1, 15, 50, 53	1, 27, 55, 40 1, 26, 58, 41
	30	—	1, 11, 25, 28 1, 12, 22, 27 1, 10, 29, 24 1, 13, 26, 23		wie II, 30	

Aus den beiden Tabellen 94) und 95) lesen wir nun für die fünf Gruppen bezw. fünf Klassen im Dyakishexekontaedertypus die folgenden

bezw. (12 + 20 + 30)-flächigen 2.60-Eck angeführten Sphenoide verschiedene Sphenoide der identischen Gruppierung bei dem Deltoidhexekontaeder bezw. (12 + 20 + 30)-flächigen 60-Eck.

Ergebnisse ab. α) Die erste Gruppe und Klasse. Ist der Kern der Gruppierung das Deltoidhexekontaeder, so fallen je zwei Flächen verschiedener der 30 Sphenoide in eine Ebene, die Hülle bleibt im allgemeinen ein 2.60-Eck. Ist der Kern eines der übrigen speziellen gleichflächigen Polyeder des Typus, so existieren keine Sphenoide. Ebenso wenig kann als äussere Hülle eines Polyeders „erster Klasse“ ein 20.3-Eck, 12.5-Eck oder Triakontagon auftreten, während es Polyeder erster Klasse gibt, deren Hülle das 60-Eck ist. Dann fallen je zwei Ecken verschiedener Sphenoide in einem Eckpunkte des Hüllpolyeders zusammen und bilden diskontinuierliche sechskantige Ecken, wie überdies auch zwei Sphenoidflächen in einer Ebene als diskontinuierliche Sechsecke zweiter Art angesprochen werden können. β) Die zweite Gruppe und Klasse. Hier können alle speziellen Kerne bezw. Hüllen des Typus auftreten. Ist der Kern das Deltoidhexekontaeder, so werden die Sphenoide identisch mit denen der ersten Gruppe; ist die Hülle das $(12+20+30)$-flächige 60-Eck, so sind die Sphenoide zweiter Klasse identisch mit denen erster Klasse. Ist der Kern das Triakisikosaeder, oder die Hülle das 20.3-Eck, so fallen die Sphenoide der zweiten Gruppe bezw. Klasse mit denen der dritten Gruppe bezw. Klasse zusammen. Ist der Kern das Pentakisdodekaeder, bezw. die Hülle das 12.5-Eck, so werden die Sphenoide der zweiten Gruppe bezw. Klasse identisch mit solchen der vierten Gruppe und Klasse. Ferner ist zu bemerken, dass die Sphenoide der zweiten bis fünften Gruppe identisch werden für den Fall, dass das gleichflächige Kernpolyeder das Triakontaeder ist, während für das Triakontagon als äussere Hülle die Sphenoide derselben vier Klassen die gleichen sind. Im ersten Falle liegen vier Flächen verschiedener Sphenoide in einer Ebene, ein diskontinuierliches 4.3-eck bildend, die Hülle ist ein 2.60-Eck; für das polarreziproke Polyeder, dessen Kern ein Dyakishexekontaeder ist, fallen vier Ecken verschiedener Sphenoide in einer Ecke des umhüllenden Triakontagons zusammen und bilden eine 4.3-kantige diskontinuierliche Ecke vierter Art. γ) Die dritte Gruppe und Klasse. Ist der Kern des Polyeders das Deltoidhexekontaeder, so werden die Sphenoide zu parallelen Ebenen, also illusorisch; ebensowenig existieren Polyeder dritter Klasse, deren Hülle ein 60-Eck ist. Ist der Kern der Gruppierung ein Pentakisdodekaeder, so fallen die Sphenoide der dritten

Gruppe mit denen der fünften zusammen, analoges gilt für die Klassenpolyeder. δ, ε) Die vierte und fünfte Gruppe und Klasse. Auch die Sphenoide der vierten und fünften Gruppe bezw. Klasse sind stets vorhanden, wenn der Kern oder die Hülle des Polyeders, das sie bilden, ein spezielles Polyeder des Typus ist. Ist der Kern ein Deltoidhexekontaeder, oder die Hülle ein 60-Eck, so werden die Sphenoide beider Gruppen bezw. Klassen identisch; dasselbe gilt für das Triakisikosaeder und 20.3-Eck als Kern bezw. Hülle. Die weiteren Kerne und Hüllen spezieller Art sind aber bereits durch das vorhergehende erledigt. Wir wenden uns nun zunächst zur näheren Betrachtung der fünf Klassen der rhombischen Sphenoide, da deren Untersuchung sich einfacher gestaltet, als die der Gruppen und beachten dabei besonders diejenigen 2.60-Ecke und speziellen Polyeder, in denen an Stelle der rhombischen sekundäre quadratische Sphenoide treten.

2. **Die fünf Klassen der rhombischen Sphenoide im $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Eck und die sekundären quadratischen Sphenoide.** Wir untersuchen für jede Gruppierung die beiden Sphenoide in dem rechtwinkligen Parallelepiped, dessen „Hauptachse“ die Achse B_1, dessen dazu senkrechte Querachsen B_{13} und B_{15} sind [vergl. hierzu die Tabelle 93)]. α) Sphenoide der ersten Klasse. Das erste Parallelepiped hat die Ecken 1, 11, 20, 10, 101, 111, 120, 110, in der Reihenfolge der acht Oktanten. Die Kanten des Parallelepipeds sind $2x_1$, $2y_1$, $2z_1$. Für $k_1 = 0$ oder $k_3 = 0$, d. h. wenn die Hülle des Polyeders ein 12.5-Eck bezw. 20.3-Eck ist, entartet das Parallelepiped in ein Rechteck; für $k_2 = 0$, d. h. wenn die Hülle ein 60-Eck ist, fallen die Ecken mit solchen der Sphenoide der zweiten Klasse zusammen. Das sind bereits auf anderem Wege gefundene Ergebnisse. Wir fragen nun, für welche Hüllpolyeder werden die rhombischen Sphenoide erster Klasse zu quadratischen? Dann muss an Stelle des rechtwinkligen Parallelepipeds mit drei verschiedenen Kanten die quadratische Säule treten. Das wäre im allgemeinen auf dreierlei Weise möglich, denn jede der drei verschiedenen rechteckigen Grenzflächen könnte in ein Quadrat übergehen; es müsste dann $x_1 = y_1$ oder $x_1 = z_1$ oder $y_1 = z_1$ sein. Ist $x_1 = y_1$, d. h. die viereckigen Grenzflächen des Hüllpolyeders sind selbst Quadrate,

so ergibt sich die Beziehung, die dann zwischen s und t bestehen muss, aus $\frac{t - s\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = (1-s)\cot^2\varphi$, d. h. es ist:

$$96)\qquad t = (\cot\varphi - s\tan\varphi)\cos^2\varphi.$$

Deuten wir, wie früher, s und t als rechtwinklige Koordinaten, — vergl. für das Folgende stets Fig. 6 Taf. 12 —, so stellt 96) die Gleichung einer Geraden dar, der Geraden L_1 der Figur, deren Lage wir erkennen, indem wir ihre Schnittpunkte mit den Geraden C'_1 ($s = 1$; 12.5-Eck), C'_2 ($t = s\cos^2\varphi$; 20.3-Eck) bezw. C'_3 ($t = [4s - \cot^2\varphi]\cos^2\varphi$; 60-Eck) bestimmen; ein Verfahren, das auch weiterhin immer angewandt wird. Wir finden: die Gerade L_1 geht durch die Punkte $s = 1$, $t = \cos^2\varphi$ (Triakontagon) und $s = \frac{9+5\sqrt{5}}{22}$, $t = \frac{3(4\sqrt{5}+5)}{55}$, d. i. die A. V. des (12 + 20 + 30)-flächigen 60-Ecks. Da die Gleichsetzungen $x_1 = z_1$, $y_1 = z_1$ auf Gerade führen, die das Gebiet der konvexen 2.60-Ecke meiden, so gilt: Es gibt nur eine einfach unendliche Reihe von 2.60-Ecken, für welche die einbeschriebenen 30 Sphenoide der ersten Klasse quadratisch werden. Den Grenzfall dieser Reihe bildet die A. V. des 60-Ecks, für den nach obigem überdies die Gruppierung zugleich zur zweiten Klasse gehört; die andere Grenze, das Triakontagon, ist ersichtlich auszuschliessen.

β) Sphenoide der zweiten Klasse. Die Ecken des ersten rechtwinkligen Parallelepipeds mit der Hauptachse B_1 und den Querachsen B_{13} und B_{15} sind nach den Oktanten geordnet: 2, 21, 30, 9, 91, 112, 119, 100. Die Kanten dieses Parallelepipeds sind $2x_2$, $2y_2$, $2z_2$. Untersuchen wir zunächst wieder die speziellen Hüllpolyeder. Wird $k_1 = 0$, d. h. das 2.60-Eck zum 12.5-Eck, so fällt die Ecke 2) mit 3) zusammen, d. h. die Sphenoide werden identisch mit solchen der vierten Klasse. Für $k_2 = 0$ wird die Ecke 2) $\equiv$ 1), d. h. für das 60-Eck als Hülle fallen die Sphenoide der zweiten Klasse mit solchen der ersten zusammen (s. oben). Ist endlich $k_3 = 0$, so wird die Ecke 2) $\equiv$ 12), d. h. für das 20.3-Eck als Hülle sind die Sphenoide der zweiten und dritten Klasse identisch. Fragen wir wiederum nach den quadratischen Sphenoiden, so zeigt die Untersuchung der drei zunächst verfügbaren Gleichungen, dass nur $x_2 = y_2$ auf eine solche zwischen s und t führt, die eine durch das Gebiet der konvexen 2.60-Ecke gehende Gerade darstellt, nämlich

$$97)\qquad t = (2s\tan^2\varphi + 1)\tan\varphi \,.\, \cos^2\varphi.$$

Diese Gerade L_2 der Figur schneidet die Gerade C'_1 im Punkte $t = \frac{4\sqrt{5}-5}{5} = 0{,}789..$ und die Gerade C'_3 im Punkte $s = \frac{5\sqrt{5}+9}{22}$. Die erste Grenze ist ein besonderes 12.5-Eck, die zweite die A. V. des 60-Ecks, d. h.: Es gibt eine einfach unendliche Reihe von 2.60-Ecken, für welche die 30 einbeschriebenen Sphenoide zweiter Klasse quadratisch werden. Für die erste genannte Grenze sind diese quadratischen Sphenoide identisch mit solchen der vierten Klasse, für die zweite mit solchen der ersten Klasse.

γ) Sphenoide der dritten Klasse. Die Ecken des ersten Parallelepipeds sind nach den acht Oktanten geordnet: 12, 22, 29, 19, 92, 102, 109, 99; seine Kanten $2x_3$, $2y_3$, $2z_3$. Für die besonderen Hüllen gilt das Folgende. Für $k_1 = 0$, d. h. das 12.5-Eck ist 12) $\equiv$ 13), d. h. die Polyeder dritter Klasse fallen mit solchen der fünften Klasse zusammen. Für $k_2 = 0$ wird das Parallelepiped zu einer Ebene, d. h. es gibt keine Sphenoide dritter Klasse, deren Hülle ein 60-Eck ist. Für $k_3 = 0$, d. h. das 20.3-Eck ist 12) $\equiv$ 2), woraus sich das mit β) übereinstimmende Resultat ergibt. Für Bestimmung der quadratischen Sphenoide haben wir in $x_3 = y_3$ und $y_3 = z_3$ Gleichungen von Geraden, die das Gebiet der konvexen 2.60-Ecke nicht treffen. Dagegen ist $x_3 = z_3$ die Gerade $t\frac{\cot\varphi}{\cos^2\varphi} - 1 = \cot\varphi - t\frac{\tan\varphi}{\cos^2\varphi}$, d. h.:

$$98)\qquad t = \frac{\cot\varphi \,.\, \cos^2\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \frac{2+\sqrt{5}}{5} = 0{,}847...$$

Diese Gerade L_3 der Figur geht parallel der s-achse durch die Punkte $s = 1$, $t = \frac{2+\sqrt{5}}{5}$ (ein besonderes 12.5-Eck) und durch $s = \frac{5+2\sqrt{5}}{10}$, $t = \frac{2+\sqrt{5}}{5}$ (ein besonderes 60-Eck), d. h.: Es gibt eine einfach unendliche Reihe von 2.60-Ecken, für welche die 30 einbeschriebenen Sphenoide dritter Klasse quadratisch werden. Für die erste genannte Grenze fällt das Polyeder mit einem solchen der fünften Klasse zusammen, für die zweite Grenze wird es illusorisch, denn es artet in ein System zusammenfallender Ebenen aus.

δ) Sphenoide der vierten Klasse. Die Ecken des Parallelepipeds sind: 3, 31, 40, 8, 81, 113, 118, 90; die Kanten sind: $2x_4$, $2y_4$, $2z_4$. Der Fall $k_1 = 0$, wofür Ecke 3) $=$ 2) wird, ist schon unter β) erledigt. Für $k_2 = 0$, d. h. für das 60-Eck tritt an Stelle des allgemeinen Parallelepipeds das, dessen Ecken (nach Note VI) 5, 28, 26, 2, 34, 56, 59, 36 sind. Das sind auch die Ecken eines Parallelepipeds mit Sphenoiden fünfter Klasse, wie nachher gezeigt wird, nur tritt bei diesen Sphenoiden eine Vertauschung der Hauptachse mit einer der Querachsen ein. Für $k_3 = 0$, 3) $=$ 13), d. h. das 20.3-Eck, fällt die Gruppierung der vierten Klasse direkt mit einer der fünften Klasse zusammen. Für Bestimmung der quadratischen Sphenoide gibt die Bedingung $y_4 = z_4$ nichts brauchbares. Soll $x_4 = y_4$ sein, so gilt die Gleichung zwischen s und t:

$$99) \qquad t = (2s\sqrt{5} - \cot\varphi)\sin^2\varphi.$$

Das ist eine Gerade L_4 durch den Punkt $s = 1$, $t = \frac{4\sqrt{5}-5}{5}$, d. h. dasjenige 12.5-Eck, durch welches die Gerade L_2 ging, wie denn in der Tat für das 12.5-Eck die Sphenoide vierter Klasse mit solchen zweiter zusammenfallen. Die Gerade L_4 geht ferner durch den Punkt $s = \frac{1}{3}\cot^2\varphi = \frac{3+\sqrt{5}}{6}$, $t = \frac{1}{3}\cot^2\varphi \, . \cos^2\varphi = \frac{2\sqrt{5}+5}{15}$, d. h. durch den Dodekaederpunkt. — Die Bedingung $x_4 = z_4$ gibt die Gleichung der Geraden:

$$100) \qquad t = \frac{\cos^2\varphi\cot^2\varphi}{\sqrt{5}} - \frac{2s\cos^2\varphi\,(1-\tan\varphi)}{\sqrt{5}}.$$

Das ist eine Gerade durch den Dodekaederpunkt, die aber im übrigen ausserhalb des Gebietes der konvexen 2.60-Ecke verläuft. Mit dem vorigen vereint haben wir das Resultat: Es gibt eine einfach unendliche Reihe von 2.60-Ecken, für welche die Sphenoide vierter Klasse quadratisch sind, deren ein Grenzpolyeder eine besondere Varietät des 12.5-Ecks, deren anderes Grenzpolyeder das Dodekaeder ist; im letzteren Falle werden die quadratischen Sphenoide zu Tetraedern. Denn hier ist $x_4 = y_4 = z_4$, d. h. das

Parallelepiped ein reguläres Hexaeder. Die Sphenoide sind die bekannten zehn Tetraeder, die sich den fünf Hexaedern im Dodekaeder einschreiben lassen (vergl. den Anhang dieses §).

ε) Sphenoide der fünften Klasse. Das charakteristische erste Parallelepiped hat die Ecken: 13, 32, 39, 18, 82, 103, 108, 89; die Kanten sind $2x_5$, $2y_5$, $2z_5$. Für $k_1 = 0$, 13) $\equiv$ 12) ist γ) zu vergleichen. Für $k_2 = 0$, d. h. das 60-Eck, werden die allgemeinen Ecken zu 15, 29, 25, 10, 33, 46, 51, 37. Bestimmt man aber die Ecken des charakteristischen Parallelepipeds für die Sphenoide vierter Klasse für dasjenige Parallelepiped, dessen Hauptachse B_{13} ist, so ergibt sich 15, 33, 46, 29, 10, 37, 51, 25. Da dies die obigen Ecken sind, so sind für das 60-Eck die Sphenoide der vierten und fünften Klasse identisch. Der Fall 13) $\equiv$ 3) ist unter δ) erledigt. Endlich bestimmen wir auch hier die quadratischen Sphenoide. Die Bedingung $x_5 = y_5$ gibt nichts brauchbares. $x_5 = z_5$ ergibt die Gerade:

$$101) \qquad t = \frac{(2s-1)\cot^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{\sqrt{5}}.$$

Diese Gerade L_5 der Figur geht durch $s = 1$, $t = \frac{2+\sqrt{5}}{5}$, d. h. durch das besondere 12.5-Eck, für welches die Sphenoide dritter Klasse quadratisch sind, und durch den Dodekaederpunkt. Da $y_5 = z_5$ eine Gerade ist, die ebenfalls durch den Dodekaederpunkt gehend, im übrigen ausserhalb des Gebietes der konvexen 2.60-Ecke verläuft, so folgt: Es gibt eine einfach unendliche Reihe von 2.60-Ecken, für welche die Sphenoide fünfter Klasse quadratisch sind, deren ein Grenzpolyeder ein besonderes 12.5-Eck, deren anderes Grenzpolyeder das Dodekaeder ist. Im letzteren Falle ergeben sich wieder die schon erwähnten zehn Tetraeder im Dodekaeder. — Ist die Hülle der Sphenoidgruppierungen zweiter bis fünfter Klasse das Triakontagon, so sind die 30 Sphenoide rhombische, da keine der Geraden L_2, L_3, L_4, L_5 durch den Punkt $s = 1$, $t = \cos^2\varphi$ geht.[1])

3. **Die fünf Gruppen der rhombischen Sphenoide und die Bestimmung ihres Klassencharakters.** Um die diskontinuierlichen aus den

[1]) Den Schnittpunkten der Geraden L_i ist keine besondere Bedeutung beizulegen.

30 rhombischen Sphenoiden gebildeten Polyeder einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen, greifen wir für jede der fünf Gruppen immer das als erstes Sphenoid heraus, dessen Flächen in erster Linie in der linken Kolonne unter 93) angeführt sind, dessen vier Flächen also für alle fünf Gruppen auf den drei Koordinatenachsen durchgängig Abschnitte derselben Vorzeichen ergeben. Bezeichnen wir dieses Sphenoid für die i-te Gruppe mit $A_iB_iC_iD_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ und verstehen unter A_i die Ecke im vierten Oktanten, unter B_i die im zweiten, unter C_i die im fünften und also unter D_i die im siebenten Oktanten, so sind die vier Flächen jedes Sphenoids in der Reihenfolge wie sie unter 93) angeführt sind mit ihren Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} A_iB_iC_i) & a_ix + b_iy + c_iz - d = 0. \\ A_iB_iD_i) & -a_ix - b_iy + c_iz - d = 0. \\ A_iC_iD_i) & -a_ix + b_iy - c_iz - d = 0. \\ B_iC_iD_i) & a_ix - b_iy - c_iz - d = 0. \end{array}$$

Die Koordinaten der vier Ecken des Sphenoids jeder Gruppe ergeben sich jeweils aus je drei der angeschriebenen Gleichungen. Setzt man zur Abkürzung $a_ib_ic_i = n$, so sind diese vier Ecken mit ihren Koordinaten die folgenden:

$$A_i \begin{cases} x = -\frac{b_ic_i}{n}d. \\ y = \frac{a_ic_i}{n}d. \\ z = \frac{a_ib_i}{n}d. \end{cases} \quad B_i \begin{cases} x = \frac{b_ic_i}{n}d. \\ y = -\frac{a_ic_i}{n}d. \\ z = \frac{a_ib_i}{n}d. \end{cases} \quad C_i \begin{cases} x = \frac{b_ic_i}{n}d. \\ y = \frac{a_ic_i}{n}d. \\ z = -\frac{a_ib_i}{n}d. \end{cases} \quad D_i \begin{cases} x = -\frac{b_ic_i}{n}d. \\ y = -\frac{a_ic_i}{n}d. \\ z = -\frac{a_ib_i}{n}d. \end{cases}$$

Verstehen wir nun unter der Normalecke N diejenige Ecke im ersten Oktanten, für welche die drei Koordinaten die drei positiven Werte $\frac{b_ic_i}{n}d$, $\frac{a_ic_i}{n}d$, $\frac{a_ib_i}{n}d$ besitzen, also die im ersten Oktanten liegende Ecke des Parallelepipeds, dem das Sphenoid einbeschrieben ist, so gilt für deren Koordinaten stets die Proportion:

102) $$x : y : z = b_ic_i : a_ic_i : a_ib_i; \; (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Dabei haben die Produkte der rechten Seite für die fünf Gruppen die folgenden Werte:

$$103)\quad \begin{cases} a_1 b_1 = -\sigma\vartheta^2 \cot\varphi + \sigma^2\vartheta \cot\varphi + \vartheta^2 \cot\varphi - \sigma\vartheta \cot\varphi; \\ a_1 c_1 = \sigma\vartheta^2 - \vartheta^2; \\ b_1 c_1 = -\vartheta^2 \tan\varphi + \sigma\vartheta \tan\varphi. \end{cases}$$

$$104)\quad \begin{cases} a_2 b_2 = \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot^2\varphi - \sigma\vartheta^2\cot^2\varphi + \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot\varphi + \vartheta^2\cot\varphi - \frac{\sigma^2}{4}\cot\varphi; \\ a_2 c_2 = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot\varphi + \sigma\vartheta^2\cot\varphi - \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot\varphi - \vartheta^2 + \sigma\vartheta - \frac{\sigma^2}{4}; \\ b_2 c_2 = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot^3\varphi + \sigma\vartheta^2\cot\varphi - \vartheta^2\tan\varphi + \frac{\sigma^2}{4}\tan\varphi. \end{cases}$$

$$105)\quad \begin{cases} a_3 b_3 = \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot^2\varphi - \sigma\vartheta^2 - \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot\varphi + \sigma\vartheta\cot\varphi - \frac{\sigma^2}{4}\cot\varphi; \\ a_3 c_3 = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot\varphi + \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot\varphi - \frac{\sigma^2}{4}; \\ b_3 c_3 = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot^3\varphi + \sigma\vartheta^2\cot\varphi - \sigma\vartheta\tan\varphi + \frac{\sigma^2}{4}\tan\varphi. \end{cases}$$

$$106)\quad \begin{cases} a_4 b_4 = \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot^2\varphi - \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot\varphi - \vartheta^2 + \sigma\vartheta\cot\varphi - \frac{\sigma^2}{4}\cot\varphi; \\ a_4 c_4 = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot\varphi + \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot\varphi + \vartheta^2\tan\varphi - \sigma\vartheta\tan\varphi - \frac{\sigma^2}{4}; \\ b_4 c_4 = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot^3\varphi + \sigma\vartheta^2\cot^2\varphi - \vartheta^2\cot\varphi + \frac{\sigma^2}{4}\tan\varphi. \end{cases}$$

$$107)\quad \begin{cases} a_5 b_5 = \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot^2\varphi - \sigma\vartheta^2\cot\varphi + \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot\varphi + \vartheta^2\tan\varphi - \frac{\sigma^2}{4}\cot\varphi; \\ a_5 c_5 = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot\varphi + \sigma\vartheta^2\cot\varphi - \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot\varphi - \vartheta^2\cot\varphi + \sigma\vartheta\cot\varphi - \frac{\sigma^2}{4}; \\ b_5 c_5 = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot^3\varphi + \sigma\vartheta^2\cot^2\varphi - \vartheta^2 - \sigma\vartheta\tan\varphi + \frac{\sigma^2}{4}\tan\varphi. \end{cases}$$

Da für Berechnung der Parameter s und t des Hüllpolyeders nach den Formeln 81), 83), 85), 87) und 89) nur die Verhältnisse der absoluten Koordinaten in Frage kommen, so genügt die Gleichung 102) vollkommen.

Die Normalecke N kann nun dreimal identisch sein mit einer Ecke k-ter Klasse, denn es lassen sich in das 2.60-Eck drei rechtwinklige Parallelepipede mit den Kanten $2x_i$, $2y_i$, $2z_i$ einschreiben, so dass diese Kanten parallel den drei Koordinatenachsen sind. Als Hauptachse jedes Parallelepipeds ist dann die zu bezeichnen, die in ihm so liegt, wie die z-achse des ersten Parallelepipeds jeder Klasse, die mit der Achse B_1 des 2.60-Ecks zusammenfällt. Die 15 Normalecken sind dann:

$$1.\,\mathrm{Kl.}\left\{\begin{array}{rl} & \underline{\quad x\quad y\quad z\quad} \\ 1) \equiv \mathrm{I}z; & x_1,\ y_1,\ z_1; \\ 25) \equiv \mathrm{I}y; & y_1,\ z_1,\ x_1; \\ 43) \equiv \mathrm{I}x; & z_1,\ x_1,\ y_1. \end{array}\right. \quad 2.\,\mathrm{Kl.}\left\{\begin{array}{rl} & \underline{\quad x\quad y\quad z\quad} \\ 2) \equiv \mathrm{II}z; & x_2,\ y_2,\ z_2; \\ 15) \equiv \mathrm{II}y; & y_2,\ z_2,\ x_2; \\ 33) \equiv \mathrm{II}x; & z_2,\ x_2,\ y_2. \end{array}\right. \quad 3.\,\mathrm{Kl.}\left\{\begin{array}{rl} & \underline{\quad x\quad y\quad z\quad} \\ 12) \equiv \mathrm{III}z; & x_3,\ y_3,\ z_3; \\ 5) \equiv \mathrm{III}y; & y_3,\ z_3,\ x_3; \\ 34) \equiv \mathrm{III}x; & z_3,\ x_3,\ y_3. \end{array}\right.$$

$$4.\,\mathrm{Kl.}\left\{\begin{array}{rl} & \underline{\quad x\quad y\quad z\quad} \\ 3) \equiv \mathrm{IV}z; & x_4,\ y_4,\ z_4; \\ 14) \equiv \mathrm{IV}y; & y_4,\ z_4,\ x_4; \\ 23) \equiv \mathrm{IV}x; & z_4,\ x_4,\ y_4. \end{array}\right. \quad 5.\,\mathrm{Kl.}\left\{\begin{array}{rl} & \underline{\quad x\quad y\quad z\quad} \\ 13) \equiv \mathrm{V}z; & x_5,\ y_5,\ z_5; \\ 4) \equiv \mathrm{V}y; & y_5,\ z_5,\ x_5; \\ 24) \equiv \mathrm{V}x; & z_5,\ x_5,\ y_5. \end{array}\right.$$

Dabei verstehen wir also z. B. unter $\mathrm{I}x$ diejenige Normalecke **erster** Klasse, die einem Parallelepiped angehört, dessen **Hauptachse** mit der x-achse des Koordinatensystems zusammenfällt u. s. w. Erteilen wir den Parametern σ und τ des Dyakishexekontaeders variable Werte, d. h. nichts anderes als bewegen wir dessen Ebenen stetig im Raume (natürlich in ganz bestimmter vorgeschriebener Weise), so kommen je zwei der 15 Normalecken der fünf Gruppierungen auf verschiedene Art zum Zusammenfallen, d. h. an Stelle des 2.60-Ecks treten als Hüllpolyeder die besonderen gleicheckigen Polyeder des Typus. Diese möglichen Fälle sind die folgenden, wobei wir für jedes gleicheckige Polyeder die zusammenfallenden Normalecken und das kurze Symbol anführen:

$$\begin{array}{c} 60\text{-} \\ \mathrm{Eck} \end{array}\left\{\begin{array}{rl} 1 \equiv 2; & \mathrm{I}z = \mathrm{II}z; \\ 25 \equiv 15; & \mathrm{I}y = \mathrm{II}y; \\ 43 \equiv 33; & \mathrm{I}x = \mathrm{II}x; \\ 3 \equiv 4; & \mathrm{IV}z = \mathrm{V}y; \\ 14 \equiv 24; & \mathrm{IV}y = \mathrm{V}x; \\ 23 \equiv 13; & \mathrm{IV}x = \mathrm{V}z. \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} 20.3\text{-} \\ \mathrm{Eck} \end{array}\left\{\begin{array}{rl} 2 \equiv 12; & \mathrm{II}z = \mathrm{III}z; \\ 15 \equiv 5; & \mathrm{II}y = \mathrm{III}y; \\ 33 \equiv 34; & \mathrm{II}x = \mathrm{III}x; \\ 3 \equiv 13; & \mathrm{IV}z = \mathrm{V}z; \\ 14 \equiv 4; & \mathrm{IV}y = \mathrm{V}y; \\ 23 \equiv 24; & \mathrm{IV}x = \mathrm{V}x. \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} 12.5\text{-} \\ \mathrm{Eck} \end{array}\left\{\begin{array}{rl} 2 \equiv 3; & \mathrm{II}z = \mathrm{IV}z; \\ 15 \equiv 14; & \mathrm{II}y = \mathrm{IV}y; \\ 33 \equiv 23; & \mathrm{II}x = \mathrm{IV}x; \\ 12 \equiv 13; & \mathrm{III}z = \mathrm{V}z; \\ 5 \equiv 4; & \mathrm{III}y = \mathrm{V}y; \\ 34 \equiv 24; & \mathrm{III}x = \mathrm{V}x. \end{array}\right.$$

Variieren wir dann für ein Polyeder irgend einer Gruppe mit bestimmten Ecken k-ter Klasse des 2.60-Ecks die Ebenen des Dyakishexekontaeders, so geht es in ein Polyeder derselben Gruppe mit Ecken der Klasse k' jeweils durch ein bestimmtes spezielles Hüllpolyeder über, das sich aus den eben angegebenen Tabellen ablesen lässt. Ein Polyeder z. B. das nach der Normalecke zur Klasse $\mathrm{III}x$ gehört, geht in ein Polyeder der Klasse $\mathrm{II}x$ über durch das 20.3-Eck, in ein Polyeder der Klasse $\mathrm{V}x$ durch das 12.5-Eck als Hüllpolyeder u. s. w. Diese Vorbemerkungen werden für das Weitere genügen, um die Polyeder jeder Gruppe den verschiedenen

Klassen zuzuweisen. — Wir untersuchen nun die Sphenoide der fünf Gruppen analytisch-geometrisch und beginnen mit der ersten Gruppe.[1])

4. **Die erste Gruppe der rhombischen Sphenoide im Dyakishexekontaedertypus.** Der Gang für die Untersuchung der Sphenoidgruppierungen im Dyakishexekontaedertypus kann nicht genau derselbe sein, wie für die entsprechenden Gruppierungen des Hexakisoktaedertypus; denn nach Bestimmung der Koordinaten einer Ecke aus drei der Gleichungen des ersten Sphenoids der zu untersuchenden Gruppe ist nicht wie dort aus den erhaltenen Werten ablesbar, welcher Ecke die Koordinaten zugehören. Es muss vielmehr hier irgend eine bestimmte Varietät des Kernpolyeders zu Grunde gelegt werden, für welche man das Polyeder der Gruppe darstellt und damit direkt die Klassenzahl der Ecke erschliesst. Gehen wir für die erste Gruppe von der Sphenoidgruppierung aus, deren Kern die archimedeische Varietät des Dyakishexekontaeders ist, so zeigt sich, dass die vier Ecken des ersten Sphenoids die Ecken 74 (1, 20, 111); 37 (1, 20, 110); 44 (1, 110, 111) und 87 (20, 110, 111) eines (12 + 20 + 30)-flächigen 2.60-Ecks sind, dass also die Normalecke des Polyeders die Ecke 34) ist, wonach die Sphenoidgruppierung zur Klasse IIIx gehört. Von hier aus sind nun die weiteren Untersuchungen der Gruppierungen lediglich analytisch zu führen. Denn es gilt nach dem allgemein Gesagten für die Normalecke des Polyeders dann:

$$z_3 : x_3 : y_3 = b_1 c_1 : a_1 c_1 : a_1 b_1;$$

und nach den Formeln 85) hat man für die Parameter s und t des umhüllenden gleicheckigen Polyeders:

$$108)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{a_1 c_1 \cot\varphi + a_1 b_1 + b_1 c_1 \cot^2\varphi}{2c\,(a_1 \tan\varphi + b_1 \cot\varphi)}; \\[2ex] t = \dfrac{a_1 \cot\varphi + b_1}{a_1 \tan\varphi + b_1 \cot\varphi} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

---

[1]) Von den diskontinuierlichen Polyedern dieser fünf Gruppen von Sphenoiden ist nur eine beschränkte Anzahl (ihrer Kompliziertheit wegen) konstruiert und in Modellen auf den Tafeln dargestellt, wobei besonders auf solche Individuen Rücksicht genommen wurde, deren Hüllpolyeder ein allgemeines 2.60-Eck, deren Kern aber ein spezielles gleichflächiges Polyeder ist, da die vollständigen Figuren für die allgemeinsten Kerne sich im verfügbaren Raume einer Tafel wenig übersichtlich gestalten. Der Einfachheit wegen sind selbst in den gezeichneten Figuren meist nur die unbedingt nötigen Geraden gezogen.

Um den Gültigkeitsbereich dieser Formeln zu erkennen, beachte man, dass eine Sphenoidgruppierung mit Ecken dritter Klasse, deren Normalecke die Ecke 34) des Hüllpolyeders ist, in eine solche mit Ecken fünfter Klasse Vx durch den Grenzfall des (12+20)-flächigen 12.5-Ecks als Hüllpolyeder übergeht, in eine solche mit Ecken zweiter Klasse IIx aber durch den Grenzfall des (12+20)-flächigen 20.3-Ecks als Hüllpolyeder. Für den ersten der beiden Grenzfälle muss $s = 1$ sein, während für den zweiten zwischen s und t die Relation $\frac{t}{\cos^2\varphi} = s$ besteht. Nun ergibt sich für $s = 1$ aus der ersten der Gleichungen 108) zwischen den a_1, b_1, c_1 die Beziehung

$$a_1 c_1 \tan^2\varphi + a_1 b_1 - b_1 c_1 \tan\varphi = 0,$$

oder mit Einführung der Werte aus 103) nach einiger elementarer Rechnung:

$$109) \qquad \vartheta = \frac{2\sigma \tan\varphi - \sigma^2}{1 - 2\sigma \tan^2\varphi},$$

als Gleichung zwischen den Parametern σ und τ derjenigen Kernpolyeder, für welche die Hülle der Sphenoidgruppierung ein (12+20)-flächiges 12.5-Eck wird. In der Ebene der σ, τ stellt 109) die Gleichung einer Hyperbel C_4 (vergl. Fig. 4, Taf. 11) dar, die durch den Punkt T, $\sigma = 1$, $\vartheta = 1$, d. h. $\tau = \frac{1}{\cos^2\varphi}$ des Triakontaeders und durch den Punkt A, $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-9}{2}$, $\tau = \frac{4\sqrt{5}-5}{3}$ der A. V. des Deltoidhexekontaeders entsprechend, geht.[1])

Für $\frac{t}{\cos^2\varphi} = s$ ergibt sich aus 108): $a_1 b_1 + b_1 c_1 \tan\varphi - a_1 c_1 \cot\varphi = 0$, oder nach Einführung der Werte für die Produkte der a_1, b_1, c_1:

$$110) \qquad \vartheta = \frac{\sigma^2 - 2\sigma \tan^2\varphi}{2\sigma - 1 - 2\tan^2\varphi},$$

als Relation zwischen den σ und τ derjenigen Kernpolyeder, für die die Hülle der Sphenoidgruppierungen ein (12+20)-flächiges 20.3-Eck ist. Der Gleichung 110) wird genügt durch $\sigma = 1$, $\tau = \frac{1}{\cos^2\varphi}$, d. h. die durch sie

[1]) Zur Auffindung des Verlaufes dieser und der weiterhin zu diskutierenden Kurven hat man ihre Schnittpunkte mit den beiden Geraden C_1 und C_2 und der Hyperbel C_3 zu bestimmen. Es sind im folgenden von vornherein nur die als brauchbar befundenen Schnittpunkte angeführt; auch sind in den Figuren der Einfachheit wegen die Kurventeile wieder meist als Gerade gezeichnet.

dargestellte Hyperbel C_5 (s. Fig. 4 Taf. 11) geht durch den Triakontaederpunkt T. Für den Schnittpunkt B der Kurve C_5 mit der Deltoidhexekontaederkurve C_3 ergibt sich aus 110) in Verbindung mit $\vartheta = \frac{\sigma}{4 - \sigma \cot^2 \varphi}$ für σ die quadratische Gleichung $\sigma^2 - 4\sigma \tan^2 \varphi + \tan^2 \varphi (6 \tan^2 \varphi - 1) = 0$, deren hier allein brauchbare Wurzel

$$\sigma = 3 - \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sqrt{\sqrt{5}-2} = 1{,}06421 \ldots$$

ist. [Das zugehörige τ ergibt sich aus 110)]. Es ist also hiermit die Gültigkeit der Formeln 108) auf das Gebiet derjenigen Dyakishexekontaeder beschränkt, das von den Kurven C_4 und C_5 und einem Teile von C_3 begrenzt wird, sowie auf die Deltoidhexekontaeder, deren σ und τ eben diesem Teile der C_3 zugehören. Setzt man in 108) selbst die Werte der $a_1 b_1$ u. s. w. ein, so ergeben sich hier die verhältnismässig einfachen Formeln:

$$s = \frac{\sigma^2 - \tau \cos^2 \varphi}{2(\sigma\tau \sin^2 \varphi + \sigma \tan \varphi - \tau \cos^2 \varphi)}, \quad t = \frac{\sigma\tau \cos^2 \varphi + \sigma \tan^2 \varphi - \tau}{\sigma\tau \sin^2 \varphi + \sigma \tan \varphi - \tau \cos^2 \varphi} . \cos^2 \varphi.$$

Im allgemeinen erscheinen die Werte von s und t für das Hüllpolyeder nach Einführung der Produkte der a_i, b_i, c_i in der Form von Brüchen, deren Zähler und Nenner offenbar nur algebraische Summen der Glieder $\sigma^2\vartheta^2$, $\sigma\vartheta^2$, $\sigma^2\vartheta$, ϑ^2, $\sigma\vartheta$, σ^2, multipliziert mit trigonometrischen Funktionen des Winkels φ sind, da höhere Potenzen der σ und ϑ, wie sich aus den Formeln 103) — 107) ergibt, nicht auftreten können. Es sind diese ausgerechneten Werte leicht hinzuschreiben, im folgenden aber meist nicht angeführt, da die Betrachtung der speziellen Polyederindividuen sich ebenso direkt an Formeln des Charakters 108) anschliessen lässt. — Von Sphenoidgruppierungen, die dem bisher betrachteten Gebiete angehören, sind die beiden folgenden dargestellt. Für die A. V. des Deltoidhexekontaeders als Kern ergibt sich für die äussere Hülle das (12+20)-flächige 12.5-Eck mit $t = \frac{2+\sqrt{5}}{5}$. Die Fläche dieses diskontinuierlichen Polyeders zeigt Fig. 1 Taf. 15; das Modell des Körpers selbst Fig. 2 Taf. 25. Die beiden Dreiecke $S_1 S_5 S_6$ und $S_4 S_2 S_3$ sind die Flächen von Sphenoiden der ersten und zweiten Gruppe, da für das Deltoidhexekontaeder als Kern diese beiden Gruppen identisch werden. Die Anordnung der Kantenwinkel S in einer Ecke des Polyeders zeigt die zur Fig. 1 Taf. 15 gehörende Figur auf Taf. 14. Denn diese Ecke ist diskontinuierlich 2.3-kantig, da in jeder Ecke des 12.5-Ecks zwei Ecken verschiedener Sphenoide zusammenfallen. Es wird sich später ergeben, dass die Sphenoide für dieses Polyeder **quadratisch** sind und zwar ist $S_3S_4 = S_3S_2 = S_1S_6 = S_5S_6 = 2\sqrt{y_3^2+z_3^2}$ und $S_2S_4 = S_1S_5 = 2z_3\sqrt{2}$, also $S_3S_4 = \frac{2a\sigma}{\sigma-1}\sqrt{(\sigma-1)^2\cot^2\varphi+\tan^2\varphi} = 2a\sqrt{2(25-2\sqrt{5})}$, $S_2S_4 = \frac{2a\sigma\sqrt{2}}{\sigma-1}\tan^2\varphi = 4a$ $(2\sqrt{5}+3)\sqrt{2}$. Für die Kanten des umhüllenden 12.5-Ecks findet man aus den früher angegebenen allgemeinen Formeln: $k_2 : k_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : 4$. Als zweites Beispiel ist das diskontinuierliche Polyeder angeführt, dessen Kern das Deltoidhexekontaeder für $\sigma = \frac{11-3\sqrt{5}}{4} = 1{,}07295$, $\tau = \frac{45-14\sqrt{5}}{11} = 1{,}2451$ ist. Als Hülle ergibt sich ein $(12+20+30)$-flächiges 2.60-Eck mit den Parameterwerten $s = \frac{13+\sqrt{5}}{16}$, $t = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$, für dessen Kanten die Proportion gilt: $k_1 : k_2 : k_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} : 2 : 1$. Das Modell dieser Gruppierung von 30 **rhombischen** Sphenoiden zeigt Fig. 6 Taf. 27 als Beispiel für eine allgemeine Gruppierung dritter Klasse mit dreikantigen Ecken. Die Fläche des Polyeders, bestehend aus zwei Dreiecken, der ersten und zweiten Gruppe der Sphenoide zugehörend, ist in Fig. 4 Taf. 10 in der vollständigen Figur dieses besonderen Deltoidhexekontaeders dargestellt. Es sei noch bemerkt, dass auch die Werte $\sigma = \frac{39-7\sqrt{5}}{22} = 1{,}061$; $\tau = \frac{40+\sqrt{5}}{33} = 1{,}279$ dem Gebiete IIIx angehören, für das die Formeln 108) gültig sind. Man findet für s und t des Hüllpolyeders die Werte $s = \frac{3\sqrt{5}-1}{6}$, $t = \frac{\sqrt{5}}{3}$, der A. V. zugehörig. Was endlich das Grenzpolyeder im Punkte B anbetrifft, so ergeben sich für die Hülle dieser 30 rhombischen Sphenoide [ein bestimmtes (12+20)-flächiges 20.3-Eck] die Parameterwerte:[1])

$$t = \frac{1}{5-\sqrt{10(\sqrt{5}-1)}}, \quad s = \frac{(5-\sqrt{5})\,t}{2}.$$

---

[1]) Diese Gruppierungen von 30 Sphenoiden, deren Kerne und Hüllen spezielle Polyeder des Typus sind, bieten auch in den folgenden Grenzfällen an und für sich nichts Merkwürdiges; doch ergeben sich aus ihnen bei veränderter Auffassung der Flächen diskontinuierliche und kontinuierliche Nullpolyeder, auf die in den Zusätzen am Ende dieser Abhandlung hingewiesen ist.

Wir erschliessen nun von dem Gebiete IIIx aus über die beiden Grenzkurven weitergehend, die übrigen Klassen der Sphenoide der ersten Gruppe. Für die jenseits der Kurve C_4 liegenden Dyakishexekontaeder als Kerne der Sphenoidgruppierungen sind die Ecken des Hüllpolyeders von der fünften Klasse, und zwar ist die Normalecke die Ecke 24), für welche die Proportion $z_5 : x_5 : y_5 = b_1 c_1 : a_1 c_1 : a_1 b_1$ gilt. Danach ist für das $(12+20+30)$-flächige 2.60-Eck, das die Hülle der Sphenoidgruppierung bildet, gemäss den Formeln 89):

$$111)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{a_1 c_1 \cot\varphi + a_1 b_1 + b_1 c_1 \cot^2\varphi}{2(a_1 b_1 + b_1 c_1 + a_1 c_1)}, \\ t = \dfrac{a_1 c_1 \cot\varphi + b_1 c_1}{a_1 b_1 + b_1 c_1 + a_1 c_1} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten für das Gebiet von der Kurve C_4 aus so weit, bis die Ecke 24) mit der Ecke 14) zum Zusammenfallen kommt, was für das $(12+20+30)$-flächige 60-Eck geschieht, wonach dann die Sphenoidgruppierungen der Klasse Vx in solche der Klasse IVy übergehen. Die Bedingung hierfür findet man aus $\frac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$, worin s und t die Werte 111) sind, nämlich $a_1 c_1 - b_1 c_1 \cot\varphi + a_1 b_1 \tan\varphi = 0$, oder nach Einführung der Werte für $a_1 b_1$ u. s. w.:

$$112)\qquad \vartheta = 2\sigma - \sigma^2.$$

Wir haben in 112) die Gleichung einer Parabel C_6 (Fig. 4 Taf. 11) vor uns, die durch den Triakontaederpunkt T ($\vartheta = 1$; $\sigma = 1$) geht. Für ihren Schnittpunkt C mit der Deltoidhexekontaederkurve C_3 ergibt sich aus $\sigma^2 - 2\sigma(4 - \sqrt{5}) + \frac{7(3-\sqrt{5})}{2} = 0$ der Wert der Koordinate σ zu:

$$112')\qquad \sigma = 4 - \sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{42 - 18\sqrt{5}} = 1{,}10234\ldots$$

Damit sind die Sphenoide der ersten Gruppe mit Ecken fünfter Klasse Vx auf das Gebiet zwischen den Kurven C_4 und C_6 und wiederum einen Teil von C_3 beschränkt, und es ergeben sich somit auch solche Gruppierungen, deren innere Kerne bestimmte Deltoidhexekontaeder sind. Bestimmt man für dieses Gebiet von den Formeln 111) aus die Grenzkurve gegen die Polyeder dritter Klasse, so erhält man natürlich wieder die Gleichung von C_4.

Übrigens erhalten auch für dieses Gebiet die Formeln von s und t in σ und τ eine einfache Form, nämlich:

$$s = \frac{\sigma^2 - \vartheta}{2\sigma(\sigma - \tan\varphi - \vartheta\tan^2\varphi)}, \quad t = \frac{\sigma(\vartheta + \tan^2\varphi) - 5\vartheta\sin^2\varphi}{\sigma(\sigma - \tan\varphi - \vartheta\tan^2\varphi)}\cos^2\varphi.$$

Für die Sphenoidgruppierungen jenseits der Kurve C_6 ist die Normalecke des Hüllpolyeders die Ecke 14) und die Polyeder gehören zur Klasse IVy. Es ist dann: $y_4 : z_4 : x_4 = b_1 c_1 : a_1 c_1 : a_1 b_1$, also für das Hüllpolyeder:

113)
$$\begin{cases} s = \dfrac{a_1 b_1 \cot\varphi + b_1 c_1 + a_1 c_1 \cot^2\varphi}{2(a_1 b_1 + b_1 c_1 + a_1 c_1)}, \\ t = \dfrac{b_1 c_1 + a_1 c_1 \cot\varphi}{a_1 b_1 + b_1 c_1 + a_1 c_1}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Das Gebiet dieser Sphenoidgruppierungen vierter Klasse wird einerseits von der Kurve C_6 begrenzt, wonach die Hüllpolyeder 60-Ecke sind, und deren bereits abgeleitete Gleichung sich wieder ergibt, wenn man $\frac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$ setzt. Die andere Grenze des Gebietes findet sich aus $s = 1$, denn durch die 12.5-Ecke als Grenzpolyederhüllen gehen die Sphenoide vierter Klasse in solche zweiter über. Die Bedingung hierfür ist also:

$$a_1 b_1 \tan^2\varphi + b_1 c_1 - a_1 c_1 \tan\varphi = 0$$

oder

114) $$\sigma^2 - 2\sigma\vartheta + \vartheta = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Hyperbel C_7 (Fig. 4 Taf. 11) dar, die durch den Triakontaederpunkt T ($\vartheta = \sigma = 1$) und den Punkt E für das Deltoidhexekontaeder geht, für den sich die σ-koordinate nach 114) und der Gleichung von C_3 aus der quadratischen Gleichung $\sigma^2 - 2\sigma\tan^2\varphi - \tan^2\varphi = 0$ ergibt, nämlich:

114') $$\sigma = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = 1{,}1085.$$

Nach Überschreitung dieser Kurve C_7 gelangt man in das Gebiet der Polyeder zweiter Klasse IIy, für welche die Normalecke des Hüllpolyeders die Ecke 15) ist. Dann ist: $y_2 : z_2 : x_2 = b_1 c_1 : a_1 c_1 : a_1 b_1$, wonach sich für s und t die Werte ergeben:

115) $$\begin{cases} s = \dfrac{a_1 b_1 + b_1 c_1 \tan\varphi + a_1 c_1 \cot\varphi}{2(a_1 b_1 \tan^2\varphi + a_1 c_1)}, \\ t = \dfrac{b_1 c_1 \tan\varphi + a_1 c_1}{a_1 b_1 \tan^2\varphi + a_1 c_1} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Für $s = 1$ ergibt sich die Gleichung 114) der Kurve C_7. Andererseits wird das Gebiet durch eine Kurve C_8 begrenzt, deren σ und τ diejenigen Dyakishexekontaeder charakterisiert, für die die Hüllpolyeder der Sphenoidgruppierungen 60-Ecke sind, und die Ecken zweiter Klasse IIy mit solchen erster Klasse Iy identisch werden, die Ecke 15) mit der Ecke 25) zusammenfällt. Die Bedingung hierfür ist: $b_1 c_1 \tan\varphi + a_1 b_1 - a_1 c_1 \tan^2\varphi = 0$. Da für das Triakontaeder $a_1 = b_1 = 0$ ist, so geht diese Hyperbel C_8 wieder durch den Punkt T. Ihre Gleichung in σ und ϑ lautet:

116) $$-2\sigma\vartheta + \sigma^2 \cot\varphi + \vartheta \cot\varphi - 2\sigma \tan\varphi = 0.$$

Durch Einsetzung von $\vartheta = \dfrac{\sigma}{4 - \sigma \cot^2\varphi}$ ergibt sich für den Schnittpunkt F der Kurven C_8 und C_3 für σ die Gleichung:

$$\sigma^2 - \sigma(8 - 10\tan\varphi) - 23\tan\varphi + 15 = 0 \quad \text{oder:} \quad \sigma^2 - (13 - 5\sqrt{5})\,\sigma - \frac{23\sqrt{5} - 53}{2} = 0$$

und daraus für σ der eine Wert:

$$\sigma = \frac{13 - 5\sqrt{5}}{2} + \sqrt{47 - 21\sqrt{5}} = 1{,}11146.$$

Nach Überschreitung der Kurve C_8 endlich gelangt man in das Gebiet der Polyeder erster Klasse Iy, für welche die Normalecke des Hüllpolyeders die Ecke 25) ist, so dass $y_1 : z_1 : x_1 = b_1 c_1 : a_1 c_1 : a_1 b_1$ wird. Danach kommt hier:

117) $$\begin{cases} s = \dfrac{c_1}{b_1 \tan^2\varphi + c_1}, \\ t = \dfrac{b_1 c_1 \tan\varphi + a_1 c_1}{a_1 b_1 \tan^2\varphi + a_1 c_1} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Da die Polyeder mit Ecken erster Klasse, wie aus den allgemeinen Betrachtungen erinnerlich ist, nur durch die 60-Ecke in Polyeder anderer Klasse, nämlich solcher der zweiten, übergehen können, so ist die Zahl der Teilgebiete für die konvexen Dyakishexekontaeder nach dieser Seite hin erschöpft und das Gebiet der Iy erstreckt sich bis zur Triakisikosaedergeraden C_2, diese ausgeschlossen. Denn für jedes Triakisikosaeder ist $b_1 = 0$, also ergeben die allgemeinen Formeln 117) dann $s = 1$, $t = \cos^2\varphi$ unabhängig von σ und τ. Die Hülle des diskontinuierlichen Polyeders wäre somit das Triakontagon, in dem aber die Sphenoide erster Klasse illusorisch sind.

Wir kehren nun zurück zu dem Ausgangsgebiete der Polyeder dritter Klasse IIIx, für die die Normalecke die Ecke 34) des (12 + 20 + 30)-flächigen 2.60-Ecks war. Überschreitet man die Kurve C_5, so tritt an Stelle der Normalecke 34) die Ecke 33) und die diskontinuierlichen Polyeder gehören der Klasse IIx an. Es ist dann: $z_2 : x_2 : y_2 = b_1 c_1 : a_1 c_1 : a_1 b_1$ und damit

118)
$$\begin{cases} s = \dfrac{a_1 c_1 + a_1 b_1 \tan\varphi + b_1 c_1 \cot\varphi}{2\,(a_1 c_1 \tan^2\varphi + b_1 c_1)}, \\[2ex] t = \dfrac{a_1 b_1 \tan\varphi + b_1 c_1}{a_1 c_1 \tan^2\varphi + b_1 c_1} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Für $\dfrac{t}{\cos^2\varphi} = s$ ergibt sich selbstverständlich wieder die Gleichung 110) der Kurve C_5. Die Gültigkeit der Formeln 118) erstreckt sich über das Gebiet dieser Sphenoidgruppierungen zweiter Klasse bis zu der Grenzkurve, für die diese Gruppierungen durch das 60-Eck als Hüllpolyeder in solche der ersten Klasse Ix mit der Normalecke 43) übergehen. Die Gleichung dieser Grenzparabel C_9 ist $a_1 b_1 \tan\varphi + a_1 c_1 - b_1 c_1 \tan^2\varphi = 0$, oder

119)
$$\sigma^2 + \vartheta \tan^3\varphi - 2\sigma \tan\varphi = 0.$$

Die erste Form zeigt, dass die Kurve wiederum durch den Triakontaederpunkt T $(a_1 = b_1 = 0)$ geht. Für den Schnittpunkt G mit der Deltoidhexekontaederkurve C_3 ergibt sich aus $\sigma^2 - \sigma(5 - \sqrt{5}) + \dfrac{11\sqrt{5} - 21}{2} = 0$ der eine Wert für σ:

$$\sigma = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} - \sqrt{2(9 - 4\sqrt{5})} = 1{,}04812.$$

Es nehmen für diese Polyeder zweiter Klasse überdies die Werte 118) bei Einführung der σ und ϑ hier die einfache Form an:

$$s = \frac{(\sigma^2 - \vartheta)\cot\varphi}{2\,[\vartheta(\sigma - 1)\tan\varphi + \sigma - \vartheta]}, \quad t = \frac{(\sigma - \vartheta)(\sigma - \tan^2\varphi)\cot\varphi}{\vartheta(\sigma - 1)\tan\varphi + \sigma - \vartheta} \cos^2\varphi.$$

Die Polyeder mit der Normalecke 43) der Klasse Ix des Hüllpolyeders lassen nun nur den einen Übergang durch das 60-Eck in Polyeder der zweiten Klasse IIx zu, so dass die Anzahl der Teilgebiete, in die das Gebiet der konvexen Dyakishexekontaeder für die Sphenoide der ersten Gruppe zerfällt, erschöpft ist. Für die zuletzt genannten Polyeder erster Klasse ist $z_1 : x_1 : y_1 = b_1 c_1 : a_1 c_1 : a_1 b_1$ und damit

$$120) \quad \begin{cases} s = \dfrac{b_1}{a_1 \tan^2 \varphi + b_1}, \\ t = \dfrac{a_1 b_1 \tan \varphi + b_1 c_1}{a_1 c_1 \tan^2 \varphi + b_1 c_1} \cos^2 \varphi. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten für das ganze Gebiet zwischen der Kurve C_9 und der Geraden C_1, wobei die Kernpolyeder der Geraden C_1 selbst auszuschliessen sind. Denn für die Pentakisdodekaeder ist $a_1 = 0$, wonach die Gleichungen 120) $s = 1$, $t = \cos^2 \varphi$ ergeben und die frühere Bemerkung hierüber zu wiederholen ist. Hiermit sind nun alle Sphenoidgruppierungen der ersten Gruppe des Typus den Klassen zugewiesen und es hat sich ergeben, dass die Gruppierungen zweimal zur ersten und zweimal zur zweiten Klasse in getrennten Gebieten gehören, während jede der drei übrigen Klassen je einmal vertreten ist. Die Polyeder der Klassen Ix und Iy sind polarreziprok zu einander, während sich die polarreziproken Polyeder der anderen Klassen der ersten Gruppe in den späteren Gruppen finden müssen. Was die erste Behauptung anbetrifft, so lässt sie sich leicht für die beiden Polyeder erhärten, deren Kerne die beiden Deltoidhexekontaeder der Grenzpunkte F und G sind. Berechnet man für das Polyeder des Punktes F nach den Formeln 115) die Parameter s und t des Hüllpolyeders, so ergeben sich die reziproken Werte der σ und τ des Kernpolyeders der Gruppierung im Punkte G. Der allgemeine Nachweis der polaren Reziprozität der Sphenoidgruppierungen zweier bestimmten Gebiete lässt sich im Prinzip ebenso wie früher bei Betrachtung der Polyeder des Hexakisoktaedertypus führen; doch sind die Rechnungen hier so ausgedehnt, dass es wohl geraten scheint, lediglich im folgenden auf die Lückenlosigkeit der Zuordnung aller Gebiete hinzuweisen, wie dies in Nr. 10 dieses § besonders geschehen soll.

5. **Die zweite Gruppe der rhombischen Sphenoide im Dyakishexekontaedertypus.** Da für das Deltoidhexekontaeder als innerer Kern die Sphenoide der ersten und zweiten Gruppe identisch sind, so trägt die

Kurve C_3 für die Polyeder der zweiten Gruppe dieselben Grenzpunkte A, B, C, E, F, G mit ihren zugehörigen speziellen Hüllpolyedern, die mit denen der ersten Gruppe zusammenfallen. Daraus folgt aber, dass für die Sphenoide der zweiten Gruppe mindestens dieselben Klassen existieren müssen, wie für die Sphenoide der ersten Gruppe, da für diese alle Teilgebiete von der Kurve C_3 begrenzt werden. Dabei werden natürlich die Grenzkurven für die Einzelgebiete der Polyeder nach den Klassen einen verschiedenen Verlauf innerhalb des Gebietes der konvexen Dyakishexekontaeder für beide Gruppen haben. Die Bestimmung der Grenzpunkte A, B u. s. w., die für die zweite Gruppe aus anderen Gleichungen erfolgt wie für die erste, gibt zugleich eine schätzenswerte Kontrolle der Richtigkeit der bereits berechneten Werte. Wir beginnen die Betrachtung der Sphenoide der zweiten Gruppe mit denen der zweiten Klasse IIy, für welche die Normalecke des Hüllpolyeders die Ecke 15) ist, da ein Polyeder dieses Gebietes als allgemeines Beispiel für solche zweiter Klasse dargestellt ist. Es gilt für die Normalecke 15) jetzt die Proportion: $y_2 : z_2 : x_2 = b_2 c_2 : a_2 c_2 : a_2 b_2$ und für die Parameter der Hüllpolyeder der Sphenoidgruppierungen wird dann:

$$121)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{a_2 b_2 + b_2 c_2 \tan\varphi + a_2 c_2 \cot\varphi}{2\,(a_2 b_2 \tan^2\varphi + a_2 c_2)}, \\[2ex] t = \dfrac{b_2 c_2 \tan\varphi + a_2 c_2}{a_2 b_2 \tan^2\varphi + a_2 c_2} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Der Gültigkeitsbereich dieser Formeln erstreckt sich einerseits so weit, bis die Ecke 15) mit der Ecke 25) zusammenfällt, die Polyeder der Klasse IIy durch das 60-Eck also in Polyeder erster Klasse Iy mit der Normalecke 25) übergehen; andererseits bis zum Zusammenfallen der Ecke 15) mit der Ecke 14), wonach die Hüllpolyeder der Sphenoidgruppierungen durch das 12.5-Eck zu solchen mit Sphenoiden der Klasse IVy werden. Die erste Grenze für die Gültigkeit der Formeln 121) ergibt sich also aus $\dfrac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$; es wird: $a_2 b_2 - a_2 c_2 \tan^2\varphi + b_2 c_2 \tan\varphi = 0$ oder nach Einführung der Werte $a_2 b_2$ u. s. w.:

$$122)\qquad \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\tan\varphi - \sigma\vartheta^2(\tan\varphi + \cot\varphi) + \frac{\sigma^2\vartheta}{2}(\tan\varphi + \cot\varphi) \\ + \vartheta^2\cot\varphi - \sigma\vartheta\tan^2\varphi + \frac{\sigma^2}{4}(1 - 3\tan\varphi) = 0.$$

Um den Schnittpunkt N dieser Kurve C_{10} (vergl. Fig. 5 Taf. 11) mit der Triakisikosaedergeraden C_2 zu finden, setzen wir $\vartheta = \sigma$ und dividieren die Gleichung durch σ^2 (da $\sigma > 0$ sein muss). Es ergibt sich:

$$\sigma^2 - 2\sigma(1 + \cot^2\varphi) - 4\cot\varphi + 5\cot^2\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma^2 - \sigma(5 + \sqrt{5}) + \frac{11 + \sqrt{5}}{2} = 0$$

und daraus die eine brauchbare Wurzel:

$$\sigma = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} - \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)} = 1{,}074\ldots$$

Setzt man in 122) $\vartheta = \frac{\sigma}{\sigma - 4\cot^2\varphi}$, d. h. bestimmt den Schnittpunkt von C_{10} mit der Kurve C_3, so kommt für σ die Gleichung $\sigma^2 - 2\sigma(4 - 5\tan\varphi) + 15 - 23\tan\varphi = 0$, d. h. dieselbe Gleichung wie früher für die σ-koordinate des Punktes F auf der Kurve C_3 bei der ersten Gruppe. Für die zweite Grenzkurve C_{11} des jetzt betrachteten Teilgebietes ergibt sich die Gleichung aus $s = 1$, nämlich

$$a_2 b_2 \tan^2\varphi + b_2 c_2 - a_2 c_2 \tan\varphi = 0$$

oder:

$$123)\quad \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}(1 - 2\cot\varphi) - \sigma\vartheta^2\tan^2\varphi + \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot\varphi + \left(\vartheta - \frac{\sigma}{2}\right)^2\tan\varphi = 0.$$

Der Schnittpunkt O der durch diese Gleichung dargestellten Kurve C_{11} mit der Triakisikosaedergeraden C_2 ergibt sich für $\vartheta = \sigma$, d. h. aus der Gleichung $\sigma^2(1 - 2\cot\varphi) + 2\sigma(\cot\varphi - 2\tan^2\varphi) + \tan\varphi = 0$, nämlich:

$$123')\quad \sigma = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} = 1{,}03181.$$

Die Deltoidhexekontaederkurve C_3 wird von C_{11} in einem Punkte E geschnitten, dessen σ-koordinate sich aus der Gleichung $\sigma^2 - 2\sigma\tan^2\varphi - \tan^2\varphi = 0$ ergibt, die man aus 123) nach Einsetzung von $\vartheta = \frac{\sigma}{4 - \sigma\cot^2\varphi}$ erhält. Diese Gleichung ist aber identisch mit der quadratischen Gleichung für die σ-koordinate des Punktes E bei der ersten Gruppe. Hiermit ist das Gebiet der Sphenoidgruppierungen mit Ecken der Klasse IIy vollständig begrenzt. Als Beispiel für ein Polyeder der zweiten Gruppe zweiter Klasse führen wir das in Fig. 3 Taf. 25 dargestellte an, dessen Kern die A. V. des

Triakisikosaeders ist. Führt man in die Formeln 121) die in Nr. 3, § 1 dieses Kapitels verzeichneten Koëffizienten a_2, b_2, c_2 für die A. V. des Triakisikosaeders ein, so ergibt sich $s = \frac{23\sqrt{5}+21}{4.19} = 0{,}953$; $t = \frac{2(11\sqrt{5}+15)}{5.19} = 0{,}833$. Für das Verhältnis der Kanten des Hüllkörpers, der ein $(12+20+30)$-flächiges 2.60-Eck ist, erhält man, in bekannter Weise berechnet:

$$k_1 : k_2 : k_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} : \frac{5-2\sqrt{5}}{5} : 1.$$

Die aus zwei Dreiecken bestehende Grenzfläche des Polyeders in der vollständigen Figur der A. V. des Triakisikosaeders zeigt Fig. 4 Taf. 16. Nach Überschreitung der Kurve C_{10} gelangt man in das Gebiet der Sphenoide erster Klasse Iy, für deren Normalecke 25) die Proportion gilt: $y_1 : z_1 : x_1 = b_2 c_2 : a_2 c_2 : a_2 b_2$, wonach für das Hüllpolyeder

$$124)\quad \begin{cases} s = \dfrac{c_2}{b_2 \tan^2\varphi + c_2}, \\ t = \dfrac{b_2 c_2 \tan\varphi + a_2 c_2}{a_2 b_2 \tan^2\varphi + a_2 c_2} \cos^2\varphi \end{cases}$$

ist. Dieses Gebiet der Polyeder erster Klasse reicht ohne Grenze bis zum Ikosaederpunkt, da eine neue Übergangskurve in Polyeder anderer Klasse, wie schon früher bemerkt, für die Iy nicht existiert. Über die andere betrachtete Grenzkurve C_{11} betritt man das Gebiet der Polyeder vierter Klasse IVy mit der Normalecke 14), für welche jetzt $y_4 : z_4 : x_4 = b_2 c_2 : a_2 c_2 : a_2 b_2$ ist, wonach

$$125)\quad \begin{cases} s = \dfrac{a_2 b_2 \cot\varphi + b_2 c_2 + a_2 c_2 \cot^2\varphi}{2\,(a_2 b_2 + b_2 c_2 + a_2 c_2)}, \\ t = \dfrac{b_2 c_2 + a_2 c_2 \cot\varphi}{a_2 b_2 + b_2 c_2 + a_2 c_2} \cos^2\varphi \end{cases}$$

wird. Wir bestimmen hier und im folgenden stets nur die neue Grenze gegen die Polyeder der noch nicht diskutierten Klasse, also hier die Grenze gegen die Polyeder fünfter Klasse Vx mit der Normalecke 24), mit der die Ecke 14) zusammenfällt, wenn die Hülle der Sphenoidgruppierung ein 60-Eck wird. Unter dieser Bedingung ergeben die Gleichungen 125) die Relation: $a_2 b_2 \tan\varphi - b_2 c_2 \cot\varphi + a_2 c_2 = 0$, oder:

$$126)\quad \frac{\sigma^2 \vartheta^2}{4}(2 + 3\cot\varphi) - \sigma\vartheta^2 \cot^2\varphi - \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\tan\varphi + \vartheta^2 + \sigma\vartheta - \frac{3\sigma^2}{4} = 0.$$

Die Diskussion dieser Gleichung zeigt, dass die durch sie dargestellte Kurve C_{12} (vergl. Fig. 5 Taf. 11) die Pentakisdodekaedergerade C_1 in einem Punkte H, die Deltoidhexekontaederkurve C_3 in einem Punkte C schneidet, der mit dem Punkte C derselben Kurve C_3 für die Sphenoide der ersten Gruppe identisch ist. Setzen wir in Gleichung 126) $\sigma = 1$, so erhalten wir für die Koordinate τ des Punktes H die Gleichung:

$$\vartheta^2 \tan^2\varphi + 2\vartheta(2 - \tan\varphi) - 3 = 0$$

oder

$$\vartheta^2 + 2\vartheta \cot\varphi \sqrt{5} - 3\cot^2\varphi = 0,$$

woraus $\vartheta = \cot\varphi\,(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$ und damit $\tau = \frac{\vartheta}{\cos^2\varphi} = 2\sqrt{10} - 5 = 1{,}32455$ folgt. Das Gebiet der Sphenoide zweiter Gruppe vierter Klasse wird also von fünf Kurvenstücken — einem Teile von C_1, C_2 und C_3 und den Kurven C_{11} und C_{12} — begrenzt. Wir untersuchen dasjenige Polyeder, für welches der Kern das Triakontaeder ist, das diesem Gebiete angehört. Es ist für das Triakontaeder $a_2 b_2 = \frac{\tan^3\varphi}{4}$, $b_2 c_2 = \frac{\tan^2\varphi}{4}$, $a_2 c_2 = \frac{\tan\varphi}{4}$, also ergeben die Gleichungen 125):

$$s = \frac{2\tan^2\varphi + \cot\varphi}{2(\tan\varphi + \tan^2\varphi + \tan^3\varphi)} = \frac{4 - \cot\varphi}{4\tan\varphi} = \frac{3\sqrt{5}+1}{8} = 0{,}9635,$$

$$t = \frac{\tan^2\varphi + \cot\varphi}{\tan\varphi + \tan^2\varphi + \tan^3\varphi}\cos^2\varphi = \frac{3 - \cot\varphi}{2\tan\varphi}\cos^2\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = 0{,}80902.$$

Für die Kanten des Hüllpolyeders der Gruppierung findet man hiermit die Proportion: $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 1 : \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Das Modell dieses Polyeders, dessen Hülle also ein $(12+30+30)$-flächiges 2.60-Eck mit regulären Zehnecken ist, zeigt Fig. 1 Taf. 25, die in der vollständigen Figur des Triakontaeders enthaltene Grenzfläche Fig. 6 Taf. 15. Die vier in eine Ebene des Triakontaeders fallenden Dreiecke $T_1 T'_1 T''_1$, $T_2 T'_2 T''_2$, $T_3 T'_3 T''_3$ und $T_4 T'_4 T''_4$, die ein diskontinuierliches Zwölfeck bilden, sind die Flächen je eines Sphenoids der zweiten bis fünften Gruppe, für welche also dasselbe Polyeder, wie auch die weitere Untersuchung zeigt, stets zur Klasse IVy gehört. Das reziproke Polyeder wird sich also in der vierten Gruppe der Sphenoide finden, und muss gleichzeitig vier Klassen zugehören, wobei seine Hülle das Triakontagon ist. — Über die Grenzkurve C_{12} hinweg gelangt man in das Gebiet von Polyedern fünfter Klasse Vx mit der Normelecke 24), für deren Koordinaten die Proportion $z_5 : x_5 : y_5 = b_2c_2 : a_2c_2 : a_2b_2$ gilt, wonach für die Parameter des Hüllpolyeders sich die Formeln ergeben:

$$
127) \quad \begin{cases} s = \dfrac{a_2c_2 \cot\varphi + a_2b_2 + b_2c_2 \cot^2\varphi}{2(a_2b_2 + b_2c_2 + a_2c_2)}, \\ t = \dfrac{a_2c_2 \cot\varphi + b_2c_2}{a_2b_2 + b_2c_2 + a_2c_2} \cos^2\varphi. \end{cases}
$$

Dieses Gebiet geht in das der Polyeder dritter Klasse IIIx längs einer Kurve C_{13} über, für welche die Hüllkörper der zugehörigen Sphenoidgruppierungen (12+20)-flächige 12.5-Ecke sind, deren Gleichung sich also aus 127) für $s = 1$ ergibt. Diese Gleichung wird: $a_2c_2 \tan^2\varphi + a_2b_2 - b_2c_2 \tan\varphi = 0$ oder

$$
128) \quad \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}(4 + \tan\varphi) - 3\sigma\vartheta^2 + \frac{\sigma^2\vartheta}{2} + \vartheta^2\cot\varphi + \sigma\vartheta\tan^2\varphi - \frac{\sigma^2}{4}(4 - \cot\varphi) = 0.
$$

Für die σ-koordinate des Schnittpunktes A dieser Kurve C_{13} mit der Deltoidhexekontaederkurve C_3 findet man in bekannter Weise die Gleichung: $\sigma^2 - 4\sigma\tan\varphi + 17\tan\varphi - 9 = 0$, woraus $\sigma = \sqrt{5} - 1 \pm \dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$ folgt.

Die eine hier zulässige Wurzel ist also $\sigma = \dfrac{5\sqrt{5} - 9}{2}$, d. h. der Parameter für die A. V. des Deltoidhexekontaeders, wonach die beiden Punkte A für die erste und zweite Gruppe tatsächlich identisch sind. Die betreffende Sphenoidgruppierung wurde schon betrachtet. Für die τ-koordinate des Schnittpunktes K der Kurve C_{13} mit der Geraden C_1 leitet man durch Einsetzen von $\sigma = 1$ in Gleichung 128) die Gleichung

$$
\vartheta^2 - \frac{4\vartheta(4 - \sqrt{5})}{13 - 5\sqrt{5}} + \frac{7 - \sqrt{5}}{13 - 5\sqrt{5}} = 0
$$

ab, woraus sich

$$
\vartheta = \frac{2(4 - \sqrt{5}) \pm 4\sqrt{\sqrt{5} - 2}}{13 - 5\sqrt{5}}
$$

und damit für τ der eine brauchbare Wert

$$
\tau = \frac{5(4 - \sqrt{5} - 2\sqrt{\sqrt{5} - 2})}{10 - 3\sqrt{5}} = 1{,}2033
$$

ergibt.

Für die Werte der σ und τ der folgenden Kurve C_{14} (vergl. Fig. 5 Taf. 11) gehen die Sphenoidgruppierungen dritter Klasse IIIx in solche der zweiten Klasse IIx über, wobei an Stelle der Normalecke 34) die Normalecke 33) tritt, die für die Hüllpolyeder der Übergangssphenoide, es sind hier 20.3-Ecke, zusammenfielen. Die Parameter der Hüllkörper der Polyeder der Klasse IIIx mit der Normalecke 34), für welche $z_3 : x_3 : y_3 = b_2 c_2 : a_2 c_2 ; a_2 b_2$ ist, sind durch die Formeln gegeben:

$$129)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{a_2 c_2 \cot\varphi + a_2 b_2 + b_2 c_2 \cot^2\varphi}{2\,(a_2 c_2 \tan\varphi + b_2 c_2 \cot\varphi)}, \\ t = \dfrac{a_2 c_2 \cot\varphi + b_2 c_2}{a_2 c_2 \tan\varphi + b_2 c_2 \cot\varphi} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Die Gleichung der Grenzkurve C_{14} ist $\dfrac{t}{\cos^2\varphi} = s$ oder $a_2 b_2 + b_2 c_2 \tan\varphi - a_2 c_2 \cot\varphi = 0$, d. h.:

$$130)\qquad \frac{\sigma^2 \vartheta^2}{4} \cot^2\varphi - \sigma \vartheta^2 \cot^3\varphi + \frac{\sigma^2 \vartheta}{2} \cot^3\varphi + \vartheta^2 (3 \cot\varphi - 2) - \sigma\vartheta \cot\varphi + \frac{\sigma^2}{4} \tan^2\varphi = 0.$$

Ihr Schnittpunkt L mit der Geraden $\sigma = 1$ ergibt sich aus:

$$\vartheta^2 (5 \cot\varphi - 11) + 2\vartheta + \tan^2\varphi = 0,$$

d. h. aus $\vartheta^2 + \dfrac{4\vartheta}{5\sqrt{5}-17} + \dfrac{3-\sqrt{5}}{5\sqrt{5}-17} = 0$, nämlich $\vartheta = \dfrac{2 \pm 4\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{17-5\sqrt{5}}$ und damit

$$130')\qquad \tau = \frac{(15 + 2\sqrt{5})(1 + 2\sqrt{5-2\sqrt{5}})}{41} = 1{,}1650,$$

da nur das positive Vorzeichen der Wurzel brauchbar ist. Der Schnittpunkt B von C_{14} mit C_3 ergibt sich aus $\sigma^2 - 4\sigma \tan^2\varphi - 17 \tan\varphi + 11 = 0$, d. h. aus

$\sigma^2 - 2\sigma(3-\sqrt{5}) - \dfrac{17\sqrt{5}-39}{2} = 0$. Man findet: $\sigma = 3 - \sqrt{5} \pm \sqrt{\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}}$.

Da man dafür $\sigma = 3 - \sqrt{5} \pm \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \sqrt{\sqrt{5}-2}$ schreiben kann, so ergibt sich derselbe Grenzpunkt B wie bei der ersten Gruppe an derselben Stelle. Der Gleichung 130) wird übrigens genügt durch die reziproken Werte der s und t des oben beschriebenen Polyeders zweiter Klasse der zweiten Gruppe, dessen Kern die A. V. des Triakisikosaeders ist, nämlich durch

$$\sigma = \frac{4.19}{23\sqrt{5}+21} = \frac{23\sqrt{5}-21}{29} = 1{,}0486 \text{ und } \tau = \frac{5.19}{2\,(11\sqrt{5}+15)} = \frac{11\sqrt{5}-15}{8} = 1{,}1996,$$

und es ergeben sich aus 129) für diese Werte die Parameter s und t der A. V. des (12+20)-flächigen 20.3-Ecks.

Über die Kurve C_{14} gelangt man nun in das Gebiet der Sphenoidgruppierungen zweiter Klasse IIx mit der Normalecke 33), für welche $z_2 : x_2 : y_2 = b_2 c_2 : a_2 c_2 : a_2 b_2$ ist. Danach wird für die Hülle dieser Polyeder:

131) $$\begin{cases} s = \dfrac{a_2 c_2 + a_2 b_2 \tan\varphi + b_2 c_2 \cot\varphi}{2\,(a_2 c_2 \tan^2\varphi + b_2 c_2)}, \\ t = \dfrac{a_2 b_2 \tan\varphi + b_2 c_2}{a_2 c_2 \tan^2\varphi + b_2 c_2} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Die Grenze gegen die Polyeder erster Klasse Ix endlich ist die Kurve C_{15}, für deren 60-Ecke die Normalecke 33) mit 34) zusammenfällt, die den Sphenoidgruppierungen erster Klasse jenseits dieser Kurve zukommt. Die Gleichung von C_{15} ist: $a_2 b_2 \tan\varphi + a_2 c_2 - b_2 c_2 \tan^2\varphi = 0$ oder

132) $$\frac{\sigma^2 \vartheta^2}{4} \cot\varphi - \sigma\vartheta^2 \tan\varphi - \frac{\sigma^2\vartheta}{2} \tan\varphi + \vartheta^2 \tan^3\varphi + \sigma\vartheta - \frac{\sigma^2}{4}(2\tan\varphi + 1) = 0.$$

Die τ-koordinate ihres Schnittpunktes M mit der Geraden C_1, $s = 1$ folgt aus

$$\vartheta^2 + 2\vartheta\,\frac{2 - \tan\varphi}{5\tan\varphi - 3} - \frac{\sqrt{5}}{5\tan\varphi - 3} = 0.$$

Es ergibt sich nach bekannter Rechnungsweise für τ der Wert:

132') $$\tau = \frac{2\sqrt{10(25 - 11\sqrt{5})} - 5\,(3 - \sqrt{5})}{5\sqrt{5} - 11} = \sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})} - 5(2 + \sqrt{5}) = 1{,}0901.$$

Für die σ-koordinate des Schnittpunktes G von C_{15} mit C_3 ergibt sich die Gleichung $\sigma^2 - \sigma\,(5 - \sqrt{5}) + \frac{11\sqrt{5} - 21}{2} = 0$, d. h. wir erhalten wiederum denselben Wert für σ wie für den gleichen Punkt G in der ersten Gruppe. Damit sind alle Klassen für die zweite Gruppe erschöpft. Denn für die zuletzt erwähnten Polyeder erster Klasse, für deren Normalecke 43) $z_1 : x_1 : y_1 = b_2 c_2 : a_2 c_2 : a_2 b_2$ ist, also s und t die Werte haben:

133) $$\begin{cases} s = \dfrac{b_2}{a_2 \tan^2\varphi + b_2} \\ t = \dfrac{a_2 b_2 \tan\varphi + b_2 c_2}{a_2 c_2 \tan^2\varphi + b_2 c_2} \cos^2\varphi, \end{cases}$$

existiert keine weitere Grenzkurve des Gebietes wie die schon angegebene C_{15}. Es hat sich also das Resultat ergeben, dass die Klassen der Sphenoidgruppierungen der ersten und zweiten Gruppe völlig die gleichen sind; die Grenzkurven differieren aber in ihrem Verlaufe völlig und die Polyeder sind, mit Ausnahme derer, für welche der Kern ein Deltoidhexekontaeder ist, natürlich von einander verschieden. Weiterhin wird sich ergeben, dass die Grenzpunkte N und O auf der Triakisikosaedergeraden C_2 in der dritten Gruppe der Sphenoide, die Grenzpunkte H, K, L, M auf der Pentakisdodekaedergeraden C_1 in der vierten Gruppe wiederkehren, da die Sphenoide dieser bezw. Gruppen für die angegebenen speziellen Kerne mit solchen der zweiten Gruppe identisch sind.

6. **Die dritte Gruppe der rhombischen Sphenoide im Dyakishexekontaedertypus.** Die Sphenoidkombinationen der dritten Gruppe sind mit Rücksicht auf ihren Klassencharakter von allen fünf Gruppen die einfachsten, denn hier ergibt sich nicht wie bei den beiden vorigen Gruppen die Möglichkeit des Vorkommens aller fünf Klassen, sondern nur der ersten, zweiten und vierten Klasse. Von der zweiten Gruppe her ist bekannt, dass auch für die dritte Gruppe Polyeder dieser drei Klassen existieren müssen, da die Sphenoide beider Gruppen für die Triakisikosaeder als Kerne identisch sind, und es wird nun gezeigt, dass die drei genannten auch die einzigen Klassen sind, die für die Sphenoide der dritten Gruppe möglich sind. Wir beginnen mit der Untersuchung der Polyeder zweiter Klasse IIy, deren Normalecke die Ecke 15) des (12 + 20 + 30)-flächigen 2.60-Ecks ist. Für die Koordinaten dieser Ecke 15) der Hüllpolyeder gilt jetzt $y_2 : z_2 : x_2 = b_3 c_3 : a_3 c_3 : a_3 b_3$ und es sind die Werte der Parameter s und t:

$$134)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{a_3 b_3 + b_3 c_3 \tan\varphi + a_3 c_3 \cot\varphi}{2\,(a_3 b_3 \tan^2\varphi + a_3 c_3)}, \\ t = \dfrac{b_3 c_3 \tan\varphi + a_3 c_3}{a_3 b_3 \tan^2\varphi + a_3 c_3} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Der Gültigkeitsbereich dieser Formeln erstreckt sich einerseits bis zu der Grenzkurve C_{16} (vergl. Fig. 6 Taf. 11) solcher σ, τ der Kernpolyeder, für welche die zugehörigen Hüllen der Sphenoidgruppierungen (12 + 20 + 30)-flächige 60-Ecke sind und die Normalecke 15) mit der Normalecke 25) zusammenfällt und andererseits bis zur Grenzkurve C_{17}, für welche die Hüllen der zugehörigen Sphenoidgruppierungen (12+20)-flächige 12.5-Ecke sind, wobei die Normalecke 15) mit der Ecke 14) zum Zusammenfallen kommt. Die Gleichung der Kurve C_{16} ergibt sich aus 134) für $\frac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$ zunächst in der Form $b_3 c_3 \tan\varphi - a_3 c_3 \tan^2\varphi + a_3 b_3 = 0$ und weiter dann in der Gestalt

$$135)\quad \sigma\vartheta^2 \tan\varphi - 2\sigma\vartheta(\tan\varphi + \cot\varphi) + 8\vartheta\tan\varphi - \sigma(3\cot\varphi - 4) = 0.$$

Für $\sigma = 1$, d. h. für den Schnittpunkt Q von C_{16} mit C_1 ergibt sich aus 135) für ϑ die quadratische Gleichung $\vartheta^2 + \vartheta(3 - \sqrt{5}) - \frac{5-\sqrt{5}}{2} = 0$, woraus $\vartheta = \frac{3\sqrt{5}-5}{2}$ und damit $\tau = 5(\sqrt{5}-2)$ folgt. Der Schnittpunkt von C_{16} mit C_2 ergibt sich als Lösung der aus 135) für $\vartheta = \sigma$ folgenden Gleichung für σ, nämlich $\sigma = \frac{5+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{2+2\sqrt{5}} = 1{,}07404$, und das ist die σ-koordinate des Punktes N, wie sie bei Betrachtung der zweiten Gruppe gefunden wurde. Die Gleichung der zweiten Grenzkurve C_{17} ergibt sich aus 134) für $s = 1$, nämlich $a_3 b_3 \tan^2\varphi + b_3 c_3 - a_3 c_3 \tan\varphi = 0$, oder

$$136)\quad \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}(1 - 2\cot\varphi) + 2\sigma\vartheta^2\tan\varphi - \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot\varphi + \frac{\sigma^2}{4}\tan\varphi = 0.$$

Bestimmt man ihren Schnittpunkt O mit der Geraden C_2, indem man $\vartheta = \sigma$ setzt, so ergibt sich für σ die Gleichung $\sigma^2 - \sigma(3 - \sqrt{5}) - \frac{5-\sqrt{5}}{10} = 0$ und daraus $\sigma = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ wie für denselben Punkt O der zweiten Gruppe. Endlich ist noch der Schnittpunkt P von C_{17} mit der Geraden C_1, d. h. für $\sigma = 1$ zu bestimmen. Die sich aus 136) dann ergebende Gleichung für ϑ lautet: $\vartheta^2 - 2\vartheta\frac{\cot\varphi}{6\tan\varphi - 1} + \frac{\tan\varphi}{6\tan\varphi - 1} = 0$, woraus sich $\vartheta = \frac{\sqrt{5}+1 \pm 4\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2(3\sqrt{5}-4)}$ ergibt. Der brauchbare hieraus zu berechnende Wert von τ ist:

$$\tau = \frac{5(\sqrt{5}+1+4\sqrt{\sqrt{5}-2})}{11\sqrt{5}-5} = 1{,}3215.$$

Durch die beiden Kurven C_{16} und C_{17} ist das Gebiet im Vereine mit Teilstrecken der Geraden C_1 und C_2 völlig begrenzt und die Gültigkeit der

Formeln 134) ist auf dieses Gebiet beschränkt. Die bei Betrachtuug der zweiten Gruppe besprochene Gruppierung, deren Kern die A. V. des Triakisikosaeders ist, kann natürlich auch hier diskutiert werden. Von besonderem Interesse ist die spezielle Gruppierung, die sich für das Pentakisdodekaeder $\sigma=1$, $\tau=5(\sqrt{5}-2)$ als Kern ergibt, für welche die Hülle ein $(12+20+30)$-flächiges 60-Eck sein muss. Dieses Polyeder gehört zugleich zu den Sphenoidgruppierungen erster Klasse Iy, deren Normalecke die Ecke 25) ist, und lässt sich mit weniger Rechnung aus den hier geltenden Formeln ableiten. Es ist doch für die Polyeder dieses Gebietes $y_1:z_1:x_1=b_3c_3:a_3c_3:a_3b_3$ und also

137)
$$\begin{cases} s=\dfrac{c_3}{b_3\tan^2\varphi+c_3}, \\ t=\dfrac{b_3c_3\tan\varphi+a_3c_3}{a_3b_3\tan^2\varphi+a_3c_3}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Mit Einführung der Werte σ, ϑ ergibt sich s und t hier in der einfachen Form:

$$s=\frac{\sigma(\vartheta\cot\varphi-\tan\varphi)}{4\vartheta\tan^2\varphi+\sigma\vartheta\tan\varphi-\sigma},$$
$$t=\frac{(\vartheta\cot\varphi-\tan\varphi)(4\vartheta\tan\varphi-\sigma\vartheta\cot^2\varphi+\sigma)}{(4\vartheta\tan^2\varphi+\sigma\vartheta\tan\varphi-\sigma)(\cot\varphi-\vartheta)}\cos^2\varphi.$$

Für $\sigma=1$, $\vartheta=\frac{3\sqrt{5}-5}{2}$, d. h. das oben angeführte Pentakisdodekaeder ergeben diese Formeln $s=\frac{5\sqrt{5}+9}{22}$, $t=\frac{3(4\sqrt{5}+5)}{55}$, d. h. die Parameter der A. V. des $(12+20+30)$-flächigen 60-Ecks. Es sei beiläufig bemerkt, dass die Sphenoide in diesem Falle quadratisch sind (vergl. Nr. 9 dieses §). Das Modell dieses Polyeders zeigt Fig. 14 Taf. 21. In jeder seiner Ecken, deren eine Fig. 2a Taf. 10 im Querschnitt zeigt, fallen zwei Ecken verschiedener Sphenoide zusammen, so dass die Ecke als diskontinuierliche 2.3-kantige erscheint. Die Fläche der Gruppierung, in der vollständigen Figur dieser besonderen Varietät des Pentakisdodekaeders (Fig. 1 Taf. 14) enthalten, besteht aus den beiden Dreiecken $V_1V_2V_3$ und $V_4V_5V_6$, da das Polyeder zugleich der fünften Gruppe zugehört, und ist in Fig. 2 Taf. 10 für sich gezeichnet. Das Polyeder ist polarreziprok dem der ersten Gruppe, dessen Kern die A. V. des Deltoidhexekontaeders und dessen Hülle das 12.5-Eck für $\frac{2+\sqrt{5}}{5}$ ist.

In Fig. 4 Taf. 28 haben wir das Bild einer Sphenoidgruppierung erster Klasse der dritten Gruppe, für welche der Kern die A. V. des Dyakishexekontaeders, d. h. $\sigma = \frac{3(3\sqrt{5}+1)}{22}$, $\tau = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, also $\vartheta = \frac{3(\sqrt{5}+1)}{10}$ ist, deren Ecken dreikantig sind und deren Hülle also allgemein, d. h. ein $(12+20+30)$-flächiges 2.60-Eck ist. Die obigen Formeln für s und t ergeben die Werte $s = \frac{39+7\sqrt{5}}{2.29} = 0{,}942$, $t = \frac{3(40-\sqrt{5})}{5.29} = 0{,}780$ und für die Kanten des Hüllpolyeders erhält man dann die Proportion $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : \frac{3-\sqrt{5}}{2} : (2\sqrt{5}-3)$. Die Grenzfläche dieses diskontinuierlichen, aus 30 **rhombischen** Sphenoiden bestehenden Polyeders, das polarreziprok ist dem dritten unter der ersten Gruppe dritter Klasse angeführten, zeigt Fig. 6 Taf. 10. — Die Gleichung der Kurve C_{16} wird überdies befriedigt durch $\sigma = \frac{16}{13+\sqrt{5}} = \frac{4(13-\sqrt{5})}{41}$, $\tau = \frac{10}{5+\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, d. h. $\vartheta = 1$. Für diese Werte von σ und τ ergeben die Formeln 137) die Parameter $s = \frac{11+3\sqrt{5}}{19} = \frac{4}{11-3\sqrt{5}}$, $t = \frac{45+14\sqrt{5}}{99} = \frac{11}{45-14\sqrt{5}}$ (ein bestimmtes 60-Eck), d. h. das hier in Frage kommende diskontinuierliche Polyeder ist das polarreziproke des zweiten unter der dritten Klasse der ersten Gruppe angeführten Polyeders, dessen Kern eine besondere Varietät des Deltoidhexekontaeders ist. Für die Kanten des umhüllenden 60-Ecks findet man die Proportion: $k_1 : k_3 = (\sqrt{5}-2) : 1$.

Es ist nun zu beachten, dass das Gebiet der Sphenoide der dritten Gruppe erster Klasse $\mathrm{I}y$ das ganze in Fig. 6 Taf. 11 rechts von der Kurve C_{16} liegende Gebiet der konvexen Dyakishexekontaeder sein muss, da eine neue Grenzkurve für die Polyeder der Klasse $\mathrm{I}y$ nicht existieren kann. Doch werden die Gruppierungen für alle Werte σ und τ der Deltoidhexekontaederkurve C_3 illusorisch. Denn für alle Deltoidhexekontaeder ist $b_3 = 0$, also ergeben die Gleichungen 137) $s = 1$, $t = \cos^2\varphi$, was nach dem früher Gesagten eine einfache Deutung findet.

Überschreitet man, aus dem Gebiete der Sphenoide zweiter Klasse kommend, die Grenzkurve C_{17}, so gelangt man in das Gebiet der Polyeder mit Ecken vierter Klasse $\mathrm{IV}y$ und der Normalecke 14), für welche $y_4 : z_4 : x_4 = b_3 c_3 : a_3 c_3 : a_3 b_3$ ist, so dass die Parameter s und t die Werte erhalten;

$$138)\quad \begin{cases} s = \dfrac{a_3 b_3 \cot\varphi + b_3 c_3 + a_3 c_3 \cot^2\varphi}{2\,(a_3 b_3 + a_3 c_3 + b_3 c_3)}, \\ t = \dfrac{b_3 c_3 + a_3 c_3 \cot\varphi}{a_3 b_3 + a_3 c_3 + b_3 c_3} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Der Gültigkeitsbereich dieser Formeln erstreckt sich auf den Rest des Gebietes der konvexen Dyakishexekontaeder bis zum Triakontaederpunkte T, für den sich das schon behandelte Polyeder auch bei Verwendung dieser Formeln 138) wieder ergibt. Sicher kann keine neue Grenzkurve — es kämen der Möglichkeit nach zwei solche in Betracht, für die die Polyeder vierter Klasse IVy in solche fünfter Klasse Vy oder Vx durch das 20.3-Eck bezw. 60-Eck als Hüllen übergehen — die Gerade C_2 schneiden. Eine nähere Untersuchung zeigt nun, dass die nach der bisher immer angewandten Methode gefundenen Gleichungen der noch vermuteten Kurven durch keine für das Gebiet der konvexen Dyakishexekontaeder verfügbaren Werte der σ und τ befriedigt werden können.

7. Die vierte Gruppe der rhombischen Sphenoide im Dyakishexekontaedertypus. Die Sphenoide der vierten Gruppe sind ihren Ecken nach wiederum für alle fünf Klassen vorhanden, da sie für das Pentakisdodekaeder als Kern mit denen der zweiten Gruppe zusammenfallen und hier die Polyeder der Klassen Ix, IIx, IIIx, IVy, Vx existieren. Zu den fünf Gebieten dieser Polyeder enthält der Bereich der konvexen Dyakishexekontaeder für die vierte Gruppe aber noch ein sechstes Gebiet für die Polyeder der Klasse IVx, wie jetzt abgeleitet werden soll. Wir beginnen die Untersuchung mit den Polyedern der vierten Gruppe, die nach ihren Ecken zur Klasse Vx gehören, also die Normalecke 24) besitzen. Es gilt für die Koordinaten dieser Ecke hier die Proportion: $z_5 : x_5 : y_5 = b_4 c_4 : a_4 c_4 : a_4 b_4$ und die Parameter s und t für die Hüllpolyeder sind gegeben in:

$$139)\quad \begin{cases} s = \dfrac{a_4 c_4 \cot\varphi + a_4 b_4 + b_4 c_4 \cot^2\varphi}{2\,(a_4 b_4 + a_4 c_4 + b_4 c_4)}, \\ t = \dfrac{a_4 c_4 \cot\varphi + b_4 c_4}{a_4 b_4 + a_4 c_4 + b_4 c_4} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Wir bestimmen zunächst den Gültigkeitsbereich dieser Formeln. Die Ecke 24) kann auf dreierlei Weise zum Zusammenfallen mit Nachbarecken kommen: a) mit der Ecke 14) für das $(12+20+30)$-flächige 60-Eck; die Sphenoidgruppierungen mit solcher Hülle bilden den Übergang von den Sphenoiden der Klasse Vx zu denen der Klasse IVy; b) mit der Ecke 23) für das $(12+20)$-flächige 20.3-Eck; die Sphenoide der Klasse Vx gehen in solche der Klasse IVx über; c) mit der Ecke 34) für das $(12+20)$-flächige 12.5-Eck, wobei die Sphenoidgruppierungen der Klasse Vx in solche der Klasse IIIx übergehen. Alle diese drei Fälle sind hier vorhanden. Die Grenze gegen die Sphenoide der Klasse IVy ist gegeben durch die Kurve, deren Gleichung sich aus $\frac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$ ergibt, nämlich $a_4 b_4 \tan\varphi + a_4 c_4 - b_4 c_4 \cot\varphi = 0$, oder

$$140)\quad \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot^4\varphi - \sigma\vartheta^2\cot^3\varphi + \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\tan\varphi + \vartheta^2\cot^2\varphi + \sigma\vartheta\tan^2\varphi - \frac{3}{4}\sigma^2 = 0.$$

Da für das Ikosaeder $a_4 = b_4 = c_4$ ist und die Relation $\tan\varphi + 1 = \cot\varphi$ gilt (vergl. die Anm. in § 1 Nr. 1 dieses Kap.), so zeigt die erste Form der Gleichung, dass die durch 140) dargestellte Kurve C_{18} (vergl. Fig. 4 Taf. 12) durch den Ikosaederpunkt I geht. Für die τ-koordinate des Schnittpunktes H der Kurve mit C_1 ergibt sich aus 140) für $\sigma = 1$ die Gleichung $\vartheta^2 + 2\vartheta\cot\varphi\sqrt{5} - 3\cot^2\varphi = 0$, d. h. dieselbe Relation wie für den Punkt H in der zweiten Gruppe, womit die Identität der beiden Punkte H erwiesen ist.

Die Grenze des Gebietes der Sphenoidgruppierungen der Klasse Vx gegen die der Klasse IVx ergibt sich in der Kurve $\frac{t}{\cos^2\varphi} = s$ oder $a_4 b_4 + b_4 c_4 \tan\varphi - a_4 c_4 \cot\varphi = 0$, d. h.:

$$141)\quad \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\cot^2\varphi + \sigma\vartheta^2\cot\varphi - \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot^3\varphi - 3\vartheta^2 + \sigma\vartheta\cot^2\varphi + \frac{\sigma^2}{4}\tan^2\varphi = 0.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve C_{19} (Fig. 4 Taf. 12) geht, wie die erste Form der Gleichung zeigt, wieder durch den Ikosaederpunkt I. Die τ-koordinate ihres Schnittpunktes L mit der Geraden C_1 ergibt sich aus der für $\sigma = 1$ aus 141) folgenden Gleichung $\vartheta^2 - \frac{4\vartheta}{17 - 5\sqrt{5}} - \frac{3 - \sqrt{5}}{17 - 5\sqrt{5}} = 0$, d. h. es ergibt sich derselbe Wert von τ wie für den Punkt L in der zweiten Gruppe. Doch erfüllen die Parameter σ, τ der Sphenoide der Klasse Vx nicht das gesamte Gebiet zwischen den Kurven C_{18} und C_{19}, wie sich sofort zeigt, wenn wir die oben angegebene dritte Grenze der Polyeder

der Klasse Vx gegen die der Klasse IIIx bestimmen. Die Gleichung dieser dritten Grenzkurve ergibt sich aus der ersten Gleichung 139) für $s = 1$, nämlich $a_4 b_4 + a_4 c_4 \tan^2\varphi - b_4 c_4 \tan\varphi = 0$, oder

$$142) \quad \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}(4+\tan\varphi) - \sigma\vartheta^2\cot\varphi - \frac{\sigma^2\vartheta}{2} + \vartheta^2\tan^3\varphi + \sigma\vartheta(2-\tan\varphi) - \frac{\sigma^2}{4}(3-\tan\varphi) = 0.$$

Wir bestimmen die Schnittpunkte der durch diese Gleichung dargestellte Kurve C_{20}', die nicht durch den Ikosaederpunkt I läuft, mit der Geraden C_1 und der Deltoidhexekontaederkurve C_3. Für $\sigma = 1$ erhält man aus 142) die Gleichung $\vartheta^2 - 4\vartheta\frac{4-\sqrt{5}}{13-5\sqrt{5}} + \frac{7-\sqrt{5}}{13-5\sqrt{5}} = 0$, woraus sich die τ-koordinate des bei Diskussion der zweiten Gruppe der Sphenoide gefundenen Punktes K ergibt. Für den Schnittpunkt R der Kurve C_{20} mit der Kurve C_3 ergibt sich durch Einsetzung von $\vartheta = \frac{\sigma}{4-\sigma\cot^2\varphi}$ in Gleichung 142) für σ die Gleichung:

$$\sigma^2 - 2\sigma\cot\varphi + 7\tan\varphi - 2 = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma^2 - \sigma(\sqrt{5}+1) + \frac{7\sqrt{5}-11}{2} = 0,$$

und daraus für σ der eine verwendbare Wert $\sigma = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \sqrt{7-3\sqrt{5}} = 1{,}07783$. Die zwischen den Punkten K auf C_1 und R auf C_3 verlaufende Kurve C_{20} muss nun die Kurve C_{19} in einem Punkte T' schneiden, da die τ-koordinate von K grösser ist als die von L. Wir bestimmen die Koordinaten σ', τ' dieses Punktes T'. Für sie gelten gleichzeitig die Gleichungen der Kurven C_{19} und C_{20} in ihrer ersten Form, deren Subtraktion die Relation $2c_4(b_4\tan\varphi - a_4) = 0$ ergibt. Es ist also $a_4 = b_4\tan\varphi$, und beide Kurvengleichungen nehmen damit die Form $b_4\tan\varphi - c_4\tan^2\varphi = 0$ an, d. h. es ist weiter $b_4 = c_4\tan\varphi$ und damit $a_4 = c_4\tan^2\varphi$. Die Einführung der Werte a_4, b_4, c_4 in die letzten beiden Gleichungen ergibt zur Bestimmung von σ' und ϑ' das System:

$$\frac{\sigma'\vartheta'}{2}(2+\cot\varphi) - \vartheta'(\cot\varphi + \tan\varphi) + \frac{\sigma'}{2}\tan\varphi = 0,$$

$$\frac{\sigma'\vartheta'}{2}\cot\varphi + \vartheta'\tan^3\varphi - \frac{3\sigma'}{2}\tan\varphi = 0,$$

aus dem man auf elementarem Wege für die Werte der Koordinaten erhält:

$$\sigma' = \frac{4}{3\tan\varphi + 2} = \frac{8}{3\sqrt{5}+1} = 1{,}038.., \quad \vartheta' = \frac{2}{2\tan\varphi + 1} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ also } \tau' = \frac{4}{\sqrt{5}+1} = 1{,}236.$$

Die Sphenoidgruppierung, deren Kernpolyeder die Parameter σ' und τ' besitzt, hat nun offenbar zur Hülle das Triakontagon, da die Parameter s, t dieser Hülle gleichzeitig einem 12.5-Eck und einem 20.3-Eck zugehören. In der Tat sind die Werte σ', τ' die reziproken von s und t des Hüllpolyeders der der zweiten bis fünften Gruppe angehörenden Gruppierung von Sphenoiden, deren Kern das Triakontaeder ist (vergl. Gruppe 2 in Nr. 5 dieses §). Das Modell dieses aus 30 rhombischen Sphenoiden bestehenden neuen Polyeders der vierten Gruppe zeigt Fig. 5 Taf. 25. In jeder Ecke des umhüllenden Triakontagons liegen vier Ecken verschiedener Sphenoide, so dass die Ecken der Gruppierung als diskontinuierliche 4.3-kantige erscheinen.

Es ist nun der Gültigkeitsbereich der Formeln 139) auf das Gebiet beschränkt, das von der Kurve C_{18} vom Ikosaederpunkte I bis zum Punkte H auf C_1, weitere von C_1 bis zum Punkte K, von C_{20} von K bis T' und von C_{19} von T' bis zum Ausgangspunkte I begrenzt wird. Für den Punkt I ergeben sich Werte s und t des Hüllpolyeders der Sphenoidgruppierung, die gleichzeitig einem 60-Eck und einem 20.3-Eck zugehören, d. h. die Parameter des Dodekaeders. In der Tat berechnet man aus den Formeln 139) in diesem Falle, da $a_4 = b_4 = c_4$ wird: $s = \frac{\cot^2\varphi}{3}$ und $t = \frac{\cot^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{3}$. An Stelle der 30 rhombischen Sphenoide der allgemeinen Hülle treten hier die bekannten zehn Tetraeder im Dodekaeder, auf die wir in Nr. 9 dieses § nochmals geführt werden. — Innerhalb des Gebietes der Sphenoide der vierten Gruppe, die nach den Ecken zur Klasse Vx gehören, findet sich auch die Gruppierung, deren Kern die A. V. des Dyakishexekontaeders ist. Es ist dann $a_4 = \frac{3(7-\sqrt{5})}{55}$, $b_4 = \frac{3(7\sqrt{5}-5)}{110}$, $c_4 = \frac{3(15+\sqrt{5})}{110}$ und die zuerst für s und t hingeschriebenen Gleichungen ergeben: $s = \frac{65+3\sqrt{5}}{76} = 0{,}944$; $t = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 0{,}7236$. Für die Kanten des umhüllenden $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecks berechnet man damit: $k_1 : k_2 : k_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} : \frac{5-\sqrt{5}}{2} : 1$.

Das Modell dieser allgemeinen Gruppierung von 30 rhombischen Sphenoiden zeigt als Beispiel für ein Polyeder mit Ecken fünfter Klasse Fig. 6 Taf. 28. Die Grenzfläche ist in der vollständigen Figur der A. V.

des Dyakishexekontaeders enthalten und mit Berücksichtigung der allein notwendigen Spuren in Fig. 3 Taf. 16 wiedergegeben.

Wir betrachten nun die weiteren Klassen der Sphenoide der vierten Gruppe. Über die Kurve C_{18} schreitend, für deren Parameterwerte σ, τ die Hüllen der zugehörigen Gruppierungen 60-Ecke sind, gelangt man in das Gebiet der Polyeder der Klasse IVy mit der Normalecke 14), für welche jetzt $y_4 : z_4 : x_4 = b_4 c_4 : a_4 c_4 : a_4 b_4$ ist, so dass

$$143) \quad \begin{cases} s = \dfrac{a_4 b_4 \cot\varphi + b_4 c_4 + a_4 c_4 \cot^2\varphi}{2\,(a_4 b_4 + a_4 c_4 + b_4 c_4)}, \\ t = \dfrac{b_4 c_4 + a_4 c_4 \cot\varphi}{a_4 b_4 + a_4 c_4 + b_4 c_4} \cos^2\varphi \end{cases}$$

wird. Eine eingehende Untersuchung zeigt nun, dass die Kurve C_{18} die einzige Grenzkurve des Gebietes der Polyeder der Klasse IVy ist, dass also dieses Gebiet bis zum Triakontaederpunkt T reicht und alle die Gruppierungen von Sphenoiden mit enthält, deren Kerne Triakisikosaeder sind, die nach den allgemeinen Bemerkungen identisch mit den entsprechenden der fünften Gruppe werden. Als Beispiel einer solchen Gruppierung mit Ecken vierter Klasse IVy wählen wir das Polyeder, dessen Kern die A. V. des Triakisikosaeders ist. Die Gleichungen 143) ergeben bei Einführung der speziellen Werte der a_4, b_4, c_4 für diese Varietät des Kernes (vergl. Kap. IV § 1 Nr. 3) nach einiger Rechnung: $s = \frac{2\sqrt{5}+1}{6} = 0{,}912$, $t = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 0{,}7236$ und für die Kanten des Hüllpolyeders erhält man die Proportion $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : \frac{5-2\sqrt{5}}{5} : \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Das Modell dieses diskontinuierlichen aus 30 rhombischen Sphenoiden bestehenden Vielflaches mit dreikantigen Ecken zeigt Fig. 5, Taf. 27; die Grenzfläche ist die aus zwei Dreiecken bestehende Fig. 7 Taf. 15.

Betrachten wir nun das Gebiet der Polyeder vierter Klasse IVx mit der Normalecke 23), das jenseits der Grenzkurve C_{19} des Gebietes der Polyeder der Klasse Vx liegt. Für die Koordinaten der Ecke 23) ist jetzt: $z_4 : x_4 : y_4 = b_4 c_4 : a_4 c_4 : a_4 b_4$ und für die Parameter s, t der Hüllpolyeder der Gruppierungen kommt:

$$144) \quad \begin{cases} s = \dfrac{a_4 c_4 \cot\varphi + a_4 b_4 + b_4 c_4 \cot^2\varphi}{2\,(a_4 b_4 + a_4 c_4 + b_4 c_4)}, \\ t = \dfrac{a_4 b_4 + b_4 c_4 \cot\varphi}{a_4 b_4 + a_4 c_4 + b_4 c_4} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Als Grenzkurve der Polyeder dieses Gebietes gegen das der Polyeder mit Ecken Vx ergibt sich natürlich wieder die Kurve C_{19}, denn für $\frac{t}{\cos^2\varphi} = s$ erhält man deren bereits abgeleitete Gleichung: $a_4 b_4 + b_4 c_4 \tan\varphi - a_4 c_4 \cot\varphi = 0$. Die Grenzkurve des Gebietes gegen die Sphenoidgruppierungen mit Ecken der Klasse IIx, in die die Polyeder übergehen, nachdem die Normalecke 23) für das 12.5-Eck als Hülle mit der Normalecke 33) zum Zusammenfallen gekommen ist, bedarf jedoch einer erneuten Diskussion, um zu entscheiden, ob der ausserhalb des Gebietes der Vx liegende Teil der Kurve C_{20} vom Punkte T' aus bis zum Schnitte R mit C_3 diese gewünschte Grenzkurve darstellt. Nun ist aber die erste Gleichung 144) identisch mit der ersten Gleichung 139), womit diese Frage sofort im bejahenden Sinne beantwortet ist. Als Beispiel für die Polyeder der Klasse IVx wählen wir die Gruppierung, deren Kern die A. V. des Deltoidhexekontaeders ist. Die Formeln 144) ergeben für $a_4 = \sqrt{5} - 2$, $b_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $c_4 = 2a_4$ die Parameter eines 2.60-Ecks: $s = \frac{4\sqrt{5}-7}{2}$, $t = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ und für die Kanten dieser Hülle die Proportion: $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 3 : \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Das Modell des diskontinuierlichen, aus 30 rhombischen Sphenoiden bestehenden Polyeders zeigt Fig. 4 Taf. 27; seine Grenzfläche Fig. 2 Taf. 12.

Die Polyeder dieser Klasse IVx sind polarreziprok zu den Polyedern der vorher betrachteten Klasse IVy der vierten Gruppe, und zwar entsprechen die Gruppierungen der Kurve C_3 von R bis I den Gruppierungen der Kurve C_{18} von H bis I, so dass sich für I ein autopolares Polyeder, die Gruppierung der zehn Tetraeder, ergibt. Die Gruppierungen der Kurve C_{19} von T' bis I entsprechen den Gruppierungen der Geraden C_2 von T bis I, wobei also die Punkte T und T', wie schon gezeigt, reziproke Polyeder charakterisieren. Den Polyedern der Kurve C_{20} von T' bis R entsprechen die der Geraden C_1 von T bis H. Dass die polarreziproken der beiden oben besprochenen speziellen Polyeder, deren Kerne die archimedeischen Varietäten des Triakisikosaeders und Deltoidhexekontaeders sind, sich für die reziproken Werte der s und t der Hüllpolyeder dieser Körper ergeben, die den Gleichungen der Kurven C_{19} und C_{18} genügen, bestätigt man leicht durch Einsetzung dieser Werte in die Gleichungen von C_{19} bezw. C_{18} und durch darauf-folgende Berechnung der Parameter s und t der neuen Polyeder aus den Formeln 139).

Wir betrachten nun das Gebiet der Sphenoide dritter Klasse IIIx mit der Normalecke 34), für welche $z_3 : x_3 : y_3 = b_4 c_4 : a_4 c_4 : a_4 b_4$ ist. Für s und t ergibt sich:

$$145)\quad \begin{cases} s = \dfrac{a_4 c_4 \cot\varphi + a_4 b_4 + b_4 c_4 \cot^2\varphi}{2\,(a_4 c_4 \tan\varphi + b_4 c_4 \cot\varphi)}, \\ t = \dfrac{a_4 c_4 \cot\varphi + b_4 c_4}{a_4 c_4 \tan\varphi + b_4 c_4 \cot\varphi} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Für die Grenzkurve dieser Polyeder gegen die der zweiten Klasse IIx mit der Normalecke 33) ergibt sich die Gleichung $\dfrac{t}{\cos^2\varphi} = s$, nämlich $a_4 c_4 \cot\varphi - a_4 b_4 - b_4 c_4 \tan\varphi = 0$, d. i. aber die Gleichung der Kurve C_{19}. Es ist also bewiesen, dass die Gesamtkurven C_{19} und C_{20} zur Begrenzung der Einzelgebiete völlig hinreichend sind. Sowohl über die Kurve C_{19} aus dem Gebiete der Sphenoide dritter Klasse IIIx wie über die Kurve C_{20} aus dem der Sphenoide vierter Klasse IVx gelangt man in das Gebiet der Sphenoide zweiter Klasse IIx mit der Normalecke 33), für welche: $z_2 : x_2 : y_2 = b_4 c_4 : a_4 c_4 : a_4 b_4$ ist, wonach für die Parameter s und t der Hüllpolyeder dieser neuen Gruppierungen

$$146)\quad \begin{cases} s = \dfrac{a_4 c_4 + a_4 b_4 \tan\varphi + b_4 c_4 \cot\varphi}{2\,(a_4 c_4 \tan^2\varphi + b_4 c_4)}, \\ t = \dfrac{a_4 b_4 \tan\varphi + b_4 c_4}{a_4 c_4 \tan^2\varphi + b_4 c_4} \cos^2\varphi \end{cases}$$

ist. — Die Gleichung der Grenzkurve C_{21} dieses Gebietes gegen das der Polyeder erster Klasse Ix mit der Normalecke 43) ergibt sich, da die Hüllen der Sphenoidgruppierungen für die Werte σ, τ dieser Grenzkurve 60-Ecke sind, aus 146) für $\dfrac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$, nämlich $a_4 b_4 \tan\varphi + a_4 c_4 - b_4 c_4 \tan^2\varphi = 0$, oder:

$$147)\quad \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4} - \sigma\vartheta^2 + \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\tan\varphi + \vartheta^2\tan\varphi + \sigma\vartheta\tan^2\varphi - \frac{\sigma^2}{4}(\tan\varphi + \cot\varphi) = 0.$$

Der Schnittpunkt M dieser Kurve C_{21} mit der Geraden C_1 ist wiederum der Punkt M der zweiten Gruppe an derselben Stelle. Die σ-koordinate des Schnittpunktes S von C_{21} mit C_3 ergibt sich aus der in bekannter

Weise zu erhaltenden Gleichung $\sigma^2 - 2\sigma(5 - 6\tan\varphi) + 11(2 - 3\tan\varphi) = 0$ oder $\sigma^2 - 2\sigma(8 - 3\sqrt{5}) + \frac{11(7 - 3\sqrt{5})}{2} = 0$, nämlich

147') $$\sigma = 8 - 3\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{2(141 - 63\sqrt{5})} = 1{,}0391.$$

Für die Sphenoidgruppierungen des letzten Gebietes der Klasse Ix und der Normalecke 43), deren Koordinaten durch die Proportion $z_1 : x_1 : y_1 = b_4c_4 : a_4c_4 : a_4b_4$ gegeben sind, haben die Parameter s und t der Hüllpolyeder die Werte:

148) $$\begin{cases} s = \dfrac{b_4}{a_4\tan^2\varphi + b_4}, \\ t = \dfrac{a_4b_4\tan\varphi + b_4c_4}{a_4c_4\tan^2\varphi + b_4c_4}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Sie behalten ihre Gültigkeit für den Rest des Gebietes der konvexen Dyakishexekontaeder und der Kurven C_3 und C_1, mit Ausnahme des Grenzpunktes D für das Dodekaeder. Denn für $\sigma = 1$, $\tau = 1$ wird $a_4 = 0$ und damit wieder $s = 1$, $t = \cos^2\varphi$. Im Triakontagon entarten aber die Sphenoidgruppierungen erster Klasse in das System der 15 Achsengeraden durch die Achsenpunkte B.

8. **Die fünfte Gruppe der rhombischen Sphenoide im Dyakishexekontaedertypus.** Sämtliche Sphenoide dieser Gruppe sind nach ihrer Klasse offenbar durch die Betrachtungen der vier vorhergehenden Gruppen bereits charakterisiert, da für die Werte σ, τ der Polyeder, deren Kerne Triakisikosaeder, Pentakisdodekaeder und Deltoidhexekontaeder sind, die Sphenoide der fünften Gruppe mit denen der vierten, dritten, bezw. vierten Gruppe zusammenfallen. Ein inmitten des Gebietes der konvexen Dyakishexekontaeder liegendes Teilgebiet, das von einer geschlossenen Kurve C begrenzt wäre, die keine der drei Grenzen C_1, C_2, C_3 des Gebietes schnitte, kann nicht existieren. Denn alle Gleichungen ableitbarer Grenzkurzen sind von der Form $a_ib_if_i(\varphi) + a_ic_if'_i(\varphi) + b_ic_if''_i(\varphi) = 0$, worin die f trigonometrische Funktionen von φ sind, und sämtliche $a_ib_i, \ldots$ werden nach 103) — 107) Null für die Koordinaten $\sigma = 0$, $\tau = 0$, d. h. sämtliche möglichen Grenzkurven C gehen durch den Koordinatenanfang, müssen also, wenn sie Punkte

innerhalb des Gebietes der konvexen Dyakishexekontaeder besitzen, mindestens zwei der Grenzkurven C_1, C_2, C_3 (oder eine zweimal) passieren, da ihr Verlauf ein stetiger ist w. z. b. w.

Wir beginnen die Untersuchung der Sphenoide der fünften Gruppe mit den Polyedern, die nach der Normalecke 14) zu denen der vierten Klasse IVy gehören und die für das Triakisikosaeder als Kern mit den Sphenoiden der vierten Gruppe identisch sind. Für die Ecke 14) gilt jetzt $y_4 : z_4 : x_4 = b_5 c_5 : a_5 c_5 : a_5 b_5$ und für die Parameter s und t der Hüllpolyeder hat man:

$$149)\quad \begin{cases} s = \dfrac{a_5 b_5 \cot\varphi + b_5 c_5 + a_5 c_5 \cot^2\varphi}{2\,(a_5 b_5 + a_5 c_5 + b_5 c_5)}, \\[2ex] t = \dfrac{b_5 c_5 + a_5 c_5 \cot\varphi}{a_5 b_5 + a_5 c_5 + b_5 c_5} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Fragen wir nun nach dem Gültigkeitsbereich dieser Formeln, so haben wir zu bestimmen, wann die Polyeder der Klasse IVy in solche der Klasse Vx, Vy oder IIy übergehen. Es zeigt nun die durchgeführte Untersuchung, dass nur für den zuletzt genannten Fall eine Kurve C_{22} (vergl. Fig. 5 Taf. 12) sich ergibt, die innerhalb des Gebietes der konvexen Dyakishexekontaeder verläuft und deren Gleichung aus 149) aus bekanntem Grunde für $s = 1$ folgt, nämlich: $b_5 c_5 + a_5 b_5 \tan^2\varphi - a_5 c_5 \tan\varphi = 0$ oder

$$149')\quad \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}(1-2\cot\varphi) + \sigma\vartheta^2 + \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot\varphi + \vartheta^2(2\tan\varphi - 1) - \sigma\vartheta\cot\varphi + \frac{\sigma^2}{4}\tan\varphi = 0.$$

Diese Kurve C_{22} kann die Gerade C_2 nicht schneiden (vergl. die vierte Gruppe der Sphenoide und Fig. 4 Taf. 12). Ihr Schnittpunkt P mit C_1 wird aus der für $\sigma = 1$ aus 149') folgenden Gleichung $\vartheta^2(6\tan\varphi - 1) - 2\vartheta\cot\varphi + \tan\varphi = 0$ gefunden. Diese Gleichung schon zeigt, dass der zu erhaltende Punkt P identisch mit dem Punkte P auf C_1 für die Sphenoide der dritten Gruppe ist. Für die σ-koordinate des Schnittpunktes R von C_{22} mit C_3 ergibt sich durch Einführung von $\vartheta = \dfrac{\sigma}{4 - \sigma\cot^2\varphi}$ in 149') die Gleichung $\sigma^2 - 2\sigma\cot\varphi + 7\tan\varphi - 2 = 0$, d. h. der Punkt R ist identisch mit dem Punkte R auf C_3 für die Sphenoide der vierten Gruppe. Hiernach erstreckt sich die Gültigkeit der Formeln 149) auf das ganze Gebiet der konvexen Dyakishexekontaeder oberhalb der Kurve C_{22}, einschliesslich dessen Grenzen, C_2 und eines Teiles von C_3. Doch gehören die Sphenoide der fünften Gruppe, deren Kern ein Deltoidhexekontaeder dieses Teiles der C_3 ist, die mit denen der vierten Gruppe zusammenfallen, wie diese zeigen, zur Klasse IVx. Gehen wir jetzt zunächst von diesen Sphenoiden der Klasse IVx aus, deren Normalecke die Ecke 23) ist, für welche: $z_4 : x_4 : y_4 = b_5 c_5 : a_5 c_5 : a_5 b_5$, so bestimmen wir für die Parameter s' und t' der Hüllpolyeder dieser Sphenoidgruppierungen nun die Werte:

150) $$\begin{cases} s' = \dfrac{a_5 c_5 \cot\varphi + a_5 b_5 + b_5 c_5 \cot^2\varphi}{2\,(a_5 b_5 + a_5 c_5 + b_5 c_5)}, \\ t' = \dfrac{a_5 b_5 + b_5 c_5 \cot\varphi}{a_5 b_5 + a_5 c_5 + b_5 c_5} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

die von 149) verschieden sind. Wir untersuchen jetzt, für welche Werte von σ und τ bezw. ϑ die Wertsysteme 149) und 150) übereinstimmen. Die Gleichungen $s = s'$ und $t = t'$ lassen sich auf die Form bringen:

$$a_5 b_5 \tan\varphi - b_5 c_5 \cot\varphi + a_5 c_5 = 0,$$

und

$$a_5 c_5 \cot\varphi - b_5 c_5 \tan\varphi - a_5 b_5 = 0.$$

Ihr gleichzeitiges Bestehen zieht die Bedingung $b_5 \tan\varphi \,.\, (a_5 - c_5) = 0$ nach sich, d. h. es muss $a_5 = c_5$ sein. Die Einführung der Werte σ und ϑ hierin führt auf die Gleichung $\vartheta\left(\frac{\sigma}{2} - 1\right)\cot^2\varphi + \frac{\sigma}{2}(\cot\varphi + \tan\varphi) = 0$, d. h. es ist:

150') $$\vartheta = \frac{\sigma\sqrt{5}}{(2 - \sigma)\cot^2\varphi}.$$

Dies ist die Gleichung einer Kurve C_ε (vergl. Fig. 5 Taf. 12), die durch den Ikosaederpunkt I geht, wie direkt aus $a_5 = c_5$ folgt. Die Koordinate τ ihres Schnittpunktes Q mit der Pentakisdodekaedergeraden C_1 ergibt sich aus 150') für $\sigma = 1$, nämlich $\tau = \frac{\sqrt{5}}{\cot^2\varphi \cos^2\varphi} = 5(\sqrt{5} - 2)$, wonach dieser Punkt Q mit dem gleichbenannten auf der Geraden C_1 für die dritte Gruppe der Sphenoide identisch ist. Es schneide die Kurve C_ε die früher abgeleitete C_{22} im Punkte Σ. Dann zerfällt das Gebiet der Sphenoidgruppierungen vierter Klasse durch C_ε zwischen Σ und I in zwei Teilgebiete auf ihren beiden Ufern und die Polyeder der beiden Ufer gehören zwar sämtlich zur vierten Klasse, doch ist die Normalecke das eine Mal die Ecke 14), das andere Mal die Ecke 23), während für die Polyeder der Übergangskurve, die, wie in nächster Nummer gezeigt wird, nichts anderes sind als die sekundären quadratischen Sphenoide der Gruppe, die beiden Ecken gleichwertig zur Ableitung der Parameter Verwendung finden können.

Durch die Werte σ, τ der C_{22} gehen die Polyeder vierter Klasse in die zweiter Klasse über. Die Normalecke ist dann die Ecke 15) für welche $y_2 : z_2 : x_2 = b_5 c_5 : a_5 c_5 : a_5 b_5$ ist, wonach

$$151) \quad \begin{cases} s = \dfrac{a_5 b_5 + b_5 c_5 \tan\varphi + a_5 c_5 \cot\varphi}{2(a_5 b_5 \tan^2\varphi + a_5 c_5)}, \\ t = \dfrac{b_5 c_5 \tan\varphi + a_5 c_5}{a_5 b_5 \tan^2\varphi + a_5 c_5} \cos^2\varphi \end{cases}$$

wird. Als Grenzkurve des Gebietes dieser Polyeder ergibt sich neben C_{22} andererseits gegen das Gebiet der Sphenoide erster Klasse für $\dfrac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$ eine Kurve C_{23}, deren Gleichung $a_5 b_5 + b_5 c_5 \tan\varphi - a_5 c_5 \tan^2\varphi = 0$ in den σ und ϑ die Form hat:

$$152) \quad \frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}\tan\varphi - \sigma\vartheta^2\tan\varphi + \frac{\sigma^2\vartheta}{2}(\tan\varphi + \cot\varphi) + \vartheta^2\tan\varphi - \sigma\vartheta + \frac{\sigma^2}{4}(4 - 3\cot\varphi) = 0.$$

Die τ-koordinate des Schnittpunktes dieser Kurve C_{23} mit der Geraden C_1 ergibt sich danach aus $\vartheta^2 + 2\vartheta\tan^2\varphi + \cot\varphi - 3 = 0$ oder aus $\vartheta^2 + 2\vartheta . \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} - \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} = 0$. Es kommt $\vartheta = \dfrac{3\sqrt{5}-5}{2}$ und damit $\tau = 5(\sqrt{5}-2)$. Wir haben also wiederum den schon mehrfach erwähnten Punkt Q, wie vorauszusehen war. Die σ-koordinate des Schnittpunktes S von C_{23} ergibt sich aus der für $\vartheta = \dfrac{\sigma}{4 - \sigma\cot^2\varphi}$ aus 152) folgenden Gleichung $\sigma^2 - 2\sigma(5 - 6\tan\varphi) + 11(2 - 3\tan\varphi) = 0$ und ein Vergleich mit den Betrachtungen der vierten Gruppe zeigt, dass wir wieder den früheren Punkt S auf der Kurve C_3 vor uns haben. Die Parameter s und t für das letzte Gebiet sind in bekannter Weise zu bestimmen. Damit ist also das Gebiet der konvexen Dyakishexekontaeder für die fünfte Gruppe der Sphenoide im ganzen in drei Teilgebiete für Polyeder der vierten, zweiten und ersten Klasse zerlegt.[1]) Ehe wir nun

[1]) Die Polyedertypen der Gruppe, soweit sie dargestellt sind, wurden sämtlich schon in den vorhergehenden Gruppen erwähnt, denen sie gleichzeitig angehörten.

die polarreziproke Verwandtschaft sämtlicher Sphenoide i-ter Gruppe k-ter Klasse übersichtlich darstellen, fragen wir nach den sekundären quadratischen Sphenoiden, die wir jetzt für die einzelnen Gruppen aufsuchen.

9. **Die sekundären quadratischen Sphenoide der fünf Gruppen.** Da ein Sphenoid der i-ten Gruppe polarreziprok zu einem Sphenoide der i-ten Klasse ist, und polarreziproke Sphenoide gleichzeitig entweder rhombisch oder quadratisch sein müssen, da die Flächen des einen die Tangentialebenen an die umbeschriebene Kugel des anderen in seinen Ecken sind, so erhalten wir die Bedingung für die Parameter σ, τ einer Gruppierung quadratischer Sphenoide der i-ten Gruppe, wenn wir in der Relation für die Parameter s und t der Gruppierung quadratischer Sphenoide der i-ten Klasse s und t durch $\frac{1}{\sigma}$ und $\frac{1}{\tau}$ ersetzen. a) die Relation zwischen σ und τ für die quadratischen Sphenoide der ersten Gruppe ergibt sich demnach aus Gleichung 96) in $\frac{1}{\tau}=\left(\cot\varphi-\frac{1}{\sigma}\tan\varphi\right)\cos^2\varphi$ oder

$$153)\qquad \tau=\frac{\sigma}{(\sigma\cot\varphi-\tan\varphi)\cos^2\varphi}.$$

Diese Gleichung 153) ist die einer Kurve C_α (vergl. Fig. 4 Taf. 11) in dem Gebiete der konvexen Dyakishexekontaeder, die durch den Triakontaederpunkt T, für $\sigma=1$, $\tau=\frac{1}{\cos^2\varphi}$ und den Deltoidhexekontaederpunkt A für die A. V. des 60-flaches $\sigma=\frac{5\sqrt{5}-9}{2}$, $\tau=\frac{4\sqrt{5}-5}{3}$ geht. Die Kurve C_α hat also mit der Kurve C_4 die Punkte T und A gemeinsam, verläuft aber im übrigen von ihr getrennt im Gebiete der Sphenoidgruppierungen dritter Klasse IIIx, wie man leicht nachweist, wenn man für beliebiges σ zwischen $\sigma=1$ und $\sigma=\frac{5\sqrt{5}-9}{2}$ die sich aus den Gleichungen von C_4 und C_α ergebenden Werte von τ vergleicht. Es sind also die sekundären quadratischen Sphenoide der ersten Gruppe stets von der dritten Klasse, woraus nach Gleichung 98) folgt, dass der Parameter t der Hüllpolyeder dieser Gruppierungen den konstanten Wert $\frac{2+\sqrt{5}}{5}$ besitzt. Bestätigung findet dieses Ergebnis an dem Beispiel für die A. V. des Deltoidhexekontaeders als Kern, das in Nr. 4 dieses § besprochen wurde.

b) Für die quadratischen Sphenoide der zweiten Gruppe ergibt Gleichung 97) für $s = \frac{1}{\sigma}$, $t = \frac{1}{\tau}$ die Relation zwischen σ und τ

154) $$\tau = \frac{\sigma \cot\varphi}{(2 \tan^2\varphi + \sigma) \cos^2\varphi}.$$

Diese Gleichung stellt eine Kurve C_β (vergl. Fig. 5 Taf. 11) dar, die die Gerade $\sigma = 1$ in dem Punkte Ψ für $\tau = \frac{4\sqrt{5}+5}{11} = 1{,}26766$ schneidet, der zwischen H und K liegt, während die Deltoidhexekontaederkurve C_3 in dem Punkte A für die Werte $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-9}{2}$, $\tau = \frac{4\sqrt{5}-5}{3}$, d. h. für die A. V. geschnitten wird. Das letzte Ergebnis ist selbstverständlich mit Rücksicht auf die Sphenoide der ersten Gruppe. Diese Kurve C_β verläuft vollständig zwischen den Kurven C_{12} und C_{13}, wie die Diskussion ihrer Gleichung erweist. Es sind demnach die Gruppierungen sekundärer quadratischer Sphenoide der zweiten Gruppe sämtlich von der fünften Klasse, und die Parameter s und t ihrer Hüllen genügen der Gleichung 101), wie sich für die im Modell dargestellte Gruppierung Fig. 2 Taf. 25, deren Kern die A. V. des Deltoidhexekontaeders ist und die zugleich zur dritten Klasse gehörte, durch Einführnng von $s = 1$, $t = \frac{2+\sqrt{5}}{5}$ in 101) sofort als richtig zeigen lässt. Für die Gruppierung quadratischer Sphenoide deren Kern das Pentakisdodekaeder $\sigma = 1$, $\tau = \frac{4\sqrt{5}+5}{11}$ (im Punkte Ψ) ist, berechnet man die Parameter s und t der Hülle aus den Gleichungen 127) für $a_2 = b_2 = \frac{7-\sqrt{5}}{22}$, $c_2 = a_2\sqrt{5}$ (vergl. für diese Werte Kap. IV § 1 Nr. 3 unter „Pentakisdodekaeder"). Danach wird:

$$s = \frac{1+\sqrt{5}\cot\varphi\,(1+\cot\varphi)}{2\,(1+2\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1} = \frac{5\sqrt{5}+7}{19} = 0{,}95681;$$
$$t = \frac{\sqrt{5}\,(1+\cot\varphi)\cos^2\varphi}{2\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}+1} = \frac{8+3\sqrt{5}}{19} = 0{,}77411.$$

Wir haben ein bestimmtes $(12+20+30)$-flächiges $2 \cdot 60$-Eck vor uns, für dessen Kanten man nach der Formel 90') die Proportion berechnet:

$$k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

c) Die quadratischen Sphenoide dritter Klasse waren nach Gleichung 98) durch den konstanten Parameter $t = \frac{2+\sqrt{5}}{5}$ charakterisiert. Es ist also für die Kernpolyeder aller sekundären quadratischen Sphenoide der dritten Gruppe: $\tau = 5(\sqrt{5}-2)$. Diese Gleichung ist die einer der σ-achse parallel verlaufenden Geraden C_γ in Fig. 6 Taf. 11, die durch den oft erwähnten Pentakisdodekaederpunkt Q gelegt ist und lediglich in dem Gebiete der Polyeder erster Klasse verläuft. D. h.: Die Gruppierungen quadratischer Sphenoide der dritten Gruppe sind zugleich solche der ersten Klasse und ihre Eckenparameter s, t befriedigen die Gleichung 96). Unter diesen Polyedern befindet sich das zugleich der dritten und fünften Gruppe zugehörende Fig. 14 Taf. 21, dessen Kern die eben genannte spezielle Varietät des Pentakisdodekaeders ist (siehe Nr. 6 dieses §). Es sind die quadratischen Sphenoide der dritten Gruppe erster Klasse dieser Geraden C_γ polarreziprok den Polyedern der ersten Gruppe dritter Klasse der Kurve C_α, wobei sich die Punkte A und Q, sowie T und A entsprechen. Für die letzteren Punkte werden die Sphenoide beider Gruppen illusorisch.

d) Führen wir in der Bedingungsgleichung 101) $s = \frac{1}{\sigma}$, $t = \frac{1}{\tau}$ ein, so erhalten wir für die Parameter σ und τ der Kernpolyeder der Gruppierungen quadratischer Sphenoide für die vierte Gruppe die Gleichung:

$$155) \qquad \tau = \frac{\sigma \cot^2 \varphi}{(2\sqrt{5} - \sigma \cot \varphi) \cos^2 \varphi}.$$

Es ist die einer Kurve C_δ (vergl. Fig. 4 Taf. 12) die durch den Ikosaederpunkt $I \left(\sigma = 3\tan^2\varphi,\ \tau = \frac{3\tan^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)$ und einen Punkt Ψ auf C_1 geht, dessen Koordinate τ sich für $\sigma = 1$ aus 155) ergibt, nämlich $\tau = \frac{4\sqrt{5}+5}{11}$, wonach dieser Punkt Ψ identisch mit dem gleichbenannten für die quadratischen Sphenoide in der zweiten Gruppe ist, wie zu erwarten war. Da die Kurve C_δ keine der Nachbarkurven C_{18}, C_{19}, C_{20} schneidet, so sind sämtliche Gruppierungen quadratischer Sphenoide dieser vierten Gruppe von der fünften Klasse und für das Ikosaeder als Kern ergeben sich zehn Tetraeder im Dodekaeder als Hülle.

e) Für die Parameter der Kernpolyeder sekundärer quadratischer Sphenoide der fünften Gruppe ergibt sich dem bisherigen analog aus

Gleichung 101) die Bedingungsgleichung $\tau = \frac{\sigma\sqrt{5}}{(2-\sigma)\cot^2\varphi\cos^2\varphi}$, deren Diskussion bereits in voriger Nr. geleistet ist. Die durch sie dargestellte Kurve C_ε verläuft vom Ikosaederpunkt I ausgehend, durch das Gebiet der Sphenoidgruppierungen vierter Klasse und zweiter Klasse nach dem Punkte Q, der mit dem gleichbenannten für die Sphenoide der dritten Gruppe identisch ist und die Koordinaten $\sigma = 1$, $\tau = 5(\sqrt{5}-2)$ besitzt. D. h.: Die sekundären quadratischen Sphenoide der fünften Gruppe gehören nach ihren Ecken teils zur zweiten und teils zur vierten Klasse, und zwar gilt das Folgende, wenn wir die polarreziproke Zuordnung direkt an den Kurven C_ε, C_δ und C_β studieren. Die Polyeder der fünften Gruppe vierter Klasse längs C_ε von I bis Σ (vergl. Fig. 5 Taf. 12) sind reziprok den Polyedern der vierten Gruppe fünfter Klasse längs C_δ von I bis Ψ (vergl. Fig. 4 Taf. 12). Die Polyeder der fünften Gruppe zweiter Klasse längs C_ε von Σ bis Q sind reziprok den Polyedern zweiter Gruppe fünfter Klasse längs C_β von Ψ bis A (vergl. Fig. 5 Taf. 11), sodass das zugleich der zweiten und vierten Gruppe angehörende Polyeder fünfter Klasse in Ψ reziprok ist dem Polyeder der fünften Gruppe in Σ, das zugleich von der zweiten und vierten Klasse ist, da Σ auch auf der Kurve C_{22} liegt. Die Koordinaten σ, τ des Punktes Σ müssen also die reziproken Werte der Parameter s und t sein, die wir oben für das Hüllpolyeder der Sphenoidgruppierung des Punktes Ψ gefunden hatten. In der Tat genügen die Werte $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-7}{4}$ und $\tau = 8-3\sqrt{5}$ sowohl der Gleichung der Kurve C_{22}, wie der der Kurve C_ε. (Wir werden dieser speziellen Varietät eines Dyakishexekontaeders weiterhin mehrfach begegnen.) Damit sind die sekundären quadratischen Sphenoide aller fünf Gruppen erledigt. Stets quadratische Sphenoide gibt es im Dyakishexekontaedertypus nicht.

10. **Die polarreziproke Verwandtschaft der fünf Gruppen rhombischer Sphenoide.** In derselben Weise wie zuletzt in Kap. III § 2 Nr. 12 nach Erledigung der Sphenoidgruppierungen im Hexakisoktaedertypus stellen wir jetzt für die rhombischen Sphenoide des Dyakishexekontaedertypus die polarreziprok verwandten Polyeder der Gruppen und Klassen einander übersichtlich gegenüber, indem wir jedes Gebiet durch

seine „Ecken“ und Grenzkurven beschreiben, wobei wir übrigens die bereits genügend diskutierten sekundären quadratischen Sphenoide beiseite lassen. Es ist hierzu auf die Figuren 4, 5 und 6 der Tafel 11, sowie 4 und 5 auf Tafel 12 zu verweisen, und zwar findet sich das Gebiet stets in der Figur, die zu der in der Überschrift angegebenen Gruppe gehört. Die Polyeder entsprechender Grenzpunkte und Grenzkurven sind hier nicht mehr wie früher für sich angeführt; sie ergeben sich aber sofort durch Vergleichung der rechts und links vom Strich stehenden Reihen, wobei sich entsprechende Grenzpunkte und Kurven an gleicher Stelle der Aufzählung finden. Wir haben hier im ganzen 2.13 einander zugeordnete Gebiete polarreziproker Polyeder, während autopolare Sphenoidgruppierungen, abgesehen von dem aus zehn Tetraedern bestehenden Polyeder, nicht existieren. Wenn die Sphenoidgruppierung illusorisch wird, ist der betreffende Grenzpunkt bezw. die Grenzkurve in ( ) eingeschlossen. Das Ausgangssymbol ist am Ende der Reihe jedesmal wiederholt, auch ist, wenn die Figur einer Gruppe mehreremal die gleiche Klasse enthält, der leichteren Übersicht wegen angegeben, welche der Lage nach gemeint ist.

(1) 1. Gruppe, 1. Klasse (oberes Gebiet).

$(T) - (C_2) - (I) - C_3 - F - C_8 - (T)$.

(2) 1. Gruppe, 2. Klasse (oberes Gebiet).

$(T) - C_8 - F - C_3 - E - C_7 - (T)$.

(3) 1. Gruppe, 4. Klasse.

$(T) - C_7 - E - C_3 - C - C_6 - (T)$.

(4) 1. Gruppe, 5. Klasse.

$(T) - C_6 - C - C_3 - A - C_4 - (T)$.

(5) 1. Gruppe, 3. Klasse.

$(T) - C_4 - A - C_3 - B - C_5 - (T)$.

(1′) 1. Gruppe, 1. Klasse (unteres Gebiet).

$(D) - (C_1) - (T) - C_9 - G - C_3 - (D)$.

(2′) 2. Gruppe, 1. Klasse (unteres Gebiet).

$(D) - C_3 - G - C_{15} - M - C_1 - (D)$.

(3′) 4. Gruppe, 1. Klasse.

$(D) - C'_1 - M - C'_{21} - S - C'_3 - (D)$.

(4′) 5. Gruppe, 1. Klasse.

$(D) - C'_3 - S - C'_{23} - Q - C_1 - (D)$.

(5′) 3. Gruppe, 1. Klasse.

$(D) - C_1 - Q - C_{16} - N - C_2 - (I)$.

Für die zwischen D und I liegende Begrenzungslinie sind die Sphenoide illusorisch; es entspricht also gewissermassen die ganze Kurve C_3 dem Punkte T links.

(6) 1. Gruppe, 2. Klasse (unteres Gebiet).

$(T)—C_5—B—C_3—G—C_9—(T)$.

(7) 2. Gruppe, 2. Klasse (oberes Gebiet).

$N—C_2—O—C_{11}—E—C_3—F—C_{10}—N$.

(8) 2. Gruppe, 4. Klasse.

$O-C_2-T-C_1-H-C_{12}-C-C_3-E-C_{11}-O$.

(9) 2. Gruppe, 5. Klasse.

$H—C_1—K—C_{13}—A—C_3—C—C_{12}—H$.

(10) 2. Gruppe, 3. Klasse.

$K—C_1—L—C_{14}—B—C_3—A—C_{13}—K$.

(11) 3. Gruppe, 4. Klasse.

$T—C_1—P—C_{17}—O—C_2—T$.

(12) 4. Gruppe, 4. Klasse (oberes Gebiet).

$T—C_1—H—C_{18}—I—C_2—T$.

(13) 4. Gruppe, 5. Klasse.

$T'—C_{20}—K—C_1—H—C_{18}—I—C_{19}—T'$.

(6') 2. Gruppe, 1. Klasse (oberes Gebiet).

$(I)—C_2—N—C_{10}—F—C_3—(I)$.

(7') 2. Gruppe, 2. Klasse (unteres Gebiet).

$B—C_{14}—L—C_1—M—C_{15}—G—C_3—B$.

(8') 4. Gruppe, 2. Klasse.

$L-C_{19}-T'-C_{20}-R-C_3-S-C_{21}-M-C_1-L$.

(9') 5. Gruppe, 2. Klasse.

$R—C_{22}—P—C_1—Q—C_{23}—S—C_3—R$.

(10') 3. Gruppe, 2. Klasse.

$P—C_{17}—O—C_2—N—C_{16}—Q—C_1—P$.

(11') 4. Gruppe, 3. Klasse.

$T'—C_{20}—K—C_1—L—C_{19}—T'$.

(12') 4. Gruppe, 4. Klasse (unteres Gebiet).

$T'—C_{20}—R—C_3—I—C_{19}—T'$.

Das Symbol I ist das einzige, das sich rechts und links an identischer Stelle befindet: es charakterisiert die einzige autopolare Gruppierung.

(13') 5. Gruppe, 4. Klasse.

$T—C_1—P—C_{22}—R—C_3—I—C_2—T$.

Die Sphenoide der fünften Gruppe sind bereits in der rechten Spalte vollständig aufgeführt und es zeigt die Tabelle die lückenlose Zuordnung aller Gebiete polarreziproker Gruppierungen i-ter Gruppe k-ter Klasse und k-ter Gruppe i-ter Klasse, wonach die Gebiete der Sphenoide gleicher Gruppe und Klasse sich im Dyakishexekontaedergebiete derselben Figur finden. Damit erledigten wir die Diskussion der konvexen diskontinuierlichen zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder, soweit sie Gruppierungen von Sphenoiden darstellen und verweisen die übrigen diskontinuierlichen konvexen Polyeder in den folgenden Anhang, aus dort angegebenem Grunde.

Anhang. Die diskontinuierlichen gleicheckig-gleichflächigen Polyeder, deren Einzelkörper reguläre Polyeder erster oder höherer Art sind. Wir stellen diese Polyeder, da sie schon verschiedentlich behandelt wurden, hier nur der Vollständigkeit wegen zusammen, sowie um Gelegenheit zu finden, ihre z. T. bisher noch nicht veröffentlichten Abbildungen nach dem Modell geben zu können. Die Kombinationen regulärer Polyeder haben entweder als diskontinuierliche reguläre Körper höherer Art zu gelten, oder nur als gleicheckig-gleichflächige Polyeder. Im ersten Falle ist die innerste Zelle sowohl wie die äussere Hülle selbst ein reguläres Polyeder erster Art. Solcher Polyeder gibt es bekanntlich nur drei. a) Die autopolare Kombination der beiden Tetraeder im Hexaeder, deren Kern das reguläre Oktaeder ist (die sogenannte stella octangula Keplers), also dem Hexakisoktaedertypus angehörend. b) Die Kombination der zehn Tetraeder im regulären Dodekaeder, also dem Dyakishexekontaedertypus angehörend. Die innerste Zelle dieses oft erwähnten Polyeders ist das Ikosaeder. Je zwei Flächen verschiedener Tetraeder fallen in einer Ebene des Ikosaeders zusammen, ein diskontinuierliches Sechseck bildend; es sind die beiden Dreiecke $C_5 C_8 C_9$ und $C_6 C_{10} C_7$ in der vollständigen Figur des Ikosaeders (vergl. Fig. 6 Taf. 8), die in gleichem Sinne zu umlaufen sind, so dass der Koëffizient der inneren Zelle des Sechsecks 2 ist. In jeder Ecke des umhüllenden Dodekaeders fallen zwei Ecken verschiedener Tetraeder zusammen und bilden eine sechskantige Ecke zweiter Art des Gesamtpolyeders, das autopolar ist.[1]) Je zwei der zehn Tetraeder sind einem der fünf Hexaeder einbeschrieben, die zusammen für sich das weiter unten anzuführende gleicheckig-gleichflächige diskontinuierliche konvexe Polyeder höherer Art bilden. c) Die Hälfte dieser zehn Tetraeder, die fünf rechten bezw. fünf linken in den eben erwähnten fünf Hexaedern bilden zusammen allein ein diskontinuierliches reguläres Polyeder, dessen Kern das Ikosaeder, dessen Hülle das Dodekaeder ist.[2])

Von nur gleicheckig-gleichflächigen Polyedern, die Kombinationen regulärer Polyeder erster Art sind, sind die folgenden anzuführen. Die dem Doppelpyramidentypus zugehörenden Systeme von Tetraedern, sowie die

[1]) Vergl. V. u. V. Tafel IX, Fig. 3.
[2]) Vergl. V. u. V. Tafel IX, Fig. 11.

dem Hexakisoktaedertypus zuzuweisenden Kombinationen von sechs bezw. zwölf Tetraedern sind bereits besprochen.[1]) Im Dyakishexekontaedertypus existieren zwei einander polar zugeordnete Kombinationen von fünf Hexaedern bezw. fünf Oktaedern, die vielfach beschrieben sind. Der Kern des ersten Polyeders[2]) ist das Triakontaeder; seine Flächen in dessen vollständiger Figur (vergl. Fig. 3 Taf. 17) ist das Quadrat $C_3C_4C_6C_5$. Die Hülle ist das Dodekaeder. In jeder seiner Ecken fallen die Ecken zweier Hexaeder zusammen, so dass die Ecken des Gesamtpolyeders sechskantig von der zweiten Art sind. Die Hülle des polarreziproken aus fünf Oktaedern bestehenden Körpers[3]) ist sonach das Triakontagon, sein Kern das Ikosaeder, in dessen vollständiger Figur (vergl. Fig. 6 Taf. 8) die beiden Dreiecke $B_4B_8B_9$ und $B_5B_{10}B_6$ mit gleichem Umlaufssinn die Flächen zweier verschiedener Oktaeder sind, zusammen ein diskontinuierliches Sechseck zweiter Art bildend. Konzentrische Anordnungen von Dodekaedern oder Ikosaedern, die ein gleichflächig-gleicheckiges Polyeder darstellten, existieren nicht. Dagegen sind zwei einander polarreziproke Kombinationen von je fünf Kepler-Poinsotschen zwölfeckigen Sternzwölfflachen bezw. fünf zwölfflächigen Sternzwölfecken beschrieben worden.[4]) Der Kern beider Polyeder ist die besondere Varietät des Deltoidhexekontaeders, für welche $\sigma = 4\sin^2\varphi = \frac{2(5-\sqrt{5})}{5}$, $\tau = \frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ist. Die Hülle ist für jedes das zu diesem gleichflächigen Polyeder reziproke $(12+20+30)$-flächige 60-Eck, für dessen Kantenverhältnis sich aus der allgemein geltenden Formel $k_1 : k_3 = (1-s):(3s-\cot^2\varphi)\tan\varphi$ für $s = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ der Wert $k_1 : k_3 = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ergibt. Da Kern und Hülle reziprok sind, haben wir hier parapolare Polyeder vor uns. Diese bisher nicht abgebildeten Polyeder zeigt Taf. 26 in Fig. 10 und Fig. 4. Die zugehörigen Figuren der Grenzflächen sind in Fig. 3 Taf. 11 und Fig. 4 Taf. 13 gezeichnet. Für einen bestimmten festen inneren Kern, d. h. einen bestimmten

---

[1]) Vergl. Kap. II § 2 Nr. 7 und Kap. III § 2.

[2]) Vergl. V. u. V. Taf. XII Fig. 24.

[3]) Vergl. V. u. V. Taf. XII Fig. 6.

[4]) Vergl. hierüber die ausführliche Darstellung bei Hess, Ueber zwei konzentrische regelmässige Anordnungen von Kepler-Poinsotschen Polyedern. Marburger Berichte. 1878. Nr. 2 (Febr. — Mai).

Wert a des Deltoidhexekontaeders fallen die Ecken N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 der Grenzfläche beider Polyeder zusammen, diese besitzen also eine gemeinsame umbeschriebene Kugel. Die Koëffizienten der entsprechenden Flächenzellen in den Grenzflächen der beiden Körper und damit auch die der körperlichen Zellen stimmen natürlich nicht überein, da die Fläche des einen Körpers ein Fünfeck erster Art, die des anderen ein solches zweiter Art ist. Die Ecken des Körpers sind daher fünfkantig von der zweiten bezw. ersten Art. Die Art A des Polyeders selbst ist jedesmal 15, nämlich das fünffache der Art A des Kepler-Poinsotschen Einzelkörpers.

Wir haben damit die konvexen diskontinuierlichen gleicheckig-gleichflächigen Polyeder überhaupt erledigt, da Polyeder, deren Einzelkörper andere als die genannten regulären oder die rhombischen und quadratischen Sphenoide sind, nicht gefunden wurden. Die Betrachtungen über die nichtkonvexen Polyeder des Dyakishexekontaedertypus beginnen wir nun mit der Untersuchung der diskontinuierlichen, aus Gruppierungen von Stephanoiden bestehenden Polyeder, da diese wie die bisher behandelten Sphenoidgruppierungen einen grösseren Komplex bilden.

§ 3. Die Gruppierungen von Stephanoiden $St'_5(\frac{2}{1})$ im Dyakishexekontaedertypus.

1. Die Stephanoide $St'_5(\frac{2}{1})$ im $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Eck nach den Ecken des Hüllpolyeders. Die 120 Ecken des $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecks liegen sechsmal zu je zehn in zwölf parallelen Ebenen, die senkrecht stehen auf einer Achse G. Orientieren wir zunächst das 2.60-Eck im Raume so, dass die Achse $G_1G'_1$ senkrecht von oben nach unten verläuft, so sind die 120 Ecken[1]) in den zwölf horizontalen Ebenen die der Tabelle 156) [S. 240].

Ecken, die gleichweit vom Mittelpunkte des 2.60-Ecks liegenden Ebenen angehören, bezeichnen wir, wie die letzte Spalte angibt, als von derselben **Klasse**, wobei die Ecken zweier Grenzzehnecke des 2.60-Ecks

[1]) Die oben und unten stehenden Zahlen und Zeichen sind vorläufig nicht zu berücksichtigen; desgleichen die Spalte am linken Eingang.

selbst die Ecken erster Klasse sind.[1]) Schreiben wir das entsprechende Schema für jede der fünf anderen Achsen GG' an, so erschöpfen die Ecken jeder Klasse sämtliche Ecken des 2.60-Ecks, d. h. jede Ecke des 2.60-Ecks ist eine Ecke jeder der sechs Klassen, je nach Wahl der Achsen GG' als senkrecht orientierte „Hauptachse" des 2.60-Ecks. So ist z. B. die Ecke 1 eine Ecke erster Klasse in Bezug auf die Achse G_1, eine Ecke zweiter Klasse in Bezug auf G_2 u. s. w. Fassen wir nun die Ecken einer bestimmten Klasse für irgend eine Achse, z. B. $G_1 G'_1$ ins Auge. Die zwölf in jeder

156)

Flächen	1	2	⊙ 5	6	9	10	13	14	⊙ 17	18	Ecken
1. Gruppe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1. Klasse
2. Gruppe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	2. Klasse
3. Gruppe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	3. Klasse
4. Gruppe	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	4. Klasse
5. Gruppe	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	5. Klasse
6. Gruppe	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	6. Klasse
6. Gruppe	64	63	62	61	70	69	68	67	66	65	6. Klasse
5. Gruppe	74	73	72	71	80	79	78	77	76	75	5. Klasse
4. Gruppe	84	83	82	81	90	89	88	87	86	85	4. Klasse
3. Gruppe	94	93	92	91	100	99	98	97	96	95	3. Klasse
2. Gruppe	104	103	102	101	110	109	108	107	106	105	2. Klasse
1. Gruppe	114	113	112	111	120	119	118	117	116	115	1. Klasse
	3' ⊙ *	4'	7' *	8'	11'	12'	15' *	16'	19' ⊙ *	20'	

der beiden Parallelebenen liegenden Ecken sind die eines gleicheckigen 2.5-ecks mit abwechselnd gleichen Kanten und gleichen Winkeln. Diese 2.5-ecke der beiden Ebenen sind kongruent, aber um 36° gegen einander gedreht, sodass die Kanten erster Art des einen den Kanten zweiter Art des anderen parallel laufen und umgekehrt. Diese beiden 2.5-ecke sind also die Deckflächen eines unterbrochen-kronrandigen $(2+2.5)$-flächigen $2.(2.5)$-Ecks, dessen Hauptachse die Achse $G_1 G'_1$ ist. In Bezug auf diese Hauptachse lassen sich demnach die 120 Ecken des 2.60-Ecks als die von sechs solchen kronrandigen $2.(2.5)$-Ecken auffassen. Nun sind, wie früher abgeleitet wurde, einem solchem Polyeder zwei Stephanoide $St'_5\,(\frac{2}{1})$ einschreibbar,

[1]) Dieser Begriff der Klasse ist also verschieden von dem bisherigen.

von denen das eine mit dem anderen durch Drehung um einen gewissen Winkel α um die Hauptachse G zur Deckung kommt. Fassen wir die 120 Ecken als die einer bestimmten Klasse i auf, so sind sie Ecken von sechs kronrandigen 2.(2.5)-Ecken und es lassen sich somit dem 2.60-Eck zwölf solcher $St'_5\binom{2}{1}$ einschreiben. Es existieren somit im 2.60-Eck sechs verschiedene Gruppierungen von je zwölf $St'_5\binom{2}{1}$, die wir nach der charakteristischen Ecke als solche erster bis sechster Klasse bezeichnen. Ist der soeben mit α bezeichnete Winkel 36^0, so sind die Deckflächen des kronrandigen Polyeders reguläre Zehnecke, und die beiden ihm einbeschriebenen $St'_5\binom{2}{1}$ bilden ein diskontinuierliches $St_{10}\binom{4}{2}$ nach der früheren Bezeichnung. Auf diesen speziellen Fall kommen wir im nächsten § zurück. Wesentlicher ist das Vorkommnis $\alpha = 0$. Dann fallen die beiden $St'_5\binom{2}{1}$ zusammen, und die Gruppierung besteht nur noch aus sechs $St'_5\binom{2}{1}$. Das geschieht bei den verschiedenen Klassen für gewisse spezielle gleicheckige Polyeder des Typus. Tritt nämlich an Stelle des 2.60-Ecks ein 12.5-Eck, 20.3-Eck oder 60-Eck,[1]) so reduzieren sich die zwölf Stephanoide auf sechs, oder es werden die zwölf Stephanoide einer Klasse identisch mit den zwölf Stephanoiden einer anderen Klasse. Da die Gesamtzahl 120 der Flächen dabei erhalten bleibt, die Zahl der Ecken aber sich auf die Hälfte 60 reduziert, so fallen dann je zwei Ecken verschiedener Stephanoide in einer Ecke des Hüllpolyeders zusammen und bilden daselbst eine diskontinuierliche achtkantige Ecke der achten Art. Die genannten möglichen Gruppierungen von Stephanoiden $St'_5\binom{2}{1}$ zerfallen also in Bezug auf die Ecken in drei Gattungen: a) zwölf Stephanoide mit getrennten Ecken, d. h. 120 Flächen und Ecken; b) zwölf Stephanoide mit zu zwei zusammenfallenden Ecken, d. h. 120 Flächen und 60 Ecken; c) sechs Stephanoide mit getrennten Ecken, d. h. 60 Flächen und 60 Ecken. Die Art A des gesamten diskontinuierlichen von Stephanoiden gebildeten nichtkonvexen Polyeders, dessen Oberfläche wie Inhalt Null ist, da dies für die Teilpolyeder gilt, ist gleich der Artzahl des Einzelstephanoids mal deren Anzahl, also für die Polyeder der Fälle a) und b) gleich 120, für den Fall c) gleich 60, d. h. in jedem Falle gleich der Hälfte der Kanten des Nullpolyeders. — Um nun die Einteilung dieser Stephanoidgruppierungen

[1]) Vom Triakontagon und Dodekaeder werde einstweilen noch abgesehen.

nach den Ecken, d. h. ihre Klassen, auch für die speziellen Hüllkörper übersehen zu können, halten wir für das allgemeine Hüllpolyeder eine erste Grenzfläche jedes der Stephanoide fest, deren Hauptachse die Achse G_1 ist. Wir wählen immer diejenige Fläche, deren vier Ecken die in den Spalten ⊙ der Tabelle 156) sind, wofür sich der Grund später ergeben wird. Die erste Spalte der folgenden Übersicht 157) enthält dann die Ecken dieser Grenzfläche für die sechs Klassen im (12 + 20 + 30)-flächigen 2.60-Eck und gibt, soweit die Modelle solcher Polyeder dargestellt sind, die betreffenden Figuren der Tafeln 21—29 an.

157)

Klasse	(12 + 20 + 30)-fl. 2.60-Eck	$k_1 = 0$ (12 + 20)-fl. 12.5-Eck	$k_2 = 0$ (12 + 20 + 30)-fl. 60-Eck	$k_3 = 0$ (12 + 20)-fl. 20.3-Eck	$k_1 = k_3 = 0$ Triakontagon	$k_2 = k_3 = 0$ Dodekaeder
I	9. 3. 116. 114 (Taf. 29 Fig. 1)	3. 6. 47. 50 6 St. (Taf. 26 Fig. 1)	3. 5. 90. 56 6 St. (Taf. 26 Fig. 3)	2. 8. 39. 45	4. 3. 25. 22 6 St.	
II	19. 13. 106. 104 (Taf. 29 Fig. 2)	7. 10. 39. 42 6 St. (Taf. 26 Fig. 2)	11. 15. 53. 55	12 St.	(Taf. 24 Fig. 7)	3. 2. 14. 18 6 St. (Taf. 24 Fig. 1)
III	29. 23. 96. 94 (Taf. 28 Fig. 2)	8. 18. 30. 36	12 St.	18. 47. 38. 44 6 St. (Taf. 26 Fig. 6)	5. 11. 17. 18	
IV	39. 33. 86. 84 (Taf. 29 Fig. 4)	12 St.	25. 16. 42. 45	17. 48. 37. 43 6 St. (Taf. 28 Fig. 1, Taf. 26 Fig. 7)	6 St. (Taf. 26 Fig. 9)	
V	49. 43. 76. 74 (Taf. 29 Fig. 3 Taf. 28 Fig. 5)	16. 24. 20. 27 12 St. (Taf. 29 Fig. 6)	12 St.	19. 49. 15. 42[1] 12 St.	—	9. 5. 10. 8 6 St. (Taf. 24 Fig. 1)
VI.	59. 53. 66. 64		24. 30. 41. 44 6 St. (Taf. 24 Fig. 2, Taf. 26 Fig. 8)	20. 50. 16. 41	—	

In dieser Tabelle sind die folgenden Tatsachen niedergelegt. Für das (12 + 20)-flächige 12.5-Eck[2]) reduzieren sich die Ecken der ersten und

[1]) Aus den Ecken fünfter Klasse des allgemeinen Stephanoids gehen die oberen, aus denen sechster Klasse die unteren Ecken desselben Stephanoids im 20.3-Eck hervor.

[2]) Die Eckenzahlen der Spalten 2—6 der Tabelle ergeben sich natürlich aus denen von Spalte 1 in Verbindung mit Note VI.

zweiten Klasse in einer Ebene je auf fünf; an Stelle der $(5+5)$-ecke treten reguläre gegen einander gedrehte Fünfecke und es ergibt sich in beiden Fällen eine Gruppierung von sechs Stephanoiden $St'_5\binom{2}{1}$. Die Ecken dritter und vierter Klasse, sowie die fünfter und sechster Klasse fallen zusammen, und man erhält Gruppierungen von je zwölf $St'_5\binom{2}{1}$, bei denen je zwei Ecken zweier verschiedener, d. h. zu verschiedenen G als Hauptachse gehörender Stephanoide zusammenfallen, diskontinuierliche Ecken achter Art bildend. Für jedes $(12+20+30)$-flächige 60-Eck reduzieren sich die Ecken der ersten und sechsten Klasse je auf fünf, so dass man sechs $St'_5\binom{2}{1}$ erhält. Für je zwei andere benachbarte Klassen fallen die Ecken zusammen und es ergeben sich zwölf St' der geschilderten Art. Für ein $(12+20)$-flächiges 20.3-Eck fallen die Ecken erster und zweiter sowie fünfter und sechster Klasse zusammen, wodurch sich Gruppierungen von zwölf $St'_5\binom{2}{1}$ mit diskontinuierlichen Ecken ergeben. Die Ecken dritter und vierter Klasse bilden reguläre Fünfecke und es ergeben sich in beiden Fällen Gruppierungen von je sechs $St'_5\binom{2}{1}$. Tritt an Stelle des allgemeinsten Polyeders des Typus das Triakontagon, so hat man die Zahlen der fünften Spalte. Das diskontinuierliche aus sechs $St'_5\binom{2}{1}$ gebildete Polyeder hat jetzt nur noch 30 Ecken, in derer jeder zwei Ecken zweier, verschiedenen Hauptachsen angehörenden, Stephanoide zusammenfallen. Die Zahl der Grenzflächen beträgt noch 60. Während für die vorhergehenden speziellen Polyeder s und t des Hüllpolyeders variabel sind, und nur den bekannten Bedingungen genügen, ist für das Triakontagon s und t konstant, d. h. es ergeben sich zwei bestimmte feste Gruppierungen von sechs $St'_5\binom{2}{1}$. Die Ecken fünfter und sechster Klasse fallen für das Triakontagon in eine Ebene, und die St' werden illusorisch. Ist die Hülle des Polyeders das Dodekaeder, so ergeben die drei ersten Klassen, wie die drei übrigen für sich je eine Gruppierung von sechs Stephanoiden, die aber, wie später gezeigt wird, völlig in ein eigentümliches Nullpolyeder zusammenfallen.

2. **Die Gruppen der Stephanoide $St'_5\binom{2}{1}$ nach den Flächen des Dyakishexekontaeders.** Die sechs Gruppierungen von je zwölf Stephanoiden, die sich einem 2.60-Eck einschreiben lassen, bilden jede ein diskontinuierliches nichtkonvexes gleicheckig-gleichflächiges Polyeder, dessen gleicheckige

Hülle eben das 2.60-Eck, dessen gleichflächiger Kern aber nichts anderes sein kann, als ein dem Dyakishexekontaedertypus angehörendes gleichflächiges Polyeder, d. h. bei 120 Flächen ein Dyakishexekontaeder selbst. Dies folgt aus der Lage der Flächen der Gruppierung gegen die Symmetrieebenen und Achsen des 2.60-Ecks. Es handelt sich nun darum, direkt die sechs möglichen Fälle aus dem inneren Kern abzuleiten, d. h. nach der bisherigen Auffassung, die die Flächen des Polyeders als erstes Einteilungsprinzip nahm, die sechs Gruppen der Stephanoidgruppierungen aufzustellen. Orientiert man das Dyakishexekontaeder im Raume so, dass die fünfzählige Achse $G'_1 G_1$ senkrecht von unten nach oben verläuft, die dreizählige Achse C_1 auf den Beschauer zu nach vorn, so dass die Symmetrieebene durch die Achsen $G_1\ C_1\ B_3\ C_4\ G'_6\ B'_7$ und ihre Gegenachsen zugleich Symmetrieebene des Beschauers ist, so ist die Stellung gegeben, die bei den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt ist. Die Ebene senkrecht zur Achse G_1 durch den Mittelpunkt des Dyakishexekontaeders werde als eine Hauptebene bezeichnet. Solcher enthält das Polyeder also sechs, senkrecht zu jeder Achse GG'; in jeder Hauptebene verlaufen von den Achsen nur je sechs Achsen B. Schreibt man die 120 Flächen in der Weise an, wie es Tabelle 156) zeigt, so bilden immer die Flächen derselben Reihe (von links nach rechts) gleiche Winkel mit der Hauptebene der Achse G_1. In jeder Reihe befinden sich fünf rechte und fünf linke Flächen, und zwei Flächenreihen, von denen die eine das um einen gewissen Winkel um die Achse G gedrehte Spiegelbild der anderen gegen die Hauptebene ist, enthalten die Flächen derselben Gruppe. Beachtet man nun nur die Flächen einer bestimmten Gruppe, z. B. der ersten, und denkt sich alle übrigen Flächen aus dem Polyeder getilgt, so bilden diese 2.10 Flächen für sich die Grenzflächen eines gleichflächigen unterbrochen-kronrandigen (2+2.5)-eckigen 2.2.5-Flaches, dessen Hauptachse die Achse $G_1 G'_1$ ist. Genau dasselbe gilt nun für die Flächen erster Gruppe in Bezug auf die übrigen fünf Hauptebenen des Dyakishexekontaeders und da damit alle Flächen des Polyeders erschöpft sind, hat man den Satz: die 2.60 Flächen des Dyakishexekontaeders sind die von sechs gleichflächigen unterbrochen-kronrandigen (2+2.5)-eckigen 2.2.5-Flachen, deren Hauptachsen die Achsen G sind. Nun gehört aber jede Fläche gleichzeitig allen sechs

Gruppen an, d. h. die Flächen des Dyakishexekontaeders sind sechsmal die von je sechs der genannten gleichflächigen Polyeder. Jedes dieser ist der Kern für zwei Stephanoide $St'_5\binom{2}{1}$, also ist das Dyakishexekontaeder sechsmal gleichflächiger Kernkörper für Gruppierungen von je zwölf Stephanoiden, deren in Summa 120 Ecken, wieder aus Gründen der Symmetrie, die Ecken von gleicheckigen (12 + 20 + 30)-flächigen 2.60-Ecken sind. Wir erhalten also auch hier die bereits nach den Ecken betrachteten Stephanoide erster bis sechster Klasse, die jetzt als Stephanoide der ersten bis sechsten Gruppe aufgefasst sind, so dass nur noch zu untersuchen bleibt, welcher der Klassen die Stephanoide einer bestimmten Gruppe zugehören. Man denke sich nun in ein vorgelegtes 2.60-Eck die Stephanoide der sechs Klassen mit der Hauptachse G_1 einbeschrieben und dem gemeinsamen Hüllkörper die Kugel umbeschrieben. Man erhält dann das jedem Stephanoide polarreziproke, indem man in seinen 2.10 Ecken an die Kugel die Tangentialebenen legt, die das 2.2.5-Flach, nämlich den Kern des reziproken Stephanoides bilden. Die genannten Tangentialebenen durch die Ecken eines Stephanoides bestimmter Klasse schneiden sämtlich die Hauptebene von G_1 unter gleichem (spitzen) Winkel, da diese Ecken sich auf einem (kleinen) Kugelkreise parallel dieser Hauptebene befinden. Für die sechs Kugelkreise, die den Ecken der sechs Klassen zukommen, ist dieser Winkel verschieden und zwar nimmt im allgemeinen der Winkel mit wachsender Klassenzahl zu, so dass die Tangentialebenen in den Ecken eines Stephanoides erster Klasse den kleinsten, die in den Ecken eines Stephanoides sechster Klasse den grössten Winkel mit der Hauptebene bilden. Es bilden aber die 2.10 Flächen gleicher Gruppe des Dyakishexekontaeders ebenfalls gleiche Winkel mit der Hauptebene des Polyeders in Bezug auf G_1 und zwar die Flächen höherer Gruppe im allgemeinen den grösseren Winkel. Jedenfalls gilt stets: Das polarreziproke eines Stephanoides i-ter Klasse ist ein Stephanoid i-ter Gruppe und umgekehrt. Beachtet man nun die Klassenstephanoide im 2.60-Eck in Bezug auf die Neigungswinkel ihrer Ebenen gegen die Hauptebene des Polyeders, so ersieht man leicht, dass diese Neigungswinkel mit wachsender Klasse im allgemeinen abnehmen, d. h. es gilt der vorläufige Satz: Ein Stephanoid i-ter Klasse ist „normalerweise“ zugleich ein Stephanoid $(7-i)$-ter Gruppe [und ein Stephanoid i-ter Gruppe ist zugleich ein Stephanoid $(7-i)$-ter Klasse]. Dieser Satz gilt dann in dieser vorläufigen Form ersichtlich auch für die Gesamtgruppierungen der Stephanoide, so lange natürlich Kern und Hülle des Polyeders allgemein sind. Wir bestimmen für die sechs Gruppen im folgenden zunächst für jede Gruppierung eine erste Fläche des Stephanoids und ihre Ecken. Bedeuten die Zahlen der Tabelle 156) gemäss dem linken Eingang die Flächen des Dyakishexekontaeders, so sei die Fläche der ersten Spalte (1, 11, 21, 31, 41, 51) die erste Fläche der sechs Stephanoide, wobei das Dyakishexekontaeder im Raume orientiert ist, wie oben angegeben wurde. Die Ebenen, deren Spuren auf der genannten ersten Ebene die erste Fläche des Stephanoids erzeugen, sind unter * abzulesen. Bedeuten die Zahlen der Tabelle zugleich die Eckenzahlen des ebenso im Raume orientierten 2.60-Ecks, so sind die Ecken der so bestimmten Stephanoidfläche in der betreffenden Klasse unter ⊙ abzulesen (soweit der obige vorläufige Satz gültig ist) gemäss den Zahlen der Ecken der obersten und untersten Aussenreihe, die nichts anderes sind, als die Zahlen des früher bei Besprechung der Stephanoide im $(2+2.5)$-flächigen $2.2.5$-Eck aufgestellten Schemas (vergl. Kap. II § 3 S. 74). Dann hat man folgende vorläufige Übersicht:[1])

Die erste Gruppe der $St'_5\binom{2}{1}$. Die Fläche 1 trägt die Spuren von 114, 112, 116, 118 und hat die Ecken sechster Klasse: 59 (1, 116, 118); 53 (1, 112, 114); 66 (1, 114, 118); 64 (1, 112, 116), wobei die in ( ) gesetzten Zahlen drei der Ebenen geben, durch deren Schnitt die Ecke entsteht.

Die zweite Gruppe der $St'_5\binom{2}{1}$. Die Fläche 11 trägt die Spuren von 104, 102, 106, 108 und hat die Ecken fünfter Klasse: 49 (11, 106, 108); 43 (11, 104, 102); 76 (11, 108, 104); 74 (11, 106, 102).

Die dritte Gruppe der $St'_5\binom{2}{1}$. Die Fläche 21 trägt die Spuren von 94, 92, 96, 98 und hat die Ecken vierter Klasse: 39 (21, 98, 96); 33 (21, 94, 92); 86 (21, 98, 94); 84 (21, 96, 92).

Die vierte Gruppe der $St'_5\binom{2}{1}$. Die Fläche 31 trägt die Spuren von 84, 82, 86, 88 und hat die Ecken dritter Klasse: 29 (31, 88, 86); 23 (31, 84, 82); 96 (31, 88, 84); 94 (31, 86, 82).

---

[1]) In dieser Form bedürfen wir der Übersicht für die später folgende analytische Behandlung.

Die fünfte Gruppe der $St'_5\binom{2}{1}$. Die Fläche 41 trägt die Spuren von 74, 72, 76, 78 und hat die Ecken zweiter Klasse: 19 (41, 78, 76); 13 (41, 74, 72); 106 (41, 78, 74); 104 (41, 76, 72).

Die sechste Gruppe der $St'_5\binom{2}{1}$. Die Fläche 51 trägt die Spuren von 64, 62, 66, 68 und hat die Ecken erster Klasse: 9 (51, 68, 66); 3 (51, 64, 62); 116 (51, 68, 64); 114 (51, 66, 62).

Um nun die Verhältnisse für die speziellen Kernkörper des Dyakishexekontaedertypus übersichtlich darzustellen, braucht man nur die Tabelle 157) einer anderen Deutung zu unterwerfen. Mit Rücksicht auf die Darstellung der Flächen der Polyeder in den vollständigen Figuren der gleichflächigen Kerne soll jedoch hier ein abweichendes Verfahren eingeschlagen werden. Für alle sechs Gruppen in der folgenden Tabelle 158) werde stets die Fläche 1) des Kernpolyeders als Zeichenebene gewählt und die Spuren derjenigen vier Flächen angemerkt, die auf ihr die erste Fläche des Stephanoides erzeugen. Auch für die speziellen gleichflächigen Kernpolyeder gibt 158) stets die Spuren in der Ebene, die als Zeichenebene verwandt ist [siehe Tabelle 158) S. 248].

Zu dieser Tabelle ist folgendes zu bemerken. Für die speziellen inneren Kerne können verschiedene Fälle eintreten. Zunächst fallen je zwei Nachbarflächen des Dyakishexekontaeders dann in eine Ebene und die in ihnen befindlichen Stephanoidflächen liegen in dieser Ebene entweder getrennt, symmetrisch gegen die Symmetrielinie der Fläche des speziellen Kernes, oder sie fallen zusammen, ein einziges symmetrisch zur genannten Linie liegendes überschlagenes Viereck bildend. Im ersten Falle haben wir ein diskontinuierliches aus zwölf Stephanoiden bestehendes Polyeder, das nach seinen Flächen gleichzeitig zwei Gruppen angehört. Da es 120 Ecken besitzt, gehört es einer bestimmten Klasse an. [Es ist in 158) immer in der $(7-i)$-ten Gruppe angeführt, wenn es der i-ten Klasse zugehört]. Im zweiten Falle besteht das Polyeder aus sechs Stephanoiden und es ist die Klassenzahl im allgemeinen durch Vergleichung der Tabelle 158) mit der Tabelle 157) leicht festzustellen. Da aber die zweite Gruppe Gruppierungen von sechs Stephanoiden aufweist, wenn der Kern des Polyeders ein Pentakisdodekaeder ist, solche Gruppierungen fünfter Klasse aber nicht existieren, so ergibt sich schon hieraus, dass die Zuordnung von Gruppe

158)

Gruppe	Dyakishexekontaeder	Pentakisdodekaeder	Kerne. Deltoidhexekontaeder	Triakisikosaeder	Triakontaeder	Ikosaeder
I	114. 112. 116. 118	58. 50. 47. 55 6 St.	56. 57. 58. 59 6 St. (Taf. 24 Fig. 2)	46. 58. 40. 34	22. 26. 25. 29 6 St. (Taf. 26 Fig. 8)	15. 18. 14. 19
II	92. 55. 46. 89 (Taf. 29 Fig. 6)	53. 41. 40. 52 6 St.	26. 24. 43. 51 (Taf. 29 Fig. 3)	51. 27. 35. 55 (Taf. 28 Fig. 5)	27. 23. 24. 28	(Taf. 24 Fig. 1) 12. 11. 16. 15
III	80. 37. 59. 107	48. 25. 16. 39 (Taf. 29 Fig. 4)	28. 42. 30. 46	42. 48. 45. 52 6 St. (Taf. 28 Fig. 1)	24. 12. 13. 25 6 St. (Taf. 26 Fig. 7)	17. 13. 16. 19
IV	105. 42. 24. 61.	42. 17. 28. 49	41. 10. 20. 48 (Taf. 28 Fig. 2)	24. 19. 28. 39 6 St. (Taf. 26 Fig. 6, 9)	22. 10. 11. 23	2. 4. 12. 14
V	69. 19. 31. 94	44. 7. 5. 36 (Taf. 29 Fig. 2)	15. 44. 19. 49	11. 3. 43. 26	20. 4. 2, 18 Parallele Ebenen	(Taf. 24 Fig. 1) 3. 4. 17. 18
VI	87. 30. 13. 72	33. 4. 10. 45	6. 9. 39. 31 6 St. (Taf. 26 Fig. 1, 2, 3 Taf. 24 Fig. 7)	9. 54. 17. 32 (Taf. 29 Fig. 1)	21. 5. 3. 19	2. 3. 11. 13

und Klasse einer weiteren Untersuchung bedarf. Diejenigen Polyeder nämlich, die bei allgemeinstem Kerne nach den Flächen einer bestimmten Gruppe eingefügt werden können, deren Hülle aber ein spezielles gleicheckiges Polyeder des Typus ist, so dass sie nach den Ecken gleichzeitig zwei Klassen angehören, bilden den Übergang zwischen den Polyedern einer bestimmten Gruppe zweier verschiedener Klassen, so dass das Gebiet der konvexen Dyakishexekontaeder für jede Gruppe der Stephanoide durch gewisse Kurven wiederum in Teilgebiete zerlegt wird, deren Polyeder verschiedenen Klassen angehören. Die Polyeder i-ter Gruppe k-Klasse sind dann wieder die polarreziproken zu denen k-ter Gruppe i-ter Klasse, doch ist die Zuordnung infolge der Gültigkeit des früher angeführten vorläufigen Satzes hier eine wesentlich leichter zu übersehende als die der Sphenoidgruppierungen.

Die Gruppierungen der $St'_5\binom{2}{1}$, deren Kern ein spezielles Polyeder des Typus ist, bedürfen einer weiteren Bemerkung, falls sich zwei getrennte

Vierecke als Fläche in der Zeichenebene ergeben, also die Gruppierung noch aus zwölf $St'_5\binom{2}{1}$ besteht. Zwei solche überschlagene Vierecke werden sich im allgemeinen überlagern und ihre Flächen sich teilweise tilgen. Dadurch ergeben sie wegen ihrer symmetrischen Lage ein aus positiven und negativen kongruenten Zellen entgegengesetzten Vorzeichens bestehendes diskontinuierliches nichtkonvexes Achteck, das als Grenzfläche des entstehenden Polyeders zu gelten hat. In diesem Sinne ist die gesamte Gruppierung von zwölf $St'_5\binom{2}{1}$ als ein von 60 diskontinuierlichen Achtecken des Inhalts Null begrenztes Nullpolyeder aufzufassen, für welches die Artzahl der 60 Flächen $a = 4$, die Artzahl der 120 vierkantigen Ecken $\alpha = 4$, die Summe der überstumpfen Kantenwinkel $\Sigma\varkappa = 60.4$ und die Zahl der Kanten $K = 240$ ist, so dass $2A = 60.4 + 120.4 - 60.4 - 240 = 240$, also A ungeändert $= 120$ ist.[1])

Ist der Kern der Gruppierung das Triakontaeder, so sind nur zwei aus je sechs $St'_5\binom{2}{1}$ bestehende Polyeder möglich. Je zwei Flächen verschiedener Stephanoide zweier Gruppen fallen in eine Ebene und bilden ein diskontinuierliches Achteck, das bei einem der Polyeder aus zwei völlig getrennten Vierecken besteht. Wir kommen auf dieses Polyeder, sowie dasjenige, dessen Kern das Ikosaeder, dessen Hülle das Dodekaeder ist, und dessen Fläche ein von drei überschlagenen Vierecken eigentümlicher Lage gebildetes diskontinuierliches Sechseck ist, ausführlich zurück, und wenden uns jetzt zur systematischen Betrachtung der Polyeder der sechs Gruppen. Dabei legen wir der analytischen Untersuchung das gleiche Koordinatensystem wie früher zu Grunde. Da aber die Hauptachse G der Stephanoide in keine Koordinatenachse fällt, so werden die zu diskutierenden Werte und Gleichungen hier eine kompliziertere Gestalt annehmen, wie bisher.

3. **Die erste Gruppe der Stephanoide** $St'_5\binom{2}{1}$. Ehe wir zur Diskussion der Stephanoide der ersten Gruppe übergehen können, müssen wir die Stephanoide sechster Klasse, zu denen wir sie vorläufig normalerweise rechneten, einer weiteren Betrachtung unterziehen. Es zerfallen nämlich die

[1]) Diese eigentümlichen Polyeder sind bei Modellierung der Einzeltypen besonders berücksichtigt, zumal der Klassencharakter der Stephanoidgruppierungen an ihnen ebenso zu erkennen ist, wie an den mühsamer darzustellenden allgemeinsten Polyedern.

$(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecke in Bezug auf die Ecken sechster Klasse in zwei verschiedene Ordnungen, je nachdem von den beiden Ebenen durch die Ecken der beiden Reihen

$$\begin{array}{cccccccccc} 51, & 52, & 53, & 54, & 55, & 56, & 57, & 58, & 59, & 60, \\ 64, & 63, & 62, & 61, & 70, & 69, & 68, & 67, & 66, & 65, \end{array}$$

die eine oder die andere über oder unter dem Zentrum des gleicheckigen Polyeders verläuft. Wir sprechen demgemäss auch von Ecken sechster Klasse der ersten oder zweiten Ordnung, je nachdem die erste oder zweite Reihe der genannten Ecken der über dem Zentrum gelegenen Ebene angehört. Den Übergang von den 2.60-Ecken erster Ordnung zu denen zweiter Ordnung bilden alle die 2.60-Ecke, für welche die 2.10 Ecken sämtlich in einer Ebene durch das Zentrum des Polyeders senkrecht zur Achse G liegen. Für solche 2.60-Ecke werden offenbar die Stephanoide sechster Klasse illusorisch und die analytische Bedingung hierfür ist zunächst abzuleiten. Wählen wir der leichteren Rechnung wegen an Stelle der angeführten 2.10 Ecken sechster Klasse die Reihen, denen die Ecke 1) mit angehört, so ist die Bedingung für das Verschwinden der Stephanoide sechster Klasse darin ausgesprochen, dass die vier Ecken 1), 2), 20), 30) in einer Ebene liegen. Da die Koordinaten dieser Ecken x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; $-x_1, -y_1, z_1$; $-x_2, -y_2, z_2$ sind, so reduziert sich die bekannte Relation für die Lage der vier Punkte in einer Ebene auf die Gleichung: $(x_2 y_1 - x_1 y_2).(z_1 - z_2) = 0$. Nun ist für das 2.60-Eck $z_1 \mp z_2$, also ist $x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0$. Drückt man hierin die Koordinaten durch die Kanten des Polyeders aus, setzt also $x_1 = \frac{k_1}{2}$, $y_1 = \frac{k_3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 \cot\varphi)$, $y_2 = \frac{k_2 + k_3}{2}$, so kommt $k_2(k_1 - k_3 \cot\varphi) = 0$. Da nicht allgemein $k_2 = 0$ ist, denn nicht alle 60-Ecke können der Bedingung genügen, so findet man $k_1 = k_3 \cot\varphi$. Nun ist $k_1 : k_3 = (1-s)\frac{\cot^2\varphi}{\sqrt{5}} : (t - s\cos^2\varphi)$. In Verbindung mit der vorigen Gleichung findet man hieraus: $t = \cos^2\varphi$, $s =$ beliebig. Es ist aber, wenn man wie früher s und t als Koordinaten in der Ebene deutet (vergl. Fig. 7 Taf. 12), $t = \cos^2\varphi$ die Gleichung einer Geraden L_0 durch den Triakontagonpunkt, die parallel der s-achse verläuft und die 60-Ecks-gerade C'_3 im Punkte P für $s = \frac{1 + \cot^2\varphi}{4} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} = 0{,}9045$ schneidet. Da nun ersichtlich für das Ikosaeder als gleicheckiges

Polyeder die Ecken sechster Klassen von der ersten Ordnung, für das Dodekaeder von der zweiten Ordnung sind, so gehören die 2.60-Ecke für Werte s, t über der Geraden L_0 zur ersten, die unter ihr befindlichen zur zweiten Ordnung und man liest aus der Figur dann ab: Für alle 12.5-Ecke sind die Ecken sechster Klasse von der ersten Ordnung, für alle 20.3-Ecke sind die Ecken sechster Klasse von der zweiten Ordnung, während die 60-Ecke beiden Ordnungen angehören können.

Wir bestimmen nun als erste Ecke des Stephanoides $St'_5\,(^2_1)$ der ersten Gruppe den Schnittpunkt der Flächen 1), 112), 114) des Dyakishexekontaeders. Man findet aus den Gleichungen

$$\begin{array}{ll} (1) & a_1 x + b_1 y + c_1 z - d = 0, \\ (112) & a_2 x - b_2 y - c_2 z - d = 0, \\ (114) & b_5 x - c_5 y - a_5 z - d = 0, \end{array}$$

für die Koordinaten die Werte:

$$x = \frac{m''}{n} d, \quad y = \frac{m}{n} d, \quad z = \frac{m'}{n} d,$$

worin:

$$159^a)\qquad m = c_2(a_1 - b_5) + a_5(a_2 - a_1) + c_1(a_2 - b_5),$$

$$159^b)\qquad m' = b_2(b_5 - a_1) + b_1(b_5 - a_2) + c_5(a_1 - a_2),$$

$$159^c)\qquad m'' = b_2(a_5 + c_1) - c_5(c_2 + c_1) + b_1(a_5 - c_2),$$

und

$$n = a_1(b_2 a_5 - c_2 c_5) + a_2(b_1 a_5 - c_1 c_5) + b_5(b_2 c_1 - b_1 c_2) \text{ ist.}$$

Da für die Formeln von s und t in den Koordinaten der Ecken (vergl. Kap. IV § 1 Nr. 8) nur die Verhältnisse der Koordinaten in Frage kommen, so unterlassen wir stets die weitere Bestimmung von n. Mit Einführung der Werte der a_i, b_i, c_i als Funktionen von σ und ϑ nehmen die Gleichungen 159) nach längerer Rechnung die Form an:

$$160^a)\qquad m = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}\cot\varphi + \sigma\vartheta^2\cot\varphi - \sigma^2\vartheta\cot\varphi - 2\vartheta^2\tan\varphi + \sigma\vartheta\cot^2\varphi - \frac{\sigma^2}{2},$$

$$160^b)\qquad m' = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}\cot^2\varphi + \sigma\vartheta^2\cot^2\varphi + \sigma^2\vartheta - \sigma\vartheta\tan^3\varphi - 2\vartheta^2 - \frac{\sigma^2}{2}\tan^2\varphi,$$

$$160^c)\qquad m'' = -\sigma^2\vartheta\tan\varphi - 2\sigma\vartheta\tan^2\varphi + \sigma^2.$$

Nun ist aber zu beachten, dass die gefundene Ecke sowohl eine Ecke sechster Klasse erster Ordnung wie auch sechster Klasse zweiter Ordnung sein kann.

a) Für den ersten Fall lesen wir aus 156) ab, dass die erste Fläche des Stephanoides die Ecken 59 (1, 116, 118); 53 (1, 112, 114); 66 (1, 114, 118); 64 (1, 112, 116) besitzt, wie sie in Nr. 2 dieses § angegeben waren. Es sind also die oben bestimmten Koordinaten die der Ecke 53), nämlich z_1, $-x_1$, y_1 und wir finden also:

$$x_1 = \frac{-m}{n} d, \quad y_1 = \frac{m'}{n} d, \quad z_1 = \frac{m''}{n} d.$$

Danach ergibt sich für die Parameter s und t des Hüllpolyeders der Stephanoidgruppierung nach der Formel 81) S. 182:

$$161) \quad \begin{cases} s = \dfrac{m''}{-m \tan^2 \varphi + m''}, \\ t = \dfrac{m' \tan \varphi + m''}{-m \tan^2 \varphi + m''} \cos^2 \varphi. \end{cases}$$

b) Für den zweiten Fall aber hat die erste Fläche des Stephanoides, wie nach einiger Überlegung aus 156) zu erschliessen ist, die Ecken 67 (1, 116, 118); 63 (1, 112, 114); 60 (1, 114, 118); 52 (1, 112, 116) und die berechneten Koordinaten sind die der Ecke 63), nämlich z_1, x_1, $-y_1$, wonach

$$x_1 = \frac{m}{n} d, \quad y_1 = \frac{-m'}{n} d, \quad z_1 = \frac{m''}{n} d \text{ ist.}$$

Dann aber ergibt sich für die Parameter s und t der Hülle der Stephanoidgruppierungen:

$$162) \quad \begin{cases} s = \dfrac{m''}{m \tan^2 \varphi + m''}, \\ t = \dfrac{-m' \tan \varphi + m''}{m \tan^2 \varphi + m''} \cos^2 \varphi. \end{cases}$$

Ist nun der Kern der Gruppierungen der $St'_5 \binom{2}{1}$ ein Pentakisdodekaeder oder ein Deltoidhexekontaeder, so handelt es sich in beiden Fällen nur um sechs $St'_5 \binom{2}{1}$, wie die Tabelle 158) zeigt. Es ergibt aber dann 157), dass immer die Hülle ein $(12+20+30)$-flächiges 60-Eck sein muss mit Ecken sechster Klasse.[1]) Ist dagegen die Hülle ein 20.3-Eck oder 12.5-Eck, so fallen die Stephanoide sechster Klasse mit solchen der fünften Klasse zu-

[1]) Der analytische Beweis folgt später.

sammen. Um also das Gebiet der konvexen Dyakishexekontaeder (vergl. Fig. 2 Taf. 13) in Teilgebiete für Stephanoide sechster und fünfter Klasse zu zerlegen, müssen wir zunächst diejenige Kurve K_1 bestimmen, für deren σ, τ sich die Polyeder mit 20.3-eckiger Hülle ergeben. Die Gleichung dieser Kurve ist $s = \frac{t}{\cos^2\varphi}$. **Für beide Ordnungen** der sechsklassigen Polyeder ist dann, wie sich aus den Gleichungen 161) und 162) ergibt, $m' = 0$. Da für das Ikosaeder $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $a_1 = a_2$ ist, so folgt aus 159^b) $m' = 0$, d. h. die gesuchte Kurve K_1 geht durch den Ikosaederpunkt I. Bestimmt man den Schnittpunkt der Kurve K_1, deren ausgeschriebene Gleichung

$$\frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}\cot^2\varphi - \sigma\vartheta^2\cot^2\varphi - \sigma^2\vartheta + \sigma\vartheta\tan^3\varphi + 2\vartheta^2 + \frac{\sigma^2}{2}\tan^2\varphi = 0$$

ist, mit der Geraden $\sigma = 1$, so ergibt sich für ϑ die Gleichung $\vartheta^2 - 4\vartheta\sin^2\varphi + \sin^2\varphi = 0$ und daraus $\vartheta = \frac{5-\sqrt{5}}{5} \pm \sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{10}}$. Für τ folgt dann $\tau = 3 - \sqrt{5} \pm (\sqrt{5} - 2)$, d. h. der eine brauchbare Wert $\tau = 1$. Die Kurve K_1 geht also durch den Dodekaederpunkt D. Durch sie wird nun das Gebiet der konvexen Dyakishexekontaeder zunächst in zwei Teilgebiete zerlegt. Da die Polyeder, deren Kern ein 60-Flach ist, zur sechsten Klasse gehören, so enthält das **rechts** der Kurve gelegene Gebiet Polyeder sechster Klasse, das jenseits angrenzende solche fünfter Klasse, während für die Polyeder der Kurve selbst die Hülle ein 20.3-Eck ist, für welches die Ecken fünfter und sechster Klasse zusammenfallen. Nun sind aber für das 20.3-Eck die Ecken sechster Klasse stets von der zweiten Ordnung, d. h. das Gebiet VI_2 rechts der Kurve K_1 entspricht den sechsklassigen Polyedern der zweiten Ordnung und auch die Stephanoidgruppierungen der ersten Gruppe, deren Kern ein Deltoidhexekontaeder ist, gehören nach ihren Ecken sämtlich zur zweiten Ordnung der sechsten Klasse.

Wir bestimmen nun weiter diejenigen Gruppierungen, für welche die Hülle ein 12.5-Eck ist, d. h. $s = 1$ wird. Dann ergeben die Gleichungen 161) und 162) übereinstimmend $m = 0$, d. h. die Kurve K_2, die das Gebiet der Polyeder sechster Klasse von dem der Polyeder fünfter Klasse trennt, hat die Gleichung:

$$\frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}\cot\varphi - \sigma\vartheta^2\cot\varphi + \sigma^2\vartheta\cot\varphi + 2\vartheta^2\tan\varphi - \sigma\vartheta\cot^2\varphi + \frac{\sigma^2}{2} = 0.$$

Für $\sigma = 1$ ergibt sich hieraus neben dem unbrauchbaren Werte $\vartheta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ noch $\vartheta = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$, d. h. die Kurve K_2 geht durch den Dodekaederpunkt D. Für den Schnittpunkt A von K_2 mit der Triakisikosaedergeraden C_2 ($\vartheta = \sigma$) ergibt sich $\sigma^2 \cot\varphi + \sqrt{5} - 4 = 0$, d. h. $\sigma = \sqrt{\frac{5\sqrt{5}-9}{2}} = 1{,}0441$, wonach der Verlauf der Kurve bestimmt ist (vergl. Fig. 2 Taf. 13). Da die Polyeder, deren Hülle ein 12.5-Eck ist, der ersten Ordnung der Polyeder sechster Klasse zugehören, so enthält das Gebiet VI_1 links von der Kurve K_2 die Polyeder sechster Klasse erster Ordnung. Damit ist das Gesamtgebiet der konvexen Dyakishexekontaeder in die drei Teilgebiete VI_1, VI_2 und V zerlegt. Für VI_1 besitzen die Stephanoidgruppierungen Ecken sechster Klasse erster Ordnung bis an die Grenze gegen V, für welche die Polyeder, deren Hülle ein 12.5-Eck ist, zugleich zur sechsten und fünften Klasse gehören und bis zur Grenze des Teiles TA der Geraden C_2, für die die Hüllen der Gruppierungen noch 2.60-Ecke mit Ecken sechster Klasse erster Ordnung sind, Polyeder, die mit den entsprechenden der zweiten Gruppe identisch sind. Für die Polyeder der Geraden $\sigma = 1$ sind die Hüllen 60-Ecke mit Ecken sechster Klasse erster Ordnung. Fragt man nämlich nach Polyedern mit diesen Hüllen, so ergibt sich aus der Bedingung $\frac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$ mit Hilfe von 161): $m - m' \tan\varphi + m'' \tan^2\varphi = 0$. Führt man die Werte für m, m', m'' in σ und ϑ ein, so reduziert sich diese Gleichung auf $4\sigma\vartheta . (1-\sigma)\tan\varphi = 0$, d. h. es ist $\sigma = 1$, w. z. b. w. Für das Gebiet VI_2 ist analog nur noch nachzuweisen, dass die Hülle der Polyeder ein 60-Eck mit Ecken sechster Klasse zweiter Ordnung ist, wenn der Kern ein Deltoidhexekontaeder wird. Die Bedingung $\frac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$ ergibt aber mit Benutzung der Werte 162) die Gleichung $-m + m' \tan\varphi + m'' \tan^2\varphi = 0$ oder $\sigma\vartheta - 4\vartheta \tan^2\varphi + \sigma \tan^2\varphi = 0$, woraus man $\vartheta = \frac{\sigma}{4 - \sigma \cot^2\varphi}$ erhält, womit auch diese Behauptung bewiesen ist. Das Gebiet VI_1 hängt mit VI_2 nur im **Punkte** D zusammen. In der Tat führt die am Anfange abgeleitete Bedingung $t = \cos^2\varphi$ für diejenigen Hüllpolyeder die zugleich der ersten und zweiten Ordnung der sechsten Klasse angehören, sowohl von 161) wie 162) ausgehend auf $m' = -m \tan\varphi$, oder

$$\sigma\vartheta^2\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)(3 + \tan\varphi) - 2\vartheta^2(2 - \tan\varphi) + 5\sigma\vartheta \sin^2\varphi - \frac{\sigma^2}{2} = 0.$$

Das ist aber die Gleichung einer Kurve, die, wie eine nähere Diskussion zeigt, mit dem Gebiete der konvexen Dyakishexekontaeder **nur** den Punkt D gemein hat, während sie im übrigen ausserhalb verläuft. Geometrisch ist dies sofort einleuchtend, denn nur für das Dodekaeder als Kern fallen die 2.10 Ebenen jedes der sechs Stephanoide der ersten Gruppe in zwei parallele Ebenen, auf deren unendlichweiten Geraden die Schnittpunkte gewissermassen ein unendlichgrosses 60-Eck mit Ecken sechster Klasse erster **und** zweiter Ordnung bilden. Es sind nun noch die Formeln für s und t der Hüllkörper der Stephanoide fünfter Klasse aufzustellen, die dem Gebiete V der ersten Gruppe zugehören. Die erste Ecke des Stephanoides ist dann die Ecke 43) an Stelle von 53), wenn der Übergang durch das 12.5-Eck, d. h. über die Kurve K_2 erfolgt. Nun sind die Koordinaten von 43): z_1, x_1, y_1, also ist jetzt $x_1 = \frac{m}{n} d$, $y_1 = \frac{m'}{n} d$, $z_1 = \frac{m''}{n} d$ und es wird:

$$163)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{m''}{m \tan^2\varphi + m''}, \\ t = \dfrac{m' \tan\varphi + m''}{m \tan^2\varphi + m''} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Für die Stephanoidgruppierungen, deren Kernpolyeder ein Triakisikosaeder der Teilstrecke AI (vergl. Fig. 2 Taf. 13) ist, wird wegen $\vartheta = \sigma$:

$$\begin{aligned} m &= \sigma^2\left(-\frac{\sigma^2}{2}\cot\varphi + \frac{3-2\tan\varphi}{2}\right), \\ m' &= \sigma^2\left(-\frac{\sigma^2}{2}\cot^2\varphi + \sigma(2+\cot\varphi) - \frac{3}{2}\cot\varphi\right), \\ m'' &= \sigma^2(-\sigma\tan\varphi + \tan^3\varphi) \end{aligned}$$

und die Formeln 163) werden zu:

$$163')\qquad \begin{cases} s = \dfrac{2\sigma - 2\tan^2\varphi}{\sigma(\sigma+2) - 3\tan\varphi}, \\ t = \dfrac{\sigma(\sigma-2)\cot^2\varphi + 5\cot\varphi - 4}{\sigma(\sigma+2) - 3\tan\varphi} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Geht nun ein 2.60-Eck sechster Klasse zweiter Ordnung durch Verschwinden der k_3 in ein 20.3-Eck über, so kommt die Ecke 63) zum Zusammenfallen mit der Ecke 43), d. h. die Ecke der Stephanoide fünfter Klasse ist auch nach diesem Grenzübergange die Ecke 43) des 2.60-Ecks, wonach die Formeln 163) ihre Gültigkeit behalten. Wir betrachten nun einige besondere Gruppierungen der $St'_5\binom{2}{1}$ der ersten Gruppe der drei Teilgebiete, die wir mit Nr. aufzählen, um bei den polarreziproken Polyedern auf sie verweisen zu können.

1. Polyeder. Ist der Kern der Stephanoidgruppierung das Triakontaeder, so ist die Hülle ein $(12+20+30)$-flächiges 60-Eck mit Ecken sechster Klasse erster Ordnung und es bedarf nur der Berechnung von s. Nun ist für das Triakontaeder $m'' = -\tan^2\varphi$, $m = \frac{\tan^4\varphi}{2}$ und damit $s = \frac{2}{2+\tan^4\varphi}$ $= \frac{2}{4-3\tan\varphi} = \frac{11+3\sqrt{5}}{19}$. Für t ergibt sich daraus $t = \frac{45+14\sqrt{5}}{95}$. Das Verhältnis der Kanten des Hüllpolyeders wird $k_1 : k_3 = 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Diese Gruppierung von sechs Stephanoiden $St'_5\binom{2}{1}$ zeigt Fig. 8 Taf. 26, die Figur der Grenzfläche Fig. 5 Taf. 15. Keines der beiden getrennt liegenden überschlagenen Vierecke $R_1R_2R_3R_4$ und $R_5R_6R_7R_8$ trägt im Innern einen der Achsenpunkte G oder C, wonach das Innere des Polyeders, wie Fig. 8 Taf. 26 zeigt, längs der Achsen G und C mit dem Aussenraume in Verbindung steht. Die sechs verschlungenen Stephanoide durchdringen sich wie die Hauptkreise eines Triakontaedernetzes auf der Kugel. Von aussen gesehen bietet das Gesamtpolyeder immer abwechselnd positive und negative körperliche Zellen dar und unter den Achsenpunkten B durchdringen sich je eine positive und negative Zelle verschiedener Stephanoide, so dass die unter ihnen verborgenen körperlichen Zellen, die den Aussenraum in einem Punkte treffen, den Koëffizienten Null besitzen, d. h. Hohlräume sind, wie das gesamte Innere des Polyeders Null ist, so dass der Kern, das Triakontaeder, hier nicht als wirkliche Zelle existiert.

2. Polyeder. Für das Pentakisdodekaeder $\sigma = 1$, $\tau = 5(\sqrt{5}-2) = 1{,}18034$ ergibt sich die Stephanoidgruppierung mit Ecken sechster Klasse erster Ordnung, deren Hülle die A. V. des $(12+20+30)$-flächigen 60-Ecks ist.

3. Polyeder. Als Beispiel einer Gruppierung von sechs Stephanoiden $St'_5\binom{2}{1}$ mit Ecken sechster Klasse zweiter Ordnung wählen wir das Polyeder, dessen Kern die A. V. des Deltoidhexekontaeders ist. Dann ergeben die Formeln 162) für die Parameter des Hüllpolyeders: $s = \frac{3(9+\sqrt{5})}{38}$, $t = \frac{55+4\sqrt{5}}{95}$

und für das Verhältnis der Kanten erhält man damit $k_1 : k_3 = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Das in Fig. 2 Taf. 24 dargestellte Polyeder lässt deutlich die Einzelstephanoide erkennen und zeigt die Ecken sechster Klasse zweiter Ordnung für die besondere Hülle. Das Innere des Polyeders fällt völlig heraus und es hängt der Innenraum längs der Achsen G und C wiederum mit dem äusseren Raume zusammen, wie auch die Zeichnung der Grenzfläche der Gruppierung Fig. 5 Taf. 16 erkennen lässt.

4. Polyeder. Ist der Kern der Stephanoidgruppierung das Ikosaeder, so werden die Formeln 159): $m = 2c_1(a_1 - a_4)$, $m' = 0$, $m'' = -2c_1c_4$ und damit $\frac{t}{\cos^2\varphi} = s$. Führt man nun in $s = \frac{a_4}{a_4 - (a_1 - a_4)\tan^2\varphi}$ die Grössen $a_4 = 2 - 3\tan\varphi$ und $a_1 = 3\tan\varphi(2 - 3\tan\varphi)$ ein, so ergibt sich $s = \frac{1}{3}\cot^2\varphi$, d. h. die Hülle der Gruppierung ist das Dodekaeder. Die Grenzfläche dieses aus sechs $St'_5\binom{2}{1}$ zusammengesetzten Polyeders (Fig. 1 Taf. 24) zeigt Fig. 6 Taf. 8. Es gehört sämtlichen sechs Gruppen an, und zwar sind die ersten Flächen der Stephanoide für die sechs Gruppen die sechs Vierecke: 1. Gr. $C_6C_8C_9C_{10}$; 2. Gr. $C_5C_7C_{10}C_9$; 3. Gr. $C_7C_5C_8C_6$; 4. Gr. $C_5C_9C_6C_{10}$; 5. Gr. $C_6C_9C_8C_7$; 6. Gr. $C_7C_8C_5C_{10}$. Sowohl die drei Flächen für die erste bis dritte Gruppe für sich, wie die drei Flächen für die vierte bis sechste Gruppe überdecken einander mit ihren positiven und negativen Zellen derart, dass das diskontinuierliche aus den beiden Dreiecken $C_5C_8C_9$ und $C_6C_7C_{10}$ bestehende Sechseck mit abwechselnd positiven und negativen Zellen resultiert,[1]) während die innere sechskantige Zelle, die allein Achsenpunkte G trägt, Null ist. Der innere Kern samt dem Ikosaeder fällt also aus dem Polyeder völlig heraus und es besteht, wie auch die Figur der Grenzfläche lehrt, nur aus körperlichen Zellen mit den Koëffizienten $+1$ und -1, die, abwechselnd, längs Geraden zusammenhängen. Für dieses autopolare Nullpolyeder haben die Grenzflächen und die Ecken, die beide bei Vertauschung der Aussen- und Innenseite des Polyeders in sich übergehen, die Art $a = 3$ und $\alpha = 6$. Es wird also, da jede Fläche drei überstumpfe Winkel hat, nach der Formel von Hess $2A = 20.3 + 20.6 - 20.3 - \frac{20.6}{2} = 60$, d. h. $A = 30$, und ebenso ist $A' = \frac{K}{2} = 30$,

[1]) Das Polyeder entsteht also auch aus der Gruppierung von zehn Tetraedern (S. 237), fünf positiven und fünf negativen.

da $a' = a$, $\alpha' = \alpha$, $\varkappa' = \varkappa$ bleibt. — Die Betrachtung der bisher angeführten Polyeder 1.—4. lehrt überdies mit Rücksicht auf Fig. 7 Taf. 12, dass die Gruppierungen mit Ecken sechster Klasse, deren Hülle ein 60-Eck ist, durch die erste Gruppe noch nicht erschöpft sind, denn ihre Parameter t sind die Koordinaten der Geraden DI nur von D über P bis zu dem Punkte zwischen P und I, für welchen $t = \frac{45 + 14\sqrt{5}}{95} = 0{,}8032$ ist.

5. Polyeder. Die Werte $\sigma = \frac{\sqrt{5}+2}{4} = 1{,}05902$, $\tau = \frac{4\sqrt{5}+5}{11} = 1{,}26766$ genügen der Gleichung der Kurve K_1; die Hülle der zugehörigen Stephanoidgruppierung ist die A. V. des (12+20)-flächigen 20.3-Ecks.

6. Polyeder. Für die A. V. des Triakisikosaeders als Kern ergibt sich eine Gruppierung von zwölf $St'_5\binom{2}{1}$ mit Ecken fünfter Klasse. Die Formeln 163') ergeben für die Parameter des umhüllenden (12 + 20 + 30)-flächigen 2.60-Ecks die Werte $s = \frac{7\sqrt{5}-5}{11}$, $t = \frac{3(5+4\sqrt{5})}{55}$, woraus für die Kanten die Proportion folgt: $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 2 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Das Polyeder ist in Fig. 5 Taf. 28 dargestellt und seine Fläche zeigt Fig. 2 Taf. 16. Das Deltoid, in dem sich die beiden überschlagenen Vierecke, die die Flächen eines Stephanoids der ersten und zweiten, hier identischen, Gruppe sind, überdecken, hat den Koëffizienten Null und fällt also am Polyeder heraus. Da weder ein Achsenpunkt G noch C innerhalb der Vierecke liegt, so ist der Aussenraum mit dem Inneren des Polyeders, das samt dem Kern-Triakisikosaeder den Koëffizienten Null hat längs der C- und G-achse verbunden, so dass der Gesamtkörper 12 + 20 Löcher zu besitzen scheint, durch die man in das Innere dringt.

4. **Die zweite Gruppe der Stephanoide $St'_5\binom{2}{1}$.** Wir gehen davon aus, dass die Ecken des Stephanoids der fünften Klasse angehören. Der Schnittpunkt der Ebenen 11), 102) und 104) des Dyakishexekontaeders ist dann die Ecke 43) des (12 + 20 + 30)-flächigen 2.60-Ecks. Aus

$$\begin{aligned}
&(11) \quad a_1 x - b_1 y + c_1 z - d = 0,\\
&(102) \quad a_3 x - b_3 y - c_3 z - d = 0,\\
&(104) \quad b_4 x - c_4 y - a_4 z - d = 0
\end{aligned}$$

ergibt sich für die Koordinaten des Schnittpunktes $x = \frac{m''}{n} d$, $y = \frac{m}{n} d$, $z = \frac{m'}{n} d$, worin

$$164^{a}) \qquad m = c_3 (a_1 - b_4) + a_4 (a_3 - a_1) + c_1 (a_3 - b_4),$$

$$164^{b}) \qquad m' = a_3 (b_1 - c_4) + b_4 (b_3 - b_1) + a_1 (c_4 - b_3),$$

$$164^{c}) \qquad m'' = b_3 (a_4 + c_1) - c_4 (c_3 + c_1) + b_1 (c_3 - a_4) \text{ ist, oder:}$$

$$165^{a}) \qquad m = -\frac{\sigma^2 \vartheta^2}{2} \cot\varphi + \sigma^2 \vartheta \cot\varphi - \sigma \vartheta^2 \cot\varphi + 2\vartheta^2 - \sigma\vartheta \tan\varphi - \frac{\sigma^2}{2},$$

$$165^{b}) \qquad m' = -\frac{\sigma^2 \vartheta^2}{2} \cot^2\varphi + \sigma\vartheta^2 (3 + \cot\varphi) - \sigma^2 \vartheta + \sigma\vartheta - 2\vartheta^2 \cot\varphi - \frac{\sigma^2}{2} \tan^2\varphi,$$

$$165^{c}) \qquad m'' = -2\sigma\vartheta^2 \tan\varphi + \sigma^2 \vartheta \tan\varphi + 4\vartheta^2 \tan\varphi - 2\sigma\vartheta \cot\varphi + \sigma^2.$$

Es ist jetzt für die Ecke 43): $x_1 : y_1 : z_1 = m : m' : m''$, und es gilt also für die Parameter der Hüllpolyeder der Stephanoidgruppierungen:

$$166) \qquad \begin{cases} s = \dfrac{m''}{m \tan^2\varphi + m''}, \\ t = \dfrac{m' \tan\varphi + m''}{m \tan^2\varphi + m''} \cos^2\varphi \end{cases}$$

so lange diese nach ihren Ecken der fünften Klasse zugehören. Nun sind für das 12.5-Eck als äussere Hülle die Ecken zugleich von der fünften und sechsten Klasse. Es wird aber $s = 1$ für $m = 0$, d. h. die Kurve K_3 (vergl. Fig. 3 Taf. 13) hat die Gleichung:

$$167) \qquad \left(\frac{\sigma\vartheta}{2} + \vartheta - \sigma\right) \sigma\vartheta \cot\varphi - 2\vartheta^2 + \sigma\vartheta \tan\varphi + \frac{\sigma^2}{2} = 0.$$

Diese Kurve K_3 trennt das Gebiet der Stephanoide sechster Klasse von dem für die Stephanoide mit Ecken fünfter Klasse. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden $\sigma = 1$ ergibt sich aus $\vartheta^2 - \frac{4\vartheta}{3\sqrt{5} - 5} + \frac{2}{3\sqrt{5} - 5} = 0$ zu $\vartheta = \frac{2 \pm (3 - \sqrt{5})}{3\sqrt{5} - 5}$. Die brauchbare Wurzel ist $\vartheta = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} = \cos^2\varphi$, also $\tau = 1$, d. h. die Kurve K_3 geht durch den Dodekaederpunkt D. Um ihren Schnittpunkt A mit der Triakisikosaedergeraden C_2 zu bestimmen, setzen wir in 167) $\vartheta = \sigma$. Dann wird die Gleichung für σ: $\sigma^2 \cot\varphi + 2\tan\varphi - 3 = 0$, woraus $\sigma = \sqrt{\frac{5\sqrt{5} - 9}{2}} = 1{,}0441$ folgt. Der Punkt A ist also identisch mit dem gleichbenannten der ersten

Gruppe, wie vorauszusehen war, da für das Triakisikosaeder als Kern die Stephanoide der ersten und zweiten Gruppe identisch sind. Es zerfällt also das Gebiet der konvexen Dyakishexekontaeder in zwei Teilgebiete. Das linke, mit VI bezeichnete, enthält alle die Werte σ, τ der Kernpolyeder, für welche die Stephanoide der zweiten Gruppe nach ihren Ecken der sechsten Klasse zugehören, und zwar haben wir Ecken sechster Klasse erster Ordnung, da dies für die Polyeder des eben genannten Grenzpunktes A und des Punktes T bereits bekannt ist. An Stelle der Ecke 43) tritt für diese Polyeder die Ecke 53), für welche $x_1 : y_1 : z_1 = -m : m' : m''$ ist. Die Parameter s und t sind dann gegeben durch:

$$168)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{m''}{-m\tan^2\varphi + m''}, \\ t = \dfrac{m'\tan\varphi + m''}{-m\tan^2\varphi + m''}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Fragt man nach den Gruppierungen, deren Hülle ein 12.5-Eck ist, so ergibt sich natürlich wieder die Gleichung $m = 0$ der Kurve K_3. Für diejenigen Gruppierungen, deren Hülle ein (12 + 20 + 30)-flächiges 60-Eck ist, erhält man aus $\frac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$ die Gleichung: $m - m'\tan\varphi + m''\tan^2\varphi = 0$, die nach Einführung der Werte 165) sich auf die folgende reduziert:

$$4\vartheta\tan\varphi.(\sigma - 2\vartheta).(\sigma - 1) = 0,$$

wonach $\sigma = 1$ ist, d. h. für die Pentakisdodekaeder als Kerne sind die Hüllen der Stephanoidgruppierungen 60-Ecke. — Für die Parameter σ, τ des Dodekaederpunktes D ergibt sich eine Stephanoidgruppierung, deren Hülle zugleich den 60-Ecken und 12.5-Ecken zugehört, somit das Ikosaeder ist, natürlich nur als nicht realisierbarer Grenzfall. Es sind also durch die Polyeder der zweiten Gruppe für die Parameter σ, τ der Geraden C_1 die in Gruppe 1) als noch fehlend bezeichneten Polyeder mit 60-eckigen Hüllen sechster Klasse erster Ordnung gegeben. — Die Polyeder, deren Kern ein Triakisikosaeder ist, gehören für Werte σ, τ der Geraden C_2 vom Punkte T bis A zur sechsten Klasse, für den übrigen Teil von C_2 zur fünften Klasse und sind mit den schon behandelten der ersten Gruppe identisch. Für die Stephanoidgruppierungen der Deltoidhexekontaederkurve C_3 sind die Hüllen

$(12+20+30)$-flächige 2.60-Ecke. — Von speziellen Typen erwähnen wir hier die folgenden.

1. Polyeder. Der Kern der Stephanoidgruppierung sei die A. V. des Deltoidhexekontaeders für $\sigma=\frac{5\sqrt{5}-9}{2}=1{,}09018$. Aus den Gleichungen 166) ergibt sich für die Parameter der Hülle: $s=\frac{2(15+2\sqrt{5})}{41}$, $t=\frac{20\sqrt{5}+27}{41\sqrt{5}}$ und danach ist $k_1:k_2:k_3=1:\frac{\sqrt{5}-1}{2}:\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Das Modell dieses Polyeders ist in Fig. 3 auf Taf. 29 dargestellt, die Zeichnung der Grenzfläche ist Fig. 2 Taf. 18. Das Polyeder ist hohl; längs der Achsen G steht der Innenraum mit dem Aussenraum in Verbindung; innerhalb der Grenzfläche liegt kein Achsenpunkt G. Die sechskantige Zelle der Fläche besitzt den Koëffizienten Null.

2. Polyeder. Für das Grenzpolyeder des Punktes A, dessen Kern das Triakisikosaeder für $\sigma=\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-9}{2}}$, also $\tau=\frac{\sigma}{\cos^2\varphi}=\sqrt{5(6\sqrt{5}-13)}$ ist, ergibt sich als Hülle das 12.5-Eck $s=1$, $t=\frac{1}{10}\left(\sqrt{10(9\sqrt{5}+19)}-5-3\sqrt{5}\right)=0{,}807$.

3. Polyeder. Die Parameter $\sigma=\frac{5\sqrt{5}-7}{4}=1{,}04509$, $\tau=8-3\sqrt{5}=1{,}29180$ jenes bekannten Dyakishexekontaeders genügen der Gleichung der Kurve K_3. Die Hülle der zugehörigen Stephanoidgruppierung ist das $(12+20)$-flächige 12.5-Eck $s=1$, $t=\frac{\sqrt{5}+2}{5}$, für dessen Kanten die Proportion gilt: $k_2:k_3=1:\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Das Modell dieses Polyeders zeigt Fig. 6 Taf. 29. Da in jeder Ecke des 12.5-Ecks zwei Ecken verschiedener Stephanoide liegen, so sind die Ecken des Polyeders diskontinuierliche $(4+4)$-kantige Ecken achter Art.

4. Polyeder. Für die besondere Varietät des Pentakisdodekaeders $\sigma=1$, $\tau=\frac{4\sqrt{5}+5}{11}=1{,}26766$ ergibt sich als Hülle der Stephanoidgruppierung mit Ecken sechster Klasse erster Ordnung die besondere Varietät des $(12+20+30)$-flächigen 60-Ecks, für welche $s=\frac{3\sqrt{5}-1}{6}$, $t=\frac{8\sqrt{5}-5}{15}$ ist, wonach das Verhältnis der Kanten $k_1:k_3=1:3$ wird.

5. **Die dritte Gruppe der Stephanoide $St'_5\binom{2}{1}$.** Für den Schnittpunkt der Ebenen 21), 92), 94) des Dyakishexekontaeders, deren Gleichungen

$$(21)\quad a_2x - b_2y + c_2z - d = 0,$$
$$(92)\quad a_3x + b_3y - c_3z - d = 0,$$
$$(94)\quad c_5x - a_5y - b_5z - d = 0,$$

sind, bestimmt man die Koordinaten $x = \frac{m}{n}d$, $y = \frac{m'}{n}d$, $z = \frac{m''}{n}d$. Darin ist:

169a) $m = b_2(c_3 - b_5) - b_3(b_5 + c_2) - a_5(c_2 + c_3)$,

169b) $m' = c_3(a_2 - c_5) + b_5(a_3 - a_2) + c_2(a_3 - c_5)$,

169c) $m'' = a_3(b_2 - a_5) - c_5(b_2 + b_3) + a_2(a_5 + b_3)$,

oder, wenn man für die a, b, c die Funktionen der σ, ϑ einführt:

170a) $m = \sigma^2\vartheta^2\cot^2\varphi - 2\sigma\vartheta^2\cot^2\varphi - \sigma^2\vartheta + 4\vartheta^2\tan\varphi + 2\sigma\vartheta\tan^2\varphi$,

170b) $m' = \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2} + \sigma^2\vartheta\cot^2\varphi - \sigma\vartheta^2(2+\cot\varphi) + 2\vartheta^2 - \sigma\vartheta(2-\tan\varphi) - \frac{\sigma^2}{2}\tan\varphi$,

170c) $m'' = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}\cot\varphi + \sigma\vartheta^2(3\cot\varphi - 1) - \sigma^2\vartheta\cot\varphi + \sigma\vartheta(\tan\varphi + \cot\varphi) - 2\vartheta^2\cot\varphi - \frac{\sigma^2}{2}$.

Ist nun der Schnittpunkt der genannten drei Ebenen die Ecke vierter Klasse 33), so ist $x_2 : y_2 : z_2 = m : m' : m''$ und für die Parameter der Hüllpolyeder dieser Stephanoidgruppierungen vierter Klasse erhält man:

171) $$\begin{cases} s = \dfrac{m' + m''\tan\varphi + m\cot\varphi}{2(m'\tan^2\varphi + m)}, \\ t = \dfrac{m''\tan\varphi + m}{m'\tan^2\varphi + m}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Wird das Hüllpolyeder zum (12+20+30)-flächigen 60-Eck, so fällt die Ecke vierter Klasse 33) mit der Ecke fünfter Klasse 43) zusammen und über die Kurve K_4 (vergl. Fig. 4 Taf. 14), deren Gleichung $\frac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$ ist, gehen die Stephanoidgruppierungen der vierten Klasse in solche der fünften über. Als Gleichung dieser Grenzkurve K_4 ergibt sich:

$$-m\tan^2\varphi + m' + m''\tan\varphi = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln 170):

172) $-\sigma^2\vartheta^2 + 2\sigma^2\vartheta + 2\sigma\vartheta^2\tan^2\varphi - 4\vartheta^2\tan^3\varphi - 2\sigma\vartheta\tan^4\varphi - \sigma^2\tan\varphi = 0$.

Für das Ikosaeder ist $m = -2c_1a_5$, $m' = 2c_1(a_1 - a_5)$, $m'' = 0$ und es lehrt schon die erste Form der Gleichung, da $2c_1a_5\tan^2\varphi + 2c_1(a_1 - a_5) \equiv 0$

ist, dass die Kurve K_4 durch den Ikosaederpunkt I geht. Für $\sigma = 1$ ergibt sich aus 172): $\vartheta^2 + 2\vartheta \cdot \frac{3\tan\varphi - 1}{5(1-2\tan\varphi)} - \frac{\tan\varphi}{5(1-2\tan\varphi)} = 0$ oder $\vartheta^2 - \frac{3\sqrt{5}-5}{5(\sqrt{5}-2)}\vartheta + \frac{\sqrt{5}-1}{10(\sqrt{5}-2)} = 0$, und daraus $\vartheta = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \cos^2\varphi$, d. h. die Kurve K_4 geht durch den Dodekaederpunkt D.

Es ist nun durch die Kurve K_4 das Gebiet der konvexen Dyakishexekontaeder in die zwei Teilgebiete IV und V (in Fig. 4 Taf. 14) zerlegt, für deren erstes die Formeln 171) gelten. Für die Grenze C_2 dieses Teilgebietes sind die Hüllen der Gruppierungen (12+20)-flächige 20.3-Ecke und die Zahl der Stephanoide $St'_5\,\binom{2}{1}$ eines Polyeders reduziert sich auf sechs. Denn fragt man nach den Gruppierungen vierter Klasse, deren Hülle ein 20.3-Eck ist, so ergibt sich aus $\frac{t}{\cos^2\varphi} = s$ und den Gleichungen 171) die Relation: $m''\tan\varphi + m\tan^2\varphi - m' = 0$, mit deren Hilfe der Wert von s durch Elimination von m' die einfachere Form $s = \frac{m''\tan\varphi + m}{m'\tan^2\varphi + m}$ annimmt, wonach $t = s\cos^2\varphi$ ist. Nun wird aber für $\sigma = \vartheta$, d. h. das Triakisikosaeder als Kern m, m', m'' zu:

$$m_\sigma = \sigma^2(\sigma^2\cot^2\varphi - \sigma(3 + 2\cot\varphi) + 2\cot\varphi),$$
$$m'_\sigma = \sigma^2\left(\frac{\sigma^2}{2} - \sigma - \frac{\tan\varphi}{2}\right),$$
$$m''_\sigma = \sigma^2\left(-\frac{\sigma^2}{2}\cot\varphi + \sigma(2\cot\varphi - 1) - \frac{3}{2}\right),$$

und durch einfache Rechnung erweist man die Richtigkeit der Identität:

$$m''_\sigma \tan\varphi + m_\sigma \tan^2\varphi - m'_\sigma \equiv 0,$$

d. h. wenn der Kern der Stephanoidgruppierung ein Triakisikosaeder ist, so ist die Hülle ein (12+20)-flächiges 20.3-Eck. Führt man überdies die Werte m_σ, m'_σ, m''_σ in den letzten Ausdruck für s ein, so nimmt dieser die Form an:

$$s = \frac{\sigma^2(2\cot\varphi + 1) - 6\sigma\cot\varphi + 4 + \tan\varphi}{\sigma^2(\tan\varphi + 5) - 2\sigma(\cot\varphi + 5) + 3(2\tan\varphi + 1)}.$$

Für ein Pentakisdodekaeder als Kern besitzen die Stephanoidgruppierungen (12+20+30)-flächige 2.60-Ecke zu Hüllen und es vereinfachen sich die Formeln nur insoweit, als die Grössen m, m', m'' die kürzere Form annehmen:

$$m = -\vartheta \tan^3\varphi\,(\vartheta \tan\varphi + 1),$$

$$m' = \frac{\vartheta^2}{2}(1 - 2\cot\varphi) + 2\vartheta\tan\varphi - \frac{1}{2}\tan\varphi,$$

$$m'' = -\frac{\vartheta^2}{2}\tan^2\varphi + \vartheta\tan\varphi - \frac{1}{2}.$$

Für die jenseits der Kurve K_4 gelegenen Polyeder der fünften Klasse sind die Koordinaten der Ecke 43): $x = z_1$, $y = x_1$, $z = y_1$ und es ist also: $x_1 : y_1 : z_1 = m' : m'' : m$, wonach für die Parameter der Hüllpolyeder der Stephanoidgruppierungen jetzt

$$s = \frac{m}{m'\tan^2\varphi + m'}, \quad t = \frac{m''\tan\varphi + m}{m'\tan^2\varphi + m}\cos^2\varphi$$

wird. Für $\frac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$ ergibt sich wieder die Gleichung der Kurve K_4. Für die zweite Grenze C_3 dieses Teilgebietes V ergeben sich Gruppierungen von zwölf Stephanoiden $St'_5\binom{2}{1}$, deren Hüllen $(12+20+30)$-flächige 2.60-Ecke sind, und die mit den Polyedern der Kurve C_3 der zweiten Gruppe zusammenfallen. Spezielle, zum grösseren Teile dargestellte Polyeder der Gruppe sind die folgenden.

1. Polyeder. Ist der Kern der Stephanoidgruppierung die A. V. des Triakisikosaeders, d. h. $\sigma = \frac{7\sqrt{5} - 5}{10}$, so ergibt sich für die Hülle aus der oben angeführten speziellen Formel für s: $s = \frac{3(7\sqrt{5} + 9)}{82} = 0{,}9019$ und damit $t = \frac{3(11\sqrt{5} + 20)}{205} = 0{,}65264$ und für ihre Kanten gilt: $k_1 : k_2 = \frac{5(\sqrt{5} + 1)}{2} : 1$. Die Fläche dieses diskontinuierlichen aus sechs $St'_5\binom{2}{1}$ bestehenden Polyeders zeigt Fig. 5 Taf. 13; das Polyeder selbst ist auf Taf. 28 in Fig. 1 dargestellt. Da die Achsen G weder das Innere noch die Kanten der Grenzfläche treffen, so muss die innerste Zelle — das Triakisikosaeder — nebst allen benachbarten Zellen, soweit sie in den Richtungen der Achsen G liegen, aus dem Polyeder herausfallen, d. h. den Koëffizienten Null besitzen.

2. Polyeder. Ist der Kern der Stephanoidgruppierung das Triakontaeder, d. h. $\vartheta = \sigma = 1$, so werden die oben angeführten Grössen m_σ, m'_σ, m''_σ

hier: $m_\sigma = -\tan^2\varphi$, $m'_\sigma = -\frac{\tan^2\varphi}{2}$, $m''_\sigma = \frac{1}{2}(3\tan\varphi - 2)$ und damit $s = \frac{3\tan\varphi - 1}{4 - 5\tan\varphi} = \frac{7\sqrt{5}+5}{22}$, d. h. die Hülle dieses aus sechs Stephanoiden $St'_5\binom{2}{1}$ bestehenden Polyeders ist die A. V. des (12+20)-flächigen 20.3-Ecks. Zwei Flächen verschiedener Stephanoide fallen hier stets in eine Ebene des Triakontaeders. Die gesamte Grenzfläche, die gewissermassen ein diskontinuierliches Achteck der Art $a = 4$ darstellt, zeigt Fig. 6 Taf. 17. Die innerste Zelle, ein der Triakontaederfläche ähnlicher Rhombus, hat den Koëffizienten Null, fällt also am Polyeder heraus, ebenso wie die beiden deltoidförmigen Zellen, mit denen sich die überschlagenen Vierecke gegenseitig überdecken. Dadurch gewinnt das Polyeder das eigentümliche Aussehen, wie es Fig. 7 Taf. 26 zeigt. Der innere Kern, d. h. das Triakontaeder, hat wie eine Reihe Nachbarzellen den Koëffizienten Null, so dass das Polyeder zwölffach durchbrochen erscheint.

3. Polyeder. Die Werte $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-7}{4}$, $\tau = 8 - 3\sqrt{5}$ befriedigen die Gleichung der Kurve K_4. Der Kern der Stephanoidgruppierung ist also dieses besondere Dyakishexekontaeder; die Hülle ist die A. V. des (12 + 20 + 30)-flächigen 60-Ecks, wie sich aus 171) nach Berechnung der m, m', m'' für die besonderen Werte für σ, ϑ ergibt. Die Ecken der Gruppierung sind zugleich von der vierten und fünften Klasse.

4. Polyeder. Es sei der Kern des Polyeders die besondere Varietät des Pentakisdodekaeders für $\tau = \frac{5+4\sqrt{5}}{11}$. Dann wird die Hülle das (12 + 20 + 30)-flächige 2.60-Eck für $s = \frac{39+7\sqrt{5}}{58}$, $t = \frac{11\sqrt{5}+24}{29\sqrt{5}}$ und es ist: $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$, d. h. das Hüllpolyeder ist ein 2.60-Eck mit regulären Vierecken. Die Grenzfläche dieses diskontinuierlichen aus zwölf $St'_5\binom{2}{1}$ bestehenden Polyeders zeigt Fig. 1 Taf. 11. Das Polyeder selbst ist auf Taf. 29 Fig. 4 dargestellt, und es bedarf nach der vorhergehenden Beschreibung anderer Typen keiner weiteren Erläuterung dieses eigentümlichen Modells, zumal aus der Figur der Grenzfläche ersichtlich ist, dass diese neben je zwei dreiseitigen und zwei vierseitigen Zellen verschiedenen Vorzeichens drei deltoidförmige Zellen mit dem Koëffizienten Null besitzt, in deren einer allein die Achsenpunkte G der Fläche zu liegen kommen.

6. **Die vierte Gruppe der Stephanoide $St'_5\binom{2}{1}$ und die autopolaren Gruppierungen.** Nach den vorläufigen Bestimmungen ist die Ecke 23) dritter Klasse der Schnittpunkt der Flächen 31), 82), 84) des Dyakishexekontaeders, deren Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(31)\ a_4x - b_4y + c_4z - d = 0,\\
&(82)\ a_5x + b_5y - c_5z - d = 0,\\
&(84)\ c_3x - a_3y - b_3z - d = 0
\end{aligned}$$

sind. Als Koordinaten dieses Schnittpunktes ergeben sich $x = \frac{m}{n}d$, $y = \frac{m'}{n}d$, $z = \frac{m''}{n}d$, worin:

$$173^{a}) \qquad m = -b_5(b_3 + c_4) - a_3(c_5 + c_4) + b_4(c_5 - b_3),$$

$$173^{b}) \qquad m' = c_5(a_4 - c_3) + b_3(a_5 - a_4) + c_4(a_5 - c_3),$$

$$173^{c}) \qquad m'' = a_5(b_4 - a_3) - c_3(b_5 + b_4) + a_4(a_3 + b_5)$$

ist; oder mit Einführung der σ, ϑ:

$$174^{a}) \qquad m = \sigma^2\vartheta^2\cot^2\varphi - 2\sigma\vartheta^2\cot^2\varphi + \sigma^2\vartheta + 4\vartheta^2\tan\varphi - 2\sigma\vartheta\tan\varphi,$$

$$174^{b}) \qquad m' = \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2} + \sigma\vartheta^2\cot\varphi - \sigma^2\vartheta\cot^2\varphi - 2\vartheta^2\cot\varphi + \sigma\vartheta(3\cot\varphi - 1) - \frac{\sigma^2}{2}\tan\varphi,$$

$$174^{c}) \qquad m'' = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}\cot\varphi - \sigma\vartheta^2\tan\varphi + \sigma^2\vartheta\cot\varphi + 2\vartheta^2\tan\varphi - \sigma\vartheta - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Nun sind die Koordinaten der Ecke 23): $x = z_4$, $y = x_4$, $z = y_4$, also gilt: $x_4 : y_4 : z_4 = m' : m'' : m$, und damit erhält man für die Parameter der Stephanoidgruppierungen mit Ecken dritter Klasse:

$$175) \qquad \begin{cases} s = \dfrac{m'\cot\varphi + m'' + m\cot^2\varphi}{2(m + m' + m'')}, \\[2ex] t = \dfrac{m'' + m\cot\varphi}{m + m' + m''}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Die Gültigkeit dieser Formeln erstreckt sich soweit bis die Ecke 23) dritter Klasse mit der Ecke 33) vierter Klasse zusammenfällt und auch noch auf die dadurch entstehenden 12.5-Ecke. Die gesuchte Kurve K_5 also (vergl. Fig. 3 Taf. 15), die das Gebiet der Dyakishexekontaeder zunächst in Teilgebiete zerlegt, wird aus der ersten Gleichung 175) für $s = 1$ erhalten, nämlich:

$$m\tan\varphi - m'\tan^2\varphi - m'' = 0.$$

Mit Rücksicht auf 174^{a-c}) nimmt diese Gleichung die Form an:

$$176)\qquad \sigma^2\vartheta^2(2\cot\varphi - 1) - 2\sigma\vartheta^2\cot\varphi + 4\vartheta^2\tan^2\varphi - 2\sigma\vartheta\tan\varphi + \sigma^2\tan\varphi = 0.$$

Der Schnittpunkt der Kurve K_5 mit der Pentakisdodekaedergeraden C_1 folgt für $\sigma = 1$ aus $\vartheta^2 - 2\vartheta\frac{3\sqrt{5}+5}{10} + \frac{3\sqrt{5}+5}{10} = 0$, d. h. $\vartheta = \frac{\sqrt{5}+5}{10}$. Die Kurve geht also durch den Dodekaederpunkt D. Um ihren weiteren Verlauf zu übersehen, bestimmen wir ihren Schnittpunkt mit der Triakisikosaedergeraden $\vartheta = \sigma$. Dann wird die Gleichung für σ:

$$\sigma^2 - \sigma\frac{5+\sqrt{5}}{5} + \frac{13\sqrt{5}-25}{10} = 0.$$

Diese hat die brauchbare Wurzel $\sigma = \frac{7\sqrt{5}-5}{10}$, d. h. die Kurve K_5 geht durch den Punkt A', dessen Koordinaten σ, τ die Parameter der A. V. des Triakisikosaeders sind. Für diese und die folgenden beiden Gruppen der Stephanoide $St'_5\binom{2}{1}$ werden wir nun den Satz zu beachten haben, dass die Gruppierungen der i-ten Gruppe k-ter Klasse polarreziprok sind den Gruppierungen k-ter Gruppe i-ter Klasse, dessen Richtigkeit wir wie bisher wegen der grossen Weitläufigkeit der Rechnungen nicht allgemein erhärten, sondern nur an speziellen Typen nachweisen. Am Ende wird die lückenlose Zuordnung der Gebiete wieder übersichtlich zusammengestellt. — In der Tat enthält das rechts von der beschriebenen Kurve K_5 gelegene Gebiet III (vergl. Fig. 3 Taf. 15) die Polyeder vierter Gruppe dritter Klasse, die denen der dritten Gruppe vierter Klasse in dem dort mit IV bezeichneten Gebiete (vergl. Fig. 4 Taf. 14) polarreziprok zugeordnet sind. Den Polyedern der Kurve K_5 entsprechen die auf C_1 in der dritten Gruppe, die überdies mit denen von C_1 der vierten Gruppe identisch sind. Die Polyeder von C_3 in der vierten Gruppe sind polarreziprok denen der Kurve K_4 der dritten. Die Stephanoidgruppierungen von C_2 in der vierten Gruppe vom Punkte A' bis zum Ikosaederpunkte I entsprechen denen der ganzen Triakisikosaedergeraden C_2 der dritten Gruppe von T bis I, wie für die Grenze I schon bekannt ist, für die Grenzen A' und T weiter unten bewiesen wird. — Fragt man nämlich nach denjenigen Polyedern der vierten Gruppe dritter Klasse, deren Hülle ein 20.3-Eck ist, so ergibt sich aus $\frac{t}{\cos^2\varphi} = s$ die Bedingung:

$$m'' + m \tan\varphi - m' \cot\varphi = 0,$$

oder

$$\sigma\vartheta^2 \cot\varphi - \sigma^2\vartheta \cot\varphi - 2\vartheta^2 + 2\sigma\vartheta = 0,$$

die sich auf die Form bringen lässt: $\vartheta(\vartheta-\sigma)(\sigma\cot\varphi-2)=0$. Es folgt aus dieser Gleichung $\vartheta=\sigma$; d. h. für diejenigen Polyeder, deren Kern ein Triakisikosaeder ist, ist die Hülle ein (12+20)-flächiges 20.3-Eck. Diese Polyeder bestehen wieder aus nur sechs Stephanoiden $St'_5\binom{2}{1}$ und für ihre Hüllen ist: $s=\frac{m''_\sigma + m_\sigma \cot\varphi}{m_\sigma + m'_\sigma + m''_\sigma}$, worin die m_σ, m'_σ, m''_σ die Werte haben:

$$m_\sigma = \sigma^2(\sigma^2\cot^2\varphi - \sigma(1+2\cot\varphi) + 2\tan\varphi);$$

$$m'_\sigma = \sigma^2\left(\frac{\sigma^2}{2} - \sigma + \frac{\tan\varphi}{2}\right);$$

$$m''_\sigma = \sigma^2\left(-\frac{\sigma^2}{2}\cot\varphi + \sigma + 2\tan\varphi - \frac{3}{2}\right).$$

Die Einsetzung dieser Werte in die vorhergehende Gleichung ergibt überdies:

$$s = \frac{\sigma^2(2+3\cot\varphi) - 2\sigma(3\cot\varphi+1) + 4\tan\varphi + 1}{\sigma^2(3+\cot\varphi) - 2\sigma(2\cot\varphi+1) + 3(3\tan\varphi-1)}.$$

Wir beschreiben im Anschluss hieran zunächst die folgenden speziellen Stephanoidgruppierungen mit Ecken dritter Klasse.

1. Polyeder. Setzt man in der zuletzt geschriebenen Formel $\sigma=\frac{7\sqrt{5}-5}{10}$, d. h. bestimmt das Polyeder, dessen Kern die A. V. des Triakisikosaeders ist, so ergibt sich $s=1$ und da dann $t=\cos^2\varphi$ wird, haben wir das Ergebnis, dass in diesem Falle die Hülle der sechs $St'_5\binom{2}{1}$ das Triakontagon ist, d. h. der Punkt A' der dritten Gruppe und T der zweiten Gruppe entsprechen polarreziproken Polyedern. In jeder Ecke des Triakontagons fallen zwei Ecken zweier Stephanoide zusammen und bilden eine diskontinuierliche achtkantige Ecke achter Art, deren beide vierkantige Teile bis auf den Scheitel völlig getrennt liegen, wie an dem Modell dieses Polyeders in Fig. 9 Taf. 26 zu ersehen ist. Die Grenzfläche des Polyeders ist das überschlagene Viereck $B_6B_{12}B_8B_{14}$ in der vollständigen Figur der A. V. des Triakisikosaeders (Fig. 1, Taf. 12) und liegt in Fig. 3 Taf. 9 für sich gezeichnet vor. Der innere Raum des Polyeders mitsamt dem 20.3-flächigen Kerne fällt auch hier heraus und der Körper erscheint zwölffach durchbohrt.

2. Polyeder. Für das Triakisikosaeder, dessen Parameter $\sigma = \frac{82}{3(7\sqrt{5}+9)} = \frac{7\sqrt{5}-9}{6}$, $\tau = \frac{\sigma}{\cos^2\varphi} = \frac{11\sqrt{5}-20}{3}$ sind, ergibt sich durch Einsetzen dieses Wertes σ in die obige letzte Gleichung für s: $s = \frac{7\sqrt{5}+5}{22}$, d. h. die Hülle der Stephanoidgruppierung ist die A. V. des 20.3-Ecks. Dieses aus sechs $St'_5 \binom{2}{1}$ bestehende Polyeder ist polarreziprok dem ersten Polyeder der dritten Gruppe. Das Modell zeigt Fig. 6 Taf. 26; die Zeichnung der Grenzfläche ist Fig. 5 Taf. 9. Auch dieses Polyeder ist wiederum hohl.

3. Polyeder. Der Gleichung 176) der Kurve K_5 genügen die Werte: $\sigma = \frac{39-7\sqrt{5}}{22} = 1{,}06125$ und $\tau = 55 - 24\sqrt{5} = 1{,}33432$ eines Dyakishexekontaeders, nämlich die reziproken Werte der Parameter s und t des vierten Polyeders der dritten Gruppe. Für die Hülle des aus zwölf $St'_5 \binom{2}{1}$ bestehenden Polyeders ergibt sich $s = 1$, $t = \frac{4\sqrt{5}-5}{2}$, d. h. die besondere Varietät des (12+20)-flächigen 12.5-Ecks, für welche $k_2 : k_3 = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist. In jeder Ecke des 12.5-Ecks fallen zwei Ecken verschiedener Stephanoide zusammen.

4. Polyeder. Es sei der Kern die A. V. des Deltoidhexekontaeders, d. h. $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-9}{2}$, $\tau = \frac{4\sqrt{5}-5}{3}$. Dann wird die Hülle das (12 + 20 + 30)-flächige 2.60-Eck mit den Parametern $s = \frac{5\sqrt{5}+7}{19}$, $t = \frac{8+3\sqrt{5}}{19}$, für welches $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ist, dessen Zehnecke also regulär sind. Die Gruppierung von zwölf $St'_5 \binom{2}{1}$ ist polarreziprok dem dritten Polyeder der dritten Gruppe und ist in Fig. 2 Taf. 28 dargestellt. Die Fläche zeigt Fig. 1 Taf. 18. Das Polyeder gehört zugleich zur fünften Gruppe, da für die Deltoidhexekontaeder als Kerne die Polyeder der vierten und fünften Gruppe identisch sind.

Wir wenden uns nun zu denjenigen Kombinationen der $St'_5 \binom{2}{1}$ der vierten Gruppe, deren σ und τ dem Gebiete jenseits der Kurve K_5 zugehören, wonach an Stelle der Ecke dritter Klasse 23) die Ecke vierter Klasse 33) tritt, so dass die Koordinaten des Schnittpunktes der drei Flächen 31), 82), 84) des Dyakishexekontaeders $x=z_2$, $y=x_2$, $z=y_2$ sind. Es ist dann $x_2:y_2:z_2 = m':m'':m$, und für die Parameter der Hüllpolyeder dieser Stephanoidgruppierungen hat man:

$$177)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{m' + m'' \tan\varphi + m \cot\varphi}{2(m' \tan^2\varphi + m)}, \\ t = \dfrac{m'' \tan\varphi + m}{m \tan^2\varphi + m} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Für die Grenzkurve K_5 des Gebietes, nämlich $s=1$, erhält man wieder die frühere Gleichung. Dass das Gebiet bis zur Grenzgeraden C_1 sich erstreckt, folgt daraus, dass für diese die Polyeder noch von der vierten Klasse sein müssen, da sie mit denen vierter Klasse der dritten Gruppe identisch sind. Nach dem Satze, dass die polarreziproken Polyeder i-ter Gruppe i-ter Klasse Teilgebieten derselben Gruppe angehören, bleibt hier nur die Möglichkeit, dass das Gebiet DTA' in zwei zerfällt, deren zugehörige Polyeder polarreziprok sind. Um diese Gebiete gegen einander abzugrenzen, suchen wir die autopolaren Polyeder der Gruppe zu bestimmen. Für diese muss sich $s=\frac{1}{\sigma}$, $t=\frac{1}{\tau}$ oder $\frac{t}{\cos^2\varphi}=\frac{1}{\tau\cos^2\varphi}=\frac{1}{\vartheta}$ ergeben. Nun folgt aus

$$\sigma \cdot \frac{m' + m''\tan\varphi + m\cot\varphi}{2(m'\tan^2\varphi + m)} = \vartheta \cdot \frac{m''\tan\varphi + m}{m'\tan^2\varphi + m}$$

die Bedingung:

$$m'\sigma + m''\tan\varphi \cdot (\sigma - 2\vartheta) + m(\sigma\cot\varphi - 2\vartheta) = 0.$$

Führt man in diese Gleichung die Werte von m, m', m'' ein, so lässt sie sich auf die Form bringen:

$$(\vartheta-\sigma)\left(-\sigma^2\vartheta^2\cot^3\varphi + 2\sigma\vartheta^2(4+\cot\varphi) - 4\vartheta^2\cot\varphi - 2\sigma\vartheta\tan\varphi + \sigma^2\tan\varphi\right) = 0.$$

Da nun offenbar nicht allgemein $\vartheta=\sigma$ sein kann, so gibt der zweite Faktor der linken Seite, gleich Null gesetzt, die Bedingung dafür, dass die bezw. Werte von σ und ϑ auf autopolare Polyeder führen. Deuten wir die Gleichung als die einer Kurve C' (vergl. Fig. 3 Taf. 15), so erkennen wir deren Verlauf, wenn wir ihre Schnittpunkte mit C_1 und C_2 bestimmen. Für $\sigma=1$ ergibt sich die Gleichung: $\vartheta^2 - 2\vartheta\frac{\tan\varphi}{7-4\cot\varphi} + \frac{\tan\varphi}{7-4\cot\varphi} = 0$ mit der

Wurzel $\vartheta = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$, d. h. die Kurve C' läuft durch den Dodekaederpunkt D. Für $\vartheta = \sigma$ ergibt sich für σ die Gleichung:

$$\sigma^2 - 2\sigma(7\tan\varphi - 3) + 6 - 7\tan\varphi = 0,$$

und daraus erhält man für die σ-koordinate des Schnittpunktes Θ von C' mit C_2 den Wert: $\sigma = \frac{7\sqrt{5}-13}{2} \pm (7-3\sqrt{5})$, wovon nur $\sigma = \frac{13\sqrt{5}-27}{2} = 1{,}0344$ brauchbar ist. Es gibt also eine einfach unendliche Reihe von Dyakishexekontaedern für Werte der σ, τ auf C' zwischen dem Dodekaeder und dem Triakisikosaeder $\sigma = \frac{13\sqrt{5}-27}{2}$, $\tau = 23\sqrt{5} - 50$, für welche die Gruppierungen der $St'_5\binom{2}{1}$ der vierten Gruppe autopolare Polyeder werden, deren Kerne und Hüllen also polarreziprok sind. Für das eben genannte Grenzpolyeder ist die Hülle das 20.3-Eck, für welches $s = \frac{13\sqrt{5}+27}{58}$, $t = \frac{23\sqrt{5}+50}{145}$, also $k_1 : k_2 = \frac{3\sqrt{5}-5}{2} : 1$ ist. Durch die beschriebene Kurve C' zerfällt das Gebiet IV in zwei Teilgebiete, deren Polyeder polarreziprok zu einander sind und es zerfallen überdies die Polyeder der Geraden TA' in zwei einander polar zugeordnete einfach unendliche Reihen, deren Grenzpunkte einerseits T und A', andererseits der Punkt Θ für das gemeinschaftliche Triakisikosaeder ist, das ein autopolares Polyeder ergibt.

7. **Die fünfte Gruppe der Stephanoide $St'_5\binom{2}{1}$.** Der Schnittpunkt der Flächen 41), 72), 74), deren Gleichungen

$$\begin{aligned}
(41)\quad & b_5x - c_5y + a_5z - d = 0,\\
(72)\quad & c_4x + a_4y - b_4z - d = 0,\\
(74)\quad & c_3x - a_3y + b_3z - d = 0
\end{aligned}$$

sind, hat die Koordinaten $x = \frac{m}{n}d$, $y = \frac{m'}{n}d$, $z = \frac{m''}{n}d$, worin:

$$\begin{aligned}
178^{a})\quad & m = a_4(b_3 - a_5) - a_3(b_4 + a_5) + c_5(b_3 + b_4),\\
178^{b})\quad & m' = b_4(b_5 - c_3) + b_3(b_5 - c_4) + a_5(c_4 - c_3),\\
178^{c})\quad & m'' = c_4(c_5 - a_3) - c_3(a_4 + c_5) + b_5(a_3 + a_4),
\end{aligned}$$

oder nach Einführung der a, b, c als Funktionen von ϑ und σ:

179^a) $m = -2\sigma\vartheta^2 \tan\varphi + 4\vartheta^2 \tan\varphi - 2\sigma\vartheta \tan\varphi,$

179^b) $m' = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}(3\cot\varphi + 1) + \sigma\vartheta^2(3\cot\varphi + 2) - \sigma^2\vartheta - 2\vartheta^2\cot\varphi - \sigma\vartheta\tan\varphi + \frac{\sigma^2}{2}\cot\varphi,$

179^c) $m'' = \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2} - \sigma\vartheta^2\cot^2\varphi + \sigma^2\vartheta\cot\varphi + 2\vartheta^2\tan\varphi + \sigma\vartheta(1 - 2\tan\varphi) - \frac{\sigma^2}{2}(2 - \tan\varphi).$

Ist nun der Schnittpunkt der oben genannten Flächen die Ecke zweiter Klasse 13), so ist $x = x_5$, $y = y_5$, $z = z_5$, d. h. $x_5 : y_5 : z_5 = m : m' : m''$ und es ergibt sich für die Parameter s und t der Stephanoidgruppierung:

180)
$$\begin{cases} s = \dfrac{m\cot\varphi + m' + m''\cot^2\varphi}{2(m + m' + m'')}, \\ t = \dfrac{m\cot\varphi + m''}{m + m' + m''}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Nun gehen die Gruppierungen der $St'_5 \binom{2}{1}$ zweiter Klasse in solche der ersten über, wenn für das 20.3-Eck als Hülle die Ecke 13) mit der Ecke 3) zusammenfällt, in solche der dritten Klasse, wenn für das 60-Eck als Hülle die Ecke 13) mit der Ecke 23) identisch wird. Es ergeben sich also für das Gebiet der Gruppierungen zweiter Klasse hier zwei Grenzkurven K_6 und K_7 (vergl. Fig. 4 Taf. 15). Die Gleichung der ersten folgt aus $\frac{t}{\cos^2\varphi} = s$, d. h. wenn $m\cot\varphi - m' - m''\tan\varphi = 0$ ist, oder

181) $$\sigma^2\vartheta^2\cot^2\varphi - 2\sigma\vartheta^2(2 + \cot\varphi) + 4\vartheta^2\cot\varphi - 2\sigma\vartheta\tan\varphi - \sigma^2\tan^2\varphi = 0.$$

Die Gleichung der zweiten Kurve K_7 erhält man für $\frac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$, nämlich: $m + m'\tan\varphi - m''\cot\varphi = 0$, oder

182) $$-\sigma^2\vartheta^2\cot^2\varphi + 2\sigma\vartheta^2(2 + \cot\varphi) - 2\sigma^2\vartheta\cot\varphi - 4\vartheta^2\tan^2\varphi - 2\sigma\vartheta\tan\varphi + \sigma^2\cot\varphi = 0.$$

Nun ist für das Ikosaeder $m = -2a_1a_4$, $m' = m'' = 2a_4(a_4 - c_1)$, wonach die linken Seiten der Gleichungen der beiden Kurven in der ersten Form zu $-2a_4\cot\varphi(a_1 + a_4 - c_1)$ und $-2a_4(a_1 + a_4 - c_1)$ werden. Es ist aber für das Ikosaeder $a_1 + a_4 - c_1 = 0$, d. h. die beiden Kurven K_6 und K_7 gehen durch den Ikosaederpunkt I. Wir suchen nun den Schnittpunkt B der Kurve K_6 mit der Geraden $\sigma = 1$. Dann ergibt sich für ϑ die Gleichung $3\vartheta^2 - 2\vartheta - \tan\varphi = 0$ und daraus die eine brauchbare Wurzel $\vartheta = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{\frac{3\sqrt{5} - 1}{2}}\right)$.

Der hieraus folgende Wert von τ ist: $\tau = \frac{1}{6}\left(5-\sqrt{5}+\sqrt{10(5\sqrt{5}-9)}\right) = 1{,}2389$. Die Kurve hat also den in der Figur gezeichneten Verlauf. Um die Lage der Kurve K_7 zu erkennen, schneiden wir sie ebenfalls mit der Geraden $\sigma = 1$. Dann kommt für ϑ die Gleichung: $5\vartheta^2 - 2\vartheta(\cot\varphi + 2) + \cot^2\varphi = 0$. Ihr wird durch $\vartheta = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \cos^2\varphi$ genügt, d. h. es ist $\tau = 1$ und die Kurve K_7 geht durch den Dodekaederpunkt D. Es ist also das Gebiet der konvexen Dyakishexekontaeder in drei Teilgebiete zerlegt. Für das erste, in der Figur mit II bezeichnete, sind die Stephanoidgruppierungen von der zweiten Klasse, und die Parameter der Hüllen sind durch die Formeln 180) gegeben. Für die Pentakisdodekaeder als Kerne, die hier vom Punkte D auf C_1 bis zum Punkte B in Frage kommen, sind die Hüllen 2.60-Ecke und es fallen übrigens die Polyeder für Werte σ, τ der ganzen Geraden C_1 mit solchen der folgenden sechsten Gruppe zusammen. Die Polyeder dieses Gebietes II sind polarreziprok denen der zweiten Gruppe fünfter Klasse des dort mit V bezeichneten Gebietes (vergl. Fig. 3 Taf. 13) und zwar entsprechen die Polyeder der Kurve K_6 von B bis I denen der Geraden C_2 von A bis T in der zweiten Gruppe; die Polyeder der Kurve K_7 von D bis I denen der Kurve C_3 von D bis I in der zweiten Gruppe, und die der Geraden C_1 von B bis D in der fünften Gruppe sind polarreziprok zu denen der Kurve K_3 von D bis A in der zweiten Gruppe.

Für die Koordinaten der ersten Ecke 23) dritter Klasse der Stephanoidgruppierungen des Gebietes III gilt: $x_4 : y_4 : z_4 = m' : m'' : m$, und die Parameter der Hülle sind also:

183)
$$\begin{cases} s = \dfrac{m'\cot\varphi + m'' + m\cot^2\varphi}{2(m+m'+m'')}, \\ t = \dfrac{m'' + m\cot\varphi}{m+m'+m''}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Für die Polyeder des jenseits der Kurve K_6 gelegenen Gebietes I ist die Ecke erster Klasse die Ecke 3) der 2.60-Ecke und für deren Koordinaten ist $x_4 : y_4 : z_4 = m : m' : m''$, d. h. es wird für die Hüllpolyeder der Gruppierungen:

184)
$$\begin{cases} s = \dfrac{m\cot\varphi + m' + m''\cot^2\varphi}{2(m+m'+m'')}, \\ t = \dfrac{m' + m''\cot\varphi}{m+m'+m''}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Die Polyeder dieser beiden Gebiete III und I sind polarreziprok denen des Gebietes V der dritten Gruppe bezw. ersten Gruppe. Die Grenzen DC_3I und DK_7I des Gebietes III der fünften Gruppe entsprechen den Grenzen DK_4I und DC_3I des Gebietes V der dritten Gruppe. Die Grenzen TC_1B, BK_6I, IC_2T des Gebietes I der fünften Gruppe entsprechen den Grenzen DK_2A, AC_2I, IK_1D des Gebietes V der ersten Gruppe, wie für die Grenzpolyeder in den Punkten D, I, T, A und B gezeigt wird, bezw. schon gezeigt ist. Von speziellen Typen seien die folgenden erwähnt.

1. Polyeder. Ist der Kern das Pentakisdodekaeder $\sigma = 1$, $\tau = 5(\sqrt{5}-2)$, so ergibt sich für die Hülle: $s = \frac{5\sqrt{5}+7}{19}$, $t = \frac{3\sqrt{5}+8}{19}$ und damit $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, d. h. die Zehnecke des Hüllpolyeders sind regulär. Diese Stephanoidgruppierung, die dem dritten Polyeder der zweiten Gruppe polarreziprok ist, zeigt Fig. 2 Taf. 29. Die Fläche ist in Fig. 2 Taf. 11 gezeichnet. Sie besteht gleichsam aus zwei Sternfünfecken entgegengesetzter Perimeterschraffierung, die in einer Ecke aneinander grenzen, und zwei sie überdies verbindenden dreieckigen Zellen entgegengesetzten Vorzeichens, so dass der Gesamtinhalt wieder Null ist. Die Art dieses diskontinuierlichen Achtecks ist $a = 4$. Die Art jeder Ecke ist $\alpha = 4$. Es ist $2A = 60.4 + 2.60.4 - 60.4 - 60.4 = 240$; $A = A' = 120 = \frac{K}{2}$.

2. Polyeder. Der Gleichung 181) der Grenzkurve K_6 genügen $\sigma = \frac{7\sqrt{5}+5}{20} = 1{,}03262$, $\tau = \frac{4\sqrt{5}-5}{3} = 1{,}31443$, d. h. die Parameter eines bestimmten Dyakishexekontaeders. Die Hülle der Stephanoidgruppierung ist die A. V. des 20.3-Ecks und die Ecken gehören also zugleich der zweiten und ersten Klasse an. Dieses Polyeder ist polarreziprok dem sechsten Polyeder der ersten Gruppe, das zugleich der zweiten Gruppe zuzuzählen ist.

3. Polyeder. Auf der Grenzkurve K_7 liegt der Punkt $\sigma = \frac{15-2\sqrt{5}}{10} = 1{,}05279$, $\tau = \frac{100-27\sqrt{5}}{31} = 1{,}23787$. Das sind die Parameter eines Dyakishexekontaeders, dessen zugehörige Gruppierung von zwölf $St'_5 \binom{2}{1}$ als Hülle die A. V. des 60-Ecks besitzt und polarreziprok zum ersten Polyeder der zweiten Gruppe ist.

4. Polyeder. Für das Pentakisdodekaeder im Grenzpunkte B der Kurve K_6, für welches $\tau = \frac{5-\sqrt{5}+\sqrt{10(5\sqrt{5}-9)}}{6}$ gefunden wurde, ergibt sich eine Gruppierung von zwölf $St'_5\binom{2}{1}$, deren Hülle dasjenige 20.3-Eck ist, dessen Parameter $s = \sqrt{\frac{5\sqrt{5}+9}{22}}$, $t = s\cos^2\varphi = \sqrt{\frac{6\sqrt{5}+13}{55}}$ sind. Bei diesem diskontinuierlichen Polyeder liegen also zwei Flächen in einer Ebene des Kernes, und zwei Ecken verschiedener Stephanoide in einer Ecke der Hülle. Es ist polarreziprok dem zweiten Polyeder der zweiten Gruppe.

8. **Die sechste Gruppe der Stephanoide** $St'_5\binom{2}{1}$. Zur Erzeugung der Stephanoide $St'_5\binom{2}{1}$ der sechsten Gruppe kommen die Flächen

51,	52, 53,	54, 55,	56, 57,	58, 59,	60
65, 64,	63, 62,	61, 70,	69, 68,	67, 66,	

des Dyakishexekontaeders in Frage. Es zerfallen nun nach der Lage dieser Flächen die sämtlichen Dyakishexekontaeder in zwei Ordnungen. Für die erste Ordnung schneidet sich die obere Reihe der Flächen in einem Punkte der Achse G_1, die untere in einem Punkte der Achse G'_1. Für die zweite Ordnung aber schneidet sich die obere Reihe der Flächen in einem Punkte der Achse G'_1, die untere dagegen auf der Achse G_1. Den Übergang zwischen beiden Ordnungen bildet die unendliche Reihe von Dyakishexekontaedern, für welche sämtliche oben genannten Flächen parallel der Achse $G_1G'_1$ laufen, was dann natürlich ebenso für die je 20 Flächen in Bezug auf die übrigen Achsen G gilt. Man kann die Bedingung, welche zwischen σ und τ für diese Reihe von 2.60-Flachen bestehen muss, analytisch-geometrisch ableiten; einfacher erhält man sie durch die Beachtung der polaren Reziprozität. Denn wie bei den Grenzpolyedern der sechsten Klasse (siehe die erste Gruppe), die zugleich zwei Ordnungen angehörten, je 2.10 Punkte in einer Ebene lagen, so gehen hier je 2.10 Ebenen durch einen Punkt, nämlich das Unendlichweite. Die Bedingung für diese Grenzpolyeder erster und zweiter Ordnung der sechsten Gruppe wird also aus der früheren erhalten, indem man t und s durch $\frac{1}{\tau}$ bezw. $\frac{1}{\sigma}$ ersetzt, und führt auf $\tau = \frac{1}{\cos^2\varphi}$ (σ beliebig). Dies ist in geometrischer Darstellung (vergl. Fig. 2 Taf. 17) eine Gerade K_8 parallel der σ-achse durch den Triakontaederpunkt T und den Punkt G desjenigen Deltoidhexekontaeders, für welches $\sigma = \frac{4}{1+\cot^2\varphi} = \frac{2(5-\sqrt{5})}{5} = 1{,}10557$ ist. Da nun offenbar alle Pentakisdodekaeder einschliesslich des Dodekaeders zur ersten Ordnung der Dyakishexekontaeder gehören, so enthält das Gebiet I_1 auf der der σ-achse zugewandten Seite der Geraden K_8 die Dyakishexekontaeder erster Ordnung, das andere I_2 die der zweiten. Es sind also alle Triakisikosaeder von der zweiten Ordnung, während die Deltoidhexekontaeder in solche erster und zweiter Ordnung zerfallen.

Wir bestimmen nun den Schnittpunkt der drei Flächen 51), 62), 64) des Dyakishexekontaeders, deren Gleichungen

$$\begin{aligned}(51)\quad & b_3x - c_3y + a_3z - d = 0,\\ (62)\quad & c_2x + a_2y - b_2z - d = 0,\\ (64)\quad & c_5x - a_5y + b_5z - d = 0\end{aligned}$$

sind. Es kommt: $x = \frac{m}{n}d$, $y = \frac{m'}{n}d$, $z = \frac{m''}{n}d$, worin:

$$185^{a})\quad m = a_2(b_5 - a_3) - a_5(b_2 + a_3) + c_3(b_5 + b_2),$$

$$185^{b})\quad m' = b_2(b_3 - c_5) + b_5(b_3 - c_2) + a_3(c_2 - c_5),$$

$$185^{c})\quad m'' = c_2(c_3 - a_5) - c_5(a_2 + c_3) + b_3(a_5 + a_2),$$

oder

$$186^{a})\quad m = 2\sigma\vartheta^2\tan\varphi - 2\sigma\vartheta\tan\varphi,$$

$$186^{b})\quad m' = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}(3\cot\varphi + 1) + 3\sigma\vartheta^2\cot\varphi + \sigma^2\vartheta - 2\vartheta^2\tan\varphi - \sigma\vartheta\cot^2\varphi + \frac{\sigma^2}{2}\cot\varphi,$$

$$186^{c})\quad m'' = \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2} + \sigma\vartheta^2\tan\varphi - \sigma^2\vartheta\cot\varphi - 2\vartheta^2 + 3\sigma\vartheta - \frac{\sigma^2}{2}(2 - \tan\varphi) \quad \text{ist.}$$

Sind nun die Dyakishexekontaeder von der ersten Ordnung, so ist der Schnittpunkt der drei genannten Ebenen die Ecke 3) nach der früheren Ableitung, und es ist dann: $x_4 : y_4 : z_4 = m : m' : m''$, wonach für die Parameter der Hüllen der Stephanoidgruppierungen die Formeln gelten:

$$187)\quad \begin{cases} s = \dfrac{m\cot\varphi + m' + m''\cot^2\varphi}{2(m + m' + m'')},\\[2ex] t = \dfrac{m' + m''\cot\varphi}{m + m' + m''}\cos^2\varphi.\end{cases}$$

Das Gebiet dieser Stephanoidgruppierungen liegt also auf dem dem Dodekaederpunkt D zugewandten Ufer der Geraden K_8. Um seine weitere Begrenzung zu finden, fragen wir nach den Polyedern, deren Hülle ein 20.3-Eck ist, die also nach den Ecken den Übergang von Polyedern der ersten zur zweiten Klasse bilden. Dann muss $\frac{t}{\cos^2\varphi} = s$ sein. Dies führt auf die Bedingung $m' - m\cot\varphi + m''\tan\varphi = 0$ oder

$$188)\qquad -\sigma^2\vartheta^2\cot^2\varphi + 2\sigma\vartheta^2\cot\varphi - 4\vartheta^2\tan\varphi + 2\sigma\vartheta\tan\varphi + \sigma^2\tan^2\varphi = 0.$$

Wir untersuchen nun den Lauf dieser Kurve K_9 (vergl. Fig. 2 Taf. 17). Ihr Schnittpunkt mit der Geraden $\sigma = 1$ hat die τ-koordinate, die aus $\vartheta^2 - \frac{2}{3}\vartheta - \frac{\tan\varphi}{3} = 0$ folgt. Es ist zunächst $\vartheta = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{\frac{3\sqrt{5}-1}{2}}\right)$ und danach $\tau = \frac{1}{6}\left(5 - \sqrt{5} + \sqrt{10(5\sqrt{5}-9)}\right)$, d. h. es ergibt sich derselbe Grenzpunkt B, wie in der fünften Gruppe. Wir bestimmen ferner den Schnittpunkt C von K_9 mit der Kurve C_3. Setzen wir $\vartheta = \frac{\sigma}{4 - \sigma\cot^2\varphi}$, so reduziert sich nach Weglassung des Faktors σ^2 die ganze Gleichung 188) auf $2\sigma - \tan\varphi - 4\tan^2\varphi = 0$, d. h. es ist $\sigma = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{4} = 1{,}07295$. Dazu ergibt sich $\tau = \frac{45 - 14\sqrt{5}}{11} = 1{,}2450$. Die Kurve K_9 hat also den in der Figur angedeuteten Verlauf. Die zwischen der Geraden K_8 und ihr liegenden Werte σ, τ ergeben Polyeder der ersten Klasse, die jenseits von ihr liegenden gehören der zweiten Klasse an.

Ist der Kern der Stephanoidgruppierung ein Deltoidhexekontaeder, also $\vartheta = \frac{\sigma}{4 - \sigma\cot^2\varphi}$, so nehmen die Grössen m, m', m'' die Form an:

$$m_d = \frac{2\sigma^2[\sigma(\tan\varphi + \cot\varphi) - 4\tan\varphi]}{(4 - \sigma\cot^2\varphi)^2},$$
$$m'_d = \frac{2\sigma^2(1-\sigma)\tan\varphi}{(4 - \sigma\cot^2\varphi)^2},$$
$$m''_d = \frac{2\sigma^2(\sigma\tan^2\varphi - 3 + 4\tan\varphi)}{(4 - \sigma\cot^2\varphi)^2}.$$

Soll nun die Hülle der Gruppierung ein (12+20)-flächiges 12.5-Eck sein, so ist $s = 1$, woraus sich für m, m', m'' die Relation ergibt:

$$m''\tan\varphi - m' - m\tan^2\varphi = 0.$$

Es ist aber:

$$m''_d \tan\varphi - m'_d - m_d \tan^2\varphi = 0,$$

d. h. ist der Kern der Stephanoidgruppierungen der sechsten Gruppe ein Deltoidhexekontaeder erster Ordnung, so ist die Hülle ein (12+20)-flächiges 12.5-Eck. Führt man die Werte m_d, m'_d, m''_d in die Formel 187) für t ein, so vereinfacht sich diese zu:

$$t = \frac{2\cot\varphi - 3}{3 - \tan\varphi - 2\sigma}\cos^2\varphi,$$

während s natürlich gleich 1 wird. — Die Stephanoidgruppierungen dieses Gebietes I_1 sind polarreziprok denen des Gebietes VI_1 der ersten Gruppe mit Ecken sechster Klasse erster Ordnung. Die Polyeder der sechsten Gruppe der Kurve K_9 zwischen B und C in Fig. 2 Taf. 17 sind polarreziprok denen der ersten Gruppe der Geraden C_2 zwischen A und T zugeordnet, wie für die Grenzpunkte später noch bewiesen wird. Die Polyeder der sechsten Gruppe der Kurve C_3 von C bis G entsprechen denen der ersten Gruppe der Geraden C_1 von T bis D. Es wird an den Grenzpolyedern noch gezeigt werden, dass die Hüllen der Polyeder der sechsten Gruppe auf C_3 von C bis G wirklich sämtliche Werte t für die 12.5-Ecke erschöpfen. Die Polyeder der sechsten Gruppe der Geraden C_1 von B bis T, deren Hüllen 2.60-Ecke sind, sind polarreziprok denen der ersten Gruppe der Kurve K_2 zugeordnet, während die ganze Gerade K_8 in Fig. 2 Taf. 17 gewissermassen dem Dodekaederpunkte D in Fig. 2 Taf. 13 entspricht.

Da für die Polyeder der sechsten Gruppe, die nach ihren Ecken der zweiten Klasse angehören, dieselben Ebenen 51), 62), 64), wie vorher durch ihren Schnitt die erste Ecke des Stephanoids ergeben, die aber hier die Ecke 13) des 2.60-Ecks ist, so erledigen wir zunächst diese Gruppierungen der $St'_5\,(^2_1)$. Es ist jetzt $x_5 : y_5 : z_5 = m : m' : m''$, und damit für die Hüllpolyeder:

$$189)\quad \begin{cases} s = \dfrac{m\cot\varphi + m' + m''\cot^2\varphi}{2\,(m + m' + m'')}, \\[2ex] t = \dfrac{m\cot\varphi + m''}{m + m' + m''}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Für $\dfrac{t}{\cos^2\varphi} = s$ ergibt sich wiederum die Gleichung der Kurve K_9. Eine andere neue Grenze besitzt das Gebiet II (vergl. Fig. 2 Taf. 17) dieser

Stephanoidgruppierungen nicht und reicht also bis zum Dodekaederpunkt D. Die Polyeder dieses Gebietes II sind polarreziprok denen des Gebietes VI in Fig. 3 Taf. 13 für die $St'_5\binom{2}{1}$ der zweiten Gruppe sechster Klasse. Die Stephanoide der sechsten Gruppe der Geraden C_1 von D bis B sind denen der zweiten Gruppe der Kurve K_3 von D bis A zugeordnet, die der sechsten Gruppe auf C_3 von D bis C sind polarreziprok denen der zweiten Gruppe auf C_1 von D bis T. Es sind also die Hüllen der Stephanoidkombinationen der sechsten Gruppe zweiter Klasse, deren Kerne Deltoidhexekontaeder sind, $(12+20)$-flächige 12.5-Ecke. Denn setzt man in der ersten Gleichung 184) $s=1$, so kommt die Relation $-m\tan^2\varphi - m' + m''\tan\varphi = 0$. Diese Gleichung wurde aber identisch durch $m=m_d, m'=m'_d, m''=m''_d$ erfüllt, wodurch die Richtigkeit der obigen Angabe erhärtet ist.

Wir untersuchen nun die Stephanoide der sechsten Gruppe, deren Kernpolyeder Dyakishexekontaeder der zweiten Ordnung sind. Die erste Fläche des Stephanoides liegt dann in der Ebene 65) des 2.60-Flaches, denn das ist die erste Fläche der o b e r e n Zone links von der Symmetrieebene durch die Achsen G_1 und C_1. Das überschlagene Viereck in dieser Ebene entsteht als Schnitt mit den Ebenen 52), 54), 58), 60) und zwar sind die Ecken der Flächen dann die folgenden: 3 (65, 52, 54); 9 (65, 58, 60); 116 (65, 58, 52); 114 (65, 60, 54). Wir bestimmen die Koordinaten der Ecke 3) als Schnitt der Flächen:

$$\begin{aligned}
(65)\quad & b_4x - c_4y + a_4z - d = 0,\\
(52)\quad & c_2x - a_2y + b_2z - d = 0,\\
(54)\quad & c_5x + a_5y - b_5z - d = 0.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich, wenn wir die m zur Unterscheidung von den vorigen zunächst mit dem Index 1 versehen: $x=\frac{m_1}{n}d,\ y=\frac{m'_1}{n}d,\ z=\frac{m''_1}{n}d$, worin:

190a) $$m_1 = a_2(b_5+a_4) + a_5(a_4-b_2) - c_4(b_5+b_2),$$

190b) $$m'_1 = b_2(c_5-b_4) + b_5(c_2-b_4) + a_4(c_2-c_5),$$

190c) $$m''_1 = c_2(a_5+c_4) + c_5(a_2-c_4) - b_4(a_5+a_2).$$

Da wir die Koordinaten der Ecke 3) vor uns haben, ergibt sich also: $x_4:y_4:z_4 = m_1:m'_1:m''_1$, und es ist für die Parameter der Hüllpolyeder

191) $$\begin{cases} s = \dfrac{m_1\cot\varphi + m'_1 + m''_1\cot^2\varphi}{2(m_1+m'_1+m''_1)}, \\[2ex] t = \dfrac{m'_1 + m''_1\cot\varphi}{m_1+m'_1+m''_1}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Führt man nun in die Ausdrücke 190) von $m_1, m'_1\, m''_1$ die Werte der a, b, c in σ und ϑ ein, so ergibt sich, dass $m_1 = m$, $m'_1 = m'$, $m''_1 = -m''$ ist. — Wir untersuchen nun diejenigen Polyeder der ersten Klasse der sechsten Gruppe zweiter Ordnung, deren Hülle ein $(12 + 20 + 30)$-flächiges 60-Eck ist. Es ist dann $\frac{t}{\cos^2\varphi} = 4s - \cot^2\varphi$, und mit Rücksicht auf 191):

$$m_1 \tan^2\varphi - m'_1 + m''_1 \tan\varphi = 0.$$

Ist nun der Kern der Stephanoidgruppierung ein Deltoidhexekontaeder, so ist $\vartheta = \frac{\sigma}{4 - \sigma\cot^2\varphi}$ in die Werte von m_1, m'_1, m''_1 einzuführen, wodurch sie die einfachere Form $m_{1,d}, m_{1,}{'}_d, m_{1,}{''}_d$ annehmen mögen. Dann ist $m_{1,d} \equiv m_d, m'_{1,d} \equiv -m'_d$, $m_{1,}{''}_d \equiv -m''_d$. Die Einsetzung der Werte $m_{1,d}, m_{1,}{'}_d, m_{1,}{''}_d$ in die Bedingung dafür, dass die Hülle des Polyeders ein 60-Eck ist, macht deren linke Seite zu $m_{1,d} \tan^2\varphi - m_{1,}{'}_d + m_{1,}{''}_d \tan\varphi$, oder mit Berücksichtigung der vorhergehenden Identitäten, zu: $m_d \tan^2\varphi + m'_d - m''_d \tan\varphi$.

Dieser Ausdruck war aber nach früherem identisch Null, d. h.: Ist der Kern der Stephanoide der sechsten Gruppe ein Deltoidhexekontaeder zweiter Ordnung, so ist die Hülle ein $(12 + 20 + 30)$-flächiges 60-Eck. Führt man überdies die Werte

$$m_{1,d} = \frac{2\sigma^2[\sigma(\tan\varphi + \cot\varphi) - 4\tan\varphi]}{(4 - \sigma\cot^2\varphi)^2},$$

$$m_{1,}{'}_d = \frac{2\sigma^2(\sigma - 1)\tan\varphi}{(4 - \sigma\cot^2\varphi)^2},$$

$$m_{1,}{''}_d = \frac{2\sigma^2(3 - 4\tan\varphi - \sigma\tan^2\varphi)}{(4 - \sigma\cot^2\varphi)^2}$$

in die allgemeinen Formeln von s und t ein, so erhält man die Werte für die Parameter der 60-Ecke. Wir benutzen nur die Formel für t, da sie eine einfache Form annimmt und für die Bestimmung der Varietät der Einzelpolyeder hinreichend ist. Es wird: $t = \frac{(2\cot\varphi - 3)\cos^2\varphi}{(4\sigma - 9)\tan\varphi + 3}$.

Für das Triakisikosaeder als Kern fallen die Stephanoide der sechsten Gruppe mit denen der fünften zusammen.

Das Gebiet I_2 (vergl. Fig. 2 Taf. 17) enthält die polarreziproken Stephanoidgruppierungen zu denen des Gebietes VI_2 der ersten Gruppe (vergl.

Fig. 2 Taf. 13). Den Polyedern der Geraden C_2 von T bis I der sechsten Gruppe entsprechen die der Kurve K_1 von D bis I in der ersten Gruppe; den Stephanoiden der sechsten Gruppe der Kurve C_3 von G bis I entsprechen die der ersten Gruppe für die Kurve C_3 von D bis I. Von der Grenzkurve K_8 wurde bereits früher gesprochen. — Wir wenden uns nun zur Betrachtung einer Reihe spezieller Polyedertypen der drei Gebiete I_1, II und I_2 der sechsten Gruppe.

1. Polyeder. Ist der Kern der Stephanoidgruppierung das Deltoidhexekontaeder für $\sigma = \frac{11-3\sqrt{5}}{4}$ (die Koordinate des Schnittpunktes C der Kurven K_9 und C_3), so ergibt die Formel 187) $t = \cos^2\varphi$, d. h. die Hülle ist in diesem Falle das Triakontagon. Dieses diskontinuierliche Polyeder zeigt Tafel 24 Fig. 7; die Fläche ist in Fig. 2 Tafel 14 das Viereck $B_3 B'_8 B_5 B'_{11}$. In jeder Ecke des Triakontagons fallen zwei Ecken verschiedener der sechs $St'5\,(\frac{2}{1})$ zusammen, so dass durch jede der Ecken B in der vollständigen Figur sieben Spuren zu zeichnen sind. Die beiden vierkantigen Ecken, die eine diskontinuierliche achtkantige achter Art bilden, liegen bis auf die Scheitel getrennt. Das Polyeder ist polarreziprok dem ersten Polyeder der ersten Gruppe.

2. Polyeder. Für die A.V. des Deltoidhexekontaeders, d. h. $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-9}{2}$, ergibt sich eine Gruppierung von sechs Stephanoiden, für deren Hülle $s = 1$, $t = \frac{\sqrt{5}+2}{5}$ ist. Für dieses besondere 12.5-Eck ist $k_2 : k_3 = 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Das diskontinuierliche Polyeder, das dem zweiten Polyeder der ersten Gruppe reziprok ist, zeigt Tafel 26 Fig. 1; seine Grenzfläche ist in Tafel 10 Fig. 3 das Viereck $S_1 S_5 S_4 S_2$.

3. Polyeder. Der Grenzwert $\sigma = \frac{2(5-\sqrt{5})}{5}$ für den Punkt G der Fig. 2 Taf. 17 führt, wie seine Einsetzung in die allgemeine Formel zeigt, auf $t = 1$, und da $s = 1$ ist, so heisst das, die Hülle ist in diesem Falle das Ikosaeder. Die Gruppierung reduziert sich dann freilich, da beim Ikosaeder die fünfkantigen Grenzflächen des Pentakisdodekaeders in Punkte zusammengeschrumpft sind, auf sechs Gerade, nämlich die G-Achsen. Aber der Wert zeigt, dass die Gruppierungen, deren Kerne Deltoidhexekontaeder für Werte σ, τ der Kurve C_3 zwischen C und G sind, wie früher behauptet, sämtliche

möglichen 12.5-Ecke zwischen dem Triakontagon und dem Ikosaeder als Hüllen erschöpfen.

4. Polyeder. Für die A. V. des Triakisikosaeders als Kern ergibt sich eine Gruppierung von zwölf $St.'_5\,(^2_1)$, deren Hüllpolyeder ein (12+20+30)-flächiges 2.60-Eck ist, für welches nach den Formeln 191) $s = 4\,(\sqrt{5}-2)$, $t = \frac{4\sqrt{5}-5}{5}$ wird. Damit findet man für die Kanten die Proportion: $k_1 : k_2 : k_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1 : \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Dieses Polyeder, als Beispiel einer allgemeineren Stephanoidgruppierung mit Ecken sechster Klasse zeigt Tafel 29 Fig. 1; die Fläche ist auf Tafel 20 gezeichnet. Die Gruppierung ist polarreziprok dem fünften Polyeder der ersten Gruppe.

5. Polyeder. Für das Deltoidhexekontaeder der zweiten Ordnung $\sigma = \frac{9-\sqrt{5}}{6} = 1{,}12732$, $\tau = \frac{55-4\sqrt{5}}{31} = 1{,}48567$ ergibt sich eine Gruppierung von sechs Stephanoiden, deren Hülle die A. V. des (12+20+30)-flächigen 60-Ecks ist. Dieses Polyeder zeigt Taf. 26 Fig. 3; es ist polarreziprok dem dritten Polyeder der ersten Gruppe. Die Fläche ist Taf. 17 Fig. 4 gezeichnet.

6. Polyeder. Als Beispiel eines Polyeders dieser Gruppe, das nach den Ecken zur zweiten Klasse gehört, wählen wir diejenige Gruppierung von sechs Stephanoiden, deren Kern die besondere Varietät des Deltoidhexekontaeders $\sigma = \frac{3\,(3\sqrt{5}+1)}{22} = 1{,}05112$, $\tau = \frac{3\,(8\sqrt{5}+5)}{59}$ ist. Die Hülle wird dann das 12.5-Eck $s = 1$, $t = \frac{4\sqrt{5}-5}{5}$, wonach $k_2 : k_3 = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist. Dieses Polyeder, das reziprok ist zum vierten der zweiten Gruppe, ist Taf. 26 Fig. 2 dargestellt; seine Fläche zeigt Taf. 13 Fig. 6.

9. **Übersicht der polarreziproken Zuordnung der sechs Gruppen der $St'_5\,(^2_1)$ im Dyakishexekontaedertypus.** Da bei Betrachtung der Kombinationen von zwölf bezw. sechs Stephanoiden $St'_5\,(^2_1)$ der letzten drei Gruppen die polarreziproke Verwandtschaft im Einzelnen bereits angegeben wurde, soll hier nur noch übersichtlich die lückenlose Zuordnung der verschiedenen Klassengebiete für die sechs Gruppen zusammengestellt werden, wobei die zu berücksichtigenden Figuren jedesmal mit der Benennung des Gebietes angeführt sind.

1. Gruppe, 6. Klasse, 1. Ordnung.
(Taf. 13, Fig. 2; VI_1.)
$T-C_1-D-K_2-A-C_2-T.$

1. Gruppe, 6. Klasse, 2. Ordnung.
(Taf. 13, Fig. 2, VI_2.)
$I-K_1-D-C_3-I.$

1. Gruppe, 5. Klasse,
(Tafel 13, Fig. 2, V.)
$A-K_2-D-K_1-I-C_2-A.$

2. Gruppe, 6. Klasse,
(Taf. 13, Fig. 3, VI.)
$T-C_1-D-K_3-A-C_1-T.$

2. Gruppe, 5. Klasse,
(Taf. 13, Fig. 3, V.)
$A-K_3-D-C_3-I-C_2-A.$

3. Gruppe, 5. Klasse,
(Taf. 14, Fig. 4, V.)
$D-K_4-I-C_3-D.$

3. Gruppe, 4. Klasse,
(Taf. 14, Fig. 4, IV.)
$T-C_1-D-K_4-I-C_2-T.$

4. Gruppe, 4. Klasse,
(Taf. 15, Fig. 3, IV.)
$T-C_1-D-C'-\Theta-C_1-T.$

6. Gruppe, 1. Klasse, 1. Ordnung.
(Taf. 17, Fig. 2, I_1.)
$C-G_3-\underbrace{G-K_8}\underbrace{-T}-C_1-B-K_9-C_1.$

6. Gruppe, 1. Klasse, 2. Ordnung.
(Taf. 17, Fig. 2, I_2.)
$I-C_2-\underbrace{T-K_8}\underbrace{-G}-C_3-I.$

5. Gruppe, 1. Klasse,
(Taf. 15, Fig. 4, I.)
$B-C_1-T-C_2-I-K_6-B.$

6. Gruppe, 2. Klasse,
(Taf. 17, Fig. 2, II.)
$C-C_3-D-C_1-B-K_9-C.$

5. Gruppe, 2. Klasse,
(Taf. 15, Fig. 4, II.)
$B-C_1-D-K_7-I-K_6-B.$

5. Gruppe, 3. Klasse,
(Taf. 15, Fig. 4, III.)
$D-C_3-I-K_7-D.$

4. Gruppe, 3. Klasse,
(Taf. 15, Fig. 2, III.)
$A'-K_5-D-C_3-I-C_2-A'.$

4. Gruppe, 4. Klasse,
(Taf. 15, Fig. 3, IV.)
$A'-K_5-D-C'-\Theta-C_1-A'.$

§ 4. Die Gruppierungen von $St_{10}\left(\frac{4}{2}\right)$ und $St_{10}\left(\frac{6}{2}\right)$ im Dyakishexekontaedertypus und die kontinuierlichen Nullpolyeder.

1. **Die $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecke, deren je 2.10 Ecken gleicher Klasse reguläre Zehnecke bilden.** Einem allgemeinen $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecke für beliebige Parameter s und t sind keine anderen Stephanoide einschreibbar, als die im vorigen § besprochenen $St'_5\left(\frac{2}{1}\right)$, deren Existenz an die Möglichkeit gebunden ist, die 2.60 Ecken der gleicheckigen

Hülle als die von sechs kronrandigen $2.(2.5)$-Ecken zu gruppieren. Dagegen erhält man weitere Kombinationen von Stephanoiden in gewissen 2.60-Ecken, die besonderen Bedingungen genügen. Liegen nämlich die Ecken gleicher Klasse, die Klasse hier in demselben Sinne aufgefasst, wie es zuletzt geschehen, so dass sie zu zehn in jeder ihrer Ebenen ein regulares Zehneck bilden, so sind die 2.10 Ecken einer bestimmten Klasse für jede der sechs Achsen G die Ecken eines regulären zehnseitigen Prismas und es existieren also bestimmte Varietäten von 2.60-Ecken, für welche die Ecken jeder gewünschten Klasse wie die von sechs regulären zehnseitigen Prismen angeordnet sind, denen sich die Stephanoide St_{10} einschreiben lassen, wobei hier noch unentschieden bleibt, welche von den überhaupt existierenden sechs verschiedenen St_{10} im 2.60-Eck realisierbar sind. Es sind also zunächst diese besonderen $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecke zu bestimmen. Wir orientieren das 2.60-Eck im Raume wie bisher mit der senkrecht von oben nach unten verlaufenden Achse $G_1G'_1$ so, dass die Ecken gleicher Klasse in je zwei parallele Ebenen zur xy-ebene, die die Hauptebene der Achse $G_1G'_1$ ist, liegen.

α) Die Ecken erster Klasse sind die der zehneckigen Grenzflächen des 2.60-Ecks selbst. Das 2.5-eck $1, 2, 3 \ldots\ldots 9, 10$ wird regulär für $\overline{1,2} = \overline{2,3}$ oder $k_1 = k_2$. Dies gibt für die Parameter s und t nach den Gleichungen 90') die Bedingung $t = \frac{s(\sqrt{5}-1)-1}{\sqrt{5}-2}$ oder:

$$192^{\alpha}) \qquad t = s(3+\sqrt{5})-(2+\sqrt{5}).$$

Diese Gleichung ist die einer Geraden im Gebiete der konvexen 2.60-Ecke, die zwischen dem Ikosaederpunkte I $(s=1,\ t=1)$ und dem für die A. V. des 20.3-Ecks verläuft, dessen Koordinaten $s = \frac{7\sqrt{5}+5}{22}$, $t = \frac{2\sqrt{5}+3}{11}$ sind. Es gibt also eine einfach unendliche Reihe von 2.60-Ecken mit regulärzehneckigen Grenzflächen, die mit dem einen speziellen Polyeder, der A. V. des 20.3-Ecks abschliesst, während die andere Grenze, das Ikosaeder, offenbar für Konstruktion der Stephanoide auszuschliessen ist.

β) Die Ecken zweiter Klasse $11, 12, 13 \ldots\ldots 20$ des 2.60-Ecks bilden ein reguläres Zehneck, wenn $\overline{11,12} = \overline{12,13}$, d. h. die zweite Diagonale der sechseckigen Grenzfläche gleich der Kante k_1 ist. Nun ist jene Diagonale[1]) gleich $k_2 + k_3$ und es ergibt die Gleichung $k_2 + k_3 = k_1$ für s und t nach 90') die Bedingung:

$$192\beta)\qquad t = \frac{(5-2s\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{5}.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden im Gebiete der konvexen 2.60-Ecke zwischen dem Punkte $s = \frac{7\sqrt{5}+5}{22}$, $t = \frac{2\sqrt{5}+3}{11}$ für die A. V. des 20.3-Ecks und dem Punkte $s = \frac{9+5\sqrt{5}}{22}$, $t = \frac{3(4\sqrt{5}+5)}{55}$ für die A. V. des (12+20+30)-flächigen 60-Ecks. Diese beiden speziellen Polyeder sind die Grenzkörper einer Reihe von 2.60-Ecken mit Ecken zweiter Klasse, die reguläre Zehnecke bilden. Das erste Grenzpolyeder gehört also gleichzeitig den Polyedern unter α) zu.

γ) Die Ecken dritter Klasse 21, 22, 23 ..... 30 ergeben ein reguläres Zehneck für $\overline{21,22} = \overline{22,23}$, d. h. wenn die Kante k_3 der sechskantigen Grenzfläche gleich der k_1 parallelen zweiten Diagonale[2]) der 2.5-ecksfläche ist. Diese Bedingung ist $k_3 = k_1 + k_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Daraus ergibt sich für s und t die Relation:

$$192\gamma)\qquad t = \frac{s(3+\sqrt{5})-1}{5}.$$

---

[1]) Sind k_2 und k_3 die Kanten AB und BC eines gleicheckigen 2.3-ecks $ABCDEF$, so sind die beiden Diagonalen $d_1 = AC = \sqrt{k_2^2 + k_3^2 + k_2 k_3}$, $d_2 = AD = k_2 + k_3$.

[2]) Sind k_1 und k_2 die Kanten AB und BC eines gleicheckigen 2.5-ecks $ABCD..IK$, so sind die vier verschiedenen Diagonalen:

$$d_1 = AC = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + 2\,k_1 k_2 \cos 36^0} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_1 k_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2}},$$

$$d_2 = AD = k_1 + 2\,k_2 \cos 36^0 = k_1 + k_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

$$d_3 = AE = AC.\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$ (als Diagonale eines regulären Fünfecks, dessen Kante AC ist),

$$d_4 = AF = (k_1 + k_2)\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$ (als Diagonale des Sehnenvierecks $AEFG$, in dem $AE = AG = d_3$, $EF = k_1$, $FG = k_2$, $EG = d_1$ bekannt sind, mittels des Ptolemäischen Satzes berechnet).

Die durch diese Gleichung charakterisierte einfach unendliche Reihe von 2.60-Ecken hat als Grenzpolyeder einerseits die A. V. des 60-Ecks, für welches die Ecken dritter Klasse mit denen der zweiten zusammenfallen und andererseits dasjenige 12.5-Eck $(k_1 = 0)$, für welches $k_3 = k_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ist, d. h. neben $s = 1$, $t = \frac{\sqrt{5}+2}{5}$ wird.

δ) Die Ecken vierter Klasse $31, 32, \ldots 40$ ergeben ein reguläres Zehneck, wenn $\overline{31,32} = \overline{32,33}$, d. h. die Kante k_3 der viereckigen Grenzfläche des 2.60-Ecks gleich der mit k_1 parallelen grössten Diagonale der 2.5-eckigen Grenzfläche wird. Dies gibt die Bedingung $k_3 = (k_1 + k_2)\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, und damit

$$192^{\delta}) \qquad t = \frac{s(\sqrt{5}+1)+1}{5}.$$

Für das oben angegebene 12.5-Eck des Parameters $t = \frac{\sqrt{5}+2}{5}$ fallen die Ecken vierter Klasse mit denen der dritten zusammen. Als zweites Grenzpolyeder der durch 192^{δ}) charakterisierten einfach unendlichen Reihe von 2.60-Ecken ergibt sich das $(12+20+30)$-flächige 60-Eck $(k_2 = 0)$, für welches $k_3 = k_1 \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, d. h. $s = \frac{11+3\sqrt{5}}{19}$, $t = \frac{14\sqrt{5}+45}{95}$ ist.

ε) Es bilden endlich die Ecken fünfter Klasse $41, 42, \ldots 50$ ein reguläres Zehneck, wenn $\overline{41,42} = \overline{42,43}$, d. h. die k_3 parallele zweite Diagonale der 2.3-eckigen Grenzfläche gleich der k_2 parallelen zweiten Diagonale der 2.5-eckigen Grenzfläche des $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecks wird. Dies gibt die Bedingung $k_2 + k_3 = k_2 + k_1 \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ oder $k_3 = k_1 \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, woraus

$$192^{\varepsilon}) \qquad t = \frac{2(5+2\sqrt{5}) - s(3\sqrt{5}+5)}{10}$$

folgt. Wir haben eine einfach unendliche Reihe von 2.60-Ecken, deren Grenzpolyeder einerseits das vorhin angegebene besondere 60-Eck für $s = \frac{11+3\sqrt{5}}{19}$, dessen Ecken fünfter Klasse mit denen vierter identisch werden, und andererseits das Triakontagon sind. Für dieses fallen die oberen und unteren Ecken fünfter Klasse in **eine** Ebene und alle Stephanoidgruppierungen dieser Klasse werden hier illusorisch. — Die Ecken sechster Klasse 51, 52, ... 60 eines 2.60-Ecks können überhaupt keine regulären Zehecke bilden, ausser für den eben erledigten Grenzfall des Triakontagons. Es sind also im Ganzen fünf Möglichkeiten vorhanden, 2.60-Ecken, deren Parameter den Bedingungen $192^{\alpha})$—$192^{\varepsilon})$ genügen, Stephanoidgruppierungen einzuschreiben. Welche von den St_{10} im 2.60-Eck existieren können, soll nun zunächst entschieden werden.

2. **Die Existenz von Stephanoiden St_{10} im $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Eck.** Nach Kap. II § 3 Nr. 4 lassen sich einem regulären zehnseitigen Prisma sechs verschiedene Stephanoide St_{10} einschreiben, nämlich die vier kontinuierlichen $St_{10}\binom{3}{1}$, $St_{10}\binom{5}{1}$, $St_{10}\binom{7}{1}$ und $St_{10}\binom{5}{3}$, sowie die zwei diskontinuierlichen $St_{10}\binom{4}{2} \equiv 2\,St'_5\binom{2}{1}$ und $St_{10}\binom{6}{2} \equiv 2\,St_5\binom{3}{1}$. Beschreibt man nun in die fünfmal je sechs zehnseitigen Prismen, deren Ecken die eines 2.60-Ecks sind, wie es in voriger Nummer charakterisiert wurde, diese Stephanoide, so erhält man Gruppierungen, die diskontinuierliche gleicheckig-gleichflächige Nullpolyeder darstellen, wenn sich als Kern ein gleichflächiges Polyeder ergibt. Für die vier ersten eben angeführten Stephanoide trifft dies nicht ein, wie hier ebenso bewiesen wird, wie für gewisse vermutete Stephanoidgruppierungen im 2.24-Eck (vergl. Kap. III § 3 Nr. 4). Man fasse in dem 2.60-Eck nur ein Prisma, dessen Ecken die Ecken i-ter Klasse des 2.60-Ecks sind, ins Auge, etwa das, dessen Hauptachse $G_1 G'_1$ ist, und beschreibe ihm (nach einander) die sechs verschiedenen Stephanoide ein. Für das Prisma schlechthin sind seine zehn Nebenachsen gleichwertig, nicht aber in Bezug auf das umhüllende 2.60-Eck. Soll nun ein Stephanoid St_{10} zulässig sein, so müssen irgend zwei seiner Flächen in Bezug auf entsprechende Achsenpunkte kongruent oder wenigstens symmetrisch liegen, wonach sie durch Umkehrung der einen mit einander zur Deckung gebracht werden könnten. Diese Bedingung ist aber für die vier erstgenannten Stephanoide nicht erfüllbar. Denn legt man durch die Achse $G_1 G'_1$ sämtliche 2.5 Symmetrieebenen des 2.60-Ecks, so zerfallen diese in zwei gleichmächtige Gruppen von je fünf, deren in ihnen liegenden gleichzähligen Achsen bei Drehung des Körpers um 72° zur Deckung kommen, während für die abwechselnden Ebenen von G_1 aus gerechnet, die Reihenfolge der

Achsen G_1, B, G, C, B, C, G'_1 bezw. G_1, C, B, C, G, B, G'_1 ist, so dass bei Drehung um 36° um die Hauptachse $G_1 G'_1$ die Achsen der einen Ebene zwischen die der anderen fallen. Soll nun ein Stephanoid St_{10} im 2.60-Eck zulässig sein, so darf die Ebene durch den Doppelpunkt der Stephanoidfläche und die Achse $G_1 G'_1$ nicht mit einer der eben genannten zehn Symmetrieebenen zusammenfallen, wie dies bei den vier ersten Stephanoiden der Fall wäre. Denn für eine zweite Stephanoidfläche, die mit jener ersten durch Drehung des Stephanoides um 36° zur Deckung kommt, ist die genannte Ebene durch den Doppelpunkt der Fläche identisch mit einer der vorigen benachbarten Symmetrieebene des 2.60-Ecks, d. h. die Achsenpunkte für die zweite Stephanoidebene können nicht mit denen der ersten zum Zusammenfallen gebracht werden. Dann ist aber die Stephanoidfläche nicht Fläche eines gleichflächigen Polyeders, d. h. die Gruppierung wäre nur gleicheckig, w. z. b. w. Ein anderes bei den Stephanoiden $St_{10}\binom{6}{2}$ und $St_{10}\binom{4}{2}$, bei denen die Ebene durch den Doppelpunkt einer Grenzfläche und die Achse $G_1 G'_1$ nicht mit einer der Symmetriebenen zusammenfällt, sondern den Winkel zweier benachbarten teilt. Zwei Stephanoidflächen, die durch Drehung des Stephanoides um 72° um seine Hauptachse zur Deckung kommen, sind nach den Achsenpunkten völlig kongruent, dagegen zwei Flächen, die bereits bei Drehung um 36° sich decken, sind nach den Achsenpunkten symmetrisch, d. h. ihre Achsenpunkte fallen zusammen, wenn man die eine um ihre Symmetrielinie um 180° dreht, bevor man sie mit der anderen zur Deckung bringt. Das Ergebnis ist: Es existieren im 2.60-Eck (unter den in voriger Nr. abgeleiteten Bedingungen) fünf Gruppierungen von je sechs Stephanoiden $St_{10}\binom{6}{2}$ bezw. zwölf $St_5\binom{3}{1}$ und fünf Gruppierungen von je sechs Stephanoiden $St_{10}\binom{4}{2}$ bezw. zwölf $St'_5\binom{2}{1}$. Die zuerst angeführten werden im folgenden (Nr. 4 ff.) behandelt. Die Gruppierungen $6\, St_{10}\binom{4}{2} \equiv 12\, St'_5\binom{2}{1}$ aber sind offenbar Spezialfälle der bereits besprochenen allgemeinen Gruppierungen des vorigen §, und entstehen aus ihnen, wenn die Parameter s, t der Hüllpolyeder den Bedingungen $192^{\alpha})$—$192^{\varepsilon})$ genügen. Wir wollen diese speziellen Polyeder zunächst betrachten.

3. **Die fünf Gruppen der Stephanoide $St_{10}\binom{4}{2}$ im Dyakishexekontaedertypus.** Die von Stephanoiden $St_{10}\binom{4}{2}$ gebildeten diskontinuierlichen

Polyeder können nur der ersten bis fünften Gruppe der allgemeineren Gruppierungen, wie sie im § 3 dieses Kapitels betrachtet wurden, angehören. Denn existierte ein solches Polyeder für die sechste Gruppe, so gäbe es ein polarreziprokes Polyeder mit Ecken sechster Klasse, was nach Nr. 1 dieses § unmöglich ist. Irgend ein Polyeder P der i-ten der noch zulässigen fünf Gruppen, das eine Kombination von $St_{10}\binom{4}{2}$ darstellt, gehört nun nach seinen Ecken zur Klasse 1, 2, 3, 4 oder 5 und die Parameter s, t genügen also einer der Bedingungen 192^{α})—192^{ε}). Das ihm polarreziproke Polyeder P' ist dann gleichfalls eine Gruppierung von $St_{10}\binom{4}{2}$ und zwar der i-ten Klasse, deren Parameter s, t demnach einer bestimmten der Gleichungen 192) genügen. Nach den Flächen gehört das Polyeder der 1., 2., 3., 4. oder 5. Gruppe an und da der Kern von P' polarreziprok der Hülle von P ist, so genügen die Parameter σ, τ des Kernes von P' einer der fünf Gleichungen, die sich aus 192) ergeben, wenn in diesen t und s durch $\frac{1}{\tau}$ und $\frac{1}{\sigma}$ ersetzt werden. Für die Gruppierungen von $St_{10}\binom{4}{2}$ in den fünf Gruppen des § 3 dieses Kapitels hat man also für die Kerne die fünf Relationen der σ und τ

$$193^{\alpha})\qquad (1.\ \text{Gruppe}):\quad \tau=\frac{\sigma(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}-1-\sigma};$$

$$193^{\beta})\qquad (2.\ \text{Gruppe}):\quad \tau=\frac{5(\sqrt{5}-2)\sigma}{5\sigma-2\sqrt{5}};$$

$$193^{\gamma})\qquad (3.\ \text{Gruppe}):\quad \tau=\frac{5\sigma}{3+\sqrt{5}-\sigma};$$

$$193^{\delta})\qquad (4.\ \text{Gruppe}):\quad \tau=\frac{5\sigma}{\sqrt{5}+1+\sigma};$$

$$193^{\varepsilon})\qquad (5.\ \text{Gruppe}):\quad \tau=\frac{(3\sqrt{5}-5)\sigma}{(\sqrt{5}+1)\sigma-2}.$$

Deuten wir diese Gleichungen als die von Kurven im Gebiete der konvexen Dyakishexekontaeder jeder Gruppe, so sind die Koordinaten σ, τ aller Punkte der Kurven die Parameter solcher Dyakishexekontaeder, für welche die zugehörige Stephanoidgruppierung eine solche von $St_{10}\binom{4}{2}$ ist, und die Klasse dieser Gruppierung lässt sich sofort aus der Figur ablesen, in der die Kurve für eine bestimmte Gruppe eingetragen ist, da für jedes Teilgebiet, in dem die Kurve verläuft, der Klassencharakter der Polyeder bereits bestimmt ist. Wir diskutieren nun zunächst die obigen Gleichungen 193) und zeichnen zur Übersicht die durch sie dargestellten Kurven K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 vorerst in einer Figur ein (Taf. 12 Fig. 3), wie wir sie bei den späteren Betrachtungen verwenden werden. Danach ist dann jedesmal die Kurve K_i in die Figur für die i-te Gruppe der $St'_5\binom{2}{1}$ einzutragen.

α) Gleichung 193^{α}) ist die einer Kurve K_1, die zwischen dem Dodekaederpunkte D und dem Punkte A (in Fig. 3 Taf. 12) für $\sigma=\frac{7\sqrt{5}-5}{10}$, $\tau=2\sqrt{5}-3$, d. h. der A. V. des Triakisikosaeders, verläuft. In Fig. 2 Taf. 13 für die erste Gruppe der Stephanoide gehört diese Kurve mit ihrer ganzen Erstreckung dem Teilgebiete V der Polyeder mit Ecken fünfter Klasse an.

β) In 193^{β}) haben wir die Gleichung einer Kurve K_2, die, das Gebiet der konvexen Dyakishexekontaeder durchquerend, vom Punkte A für die A. V. des Triakisikosaeders zum Punkte A', $\sigma=\frac{5\sqrt{5}-9}{2}$, $\tau=\frac{4\sqrt{5}-5}{3}$ für die A. V. des Deltoidhexekontaeders geht. In Fig. 3 Taf. 13 für die zweite Gruppe der $St'_5\binom{2}{1}$ liegt diese Kurve völlig im Teilgebiete V der Polyeder mit Ecken fünfter Klasse.

γ) Die durch Gleichung 193^{γ}) dargestellte Kurve K_3 verläuft in Fig. 3 Taf. 12 vom Punkte A' für die A. V. des Deltoidhexekontaeders bis zu dem Punkte $\sigma=1$, $\tau=5(\sqrt{5}-2)$, der eine besondere Varietät des Pentakisdodekaeders definiert. In der Fig. 4 Taf. 14 für die $St'_5\binom{2}{1}$ der dritten Gruppe gehört diese Kurve den beiden Teilgebieten V und IV der Polyeder fünfter und vierter Klasse an.

δ) Die Gleichung 193^{δ}) ist die einer Kurve K_4 in Fig. 3 Taf. 12 durch den Punkt des eben genannten Pentakisdodekaeders und den Punkt B für die besondere Varietät des Deltoidhexekontaeders, dessen Koordinaten $\sigma=\frac{11-3\sqrt{5}}{4}$, $\tau=\frac{45-14\sqrt{5}}{11}$ sind. In Fig. 3 Taf. 15 für die vierte Gruppe der $St'_5\binom{2}{1}$ verläuft die Kurve zwischen den genannten Punkten, wobei sie sowohl das Teilgebiet III der Polyeder dritter Klasse, wie das der Polyeder vierter Klasse IV überschreitet.

ε) Es ist endlich 193^{ε}) die Gleichung einer Kurve K_5 in Fig. 3 Taf. 12 zwischen dem Triakontaederpunkte T und dem eben genannten Punkte B

für die besondere Varietät des Deltoidhexekontaeders. In der Fig. 4 Taf. 15 für die σ, τ der Stephanoide der fünften Gruppe gehört diese Kurve K_5 demnach allen drei Klassengebieten I, II, III an.

Wir betrachten nun der Reihe nach die Gruppierungen der $St_{10}\binom{4}{2}$ in den fünf Gruppen, bestimmen die Grenzpolyeder, zeigen die polarreziproke Zuordnung der Polyeder in den einzelnen Teilgebieten und weisen auf ihre Zugehörigkeit zu den Klassen in Nr. 2 dieses § hin.

Die Polyeder der beiden ersten Gruppen, sowie die der dritten Gruppe, soweit sie dem dort mit V bezeichneten Teilgebiete zuzurechnen sind, gehören der fünften Klasse an und erschöpfen die Polyeder der fünften Klasse, deren Ecken der Relation 192ε) genügen, deren erstes Grenzpolyeder als Hülle das Triakontagon, deren anderes ein bestimmtes 60-Eck hatte. Diese Stephanoidgruppierungen $St_{10}\binom{4}{2}$ fünfter Klasse sind also auf drei Gruppen zu verteilen. Für das, freilich illusorische, Grenzpolyeder im Punkte D der ersten Gruppe ergibt sich als Hülle das Triakontagon, weil D gleichzeitig auf den Kurven K_1 und K_2 der Gruppe liegt. Für die A. V. des Triakisikosaeders als Kern ergibt sich das in § 3 Nr. 3 beschriebene sechste Polyeder der ersten Gruppe, dessen Parameter $s = \frac{7\sqrt{5}-5}{11}$, $t = \frac{3(5+4\sqrt{5})}{55}$ die Gleichung 192ε) befriedigen. Dieses Polyeder gehört zugleich der zweiten Gruppe der Stephanoide an, dort die neue Reihe der $St_{10}\binom{4}{2}$-gruppierungen beginnend. Für die A. V. des Deltoidhexekontaeders als Kern erhalten wir in der zweiten Gruppe das in § 3 Nr. 4 angegebene erste Polyeder, mit den Parametern $s = \frac{2(15+2\sqrt{5})}{41}$, $t = \frac{20\sqrt{5}+27}{41\sqrt{5}}$ der Hülle, die noch ein $(12+20+30)$-flächiges 2.60-Eck ist. Es gehört dieses Polyeder zugleich der dritten Gruppe an und setzt die Reihe der Gruppierungen fünfter Klasse fort bis zu dem Punkte der Kurve K_4, in dem diese von der Kurve geschnitten wird, deren Gleichung 193γ) ist. Für das Polyeder, dessen Kernparameter σ, τ die Koordinaten dieses Schnittpunktes sind, ist die Hülle ein 60-Eck (weil der Punkt auf K_4 liegt), und zwar diejenige besondere Varietät, für welche $s = \frac{11+3\sqrt{5}}{19}$, $t = \frac{14\sqrt{5}+45}{95}$ ist. Es ist das in voriger Nr. unter ε) angeführte zweite Grenzpolyeder mit Ecken fünfter Klasse, das in der Tat zugleich der vierten Klasse angehört, da es auf der Grenze des Gebietes IV der dritten Gruppe liegt. Die Parameter σ, τ des Kernes ergeben sich als Lösungen der beiden Gleichungen 193γ) und 172). Führt man den aus 193γ) folgenden Wert von ϑ in der Form $\vartheta = \frac{5\sigma\cos^2\varphi}{2\cot^2\varphi - \sigma}$ in Gleichung 172) ein, so ergibt sich nach längerer Rechnung für σ die Gleichung: $\sigma^2 - \sigma\frac{3(4-\sqrt{5})}{2} + \frac{7\sqrt{5}-9}{4} = 0$ und daraus $\sigma = \frac{3(4-\sqrt{5}) \pm 5(\sqrt{5}-2)}{4}$. Von den beiden Wurzeln $\sigma_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ und $\sigma_2 = \frac{11-4\sqrt{5}}{2}$ kommt nur die zweite in Frage, nämlich $\sigma = 1{,}02786$. Das zugehörige τ ergibt sich aus 193γ) zu $\tau = \frac{46\sqrt{5}-65}{31} = 1{,}22126$. Die Einführung der erhaltenen Werte von σ und τ in die Formeln 171) ergibt die oben angeschriebenen Parameter s und t für die besondere Varietät des $(12+20+30)$-flächigen 60-Ecks. Die zu den Gruppierungen von Stephanoiden $St_{10}\binom{4}{2}$ der fünften Klasse erster bis dritter Gruppe reziproken Polyeder gehören der fünften Gruppe an und verteilen sich auf die drei Gebiete I, II, III (Fig. 4 Taf. 15) erster bis dritter Klasse. Die den drei Gebieten angehörenden Werte σ, τ der Kernpolyeder genügen der Gleichung 193ε) und die Koordinaten der Schnittpunkte der durch diese Gleichung dargestellten Kurve mit den Kurven K_6 und K_7 des Gesamtgebietes, für welche die Hülle der Polyeder 20.3 Ecke bezw. 60-Ecke sind, bedeuten die Parameter σ, τ der Kerne derjenigen Gruppierungen, die nach ihren Ecken zugleich der ersten und zweiten bezw. dritten und zweiten Klasse angehören. Man erhält als Koordinaten des Schnittpunktes auf der Kurve K_6 die Werte: $s = \frac{7\sqrt{5}+5}{20}$, $\tau = \frac{4\sqrt{5}-5}{3}$, auf der Kurve $K_7: \sigma = \frac{15-2\sqrt{5}}{10}$, $\tau = \frac{100-27\sqrt{5}}{31}$. Die zwischen dem Triakontaederpunkt T und dem ersten der geschriebenen Punkte liegenden Polyeder erster Klasse erschöpfen die unter α) in voriger Nr. angeführten Stephanoidgruppierungen $St_{10}\binom{4}{2}$, deren Hüllen vom Ikosaeder bis zur A. V. des 20.3-Ecks variieren, wobei natürlich für die erste Grenze die Gruppierung illusorisch wird. Die dem Gebiete II der fünften Gruppe angehörenden Werte von σ und τ zwischen den oben angegebenen Grenzen ergeben sämtliche Gruppierungen von $St_{10}\binom{4}{2}$ mit Ecken zweiter Klasse unter β) der vorigen Nr. Für das Polyeder, dessen σ, τ der Gleichung der Kurve K_7 genügt, ist die Hülle die A. V. des 60-Ecks. Im Gebiete III verläuft unsere Kurve 193ε) von dem schon angegebenen Grenzpunkte nach dem Punkte $\sigma = \frac{11-3\sqrt{5}}{4}$, $\tau = \frac{45-14\sqrt{5}}{11}$ der Kurve C_3, für den sich eine Stephanoidgruppierung ergibt, deren Parameter s, t des Hüllpolyeders nach den Formeln 174) und 175) $s = \frac{2(11+4\sqrt{5})}{41}$, $t = \frac{46\sqrt{5}+65}{205}$ sind, wonach die dem Gebiete III angehörenden Stephanoidgruppierungen polarreziprok sind denen der dritten Gruppe in dem dortigen Gebiete V. Doch sind durch diese Polyeder der fünften Gruppe dritter Klasse noch nicht sämtliche $St_{10}\binom{4}{2}$ der dritten Klasse erschöpft. Wir finden vielmehr die übrigen in den Polyedern des Gebietes III der vierten Gruppe (Fig. 3 Taf. 15). Für das eben erwähnte besondere Deltoidhexekontaeder fällt die Gruppierung vierter Gruppe dritter Klasse mit der der fünften Gruppe dritter Klasse zusammen. Der Verlauf der Kurve, deren Gleichung 193^{δ}) ist, im Gebiete der vierten Gruppe ist bereits angedeutet. Die Kurve schneidet die Grenzkurve K_5 in einem Punkte, dessen Koordinaten sich als Lösungen der Gleichungen 193^{δ}) und 176) ergeben. Führt man den aus 193^{δ}) folgenden Wert $\vartheta = \frac{5\sigma\cos^2\varphi}{2\cot\varphi + \sigma}$ in 176) ein, so kommt für σ die Gleichung $\sigma^2 - \frac{3\sqrt{5}+4}{2\sqrt{5}+3}\sigma + \frac{3}{2\sqrt{5}+3} = 0$, woraus $\sigma = \frac{3(3\sqrt{5}+1)}{22} = 1{,}05112$ folgt. Der zugehörige Wert von τ ist: $\tau = \frac{3(10-\sqrt{5})}{19} = 1{,}2259$. Für dieses Dyakishexekontaeder als Kern ergibt sich eine Gruppierung von sechs $St_{10}\binom{4}{2}$, deren Hülle das 12.5 Eck $s = 1$, $t = \frac{\sqrt{5}+2}{5}$ ist, wie man aus den Gleichungen 175) in Verbindung mit 174) errechnet. Es ist das unter γ) der vorigen Nr. angeführte Grenzpolyeder. Die polarreziproken der $St_{10}\binom{4}{2}$ der dritten Klasse der vierten Gruppe sind die Polyeder der vierten Klasse dritter Gruppe, deren Kernparameter σ, τ die Koordinaten der Punkte der Kurve 193γ) vom Punkte $\sigma = \frac{11-4\sqrt{5}}{2}$, $\tau = \frac{46\sqrt{5}-65}{31}$ bis zum Schnittpunkte mit der Geraden C_1 sind. Die Koordinaten dieses letzteren sind $\sigma = 1$, $\tau = 5(\sqrt{5}-2)$, und für die Parameter s, t der Hülle der für diesen Punkt sich ergebenden Gruppierung der $St_{10}\binom{4}{2}$ erhält man aus den Formeln 170) und 171) die Werte: $s = \frac{3\sqrt{5}-1}{6}$, $t = \frac{10+\sqrt{5}}{15}$; d. h. es ist diese Gruppierung polarreziprok der oben angegebenen für den

Schnittpunkt der Kurve 193$^{\delta}$) mit der Kurve K_5 im Gebiete der vierten Gruppe. Sie gehört zugleich der vierten Gruppe an, da für die Pentakisdodekaeder als Kerne die Stephanoide der vierten und dritten Gruppe identisch sind. In der Tat ist für die vierte Gruppe die Kurve 193$^{\delta}$) über K_5 hinweg durch das Gebiet IV bis zur Geraden C_1 zu führen, und die Stephanoide $St_{10}\binom{4}{2}$ für Werte σ, τ der Kurve, die den Punkten dieses Teilgebietes der vierten Gruppe zugehören, sind polarreziprok Polyedern desselben Gebietes. Es ergibt sich also auch eine autopolare Gruppierung von sechs Stephanoiden $St_{10}\binom{4}{2}$. Die Parameter σ, τ ihres Kernes findet man aus der Gleichung 193$^{\delta}$) in Verbindung mit der Bedingungsgleichung für die autopolaren Kombinationen von Stephanoiden (vergl. § 3 Nr. 6):

$$\sigma^2\vartheta^2\cot^3\varphi - 2\sigma\vartheta^2(4+\cot\varphi) + 4\vartheta^2\cot\varphi + 2\sigma\vartheta\tan\varphi - \sigma^2\tan\varphi = 0.$$

Man erhält dann für σ die Gleichung: $\sigma^2 - \frac{7(3-\sqrt{5})}{2}\sigma + \frac{9-\sqrt{5}}{4} = 0$, und daraus den zulässigen Wert: $\sigma = \frac{1}{4}\left(7(3-\sqrt{5}) - \sqrt{10(65-29\sqrt{5})}\right) = 1{,}0266$. (Das zugehörige τ ist $1{,}2042\ldots$) Damit sind alle Gruppierungen von $St_{10}\binom{4}{2}$ erledigt und es ist ihre lückenlose polarreziproke Zuordnung innerhalb der fünf Gruppen erwiesen.

4. **Die fünf Gruppen von je 6 $St_{10}\binom{6}{2} \equiv 12\ St_5\binom{3}{1}$ im Dyakishexekontaedertypus.** Nach den Untersuchungen in Nr. 1 und 2 dieses § existieren fünf Reihen von Gruppierungen von Stephanoiden $St_{10}\binom{6}{2}$, die nach ihren Ecken erster bis fünfter Klasse sind, wobei die Parameter der Hüllen den Gleichungen 192$^{\alpha}$) — 192$^{\varepsilon}$) genügen. Da ein Polyeder i-ter Klasse in ein solches anderer Klasse nur durch ein Grenzpolyeder übergehen kann, dessen Hülle ein besonderes gleicheckiges Polyeder des Typus ist, so gehören sämtliche Gruppierungen irgend einer Reihe neben einer bestimmten Klasse auch einer bestimmten Gruppe nach den Flächen ihres Kernes zu. Für jede der fünf möglichen Gruppen kommen dieselben Flächenzonen am Dyakishexekontaeder in Frage, wie für die Stephanoidgruppierungen des vorigen §; nur sind natürlich die Ebenen des Dyakishexekontaeders, die in der ersten Fläche jeder Zone die Grenzfigur des Stephanoides $St_{10}\binom{6}{2}$ bilden, andere, und überdies existiert eine Gruppierung nur, wenn die Para-

meter des Dyakishexekontaeders den Gleichungen $193^{\alpha})$—$193^{\varepsilon})$ genügen. Sämtliche Polyeder einer Gruppe erschöpfen zugleich die einer bestimmten Klasse: Die Polyeder der i-ten Gruppe, deren Kern der i-ten Gleichung 193) genügen ($i = 1, \ldots 5$) sind zugleich von der $(6-i)$-ten Klasse und es befriedigen die Parameter s, t die $(6-i)$-te Gleichung 192). Es waren nun die Gleichungen 193) bereits als Kurven in der Ebene der σ, τ in Fig. 3 Taf. 12 dargestellt. Von besonderer Bedeutung ist noch der Schnittpunkt π der Kurven K_1 und K_5. Seine Koordinaten sind die Lösungen der Gleichungen $193^{\alpha})$ und $193^{\varepsilon})$, nämlich $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-7}{4}$, $\tau = 8 - 3\sqrt{5}$. Die reziproken Werte s und t, d. h. $s = \frac{5\sqrt{5}+7}{19}$, $t = \frac{8+3\sqrt{5}}{19}$ genügen offenbar den beiden Gleichungen $192^{\alpha})$ und $192^{\varepsilon})$. Da nun für π das Polyeder der ersten Gruppe von der fünften Klasse, das der fünften Gruppe von der ersten Klasse ist, so ist der Kern des einen Polyeders polarreziprok der Hülle des anderen und umgekehrt, d. h. jedes Polyeder hat polarreziproken Kern und Hülle. Wir haben also zwei parapolare Stephanoidgruppierungen vor uns. Die polarreziproke Zuordnung sämtlicher Gruppen von $St_{10}\binom{6}{2}$ ist die folgende (vergl. Fig. 3 Taf. 12). Die Polyeder der ersten Gruppe von der A. V. des Triakisikosaeders längs der Kurve K_1 über π bis zum Dodekaeder sind reziprok den Polyedern der fünften Gruppe auf K_5 von der Varietät $\sigma = \frac{11-3\sqrt{5}}{4}$ des Deltoidhexekontaeders über π nach dem Triakontaeder, wobei der Wert von σ, τ für π beider Gruppen also parapolare Polyeder ergibt. Die Grenzpunkte des Triakontaeders und Dodekaeders liefern keine Stephanoide. Die Polyeder der zweiten Gruppe auf K_2 von der A. V. des Triakisikosaeders bis zur A. V. des Deltoidhexekontaeders sind polarreziprok denen der vierten Gruppe auf K_4 von der besonderen Varietät des Deltoidhexekontaeders, $\sigma = \frac{11-3\sqrt{5}}{4}$, bis zur besonderen Varietät des Pentakisdodekaeders, für welches $\tau = 5(\sqrt{5}-2)$ ist. Die Polyeder der dritten Gruppe auf K_3 von der A. V. des Deltoidhexekontaeders bis zu dem eben genannten Pentakisdodekaeder sind polarreziprok den Polyedern derselben Kurve im entgegengesetzten Sinne durchlaufen. Die Grenzpolyeder gehören zugleich zur zweiten und dritten Gruppe bezw. vierten und dritten Gruppe nach den Flächen und zur vierten und dritten Klasse, bezw. zweiten und dritten Klasse nach den Ecken. Die danach notwendig vorhandene autopolare Gruppierung auf K_3 ist später abzuleiten. Wir wenden uns nun zur analytischen Untersuchung der fünf Gruppen und führen damit zugleich die Beweise für alle vorhergehenden Behauptungen. Wir beschränken uns hier auf die Anführung der Formeln in den Koëffizienten a, b, c der erzeugenden Kernpolyeder, da eine komplizierte Zuordnung der Gruppen nicht vorliegt. Überdies führen wir die analytische Untersuchung wie früher unabhängig von der Darstellung auf der jeweils gewählten Fläche 1), da sich die Zuordnung von Ecken und Flächen im Anschluss an Kap. II § 3 Nr. 4 leichter übersehen lässt. Für die geometrische Darstellung aber wählen wir stets die Fläche 1) des Dyakishexekontaeders bezw. die entsprechende Fläche der speziellen gleichflächigen Polyeder zur Zeichenebene. Die folgende Tabelle zeigt dann für die fünf Gruppen der $St_{10}\binom{6}{2}$ die Spuren in der Ebene 1), durch welche die erste Fläche des Stephanoids erzeugt wird, und in den Spalten 2)—4) sind die Spuren in den Flächen der Grenzpolyeder vermerkt, soweit sie auftreten können. Die nähere Betrachtung dieser spezielleren Polyeder bleibt der folgenden Nr. 8 vorbehalten.

Gruppe	Dyakishexekontaeder	Triakisikosaeder	Pentakisdodekaeder	Deltoidhexekontaeder
I	111. 113. 117. 119	45. 57. 33. 59 36. 59. 52. 56	—	—
II	82. 111. 56. 99	A. V.: $\sigma = \frac{7\sqrt{5}-5}{10}$	—	39. 59. 27. 54 56. 31. 53. 27
III	56. 110. 77. 117	—	40. 59. 26. 47 27. 50. 41. 59	A. V.: $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-9}{2}$
IV	64. 115. 45. 110	—	B. V.: $\tau = 5(\sqrt{5}-2)$.	35. 58. 29. 54 25. 53. 35. 57
V	64. 113. 38. 99	—	—	B. V.: $\sigma = \frac{11-3\sqrt{5}}{4}$.

5. **Die erste und fünfte Gruppe der Stephanoide $St_{10}\binom{6}{2}$.** Wir greifen für die folgende analytische Untersuchung immer eine gewisse Fläche des Dyakishexekontaeders heraus — nachdem wir dieses so orientiert haben, dass die Achse $G_1 G'_1$ von oben nach unten verläuft, die Achsen $B_1, G_2, \ldots$ in der senkrechten Symmetrieebene nach vorn liegen — nämlich diejenige Fläche, die direkt rechts von der Symmetrieebene liegt. Für die fünf Gruppen sind das die Flächen: 1), 11), 21), 31), 41). Wir bestimmen ferner dazu die vier Grenzflächen, die in ihr die Grenzfigur des Stephanoids ergeben, und führen dann die Ecken an, indem wir wie bei dem Einzelstephanoid in Kap. II § 3 Nr. 4 verfahren. Für die erste Gruppe sind die Spuren auf 1) die der Flächen 111), 113), 117), 119) und zwar korrespondiert 111) mit der Fläche 5') des Einzelstephanoids; weiter ist 113) $\equiv$ 3'), 117) $\equiv$ 9'), 119) $\equiv$ 7'). Ein Vergleich mit der Eckenordnung des Einzelstephanoids ergibt, da die Ecken jetzt der fünften Klasse angehören, dass sich 1), 117), 119) in der Ecke 48) des 2.60-Ecks schneiden; die übrigen Ecken sind: 44 (1, 111, 113); 76 (1, 113, 119) und 74 (1, 111, 117). Wir bestimmen nun die Hülle des Gesamtpolyeders, indem wir die Koordinaten der Ecke 44) als Schnitt der Flächen 1), 111), 113), berechnen. Aus deren Gleichungen (vergl. Kap. IV § 1 Nr. 2) ergeben sich für diese Koordinaten die Werte: $x = \frac{d}{a_1}$, $y = \frac{(a_4 - a_1) c_1}{a_1 (b_4 c_1 - b_1 c_4)} d$, $z = -\frac{(a_4 - a_1) b_1}{a_1 (b_4 c_1 - b_1 c_4)} d$.

Nun sind die Koordinaten der Ecke 44): $x = z_3$, $y = x_3$, $z = -y_3$, wonach die für die Formeln 85) der Parameter s, t zu verwendenden absoluten Werte x_3, y_3, z_3 bekannt sind. Es ergibt sich für s:

$$s = \frac{(a_4 - a_1) c_1 \cot\varphi + (a_4 - a_1) b_1 + (b_4 c_1 - b_1 c_4) \cot^2\varphi}{2\,[(a_4 - a_1) c_1 \tan\varphi + (b_4 c_1 - b_1 c_4) \cot\varphi]},$$

oder, da $c_1 \cot\varphi + b_1 \equiv \sigma$ ist:

$$194)\quad \begin{cases} s = \dfrac{(a_4 - a_1)\sigma + (b_4 c_1 - b_1 c_4) \cot^2\varphi}{2\,[(a_4 - a_1) c_1 \tan\varphi + (b_4 c_1 - b_1 c_4) \cot\varphi]}, \text{ und dazu:} \\ t = \dfrac{(a_4 - a_1) c_1 \cot\varphi + b_4 c_1 - b_1 c_4}{(a_4 - a_1) c_1 \tan\varphi + (b_4 c_1 - b_1 c_4) \cot\varphi} \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Wir bestimmen mit Hilfe dieser allgemeinen Formeln nun spezielle Fälle. Für jedes Triakisikosaeder ist $b_1 = 0$. Also wird dann:

$$s = \frac{(a_4 - a_1 + b_4 \cot\varphi)\cot\varphi}{2\,[(a_4 - a_1)\tan\varphi + b_4\cot\varphi]},\quad t = \frac{(a_4 - a_1)\cot\varphi + b_4}{(a_4 - a_1)\tan\varphi + b_4\cot\varphi}\cos^2\varphi.$$

Nun ist für die A. V. des Triakisikosaeders: $a_1 = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}$, $a_4 = \frac{3\sqrt{5}-5}{5}$, $b_4 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$. Hiernach erhält man für s und t durch Einsetzen die Werte: $s = \frac{11+3\sqrt{5}}{19}$, $t = \frac{14\sqrt{5}+45}{95}$, d. h. die Parameter eines besonderen 60-Ecks, denn es ist $t = (4s - \cot^2\varphi)\cos^2\varphi$. Für die Kanten dieses 60-Ecks hat man die Proportion: $k_1 : k_3 = 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. — Wir untersuchen ferner die besondere Varietät des Dyakishexekontaeders, für welche $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-7}{4}$, $\tau = 8 - 3\sqrt{5}$ ist. Die zur Verwendung kommenden Grössen a, b, c sind hier die folgenden: $a_1 = \frac{70-31\sqrt{5}}{10}$, $b_1 = \frac{39\sqrt{5}-85}{20}$, $c_1 = \frac{8\sqrt{5}-15}{5}$, $a_4 = \frac{39\sqrt{5}-85}{10}$, $b_4 = \frac{8\sqrt{5}-15}{10}$, $c_4 = \frac{25-7\sqrt{5}}{20}$. Ihre Einführung in die Formeln 194) gibt nach längerer Rechnung in der Tat: $s = \frac{5\sqrt{5}+7}{19}$, $t = \frac{8+3\sqrt{5}}{19}$, d. h. die reziproken Werte von σ und τ.

Wir betrachten nun die Stephanoide $St_{10}\binom{6}{2}$ der fünften Gruppe. In der Fläche 41), der Fläche 1) des Einzelstephanoids entsprechend, entsteht die Grenzfigur des Polyeders durch Schnitt mit den Flächen 71), 73), 77) und 79), die der Reihe nach den Flächen 5'), 3'), 9'), 7') des Einzelstephanoides zugeordnet sind. Sie ergeben durch ihren Schnitt die folgenden Ecken erster Klasse des 2.60-Ecks: 8 (41, 77, 79); 4 (41, 71, 73); 116 (41, 73, 79) und 114 (41, 71, 77). Die Koordinaten der Ecke 4), aus den Gleichungen der Flächen 41), 71), 73) berechnet, sind: $x = \frac{d}{b_5}$, $y = \frac{a_5(c_1 - b_5)d}{b_5(b_1c_5 + a_1a_5)}$, $z = \frac{c_5(c_1 - b_5)d}{b_5(b_1c_5 + a_1a_5)}$. Nun hat 4) die Koordinaten $x = y_5$, $y = z_5$, $z = x_5$. Die Einführung von x_5, y_5, z_5 in die Formeln 89) ergibt, da stets $c_5 + a_5\cot\varphi = \sigma$ ist:

$$195)\quad \begin{cases} s = \dfrac{(c_1 - b_5)\sigma\cot\varphi + b_1c_5 + a_1a_5}{2\,[(c_1 - b_5)(a_5 + c_5) + b_1c_5 + a_1a_5]}, \\[2ex] t = \dfrac{(c_1 - b_5)(c_5\cot\varphi + a_5)\cos^2\varphi}{(c_1 - b_5)(a_5 + c_5) + b_1c_5 + a_1a_5}. \end{cases}$$

Wir wenden diese allgemeinen Formeln auf das Deltoidhexekontaeder $\sigma = \frac{11-3\sqrt{5}}{4}$, $\tau = \frac{45-14\sqrt{5}}{11}$ an. Hier sind die benötigten a, b, c: $a_1 = \frac{41\sqrt{5}-87}{44}$,

$b_1 = b_5 = \frac{59-23\sqrt{5}}{44}$, $c_1 = \frac{9\sqrt{5}-14}{11}$, $a_5 = \frac{31-5\sqrt{5}}{44}$, $c_5 = 2b_1$, und es ergibt die Rechnung: $s = \frac{2\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}$, $t = \frac{1}{2\sqrt{5}-3}$, d. h. die A. V. des $(12+20)$-flächigen 20.3-Ecks. Für das Dyakishexekontaeder $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-7}{4}$, $\tau = 8-3\sqrt{5}$ sind die Koëffizienten a_1, b_1, c_1 bereits oben angeschrieben. Die hier noch notwendigen sind: $a_5 = c_5 = \frac{11\sqrt{5}-23}{4}$, $b_5 = \frac{55-23\sqrt{5}}{20}$. Man findet damit aus 195) wieder die früheren Werte der Parameter $s = \frac{5\sqrt{5}+7}{19}$, $t = \frac{8+3\sqrt{5}}{19}$. Es gilt nun der Satz: Für das eben angeführte spezielle Dyakishexekontaeder haben die beiden Stephanoidkombinationen der ersten und fünften Gruppe eine gemeinsame umbeschriebene Kugel, d. h. es ist $r^2 = x_3{}^2 + y_3{}^2 + z_3{}^2 = x_5{}^2 + y_5{}^2 + z_5{}^2$. Der Beweis hierfür ergibt sich durch Ausführung der Rechnung. Man findet für den Radius dieser Kugel $r = \frac{d\sqrt{55}\,(11\sqrt{5}+23)}{19}$. Nun ist $d = a\sigma\tau\cos^2\varphi$ $= a\frac{\sqrt{5}\,(87-35\sqrt{5})}{20}$. Führt man diesen Wert ein, so ergibt sich $r = a\sqrt{11}\,(2\sqrt{5}+1)$ oder da $a = \frac{C}{\sqrt{3}}$ ist: $r = \frac{(2\sqrt{5}+1)\sqrt{11}}{\sqrt{3}}C$. Es fallen also für jeden festen Wert von C, d. h. ein bestimmtes Dyakishexekontaeder dieser Varietät, die Ecken der beiden Gruppierungen von $St_{10}\binom{6}{2}$ zusammen. Für die Kanten des gemeinsamen Hüllpolyeders erhält man überdies die Proportion $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

6. **Die zweite und vierte Gruppe der Stephanoide $St_{10}\binom{6}{2}$.** Für die zweite Gruppe wird die erste Fläche des Stephanoides in der Ebene 11) des Dyakishexekontaeders durch die Ebenen 101), 103), 109), 107) des Kernpolyeders erzeugt, wobei diese Flächen der Reihe nach den Flächen 5'), 3'), 7'), 9') des Einzelstephanoides $St_{10}\binom{6}{2}$ korrespondieren. Danach haben wir die Ecken 34 (11, 101, 103), 38 (11, 107, 109), 84 (11, 101, 107) und 86 (11, 103, 109) des 2.60-Ecks. Für die Koordinaten des Schnittpunktes der Ebenen 11), 101), 103) ergibt sich aus deren Gleichungen: $x = \frac{d}{a_1}$, $y = \frac{(a_5-c_1)\,c_1\,d}{a_1\,(b_1 c_5 + b_5 c_1)}$, $z = \frac{(a_5-a_1)\,b_1\,d}{a_1\,(b_1 c_5 + b_5 c_1)}$. Da nun für die Ecke 34) $x = z_3$, $y = x_3$, $z = y_3$ ist, so erhält man für s und t, mit Berücksichtigung von $c_1 \cot\varphi + b_1 = \sigma$, die Werte:

$$196)\quad \begin{cases} s = \dfrac{(a_5 - a_1)\,\sigma + (b_1 c_5 + c_1 b_5)\cot^2\varphi}{2\,[(a_5 - a_1)\,c_1 \tan\varphi + (b_1 c_5 + c_1 b_5)\cot\varphi]}, \\ t = \dfrac{(a_5 - a_1)\,c_1 \cot\varphi + b_1 c_5 + c_1 b_5}{(a_5 - a_1)\,c_1 \tan\varphi + (b_1 c_5 + c_1 b_5)\cot\varphi}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Für die A. V. des Triakisikosaeders als Kern, ergeben sich, wie die Rechnung ausweist, dieselben Werte von s und t der Hülle, wie bei der ersten Gruppe. Für die A. V. des Deltoidhexekontaeders als Kern erhält man dieselben Werte s, t, die sich bei der dritten Gruppe einfinden werden.

Für die vierte Gruppe der Stephanoide $St_{10}\binom{6}{2}$ wird die erste Fläche des ersten Stephanoids in der Ebene 31) des Dyakishexekontaeders durch die Spuren der Ebenen 83), 81), 89), 87) erzeugt, die mit den Flächen 3'), 5'), 7'), 9') des Einzelstephanoids korrespondieren. Die Ecken dieser ersten Fläche im Hüllpolyeder sind 14), 18), 104), 106), erzeugt durch den Schnitt der Flächen: 31), 81), 83); 31), 87), 89); 31), 81), 87) und 31), 87), 89). Für die Koordinaten der Ecke 14) ergeben sich aus den Gleichungen der Ebenen 31), 81), 83) die Werte: $x = \dfrac{d}{a_4}$, $y = \dfrac{c_4(c_2 - a_4)\,d}{a_4(a_2 c_4 + b_2 b_4)}$, $z = \dfrac{b_4(c_2 - a_4)\,d}{a_4(a_2 c_4 + b_2 b_4)}$; also da $x = y_4$, $y = z_4$, $z = x_4$ ist und $b_4 + c_4 \cot\varphi = \sigma$ wird:

$$197)\quad \begin{cases} s = \dfrac{(c_2 - a_4)\,\sigma\cot\varphi + a_2 c_4 + b_2 b_4}{2\,[(c_2 - a_4)\,(b_4 + c_4) + a_2 c_4 + b_2 b_4]}, \\ t = \dfrac{(c_2 - a_4)\,c_4 \cot\varphi + a_2 c_4 + b_2 b_4}{(c_2 - a_4)\,(b_4 + c_4) + a_2 c_4 + b_2 b_4}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Für die Varietät $\sigma = \dfrac{11 - 3\sqrt{5}}{4}$ des Deltoidhexekontaeders ergibt sich ein Polyeder, dessen Hülle die A. V. des 20.3-Ecks ist; für das Pentakisdodekaeder $\sigma = 5(\sqrt{5} - 2)$ erhält man eine Gruppierung der $St_{10}\binom{6}{2}$ mit der A. V. des 60-Ecks zur Hülle, wie hier durch Rechnung auf Grund der Formeln 197) zu erhärten ist.

7. Die dritte Gruppe der Stephanoide $St_{10}\binom{6}{2}$ und die autopolare Gruppierung. Die der Fläche 1) des Einzelstephanoids entsprechende Fläche 21) des Dyakishexekontaeders bildet die Grenzfigur der Stephanoidgruppierung durch Schnitt mit den Ebenen 91), 93), 97), 99) und zwar ist 91) ≡ 5'), 93) ≡ 3'), 97) ≡ 9'), 99) ≡ 7'). Es werden die Ecken dieses Vierecks im 2.60-Eck: 28 (21, 99, 97); 96 (21, 99, 93); 94 (21, 97, 91); 24 (21, 91, 93). Wir bestimmen die Koordinaten der Ecke 24) aus den Gleichungen der Ebenen 21), 91), 93). Es ergibt sich: $x = \frac{d}{a_2}$, $y = \frac{c_2(c_4 - a_2)d}{a_2(a_4 c_2 + b_2 b_4)}$, $z = \frac{b_2(c_4 - a_2)d}{a_2(a_4 c_2 + b_2 b_4)}$ und da für die Ecke 24) $x = z_5$, $y = x_5$, $z = y_5$ ist, so erhält man mit Berücksichtigung von $b_2 + c_2 \cot\varphi = \sigma$ für das Hüllpolyeder die Parameter:

$$198)\quad \begin{cases} s = \dfrac{(c_4 - a_2)\sigma + (a_4 c_2 + b_2 b_4)\cot^2\varphi}{2[(b_2 + c_2)(c_4 - a_2) + a_4 c_2 + b_2 b_4]} \\[2ex] t = \dfrac{c_2(c_1 - a_2)\cot\varphi + a_4 c_2 + b_2 b_4}{(b_2 + c_2)(c_4 - a_2) + a_4 c_2 + b_2 b_4}\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Als speziellen Fall untersuchen wir zunächst das Pentakisdodekaeder $\sigma = 1$, $\tau = 5(\sqrt{5} - 2)$. Hier wird $a_4 = a_1 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$, $b_4 = b_2 = \sqrt{5} - 2$, $c_4 = c_2 = 2\sqrt{5} - 4$. Damit berechnet man: $s = \frac{9 + 5\sqrt{5}}{22}$, $t = \frac{4\sqrt{5} + 5}{15}$, d. h. die Parameter der A. V. des 60-Ecks. Die nötigen Grössen a, b, c für die A. V. des Deltoidhexekontaeders sind $a_2 = b_2 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$, $c_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $a_4 = \sqrt{5} - 2$, $b_4 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $c_4 = 2a_4$. Damit erhält man aus 198) die Werte $s = 1$, $t = \frac{\sqrt{5} + 2}{5}$, d. h. die reziproken Werte von σ und τ des vorhergehenden Polyeders, wie früher angekündigt worden war. — Wir suchen nun das autopolare Polyeder dieser dritten Gruppe. Für dieses muss $s = \frac{1}{\sigma}$, $t = \frac{1}{\tau}$, d. h. $\frac{t}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\tau\cos^2\varphi} = \frac{1}{\vartheta}$ sein. Setzen wir zur Abkürzung in den allgemeinen Formeln 198) $s = \frac{z}{2n}$, $\frac{t}{\cos^2\varphi} = \frac{z'}{n}$, so sind die Bedingungen der Autopolarität $\frac{z}{2n} = \frac{1}{\sigma}$, $\frac{z'}{n} = \frac{1}{\vartheta}$, woraus die Gleichung $z\sigma - 2z'\vartheta = 0$ folgt. Führt man die Koëffizienten a, b, c als Funktionen von σ und ϑ in z und z' ein, so werden diese:

$$z = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}(2 + 3\cot\varphi) + \sigma\vartheta^2(4\cot\varphi + 3) - \sigma^2\vartheta\cot\varphi - 2\vartheta^2\cot^2\varphi + \sigma\vartheta\tan^2\varphi + \frac{\sigma^2}{2}(\tan\varphi + \cot\varphi);$$

$$z' = -\frac{\sigma^2\vartheta^2}{4}(2 + 3\cot\varphi) + \frac{\sigma\vartheta^2}{2}(2\cot\varphi + 3) + \frac{\sigma^2\vartheta}{2}\cot\varphi - \vartheta^2(2 - \tan\varphi) - \frac{\sigma\vartheta}{2}(5\tan\varphi - 1) + \frac{\sigma^2}{4}(\tan\varphi + \cot\varphi);$$

und die Gleichung $z\sigma - 2z'\vartheta = 0$ lässt sich nach geeigneten Umformungen auf die Gestalt bringen:

$$(\vartheta-\sigma)\left[\frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}(2+3\cot\varphi)-\sigma\vartheta^2(2\cot\varphi+3)+\sigma^2\vartheta\cot\varphi+2\vartheta^2(2-\tan\varphi)-\sigma\vartheta\tan^2\varphi\right.$$
$$\left.-\frac{\sigma^2}{2}(\tan\varphi+\cot\varphi)\right]=0.$$

Da $\vartheta \neq \sigma$ sein muss (denn es handelt sich um ein Dyakishexekontaeder und nicht Triakisikosaeder als Kern) so ist die Bedingung dafür, dass σ, ϑ zu einem autopolaren Polyeder Veranlassung geben, das Verschwinden des zweiten Faktors, während zugleich die Relation besteht: $\vartheta = \frac{5\sigma\cos^2\varphi}{2\cot^2\varphi-\sigma}$, oder da $\cos^2\varphi = \frac{\cot\varphi+2}{5}$ ist: $\vartheta = \frac{\sigma(\cot\varphi+2)}{2\cot^2\varphi-\sigma}$. Führt man diesen Wert von ϑ in den gleich Null gesetzten obigen zweiten Faktor ein, so erhält man schliesslich nach längerer Rechnung für σ die Gleichung:

$$\sigma^2-\sigma-\frac{3\cot\varphi-4}{2(3+4\cot\varphi)}=0 \text{ oder } \sigma^2-\sigma-\frac{5\sqrt{5}-11}{4}=0,$$

und daraus:

$$\sigma=\frac{1+\sqrt{5(\sqrt{5}-2)}}{2}=1{,}0433..$$

Aus der Gleichung $\tau=\frac{5\sigma}{3+\sqrt{5}-\sigma}$ ergibt sich dann:

$$\tau=\frac{1}{19}\left(23\sqrt{5}-40+\sqrt{10(25\sqrt{5}-41)}\right)=1{,}2442..$$

Die Werte der Parameter s und t des Hüllpolyeders dieser autopolaren Stephanoidgruppierung sind die reziproken der σ und τ, nämlich: $s=\frac{2\sqrt{5(\sqrt{5}-2)}-2}{5\sqrt{5}-11}=0{,}958..$, $t=\frac{2\sqrt{10(\sqrt{5}+1)}-7\sqrt{5}+5}{5(5\sqrt{5}-11)}=0{,}804\ldots$ Dieses Polyeder ist die **einzige** autopolare Gruppierung von sechs Stephanoiden $St_{10}\binom{6}{2}$ bezw. von zwölf Stephanoiden $St_5\binom{3}{1}$ im Dyakishexekontaedertypus. — Damit sind die Gruppierungen von **Stephanoiden** dieses Typus, die diskontinuierliche gleicheckig-gleichflächige Nullpolyeder darstellen, überhaupt erschöpft. Es sei aber bereits hier bemerkt, dass noch drei Gruppierungen von je fünf anderen kontinuierlichen Nullpolyedern, die je ein diskontinuierliches Nullpolyeder des Dyakishexekontaedertypus bilden, existieren, auf die wir jedoch erst später zu sprechen kommen.

8. **Die kontinuierlichen Nullpolyeder im Dyakishexekontaedertypus.** Von den fünf hier zu beschreibenden kontinuierlichen Nullpolyedern

sind die vier ersten bereits von Hess beiläufig[1]) angegeben, aber nicht näher untersucht worden. Hier erscheinen sie als Grenzfälle der soeben besprochenen Gruppierungen von Stephanoiden $St_{10}(\frac{c}{2})$. Die Punkte, in denen die Kurven K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 (vergl. die vorige Nr. 3) die Pentakisdodekaedergerade C_1 und die Triakisikosaedergerade C_2, sowie die Deltoidhexekontaederkurve C_3 schneiden, ergeben die Werte σ und τ der inneren Kerne dieser vier Polyeder, deren begrenzende Flächen, sämtlich Sechsecke dritter Art, ihre Ecken mit denen je zweier Flächen verschiedener Stephanoide gemein haben, wie jetzt weiter ausgeführt wird.

α) Es sei für die erste und zweite Stephanoidgruppierung der Kern die A. V. des Trikisikosaeders; (vergl. Fig. 1, Taf. 12). Die beiden ersten Grenzflächen je eines Stephanoides der beiden Gruppen, die Vierecke $ABCD$ und $EFDC$, fallen in der Ebene 1) des Triakisikosaeders zusammen. In dem Dreiecke CDM überdecken sich eine positive und negative Zelle beider Grenzflächen, so dass dieses Dreieck den Koëffizienten Null erhält und das kontinuierliche Sechseck dritter Art $ABCEFD$ entsteht, die Fläche eines kontinuierlichen Polyeders, das von 60 solchen Flächen begrenzt wird. Da je zwei kongruente Zellen dieses Sechsecks die Koëffizienten $+1$ und -1 besitzen, so ist sein Inhalt Null, womit der Inhalt des Gesamtpolyeders verschwindet. Dieses Polyeder ist in Fig. 2 Taf. 27 dargestellt. Die Ecken sind sechskantig von der sechsten Art. Analog der Entstehung der sechskantigen Grenzfläche dritter Art aus zwei überschlagenen Vierecken zweiter Art setzen sich auch zwei überschlagene vierkantige Ecken vierter Art zweier Stephanoide zu einer sechskantigen Ecke sechster Art zusammen. Die Art ist $\alpha = 6$, weil die Ecke bei Vertauschung der Innenseite mit der Aussenseite in sich selbst übergeht. Den Querschnitt einer solchen Ecke zeigt die der Fig. 1 Taf. 12 beigefügte Nebenfigur 1[a]. Die Buchstaben A, B', B_0, B'', ... geben beim Vergleich mit der Figur der Grenzfläche des Polyeders die Zusammensetzung der Ecke aus den Kantenwinkeln $A, (B', B_0, B'')$.... der Ecken der Grenzfläche an. — Da das Polyeder $\frac{60.6}{2} = 180$ Kanten besitzt und 180 überstumpfe Kantenwinkel (jede Fläche drei), so ist für die Art A nach der Formel von Hess:[2]) $2A = 60.3 + 60.6 - 180 - 180 = 180$, d. h. $A = 90$,

[1]) Vergl. Marburger Berichte 1877, Nr. 1.

[2]) Dasselbe gilt für die drei folgenden Polyeder.

also auch $A' = 90$. Die Hülle ist, wie aus Nr. 5 bekannt, das $(12+20+30)$-flächige 60-Eck für $s = \frac{11+3\sqrt{5}}{19}$, $t = \frac{14\sqrt{5}+45}{95}$. Wie aus der Figur der Grenzfläche ersichtlich ist, schneidet keine der Hauptachsen G eine der positiven oder negativen Zellen der Fläche; es ist also das Gesamtpolyeder längs dieser Achsen durchbohrt. Auch das Innere hat, samt dem gleichflächigen Kerne (dem Triakisikosaeder) den Koëffizienten Null, sodass das Polyeder hohl erscheint.

β) Ist für die vierte und fünfte Gruppe der $St_{10}\binom{6}{2}$ der Kern die besondere Varietät des Deltoidhexekontaeders für $\sigma = \frac{11-3\sqrt{5}}{4}$, $\tau = \frac{45-14\sqrt{5}}{11}$, so ergibt sich das polarreziproke Polyeder zum vorigen, dessen Hülle also die A. V. des $(12+20)$-flächigen $20 \cdot 3$-Ecks ist. Die vollständige Figur dieses besonderen Deltoidhexekontaeders ist in Fig. 1 Taf. 16 dargestellt. Die beiden hier in einer Ebene liegenden Flächen zweier Stephanoide sind die Vierecke $ABCD(A)$ und $DEFA(D)$ mit der gemeinsamen Kante AD. Durch Aufeinanderfallen dieser beiden Vierecke entsteht mit Tilgung der Strecke AD das kontinuierliche Sechseck dritter Art $ABCDEF(A)$, mit drei Paaren zu je zwei kongruenten Zellen entgegengesetzten Vorzeichens, während die beiden innersten deltoidförmigen Zellen den Koëffizienten Null besitzen. Da alle Arten von Achsen G, C, B entweder das Innere oder wenigstens den Perimeter der positiven und negativen Flächenzellen schneiden, so ist die äussere Oberfläche des entstehenden Polyeders, das Fig. 5 Taf. 26 zeigt,[1]) geschlossen. Ein Vergleich der Figur der Grenzfläche (Fig. 1 Taf. 16) mit der ihr beigegebenen Figur des Querschnittes der Ecke (s. Taf. 14), die wiederum sechster Art ist, zeigt deren Bildung aus den Kantenwinkeln der Fläche.

γ) Ist für die zweite und dritte Stephanoidgruppierung der Kern die A. V. des Deltoidhexekontaeders, (vergl. Fig. 1 Taf. 17), so fallen die beiden viereckigen Grenzflächen $S_1S_2S_3S_6$ und $S_4S_3S_6S_5$ in der Ebene des Deltoidhexekontaeders zusammen, und bilden bei Tilgung der ihnen gemeinsamen Kante S_3S_6 das Sechseck dritter Art $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$ mit zwei Paaren entgegen-

[1]) Bei diesem kompliziertesten der hier besprochenen vier Polyeder wurde, da das Modell in gleichem Massstabe wie die übrigen hergestellt werden sollte, und deshalb die kleinsten Pappteile vernachlässigt werden mussten, nur Wert auf die Darstellung des Gesamtcharakters gelegt; doch ist aus der vollständigen Figur der Fläche die Zuordnung der Hauptteile ersichtlich.

gesetzt gleicher dreieckiger Zellen. Das von 60 solchen Flächen begrenzte kontinuierliche Nullpolyeder zeigt Fig. 3 Taf. 27. Da die positiven bezw. negativen Zellen mindestens auf ihren Kanten von sämtlichen Arten Achsen des Typus getroffen werden, so ist die äussere Oberfläche des Polyeders eine völlig geschlossene. Die Ecke ist übrigens von derselben Beschaffenheit wie die der vorher besprochenen Polyeder und ein Vergleich des beigefügten Eckenschnittes (Fig. 1[a] Taf. 17) mit der Zeichnung der Fläche des Polyeders gibt wiederum Aufschluss über die Anordnung der Kantenwinkel der Fläche in einer Ecke des Polyeders, dessen äussere Hülle diejenige Varietät des (12+20)-flächigen 12.5 Ecks ist, für welche neben $s = 1$ $t = \frac{\sqrt{5}+2}{5}$ ist.

δ) Ist für die vierte und dritte Stephanoidgruppierung der Kern die besondere Varietät des Pentakisdodekaeders $\sigma = 1$, $\tau = 5(\sqrt{5}-2)$, so ergibt sich das zum vorigen polarreziproke Polyeder, dessen Fläche in Fig. 1 Taf. 14 dargestellt ist. Die beiden überschlagenen viereckigen Grenzflächen $V_1V_6V_5V_2$ und $V_4V_3V_2V_5$ der beiden Stephanoide erzeugen mit Tilgung der ihnen gemeinsamen Kante V_2V_5 das Sechseck dritter Art $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$, dessen beide innersten deltoidförmigen Zellen wieder den Koëffizienten Null haben, während die übrigen Zellen paarweise kongruent und entgegengesetzten Vorzeichens sind. Die äussere Oberfläche des in Fig. 1 Tafel 27 dargestellten kontinuierlichen Nullpolyeders ist aus dem schon wiederholt angeführten Grunde geschlossen. Die äussere Hülle ist die A. V. des (12 + 20 + 30)-flächigen 60-Ecks. Die sechskantige Ecke sechster Art ist im Ganzen wiederum von demselben Typus wie die der drei vorhergehenden Polyeder, nur ist die Lage der sechs Kantenwinkel im Raume eine etwas modifizierte, wie die beigefügte Durchschnittsfigur erkennen lässt (vergl. Fig. 1[a] Taf. 14).

Hiermit sind die Stephanoidgruppierungen für spezielle Kerne und Hüllen erledigt und es ergeben sich also aus ihnen nur die vier beschriebenen kontinuierlichen Nullpolyeder vom Dyakishexekontaedertypus. Hierzu ist aber noch ein autopolares Nullpolyeder anzuführen, das sich ergibt, wenn die Stephanoide der ersten und fünften Gruppe denjenigen gemeinsamen inneren Kern besitzen, dessen Parameter σ und τ sich als Koordinaten des Schnittpunktes der Kurven K_1 und K_5 ergaben, nämlich $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-7}{4}$,

$\tau = 8 - 3\sqrt{5}$. Die vollständige Figur dieses Dyakishexekontaeders zeigt die Figur der Taf. 19. Die Grenzfläche des Stephanoides der ersten Gruppe ist das Viereck $ABCD$, erzeugt durch die Spuren der Ebenen 111), 113), 119), 117) in der Ebene 1) des Kernkörpers. Die Fläche des Stephanoides der fünften Gruppe ist das Viereck $ABEF$ der Spuren der Ebenen 113), 99), 38), 64) in der Zeichenebene. Wie bereits erwiesen, besitzen diese beiden Stephanoidgruppierungen bei demselben Kerne eine gemeinsame umbeschriebene Kugel; ihre Ecken fallen in den Ecken des gemeinsamen umhüllenden $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecks zusammen, und es liegen daher die Ecken A, B, C, D, E, F der ebenen Figur auf einem Kreise. Dabei bilden die genannten beiden Vierecke mit Tilgung der gemeinsamen Kante AB das kontinuierliche Sechseck $ADCBEF(A)$ mit den beiden überstumpfen Winkeln A und D. Nun sind mit Berücksichtigung der Vorzeichen der Zellen die beiden Vierecke der Stephanoide, ausgedrückt durch die entstehenden Zellen der Gesamtfigur (Vergl. auch Fig. 7 Taf. 11).

$$ABCD \equiv a+b+c+d-e \equiv 0,$$
$$ABCF \equiv g+b+h-f-d \equiv 0,$$

folglich ist
$$ADCBEF \equiv a+2b+c+g+h-e-f \equiv 0;$$

d. h. das Sechseck besteht aus vier Zellen, zwei dreieckigen und zwei viereckigen, mit dem Koëffizienten $+1$, einer viereckigen Zelle des Koëffizienten $+2$, und einer dergleichen mit dem Koëffizienten -1, während die dreieckige Zelle i den Koëffizienten Null besitzt, denn sie gehört keiner der ursprünglichen Stephanoidflächen an. Es ist also die Gesamtfläche vom Inhalt Null, ohne dass hier noch, wie bisher bei allen Nullpolyedern, kongruente Zellen entgegengesetzten Vorzeichens auftreten. Das von 120 solchen Sechsecken dritter Art[1]) begrenzte Polyeder besitzt also in der Tat den Inhalt Null. — Wir betrachten nun weiter die Ecken dieses in Fig. 5 Taf. 29 dargestellten kontinuierlichen Polyeders.[2]) Eine solche sechskantige Ecke hat den in Fig. 8 Taf. 11 an-

[1]) Vergl. V. u. V. Tafel I, die vierte Figur $VI_{2,3}$.

[2]) Wie sich aus der Figur der Grenzfläche ablesen lässt, besteht die äussere geschlossene Oberfläche dieses Polyeders aus $120.26 = 3120$ einfach zusammenhängenden Flächenstücken, dürfte also wohl den kompliziertesten aller bisher beschriebenen Körper begrenzen. In der vollständigen Figur Taf. 19 sind auch hier die nicht nötigen Ebenenspuren weggelassen.

gedeuteten irregulären Querschnitt, wobei die 2.60 Ecken in zwei Gruppen von je 60, rechten und linken, zerfallen. Ein Vergleich dieses Eckenschnittes mit der Figur der Grenzfläche (Fig. 7 Taf. 11) zeigt die Bildung der Ecke durch die einzelnen Kantenwinkel der Fläche. Der Querschnitt der Ecke des Stephanoides der ersten Gruppe für sich allein ist das Viereck $MNOP$, der der Ecke des Stephanoides der fünften Gruppe ist das Viereck $PQRS$. Dabei liegt der Kantenwinkel PO der ersten Ecke in derselben Ebene mit dem Kantenwinkel PQ der zweiten Ecke. Durch Tilgung eines Teiles des Kantenwinkels PM, nämlich des Winkels PS, ergibt sich die sechskantige Ecke $MNOQRS$, und die an der Ecke teilhabenden Kantenwinkel tragen nun dieselbe Benennung $a, c, g \ldots$ wie in der Flächenfigur. Der Kantenwinkel der Ecke D der Fläche wird in die beiden Teile ε' und ε'' zerlegt, die mit verschiedenen Seiten der Aussenseite der Ecke angehören. Dasselbe gilt für die Teile h' und h'' des Kantenwinkels h in der Ecke F der Fläche. Der getilgte Winkel PS der Ecke entspricht dem getilgten Teile d der Fläche in der Ecke B. Es besitzt, wie die Figur zeigt, die Ecke des Polyeders drei einspringende und drei ausspringende Flächenwinkel, nämlich die drei überstumpfen Flächenwinkel in O, Q und S. Von den Kantenwinkeln einer Ecke sind zwei überstumpf, nämlich die beiden Winkel $OQ \equiv \eta + f$ und $ON \equiv \varepsilon' + \varepsilon''$. Die Art der Ecke ist $\alpha = 5$. Es ist also für das Polyeder $\Sigma a = 120.3$, $\Sigma \alpha = 120.5$, $\Sigma \varkappa = 120.2$ und $K = \frac{120.6}{2} = 360$, somit $2A = 120.3 + 120.5 - 120.2 - 120.3 = 3.120$, d. h. $A = 180$. Vertauscht man die Innenseite des Polyeders mit der Aussenseite,[1]) so ist $a' = 3$, $\alpha' = 7$, $\Sigma \varkappa' = 120.4$, da jede Fläche jetzt vier überstumpfe Winkel hat; und da $K' = K = 360$ verbleibt, so ist $2A' = 120.3 + 120.7 - 120.4 - 120.3 = 3.120$, d. h. $A' = A = \frac{K}{2}$. Der Inhalt des Polyeders ist also wiederum Null, aber die Grenzfläche besitzt bei verschwindendem Inhalte nur eine positive Zelle, dafür aber auch eine Zelle mit dem Koëffizienten -2. Während bei dem ursprünglichen Polyeder (vergl. den Querschnitt der Ecke) die Zelle $NMSR..$ der Ecke positiv, die andere $OQ..$ negativ war, tritt bei Änderung der Färbung des Polyeders das Gegenteil ein. Verfolgen wir dies beim ur-

[1]) Das umgefärbte Polyeder bietet hier einen anderen Anblick dar, wie vorher, wovon man sich durch die zweimalige Ausführung am Modell leicht überzeugt. Bei den

sprünglichen Polyeder noch genauer. Von der Fläche des Polyeders, wie sie gezeichnet vorliegt, nehmen ausgemachtermassen die senkrecht schraffierten Teile mit ihrer Oberseite, die wagrecht schraffierten mit ihrer Unterseite an der Aussenfläche des Polyeders teil. Es ist also a, c, g, h' aussen positiv; h'' nimmt mit der Unterseite an der äusseren Oberfläche teil, ist also aussen negativ, wie denn in der Tat der Kantenwinkel h'' zur negativen Zelle der Ecke gehört. f und η nehmen mit der Oberseite der Fläche — die aber negativ ist — an der Aussenseite der Polyederoberfläche teil und bilden mit ε', dessen obere Seite ebenfalls negativ ist, die negative Zelle der Ecke. ε'' ist oben negativ, nimmt aber mit der unteren positiven Seite am Aufbau der Ecke teil und gehört, wie die Figur der Ecke zeigt, zur äusseren Fläche von deren positiver Zelle. — Es ist selbstverständlich, dass die Hülle dieses autopolaren Polyeders, das (12 + 20 + 30)-flächige 2.60-Eck für $s = \frac{5\sqrt{5}+7}{19}$, $t = \frac{8+3\sqrt{5}}{19}$, polarreziprok dem inneren Kern ist. Für die Kanten der Hülle war bereits die Proportion $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ abgeleitet.

Es hat keinerlei wesentliche Schwierigkeit, für die fünf beschriebenen Nullpolyeder die Längen der verschiedenen Kanten der Grenzfläche, ihre Winkel u. s. w. zu berechnen, nachdem die Koordinaten der Ecken gefunden sind. Die Endresultate sind aber bei ihrer verhältnismässigen Kompliziertheit von geringem Interesse. Wir geben vielmehr zum Schlusse noch für jedes der fünf Polyeder die Ecken des betreffenden gleicheckigen Hüllpolyeders an, die der ersten Fläche des Polyeders zugehören, wodurch die Lage der Grenzfläche innerhalb des Hüllpolyeders deutlicher wird. α) Orientieren wir das gleicheckige (12 + 20 + 30)-flächige 60-Eck so im Raume, dass die Achse G_3 senkrecht nach oben verläuft, die Achse C_1 in der Symmetrieebene nach vorn, so sind die Ecken der ersten Fläche des unter α) angeführten Nullpolyeders, d. h. der in der Zeichenebene 1) des Triakisikosaeders liegenden Fläche, die Ecken 16), 43), 22), 30), 7), 40) des 60-Ecks, der Reihenfolge nach den Ecken A, B, C, E, F, D der Grenzfläche korrespondierend. β) Verläuft die Achse C_7 des (12+20)-flächigen 20.3-Ecks im Raume senkrecht nach

---

sonstigen Modellen der Nullpolyeder erhält man wegen der Umkehrbarkeit der Ecken immer dasselbe Gesamtbild der Polyeder.

oben, die Achse G_1 in der Symmetrieebene nach vorn, so sind die Ecken der ersten Fläche des Nullpolyeders β), d. h. der in der Fläche 1) des Deltoidhexekontaeders liegenden Grenzfläche des Polyeders, die Ecken 22), 53), 17), 49), 26), 12) des 20.3-Ecks, entsprechend den Ecken A, B, C, D, E, F in der Fig. 1 Taf. 16. γ) Orientiert man das $(12+20)$-flächige 12.5-Eck im Raume derart, dass die Achse C_7 senkrecht nach oben, die benachbarte Achse G_1 in der Symmetrieebene nach vorn verläuft, so sind die Ecken der ersten Fläche des Nullpolyeders γ), d. h. die Ecken S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 der Grenzfläche in Fig. 1 Taf. 17 die Ecken 49), 5), 23), 48), 4), 24) des umhüllenden 12.5-Ecks. δ) Es liege das $(12+20+30)$-flächige 60-Eck im Raume so, dass die Achse B_1 senkrecht nach oben verläuft, die benachbarte Achse G_1 in der Symmetrieebene nach vorn. Dann sind die Ecken V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6 der Fläche 1) des Nullpolyeders in Fig. 1 Taf. 14 die Ecken 41), 17), 24), 44), 22), 30) des 60-Ecks. — Die Fläche des zuletzt beschriebenen autopolaren Nullpolyeders $ADCBEF$ in der Ebene 1) des Dyakishexekontaeders endlich besitzt die Ecken 44), 74), 48), 76), 35), 67) des $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecks, wobei dieses gleich dem inneren Kerne mit der G_1-achse senkrecht nach oben, mit der Achse B_1 nach vorn auf den Beschauer zu orientiert ist. — Schliesslich haben wir noch die folgende Bemerkung zuzufügen. Man könnte wohl versucht sein (wir verweisen hierzu auf Fig. 3 Taf. 12), ebenso wie für den gemeinsamen Punkt der Kurven K_1 und K_5, so etwa für den Schnittpunkt von K_1 und K_4 u. s. w. die betreffenden Polyeder zu untersuchen. Es ist aber ausgeschlossen, dass sich hier ähnliche Verhältnisse wiederholen, die auf neue Polyeder führen. Denn bezeichnen wir die Koordinaten dieses Schnittpunktes von K_1 und K_4 mit σ', τ', die dazugehörigen Polyeder kurz mit $P_1(\sigma')$ und $P_4(\sigma')$, so ist das zu $P_1(\sigma')$ reziproke Polyeder ein P_5 auf dem zwischen π und dem Triakontaederpunkte gelegenen Teile der Kurve K_5, nach der früheren Betrachtung über die Reziprozität; dagegen das zu $P_4(\sigma')$ reziproke Polyeder ein P_2 auf der Kurve K_2. Diese P_2 und P_5 gehören aber zu gänzlich verschiedenen Werten von σ und τ, also besitzen die ursprünglichen Polyeder $P_1(\sigma')$ und $P_4(\sigma')$ Hüllpolyeder mit verschiedenen Parametern s und t, w. z. b. w. Analoge Betrachtungen lassen sich für die übrigen Schnittpunkte der Kurven K anstellen. — Über weitere kontinuierliche gleicheckig-gleichflächige Nullpolyeder vergl. die Ergänzungen zu diesem § am Ende der Abhandlung.

§ 5. Die kontinuierlichen nichtkonvexen Polyeder erster Klasse, die diskontinuierlichen nichtkonvexen Polyeder erster und zweiter Klasse, sowie die Möbiusschen Polyeder im Dyakishexekontaedertypus.

1. Die kontinuierlichen nichtkonvexen Polyeder erster Klasse. Die nichtkonvexen Polyeder erster Klasse des Dyakishexekontaedertypus haben sich ebenso wie die bezüglichen Polyeder des Hexakisoktaedertypus bei Untersuchung der vollständigen Figuren der Kerne ergeben, die für die Gruppierungen der Sphenoide und Stephanoide in Frage kamen. Es sind im Ganzen fünf solcher Polyeder gefunden worden, von denen drei autopolar, die beiden letzten einander polarreziprok zugeordnet sind. Die unter *a)* und *b)* hier angeführten autopolaren Polyeder sind die von Hess[1]) bereits beschriebenen, die übrigen sind neu.

a) Das $12(10)_4$-eckige $12(10)_4$-Flach der 18. Art[2]) ist seiner äusseren Oberfläche nach vollkommen identisch mit dem Poinsotschen zwölfflächigen Sternzwölfecke der dritten Art. Die Fläche ist das Zehneck $ABEADECDBC(A)$ in der vollständigen Figur des Dodekaeders, Fig. 7 Taf. 10. Seine fünf kürzeren Kanten kehren dem Mittelpunkte die Innenseite, seine fünf längeren Kanten ihm ihre Aussenseite zu, wonach die innerste Zelle, eine Fläche des Dodekaeders, den Koëffizienten -1 hat, während die an sie grenzenden gleichschenklig-dreieckigen Zellen den Koëffizienten Null, die fünf äussersten Zellen den Koëffizienten $+1$ besitzen. Die zehn Ecken der Fläche fallen zu je zwei zusammen, so dass also immer je zwei Kantenwinkel in einer Ebene liegen. Die Fläche hat die Art $a = 4$.[3]) In jeder $(5+5)$-kantigen Ecke der vierten Art des nichtkonvexen Polyeders liegen fünf solcher Flächen. Der sphärische Schnitt der Ecke bietet den Anblick eines Sternfünfecks ohne die fünf den inneren Kern begrenzenden Strecken. Die Art des Polyeders ergibt sich zu $A = 18$ aus der

[1]) Hess, Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder, Cassel 1876, S. 34 und nochmals: Marb. Berichte 1877 Nr. 1 S. 7. Die Angaben der Zellenkoëffizienten sind an beiden Stellen irrtümlich. (Ebenso V. u. V. S. 215.)

[2]) Vergl. die Abbildung des Modelles in V. u. V. Taf. IX Fig. 7.

[3]) Vergl. V. u. V. Taf. I Fig. 16.

Gleichung $2A = 12.4 + 12.4 - 60$, da überstumpfe Kantenwinkel nicht vorhanden sind. Merkwürdig ist der Aufbau des Gesamtpolyeders. Es besteht nur aus zwei einfach zusammenhängenden Oberflächen, nämlich der äusseren Oberfläche des Polyeders, die sich aus 20.3 gleichschenkligen Dreiecken zusammensetzt (den äusseren Zellen der zehneckigen Grenzflächen) und aussen positiv ist, sowie der Oberfläche des inneren Dodekaeders, die aussen negativ ist. Dieses innere Dodekaeder hat nur die Eckpunkte mit Punkten der äusseren Oberfläche gemein, in denen je drei der obengenannten Dreiecke aneinander stossen. Es besitzt dann der gesamte Innenraum zwischen den beiden Oberflächen den Koëffizienten 1, während die innerste Zelle, das Dodekaeder, den Koëffizienten Null hat. Vertauscht man die Färbung, so ist die ganze äussere Oberfläche des Polyeders negativ (-1), das Dodekaeder aussen positiv ($+1$). Der zwischen beiden befindliche Raum hat den Koëffizienten -1, während das Innere des Dodekaeders wieder Null ist. Die Art des Polyeders ist in diesem Falle $A' = 42$; denn es ist $2A' = 12.6 + 12.16 - 12.10 - 60$, weil die Fläche nun bei entgegengesetzter Schraffierung zehn überstumpfe Kantenwinkel besitzt. Es ist also $A + A' = K$. Das Polyeder ist autopolar.

b) Das $20(6)_2$-eckige $20(6)_2$-Flach der 10. Art.[1]) Die Fläche dieses nichtkonvexen Polyeders erster Klasse ist das Sechseck zweiter Art $C_5 C_7 C_8 C_6 C_9 C_{10}$ in der vollständigen Figur des Ikosaeders (Fig. 6 Taf. 8). Die innerste Zelle, eine Fläche des ikosaedrischen Kernes, hat den Koëffizienten -1, die drei äusseren den Koëffizienten $+1$. Die Ecken des Polyeders sind sechskantig zweiter Art, mit drei ausspringenden und drei einspringenden Flächenwinkeln. Jeder der drei Doppelpunkte einer Grenzfläche (in Fig. 6 Taf. 8 die Punkte G_1, G_2, G_3) gehört nebst dem Ikosaeder als Ecke zugleich fünf Grenzflächen an, die in den Ebenen der fünf Flächen der Ikosaederecke liegen. Das Gesamtpolyeder besitzt wiederum nur zwei Zellen. Die äussere Oberfläche des Polyeders, aus 12.5 Dreiecken der Art $C_5 C_7 G_1$ bestehend, ist positiv; die Oberfläche der inneren Zelle, des Ikosaeders, aussen negativ. Diese beiden einfach zusammenhängenden geschlossenen Flächen haben die zwölf Ecken G des Ikosaeders als Einzel-

[1]) In anderer Auffassung oft als „Keilikosaeder" beschrieben. Vergl. die Abbildung des Modelles V. u. V. Taf. VIII Fig. 26.

punkte gemein, und der zwischen ihnen liegende Raum hat den Koëffizienten $+1$, während das Innere des Ikosaeders den Koëffizienten Null hat. Für dieses autopolare Polyeder ist $2A = 20.2 + 20.2 - 60$, $A = 10$, also $A' = 50$.

c) Das $12.5(6)_6$-eckige $60(6)_3$-Flach der 120. Art. Die Fläche dieses kontinuierlichen nichtkonvexen Polyeders erster Klasse ist in der vollständigen Figur der besonderen Varietät eines Pentakisdodekaeders enthalten, für welche neben $\sigma = 1$, $\tau = \frac{4\sqrt{5}+5}{11}$ ist, eine Varietät, die wir schon bei den quadratischen Sphenoiden anzuführen Gelegenheit hatten. Vergl. Fig. 1 Taf. 13. Die Grenzfläche des Polyeders ist das nichtkonvexe kontinuierliche Sechseck dritter Art $ABCDEF$ mit zwei überstumpfen Winkeln in E und F (vergl. auch Fig. 1^a Taf. 13). Von den Flächenzellen hat die eine fünfkantige den Koëffizienten $+2$, die angrenzenden fünf dreikantigen Zellen haben die Koëffizienten $+1$, während die Zelle mit der Kante EF den Koëffizienten -1 besitzt. Von den sechs Kanten der Fläche kehrt nur die Kante EF dem Mittelpunkt ihre Aussenseite zu. Das autopolare Polyeder, das von 60 solchen Flächen begrenzt wird, ist auf Taf. 28 in Fig. 3 dargestellt. Das äussere Hüllpolyeder ist also diejenige Varietät eines $(12+20)$-flächigen 12.5-Ecks, für welche $s = 1$, $t = \frac{4\sqrt{5}-5}{5}$ ist, denn die Hülle ist reziprok dem inneren Kern. Jede der 60 kongruenten sechskantigen Ecken des Polyeders — einen Querschnitt zeigt Fig. 1^b Taf. 13 — besitzt zwei überstumpfe Kantenwinkel, $\beta\gamma \equiv E$, $\gamma\delta \equiv F$, und vier überstumpfe Flächenwinkel β, γ, δ, ζ. Dabei ist die Bildung der Ecke durch die Zellen der Fläche die folgende: $\alpha\beta \equiv D' + D''$, $\beta\varepsilon \equiv E$, $\gamma\delta \equiv F$, $\delta\varepsilon \equiv A'' + A'$, $\varepsilon\zeta \equiv B$, $\zeta\alpha \equiv C$. Die Art der Ecke ist $\alpha = 6$. Es gilt also für die Art A des Polyeders, da $\Sigma\varkappa = 60.2$, $K = 60.3$ ist, die Gleichung:

$$2A = 60.3 + 60.6 - 60.2 - 60.3,$$

d. h. es ist $A = 120$. Für das Verhältnis der Kanten des Hüllpolyeders fand man: $k_2 : k_3 = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Die beiden Grenzflächen des Polyeders, deren Kante $\overline{EF}$ mit der Kante $\overline{1,2}$ des Hüllpolyeders zusammenfällt, sind ausgedrückt durch die Eckenzahlen des Hüllpolyeders: 1), 2), 41), 32), 31), 42) und 1), 2), 40), 30), 29), 39), (vergl. Fig. 1^c Taf. 13), womit die Lage einer solchen Grenzfläche im Hüllpolyeder sofort zu übersehen ist. Die Längen der Kanten der Fläche sind leicht zu berechnen, wenn die Eckkoordinaten des Hüllpolyeders bestimmt sind. Es ist übrigens mit Berücksichtigung der Figur der Grenzfläche: $AB = CD$, $AF = DE$, $EF = k_3$ und im Hüllpolyeder $AB = \overline{30, 40}$; $AF = \overline{1, 39}$; $BC = \overline{29, 30}$; $EF = \overline{1, 2}$.

d) Das $120(3)_3$-eckige $30(12)_7$-Flach der 75. Art. Die Fläche dieses nichtkonvexen Polyeders erster Klasse ist das Zwölfeck $P_1 P_2 P_3 \ldots P_{11} P_{12}$ in der vollständigen Figur des Triakontaeders (Fig. 5 Taf. 14). Die innerste Zelle dieses Zwölfecks hat, wenn man die Fläche unabhängig vom Polyeder betrachtet, den Koëffizienten $+3$, die daran grenzenden Zellen nach aussen zu fallend $+2$ und $+1$, während die äussersten vier dreieckigen Zellen die Koëffizienten -1 besitzen. Das Zwölfeck hat acht überstumpfe Winkel und ist von der Art $a = 7$ (siehe später). Das von 30 solchen Flächen begrenzte Polyeder zeigt Fig. 11 Taf. 26. Die äussere Hülle ist ein $(12 + 20 + 30)$-flächiges 2.60 Eck und zwar sind die Ecken $P_1 P_2 P_3 \ldots P_{11} P_{12}$ der in der Ebene 1) des Triakontaeders liegenden ersten Fläche die folgenden Ecken des 2.60-Ecks: $P_1 \equiv 15$, $P_2 \equiv 67$, $P_3 \equiv 59$, $P_4 \equiv 52$, $P_5 \equiv 64$, $P_6 \equiv 16$, $P_7 \equiv 76$, $P_8 \equiv 24$, $P_9 \equiv 33$, $P_{10} \equiv 38$, $P_{11} \equiv 27$, $P_{12} \equiv 75$, so dass die Fläche 1) im 2.60-Eck nach den Ecken lautet: 15, 67, 59, 52, 64, 16, 76, 24, 33, 38, 27, 75. Die Ecke $P_9 \equiv 33$ ist nun der Schnitt der Flächen 1), 15), 27) des Triakontaeders, deren Gleichungen

$$(1)\ c_1 z - d = 0, \quad (15)\ c_1 y - d = 0, \quad (27)\ a_2 x + b_2 y - c_2 z - d = 0$$

sind, wobei $c_1 = \tan\varphi$, $a_2 = \frac{\tan\varphi}{2}$, $b_2 = \frac{\tan^2\varphi}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ ist. Man findet für die Koordinaten des Schnittpunktes $z = \frac{d}{c_1}$, $y = \frac{d}{c_1}$, $x = \frac{c_1 - b_2 + c_2}{c_1 a_2} d$. Da für die Ecke 33) $x = z_2$, $y = x_2$, $z = y_2$ ist, so ergibt sich: $x_2 = y_2 = d\cot\varphi$, $z_2 = 3d\cot\varphi$, und damit folgt für die Parameter s und t des Hüllpolyeders nach den Formeln 83):

$$s = \frac{2\cot^2\varphi}{4\cot\varphi - 1} = \frac{5\sqrt{5} + 7}{19};$$

$$t = \frac{1 + 3\cot\varphi}{4\cot\varphi - 1}\cos^2\varphi = \frac{3\sqrt{5} + 8}{19}.$$

Für die Kanten dieses schon früher aufgetretenen Hüllpolyeders ergab sich die Proportion $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Für den Radius r des umbeschriebenen Kreises der ersten Grenzfläche (die parallel der xy-ebene liegt) erhält man aus $r^2 = x^2 + y^2 = z^2_2 + x^2_2$ den Wert $r = d \cot\varphi \sqrt{10}$. Für den Radius der umbeschriebenen Kugel findet man $R = d \cot\varphi . \sqrt{11}$. Besonders einfach berechnen sich für diesen Körper die Kanten der Grenzfläche, sowie ihre Winkel. Für letztere z. B. findet man[1]) direkt durch Betrachtung der Fig. 5 Taf. 14, wenn d_1 und d_2 die kleine und grosse Diagonale der Fläche des Triakontaeders bezeichnet, da $\sphericalangle P_{11} P_{10} P_9 = G_1 C_2 C_1$ $(= \mu)$ und $\sphericalangle P_{10} P_{11} P_{12} = C_2 G_1 C_1$ $(= \mu')$ ist,

$$\tan\mu = \frac{d_2}{d_1} = \frac{\sqrt{2(3+\sqrt{5})}}{2} = \cot\varphi,$$

d. h. $\mu = 90^0 - \varphi = 58^0 16' 57,''1$.

$$\cot\frac{\mu'}{2} = \frac{d_2}{d_1} = \cot\varphi,$$

d. h. $\mu' = 2\varphi = 63^0 26' 5{,}8''$. Sonach sind die überstumpfen Winkel der Grenzfläche: $\sphericalangle P_{10} = P_9 = P_3 = P_4 = 3R + \varphi$, $\sphericalangle P_{11} = P_8 = P_2 = P_5 = 4R - 2\varphi$, und die spitzen Winkel: $\sphericalangle P_1 = P_6 = P_7 = P_{12} = \varphi$. Die Summe aller Winkel beträgt also $28R$, wonach sich die Art der Fläche zu $a = 7$ ergibt. — Wir betrachten nun die Ecken des Polyeders genauer. Sie sind dreikantig und zwar treffen in jeder Ecke zwei verschiedene überstumpfe Kantenwinkel und ein spitzer Winkel zusammen. Die Polyederzelle an jeder Ecke ist i n n e n gefärbt zu denken, also ist die dreikantige Ecke von dem siebenten Typus (vergl. Kap. I, § 1, Nr. 2) und hat die Art $\alpha = 3$. Somit hat man für das Gesamtpolyeder $\Sigma a = 30 . 7$, $\Sigma \alpha = 120 . 3$, $\Sigma \varkappa = 30 . 8$, $K = 30 . 6$ d. h. es ist $2A = 150$, also $A = 75$, wie oben angegeben. Färbt man die andere Seite der Fläche, so ist $a' = 5$, $\alpha' = 3$ [Typus (6) der dreikantigen Ecken] und $\varkappa' = 4$, also $2A' = 210$, $A' = 105$, d. h., wie notwendig, $A + A' = K$.

e) Das $30(12)_7$-eckige $2.60.(3)_1$-Flach der 75. Art. Dieses zu dem vorigen polarreziproke Polyeder, das in Fig. 7 Taf. 25 dargestellt ist, hat zum inneren Kern demgemäss das Dyakishexekontaeder für $\sigma = \frac{19}{5\sqrt{5}+7} = \frac{5\sqrt{5}-7}{4}$, $\tau = \frac{19}{3\sqrt{5}+8} = 8 - 3\sqrt{5}$, d. h. das schon früher behandelte besonders

[1]) Vergl. V. u. V. S. 149 Anm.

ausgezeichnete 2.60-Flach. Um nun die Grenzfläche des neuen Polyeders in der Ebene 1) dieses Dyakishexekontaeders zu finden, beachten wir die Kanten der Ecke 1) des vorigen Polyeders. Diese Kanten gehen nach den Ecken 20), 115), 98) des 2.60-Ecks. Also ist die Fläche des neuen Polyeders in der vollständigen Figur Taf. 19 des Dyakishexekontaeders die von den Spuren der Ebenen 20), 115), 98) gebildete, d. h. das Dreieck $B_{10}B_{11}B_{12}$. In der Tat schneiden sich in der vollständig ausgeführten Zeichnung in jedem dieser drei Punkte B zwölf Ebenen. In Fig. 2 Taf. 15 ist die Grenzfläche des Polyeders für sich gezeichnet. Bezeichnet man die Ecken des Triakontagons entsprechend den Flächen des Triakontaeders, so sendet die Ecke 1) des Polyeders [der Fläche 1) des vorigen polar] die zwölf Kanten nach folgenden Ecken: α) nach 12), 13), 10), 11); diese Kanten sind die kürzesten Kanten $B_{10}B_{11}$ der Grenzflächen. β) nach 16), 14), 15), 17); d. h. die Kanten $B_{11}B_{12}$ der Flächen. Nur diese acht Kanten sind am Modell des Polyeders nicht von den Flächen der Ecke verdeckt. γ) nach 26), 27), 28), 29); d. i. die längsten Kanten $B_{10}B_{12}$ der Grenzflächen (Fig. 7 Taf. 9 veranschaulicht den Querschnitt einer Ecke). Ist k die Kante des Triakontaeders, so sind übrigens die Längen dieser drei Arten Kanten in der genannten Reihenfolge: $k' = \frac{k}{2}\sqrt{2(5+\sqrt{5})} = k.1{,}9152$; $k'' = \frac{k}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{2} = k.2{,}2879$; $k''' = k\sqrt{5+2\sqrt{5}} = k.3{,}0777$. Die Aufeinanderfolge der Kanten einer Ecke ist dabei, wenn wir mit $\overline{1, 12}$ beginnen, die nach den Ecken (vergl. die Fig.): 12), 29), 17), 26), 11), 16), 10), 27), 15), 28), 13), 14). Ihre Art ist $\alpha = 7$. Da die Art der Grenzfläche $a = 1$ ist, und keine überstumpfen Kantenwinkel vorkommen, so ergibt sich für die Art A des Polyeders die Gleichung $2A = 120.1 + 30.7 - 180 = 150$, d. h. $A = 75$. Hierüber ist $2A' = 120.2 + 30.17 - 120.3 - 180 = 210$, d. h. $A' = K - A = 105$.

Mit diesen fünf Polyedern scheint die Zahl der kontinuierlichen nichtkonvexen Polyeder erster Klasse im Dyakishexekontaedertypus erschöpft zu sein. Die geringe Anzahl dieser Gebilde kann befremden, zumal eine grosse Zahl von Polyedern existiert, die entweder nur gleicheckig, oder nur gleichflächig sind. Doch ist zunächst zu berücksichtigen, dass noch eine Anzahl von Polyedern zweiter Klasse den nichtkonvexen zugleich gleicheckigen und gleichflächigen zuzurechnen sind, wozu noch die Möbiusschen

Polyeder kommen. Freilich lässt sich ebensowenig wie früher bei Betrachtung der Polyeder des Hexakisoktaedertypus behaupten, dass alle nichtkonvexen Polyeder gefunden seien, da die unbeschränkte Variabilität der Parameter σ und τ des allgemeinen Kernpolyeders eine Untersuchung aller möglichen Fälle illusorisch macht. Andererseits ist aber doch zu bemerken, dass auch hier wie früher das Hauptkontingent der Körper mit vielkantigen Flächen den speziellsten gleichflächigen Polyedern des Typus zugehört, weil solche Flächen einen hohen Grad von Symmetrie besitzen werden. Auf alle irgendwie ausgezeichneten Varietäten der speziellen gleichflächigen Polyeder führte aber die Betrachtung der Sphenoide und Stephanoide. Da aber noch spezielle Varietäten der Kernpolyeder existieren könnten, für welche mehr als vierkantige Grenzflächen nichtkonvexer Polyeder existieren, so wird nur behauptet, dass in den bereits untersuchten keine solche Grenzflächen weiter aufgefunden worden sind. — Wir gehen nun dazu über, die Kombinationen von nichtkonvexen Polyedern erster Klasse, die diskontinuierliche Polyeder im Dyakishexekontaedertypus darstellen, zu untersuchen, bei welcher Gelegenheit wir die Kombinationen von Nullpolyedern, die nicht Stephanoide sind, mit erledigen.

2. Die Kombinationen nichtkonvexer Polyeder erster und zweiter Klasse. Es konnten keine Kombinationen von nichtkonvexen Polyedern, weder erster noch zweiter Klasse (die nicht Stephanoide sind) im Hexakisoktaedertypus auftreten, da die dazu verfügbaren Einzelpolyeder bereits die volle oder die halbe Anzahl Ecken des Hüllpolyeders besassen. Dagegen existieren Kombinationen von je fünf Polyedern des Hexakisoktaedertypus in gewissen speziellen Varietäten des $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecks, deren Grenzflächen als innersten Kern bestimmte Varietäten des Dyakishexekontaeders einschliessen, wie im folgenden abgeleitet werden soll.

Sowohl das $(6+8)$-flächige 8.3-Eck, wie das $(6+8)$-flächige 6.4-Eck besitzt 24 Ecken. Wir fragen nach denjenigen $(12+20+30)$-flächigen 2.60-Ecken, deren 5.24 Ecken wie die Ecken von fünf konzentrischen 8.3-Ecken bezw. 6.4-Ecken liegen, denen die existierenden nichtkonvexen Polyeder erster und zweiter Klasse des Hexakisoktaedertypus einbeschreibbar sind.

Die je fünf Triakisoktaeder bezw. Tetrakishexaeder, deren insgesamt 120 Flächen in die Ebenen der Flächen gewisser Varietäten des Dyakishexekontaeders fallen, werden sich dann sofort mit ergeben.

Für welche Varietät des 2.60-Ecks sind die 5.24 Ecken die von fünf 8.3-Ecken archimedeischer Varietät? Orientieren wir das 2.60-Eck wieder so im Raume, dass die B_1-achse mit der positiven z-achse, die Achse B_{13} mit der positiven x-achse zusammenfällt, so sind die je drei Koordinatenachsen der fünf Koordinatensysteme B die drei vierzähligen Achsen des Hexakisoktaedertypus, je vier Achsen CC' die dreizähligen Achsen desselben Typus. Dann sind die im folgenden aufgezählten Ecken bei bestimmter Wahl des 2.60-Ecks die 8.3 Ecken eines ersten 8.3-Ecks, dessen vierzählige Achsen die Achsen B_1, B_{13}, B_{15} des 2.60-Ecks sind. Die der xy-ebene parallelen achteckigen Grenzflächen des 8.3-Ecks im 2.60-Eck sind: 41), 32), 13), 4), 7), 18), 39), 50) und 103), 114), 117), 108), 89), 80), 71), 82); die der xz-ebene parallelen Flächen: 7), 4), 24), 54), 71), 80), 57), 27) und 64), 41), 50), 67), 97), 117), 114), 94); endlich die der yz-ebene beiden parallelen Flächen: 103), 82), 54), 24), 13), 32), 64), 94) und 108), 97), 67), 39), 18), 27), 57), 89). Danach sind die Ecken der übrigen vier 8.3-Ecke im 2.60-Eck in Bezug auf die weiteren Achsen B sofort angebbar. Sollen nun die genannten Ecken die der A. V. des 8.3-Ecks sein, so sind dazu die folgenden Bedingungen zu erfüllen. Erstens müssen je acht der eben angeführten Ecken in einer Ebene liegen. Dazu genügt offenbar, dass die z-koordinate der Ecke 13) gleich der z-koordinate von 4) ist, d. h. $z_5 = x_5$. Soll dies dann mögliche 8.3-Eck die A. V. sein, so muss überdies das Achteck 41), 32), 13), 4), 7), 18), 39), 50) regulär sein, d. h. die y-koordinate von 4) verhält sich zur y-koordinate von 13) wie die zweite Diagonale eines regulären Achtecks zu seiner Kante. Dies gibt die Bedingung $z_5 : y_5 = (\sqrt{2}+1) : 1$. Führt man die Werte $\frac{x_5}{z_5} = 1$ und $\frac{y_5}{z_5} = \sqrt{2} - 1$ in die Formeln 89) ein, so ergibt sich:

$$199)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{2\cot\varphi + \sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2(\sqrt{2}+1)} = 0{,}9631; \\[2ex] t = \dfrac{\cot^2\varphi \,.\, \cos^2\varphi}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{5+2\sqrt{5}}{5(\sqrt{2}+1)} = 0{,}7847; \end{cases}$$

und für die Verhältnisse der Kanten des betr. 2.20-Ecks erhält man in bekannter Weise:

$$k_1 : k_2 : k_3 = (3\sqrt{10} - 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} - 10) : (4\sqrt{5} - 2\sqrt{10}) : (10 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{10}),$$

d. h. mit gewisser Annäherung $k_1 : k_2 : k_3 = 6{,}194 : 2{,}620 : 4{,}240$. Jedem der fünf 8.3-Ecke A. V. im 2.60-Eck lässt sich nun sowohl ein nichtkonvexes Polyeder erster Klasse des Hexakisoktaedertypus, nämlich ein 8.3-eckiges 24-Flach der 18. Art (vergl. Kap. III § 3 Nr. 6), sowie ein nichtkonvexes zweiter Klasse (Nullpolyeder), nämlich ein 8.3-eckiges 24-Flach der 36. Art (vergl. Kap. III § 3 Nr. 5) einschreiben, und es existieren also im Dyakishexekontaedertypus zwei diskontinuierliche, aus je fünf solchen Polyedern zusammengesetzte Polyeder 90. Art bezw. 180. Art. Das erste ist ein diskontinuierliches Polyeder erster Klasse, das zweite ein diskontinuierliches Nullpolyeder. Für die Beschaffenheit der Ecken gilt natürlich das früher für die Einzelpolyeder der Kombinationen angeführte. Die Ecke 1) des ersten Polyeders [in der Ecke 1) des 2.60-Ecks] wird durch die Kanten nach den Ecken 85), 109), 100), 63), 113) des 2.60-Ecks gebildet; die Ecke 1) des zweiten Polyeders hat die Kanten nach den Ecken 85), 63), 77), 45), 100), 109). Über die inneren Kerne der Polyeder erhalten wir Aufschluss durch Bestimmung der ihnen polarreziprok zugeordneten, indem wir nach denjenigen 2.60-Ecken fragen, deren 5.24 Ecken die von konzentrisch angeordneten fünf (6+8+12)-flächigen 6.4-Ecken archimedeischer Varietät sind.

Die früher (in Kap. IV § 2) als Ecken zweiter Klasse bezeichneten Ecken des 2.60 Flaches, d. h. die 5.24 Ecken zweiter Klasse bezogen auf die fünf Koordinatensysteme B bilden die Ecken von fünf solchen Polyedern des Hexakisoktaedertypus, wenn wiederum zwei Bedingungen erfüllt sind. Erstens müssen die Vierecke 2), 9), 30), 21); 33), 62), 83), 52) u. s. w. Quadrate sein; zweitens müssen die Ecken 2), 9), 38), 69), 100), 91), 62), 33) u. s. w. reguläre Achtecke bilden, damit die Kanten $\overline{2,9}$, $\overline{2,33}$ u. s. w. gleich sind, also auch Vierecke wie 2), 33), 52), 21) u. s. w. zu Quadraten werden. Die erste Bedingung sagt aus, dass die x-koordinate von 2) gleich seiner y-koordinate ist, d. h. $\frac{y_2}{x_2} = 1$. Nach der zweiten Bedingung muss sich die x-koordinate von 2) zur x-koordinate von 33) verhalten wie die Kante eines regulären Achtecks zu seiner zweiten Diagonale, d. h. es ist $\frac{z_2}{x_2} = \sqrt{2}+1$. Die Einführung dieser Werte in die Formeln 83) ergibt

$$200)\quad \begin{cases} s = \dfrac{1+\tan\varphi + (\sqrt{2}+1)\cot\varphi}{2(\tan^2\varphi+\sqrt{2}+1)} = \dfrac{(\sqrt{5}+1)(2+\sqrt{2})}{2(5-\sqrt{5}+2\sqrt{2})} = 0{,}98785; \\ t = \dfrac{\tan\varphi+\sqrt{2}+1}{\tan^2\varphi+\sqrt{2}+1}\cos^2\varphi = \dfrac{5+5\sqrt{2}+3\sqrt{5}+\sqrt{10}}{5(5-\sqrt{5}+2\sqrt{2})} = \dfrac{5+2\sqrt{5}}{5(\sqrt{2}+1)} = 0{,}78473. \end{cases}$$

Für die Kanten des 2.60-Ecks berechnet man damit:

$$k_1 : k_2 : k_3 = (2\sqrt{5}+2\sqrt{10}-10) : (4\sqrt{5}+\sqrt{10}-5\sqrt{2}) : (5+5\sqrt{2}-\sqrt{10}),$$

d. h. in gewisser Annäherung $k_1 : k_2 : k_3 = 0{,}796 : 0{,}928 : 8{,}908$. — Jedem dieser fünf (6+8+12)-flächigen 24-Ecke im 2.60-Eck lassen sich nun die folgenden Polyeder des Hexakisoktaedertypus einschreiben. Erstens das 24-eckige 8.3-Flach der 18. Art (vergl. Kap. III § 3 Nr. 6), ein nichtkonvexes Polyeder erster Klasse, und zweitens das 24-eckige 8.3-Flach 36. Art (vergl. Kap. III § 3 Nr. 5) ein Polyeder zweiter Klasse. Die beiden Kombinationen stellen also diskontinuierliche Polyeder erster und zweiter Klasse (Nullpolyeder) dar. Die Ecke 1) des ersten Polyeders im 2.60-Eck [dessen Ecke 1)] ist durch Kanten mit den Ecken 23), 51), 17), 103), 81) verbunden; die Ecke 1) des zweiten Polyeders mit den Ecken 51), 17), 103), 81), 117), 99). D i e s e b e i d e n G r u p p i e r u n g e n v o n j e f ü n f P o l y e d e r n d e s H e x a k i s o k t a e d e r t y p u s s i n d p o l a r r e z i p r o k d e n v o r h e r b e s c h r i e b e n e n b e i d e n d i s k o n t i n u i e r l i c h e n P o l y e d e r n. Der innere Kern jener vorher behandelten Polyeder ist demnach dasjenige Dyakishexekontaeder, für welches

$$\sigma = \frac{2(5-\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+1)(2+\sqrt{2})} = 1{,}0123; \quad \tau = \frac{5(\sqrt{2}+1)}{5+2\sqrt{5}} = 1{,}2743$$

ist, und die beiden Grenzflächen jener Polyeder werden in der Ebene 1) des Kernpolyeders durch die Spuren der Flächen 23), 51), 17), 103), 81) bezw. 51), 17), 103), 81), 117), 99) gebildet. Die einzelne Fläche ist ihrer Gestalt nach von früher bekannt. Für die polar zugeordneten, in zweiter Linie beschriebenen Polyeder, ist der Kern diejenige Varietät des Dyakishexekontaeders, für welche

$$\sigma = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}} = 1{,}0383; \quad \tau = \frac{5(\sqrt{2}+1)}{5+2\sqrt{5}} = 1{,}2743$$

ist. Die Flächen in der Ebene 1) des Dyakishexekontaeders sind die von den Spuren der Ebenen 85), 109), 100), 63), 113) bezw. 85), 63), 77), 45), 100), 109) gebildeten Polygone. Für diese Flächen, ebenso wie für die Ecken der diskontinuierlichen Polyeder 90. bezw. 180. Art gilt das bei den Einzelpolyedern Gesagte. — Es existiert endlich noch eine Gruppierung von fünf autopolaren Nullpolyedern des Hexakisoktaedertypus, deren Kern und Hülle polarreziproke Varietäten des Ikositetraeders und $(6+8+12)$-flächigen 24-Ecks sind. Die Kanten k_2 und k_3 eines solchen 24-Ecks verhalten sich wie $1 : \frac{\sqrt{3}+1}{2}\sqrt{2}$ (vergl. Kap. III § 3 Nr. 5). Fasst man die fünfmal je 6.4 Ecken vierter Klasse des 2.60-Ecks als Ecken eines mit einem $(6+8+12)$-flächigen 24-Eck isomorphen Polyeders auf, so sind die Bedingungen dafür, dass dieses Polyeder zu eben jener Varietät des 24-Ecks wird, die folgenden:

Je vier Ecken 3), 31), 40), 8); 23), 72), 93), 42) u. s. w. sind die Ecken von Quadraten. Die x-koordinate von 3) ist also gleich seiner y-koordinate, d. h. $\frac{y_4}{x_4} = 1$. Ferner bilden vier Ecken 31), 3), 23), 42); 8), 3), 14), 17) u. s. w. Rechtecke, deren Seiten im Verhältnis $1 : \frac{\sqrt{3}+1}{2}\sqrt{2}$ stehen; oder in anderer Form: die Seiten des $(4+4)$-ecks 8), 3), 23), 72), 81), 90), 79), 28) stehen in dem gleichen Verhältnis. Nun gilt für die x-koordinaten der Ecken 3) und 23), d. h. für x_4 und z_4 offenbar: $x_4 = \frac{\overline{3,8}}{2}$, $z_4 = \frac{\overline{3,8} + \overline{3,23}.\sqrt{2}}{2}$, und mit Berücksichtigung von $\frac{\overline{3,8}}{\overline{3,23}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\sqrt{2}$ ergibt sich dann: $\frac{z_4}{x_4} = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}$. Führt man die Werte von $\frac{y_4}{x_4}$ und $\frac{z_4}{x_4}$ in die Formeln 87) ein, so erhält man für die Parameter s und t des Hüllpolyeders:

$$201)\quad \begin{cases} s = \dfrac{\cot\varphi + 1 + \cot^2\varphi\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)(3+\sqrt{5})}{4} = 0{,}95825; \\ t = \dfrac{1+\sqrt{3}\cot\varphi}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{15}+5\sqrt{3}-7\sqrt{5}-5}{10} = 0{,}73727. \end{cases}$$

Für die Kanten berechnet man danach die Proportion:

$$k_1 : k_2 : k_3 = (5+5\sqrt{5}+2\sqrt{15}) : (\sqrt{15}+5\sqrt{3}-\sqrt{5}-5) : 2(\sqrt{15}-\sqrt{5})$$
$$= (\sqrt{15}+7\sqrt{3}+\sqrt{5}+11) : 2(\sqrt{5}+1) : 4.$$

Jedem der fünf 24-Ecke ist ein Nullpolyeder, wie es Taf. 24 Fig. 4 darstellt, einbeschrieben. Die Kanten der Ecke 1) sind die nach den Ecken 15), 100), 82), 50), 109), 115) des 2.60-Ecks, in dieser Reihenfolge die Ecke des diskontinuierlichen autopolaren Nullpolyeders der 180. Art bildend. Der innere Kern des Polyeders ist natürlich diejenige Varietät des Dyakishexekontaeders, für welche

$$\sigma = \frac{(\sqrt{3}+1)(3-\sqrt{5})}{2} = 1{,}0436; \ \tau = \frac{10}{5\sqrt{15}+5\sqrt{3}-7\sqrt{5}-5} = 1{,}35635$$

ist. Die Grenzfläche wird in der Ebene 1) des Dyakishexekontaeders durch die Spuren der Ebenen 15), 100), 82), 50), 109), 115) gebildet.[1])

Es ist zum Schlusse noch ein diskontinuierliches gleichflächig-gleicheckiges Polyeder anzuführen, das lediglich dadurch entsteht, dass man der Kombination von fünf zwölfflächigen Sternzwölfecken des Anhanges zu Kap. IV § 2 s. z. s. eine andere Deutung gibt. Ersetzt man nämlich jedes dieser fünf regulären Polyeder höherer Art in dieser Kombination durch das in voriger Nr. beschriebene $12\,(10)_4$-eckige $12\,(10)_4$-Flach, so entsteht ein diskontinuierliches Polyeder erster Klasse, dessen Kern und Hülle noch immer das Deltoidhexekontaeder $\sigma = \frac{2(5-\sqrt{5})}{5}$, $\tau = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ bezw. das ihm reziproke $(12+20+30)$-flächige 60-Eck sind. Die autopolare Gruppierung kann als diskontinuierliches $60.(10)_4$-eckiges $60\,(10)_4$-Flach der 90. Art bezeichnet werden. Der höchste auftretende Raumzellenkoëffizient ist 5; die innerste Zelle, das Deltoidhexekontaeder, hat den Koëffizienten Null, wovon man sich bei Zusammensetzung des Polyeders aus den fünf Einzelkörpern überzeugt. Das Gebilde besteht aus zehn sich durchdringenden einfach zusammenhängenden geschlossenen polyedrischen Oberflächen, von denen fünfmal je zwei in zehn isolierten Punkten aneinander geheftet sind. Die äussere Ansicht des Gesamtpolyeders ist noch die des Modelles Fig. 4 Taf. 26.

3. **Die Möbiusschen Polyeder.** Von den im Dyakishexekontaedertypus aufgefundenen nichtkonvexen gleicheckig-gleichflächigen Polyedern

---

[1]) Diese fünf beschriebenen diskontinuierlichen Polyeder sind ihrer Kompliziertheit wegen nicht modelliert worden. Für die beiden ersten sind die Konstanten für die vollständige Figur in Note VII verzeichnet.

sind die sechs im folgenden beschriebenen einseitig, d. h. sogenannte Möbiussche Polyeder. Je zwei sind einander polarreziprok zugeordnet. Das allgemeinste Kriterium für ein einseitiges Polyeder ist bekanntlich die Unerfüllbarkeit des nach Möbius benannten Kantengesetzes, wonach für ein wirkliches (zweiseitiges) Polyeder mit einer unterscheidbaren Aussenseite und Innenseite der geschlossenen Oberfläche die begrenzenden Einzelflächen nach Bezeichnung sämtlicher Ecken des Polyeders und damit der Ecken der Einzelflächen sich so schreiben lassen, dass jede Kante zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen auftritt.[1]) Für die hier zu beschreibenden einseitigen Polyeder genügt schon ein einfacher zu verfolgendes Kriterium in der Mehrzahl der Fälle, um sie als einseitig zu erkennen, da sämtliche Flächen kongruent bezw. symmetrisch-gleich sind. Denn es kommt das Möbiussche Kantengesetz im Grunde darauf hinaus, dass bei einem zweiseitigen Polyeder die äussere und innere Seite der Oberfläche nicht in einander übergehen können, d. h. dass an eine aussen positive Zelle einer Fläche stets nur eine ebensolche grenzt, an eine aussen negative Flächenzelle wieder eine negative, während es unstatthaft ist, dass man bei Überschreitung einer Kante auf der Aussenseite der Oberfläche aus einer positiven Zelle einer ersten Fläche in eine sicher negativ anzusetzende einer Nachbarfläche gelangt.[2]) Nun sind bei den hier zu besprechenden Polyedern nach einmaliger Festsetzung des Sinnes (bezw. der Färbung) einer Fläche sämtliche Flächen ihrem Sinne nach bestimmt und gestatten keine Umkehrung ihres Perimeters, da sonst dieselben Zellen der in jeder Hinsicht kongruenten Flächen aussen verschiedene Vorzeichen erhielten. Das dualistisch zugeordnete Kriterium gilt natürlich für die Ecken der Polyeder.

Wir beschreiben nun zunächst die drei einseitigen Polyeder, deren Flächen in der vollständigen Figur des Triakontaeders enthalten sind, unter α), β) und γ).

α) Die innere sechskantige Zelle des Achtecks $M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 M_7 M_8$ in der vollständigen Figur des Triakontaeders (Fig. 3 Taf. 14) besitze den

[1]) Vergl. V. u. V. S. 68 und für die Ecken ebenda S. 75.

[2]) Denn das zöge nach sich, dass die hinter der Grenzkante befindliche räumliche Zelle zugleich einen positiven und negativen Koëffizienten hat, was eben nur für einseitige Polyeder zulässig ist, bei denen von einem Inhalte nicht gesprochen werden kann (vergl. V. u. V. S. 72).

Koëffizienten $+1$, also die beiden dreieckigen Zellen den Koëffizienten -1. Dann sind die vier Winkel in M_3, M_4, M_7, M_8 überstumpf, und es ist, da der Winkel $C_5 M_3 M_2$ in der Figur des Triakontaeders nach früherer Berechnung gleich φ ist, die Winkelsumme des Achtecks $4(4R-\varphi)+4(R+\varphi)=20R=10\pi$. Danach ist die Art dieses Vielecks unabhängig vom Polyeder bei dem angenommenen Sinne des Perimeters $a=\frac{8+2.4-10}{2}=3$. Das von 30 solchen Flächen begrenzte Polyeder zeigt Fig. 12 Taf. 24. Berechnet man die Koordinaten des Schnittpunktes der Ebenen der Flächen 1), 14), 10) des Triakontaeders, d. h. die Koordinaten der Ecke M_7 der ersten Fläche, so ergibt sich $x=z=\frac{d}{c_1}$, $y=\frac{c_2+b_2-c_1}{a_2 c_1}d$, oder mit Einsetzung der Werte a, b, c für das Triakontaeder als Funktionen von φ: $x=z=d\cot\varphi$, $y=d\tan^2\varphi$. Wie aus der vollständigen Figur ersichtlich ist, gehen durch jeden Punkt M neben der Ebene 1) noch drei Ebenen des Triakontaeders; die Ecken des entstehenden Polyeders sind überschlagene vierkantige der vierten Art, da jede Ecke zwei überstumpfe Kantenwinkel haben muss, weil sie von den abwechselnden Kanten $M_1 M_2 = M_3 M_4$ und $M_2 M_3$ gebildet wird. Das Polyeder besitzt $\frac{30.8}{4}=60$ solche Ecken. Nun sind M_1 und M_2 wegen ihrer Lage gegen G_1 die Ecken einer fünfkantigen Grenzfläche des Hüllpolyeders; M_3 und M_4 aber zugleich die einer sechskantigen Grenzfläche, wie ihre Lage gegen den Achsenpunkt C_2 erkennen lässt. Da aber $M_1 M_2$ am Polyeder mit $M_3 M_4$ identisch ist, so ist das Hüllpolyeder ein $(12+20)$-flächiges 12.5-Eck.[1]) — Es ist nun die Ecke M_7, wenn man das 12.5-Eck nach seinen Achsen in gleicher Weise wie das Triakontaeder orientiert, die Ecke 10) des Hüllpolyeders, d. h. die aus den Ecken 12) und 13) eines 2.60-Ecks resultierende Ecke des 12.5-Ecks. Demnach ist $x_3=z_3=d\cot\varphi$, $y_3=d\tan^2\varphi$ und aus den Formeln 85) berechnet man für die Parameter s und t dann: $s=1$, $t=\frac{1+2\cot\varphi}{2+\cot\varphi}\cos^2\varphi=\frac{2+\sqrt{5}}{5}$. Für die Kanten dieses bereits besprochenen 12.5-Ecks hatte man die Proportion $k_2:k_3=1:\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Nun grenzt die erste Fläche $M_1 M_2 \ldots M_8$ des Polyeders mit der Kante $M_3 M_4$ an

[1]) In analoger Weise kann man für sämtliche Polyeder aus der vollständigen Figur der Grenzfläche bei einiger Überlegung die Beschaffenheit der Hülle erschliessen.

die Kante $M_1 M_2$ einer Nachbarfläche, d. h. eine negative Flächenzelle an eine positive, wonach sich das Polyeder sofort als einseitig erweist. Die Berechnung der Kanten der Grenzfläche, des Radius des umbeschriebenen Kreises, sowie des Radius der umbeschriebenen Kugel des Polyeders ist hier eine sehr einfache, da die x- und y-koordinaten der Punkte M_7, M_1 und M_8 bekannt sind, nämlich M_7 $(x = x_3,\ y = y_3)$, M_1 $(x = y_3,\ y = x_3)$ und M_8 $(x = -x_3,\ y = y_3)$. Es ist

$$M_7 M_8 = 2x_3 = 2d\cot\varphi = d(\sqrt{5}+1);$$

$$M_1 M_8 = \sqrt{(x_3+y_3)^2 + (x_3-y_3)^2} = \sqrt{2(x_3^2+y_3^2)} = d\sqrt{2(\cot^2\varphi + \tan^4\varphi)}$$

$$= d\sqrt{2}.\sqrt{5-\sqrt{5}} = 2d\sin\varphi.\sqrt{5}.$$

Demnach ist der Radius des umbeschriebenen Kreises der Grenzfläche: $r = \sqrt{x_3^2+y_3^2} = d\sqrt{5-\sqrt{5}}$, und der Radius der umbeschriebenen Kugel des Polyeders: $R = \sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2} = d\sqrt{2\cot^2\varphi + \tan^4\varphi} = d\sqrt{\frac{13-\sqrt{5}}{2}}$. Für die Untersuchung des reziproken Polyeders sei bemerkt, dass die Ecke 1) des Polyeders, d. h. die Ecke 1) des umhüllenden 12.5-Ecks die Kanten nach den Ecken 3), 15), 6), 18) besitzt.

β) Das zweite Möbiussche Polyeder hat zur Grenzfläche das Achteck $O_1 O_2 \ldots O_8$ in der vollständigen Figur des Triakontaeders (Fig. 3, Taf. 17) mit lauter positiven Zellen, wobei aber die zwei Kanten $O_2 O_3$ und $O_6 O_7$ dem Mittelpunkte jetzt die Aussenseite zuwenden. Die Winkelsumme ist $4\varphi + 4(R-\varphi) = 2\pi$, also hat man für die Art a des Achtecks, das keine überstumpfen Kantenwinkel besitzt $a = \frac{8-2}{2} = 3$. Das von 30 solchen Achtecken begrenzte Polyeder ist in Fig. 10 Taf. 24 dargestellt. Die Ecke O_3 des Polygons, gebildet von den Ebenen 1), 15), 23) des Triakontaeders ist die Ecke 18) eines (12+20)-flächigen 12.5-Ecks, d. h. die Ecke 23) = 33) eines 2.60-Ecks, wie man in gleicher Weise wie unter α) ableitet. Aus den Gleichungen 1) $c_1 z - d = 0$, 15) $c_1 y - d = 0$, 23) $b_2 x + c_2 y - a_2 z - d = 0$ folgt: $z = y = \frac{d}{c_1} = d\cot\varphi$; $x = \frac{c_1 - c_2 + a_2}{c_1 b_2}\, d = \frac{3\tan\varphi - 1}{\tan^3\varphi}\, d = d.\frac{5+\sqrt{5}}{2}$, und man erhält also für die Parameter s und t der Hülle des Polyeders aus den Gleichungen 87) die Werte: $s = 1$, $t = \frac{5-2\cot\varphi}{\cot\varphi}\cos^2\varphi = \frac{4\sqrt{5}-5}{5}$. Auch dieses besondere (12 + 20)-flächige 12.5-Eck ist bereits aufgetreten. Die Ecken des Polyeders β) sind wiederum vierkantige überschlagene, (für sich betrachtet sind sie übrigens nicht von der vierten, sondern von der zweiten Art, denn es treten keine überstumpfen Kantenwinkel auf) und zwar ist die Ecke 1) durch Kanten mit den Ecken 26), 43), 27), 46) des 12.5-Ecks verbunden. Ist $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ der vierkantige sphärische Querschnitt einer Ecke, ε dessen Doppelpunkt, so sind die Kantenwinkel der Ecke ausgedrückt durch die Winkel des Polygons (Vergl. Fig. 3 Taf. 17): $\alpha\beta = O_7$, $\beta\varepsilon\gamma = O_4$, $\gamma\delta = O_6$, $\delta\varepsilon\alpha = O_5$ und es sind O_6 und O_7 aussen positiv, ebenso die Teile $\delta\varepsilon$ und $\beta\varepsilon$ von O_5 und O_4, während die Teile $\varepsilon\alpha$ und $\varepsilon\gamma$ von O_5 und O_4 aussen negativ sind. Über die Kanten α und γ der Ecken geht man also auf der Aussenseite des Polyeders aus einer positiven in eine negative Flächenzelle über, wonach das Polyeder sich als einseitig erweist.

Bezeichnen wir die Koordinaten von O_3 mit $x = x'$, $y = y'$, $(z = z')$, so besitzen die übrigen zur Berechnung der Kantenlängen der Grenzfläche nötigen Ecken die Koordinaten: $O_4(x = -y', y = x')$, $O_2(x = -x', y = y')$. Es sind also die beiden verschiedenen Kanten des Polygons:

$$O_3 O_2 = 2x' = (5+\sqrt{5})d, \quad O_3 O_4 = \sqrt{(x'+y')^2+(x'-y')^2} = \sqrt{2(x'^2+y'^2)},$$

also da $x'^2 = 5d^2\cot^2\varphi$ ist, $O_3 O_4 = 2d\cot\varphi.\sqrt{3} = d(\sqrt{5}+1)\sqrt{3}$. Für den Radius des umbeschriebenen Kreises erhält man $r = \sqrt{x'^2+y'^2} = d\cot\varphi.\sqrt{6}$ und für den Radius der umbeschriebenen Kugel des Polyeders:

$$R = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = d\cot\varphi.\sqrt{7}.$$

γ) Das dritte Möbiussche Polyeder hat das Achteck $S_1 S_2 S_3 \ldots . S_8$ in der vollständigen Figur des Triakontaeders zur Grenzfläche (vergl. Fig. 5 Taf. 17). Die Art dieser Fläche ist wieder $a = 3$. Wie die Lage der Ecken S_4 und S_7 gegen den Achsenpunkt G_4 anzeigt, ist die Strecke $S_4 S_7$ die Kante eines Fünfecks des Hüllpolyeders. Die Lage von S_6 und S_1 gegen C_7 lässt erkennen, dass $S_1 S_6$ die Kante eines Dreiecks ist, d. h. die Hülle des Polyeders muss ein $(12+20+30)$-flächiges 60-Eck sein. Eine genauere Betrachtung ergibt, dass die von den Flächen 1), 15), 26) des Triakontaeders gebildete Ecke S_3, die im ersten Oktanten liegt, die Ecke 16) des 60-Ecks ist, d. h. die aus den Ecken 43) und 33) des 2.60 Ecks durch Zusammenfallen sich ergebende Ecke des 60-Ecks. Aus den Gleichungen 1) $c_1 z - d = 0$,

15) $c_1 y - d = 0$, 26) $a_2 x - b_2 y - c_2 z - d = 0$ ergibt sich nun: $y = z = \frac{d}{c_1} = d \cot\varphi$, $x = \frac{c_1 + b_2 + c_2}{a_2 c_1} d = (2 + 3\cot\varphi) d$. Da für die Ecke 43) $x = z_1$, $y = x_1$, $z = y_1$ ist, so erhält man für die Parameter s und t des Hüllpolyeders aus den Formeln 81):

$$x = \frac{2\tan\varphi + 3}{\cot\varphi + 3} = \frac{5\sqrt{5} + 9}{22}, \quad t = \frac{3\cot\varphi \cos^2\varphi}{\cot\varphi + 3} = \frac{3(4\sqrt{5} + 5)}{55},$$

d. h. die Hülle dieses dritten Möbiusschen Polyeders, das in Fig 11 Taf. 24 dargestellt ist, ist die A. V. des $(12 + 20 + 30)$-flächigen 60-Ecks. Die Ecke 1) des Polyeders bezw. 60-Ecks besitzt die Kanten nach den Ecken 25), 55), 29), 52). Wie für das vorige Polyeder wird auch hier die Einseitigkeit erschlossen. Bezeichnet man die Koordinaten der Ecke S_3 mit $x = x'$, $y = y'$, $(z = z')$ so sind die zur weiteren Berechnung der Kanten usw. benötigten Ecken: $S_2 (x = y', y = -x')$, $S_4 (x = -x', y = y')$, und die beiden verschiedenen Kanten des Polygons sind:

$$S_3 S_4 = 2x' = 2(2 + 3\cot\varphi) d = (7 + 3\sqrt{5}) . d,$$
$$S_3 S_2 = \sqrt{(x' - y')^2 + (x' + y')^2} = \sqrt{2(x'^2 + y'^2)} = d \sqrt{50 + 22\sqrt{5}}.$$

Für den Radius des umbeschriebenen Kreises der Grenzfläche ergibt sich $r = d\sqrt{25 + 11\sqrt{5}}$, und für den Radius der umbeschriebenen Kugel des Polyeders: $R = d\sqrt{\frac{53 + 23\sqrt{5}}{2}}$.

Die folgenden, zu den beschriebenen drei Polyedern $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ reziproken Möbiusschen Polyeder $\alpha')$, $\beta')$, $\gamma')$, besitzen nun sämtlich als äussere Hülle das Triakontagon. $\alpha')$ Das erste Polyeder hat zum Kern dasjenige Pentakisdodekaeder, für welches $\tau = 5(\sqrt{5} - 2)$ ist. Seine Grenzfläche ist in der vollständigen Fig. 1 Taf. 14 dieses gleichflächigen Polyeders gemäss $\alpha)$ das überschlagene Viereck, das von den Spuren 3), 15), 6), 18) erzeugt wird, d. h. das durch die Achsenpunkte $B_5 B_7 B_3 B_6$ gebildete Viereck, wie es in Fig. 5 Taf. 10 für sich dargestellt ist. Das von 60 solchen Flächen begrenzte einseitige Polyeder zeigt Fig. 9 Taf. 25. Jede der 30 achtkantigen Ecken, deren sphärischen Querschnitt Fig. 6 Taf. 14 andeutet, besitzt zwei überstumpfe Flächenwinkel (weil zwei Kanten der Fläche des reziproken Polyeders die nichtschraffierte Seite dem Mittelpunkte der Fläche zuwenden), wenn man die Ecke zunächst als solche eines zweiseitigen Polyeders auffassen wollte, und die erste Ecke des Polyeders sendet ihre Kanten nach den Ecken 12), 16), 13), 17), 10), 14), 11), 15) des Triakontagons. Nun ist es an sich klar, dass das Polyeder einseitig sein muss, da polarreziproke Vielflache stets zugleich einseitig oder zweiseitig sind;[1]) doch soll hier und auch für das Polyeder unter β') direkt der Beweis geführt werden, dass Möbiussche Polyeder vorliegen. Nehmen wir die Zelle $B_3 B_6 G_1$ der Grenzfläche positiv, die Zelle $B_5 B_7 G_1$ negativ, so dass also die Kantenwinkel B_3 und B_6 positiv, die Kantenwinkel B_5 und B_7 negativ sind, so nehmen an der Ecke Fig. 6 Taf. 14 die folgenden Kantenwinkel Teil: $B_3, B_5, B_7, B_6, B_3, B_5, B_7, B_6$ d. h. längs vier Kanten, nämlich denen nach den Ecken 16), 17), 14), 15), grenzen positive äussere Flächenzellen an negative äussere Zellen, wonach sich das Polyeder als einseitig erweist. Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man sämtliche 60 Flächen des Polyeders anschreibt: das Möbiussche Kantengesetz ist unerfüllbar. Hierüber sei bemerkt, dass die Längen der Kanten des Polyeders, ausgedrückt durch die Kante k des Triakontagons, die folgenden sind:

$$B_3 B_6 = \overline{1,12} = \overline{1,13} = \overline{1,10} = \overline{1,11} = \frac{k}{2}\sqrt{2(5+\sqrt{5})};$$

$$B_3 B_7 = \overline{1,16} = \overline{1,14} = \overline{1,17} = \overline{1,15} = \frac{k}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{2}.$$

β') Das zu β) reziproke Möbiussche Polyeder hat zum inneren Kern das Pentakisdodekaeder für $\tau = \frac{4\sqrt{5}+5}{11}$. Die Grenzfläche wäre in der vollständigen Fig. 1 Taf. 13 das von den Spuren 26), 43), 27), 46) gebildete Viereck, nämlich das Viereck der Achsenpunkte $B_8 B_{12} B_{11} B_9$, das in Fig. 5 Taf. 8 für sich gezeichnet vorliegt.[2]) Das von 60 solchen überschlagenen Vierecken begrenzte Polyeder mit 30 achtkantigen Ecken zeigt Fig. 6 Taf. 25. Seine Ecke 1) besitzt die Kanten nach den Ecken 14), 24), 15), 23), 16), 22), 17), 25) des Triakontagons und hat den in Fig. 14 Taf. 7 dargestellten Querschnitt. Dabei sind die Kanten einer Ecke bezw. Grenzfläche des Polyeders ihren Längen nach die folgenden Diagonalen innerhalb des Triakontagons:

---

[1]) Vergl. V. u. V. S. 76, Nr. 66.

[2]) Die Punkte B_9 und B_{12} sind in dieser Figur aus Versehen nicht bezeichnet. Vergl. also Fig. 1, Taf. 13.

$$B_8 B_9 = \overline{1,14} = \overline{1,15} = \overline{1,16} = \overline{1,17} = \frac{k}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{2},$$

$$B_{11} B_9 = \overline{1,22} = \overline{1,23} = \overline{1,24} = \overline{1,25} = \frac{k}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{3}.$$

Wir wollen nun die Aussenseite der Zelle, die in der Grenzfläche Fig. 5 Taf. 8 die Kante $B_8 B_9$ besitzt, positiv rechnen, die der anderen Zelle negativ, so dass also die Kantenwinkel B_8 und B_9 positives, B_{11} und B_{12} negatives Vorzeichen haben, wenn sie mit der Aussenseite an der Oberfläche des Polyeders teilnehmen. Dabei ist aber zu beachten, dass ein Teil der Kantenwinkel B_8 und B_{11} (vergl. Fig. 14 Taf. 7) an und für sich schon mit der Innenseite der Fläche an der Aussenseite des Polyeders bezw. der Ecke teilnehmen, da diese Ecke, wie die Figur zeigt, schon als solche eines zweiseitigen Polyeders überschlagen wäre. Schreiben wir nun an die Ecke die Kantenwinkel mit den Vorzeichen, die sie auf den äusseren Flächen des Polyeders besitzen, so erhalten wir eben das gezeichnete Bild. Es gilt dann das Folgende. Da B_8 positiv ist, so ist die Aussenfläche der Ecke von der Kante 16) bis zur Doppelkante zwischen 16) und 22) positiv, von da bis 22) negativ. Da der Kantenwinkel B_{12} negativ ist, aber zwischen 22) und 17) mit der Innenseite der Ecke zugehört, so ist die Aussenseite positiv. Für $B_9 \equiv 17{,}25$ gilt das Umgekehrte; B_9 ist positiv, gehört aber der Innenseite zu, also ist die Aussenseite negativ. B_{11} ist zwischen 14) und der zwischen 14) und 25) liegenden Doppelkante der Ecke aussen negativ, wie ihr Vorzeichen anzeigt, also zwischen dieser Doppelkante und der Kante 25) positiv. So verfolge man die Bildung der Ecke, in demselben Sinne weitergehend: B_8 ist positiv aussen bis zur Doppelkante zwischen 14) und 24), dann negativ; B_{12} hat an sich negatives Vorzeichen; da aber die Fläche der Innenseite zugehört, so ist die Aussenfläche positiv. B_9 ist für sich positiv, gehört aber der Innenseite zu, also ist das Äussere negativ. B_{11} endlich ist für sich negativ, also ist das Stück von 23) bis zur Doppelkante zwischen 23) und 16) positiv, der Rest negativ. Es grenzen also auf der Aussenfläche des Polyeders bezw. einer Ecke längs aller Kanten positive und negative Flächenzellen an einander, d. h. das Polyeder ist einseitig.

γ') Das letzte Möbiussche zugleich gleicheckige und gleichflächige Polyeder, das reziprok dem unter γ) angeführten ist, hat zum Kern die A. V.

des Deltoidhexekontaeders und die Fläche wird daselbst (vergl. die vollständige Figur 1 Taf. 17) in der Ebene 1) durch die Spuren der Ebenen 25), 55), 29), 52) des Kernes gebildet. Für sich ist die Fläche in Fig. 2 Taf. 9 gezeichnet. Es ist das von den Achsenpunkten $B_3, B'_{14}, B_5, B'_{10}$ gebildete überschlagene Viereck. Das von 60 solchen Flächen begrenzte Polyeder zeigt Fig. 4 Taf. 25. Die Ecke 1) des Polyeders (vergl. Fig. 9 Taf. 11) besitzt die Kanten nach den Ecken 14), 26), 15), 29), 16), 28), 17), 27) des Triakontagons. Dabei ist

$$B'_{14}B_3 = \overline{1,15} = \overline{1,16} = \overline{1,17} = \overline{1,18} = \frac{k}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{2};$$

$$B'_{14}B_5 = \overline{1,26} = \overline{1,27} = \overline{1,28} = \overline{1,29} = k\sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

ausgedrückt durch die Kante des Hüllpolyeders. Eine solche Ecke ist wesentlich von derselben Beschaffenheit wie die des vorigen Polyeders, doch ist die Anordnung der Kantenwinkel der Fläche an ihr eine andere, wie die Figur ausweist. Verfolgt man die Zellen der Fläche an der Ecke wie unter β') geschehen, so ergibt sich wiederum, dass längs aller Kanten der Ecke positive und negative Flächenzellen aussen aneinander grenzen sollen, was nur für ein Möbiussches Polyeder möglich ist.

Damit sind wir am Schlusse unserer Betrachtungen angelangt. **Diskontinuierliche**, zugleich gleicheckige und gleichflächige einseitige Polyeder haben sich bei Untersuchung der vollständigen Figuren der gleichflächigen Polyeder erster Art des Dyakishexekontaedertypus nicht ergeben, sind auch kaum zu erwarten, da bisher keine Einzelkörper der einfacheren Typen, die dafür verfügbar wären, bekannt geworden sind. — Setzt man jedoch an Stelle der fünf Oktaeder, die sich dem Triakontagon einschreiben lassen (vergl. den Anhang zu Kap. IV § 2) fünf der bekannten Reinhardtschen einseitigen Polyeder,[1]) so ergibt sich ein diskontinuierliches Möbiussches Polyeder, dessen Hülle noch das Triakontagon ist. Es ist aber das gesamte

[1]) Vergl. V. u. V. S. 57 Fig. 46, und C. **Reinhardt**, zu Möbius' Polyedertheorie, Ber. d. math. phys. Klasse d. Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften, 1885, S. 106.

Polyeder nur gleicheckig. Seine Flächen schliessen eine Kombinationsgestalt zweier gleichflächiger Polyeder ein. Es bilden nämlich die $5 \cdot 4$ dreikantigen Oktaederflächen der Reinhardtschen Polyeder ein Ikosaeder; die Mittelpunkte der $5 \cdot 3$ Quadrate dieser Polyeder liegen im Mittelpunkte der umbeschriebenen Kugel der ganzen Kombination und es sind diese 15 Quadrate parallel den $2 \cdot 15$ Flächen eines Triakontaeders. Das polarreziproke gleichflächige Polyeder ist nicht realisierbar, da die Oberfläche des beschriebenen gleicheckigen Polyeders das Zentrum der Kugel enthält.

Note I.

Die korrespondierenden Flächen der gleichflächigen Polyeder des Hexakisoktaedertypus.

Hexakisoktaeder . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Deltoidikositetraeder. .	1	2	2	3	3	4	4	1	5	5	6	6
Triakisoktaeder . . .	1	8	12	24	20	13	21	9	9	2	2	1
Tetrakishexaeder . . .	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	7	8
Rhombendodekaeder. .	1	1	4	4	3	3	2	2	2	6	6	1

H-O .	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D-I .	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	20	20	13	13	14	14
T-O .	8	7	7	12	24	19	19	20	13	14	14	21	15	22	10	3	3	4
T-H .	8	9	10	11	11	12	13	14	14	15	16	5	16	17	17	6	7	20
R-D .	1	5	5	4	4	8	8	3	3	7	7	2	7	11	11	6	6	10

H-O .	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
D-I .	15	15	16	16	17	17	18	18	19	19	23	23	21	21	22	22	24	24
T-O .	5	6	6	11	23	18	18	17	16	15	16	22	10	4	5	11	23	17
T-H .	20	9	10	21	21	12	13	23	23	15	24	18	18	19	19	22	22	24
R-D .	10	5	5	9	9	8	8	12	12	7	12	11	11	10	10	9	9	12

Bemerkung. Diese Note gibt zugleich die korrespondierenden Ecken des $(6+8+12)$-flächigen $2 \cdot 24$-Ecks und der speziellen gleicheckigen Polyeder des Hexakisoktaedertypus.

Note II.

Varietäten des Hexakisoktaeders.

Da für die dreizählige Achse C als Masseinheit $A = \frac{C}{\sqrt{3}} . \tau$, $B = \frac{C}{\sqrt{3}} \sqrt{2} . \sigma$ ist, so wird

$$1) \ldots B = C \text{ für } \sigma = \tfrac{1}{2}\sqrt{6} = 1{,}22474 \ldots\ldots (G_1);$$

$$2) \ldots A = C \text{ für } \tau = \sqrt{3} = 1{,}73205 \ldots\ldots (G_2);$$

$$3) \ldots A = B \text{ für } \tau = \sigma\sqrt{2}, \ldots\ldots (G_3).$$

Es sind 1), 2), 3) die Gleichungen dreier Geraden, die sich in dem Punkte P schneiden, dessen $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{6}$, $\tau = \sqrt{3}$ als Parameter dem Hexakisoktaeder zugehören, das eine umbeschriebene Kugel besitzt (konjugierte Varietät). Es wird durch diese drei Geraden das Gebiet der konvexen Hexakisoktaeder in sechs Teilgebiete zerlegt, deren Polyeder durch das Verhältnis der drei Achsen unterschieden sind. Bezeichnet man die Schnittpunkte von G_2 mit C_1 und C_3 bezw. mit D_1 und D_2, die Schnittpunkte von G_1 mit C_2 und C_3 bezw. mit A_1 und A_2, die von G_3 mit C_1 und C_3 bezw. mit E_1 und E_2 so sind diese sechs Gebiete: $HE_1PA_2(A<B<C)$; $E_1D_1P(B<A<C)$; $A_1RD_1P(B<C<A)$; $A_1OE_2P(C<B<A)$; $E_2D_2P(C<A<B)$; $A_2D_2P(A<C<B)$.

Für D_1 ergibt sich die konjugierte Varietät des Tetrakishexaeders, während die konj. Varietät des Triakisoktaeders ein nichtkonvexes Polyeder ist. (Vergl. V. u. V. S. 155.) Die Triakisoktaeder, Tetrakishexaeder und Deltoidikositetraeder gehören zu zwei, drei bezw. vier der genannten Teilgebiete.

Varietät	$\left.\begin{matrix}\sigma = \frac{3(4+\sqrt{2})}{14} \\ \tau = \frac{3(3+\sqrt{2})}{7}\end{matrix}\right\}$ A. V. $A>C>B$	$\sigma = 2(2-\sqrt{2})$ $\tau = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{3}$ $C>B>A$	$\sigma = \frac{10+\sqrt{2}}{10}$ $\tau = \frac{19-3\sqrt{2}}{7}$ $A>C>B$	$\sigma = \frac{2(3+\sqrt{2})}{7}$ $\tau = \frac{2(3\sqrt{2}+2)}{7}$ $A=B>C$	$\sigma = 2(2-\sqrt{2})$ $\tau = 2$ $A>C>B$
σ	1,1602	1,1716	1,14142	1,2612	1,17157
τ	1,8918	1,6095	2,1082	1,7836	2,0000
A	1,0922	0,92926	1,2172	1,0297	1,1547
B	0,9472	0,95662	0,93198	1,0297	0,95662
A_1B_1	0,79188	0,72215	0,86364	0,78813	0,83036
B_1A_2	1,2556	1,93205	1,01966	1,9028	1,16974
A_1B_3	3,4967	1,58395	10,424	1,9028	4,82584
B_1C_1	0,59196	0,5941	0,58879	0,6155	0,5941
B_1C_2	0,8176	0,84038	0,78278	1,0505	0,84038
C_1A_3	3,6978	3,4619	4,1628	2,3569	3,4619
A_1C_1	0,96525	0,8891	1,0373	0,93343	1,0000
C_1B_3	1,0822	1,4587	0,93603	1,1913	1,0000
A_1C_4	16,866	3,6649	$C_1C_4' = 19{,}17$	7,6913	∞

Varietät	$\sigma = \frac{2(3+\sqrt{2})}{7}$ $\tau = 2$ $A > B > C$	$\sigma = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$ $\tau = \sqrt{2}+1$ $A > B > C$	$\sigma = \frac{2(15+2\sqrt{2})}{31}$ $\tau = 2$ $A > C > B$	$\sigma = \frac{9\sqrt{2}-1}{7\sqrt{2}}$ $\tau = \frac{9\sqrt{2}-1}{7}$ $A = B < C$	$\sigma = \frac{5}{4}$ $\tau = \frac{15}{8}$ $A > B > C$
σ	1,2612	1,2929	1,1502	1,1847	1,2500
τ	2,0000	2,4142	2,0000	1,6754	1,8750
A	1,1547	1,3939	1,1547	0,96726	1,0825
B	1,0297	1,0556	0,93918	0,96726	1,0206
$A_1 B_1$	0,84372	0,98815	0,82568	0,74032	0,80688
$B_1 A_2$	1,4421	1,1390	1,11767	1,7873	1,6137
$A_1 B_5$	3,2257	13,9209	5,4950	1,7873	2,4199
$B_1 C_1$	0,6155	0,6249	0,59024	0,5967	0,61239
$B_1 C_2$	1,0505	1,1425	0,79898	0,86697	1,0206
$C_1 A_3$	2,3569	2,1190	3,9282	0,3068	2,4497
$A_1 C_1$	1,0000	1,1547	1,0000	0,90482	0,9601
$C_1 B_3$	1,0000	0,81645	1,0000	1,1715	1,0974
$A_1 C_4$	∞	$C_1 C_4' = 5{,}5741$	∞	4,6692	14,067

Varietät	$\sigma = \frac{9}{7}$ $\tau = \frac{9}{4}$ $A > B > C$	$\sigma = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\tau = 2$ $A > C > B$	$\sigma = \frac{6}{5}$ $\tau = 2$ $A > C > B$
σ	1,2857	1,1537	1,2000
τ	2,2500	2,0000	2,0000
A	1,2990	1,1547	1,1547
B	1,0498	0,94282	0,9798
$A_1 B_1$	0,92786	0,82622	0,83268
$B_1 A_2$	1,23734	1,1286	1,2490
$A_1 B_5$	6,49264	5,3411	4,1632
$B_1 C_1$	0,6227	0,59099	0,6000
$B_1 C_2$	1,1209	0,8072	0,9000
$C_1 A_3$	2,2299	3,8233	3,0000
$A_1 C_1$	1,0897	1,0000	1,0000
$C_1 B_3$	0,8718	1,0000	1,0000
$A_1 C_4$	$C_1 C'_4 = 8{,}7226$	∞	∞

Note III.

Varietäten des Deltoidikositetraeders.

Varietät	$\left.\begin{array}{l}\sigma=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\\ \tau=2(\sqrt{2}-1)\end{array}\right\}$ A. V.	$\sigma=\frac{4}{3}$, $\tau=2$	$\sigma=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\tau=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$	$\sigma=\frac{5}{4}$, $\tau=\frac{5}{3}$
σ	1,2929	1,3333	1,3616	1,2500
τ	1,8284	2,0000	2,1547	1,6667
A	1,0556	1,1547	1,2440	0,96225
B	1,0556	1,0887	1,1154	1,0206
$A_1 C_1$	0,94634	0,99782	1,0541	0,90265
$C_1 B_3$	1,1423	1,0044	0,91288	1,3540
$A_1 B_1 = A_1 B_2$	0,80794	0,8607	0,9107	0,76073
$A_1 A_2 = A_1 A_3$	2,7585	2,5823	2,4883	3,0427

Note IV.

Varietäten des Triakisoktaeders.

Varietät	$\left.\begin{array}{l}\sigma=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\\ \tau=\sqrt{2}+1\end{array}\right\}$ A. V.	$\sigma=\frac{5}{4}$, $\tau=\frac{5}{2}$
σ	1,2071	1,2500
τ	2,4142	2,5000
A	1,3939	1,4434
B	0,98562	1,0206
$B_1 A_1 = B_1 A_2$	0,98562	1,0206
$C_1 A_1 = C_1 A_2$	1,1547	1,19025
$C_1 C_3 = C_1 C'_4$	3,4136	4,7606

Note V.

Varietäten des Tetrakishexaeders.

($\sigma = 1$. Es ist stets $B = 0{,}81648$).

Varietät	$\tau=\frac{3}{2}$	$\tau=\frac{5}{4}$	$\tau=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
τ	1,5	1,25	1,7071
A	0,86602	0,72168	0,98560
$C_1 C_2$	1,1547	1,1547	1,1547
$A_1 C_1$	0,866	0,82914	0,91285
$C_1 B_3$	1,7321	3,3154	1,291
$A_1 C_4$	2,5979	1,3821	5,3205

Note VI.

Die korrespondierenden Flächen der gleichflächigen Polyeder des Dyakishexekontaedertypus. (Vergl. die Bem. zu Note I.)

Dyakishexekontaeder .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Deltoidhexekontaeder .	4	4	5	5	1	1	2	2	3	3	13	14	15	6	7
Triakisikosaeder . . .	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10	9	8	7	6
Pentakisdodekaeder . .	1	6	6	14	14	11	11	3	3	1	2	10	10	22	22
Triakontaeder	1	3	3	7	7	8	8	4	4	1	1	3	3	7	7
Ikosaeder	1	1	2	2	6	6	7	7	3	3	1	1	2	2	6

Dy-H .	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
De-H .	8	9	10	11	12	13	14	15	6	7	8	9	10	11	12	28
T-I . .	5	4	3	2	1	11	11	47	47	30	30	24	24	18	18	12
P-D . .	19	19	7	7	2	5	9	18	28	31	29	25	15	8	4	5
T . .	8	8	4	4	1	2	2	11	11	15	15	12	12	5	5	2
I . . .	6	7	7	3	3	1	1	2	2	6	6	7	7	3	3	4

Dy-H .	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
De-H .	29	16	17	19	20	22	23	25	26	28	29	16	17	19	20	22
T-I . .	12	48	48	29	29	23	23	17	17	13	41	49	54	51	28	25
P-D . .	9	18	28	31	29	25	15	8	4	13	17	24	35	41	40	34
T . . .	2	11	11	15	15	12	12	5	5	6	10	14	19	24	24	20
I . . .	4	5	5	12	12	17	17	9	9	4	4	5	5	12	12	17

Dy-H .	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
De-H .	23	25	26	27	30	30	18	18	21	21	24	24	27	35	32	32
T-I . .	22	19	16	14	42	50	53	52	27	26	21	20	15	51	54	49
P-D . .	23	16	12	13	17	24	35	41	40	34	23	16	12	49	45	38
T . . .	16	13	9	6	10	14	19	23	24	20	16	13	9	23	19	14
I . . .	17	9	9	10	8	8	11	11	16	16	13	13	10	12	5	5

Dy-H .	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
De-H. .	44	44	41	41	38	38	35	34	33	31	45	43	42	40	39
T-I . .	41	13	16	19	22	25	28	52	53	50	42	14	15	20	21
P-D . .	27	21	20	26	37	44	48	49	45	38	27	21	20	26	37
T . . .	10	6	9	13	16	20	24	23	19	14	10	6	9	13	16
I . . .	4	4	9	9	17	17	12	11	11	8	8	10	10	13	13

Dy-H .	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
De-H. .	37	36	34	33	31	45	43	42	40	39	37	36	48	47	46
T-I . .	26	27	55	55	43	43	37	37	31	31	36	36	56	56	44
P-D . .	44	48	57	53	46	36	32	30	33	43	52	56	57	53	46
T . . .	20	24	27	27	18	18	17	17	21	21	28	28	27	27	18
I . . .	16	16	11	11	8	8	10	10	13	13	16	16	15	15	18

Dy-H .	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
De-H. .	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	55	54	53	52	51
T-I . .	44	38	38	32	32	35	35	60	57	58	45	56	39	40	33
P-D . .	36	32	30	33	43	52	56	59	54	54	42	42	39	39	51
T . . .	18	17	17	21	21	28	28	30	26	26	22	22	25	25	29
I . . .	18	14	14	19	19	20	20	15	15	18	18	14	14	19	19

Dy-H .	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
De-H. .	50	49	57	57	56	56	60	60	59	59	58	58
T-I . .	34	59	60	57	58	45	46	39	40	33	34	59
P-D . .	51	59	60	58	58	50	50	47	47	55	55	60
T . . .	29	30	30	26	26	22	22	25	25	29	29	30
I . . .	20	20	15	15	18	18	14	14	19	19	20	20

Note VII.

Varietäten des Dyakishexekontaeders.[1])

Varietät	$\sigma = \frac{3(3\sqrt{5}+1)}{22}$, $\tau = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ A. V.	$\sigma = \frac{\sqrt{5}+2}{4}$, $\tau = \frac{4\sqrt{5}+5}{11}$	$\sigma = \frac{5\sqrt{5}-7}{4}$, $\tau = 8-3\sqrt{5}$	$\sigma = \frac{2(5-\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+1)(2+\sqrt{2})}$, $\tau = \frac{5(\sqrt{2}+1)}{5+2\sqrt{5}}$
σ	1,0512	1,05902	1,0451	1,0123
τ	1,34164	1,26766	1,2918	1,2743
G	1,0662	1,0074	1,02655	1,0127
B	0,9815	0,98933	0,97632	0,94524
$B_1 C_1$	0,35995	0,36105	0,3593	0,3570
$B_1 C_2$	0,39855	0,40637	0,39225	0,36556
$B_1 G_4$	2,0408	2,1600	1,9666	1,6064
$C_1 G_3$	0,95898	0,93462	0,97616	1,1000
$B_1 B_{13}$	7,468	6,4762	8,323	30,479
$B_1 G_1$	0,56571	0,54591	0,54944	0,53897
$B_1 G_2$	0,66703	0,7454	0,70053	0,65506
$B_1 C_8$	3,9784	7,7256	5,205	4,2589
$G_1 C_7$	1,3573	1,0678	1,1853	1,2353
$B_1 B_{15}$	7,4495	4,0795	5,2038	6,083
$G_1 C_1$	0,66503	0,64325	0,64984	0,64503
$G_1 B_7$	0,99807	0,8421	0,88904	0,85476
$G_1 G_6$	22,168	7,1377	9,3124	7,2862
$C_1 B_3$	0,43134	0,45894	0,44802	0,45611
$C_1 C_4$	1,1648	1,3283	1,2680	1,3108

[1]) Für die dreizählige Achse C als Masseinheit ist $B = \frac{C}{\sqrt{3}} \cot\varphi . \sigma$; $G = \frac{C}{\sqrt{3}} \cot\varphi . \cos\varphi . \tau$ und es wird:

$$1) \ldots B = C \text{ für } \sigma = \sqrt{3} . \tan\varphi = 1{,}0705 \ldots\ldots (G_1),$$

$$2) \ldots G = C \text{ für } \tau = \frac{\sqrt{3} . \tan\varphi}{\cos\varphi} = 1{,}2584 \ldots\ldots (G_2),$$

$$3) \ldots G = B \text{ für } \tau = \frac{\sigma}{\cos\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (G_3).$$

Die Gleichungen 1), 2), 3) sind die dreier Geraden, die sich im Punkte P innerhalb des Gebietes der konvexen Dyakishexekontaeder schneiden, dessen Koordinaten $\sigma = \sqrt{3} . \tan\varphi$, $\tau = \frac{\sqrt{3} . \tan\varphi}{\cos\varphi}$ die Parameter der konjugierten Varietät sind, die eine umbeschriebene Kugel besitzt. Durch diese drei Geraden wird das Gebiet in sechs Teilgebiete zerlegt. Bezeichnet man die Schnittpunkte von G_1 mit C_2 und C_3 bezw. mit D_1 und D_2, die Schnittpunkte von G_2 mit C_1 und C_3 mit A_1 und A_2, und die von G_3 mit C_1 und C_3 bezw. mit E_1 und E_2,

Note VIII.

Varietäten des Deltoidhexekontaeders.

a) **Nr. 1:** $\sigma = \frac{3(3\sqrt{5}+1)}{22}$, $\tau = \frac{3(8\sqrt{5}+5)}{59}$. **Nr. 2:** $\sigma = \frac{5-\sqrt{5}}{2} - \sqrt{2(9-4\sqrt{5})}$.

Nr. 3: $\sigma = 3-\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}$. **Nr. 4:** $\sigma = 8-3\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{2(141-63\sqrt{5})}$.

f) **Nr. 5:** $\sigma = \frac{11-3\sqrt{5}}{4}$, $\tau = \frac{45-14\sqrt{5}}{11}$.

e) **Nr. 6:** $\sigma = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \sqrt{7-3\sqrt{5}}$.

d) **Nr. 7:** $\sigma = 4-\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{42-18\sqrt{5}}$. **Nr. 8:** $\sigma = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

Nr. 9: $\sigma = \frac{13-5\sqrt{5}}{2} + \sqrt{47-21\sqrt{5}}$. **Nr. 10:** $\sigma = 4\sin^2\varphi = \frac{2(5-\sqrt{5})}{5}$, $\tau = \frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Nr. 11: $\sigma = \frac{5\sqrt{5}-9}{2}$, $\tau = \frac{4\sqrt{5}-5}{3}$, A. V.

Varietät	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5	Nr. 6
σ	1,0511	1,04812	1,06421	1,0391	1,07295	1,07783
τ	1,1638	1,1532	1,2115	1,1222	1,2451	1,2640
G	0,9250	0,91648	0,96274	0,89178	0,98944	1,0045
B	0,98182	0,97913	0,99415	0,9707	1,0023	1,0069
G_1C_7	0,62089	0,61916	0,6299	0,61479	0,63753	0,6423
C_7B_{15}	0,5152	0,5226	0,48638	0,54604	0,46922	0,46054
$C_7C'_8$	0,7111	1,7676	1,5053	1,9586	1,3925	1,3382
G_1B_1	0,67416	0,65948	0,74485	0,6194	0,80117	0,83532
G_1G_2	3,3161	3,1228	4,4772	2,656	5,80297	6,8872
G_1B_7	0,52392	0,5215	0,5356	0,51459	0,54441	0,54962
G_1C_1	0,8272	0,80973	0,90926	0,76232	0,95308	1,0132
G_1B_3	2,1145	2,0378	2,5038	1,8405	2,8554	3,0815
B_7G_6	0,86908	0,88024	0,82712	0,91403	0,80123	0,78828
$B_7C'_4$	894,7	$G_1C_4 = 32{,}466$	29,367	$G_1C_4 = 14{,}613$	14,3376	11,227
B_7C_7	0,360	0,35965	0,36183	0,35869	0,36328	0,36417
B_7G_4	2,0445	2,0058	2,2405	1,8924	2,3891	2,4751
C_7G_5	0,95784	0,96674	0,92054	0,9958	0,89812	0,8862

so sind diese sechs Gebiete die folgenden: a) $DE_1PD_2(G<B<C)$; b) $E_1A_1P(B<G<C)$; c) $A_1TD_1P(B<C<G)$; d) $D_1IE_2P(C<B<G)$; e) $E_2A_2P(C<G<B)$; f) $A_2D_2P(G<C<B)$. Sämtliche in Note VII enthaltenen Varietäten der Dyakishexekontaeder gehören dem Gebiete c) an. Die zwei, drei bezw. vier Gebiete der Triakisikosaeder, Pentakisdodekaeder und Deltoidhexekontaeder sind in den Noten IX, X und VIII angeführt. — Für A_1 ergibt sich die konj. Varietät des Pentakisdodekaeders, während die konj. Varietät des Triakisikosaeders ein nichtkonvexes Polyeder ist (vergl. V. u. V. S. 155).

Varietät	Nr. 7	Nr. 8	Nr. 9	Nr. 10	Nr. 11
σ	1,10234	1,10851	1,11146	1,10557	1,0902
τ	1,36725	1,3953	1,4086	1,38197	1,3148
G	1,0865	1,1088	1,1194	1,0982	1,0448
B	1,0297	1,0355	1,0382	1,0328	1,0184
$G_1 C_7$	0,67358	0,68353	0,6885	0,67872	0,65657
$C_7 B_{15}$	0,42358	0,41594	0,41258	0,41946	0,44044
$C_7 C'_8$	1,1211	1,0787	1,0602	1,09815	1,2173
$G_1 B_1$	1,0601	1,1344	1,1723	$1{,}0982 = G$	0,93703
$G_1 G_2$	62,763	$C_7 G'_2 = 70{,}622$	$C_7 G'_2 = 35{,}543$	∞	12,849
$G_1 B_7$	0,5809	0,5902	0,5946	0,58571	0,56435
$G_1 C_1^*$	1,2673	1,3501	1,3921	1,3098	1,1289
$G_1 B_3$	5,0918	6,0293	6,5858	5,5490	3,8694
$B_7 G_6$	0,7305	0,71828	0,71287	0,72398	0,75715
$B_7 C'_4$	5,3055	4,6897	4,4493	4,962	7,16992
$B_7 C_7$	0,36939	0,37094	0,37169	0,3702	0,36664
$B_7 G_4$	3,0431	3,2225	3,3125	3,1360	2,73926
$C_7 G_5$	0,83406	0,82245	0,81724	0,82778	0,85872

Note IX.

Varietäten des Triakisikosaeders.

c) **Nr. 1:** $\sigma = \frac{7\sqrt{5}-5}{10}$, $\tau = 2\sqrt{5}-3$. A. V. **Nr. 2:** $\sigma = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$, $\tau = 5 - 2\sqrt{5} + \sqrt{2(25-11\sqrt{5})}$.

d) **Nr. 3:** $\sigma = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\tau = \frac{5(\sqrt{5}-1)}{4}$. **Nr. 4:** $\sigma = \frac{5+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{2(\sqrt{5}+1)}$, $\tau = 5 - \sqrt{10(\sqrt{5}-1)}$.

Varietät	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4
σ	1,06525	1,03181	1,11804	1,0740
τ	1,47214	1,4259	1,54509	1,4842
G	1,1698	1,1331	1,2279	1,1794
B	0,9951	0,9639	1,0444	1,0033
$G_1 G_2$	2.0,6150	2.0,59571	2.0,6455	2.0,6201
$B_1 C_2$	0,3620	0,35807	0,37347	0,36347
$B_1 G_4$	1,2799	1,3792	1,1793	1,2589
$B_1 B'_{13}$	5,9121	11,609	3,5385	5,275
$B_1 C_1$	0,41252	0,3816	0,47339	0,42155
$B_1 G_3$	2,2571	1,4369	3,5363	2,4086
$B'_{13} G_6$	9,429	20,28	5,4703	8,3798
$B'_{13} C'_{10}$	2,2259	5,4088	1,2914	1,9781

Note X.

Varietäten des Pentakisdodekaeders. ($\sigma = 1$)

Es ist stets $B = 0{,}94318$; $B_1 C_1 = B_1 C_2 = 0{,}35683$; $B_1 G_3 = B_1 G_4 = 1{,}5116$.

a) **Nr. 1:** $\tau = \dfrac{(15+2\sqrt{5})(1+2\sqrt{5-2\sqrt{5}})}{41}$; **Nr. 2:** $\tau = \dfrac{2\sqrt{10(25-11\sqrt{5})}-5(3-\sqrt{5})}{5\sqrt{5}-11}$.

b) **Nr. 3:** $\tau = \dfrac{3(10-\sqrt{5})}{19}$, A. V. **Nr. 4:** $\tau = 5(\sqrt{5}-2)$; **Nr. 5:** $\tau = \dfrac{5(4-\sqrt{5}-2\sqrt{\sqrt{5}-2})}{10-3\sqrt{5}}$.

c) **Nr. 6:** $\tau = \dfrac{4\sqrt{5}+5}{11}$. **Nr. 7:** $\tau = 2\sqrt{10}-5$. **Nr. 8:** $\tau = \dfrac{5(\sqrt{5}+1+4\sqrt{\sqrt{5}-2})}{11\sqrt{5}-5}$.

Varietät	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5	Nr. 6	Nr. 7	Nr. 8
τ	1,1651	1,0901	1,2259	1,18034	1,2033	1,2677	1,32455	1,3215
G	0,92585	0,8663	0,97420	0,93795	0,9562	1,0074	1,0526	1,0502
B_1G_1	0,50834	0,49632	0,5229	0,5116	0,51703	0,5352	0,55475	0,55363
B_1C_7	1,4281	1,2490	1,6225	1,4721	1,544	1,7887	2,0715	2,0546
B_1B_{15}	3,6282	2,3505	4,6314	3,5011	3,9985	6,4732	13,358	12,666
B_1G_2	0,74088	0,85918	0,67543	0,72243	0,69733	0,64126	0,60497	0,60666
B_1C_8	12,079	$G_1C'_8 = 19{,}411$	5,4185	9,1844	6,781	3,9981	3,0028	3,0412
$B_{15}G_5$	21,899	13,331	2,8037	2,0851	2,4029	3,9587	82,352	78,064

Ergänzungen.

Zu Seite 15. Die hier gegebene Darstellung stimmt nicht völlig mit der von Möbius (Ges. Werke, Bd. II S. 71) überein. Vergl. dazu: Weber-Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, Bd. II S. 347 ff.

Zu Seite 100. Unter „Zweigen" versteht man hier die Bogenteile der Kurve, die zwischen zwei Geraden $\sigma = \text{const.}$ liegen. Die ganze Kurve könnte dabei sehr wohl aus einem zusammenhängenden Zuge bestehen, wie es z. B. für eine Ellipse, Parabel usw. der Fall wäre.

Zu Seite 126. Zeile 7 v. u. ist zu ergänzen: Das Polyeder ist Fig. 13 Taf. 22 dargestellt; seine Fläche ist Fig. 3 Taf. 7.

Zu Kap. III § 2 und Kap. IV § 2. Wie für die Sphenoidgruppierungen des Doppelpyramidentypus, so sind auch für die beiden weiteren Typen die hemiedrisch-hemigonischen Gruppierungen zu untersuchen. Es ergeben sich zunächst im Hexakisoktaedertypus solche von je sechs rhombischen Sphenoiden. a) Die parallelflächige (pentagonale) Hemiedrie des Hexakisoktaeders ist das Dyakisdodekaeder oder $(6+8+12)$-eckige 2.12-Flach (Vergl. V. u. V. Taf. VII Fig. 8^b). Man erhält seine vollständige Figur in der Ebene 1) des gleichflächigen Körpers, wenn man in der vollständigen Figur des Hexakisoktaeders nur eine bestimmte Hälfte der Flächen beihehält, z. B. in der Zeichnung für die A. V. des 48-Flaches (Taf. 5 Fig. 1) nur die Spuren: 2, 5, 6, 9, 11, 14, 16, 17, 19, 22, 24, 26, 27, 29, 32, 34, 35, 37, 40, 41, 44, 45, (48). Aus dieser Zusammenstellung der Flächen geht in Verbindung mit den Tabellen auf S. 95 und 96 hervor, dass von den sieben verfügbaren Sphenoiden nur das rhombische Sphenoid der dritten Gruppe 1, 45, 5, 41 erhalten bleibt. Danach existiert eine Kombination von sechs rhombischen Sphenoiden, deren Kern das aus dem bestimmten Hexakisoktaeder sich ergebende Dyakisdodekaeder ist, und dessen Hülle ein $(6+8+12)$-flächiges 2.12-Eck (vergl. V. u. V. Taf. VII Fig. 8^a) sein muss. — b) Die plagiedrische Hemiedrie des Hexakisoktaeders ist das Pentagonikositetraeder oder $(6+8+24)$-eckige 24-Flach (V. u. V. Taf. VII Fig. 6^b). Seine vollständige Figur ergibt sich aus der des Vollflächners (Fig. 1 Taf. 5), wenn in dieser nur die Spuren der Hälfte der Flächen, z. B. 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 41, 43, 45, 47 beibehalten werden. Mit den oben genannten Tabellen verglichen, ergibt sich das Vorhandensein der Flächen (5, 43, 47); (45, 36, 23); (45, 5, 41); (41, 13, 38) der ersten Sphenoide aller vier Gruppen der rhombischen Sphenoide und es existieren also vier Kombinationen von je sechs rhombischen Sphenoiden, deren Hülle ein $(6+8+24)$-flächiges 24-Eck (V. u. V.

Taf. VII Fig. 6[a]) ist. Über ihre polarreziproke Zuordnung ist nach den Ableitungen des Textes leicht zu verfügen, auch sind die Modelle aller fünf hemiedrisch-hemigonischen Kombinationen dieses Typus einfach herzustellen. Da jedes Hexakisoktaeder für beide Hemiedrien zwei Halbflächner ergibt, so lassen sich immer zwei Kombinationen von je sechs Sphenoiden herstellen, die vereinigt die vollzählige Gruppierung ergeben. Selbstverständlich erhält man sekundäre quadratische Sphenoide hier unter denselben Bedingungen wie bei dem vollzähligen Polyeder.

Die plagiedrische Hemiedrie des Dyakishexekontaeders ist das Pentagonhexekontaeder (V. u. V. Taf. VII Fig. 18[b]), das durch Tilgung der Hälfte der Flächen des 120-Flaches, entweder aller linken oder aller rechten, entsteht. Tilgt man in Fig. 6 Taf. 9 alle mit 10) kongruenten Flächen, wonach 1) und die ihr kongruenten Flächen erhalten bleiben, so sieht man leicht, dass alle Flächen des je ersten Sphenoides aller fünf Gruppen des Typus in der Zusammenstellung der rechten Spalte in Nr. 93) S. 188 noch vorhanden sind. Danach befindet sich in der vollständigen Figur eines Pentagonhexekontaeders entweder die Fläche des ersten oder zweiten der genannten Sphenoide jeder Gruppe, je nachdem das Polyeder der eine oder andere der beiden möglichen Halbflächner des Dyakishexekontaeders ist. Es existieren also zweimal fünf Gruppierungen von je 15 Sphenoiden, deren Ecken die eines (12+20+60)-flächigen 60-Ecks (V. u. V. Taf. VII Fig. 18[a]) sind, und die vereinigt jeweils die vollständige Gruppierung von 30 rhombischen Sphenoiden ergeben. Für den Übergang in sekundäre quadratische Sphenoide und die polarreziproke Zuordnung gilt das im Text Gesagte.

Zu Kap. III § 3 Nr. 1—4. Falls ein Hexakisoktaeder einer der in Nr. 1 dieses § abgeleiteten Bedingungen genügt, wonach es innerer Kern für eine der drei möglichen Gruppierungen von 3 $St_8\binom{4}{2} = 6\,St'_4\binom{2}{1}$ ist, so gibt es stets auch ein aus 3 $St'_4\binom{2}{1}$ bestehendes diskontinuierliches Polyeder, dessen Kern das aus der Hälfte der Flächen des Hexakisoktaeders bestehende Pentagonikositetraeder, dessen Hülle ein bestimmtes (6+8+24)-flächiges 24-Eck ist. Denn die Spuren 43, 41, 45, 47; 13, 45, 5, 38 und 5, 36, 23, 41 in der Ebene 1) des Hexakisoktaeders, durch die je die erste Fläche der drei Stephanoide gebildet wird, sind die von Ebenen, die dem einen Pentagonikositetraeder zugehören. Jedes der drei $St_8\binom{4}{2}$ einer bestimmten Gruppierung im vollzähligen Polyeder liefert zu der Gruppierung dreier $St'_4\binom{2}{1}$ ein solches Stephanoid und die beiden hiernach möglichen hemiedrisch-hemigonischen Grnppierungen dreier Stephanoide $St'_4\binom{2}{1}$ geben vereinigt wieder das vollzählige diskontinuierliche Polyeder. Nach der allgemeinen Definition eines gleicheckig-gleichflächigen Polyeders sind auch diese Kombinationen dreier Stephanoide mitzurechnen, denn der Kern ist ein gleichflächiges, die Hülle ein gleicheckiges Polyeder des Hexakisoktaedertypus; aber es ist zu beachten, dass nicht jedes Pentagonikositetraeder Kern für eine solche hemiedrisch-hemigonische Gruppierung sein kann.

Zu Kap. IV § 4 Nr. 4—7. Von Gruppierungen der $St_{10}\binom{6}{2} = 2\,St_5\binom{3}{1}$ in solchen (12+20+30)-flächigen 2.60-Ecken, die den in Nr. 1 dieses § abgeleiteten Bedingungen genügen, existieren ebenfalls Halbflächner, d. h. zweimal fünf Gruppierungen von je 6 $St_5\binom{3}{1}$, deren Kern ein Pentagonhexekontaeder, deren Hülle ein (12+20+60)-flächiges 60-Eck ist, derart, dass je zwei zusammengehörige solcher Gruppierungen wieder die vollzählige Gruppierung von je sechs $St_{10}\binom{6}{2}$ ergeben. Die Untersuchung ist hier analog der in dem vorigen Zusatze angedeuteten mit Berücksichtigung von Nr. 4 dieses § zu erledigen, wobei auch hier die am Ende des vorigen Zusatzes beigefügte Bemerkung zu beachten ist.

Zu Kap. IV § 4 Nr. 8 (vergl. S. 309 und die Anm. S. 203). Zu einer Reihe weiterer kontinuierlicher und diskontinuierlicher Nullpolyeder führt die genauere Untersuchung der Gruppierungen von 30 Sphenoiden im Dyakishexekontaedertypus, deren Kern ein spezielles gleichflächiges Polyeder und deren Hülle zugleich ein besonderes gleicheckiges Polyeder ist. Die Parameter σ, τ der Kernpolyeder sind dann die Koordinaten der Schnittpunkte der Kurven C_4, C_5, C_6, ... C_{22}, C_{23} mit den drei Grenzkurven C_1, C_2, C_3 in den Figuren 4, 5, 6 Taf. 11 und 4, 5 Taf. 12. In den meisten dieser Fälle ergeben die zwei, in einer Ebene des Kernpolyeders liegenden dreieckigen Grenzflächen zweier Sphenoide ein diskontinuierliches Sechseck zweiter Art, wie Fig. 1 Taf. 15 zeigt. Da aber bei solchen Flächen (falls nur die Figur sämtliche Spuren enthält!) durch jede Ecke fünf Spuren laufen, weil in allen Ecken des Hüllpolyeders zwei Ecken verschiedener Sphenoide zusammenfallen, so kann man den beiden Dreiecken der Grenzfläche entgegengesetztes Vorzeichen beilegen, so dass sie vereint ein diskontinuierliches Sechseck dritter Art des Inhalts Null bilden. Von den 30 Sphenoiden der Gruppierung sind dann gleichviel positiv und negativ; jede diskontinuierliche sechskantige Ecke sechster Art entsteht durch Zusammenfallen zweier Ecken, die einem positiven und negativen Sphenoide zugehören. Bei Umkehrung der Färbung des Gesamtpolyeders geht jede Fläche und jede Ecke in sich selbst über; das Polyeder hat die Art $A = \frac{K}{2} = 90$. Solche diskontinuierliche Nullpolyeder stimmen in den Ecken des Hüllpolyeders und der Gestalt vieler räumlicher Zellen mit den Sphenoidgruppierungen der entsprechenden Grenzfläche überein; nur besitzt die innerste deltoidförmige Zelle der Fläche (wie in Fig. 1 Taf. 15) stets den Koëffizienten Null und den räumlichen Zellen des Polyeders kommen andere Koëffizienten zu, wie den entsprechenden Zellen der Sphenoidgruppierung.

Diese dem Dyakishexekontaedertypus eigentümlichen Nullpolyeder sind im Hexakisoktaedertypus nicht vorhanden, da die Hüllpolyeder der Gruppierungen von Sphenoiden mit speziellen inneren Kernen $(6+8+12)$-flächige 2.24-Ecke bleiben, so lange nicht Ecken der beiden die Grenzfläche bildenden Dreiecke zusammenfallen, wie in Fig. 7 Taf. 5. In diesem Falle aber ergab sich durch andere Auffassung der Figur (vergl. Fig. 13 Taf. 6) ein kontinuierliches Sechseck dritter Art des Inhalts Null, bei dem zwei Ecken in einem Punkte liegen, das die Grenzfläche eines kontinuierlichen Nullpolyeders bildet. — Dieser besondere Fall tritt auch (wie erst während des Druckes vorliegender Arbeit durch genauere Untersuchung der verfügbaren 14 vollständigen Figuren gefunden wurde) bei den Sphenoidgruppierungen des Dyakishexekontaedertypus sechsmal auf, und zwar für die Parameter σ, τ der speziellen Kernpolyeder, die als Koordinaten den Punkten C, E, O, L, M, S auf den Kurven C_3, C_2 und C_1 zugehören, deren Werte durch die Formeln 112′), 114′), 123′), 130′), 132′) und 147′) auf S. 204—227 gegeben sind. Nur in diesen sechs Fällen bilden die beiden Dreiecke in der Ebene 1) des inneren Kernes ein kontinuierliches Sechseck der oben beschriebenen Gestalt, das die Grenzfläche eines kontinuierlichen 60-flächigen und 60-eckigen Nullpolyeders der Art $A = 90$ darstellt. Bei jeder der kontinuierlichen 2.3-kantigen Ecken sechster Art, deren Querschnitt Fig. 13 Taf. 3 zeigt, liegen zwei Kantenwinkel in einer Ebene, weshalb in der Figur der Grenzfläche hier durch jede ihrer Ecken nur vier Spuren laufen. Von der Wiedergabe der Flächen dieser sechs kontinuierlichen Nullpolyeder, für die in den Noten VIII, IX und X die nötigen Angaben enthalten sind, muss hier ebenso wie von der Darstellung der Polyeder im Modell abgesehen werden; wir stellen jedoch im folgenden die hauptsächlichsten Daten für diese drei Paare polarreziproker Vielflache zusammen.

a) Der Kern ist das Deltoidhexekontaeder 112') S. 204 des Punktes C, Fig. 4 Taf. 11; die Hülle ist das $(12+20+30)$-flächige 60-Eck für $s = \frac{11+2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{22} = 0{,}9624$. Das Verhältnis von dessen Kanten ist $k_1 : k_3 = (11-2\sqrt{3}-3\sqrt{5}) : (\sqrt{5}+3\sqrt{15}-3\sqrt{3}-5) \sim 1 : 4{,}42$. Ein ungefähres Bild der Grenzfläche des Polyeders ergibt sich für diese besondere Varietät des Kernes, wenn in Fig. 1 Taf. 15 die Punkte S_1 und S_4 zusammenrücken, während die übrigen Punkte S allgemeine Lage behalten. Die Kanten der Ecke 1) sind nach den Ecken 25), 27); 58), 57); 31), 39) des Hüllpolyeders gerichtet.

a') Für das dem vorigen reziproke Polyeder ist der Kern das Deltoidhexekontaeder 147') S. 227 des Punktes S, Fig. 4 Taf. 12, die Hülle das 60-Eck für $s = \frac{7+\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{14} = 0{,}9075$, wonach für dessen Kanten die Proportion gilt: $k_1 : k_3 = (7-\sqrt{5}-2\sqrt{3}) : (2\sqrt{5}+3\sqrt{15}-3\sqrt{3}-10) \sim 1{,}45 : 1$. Die Figur der Grenzfläche denke man sich aus Fig. 2 Taf. 12 dadurch entstehend, dass die Punkte 31/58 und 39/57 für diese besondere Varietät des Kernes auf der Symmetrielinie G_1C_7 zum Zusammenfallen kommen, während die übrigen Ecken der beiden Dreiecke ihre Lage behalten. Die Kanten der Ecke 1) sind natürlich nach den Ecken 6), 9); 59), 56); 53), 54) des umhüllenden 60-Ecks gerichtet.

b) Der Kern sei das Deltoidhexekontaeder 114') S. 205 des Punktes E Fig. 4 Taf. 11. Dann ist die Hülle des entstehenden kontinuierlichen Nullpolyeders das $(12+20)$-flächige 12.5-Eck für $t = \frac{1}{5}\left(\sqrt{2(5-\sqrt{5})}+\sqrt{5}\right) = 0{,}917$, dessen Kantenverhältnis $k_2 : k_3 = \left(5-\sqrt{5}-\sqrt{2(5-\sqrt{5})}\right) : \left(2\sqrt{2(5-\sqrt{5})}+\sqrt{5}-5\right) \sim 1 : 4{,}69$ ist. Von den Spuren der beiden Dreiecke 59), 53), 6) und 56), 54), 9) schneiden sich 53), 9), 6) und 54) in einem Punkte der Symmetrielinie C_7G_1 der Fläche 1) des 60-Flaches auf ihrer über G_1 hinausgehenden Verlängerung, so dass die Gesamtfläche des Polyeders die umgekehrte Lage der Fläche des Polyeders unter a) erhält. Die Kanten der Ecke 1) liest man wieder aus den Kanten der Fläche 1) des folgenden Polyeders ab.

b') Der Kern des dem vorigen polarreziproken Körpers ist das Pentakisdodekaeder 132') S. 215 des Punktes M Fig. 5 Taf. 11; seine Hülle das $(12+20+30)$-flächige 60-Eck für $s = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - 1 = 0{,}902$, wonach für dessen Kanten die Proportion gilt: $k_1 : k_2 = \left(2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right) : \left(3\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}-2\sqrt{5}+1\right) \sim 1{,}18 : 1$. Von den Kanten der beiden Dreiecke 50), 53), 15) und 47), 52), 18) schneiden sich 50), 15), 47), 18) in einem Punkte der Symmetrielinie G_1B_1 der Fläche 1) des Pentakisdodekaeders und zwar jenseits des Achsenpunktes G_2, so dass die Fläche des Polyeders die Gestalt der Fig. 13 Taf. 6 erhält.

c) Für die besondere Varietät des Triakisikosaeders 123') S. 210 im Punkte O der Fig. 5 Taf. 11 ergibt sich ein kontinuierliches Nullpollyeder, dessen Hülle das $(12+20)$-flächige 12.5-Eck für $t = 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - \frac{5+2\sqrt{5}}{5} = 0{,}858$ ist. Für die Kanten dieses

12.5-Ecks erhält man die Proportion $k_2 : k_3 = \left(5+\sqrt{5}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right) : 5\left(2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right.$ $\left.-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \sim 8{,}746 : 1$. Die Figur der Grenzfläche ergibt sich aus Fig. 4 Tafel 16 durch Zusammenrücken der Eckpunkte 45/56 und 52/57 auf die Symmetrielinie $C_2 G_3$ bei Erhaltung der übrigen Ecken.

c') Das letzte, zum vorigen reziproke hier anzuführende Polyeder hat zum Kerne das besondere Pentakisdodekaeder 130') S. 214 des Punktes L in Fig. 5 Tafel 11 und zur Hülle das (12 + 20)-flächige 20.3-Eck für $s = \sqrt{2(5-\sqrt{5}} - \frac{5-\sqrt{5}}{2} = 0{,}969$; $t = \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}} - 1 = 0{,}701$. Hiernach ist $k_1 : k_2 = 10\left(\frac{7-\sqrt{5}}{2} - \sqrt{2(5-\sqrt{5})}\right)$ $:\left(6\sqrt{5(5-2\sqrt{5})} + 7\sqrt{5} - 25\right) \sim 1 : 1{,}29$. In der aus den beiden Dreiecken 15), 50), 53) und 18), 47), 52) bestehenden Figur der Grenzfläche gehen die Geraden 53), 18), 15), 52) durch einen Punkt der Symmetrielinie $B_1 G_1$ der Pentakisdodekaederfläche jenseits des Achsenpunktes B_{15}, und ihr Bild entspricht dann ungefähr der Fig. 5, Taf. 4. —

Diese sechs kontinuierlichen, nichtkonvexen Polyeder zweiter Klasse, (deren Gestalt eine äusserst komplizierte sein dürfte) sind also dem Verzeichnisse auf S. 32 noch zuzufügen.

Berichtigungen.

S. 22, Z. 3 v. u. lies einbeschriebene.
S. 63, Z. 8 v. u. „ also statt als.
S. 63, Z. 10 v. o. „ $A' = A = \frac{K}{2}$ statt $A' = K - A$.
S. 100, Z. 15 v. o. „ negative statt positive.
S. 147, Z. 1 v. u. „ τ' statt τ.
S. 171, Z. 13 v. u. „ 15 „ 19.
S. 171, Z. 12 v. u. „ 21 „ 51.

In den Figuren 1 der Tafeln 15, 16 und 17 ist B_{15} der Mittelpunkt der Strecke $G_5 G_6$ und statt C_4 ist überall C_5 zu lesen. In Fig. 11 Taf. 7 ist das Gebiet $V'U'O$ mit 4. Kl. zu bezeichnen. In Fig. 4 Taf. 10 liegt B_1 in der Mitte der Strecke $C_1 C_2$. In Fig. 3 Taf. 12 ist der Schnittpunkt von K_1 und K_5 mit π zu bezeichnen.

Erklärung der Tafeln 21—29.

Hinter jeder Figurennummer findet sich in der folgenden Übersicht unter S. die Seite der Abhandlung angeführt, auf der das betreffende Polyedermodell besprochen ist. Von den beiden darunter befindlichen Zahlen gibt die erste die Nummer der Tafel, die zweite (kleiner gedruckte) die Nummer der Figur auf dieser Tafel an, unter der daselbst die das Polyeder begrenzende Fläche gezeichnet vorliegt.

(*) bedeutet, dass die Grenzfläche nicht dargestellt ist.

Tafel 21.

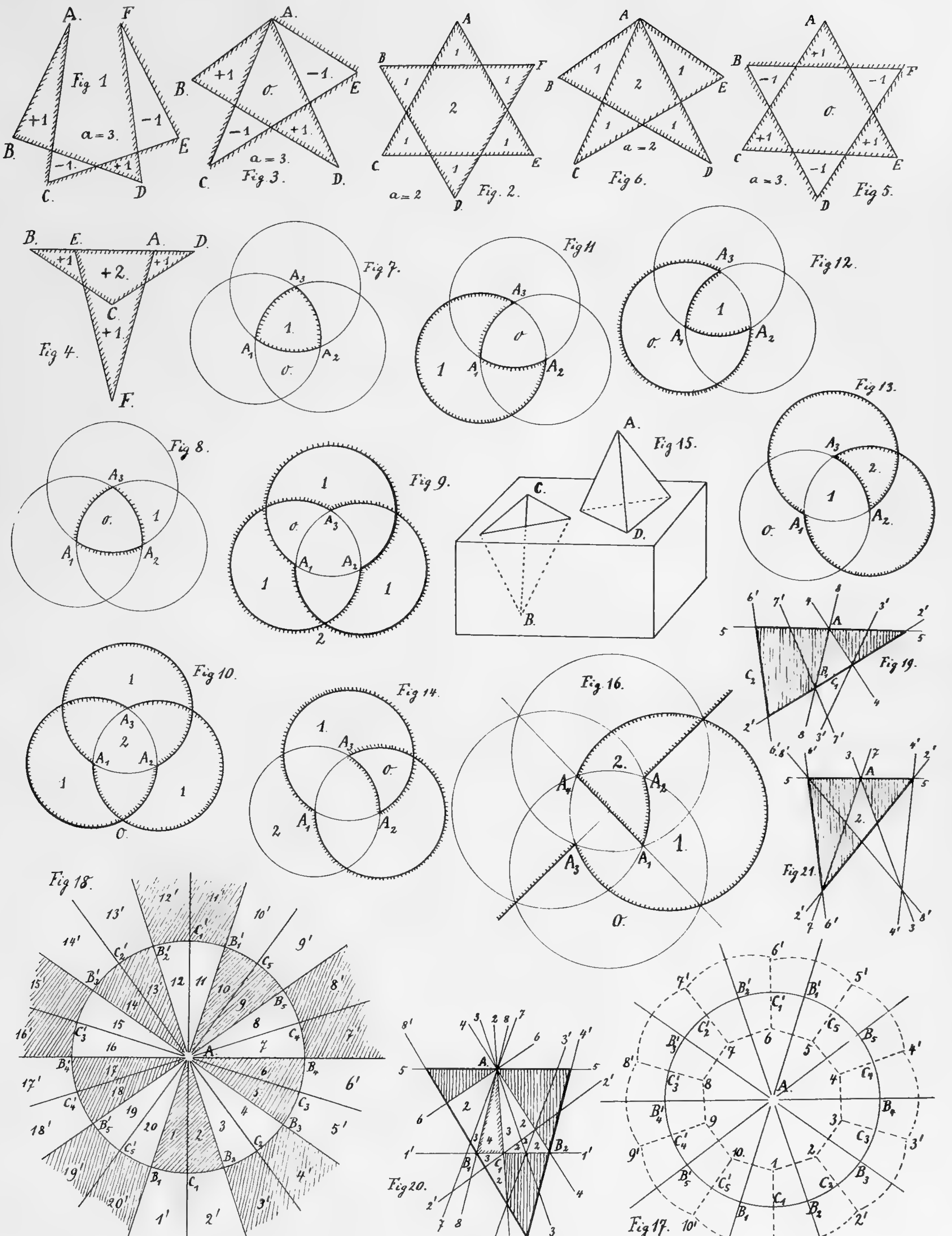
Fig. 1. S. 57. (3, 1).	Fig. 2. S. 52. (1, 20).	Fig. 3. S. 57. (2, 24).	Fig. 4. S. 52. (2, 18).	Fig. 5. S. 55. (2, 15)	
Fig. 6. S. 52. (2, 13).	Fig. 7. S. 52. (2, 23).	Fig. 8. S. 52. (2, 21).	Fig. 9. S. 53. (2, 20).	Fig. 10. S. 53. (2, 19).	Fig. 11. S. 54. (2, 14).
Fig. 12. S. 57. (1, 21).	Fig. 13. S. 58. (2, 17).	Fig. 14. S. 218. (10, 2).	Fig. 15. S. 52. (2, 22).	Fig. 16. S. 52. (1, 19).	
Fig. 17. S. 54. (2, 12).	Fig. 18. S. 55. (2, 16).	Fig. 19. S. 73. (3, 2).	Fig. 20. S. 69. (3, 3).		
Fig. 21. S. 68. (3, 4).	Fig. 22. S. 69. (3, 5).	Fig. 23. S. 70. (3, 7).	Fig. 24. S. 70. (3, 11).		

Tafel 22.

Fig. 1. S. 107. (4, 6).	Fig. 2. S. 112. (6, 2).	Fig. 3. S. 115. (4, 8).	Fig. 4. S. 104. (4, 7).
Fig. 5. S. 115. (5, 3).	Fig. 6. S. 101. (5, 1).	Fig. 7. S. 122. (6, 11).	Fig. 8. S. 135. (5, 2).
Fig. 9. S. 133. (7, 1).	Fig. 10. S. 104. (6, 5).	Fig. 11. S. 113. (6, 14).	Fig. 12. S. 102. (4, 9).
Fig. 13. S. 126. (7, 3).	Fig. 14. S. 140. (7, 5).	Fig. 15. S. 135. (6, 8).	Fig. 16. S. 107. (4, 11).
Fig. 17. S. 70. (3, 6).	Fig. 18. S. 70. (3, 10).	Fig. 19. S. 70. (3, 8).	Fig. 20. S. 70. (3, 9).

Tafel 23.

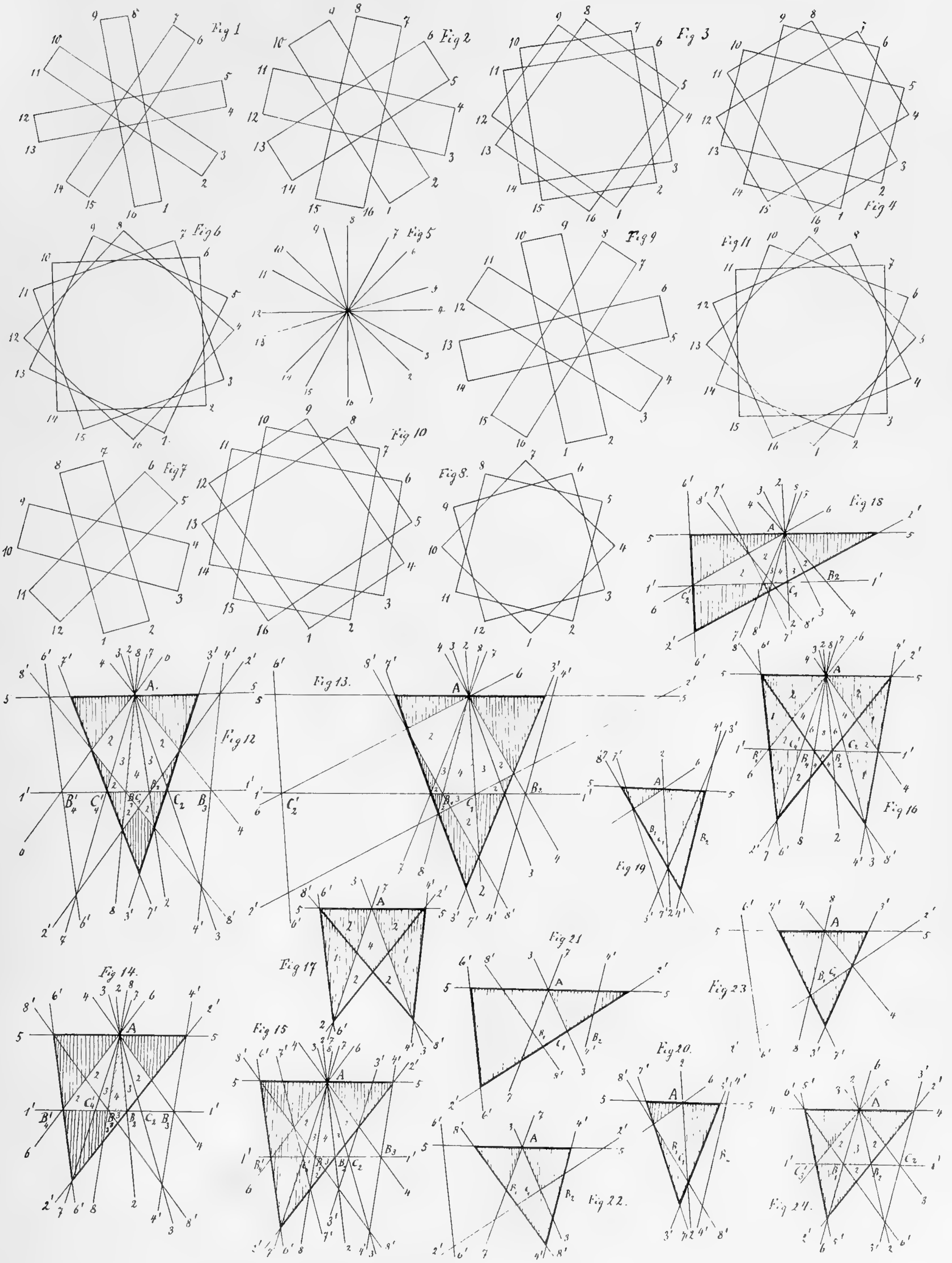
Fig. 1. S. 125. (6, 7).	Fig. 2. S. 111. (5, 8).	Fig. 3. S. 102. (6, 6).
Fig. 4. S. 106. (6, 3).	Fig. 5. S. 111. (7, 6).	Fig. 6. S. 115. (5, 6).
Fig. 7. S. 134. (5, 7).	Fig. 8. S. 112. (*)	Fig. 9. S. 121. (6, 1)
Fig. 10. S. 132. (7, 2).	Fig. 11. S. 138. (6, 15).	Fig. 12. S. 126. (7, 4).



M. Brückner del.

Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden.

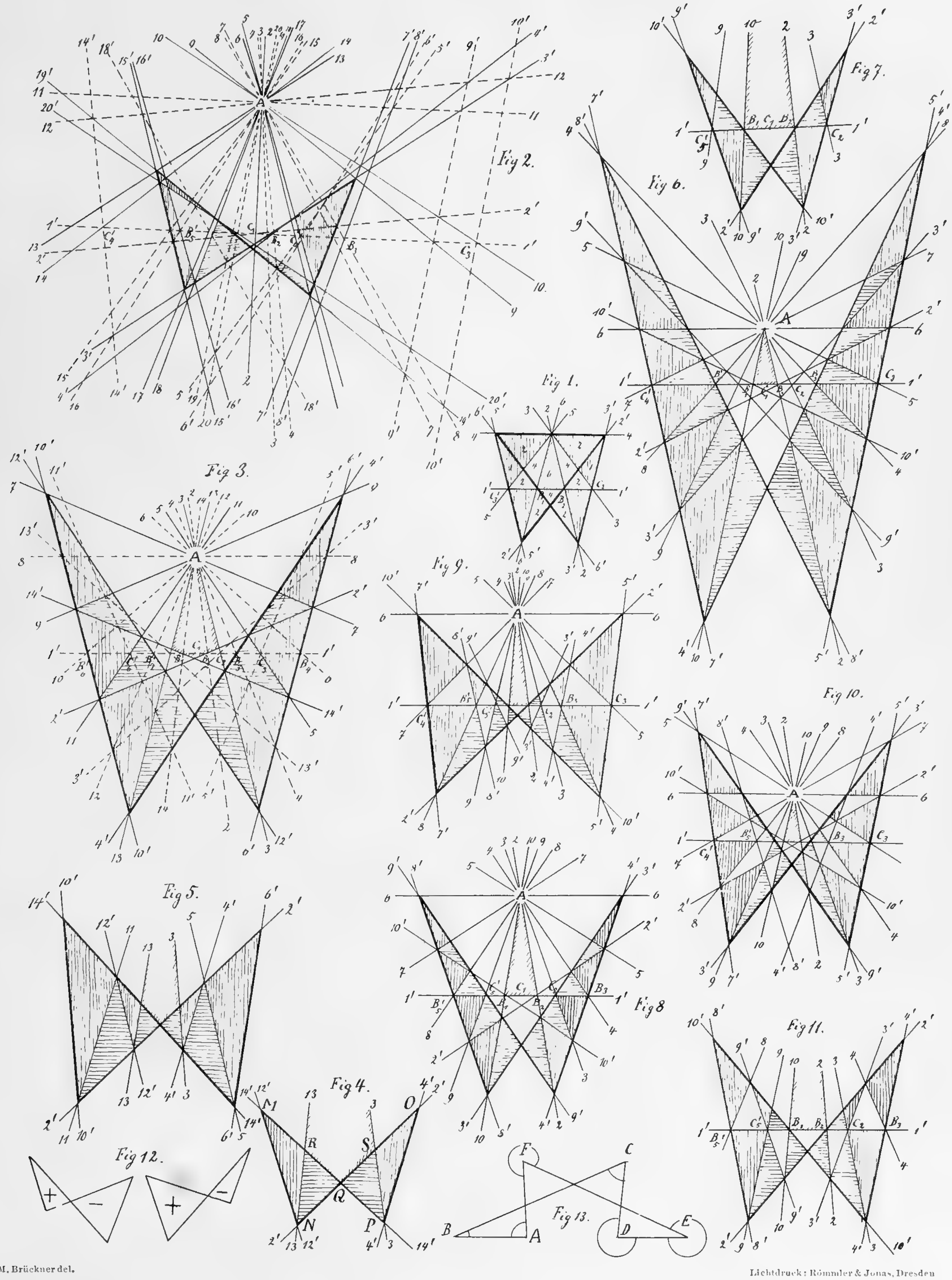
M. Brückner: Polyeder. Taf. 1.



M. Brückner del.

Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden.

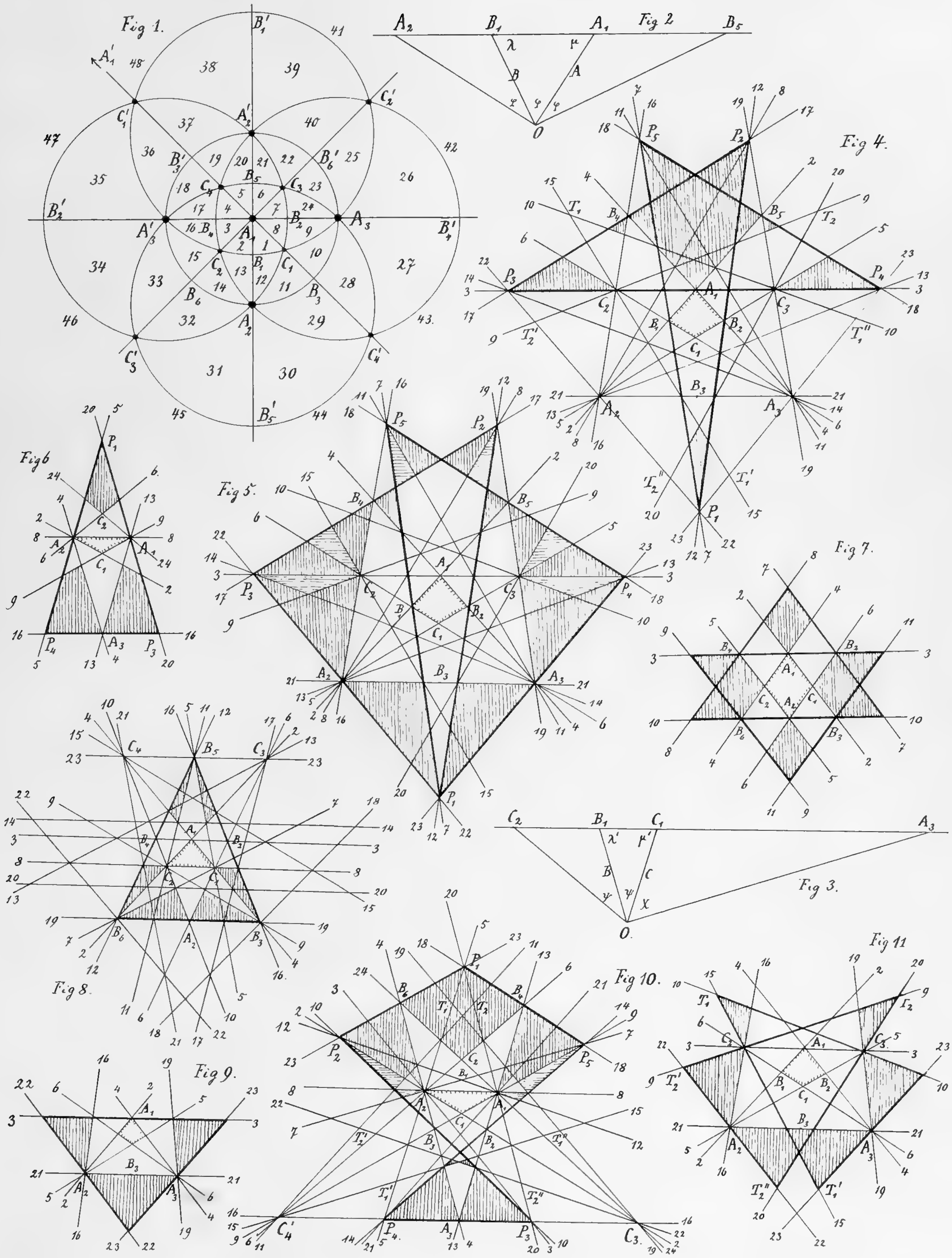
M. Brückner: Polyeder. Taf. 2.



M. Brückner del.

Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden

M. Brückner: Polyeder. Taf. 3.



M. Brückner del.

Lichtdruck: Rommler & Jonas, Dresden

M. Brückner: Polyeder. Taf. 4.

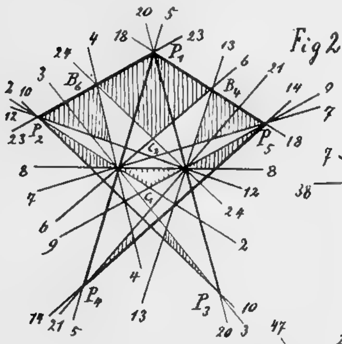


Fig 2.

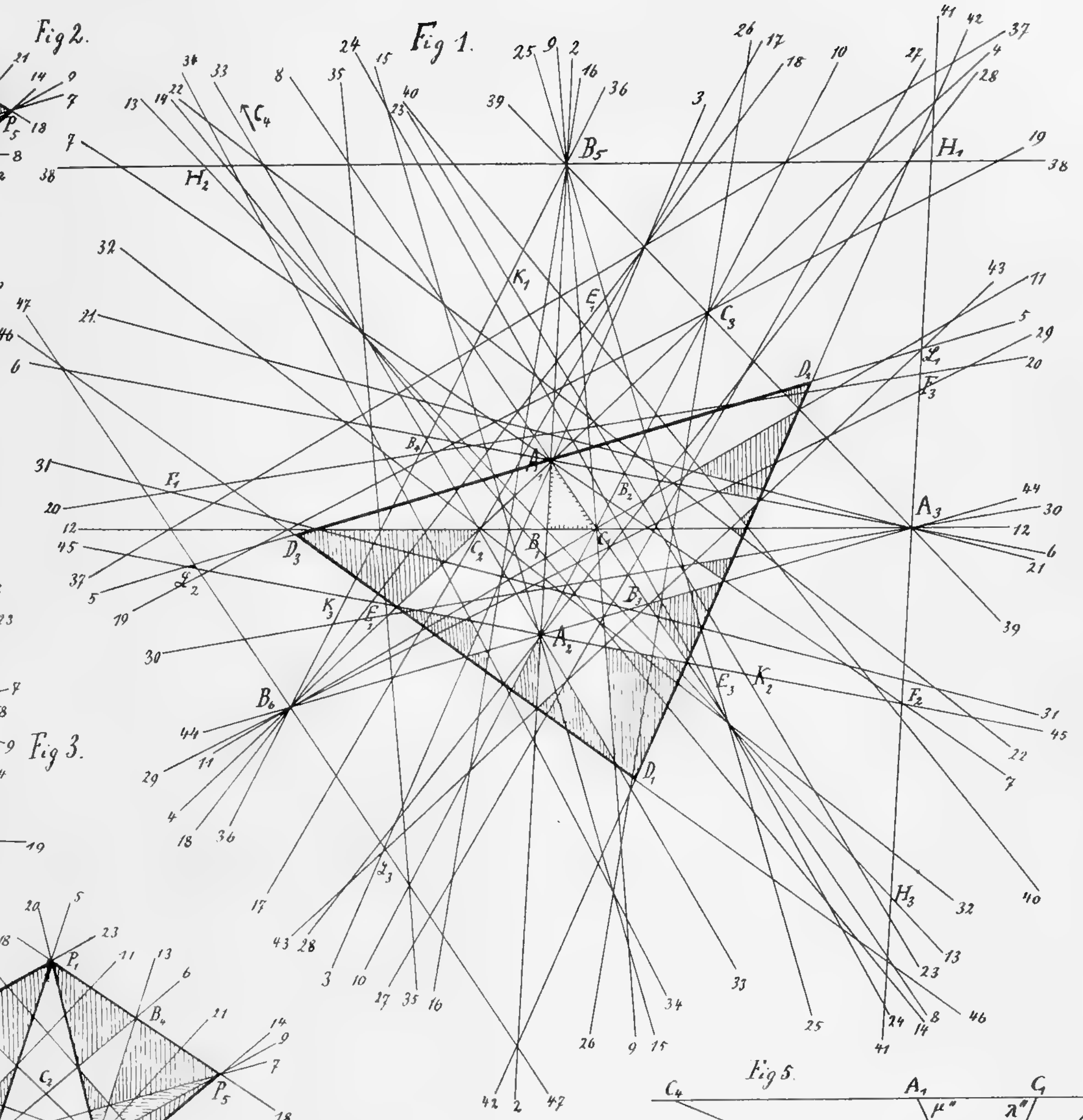


Fig 1.

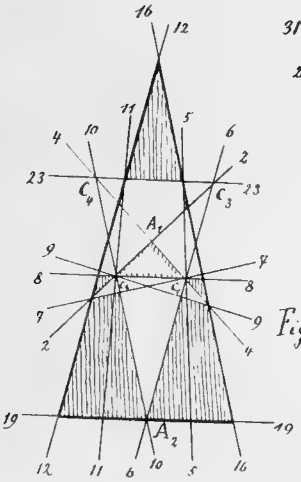


Fig 3.

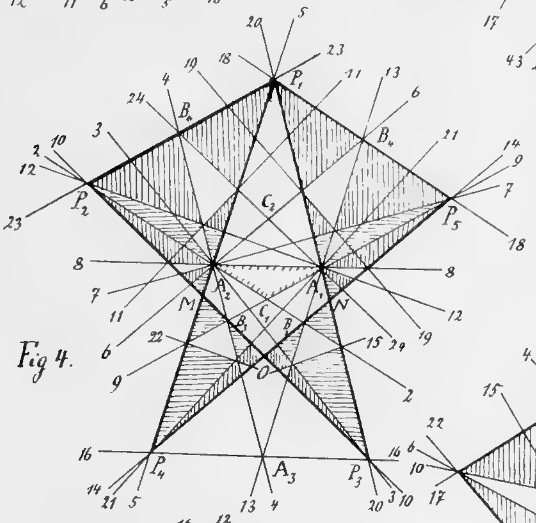


Fig 4.

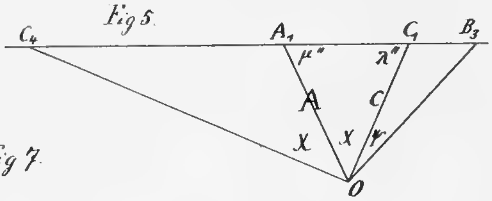


Fig 5.

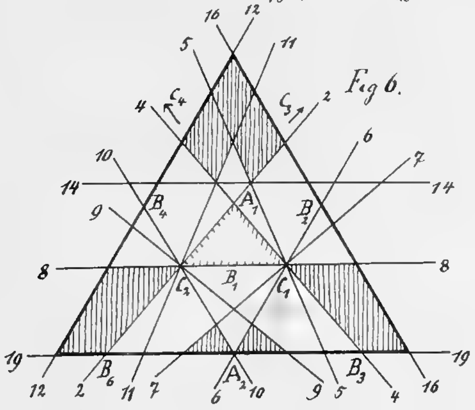


Fig 6.

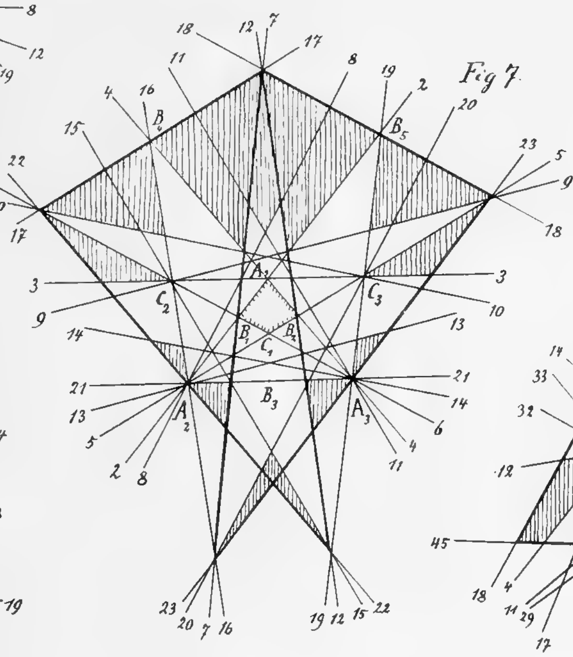


Fig 7.

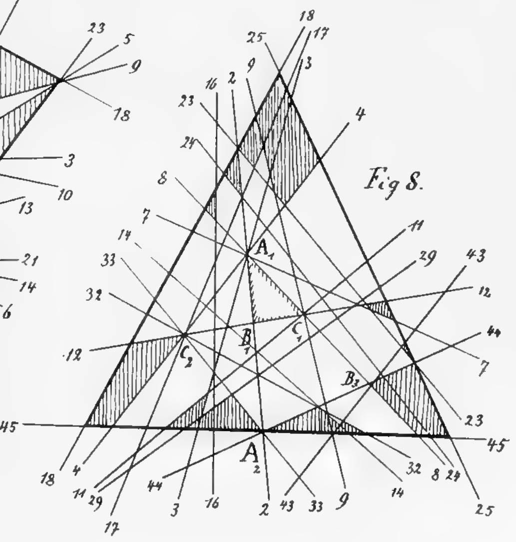
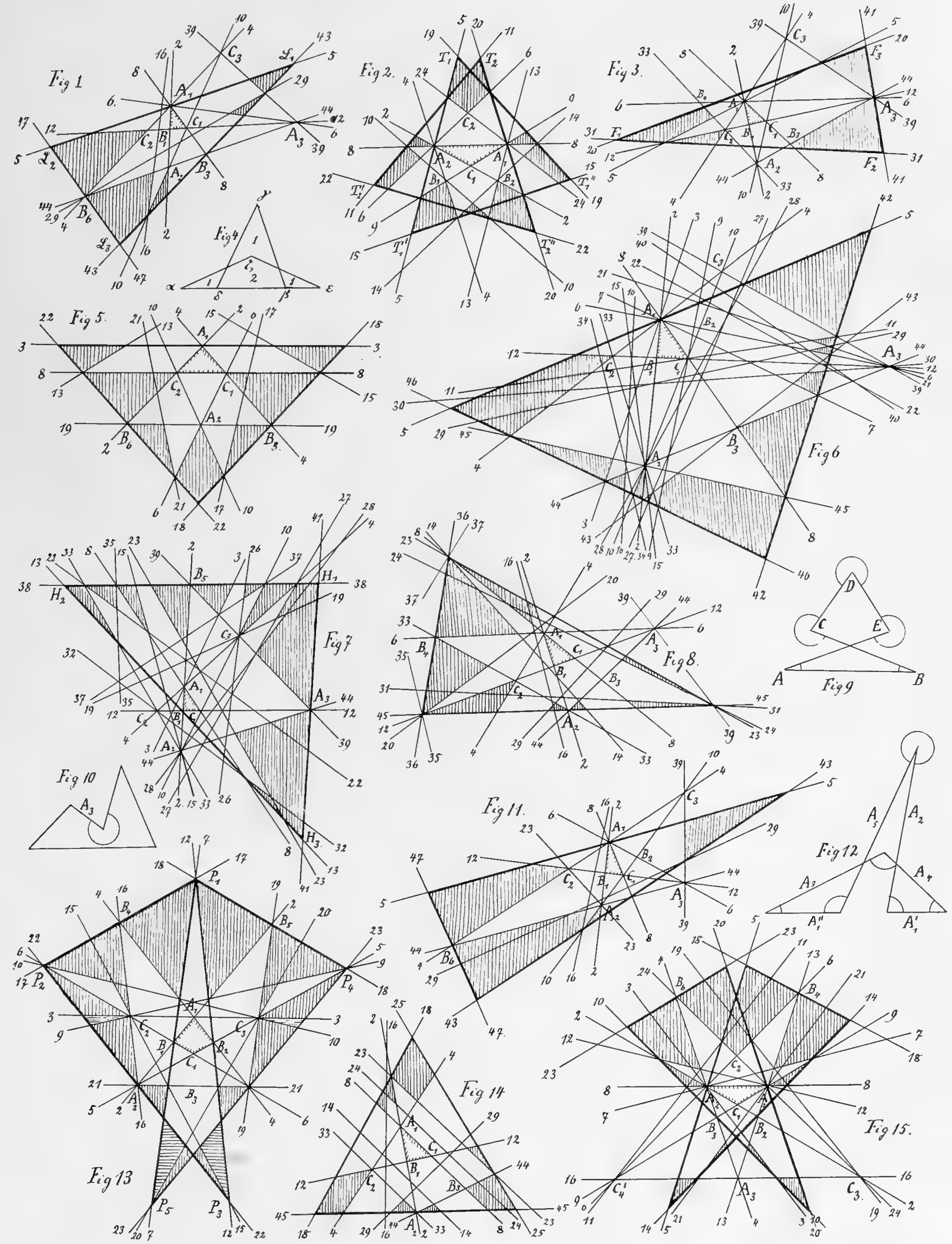


Fig 8.

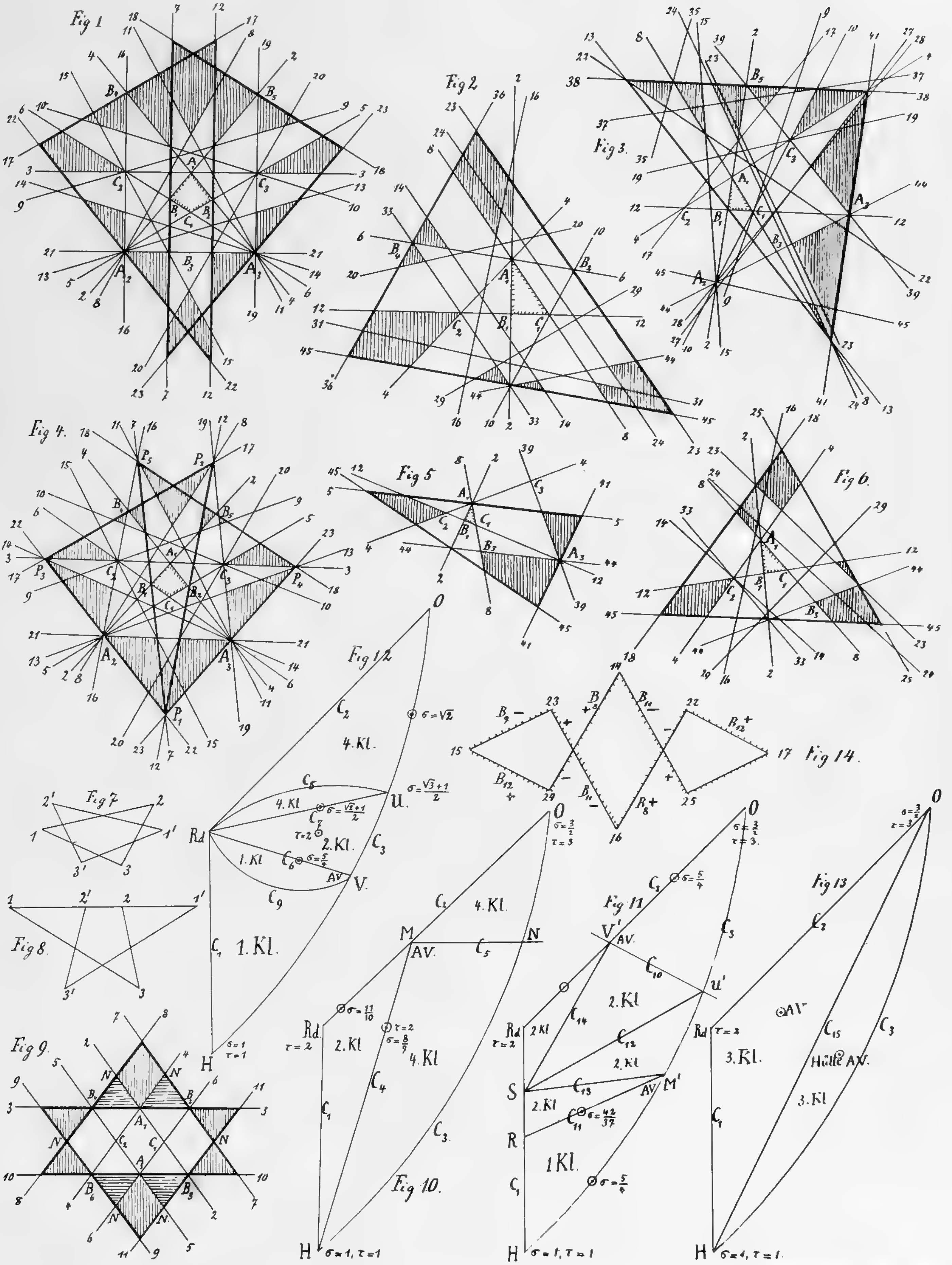
M. Brückner del.

Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden.

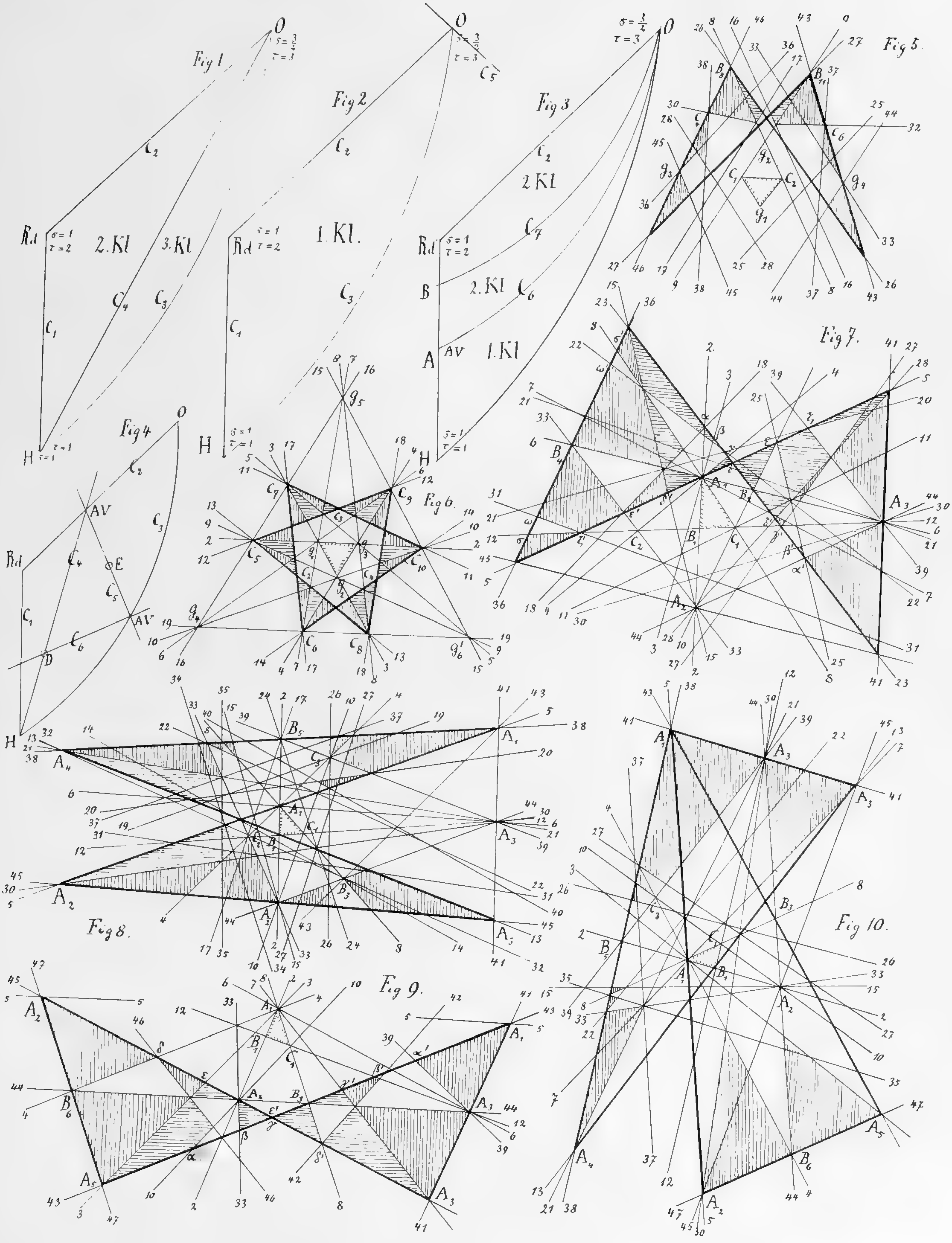


M. Brückner del. Lichtdruck: Roemmler & Jonas, Dresden

M. Brückner: Polyeder. Taf. 6.



M. Brückner del.
Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden.



M. Brückner del.

Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden

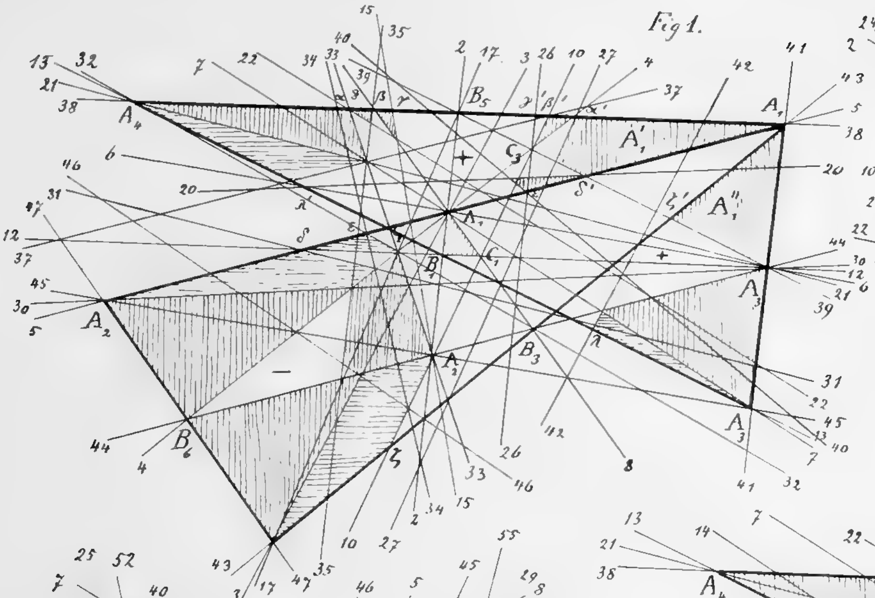


Fig 1.

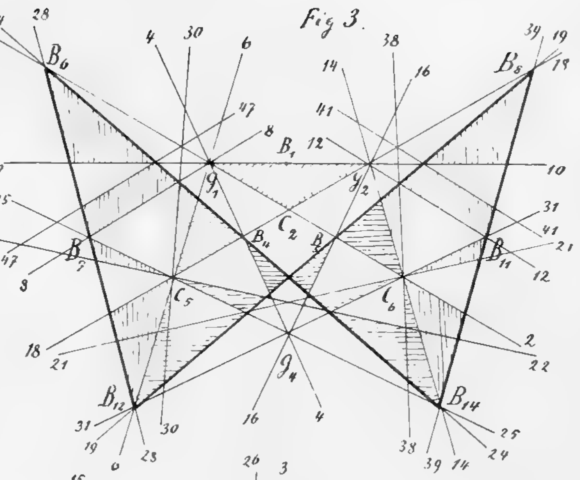


Fig 3.

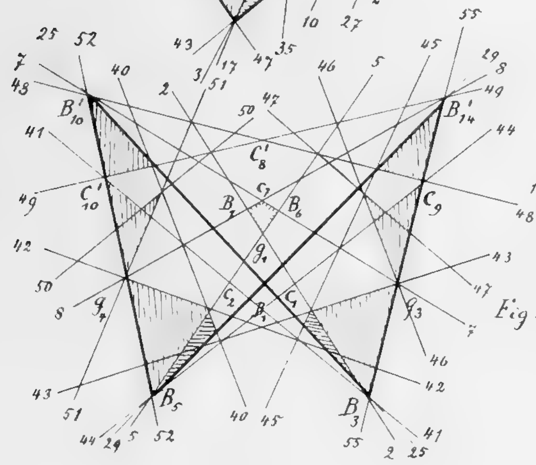


Fig 2

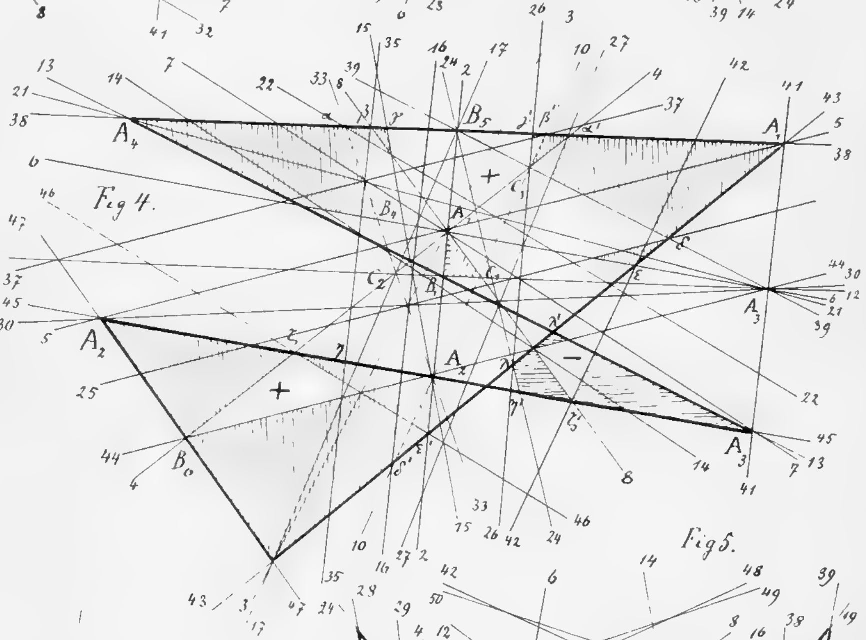


Fig 4.

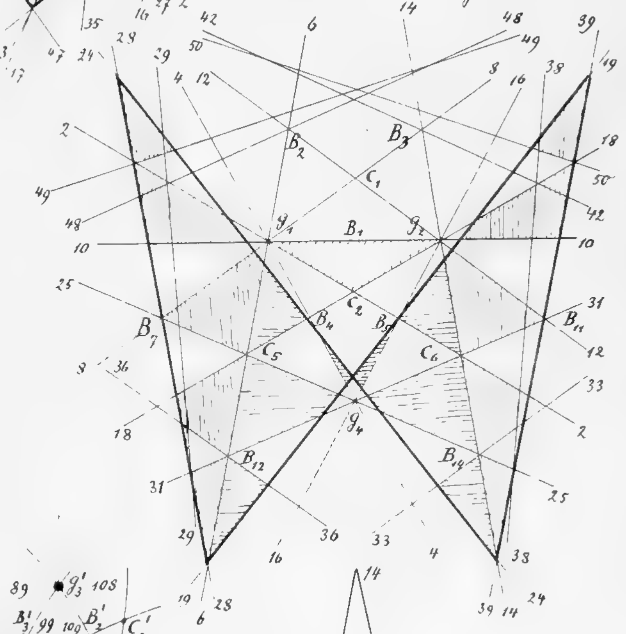
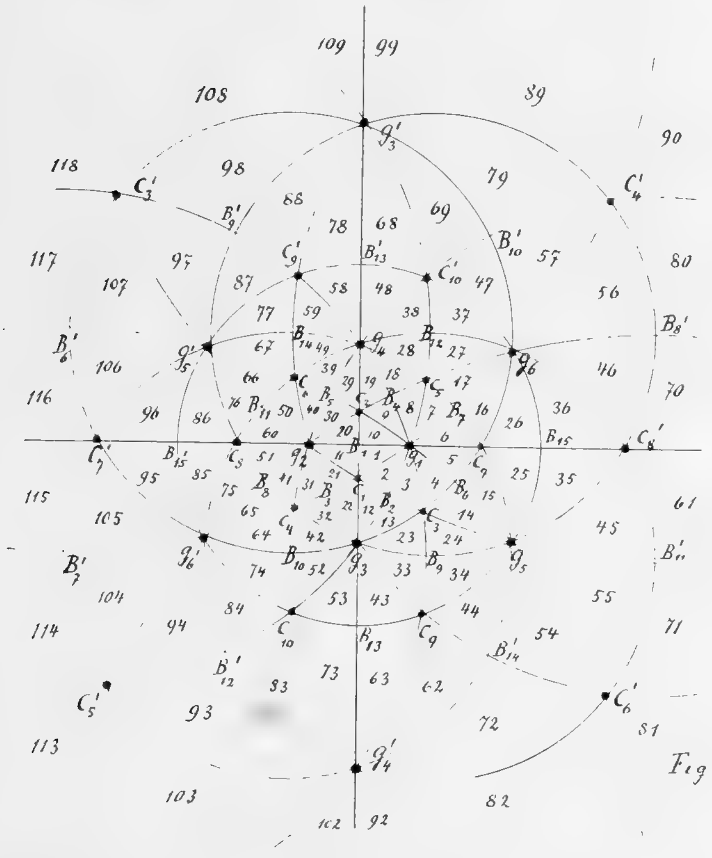


Fig 5.



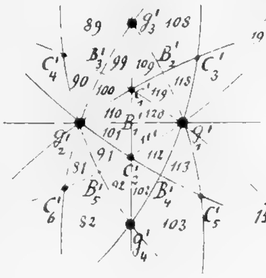


Fig 6.

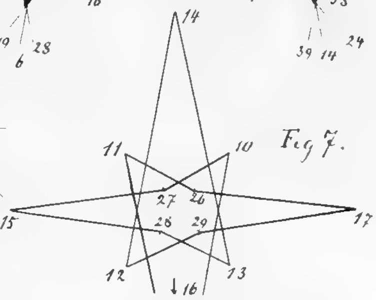
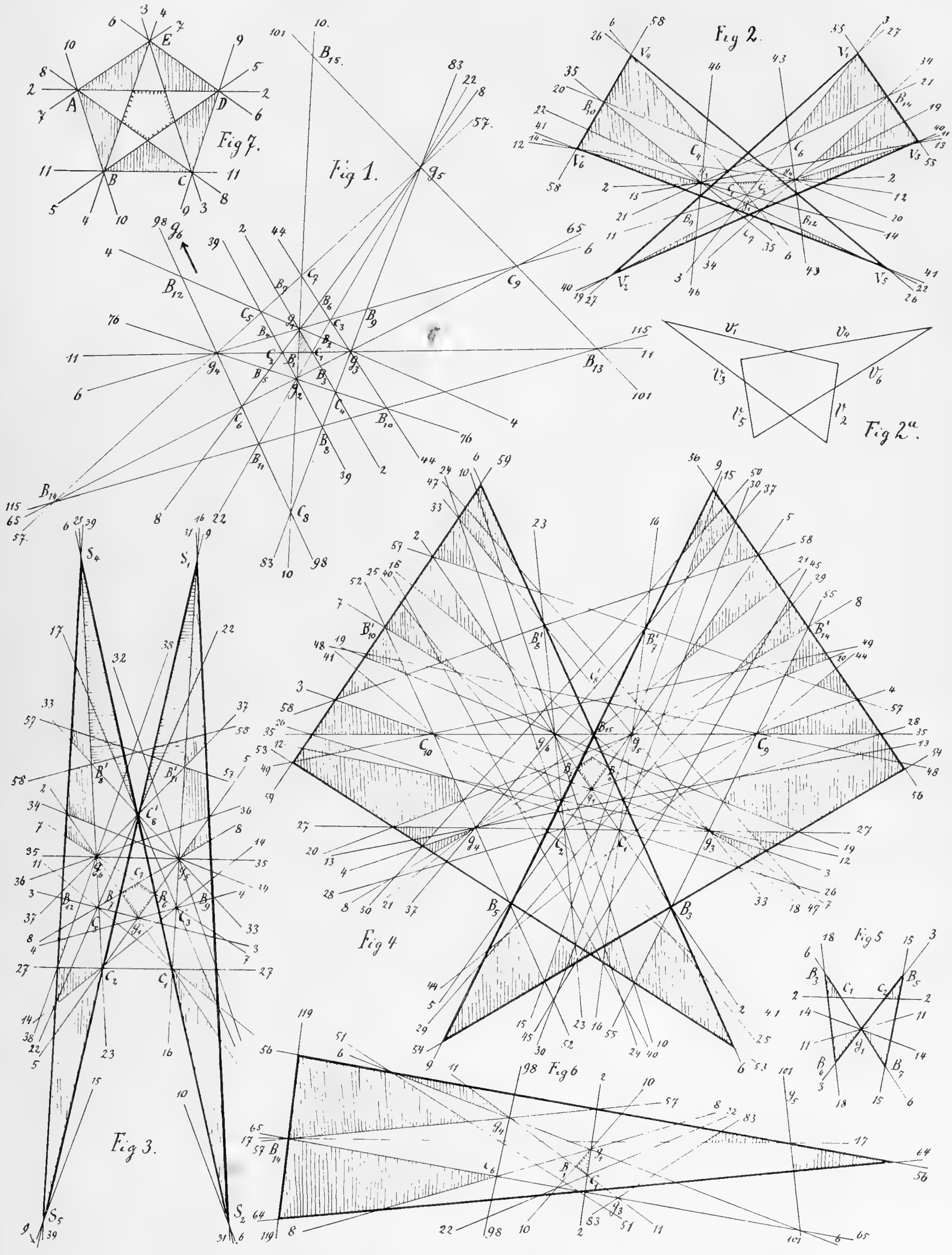


Fig 7.

M. Brückner del. Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden

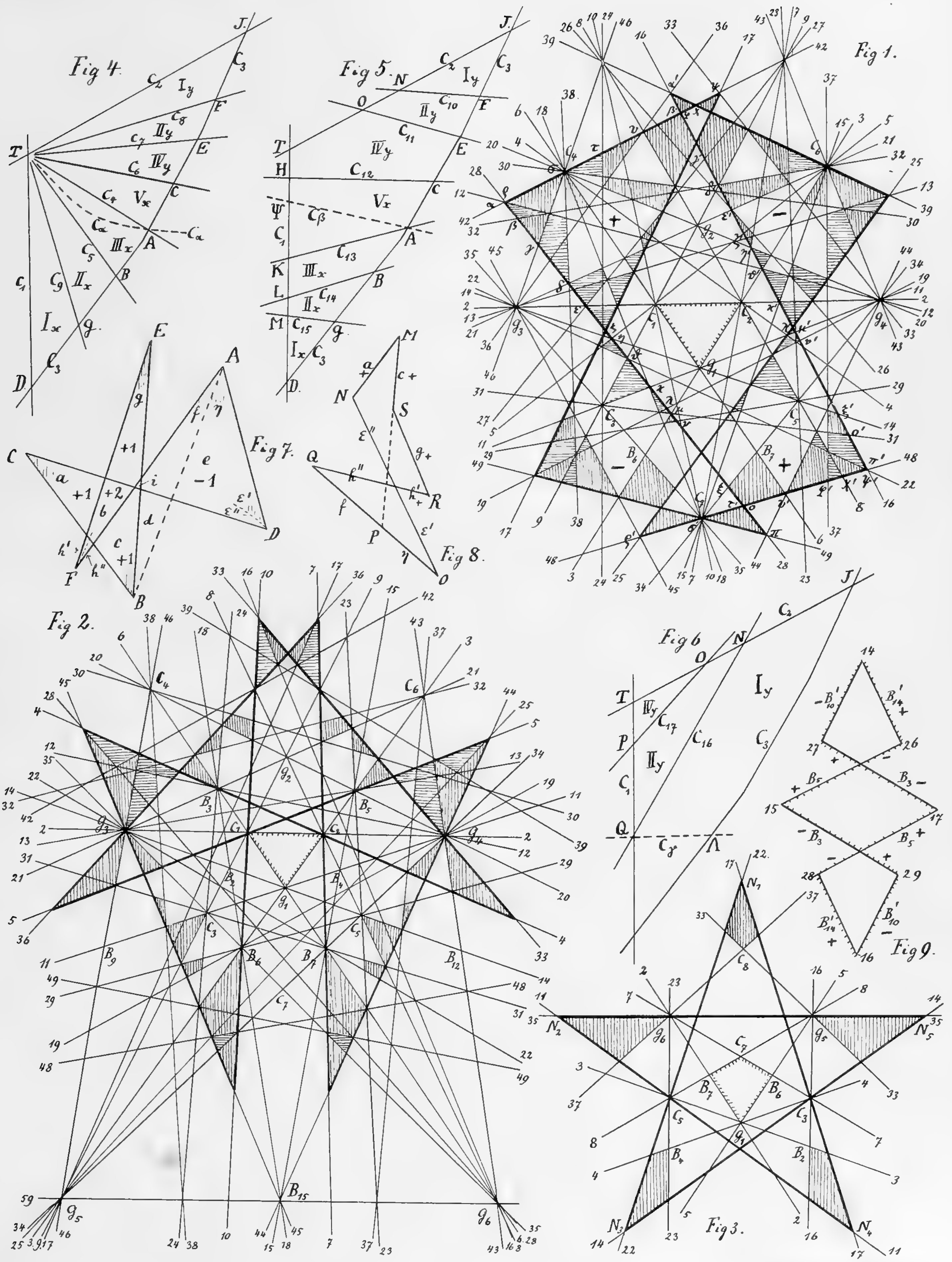
M. Brückner: Polyeder. Taf. 9.



M. Brückner del.

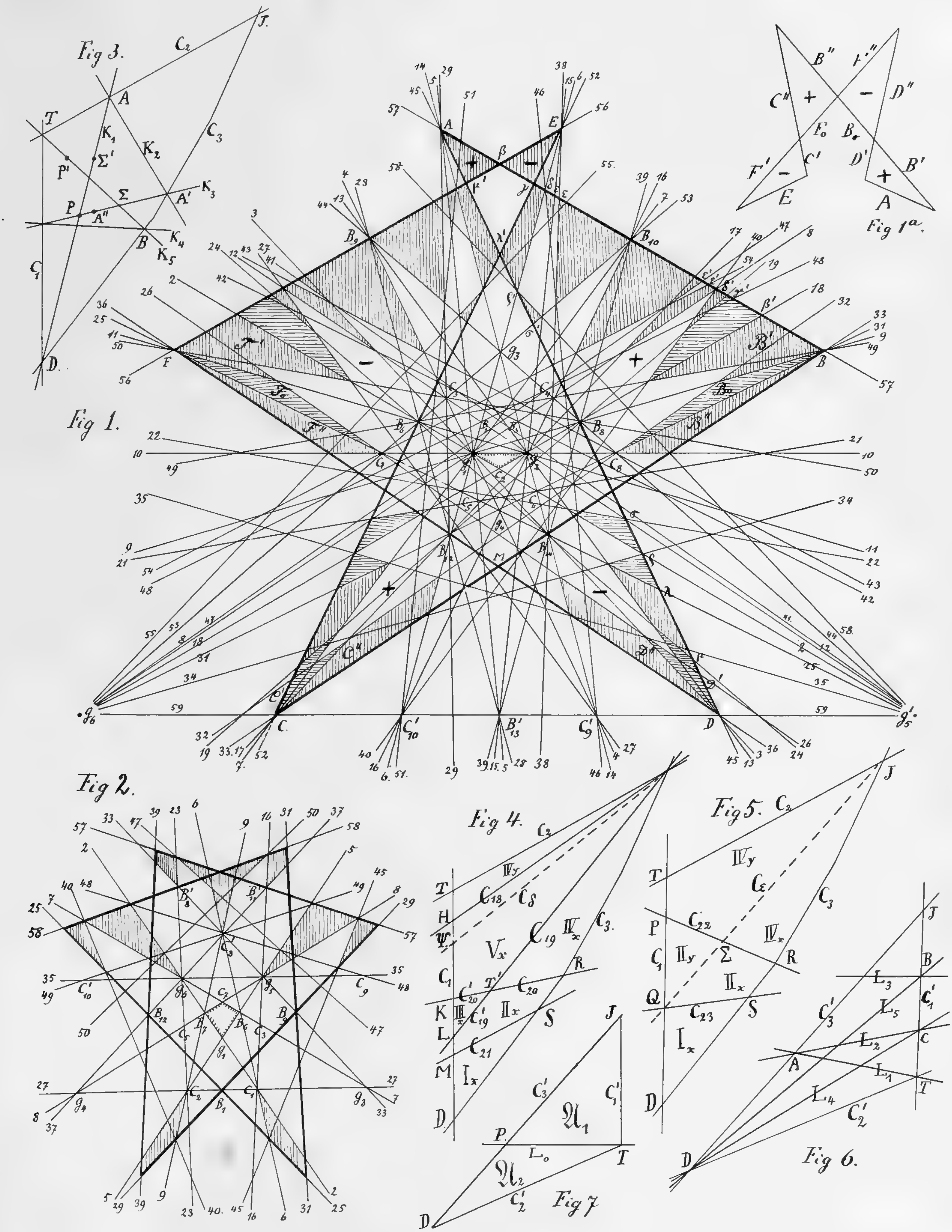
Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden.

M. Brückner: Polyeder. Taf. 10.

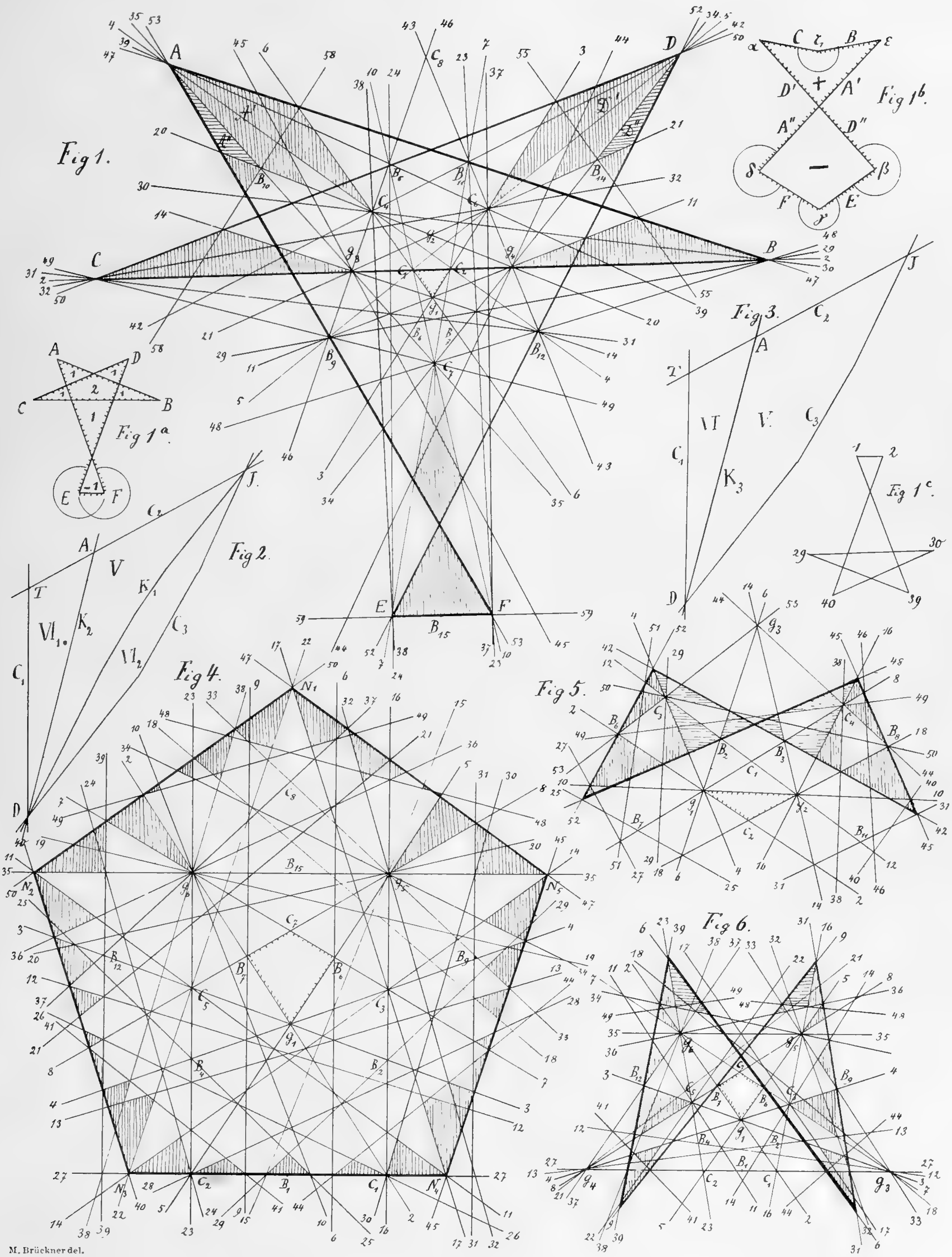


M. Brückner del.

Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden.



M. Brückner del.
Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden



M. Brückner del.

Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden.

M. Brückner: Polyeder. Taf. 13.

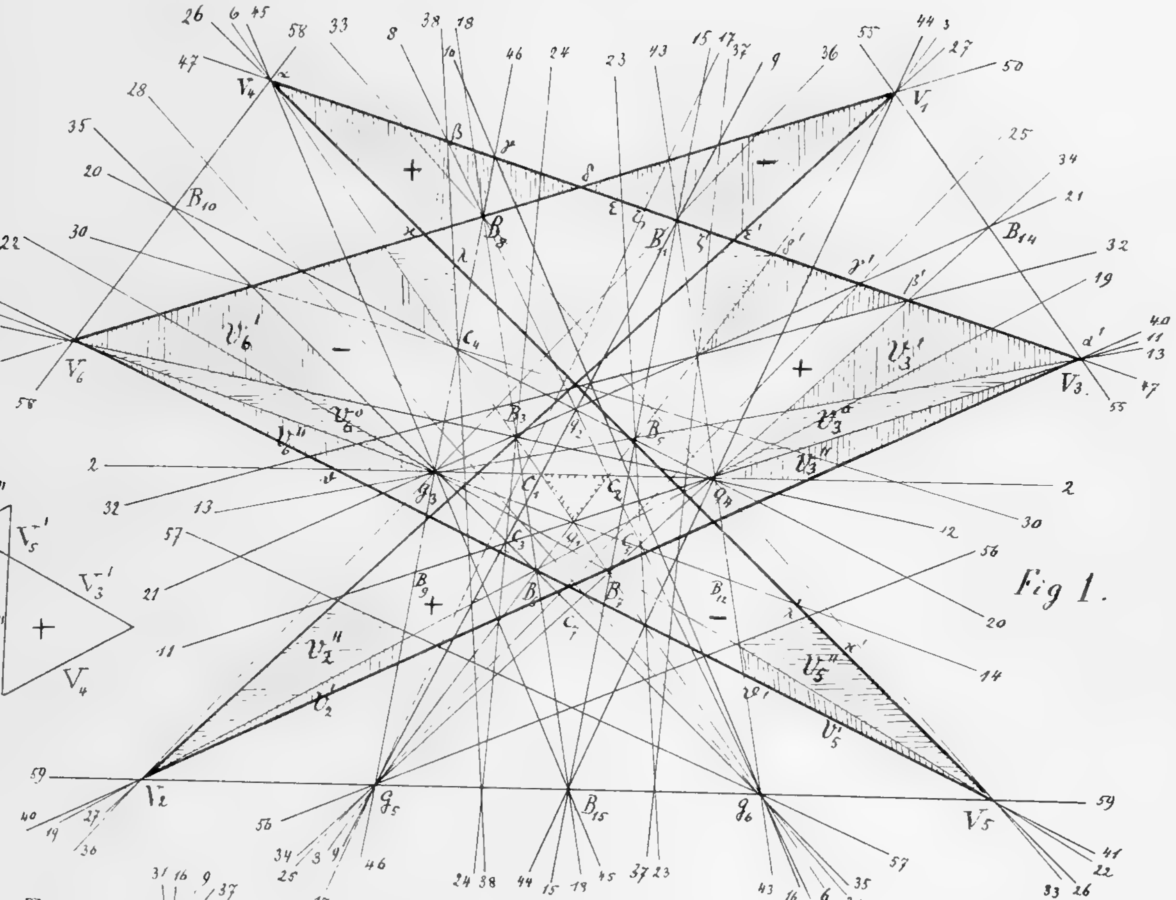


Fig 1.

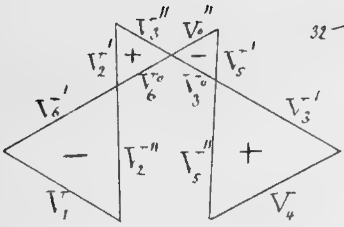


Fig 1^a.

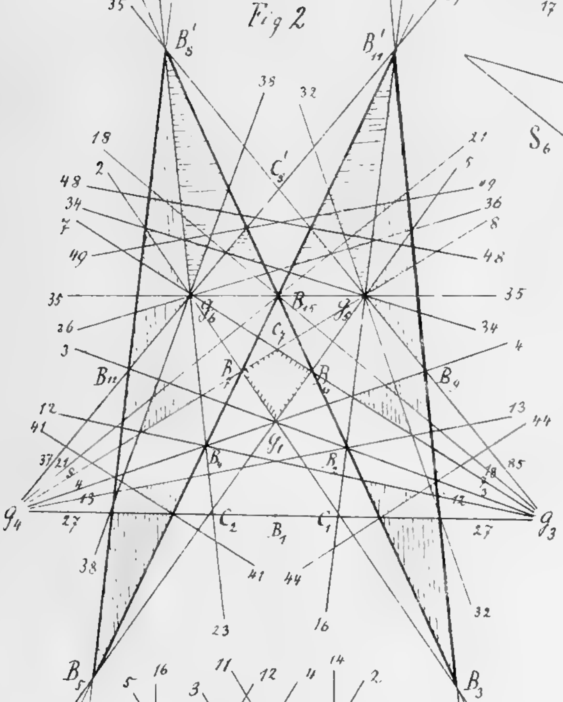
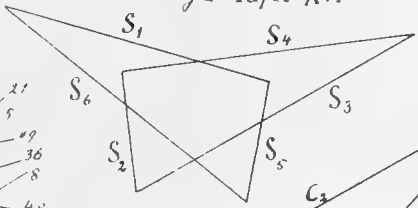
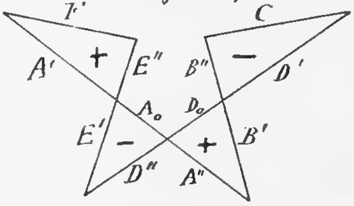


Fig 2

zu Fig 1 Tafel XV.



zu Fig 1 Tafel XVI.



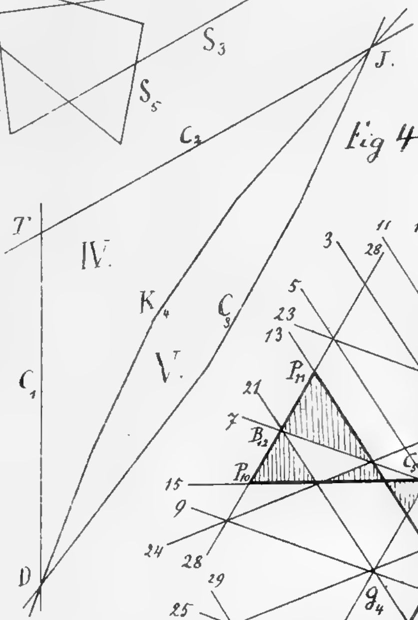


Fig 4.

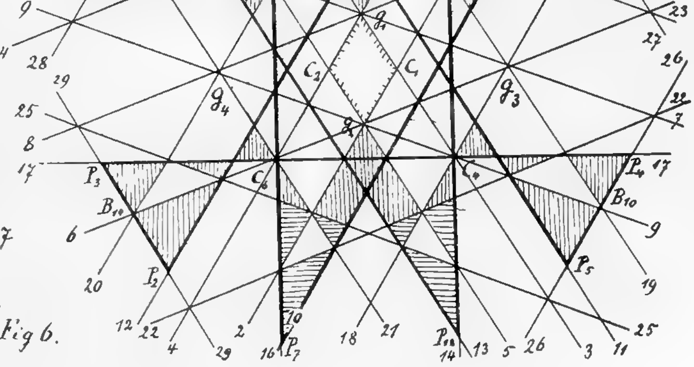


Fig 5.

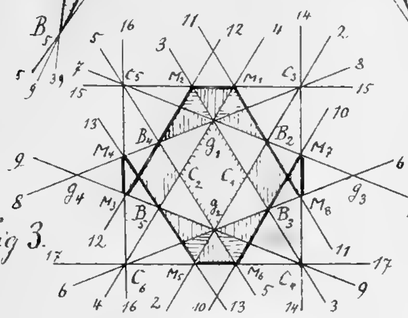


Fig 3.

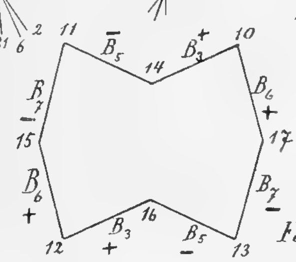


Fig 6.

M. Brückner del. Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden.

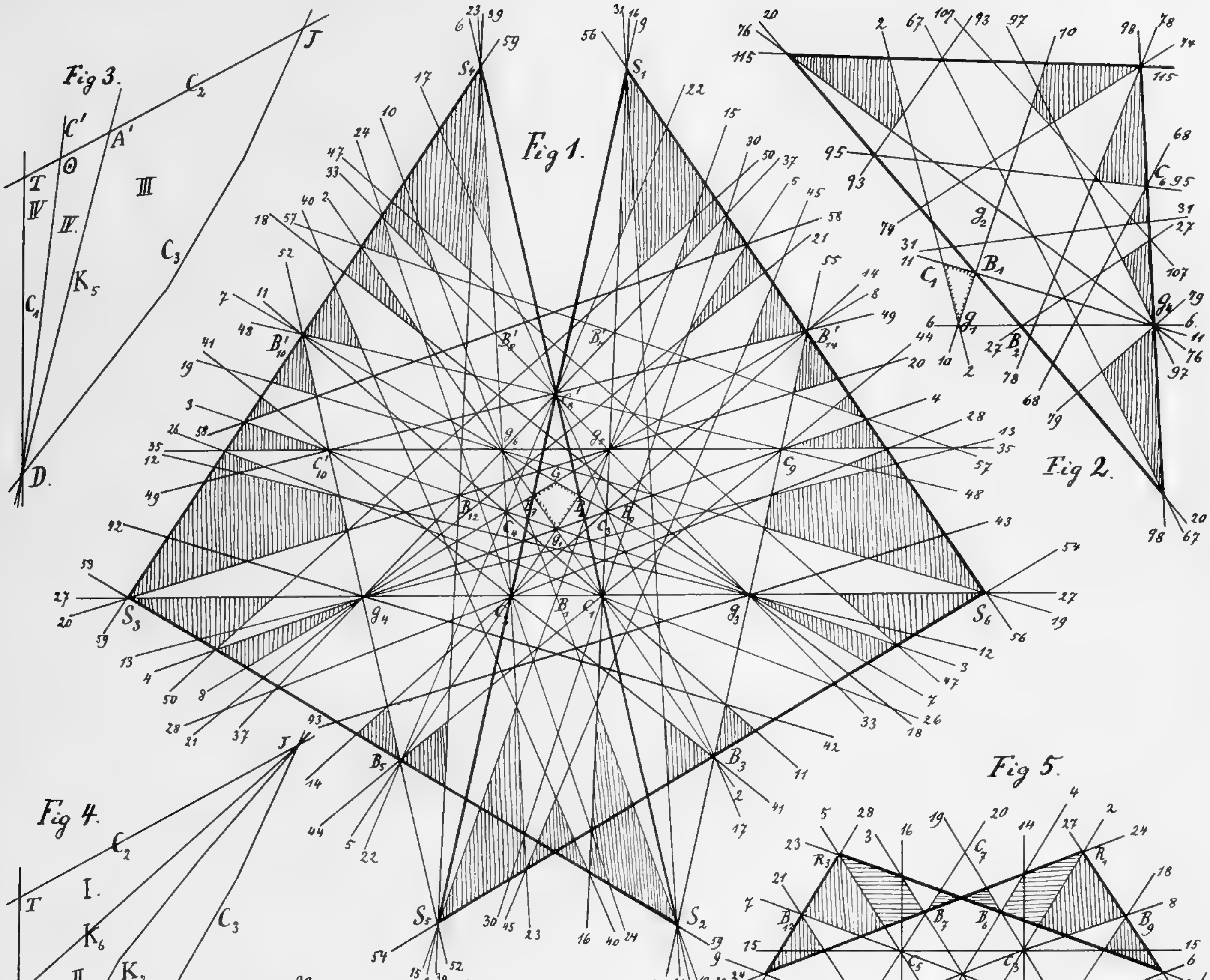


Fig 3. Fig 1. Fig 2.

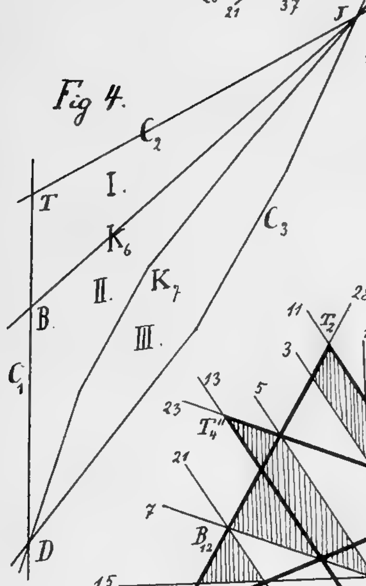


Fig 4.

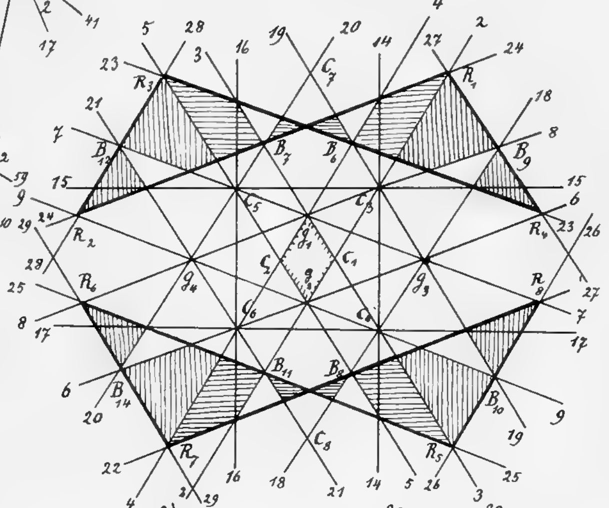


Fig 5.

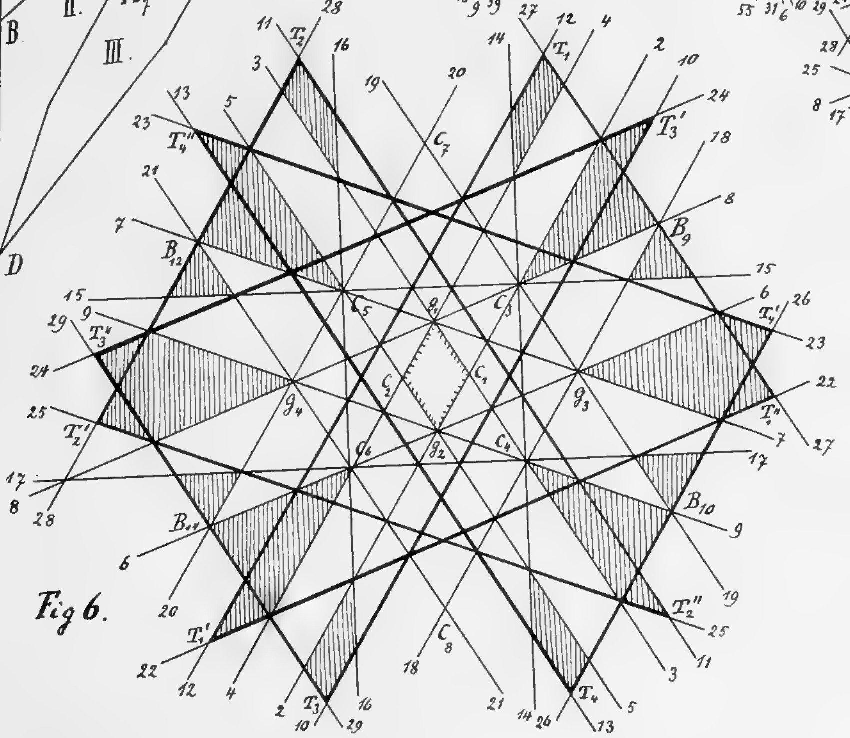


Fig 6.

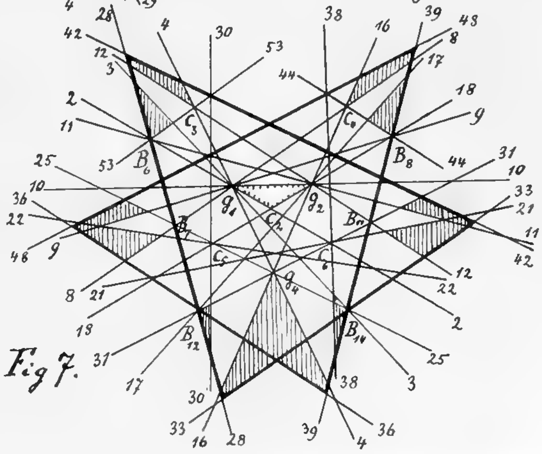
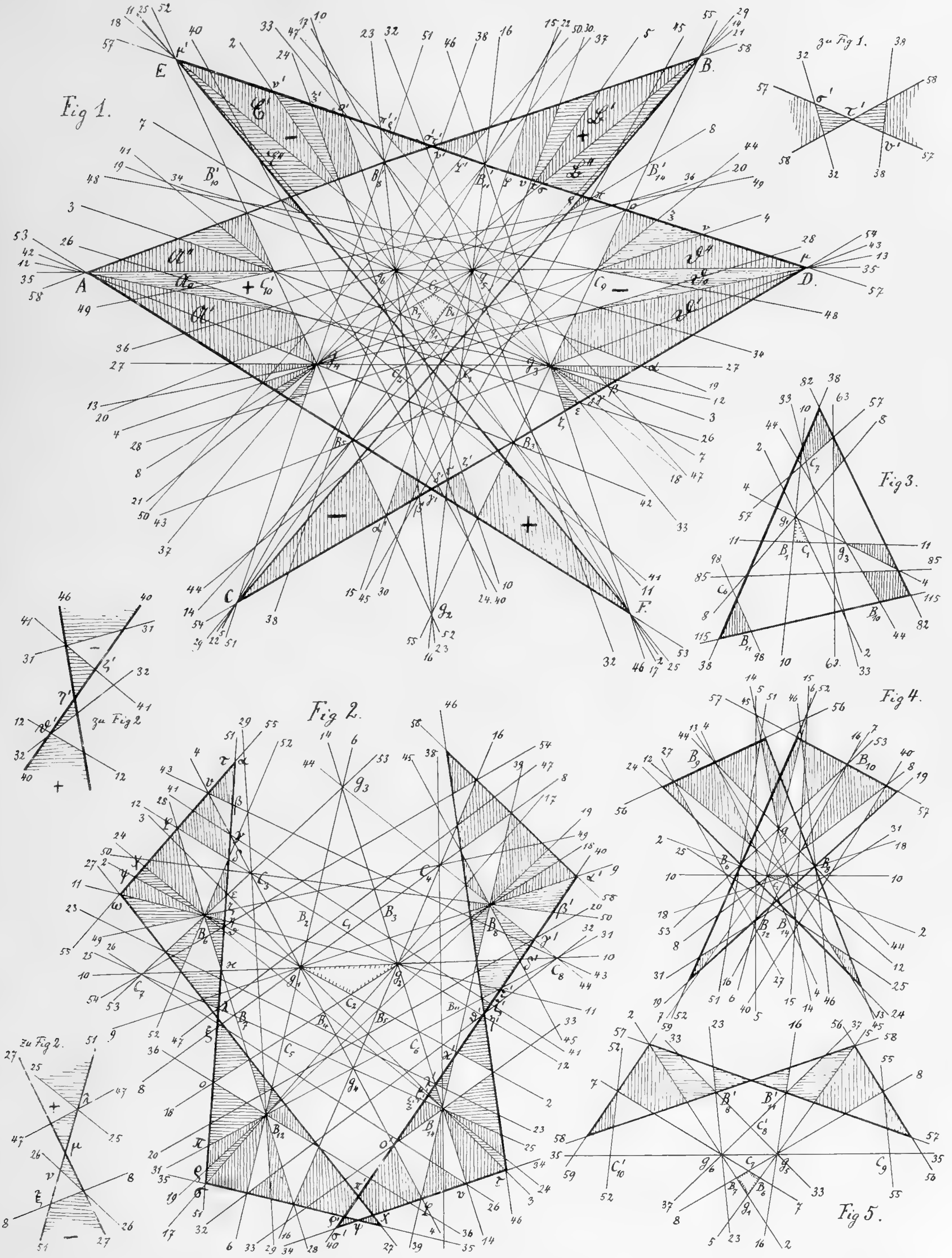
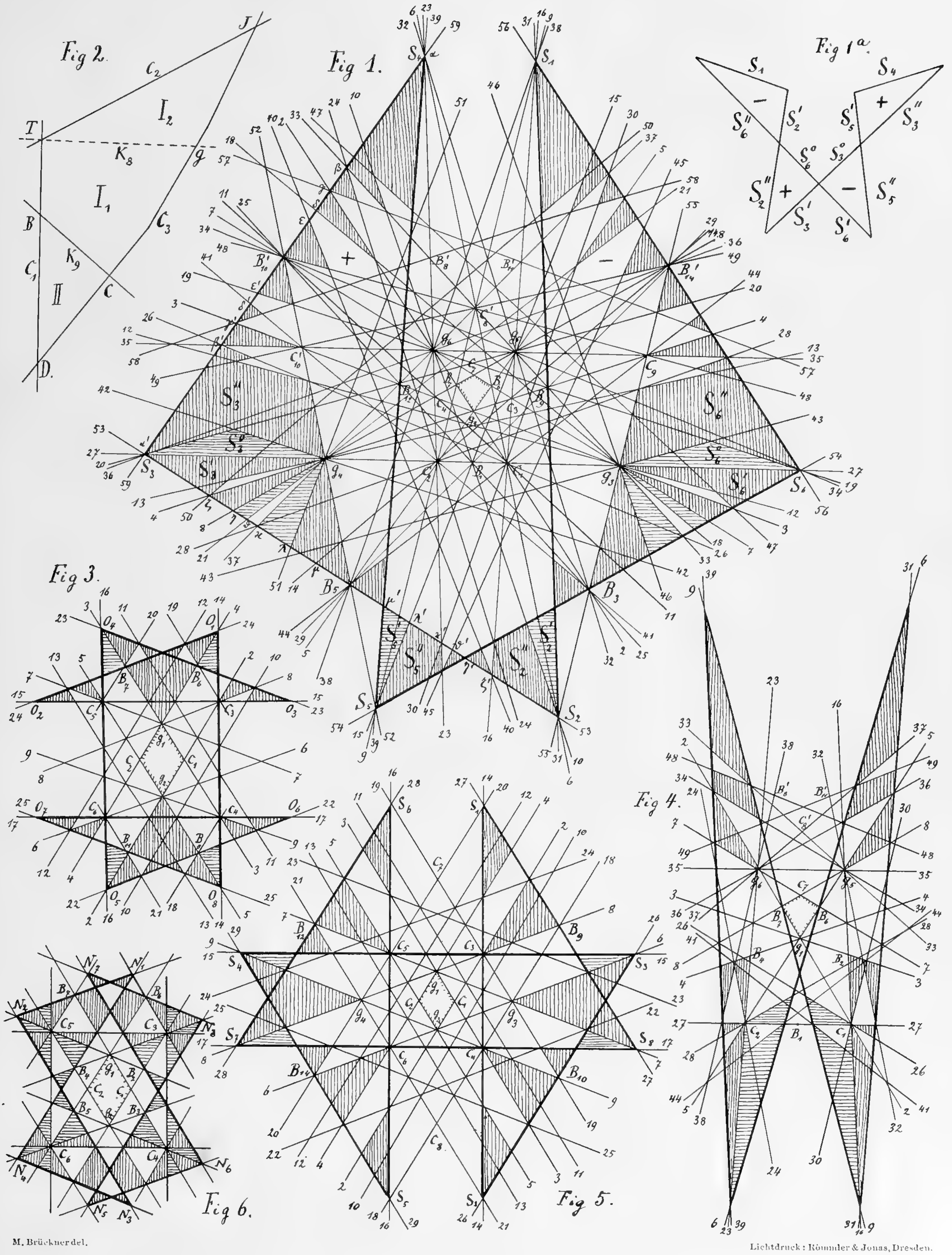


Fig 7.



M. Brückner del.

Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden



M. Brückner del.

Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden.

M. Brückner: Polyeder. Taf. 17.

Fig. I.

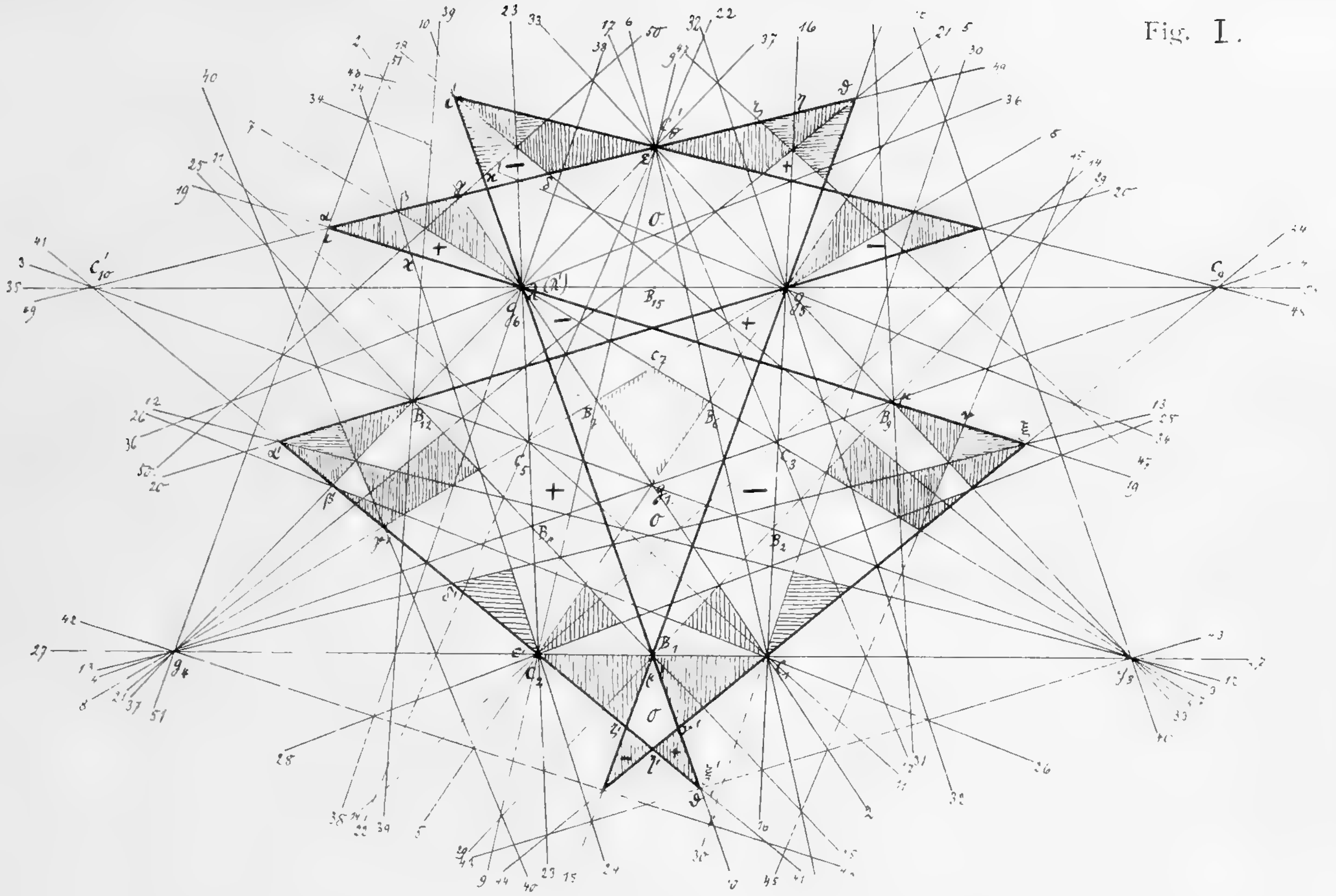
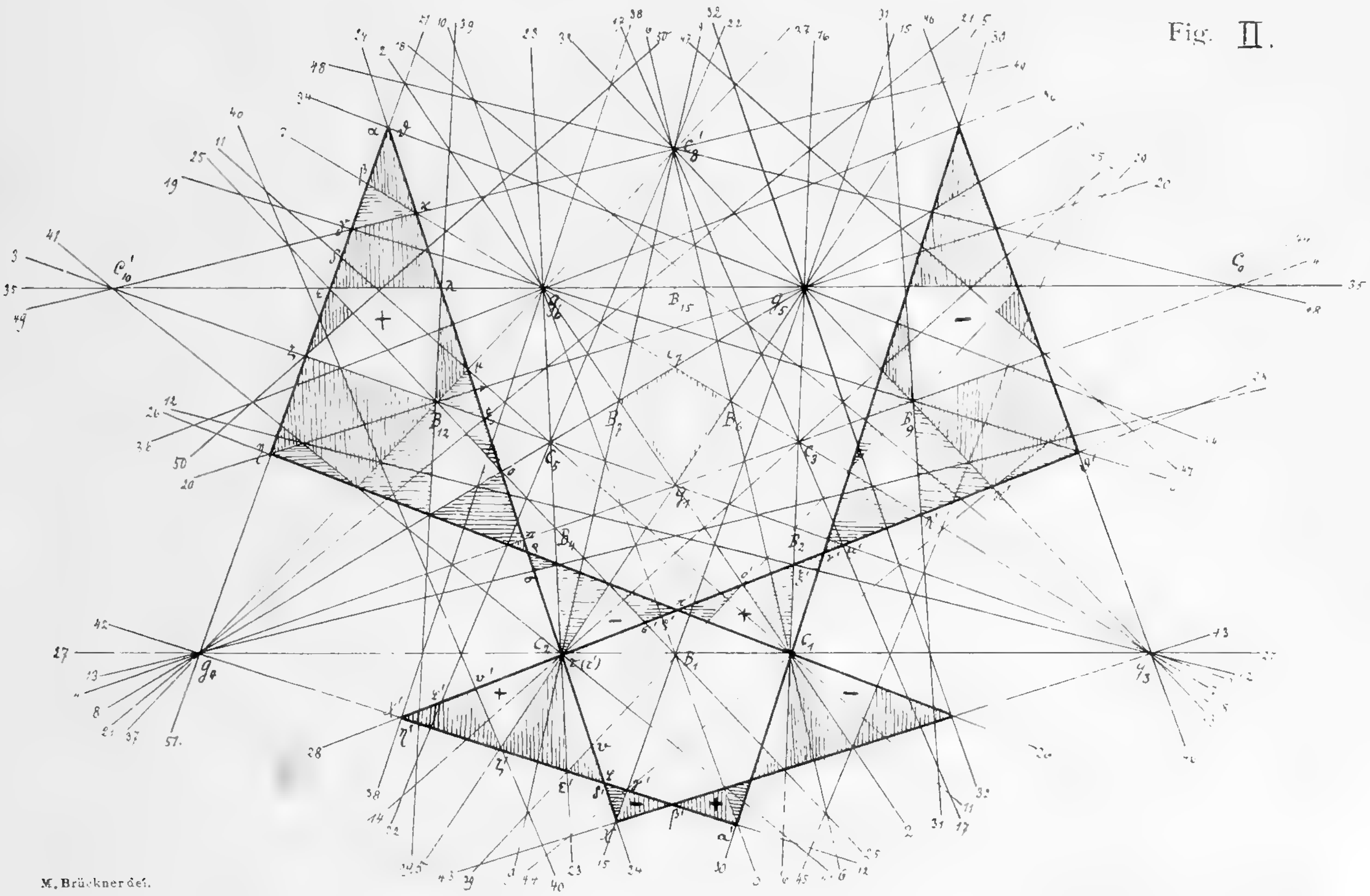


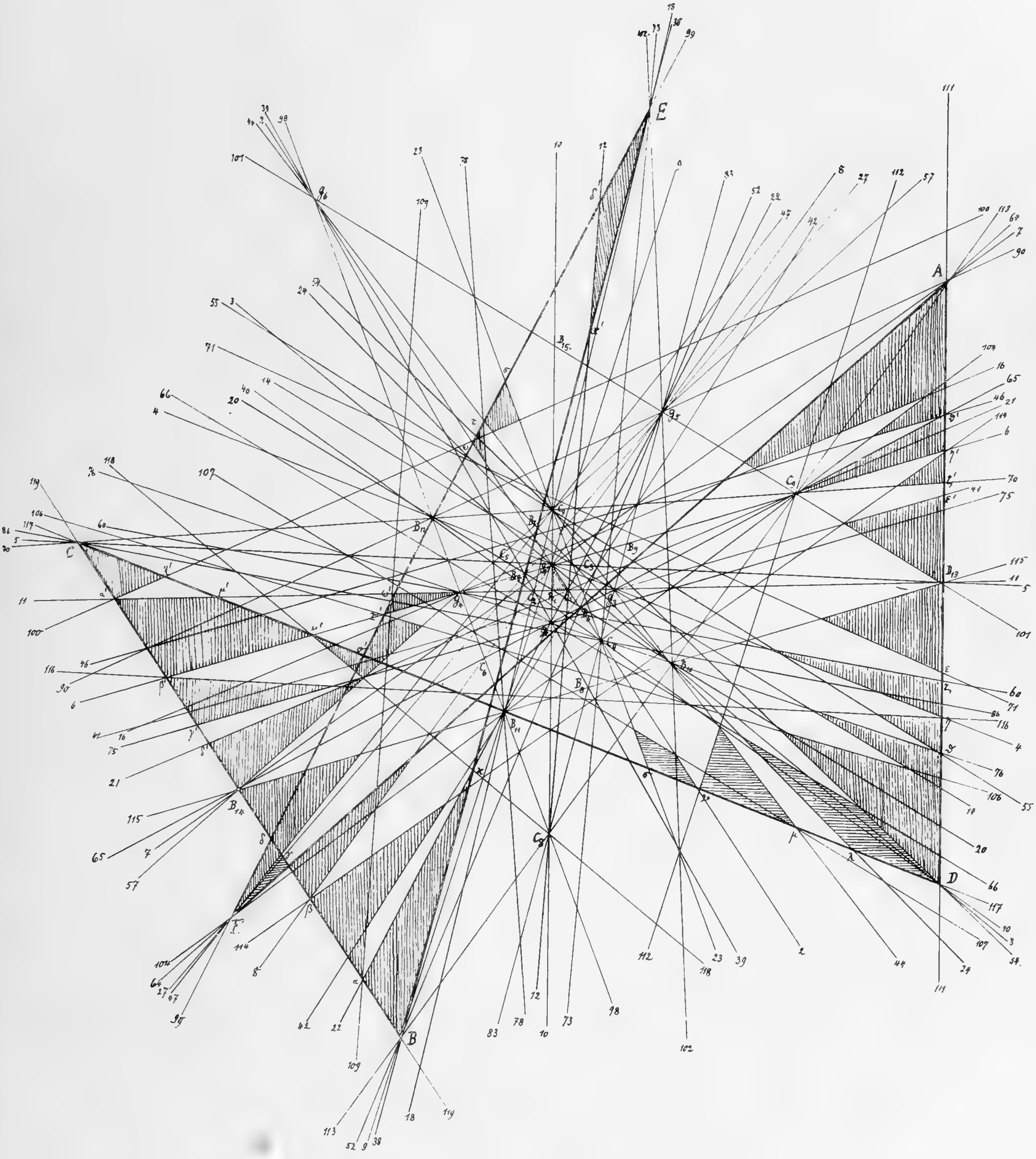
Fig. II.



M. Brückner del.

Lichtdruck Römmler & Jonas, Dresden.

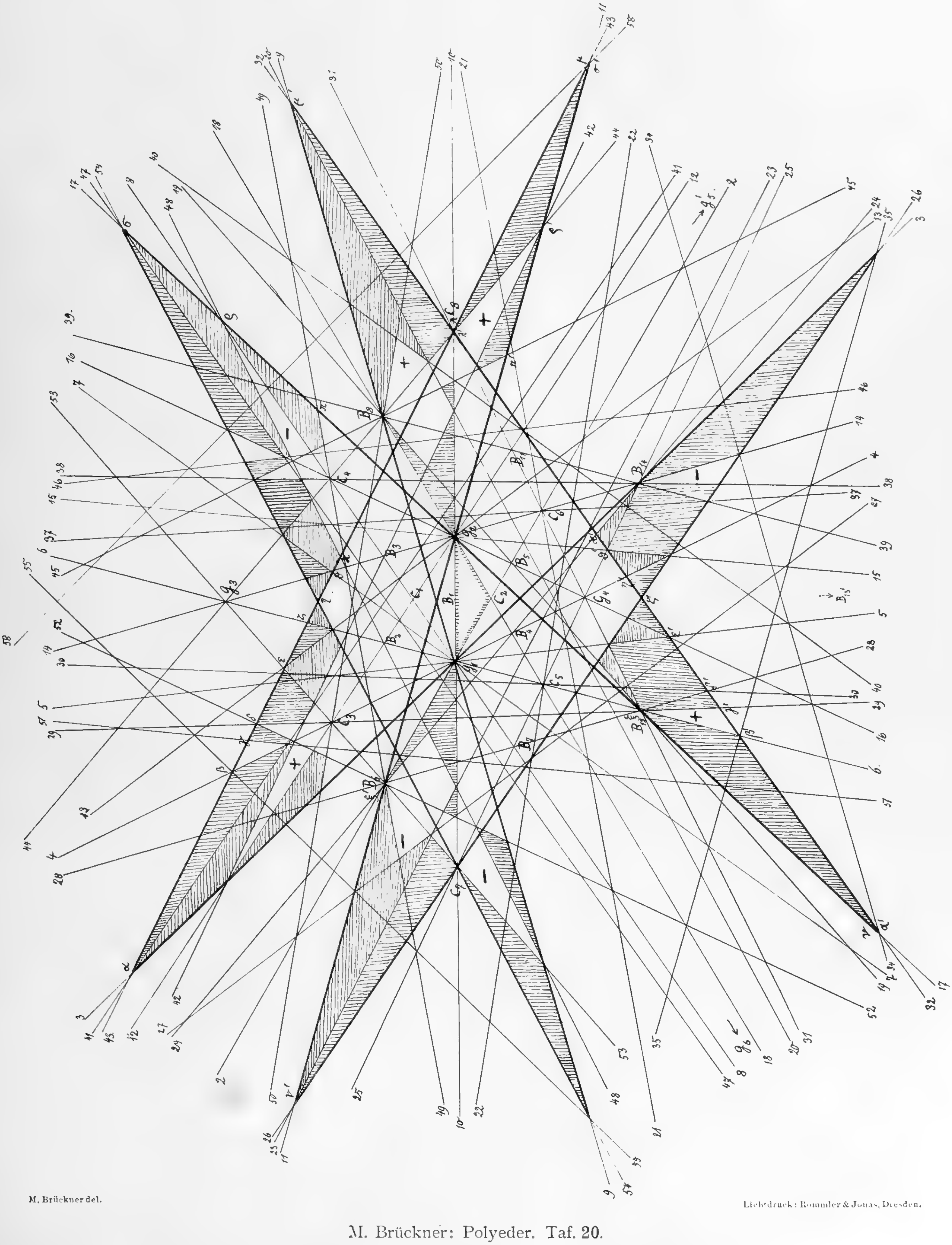
M. Brückner: Polyeder. Taf. 18.



M. Brückner del.

Lichtdruck Römmler & Jonas, Dresden

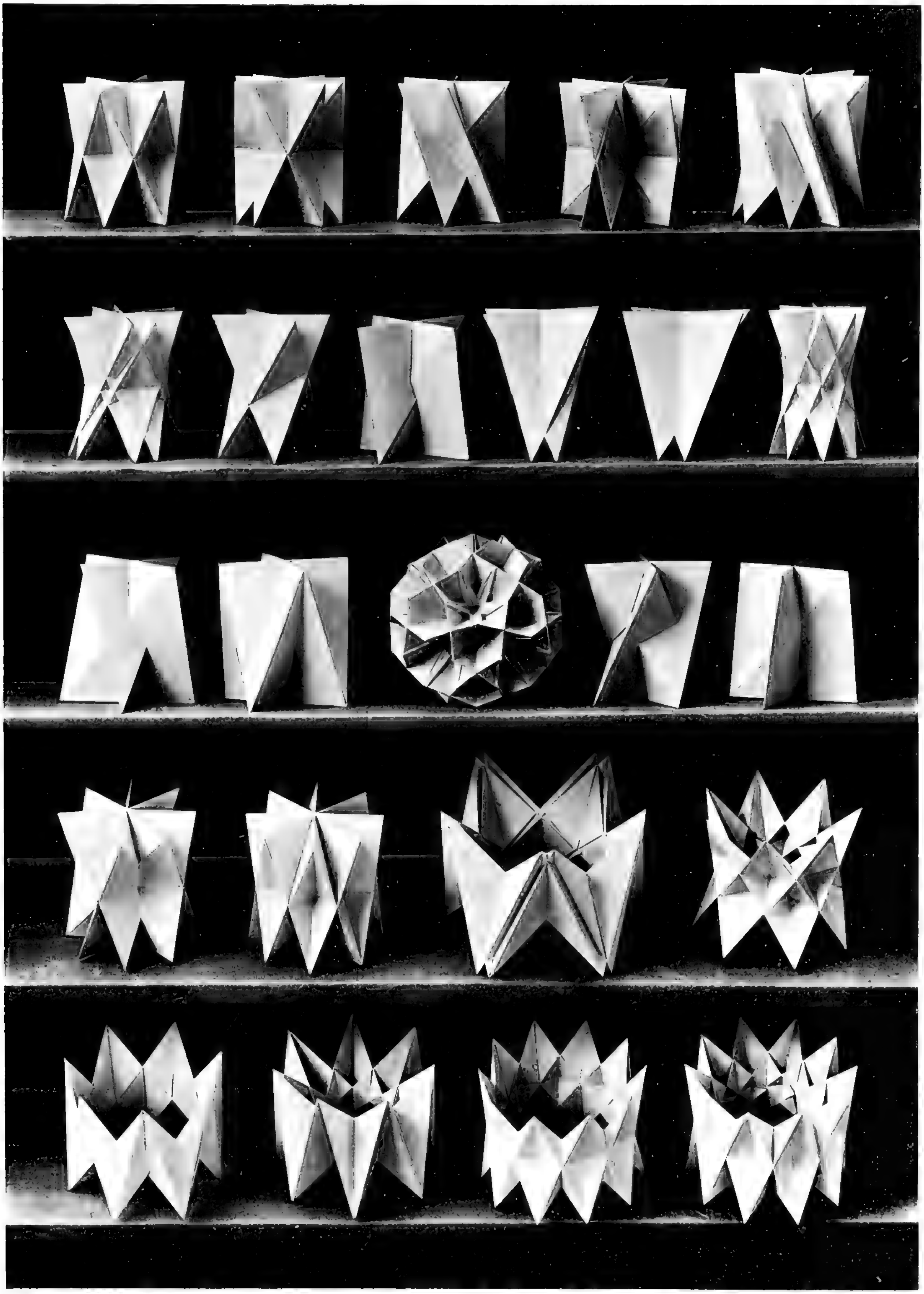
M. Brückner: Polyeder. Taf. 19.



M. Brückner del.

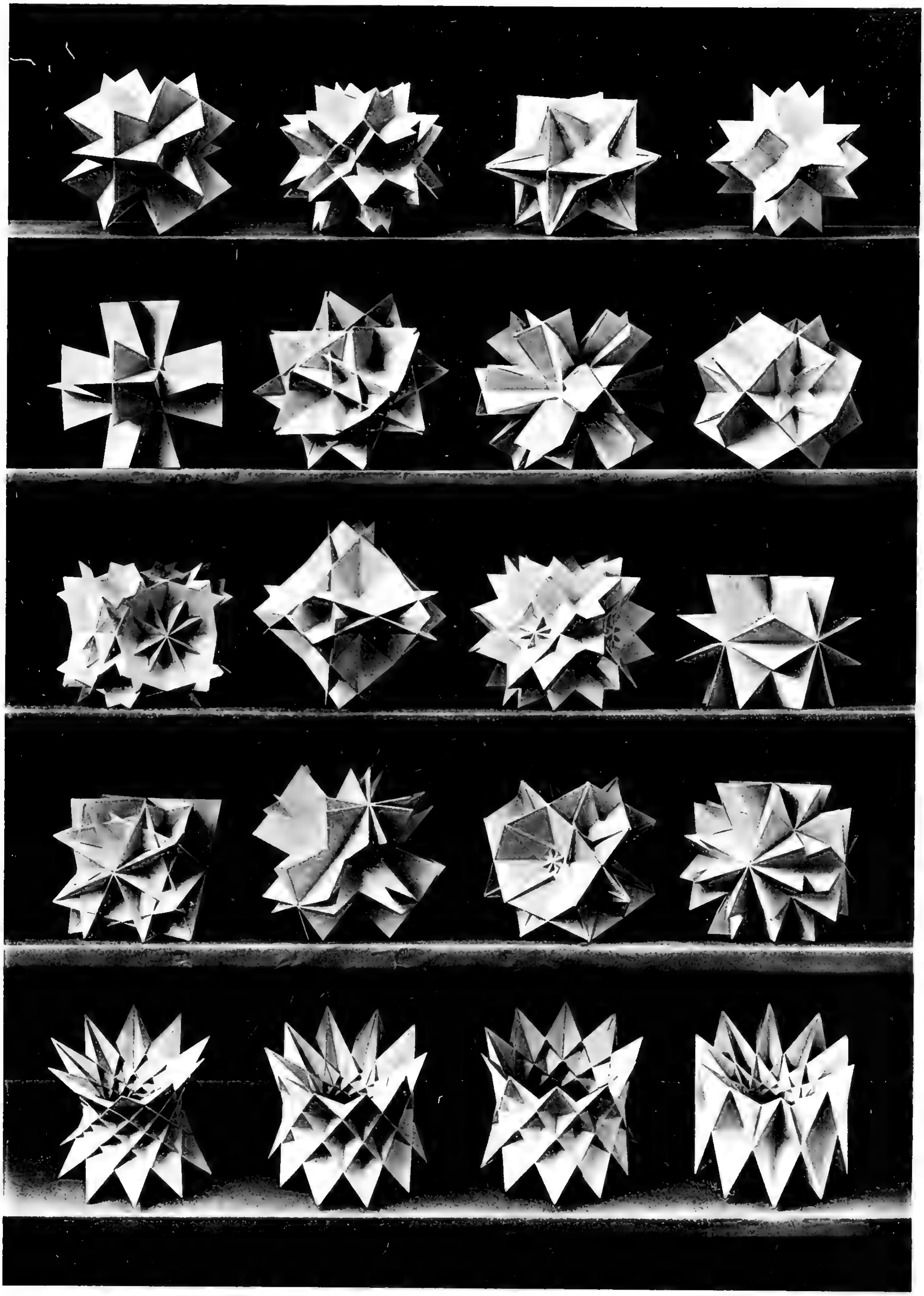
Lichtdruck: Roemmler & Jonas, Dresden.

M. Brückner: Polyeder. Taf. 20.



M. Brückner del. Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden

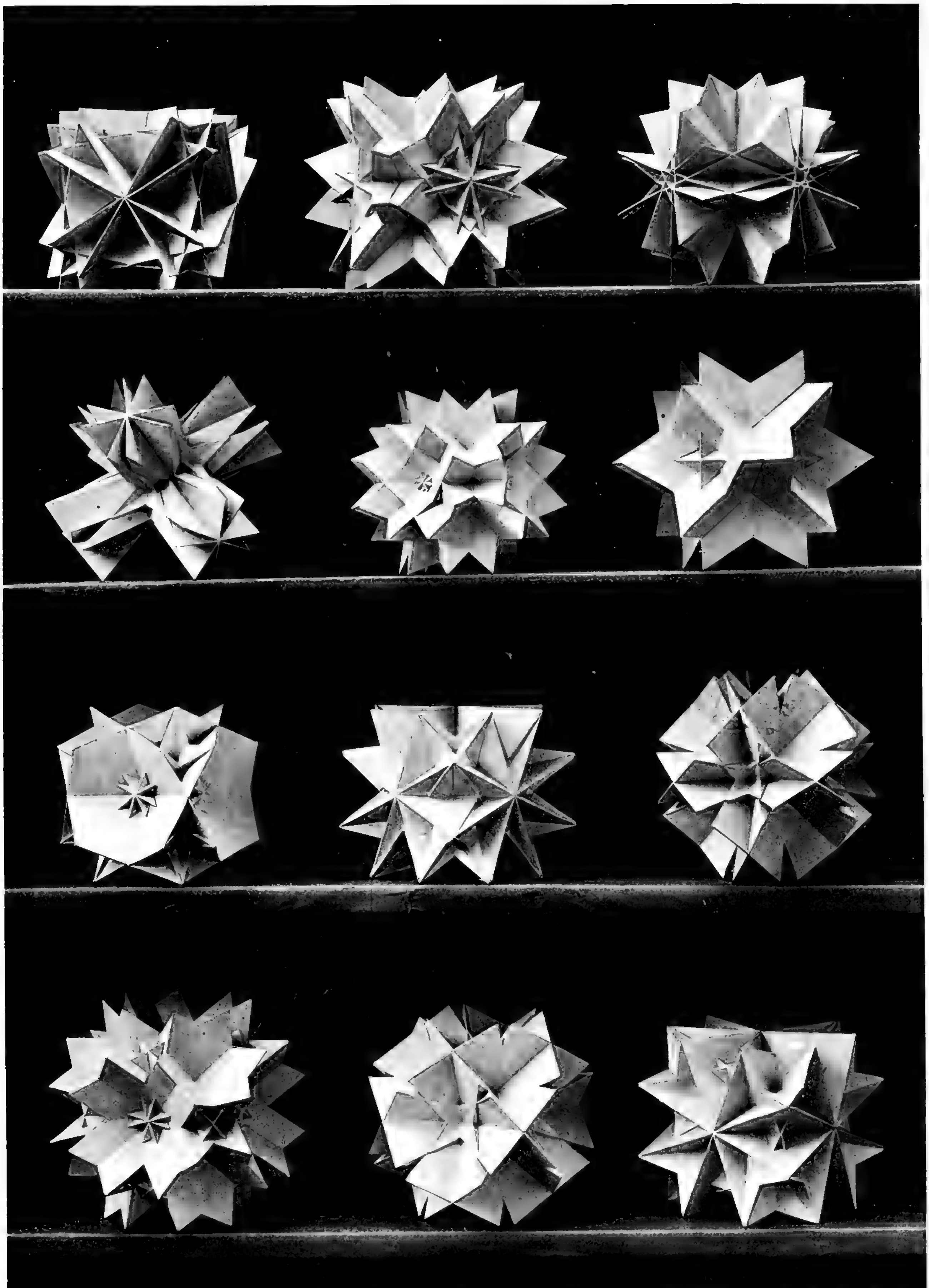
M. Brückner: Polyeder. Taf. 21.



M. Brucknerdel.

Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden

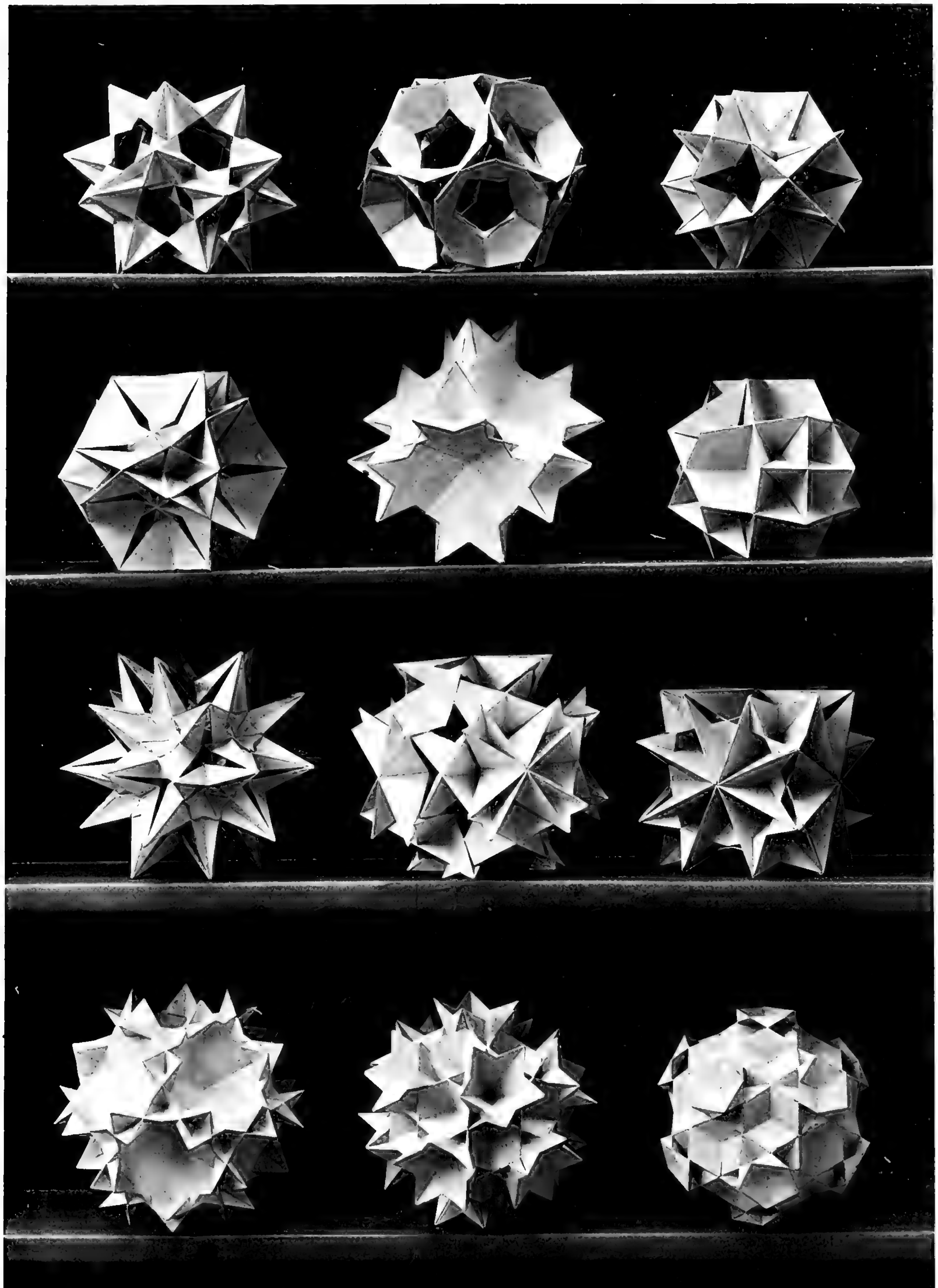
M. Brückner: Polyeder. Taf. 22.



M. Brückner del

Lichtdruck: Rommler & Jonas, Dresden

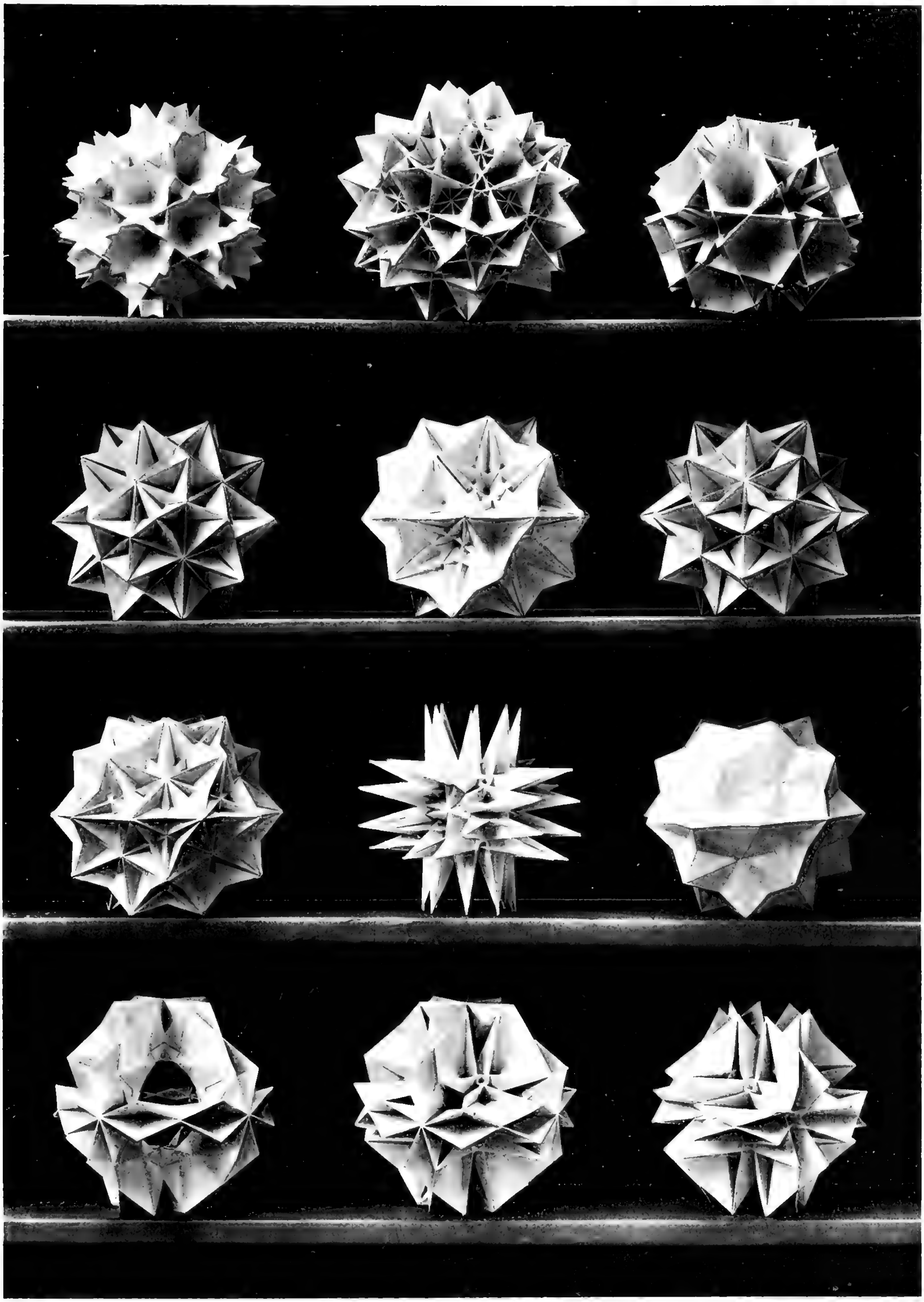
M. Brückner: Polyeder. Taf. 23.



M Brückner del.

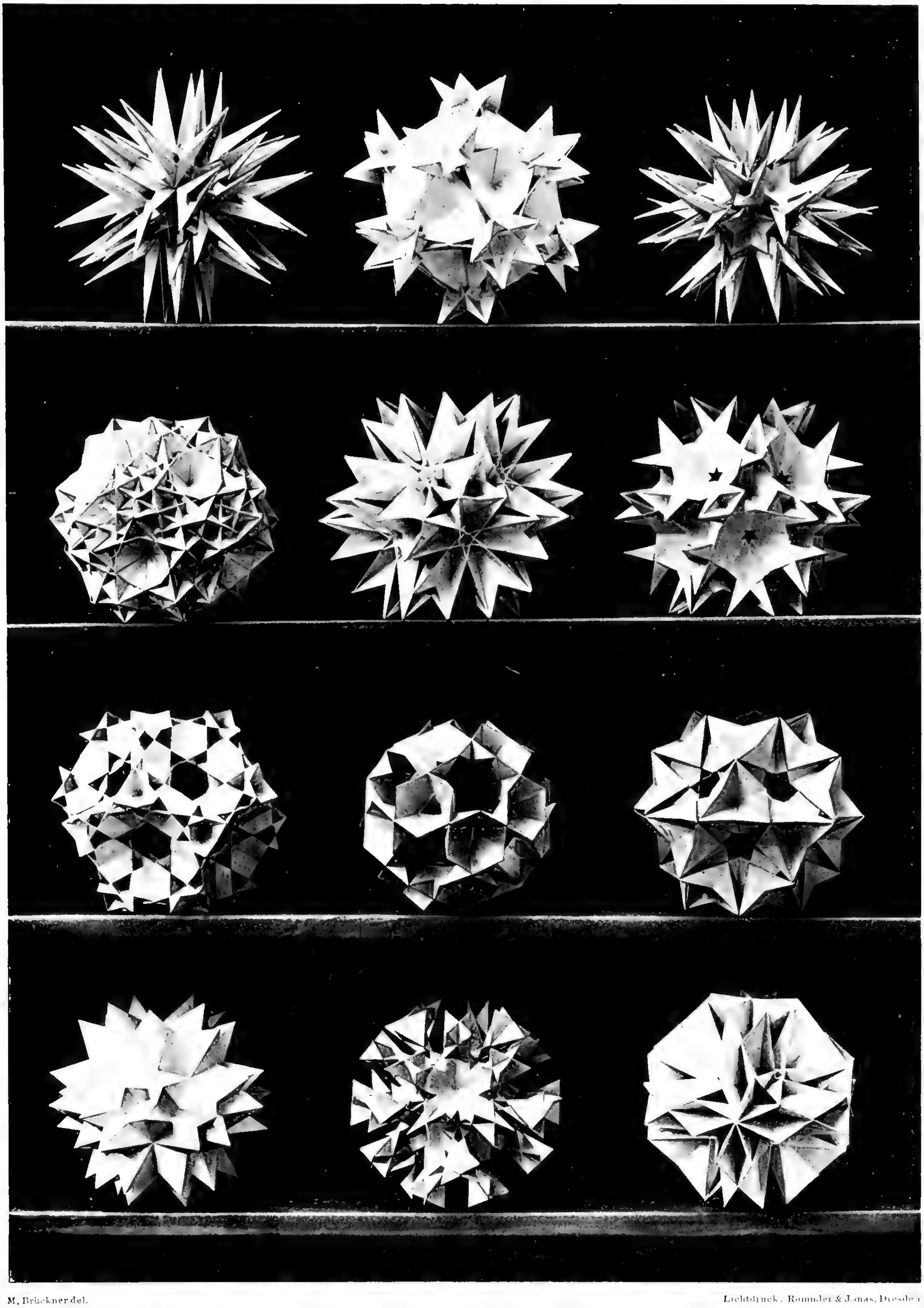
Lichtdruck v. Römmler & Jonas, Dresden.

M. Brückner: Polyeder. Taf. 24.



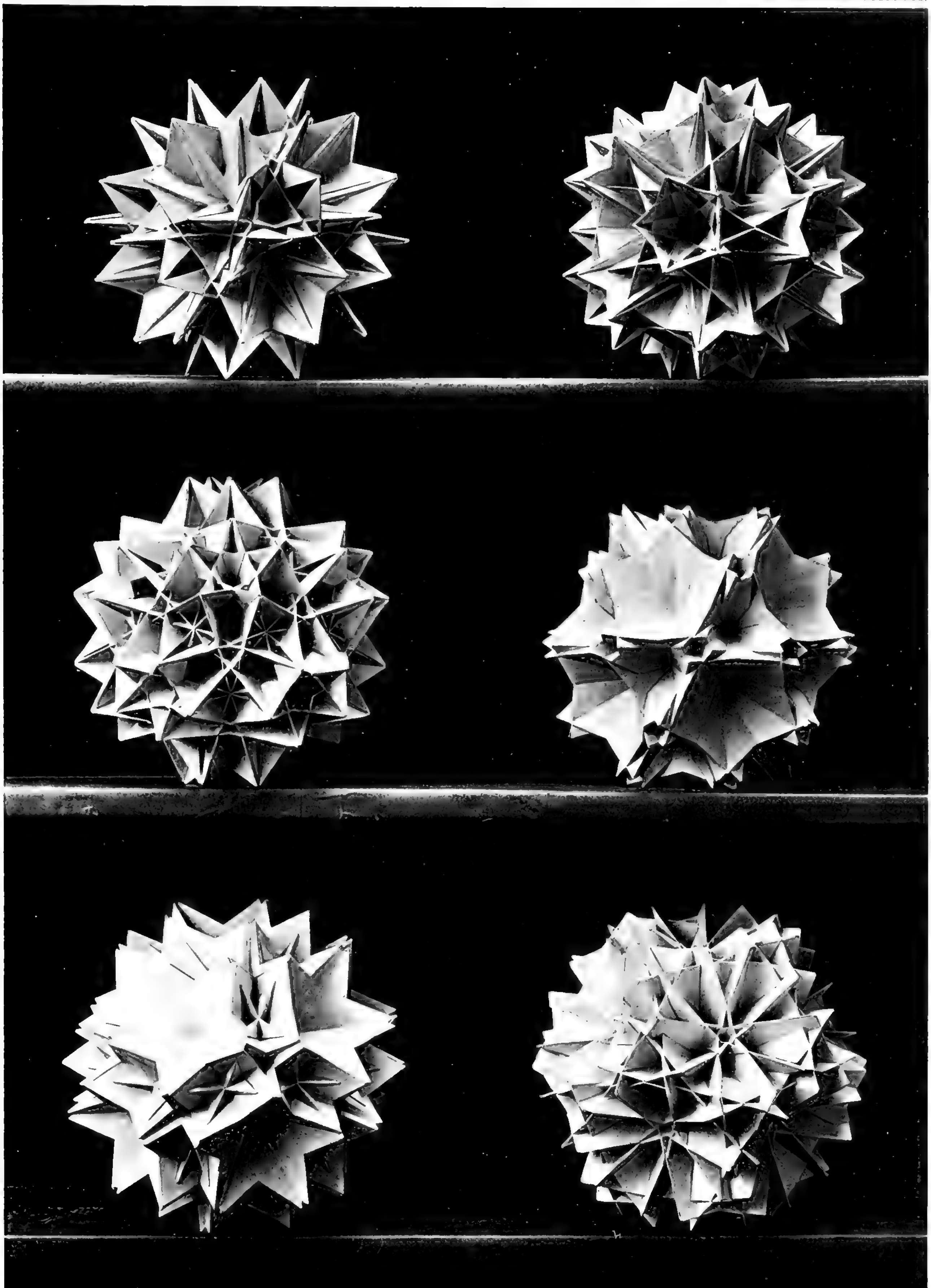
M. Brückner del.

M. Brückner: Polyeder. Taf. 25.



M. Brückner del. Lichtdruck v. Römmler & Jonas, Dresden.

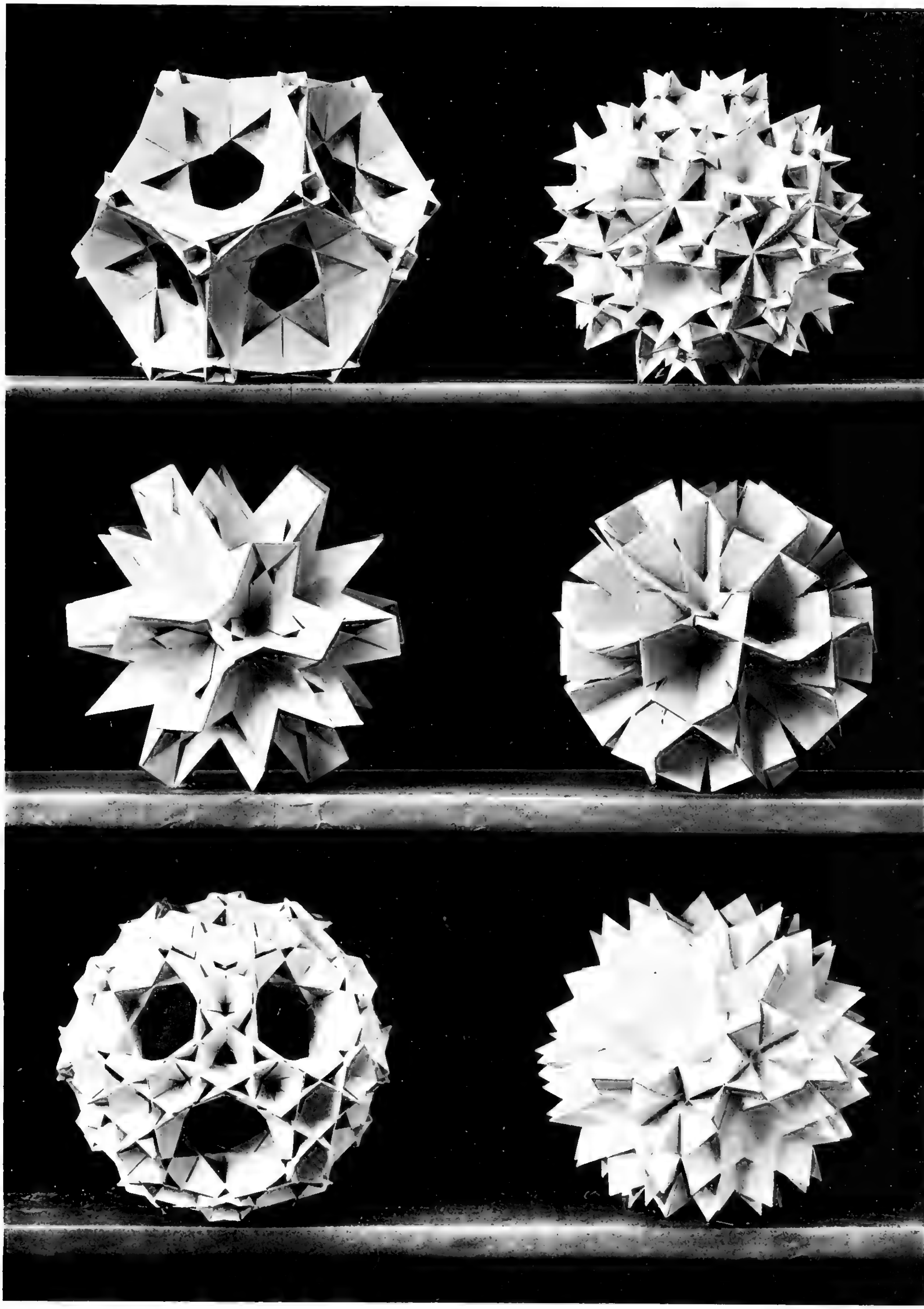
M. Brückner: Polyeder. Taf. 26.



M. Brückner del.

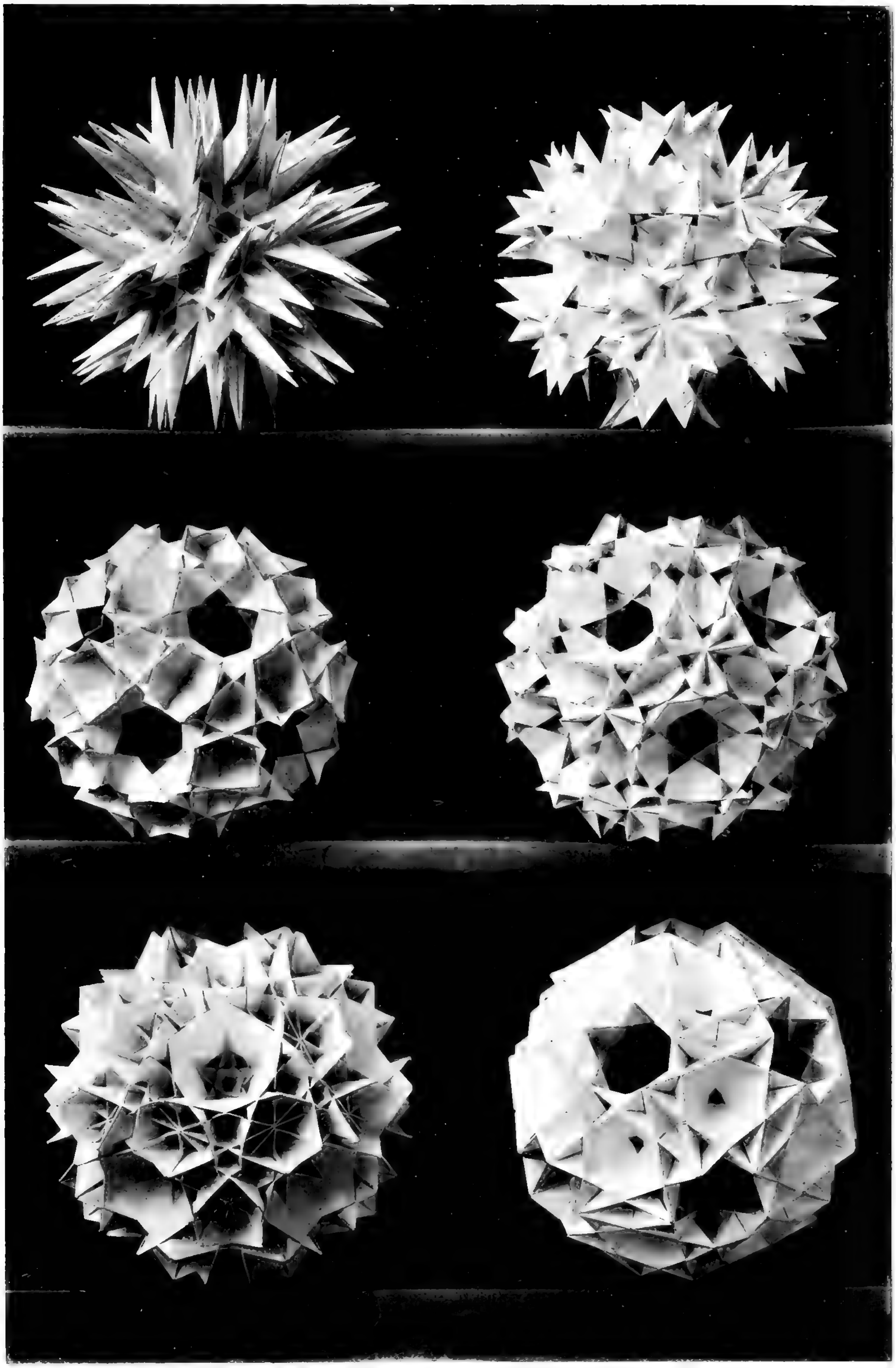
Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden.

M. Brückner: Polyeder. Taf. 27.



M. Brückner del. Lichtdruck v. Römmler & Jonas, Dresden

M. Brückner: Polyeder. Taf. 28.



M. Brückner del. Lichtdruck: Römmler & Jonas, Dresden.

M. Brückner: Polyeder. Taf. 29.

NOVA ACTA.
Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher
Band LXXXVI. Nr. 2.

Vergleichend-morphologische Studie

über die

coxopleuralen Körperteile der Chilopoden,

mit besonderer Berücksichtigung der Scolopendromorpha, ein Beitrag zur Anatomie und Systematik derselben, nebst physiologischen und phylogenetischen Mitteilungen und Ausblicken auf die Insekten.

Von

Dr. Karl W. Verhoeff (Dresden-Striesen).
Aus dem Berliner zoologischen Museum (Museum für Naturkunde).

Dazu 44 Textabbildungen.

Eingegangen bei der Akademie am 11. Januar 1906.

HALLE.
1906.
Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.

Inhalt.

Vorbemerkungen.

Die *Hüftgebilde* der *Chilopoden* sind in der letzten Zeit von mir mehrfach behandelt worden, teils mit Rücksicht auf die Laufbeine, teils mit Rücksicht auf die Mundfüsse. Ich nenne folgende Arbeiten:

1. Beiträge zur Kenntnis paläarktischer Myriapoden. XVI. Aufsatz: Zur vergleichenden Morphologie, Systematik und Geographie der Chilopoden. Abh. kais. deutschen Akad. d. Naturforscher, Halle 1901, Bd. LXXVII Nr. 5, I. Abschnitt: Über die Gliederung der Chilopoden-Beine, der Mundteile und der Kopfkapsel.

2. Beiträge zur vergleichenden Morphologie des Thorax der Insekten mit Berücksichtigung der Chilopoden. Daselbst Bd. LXXXI Nr. 2, 1902. (Insbesondere sei auf Taf. IX verwiesen, Lithobius.)

3. Über Tracheaten-Beine. 6. Aufsatz: Hüften und Mundbeine der *Chilopoden*. Archiv f. Naturgesch. 1904, Bd. I H. 2, S. 123—156.

4. Über die Entwickelungsstufen der Steinläufer *Lithobiiden* und Beiträge zur Kenntnis der Chilopoden. Zoolog. Jahrbücher 1905, Suppl. VIII, Festschrift für K. Möbius. — Besonders sei hier verwiesen auf Abschnitt 4 des II. Teiles, S. 238 und S. 243—245.

Namentlich in den Aufsätzen Nr. 3 und 4 habe ich dargelegt, dass eine befriedigende Einsicht in die Beschaffenheit der *Chilopoden-Hüftgebilde* nur im Zusammenhang mit einer Betrachtung der *Pleuralteile* zu erlangen ist. Die Hüfte im engeren Sinne habe ich als *Eucoxa* andern ihr benachbarten Teilen gegenübergestellt und betont, dass der Hüftbegriff im Allgemeinen verschieden ausfallen müsse, je nachdem man die Hüftnebenteile mitrechnet oder nicht und dass diese Nebenteile nach Segmenten und Familien tatsächlich erhebliche Verschiedenheiten aufweisen. „Die hypocoxalen Teile haben eine nach den Gruppen sehr verschiedene Ausbildung und es ist mit Rücksicht auf sie keine ganz scharfe Hüft-Definition zu geben, während die Hüfte im engeren Sinne und namentlich auch in Hinsicht auf die Muskulatur, Gelenkknöpfe und Leisten ein sehr deutlich umschriebener Begriff ist.“ Vielleicht das wichtigste Ergebnis meiner Untersuchungen über coxopleurale Gebilde liegt in der Feststellung, dass bei *Chilopoden* „die Entstehung der Hüften von der der Telopoditglieder grundverschieden ist, da letztere einfach durch Abschnürungen bestimmter hintereinander gelegener Teile des von Anfang an hohlkörperartigen Telopodits zur Ausbildung gelangten, während die Hüften nach und nach aus anfangs ziemlich flachen und getrennten Stücken verwuchsen und erst später mehr und mehr hohlkörperartig wurden.“

Wenn ich auch glaube in den vorgenannten Schriften die allgemeinsten Verhältnisse der *Chilopoden*-Hüftgebilde einigermassen geklärt zu haben, so ist nach dieser Richtung dennoch manches unbekannt geblieben und vor allem hat noch niemand an der Hand bestimmter Beispiele und mit Benutzung von Vertretern der vier *Chilopoden*-Hauptgruppen, sowie unter Berücksichtigung aller coxopleuralen Organteile eine *einheitliche* Darstellung derselben zu gewinnen versucht. Der Lösung dieser Aufgabe sind die folgenden Mitteilungen gewidmet.

I. Geophiloidea, Erdschlüpfer.

In meinem Aufsatze „Über die Interkalarsegmente der *Chilopoden*[1]) mit Berücksichtigung der Zwischensegmente der Insekten" habe ich bereits auf die Wichtigkeit der Interkalarsegmente der *Epimorpha* hingewiesen. Die Abb. 1 und 2 anbei von *Scolioplanes* und *Himantarium* zeigen uns zwei der wichtigsten Fälle der Ausbildung der coxopleuralen Gebiete der *Geophilomorpha* und zugleich die Sklerite der Interkalarsegmente. Die Interkalartergite sind

Abb. 1.
Scolioplanes crassipes carniolensis Verh. (Adelsberg). Ein Hauptsegment und Interkalarsegment aus der Mitte des Rumpfes auseinandergeklappt. — 60 f. Vergr.

stets stärker entwickelt als ihre Sternite, welche letzteren bisweilen ein einheitliches Querband darstellen, meistens aber in zwei Hälften zerteilt sind. Im einfacheren Falle (Abb. 1 Scolioplanes) liegen am Interkalarsegment jederseits zwei Pleurite, ein sehr grosses oberes Interkalarpleurit, das man auch als *interkalares Hauptpleurit* bezeichnen kann (*ipl*), und ein kleineres unteres *ipl 1*. Auch bei *Himantarium* (Abb. 2) fällt ein Hauptpleurit durch

[1]) Archiv f. Nat. 1903, Bd. I H. 3 S. 427—441.

seine Grösse besonders in die Augen. Dasselbe gilt für die meisten andern *Geophilomorpha*. Besonders ausgezeichnet ist das Hauptpleurit ferner durch seine Lage genau *vor* dem Stigmenschild (*stp*) welcher Träger des Stigmas

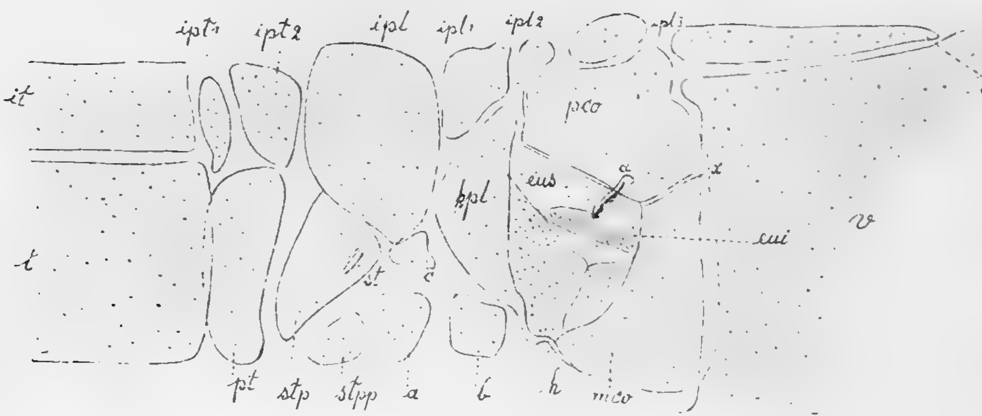


Abb. 2.

Himantarium gabrielis (L.) (Konstantinopel). Ein Haupt- und ein Interkalarsegment aus der Mitte des Rumpfes auseinandergebreitet. — 60 f. Vergr.

ist und sich seinerseits vor einem andern kleineren, dem Stigmanachschild (poststigmales Pleurit) befindet. Bei den einfacheren Grundformen der *Geophilomorpha* bilden die *drei* ungefähr in einer horizontalen Reihe gelegenen Pleurite, interkalares Hauptpleurit, Stigmapleurit und poststigmales die an die Tergite grenzende *Oberreihe*, während bei einem Teil der segmentreicheren und abgeleiteterem Gattungen, wie *Himantarium, Orya* u. a. zwischen Oberreihe und Tergiten noch besondere Sklerite eingeschaltet sind, welche bekanntlich auch mit zur Unterscheidung einiger Gattungen benutzt werden. Das vereinzelte beschränkte Vorkommnis dieser Pleurite, deren allmähliche Vermehrung von Form zu Form sich ausserdem verfolgen lässt, zeigen uns, dass es sich um Gebilde handelt, welche von R. Heymons in seiner „Entwicklungsgeschichte der Scolopender“ Stuttgart 1901 als *Paratergite* bezeichnet wurden, nämlich *Ablösungen* von der Tergiten, welche aber, wie ich gleich betonen will, bei den betr. *Geophilomorpha*, also z. B. *Orya*, weit stärker

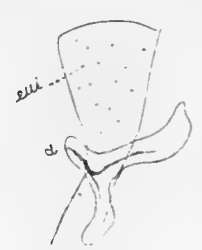


Abb. 2a.

Eine demselben Segment angehörige gegabelte *Costa coxalis* nebst anstossender *Eucoxa inferior*. — 275 f. Vergr.

und selbständiger erscheinen, als bei der von Heymons untersuchten Gattung *Scolopendra,* weshalb ich *echte Paratergite* (*Himantarium*) von *unechten* (*Scolopendra*) unterscheide. In seinem bekannten *Myriapoden*-Handbuche, Wien 1880 hat R. Latzel bei *Himantarium Gabrielis* in seiner Abb. 97 neben den Interkalartergiten 2 und neben den Haupttergiten 3 Paratergite angegeben, während ich bei H. Gabrielis aus verschiedenen Ländern nur 2+1 Paratergite beobachtet habe, d. h. neben den Haupttergiten nur *ein* Paratergit (Abb. 2 *pt.*). Übergänge zwischen den in meinen Abbildungen 1 und 2 dargestellten Fällen bilden z. B. *Bothriogaster,* wo eigentliche, selbständige Paratergite fehlen, aber nebenan am Interkalartergit ein Paratergit unvollständig abgesetzt ist und *Polyporogaster,* wo es selbständig ist, während andere Paratergite ebenfalls fehlen. Bei *Stigmatogaster* habe ich auch kein deutliches Paratergit beobachtet. Bei *Bothriogaster* fand ich ferner, dass die interkalaren Hauptpleurite vorn soweit sie dicht neben dem Interkalartergit liegen, eingebuchtet und durch Furche mehr oder weniger in zwei Zipfel geteilt sind. Ob hiermit der Beginn zu einer Teilung der Hauptpleurite gegeben ist, muss ich vorläufig dahingestellt sein lassen. (Wäre das der Fall, dann wären die unteren interkalaren Paratergite, wie sie Abb. 2 *ipt 2* vorführt, keine Paratergite sondern Parapleurite.) Die *Eucoxa* der *Geophilomorpha* ist ein kurzer, nicht vollständiger *Halb-Ring,* also ein *bogenartiges Band,* welches nach oben und hinten offen ist und nur häutig zu einem Ring geschlossen wird. Vorn befindet sich an der Eucoxa, *quer* zu dem Bandbogen gerichtet, jene mit ihr verwachsene und in die Leibeshöhle vorragende, rippenartige Leiste, welche ich als *Hüftrippe* oder *Hakenleiste,* Costa coxalis, schon mehrfach bei *Chilopoden* beschrieben habe. An der Stelle, wo die Hüftrippe mit der *Eucoxa* verwachsen ist, befindet sich äusserlich eine Längsfurche. Am Eucoxa-Endrande springt die Hüftrippe in einen Zapfen vor, welcher an der Bildung des Gelenkknopfes des Coxo-Telopodit-Gelenkes teilnimmt. Grundwärts gabelt sich die Hüftrippe in zwei *Fortsätze,* welche beide nach vorn gerichtet sind und zwar der grössere schräg nach unten (*a* Abb. 1), der kleinere schräg nach oben. Die inneren Enden beider *Costa*-Zweige *befinden sich oberhalb der Procoxa und weit getrennt vom Sternitseitenrande.* Überhaupt lagert die Eucoxa der *Procoxa* stärker an als der *Metacoxa. Durch die Verwachsungs-*

linie der Eucoxa und *Costa coxalis* wird *die Eucoxa bei allen Chilopoden in zwei Abschnitte abgesetzt,* von denen der eine, welchen ich *Eucoxa superior* nenne, mehr oben und vorn liegt, der andere, *Eucoxa inferior,* mehr unten und hinten. Die *Eucoxa* wird innerhalb der *Geophilomorpha* mehr oder weniger deutlich vom Sternit-Seitenrande getrennt durch zwei wulstige Kissen. Bei *Scolioplanes* Abb. 1 z. B. ist diese Trennung nur gering, bei *Himantarium* Abb. 2 viel bedeutender. Die beiden wulstigen Kissen, welche ich 1904 als *Hypocoxa* zusammengefasst habe, übertreffen die Eucoxa bedeutend an Ausdehnung und *umschliessen* sie mehr oder weniger vollständig, zusammen mit einem dritten Gebilde *kpl,* welches sich oberhalb der Eucoxa befindet. Man kann diese drei Teile auch als *Pericoxa* zusammenfassen. Elastische Häute und chitinige Stränge halten diese drei Teile zusammen. Sie bilden in ihrer Gesamtheit einen *Schutz* für die Eucoxa und zugleich die elastische Verbindung mit dem Rumpfe. Die Schwäche der *Eucoxa* der *Geophilomorpha* entspricht der Kleinheit und Schwäche ihrer zum Ersatz dafür desto zahlreicheren Beinchen. Die mehr oder weniger deutliche Trennung der *Eucoxa* von dem Sternit bringt also eine verhältlich *hohe Lage* der ersteren mit sich und zugleich einen Gang, bei welchem die *Bauchfläche* besonders leicht einer *Reibung* an der Unterfläche ausgesetzt ist. Das gegenseitige Grössenverhältnis von *Procoxa* und *Metacoxa* unterliegt, wie schon die Abb. 1 und 2 erkennen lassen, bedeutenden Verschiedenheiten, doch kann man sagen, dass im allgemeinen an typischen Laufbeinsegmenten beide Hüftteile stets eine beträchtliche Grösse bewahren. Das oberhalb der Eucoxa gelegene, den *Übergang* von ihr und der Hypocoxa zum *Eupleurium* bildende Sklerit, welches ich als *Katopleure* schon mehrfach erörtert habe, zeigt innerhalb der *Geophilomorpha* ebenfalls namhaft verschiedenes Verhalten, indem es bald (Abb. 1 *Scolioplanes*) mehr nach oben abgerückt erscheint und daher den Charakter eines typischen Pleurit hat, bald (Abb. 2 *Himantarium*) mit der Hypocoxa zusammen wie ein mehr einheitlicher ringartiger und wulstiger Wall die Eucoxa umgibt (Pericoxa typisch). — Zwischen diesen *coxalen Organen* einerseits und der geschilderten *Oberreihe* des Eupleurium andererseits befindet sich nur Pleuralhaut, dagegen lagern weiterhin noch zwei bis mehrere *Eupleurium*-Sklerite. Meistens findet man zwei derselben (Abb. 1a und b) und dann liegen sie gerade über einander, zwischen poststigmalem Sklerit und Metacoxa. Mit den zu 1—2 vorhandenen unteren Pleuriten des Interkalarsegmentes bilden sie ein oder zwei Eupleurium-*Unterreihen*. Zwischen Interkalarsternit und unterstem Pleurit (*ipl 2* Abb. 2) kann noch ein Sklerit vorkommen, *ipl 3*, welches wahrscheinlich ein der Hypocoxa der Hauptsegmente vergleichbares interkalares Gebilde vorstellt, übrigens bei *Scolioplanes* (Abb. 1) mit den interkalaren Sternithälften verwachsen ist. Auf die oberhalb der Metacoxa gelegenen hinteren Pleurite *a* und *b* werden wir weiterhin zurückkommen. Jetzt sei nur noch erwähnt, dass sich hinter der Eucoxa ein ausgedehnter häutiger Bezirk vorfindet (*h* Abb. 2), welcher dadurch veranlasst wird, dass die Beine, wenn sie nach Beendigung der jedesmaligen Vorwärtsbewegung des Körpers mit dem Rumpfe in Berührung kommen, namentlich hinten am Grunde gegen den Rumpf gedrückt werden, sodass die Körperwandung hier besonders biegsam sein muss, um dem Andrängen nachgeben zu können.

Die coxopleuralen Gebilde der *Geophilomorpha* sind zuerst eingehender beschrieben und abgebildet worden durch F. Meinert im ersten Teil seiner Myriapoda Musaei Hauniensis; etwas deutlicher dargestellt wurden sie durch R. Latzel 1880 in seinem Handbuch über die Myriapoden der österreichisch-ungarischen Monarchie. Später sind sie noch mehrfach bei bekannten und neuen Formen in ähnlicher Weise von mehreren Forschern berücksichtigt worden, wobei aber die Behandlung der *Geophiliden* in dem Buche A. Berleses „Acari, Miriapodi e Scorpioni italiani“ Latzel gegenüber einen Rückschritt darstellt. Neuerdings erschien C. Attems „Synopsis der Geophiliden“ in den zoolog. Jahrbüchern 1903, 18. Bd. 2. Hft., wo sich der Verfasser im Kapitel „Rumpf“ folgendermaassen äussert S. 61: „An die Ventralplatten grenzen jederseits zwei Platten an, die ich ventrale Pleuren nenne; jede ist ungefähr dreieckig, und sie umgreifen die Ventralseite der Beinbasis. Ihre Deutung ist eine verschiedene, Verhoeff will sie als Hüften aufgefasst wissen, doch spricht ihre Gestalt, flächenhafte Gebilde, welche auf grosse Strecken hin die Körperwandung bilden, ebenso wenig dafür wie der Umstand, dass das erste Beinglied nach meiner Auffassung (zweites Glied nach Verhoeff) aus zwei Halbringen zusammengesetzt ist, was bekanntlich schon lange als typische Form der *Chilopoden*-Hüfte erkannt wurde, nie dagegen beim Trochanter oder zweiten Glied beobachtet wurde.“

Eine derartige Schilderung meiner Anschauungen ist nur möglich, wenn Attems meine betreffenden Arbeiten, also insbesondere den zwei Jahre *vor* seiner Synopsis veröffentlichten XVI. Aufsatz meiner „Beiträge“ u. s. w. entweder überhaupt nicht oder nur oberflächlich angesehen hat, denn dass ich die *Eucoxa* als „zweites Glied“ aufgefasst hätte, ist ebenso unrichtig wie die Behauptung, ich hätte die „ventralen Pleuren“ (= *Hypocoxa mihi*) „als Hüften“ bezeichnet. Nicht minder unrichtig ist die Behauptung, dass diese Teile „flächenhafte Gebilde“ vorstellten, da es sich in Wirklichkeit um hohle, gewölbte Wülste handelt, welche mit der Gestalt von Muschelschalen einige Ähnlichkeit haben. Endlich bringt Attems die alte Latzelsche Anschauung von den „zwei Halbringen“ der Eucoxa wieder, welche ich bereits 1901 abgetan hatte. Er zeichnet in seiner Abb. 43 (50. Segment von Geophilus electricus) unter „*c*“ auch ganz deutlich zwei vollkommen getrennte Halbringe, daher es so aussieht, als wenn es keine *Costa coxalis* gäbe.[1]) 1901 habe ich aber z. B. auf S. 380 ganz ausdrücklich über die „vier Abschnitte“ gesprochen, aus welchen „nach meinen Untersuchungen die Hüften der Laufbeine der *Scolopendriden* bestehen“, sodass jedes Missverständnis ausgeschlossen war. Ausserdem sind auf Taf. XV in Abb. 12 und 13 entsprechende Teile eines Geophilomorphen (Mecistocephalus) zur Darstellung gebracht worden

Es ist also bisher nicht nur kein eingehender Versuch gemacht worden, die coxopleuralen Körperteile der *Chilopoden* durch vergleichend-anatomische Untersuchung einheitlich aufzufassen, sondern es sind auch bis in die neueste Zeit die Hüften der *Geophilomorpha* sowohl als auch der anderen Ordnungen nicht genügend klargestellt worden.

[1]) In seiner nebenstehenden Abb. 42 hat er für das Kieferfusssegment des *G. electricus* ein ganz selbständiges Sternit gezeichnet, was ebenfalls auf einem Irrtum beruht.

II. Scolopendromorpha, Skolopender.

a) Bau der typischen Rumpfsegmente bei verschiedenen Gattungen.

Die Coxopleuralteile zeigen innerhalb der Skolopender-Gruppen bedeutende Verschiedenheiten. Ich kann hier nicht auf alle bekannten Gattungen eingehen, aber immerhin soll die Mehrzahl derselben berücksichtigt werden. Bisher hat auf diesem Gebiete bis in die neueste Zeit ein geradezu erstaunliches Dunkel geherrscht, was um so merkwürdiger ist, als man bei den *Scolopendriden* besonders über die geringe Zahl brauchbarer systematischer Handhaben klagte, und wiederholt eifrig nach bedeutsamen Organisations-Unterschieden gesucht worden ist. Latzel sagt auf S. 137 seines Handbuches: „Bei der Gattung *Cryptops* sind die Pleuren, welche bei *Scolopendra* zum allergrössten Teile noch ziemlich weich und faltig bleiben und nur am letzten Segmente eine mächtige, schildartige Entwicklung zeigen, bereits an allen Segmenten in einzelne Schildchen von bestimmter Lagerung, Form und Anzahl differenziert.“ Dazu gibt er seine Abb. 51, welche die wichtigsten coxopleuralen Gebilde erkennen lässt, doch ist die Eucoxa wenig deutlich und die Costa fehlt. Bei *Scolopendra* sagt er S. 139 nur „die Pleuren sind sehr faltig und zähhäutig, am letzten Segmente schildartig.“

1887 in den „indisch-australischen Myriopoden“ I. Chilopoden, S. 9 schreibt E. Haase: „Bei den Scolopendriden bilden sich die Pleuralschilde besonders in den Gattungen *Cryptops* und *Cormocephalus* aus.“ S. 38: „Von den Pleuralschilden (der Scolopendriden) sind besonders die vorderen, die episternalen, stark entwickelt, die hinteren, die epimeralen, seltener. Zwischen den Rücken- und Bauchplatten entstehen noch oft besondere Schildchen, welche ursprünglich Faltungen der Weichenhaut (Pleura) entsprechen und erst bei den *Geophiliden* festere Umgrenzung und damit grössere morphologische Wichtigkeit gewinnen.“ (Wir werden sehen, dass das letztere durchaus unrichtig ist, da deutlich umgrenzte Pleurite in mehr oder weniger grosser Zahl auch bei *Scolopendromorpha* überall vorkommen.) Bei *Scolopendra* S. 41 sagt er nur: „Pleuren vorn weich, sehr faltig, nach hinten zu schildartig ausgebildet." — In seiner Abb. 3 und 4 sind die vordersten Rumpfsegmente von *Scolopendra subspinipes* und *Cormocephalus aurantiipes* ausgebreitet dargestellt, wobei aber die coxopleuralen Teile so unvollständig und unrichtig zur Anschauung gelangen, dass ich nicht näher darauf einzugehen brauche.

In seiner „Revision der *Scolopendriden*", Hamburg 1903, klagt Kräpelin über die „Schwierigkeiten", welche nach ihm „in erster Linie in den Objekten selbst mit ihrer ungemein gleichartigen Ausbildung fast aller charakteristischen Organe" liegen sollen. Nach meinen Untersuchungen sind allerdings auch Schwierigkeiten vorhanden, aber sie liegen *nicht* allein in den Objekten, sondern auch darin, dass die bisherigen *Forscher* die Schwierigkeiten hinsichtlich der Beurteilung der Organisation erst zu einem geringen Teil überwunden haben. Die Objekte selbst sind durchaus nicht „ungemein gleichartig". Kräpelin hat seine Untersuchungen offenbar vorwiegend mit der Lupe angestellt, eine Methode, welche höchstens bei den Riesenformen gestattet werden kann. Daraus erklärt es sich aber auch, dass er auf S. 15 z. B. sagt: „Da die Chitinhaut, welche Rückenplatten und Bauchplatten verbindet, *nicht*, wie bei den Geophiliden, eine Anzahl stärker chitinisierter und daher scharf abgegrenzter Plättchen oder „Pleuralplatten" enthält, so eignet sich die Skulpierung der Seitenteile in den Rumpfsegmenten nur wenig zur Gewinnung ausgeprägterer Merkmale." —

Nach meinen Untersuchungen bieten uns die coxopleuralen Gebilde der *Scolopendromorpha* eine *Mannigfaltigkeit* dar, welche derjenigen der *Geophilomorpha* durchaus nicht nachsteht. Im ganzen genommen ist wohl ein Teil der betreffenden Gebilde der *Skolopender* weniger auffallend als bei jenen, aber das ist einerseits bei manchen Gattungen wie *Ethmostigmus, Cryptops* und *Trigonocryptops* überhaupt nicht der Fall, andererseits ist das jedenfalls kein Grund, diese Gebilde unberücksichtigt zu lassen.

Die *Eucoxa* der *Skolopender* ist mehr ausgestaltet als die der *Geophilomorpha.* Vor allem finden wir nicht einen Halbring wie dort, sondern durch Ausbildung eines hinter der *Eucoxa inferior* gelegenen, meist sichelartig gestalteten Stückes, welches ich *Eucoxa posterior* nenne, ist ein *drei*

Viertel-Ring entstanden, d. h. die Umgebung des Telopoditgrundes erscheint höchstens noch zu einem Viertel häutig und diese Strecke befindet sich hinten oben (Abb. 19, 24, 25). Ausnahmslos umgreift das obere Ende der *Eucoxa* ein gebogenes Pleurit von mehr oder weniger sichelartiger Gestalt und wölbt sich häufig wulstartig vor, sodass das obere *Eucoxa*-Ende mehr oder weniger in die Tiefe sinkt. Es handelt sich um die *Katopleure,* welche nach Gestalt und Lage sich als homolog ergibt derjenigen *Katopleure,* welche ich in der Arbeit Nr. 2 von *Lithobius* beschrieben habe. Aber auch der oben von den *Geophilomorpha* genannten *Katopleure* entspricht dieses Sklerit, da es die *Eucoxa* von oben umgibt und auch zur Hypocoxa die gleiche Lage einnimmt. Das obere Ende der *Eucoxa* kann nun bei *Scolopendriden* bemerkenswert verschiedene Ausbildung erfahren, indem sich dort *entweder* ein einfacher Bogen oder ein umgebogener Zipfel befindet, so bei *Cryptops* Abb. 4δ, *Theatops* Abb. 23 und 24, *oder* der umgebogene Zipfel mehr oder weniger deutlich von der *Eucoxa superior* abgesetzt ist, so bei *Newportia* Abb. 26, *Scolopendra subspinipes* und *Alipes multicostis* Abb. 30, *oder* ein ganz selbständiges kleines Sklerit auftritt, welches nach oben als *Zapfen gelenkig* in die Konkavität der Katopleure eingreift, nach unten zu verbreitert und schwächer ist und vorn ein Grübchen besitzt, in welches das verschmälerte obere Ende der *Eucoxa superior* gelenkig eingreift, so bei *Cormocephalus* Abb. 25 und *Rhysida* Abb. 29. Einen Übergang zu der letzteren Erscheinung bildet *Ethmostigmus trigonopodus*, indem bei dieser Form oben an der Eucoxa ein Zapfen in die Katopleuren-Höhlung eingesenkt ist, aber das zugehörige oberste Stück noch nicht vollständig sich von der *Eucoxa superior* abgelöst hat. Endlich zeigt uns noch *Trigonocryptops gigas* (Krpl.) Abb. 21 und 22 einen merkwürdigen Fall. Hier ist nämlich eine sehr deutliche Zweiteilung der Katopleure erfolgt, die Teilhälften sind offenbar etwas gegen einander drehbar, — was geschehen wird, wenn das Bein stark emporgezogen wird — und unter der Trennungsnaht befindet sich ein längliches Sklerit, welches ganz *selbständig zwischen Katopleure und Eucoxa liegt.* Trotzdem wird aber, im Gegensatz zu den durch *Cormocephalus* vertretenen Fällen, der Gelenkhöcker, mit welchem die *Eucoxa* an die Katopleure stösst (Abb. 22), von der *Eucoxa* selbst gebildet und nicht von dem Zwischensklerit. Der Gelenkhöcker bildet übrigens vorn auch eine schwache Gelenkverbindung mit der Procoxa und trennt diese von dem Zwischenstück.

Bei den *Geophilomorpha* kommt ein solches Zwischenstück überhaupt nicht vor, dagegen habe ich bei *Lithobius* 1902 in den Nova Acta ein mit der Eucoxa in näherem Verband stehendes, oberhalb der Eucoxa superior befindliches Sklerit als *Coxopleure* beschrieben. Auch bei *Lithobius* springt die *Coxopleure* nach oben mit einem Lappen gegen die Katopleure vor, sie ist aber im übrigen grösser als das Zwischenstück der Skolopender und der Katopleure nicht so stark genähert. Obwohl sie auch kein eigentliches Gelenk mit der Katopleure bildet, sondern nur ein Widerlager in dieser findet, wenn sie sich ihr unter Zusammendrängung der Zwischenhaut nähert, so liegt doch auf der Hand, dass das Zwischenstück der Coxopleure der *Lithobiiden* homolog ist und daher auch gleich zu bezeichnen. Was soeben über die Verschiedenheit der Ausbildung dieser Coxopleure der *Scolopendromorpha* gesagt wurde, zeigt schon, dass dieselbe sich innerhalb dieser Ordnung *als eine allmähliche Ablösung von der Eucoxa darstellt,* nach der Ablösung aber verschieden verhalten kann.

Die *Procoxa* und *Metacoxa* zeigen hauptsächlich zwei Ausbildungsweisen. In dem *ersten* Falle sind sie an Grösse einander ungefähr *gleich* und stossen neben dem mittleren Teile des Seitenrandes ungefähr in einem Punkte, zugleich mit der Eucoxa an einander; so bei *Cryptops* Abb. 3 und 4 und *Trigonocryptops* Abb. 21. Im *zweiten* Falle übertrifft die *Procoxa* mehr oder weniger stark an Ausdehnung die Metacoxa und die *Eucoxa* grenzt auf breiterer Strecke dicht an den Sternitseitenrand, sodass also Pro- und Metacoxa breit von einander getrennt sind. Das stärkere Überwiegen der Procoxa kann uns nicht verwundern, nachdem wir gesehen haben, dass bereits bei den *Geophilomorpha* die Eucoxa sich mehr der vorliegenden Procoxa andrängt. Bemerkenswert ist die *Gliederung,* welcher sowohl die Pro- als auch Metacoxa anheimfallen kann. *Die Gliederung der Procoxa* besteht meist in einer *Dreiteilung,* die durch Furchen hervorgerufen wird, welche hinter der *Eucoxa superior* beginnen und deren obere nach vorn zieht, während die untere meist schräg nach vorn und unten gegen das Sternit gerichtet ist, so bei *Otocryptops* (Abb. 19) und *Cormocephalus* (Abb. 25), daher wir eine *Procoxa superior, media* und *inferior* zu unterscheiden haben.

Bei *Cryptops* (Abb. 3 und 4) handelt es sich nur um eine Zweiteilung, also *Procoxa superior* und *inferior*, wobei aber auffällt, dass die obere *Procoxa* besonders scharf abgesetzt ist und mit einem oberen Fortsatz gegen den oberen Bogen der *Eucoxa superior* zieht, mit ihr ein schwaches Gelenk bildend. Die *Metacoxa* kann einfach sein, so an den hinteren oder auch allen Segmenten von *Cryptops* (Abb. 3), ferner bei *Theatops* (Abb. 23) und *Newportia* (Abb. 26) in *zwei* hinter oder übereinander gelegene Teile zerschnürt, wie bei *Otocryptops* (Abb. 19), *Cormocephalus* (Abb. 25) und *Scolopendra* (Abb. 6) oder in noch mehr Stücke zerlegt, wie bei manchen Segmenten von *Trigonocryptops* Abb. 21 und 27. Übrigens befindet sich an den Sternit-Hinterecken noch ein besonderes, immer durch eine Längsreihe kurzer Tastbörstchen ausgezeichnetes Plättchen, welches ich in der Arbeit Nr. 4 auf S. 238 bereits als *Suprasternalsklerit* erwähnt habe. Es ist manchmal schwer zu entscheiden, ob es dem Sternit oder der Metacoxa zuzurechnen ist, und will ich weiter unten darauf zurückkommen. Bei manchen *Scolopendriden* tritt an der *Procoxa* eine mehr unregelmässige *Runzel-Furchung* auf, so z. B. in der Vorderhälfte der unteren und mittleren Procoxa bei *Otocryptops rubiginosa* (Abb. 19) und *Scolopocryptops miersii*, während bei *Rhysida longipes* (Abb. 29) die ganze Procoxa durch Runzel-Furchung gegliedert ist. Parallele Erscheinungen treten auf an der Katopleure und dem *vorderen und hinteren Drittel der Sternite* (Abb. 19 und 29), wo es sich hauptsächlich um quere Furchen handelt. Die Procoxa von *Trigonocryptops gigas* (Abb. 21) ist auffallend durch den vorn erweiterten untersten Abschnitt.

Wir kommen jetzt zu denjenigen Pleuralgebilden, welche sich ausserhalb der *Eucoxa* und *Pericoxa* noch in der Pleurenhaut zerstreut finden und wollen, anschliessend an die *Geophilomorpha* zunächst *Cormocephalus* ins Auge fassen (Abb. 25). (Sehr ähnlich ist auch *Trachycormocephalus mirabilis* Porat.)

Cormocephalus büttneri Krpl. besitzt ein so reich gegliedertes Pleuralgebiet, dass selbst viele *Geophiliden* dagegen zurückstehen und wenn man glauben sollte, bei dieser Form fände sich das nur deshalb, weil ihre Pleuralsklerite zarter Natur sind, so will ich gleich noch *Ethmostigmus trigonopodus* anführen, dessen Pleuralgebilde sehr ähnliche Beschaffenheit, zugleich aber auch stärkere Konsistenz zeigen, im Verhältnis zur Körpergrösse ähnlich den typischen Verhältnissen bei den *Geophilomorpha*.

Cormocephalus besitzt, ähnlich Himantarium (siehe oben), eine Oberreihe und zwei Unterreihen. Vor allem fällt auf eine grosse und namentlich recht langgestreckte Anopleure in der oberen Unterreihe (Mittelreihe). Sie wird flankiert oben und unten von einem etwas schmäleren und kürzeren Pleurit, sodass wir *obere, mittlere und untere Anopleure unterscheiden können.* In der Oberreihe haben wir also 1. Nachstigmenplatte, 2. Stigmenplatte, 3. Vorstigmenplatte (hintere Oberanopleure), 4. obere Anopleure, 5. oberes Interkalarpleurit. In der oberen Unterreihe finden sich noch drei Platten ausser der Haupt-Anopleure, nämlich zwei hintere Pleurite und ein kleines Interkalarpleurit. In der untersten Reihe haben wir nur die untere Anopleure, doch können bei manchen Formen hinter der Katopleure noch ein oder mehrere recht kleine Pleurite auftreten. Die hinter den oberen und mittleren Anopleuren gelegenen vier Pleurite, Stigmenschild, Poststigmal- und zwei Substigmalplatten (Abb. 25 *a, c, stp* und *stpp*) sind in den stigmentragenden Segmenten nicht überall gleich gross, namentlich ist *c* meistens kleiner als in dem Fall der Abb. 25, nämlich von ungefähr gleicher Grösse mit *a.* Über die starke Entwicklung der vorderen Substigmalplatte *c* in den *stigmenlosen* Segmenten vergleiche man das weiter unten bei *Theatops* mitgeteilte. Ein kleines Sklerit kann namentlich in den stigmenlosen Segmenten auch noch unterhalb der Platte *c* auftreten. Diese 4—5 Pleurite (Abb. 25 *stp, stpp, a* und *c*), welche ich oben auch von den *Geophilomorpha* namhaft gemacht habe, zu denen bei manchen Skolopendern noch einige weitere kleine Sklerite hinzukommen können, fasse ich als *peristigmatische* oder kurz *Peripleuren* zusammen, d. h. also *die Pleurite des Eupleurium nach Abzug der Katopleuren und der Anopleuren.* Bei manchen anderen *Scolopendromorpha* wie namentlich *Scolopendra* (Abb. 6) oder auch *Otocryptops* (Abb. 19) ist das *Eupleurium* viel häutiger beschaffen, weil die Pleurite viel geringere Entwicklung zeigen. Zum Vergleiche mit den *Geophilomorpha* sind daher Formen wie *Cormocephalus* und *Ethmostigmus* besonders geeignet und wertvoll. Im Vergleich mit den *Geophilomorpha* begegnen uns bei *Cormocephalus* aber dennoch bedeutende Unterschiede, welche zunächst die Interkalarsegmente betreffen. Zwar sind diese auch bei *Cormocephalus* noch gut entwickelt, aber doch nicht in der Stärke, wie sie bei den *Geophilomorpha* allgemein beobachtet wird. Die Tergite sind sehr scharf begrenzt, kräftiger als bei *Scolopendra,* aber bei gewöhnlicher Haltung dieser Tiere von aussen auch nicht deutlich wahrzunehmen, jedenfalls grösstenteils versteckt unter der Hinterrandduplikatur der Haupttergite, ein Verhältnis, welches für die *Scolopendromorpha* als typisch gelten kann, denn selbst bei *Theatops, Newportia, Cryptops* und *Trigonocryptops,* wo die Interkalartergite am stärksten entwickelt sind, bleiben sie zum grösseren Teil verdeckt und mithin schwächer als bei den *Geophilomorpha.* Sehr deutlich ist bei *Cormocephalus* die Zwischenhaut, welche Tergit und Interkalartergit trennt. Erwähnt wurden schon zwei obere interkalare Pleurite, grössere in der Oberreihe, kleinere in der Mittelreihe des *Eupleurium* liegend. Die Sternithälften (Abb. 25) sind, wie so oft bei den Skolopendern, jederseits wieder in zwei Hälften zerschnürt, grössere aussen und kleinere innen gelegen. Vor der Procoxa befindet sich eine längliche, ziemlich grosse untere Interkalarpleure. Zwischen dieser und den oberen Interkalar-Pleuriten findet man ein grosses häutiges Feld, ein auffallender Unterschied gegenüber den durch Abb. 1 und 2 erläuterten Verhältnissen bei den *Geophilomorpha.* Ferner fällt auf, dass das sehr grosse Interkalarpleurit der letzteren, welches mehr oder weniger auch in den Bereich des Hauptsegmentes übergreift, bei *Cormocephalus* und Verwandten kein unbedingt sicheres Gegenstück besitzt, während umgekehrt die drei länglichen, über einander lagernden Anopleuren von *Cormocephalus,* welche sich zwischen Atemschild und oberen Interkalarpleuriten ausdehnen, kein Gegenstück finden bei *Scolioplanes* und *Himantarium,* indem deren grosses Interkalarpleurit dicht vor dem Stigmaschild lagert. Für die interkalare untere Pleuralplatte von *Cormocophalus* finden wir bei *Himantarium* (Abb. 2) ein Gegenstück, aber über derselben liegen hier wieder die Pleurite *ipl 1* und *ipl 2,* welche bei *Cormocephalus* fehlen. Die Pleurite *a, b, c* von *Himantarium* haben ihre Homologa in 2—3 Skleriten, welche wir bei *Cormocephalus* und *Ethmostigmus* ebenfalls hinter der Verbindungslinie von Stigma- und Katopleure antreffen. In der hinteren Hälfte des *Eupleurium* (in den peristigmatischen Pleuriten) herrscht also zwischen *Cormocephalus* und *Himantarium* weitgehende *Übereinstimmung,* sodass wir die namhaften *Unterschiede* in der Vorderhälfte in erster Linie auf Kosten der sehr verschieden starken Entwicklung des *Interkalarsegmentes* zu setzen haben. Dasselbe ist bei jenen *Geophilomorpha* ungefähr halb so ausgedehnt wie das Hauptsegment, bei diesen *Skolopendern* dagegen nimmt es nur etwa den sechsten Teil des Flächenraumes des Hauptsegmentes ein. Hinsichtlich der *Homologisierung* von *Geophilomorpha* einerseits und Skolopendern wie *Cormocephalus* und *Ethmostigmus* andererseits bin ich zu dem Ergebnis gelangt, dass *mit der Verkleinerung der Interkalarsegmente auch die grossen Interkalarpleurite abgeschwächt wurden*, sodass die Sklerite *ipl* und *ipl 1* der Abb. 2 von *Himantarium* homolog gesetzt werden können den beiden oberen Interkalarpleuriten von *Cormocephalus* (Abb. 25). *In dem Maasse, wie sich die Interkalarsegmente verkleinerten, vergrösserten sich die Hauptsegmente, sodass nun zwischen dem eine mehr nach hinten gerückte Lage einnehmenden Stigmenschild und den oberen Interkalarpleuriten für neue Sklerite Platz wurde.* Vergleichen wir die Atemschildchen der *Erdläufer* mit denen der *Skolopender*, so muss uns bald auffallen, dass die der ersteren *durchgehends viel grösser sind* als die der letzteren. Während bei den *Geophilomorpha* die Ausdehnung des Stigmas gering ist im Verhältnis zur Stigmaplatte, sehen wir umgekehrt, dass bei den *Scolopendromorpha* die Stigmaplatte, soweit sie überhaupt das Stigma enthält, im Vergleich mit dem Stigma nur einen bescheidenen Raum einnimmt (vgl. Abb. 1 und 2 mit 25, 26 und 29). Aus diesen und den oben geschilderten Verhältnissen ziehe ich den Schluss, *dass die neu auftretenden Pleurite, oder doch wenigstens das erste derselben, durch Ablösung vorn von der Stigmenplatte entstanden sind*, d. h. *die Anopleuren Abkömmlinge der Urstigmenplatten vorstellen, wie sie bei den Geophilomorpha vorkommen.*

Es ist aber noch eine *zweite Theorie* zu berücksichtigen. Man könnte nämlich von der Ansicht ausgehen, dass das Vorkommen einer selbständigen Anopleure den ursprünglichen Zustand vorstelle, eine Möglichkeit, welche zu prüfen sein wird durch weiteres Studium der *Geophilomorpha*. Dann müssten die grossen Interkalarpleurite der Erdläufer sekundär entstanden sein durch Verschmelzung eines interkalaren, oberen primären Pleurites mit einer Anopleure. Zur Zeit halte ich aber die erstere Theorie für die richtige, zumal wir sonst nirgends eine Verschmelzung von Skleriten der Haupt- und Interkalarsegmente bei den *Geophilomorpha* beobachtet haben und die im Vergleich mit diesen durchgehends schwächeren Interkalarsegmente der *Scolopendromorpha* viel eher ein derartiges Vorkommnis erwarten liessen, während wir gerade umgekehrt bei den Skolopendern ein oder mehrere deutliche, wohl umschriebene Anopleuren festgestellt haben.

Cormocephalus und *Ethmostigmus* (vergl. unten auch *Cupipes*) liefern uns aber Fälle der *stärksten* Pleuritenausprägung unter den *Scolopendromorpha*. Bei *Otocryptops* (Abb. 19) treffen wir nur eine Anopleure von ähnlicher länglicher Gestalt wie die Stigmaplatte, auch nur eine kleine obere Interkalarpleure *ipl*. Die Interkalartergite sind noch schwächer als bei *Cormocephalus* und die Sternithälften bestehen nur aus einem Stück. Dieser Fall der Ausbildung einer einzigen grösseren Anopleure ist aber bei den Skolopendern nicht selten, er gilt namentlich auch für *Cryptops* (Abb. 3 und 4) sowie *Trigonocryptops* (Abb. 21), wobei diese einzige Anopleure

Abb. 3.

Cryptops hirsutulus n. sp. Das 18. und 19. Rumpfsegment auseinandergebreitet, nebst den dazwischen liegenden Interkalarteilen. — Etwa 80 f. Vergr.

langgestreckt erscheint und bei letzterer Gattung durch Herandrängen an die Katopleure unten etwas eingebogen. Diesen beiden Gattungen gemeinsam ist auch das Vorkommen eines *Suprastigmalpleurites*, welches sich in schmaler, gestreckter Gestalt (Abb. 3 *sstp*) dicht über dem Stigma befindet, in stigmenführenden und stigmenlosen Segmenten *x*. Dahinter steht ein zweites, längliches Plättchen *stpp*. Als Paratergite können diese Pleuren, auf welche ich weiter unten zurückkomme, nicht in Betracht kommen, weil dann auch vor oder hinter ihnen entsprechende Bildungen erwartet werden müssten und weil ausserdem bei *Cryptops* und *Trigonocryptops* sehr deutliche, scharf umgrenzte Paratergite an den Tergitseiten vorhanden sind (Abb. 3

pt 1, pt 2, ipt). Die von den *Geophilomorpha* beschriebenen *Substigmalpleurite* (Abb. 1 und 2 *a b c*), welche bei *Cormocephalus* (Abb. 25 *a, c*) und *Ethmostigmus* ebenfalls gut ausgebildet sind, fehlen bei *Cryptops* (Abb. 3) und *Trigonocryptops* (Abb. 21) vollständig, bei *Otocryptops* (Abb. 19 *y*) bis auf geringe kleine Überreste. Eine *Mittelstellung* hinsichtlich des *Eupleurium* nehmen mehrere Gattungen ein, z. B. *Cupipes* und *Anodontostoma*, welche zwei längliche Anopleuren besitzen und unten näher besprochen werden. Weiterhin werde ich noch auf das Eupleurium verschiedener anderer Skolopender-Gattungen zurückkommen.

Hier werfen wir zunächst einen Blick auf das coxopleurale Gebiet der von mir bereits in der Arbeit Nr. 2 geschilderten Gattung *Lithobius*. Von den zahlreichen Pleuriten der *Geophilomorpha* zu den spärlichen der *Lithobius* führen uns durch verschiedene vermittelnde Stufen hindurch die oben geschilderten und weiter unten behandelten Gattungen der *Scolopendromorpha*, ohne dass aber eine vollständig zusammenhängende Reihe bis zu den Erdläufern vorläge. Innerhalb der *Skolopender* treffen wir eine allmähliche Abstufung der Eupleurium-Sklerite und die Reihe wird jedenfalls mit weiteren Untersuchungen auf diesem Gebiete noch geschlossener werden.

Abb. 4.
Cryptops balticus n. sp. ♀ Coxopleurale Organteile des 19. Rumpfsegmentes. — 180 f. Vergr.

Wie Abb. 3 zeigt, ist die Eucoxa von *Cryptops* im Verhältnis zur Hypocoxa immer noch klein zu nennen, aber doch schon kräftiger entwickelt als bei den *Geophilomorpha*. Pro- und Metacoxa sind stark ausgebildet und erstere besonders scharf zerlegt in Procoxa superior und inferior. Hinter der Eucoxa bemerken wir wieder das freie häutige Gebiet, welches der Beinexkursion nach hinten Raum geben soll. Die Procoxa superior *pcos* ist ein ovales bis dreieckiges Stück, welches mit einem verschmälerten Zipfel sich hinten oben an einen bogigen Wulst der Eucoxa anlehnt und ein unvollkommenes Gelenk mit ihm bildet. Die *Eucoxa* weicht von der der *Geophilomorpha* nicht unerheblich ab, indem man an ihr, wie schon kurz erwähnt, nicht zwei sondern drei Abschnitte unterscheiden kann, von denen der dritte, die *Eucoxa posterior* (*eup* Abb. 4), von der *Eucoxa inferior* deutlich durch Haut getrennt ist und in schmalem Bogen hinten um den Telopoditgrund herumgreift. Die Costa *coxalis* ist komplizierter beschaffen als bei den *Geophilomorpha,* trennt aber mit ihrer Anwachsungsstelle, die äusserlich durch eine Furche zum Ausdruck kommt, ganz wie dort Eucoxa inferior und superior. Letztere springt nach oben in einen gebogenen, schon erwähnten, der oberen Procoxa entgegen gekrümmten Wulst vor, welcher weiter nach hinten durch einen schmalen Streifen in den Bogen der Eucoxa posterior übergeht und damit nach oben die Gelenkgrube zwischen Coxa und Telopodit abschliesst. Die Eucoxa inferior erscheint von aussen beinahe viereckig und ist unten abgerundet. Die *Eucoxa inferior* berührt beinahe den Seitenrand des Sternit, so dass Pro- und Metacoxa ein wenig von einander getrennt sind. Oberhalb des umgeschlagenen Sternit-Seitenrandes findet sich innen ein länglicher Zapfen (ε Abb. 4), welchen ich als *Sternitseitenrandzapfen (Conus lateralis sterni)* bezeichne und welcher der grundwärts nach hinten umgebogenen (*α 2*) *Costa coxalis* als *Stütze* dient und unten bei Scolopendra genauer behandelt wird. Beide sind durch einen Chitinstrang *verbunden, aber gleichzeitig gelenkig gegen einander beweglich.* Am Endrande der Eucoxa bildet die *Costa* einen dreieckigen, gefurchten Zapfen *α 1*, um welchen sich der Trochanter dreht. Ausserdem stellt die *Costa* keine einfache Kante dar, sondern springt mit einem starken Fortsatz (*α*) nach innen vor. Dieser Fortsatz (*Processus costae*) ist endwärts in der Nähe der Coxo-Trochanteralgelenk-Ebene am längsten, wird aber gegen den Grund der Eucoxa immer niedriger. Die *Costa coxalis* dient Muskeln zum Ansatz und zwar teils den direkten Muskeln, welche an den Telopoditgrund ziehen, teils sternalen (vergl. Abb. 3 im 6. Aufsatz über Tracheaten-Beine, Archiv f. Nat. 1904). Der Processus costae bildet eine verstärkte *Stütze* für die Eucoxa und das auf dieser ruhende Telopodit. Die *Eucoxa* von *Cryptops* ist also *weder ein Zylinderglied noch ein vollständiger Ring,* sondern ein konkaves Band, an dessen Mitte sich innen ein mit einem Fortsatz auslaufendes Endoskelettstück ansetzt und welches vorn und hinten einen schmäleren Bogen entsendet, welche sich oben als sehr schmales Bändchen vereinigen. Der wulstige Bogen (δ Abb. 4) oben an der *Eucoxa* *superior* trennt die obere Procoxa von einem weiter hinten gelegenen Bezirk *y*, welcher kein deutliches Sklerit vorstellt, sondern grösstenteils häutiger

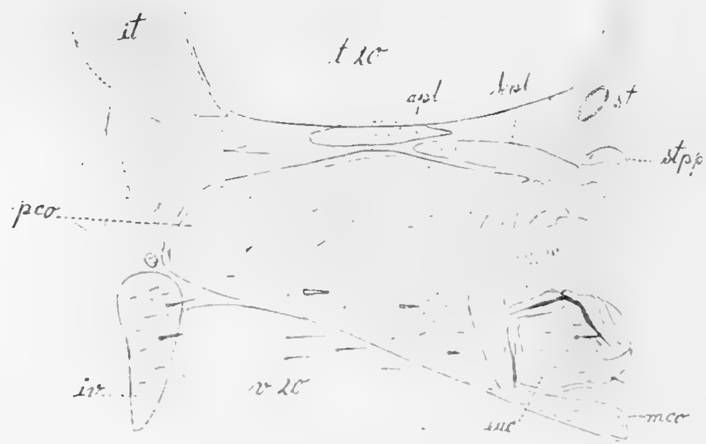


Abb. 5.
Cryptops hirsutulus n. sp. 20. Rumpfsegment, linkes coxopleurales Gebiet. — 120 f. Vergr.

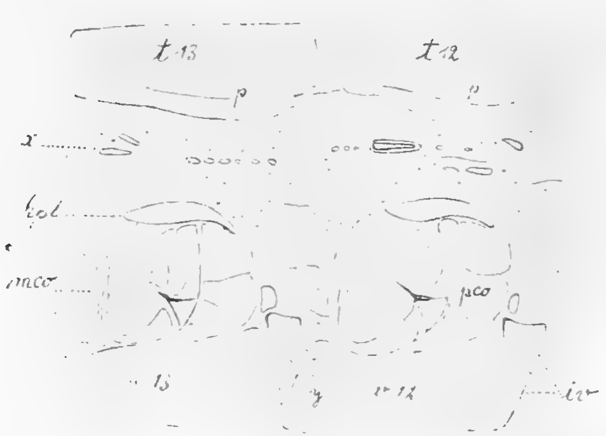


Abb. 6.
Scolopendra subspinipes Leach. Das 12. und 13. Rumpfsegment von aussen gesehen; die häutigen Bezirke sind punktiert angelegt. — Ungefähr 5 f. Vergr.

Natur ist, oben aber durch einen wulstigen Bogen abgegrenzt erscheint, so dass er den Eindruck eines hinteren Gegenstückes der oberen Procoxa hervorruft. Dieser Bezirk *y* Abb. 4 entspricht der Coxopleure von *Trigonocryptops*.

Scolopendra erscheint nach dem, was ich oben und auch weiterhin über andere Skolopender-Gattungen ausgeführt habe, als eine Gruppe mit stärkeren Rückbildungen von Eupleurium-Skleriten. An der Hand von *Scolopendra* sollen aber vor allem *Eucoxa,* Costa coxalis und Conus lateralis näher ins Auge gefasst werden.

Wir sehen in Abb. 6 und 7 an der Hand von *Scolopendra subspinipes,* dass die eigentlichen Hüftteile denen von *Cryptops* nicht sehr fern stehen, doch muss hier auffallen, dass die Eucoxa verhältlich schwächer ist als dort, obwohl sie einen noch kräftigeren, weit ins Innere vorragenden *Processus costae* besitzt (*a* Abb. 7). Auf den ersten Blick scheint die *Eucoxa* nur aus zwei Abschnitten zu bestehen, während sich deren bei genauerer

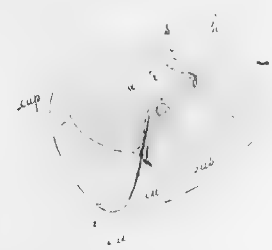


Abb. 7.

Scolopendra subspinipes. Eucoxa eines 13. Laufbeines von aussen (vorn) gesehen. (*tr* = Beintracheen). — 5 f. Vergr.

Betrachtung vier (fünf) unterscheiden lassen, jederseits der Anwachsungsstelle der *Costa coxalis* zwei, nämlich ein nur sehr schmales Stück, welches zunächst als Eucoxa inferior erscheint und eine durch Naht davon getrennte scheinbare Eucoxa posterior, ferner eine sichelartige *Eucoxa superior* und grundwärts an derselben ein dreieckiges Feld, oberhalb und vor der Anwachsungsstelle der Costa, welches ich als *Eucoxa triangularis* bezeichnen will (*en* Abb. 7). Diese Verhältnisse lassen sich bei den grösseren *Scolopendra*-Arten schon mit guter Lupe feststellen. Um aber das Verhältnis der einzelnen *Eucoxa*-Abschnitte, den genaueren Bau der *Costa coxalis* und ihre Verbindung mit den Nachbarteilen auch mikroskopisch zu prüfen, nehmen wir zunächst ein halbwüchsiges Stück von *Scolopendra cingulata,* dessen coxopleurale Teile nach Maceration schön durchsichtig erscheinen. Wir begegnen hier im wesentlichen denselben Teilen (Abb. 10) wie bei *subspinipes*, doch konnte ich jene Furche, welche die *Eucoxa triangularis* absetzt, hier nicht beobachten, aber feststellen, dass von der *Costa coxalis* nach vorn ein *Nebenast* abgeht (*α 1 d* Abb. 10), welcher so gelagert ist, dass er sich innen über dem unteren Stück der *Eucoxa superior* befindet, daher ich die Furche, welche das dreieckige Stück bei *subspinipes* absetzt, ebenfalls als einen Ausdruck dieses *Costa*-Nebenstückes betrachte, mithin als eine Ausgestaltung der *Eucoxa superior.* Die Linie *α 1 w* bezeichnet die Richtung, in welcher die *Costa coxalis* an die *Eucoxa* gewachsen ist, also auch die Grenzlinie zwischen *Eucoxa inferior* und *superior.* Hinter dieser Grenzlinie findet sich eine über dem Seitenrand des Sternit (*rr*) quer

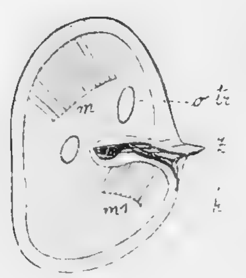


Abb. 8.

Scolopendra subspinipes. Trochanter eines Laufbeins von der grundwärtigen Fläche aus gesehen mit dem Doppelzapfen. (*otr* = obere Beintrachee.) 7 f. Vergr.

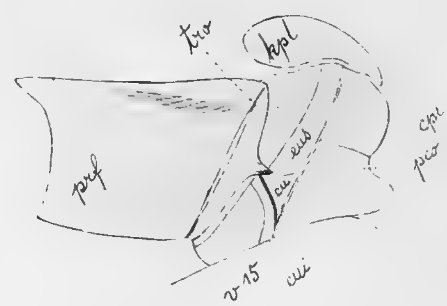


Abb. 9.

Scolopendra subspinipes. Coxalteile, Trochanter und Präfemur des 15. Laufbeinsegmentes, von aussen gesehen. — 5 f. Vergr.

in die Tiefe ziehende Naht *l*, welche ein zwischen *w* und *l* gelegenes schmales Feld abgrenzt, das wir oben vorläufig als *Eucoxa inferior* bezeichneten, welches aber ebenfalls nur ein *Teil* und eine Ausgestaltung der fast den ganzen unteren Teil der *Eucoxa* ausmachenden *Eucoxa inferior* ist, von welcher hinten dann durch einen deutlichen tiefen Einschnitt ein länglicher Lappen *x* abgesetzt ist, welcher die im Verhältnis zu *Cryptops* kleinere *Eucoxa posterior* vorstellt (Abb. 7 *eup*), von der dann oben ein langer häutiger Bogen *b* wieder nach vorn zur *Eucoxa superior* führt.

Die *Costa coxalis* ist nicht nur an sich ein nicht ganz leicht zu verstehendes Gebilde, sondern sie steht auch in merkwürdiger Beziehung zu dem schon genannten *Sternit-Seitenzapfen (Conus lateralis sterni)*, welcher bisher bei *Scolopendromorpha* ganz unbekannt geblieben ist. Auch hier bei

Scolopendra cingulata besteht eine Verbindung der *Costa coxalis* mit dem Seitenrande des Sternit in der Weise, dass sie mit ihm in ihrer Grundhälfte verwachsen ist und festgehalten wird durch eine *Haut*, welche als Fortsetzung der Seitenrandduplikatur des Sternit nach innen und oben zieht und den unteren Boden einer ziemlich tiefen *Tasche* bildet. Diese *Seitenrandhaut, Membrana conigera*, verschmälert sich gegen Vorder- und Hinterecke des Sternit und erscheint dadurch, von der Seite gesehen, annähernd dreieckig (Abb. 10 *ff 1*). Durch andere, chitinige Fasern ist das innere grundwärtige

Abb. 10.

Halbwüchsige *Scolopendra cingulata* Latr. aus Istrien. Ansicht von oben und innen auf Eucoxa, Costa coxalis und Membrana conigera (*ff 1*) eines mittleren Rumpfsegmentes, maceriert.

ng = Anwachsungsstelle des grossen, queren Coxosternalmuskels *m*.
ε = Seitenzapfen.
α, *α2*, *α3* = Hüftrippe.

140 f. Vergr.

Ende der etwas nach hinten gebogenen *Costa* auch mit Eucoxa und Hypocoxa verbunden. Die *Costa* ist bei *Scolopendra* der grösseren Tiefe der *Seitenrand-Tasche* entsprechend *viel mehr in das Körperinnere eingesenkt* und auch der *Conus lateralis sterni* befindet sich nicht, wie wir das oben bei *Cryptops* gesehen haben, dicht am Sternit-Seitenrande, sondern *tief im Grunde der Seitenrandtasche versteckt.* Das innere Ende der *Costa* zeigt sich bei *Scolopendra cingulata* in zwei Arme geteilt, von denen der eine (Abb. 10 *α 4*) die Fortsetzung der eigentlichen *Costa* bildet und sich dann im Bogen nach innen und hinten wendet, (ich nenne ihn den *Hornfortsatz*), während der andere, welcher als *Lappenfortsatz* $\alpha 3$ bezeichnet werden soll, mehr nach aussen sitzt, ohrmuschelartig gebogen und nach hinten und

Abb. 11.

Scolopendra subspinipes, erwachsen. Ansicht von oben und innen auf Eucoxa, Costa coxalis, Membrana conigera (*ff 1*) eines mittleren Rumpfsegmentes, nebst äusserem Drittel eines Sternit. x = Episternallinie. — (Schwach vergrössert.)

etwas nach innen gerichtet. *Unter* dem Lappenfortsatz, *Lobus costae,* befindet sich an seinem Grunde eine tiefe, gebräunte *Gelenkgrube i,* in welche der vordere Zipfel des *Conus lateralis sterni* eingreift. Letzterer besitzt bei

Abb. 12.

Scolopendra subspinipes, erwachsen. Ansicht von oben auf *Costa coxalis* und *Conus lateralis* eines mittleren Rumpfsegmentes. — 30 f. Vergr.

cingulata ungefähr die Gestalt eines halb eingekrümmten Fingers ε, wird vorn durch den Hornfortsatz gestützt und ist im übrigen nach hinten und aussen gebogen. *Dieser Seitenzapfen ist also gelenkig gegen die Hüftrippe beweglich,* zugleich aber doch mit ihr und der Seitentasche durch Haut *verbunden.* Der *Seitenzapfen* (Conus) ist ein eingestülptes Organ in der Sternit-Seitentaschenhaut.

Abb. 11 zeigt die in Rede stehenden Gebilde von *Scolopendra subspinipes* in ähnlicher allgemeiner Lage, aber mit auffallend anders gestaltetem *Seitenzapfen.* Ein Hornfortsatz fehlt hier oder er ist doch im Vergleich mit *cingulata* so ausserordentlich klein (Abb. 12 *z*), dass im Zusammenhang damit der *Conus* eine auffallend andere Lage einnimmt, nämlich

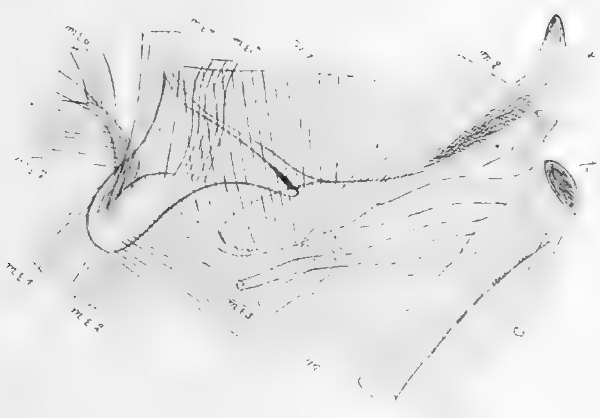


Abb. 13.
Scolopendra subspinipes. Ansicht von oben auf *Costa coxalis, Conus lateralis,* die Muskeln beider und die vor der *Costa* befindlichen Tracheenrohre *tr.* — 40 f. Vergr.

mehr nach *innen* gerichtet. Das Gelenk zwischen Hüftrippe und Seitenzapfen tritt noch deutlicher hervor, letzterer selbt aber ist nur wenig gebogen und jedenfalls ohne die starke bei *cingulata* so auffallende Aussenkrümmung. Der Lappenfortsatz dagegen bedeckt ähnlich wie dort von oben das Seitenzapfen-Gelenk. Es würde mich von meinem Thema zu weit abführen, wollte ich alle zu den im vorigen besprochenen Teilen in Beziehung stehenden Muskeln erschöpfend behandeln. Einige Muskeln aber, welche zum Verständnis der Funktion des Seitenzapfens und der Hüftrippe besonders wichtig sind, sollen hier besprochen werden. Quer über das Sternit ziehen bei *Scolopendra* sehr starke coxosternale Muskeln (*mm* Abb. 13), welche sich unterhalb des grossen Tracheenrohres befinden, welches zwei

Äste auch in das Bein-Telopodit entsendet (Abb. 8). Sie vereinigen sich aussen vor der Costa zu einer starken *Sehne* (s. Abb. 11 und 12), welche grundwärts an der Eucoxa *superior* ein wenig vor der Hüftrippe befestigt ist und zwar an einer Stelle, welche bei *cingulata* narbenartig erscheint (Abb. 10 *ng*), bei *subspinipes* durch ein kleines, ziemlich stark chitinisiertes Grübchen markiert ist (*ng* Abb. 12). Am grundwärtigen Rande der *Eucoxa inferior* sind mehrere Muskeln befestigt, welche das Telopodit bedienen, darunter auch zwei, welche am Rande des Lappenfortsatzes ausgebreitet sind (Abb. 13 *m 1* und *m 2*) und das Telopodit *heben* (vergl. auch Abb. 8 *m* und Abb. 7 *s*). Oben habe ich schon eine Naht angeführt, welche bei *Scolopendra* an der *Eucoxa inferior* zwei Abschnitte trennt, einen *schmäleren vorderen* und einen breiteren hinteren, welche wir als *vordere und hintere*

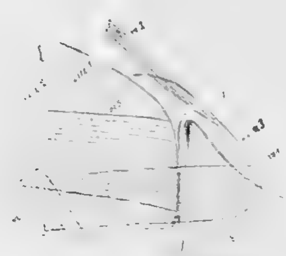


Abb. 14.
Scolopendra subspinipes. Ansicht des Conus-Coxa-Gelenkes und der benachbarten Muskeln der Eucoxa inferior. (Conus durchschimmernd.) — 30 f. Vergr.

Eucoxa inferior unterscheiden können. Ich habe mich durch direkten Versuch bei *subspinipes* überzeugen können, dass diese beiden Teile der *Eucoxa inferior gegen einander beweglich sind.* Die Nahtgrenze, welche diese beiden Abschnitte trennt, zieht ebenfalls tief in die Sternit-Seitentasche hinein und endet in der Nachbarschaft des Gelenkes zwischen Hüftrippe und Sternit-Seitenzapfen (vergl. Abb. 10, 12 und 14 *l*), etwas unter und hinter demselben. Am Grunde der *Eucoxa inferior* finden sich nun zwei Muskeln ausgebreitet, deren einer ausschliesslich an der vorderen (Abb. 14 *m 3*) und zwar gleichzeitig an der Hüftrippenhauptleiste, — deren anderer *m 4* ausschliesslich an der hinteren *Eucoxa inferior* befestigt ist. Diese Muskeln bedienen nicht nur den Trochanter, sondern es kann durch ihre Kontraktion auch die *Eucoxa inferior*-Wandung eingeknickt werden an der Nahtstelle zwischen vorderer und hinterer *Eucoxa inferior*. Im übrigen sind es *direkte* Coxalmuskeln ebenso wie die beiden bereits genannten (Abb. 13 *m 1* und *m 2*), welche am Rande des Lappenfortsatzes befestigt sind. Der *Conus lateralis* besitzt bei *Scolopendra subspinipes* etwa folgende Gestalt: Von der Seite betrachtet ist er aussen verbreitert, am Ende leicht eingebuchtet, innen mehr gleichbreit und am Ende abgerundet (Abb. 11—14). Durch Hin- und Herdrehen kann man sich bald überzeugen, dass das äussere Gebiet des Seitenzapfens hinten tief eingedrückt ist, Abb. 15 *g*, indem der untere Zipfel nach hinten kantig vorspringt *ε 2*, während der obere mehr flach und spitz ist, übrigens gebräunt und den eigentlichen Gelenkzapfen vorstellend. Abb. 15 *ε χ* zeigt den äusseren Abschnitt des Seitenzapfens im Querschnitt. Die umgebogene Ecke *ε 2* umfasst den Grund der Eucoxa inferior und das Ende der Costa. Abb. 13 zeigt die verschiedenen Muskeln des *Conus lateralis*, von denen die Muskeln *m ε 1* und *m ε 2* nach innen, *m ε 3* nach vorn ziehen, während *m ε 4* und *m ε 5* nach hinten gerichtet sind. Eine sehr starke Sehne ist am inneren Teil des Seitenzapfens befestigt und dient mehreren Muskeln (*m ε 6* und *m ε 7*), welche steil nach *oben* ziehen und den *Conus* in verschiedenen Richtungen heben können.

Hinsichtlich der *Funktion* der *Scolopender*-Hüften und ihrer Nachbargebilde habe ich folgendes feststellen können: Der *Conus lateralis* dreht sich um die *Costa coxalis* nur in *horizontaler* Richtung, so dass sich also die Drehungspunkte *ε 1* und *ε 2* der Abb. 15 bei natürlicher Lage ungefähr *über* einander befinden.

(In den Abb. 11—13 ist der Conus infolge des Deckglasdruckes der betreffenden Präparate etwas zu weit nach innen gerichtet dargestellt und von der breitesten Fläche aus gesehen. In Natur ist er etwas mehr nach *hinten* gebogen vorzustellen.) Diese horizontale Drehung der Eucoxa und zwar des inneren Teiles der Hüftrippe um den *Conus entspricht der hauptsächlichsten Bewegung der Beine*, welche in der Richtung von vorn nach hinten ruderartig erfolgt. Die auf den Beinenden lastende Körpermasse drückt, (soweit die Tiere nicht mit den Sternitflächen aufliegen), auf die Hüften und dieser *Druck* sucht dieselben in die Weichen einzutreiben. Es muss demselben also ein Widerstand entgegengesetzt werden, da die weiche Pleuralhaut zuviel nachgeben würde. Zunächst ist die *Eucoxa* eingepresst zwischen Katopleure und Hypocoxa, welche zähe, nach aussen vorgewölbte Wülste vorstellen, die mit der Festigkeit ihres Zusammenhanges sowohl als auch der Zähigkeit ihrer Bogenwölbung sich dem Eucoxa-Eindruck widersetzen. Ausserdem wird die *Eucoxa* unten festgehalten durch die oben geschilderte *Membrana conigera.* Diese hält aber gleichzeitig fest den grundwärtigen Angelpunkt der Hüfte, den Conus, welcher mit ihr und der Hüftrippe verwachsen ist. Bei stärkerem Druck würde aber trotzdem ein Hin- und Herrutschen der Hüfte und ein faltiges Zusammendrücken der *Membrana*

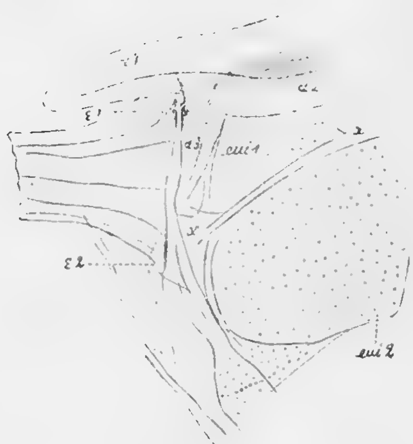


Abb. 15.

Scolopendra subspinipes. Ansicht von hinten auf die äussere Hälfte eines Conus und Nachbarteile der Eucoxa.

$\varepsilon 1$ = nach *oben* gerichtete Spitze.
$\varepsilon 2$ = untere Ecke des Conus, welche das untere Costa-Ende umfasst.
$x x$ = Naht zwischen vorderem (*eui 1*) und hinterem Stück (*eui 2*) der Eucoxa inferior.
40 f. Vergr.

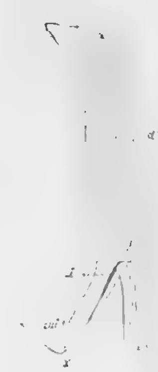


Abb. 16.

Scolopendra subspinipes. Costa coxalis.

a = Processus costae.
i = Gelenkgrube zwischen Costa und Conus.
$a 3$ = nach oben gerichteter Lappenfortsatz.
x = untere Ecke und inneres Ende der Costa.
30 f. Vergr.

conigera stattfinden können, wenn nicht der *Seitenzapfen* und mit ihm diese Haut durch die nach vorn und hinten abgehenden Muskeln, welche oben genannt wurden, *in einer bestimmten Lage festgehalten würde.* Diese bestimmte Stellung gilt aber nicht allgemein, sondern nur für jeden einzelnen Fall der Beinhaltung, sonst würden feste Gelenkpfannen erforderlich sein, wie wir sie bei den Hüften zahlreicher Insekten und *Diplopoden* antreffen. Das *Conus-Coxa-Gelenk dagegen ist ein (nach den Umständen) durch Conus-Muskulatur verschiebbares Scharniergelenk.* Wird die Hüfte und damit das ganze Bein nach vorn bewegt, so dreht es sich um das Conus-Coxa-Gelenk und der Conus selbst wird nach hinten gedrängt, während umgekehrt beim Zurückstossen der Beine (und damit Vorwärtsbewegen des Körpers) Conus und innerste Costa-Teile nach vorn bewegt werden. Die Drehung im Conus-Costa-Gelenk schliesst durchaus die Wirkung der nach vorn und hinten ziehenden Conus-Muskeln auf die Coxa nicht aus, weil beide durch Haut zäh verbunden sind.

Während das Conus-Costa-Scharniergelenk für die Beinbewegung von vorn nach hinten, d. h. für die eigentliche *Laufbewegung* der Skolopender von grosser Bedeutung ist, kommt es bei der rechtwinklig dazu verlaufenden Funktion, nämlich *dem Heben und Senken der Beine* weniger in Betracht. Am *Heben* der Beine ist, von der Telopoditmuskulatur abgesehen, besonders jener starke (aber auch beim Vorwärtsschieben der Beine mitwirkende) Muskel beteiligt (*ng* und *mm* Ab. 10 und 13), dessen Sehne an der *Eucoxa superior* unten vor der *Costa coxalis* befestigt ist (*s* Abb. 11 und 12). Für das *Senken* der Beine, vor allem demnach eine ankrallende Tätigkeit der Skolopender, wie sie beim *Anklammern* an einen Gegenstand oder dem Umklammern eines Feindes oder Beuteobjektes oder beim Halten von Eiern und Jungen in Betracht kommt, ist der *Conus* dadurch wichtig, dass er *als verlängerter Hebelarm eine verstärkte Muskelwirkung vermittelt.* Die Eucoxa dreht sich in diesem Falle um den am Coxatrochanter-Gelenk gelegenen *Processus costae* (α Abb. 10, 11 und 13) und wird mit dem inneren Teil der Costa und dem Conus zugleich gehoben durch die steil von oben kommenden Conusmuskeln, $m\,\varepsilon\,6$ und $m\,\varepsilon\,7$ Abb. 13. Würden diese Muskeln statt am Conus am inneren Costa-Teile angreifen, so würde ihre Wirkung verringert sein in dem Maasse wie der Punkt i der Abb. 10 dem Punkte α näher liegt als die Fläche bei ε. Dass bei der Klammerbewegung und der entsprechenden Hüftherabdrängung *Costa und Conus einen einzigen festen Hebel* darstellen, wird ermöglicht einesteils durch die häutige Verwachsung, andernteils durch die starke Ineinanderfügung beider Teile, indem die Conus-Gelenkecke sowohl tief eingreift als auch von oben durch den Lappenfortsatz gestützt wird ($\alpha\,3$ in Abb. 10 und 12). *Die physiologische Bedeutung des Conus lateralis sterni* liegt also darin, dass er

1. ein grundwärtiges Scharniergelenk für die *Eucoxa* bildet,

2. mit der *Eucoxa* derartig verbunden ist, dass seine Muskulatur in jedem Falle von grosser Wirksamkeit ist bei der Bewegung der Beine.

Die *Seitenzapfen* sind trotz ihrer grossen Wichtigkeit für die ventropleurale Rumpfmuskulatur dennoch bisher vollkommen unbekannt geblieben. R. Latzel hat in seinem bekannten Handbuche eine Abb. 44 von der Einlenkung des 16. Laufbeines der *Scolopendra cingulata* gegeben und die Hüfte im engeren Sinne als „teilweise unter dem Bauchschilde verborgen" liegend beschrieben. Er zeichnet auch als Andeutung der *Costa* einen gegabelten Fortsatz, ohne aber auf dessen Bedeutung einzugehen oder seine von der Beschaffenheit der übrigen Eucoxa abweichende Konsistenz zu erwähnen. Von einem Conus ist nichts gesagt worden und auch in der übrigen Literatur bin ich ihm nirgends begegnet.

Nachdem ich oben bereits vier bis fünf Abschnitte der *Eucoxa* beschrieben habe, will ich nur noch erwähnen, dass, wie aus Abb. 6 und 7 ersichtlich wird, die *Eucoxa superior* vorn weit nach oben reicht, hier mit wulstig abgerundeter Ecke umbiegt und durch häutigen Bogen hinten in die *Eucoxa* wieder übergeht. Dicht über dem oberen Ende der *Eucoxa superior* liegt eine die Hüftgrube von oben schützende, längliche und schwach sichelartig gebogene Platte, welche aber auch noch weiter nach vorn reicht und ein Stück von oben um die Procoxa herumgreift, sodass sie im Vergleich mit *Cryptops* nur als *Katopleure* in Betracht kommen kann. Die Hypocoxa ist bei *Scolopendra* deutlich entwickelt, die Metacoxa schwächer als bei *Cryptops*, überhaupt ist die Procoxa viel stärker entwickelt als die Metacoxa. Der obere, in der Regel durch eine Längsnaht abgesetzte Teil der Procoxa ist der bei *Cryptops* viel deutlicheren und selbständigeren oberen Procoxa homolog (Abb. 6). Bei *Scolopendra* erscheint also die Procoxa wie ein einziges, allerdings durch Nähte in Absätze eingeteiltes Stück. Die *Anopleure* ist bei *Scolopendra subspinipes* mehr oder weniger *verkümmert* (Abb. 6), indem man statt ihrer nur einige sehr kleine und daher weniger regelmässige Plättchen antrifft. (Vergl. aber das unten über andere Scolopendra-Arten gesagte.) Auch Atemschildchen und Nachstigmenplatte sind mehr oder weniger verkümmert (Abb. 6 x) oder nur durch sehr schwache Eupleurium-Verdickungen angedeutet. *Erkennbar bleiben aber diese Sklerite trotzdem auch bei Scolopendra subspinipes gut genug* an

1. ihrer stärkeren Chitinisierung im Vergleich mit der hyalinen Pleuralhaut, daher auch meist etwas gelblicher Färbung,

2. dem Auftreten von in gelblichen Poren stehenden, manchmal aber sehr winzigen Tastborsten,

3. der viel gedrängteren Anordnung der Porenkanäle (Abb. 17 und 18 *k* und *l*), welche ihrem nach innen gerichteten Verlauf nach teils sich nur wenig erweitern (einfache Poren *l*), und wie ich schon 1892 in der Berl. entomol. Zeitschr. hervorhob, Atemkanäle der Hypodermis darstellen, teils stärker erweitert sind (*k*) für Zellen drüsigen Charakters.

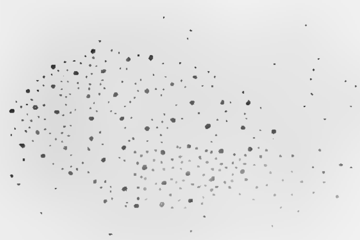


Abb. 17.

Scolopendra subspinipes. Eines der kleinen Sklerite (eines mittleren Rumpfsegmentes), welche Überreste einer Anopleure darstellen, unterhalb des Stigmas. — 60 f. Vergr.

Abb. 18.

Scolopendra subspinipes. Einige der Kanäle des in Abb. 17 dargestellten Sklerites bei 270 f. Vergr., oben von der Fläche, unten von der Seite gesehen. *k* = Kanäle, welche kleine Tastborsten führen. Oben sind bei *l* und *k* nur die weitesten Stellen der betr. Kanäle angelegt.

In der vorn genannten Arbeit Nr. 4 habe ich auf S. 238 bereits auf kleine *Artikulationssklerite* hingewiesen, welche sich zum Schutze des Coxotrochantergelenkes und zur Kräftigung der vorderen oberen Haut desselben zwischen Telopodit und *Eucoxa superior* befinden und wie bei anderen Skolopender-Gattungen, auch bei den *Scolopendra*-Arten recht deutlich sind. Abb. 7 zeigt uns zwei durch eine feine nach vorn verlaufende Linie abgesetzte Artikulationsplättchen *h*, welche im durchfallenden Lichte etwas gelblich und gegen die Linie hin blasser erscheinen. Namentlich das untere Plättchen ist mit einer Anzahl sehr kurzer Börstchen besetzt.

Die Bedeutung der Naht zwischen diesen Artikulationsplättchen ergibt sich aus dem Ansatz der Sehne *s* Abb. 7 (welche dem Muskel *m 2* der Abb. 13 entspricht) und an der Grenze von Trochanter und Artikulationsplättchen als *Heber* des Trochanters wirkt, wobei diese vordere Zwischenhaut in der Richtung der Nahtlinie zwischen den Artikulationsplättchen einknickt.

Abb. 19.

Otocryptops rubiginosa L. K. aus Japan. Seitenansicht auf das 14. beintragende Rumpfsegment nebst Interkalarsegment und die äusseren Gebiete des Sternit.
y = Reste von Substigmalplatten,
oo = häutiger Wulst über der Katopleure,
h = Gelenkhautfelder,
sps = Suprasternalplättchen.
30 f. Vergr.

Dieser Muskel wirkt also in gleichem Sinne mit den oben genannten Eucoxa-Muskeln *m 1* Abb. 13 und 14, welche am oberen Trochanterrande anziehen (Abb. 8 *m*).

Dass obere und untere *Procoxa*, welche vor der Eucoxa ein Widerlager für die Ruderbewegung der Beine nach vorn bilden, dicht an einandergedrängt sind, wurde schon oben erwähnt. Es kann aber jedes dieser Sklerite durch eine Furche wieder in Abschnitte unvollständig zerlegt sein, die obere Procoxa durch eine schräge Linie, die untere (Abb. 6) durch 1—2 abgekürzte Nähte, welche von der Zwischenhaut herkommen, welche Eucoxa und Procoxa trennt. Die *Metacoxa* ist bei *Scolopendra* entschieden viel schwächer als die *Procoxa*, und hinter ihr befindet sich das schon oben erwähnte Suprasternalpleurit. Auch die Sternithälften der Interkalarsegmente haben (Abb. 6 *y*) eine Zerlegung erfahren, indem jede Hälfte wieder in zwei neben einander befindliche Stücke zerschnürt ist.

Ein besonderes Interesse beansprucht noch die Gelenkverbindung zwischen *Eucoxa* und *Trochanter*. Es wurde schon oben erwähnt, dass die endwärtige Ecke der *Costa coxalis* durch einen weit nach innen vorragenden Processus ausgezeichnet ist. Dieser Zahnfortsatz, welcher bei der Ansicht auf die Gelenkfläche zwischen *Eucoxa* und *Trochanter* dreieckig und innen zugespitzt erscheint, besitzt eine *Längsrinne*. Der *Trochanter* dagegen (Abb. 8) ist durch einen *Doppelzapfen* ausgezeichnet, nämlich eine spitze äussere Ecke vorn *z* und einen mehr abgerundeten inneren Zapfen, welcher die innere gerade Fortsetzung des äusseren bildet und ungefähr bis zur Achse des Trochanterzylinders reicht. *Mit diesem Doppelzapfen ruht das Telopodit auf dem Fortsatzzahn der Costa coxalis* und greift auch mit einer vorspringenden, schmalen Längskante *k* in die genannte Längsrinne des Fortsatzzahnes der Eucoxa, so dass dieselbe bei der Bewegung der Beine von vorn nach hinten und umgekehrt sich wie ein gebogenes Messer in einem engen Spalt bewegt. Am Grunde des Aussenzapfens ist der Trochanter etwas eingedrückt, während sich an dem Innenzapfen unten ein Muskel befestigt, welcher an der Drehung des Telopodit beteiligt ist.

Abb. 20.

Otocryptops rubiginosa L. K. aus Japan. Gelenk (*i*) zwischen Costa und Seitenzapfen. *f* = chitiniges Band in der seitlichen Haupttasche. Stärker vergr.

Ich gehe jetzt über zur Besprechung weiterer Skolopender-Gattungen: ***Theatops (= Opisthemega):*** Die Interkalarsegmente gehören zu den grössten, welche bei *Scolopendromorpha* vorkommen, besonders die Tergite sind kräftig entwickelt. Die Sternithälften der Interkalarsegmente sind zweiteilig, die inneren Teile viel kleiner als die äusseren. Wir finden zwei Interkalarpleurite (Abb. 23), deren unteres *ipl 3* dicht neben dem Sternit anzutreffen ist, während die obere etwas höher liegt als die Katopleure. Diese oberen Pleurite sind in den stigmenlosen Segmenten grösser aber auch höher gelegen als in den stigmentragenden. Die coxopleuralen Gebilde von *Theatops erythrocephalus* sind von gelblicher Farbe, scharf umgrenzt und durch grosse, umwallte Poren sehr deutlich charakterisiert und unterschieden von der glasigen und porenlosen Zwischenhaut. — An den *Haupt*segmenten sind sehr grosse, sichelförmig gekrümmte Katopleuren entwickelt, welche vorn mit spitzem Zipfel die obere Procoxa umfassen. Die dreiteilige Procoxa ist viel grösser als die Metacoxa, von welcher ein *Suprasternalsklerit* (*sps* Abb. 23), das in zwei Hälften abgesetzt ist und die Sternithinterecken umfasst, sehr deutlich abgetrennt erscheint. Im Eupleurium finden sich unter den in einem sehr kleinen Atemschildchen liegenden Stigmen drei Substigmalpleurite *c*, ein grösseres und zwei kleine, von denen das untere bisweilen sehr schwach ist. In den *stigmentragenden* Segmenten findet man vor den Stigmen *zwei Paar Anopleuren,* eines in der Oberreihe, das andere darunter in der Unterreihe. Das obere Paar ist viel stärker als das untere und die obere vordere Anopleure (*aplsa*) wieder grösser als ihre hintere. Drei Poststigmalplatten liegen hinter dem Stigma dicht zusammen, davon unten schräg die bei weitem grösste, eigentliche Poststigmalplatte, dahinter oben noch zwei kleine Sklerite.

Sehr bemerkenswert ist diesen Verhältnissen gegenüber die Beschaffenheit der *stigmenlosen Segmente*: Während nämlich bei *Cormocephalus* (Abb. 25) die vier hinter den Anopleuren befindlichen Plättchen *a, c, stp* und *stpp* der stigmentragenden Segmente *auch an den stigmenlosen zu finden sind,* (und ebenso die vier Anopleuren), *nur mit dem Unterschiede, dass c auf Kosten von stp und stpp vergrössert ist,* zeigt *Theatops* ein *wesentlich anderes* und abweichendes Bild im Eupleurium der stigmenlosen Segmente. Im stigmentragenden Segment ragen die beiden hinteren Anopleuren nach hinten ungefähr so weit wie die Katopleure, *im stigmenlosen dagegen reicht die hintere obere Anopleure* (Anopleura superior, posterior) *bedeutend weiter nach hinten, indem sie nicht nur den ganzen Raum einnimmt, welchen das Stigmaschild beanspruchen würde, sondern auch noch bis in das Bereich des Poststigmalpleurites ausgedehnt ist,* während zwei dreieckige Poststigmalpleurite mehr nach hinten gedrängt sind und den hintersten spitzen Zipfel dieser oberen Anopleure umfassen. Substigmalplatten finden sich zwei, eine grössere oben, eine kleinere unten, während die drei übrigen Anopleuren fast mit denen der stigmentragenden Segmente übereinstimmen. Diese Tatsachen bedeuten eine auffallende Bestätigung meiner obigen Theorie der Anopleuren als entstanden aus einem Urstigmaschild, denn hier zeigt sich *die obere hintere Pleure der stigmenlosen Segmente homolog dieser und der stigmenführenden der stigmentragenden Segmente*, d. h. die obere hintere Anopleure der stigmenführenden Segmente entsteht hiernach durch Abschnürung von einem grösseren Stigmaschild.

Die *Eucoxa superior* ist mit ihrem oberen, wulstigen und fast sichelartigen Ende eingegraben in der Katopleuren-Konkavität, aber eine selbständige Coxopleure gelangt nicht zur Ausbildung.

Die *Eucoxa posterior* biegt sich sichelartig hinten um die Telopodit-Gelenkgrube, ungefähr wie bei *Cryptops.* Der *Conus lateralis* (Abb. 24 ε) ist klein, ebenso wie die Seitentasche kurz ist. Das Gelenk zwischen Costa und Conus befindet sich dicht über dem Sternitseitenrande, nicht versenkt wie bei *Scolopendra.*

Scharf abgesetzte Paratergite habe ich bei *Theatops* nicht beobachtet, dem vorderen und hinteren Drittel der Sternite aber kommt die quere, oben schon für andere Gattungen angeführte Runzelfurchung zu.

Plutonium Zwierleinii Cav.: Von allen anderen Skolopendern, welche ich untersucht habe, unterscheidet sich das Pleuralgebiet dieser Form durch das Vorkommen zahlreicher, feiner, haarartiger, ziemlich kurzer Tastborsten; und zwar sind dieselben besonders reichlich verteilt auf den Skleriten des Eupleurium, an der Hypocoxa und am Randgebiet der Tergite. Die Seitenrandhaut *(Membrana conigera)* ist ebenso wie der *Conus lateralis* kurz und letzterer ist so nach innen gerichtet, dass er ungefähr senkrecht auf der Seitenrandlinie des Sternit steht. Das Gelenk zwischen Costa und Conus liegt dicht über dieser Seitenrandlinie, an welche die Eucoxa nur auf kurzer Strecke stösst, daher denn Pro- und Metacoxa nur wenig getrennt sind. Die Procoxa ist reichlich doppelt so gross wie die Metacoxa, *jede* von beiden aber ist geteilt durch eine Naht in einen kleineren oberen und einen grösseren unteren Abschnitt. Die mondsichelförmige, ungeteilte Katopleure ähnelt der von *Theatops.* Sie springt vorn mit einer schmalen Spitze nach unten vor.

Die *Eucoxa* gleicht im übrigen der von *Theatops*, doch ist oben an der *Eucoxa superior* eine *Coxopleure* als ziemlich grosses, dreieckiges hinten zugespitztes Feld durch Naht fast vollständig abgesetzt.

Die Mehrzahl der Laufbeinsegmente, deren jedem bekanntlich ein Stigmenpaar zukommt, galten bisher für homonom segmentiert, eine Anschauung, welche eine kleine Einschränkung erfahren muss, da ich im Gebiet des Eupleurium eine namhafte Verschiedenheit nachweisen konnte, welche in alternierender Segmentfolge auftritt, analog der Stigmenverteilung bei den Formen mit zehn Stigmenpaaren. Bei *Plutonium* kommt eine grosse, längliche *Anopleure* vor, welche oberhalb der Mitte der Katopleure schmal beginnt und nach vorn breiter werdend fast bis zum Interkalarsegment zieht. Eine Andeutung einer unteren Anopleure bildet ein nur mit wenigen Börstchen besetztes Plättchen, welches vor der Katopleure liegt und unter der Vorderhälfte der grossen Anopleure. Eine ziemlich grosse, längliche Substigmalplatte findet man hinter der Katopleure. Dem Interkalarsegment kommt zu ein ziemlich grosses Tergit, zweiteilige Sternithälften und zwei Paar Pleuriten, obere und untere, ähnlich denen von *Theatops*. Auch die Suprasternalplättchen an den Hinterecken der Hauptsternite, undeutlich zweiteilig und mit Börstchenlängsreihe, erinnern an die der vorigen Gattung. Die *Stigmenplatten* von *Plutonium* aber sind viel grösser als die von *Theatops* und in ihrer Nachbarschaft macht sich die angedeutete *Heteronomität* der abwechselnden Segmente bemerkbar. An einigen Segmenten nämlich, so z. B. dem 9., 11., 13. findet sich oberhalb des Stigmas eine recht grosse *Suprastigmalplatte*, welche von der Segmenthintergrenze fast bis in die Gegend über der Katopleurenmitte reicht, während die Poststigmalplatte breit von unten an der Suprastigmalplatte liegt und fast genau hinter dem Stigmapleurit, dem es an Grösse ungefähr gleich kommt. Das Stigmapleurit ist also durch die ganze Breite der Suprastigmalplatte *vom Tergit getrennt*.

An anderen Segmenten dagegen, so am 8., 10. und 12. ist das *Stigmapleurit fast bis zur Berührung dem Tergit* genähert und die beiden anderen Sklerite liegen vor und hinter dem Stigma, das vordere schräg oben, übrigens *nur halb* so gross wie das Suprastigmalschild der Segmente mit ungerader Zahl, das hintere hinter dem Stigma aber mit dreieckigem

Zipfel nach hinten greifend, schräg über dem Stigmaschild. Das vor ihm liegende Sklerit hat den Charakter einer hinteren, oberen *Anopleure* und ist der *Vorderhälfte jener Suprastigmalplatte homolog.*

Auch diese Verschiedenheiten sprechen für meine obige Theorie der *Anopleuren-Ablösung* vom Stigmaschild. Stellen wir uns nämlich vor, dass das Stigma- und Suprastigmalpleurit der Segmente 9, 11, 13, 15 ein Ganzes bildeten, so haben wir ein *Urstigmaschild* mit weit *unten* in demselben gelegenen Stigma, wie es uns die Erdläufer (Abb. 1 und 2) vorführen. Diese Suprastigmalschilde der ungeraden Segmente von *Plutonium* fasse ich hiernach als einen ursprünglichen Zustand auf, welcher in den geradzähligen Segmenten durch Annäherung von Tergit und Stigma verloren ging, wobei die Hinterhälfte der Ur-Suprastigmalplatte unterdrückt wurde, die Vorderhälfte als Anopleure nach vorn gelangte. Bei *Theatops* ist die Hinterhälfte erhalten geblieben als die dort beschriebene Suprastigmalplatte, welche also von der Ur-Suprastigmalplatte der ungeraden Segmente von *Plutonium* zu unterscheiden ist.[1])

Theatops	Zwei Paar Anopleuren an den meisten Rumpfsegmenten, zwei obere und zwei untere. Keine Coxopleuren.
Plutonium	Untere Anopleuren fehlend oder rudimentär, obere zwei in den geradzahligen, nur *eine* in den ungeraden Segmenten. Coxopleuren angedeutet.

Chromatanops n. g. (gegründet auf *Cryptops bivittatus* Pocock) aus Mittel- und Südamerika. Clypeus vor dem Labrum *ohne* Dreieck. Die *Oberlippe* zeigt eine vom Typus der *Scolopendromorpha* etwas abweichende Gestalt, indem ihre Seitenränder der Körperachse ungefähr parallel laufen und ihre Vorderecken *beinahe recht*winklig sind, daher auch die seitlichen Stützen einen viel weniger spitzen Innenwinkel aufweisen. Nur die oberen Interkalarpleurite vorhanden, die unteren, welche neben dem Interkalarsternit sonst vorkommen, *fehlen,* jenes ist aussen tief eingeschnitten. Hauptsternite *ohne*

---

[1]) Es ist zu vermuten, dass der Tracheenverlauf in den geraden und ungeraden Segmenten auch einige Unterschiede darbietet, doch konnte ich das nicht tatsächlich verfolgen, da mir für meine Untersuchungen nur das einzige Stück des Berliner Museums zu Gebote stand.

innere Verdickungsleisten. Endosternite *nicht* scharf abgegrenzt, aber aussen hinten mit den verdeckt liegenden Suprasternalplatten ein deutliches *Gelenk* bildend. *Keine* Sternitdreiecke. Körper mit schwarzen, in Längsstreifen angeordneten *Pigment*massen. Coxopleurien des Endbeinsegmentes mit weitschichtig zerstreuten Drüsenkanälen, welche auffallend *klein* sind im Verhältnis zu den grossen, rundlichen Drüsenzellenhaufen. Tarsus der Laufbeine schlank, einfach, ohne Spur einer Zweiteilung. Katopleuren zart, undeutlich zweiteilig. Stigmen rundlich bis kurz oval, von derselben Lage wie bei *Cryptops*.

Trigonocryptops n. g. (gegründet auf *Cryptops gigas* Krpl., *bottegi* Silv. und *numidicus* Luc.).[1] Tarsus aller Beine *zwei*gliedrig. Paratergite der Rumpfsegmente scharf abgegrenzt durch sehr deutliche Nähte. Clypeus vor dem Labrum mit durch Nahtlinien scharf umgrenzten Dreieck. 4.—12. Rumpfsegment immer mit sehr deutlich abgegrenztem *Endosternit* (*vx* Abb. 27), welchem vorn ein dreieckiges Feld *tri* vorlagert. Vor diesem *Hinterdreieck* befinden sich *zwei seitliche Dreiecke tri 1*, welche vorn und hinten durch Nähte sehr deutlich umgrenzt sind. Am 3. sowie 13.—19. Segment können ähnliche Bildungen auftreten. Am 3.—19. Segment springt das Endosternit jederseits in einen starken *Höcker* (*ho*) vor, welcher mit den kräftig entwickelten und den Höcker, wenigstens an den vorderen Segmenten, umfassenden Suprasternalplatten ein *Gelenk g* bildet. Stigmen von oben nach unten stark zusammengedrückt, schlitzartig. Katopleuren vollkommen zweiteilig. Coxopleuren selbständig entwickelt. Labrum wie bei *Cryptops*, ebenso die Hüftdrüsen. Pigmentmassen fehlen. —

Cryptops mihi: Tarsus des 1.—19. Beinpaares einfach. Paratergite wie vorher. Clypeus vor dem Labrum *ohne* abgegrenztes Dreieck. Segmente des Rumpfes mit kleinerem Endosternit, welches vorn niemals durch ein Dreieck scharf abgegrenzt ist, ebenso wenig (Abb. 28) befinden sich vor demselben seitliche Dreiecke. Wenn das Endosternit an den Seiten mit

[1]) Kräpelin hat den *numidicus* auf S. 35 seiner *Revision* zu den Formen gestellt, deren Beintarsen „nicht oder nur ganz undeutlich zweigliedrig“ sein sollen. Ich halte den Gegensatz geteilter Tarsus und ungeteilter für brauchbarer und muss jedenfalls betonen, dass ich die Beintarsen von *numidicus* *zwei*gliedrig fand.

Fortsatz vorspringt, wird es dennoch niemals vom Suprasternalsklerit im Bogen gelenkig umfasst, die seitlichen Fortsätze stellen entweder mit den in die Tiefe gerückten Suprasternalskleriten eine Verwachsung her, oder sie sind durch Naht davon abgesetzt. Die Seiten der Oberlippe verlaufen *schräg* nach aussen (wie bei den meisten Scolopendromorpha) und bilden mit dem Vorderrand sehr stumpfe Winkel, daher auch die Innenwinkel der seitlichen Stützen sehr spitz sind. Interkalarsegmente mit zwei Pleuriten jederseits, deren untere dicht neben den eingeschnittenen Sternithälften liegen. Keine selbständigen Coxopleuren. Hauptsternite zwischen den Hüften mit meist sehr kräftigen schrägen, queren Innenleisten, bisweilen auch mit medianer Längsinnenleiste. Körper ohne schwarze Pigmentstreifen, Coxopleuren des Endbeinsegmentes mit deutlichen Drüsenkanälen. Katopleuren entweder ganz einheitlich oder nur oben eingeschnitten, nicht vollkommen zweiteilig. (Hierhin z. B. *hortensis* Leach, *anomalans* Newp., *trisulcatus* Bröl., *monilis* Gerv.)

* * *

Trigonocryptops wurde hinsichtlich seiner coxopleuralen Teile schon oben beschrieben. Hier habe ich noch auf die Sternite einzugehen. Es kommt bei allen *Chilopoden* vor, dass der Hinterrand der Sternite, namentlich mit seinem mittleren Teile, gegen das Körperinnere eingebogen wird, sodass eine mehr oder weniger tiefe Einsenkung entsteht, welche der Vorderrand des nächsten Sternit mehr oder weniger überdeckt. Dies gilt auch für alle Skolopender-Gattungen, namentlich aber für die Segmente der *vorderen* Rumpfhälfte, wo uns nicht selten eine vollständige *Intersegmentaltasche* begegnet, welche auch auf die Teilung der hinten an ihr befindlichen Interkalarsternite von Einfluss ist. Der Boden und das vordere Gebiet derartiger *Taschen* wird also von *dem in die Tiefe gesenkten hintersten Abschnitt der Sternite gebildet, welchen ich Endosternit* genannt habe. Bei den oben als *Trigonocryptops* zusammengefassten Arten zeigt nun dieses *Endosternit* eine höchst auffallende Ausbildung. Zwischen den Hinterecken der Suprasternalplatten, welche der Metacoxa dicht anliegen, springt dieses Sklerit jederseits in einen starken, gebräunten *Zapfen* vor, welcher mit der Suprasternalplatte ein Gelenk bildet, welches um so mehr von jener umfasst wird, *je weiter nach vorn* am Körper die einzelnen Segmente liegen. Zwischen den Zapfen aber besitzt das Endosternit bei *gigas* und *bottegi* eine innere, quere Verdickungsleiste (Abb. 27 *y, ho*), welche das eigentliche Endosternit von einem davorgelegenen hinteren *Dreieck* (Triangulum posterius) trennt, während bei *numidicus* diese Verdickungsleiste fehlt. Immer aber findet sich jederseits auf dem Endosternit eine *Längsreihe* kleiner Tastborsten, welche auf das eigentliche Sternit nicht übergeht. Vor dem hinteren Dreieck liegen zwei scharf durch Nähte umgrenzte *seitliche Dreiecke,* welche sich in der Mediane nicht berühren, sondern durch die Vorderecke des hinteren Dreiecks getrennt werden. Bei *bottegi* sind die Dreiecke durch eine

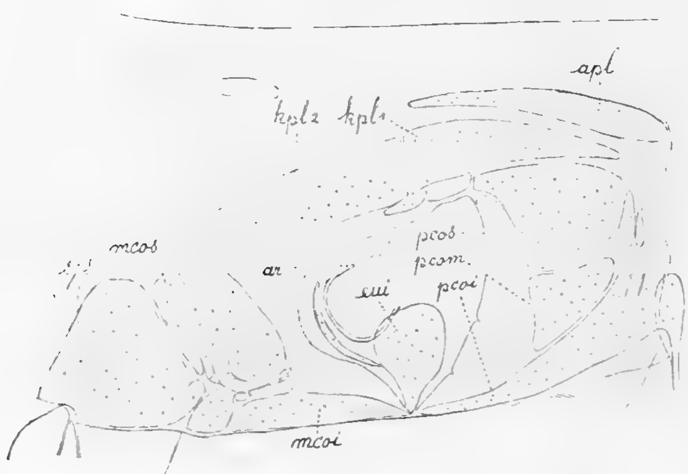


Abb. 21.
Trigonocryptops gigas (Krpl.). Seitenansicht auf das 11. beintragende Rumpfsegment (Eucoxa superior herausgenommen). — 13 f. Vergr.

stärkere Beborstung ausgezeichnet als das übrige Sternit und bei *gigas* finden sich stärkere Tastborsten, von den Sternitvorderecken abgesehen, nur auf den drei Dreiecken.

Wir haben es hier mit einer *Sternitgliederung* zu tun, welche sich physiologisch erklärt durch die Tätigkeit jener grossen zum Telopodit ziehenden Sternit-Brückenmuskeln (Abb. 28), welche ich schon früher beschrieben habe. Diese Muskeln sind nicht nur an den vorderen Dreiecken befestigt, sondern sie gehen auch bis zu den tiefsten Wänden des Endosternit. Indem sich diese Muskeln zusammenziehen, biegen sie das Endosternit und eines der vorderen Dreiecke gemeinsam gegen das übrige Sternit und zwar um eine Naht, welche auf der einen Seite vom Vorderrand, auf der anderen vom Hinterrand der seitlichen Dreiecke gebildet wird, daher denn auch der Hinterrand einer Seite mit dem Vorderrand der anderen fast eine gerade Linie bildet. Ziehen die betreffenden Muskeln auf beiden Körperseiten an, so dreht sich das Endosternit gegen beide seitlichen Dreiecke. Die Gliederung des hinteren Sternitgebietes erleichtert die Bewegung

Abb. 22.

Trigonocryptops gigas (Krpl.). Das obere Stück der Eucoxa superior des 11. Segmentes mit seinem Gelenkzapfen *z*, welcher unter die nur z. T. angegebenen Katopleuren greift und Procoxa superior von der Coxopleure trennt. *p* hinterer Zipfel der Eucoxa superior, von dem ein kleines Stückchen *q* gelenkig abgelöst ist. — 60 f. Vergr.

desselben, während es in seine gewöhnliche Lage schon dadurch zurückkehrt, dass das Vordergebiet des nächst folgenden Sternites einen entsprechenden Zug ausübt. Die genannten Sternitmuskeln greifen bei *Cryptops* (Abb. 28) auf die Suprasternalplatten *vl* über, während sie dieselben bei *Trigonocryptops* nicht berühren.

Von den drei geschilderten Dreiecken ist bei *Cryptops mihi* nichts zu finden, doch besitzen einige Formen, wie namentlich *anomalans* (Abb. 28), jederseits vorn am Endosternit eine abgekürzte, unvollständige und auch nicht ganz regelmässige Nahtlinie *x*, welche also eine unvollkommene vordere

Endosternitbegrenzung vorstellen, während von seitlichen Dreiecken keine Spur zu sehen ist. Die Endosternite sind auch verhältlich kleiner als bei *Trigonocryptops*, so dass nach dieser Richtung kein Zweifel darüber bestehen kann, dass *Cryptops* gegenüber *Trigonocryptops* die einfachere Grundform darstellt.

Newportia will ich ebenfalls noch besonders wegen der Rumpfsegment*sternite* erwähnen. Von vorn nach hinten verschmälern sich dieselben allmählich und lassen deutlich *drei Abschnitte* erkennen. Unterhalb der *Eucoxa posterior* findet sich nämlich eine leichte Einkerbung (Abb. 32 *y y*)

Abb. 23.

Theatops erythrocephalus C. L. Koch aus Dalmatien. Ansicht auf das 16. ausgebreitete Rumpfsegment. — 10 f. Vergr.

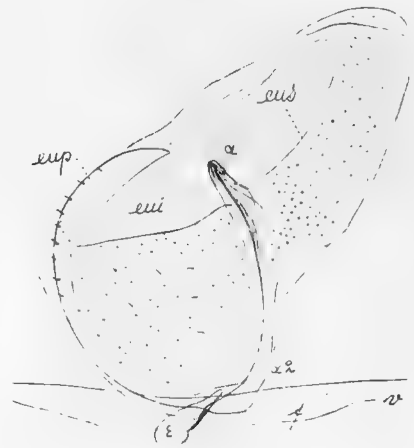


Abb. 24.

Theatops erythrocephalus C. L. Koch aus Dalmatien. Eine Eucoxa aus demselben, nebst anstossenden Seitenteilen des Sternit. *f* Sternitseitentasche mit Conus lateralis (ε). — 60 f. Vergr.

und ausserdem beginnt hier eine *Randverdickung*, welche die Hinterhälfte des eigentlichen Sternit begleitet und neben der Suprasternalplatte an einer abgerundet vorspringenden Ecke unter rechtem Winkel umbiegt und einen *Querzug* bildet (*h q*), durch welchen das eigentliche Sternit abgesetzt wird von der dritten und hintersten Abteilung, dem eigentlichen *Endosternit.* Dasselbe nimmt in der Längenerstreckung fast genau ein Drittel des Gesamtsternites ein und zeigt wieder jederseits eine Längsreihe kleiner Börstchen. Am äussersten Hinterrande springt das Endosternit jederseits in einen Lappen vor. Unter dem Vorderrand des nächsten Sternites ist es gewöhnlich tief eingesenkt und eingeklemmt zwischen den Sternithälften des Interkalarsegmentes.

Die schon mehrfach erwähnten, sich kreuzenden hinteren Sternitmuskeln (*m* Abb. 32) sind auch hier besonders über dem Endosternit ausgebreitet.

Nachdem ich die Pleuralsklerite von *Newportia* oben bereits teilweise besprochen habe, sei hier noch der übrigen coxopleuralen Gebilde gedacht: die Metacoxa ist im Verhältnis zur Procoxa auffallend klein (*mco* Abb. 26), kaum grösser als die Suprasternalplatte. Letztere legt sich in einigen Segmenten sehr dicht an die Vorderecke (*h* Abb. 32) des Endosternit, so dass ein unvollständiges Gelenk zu stande kommt. *Eucoxa inferior* und *posterior* sind sehr deutlich gegen einander abgesetzt und zwischen ihnen findet sich eine Börstchenreihe, (ähnlich den Verhältnissen der Abb. 31). Auch ist die *Eucoxa inferior* durch eine Naht in zwei Abschnitte gegliedert, wie ich das von *Scolopendra* geschildert habe, nur mit dem Unterschiede, dass diese Naht die *Eucoxa inferior* in zwei beinahe *gleiche* Teile teilt. Die *Eucoxa superior* greift im Bogen von oben stark um die Telopoditgrube und zeigt ihren zur *Eucoxa posterior* herübergreifenden Zipfel abgesetzt durch eine sehr deutliche Naht, sodass wir diesen als *Coxopleure* bezeichnen können. Die *Eucoxa superior* berührt die *Katopleure,* welche an der Berührungsstelle eine kurze Naht besitzt, ohne aber mit ihr ein eigentliches Gelenk zu bilden. Wie die allgemeine Lage der *Eucoxa* und *Hypocoxa* von *Newportia* derjenigen derselben Teile bei *Otocryptops* sehr ähnlich, so gilt das auch für den *Conus lateralis* und die *Membrana conigera*, d. h. beide sind kurz (ähnlich der Abb. 20) und das Gelenk zwischen Seitenzapfen und Hüftrippe befindet sich dicht über dem Sternitseitenrande.

Die Interkalartergite sind ziemlich gross und scharf abgesetzt, die interkalaren Sternithälften verhältlich klein, während die zugehörigen Pleurite denen von *Theatops* ähneln. Paratergite fand ich an den Hauptsegmenten nur unvollkommen abgesetzt.

Otocryptops (Abb. 19 und 20) oben schon verschiedentlich erwähnt, besitzt kein eigentliches Endosternit, weil die hinteren Sternitpartieen nur wenig versenkt sind. Trotzdem kann man auch hier, wenigstens an den meisten Segmenten des Rumpfes deutlich *drei hinter* einander gelegene, durch *Quernähte* begrenzte Sternit-Abschnitte unterscheiden, von denen der mittlere der grösste ist und keine weiteren Nähte enthält (Abb. 19), während der vordere und hintere Abschnitt durch Quernähte von teilweise unregelmässigem Verlauf weiter gegliedert sind und das Bild der schon genannten Runzelfurchung vorführen. Am hintersten Abschnitt fällt vorn besonders ein mehr oder weniger dreieckiges Feld auf, welches die Seitenränder nicht erreicht, sondern von dem hintersten Gebiet halbmondförmig umfasst wird. Alle diese Nähte dienen zur Erhöhung der elastischen Beweglichkeit dieser

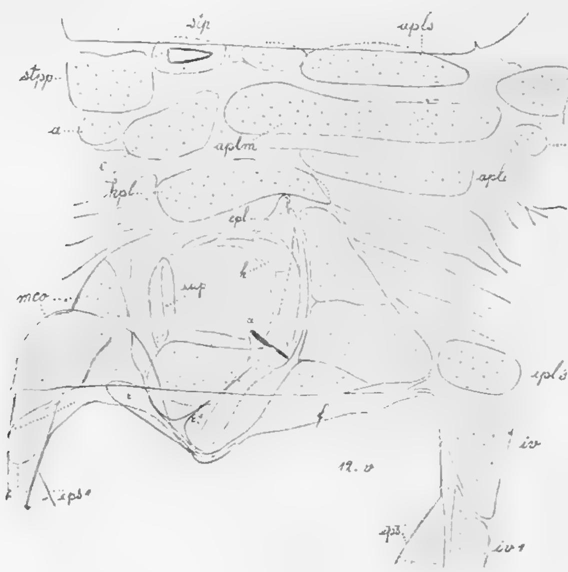


Abb. 25.

Cormocephalus büttneri Krpl. aus Westafrika. Seitenansicht auf das 12. beintragende Rumpfsegment. — 35 f. Vergr.

Tiere und gestatten dem Zuge verschiedener Rumpf- und Beinmuskeln selbst im Rumpfbereich bis zu einem gewissen Grade gelenkig nachzukommen. Insbesondere wird die *Biegsamkeit des Rumpfes* in der Richtung von vorn nach hinten erhöht.

Im übrigen bemerke ich noch folgendes: Hinter der zweiteiligen kleinen Metacoxa, welche an manchen Segmenten noch kleiner ist als in dem Abb. 19 dargestellten Falle, befindet sich die mit Borstenlängsreihe versehene Suprasternalplatte. Die *Eucoxa inferior* ist ganz wie bei *Newportia* durch Naht in zwei fast gleich grosse Teile zerlegt, während das obere

Ende der Eucoxa superior sich anders verhält als dort. Die Hälften des Interkalarsternit sind zweiteilig, die Interkalartergite viel schwächer als bei *Newportia*. Paratergite sind nicht deutlich ausgebildet. Hinsichtlich des *Eupleurium* zeigen stigmentragende und stigmenlose Segmente *keinen* namhaften Unterschied, abgesehen natürlich von den Stigmen.

Otostigma *spinosum* Poc. schliesst sich in seinen coxopleuralen Bildungen so sehr an *Cormocephalus* (Abb. 25), dass ich mich auf wenige Angaben beschränken kann: Drei längliche Anopleuren lagern vorn über der stark sichelförmigen Katopleure, höchst ähnlich den betreffenden Verhältnissen bei *Cormocephalus*. Wie dort gibt es ferner eine selbständige *Coxopleure* und eine Gelenkverbindung zwischen ihr und dem schmalen oberen Fortsatz der Eucoxa superior, wie dort zweiteilige (2—3 teilige) Meta- und dreiteilige Procoxa, wie dort deutliche Trennung von Eucoxa inferior und posterior. Die *Eucoxa inferior* besitzt auch eine Zweiteilung wie bei *Scolopendra* und *Cormocephalus*, sodass also der vordere Abschnitt bedeutend kleiner ist als der hintere. Als Unterschied gegenüber *Cormocephalus büttneri* kann ich hier nur erwähnen die zahlreicheren Porenkanäle, welche vielfach deutlich umwallt sind und das Auftreten solcher auch im Bereich des unteren Artikulationshautfeldes. Der stark nach hinten gebogene Seitenzapfen weicht in der Gestalt von dem jenes *Cormocephalus* nur wenig ab.

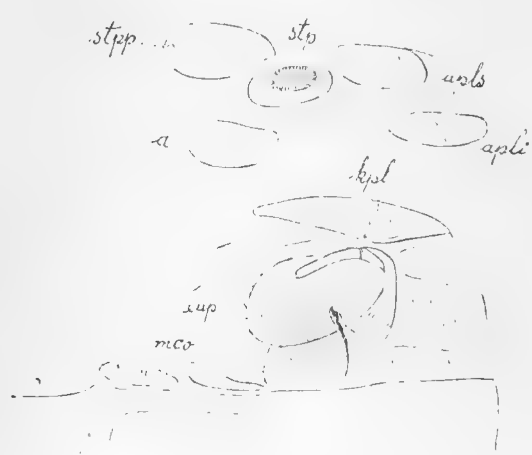


Abb. 26.
Newportia bahiensis Verh.[1]) Seitenansicht auf die coxopleuralen Teile der rechten Flanke des 5. beintragenden Rumpfsegmentes. — 60 f. Vergr.

Rhysida *longipes* Newp. Ein auffallender Unterschied gegenüber *Cormocephalus, Cupipes, Otocryptops, Otostigmus, Newportia, Plutonium* und überhaupt allen von mir genauer untersuchten Skolopendern, ausgenommen

[1]) Diese und andere in vorliegender Arbeit genannte neue Formen werden an anderer Stelle veröffentlicht.

Scolopendra subspinipes, besteht darin, dass *fast in dem gesamten zwischen Tergiten und Sterniten ausgedehnten Pleuralgebiet,* also auch innnerhalb der *häutigen* Bezirke ziemlich grosse Porenkanäle zerstreut sind, welche auch in Abb. 29 angedeutet wurden. Dass trotzdem die Sklerite nicht verwischt zu sein brauchen, wurde schon oben für Scolopendra subspinipes ausgeführt (vgl. Abb. 17), trifft aber in ähnlicher Weise für *Rhysida longipes* zu. Die Sklerite des Eupleurium sind auch hier, wie Abb. 29 zeigt, schwach entwickelt und z. T. als rudimentär zu bezeichnen, so namentlich die Anopleure, welche nur durch einige kleine runde oder ovale Verdickungen angezeigt ist, während die Katopleure wieder ihre typische Stärke bewahrt hat. Diese kleinen Skleritstücke sind trotzdem durch ihre dickere Wandung, etwas gelbliche Farbe, stärkere Wölbung und zahlreichere Porenkanäle, von der Pleurenhaut deutlich unterschieden. Besonders schön *zerklüftet* sind die drei Stücke der Procoxa und zwar durch Nähte, welche grösstenteils dem Vorderrande der Procoxa parallel verlaufen. Teilweise, namentlich im hinteren Drittel ist auch die Katopleure durch Runzelfurchung (Nähte) ausgezeichnet (Abb. 29). Die Metacoxa ist einfach und recht klein, deutlich getrennt von der an den Sternithinterecken etwas verdeckt liegenden Suprasternalplatte. Die *Eucoxa* steht derjenigen von *Cormocephalus* so nahe, dass ich nicht weiter darauf einzugehen brauche. Besonders deutlich sah ich bei *Rhysida* einen *Arcus* (*ar*) im Coxotelopodit-Gelenk. Ein solcher *Arcus* ist bisher bei Skolopendern fast ganz unbekannt geblieben, er kommt aber *mehr oder weniger deutlich bei allen Scolopendromorpha an den Laufbeinen vor.* Bei *Rhysida* geht er rings um die ganze Gelenkgrube und ist nur durch den endwärtigen, den Trochanter stützenden *Processus* (*α*, *α 1*) der Costa coxalis unterbrochen. Hinsichtlich der Seitenzapfen und Seitenhaut erinnert *Rhysida* ebenfalls sehr an *Cormocephalus,* während die Sternite denen von *Otocryptops* ähnlich sind, indem die *Episternalnähte*[1]) sowohl bei

[1]) Die *Episternalnähte* sind bei *Cormocephalus (büttneri)* sehr deutlich ausgebildet als *eingeschnittene Nähte.* Dieselben beginnen am Vorderrande hinter den inneren Interkalarsternitstücken, ziehen fast bis zum Hinterrande durch und biegen dann nach aussen ab gegen die Suprasternalplatte. Hinter dem Vorderrande aber zieht eine Seitennaht gegen die Vorderecke (Abb. 25 *eps*, *eps 1*). Die *Episternalnähte* als mikroskopisch erwiesene wirkliche Nähte sind noch *nicht* gleichbedeutend mit *Episternalfurchen, können* es aber bisweilen sein!

Otocryptops als auch *Rhysida* vollkommen *fehlen*. (Übrigens besitzt auch *Cormocephalus* an den Sterniten einen vorderen und hinteren Bezirk mit allerdings schwacher Runzelfurchung.) Die Sternite von *Rhysida* zerfallen also auch, ähnlich *Otocryptops*, in drei hinter einander gelegene Abschnitte, welche aber nicht so deutlich gegen einander abgesetzt sind, weil die entsprechenden Quernähte weniger regelmässig verlaufen. Auch ist das nahtlose Mittelstück *viel grösser* als das vordere und namentlich hintere Gebiet mit den Runzelnähten, weil jene hintere Quernaht, welche den bei *Otocryptops* beschriebenen dreieckigen Bezirk von vorn begrenzt, bei *Rhysida fehlt*.

Auch bei dieser Gattung sind die Sternite *hinten wenig eingesenkt*, sodass von eigentlichen Endosterniten nicht die Rede sein kann, aber der hinten im Halbkreis abgerundete Hinterrand, welcher in der Mitte mit einem Läppchen in die Tiefe greift, wird *umfasst* von dem eingesenkten Vorderrandgebiet des nächst folgenden Sternites, das auch besonders stark in Felderchen zergliedert ist, um sich jenem besonders vollkommen anschmiegen zu können. Stigmenlose und stigmenführende Segmente zeigen im Eupleurium keinen namhaften Unterschied und die Stigmenplatte in den stigmenlosen Segmenten nimmt fast genau den Platz des Stigmas in den stigmenführenden ein.

Cupipes *impressus* Poc. besitzt ziemlich grosse aber durch Naht nur *unvollständig* von den Haupttergiten geschiedene Interkalartergite, grosse zweiteilige Interkalarsternithälften und eine kräftige interkalare Pleuritenentwicklung, indem ausser den beiden mehrfach schon beschriebenen, gewöhnlichen Pleuriten, welche ziemlich grosse, ovale Kissen abgeben, zwischen ihnen noch *zwei kleine* Pleuritwülste eingeschaltet sind. Es gibt dreierlei Anopleuren, nämlich 1. eine mittlere Hauptanopleure, welche sich länglich hinstreckt, etwas hinter dem oberen Interkalarpleurit; 2. eine kleinere, längliche, obere Anopleure, welche, nur wenig höher als die vorige, sich gerade über der Katopleure und schräg über und vor der Stigmapleure befindet; 3. kleine untere Anopleurenplättchen, gerade unter der Hauptanopleure und vor der Katopleure. Die letzteren machen den Eindruck, als wenn eine untere Anopleure, wie sie bei *Cormocephalus* (Abb. 25 *apli*) vorkommt, durch Degenerierung so aufgelöst wäre, dass nur noch drei kleine hinter einander liegende Inselchen übrig geblieben. Einige (drei) kleine Plättchen ungewöhnlicher Art finden sich auch noch weiter unten, also zwischen jenen der Procoxa und den Interkalarpleuriten. Vergleichen wir diese Pleurenbildungen mit *Cormocephalus* (Abb. 25), so finden wir eine weitgehende Ähnlichkeit, bemerkenswerte *Unterschiede* aber sind das *Fehlen* der oberen Anopleure *apls*, das *Fehlen* der Substigmalplatte *c* und das Vorkommen mehrerer kleiner geschilderter Plättchen in dem Gebiet zwischen *apli* und *ipl 3*.

Die Stigmen liegen in der Mitte eines ziemlich grossen, ovalen Atemschildes, hinter dem sich ein ungefähr gleich grosses Poststigmalschild befindet und unter beiden ein längliches Substigmalpleurit.

Der Vergleich der stigmenführenden und stigmenlosen Segmente von *Cupipes* führte mich zu einer bemerkenswerten Feststellung, nämlich einer Erscheinung, welche ganz auffallend an das Entsprechende erinnert, was ich über *Theatops* oben ausgeführt habe. Gerade wie dort zeigt sich nämlich in den *stigmenlosen Segmenten von Cupipes* ein grosses längliches Sklerit, welches sich unter dem hinteren Gebiet des Tergitrandes befindet und die Stelle einnimmt, welche in den stigmenführenden Segmenten die obere Anopleure und das Stigmapleurit innehaben, welche beiden als getrennte Platten hier nicht vorhanden sind. Aus diesem *Urstigmenschild*, welches sich nur in den stigmenlosen erhalten hat, leite ich also, nach dem was oben über den Vergleich mit den *Geophilomorpha* gesagt worden ist, d. h. über Formen mit grossen Interkalarsegmenten überhaupt, die obere Anopleure und Stigmapleure der stigmenführenden Segmente ab, durch vertikale Zerschnürung desselben. Hinter und über dem Urstigmenschild findet sich eine nur sehr kleine Poststigmalplatte, während die Substigmalplatte ungefähr übereinstimmt mit der in den stigmenführenden Segmenten.

Diese Übereinstimmung mit Theatops ist um so beachtenswerter, als wir auch in den Endbeinen eine auffallende Annäherung beider Gattungen bemerken können.

Die *Cupipes*-Sternite stimmen am meisten mit denen von *Cormocephalus* überein, namentlich auch hinsichtlich der als Nähte ausgebildeten *Episternallinien*. Hinsichtlich der *Eucoxa* erwähne ich eine zweiteilige *Eucoxa inferior* wie bei *Cormocephalus*, eine einfache obere Abrundung der *Eucoxa superior*, ohne Andeutung einer Coxopleure. Der *Conus lateralis* ist ziemlich tief eingesenkt. Metacoxa mit zwei über einander liegenden Abschnitten, kaum halb so hoch aufragend wie die viel grössere, 2—3teilige Procoxa.

Ethmostigmus *trigonopodus* (Leach) besitzt besonders stark ausgeprägte Coxopleuralteile, gegen die weisslichgelbe Pleurenhaut sehr scharf abgesetzte gelbliche Pleurite, welche ebenso wie Tergite und Sternite von einer grossen Zahl, teils einfachen kleinen, teils drüsigen Hypodermiszellen gehörigen, grösseren Porenkanälen durchsetzt sind. Diese Porenkanäle sind zu einem oder mehreren umwallt, d. h. die Dicke der Chitinskelettwandung ist in der nächsten Umgebung der Kanäle viel bedeutender als an den übrigen Stellen, sodass, wie die Sklerite durch grössere Dicke von der umgebenden Haut abstechen, auch innerhalb der Sklerite wieder zahlreiche dickere *inselartige Gebiete* verschiedener Grösse von dem zwischenliegenden dünneren Labyrinth sich abheben. Eine *Ausnahme* hiervon bildet die *Eucoxa*, deren Wandung mehr gleichmässig dick ist und grösstenteils von einfachen feinen Kanälen durchsetzt, welche mehr gleichmässig zerstreut sind. Das obere Ende der *Eucoxa superior* und die Coxopleure nähern sich in ihrer Struktur schon mehr derjenigen der übrigen Pleurite.

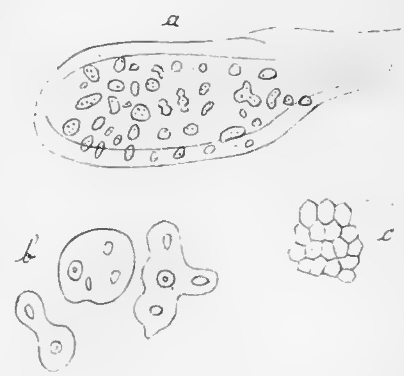


Abb. 26a.
Ethmostigmus trigonopodus Leach. Hintere obere Anopleure *a* des 11. Rumpfsegmentes mit Verdickungsinselchen; *b* einige derselben bei 300 f. Vergr. mit einfachen und Drüsenkanälen; *c* ein Stück der Zellstruktur, welche den Hypodermiszellen entspricht.

Ausser den durch Abb. 26a veranschaulichten Verdickungsinselchen ist noch die zarte Zellstruktur *c* zu erwähnen, welche im Pleuralgebiet allenthalben beobachtet wird, an den Pleuriten aber ebenfalls deutlicher ist als an der zwischen ihnen liegenden Pleuralhaut.

An *Anopleuren* treffen wir bei *Ethmostigmus* 2 (3) + 1 + 1, d. h. zwei obere, eine (zwei) mittlere und eine untere. Die obere, hintere Anopleure ist in den stigmentragenden Segmenten sehr klein und kann als fast verkümmert bezeichnet werden, in den stigmentragenden Segmenten viel grösser (Abb. 26a), aber auch nur so lang wie die viel stärkere, längliche, vordere obere Anopleure breit ist. Am stärksten ist wieder die *Mittelanopleure*, welche oberhalb der Katopleurenmitte beginnt und sich bis zum Interkalarsegment erstreckt. Eine dritte kleine Oberanopleure liegt über ihrem Vordergebiet, deutlich aber auch nur in den stigmenlosen Segmenten. Hinter der Mittelanopleure und zwischen hinterster Oberanopleure und Hinterhälfte der Katopleure befindet sich eine ziemlich grosse, sehr an *c* der Abb. 25 erinnernde, aber längere Substigmalplatte, welche die Fortsetzung der Mittelanopleure nach hinten vorstellt, aber etwas nach unten geknickt gegen sie liegt, was offenbar damit zusammenhängt, dass der *von den Beinhüften ausgehende Druck und Zug,* in Anpassung an welchen die Katopleure unten ausgebaucht ist, sich noch auf die höhere Wulstreihe fortsetzt. Wenn man will, könnte diese Substigmalplatte auch als hintere Mittelanopleure bezeichnet werden. Die bei *Ethmostigmus* bekanntlich sehr *grossen Stigmen haben auch auf ihre Umgebung einen namhaften Einfluss ausgeübt,* der sich einmal zeigt in der undeutlichen Begrenzung und dann in der Kleinheit der Stigmenplatten, welche nur noch einen schmalen Rand um das grosse Stigma bilden, ferner in der weiteren Nachbarschaft, welche hinten, hinten oben und unterhalb des Stigmas durch einen ganzen *Schwarm* kleiner, etwas unregelmässiger Plättchen ausgezeichnet ist. Dicht hinter dem Stigmaschild aber trifft man eine ziemlich grosse, fast dreieckige Poststigmalplatte. Über und unter dieser sind in dem Schwarme der kleinen Plättchen je 1—2 etwas grössere Supra- und Substigmalplättchen zu bemerken. In den *stigmenlosen* Segmenten finden wir *statt der Stigma- und Nachstigmaplatten ein einziges grosses und längliches Sklerit* (Stigmatopoststigmalplatte), welches ich mir so erkläre, dass diese beiden Sklerite, welche in den stigmenführenden Segmenten bis zur Berührung genähert sind, auch in den stigmenlosen eine entsprechende Lage annahmen und dann leicht zur Verschmelzung gelangten. In der Umgebung dieses grossen Sklerites findet sich nicht ein solcher Schwarm kleiner Plättchen wie in den stigmenführenden Segmenten, sondern, von einigen unbedeutenden Verdickungen abgesehen, nur ein rundliches kleines Suprastigmalsklerit und etwa 7—8 kleine Substigmalplättchen. Besonders bemerkenswert ist also, dass hier bei *Ethmostigmus* in den *stigmenlosen Segmenten* das an der Stelle des fehlenden Stigmas auftretende Sklerit *weder eine einfache echte Stigmenplatte (ohne Stigma) ist* (wie bei *Cormocephalus*), noch ein Gebilde, welches Stigmenplatte und hinterer Oberanopleure zusammen entspricht (wie bei *Theatops*), sondern eine Vereinigung von Stigma- und Stigma*nachschild*.[1])

Von anderweitigen Bildungen sei für *Ethmostigmus* noch folgendes genannt: Eine deutliche Coxopleure (ähnlich dem in Abb. 30 dargestellten Fall) greift mit ziemlich langem, gebräunten *Zapfen* in die Konkavität der Katopleure, ist durch *Naht* von der *Eucoxa superior* abgesetzt, *ohne* aber mit ihr ein Gelenk zu bilden. *Eucoxa inferior* und *posterior* sind durch Naht gegen einander abgesetzt, nicht aber durch Zwischenhaut wie das sonst meist der Fall ist. Die Zweiteilung der Eucoxa inferior ähnelt der von Scolopendra. Die *Procoxa* ist durch tief eingeschnittene Nähte sehr deutlich in oberen, mittleren und unteren Teil abgesetzt, ausserdem durch Streifung in ähnlicher aber noch reichlicherer Weise gegliedert als das Abb. 29 zeigt. Metacoxa ebenfalls 2—3 teilig, ungefähr so gross wie die mittlere Procoxa, *Conus lateralis* den in Abb. 25 und 29 dargestellten Fällen ähnlich. Die Interkalarpleurite sind denen von *Cormocephalus* (Abb. 25) höchst ähnlich, doch finden sich in *dem grossen häutigen Zwischenraum vor der oberen Procoxa die Rudimente* von weiteren Pleuriten in Gestalt von 7—8 und mehr sehr kleinen Plättchen. An den Tergit-Seitenrändern bemerkt man drei deutliche, nahtartige Einschnitte, erinnernd an die bei *Cryptops*, es kommen aber keine vollständigen Paratergite zu stande, weil die inneren Längsnähte fehlen. Die *Ethmostigmus-Sternite* stimmen im wesentlichen mit denen von *Cormocephalus* überein.

Alipes *multicostis* Imhof gibt uns das Beispiel einer Form, welche hinsichtlich ihres Eupleuriums auf Verhältnisse bezogen werden kann, wie sie uns z. B. durch *Cormocephalus* vorgeführt werden. Denken wir uns ein

---

[1]) Ich habe bereits mehrfach darauf hingewiesen, dass die Tatsachen zu dem Schlusse drängen, dass bei *Chilopoden* eine phylogenetische Verschiebung von einer anfänglichen *Stigmenlage* mehr in der Mitte der Segmente, sekundär gegen den Hinterrand derselben stattgefunden habe. Die verschiedenen Fälle über das Verhalten der *Stigmenplatten* sprechen sehr hierfür: *Primär* zeigt sich die Stigmenplatte mit der benachbarten hinteren Oberanopleure vereinigt (im Anklang an die Verhältnisse der niedrig stehenden Geophilomorpha), *sekundär* zeigt sich die Stigmenplatte selbständig und *tertiär* vereinigt sie sich entweder mit dem Poststigmalpleurit oder ist ihm sehr genähert, wie bei *Ethmostigmus*, einer Gattung, die alle Forscher, welche sich darüber geäussert haben, namentlich Haase und Kräpelin, als eine der *derivatesten* Skolopender-Gattungen aufgefasst haben.

derartiges Eupleurium zusammengedrängt und die drei Lagen Anopleuren noch mehr verschmälert, gleichzeitig abgeschwächt, so erhalten wir die Anopleuren von Alipes, auf deren nähere Beschreibung ich nicht eingehen will. Ich begnüge mich hier mit folgenden Angaben: *Eucoxa posterior* durch doppelte Naht und eine zwischen denselben verlaufende Borstenreihe *br* Abb. 31 scharf abgesetzt, *Eucoxa inferior* durch Naht ähnlich *Scolopendra* in zwei Teile gegliedert (Abb. 30). Von der sichelformig nach oben gebogenen und am oberen Ende etwas zurückgekrümmten *Eucoxa superior* ist eine *Coxopleure* mehr oder weniger vollkommen und *ohne* Gelenkbildung abgeschnürt. Die Dreiteilung der Procoxa ist nur angedeutet (nicht scharf durchgeführt wie bei *Ethmostigmus*), eine auffallende Längsnaht aber teilt unvollständig das obere und mittlere Gebiet in zwei hinter einander befindliche Abteilungen. Metacoxa klein und einfach, fast wie in Abb. 29. Eine Suprasternalplatte mit Borstenreihe ist scharf umgrenzt. Interkalare Tergite klein aber durch Naht vollkommen abgegrenzt. Die Teile der Interkalarsternithälften sind ungefähr gleich stark, die interkalaren Pleurite dagegen relativ schwach entwickelt, beide noch nicht halb so lang wie die äusseren Interkalarsternitteile. Das grosse häutige Feld zwischen beiden führt *keine* Überreste weiterer Pleurite. Zwei fast runde Pleuritwülste vertreten in den stigmenlosen Segmenten die Stelle von Stigma- und Nachstigmaplatte der stigmenführenden Segmente, d. h. beide Arten von Segmenten stimmen, vom Stigma abgesehen, nahezu *überein,* auch hinsichtlich der sechs kleinen Plättchen, welche im Halbkreis oben, hinten und unten Stigma- und Nachstigmaplatte umgeben. Paratergite sind nicht abgegrenzt und Episternalnähte höchstens ganz vorn stückweise angelegt. —

Arthrorhabdus (*formosus* Poc.) besitzt im Eupleurium stark entwickelte Plattenwülste, namentlich sind die *Anopleuren* recht gross und zwar in der bei *Cormocephalus* geschilderten Weise 2 + 1 + 1 über einander gelagert. Überhaupt herrscht eine weitgehende Übereinstimmung mit *Cormocephalus*, abweichend von dieser Gattung aber verhält sich *Arthrorhabdus* in zwei bemerkenswerten Punkten. Einmal *fehlt* nämlich eine Coxopleure vollständig, da die *Eucoxa superior* ähnlich *Scolopendra* in *einfachem Bogen* oben die Telopoditgrube umfasst und nur mit einem abgerundeten Läppchen sich etwas unter die Katopleure schiebt. Sodann herrscht eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit *Ethmostigmus* hinsichtlich der Stigmenplatten: In den stigmen*führenden* Segmenten finden wir die Stigmen von *Arthrorhabdus* dem Tergitrande ziemlich nahe, dahinter ein grosses Poststigmalpleurit, unter beiden zwei kleinere Substigmalplatten und ein kleines Schildchen neben der Tergithinterecke, also über dem Poststigmalpleurit. In den stigmen*losen* Segmenten [fand ich dieselben Verhältnisse, ausgenommen ein

Abb. 27.

Trigonocryptops bottegi (Silv.). Ansicht von unten auf das Sternit des vierten beintragenden Rumpfsegmentes.

y = Vereinigungspunkt der Querleisten (sternale Sterigmen);
vx = Endosternit, *ho* = Seitenhöcker desselben;
g = Gelenk zwischen Endosternit und Suprasternalplatte;
tri = unpaares, *tri 1* = paarige Sternitdreiecke.
Angegeben sind auch die Hüftteile der rechten Rumpfseite. — 40 f. Vergr.

grosses, beinahe dreieckiges Sklerit hinter den oberen und mittleren Anopleuren, welches die Stelle von *Stigma- und Poststigmaschild zusammen einnimmt und durch Verwachsung* dieser beiden entstanden zu denken ist.

Anodontostoma *octosulcatum* Töm. ist eine höchst eigentümliche Form, was keineswegs nur für ihre habituell auffällige Erscheinung gilt. Schon die Sternite sind eigentümlich, indem der unpaaren äusseren Medianfurche auch eine innere Längskante entspricht. Quere Runzelfurchung fehlt vorne, auch ist der Vorderrand auffallend bogenförmig gerundet. Im Hintergebiet findet sich eine schwache Runzelfurchung und ein eingesenkter Hinterrandmittellappen wird von dem eingesenkten Vorderrandgebiet des nächsten Sternites umfasst. An den Interkalarsegmenten sind die Tergite sehr schmal und schwach, aber trotzdem deutlich durch Naht abgesetzt. In den zweiteiligen Sternithälften und den mässig grossen, rundlichen, oberen und unteren Interkalarpleuriten stimmt *Anodontostoma* mit mehreren anderen *Scolopendriden*-Gattungen überein. Metacoxa einfach, weit getrennt von der Procoxa, deren unterem Abschnitt sie an Grösse gleichkommt. Procoxa *zwei*teilig, der obere Abschnitt grösser als der untere, beide durch Naht sehr deutlich getrennt. *Eucoxa posterior* und *inferior* deutlich getrennt, Zweiteilung der *Eucoxa inferior* wie bei *Scolopendra*. *Eucoxa superior* sehr

Abb. 28.
Cryptops anomalans Newp. aus Krain. Ansicht von unten auf das Sternit des vierten beintragenden Rumpfsegmentes, nebst Hüftteilen der rechten Körperseite und einem zum Telopodit gehenden Sternitmuskel.
x = abgekürzte, schräge Nähte. — 40 f. Vergr.

ausgezeichnet, indem sie sich nach oben allmählich verschmälert, oberhalb der Gelenkgrube des Telopodit aber plötzlich *zu einer Coxopleure erweitert*, welche eine fast runde Platte vorstellt, die nur *unvollständig* von der Eucoxa superior abgeschnürt ist und sich oben unter die Katopleure einschiebt. Letztere ist etwas eingeknickt, vorn viel schmäler als hinten, wo man eine feine, meist horizontale Furchung bemerkt. Auf die Gestalt der *Costa coxalis*, deren grundwärtige Zipfel weit auseinanderstehen, gehe ich nicht näher ein, hebe aber hervor die deutliche Ausbildung des ziemlich tief eingesenkten Conus lateralis. Auffallend ist der vom Processus der Costa nach vorn gegen die Procoxa abgehende *Seitenast* derselben, welcher wie oben bei *Scolopendra* näher geschildert wurde (Abb. 10 *d*), an der Absetzung eines als Eucoxa triangularis bezeichneten Bezirkes beteiligt ist. Dieser Seitenast ist bei *Anodontostoma* auffallend stark entwickelt und ragt noch eine beträchtliche Strecke mit abgerundetem Fortsatz in das Gebiet, d. h. in die

Abb. 29.
Rhysida longipes Newp. aus Indien. Seitenansicht auf das zwölfte beintragende Rumpfsegment. *gx* = Gelenk zwischen Coxopleure und Eucoxa superior. — 40 f. Vergr.

Höhlung der Procoxa hinein. Die *Eucoxa superior* ist überhaupt verhältlich stark entwickelt. Obwohl im *Eupleurium*, ausserhalb der Katopleure, *nur vier Pleurite* angetroffen werden, nehmen dieselben dennoch einen so grossen Raum ein, dass die häutigen Bezirke stark dagegen zurücktreten. Es handelt sich um zwei über einander liegende *Anopleuren*, einen Atemschild und ein Substigmalpleurit. Die oberste Anopleure fehlt, die *Mittelanopleure* ist sehr gross, länglich und mehr oder weniger dreieckig, während die untere Anopleure kaum ihre halbe Grösse ausmacht und sich vor der Katopleure schräg nach vorn und unten erstrekt. Sehr bemerkenswert ist ein mächtiges Sklerit hinter der Mittelanopleure und dicht unter dem hinteren Seitenrande des Tergit, welches in seinem vorderen Drittel das grosse *Stigma* enthält, in dessen innerem Grunde zwischen gewundenen braunen Wülsten, in den Hintergrundspalten die Tracheen einmünden. Da sich hinter diesem Pleurit keine weitere Platte vorfindet und ebenso wenig oberhalb, so ergibt der Vergleich mit anderen Skolopendern, dass wir hier in *den stigmentragenden Segmenten jene sekundäre Erscheinung vorliegen haben,*

Abb. 30.

Alipes multicostis Imhof aus Kamerun. Eucoxa des elften Rumpfsegmentes auseinandergebogen, nebst vorgelagerter Procoxa. *h* = Artikulationsläppchen vorn über dem Telopoditgrunde. — 8 f. Vergr.

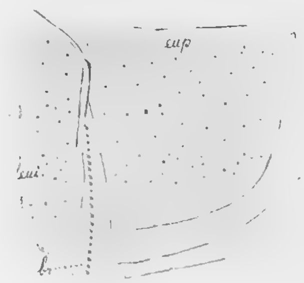


Abb. 31.

Alipes multicostis Imhof aus Kamerun. Eucoxa posterior noch stärker vergrössert, dazu ein vorn angrenzendes Stück der Eucoxa inferior, zwischen beiden die Börstchenreihe *br*. — 40 f. Vergr.

welche ich oben für die stigmen*losen* Segmente von *Ethmostigmus* und *Arthrorhabdus* nachgewiesen habe, nämlich *Verschmelzung* von *Stigmapleurit* und *Poststigmapleurit zu einem Metasynstigmapleurit.* (Den Gegensatz dazu bildet das primäre *Prosynstigmapleurit*, Vereinigung von Stigmaschild mit der davor befindlichen Anopleure.) Das Auffallende ist also, dass hier ein *Metasynstigmapleurit* in stigmenführenden und stigmenlosen Segmenten gleichermassen vorkommt. Auch in den stigmen*führenden* Segmenten von *Anodontostoma* ist dieses Sklerit durchaus einheitlich und die feinen Furchenlinien deuten keine Zerteilung an. Das längliche, hinter der Katopleure befindliche Substigmalpleurit ist sehr klein im Verhältnis zu jenem mächtigen Atemschild. Die Coxopleuralsklerite sind ausser ihren sonstigen Charakteren auch dadurch scharf ausgeprägt, dass ihnen zahlreiche Porenkanäle zukommen, welche teils einfache Atmungskanäle sind, teils Ausführkanälchen drüsiger Hypodermiszellen. Den häutigen Zwischengebieten fehlen die Porenkanäle vollständig. Zwischen Interkalarsternit und Metacoxa fand ich deutlich umgrenzte Suprasternalplatten mit der bekannten Borstenlängsreihe. Scharf abgegrenzte Paratergite gibt es nicht, man kann aber das Gebiet ausserhalb der äussersten Längswülste als unechte Paratergite auffassen.

Abb. 32.

Newportia bahiensis Verh. Das Sternit des zehnten beintragenden Segmentes nebst Muskeln und das hinterste Stück des neunten.

y = Einschnürung an der Stelle, wo der Sternitseitenzapfen sitzt.
q = Querleiste, welche in seitlichen Höckern *h* endet und das Endosternit vom übrigen Sternit trennt.
m, m1, m3 = Beinmuskeln.
m2 = longitudinale, schräg zu den Interkalarsternithälften ziehende Muskeln (im vorliegenden Falle vorn abgerissen).
h1 = seitliche Lappen des Endosternit, an welchen sich die vom Vorderrande des nächst folgenden Sternit kommenden, aber nicht dargestellten Muskeln anheften. Dieselben verlaufen schräg über einander und kreuzen sich.

40 f. Vergr.

Kräpelin stellte in seiner „Revision der *Scolopendriden*" die Gattung *Arthrorhabdus* in die nächste Nähe von *Scolopendra*. Die starke Verkümmerung der *Eupleurium*-Sklerite bei *Scolopendra* weist dieser Gattung jedenfalls eine abgeleitete Stellung zu, während *Arthrorhabdus* mit seinen deutlich ausgeprägten Anopleuren einen mehr ursprünglichen Zustand bewahrt hat.

Für *Scolopendra* charakteristisch ist also *das vorwiegend häutige Eupleurium*-Gebiet, in dem entweder nur kleine rudimentäre Plättchen statt der Anopleuren vorkommen, oder bei deutlicheren Platten doch nur ein oder zwei sehr schmale, längliche Anopleuren, welche gegen die ausgedehnten Hautbezirke einen geringen Raum einnehmen, mindestens am 1.—12. Rumpfsegment. Ausser den oben schon genannten *Scolopendra*-Arten habe ich noch untersucht Scol. *mossambica* Ptrs. *valida* Luc. (bei welcher die Eupleurium-Plättchen selbst an den hintersten Segmenten (17.—19.) sehr klein und schwach sind, *viridicornis* Newp., *heros* Gér. und *angulata* Newp. (prasina C. K.). Bei den zwei letzten Arten sind die betreffenden Sklerite etwas grösser, namentlich fällt eine deutliche Mittelanopleure auf. Trotzdem ist auch bei diesen Arten die *Haut* des Eupleurium sehr vorherrschend und das Pleuralgebiet auffallend verschieden von dem des *Arthrorhabdus, Cormocephalus* und ähnlicher Formen.

---

b) Rückblick auf die Scolopendromorpha, über den Bau der Stigmen und Ergebnisse für Phylogenie und Systematik.

Die vorstehenden Ausführungen beweisen, dass die Coxopleural-Gebilde der Skolopender sowohl eine grosse *Verschiedenheit der Ausbildung nach den Gattungen* zeigen, (manchmal und in geringerem Maasse auch nach den Arten), als auch *Organisationsverhältnisse* darbieten, welche in ihrer allen Skolopendern *gemeinsamen* Ausprägung uns wichtige *neue Charaktere darbieten, durch welche sich diese Chilopoden-Gruppe scharf von allen anderen unterscheidet.* Namentlich den *Geophilomorpha* gegenüber seien folgende neue Unterschiede hervorgehoben:

1. Besitz eines *Conus lateralis sterni,* welcher in der Sternitseitenhaut mehr oder weniger tief eingesenkt ist, mit der *Costa coxalis* ein Scharniergelenk bildet und zugleich einen verlängerten Hebel.

2. Lage der *Costa coxalis* (mit ihrem grundwärtigen Abschnitt) nicht gegen die Procoxa, sondern über dem Seitengebiet des Sternit.

3. Die *Eucoxa* stellt nicht einen Halbring dar mit zwei Abschnitten, sondern einen Ring mit $^3/_4$ bis $^4/_5$ Kreis, bestehend aus drei Hauptteilen, Eucoxa posterior, inferior und superior.

4. Vor dem Stigmapleurit finden sich ein oder mehrere Anopleuren, welche die Katopleure weit getrennt halten von den oberen Interkalarpleuriten.

Sind die Anopleuren verkümmert, dann findet sich ein ausgedehnter entsprechender Hautbezirk. Die oberen Interkalarpleurite greifen nicht in das Gebiet der Hauptsegmente über.

Derartig bedeutsame Unterschiede der Organisation, welche vereint werden mit einer ganzen Reihe bereits bekannter Differenzen geben denjenigen Forschern Recht, welche die Skolopender nicht als einzelne Familie, sondern als eine höherwertige Gruppe betrachten, welche ich mit Pocock bezeichne als *Ordo Scolopendromorpha*.

Innerhalb dieser Ordnung selbst liefern uns die Gebilde der *Coxopleuralzonen so vortreffliche Handhaben zur Unterscheidung von Gattungen* (und bei weiterem Fortschreiten auf dem hier eingeschlagenen Wege auch wohl für viele *Arten*), dass sich keines der bisher benutzten Merkmale als gleich wertvoll bezeichnen lässt, schon deshalb, weil es sich hier um einen ganzen Komplex von Merkmalen handelt, der eben wegen seiner Komplikation bisher die Rolle eines „Noli me tangere“ gespielt hat. Aber auch die Verschiedenheiten im Bau der *Sternite* sind bedeutender als es bisher den Anschein hatte, sie liefern uns für mehrere Gattungen wichtige Merkmale. In Kürze mögen die wichtigsten der im Vorigen behandelten und systematisch wertvollen Differenzen aufgeführt werden.

1. Vorhandensein oder Fehlen und im ersten Falle Beschaffenheit eines Endosternit.
2. Vorhandensein oder Fehlen von Sternitdreiecken.
3. Verschiedenartige Ausbildung von Verdickungsleisten des Sternit.
4. Lage von Meta- und Procoxa zu einander.
5. Grösse und Zerteilung von Pro- und Metacoxa.
6. Vorhandensein oder Fehlen einer Coxopleure und im ersten Falle Gestalt und Verbindung mit der Eucoxa superior.
7. Tiefe der Seitenrandtasche des Sternit und Grösse sowie Lage des Conus lateralis.
8. Zahl, Lage und Gestalt der Anopleuren.
9. Lage der Stigmen und des Stigmapleurit und Trennung von oder Verbindung mit Nachbarskleriten.
10. Verschiedenartiges oder mehr gleichartiges Verhalten der stigmen-

losen und stigmenführenden Segmente hinsichtlich des Atemschildes und seiner Nachbarschaft.

11. Ausbildungsweise der Interkalarsternite.
12. Grösse und Abgrenzungsweise der Interkalartergite.
13. Beschaffenheit der Paratergite.
14. Strukturverhältnisse an allen diesen Körperteilen.

Bisher ist die Zahl der Stigmenpaare und in geringerem Masse auch ihr Bau bei der Unterscheidung der Skolopender-Gattungen mit verwendet worden und ohne Frage sind diese Organe dazu von Wichtigkeit. Nicht berücksichtigt wurden aber bisher andere Verhältnisse, denen vielleicht eine ebenso grosse Bedeutung beizumessen ist, nämlich die *Lage* der Stigmen, sowohl mit Rücksicht auf das Tergit, als auch auf die Pleurite und zwar namentlich die Peripleuren und Katopleuren. Wichtig ist ferner der Umstand, ob die Stigmen ganz *frei* für sich liegen, oder (wie bei den Geophilomorpha) *innerhalb eines Pleurites.* In letzterer Hinsicht gibt es allerdings Übergänge, doch besteht jedenfalls ein bedeutender Unterschied zwischen den nur von einem schwachen Chitinwall umgebenen Stigmen von *Cryptops* und Verwandten einerseits, wo der schwache umgebende Rahmen weder Borsten noch Porenkanäle aufweist und den Stigmen von *Plutonium* oder *Scolopendra* andererseits, wo das Stigmasklerit sehr deutlich als solches das Stigma umgibt und *mit* jenen Eigenschaften versehen ist. Vergleichen wir die in den Abbildungen 19 von *Otocryptops,* 23 von *Theatops,* 25 von *Cormocephalus,* 26 von *Newportia* dargestellten Fälle, so lassen sich die Unterschiede kaum anders erklären, als dadurch, dass bei der oben besprochenen *Abschnürung* einer hinteren Oberanopleure, das nach derselben zurückbleibende Sklerit, welches das Stigma umhüllt, im einen Falle noch recht deutlich ausgeprägt ist, im anderen dagegen kaum noch als solches zu erkennen. Es treten also Fälle ein, wo es schwer zu entscheiden ist, ob man das vor dem Stigma befindliche Sklerit als obere hintere Anopleure oder als stigmenlose Stigmenplatte bezeichnen soll. Es wird deshalb am zweckmässigsten sein, von *Stigmaplatte* in den stigmen*führenden* Segmenten nur dann zu sprechen, wenn *wirklich das Stigma darin enthalten ist,* auch in den Fällen, wo diese Stigmaplatte als solche nur noch sehr schwach ist, wie bei *Cryptops.* Ich unterscheide folgende Fälle der Stigmenlage:

a) Die Stigmen, deren Peritrema stets regelmässig verläuft, befinden sich *deutlich unterhalb* der hinteren Pleurite der Oberreihe, *vom Tergit vollkommen abgerückt*, zugleich in meist sehr kleinen Atemschildchen, welche weder Porenkanäle noch Börstchen besitzen.[1]) Von der Katopleure sind sie mehr oder weniger abgerückt, niemals durch ein Pleurit von ihr getrennt, Stigmagrube ohne stärkere Falten und ohne Klappe. *Cryptops, Trigonocryptops* und *Chromatanops.*

b) Wie bei a), aber die Stigmen dem Tergit mehr genähert, indem sie mehr oder weniger in die Oberreihe eingerückt sind, von der Katopleure deutlich aber nur durch *häutiges* Gebiet getrennt. Atemschildchen klein aber einen deutlichen Rahmen um das Stigma bildend. Dieses rund bis länglich, die bogigen Wülste am Peritrema in *regelmässiger* Folge. Stigmaboden in der Tiefe ohne Klappe und Falten. *Newportia.*

c) Stigmen in ihrer Lage an den Segmenten abwechselnd, in den *einen* Segmenten *deutlich unterhalb* des hintersten Pleurites und vom Tergit durch dieses getrennt, in den *anderen halb* eingeschoben zwischen die Pleurite der Oberreihe und vom Tergit kaum getrennt, in beiden Fällen umrahmt von sehr deutlichen, beborsteten Atemschildchen. Letzteres in beiderlei Segmenten der Katopleure nahe und nur durch Haut von ihr getrennt. Stigmen rund, mit regelmässigem Rande. Stigmenboden in der Tiefe mit wenigen Falten. *Plutonium.*

d) Stigmen nicht deutlich vom Tergit getrennt und zwar nur *halb* in die Oberreihe der Pleurite eingeschoben, vom schwachen Atemschild umrahmt, von der Vorderhälfte der Katopleure durch die hintere Mittelanopleure *getrennt*, von der Hinterhälfte jener durch Haut. Die bogigen Wülste am Peritrema in *regelmässiger* Folge angeordnet. Stigmabogen mit deutlichen Falten, daher ohne Klappe. *Theatops.*

e) Stigmen dem Tergit mehr oder weniger deutlich genähert, in der Pleuriten-Oberreihe gelegen, ohne deutlichen Atemschildrahmen, von der Katopleure nur durch *Haut* getrennt. Stigma mit etwas *unregelmässig gebogenem Peritrema* und Kelchaussengebiet, Kelchboden mit mehr oder weniger deutlichen *Windungen* (Falten) und dazwischen liegenden Erhebungen.

[1]) Bei Trigonocryptops gigas aber haben die Stigmapleurite Porenkanäle.

Otocryptops und *Scolopocryptops,* auch *Rhysida,* aber bei dieser letzten Gattung ein kleiner Atemschild dicht vorn am Stigma.

f) Stigmen von unten nach oben länglich, neben dem Tergit in der Oberreihe gelegen, Atemschild einen schmalen Rahmen darum bildend. Peritrema nicht gelappt, zart und einfach verlaufend. Stigma von der Katopleure nur durch *Haut* getrennt, ohne innere Klappe, auch ohne stärkere Falten, nur zarte im Grunde des *tiefen* Kelches. *Otostigma.*

g) Stigmen *mitten in einem sehr grossen Pleurit gelegen* und durch dieses vom Tergit etwas abgerückt. Kelch nur mässig tief, dieser und Peritrema unregelmässig *gelappt,* Stigmenboden faltig runzelig. Stigmaplatte von der Katopleure grösstenteils nur durch Haut getrennt. *Anodontostoma.*

h) Peritrema länglichrund, mitten *in* einem ziemlich grossen Atemschild dicht neben dem Tergit gelegen, von der Katopleure nur durch Haut getrennt. Stigmenhöhle tief, innen mit einer *dreizipfeligen Klappe,* nicht so scharf ausgeprägt wie bei *Scolopendra,* aber doch im wesentlichen damit übereinstimmend, ausgenommen die behaarten Zapfen, welche hier fehlen, indem die Lippenränder einfach glatt verlaufen. *Cupipes.*

i) Peritrema länglich dreieckig; vorn spitz, Stigma mitten *in* einem deutlichen Atemschild gelegen, der sich dicht neben dem Tergit befindet und *von der Katopleure getrennt* ist durch einen Substigmalschild und das hintere Ende der Mittelanopleure. Stigmenkelch mit *dreizipfeliger Innenklappe,* deren Lippen einfach sind und nur am Rande in sehr kleine Läppchen geteilt, so bei *Cormocephalus,* oder ganzrandig bei *Arthrorhabdus.* (Bei letzterer Gattung ist auch das Vorderende des Stigmaspaltes mehr abgerundet.)

k) Stigma in einem deutlichen Atemschild dicht neben dem Tergit gelegen, von der Katopleure nur durch *Haut* getrennt, Peritrema länglich dreieckig, vorn spitz. Stigmenkelch mit *dreizipfeliger Innenklappe,* deren drei Lippen mit kräftigen, *behaarten Zapfen* oder bäumchenartigen Fortsätzen besetzt sind. *Scolopendra.*

l) Stigmen recht gross, von deutlicher aber schmaler Atemplatte umrahmt, welche neben dem Tergit liegt, von der Katopleure aber fast nur durch Haut getrennt ist. Stigmakelch ziemlich tief, am Grunde mit zahlreichen Falten und inselartigen gewölbten Kuppen dazwischen. Peritrema nicht gezackt, sondern gleichmässig verlaufend. *Alipes.*

m) Wie bei *Alipes,* aber Stigmakelch mehr oder weniger seicht, die Falten an seinem Grunde durchschnittlich noch zahlreicher. Peritrema unregelmässig lappig-zackig gewunden. Atemschild neben dem Tergit, von der Katopleure vorn durch die hintere Mittelanopleure getrennt, hinten nur durch Haut oder kleine Plättchen. *Ethmostigmus.*

* * *

Der Bau der Skolopender-Stigmen ist bisher keineswegs genügend studiert worden, namentlich darf man sich, um ihn systematisch fruchtbringend zu verwerten, nicht auf die gröbere äusserliche Gestalt beschränken, sondern muss auch die anatomischen Verhältnisse berücksichtigen und die mikroskopische Struktur von Kelch und Peritrema. Kohlrausch unterscheidet 1878 in seinen „Beiträgen zur Kenntniss der Scolopendriden" (Marburg, Diss.) ausser der einfachen „spaltförmigen" Stigmenform das *Spiraculum valvulare, S. branchiforme* und *S. cribriforme,* zwischen denen man nach ihm keinen wesentlichen, sondern „nur einen graduellen Unterschied" findet. Übergänge kommen vor „sowohl zwischen den siebförmigen und branchiformen Stigmen als auch zwischen diesen und den Spaltstigmen". Für den letzteren Fall führt er *Cupipes* an. E. Haase unterscheidet (z. B. in seinen „indisch-australischen Myriopoden" Dresden 1887) 1. spaltförmige Stigmen *(Cryptops, Cormocephalus, Scolopendra),* 2. ohrförmige *(Otostigma)* und 3. siebförmige *(Heterostoma).* Während er einmal (S. 10) sagt: „von dem ohrförmigen ist das siebförmige Stigma abzuleiten", heisst es auf S. 11: „So ist das siebförmige Stigma dadurch aus dem *spaltförmigen* entstanden zu denken, dass letzteres immer flacher wurde, bis endlich nach dem gänzlichen Verschwinden des Stigmenkelches Aussenrand und Boden fast in gleicher Ebene lagen. In der Tat ist auch die Gestalt der Schutzvorrichtungen bei allen Stigmenformen dieselbe, nur die Ausmündungsart der Tracheenstämme selbst in den Stigmenboden ist verschieden". Kräpelin untersuchte in seiner „Revision der Scolopendriden" Hamburg 1903, wie er selbst sagt, die Stigmen „im wesentlichen nur äusserlich", er schliesst sich im übrigen E. Haase an, weist aber mit Recht darauf hin, dass bei den gestreckten Stigmen der horizontale oder mehr vertikale Verlauf der

Stigmen-Längsachse von Wichtigkeit ist. Er sagt S. 11: „Stellt man dieses Kriterium der Lage und nicht so sehr die Form in den Vordergrund, so wird man auch bei minder gutem Erhaltungszustande die kurz dreieckigen bis fast rundlichen, aber in der Vorderecke immer etwas winkligen Stigmen eines *Cupipes* verhältnismässig leicht von den kleinen, gerundeten Stigmen mancher *Otostigmus*- und *Rhysida*-Arten unterscheiden können. Ein durchgreifendes Kriterium zwischen dem siebförmigen und dem ohrförmigen Stigma dürfte aber nicht existieren, da es sich hierbei im wesentlichen nur um die mehr oder minder oberflächliche Lage des Stigmenbodens handelt, wobei alle nur denkbaren Übergänge zu beobachten sind".

Meine eigenen Untersuchungen über die Anatomie der *Scolopendromorpha*-Stigmen haben mir gezeigt, dass dieselben in der Tat systematisch und phylogenetisch recht wichtig sind und bisher noch nicht gebührend gewürdigt wurden, auch möchte ich darauf hinweisen, dass bei mikroskopischem Studium die Stigmen z. T. selbst für Artunterscheidung von Wert sein können, worauf ich aber in dieser Arbeit nicht näher eingehen kann. Es ist merkwürdig, dass jene Stigmenform, welche Kohlrausch bereits treffend als *Spiraculum valvulare* hervorgehoben hat und welche z. B. durch *Scolopendra* vertreten wird, von den späteren Forschern nicht richtig aufgefasst und daher auch phylogenetisch nicht entsprechend gewürdigt worden ist. Ich will eine kleine Änderung der Bezeichnung vornehmen und diesen Stigma-Typus als den *dreizipfeligen* bezeichnen, *Spiraculum* ***trivalvulare.*** Wenn ich Kräpelin hinsichtlich der natürlichen Einheitlichkeit derjenigen Skolopender-Gruppe, welche er als seine *Scolopendrinae* zusammengefasst hat, beistimme, also der Formen „mit triangelförmigen Stigmen", so hat das seinen eigentlichen Grund in dem Umstande, dass diese Stigmenform noch viel ausgezeichneter und charakteristischer ist als Kräpelin selbst angenommen hat. Während nämlich Kräpelin lediglich die äussere Gestalt des Peritrema und damit der Stigmenöffnung gemeint hat, ist sie tatsächlich zugleich das Anzeichen für eine höchst charakteristische *Klappenvorrichtung im inneren Teil des Stigmenkelches,* wodurch derselbe in einen *Aussen*- und *Innenkelch* geteilt wird. Einigermassen angedeutet wird das durch jene Abbildung von E. Haase, welche ich auch in meine *Chilopoden*-Bearbeitung in „Bronns Klassen und Ordnungen des Tierreichs“ aufgenommen habe (vergl. daselbst Taf. VII Abb. 8), doch treten die Klappen infolge des Schnittbildes nicht richtig hervor, wie denn chitinige Bauverhältnisse überhaupt immer in erster Linie im Zusammenhange studiert werden müssen und dann nach angemessener Zerlegung unter Berücksichtigung der Gestaltverhältnisse. Bei den dreieckigen Stigmen von *Scolopendra* und Verwandten, deren Längsachse ungefähr horizontal verläuft und mit der Spitze bekanntlich nach vorn gerichtet, ist also der innerste Teil des Stigmenkelches nach aussen abgeschlossen durch *lippenartige Klappen*, welche für gewöhnlich mit ihren Rändern sich aneinander legen oder doch stark genähert sind, je nach Bedarf aber durch Muskeln auseinandergezogen werden können. Bei *Scolopendra* sind die drei Stigmenlippen noch besonders ausgezeichnet durch höchst auffallende, *aussen vor den Lippen sitzende und in Reihen ungefähr parallel zum Rande derselben angeordnete Zapfen*, welche sich als behaarte Fortsätze darstellen und z. B. von Kohlrausch a. a. O. in Abb. 21 und 22 für *Scolopendra morsitans* als „Schutzzäpfchen“ gezeichnet und beschrieben worden sind. Ganz ähnliche, nur noch dichter in Reihen angeordnete Schutzzäpfchen beobachtete ich bei *Scolopendra subspinipes,* während sie bei *Sc. cingulata* eine etwas andere Gestalt haben, nämlich seitlich behaart und am Ende in eine lange, spitze Borste verlängert, welche sich im Bogen nach aussen krümmt und so den etwa eindringenden Fremdkörpern direkt entgegenstemmt. Die drei Lippen sind nicht von gleicher Beschaffenheit, vielmehr haben wir eine *obere*, *untere* und *hintere* zu unterscheiden, von denen die beiden ersteren die bei weitem grössten sind und von ungefähr gleicher Beschaffenheit, während die *hintere* einen kleinen dreieckigen Zipfel darstellt, aber bei *Scolopendra* trotzdem auch mit Schutzzäpfchen besetzt ist. Bei *S. cingulata* bemerkte ich z. B. an der kleinen Hinterklappe des Stigmenpaares des dritten Rumpfsegmentes etwa 12—13 Schutzzäpfchen derselben Beschaffenheit wie an den Hauptklappen. Die obere und untere Lippe oder Hauptschliesklappe verlaufen grösstenteils gerade, bilden aber bei Annäherung an die kleine Hinterlippe einen sehr stumpfen Winkel, wodurch sie sich dieser anpassen und woraus zugleich hervorgeht, dass der *Atemspalt*, welcher zwischen den Hauptlippen einfach ist, neben der Hinterlippe sich gabelt. *Dass die Schutzzäpfchen wirklich eine Filtrierung der Atemluft bewirken,* erkennt man am besten an den Stigmen solcher Individuen, welche in unreinem, mit Schmutzteilchen angefülltem Alkohol aufgehoben worden sind und zwischen den Schutzzäpfchen eine Menge abgefangener Körnchen und Staubteilchen führen. Die von *Scolopendra cingulata* erwähnten Borstenfortsätze scheinen mir besonders geeignet, kleine Parasiten, namentlich also *Milben*, vom Eindringen in die Atemöffnungen abzuwehren. Der *Zusammenschluss* der Stigmalippen geschieht passiv durch die Zähigkeit ihres Chitins, während die *Öffnung* durch radiäre Dilatoren aktiv erfolgt, nach deren Erschlaffung sie durch die eigene Elastizität wieder in die alte Lage zurückkehren. Bei *Scolopendra* wird durch den Abstand der Schutzzäpfchenreihen von den Lippenrändern ein *Mittelkelch* gebildet, während *Cormocephalus* und *Cupipes* eines solchen entbehren, da ihre Stigmen einfacher gebaut sind, bei *Cormocephalus* im Übrigen zwar *Scolopendra* höchst ähnlich, aber ohne die komplizierte Zäpfchenbewehrung, höchstens mit schwachen kleinen Spitzchen im Aussenkelch, bei *Cupipes* gleichfalls, aber auch hinsichtlich der Lippen einfacher, indem statt einer deutlichen dreieckigen Hinterlippe nur ein kleiner entsprechender Lappen zu beobachten ist, während Unter- und Oberlippe ganz deutlich entwickelt sind. *Arthrorhabdus* schliesst sich mit seinen dreizipfeligen Stigmaklappen an *Cormocephalus* an, doch sind die Ränder der Hauptlippen vollkommen glatt.

Eine wenig glückliche Bezeichnung ist die der „branchiformen“ Stigmen, aber Kohlrausch hat vollkommen recht, wenn er zwischen diesen bei *Rhysida* und dem „siebförmigen“ von *Ethmostigmus* „nur einen graduellen Unterschied findet.“ Aber auch der Name „siebförmiges“ Stigma führt zu schiefen Vorstellungen. *Beide Stigmenformen*, das „branchiforme“ und „siebförmige“ gehören zusammen und bedeuten *nur Abstufungen desselben Stigmentypus*, den ich als solchen mit *zerklüftetem Kelch* oder kurz *zerklüfteten Stigmen* ***(Spiracula rimata)*** bezeichne. Besonders deutlich ausgebildet finden wir diese Stigmen bei *Rhysida*, *Alipes* und *Ethmostigmus*, letztere Gattung lediglich dadurch ausgezeichnet, dass ihre Stigmen eine im Vergleich mit jenen *seichteren* Kelch aufweisen. Unrichtig aber ist es, dass bei *Ethmostigmus* wenigstens am vorderen Stigmenpaare der Stigmenboden oberflächlich liegen soll oder ein Stigmenwall „absolut fehlen“, denn auch hier ist der Kelch als Grube deutlich ausgeprägt, wenn auch flacher als das sonst der

Fall zu sein pflegt. Für diese *zerklüfteten Stigmen* will ich als charakteristisch folgendes anführen: Man denke sich einen kurzen und unten vollkommen abgerundeten Sack, (welcher den Stigmakelch vorstellen soll) am Grunde desselben eine Anzahl kurzer, kleiner, von aussen her erfolgender Einstülpungen, welche im Innern des Sackes als getrennte gewölbte Kissen zur Geltung kommen und durch Aneinanderdrängen die Vertiefungen zwischen diesen Kissen möglichst verengen, so hat man den Grundzug dieses Stigmentypus. Nach Segmenten und Gattungen ist die Zahl der *Kissen* oder Hügel am inneren Grunde des Stigmakelches verschieden und dementsprechend auch die Zahl der gekrümmten *Spalte* dazwischen. Auch sind die Hügel von sehr verschiedenartiger, oft unregelmässiger Form. In den grubenartigen Tiefen der Spalte münden die Tracheen ein und zwar sind diese *Einmündungsstellen durch Büschel von steifen Haaren geschützt*, welche von E. Haase entdeckt und bei mehreren Formen beschrieben worden sind, namentlich gibt er a. a. O. in Abb. 24 einen Stigmalängsschnitt von *Branchiostoma* mit „strahlenförmigem Stachelkranz vor der Mündung" der Tracheen. Diese „Stacheln" hat er als einfache borstenförmige Haare gezeichnet. Ich selbst habe die Stigmen von *Alipes multicostis* zerlegt und finde, dass dieselben im Vergleich mit Haases Darstellung 24 eine höhere Ausbildungsstufe vorstellen, indem die Hügel am Stigmaboden kräftiger sind also auch die Einmündungsstellen der Tracheen noch stärker geschützt, indem sich vor ihnen in der Tiefe der Spalten *Büschel von langen, fadenförmigen, mit kurzen seitlichen Spitzchen* reichlich besetzen Haaren befinden. Es findet in den *zerklüfteten Stigmen eine doppelte Filtrierung der Luft statt*, indem zunächst gröbere Bestandteile, z. B. kleine Sandkörnchen, durch *die Kissen* des Kelchbodens festgehalten werden, und die alsdann durch die Spalten in die Tracheen gelangende Luft weiter von feineren Fremdkörpern durch die *Haarbüschel* gereinigt wird.

Derartige Stigmen aber als „branchiforme" oder „siebförmige" zu bezeichnen, scheint mir doch recht unzweckmässig zu sein. Jedenfalls haben sie mit jenen Stigmen, welche man bei Insekten mit vollem Rechte als *siebförmige* bezeichnet hat, weil es sich wirklich um von Löchern durchbohrte Platten handelt, wenig zu tun. Wenn man auch die Einmündungsstellen der Tracheen für die Siebbezeichnung heranziehen wollte, so dürfte doch nicht vergessen werden, dass die physiologisch wirksamen Teile *die Luft nicht durch Siebe reinigen, sondern durch eine Filtrierung. Physiologisch* stimmen die Kelcheinrichtungen der Stigmen von *Scolopendra* einerseits und *Ethmostigmus, Rhysida, Alipes* andererseits *überein,* aber *vergleichend-morphologisch sind sie grundverschieden, gehören aber auch zwei Scolopendriden-Zweigen an, zwischen welchen es keinen direkten phylogenetischen Zusammenhang gibt,* da sich beide Formen unabhängig von einander aus den einfacheren Stigmenformen entwickelt haben. Den obigen Ausführungen von E. Haase, dass „das siebförmige Stigma dadurch aus dem spaltförmigen entstanden zu denken“ sei, „dass letzteres immer flacher wurde“ kann ich mich also ebenso wenig anschliessen, wie der Behauptung von einem „gänzlichen Verschwinden des Stigmenkelches.“ Es ist auch überhaupt nicht vorstellbar, wie aus einem so komplizierten Stigma wie es dasjenige der *Scolopendra* ist, ein gänzlich anderes aber nicht minder verwickeltes wie das der *Ethmostigmus* entstehen sollte. Als Vorläufer der Stigmen bei *Ethmostigmus* und *Alipes* sind die von *Rhysida* leicht verständlich, da sie nach demselben Grundzuge, nur etwas einfacher gebaut sind. Ebenfalls ähnlich und wieder einfacher sind die Stigmen von *Scolopocryptops* und *Otocryptos,* indem sie am Kelchboden noch weniger kissenartige Erhebungen aufweisen. *Rhysida* und die beiden vorigen Gattungen stimmen auch in der von unten nach oben etwas *länglichen* Gestalt der meisten Stigmen überein. Eine Ausdehnung mehr von vorn nach hinten zeigen die von diesen Gattungen ableitbaren Stigmenformen von *Ethmostigmus* und *Alipes* nur infolge ihrer allgemeinen Vergrösserung. Wenn nun Haase mit den „spaltförmigen“ Stigmen, welche er als Grundlage der siebförmigen ansah, solche spaltförmigen gemeint haben sollte, wie sie z. B. bei *Trigonocryptops* vorkommen, d. h. spaltförmige *ohne* dreizipfelige Innenklappe, dann ist auch das schon deshalb ausgeschlossen, weil diese sich *horizontal* längs erstrecken, bei jenen aber gerade die einfacheren mehr vertikal gerichtet sind. So werden wir von den Stigmen der *Otocryptops* und *Rhysida* in der Tat zurückgeführt auf die tiefen, einfachen Stigmen von *Otostigma.*

Von den dreizipfeligen Stigmen der *Scolopendra* und nächsten Verwandten werden wir natürlich auch auf einfache Stigmenformen zurückverwiesen, freilich nicht auf *Otostigma,* da dem schon die Richtung der

Stigmalängsachse widerspricht. Eine irgendwie sichere primitivere Vorstufe für die von *Cupipes* erwähnten Stigmen lässt sich vorläufig nicht feststellen, doch will ich erwähnen, dass ich an einzelnen Stigmen von *Theatops* den Eindruck gewann, als wenn eine schwache zweilippige Innenklappe vorläge. Weitere Untersuchungen mögen das prüfen. Auch Kräpelin weist auf die Zusammengehörigkeit des „siebförmigen" und „ohrförmigen" Stigmas hin und meint, dass „es sich hierbei im wesentlichen nur um die mehr oder minder oberflächliche Lage des Stigmenbodens" handle. Dass es sich nicht allein um diesen, sondern vor allem um eine *stärkere oder schwächere Ausprägung der Filtriereinrichtungen* handelt, glaube ich im vorstehenden gezeigt zu haben. Ferner sagt Kräpelin S. 11: „Bei niederen Formen der Scolopendriden, und ich denke hier vornehmlich an die Gattung *Cryptops,* ist augenscheinlich die Differenzierung der Stigmen und die Verteilung typischer Formen derselben auf bestimmte Gattungen noch nicht eingetreten. Nur so wenigstens dürfte es zu erklären sein, dass in der Gattung *Cryptops* sowohl fast runde wie auch lang schlitzförmige Stigmen auftreten und dass dieselben überdies bald parallel bald schräg zur Längsachse des Körpers gestellt sind." Diese Anschauung wird schon dadurch etwas geändert, dass *Cryptops* der bisherigen Autoren mehrere Gattungen enthält. Ich selbst sah ausgesprochen gestreckt schlitzförmige Stigmen, wie sie besonders typisch bei *Trigonocryptos* vorkommen, bisher nur in einer Lage ungefähr parallel zur Längsachse des Körpers. Vor allem aber möchte ich betonen, dass die äusseren Gestaltunterschiede im Peritrema der *Cryptopiden,* welches übrigens immer aus kleinen, regelmässigen Bögelchen besteht, *nicht* parallel gehen mit derartig grossen Bauverschiedenheiten, wie wir sie oben von *Scolopendra* und *Alipes* z. B. besprochen haben.

Die Interkalarsegmente der *Scolopendromorpha* sind bisher ausserordentlich vernachlässigt worden. Ich verweise hier auf meine beiden Schriften im Archiv für Naturgeschichte, nämlich „Über die Interkalarsegmente der Chilopoden mit Berücksichtigung der Zwischensegmente der Insekten" 1903, Bd. I, H. 3 und „Über Tracheaten-Beine, 6. Aufsatz: Hüften und Mundbeine der Chilopoden" 1904, Bd. I, H. 2. —

Grade für die phylogenetische Betrachtung der Skolopender sind die Interkalarsegmente von grosser Wichtigkeit, da sie beträchtliche Unterschiede hinsichtlich der Stärke der Ausprägung aufweisen. Gehen wir auf Grund der *Geophilomorpha* von der Anschauung aus, dass die Interkalarsegmente *bei den niedrigsten Gattungen am kräftigsten ausgebildet sind,* so finden wir, dass die *Scolopendromorpha*-Gattungen nach dieser Richtung im ganzen und grossen mit andern Organisationsverhältnissen harmonieren, d. h. dass bei den primitiven *Plutonium* z. B. auch die Interkalarsegmente viel kräftiger entwickelt sind als bei den abgeleiteten *Scolopendra* u. a. Allgemein begegnet man bei den Gattungen der *Scolopendromorpha* zwei interkalaren Pleuritenpaaren, einem oberen neben dem Interkalartergit und einem unteren neben dem Interkalarsternit, dazwischen ein breites häutiges Gebiet. Selten nur erlischt die obere Interkalarpleure. Weniger selten ist das Vorkommen von Skleriten in dem häutigen Gebiet zwischen den beiden gewöhnlichen Pleuren. Allerdings sind diese Zwischenbildungen, welche ich als Rudimente der bei den *Geophilomorpha* gewöhnlichen und vorn erwähnten Bildungen auffasse, fast immer sehr klein, so namentlich bei *Cupipes* und *Ethmostigmus,* nur bei *Cormocephalus* fand ich noch eine deutlichere dritte Interkalarpleure, Abb. 25 *ipl 1.* Die Interkalarsternite zeigen drei Ausbildungsweisen, je nachdem sie in ihren Hälften wieder in zwei Teile zerlegt sind oder nicht und je nachdem sie in letzterem Falle aussen einfach abgerundet sind oder deutlich eingeschnitten. Ganz einheitliche unzerteilte Interkalarsternite kommen bei den *Scolopendromorpha* nicht vor, sind aber bei verschiedenen Vertretern der *Geophilomorpha* zu beobachten. Die Interkalar*tergite* zeigen bedeutende Unterschiede hinsichtlich der Stärke ihrer Entwickelung. Sehr grosse findet man bei den *Cryptopiden,* bei *Theatops* und *Newportia,* so dass sie schon bei gewöhnlicher Haltung des Tieres von aussen mit ihrem Hinterrandgebiet mehr oder weniger etwas sichtbar sind, je nachdem der Körper des betreffenden Individuums mehr oder weniger zusammengedrängt ist. Ziemlich grosse Interkalartergite findet man auch noch bei *Plutonium* und *Cormocephalus.* Bei *Cupipes* sah ich sie ziemlich gross aber unvollkommen abgegrenzt, mehr oder weniger schwächlich und für gewöhnlich vollkommen verdeckt durch den Hinterrand der Haupttergite sind sie bei *Anodontostoma, Arthrorhabdus, Scolopendra, Ethmostigmus, Alipes, Otostigma, Otocryptos* und *Scolopocryptops.* Bei *Rhysida* und zum Teil auch *Scolopendra* sind die Interkalartergite nicht nur recht klein, sondern auch nicht ganz vollständig abgegrenzt. *Die rück-*

schreitende Entwickelung der Interkalarsegmente innerhalb der Scolopendromorpha ist unverkennbar, zugleich wird man *auf zwei getrennte phylogenetische Wege geführt,* ausgehend von den grossen Tergiten und den einfachen, ungeteilten Sternithälften, wie bei *Theatops* und *Plutonium.* Auf dem einen dieser Wege (*Cryptopidae*) bleiben die Tergite kräftig und die Sternite werden aussen quer eingeschnitten; auf dem andern Wege schwächen die Tergite mehr und mehr ab und die Sternithälften werden abermals zergliedert (*Scolopendridae*).

Kräpelin widmete 1903 in seiner „Revision" einen besonderen Abschnitt der „genetischen Verwandtschaft der Scolopendridengattungen", wobei er sich folgendermassen äussert: „Es drängt sich ganz von selbst der Gedanke auf, dass wir es in der Gattung *Cryptops* mit einer Formengruppe zu tun haben, in welcher eine ganze Reihe der späterhin für die Trennung grösserer Abteilungen Wert gewinnenden Merkmale noch in buntem Gemisch und geringerer Differenzierung nebeneinander bei nächstverwandten Arten auftritt, mit andern Worten, dass die Gattung *Cryptops* als eine dem *Ausgangspunkt* der Gesamtfamilie nahestehende Formengruppe zu betrachten sei." Dieser Ansicht entsprechend stellt Kräpelin in seinem phylogenetischen Schema für die Verwandtschaftsbeziehungen an den Grund der ganzen Skolopender „augentragende cryptops-artige Skolopender" (S. 27). Mit Recht führt er für diese Anschauung (S. 22) an das *Fehlen* der Fortsatzbildungen an den coxopleuralen Bezirken des Endbeinsegmentes und das Fehlen der Zahnbildungen am Coxosternum des Kieferfusssegmentes, ferner die Gleichförmigkeit der Antennenbeborstung. Anders aber steht es mit der Beschaffenheit der Sternite, denn es ist *unmöglich* das Vorkommen „nur einer einzigen Medianfurche", welche „bei höheren Formen noch vielfach in Gestalt seichter Gruben wiederkehrt", als primär dem Vorkommen der seitlichen Episternalnähte als sekundär gegenüberzustellen und zwar aus folgenden Gründen: 1. sind die medianen Bildungen innere Verdickungs*leisten*, zu denen bei *Cryptops* noch schräge Querleisten hinzukommen, 2. sind die Episternalnähte wirkliche Nähte und 3. kommen mediane sehr deutliche Furchen bei der durchaus nicht primitiv beschaffenen Gattung *Anodontostoma* vor, während bei der ebenfalls nicht besonders primitiven Gattung *Trigonocryptops* keine Spur von Episternalnähten zu finden ist. Das Vorkommen der unpaaren Medianfurchen oder Leisten einerseits und der paarigen Episternalnähte andererseits bezeichnet daher nach meinen Untersuchungen *verschiedene Entwickelungsrichtungen.* Das wird zur Gewissheit, wenn man die übrige Beschaffenheit der *Sternite* ins Auge fasst und von der Verschiedenartigkeit der schon genannten Interkalarsternite abgesehen, sich überzeugt, dass das hinterste Drittel der Hauptsternite bei den *Cryptopiden* und *Newportia* stark *eingestülpt* ist und ein mehr oder weniger deutliches *Endosternit* bildet mit besonderen Beziehungen zu den Suprasternalpleuriten, während bei den meisten übrigen Gattungen der Skolopender das Hauptsternit hinten gar nicht oder nur unbedeutend versenkt ist und auch die Suprasternalplatten eine mehr oberflächlicde Lage bewahren. Auch hinsichtlich der Laufbeine und namentlich *Endbeine* kann ich Kräpelin nicht beistimmen, wenn er insbesondere für *Cryptops* betont, dass „von einer Individualisierung der zahlreichen Dörnchen des Femur, von der Ausbildung eines Eckdorns u. s. w. nichts zu bemerken ist.“ Sehen wir zunächst ab von den Formen mit besonders eigentümlichen Endbeinen, also *Newportia, Plutonium* und *Theatops* und stellen *Cryptopiden* und *Scolopendriden* einander gegenüber, dann haben wir es schon mit physiologisch-biologisch verschiedenartigen Bildungen zu tun, nämlich einerseits *Fangbeinen,* deren Tibia und 1. Tarsus eine mehr oder weniger bezahnte, taschenmesserartig einschlagbare Klappe bilden, während andererseits bei den eigentlichen *Scolopendriden* einfache Tast- und Schleppbeine oder bekrallte und bedornte Klammerbeine vorliegen, jedenfalls ohne jene Klappvorrichtung. Auf S. 25 sagt Kräpelin, dass „die anfangs über alle Abschnitte der Gehbeine gleichmässig ausgedehnte Behaarung resp. Bedornung der Gehbeine beschränkte sich mehr und mehr auf die Endglieder, lieferte hier die teils in der Einzahl teils doppelt vorhandenen Tarsalsporne, sowie auch die Klauensporne, bis am Ende der Entwickelungsreihe auch diese Gebilde verschwinden. In gleicher Weise zog sich die Beborstung der distalen Abschnitte der Analbeine auf das Femoralglied zurück, wie sie in der Ausbildung des Eckdorns und ausgesprochener Dorn-Individualitäten ihren Höhepunkt erreichte, während gleichzeitig die Pseudopleuren aus dem einfachen, am Hinterrande regellos mit Dörnchen besäten Rechteck mehr und mehr in die zu einer langen Spitze ausgezogene, dornengekrönte Form übergingen.“ A priori ist diese Auffassung wohl einleuchtend, aber sie scheitert an dem Umstande, dass hier *zweierlei grundverschiedene Gebilde* in einen phylogenetischen Rahmen gestellt worden sind, nämlich Borsten und Stachelborsten einerseits, sowie Dornen andererseits. (Ich verweise hier auf die betreffenden Abschnitte meiner eingangs Nr. 4 aufgeführten *Lithobiiden*-Arbeit.) *Dornen* sind *einfache Hautskleritfortsätze*, ohne Basalgelenk und ohne Nerv, während Borsten und den durch Verstärkung aus ihnen entstehenden Stachelborsten beides zukommt. Die Entstehung beider Kategorien von Hautskelettbekleidung ist daher vollkommen *unabhängig von einander erfolgt.* Aus den einfachen haarartigen Tastborsten, welche ich nirgends so einfach und gleichmässig angeordnet gefunden habe wie in den seitlichen Gebieten des Rumpfes der der Dornen am Endbeinsegment entbehrenden Gattung *Plutonium*, [welche wir aber bei den *Cryptopiden* in grosser Mannigfaltigkeit antreffen], gehen durch allmähliche Verstärkung dickere Tastborsten und schliesslich steife Stachelborsten hervor, welche aber immer das deutliche Grundgelenk zeigen. An den drei letzten Beinpaaren der *Cryptopiden* sieht man besonders schön die verschiedenen Stufen der Tastborstengebilde, indem sich alle Übergänge finden von den feinen einfachen Borsten bis zu den dicken stiftartigen. Letztere sind bei *Cryptops* an allen Beinpaaren vorhanden, besonders reichlich am Telopodit der Endbeine. Aus diesen Stiftborsten konnten sich also auch die „Tarsalsporne“ anderer Skolopender-Gattungen entwickeln, *nicht* aber die „Klauensporne“, welche, wie ich in Nr. 4 zeigte, *Ungulumabspaltungen* vorstellen. Ebenso wenig haben mit *Borstenstiften* etwas zu tun die *Dornen*, welche am Coxopleuralbezirk des Endbeinsegmentes und an den Endbeinsegmenten selbst vorkommen und bei den typischen *Scolopendriden* so reichlich vertreten sind. Wir finden ja bei *Cryptops* an den Endbeinen beiderlei Gebilde neben einander, denn die Spitzen der Endbeinfangklappe sind *Dornen*, also *starre Hautskelettfortsätze*, welche eine von den umgebenden Stiften und Tastborsten durchaus verschiedene Natur besitzen. Nach meinen Untersuchungen weisen uns also *auch die Dornen- und Borsten-Bildungen* sowohl am Rumpfe als auch an den Anhängen (Beinen) des Skolopender-Körpers, übereinstimmend mit dem, was oben über Sternite, Endosternite, Interkalarsegmente und Endbeingliederung gesagt wurde, *auf verschiedene, auseinanderlaufende Entwicklungsrichtungen*, welche aber gemeinsam zurückweisen auf

Formen mit *gleichförmiger, feiner haarartiger Beborstung,* wie sie noch ziemlich deutlich bei *Plutonium* erhalten ist. Von diesen verschiedenen Entwicklungsrichtungen ist die eine ausgezeichnet durch Borstenbildung verschiedenster Stärke bei spärlicher Dornenausbildung (*Cryptopiden, Newportiiden*), die andere durch mehr oder weniger vollständige Verdrängung des Borstenkleides und reichlichere Dornenentwicklung (*Scolopendriden*). Dass die Tibial- und Tarsal-„Sporne“ *verdickte Tastborsten* sind, erkennt man besonders deutlich auch bei *Newportia*. Ausdrücklich betonen will ich schliesslich noch, dass nach dem oben Gesagten die bei *Cryptopiden* so reichlich auftretenden, kurzen und dicken *Stiftborsten* nicht, wie es nach Kräpelins Darlegung scheinen könnte, als Übergangsbildungen von Borsten zu Dornen angesprochen werden können, sondern als eine *besondere Eigentümlichkeit der Cryptopiden* und zwar als eine Ausgestaltung des einfachen primären feinen und mehr gleichmässigen Borstenkleides.

Kräpelins Darlegung der Skolopender-Phylogenie enthält ferner einen prinzipiell wichtigen und von ihm nicht weiter begründeten aber in der Verwandtschafts-Darstellung in wichtiger Weise zum Ausdruck gebrachten Punkt, welcher *die Auffassung der Zahl der Stigmenpaare betrifft.* Er leitet nämlich *Plutonium* mit seinen *19* von *Theatops* mit nur *9* Stigmenpaaren ab, ähnlich *Scolopocryptops* mit *11* von *Otocryptops* mit nur *10, Rhysida* und *Ethmostigmus* mit *10* von *Otostigmus* mit nur *9* Stigmenpaaren ab und entsprechend in anderen ähnlichen Fällen. In Wirklichkeit verhält es sich *bei allen diesen Gattungsbeziehungen umgekehrt* und zwar auf Grund eines höchst wichtigen und für die gesammte betreffende Tierwelt gültigen Grundsatzes, wonach als *ursprüngliche* Formen diejenigen zu betrachten sind, welche eine mehr *gleichartige* (homonome) Segmentierung aufweisen, während andere Formen um so mehr für abgeleitet (derivat) zu betrachten sind, je *ungleicher* (heteronomer) sich die Körpergliederung gestaltet hat, d. h. also je weiter die Funktionsteilung der einzelnen Segmente gediehen ist. Bei den *Chilopoden* (und auch Diplopoden) sind aber mit Rücksicht auf Stigmen und überhaupt fast alle Organe, welche *in segmentaler Folge* auftreten, diejenigen Formen besonders ursprünglich, welche diese segmentale Folge an möglichst zahlreichen Segmenten gleichmässig bewahrt haben. Die *Geophilomorpha* sind als diejenige Gruppe bekannt, bei welcher mit

Rücksicht auf *Stigmen* eine höchst homonome Segmentierung herrscht und unter den bekannten *Scolopendromorpha* ist *Plutonium* die einzige Gattung, welche sich in dieser Hinsicht an jene anschliesst, sie ist daher mit Rücksicht auf ihr Tracheensystem die *primitivste* bekannte Form. Je mehr bei den Skolopendern die Stigmenzahl *erniedrigt* ist, um so *abgeleiteter* ist die betreffende Gattung. (Ähnliches ist ja auch von *Hexapoden* mehrfach erwiesen worden.) Der Erniedrigung der Stigmenzahl geht aber bei den meisten Gattungen *eine Erhöhung der Komplikation des Stigmenbaues* (und allem Anschein nach des Tracheensystems überhaupt) *parallel*, oft auch eine *Vergrösserung* der Stigmen, wodurch schon auf eine Vermehrung der Tracheenrohre hingewiesen wird. Kräpelin hat sicherlich recht, wenn er die Zweiteilung der Skolopender in Holopneusticae und Hemipneusticae „als wenig glücklich" zurückweist, denn hierdurch wird in der Tat ein echt künstliches System nach einer einzigen Merkmalgruppe aufgestellt. Andererseits kann ich ihm aber auch nicht in das Entgegengesetzte folgen, die Unterscheidung zweier Gattungen durch ein Mehr von 8—10 Stigmenpaaren nicht viel höher als ein Mehr von einem Paar zu werten und dem entsprechend das Verhältnis von *Theatops* und *Plutonium* zu gestalten. Ohne Frage stimmen wir darin überein, dass diese beiden Gattungen *einander am nächsten stehen* unter den bekannten Skolopendern. Trotzdem ist die Kluft zwischen ihnen derartig gross, dass darin zahlreiche Gattungen Platz finden könnten. Für die *Cryptopiden* ergibt sich aber wiederum ein wichtiger Punkt gegen die Möglichkeit, diese Gruppe, auch abgesehen von den Augen, zum Ausgangspunkte der ganzen Skolopender zu machen. Anderweitige Folgen für die verwandtschaftliche Auffassung der Skolopender-Gattungen ergeben sich von selbst.

Die bisherigen Weisen der systematischen Gruppierung der Skolopender hat Kräpelin in seinem Buche S. 26 bereits erörtert. Für mich kommen nur die beiden Systeme von Pocock und Kräpelin in Betracht. Pocock unterscheidet innerhalb der Ordnung *Scolopendromorpha* die Familien 1. *Scolopendridae* (augentragende Formen), a) *Alipedinae* mit Alipes, b) *Scolopendrinae* die übrigen. 2. *Scolopocryptidae*, 3. *Newportiidae*, 4. *Cryptopidae* (alle blinden Formen mit 21 Beinpaaren.)

Kräpelin fasst die Skolopender als eine einzige Familie *Scolo-*

pendridae, welche er in drei Gruppen bringt; 1. Cryptopinae (die augenlosen Formen), 2. *Scolopendrinae* (die augentragenden Formen mit dreieckigen Stigmen), 3. *Otostigminae* die übrigen.

Meine Untersuchungen haben mich zu Ergebnissen geführt, welche von denen beider Forscher abweichen, was mit Rücksicht darauf, dass ich verschiedene Organisationsverhältnisse untersucht habe, welche bisher gar nicht oder nur oberflächlich studiert worden sind, auch nicht weiter erstaunlich sein kann. Immerhin steht das von mir gewonnene System dem System Pococks wesentlich *näher* als demjenigen Kräpelins, was in erster Linie darin liegt, dass Kräpelin die so heterogenen Blindformen in seine unnatürliche Gruppe der „Cryptopinae" zusammenbrachte. Fasst man dagegen die augentragenden Skolopender allein ins Auge, so ist Kräpelins Scheidung in *Otostigminae* und *Scolopendrinae* entschieden naturgemässer als Pococks Zweiteilung der *Alipedinae* und *Scolopendrinae*. — Pocock und Kräpelin stimmen darin überein, dass sie zwischen augenführenden und augentragenden Formen einen Hauptunterschied machen, auch sagt letzterer auf S. 13 seiner „Revision" ausdrücklich, „dass es sich in der Familie der *Scolopendriden* um zwei zur Zeit des Bindegliedes entbehrende Stämme handelt, die durch den Besitz resp. den Mangel der Augen scharf von einander geschieden sind." Dieser Ansicht habe ich anfangs ebenfalls gehuldigt, musste sie aber aufgeben mit Rücksicht auf *Otocryptops* und *Scolopocryptops* (abgesehen von den mir in natura nicht bekannten Gattungen *Mimops* und *Pseudocryptops*). Schon im Habitus schliessen sich die beiden ersteren Gattungen den typischen *Scolopendriden* weit mehr an als den übrigen Blindformen, es gilt das aber auch für zahlreiche Bauverhältnisse, so die Gestalt und Behaarung der Antennen, die Beschaffenheit der Bedornung des Endbeinsegmentes, die Gestalt der Endbeine und des Endbeinsegmentes und die Bekleidung der Laufbeine. Besonders beachtenswert ist der Bau der Stigmen, denn in diesen schliessen sich *Scolopocryptops* und *Otocryptops* unmittelbar *Rhysida*, *Ethmostigmus* und Verwandten an, für diese eine einfachere Vorstufe darstellend. Was sie aber sonst an Eigentümlichkeiten besitzen, ist nicht geeignet, sie den übrigen Blindformen besonders zu nähern, ausgenommen den Augenmangel. Diese Differenz kehrt aber in der Tierwelt so hundertfältig wieder, dass ich ihr keine besonders grosse Bedeutung beimessen kann. Kräpelin betrachtet „die Auffassung der augenlosen Formen als einer Summe degenerierter, den verschiedensten Gruppen sehender Skolopender entstammender Blindtiere auf Grund der gesamten Organisation als unwahrscheinlich.“ Gerade die Entstehung der Augen in phylogenetischer Hinsicht ist bei den *Tracheaten* in ein vollständiges *Dunkel* gehüllt, sodass es sich empfiehlt, auf diese Frage möglichst wenig Gewicht zu legen. Mit absoluter Sicherheit lässt es sich überhaupt nicht entscheiden, ob die Ocellen bei den *Epimorpha* sekundär *verschwunden* sind oder primär bei einem Teil der *Scolopendromorpha aufgetreten*. Wollen wir das *Erstere* annehmen, dann ist *die Ocellenrückbildung sicherlich mehrfach* und *unabhängig von einander erfolgt*, mindestens dreimal, einmal bei *Cryptopiden* und *Newportia*, das zweite Mal bei *Plutonium* und *Theatops* und das dritte Mal bei *Scolopocryptops* und *Otocryptops*.

Höchst merkwürdig sind die Gattungen *Anethops* Chamberlin 1902 und *Mimops* Kräpelin 1903, namentlich die letztere, welche nach der kurzen Beschreibung nur *einen* Ocellus jederseits besitzt, ein Umstand, welcher mehr für die Annahme einer Ocellen*rückbildung* innerhalb der *Epimorpha* spricht. Ohne diese Gattungen gesehen zu haben, kann ich mir nach den kurzen Diagnosen kein Urteil über die verwandtschaftliche Stellung bilden, es scheint aber, dass beide einander recht *fern* stehen. *Mimops* scheint eine besondere Gruppe zu vertreten, welche Beziehungen zu den *Cryptopiden* zeigt, während *Anethops* mehr auf die echten *Scolopendriden* hinweist.

Schliesslich noch einige Worte über die oben bereits bei den einzelnen Gattungen besprochene *Coxopleure*, welche ein nicht unwichtiges Merkmal auch für die Skolopender-Gruppen ist. Ihre allmähliche Abtrennung von der *Eucoxa superior* wurde oben schon begründet. Hier betone ich, dass wir hauptsächlich *vier* verschiedene Fälle zu unterscheiden haben, nämlich:

1. Bei *Cryptopiden* entweder ein schwaches Plättchen dicht oben über der Gelenkgrube des Telopodit oder ein deutlicheres und mehr abgerücktes Sklerit zwischen Eucoxa und Katopleure.

2. Bei *Newportia* ein durch Naht abgeschnürtes hinteres Stück am oberen Bogen, welcher die Telopodit-Gelenkgrube umfasst.

3. Ähnliche Abschnürungen von mehr oder weniger deutlicher Ausprägung bei *Ethmostigmus, Alipes, Anodontostoma, Plutonium, Scolopendra.* Die Abschnürungsstelle liegt aber nicht oben hinten wie bei *Newportia,* sondern oben vorn, am oberen Ende der steil heraufgehenden Eucoxa superior.

4. Selbständige, unter die Katopleure geschobene Coxopleure, welche mit der *Eucoxa superior* ein deutliches Gelenk bildet, so bei *Cormocephalus, Otostigma* und *Rhysida.*

Unter den sonstigen Formen, also namentlich *Scolopocryptops, Otocryptops, Cupipes* und *Arthrorhabdus* habe ich keine Coxopleuren beobachtet. Die sonstigen verwandtschaftlichen Verhältnisse der *Skolopender* haben mich zu dem Schlusse geführt, dass die Coxopleuren unabhängig von einander, mehrfach und auf etwas *verschiedene* Weise zur Ausprägung gelangt sind.

* * *

Meine Untersuchungen über die im Vorigen behandelten Verhältnisse des Körperbaues der *Scolopendromorpha* haben mich im Verein mit dem, was bereits nach dieser Richtung bekannt war, zu den folgenden systematischen Gruppen geführt. Ich unterscheide sechs Familien der *Scolopendromorpha,* welche zu je zwei in näherer Beziehung stehen, nämlich 1. *Cryptopidae* und *Newportiidae,* 2. *Theatopsidae* und *Plutoniidae,* 3. *Scolopocryptidae* und *Scolopendridae.* Man könnte hieraus zu dem Schlusse neigen, dass sich drei Unterordnungen unterscheiden liessen. Es sind aber hierfür meines Erachtens die Unterschiede nicht tiefgreifend genug, sodass ich es, wenn nicht etwa später noch weitere entsprechende Organisationsunterschiede nachgewiesen werden, für richtiger halte, die drei Hauptgruppen als *Superfamilien* aufzuführen und zwar folgendermaassen:

A. ***Superfamilia Cryptopina*** mihi. Sternite der meisten Rumpfsegmente länglich, mehr oder weniger *länger* als breit, entweder mit scharf ausgeprägtem *Endosternit* oder wenn dieses nur unvollständig ausgebildet ist, hinten in der Mitte vorspringend und seitlich eingebuchtet. In die Buchten greifen dann die Suprasternalplatten ein. Episternalnähte fehlen, häufig sind an den Sterniten laterale, seltener mediane innere Verdickungsleisten ausgebildet. Endbeinsegment nicht auffallend vergrössert, Endbeine entweder mit taschenmesserartiger Klappe zwischen Tibia und Tarsus oder mit in Gliederchen zerschnürtem Tarsus, Kralle nicht ungewöhnlich vergrössert. Ocellen fehlen. Interkalarsternithälften einfach oder doch höchstens mit schwacher Andeutung eines Innenteiles, interkalare Tergite stark entwickelt. Stigmen stets mit gleichmässig verlaufendem, aus kleinen Bögelchen zusammengesetztem Peritrema, Stigmenkelch ohne Zerklüftung und ohne dreizipfelige Klappe. 9 oder 11 Stigmenpaare. (Hierhin *Cryptopidae* und *Newportiidae.*)

B. ***Superfamilia Theatopsina*** mihi. Sternite so lang wie breit, hinten einfach zugerundet, ohne Endosternit und ohne Episternalnähte, mit Medianfurche. *Endbeinsegment* auffallend vergrössert, länger und viel grösser als das 20. Rumpfsegment. Endbeine sehr stark verdickt und zu einer Kneif*zange* umgestaltet, deren Kralle länger ist als die beiden Tarsalglieder zusammen. Ocellen fehlen. Interkalare Sternithälften einfach. Interkalartergite stark entwickelt. Stigmen mit aus regelmässig angeordneten Bögelchen bestehendem Peritrema, der Kelch innen entweder mit deutlicher Zerklüftung oder mit einer unvollkommenen Klappe. 9 oder 19 Stigmenpaare. Pro- und Metacoxa nur auf kurzer Strecke durch die Eucoxa getrennt. (Hierhin *Theatopsidae* und *Plutoniidae.*)

C. ***Superfamilia Scolopendrina*** mihi. Sternite so lang wie breit oder häufig *breiter* als lang, weder mit vollkommenem noch unvollkommenem Endosternit, hinten vielmehr *einfach* abgerundet, meist mit zwei Episternalnähten, seltener ohne dieselben und dann manchmal mit Medianfurche, stets ohne seitliche Verdickungsleisten. Endbeinsegment *nicht* auffallend vergrössert, Endbeine weder mit Klappvorrichtung noch mit vielgliedrigem Tarsus, noch in Kneifzangen umgewandelt, meist und namentlich am Präfemur und Femur mit Dornen besetzt. Ocellen meist zu vier jederseits vorhanden, manchmal fehlend. Interkalare Sternithälften entweder einfach oder aber meistens sehr deutlich zweiteilig. Interkalartergite meist mehr oder weniger schwächlich, bisweilen überhaupt undeutlich, seltener kräftig ausgebildet. Stigmen häufig mit unregelmässigem Peritrema, ihr Kelch entweder mit deutlicher Boden*zerklüftung* oder mit *dreizipfeliger* Klappe. Stigmenpaare 9, 10 oder 11. (Hierhin *Scolopocryptidae* und *Scolopendridae.*)

A I *Cryptopidae* m.: Rumpf mit 21 Beinpaaren und 9 Stigmenpaaren. Sternite *nicht* gleichmässig und stark nach hinten verschmälert, Endosternit entweder schwächer und dann vorn nicht durch innere Querleiste begrenzt, oder stärker, vorn scharfbegrenzt und dann davor mit drei durch Nähte von einander geschiedenen Dreiecken und schrägen Querleisten zwischen den Hüften. Interkalare Sternithälften aussen deutlich *eingeschnitten*. Endbeine und mehr oder weniger auch die eigentlichen Laufbeine mit Borstenstiften besetzt. Präfemur der Endbeine ohne Dornen, Endklauen derselben deutlich, Tarsus zweigliedrig, nicht in kleine Gliedchen aufgelöst, zwischen Tibia und 1. Tarsus eine taschenmesserartige Klappvorrichtung. An den meisten Rumpfsegmenten *eine* längliche Anopleure. Metacoxa wenig kleiner als die Procoxa. Coxopleuralbezirk des Endbeinsegmentes hinten *nicht* in einen Fortsatz ausgezogen. — Hierhin *Cryptops*, *Chromatanops*, *Trigonocryptops* (und allem Anschein nach auch *Paracryptops*).

A II *Newportiidae* Pocock 1895[1]): Rumpf mit 23 Beinpaaren und 11 Stigmenpaaren. Sternite auffallend viel *länger* als breit, nach hinten trapezisch stark verschmälert, das *Endosternit* durch innere Querleiste scharf abgesetzt, vor demselben weder Dreiecke, noch Querleisten zwischen den Hüften, aber eine Medianleiste. An die die Querleiste vorn am Endosternit begrenzenden Seitenhöcker legen sich eng die Suprasternalplättchen. Interkalare Sternithälften aussen *ohne* Einschnitt. Endbeine *ohne* Borstenstifte, Präfemur *mit* Dornen, Endkrallen fehlen, Tarsus *viel*gliedrig, daher keine Klappvorrichtung. An den meisten Rumpfsegmenten zwei kurze Anopleuren. Metacoxa viel kleiner als die Procoxa. Coxopleuralbezirk des Endbeinsegmentes hinten mit einem dornspitzigen Fortsatz. — Hierhin die Gattung *Newportia*.

B I *Theatopsidae* m.: Rumpf mit 9 Stigmenpaaren. Stigmenkelche innen mit einer unvollkommenen Klappe, Stigmen den Tergiten stark genähert, Stigmenschildchen schwach. Anopleuren 1 + 2 + 1. Endklaue der Zangenbeine kaum länger als der Tarsus. Metacoxa an den Laufbeinen einheitlich. — Hierhin *Theatops* (= *Opisthemega*).

[1]) Biologia Centrali-Americana. Chilopoda. London 1895. Part. CXXVI.

B II *Plutoniidae* Bollmann 1895: Rumpf mit 19 Stigmenpaaren. Stigmenkelche innen mit deutlichen, gewundenen Spalten, also zerklüftet. Stigmen an den bei *Theatops* stigmenlosen Segmenten durch ein kräftiges Pleurit vom Tergit getrennt, Stigmenschildchen sehr deutlich. Anopleuren 0 + 1 — 2 + 0 — 1. Endklaue der Zangenbeine so lang wie Tarsus und Tibia. Metacoxa an den Laufbeinen in zwei über einander gelegene Abschnitte zerschnürt. — Hierhin *Plutonium*.

C I *Scolopocryptidae* m.: Stigmen von rundlicher bis länglicher Form, im letzteren Falle entweder von unten nach oben gestreckt oder mit seichtem Kelche, jedenfalls vorn niemals spitzwinkelig und nicht mit dreieckigem Peritrema. *Kelch* meistens mit mehr oder weniger reichlicher *Bodenzerklüftung*, jedenfalls nie mit dreizipfeliger Klappe. — Hierhin die *Scolopocryptinae*, *Anodontostominae*, *Otostigminae* und *Ethmostigminae*.

C II *Scolopendridae* Kräpelin 1903 („*Scolopendrinae*"): Stigmen der Körperlängsachse parallel gerichtet, vorn spitzwinkelig, meistens mit dreieckigem Peritrema, innen *mit dreizipfeliger Klappe* im Kelch, bestehend aus zwei grösseren Lippen oben und unten und einer kleinen hinteren. — Hierhin die *Scolopendrinae* und *Scolopendropsinae*.

* * *

Die *Scolopocryptidae* zerlege ich in die folgenden vier Unterfamilien:

a) *Scolopocryptinae* Pocock 1895 („*Scolopocryptidae*"): Rumpf mit 23 Segmenten und Beinpaaren, 10 oder 11 Stigmenpaare. Stigmen freiliegend, ohne deutlichen Atemschild. Ocellen fehlen. Coxosternum der Kieferfüsse ohne oder nur mit sehr schwachen Zahnplatten. Coxopleuren fehlen. Tergite ohne Längsrippen. Sternite ohne mediane Längsfurche, auch ohne Episternalnähte. Interkalare Sternithälften einfach. Tergit des Endbeinsegmentes hinten nur wenig vorspringend, die Fortsätze des Coxopleuralgebietes weit auseinander stehend, nach unten *steil abfallend*. — (Hierhin *Scolopocryptops* und *Otocryptops*.)

b) *Anodontostominae* mihi: Rumpf mit 21 Segmenten und Beinpaaren, 10 Stigmenpaaren. Die mässig tiefen und am Kelchboden zerklüfteten

Stigmen in sehr *grossem* Atemschild gelegen, welcher mit dem Nachstigmaschild *verwachsen* ist. Vier Ocellen jederseits vorhanden. Coxosternum der Kieferfüsse *ohne* Zahnplatten. Coxopleuren unvollständig abgesetzt. Tergite mit neun parallelen, *rippenartigen* Längswülsten. Sternite mit innerer Medianleiste und äusserer Längsfurche, ohne Episternalnähte. Interkalare Sternithälften zweiteilig. Tergit des Endbeinsegmentes hinten stark dreieckig vorspringend und bis über die Mitte der Endbeinpräfemora hinausragend. Fortsätze am Coxopleuralgebiet des Endbeinsegmentes sich endwärts innen ganz oder fast ganz berührend, unten *horizontal* ausgebreitet und daher auffallend breit, *plattenartig*. — (Hierhin *Anodontostoma*.)

c) *Otostigminae* m.: Rumpf mit 21 Segmenten und Beinpaaren, 9 Stigmenpaaren. Stigmen nur von sehr schwachem Pleurit umgeben, länglich von unten nach oben, mit *tiefem* aber *nicht* zerklüftetem Kelch. Vier Ocellen jederseits vorhanden. Coxosternum der Kieferfüsse mit deutlichen Zahnplatten. Coxopleuren vorhanden, gelenkig gegen die Eucoxa superior abgesetzt. Tergite zuweilen mit Längskielen, nicht aber mit eigentlichen Rippenwülsten. Sternite mit vollständigen oder nur abgekürzten Episternalnähten. Interkalare Sternithälften zweiteilig. Tergit des Endbeinsegmentes hinten nicht stark, nur abgerundet oder kurz dreieckig vorspringend, (selten beim ♂ mit Fortsatz). Fortsätze am Coxopleuralgebiet des Endbeinsegmentes sich innen nicht berührend, unten nicht horizontal ausgebreitet, vielmehr gewölbt und von verschiedenartiger Gestalt, bisweilen bei ♂ und ♀ verschieden. — (Hierhin die artenreiche Gattung *Otostigma*, welche bei gründlicher Durcharbeitung gewiss in mehrere Gattungen zerlegt werden wird.)

d) *Ethmostigminae* m.: Rumpf mit 21 Segmenten und Beinpaaren und 9 oder 10 Stigmenpaaren. Stigmen gross, mit deutlich *zerklüftetem* Kelchboden, in einem Atemschild gelegen, welcher einen nur schmalen Rahmen bildet und bisweilen auch unvollständig ist. Vier Ocellen vorhanden. Coxosternum der Kieferfüsse mit deutlichen Zahnplatten. Coxopleuren vorhanden, entweder unvollständig abgeschnürt, oder mit der Eucoxa superior ein Gelenk bildend. Tergite zuweilen mit Längskielen, nicht aber mit eigentlichen Rippenwülsten. Sternite mit vollständigen oder nur abgekürzten Episternalnähten. Interkalare Sternithälften zweiteilig. Tergit des Endbeinsegmentes hinten nur wenig vorspringend. Fortsätze am Coxopleuralgebiet des Endbeinsegmentes innen getrennt und unten gewölbt.

α) Tribus *Rhysidini* m.: Die Endbeine mit einfacher Gliederung, kräftigen Endkrallen. Rumpf mit 10 Stigmenpaaren. — (Hierhin *Rhysida* und *Ethmostigmus.*)

β) Tribus *Alipedini* Pocock: An den Endbeinen sind die drei Endglieder blattartig erweitert, Endkrallen fehlen. Rumpf mit 9 Stigmenpaaren. — (Hierhin *Alipes.*)

* * *

Die *Scolopendridae* lassen sich in zwei Unterfamilien zerlegen, welche Kräpelin in seiner *Revision*, wenn nicht dem Namen, so doch der Sache nach bereits unterschieden hat, nämlich:

a) *Scolopendropsinae:* Erster Tarsus (grundwärtiger) deutlich *kürzer* als der zweite. Coxopleuralgebiete des Endbeinsegmentes hinten vollkommen *abgestutzt.* — (Hierhin *Scolopendropsis* und *Pithopus*, letztere Gattung ist vielleicht nicht aufrecht zu halten.)

b) *Scolopendrinae:* Erster Tarsus deutlich *länger* als der endwärtige zweite. Coxopleuralgebiete des Endbeinsegmentes hinten in einen mehr oder weniger starken *Fortsatz* ausgezogen. — (Hierhin *Cupipes*, *Cormocephalus*, *Trachycormocephalus*, *Arthrorhabdus*, *Scolopendra* und noch einige mit letzterer nahe verwandte Gattungen, welche weiterer Prüfung bedürfen.)

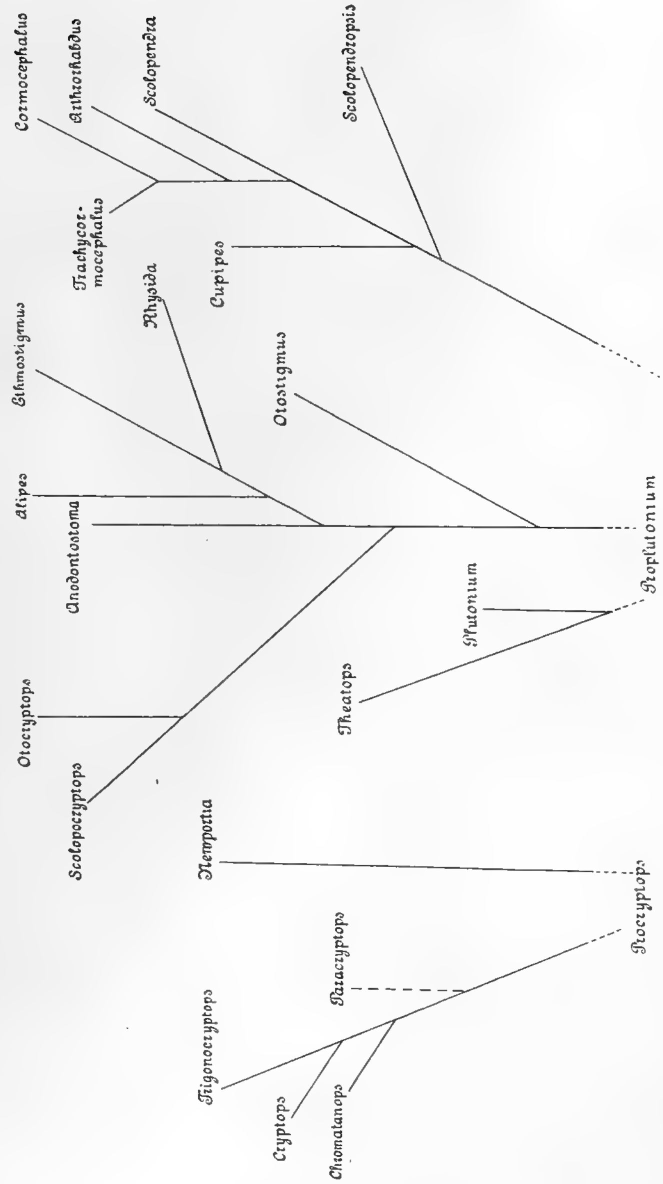
Die Gattungen *Asanada* Meinert 1886 und *Pseudocryptops* Pocock 1891 kenne ich nicht in natura, bin aber nach dem, was bisher über ihren Bau bekannt geworden ist, nicht genügend im klaren, ob sie zu den *Scolopendridae* m. gestellt werden dürfen. Ist das der Fall, dann würde für diese Gattungen eine dritte Unterfamilie zu unterscheiden sein. —

Schliesslich möchte ich hier noch betonen, dass es mir bei meinen Untersuchungen in erster Linie auf eine Klärung der Gruppen ankam.

Hinsichtlich der Artuntersuchungen habe ich zunächst hauptsächlich die *Cryptopiden* ins Auge gefasst. Was die von der Beschaffenheit der Rumpfsegmente entnommenen Merkmale der Sternite und Coxopleuralgebilde betrifft, so betone ich, dass hauptsächlich das *4.—16.* Rumpfsegment in Betracht gezogen sind, weil die vorderen und hinteren Segmente mehr oder weniger starke Abweichungen darbieten. Mit den von mir zur systematischen Bearbeitung der Formen neu herangezogenen Merkmalen ist die Zahl der in dieser Hinsicht verwendbaren Charaktere noch nicht erschöpft, aber ich beschränke mich vorläufig auf das Vorstehende. Mit blossen Lupenuntersuchungen werden unsere Kenntnisse freilich nicht sehr vertieft werden und deshalb möge daran erinnert sein, dass manche mehr mikroskopisch erkennbare Merkmale, wie z. B. die Beschaffenheit des Stigmakelches, viel wichtiger und konstanter sein können als andere schon mit der Lupe genügend zu erkennende aber nicht so komplizierte und auch viel variablere Charaktere, wie z. B. Dornen und Fortsätze. Selbstverständlich will ich hier nicht eine abgeschlossene Darstellung der Gattungen geben, auch nicht einmal der mir bekannten, es genügt mir, der Forschung eine etwas andere Richtung gegeben und die Erkenntnis der Verwandtschaftsbeziehungen der behandelten Gattungen um weniges weitergeführt zu haben.

In dem nebenstehenden *Schema* soll nur das verwandtschaftliche Verhältnis im allgemeinen zum Ausdruck gebracht werden, nicht die genaue Grösse des Abstandes der einzelnen Gattungen von einander. Die einzelnen lebenden Gattungen sind derartig beschaffen, dass wir von *keiner derselben irgend eine andere lebende Gattung ableiten können*, wie das auch bereits E. Haase in seinem Schema a. a. O. S. 39 zum Ausdruck gebracht hat, während Kräpelin auf S. 27 seiner Revision von diesem Verfahren abgewichen ist. *Wir können einzelne Organe zwar recht gut zu einer ununterbrochenen phylogenetischen Reihe zusammenstellen, nicht aber die ganzen Tiere,* denn wenn irgend eine Form in zahlreichen Charakteren *primitiven Bau* aufweist und daher für das Verständnis anderer, abgeleiteterer Formen besonders wichtig ist, so weist sie (und dies gilt für *alle* Tiergruppen, welche ich bisher mit Rücksicht auf Phylogenie untersucht habe!) — in einem oder einigen anderen Merkmalen eine mehr oder weniger *derivate Besonderheit* auf. Das heisst also, dass es *nach meinen Erfahrungen keine absolut*

Schematische Darstellung der verwandtschaftlichen Beziehungen der Scolopendromorpha.



primitiven Formen in der Jetztwelt gibt. Es liegt ja auch der Gedanke nahe, dass die ehemaligen rein primitiven Formen, welche unter Verhältnissen lebten, welche von den jetzigen bedeutend abweichend gewesen sein müssen, infolge der späteren Veränderungen entweder ausstarben oder sich den *neuen Verhältnissen* mehr oder weniger anpassten und daher abänderten.

Von einer Gattung, welche allen jetzt lebenden *Scolopendromorpha* als Stammgruppe dienen könnte, kann also nach meinen Erfahrungen nicht die Rede sein, auch nicht in dem Sinne, dass man nur eine bescheidene Änderung für eine solche hypothetische Gruppe vornähme, wie also etwa bei den von Kräpelin angenommenen „augentragenden cryptopsartigen Skolopendern", denn dieselben würden ja danach *Cryptopiden* sein und also nur als Urformen für diese eine Familie in Betracht kommen können. Hier wie bei der systematischen Bearbeitung anderer Tiergruppen komme ich zu dem Ergebnis, dass *die phylogenetischen Grundformen nur theoretisch konstruiert werden können, wenn es sich um Gattungen und höherwertige Kategorien handelt.* Wir konstruieren sie aber dadurch, dass wir *durch Synthese eine Form definieren, indem wir ihr primitive Charaktere geben, welche derartig sind, dass von denselben logisch alle lebenden Formen abgeleitet werden können.*

Hiermit komme ich zunächst auf zwei Urformen, nämlich

1. augenlose *Procryptops,* welche am Rumpf längliche Sternite besitzen, nur Andeutungen von Endosterniten, deutlich aber gleichartig beborstete Beine und einfach beborstete Endbeine, ohne Klappenvorrichtung, ohne Dornen und ohne Tarsusringelung, mit Endkrallen, Coxopleuralbezirke des Endbeinsegmentes mit *geringer* Drüsenzahl und ohne Fortsatz, 21 Rumpfsegmente und *10* kleine Stigmenpaare, von rundlicher Form und einfachem Kelch, Kieferfusssegment mit deutlich abgesetztem Tergit, an den Kieferfüssen Präfemur und Tarsungulum aussen nicht in direkter Berührung, Coxosternum ohne Zahnplatten. Interkalartergite gross, interkalare Sternithälften einfach. 21. Rumpfsegment nicht grösser als das 20. Stigmen in sehr *kleinen* Atemschildchen. *Zwei* Anopleuren vorhanden $(1+1+0)$, von denen die hintere höher liegt, aber beinahe in gleicher Höhe mit der vorderen. Eucoxa ohne Coxopleurenteil. Pro- und Metacoxa fast *gleichgross,* sich in einem Punkte berührend, sodass die Eucoxa fast vom Sternit getrennt ist. Conus lateralis sterni und Sternitseitenhaut recht kurz;

2. augentragende *Proplutonium*, welche quadratische Rumpfsternite besitzen, vollkommen ohne Endosternit, fast unbeborstete Beine, mit Spornen unten an Tibia und Tarsus, einfache, nackte Endbeine, Hüften der Laufbeine ohne Coxopleurenteil. Coxopleuralbezirke des Endbeinsegmentes mit *grösserer* Drüsenzahl und ohne Fortsatz. 21 Rumpfsegmente und *19* kleine Stigmenpaare von rundlicher Form und einfachem Kelch. Kieferfusssegment mit deutlich abgesetztem Tergit, an den Kieferfüssen Präfemur und Tarsungulum aussen nicht in direkter Berührung, Coxosternum ohne Zahnplatten. Interkalartergite gross, interkalare Sternithälften einfach. 21. Rumpfsegment nicht grösser als das 20. Stigmen in ziemlich *grossen* Atemschildchen. *Drei* Anopleuren vorhanden (1 + 1 + 1), von deren beiden oberen die hintere höher liegt aber beinahe in gleicher Höhe mit der vorderen. Metacoxa entschieden *kleiner* als die Procoxa, unterhalb der Eucoxa nur *wenig* von einander getrennt. Conus lateralis sterni und Sternitseitenhaut recht kurz.

* * *

Durch weitere Ausschaltung der abgeleiteten Charaktere kann man von *Procryptops* und *Proplutonium* auf einen Urskolopender kommen, dem letztere Form bereits näher steht als erstere. Durch die Charakterisierung von *Procryptops* und *Proplutonium* wird zugleich nachdrücklichst darauf hingewiesen, dass einerseits eine Ableitung der ganzen *Scolopendromorpha* von *cryptops*artigen Tieren nicht möglich ist und andererseits auch *Plutonium* nicht in diesem Sinne verwendet werden kann, dass diese Gattung aber immerhin der gewonnenen theoretischen Grundform am *nächsten* steht.

---

c) Über die hintersten beintragenden Rumpfsegmente der Scolopendromorpha.

Wie ich schon oben betont habe, weichen die vorderen und hinteren beintragenden Rumpfsegmente von den im vorigen behandelten Bauverhältnissen der Mehrzahl der Rumpfsegmente mehr oder weniger ab. Am

Hinterende des Körpers gilt das ganz besonders für das Endbeinsegment, welches meistens zugleich das 21. ist, aber auch *für die beiden vorhergehenden*, das 19. und 20. Nachdem ich oben gezeigt habe, dass man bisher selbst die typischen Coxopleuralgebilde an den normalen Laufbeinsegmenten noch nicht genügend erforscht hat, kann es als selbstverständliche Folge gelten, dass für jene letzten Rumpfsegmente weitere Untersuchungen ebenfalls Aufklärung bringen müssen. Auch auf diesem Gebiete sind die Verhältnisse verwickelter als bisher angenommen wurde. Eine Einsicht in die vergleichend-morphologische Natur der coxopleuralen Bezirke kann aber nur gewonnen werden durch den Vergleich *verschiedener Gattungen* einerseits und den Bau der entsprechenden Gebilde *an verschiedenen Segmenten* bei jeder besonderen Form andererseits. Bisher wurden einfach Schlüsse von den vorhergehenden Segmenten, also namentlich dem 19. und 20. auf das 21. gemacht, ohne dass es genügend geprüft worden ist, ob denn das 20. Segment nicht bereits namhafte Besonderheiten und Schwierigkeiten aufweise. Schon eine oberflächliche Betrachtung eines grösseren Skolopenders lehrt, dass in den Pleuralgebieten das *Eupleurium* mit seinen z. B. bei *Scolopendra* sehr ausgedehnten häutigen Bezirken an den mittleren Rumpfsegmenten am stärksten entwickelt ist, an den hintersten beintragenden Segmenten, also namentlich dem 18.—21., dagegen an Ausdehnung schnell abnimmt und im 21. vollständig verschwunden ist.

Cryptops (Abb. 3) zeigt uns im 18. Rumpfsegment noch ziemlich die oben erörterten typischen Verhältnisse der coxopleuralen Gebiete, also insbesondere eine zweiteilige Procoxa, deren oberes Stück vom unteren sehr deutlich abgesetzt ist und mit einem schmalen Zipfel sich an den oberen Wulst der *Eucoxa superior* anlehnt. Dachig überwölbt werden *Eucoxa* und *Procoxa* von der grossen, sichelförmigen Katopleure und oberhalb dieser mehr vorn befindet sich die gestreckte Hauptanopleure. Im 19. Segment finden wir ähnliche Verhältnisse, nur ist auffallend die Metacoxa. Während dieselbe im 18. Segment noch ungefähr die Grösse der unteren Procoxa erreicht, ist sie im 19. nur noch halb so gross als diese. Ausserdem ist das *Eupleurium*-Gebiet im 19. Segment wieder etwas mehr zurückgedrängt. Viel grössere Veränderungen aber zeigt das 20. Segment (Abb. 5), indem hier das Eupleurium-Gebiet nicht nur weiter verdrängt, sondern auch das

Stigma aus der horizontalen Lage in eine mehr schräge geschoben ist. Höchst auffallend ist *die kolossale Entwicklung der zu einem einzigen, grossen dreieckigen Schild verwachsenen Procoxa*, an welcher ich keine Absetzung in oberen und unteren Abschnitt mehr nachweisen konnte, während der gegen den oberen Wulst der Eucoxa superior gerichtete dreieckige Zipfel noch ganz klar erkennbar blieb. *Dass das Eupleurium wirklich verdrängt wird und nicht mit der Procoxa verschmilzt, ist am 20. Rumpfsegment von Cryptops mit aller Deutlichkeit festzustellen,* denn wir haben hier die Hauptanopleure und die Katopleure wie an den vorhergehenden Segmenten, nur von geringerer Grösse. Die Lage der Katopleure entspricht den sonstigen Verhältnissen, indem sie teils über der Procoxa, teils über der Eucoxa liegt, mit ihrer Hinterspitze unter dem Stigma. Wichtig ist ferner *die Lageverschiebung der Eucoxa, welche im Zusammenhang steht mit der auffallenden Verkleinerung der Metacoxa.* Während nämlich in typischen Segmenten die Ebene der Gelenkgrube, in welcher das Telopodit sitzt, schräg nach hinten und oben gerichtet ist, (oder genauer, die auf dieser Ebene senkrecht stehende Telopoditachse), erscheint sie im 20. Segment viel mehr nach hinten geschoben. Die Metacoxa ist vielmals kleiner geworden als die Procoxa, da sie nur noch einen schmalen Streifen zwischen Eucoxa und Sternit bildet. Sie würde aber ganz verschwunden sein, wenn nicht das *Sternit* ebenfalls in Mitleidenschaft gezogen und in seiner Hinterhälfte noch stärker als an den vorhergehenden Segmenten zusammengedrängt wäre, wodurch für das verschobene Metacoxastück Platz geworden ist. Die Hauptanopleure ist nur insofern verschoben, als sie aus der Lage vorn und über der Katopleure noch mehr nach vorn gedrängt ist, weil die schmale Eupleurium-Haut keinen anderen Raum gewährt.

Trigonocryptops gigas sei hier noch mit einigen Worten erwähnt, da er sich in den hintersten Segmenten meist wie *Cryptops* verhält, aber doch einige Besonderheiten aufweist. Im allgemeinen ist bei dieser Form eine stärkere Entwicklung der festen Bestandteile der Coxopleuralgebilde auf Kosten der weichen Hautbezirke zu verzeichnen, sodass mich diese Form mehr als irgend ein anderer *Chilopode* an die thorakalen Pleuralteile mancher anderer Insekten, z. B. *Dermapteren* und *Blattodeen* erinnert hat. Die Paratergite sind auffallend stark entwickelt und nach unten herabgebogen gegen die Katopleuren. Da Hypocoxa und Katopleure ebenfalls kräftig ausgeprägt und stark ausgedehnt sind, so bleibt für die häutigen Teile verhältlich wenig übrig, was für alle beintragenden Segmente gilt. Ein Teil dieser Hautbezirke ist aber unter den herabgezogenen Paratergiten versteckt (Abb. 21).

Bei *Ethmostigmus trigonopodus* zeigt das 18. Segment noch ziemlich die oben geschilderte Beschaffenheit der Coxopleuralteile, nämlich zwei recht kleine Oberanopleuren dicht vor dem von deutlichem Atemschildrahmen umgebenen grossen Stigma, drei Mittelanopleuren, eine recht gross, davor und dahinter eine recht kleine, eine Unteranopleure, halb so gross wie die grösste mittlere und noch ein kleines Sklerit unter der Unteranopleure. Die Katopleure ist als starke Sichel über der unvollkommen abgegrenzten Coxopleure gewölbt und zwar derart, dass der hintere Teil bedeutend breiter ist als der vordere über der Procoxa befindliche. Über der Katopleurenmitte trifft man zwei kleine Pleurite, die hinterste Mittel- und die hintere Oberanopleure. Hinter dem Stigma schliesst sich eng das Poststigmalsklerit an und in dessen Nachbarschaft findet sich wieder (namentlich oben und unten) ein Schwarm kleiner, porenführender Verdickungen. — Am 19. Segment konstatierte ich im übrigen dieselben Verhältnisse, aber an Anopleuren 0 + 2 + 1 (statt 2 + 3 + 1 + 1), d. h. mehrere der kleinen Plättchen fehlen, während die Hauptanopleure (mittlere Mittelanopleure) ungefähr die vorige Stärke aufweist, nur etwas gestreckter erscheint. Statt des Stigmas findet man ein Postsynstigmapleurit, hinten von einem Schwarm kleiner Verdickungen umgeben. Metacoxa klein aber deutlich zweiteilig. *Procoxa* sehr deutlich gegliedert, scharf durch Naht in obere kleinere und untere grössere Procoxa getrennt, jede dieser Abteilungen wieder in Unterabteilungen zerschnitten, Katopleure und Procoxa vollkommen und sehr scharf getrennt.

Wieder ist das 20. Segment auffallend abweichend von den vorigen, z. T. aber auch vom 20. Segment der *Cryptops* verschieden. Das häutige Eupleurium-Gebiet ist noch ziemlich stark ausgebildet, trotzdem befindet sich in ihm nur noch eine ziemlich kleine mittlere Anopleure (0 + 1 + 0). Der Atemschild ist im Stigmaumkreis gut entwickelt, aber hinter ihm das Poststigmapleurit in zerstreute kleine Verdickungen aufgelöst. Die Metacoxa ist nur noch in einem Rudiment angedeutet, Eucoxa posterior merklich verkleinert, während der *Eucoxa inferior* noch die beiden bekannten gelenkig gegen einander beweglichen Abschnitte in deutlichster Ausbildung zukommen. Wieder ist die *Procoxa* gewaltig verstärkt und durch Verwischung der Nähte so einheitlich geworden, dass nur noch am Hinterrande einige lockere Stückchen bemerkt werden. *Das Auffälligste besteht aber in der vollkommenen nahtlosen Verschmelzung von Procoxa und Katopleure,* indem die Procoxa die noch deutlich vorhandene aber verkleinerte Coxopleure von oben mit einem Fortsatz in derselben Weise, nur in weniger ausgedehntem Masse umfasst, wie sonst die Katopleure. Letztere ist also in ihrer hinteren Hälfte verkümmert, in der vorderen mit der Procoxa verschmolzen.

Scolopendra subspinipes verhält sich in diesen Dingen *Ethmostigmus* recht ähnlich, doch kommen an der Procoxa des 20. Segmentes zwei recht deutliche, nach vorn verlaufende Furchenlinien vor, welche die Procoxa in drei Teile absetzen, wobei aber zu bemerken ist, dass auch hier die Katopleure mit der Procoxa verschmolz. Am 18. und 19. Segment finden sich dagegen Katopleure und Procoxa in typischer Weise vollkommen getrennt.

Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Coxopleuralteile des Endbeinsegmentes über, so müssen ohne weiteres *so bedeutende Unterschiede* gegenüber den vorhergehenden Segmenten ins Auge fallen, dass das *Endbeinsegment selbst* zunächst einmal beschrieben zu werden verdient, zumal auch das bisher nicht ganz ausreichend geschehen ist.

Als Unterschiede gegenüber dem Coxopleuralgebiet des 20. Rumpfsegmentes hebe ich zunächst hervor:

1. das völlige Verschwinden eines häutigen Bezirkes oberhalb der Hüftteile und zwischen diesem und dem Tergit,

2. das Fehlen selbständiger Hypocoxa- und Eucoxa-Teile,

3. das völlige Fehlen überhaupt irgend welcher selbständiger Pleuritstücke,

4. das völlige Fehlen eines Sternitseitenzapfens,

5. haben die Telopodite mit Rücksicht auf ihre basalen Gelenkgruben insofern eine bedeutende *Lageveränderung* erfahren, als sie nicht wie gewöhnlich seitlich am Rumpfe eingesenkt, sondern derartig stark *nach hinten verschoben* sind, dass diese Gelenkgruben nicht durch einen

breiten Rumpf getrennt werden, sondern nur eine schmale *Brücke*, deren *obere* Hälfte jener Lappen bildet, welcher vom Hinterrande des Tergites des Endbeinsegmentes nach unten sich erstreckt und nach Gattungen oder auch Arten verschiedene Beschaffenheit zeigt und dessen *untere* Hälfte durch jene in der Richtung von unten nach oben *oval gestaltete Tasche* gebildet wird, welche die drei letzten kleinen und eingestülpten Rumpfsegmente enthält, nämlich Genital- Postgenital- und Telson-Segment. —

Infolge des Fehlens der genannten Eigentümlichkeiten zeigt das Endbeinsegment eine verhältlich einfache Beschaffenheit, indem es sich hauptsächlich um *vier Stücke* handelt, Tergit, Sternit und zwei stark verdickte, feste und einheitliche seitliche Stücke. *Die Telopodit-Gelenkgruben sind dem Tergit weit mehr als dem Sternit genähert*, liegen also, auf die Abb. 34 bezogen, ungefähr hinter dem Randbezirk $\gamma\delta$. Es hängt dies damit zusammen, dass die drei kleinen letzten Körpersegmente auf die Rumpflängsachse bezogen, entschieden nach bauchwärts herabgekrümmt sind. Das *Sternit* des Endbeinsegmentes ist stets selbständig, bedeckt aber mit seinen Seitenrändern mehr oder weniger den unteren Teil der *Seitenstücke.* (Vorerst gebrauche ich diese beschreibende Bezeichnung, im weiteren Verlauf der Untersuchung wird sich die angemessene vergleichend-morphologische ergeben.) Gewöhnlich ist das Sternit nach hinten stark verschmälert und überhaupt ist es weniger ausgedehnt als die typischen Laufbeinsegment-Sternite, weil teilweise auf seine Kosten die Seitenstücke vergrössert sind. An den Seitenstücken selbst lassen sich *vier* Bezirke unterscheiden:

1. Der *Drüsenbezirk,* pars glandulosa,
2. der Bezirk des neben der Genitalzone befindlichen Vorsprungs, pars paragenitalis, *Genitalbezirk,*
3. der *Oberbezirk,* pars superior und
4. der *Unterbezirk,* pars inferior.

Eine fernere Eigentümlichkeit der Seitenstücke besteht in einem an ihrem Hinterrande befindlichen *Einschnitt* (α Abb. 34), welcher der äussere Ausdruck ist für ein Gebilde, welches man beim Vergleich mit typischen Segmenten ohne weiteres als *Costa coxalis* erkennen wird. Es schliesst sich nämlich an den Einschnitt ein innerer Wulst, welcher stets nach *vorn* gerichtet verläuft und entweder nur sehr kurz ist, wie bei den *Cryptopiden* und *Newportia* oder von verschiedener Länge. Ist er lang ausgedehnt, so bildet er eine *innere Leiste* von meist annähernd horizontalem Verlauf, welche äusserlich durch eine ihr entsprechende, oberflächliche *Längsrinne* zum Ausdruck kommt, welche *die Grenze bildet zwischen Drüsenbezirk und Unterbezirk einerseits, Oberbezirk andererseits,* so z. B. bei *Plutonium* und *Theatops,* deren Seitenstücke besonders langgestreckt sind. Bei diesen beiden Gattungen ist diese Grenze überhaupt ungewöhnlich scharf und nahtartig *eingeschnitten,* während man bei *Scolopendra, Ethmostigmus* u. a. auf der Oberfläche der Seitenstücke eine Grenze nur als feine wulstige Linie angezeigt findet oder überhaupt nur durch eine Änderung in der Richtung der Oberflächenwölbung. Bei *Scolopendra subspinipes* fand ich die innere Leiste sehr lang, zunächst auf längerer Strecke nach vorn ziehend, weiterhin im Bogen nach unten abbiegend und so den Drüsenbezirk vorn umfassend. Der *Trochanter* der Endbeine ist mehr oder weniger verkümmert und mit dem Präfemur verwachsen. Bei *Scolopendra* finden sich von ihm nur noch schwache Überbleibsel, während er bei *Theatops* sogar noch teilweise abgegrenzt blieb. In jedem Falle aber besitzen die Endbeintelopodite am Grunde aussen eine vorspringende Ecke (wie der Trochanter typischer Laufbeine) und diesem entsprechend einen inneren Zapfen wie oben geschildert (Abb. 8), nur beide etwas schwächer als an den Laufbeinen. Bei *Ethmostigmus trigonopodus* beobachtete ich an der unteren Basis der Endbeintelopodite einen Trochanter, welcher als *Halbring* ausgebildet ist, aussen die Gelenkecke führt und auch noch etwas gegen das Präfemur beweglich ist, wenigstens konnte ich ihn in einem Falle vom Präfemur abheben. Dem Trochanterzapfen entspricht nun ein deutlicher, von einer Rinne ausgehöhlter *Processus costae* innen neben der Einkerbungsstelle am Hinterrande der Endbeinsegment-Seitenstücke, wodurch also eine ähnliche Gelenkverbindung zu stande kommt, wie ich sie oben von der Eucoxa der Laufbeine auseinandergesetzt habe. Die Entfernung der Telopoditgelenkgruben von einander ist nach den Gattungen teilweise verschieden. Am stärksten sind diese Gelenkgruben bei denjenigen Formen *genähert,* welche wie *Theatops* und *Plutonium* stark verdickte, zangenartige Endbeine aufweisen, in welchem Falle nur *eine schmale, trennende Medianbrücke* vorgefunden wird. In jedem Falle aber sind diese Gruben für die Endbeintelopodite von den entsprechenden der typischen Laufbeine ausserordentlich abweichend, da von einem ringartigen Umfassen durch Eucoxa-Bestandteile gar nicht die Rede ist und nur eine *ringartige Haut* zwischen dem Tergit des Endbeinsegmentes, dem Genitalsegment und den Seitenstücken ausgebreitet ist, welche *gespannt gehalten wird* durch den schon genannten hinteren Fortsatz des Tergit und verstärkt durch einen schmalen, schon früher von mir nachgewiesenen Arcus. Schliesslich komme ich zurück auf die oben genannten Bezirke der Seitenstücke:

Abb. 33.

Cryptops balticus Verh. ♀ Ansicht von unten auf das Sternit des 19. beintragenden Segmentes und vorlagerndes Interkalarsternit, daneben die rechten ausgebreiteten Coxopleuralgebilde. — 60 f. Vergr.

1. Der *Drüsenbezirk* hängt in seiner Beschaffenheit von der Menge der Drüsen ab und von dem Vorkommen und der Ausdehnung eines nach hinten ragenden Fortsatzes. Während manche *Cryptops*-Arten nur 20—30 Hüftdrüsen mit verhältlich grossen Kanälen aufweisen, treffen wir bei anderen Formen, z. B. *Scolopendra* eine unzählbare Menge kleinerer Drüsen, welche auch mehr oder weniger stark auf dem Fortsatz verteilt sind. Ein *Vorsprung* an der hinteren Unterecke der Seitenstücke (unterhalb δ der Abb. 34) ist immer vorhanden, auch bei denjenigen Formen, welche wie *Cryptops*

und *Theatops* denselben nicht als über den Hinterrand vorragenden Fortsatz entwickelt zeigen, denn es handelt sich auch bei diesen um eine Duplikatur, welche für die Endbeine an sich nicht unbedingt notwendig wäre. Sie sind dagegen von Bedeutung als *Schutzdeckel* für die eingestülpten drei letzten Segmente und in diesem Sinne ist auch die Ausbildung weiter vorragender *Fortsätze* als eine *verstärkte Schutzvorrichtung* verständlich. Hiermit kommen wir auf

2. Die *pars paragenitalis*, welche also teilweise eine drüsenlose hintere und untere Randpartie darstellt, teilweise das Drüsengebiet und zwar so weit, als es auf dem genannten Vorsprung oder Fortsatz liegt.

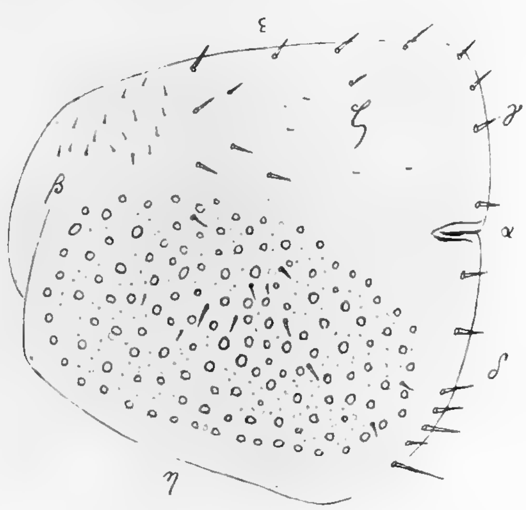


Abb. 34.
Cryptops anomalans Newp. Coxopleurium vom Endbeinsegment eines 31 mm langen ♀ aus Gottschee in Krain. — 60 f. Vergr.

3. Der *Oberbezirk* ist sehr scharf abgesetzt bei *Plutonium* und *Theatops*, um so weniger abgegrenzt aber, je kürzer die innere Leiste ist, welche vom Hinterrandeinschnitt α beginnend, nach vorn zieht. Hinten ist der Oberbezirk daher immer abgesetzt, vorn aber um so weniger und zugleich auch um so mehr eingeengt, je mehr die Drüsen sich nach oben ausdehnen.

4. Der *Unterbezirk* ist jenes vor dem Randstück $\alpha\delta$ befindliche, drüsenlose Feld, welches sich unterhalb der Richtung der Costa coxalis befindet und daher ebenfalls in seiner Ausdehnung von der Menge der

Drüsen abhängig ist. Unten geht er ohne scharfe Grenze in den paragenitalen Bezirk über.

Das *Tergit* des Endbeinsegmentes stösst immer direkt an die Seitenstücke und nur die Art der Verbindung ist verschieden, indem beide Teile bei *Cryptops* z. B. durch einen Hautstreifen gegen einander abgesetzt und daher auch leicht zu trennen sind, während man bei *Scolopendra* eine völlige feste Verwachsung beobachten kann.

Vergleichen wir jetzt die Seitenstücke des Endbeinsegmentes mit den Coxopleuralteilen der Laufbeinsegmente, so fällt mit Rücksicht auf die bei beiden vorkommende *Costa coxalis* die sehr *verschiedene Richtung* derselben auf. Bei den Laufbeinsegmenten zieht die *Costa* in ihrem Hauptteile so ausgesprochen und bei allen Gattungen übereinstimmend gerade zum Sternitrande, dass es mit der *Costa* des Endbeinsegmentes, welche im wesentlichen nach vorn gewendet ist, eine besondere Bewandtnis haben muss, um so mehr, wenn man auch noch das Vorhandensein dort und Fehlen hier des Sternitseitenzapfens in Betracht zieht. Die *Costa* der Laufbeinsegmente zeigt stets eine deutliche, oben des näheren beschriebene *Gabelung,* welche zur Abgrenzung der genannten *Eucoxa triangularis* führt. Ausser der zum Conus ziehenden Hüfthauptrippe geht nämlich nach *vorne* ein kürzerer Seitenast, welchem ebenfalls eine kurze äussere Furche entspricht (Abb. 10 *a 1 d*). Der zwischen dieser Furche und dem Hauptteil der Hüftrippe liegende Bezirk der *Eucoxa* ist eben die Eucoxa triangularis. Ich erinnere hier daran, dass der Costa-Nebenast an den Laufbeinen besonders stark entwickelt ist bei *Anodontostoma octosulcatum. Dieser Nebenast der Hüftrippe ist aber, wie aus seiner Lage und Richtung unverkennbar hervorgeht, derjenige Teil derselben, welcher an den Seitenstücken des Endbeinsegmentes,* neben dem den Trochanterzapfen stützenden Fortsatz, allein *erhalten geblieben ist, während Hauptrippe und Sternitseitenzapfen vollkommen fehlen,* zwei wichtige und bisher von niemand beachtete Tatsachen. Da nun die Eucoxa an den Laufbeinsegmenten schmal und demgemäss auch der Costa-Seitenarm kurz ist, so könnte man auch diejenigen Zustände der Seitenstücke des Endbeinsegmentes als primitiv betrachten, bei welchen sich nur ein schwacher innerer Rippenteil an den Hinterrandeinschnitt anschliesst, wie bei *Cryptops* z. B., *vorausgesetzt* aber, dass man annimmt, im Endbeinsegment hätten bei Urformen Verhältnisse geherrscht, welche denen der typischen Laufbeinsegmente der Scolopendromorpha viel ähnlicher waren, vor allem also eine selbständige *Eucoxa.* Leider führt uns zu einer solchen Annahme nur die Grundanschauung einer primären mehr *homonomen* Segmentierung, nicht aber spezielle Tatsachen, also etwa irgend welche Organandeutungen, welche auf das ehemalige Vorhandensein einer selbständigen *Eucoxa* hinweisen würden. Soll unsere Auffassung des Endbeinsegmentes sich also nicht durch Ausblicke in eine nebelhafte Ferne vom wirklichen Boden zu sehr entfernen, dann muss eine *Beschränkung* eintreten und betont werden, dass ein genaues Wiederfinden aller einzelnen Bestandteile einer Laufbein-*Eucoxa* am Endbeinsegment völlig ausgeschlossen ist, mindestens heute. Es muss hier aber auch mit Rücksicht auf die physiologische Seite die *allgemeine Situation des Endbeinsegmentes* gewichtig in die Wagschale fallen. Die stark eingestülpte Lage der drei Endsegmente (Telson und Genitalzone), welche für alle bekannten *Scolopendromorpha* gilt, ist ein auffallend derivater Charakter, wie er bei den meisten anderen *Chilopoden* nicht beobachtet wird. Insbesondere zeigen die *Anamorpha* nach dieser Richtung eine viel ursprünglichere Beschaffenheit. Durch die Einstülpung der drei letzten Rumpfsegmente ist aber der allgemeine Zustand des Endbeinsegmentes bedeutend und zwar in derivatem Sinne beeinflusst worden, sodass dasselbe jetzt tatsächlich den Charakter eines *Schlusssegmentes* angenommen hat. Hierdurch ist seine *gedrungene Einheitlichkeit als fester hinterer Körperabschluss* noch erhöht worden und zugleich haben die *End*beine in noch stärkerem Masse diese Eigenart ausgeprägt und sind *aus lateralen zu terminalen Gliedmassen* geworden. Wenn wir nun auch keinen Vertreter der *Scolopendromorpha* kennen, welcher am hintersten Rumpfteil eine Beschaffenheit aufweist, welche einige Ähnlichkeit mit den Zuständen bei den *Anamorpha* besitzt, so dürfen wir doch schliessen, dass die Skolopender von derartig beschaffenen Urskolopendern abstammen, welche ein weniger kompaktes Endbeinsegment und mehr laterale Endbeine besessen haben mögen. Dann kann auch eine selbständige *Eucoxa* angenommen werden, nicht aber ein *Conus lateralis.* Da nämlich die anderen *Chilopoden*-Hauptgruppen ein derartiges Organ nicht besitzen, so kann man sich vorstellen, dass auch dem Endbeinsegment der Skolopender von vornherein nie etwas ähnliches zugekommen ist. Gehen wir unter diesen

Gesichtspunkten zu dem Versuch einer Erklärung der Seitenstücke des Endbeinsegmentes, so deutet uns die Costa darauf hin, *dass jedenfalls die Eucoxa eingeschmolzen in den Seitenstücken enthalten ist.* Die Rücksicht auf die oben erörterten Coxopleuralbezirke des 19. und 20. Rumpfsegmentes bringt weitere Aufklärung. Wir sahen, dass das *Eupleurium* nach endwärts am Rumpfe immer mehr eingeengt wird und verstehen daher, dass es *am Endbeinsegment ganz oder fast ganz verschwunden ist*, ganz, wenn die Katopleure wie bei *Cryptops* noch am 20. Segment ihre Selbständigkeit bewahrt, fast ganz, wenn, wie in den meisten anderen Fällen, die Katopleure am 20. Segment im hinteren Stück schon verschwunden, im vorderen Stück bereits mit der Procoxa verschmolzen ist. *Dass der Procoxa ein Hauptanteil an den Seitenstücken zukommt, zeigt aufs deutlichste das Verhalten des 20. Segmentes, wo der Zustand des 21. teilweise vorbereitet ist. Die Metacoxa*, welche schon im 20. Segment durch das Verschieben der Eucoxa nach hinten mehr oder weniger verdrängt wird, *ist im 21. Segment, wo diese Verschiebung noch viel weiter gediehen ist, vollständig verdrängt*, es sei denn, dass man eine schwache Falte neben der die drei Endsegmente enthaltenden Tasche als Rest einer Metacoxa auffassen will. Auffallend bleibt es immerhin, dass sich an den Seitenstücken des 21. Segmentes keine Naht zwischen Eucoxa und Procoxa erhalten hat. Die oben angeführten Bezirke der Seitenstücke fasse ich nach den vorstehenden Ausführungen so auf, dass *der Oberbezirk eine Verschmelzung darstellt von oberer Procoxa mit Eucoxa superior, der Drüsenbezirk dem unteren Hauptstück der Procoxa entspricht, der kleine Unterbezirk einen Rest der unteren Eucoxa-Teile vorstellt* und der *paragenitale eine sekundäre Ausgestaltung* infolge der Verdrängung der Telopoditgelenke nach hinten und oben. Aus dem Gesagten ergibt sich eine angemessene Bezeichnung der Seitenstücke. Kräpelin hat für dieselben die Bezeichnung „Pseudopleuren“ vorgeschlagen, ein Name, welcher allerdings richtiger ist als „Pleuren“, aber das Wesentliche auch nicht genügend hervorhebt, zumal ja meist doch noch Reste des Eupleurium in die Seitenstücke mit eingeschmolzen werden. Ausserdem kommt in Betracht, dass an diesen Seitenstücken der gliederartige oder hohlkörperartige Charakter fast ganz verloren gegangen ist, es sich vielmehr um vorwiegend flächenhafte, mehr oder weniger gewölbte Platten handelt, welche topographisch ein pleurenartiges Aussehen angenommen haben. Trotzdem handelt es sich um Gebilde, welche vorwiegend *Hüft*natur besitzen und dementsprechend auch bezeichnet werden müssen. Der Name *Coxopleurium*, den ich in Anwendung bringe, erscheint mir zweckmässig, da er den gemischten Charakter dieser Gebilde ausdrückt und durch die Neutrumendung „ium“ sowohl ein Unterschied von Coxopleura und Coxopleuralgebilden im allgemeinen gegeben ist als auch das mehr Unbestimmte des Verschmelzungsgebildes angedeutet wird.

Schliesslich noch einige Bemerkungen historischen Rückblicks: Für die Beurteilung des *Coxopleurium* ist in erster Linie massgebend, ob man die *Hypocoxa* als Hüftgebilde auffassen will, oder als Pleuralteile, wie das von seiten der älteren Forscher geschehen ist. Fasst man die Procoxa als Hüftstück auf, dann enthält auch das Coxopleurium höchstens einen Rest der Pleuralteile, fasst man es aber als Pleuralstück auf, dann überwiegt auch im Coxopleurium der pleurale Anteil, und das haben jene Forscher angenommen. R. Latzel hat sich z. B. auf S. 137 seines Buches nach dieser Richtung ausgesprochen und sagt bei den Endbeinen, dass „Schenkelring und Hüfte bis zur Unkenntlichkeit verkümmern“, eine Ansicht, welche auch dann nicht haltbar ist, wenn er die Procoxa als pleural aufgefasst hat. Ähnlich sagt E. Haase (indisch-australische Chilopoden, S. 39), dass „an den Analbeinen die beiden ersten Glieder fast vollständig verkümmert sind. Dafür sind die Pleuren stark entwickelt“ und er spricht daher weiterhin von „Pleuraldrüsen“ und „Pleuralanhängen“. Ich selbst sprach 1892 (S. 205 der Berl. entom. Zeitschr.) kurz die Ansicht aus, dass die „unteren Pleuren“ an den Endbeinen „der Scolopendriden eine Verschmelzung sind von Schenkelring und Hüfte mit Teilen der Pleuren“. Hierauf Bezug nehmend sagt R. Heymons auf S. 53 seiner „Entwickelungsgeschichte der Skolopender“ Stuttgart 1901: „Diese Ansicht von Verhoeff wird durch meine entwickelungsgeschichtlichen Befunde bestätigt, jedenfalls in soweit, dass das Basalglied der Endbeine die sogenannte „Pleura“ ein Verwachsungsprodukt des Coxalgliedes mit dem darauf folgenden Extremitätengliede darstellt. Wenn die wahre Natur dieses Basalgliedes der Endbeine erst verhältnismässig spät erkannt ist, so erklärt sich dies durch die Grösse desselben und namentlich durch den Umstand, dass es sich innig an den umgeschlagenen Seitenrand des 21. Tergits anfügt. In dem letzteren ist meiner Auffassung nach auch die Pleura, soweit man von einer solchen überhaupt in diesem Falle reden kann, enthalten". Hierauf bezieht sich wieder Kräpelin, wenn er a. a. O. (ohne Rücksicht auf meine vorige Mitteilung) sagt: die „grosse, meist von Drüsenporen durchsetzte Platte, die sich an den umgeschlagenen Rand der *letzten* Rückenplatte direkt anschliesst ... wurde früher für das Äquivalent der Pleuralteile in den übrigen Segmenten gehalten, bis Heymons 1901 nachwies, dass es sich hier um die zwei verwachsenen Basalabschnitte der Endbeine handle".

1901 habe ich mit einer eingehenden Untersuchung der *Chilopoden*-Hüftteile begonnen (XVI. Aufsatz der „Beiträge" u. s. w. Nova Acta der Akad. d. Nat. Halle) und insbesondere für Scolopendriden auf S. 380 vier Bestandteile unterschieden, namentlich auch den bis dahin so vernachlässigten Hüftstab (Costa) hervorgehoben. Auch die beiden Hypocoxateile waren unter diesen Hüftstücken enthalten. S. 401 bin ich auf die Endbeine eingegangen und kam zu dem Schluss, dass „die sogenannten Pleuren die *Hüften* der Scolopendriden-Endbeine sind". Es ist bemerkenswert, dass ich zu diesem Schlusse gelangte, trotzdem ich (entgegen meiner jetzigen Auffassung), annahm, dass das Keilstück (Eucoxa inferior) „an den Endbeinen ganz verschwunden" sei. Schon damals aber habe ich darauf hingewiesen (als ich den Eupleurium-Begriff noch nicht ausdrücklich ausgebildet hatte), dass „die wirklichen Pleuren bei den *Scolopendriden* mehr und mehr von den Hüften verdrängt werden, bis sie im Prägenitalsegment ganz verschwinden". Dort wies ich (meine Mitteilung von 1892 verbessernd) auch auf die bei *Scolopendra* erkennbaren Reste des Trochanters der Endbeine hin.

Im Januarheft des zoolog. Anzeigers 1904 S. 236 hat dann Börner geschrieben: „Ich stimme mit Verhoeff nicht darin überein, dass die Grundglieder der Endbeine, die man ehemals „Pleuren" nannte, *Coxen* sind, aber wertvoll ist Verhoeffs Nachweis, den ich bestätigen kann, dass die fraglichen Grundglieder aus der Verschmelzung der echten Coxen der Laufbeine und der sogenannten Episterna oder Epimera derselben hervorgegangen sind. Zwar nimmt er diese letzteren als Hüftteile in Anspruch, hat aber in späteren Aufsätzen diese Anschauung wieder aufgegeben". (Das Letztere ist nicht der Fall.) Im übrigen geht aus dem Angeführten hervor, dass Börners Ansicht (wenigstens im Prinzip) nur eine Bestätigung meiner

Ausführung von 1901 ist. Wenn er dagegen das Stück „*co 1*“ meiner Untersuchung, d. h. den Teil, welcher in vorstehender Arbeit als *Metacoxa* beschrieben worden ist, bezeichnet als „eine sekundäre Plattenbildung“ hinter der Eucoxa und die Procoxa, welche er „Merosternum“ nannte, als etwas ganz anderes auffasst und zwar „als ein Grundglied der Beine“, so ist das eine durchaus unhaltbare Anschauung, da *Pro-* und *Metacoxa isostiche* und im Bereich eines Segmentes homodyname Körperteile sind, welche auch in ihrem Bau eine *weitgehende Übereinstimmung* und zur *Eucoxa* höchst ähnliche Beziehungen zeigen, ebenso zum Conus lateralis. Bei den *Geophilomorpha*, welche in dieser Hinsicht primitivere Verhältnisse aufweisen als die Skolopender, sind Pro- und Metacoxa sogar mehr oder weniger *übereinstimmend* gebaut. Die vorstehenden Mitteilungen zeigen aber, dass diese Teile auch bei den Skolopendern phylogenetisch *ursprünglich mehr gleichartig sind und erst bei den abgeleiteteren Formen immer unähnlicher werden.* Übrigens ist Börners Abb. 3 von *Scolopendra cingulata* wenig richtig, da die Eupleurium-Sklerite (mit Ausnahme der Katopleure) ebenso fehlen wie Metacoxa und Conus. Im 20. Segment wird die Procoxa „*Sc*“ als einfaches Dreieck angegeben. Von den Nähten abgesehen, greift dieses Stück in Wirklichkeit von oben her deutlich über das obere Ende der Eucoxa superior weg, ein Zeichen, dass ein Teil der Katopleure eingeschmolzen ist. An den von Börner als metacoxalos dargestellten Segmenten 18—21 fehlt die Metacoxa in natura durchaus nicht, ist selbst am 20. noch deutlich erkennbar, nimmt aber von vorn nach hinten an Grösse ab. Er hat ferner die Procoxa mit dem unglücklichen Terminus „Subcoxa“ bezeichnet, den ich in der Arbeit Nr. 4 als eine von Heymons zuerst bei *Rhynchoten* angewendete Bezeichnung ebenfalls gebrauchte, aber jetzt, nach gründlicherer Durcharbeitung der Coxopleuralgebilde und mit Rücksicht auf die Willkürlichkeit der Anwendung fallen lasse, zumal Heymons selbst in seiner Arbeit über die Entwicklung der Skolopender ihn nicht benutzte. Wenn nun Börner ohne weiteres auch von einer „Subcoxa“ der *Crustaceen* spricht, so ist das ein weiteres Zeichen dafür, dass die Schwierigkeiten für wirklich berechtigte Homologisierungen noch immer ausserordentlich unterschätzt werden und vor allem das wichtigste so oft vergessen wird, dass nämlich derartige Homologisierungen überhaupt nur einen Sinn haben auf *phylogenetischer* Grundlage.

Über die Coxopleurien am Endbeinsegment der *Scolopendromorpha* hat also bisher durchaus noch nicht völlige Klarheit geherrscht, weil die Verhältnisse an den vorhergehenden Rumpfsegmenten nicht genügend geklärt waren, diese aber für die Beurteilung des Endbeinsegmentes sehr wichtig sind.

Vorausgesetzt, dass die Hypocoxa den Hüftteilen beigerechnet wird, konnte die bisherige Feststellung, dass die Coxopleurien zum grösseren Teil *coxaler* Natur seien, bereits als sichergestellt gelten; die Frage *ob und wie weit aber* die einzelnen Teile der Hüfte und der Pleuren in Verschmelzung getreten seien, war durchaus noch unklar und musste es bleiben, so lange nicht wie im Vorigen *alle Elemente des coxopleuralen Gebietes vergleichend* in Betracht gezogen wurden. Wenn Heymons 1901 (siehe oben) „das Basalglied der Endbeine“ als ein „Verwachsungsprodukt des Coxalgliedes mit dem darauf folgenden Extremitätengliede“ erklärt, so löst das die Schwierigkeiten ebenso wenig wie meine genannte kurze Notiz von 1892, denn er hat über die Natur dieses „Basalgliedes“ gar nichts gesagt, sodass man weder weiss, ob es überhaupt ein eigentliches Glied ist, noch ob man damit auf Katopleure, Eucoxa oder Procoxa zurückgreifen soll. Ebenso wenig ist klar, was mit dem „folgenden Extremitätengliede“ gemeint ist. Unklar sind ferner seine Ausführungen über die Coxopleuralbezirke der typischen Laufbeinsegmente. Es sind dabei weittragende Deutungen vorgenommen worden (vergl. den Abschnitt V!), ohne dass auch nur die auffälligsten Verhältnisse dieser Körpergebiete beim freilebenden Tier berücksichtigt wären. Den *Conus lateralis* der Sternite z. B., welcher einen so einschneidenden Einfluss auf die ventrale Rumpfmuskulatur ausübt, habe ich daher selbst in der umfangreichen und sonst in vieler Hinsicht so schönen Arbeit von Heymons vergeblich gesucht. Die Unklarheit, welche [auch nach ihm] so lange über die Coxopleurien geherrscht hat, würde er übrigens schwerlich mit dem innigen Anfügen „an den umgeschlagenen Seitenrand des 21. Tergits“ erklärt haben, wenn er auch andere Gattungen, wie z. B. *Cryptops* berücksichtigt hätte, wo das Tergit des Endbeinsegmentes mehr selbständig geblieben ist.

Börner hat a. a. O. das *Coxopleurium* des Endbeinsegmentes als „Basipodit“, d. h. Subcoxa + Coxa bezeichnet. Dass dies nicht angängig ist, ergibt sich schon aus dem über die Subcoxa Gesagten, aber auch aus den Mitteilungen auf S, 237 der *Lithobiiden*-Arbeit Nr. 4.

Erhebt man schliesslich die Frage, ob das *Coxopleurium* am Endbeinsegment im Vergleich mit den Zuständen der Laufbeinsegmente als abgeleitet oder ursprünglich zu betrachten sei, so kann die Antwort nach den vorhergegangenen Ausführungen nur so lauten, dass in den Seitengebieten des Endbeinsegmentes vielleicht insofern von vornherein ein ursprünglicherer Zustand gegeben ist, als ein Sternitseitenzapfen total fehlt, also wahrscheinlich primär fehlt (vergl. auch das auf S. 110 über *Lithobiiden* Ausgeführte), dass *im übrigen aber ganz ausgesprochen sekundäre, also abgeleitete Verhältnisse vorliegen und zwar Verwachsungszustände,* was sowohl der Vergleich mit den vorhergehenden Segmenten lehrt, als auch die Rücksicht auf den Zustand der drei eingestülpten Segmente und die physiologische Bedeutung des Endbeinsegmentes bei den Skolopendern. Dazu kommen dann jene überhaupt nur für das Endbeinsegment geltenden Eigentümlichkeiten wie Hüftdrüsen und der nach hinten gerichtete Vorsprung oder Fortsatz. Auch der Vergleich mit dem Endbeinsegment der *Anamorpha* und *Scutigeriden* lässt die Coxopleurien der Skolopender als vorwiegend derivat erscheinen.

III. Anamorpha, Steinläufer.

1902 habe ich in meinen „Beiträgen zur vergleichenden Morphologie des Thorax der Insekten mit Berücksichtigung der Chilopoden“ Nova Acta Bd. LXXXI Nr. 2 bereits kurz die Hüften und Pleuralteile von *Lithobius* erörtert, während ich in der eingangs genannten Arbeit Nr. 4 diese Dinge ebenfalls berührt habe. Meine bisherige Anschauung betreffend *Lithobius* kann ich jetzt auf Grund der Untersuchungen an *Scolopendromorpha* in einem wichtigen Punkte verbessern. Schon 1902 habe ich auf einen mehr oder weniger tiefen, nahtartigen Einschnitt hingewiesen (vergl. z. B. in der Arbeit über den Thorax Taf. IX Abb. 1 und 2), welcher den hinter der Hakenleiste gelegenen Hüftteil in zwei Abschnitte absetzt. Den *hinteren* dieser beiden Abschnitte fasste ich früher als eine Metacoxa auf, welche mit der übrigen Hüfte mehr oder weniger verwachsen sei. Das trifft aber nicht zu, wie die Verhältnisse bei den *Scolopendromorpha* mit aller wünschenswerten Klarheit beweisen. Das Hüftstück, welches ich oben als *Eucoxa posterior* erörtert habe und als allgemein bei den *Scolopendromorpha* in mehr oder weniger scharfer Weise ausgeprägt erwiesen, *war bisher überhaupt unbekannt* oder jedenfalls unbeachtet, es war daher auch mir bisher nicht besonders aufgefallen, und da den *Anamorpha* ein sonstiges auf eine Metacoxa zu beziehendes Hüftgebilde nicht zukommt, so folgerte ich, dass jener hintere Hüftabschnitt von *Lithobius* der Metacoxa der *Epimorpha* entspreche. Tatsächlich *entspricht er vollkommen der Eucoxa posterior und die Metacoxa fehlt den Lithobiiden vollständig.* Die *Hypocoxa* steht nämlich in engerem Zusammenhang mit der Sternitseitentasche und ist mit einem chitinigen *Band* verknüpft, welches den inneren Grund der Hüfte umfasst und bei *Scolopendromorpha* auch mit dem Seitenzapfen verbunden ist. *Dieses Band* *liegt in der tiefen Falte, durch welche Eucoxa und Hypocoxa getrennt sind.* Diese tiefe *Falte* aber steht einer Verwachsung von Hypocoxa und Eucoxa zwar nicht als unübersteigliches Hindernis entgegen, (das zeigen ja die Coxopleurien des Endbeinsegmentes), aber sie erschweren dennoch einen solchen Vorgang bedeutend. Lässt sich nun ausserdem zeigen, dass einerseits, wie das ausgiebig bei den *Scolopendromorpha* geschehen ist, eine deutliche Metacoxa und ein mit jenem hinteren Hüftabschnitt von *Lithobius* nahezu identisches Hüftgebilde (Eucoxa posterior) *gleichzeitig* neben einander vorkommen, während andererseits (wenigstens an einem Teil) der *Lithobius*-Segmente hinter den Hüften ein häutiger Wulst steht, welcher verbunden ist mit einem Chitinband, welches ähnlich wie bei Skolopendern die Hüfte hinten und unten umfasst und vorn sich an die Procoxa anschliesst (wie ich das in Abb. 1 bereits 1902 Nova Acta angedeutet habe), so kann kein Zweifel mehr bestehen, dass bei *Lithobiiden* ein der *Metacoxa* entsprechendes Gebilde *nicht zur* Ausprägung gelangt ist.

1905 habe ich in meiner *Lithobiiden*-Arbeit von der eigentlichen *Hüftrippe* oder Hakenleiste *Costa coxalis* bereits kurz unterschieden die *Innenleiste, Costa basalis,* worauf ich hier näher eingehen möchte. Die eigentliche *Costa coxalis* (Abb. 36 und 37 *α 2*) teilt auch bei den Steinläufern die *Eucoxa* in *Eucoxa superior* und *inferior* und entsendet von dem vorspringenden Gelenkzapfen *α* aus, — der dem Trochanter bei seiner Drehung als Angel dient — einen schwächeren, abgekürzten *Nebenast α 1* nach vorn, welcher jenem Nebenast homolog ist, der bei den Skolopendern zur Abgrenzung der Eucoxa triangularis führt. Eine solche kommt bei *Lithobius* wegen der Kürze des *Nebenastes* nicht vollkommen zu stande, ist aber mehr oder weniger angedeutet. Die *Costa coxalis* zieht in der Hauptsache nach unten und innen gegen *den basalen Eucoxa-Rand* und an diesem selbst verläuft *im Bogen*, weiter nach hinten zu die *Costa basalis α 3.* Letztere bildet zusammen mit der *Costa coxalis* einen stumpfen Winkel unter deutlicher Knickung. Bei *Lithobius forficatus* habe ich diesen Winkel nur am ersten Beinpaar vermisst und sah hier beide Costae ohne deutliche Grenze in einander übergehen, im übrigen ist er an den vorderen Beinpaaren stumpfer als an den weiter hinten gelegenen. Am 1.—10. Segment *hängen die beiden Costae vollständig zusammen,* während sie am *11.—15.* (Abb. 36

und 37) von einander *abrücken* und zwar in nach hinten steigendem Masse. Bekanntlich nehmen aber auch die Hüften im allgemeinen am Rumpfe von *Lithobius* in der Richtung von vorn nach hinten *an Grösse* zu. Mit dieser Grössenzunahme hält die Vergrösserung der Costa coxalis einigermaassen Schritt, am 14. und 15. Beinpaar aber werden die Hüftleisten mehr und mehr *verkleinert*, am 14. laufen sie vom Endrande kaum noch bis zur Hälfte herab, am 15. nicht einmal mehr ein Viertel, sodass also an den hintersten 3—4 Beinpaaren eine erhöhte *Hüftvereinheitlichung* eintritt. Die *Costa basalis* schliesst sich eng an das schon oben bei Besprechung der Hypocoxa erwähnte Chitinband, welches sich in der Falte zwischen Eucoxa und Hypocoxa befindet und bildet mit diesem ein kleines, wenig auffallendes *Gelenk* (ε Abb. 37), das *Coxobasalgelenk*, bestehend in einem kleinen, zäpfchenartigen Vorsprung an der *Costa basalis* und einer grübchenartigen entsprechenden Vertiefung in der Seitenhaut neben und über dem Sternitseitenrande. Die *grübchenartige Vertiefung* ist mehr oder weniger chitinisiert und kann als eine *höchst primitive Vorstufe* zu dem bei den *Scolopendromorpha* geschilderten *Conus lateralis* aufgefasst werden. Mit Rücksicht auf diesen Umstand erscheint es mir wohl interessant, dass dieses kleine Coxobasalgelenk bei *Lithobius* zwar am 1.—13. Laufbeinpaar deutlich ausgeprägt ist, am *14.* und *15.* dagegen *fehlt*, was in Einklang steht mit dem, was ich oben (S. 107) über das primäre Fehlen eines *Conus lateralis* am Endbeinsegment der Skolopender gesagt habe.

Dass die Rumpfsegmente der *Chilopoden* mit 15 beintragenden Segmenten in Bezug auf Grösse und Stigmenverteilung auffallend *heteronom* sind, ist bekannt, namentlich die sehr verschiedene Grösse der Tergite ist augenfällig. Es gibt aber noch eine Reihe anderer Organisationsverhältnisse, welche diese Heteronomie als noch viel weitgehender erweisen. Ich gebe daher zunächst mit Rücksicht auf das *Eupleurium* und die Stigmen nebenstehende Übersicht.

Die coxopleuralen Organe sind bei *Lithobius* mit zweierlei Tastborsten in zerstreuter Anordnung besetzt, langen und kräftigen und kürzeren feinen. Die stärkeren Tastborsten kommen vor an den drei Eucoxa-Teilen, an Katopleure, Stigmenschild und Nachstigmenplatten, kleinere an Coxopleure und Anopleure, die Procoxa führt die schwächsten Börstchen. Alle Stigmen-

	Katopleure	Anopleure	Stigmapleurit	Poststigma-pleurit
1. Laufbeinsegment	gross, kaum gebogen, dem Tergit genähert	fehlt	gross, aber *ohne* Stigma	fehlt
2. "	schmäler, gebogen, vom Tergit weiter abgerückt	vorhanden	fehlt	fehlt
3. "	Katopleure sichelartig gebogen, nach hinten am Körper nach und nach dem Tergit wieder mehr genähert	fehlt	gross und mit *Stigma*	vorhanden und länglich
4. "		vorhanden	fehlt	fehlt
5. "		fehlt	gross und mit *Stigma*	vorhanden und länglich
6. "		vorhanden	fehlt	fehlt
7. "		fehlt	fehlt	fehlt
8. "		fehlt	vorhanden und mit *Stigma*	fehlt
9. "		vorhanden	fehlt	fehlt
10. "		fehlend oder vorhanden	vorhanden und mit *Stigma*	fehlt
11. "		vorhanden	fehlt	fehlt
12. "	deutlich gebogen	fehlend oder vorhanden	mit *Stigma*	fehlt
13. "	deutlich, aber schwächer gebogen, dem Tergit genähert	vorhanden	fehlt	fehlt
14. "	gedrungen, wenig gebogen	fehlt	gross und mit *Stigma*	fehlt
15. "	rundlich, nicht gebogen, nach vorn geschoben	fehlt	fehlt	fehlt

schilde sind kräftig entwickelt und führen das längliche Stigma mehr oder weniger in der Mitte (Abb. 35 *stp*). Die *Procoxa* befindet sich stets neben den Sternitvorderecken und vor der *Eucoxa*. Die Procoxa ist am

1. Beinpaar einfach (Abb. 35),

2.—8. Beinpaar durch deutliche Einschnürung in zwei über einander gelegene Teile abgesetzt (Abb. 35),

9.—11. Beinpaar zweiteilig, aber die Einschnürung schwächer (Abb. 36),

12.—13. Beinpaar einfach (Abb. 37),

Am 14. und 15. Beinpaar *fehlt* die Procoxa, was um so bemerkenswerter ist, als daraus hervorgeht, dass dieses Fehlen *mit dem Fehlen des Coxobasalgelenkes in physiologischem Zusammenhang steht, zugleich aber auch mit der Abschwächung der Costa coxalis, der Hüftenvergrösserung gegen das hintere Körperende* zu, der Haltung des 14. und 15. Beinpaares vorwiegend nach hinten und der fast vollständigen Verdrängung des Eupleuriums. Aber auch die *Coxopleure* kommt hier in Betracht. Sie besteht aus *Lappenteil* (pars lobata) und Bogenteil (pars arcuata), von denen nur der erstere mit feinen Tastborsten besetzt ist. Die *Coxopleure* ist mit der *Eucoxa* in nach den Segmenten etwas verschiedener Weise verwachsen, aber gleichzeitig, da sie nur auf einer Seite mit ihr verbunden ist, wenigstens an den vorderen Segmenten, *leicht gegen sie beweglich,* zumal die Verwachsung nur auf einer schmalen Brücke besteht. Der Bogenteil umfasst von oben die Gelenkgrube des Telopodit und besteht aus zwei Zipfeln, von denen der *Hinterzipfel* sich nach hinten über jener Gelenkgrube in der Haut verliert, während der *Vorderzipfel* nach unten sich verschmälernd, herabsteigt, wo er durch eine verdickte Leiste der Eucoxa superior, welche ich als *Vorderleiste* (Costa anterior) bezeichne, gegen jene *scharf abgesetzt* wird. Eine feine, in den einzelnen Segmenten etwas verschiedenartige Nebenleiste schliesst sich an die Vorderleiste derartig an, dass sie mit ihr ungefähr ein V bildet und Lappenteil nebst Vorderzipfel vom Hinterzipfel absetzt. An allen vorderen Segmenten ist die Coxopleure deutlich abgesetzt in jene zwei Teile und am 2.—9. Segment läuft der Vorderzipfel als schmales Dreieck neben der Eucoxa superior herunter. An den weiteren Segmenten verkümmert dieser Zipfel mehr und mehr. Am 1. Segment sind der Bogenteil und seine beiden Zipfel nur kurz. Der grundwärtige Rand der *Eucoxa* ist, namentlich am 9.—12. Segment (Abb. 36 und 37) zweimal deutlich bogig vorgewölbt und die winkelige Trennung liegt da, wo Costa coxalis und basalis mehr oder weniger von einander abgerückt sind. Der Rand *beider* bogiger Verwölbungen ist durch wulstige Kante gebildet und zwar ist die vordere die

Costa anterior, die hintere die *Costa basalis.* Am 13. und noch deutlicher 14. und 15. Beinpaar verschwindet die Absetzung zwischen diesen beiden Bogen und die *Costae* verschmelzen so, dass sie einen *einzigen* gebogenen basalen Randwulst darstellen. Zugleich ist am 13. und 14. Beinpaar der Bogenteil der *Coxopleure* hinten verschwunden, der Lappenteil sehr klein geworden. Die Trennung von Coxopleure und Eucoxa aber ist dadurch unvollständig geworden, dass der V-Haken auseinander gerückt ist, indem ausser der langen Randcosta eine abgekürzte wulstige Linie die Eucoxa superior nur unvollständig abgrenzt. *Am 15. Beinpaar ist die Coxopleure vollständig verschwunden.* Die Eigentümlichkeiten der typischen Laufbeinhüfte der *Lithobiiden* und ihrer pleuralen Nachbarschaft verschwinden an den einzelnen Segmenten also um so mehr, *je weiter nach hinten am Körper das betreffende Segment liegt.*

Die *Eucoxa* besteht also, wie schon oben angegeben, bei *Lithobiiden* aus *Eucoxa superior, inferior* und *posterior.* Die *Eucoxa inferior* ist durchaus einheitlich und zeigt keine Spur jener bei den *Scolopendromorpha* geschilderten Zweiteilung. Bei der allmählichen Vergrösserung der Hüften, von vorne nach hinten am Rumpfe, ist in erster Linie die *Eucoxa inferior* beteiligt. Breitet man die Rumpfsegmente, nach Entfernung der Telopodite, flach aus, so liegt der Arcus der einzelnen Hüften am 1.—10. Segment ungefähr in der Mitte des Gebietes zwischen Tergit und Sternit, an den folgenden Segmenten rückt er mehr nach oben und hinten. Am 1.—10. Segment steht die eigentliche Costa coxalis ungefähr senkrecht auf dem Sternitseitenrand oder ist nur wenig nach hinten oder vorn herüber geneigt, je nach der zufälligen Haltung. Dem entspricht auch, dass der *Endrand der Eucoxa inferior* am 1.—10. Segment dem Sternitseitenrand ungefähr *parallel* verläuft. Dagegen ist am 11.—15. Segment nach hinten zu eine immer stärkere Neigung der *Costa coxalis* schräg nach hinten herüber festzustellen und zugleich rückt auch der Endrand der Eucoxa inferior immer mehr nach hinten herüber, sodass er zu dem Sternitseitenrande eine mehr schräge Stellung einnimmt, was noch mehr auffallen würde, wenn nicht auch die Seitenränder der hinteren Sternite mehr als die der vorderen nach hinten zusammenneigten. Es hängt dies wieder mit dem Umstande zusammen, dass die Hinterecken an den vorderen Sterniten stumpfwinkelig sind, an den hinteren dagegen mehr und mehr abgerundet. Der *Endrand* der *Eucoxa inferior* nimmt also nach hinten zu am Körper eine Richtung ein, welche *zur Längsachse des Körpers einen immer grösseren Winkel bildet.*

Die mehr senkrecht zum Sternitseitenrand gestellten Hüften des 2.—10. Segmentes besitzen vor sich eine *zweiteilige* Procoxa, die nach hinten herüber geneigten Hüften des 12.—15. Segmentes besitzen vor sich eine

Abb. 35.

Lithobius forficatus L. ♀. Seitenansicht der drei vordersten Rumpfsegmente, an deren zweitem die beiden Grundglieder des Telopodit sitzen geblieben. — 60 f. Vergr.
g = Coxobasalgelenk, *x 1* = Rudiment einer Anopleure.

einfache oder überhaupt keine Procoxa, den Übergang zwischen beiden Gruppen bilden die Hüften des 11. Segmentes (Abb. 36).

Die Gelenkgrube für das Telopodit wird umfasst unten von der Eucoxa inferior, vorn von der Eucoxa superior, hinten von Eucoxa posterior, oben von der Coxopleure, hinten oben aber ist eine Lücke in dieser Umschliessung, indem dort nur durch *Haut* der Ring vervollständigt wird, entsprechend dem schon geschilderten Bedürfnis des Telopodit bei der Rückwärtsbewegung hinten grundwärts am Rumpfe möglichst geringen Widerstand zu finden. *Eucoxa inferior* und *posterior* sind nie so vollkommen von einander getrennt, wie ich es oben von verschiedenen Skolopender-Gattungen beschrieben habe, vielmehr geht die Absetzungsnaht höchstens bis zur Hälfte herab (Abb. 35 *x*), meist ist sie noch kürzer, sodass diese beiden Hüftteile mindestens in der Grundhälfte durchaus verwachsen sind. Ein deutlicher *Einschnitt*, in welchem sich der Endrand jederseits hineinbiegt, ist aber am 1.—11. Segment vorhanden, *während er am 12.—15. in Anpassung an die Coxaldrüsen fehlt, indem hier die Eucoxa posterior, welche allein Trägerin*

Abb. 36.
Lithobius forficatus L. ♀. Seitenansicht der coxopleuralen Teile des 11. Rumpfsegmentes. — 60 f. Vergr.

der Hüftdrüsen ist, durch eine winklig geknickte Längskante ganz nach hinten gerückt ist, sodass die Drüsenmündungen in ein hohles, umrandetes Feld gebracht worden sind. *Im Gegensatz zu den Scolopendromorpha, deren Hüftdrüsen grösstenteils der Procoxa angehören, ist die Lagerung der Lithobiiden-Hüftdrüsen im Bereich der Eucoxa posterior beachtenswert.* Die *Vergrösserung* der Beine und Hüften in der Richtung gegen das hintere Körperende wird bei *Lithobius* vom 11. Beinpaar an besonders fühlbar. Sie betrifft also die drei Teile der *Eucoxa* und fällt an der Eucoxa inferior am stärksten auf. *Die Eucoxa wird vergrössert auf Kosten der Procoxa, Coxopleure und des Eupleuriums,* behält aber sonst die Allgemeingestalt eines *oben geöffneten Halbzylinders bei.*

Die Stützen und Widerlager, welche die *Eucoxa* an den vorderen und mittleren Segmenten, wo sie mehr nach aussen herausragt, durch Procoxa einerseits, Coxopleure und Katopleure andererseits findet, gehen an den hintersten Segmenten mehr und mehr verloren, werden aber in demselben Masse, wie diese schwinden, ersetzt durch die breitere Anlagerung an das Sternit und schliesslich auch Tergit und am vorletzten Beinpaare auch durch das *deckelartige Vorspringen* der Eucoxa posterior nach hinten über die Basis der nächst folgenden 15. Hüfte. Das *Wachstum* der Eucoxa findet an den hinteren Beinpaaren in der *Grundhälfte* statt, wie man an dem schon geschilderten Verhalten der *Costae* erkennen kann. Die *Costa basalis* und *coxalis* hängen ursprünglich, d. h. an den vorderen Segmenten zusammen, werden aber durch das basale Wachstum auseinander gesprengt, sodass die *Costa coxalis*, indem sie mit dem übrigen Wachstum der *Eucoxa* nicht mehr gleichen Schritt hält, vom Grundrande abgelöst und nach oben gehoben wird. Der Anschluss an das Tergit ist am vollständigsten bei dem 15. Beinpaar, wo ihm die Eucoxa superior auf breiter Strecke angelagert ist. Trotz aller Unterschiede zeigt aber das Coxopleuralgebiet an den Endbeinen der *Lithobiiden auffallend geringere Abweichungen* von den übrigen Laufbeinsegmenten als wie das oben für die Skolopender geschildert worden ist.

Die Hüften der starken Endbeine erhalten bei den *Lithobiiden* ausser dem Tergit ihres eigenen Segmentes auch noch durch die vorspringenden Hinterecken des 14. Tergits Schutz und Stütze. Beachtenswert ist ferner die fast mondsichelartig gebogene Haut, welche zwischen Telopoditgrund und Coxopleure ausgespannt ist und beim Emporheben der Beine teilweise eingestülpt wird. An den hintersten Beinpaaren, namentlich aber dem 14. und 15. ist auch diese Haut abgeschwächt. Der oben schon genannte *Nebenast* der *Costa coxalis* zieht meist deutlich an oder in der Nähe des Endrandes der Eucoxa superior nach vorn und oben (Abb. 36 und 37 *a 1*). Äusserlich kommt er durch eine kurze Furche zum Ausdruck. Am 1.—11. Segment sah ich den Nebenast gut ausgebildet, am 12. auch noch, wenngleich schon schwächer, am 13. und 14. ist er nur noch kurz und schwächlich, am 15. fehlt er vollständig. An den mittleren Segmenten verbleibt er nur anfangs nahe dem Endrande und biegt dann schnell nach grundwärts und vorn und endet mitten in der Eucoxa superior.

Die im vorigen genannten Unterschiede zwischen dem 11.—15. Beinpaare und den vorhergehenden einerseits und dem 13.—15. und den vor ihnen befindlichen andererseits erinnern daran, dass diese hinteren Beinpaare durch zwei besondere Larvenstadien, das 3. und 4. erst zur Ausbildung gelangen.

Die Rumpfsegmente der *Lithobiiden*, welche im Grossen betrachtet, wenigstens an der Bauchfläche recht *homonom* segmentiert erscheinen, haben wir im Vorigen als mit Rücksicht auf Coxopleuralgebilde recht *heteronom* segmentiert erwiesen, obwohl auch hier nicht verkannt werden kann, dass

Abb. 37.
Lithobius forficatus L. ♀. Seitenansicht der coxopleuralen Teile des 12. Segmentes. — 60 f. Vergr.

die *hauptsächlichsten* Grundzüge im Bau der Eucoxa an allen 15 Beinpaaren gewahrt bleiben. *Somit bieten uns die Steinläufer in ihren beintragenden Segmenten ein bemerkenswertes Bild der Mischung von heteronomen und homonomen Erscheinungen*, bei homonomen Grundzuge an der Bauchfläche, heteronomen Grundzuge an der Rückenfläche, ein Bild, welches allen denen, welche sich mit phylogenetischer Ableitung stark heteronom segmentierter *Tracheaten* beschäftigen, höchst lehrreich sein kann.

Über die Hüften der *Lithobiiden* ist bisher wenig bekannt geworden. Latzel sagt 1880: „Pleuren der Rumpfsegmente weichhäutig und faltig".

Über den Bau der Pleurite und Hüften hat er sich nicht geäussert. Haase sagt ebenso wenig, nämlich „Pleuralschildchen schwach entwickelt" (S. 32, 1887). Auf S. 7 gibt er übrigens hinsichtlich der Chilopoden-Hüften im allgemeinen folgende komische Beschreibung: „Die Hüften sind nur bei den Anamorpha besonders (!) ausgebildet, bei den *Epimorpha* treten sie weit in (!) den Körper zurück". Sograffs Anatomie von *Lithobius forficatus* ist Latzel und Haase anscheinend nicht bekannt gewesen. Leider ist der grösstenteils russische Text auch mir unverständlich. Da Sograff aber fünf auf die coxopleuralen Organe bezügliche Abbildungen gegeben hat, so lässt sich ein Bild von seinen Anschauungen nach dieser Richtung gewinnen. In den Bau der Hüften scheint er nicht näher eingedrungen zu sein. Seine Abb. 7—10 von den Pleuralteilen sind schematisch, lassen aber Procoxa, Katopleure, Anopleure, Stigmapleurit und Poststigmapleurit erkennen. Seine Abb. 7 bezeichnet die Segmente „II—IV", es sind aber das 1.—3. beintragende Segment gemeint, deren Pleurite im wesentlichen richtig verzeichnet wurden. Unrichtig angedeutet (durch Punktlinien) sind die Hüften, und die Coxopleuren sind nicht verzeichnet. Die Procoxa wird als „pars episternorum anterior", die Anopleure als „praescutellum externum", die Katopleure als „pars basalis" beschrieben. Dass Latzels allgemeine Angaben über die *Chilopoden*-Hüften S. 11 seines Handbuches — „die Hüfte hat man sich wohl überall bei den *Chilopoden* aus zwei Stücken bestehend zu denken, einem dorsalen, kleineren und einem ventralen, meist grösseren Halbringe, die durch eine chitinöse Naht an der Vorder- und Hinterseite mit einander fest verbunden sind" — nicht der Wirklichkeit entspricht, auch nicht einmal als allgemeinstes Schema gelten kann, verdient schliesslich doch noch betont zu werden. E. Haase brachte a. a. O. in Abb. 1 der Taf. I eine Darstellung von *Lithobius forficatus*, welche im wesentlichen mit Sograffs Abb. 7 übereinstimmt, von den einzelnen Bestandteilen der Hüfte aber ebenso wenig erkennen lässt wie von den Coxopleuren.

Die einzige eingehendere bisherige Schilderung der *Lithobius*-Hüften gab ich selbst in den Abh. d. Kais. Deutschen Akad. d. Naturforscher Halle und zwar 1901 im XVI. Aufsatz der „Beiträge zur Kenntniss pal. Myr." S. 372—465 und 1902 daselbst in den „Beiträgen zur vergl. Morphol. d. Thorax d. Insekten, mit Berücksichtigung der Chilopoden". In letzterer

Arbeit habe ich auch bereits die drei Hauptbestandteile der Eucoxa und ausser den Pleuralteilen und Procoxa auch die Coxopleure beschrieben. An beiden Stellen habe ich hingewiesen auf den in der Gelenkhaut zwischen Eucoxa und Telopodit ausgespannten schmalen *Arcus* und 1901 auf S. 379 folgendes mitgeteilt: „Wir müssen zwischen oberem und unterem Bogen unterscheiden (Arcus inferior und superior). Der obere Bogen ist besonders deutlich in den Hüften der Endbeine zu sehen. Die Bedeutung dieser Bögen liegt einmal darin, dass, weil zwischen Hüfte und Schenkelring sich die grösste *Zwischenhaut* des ganzen Beines befindet, hier auch ein besonderer Schutz gegen Fremdkörper und Parasiten erforderlich ist; sodann dienen sie als federnde Widerlager der hauptsächlich im endwärtigen Hüftgelenk sich drehenden Beine. Endlich sind die Bögen noch deshalb bemerkenswert, weil sie vorgebildete Reissstellen abgeben. Die abgeworfenen Beine reissen regelmässig hinter den Bögen ab, sodass also nur die Hüften mit den Bögen zurückbleiben". Besonders aufmerksam machen will ich hier noch auf ein kleines *Gelenk* zwischen vorderem und hinterem *Bogen* (in der Arbeit von 1902 Taf. IX Abb. 2 mit „*g*" bezeichnet), welches sich hinten befindet, dem auf dem Processus der Costa coxalis ruhenden Trochanterzapfen gerade gegenüber, anbei in Abb. 35 und 37 ersichtlich. Dieses Arcus-Gelenk ist nicht zu verwechseln mit dem *hinteren* Coxotelopoditgelenk, welches weiter unten von *Scutigeriden* beschrieben wird. (Vergl. auch Abb. 22 im XVI. Aufsatz 1901.)

IV. Notostigmophora, Spinnenasseln.

In Abb. 2 a. a. O. zeichnet E. Haase Hüften und Pleuren von *Scutigera coleoptrata* und zwar die ersteren einheitlich, in den letzteren ein ungefähr ovales Pleurit als „*es* Episternen", welches von oben durch einen Bogen umfasst wird. Latzel beschränkt sich S. 23 auf die Angabe: „Die Pleuren sind weichhäutig und faltig, die Beine sehr lang und dünn, ihre Hüften gross, vortretend, alle porenlos". Unser Wissen über Hüften und Pleuren ist bei den *Scutigeriden* mithin noch viel dürftiger als bei den Lithobiiden. Die Organisation der Spinnenasseln bietet so viel Eigenartiges, dass diese klaffende Lücke nicht besonders erstaunlich ist, wir werden aber sehen, dass die Coxopleuralzonen bei den *Scutigeriden* ebenfalls recht eigenartig sind.

Betrachten wir uns zunächst mit einer Lupe die Seitengebiete von *Thereuopoda clunifera* (Wood), so fällt gegenüber den drei anderen *Chilopoden*-Hauptgruppen sofort mehreres in die Augen:

1. sind die Hüften sehr *gross* im Verhältnis zum Sternit, (von unten gesehen, haben sie ungefähr dieselbe Breite wie ihr Sternit im Durchschnitt); 2. sitzen sie neben dem Sternit mehr gegen dessen Hinterhälfte gerichtet, grundwärts eingesenkt oberhalb einer Hautduplikatur, welche sich vorn und hinten nach oben biegt, *ohne Pro- oder Metacoxa* zu enthalten; 3. sind Pleurite in der Art, wie sie anderen Chilopoden zukommen, nicht zu bemerken, vielmehr greifen die Hüften, welche in den Seiten weit vorspringen und schräg von oben vorn nach hinten unten gestellt sind, mit einer auffallenden gratartigen Kante, welche ich *Hüftmesser* (Culter coxalis) nennen will und die ebenfalls schräg von unten hinten nach oben vorn verläuft, *weit in den Flanken aufwärts.* Das obere Ende des Hüftmessers aber wird

überdacht von einem unten hohlen *Bogenwulst* (*apl* Abb. 38), welcher vorn sich stark nach unten umbiegt und in jene vor der Hüfte befindliche Falte (*f*) übergeht, welche bei anderen Chilopoden die Procoxa enthält, hier aber einfach häutig beschaffen ist.

Bewegt man eine Hüfte in der Richtung von unten nach oben und umgekehrt, so lässt sich bald feststellen, dass sie von unten im Bogen durch die hypocoxale Haut und weiterhin die Hinterhälfte des Sternit gestützt wird, oben aber in dem Bogenwulst ein Widerlager findet. Im übrigen lässt sich mit der Lupe noch folgendes leicht feststellen: Die Grösse der Hüften nimmt von vorn nach hinten allmählich bedeutend zu, erreicht am 11.—13. Beinpaar ihr Maximum und nimmt am 14. und 15. wieder deutlich ab. Für gewöhnlich sind die Hüften des 1.—3. Beinpaares etwas nach *vorn*, die des 4.—7. nach der *Seite*, des 8.—15. mehr und mehr nach *hinten* gerichtet. Die Sternite, welche mehr oder weniger ausgehöhlt sind und eine tiefe *Medianrinne* führen, sind vorn jederseits stark erweitert. An dieser Erweiterung finden die Hüften des jedesmaligen vorhergehenden Segmentes vom 8. an ebenfalls einen Halt. Ferner legen sich die Hüften der fünf letzten Beinpaare selbst an einander infolge ihrer Grösse und stärkeren Richtung nach hinten, sodass sie sich fast ziegelartig überdecken.

Das *Hüftmesser* zeigt, entsprechend der schon genannten Grössenverschiedenheit der Hüften, ebenfalls eine nach den Segmenten verschieden starke Ausbildung, dasselbe gilt für die an den Messergrat angrenzenden Stücke. Übrigens gehört, wie wir sehen werden, zur eigentlichen Hüfte also Eucoxa nur die *untere* Hälfte des Hüftmessers, die *obere* gehört dem Pleuralgebiet an. Man kann im allgemeinen sagen, dass den grössten Hüften auch das stärkste Hüftmesser zukommt. Am 1.—4. Segment ist von einem Hüftmesser kaum zu sprechen, erst am 5. Segment wird es deutlich, nimmt nach hinten an rippenartiger Erhebung zu und zeigt am 10.—14. Segment die stärkste Ausprägung, am 15. ist es wieder etwas kleiner.

Entfernt man die Telopodite an den Laufbeinen und blickt senkrecht auf die Gelenkfläche, in welcher der eigenartige *Trochanter* sitzen zu bleiben pflegt, so erkennt man am Grunde des letzteren vorn und hinten einen vorspringenden *Zapfen* (*g*, *g1* Abb. 41). Oben und unten wird der Trochanter von einem sichelförmig gebogenem Hautgebiet umgeben, welches ihn von der Eucoxa trennt. Das obere dieser Hautgebiete ist nach oben dreieckig erweitert. Der vordere Trochanterzapfen ruht auf einem Gelenkknopf der Eucoxa, der sich am Ende der bekannten Trennungslinie befindet, welche an der Vorderfläche als Rinne ausgebildet, die schmälere Eucoxa superior von der breiteren Eucoxa inferior trennt (*r* Abb. 40). Auch das untere der den Trochanter umgebenden Hautgebiete springt nach unten dreieckig vor und läuft hier in eine *Falte* aus, welche Eucoxa inferior und posterior trennt (*hi*). Der *Hinterrand* der Eucoxa inferior, an welchem sich unfern des Endrandes die Gelenkgrube für den langen *Hüftstachel* (Calcar) befindet, springt nach hinten deutlich *rippenartig* vor. Über diesem vorspringenden Rande versteckt liegt (Abb. 42) der Unterrand der Eucoxa posterior, deren Oberrand vorn (aussen) an einem Gelenk endet, auf welchem der genannte hintere Trochanterzapfen *g1* ruht. Neben dem oberen Rande der Eucoxa posterior befindet sich ebenfalls eine tiefe Furche. Der *hintere Rand* der *Eucoxa superior,* welcher das untere Stück des *Hüftmessers* bildet, ist oben etwas *knotig* verdickt. Dieser *Knoten ist durch einen Einschnitt scharf abgesetzt* gegen das obere Stück des Hüftmessers. Oben wird die Gelenkgrube des Telopodit abgeschlossen durch ein Stück, welches zwischen jenem Knoten liegt und dem Gelenk, an welchem der hintere Trochanterzapfen beteiligt ist. Während der unter jenem Knoten (*x* Abb. 40) und Einschnitt gelegene Teil des Hüftmessers den vorderen Endrand der Eucoxa bildet, stellt der obere Teil einen *Grat* dar zwischen zwei Flächen, deren Haltung nach den Segmenten verschieden ist, aber *entsprechend der allgemeinen Normalhaltung der Hüften.* So findet man am 5.—8. Segment, deren Hüften nach *aussen* gerichtet sind, dass das Gebiet vor dem Grat steil abstürzt und mehr quer nach aussen gerichtet ist, das rundliche und etwas *napfartig ausgehöhlte Sklerit* hinter dem *Grat* steil an den Rumpfseiten herabhängt und nur wenig gegen die Körperlängsachse geneigt, während am 9.—15. Segment, deren Hüften mehr nach hinten sich wenden, auch die Hüftmesser mehr und mehr nach *hinten* gewendet sind, daher denn auch das Feld vor dem *Grat* in nach hinten zunehmender Weise nach hinten gedrängt wird, das Feld hinter demselben aber derartig verlagert wird, dass sein Hinterende immer mehr gegen das Körperinnere geschoben wird, sodass der *Winkel,* welchen die beiden Flächen vor und hinter dem Grat mit einander bilden, *nach hinten am Körper immer spitzer wird.* Die Kante selbst wird am *Hüftmesser* im mittleren und hinteren Rumpfdrittel ebenfalls, namentlich auch in ihrer Ausdehnung nach oben stärker und erreicht ihre höchste Ausbildung am 11. Beinpaar.

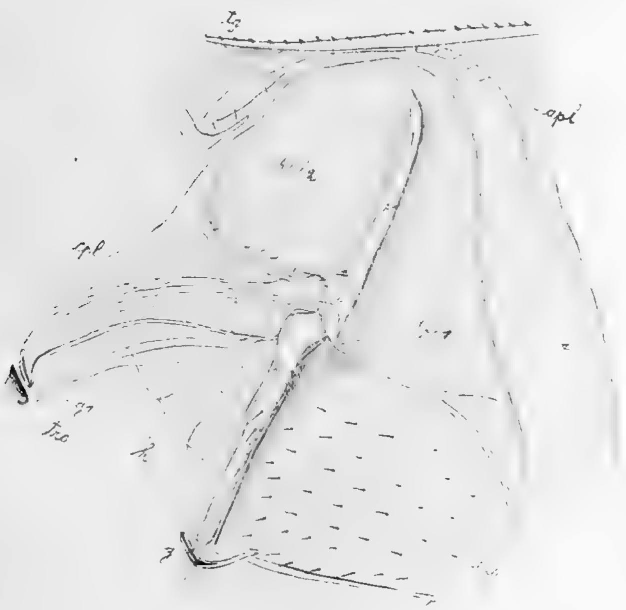


Abb. 38.

Thereuopoda clunifera (Wood). Ansicht von aussen auf das Pleuralgebiet der rechten Seite des 10. Laufbeinsegmentes, dazu die anstossenden oberen Hüfteile.

tg = wulstiger Tergitaussenrand.
k1 + *k2* = Hüftmesser, welches durch die Gelenkstelle *x* in zwei Abschnitte geteilt wird.
f = Erhebung zwischen zwei von oben nach unten ziehenden Hautfalten.
g = vorderer Gelenkknopf zwischen Hüfte und Trochanter, rechts davon die Rinne zwischen Eucoxa inferior und superior.
h = oberes den Trochanter umfassendes Hautgebiet.

40 f. Vergr.

Am 2., 4., 6., 9., 11. und 13. Rumpfsegment haben die Tergite bei den *Scutigeriden* bekanntlich eine so starke Abschwächung erfahren, dass sie, ähnlich den Interkalarsegmenttergiten bei den *Scolopendromorpha,* unter der Hinterrandfalte des vorhergehenden grossen Tergites versteckt liegen. Die Coxopleuralgebilde dieser Segmente zeigen *keine namhafte* Abweichung vom Verhalten ihrer Nachbarn, bemerkenswert ist nur eine tiefe, zwischen zwei Falten gelegene Rinne vor den Seiten der schwächlichen Tergite und vor sowie oberhalb jener sichelförmigen Wülste, welche sich oberhalb des oberen Endes der Hüftmesser befinden.

Schliesslich ist noch zu betonen, dass sowohl die Einbuchtungen, welche sich zwischen den grossen Tergiten jederseits befinden, als auch die *Einbuchtungen am Seitenrande* dieser Tergite selbst dadurch bewirkt worden sind, dass unter ihnen die Eupleuriumhaut stärker in den Körper eingedrückt wurde als anderwärts. Dieser Druck bewirkte am Rande einen Zug und eine entsprechende Einbuchtung, der Druck wird aber verursacht durch *Erhebungen* der *Beinhüften.* Wie schon oben gesagt, drückt die Hüfte beim Heben des Beines mittelst des Hüftmessers auf den über dessen oberen Ende befindlichen sichelförmigen Wulst. Der Wulst gibt bis zu einem gewissen Grade nach und zieht wieder an der über ihm befindlichen Eupleuriumhaut und diese am Tergitrande.

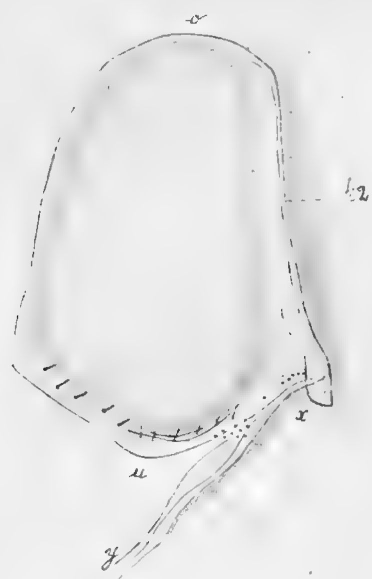


Abb. 39.
Thereuopoda clunifera (Wood). Hinterer Bezirk nebst vor demselben befindlicher Grat der Katopleure des 9. Laufbeinsegmentes.
o = oberer Rand.
u = unterer Rand.
x = Gelenkstelle mit der Hüfte.
60 f. Vergr.

Zur genaueren Feststellung des Baues der geschilderten coxopleuralen Bestandteile und ihrer gegenseitigen Beziehungen bedarf es nicht nur der mikroskopischen Prüfung, sondern auch einer angemessenen Präparation verschiedener Segmente.

Die *Eucoxa,* welche mit zerstreuten Tastborsten besetzt ist, greift im Gebiet der hypocoxalen Haut, d. h. in der Tasche über dem Sternitseitenrande ein namhaftes Stück in die Tiefe, ohne aber irgend eine Auszeichnung hier zu besitzen, d. h. es gelangt weder ein coxobasales Gelenk noch ein Sternitseitenzapfen zur Ausbildung. Die *Costa coxalis* (Abb. 42 *a 2*) ist verhältlich schwach entwickelt, indem sich zwischen Eucoxa inferior und superior nur eine feine Innenleiste vorfindet, welche nicht bis grundwärts durchläuft. Am Endrande findet sich eine Gelenkgrube oder vielmehr Rinne in einem gebräunten nach hinten ins Hüftinnere vorragenden Costa-Fortsatz (Abb. 40 *a*). Auf diesem Fortsatz ruht der vordere Trochanter*zapfen* (*g* Abb. 42) und ein kräftiger, ins Innere des Trochanter vorspringender *Zahn* (*z* Abb. 41). Das endwärtigste Stück der *Costa coxalis* ist, im Anschluss an den Fortsatz dunkel gebräunt und auch stärker vorspringend als die übrige Costa-Leiste. Als verdickte Leiste läuft am Grunde der Eucoxa superior eine *Costa anterior* herab und die *Costa basalis* als deren Fortsetzung (*a 3* Abb. 42). Beide Costae sind durch eine Einschnürung von einander abgesetzt *g*, und zwar befindet sich dieselbe da, wo die der Costa coxalis entsprechende äussere Rinne den basalen Rand erreicht. Schon oben betonte ich, dass die *Eucoxa posterior sehr scharf von der übrigen Eucoxa getrennt ist.* In der Tat befindet sich unten zwischen Eucoxa inferior und posterior eine ziemlich breite Verbindungshaut und der Unterrand der im übrigen gleichfalls zerstreut beborsteten *Eucoxa posterior* (Abb. 42 *eup*) ist noch besonders ausgezeichnet durch einen die untere Vorderecke einnehmenden, ziemlich spitzen, dreieckigen Fortsatzlappen. Man kann die *Eucoxa posterior* von der übrigen Eucoxa vollkommen *trennen*, da sie fast allenthalben von feinen Häuten umgeben ist, nur an einer schmalen Brücke hängt sie nach oben zusammen mit dem, die Telopoditgelenkgrube von oben hinten umfassenden Stück, welches im Vergleich mit den *Lithobiiden* und *Scolopendromorpha* sich als *Coxopleure* herausstellt. Jene schmale Brücke (Abb. 42 bei *g 1*), welche Eucoxa posterior und Coxopleure fest verbindet, ist ferner noch dadurch ausgezeichnet, dass sich an ihr eine auffallend gebräunte Gelenkstelle befindet, welche der Coxopleure angehört und dass endwärts ein dreieckiger Einschnitt an der schmalen Brücke selbst Eucoxa posterior und Coxopleure gegen einander absetzt. In den dreieckigen Einschnitt greift gelenkig jener schon genannte hintere Trochanterzapfen ein und umfasst zugleich im Bogen jenes etwas verdickte Ende der Coxopleure, welches die gebräunte Gelenkstelle führt (*g 1* Abb. 42).

Im Gegensatz zu den Chilopoda-Pleurostigmophora gelangt also bei den Scutigeriden eine geschlossene, feste obere Umfassung der Telopoditgelenkgrube zur Ausbildung und zugleich ein deutliches hinteres Gelenk zwischen Trochanter und Hüfte. Bei den *Epimorpha* gibt es keine hintere Gelenkstelle zwischen Coxa und Telopodit und bei den *Lithobiiden* erinnert nur das winzige Arcus-Gelenk daran, welches im vorigen erwähnt worden ist. Die merkwürdige Vorstellung, welche bis vor Kurzem über die Chilopoden-Hüften herrschte und wonach dieselben, wie Latzel es ausdrückt, bestehen sollten aus „einem dorsalen kleineren und einem ventralen, meist grösseren Halbringe, die durch eine Naht (an der Vorder- und Hinterseite) mit einander fest verbunden sind“, kann ich mir nur so erklären, dass eine, auf oberflächlicher Untersuchung der Hüften der *Chilopoden* mit 15 Beinpaaren gewonnene Vorstellung, übereilt auf alle *Chilopoden* ausgedehnt worden ist.

Abb. 40.

Scutigera coleoptrata L. — 60 f. Vergr. Eine Hüfte nebst Trochanter des 6. beintragenden Segmentes, in natürlicher Lage von aussen gesehen. *cag* = Gelenkgrube des Calcar. (Sonstige Bezeichnung wie vorher.)

Die Coxopleure der *Scutigeriden* ist aber nicht nur hinten durch ihre feste Verbindung mit der Eucoxa posterior, sondern auch oben durch ihre Verwachsung mit der Eucoxa superior so innig mit der übrigen *Eucoxa* verbunden, dass sie *mehr als bei allen anderen Chilopoden die Hüfte zu einem geschlossenen Zylinder gestaltet* (Abb. 40 und 38). Bei *Scutigera coleoptrata* fand ich die Coxopleure nach oben verbreitert und mit einigen Tastborsten besetzt (Abb. 42), bei *Thereuopoda clunifera* schmäler, mehr gleichbreit und nur von Porenkanälen durchsetzt. Eucoxa superior und Coxopleure, welche am oberen Hüftende verwachsen sind, zeigen dennoch eine scharfe Absetzung gegen einander und zwar an der Stelle, wo der untere Teil des Hüftmessers knotig verdickt ist und an den pleuralen oberen Teil stösst. Der schon genannte Einschnitt an dieser Stelle ist der Ausdruck eines *Gelenkes* zwischen Eucoxa (und Coxopleure) einerseits und den anstossenden Pleuralteilen andererseits, also zugleich zwischen oberem und unterem Abschnitt des Hüftmessers. Der Vergleich mit anderen *Chilopoden* lehrt, dass das Pleuralgebilde, welches mit der Hüfte ein Gelenk bildet, nur die Katopleure sein kann. Isoliert man dieselbe (Abb. 39), so lässt sich feststellen, dass sie mit ihrem unteren Rande, an welchem sich auch eine deutliche Grube befindet (x Abb. 38), das obere knotige Ende des unteren Hüftmesserabschnittes $k2$ sowohl als auch das obere Ende der Coxopleure gelenkig umfasst und überdacht. Dass die Katopleure von oben her die Hüfte schützend umfasst, haben uns bereits im vorigen die anderen *Chilopoden* gezeigt in einer nach Gattungen verschiedenen Weise. Schon bei *Trigonocryptops* konnte ich hinweisen auf einen Zapfen an der Eucoxa superior (z Abb. 22), welcher sich unter die Katopleure schiebt. Auch erinnert die bei *Trigonocryptops* erwiesene, durch eine Naht bewirkte Zweiteilung der Katopleure nicht wenig an die ebenfalls aus zwei Bezirken

Abb. 41.

Scutigera coleoptrata L. Ansicht schräg von end- und auswärts auf einen Trochanter, z dessen Innenzapfen, welcher sich an den vorderen Gelenkzapfen anschliesst. a präformierter Ring zur leichten Ablösung des Telopodits, wenn dasselbe von einem feindlichen Angreifer erfasst wird. — 60 f. Vergr.

(Abb. 38 *kpl1 kpl2*) bestehende Katopleure der *Scutigeriden*. Gleichwohl besteht morphologisch und physiologisch gegenüber den durch *Trigonocryptops* u. a. dargestellten Fällen ein bedeutender Unterschied. Es handelt sich nämlich um eine *Zweiteilung* der Katopleure, welche nicht durch Zerschnürung zu stande gekommen ist, sondern durch *Faltung und zugleich durch Verstärkung der Faltenkante und rippenartiges Vortreten nach aussen* ($k1$ Abb. 42). Das obere Widerlager für die Hüfte hat also trotz Beibehaltung seiner allerdings beschränkten Drehbarkeit gegen dieselbe, zugleich und *vor allem seine Widerstandskraft gegen die Hüfte bedeutend gesteigert, indem das Hüftmesser zu einer einzigen, starken Versteifungsrippe wurde,* welche nach oben nun auf die Anopleure stösst, diese stärker als sonst beeinflusst, nämlich halbmondförmig von unten her eindrückt, gegen das Tergit drängt und so *schliesslich im festen Tergitrande den ausreichenden Gegenhalt findet.*

Die Katopleure besteht also aus drei Abschnitten, nämlich 1. dem Vorderstück *kpl1*, 2. dem hohen Hüftmessergrat *k1* und 3. dem Hinterstück *kpl2*. Die Pleurite sind weniger scharf abgesetzt als bei den *Litho-*

Abb. 42.

Scutigera coleoptrata L. Macerierte Hüftteile, von aussen gesehen, Coxopleure und Eucoxa posterior durchscheinend.

ca = Hüftsporn, Calcar.
r = Rinne, welche der Costa coxalis parallel läuft.
a4 = Costa anterior, *a3* = Costa basalis, *y* = die Einschnürung zwischen beiden.
g = vorderes, *g1* = hinteres Gelenk zwischen Trochanter und Hüfte.
x = Gelenk zwischen Katopleure und Hüfte.
uu = Unterrand der Eucoxa.

60 f. Vergr.

bien, zumal sie nicht so durch gelbliches Pigment ausgezeichnet sind wie sonst meistens und auch sonst keine besonders auffälligen Strukturverhältnisse zu verzeichnen sind, auch Tastborsten findet man nur spärlich, bei *Thereuopoda clunifera* z. B. nur wenige am unteren Rande des Hinterstückes und auf dem Grat. Etwas mehr findet man noch an der sichelförmigen Anopleure. Ausser den Tastborsten sind aber diese Pleurite immerhin vor den häutigen Bezirken ausgezeichnet durch ihre etwas stärkere Wandungsfestigung, daher auch die abweichende Oberflächenbeschaffenheit (muldenartige Einbuchtung oder starke Verwölbung), doch ist soviel gewiss, dass sie keine besonders auffallende Struktur zeigen und daher auch weniger scharf ausgeprägt sind als bei den übrigen *Chilopoden.* Das Vorderstück der Katopleure ist besonders undeutlich begrenzt, immerhin gegen die Eucoxa superior schon dadurch genügend abgesetzt, dass an dieser ein reichlicher Borstenbesatz auftritt und das obere Ende der Costa anterior (Abb. 38) nach hinten im Bogen abschwenkt gegen die Gelenkstelle zwischen Hüfte und Katopleure.

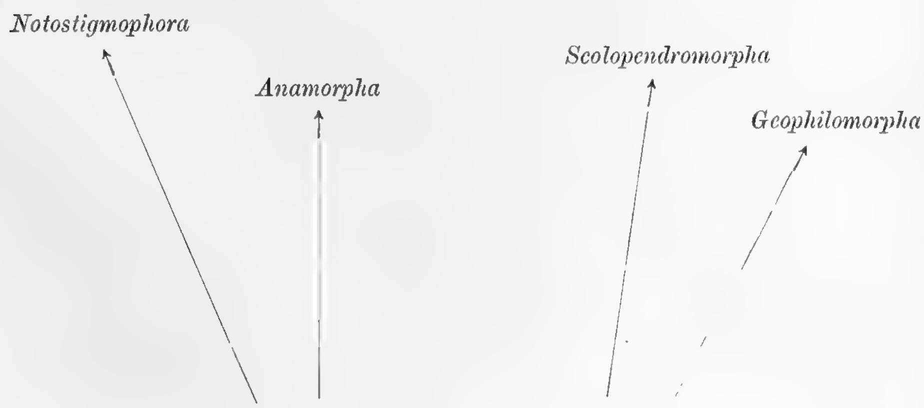
Die Besonderheiten der einzelnen Segmente sind oben bereits genannt worden, die hintersten Segmente einschliesslich des 14. zeigen keine anderweitigen Eigentümlichkeiten, und selbst das 15. schliesst sich in den meisten Punkten an die Beschaffenheit der übrigen beintragenden Segmente an, wobei ich besonders das Vorhandensein einer *deutlichen Anopleure* oberhalb der Hüfte betonen will. Abweichend verhält sich nur die *Katopleure,* indem sie zwar im übrigen die Gestalt wie an den vorhergehenden Segmenten beibehält, *aber fast vollständig mit der Hüfte verschmilzt,* eine Erscheinung, welche an die ähnliche der Skolopender-Endbeine erinnert, aber auch insofern von ihr recht abweicht, als nicht ein flächenhaftes oder muschelartiges Gebilde entsteht, sondern eine stärker vorragende Hüfte, an welcher hinten innen eine *Eucoxa posterior in typischer Weise selbständig ausgebildet* bleibt und durch schmale Brücke verbunden mit der Coxopleure. Auch sind mehr oder weniger deutliche Furchen vorhanden, welche die Stelle der Katopleurenverwachsung anzeigen.

Dass, wie ich schon 1903 in meinem 4. und 5. Aufsatz über Tracheaten-Beine (Nova Acta) erwiesen habe, bei *Scutigeriden* kein Arcus ausgebildet ist, vielmehr ein bräunlicher Ring am *Endrand* des Trochanters, welcher die präformierte Reissstelle bezeichnet, weil bei den Spinnenasseln das Telopodit *ohne* Trochanter abreisst, sei hier beiläufig in Erinnerung gebracht.

V. Zusammenfassende Betrachtung der coxopleuralen Bildungen und der Sternite bei den Chilopoden.

Dass die vier Hauptgruppen der *Chilopoden*, nämlich *Notostigmophora, Anamorpha, Scolopendromorpha* und *Geophilomorpha nicht* von einander abgeleitet werden können, habe ich schon 1903 im Archiv f. Naturgesch. auf S. 431 des Aufsatzes „Über die Interkalarsegmente der Chilopoden“ hervorgehoben und finde in den vorliegenden Untersuchungen eine neue Bestätigung dieser Ansicht. Diese vier Hauptgruppen sind parallel laufende Hauptstämme, *selbständige in der Jetztwelt durch keinerlei Übergänge verbundene Ordnungen,* vergleichbar den Ordnungen der Insekten. Von den mangelnden Übergängen abgesehen, hat jede dieser Ordnungen auch in ihrer Organisation zu hervorstechende Eigentümlichkeiten und eine so eigentümliche *Mischung von primären und sekundären Charakteren,* dass sie nicht von irgend einer der anderen abgeleitet werden kann. So besitzen z. B. die *Scutigeriden* in in ihren Mundfüssen und Kieferfüssen (vergl. meinen 6. Aufsatz über Tracheaten-Beine, Archiv f. Naturgesch. 1904) verschiedene recht primitive Merkmale, während sie sonst in den meisten Organisationsverhältnissen (z. B. Stomata, Pseudofacettenaugen, Laufbeinen, heteronomen Rumpftergiten) sehr abgeleiteten Gepräges sind. Die *Scolopendromorpha* (namentlich *Plutonium*) zeigen fast homonom segmentierten Rumpf, nehmen aber im ganzen trotzdem eine derivatere Stellung ein als die *Lithobiiden* mit ihrer primär offen liegenden Genitalzone, ihrem einfachen, der Anastomosen entbehrenden Tracheensystem, den mit kräftigen Zwischengliedern versehenen Kieferfüssen und dem einer Reuse entbehrenden Vorderdarm.

Anders liegt die Sache, wenn wir die bekannten Organisationsverhältnisse der *Chilopoden*-Ordnungen im allgemeinen in Betracht ziehen und die *allgemeine* Höhe der Organisation abwägen. Wir kommen dann, zumal unter Berücksichtigung der verschiedenen Entwicklungsweise zu zwei Stammpaaren, in deren jedem ein Stamm ohne Frage mehr abgeleitet ist als der andere, zugleich stellt sich heraus, dass innerhalb dieser vier Ordnungen *Notostigmophora* und *Geophilomorpha* einander am fernsten stehen, *Scolopendromorpha* und *Anamorpha* aber sich dazwischen befinden und zwar so, dass letztere eine einigermaassen mittlere Stellung einnehmen zwischen *Notostigmophora* und *Scolopendromorpha*, während letztere wieder den *Geophilomorpha* weit mehr genähert sind als den beiden anderen Ordnungen. So ergibt sich folgendes Schema:



Wieder anders stellt sich das Verhältnis dieser Hauptgruppen, wenn wir nicht die primitiven oder derivaten Charaktere betrachten, auch nicht die allgemeine Höhe der Organisation, sondern *ein bestimmtes Organsystem*, in diesem Falle also die coxopleuralen Organteile. Wir gelangen hier zu demselben Ergebnis wie bei dem Vergleich der Telopodite, nämlich einer phylogenetischen Aufeinanderfolge von 1. *Geophilomorpha*, 2. *Scolopendromorpha*, 3. *Anamorpha*, 4. *Notostigmophora*.

Indessen werde ich zeigen, dass selbst bei der phylogenetischen Behandlung dieses Organsystems für sich allein gewisse Einschränkungen gemacht werden müssen, wenigstens mit Rücksicht auf die beiden letzten Beinpaare.

Die eben genannte phylogenetische Folge der coxopleuralen Organteile geht *parallel mit der geringeren oder grösseren Leistungsfähigkeit der Laufbeine*, was ich kurz dahin andeuten kann, dass die *Geophilomorpha* langsam, die *Scolopendromorpha* mässig schnell, die *Anamorpha* schnell und die *Notostigmophora* sehr schnell sich fortbewegen, womit wieder allgemeinbiologische Verhältnisse in Zusammenhang stehen, indem die *Geophilomorpha* sehr verborgen leben und meist in engen Gängen, die *Notostigmophora* verhältlich offen und jedenfalls in weiten Räumlichkeiten, unter Steinen, an Mauern, Felswänden und Baumstämmen. Die beiden anderen Gruppen nehmen eine Mittelstellung zwischen jenen ein, doch leben die *Lithobiiden* durchschnittlich, wenn nicht offener, so doch vagabundierender als die *Scolopendromorpha*. Jedenfalls ist die Intensität der *aktiven* Ortsveränderung innerhalb der vier genannten Gruppen eine bis zu den *Notostigmophora gesteigerte*. Diese Verschiedenheit hängt wieder zusammen mit der verschiedenen Länge der Beine und der verschiedenen Einlenkungsweise der Hüften. Im allgemeinen kann man sagen, dass, je länger die Laufbeine sind, desto grösser die Schnelligkeit des Laufes, wobei gleichzeitig zu beachten ist, dass die reissendsten Renner auch die geringste Zahl von Beinpaaren (15) aufweisen, da die grosse Beinzahl (bei *Geophilomorpha* bis weit über 100) eine zu starke Haftung und Reibung an der Unterfläche mit sich bringt. Für vorliegende Arbeit ist die *verschiedene Einlenkungsweise der Hüften* besonders wichtig. Bei weitem die *schwächste Eucoxa* besitzen die *Geophilomorpha*, welche zugleich kurze Beine, schwerfälligen Lauf und eine Bewegung mit z. T. geschlepptem Bauche zeigen. Da diese Tiere ganz besonders häufig in engen Gängen angetroffen werden, namentlich in Röhren von Würmern und Larven, so verhalten sie sich nicht nur im oberflächlichen Habitus, sondern auch in der Bewegungsweise unter den *Chilopoden* wurm- oder schlangenartigen Tieren am ähnlichsten. Die schlängelnden und knäuelnden Bewegungen der Erdläufer sind ja bekannt genug, sie allein sind daher auch im stande, ihre Eier und Föti schlangenartig zu umfangen. Beim Wandern in engen Gängen können sich diese kurzbeinigen *Chilopoden* besonders leicht an den Seitenwänden stützen. Hinsichtlich der *Hypocoxa* erhalten wir aber folgende Übersicht:

1. *Geophilomorpha:* Pro- und Metacoxa stark entwickelt, durchschnittlich ungefähr gleich kräftig.
2. *Scolopendromorpha:* Pro- und Metacoxa vorhanden, bisweilen ist die Metacoxa fast so gross wie die Procoxa, meistens aber übertrifft letztere die Metacoxa an Grösse mehr oder weniger bedeutend.
3. *Anamorpha:* Procoxa gut ausgebildet, Metacoxa fehlend.
4. *Notostigmophora:* Pro- und Metacoxa fehlend. —

Die Ausbildung der *Hypocoxa* ist somit eine ausserordentlich verschiedene und zwar *wird* sie *um so mehr im allgemeinen verdrängt, je höher organisiert die Laufbeine der betreffenden Chilopoden sind.*

Die *Eucoxa* verhält sich folgendermassen:

1. *Geophilomorpha:* Die *Eucoxa* bildet nur einen *Halbring,* bestehend aus *Eucoxa superior* und *inferior.* (Eucoxa posterior und Coxopleure fehlen.)

2. *Scolopendromorpha:* Die Eucoxa bildet *drei Viertel* eines Ringes und besteht aus *Eucoxa posterior, inferior* und *superior.* Eine *Coxopleure* ist nicht immer, aber meistens vorhanden und entsteht durch Ablösung vom oberen Teil der Eucoxa superior in nach Gattungen z. T. verschiedener Weise.

3. *Anamorpha*: Die Eucoxa bildet ungefähr $^4/_5$ eines Ringes und besteht aus *Eucoxa posterior, inferior, superior* und einer gut entwickelten, mit der Eucoxa superior mehr oder weniger verwachsenen *Coxopleure.*

4. *Notostigmophora:* Die *Eucoxa* bildet einen *vollständigen,* in seiner Breite allerdings höchst verschiedenartigen *Ring,* bestehend aus Eucoxa posterior, inferior, superior und Coxopleure. Eucoxa posterior und Coxopleure sind also durch eine schmale aber feste Brücke verwachsen.

Der Vergleich der Verschiedenheiten der *Hypocoxa* mit den Verschiedenheiten der *Eucoxa* lehrt, dass ***die Eucoxa um so kräftiger ausgebildet wird, je mehr die Hypocoxa verschwindet.*** Diese der allgemeinen Beinvervollkommnung parallel gehende phylogenetische Entwicklung *führt uns somit* schliesslich *zu einem geschlossenen Hüftzylinder* und zwar zu einem noch viel vollständiger geschlossenen, als es derjenige der *Scutigeriden* ist, nämlich *zu dem durch die niederen Hexapoden vertretenen Hüftzylinder.*

Nach dem, was ich vorn über die Auffassung der phylogenetischen Verhältnisse gesagt habe, sollen selbstverständlich keinerlei *Hexapoden*, weder von *Scutigeriden* noch *Proscutigeriden* abgeleitet werden, aber die *Hüften* der *Hexapoden* können von den *Hüften* der *Chilopoden* in *dem* Sinne abgeleitet werden, dass theoretisch auch die uns unbekannten vielfüssigen Ahnen der *Hexapoden*, welche doch den *Chilopoden* nicht allzu fern stehen konnten, eine mindestens recht *ähnliche Hüftphylogenie* durchgemacht haben.

Die phylogenetischen Beziehungen grösserer Gruppen zu erweisen, auch ohne dass es möglich ist, eine genauere Phylogenie festzustellen, hat doch jedenfalls die Bedeutung, dass man durch Vergleich bestimmter Organe oder Organsysteme der als näher verwandt nachweisbaren Gruppen einen Einblick in die Art und Weise erhält, wie sich solche Organe entwickelt haben *können* und dadurch rücken sie unserem *Verständnis* näher. Was nach dieser Richtung hin aber phylogenetische Untersuchungen lehren, ist das, was bei Gliedertieren in den meisten Fällen allein erreichbar ist. Die Ontogenie versagt hier entweder vollständig, da sie viel zu sehr durch *physiologische* Verhältnisse beherrscht wird, oder sie gibt uns ebenfalls wertvolle Aufschlüsse, namentlich bei rein embryologischen Vorgängen, die aber auch erst durch phylogenetische Untersuchungen ins rechte Licht gesetzt werden können. Dass das berühmte „biogenetische Grundgesetz“ gar kein Gesetz ist und *nicht einmal als eine Regel* gelten kann, haben längst zahllose Feststellungen entschieden.

Im Gegensatz zu dem höchst verschiedenartigen Verhalten der *Hypocoxa* zeigt sich das *Eupleurium*, unbeschadet zahlreicher und teilweise erheblicher Verschiedenheiten in der Ausbildung seiner Sklerite, Falten und Strukturen, wenigstens *insofern viel beständiger, als sein unteres Hauptgebilde, die* ***Katopleure****, eine auffallend gute und konstante Ausprägung erfahren hat.* Die *Katopleure* kommt ***allen*** typischen *Chilopoden*-Laufbeinsegmenten zu und *umfasst*, trotz der oben geschilderten Verschiedenheiten, *stets mehr oder weniger eng von oben her das obere Ende der Eucoxa,* wenn auch die Art dieses Umfassens, z. B. bei *Himantarium* und *Thereuopoda,* eine erheblich verschiedene ist.

Da nun die *Katopleure* den Hüftgebilden gegenüber nach unten den Abschluss des *Eupleurium* bedeutet, so ist aufs Deutlichste erwiesen, dass

Eupleurium und Hypocoxa nicht allein nach Lage und physiologischer Bedeutung, sondern auch nach phylogenetischer Entfaltung ein höchst *verschiedenes Verhalten zeigen*, sodass die Gründe, welche mich früher dazu führten, die Auffassung der Hypocoxa als pleuraler Bildungen abzulehnen, noch erheblich verstärkt worden sind. Ich erinnere hier auch wieder an die Beziehungen der Hypocoxa zur Sternitseitentaschenhaut.

Was die übrigen Sklerite des *Eupleurium* betrifft, so herrscht natürlich mit Rücksicht auf das Vorhandensein oder Fehlen der Stigmen und im ersteren Falle in Bezug auf die Beschaffenheit, Lage und Umgebung der Stigmen eine grosse Mannigfaltigkeit, welche oben im Besonderen teilweise geschildert worden ist. Auch die Zahl, Gestalt, Struktur, Form und Lage der *Anopleure* wechselt sehr nach Gattungen, *immer aber ist* bei den *Pleurostigmophora wenigstens an einem Teil der Rumpfsegmente,* mindestens *eine Anopleure* und an einem Teil derselben auch ein deutliches Stigmaschild *ausgeprägt.*

In der *Lithobiiden*-Arbeit Nr. 4 betonte ich auf S. 243: „Es ist die Entstehung der Hüften insofern von der der Telopodit-Glieder grundverschieden, als letztere einfach durch Abschnürungen bestimmter, hinter einander gelegener Teile des von Anfang an hohlkörperartigen Telopodits zur Ausbildung gelangten, *während die Hüften nach und nach* aus anfangs ziemlich flachen und getrennten Stücken verwuchsen und *erst später mehr und mehr hohlkörperartig wurden*“. Dies wird durch vorliegende Untersuchungen grösstenteils bestätigt, während ich (wie schon oben bei *Lithobius* angegeben) die a. a. O. versuchte Auffassung der „Subcoxa“ aufgegeben habe. Eine Einschränkung hat der angeführte Satz jedoch insofern zu erfahren, als die *Coxopleure* zunächst sich von der Eucoxa superior ablöst (wie der Vergleich der verschiedenen Skolopender-Gattungen zeigt), dann aber, *nachdem sie sich weiter nach hinten ausgedehnt hat* (wie bei den *Scutigeriden*), mit der Eucoxa posterior in Berührung kommt und nun wieder mit der *Eucoxa* verwächst. *Phylogenetisch haben sich die Chilopoden-Hüften von vorn nach hinten entwickelt,* eine Ausdehnung, welche ihren Ursprung ganz offenkundig *von der Hüftleiste* (Costa coxalis) *aus genommen hat.* Dass diese nicht lediglich eine der äusseren Rinne entsprechende Verwachsungsleiste mit dem Hüftsklerit darstellt, sondern auch ein in die Leibeshöhle ragendes *Endoskelettstück,* welches, wie wir oben sahen, verschiedenen seitlichen und ventralen Rumpfmuskeln zum Ansatz dient, lässt sich bereits bei den *Geophilomorpha* (Abb. 1 und 2) feststellen.

Ursprünglich ist die Eucoxa also nur ein Tragesklerit für die Hüftleiste gewesen, während die hauptsächlichste basale Beinstütze die ein Doppelkissen bildende Hypocoxa abgab. Diese Hypocoxa ist also ohne Frage physiologisch und phylogenetisch namentlich ursprünglich auch ein Hüftgebilde.

Die Chilopoden-Hüften waren von Urbeginn *dreiteilig*, Procoxa, Metacoxa und kleine Eucoxa mit Hüftrippe. Wollen wir uns aber von den jetzigen *Geophilomorpha* phylogenetisch weiter rückwärts eine hypothetische Vorstellung machen, so kommen wir auf eine Hypocoxa, an welcher bei einer sehr schwachen *Costa* mit einer ebenfalls schwachen *Eucoxa*, letztere nur als eine *Ausgestaltung der Hypocoxa* erscheint. In diesem Zusammenhang betrachte ich *die Hypocoxa als Urhüfte* und die *Costa coxalis als den Ausgangspunkt der eucoxalen Bildungen.* Aus dem über Beschaffenheit von *Eucoxa* und *Hypocoxa* in den verschiedenen besprochenen *Chilopoden-Gattungen* Gesagten ersieht man aufs Deutlichste, dass die *Eucoxa* sich in demselben Masse vergrössert wie die *Hypocoxa* verkümmert, weil die Funktion der *Hypocoxa* in demselben Maasse *von der Eucoxa übernommen* wird, wie diese an innerer Festigkeit gewinnt und durch Vergrösserung geeignet wird, *einerseits unmittelbar auf dem Sternit zu ruhen, andererseits die Basis des Telopodits in immer vollkommenerer Weise zu umfassen.* Gleichzeitig wird die Hüfte immer geeigneter *aus dem Niveau der seitlichen Körperwand hervorzutreten* und dem Beine, namentlich grundwärts, eine freiere Bewegung zu gestatten.

Welch ein Unterschied zwischen dem kurzen, fast wie eine gegliederte Kralle erscheinenden, *ganz nach aussen und unten* gebogenen Laufbein einer *Orya* z. B. und dem zierlichen, peitschentragenden Rennbein einer *Scutigeride*, welches *mit dem Trochanter weit nach aussen geschoben ist* und nun fähig, Präfemur und Femur in graziösem Bogen *emporzuwenden!* Im ersteren Falle haben wir den schwerfälligen *Klammerfuss* und einförmig von vorn nach hinten und umgekehrt tätigen *Schiebehebel*, im letzteren Falle ein hochentwickeltes Bein, welches zur Bewältigung unruhiger Beutetiere *nach den verschiedensten Richtungen* gewendet werden kann. Im ersteren Falle ist das Gelenk zwischen Hüfte und Trochanter nur vorn durch einen festen Gelenkknopf gestützt, hinten weich und nachgiebig, im letzteren Falle ruht der Trochanter vorn und hinten mit einem Zapfen auf fester Unterlage, sodass ein typisches Scharniergelenk vorliegt, während die freiere Hüfte selbst eine bequeme, aber nach Segmenten mehr oder weniger weitgehende Bewegung in der Richtung von vorn nach hinten und umgekehrt gestattet.

Mit der geringeren oder grösseren Beweglichkeit und Festigung der Hüfte *steht im Zusammenhang die Gliederung des Eupleurium*, denn wir sehen bei den *Epimorpha* mit schwächerer *Eucoxa das Eupleurium meist reichlicher gegliedert*, während den *Anamorpha* ausser der Katopleure nur höchstens eine Anopleure zukommt, Stigma- und Nachstigmaplatte aber an den wenigsten Segmenten vorkommen. Endlich bei den *Scutigeriden* hat das *Eupleurium* die geringste Skleritentwicklung und die Katopleure ist durch Ausbildung der Hüftmesser fast zu einem Hüftteil geworden. *Der geringeren Drehbarkeit der Hüften bei den Epimorpha entspricht also eine grössere Gelenkigkeit der nachgiebigen Pleuren, während die drehbareren und freier herausgeschobenen Hüften der Anamorpha und Notostigmophora* eines derartig gegliederten Seitengebietes nicht bedürfen, sodass dasselbe vielleicht noch mehr unterdrückt wäre, wenn es nicht auch für andere Organsysteme (Atmung, Ernährung und Fortpflanzung) in Betracht käme.

Da die tatsächlichen Hüftverschiedenheiten im Verein mit den Verschiedenheiten in der allgemeinen Organisationshöhe der *Chilopoden*-Gattungen mich zu dem Schlusse führen, dass die *Costa coxalis* massgebend ist für den Ausgangspunkt der eucoxalen Bildungen, so verdient hervorgehoben zu werden, dass *in dem Masse wie die Eucoxa sich ausdehnt, die Costa coxalis abgeschwächt wird.* Besonders schön lässt sich dies an den verschiedenen Laufbeinsegmenten eines *Lithobius* verfolgen, wo die grössten Hüften (15. B.) auch die schwächste Costa coxalis aufweisen, bis wir dann bei den noch grösseren *Scutigeriden*-Hüften die Hüftrippe, mit Ausnahme ihres endwärtigen für das Gelenk mit dem Trochanter wichtigen Stückes, verkümmert finden zu einer schwach erhobenen Linie. Aber auch die Coxopleurien an dem Endbeinsegment der *Scolopendromorpha* verdienen hier genannt zu werden. Sind dies auch keine typischen Hüften, so stimmen sie mit den Hüften der *Anamorpha* und *Scutigeriden* dennoch überein in der stärkeren Ausdehnung und Vereinheitlichung, und wieder zeigen diese Coxopleurien die im Verhältnis zu den Laufbeinsegmenten der Skolopender auffallend *schwächere* Ausprägung der Costa coxalis. Es liegt auch auf klarer Hand, dass *die Funktion der Costa als eines Hebels*, an welchem die der basalen Beinbewegung dienenden Muskeln angreifen, *um so mehr auf die Eucoxa selbst übergehen konnte,* je mehr diese sich ausbreitete und zu einem festwandigen Halbzylinder wurde, oder eine noch grössere Geschlossenheit erreichte. Die Muskeln gewannen hierdurch Raum, sich nach und nach an der Eucoxa selbst mehr ausbreiten zu können, und zugleich wurden die *direkten,* das Telopodit bewegenden *Coxalmuskeln* verstärkt.

Man könnte hier einwenden, weshalb denn nicht sofort die *Eucoxa* bei den niederen *Geophilomorpha* als breiteres und stärkeres Gebilde ausgeprägt sei und weshalb ein solcher phylogenetischer Umweg mit einer Costa coxalis eingeschlagen sei! Die *Biologie* zeigt uns hier den Weg, insofern als die vorwiegend in engen Spalten und namentlich Wurmröhren hausenden *Geophilomorpha* derartige Hüften wie sie *Anamorpha* oder gar *Scutigeriden* besitzen, *gar nicht gebrauchen könnten.* Diese vorstehenden Hüften, welche einer freien, räuberischen Lebensweise angepasst sind, *würden den Erdläufern die Bewegung in engen Gängen zur Unmöglichkeit machen. Da die Hüften mithin oberflächlich sich nicht ausdehnen konnten, bedurften sie eines inneren Hebels.* Wenn die Beinchen der *Geophilomorpha* also unter den Beinen der *Chilopoden* allgemein betrachtet, auch die *primitivste* Stellung einnehmen, so *sind sie für die Verhältnisse, unter welchen diese Hundertfüssler leben, doch höchst zweckmässig und vollkommen eingerichtete Werkzeuge.*

Dies zeigt wieder einmal aufs Schönste den Zusammenhang von Bau und Phylogenie einerseits und Biologie[1]) andererseits, wie ich ihn mehrfach betont habe, z. B. auch in den „Beiträgen zur Hymenopteren-Biologie“ zoolog. Jahrbücher, Jena 1893.

---

[1]) Erwähnen möchte ich hier G. Rossis Aufsatz: „Sulla locomozione dei Miriapodi“ Genua 1901, worin hinsichtlich des „grado di agilità“ folgende Reihe aufgestellt wird: „Diplopodi, Geofilidei, Scolopendridei, Lithobidei, Scutigeridei“. Dies stimmt überein mit meiner Reihenfolge der Chilopoden-Gruppen, während ich die *Diplopoden* davon ausschliesse, nicht allein deshalb, weil sie phylogenetisch mit den *Chilopoden* keinerlei nähere Beziehungen haben, sondern auch weil wir *innerhalb* der *Diplopoden auffallende Abstufungen in der Lebhaftigkeit der Ortsveränderung* feststellen können, worauf ich vielleicht an anderer Stelle

In der vorn erwähnten Arbeit Nr. 4 habe ich die Entwicklung der Laufbeine und Pleuralgebiete bei *Lithobius* besprochen und verweise darauf. Hier sei nur folgendes angeführt: „Die Entwicklung der Beinknospen lehrt uns, dass die Hüften der *Lithobien* nicht von vornherein als abgesetzte Gebilde angelegt werden, sondern dass früher schon eine Absetzung von *Protopleurium* und *Telopodit* stattfindet und dass vor dieser die ganzen Gebiete zwischen Sternit und Tergit einheitlich als Pleuropodien angelegt werden". Es haben sich also „die Hüften der Opisthogoneata nach und nach aus dem Gebiet des *Protopleurium*[1]) entwickelt", wenn wir onto- und phylogenetische Befunde gemeinsam berücksichtigen. Etwas *Genaueres über die allmähliche Umgestaltung* der Hüftteile, wie sie durch vorliegende phylogenetische Untersuchungen erörtert worden ist, haben die ontogenetischen Befunde nicht geliefert, weder die meinigen bei *Lithobius*, noch die von Heymons in seiner „Entwickelungsgeschichte der Skolopender" Stuttgart 1901, noch die meinigen, welche ich später an Scolopendra und Alipes selbst vornahm. Auf Heymons Mitteilungen (S. 45—48) über „Die Bildung der Tergite, Sternite und Pleuren" habe ich noch näher einzugehen. Wenn die Befunde der Entwicklung eines Körperteils für die Auffassung des fertigen Zustandes von Bedeutung sein sollen, dann ist es selbstverständliche Forderung, dass über das entwickelte Gebilde wenigstens in den Grundzügen Klarheit herrscht. Dieser Forderung ist Heymons bei der Frage über Sternit und Pleuren nicht genügend nachgekommen. Er sagt auf S. 48: „Unter den Pleuren *verstehe* ich hier nur die weichen Verbindungshäute zwischen Sternit und Tergit, welche die Stigmen enthalten und in denen kleine Skelettstückchen, die Pleurite sich ausbilden können." Abgesehen davon, dass dieselben sich nicht ausbilden „können", sondern *stets* ausbilden, wenn auch, wie das Obige zeigt, in sehr verschiedener Weise, geht doch aus dieser Pleurendefinition nicht hervor, ob er die so viel um-

---

näher eingehen kann. Jetzt sei nur kurz verwiesen auf die betreffenden bedeutenden Unterschiede zwischen den langsamen *Glomeris* oder den schnellen *Lysiopetalum* z. B. oder zwischen den langsamen *Cylindroiulus* und den schnelleren *Iulus* oder *Tachypodoiulus*. Auch zwischen den langsameren *Polydesmus* oder schnellfüssigen *Chordeuma* konnte ich einen auffallenden Unterschied konstatieren.

[1]) A. a. O. S. 242 steht statt *Protopleurium* durch einen Druckfehler „Eupleurium".

strittenen Hypocoxa-Teile zur Coxa oder zu den Pleuren oder zum Sternit rechnen will. Seine sonstigen Angaben lassen den Schluss zu, dass er die Hypocoxa jedenfalls *nicht* zum Sternit gerechnet hat, sondern das *Sternit* in *derselben* Weise aufgefasst, wie es von mir geschieht und auch fast allgemein geschehen ist. Diese Feststellung ist notwendig, um das richtig zu beurteilen, was er über die *Dreiteiligkeit* der Sternite gesagt hat. Nach Heymons besitzen die *Scolopendra*-Embryonen zwischen der sehr breiten *Membrana dorsalis* und *ventralis* zunächst eine gemeinsame Anlage für Tergit, Sternit und die als Zapfen zwischen beiden vorragenden Beinanlagen. Diese letzteren rücken, übereinstimmend mit meinen Befunden bei *Lithobius* bauchwärts herab, aber bei *Scolopendra* werden die Membrana ventralis und dorsalis erst allmählich zurückgedrängt, Sternit und Beinanlage hängen zusammen, die Tergitanlage rückt dorsal ab und nun entsteht zwischen ihr und dem Beinhöcker eine dünne Haut, welche als „Pleuralhaut" gedeutet wird. Dann sagt er S. 48: „Die Stigmen bilden sich in der *Mitte* der paarigen *Tergit*anlagen, gleich weit vom vorderen wie vom hinteren Segmentrande entfernt, sie befinden sich dagegen nur in verhältnismässig geringem Abstande von der Extremitätenbasis. Dieser kurze Abschnitt der Tergitanlage, welcher sich vom Stigma bis zur Insertionsstelle der Extremität erstreckt, bleibt nun dauernd zart und weichhäutig und gestaltet sich zu der Pleuralhaut um, in deren Bereich das Stigma liegen bleibt. Eine ganz entsprechende Sonderung findet auch in den stigmenfreien Segmenten statt, indem auch hier der an die Extremität angrenzende Teil der Tergitanlage eine häutige Beschaffenheit beibehält. Die Pleuralhäute können somit bei *Scolopendra* genetisch als abgesonderte Teile der Rückenplatten betrachtet werden". Es ist mir nicht einleuchtend, weshalb das von Heymons in seiner Textabb. VII mit *„pleur."* bezeichnete Gebiet nicht eben so gut als Teil der Extremitätenanlage, oder die Tergitanlage mit diesem Zwischengebiet zusammen, als Teil des Zapfens bezeichnet werden soll, zumal die sogenannte Tergitanlage sich ja tatsächlich vom Extremitätenzapfen ablöst. Derlei Deutungen haben aber überhaupt *keinen Wert*, da man Begriffe verwendet, welche von scharf ausgeprägten und funktionierenden Organen entnommen sind und nun *mehr oder weniger willkürlich auf Gebilde übertragen werden, welche lediglich in Wachstum und fortwährender Umbildung begriffene*

Zellmassen vorstellen. Aber selbst hiervon abgesehen, ist Heymons citierte „Pleuren"-Definition „zwischen Sternit und Tergit" absolut nicht in Einklang zu bringen mit dem, was er weiterhin sagt, „dieser kurze Abschnitt vom Stigma bis zur Insertionsstelle der Extremität gestaltet sich zu der Pleuralhaut um", denn das sind sehr verschiedene Dinge. Über die „Insertionsstelle der Extremität", eine umständliche und mannigfaltige Frage, wie vorliegende Untersuchungen zur Genüge zeigen dürften, hat er sich nicht weiter geäussert. Auffallend ist aber auch folgendes: Einmal sollen sich die Stigmen „in der Mitte" der Tergitanlagen bilden und dann in „geringem Abstand von der Extremitätenbasis" liegen. Wenn dies richtig wäre, müssten die Stigmen erstens *nach unten wandern,* — denn es gibt *keinen* einzigen Chilopoden mit paarigen Stigmen, welcher dieselben im Bereich der *Tergite* besässe — also aus dem Bereich der „Tergitanlage" nach unten heraus und zweitens müssten sie — da es ebenfalls keine *Chilopoden* gibt, bei welchen die Stigmen sich „in verhältnismässig geringem Abstande von der Extremitätenbasis" befinden — von dieser „Extremitätenbasis", als deren obere Grenze doch nur das obere Ende der Eucoxa superior in Betracht kommen kann, *nach oben wandern.* Diese Widersprüche einerseits in den Angaben über den Embryo selbst und andererseits zwischen diesem und dem Entwickelten fallen fort, wenn man die Auffassung der dorsalen Wülste als „Tergitanlagen" fallen lässt und sie als das betrachtet, was sie nach der von Heymons beschriebenen Lage der Stigmen allein sein können, nämlich eine **gemischte** *Anlage,* aus welcher *sowohl das Eupleurium als auch das Tergit, wenigstens in seinen Seitenteilen, hervorgeht.* Über die sogenannte „Transversalnaht" an den *Scolopendra*-Tergiten sprach ich bereits 1903 in dem genannten Aufsatz über die Interkalarsegmente der *Chilopoden.*

Nachdrücklich betont hat Heymons die *Dreiteiligkeit* der Sternite und Tergite, indem er auf S. 47 sagt: „Es geht das Medianfeld zum mindesten grösstenteils aus der Membrana dorsalis bezw. ventralis hervor, während die beiden Lateralfelder auf die paarigen *Tergit-* bezw. Sternitanlagen zurückzuführen sind". Hinsichtlich der *Tergite* stimme ich ihm mit Rücksicht auf die *Epimorpha,* welche auch bei den Entwickelten meistens mehr oder weniger deutlich Episkutallinien zeigen, bei, nicht aber ohne weiteres im Hinblick auf die Gruppen mit 15 Beinpaaren. *Für die Sternite hat die Dreiteiligkeit* *überhaupt keine ausgedehntere Bedeutung,* da das Vorkommen von Episternalnähten zwar für *Scolopendra* und verschiedene andere Skolopender-Gattungen zutrifft, für zahlreiche andere *Scolopendromorpha* aber nicht, am wenigsten für diejenigen, deren Sternite eine deutliche Zweiteilung erkennen lassen, oder wie bei den *Cryptopiden* zwar in Abschnitte zerfallen, aber nicht in neben, sondern in *hinter* einander gelegene. Im allgemeinen sind aber diejenigen *Scolopendromorpha,* welche *keine* dreiteiligen Sternite (im Sinne von *Scolopendra*) aufweisen, eher als phylogenetisch *primitiv* wie als derivat zu bezeichnen. Da nun auch bei den drei anderen *Chilopoden*-Ordnungen von einem dreiteiligen Sternit-Typus nichts zu finden ist, so muss ich Heymons Angabe S. 69, wonach die Dreiteiligkeit der Sternite eine Eigenschaft sein soll, „deren Ursache in dem ganzen Bauplan des Arthropodenkörpers zu suchen ist", um so mehr als unhaltbar bezeichnen, als auch andere Gliedertierklassen, wie *Diplopoden* und *Crustaceen,* keine erforderlichen Stützen bieten. Die Dreiteiligkeit der abdominalen Sternite bei manchen Insekten (z. B. *Machilis*) hat mit der Dreiteiligkeit der Scolopendra-Sternite gar nichts zu tun. Bei *Machilis* betreffen die seitlichen Teile Extremitäten-Überreste und nur das Mittelstück ist wirkliches Sternit.

Die Entwicklung der Tergite und Sternite an den knospenden Segmenten der *Lithobiiden* weicht von der Entwicklung der Tergite und Sternite bei *Scolopendra* nicht unerheblich ab. In der Arbeit Nr. 4 konnte ich feststellen (S. 239), dass „an den knospenden *Lithobius*-Segmenten bei allen Larven-Stufen die Tergite und Sternite eher ausgebildet werden als die Beinglieder. Die scharfe Abgrenzung gegen die Pleuralgebiete erfolgt hier also sehr frühzeitig, daher auch die Auffassung des Eupleurium als Ablösung vom Tergit ganz ausgeschlossen ist. Vielmehr besteht eine nähere Beziehung zwischen Pleuralgebiet und Bein, indem anfangs zwischen Tergit und Sternit ein einheitliches *Pleuropodium* angetroffen wird, welches erst hinterher in Protopleurium und Telopodit zerfällt. Vor allem muss aber betont werden, dass unter den Anamorpha weder bei der Entwicklung der *Tergite* und *Sternite, noch* an den Ausgebildeten irgend etwas Deutliches von Dreiteiligkeit zu beobachten ist, weshalb ich Heymons Verallgemeinerung nach dieser Richtung auch mit Rücksicht auf die Tergite *nicht* unterschreiben kann.

* * *

Das *Endbeinsegment* der *Chilopoden* zeigt nach den vier Ordnungen eine recht verschiedene Ausbildung, nicht nur in Bezug auf seine allgemeine Entwicklung, oder die Beschaffenheit der *Telopodite,* sondern auch hinsichtlich der coxopleuralen Gebilde. Das Endbeinsegment der *Geophilomorpha*, auf welches ich jetzt nicht näher eingehen will, verdient noch eine besondere Untersuchung. Hier will ich nur soviel feststellen, dass sich die Grundgebilde der Endbeine, welche ebenfalls als *Coxopleurium* zu betrachten sind, durch ihre mehr hohlkörperartige, einen Halbzylinder bildende Gestalt vor denen der *Scolopendromorpha* auszeichnen. Bemerkenswert ist ferner, dass das dem Endbeinsegment vorangehende Lautbeinsegment, welches, wie ich oben auseinandergesetzt habe, bei den *Scolopendromorpha* in seinen coxopleuralen Bildungen teilweise eine interessante *Mittelstellung* einnimmt zwischen dem Endbeinsegment und den typischen Laufbahnsegmenten, bei den *Geophilomorpha* (wenigstens den von mir daraufhin untersuchten Gattungen) *keine* derartige vermittelnde Rolle spielt, indem es sich, von geringeren Unterschieden abgesehen, im wesentlichen dem Verhalten der typischen Laufbeinsegmente anschliesst, sodass die eigentümliche Beschaffenheit der Coxopleuralgebilde am Endbeinsegment der *Geophilomorpha* unvermittelter erscheint. Das Rumpfhinterende der Erdläufer zeigt im Übrigen jedoch folgende Eigentümlichkeiten, welche es im Vergleich mit den Skolopendern als auffallend *primitiver* erkennen lassen, nämlich:

1. Die stärkere und vor allem *viel offenere Lage* der drei letzten Rumpfsegmente (Telson und Genitalzone),

2. das Vorhandensein eines *gut ausgebildeten Interkalarsegmentes,* vor dem Endbeinsegment, (während allen von mir daraufhin untersuchten *Scolopendromorpha* dieses Interkalarsegment vollkommen *fehlt*),

3. die starke Ausprägung des Trochanters der Endbeine,

4. die einfache Gliederung derselben bei den meisten Gattungen.

Soviel ist also sicher, dass die *Endbeinsegmente* der *Epimorpha* eine *stärkere Abänderung der coxopleuralen Gebilde* im Vergleich mit denen der Laufbeinsegmente erfahren haben, als die der Endbeinsegmente der *Anamorpha* und *Scutigeriden* im Vergleich mit deren typischen Laufbeinsegmenten. Während sich Erdläufer und Skolopender hinsichtlich des Coxopleurium des Endbeinsegmentes einigermassen ähnlich verhalten, aber *sehr abweichend* *von denen ihrer Laufbeinsegmente, schliessen sich bei den Anamorpha* und *Scutigeriden die Hüften der Endbeine im wesentlichen an die Beschaffenheit derjenigen der typischen Laufbeine an.*

In meinem Aufsatze „Über die Endsegmente des Körpers der *Chilopoden, Dermapteren* und *Japypden* und zur Systematik von Japyx“ Nova Acta 1903 habe ich gezeigt, dass die Endbeine aller *Epimorpha* homolog sind und dass die Tatsachen namentlich in Betreff der Segmentvariation zu dem Schlusse führen, dass es bei den *Epimorpha* „drei vor dem Telson befindliche Segmente gibt, welche (latent) als von vornherein besonders angelegt“ zu betrachten sind, sodass also die beiden Segmente, „welche vor dem Endbeinsegment liegen, als jüngste“ zu gelten haben. Für die Erdläufer ist das tatsächlich richtig, wie die bei manchen Arten weitgehende Variation der Segmentzahl zeigt und innerhalb der Skolopender ist wenigstens die Variation 21, 23 bekannt geworden. Wenn also die Homologie der Endbeine innerhalb der Erdläufer für sich und innerhalb der Skolopender für sich eine Tatsache ist, so kann es immerhin als recht wahrscheinlich gelten, dass sich diese Homologie auf alle *Epimorpha* erstreckt. 1903 suchte ich diese Homologie auch auf die Endbeine der übrigen *Chilopoden* auszudehnen. Die Untersuchungen über die coxopleuralen Organteile haben mich aber hiervon abgebracht aus Gründen, welche sich ergeben aus dem was über den *verschiedenen Bau des Endbeinsegmentes* im Vorigen mitgeteilt wurde, d. h. also, ich halte nunmehr *das 15. Beinpaar der Anamorpha und Scutigeriden für homolog dem 15. Beinpaar der Epimorpha,* nicht dem Endbeinsegment der letzteren. Sonach harmoniert die latente Anlage des Endbeinsegmentes bei den *Epimorpha* einerseits und ihr Fehlen bei den *Anamorpha* andererseits mit der verschiedenen Entwicklungsweise beider Gruppen. Bei den *Anamorpha* und *Scutigeriden* sind also die Endbeine nur die *letzten, abgeänderten, erst bei der 4. Larve auftretenden Laufbeine,* während sie bei den *Epimorpha* ein Gliedmassenpaar vorstellen, welches von Urbeginn an als etwas *eigenartiges* vor der Genitalzone sich entwickelt hat.

Hinsichtlich der *Coxaldrüsen* der Endbeine zeigen die Erdläufer eine grosse Mannigfaltigkeit, manche primitiveren unter ihnen besitzen aber eine Hüftdrüsenanordnung, welche eine *Zerstreuung über den grössten Teil des Coxopleurium* darstellt und daher eine *Übereinstimmung mit den typischen*

Erscheinungen am Coxopleurium des Endbeinsegmentes der Skolopender. Bei den *Anamorpha* dagegen findet man die *Coxaldrüsen in bestimmter Anordnung auf die Eucoxa posterior beschränkt*, ein Umstand, welcher ebenfalls zu Gunsten jener Homologieenauffassung spricht.

An sämtlichen Beinen der *Chilopoden*, sowohl Lauf- als auch Endbeinen *kommt es niemals zur Ausbildung eines eigentlichen, vollkommenen Hüftzylinders*, wie er so reichlich bei *Hexapoden* auftritt. Es bieten sich aber bemerkenswerte *Anläufe* zu einer solchen geschlossenen Zylinderbildung nicht allein in den Endbeinen der *Geophilomorpha* und *Anamorpha*, sondern *vor allem in den Hüften der Laufbeine der Scutigeriden*, welche den Telopoditgrund bereits vollständig umfassen.

Oben habe ich *Hypocoxa* und *Katopleure* zum Begriff der *Pericoxa* zusammengefasst, auch wurde gezeigt, dass bei manchen Erdläufern z. B. *Orya* diese Teile grosse Ähnlichkeit untereinander haben und beinahe einen Wall um die Telopoditbasis bilden. Diese Ähnlichkeit gilt aber nicht für alle *Geophilomorpha* und für die übrigen *Chilopoda* überhaupt nicht. Immerhin wäre der Gedanke zu erwägen, ob nicht die *Pericoxa* bei den Vorläufern der recenten *Geophiliden* als eine einheitliche, einen *wallartigen Ring* vorstellende Urhüfte entwickelt gewesen sein könnte, wenigstens bei noch primitiveren, mehr stummelartigen Extremitäten. Wie dem auch sein mag, unter den bekannten *Chilopoden* hat jedenfalls die Katopleure eine phylogenetische Entwicklung aufzuweisen, welche von der der Hypocoxa mehr und mehr abweicht.

Die morphologische und phylogenetische Bedeutung der *Interkalarsegmente* ist bisher nicht gebührend gewürdigt worden. Ihr Auftreten bei den *Chilopoden* sei durch eine kurze Übersicht veranschaulicht:

Geophilomorpha: Interkalarsegmente stets kräftig entwickelt, vor dem Endbeinsegment ebenfalls ein deutliches Interkalarsegment.

Scolopendromorpha: Vor dem Endbeinsegment *kein* Interkalarsegment. Vor den Laufbeinsegmenten Interkalarsegmente in nach den Gattungen verschieden starker Weise ausgeprägt.

a) Dieselben sind bei den niederen Gattungen kräftig,

b) bei den höheren Gattungen schwächer entwickelt.

Anamorpha und Scutigeriden ohne Interkalarsegmente.

Es unterliegt keinem Zweifel mehr, dass innerhalb der *Chilopoden die Interkalarsegmente im ganzen um so stärker entwickelt werden, je primitiver die einzelnen Gattungen organisiert sind* Diese *rückschreitende Entwicklung,* welche am deutlichsten innerhalb der *Scolopendromorpha* zu verfolgen ist und oben durch genauere Angaben erläutert wurde, kann bei der Beurteilung der *Urzwischensegmente* der *Hexapoden* ein wichtiger Wegweiser sein. Diese kleineren Segmente hat man neuerdings lediglich durch Anpassung an bestimmte Lebensweise erklären wollen, allerdings nur in ganz allgemeinen Ausdrücken. Offenbar sollte damit gesagt werden, dass gestrecktere Formen einer reichlicheren Gliederung bedürften. Tatsächlich wird aber damit *nichts* erklärt, denn *jede Segmentation* ist eine Anpassung an das Gelenkigkeitsbedürfnis des betreffenden Körpers. Wir sehen aber ferner bei zahlreichen *Myriapoden* mit langgestrecktem Körper die Gliederung einfach dadurch gesteigert, dass die *Hauptsegmente* vermehrt werden. Die *Lithobiiden* sind auch noch ziemlich langgestreckte Formen, jedenfalls gestreckter als diejenigen Insekten, welche wie *Japygiden* und *Embiiden* gut entwickelte Urzwischensegmente besitzen und dennoch entbehren die Steinläufer der Interkalarsegmente, trotzdem sie nicht nur höchst gewandte Räuber sind, sondern auch viele unter ihnen die Gewohnheit haben sich seitlich einzukrümmen. Wer aber will behaupten, dass den echten *Scolopendra*, welche so kleine Interkalarsegmente besitzen, dass sie von manchen Forschern ganz übersehen wurden, (obwohl sie mit *blossem* Auge bei den grösseren Stücken noch leicht zu sehen sind), ihre schmalen Interkalartergite einen wesentlichen Nutzen brächten! Und wenn man das doch behaupten wollte, so müsste diese Behauptung fallen angesichts derjenigen Formen, welche wie *Cupipes* die Interkalartergite *nicht mehr vollständig abgegliedert zeigen,* sodass also die physiologische Bedeutung der gesteigerten Rumpfgliederung tatsächlich in dieser Hinsicht *aufgehört hat. Rudimentäre, funktionslose Interkalartergite,* welche durch Übergänge mit den grossen, funktionierenden, d. h. gegen die Haupttergite verschiebbaren Interkalartergiten anderer Gattungen verbunden sind, können nicht durch eine Annahme des physiologischen Bedürfnisses erklärt werden. Zweifellos entsprechen die Interkalarsegmente, indem sie die allgemeine Rumpfgliederung erhöhen einem physiologischen Bedürfnis und sind somit für das Leben der betreffenden Tiere *nützlich,* aber *damit wird gegen* *die Segmentnatur dieser Ringe gar nichts entschieden* und noch weniger etwas bewiesen in Betreff des Umstandes, dass *bei Tieren von gleicher Länge, gleicher Beweglichkeit und gleicher Segmentzahl,* wie z. B. *Scolopendra* und *Theatops* im ersteren Falle die Tergite der Interkalarsegmente mehr oder weniger rudimentär sind, im letzterem Falle gut ausgebildet. Ein Verständnis liefert hier nur die *Einsicht in den verwandtschaftlichen Zusammenhang der Formen.* Besteht ein solcher, so ist die Folgerung berechtigt, dass die Formen mit den rudimentären Bildungen diese nicht aus Bedürfnis, sondern durch *Vererbung* übertragen erhielten. Die Tatsachen der Verbreitung und der Art des Auftretens der Interkalarsegmente, insbesondere also ihre starke Ausprägung bei den niedrig stehenden *Geophilomorpha*, ihr völliges Fehlen bei den hoch entwickelten *Scutigeriden* und ihre sehr verschiedenartige Beschaffenheit bei den dazwischen stehenden *Scolopendromorpha* führen zu dem Schlusse, dass diese *allen Chilopoda-Epimorpha zukommenden Segmente eine uralte von den Vorfahren der heutigen Chilopoden ererbte Eigentümlichkeit sind, welche ursprünglich, solange nämlich die Extremitäten schwächer und der Rumpf selbst, infolge schlängelnder Beweglichkeit dünner war, eine hohe physiologische Bedeutung hatten, indem sie die Gliederung des mehr wurmartigen Körpers vermehrten, bei der weiteren phylogenetischen Entwicklung aber in demselben Masse für das Leben der betreffenden Chilopoden unwichtiger wurden, wie der Rumpf sich verstärkte und die Laufbeine vollkommener wurden.*

Es handelt sich somit um *Doppelsegmente*, bestehend aus je einem vorderen bein- und stigmen*losen Vorsegment* und einem bein- und stigmen*tragenden Hauptsegment.*

Natürlich erinnern diese Doppelsegmente an die andersartigen der *Diplopoden,* bei denen *beide* Segmente bein- und stigmentragend sind. Da es *keinerlei* Formen gibt, bei denen die Doppelsegmente so beschaffen wären, dass etwa die vorderen verkümmerte oder kleinere Extremitäten tragen würden, d. h. da Übergänge zwischen den Doppelsegmenten der *Epimorpha* und denen der *Diplopoden nicht existieren,* so ist diese Verschiedenheit nur so verständlich, dass sie *von Urbeginn an sich ausgeprägt hat,* d. h. dass *Progoneaten* und *Opisthogoneaten* von verschiedenen Anneliden-Formen ihren Ausgang nahmen, dass in jeder der beiden Richtungen je zwei Segmente in nähere Beziehung traten, dass aber von den stummelförmigen Urextremitäten diejenigen der Ur*vor*segmente bei den *Diplopoden* sich weiter entwickelten, bei den *Chilopoden* dagegen ganz *verkümmerten, noch ehe sie zu einer eigentlichen Beinentwicklung den Anlauf genommen.* Diese Auffassung entspricht auch der sonstigen tiefen Kluft, welche *Pro-* und *Opisthogoneata* scheidet. Es lassen sich also *primär homonome* und *primär heteronome* Doppelsegmente unterscheiden.

Sekundär heteronome Doppelsegmente zeigen uns die *Anamorpha-* und *Scutigeriden*, in geringerem Masse auch schon die *Scolopendromorpha.* Bei letzteren bestehen die sekundären heteronomen Doppelsegmente zugleich aus zwei primären heteronomen Doppelsegmenten.

Der erste Anlauf zu den *sekundären heteronomen* Doppelsegmenten wird durch *Plutonium* dargestellt, indem die Verschiedenheit von je zwei aufeinander folgenden Hauptsegmenten, wie oben beschrieben wurde, nur im Pleuralgebiet zum Ausdruck kommt. Stärker charakterisiert sind diese Doppelsegmente bei der Mehrzahl der übrigen Skolopender-Gattungen, indem bei je zwei auf einander folgenden Hauptsegmenten meist auch die *Stigmen* des einen in Wegfall gekommen sind. Den dritten Schritt zeigen uns die *Lithobiiden,* wo, abgesehen von einer noch grösseren Heteronomität im Pleuralgebiet, die Tergite der in Verkleinerung begriffenen Hauptsegmente eine bedeutende Verkürzung erfahren haben gegenüber ihren Nachbarn. Den vierten Zustand in dieser phylogenetischen Richtung vertreten die *Scutigeriden,* wo die Tergite der in Verkleinerung begriffenen Segmente so verkümmert sind, dass sie bei natürlicher Haltung dieser Tiere überhaupt nicht mehr zu sehen sind, sondern versteckt liegen unter der Hinterrandduplikatur des vorhergehenden Tergites und übrigens äusserst klein geworden sind. Im Anschluss an diese vergleichenden Feststellungen will ich noch einmal kurz auf die *beiden Theorien* zurückkommen, welche ich zur Erklärung der bei *Hexapoden* vorkommenden *Zwischensegmente* herangezogen habe, zumal dieselben neuerdings vermengt worden sind mit der Theorie H. J. Kolbes (vergl. namentlich S. 122 seines Buches „Einführung in die Kenntniss der Insekten") über die Komplementärsegmente, welche wertvoll war als Anregung zur Forschung auf einem höchst dunkeln Gebiet, an und für sich aber erledigt ist, weil sie von z. T. unrichtigen Dingen ausging und auch heteronome und homonome Doppelsegmente nicht gebührend auseinanderhielt.

Nach meiner Auffassung der hier in Betracht kommenden Tatsachen lassen sich die Zwischensegmente der *Hexapoden entweder* als *Interkalarsegmente* betrachten (und dies ist der mindeste Wert, welcher ihnen zukommt), *oder* sie sind verkümmerte Hauptsegmente, indem sie dann an die *verkleinerten Segmente* sich anschliessen würden, welche nach dem eben Gesagten unter den *Chilopoden* bei den *Anamorpha* und *Scutigeriden* bereits ein Stück der nach dieser Richtung gehenden Rückbildung vor Augen führen.

Die Gründe für die eine oder andere Auffassung habe ich ausgeführt namentlich in dem 2. und 3. Aufsatz über den Thorax der Insekten (Archiv f. Naturgesch. 1904 und Nova Acta d. deutsch. Akad. d. Naturforscher 1904). Welche von beiden Auffassungen nun auch mit der Zeit durch weitere Forschungen als die begründetere erwiesen werden mag, *den* Nachweis nehme ich jedenfalls in Anspruch, dass am Körper der *Hexapoden Zwischensegmente* vorkommen und dass insbesondere jedem der drei Hauptsegmente des Thorax ein Vorsegment zukommen kann, welches nach den Gruppen der niederen Insekten verschiedenartig sich verhält, im *Grundzuge aber aus Tergit, Sternit, Pleuriten und einem besonderen Muskulaturabschnitt besteht.*

In meiner Arbeit „über vergleichende Morphologie des Kopfes niederer Insekten“ Nova Acta 1904 habe ich auf S. 81—85 das Tentorium von *Machilis* besprochen und als *Sterigmen* (segmentale Stützgebilde) „alle die paarigen, ventralen Endskelettbalken“ zusammengefasst, welche als „Tentorien, Furkulae oder Costae furcillatae“ auftreten. Es gibt aber zwei verschiedene *Sterigmen*-Bildungen, nämlich *sternale*, zu denen die *Costae furcillatae* gehören und *laterale*, als welche die Tentorien des Kopfes und Furkulae des Thorax zu gelten haben.

Bisher sind derartige *Sterigmen* von segmentalem Vorkommnis bei *Chilopoden* nicht nachgewiesen worden. Um so mehr glaube ich deshalb auf die *Sternitseitenzapfen der Scolopendromorpha* (Conus lateralis sterni) hinweisen zu sollen, welche den thorakalen Furkulae der *Hexapoden* zwar nicht homolog sind, aber doch sehr nahe stehen und jedenfalls als *verwandte* Bildungen ebenfalls zu den *Sterigmen* gerechnet werden können, nämlich zu den lateralen. *Sternale Sterigmen* sind unter den *Skolopendern* ebenfalls vorhanden, wenn auch nicht in der Allgemeinheit wie die lateralen. Besonders ist hier die Gattung *Cryptops* zu nennen, welche schräge innere Sternitquerleisten besitzt, die den seitlichen Stücken der bei *Japyx* vorkommenden Kantengabeln entsprechen; vergl. in meinem *Japygiden*-Aufsatz Archiv f. Nat. 1904 Taf. IV und V, zumal von ihnen hier wie dort sternale Coxalmuskeln abgehen. Meist verlaufen die Querleisten bei *Cryptops* bis zur Mitte, indem sie hier ein wenig getrennt sind (Abb. 28) oder verbunden (Abb. 27 *y*). Bisweilen jedoch schliesst sich an die Querleisten eine dieselben schneidende *mediane Längsleiste* an, so in besonders schöner Ausbildung an den Sterniten von *Cryptops trisulcatus* Brölemannn, wo eine Längsleiste, welche länger ist als die Querleisten von der Vereinigungsstelle dieser nach hinten zieht, sodass eine Y förmige Figur entsteht, welche die höchste Ähnlichkeit besitzt mit den *Costae furcillatae* der *Japygiden*. Die Muskeln, welche von den Querleisten an die Hüften ziehen, habe ich in Taf. VII Abb. 3 des 6. Aufsatzes „über Tracheaten-Beine“ bereits angegeben (Archiv f. Nat. 1904) für *Cryptops hortensis*. Bei *Cryptops trisulcatus* sind sie noch stärker ausgebildet, sodass auch hinsichtlich der Muskulatur eine teilweise Übereinstimmung mit Japyx verzeichnet werden kann. Ein Unterschied gegenüber *Japyx* besteht namentlich darin, dass der dort so auffallend ausgebildete Hinterstiel (Pediculus posterior) bei *Cryptops* vollkommen fehlt, indem die Stielleiste nach hinten nicht über das Sternit hinausgeht, vielmehr dessen Hinterrand nicht erreicht.

Zum Schluss erwähne ich die bei *Cryptopiden* und *Newportiiden* auftretenden *Endosternite*, welche zwar nicht direkt zu den Sterigmen gestellt werden können, aber doch in einer nahen Beziehung zu ihnen stehen, insofern sie für die basale Beinmuskulatur eine Bedeutung haben, welche ähnlich ist derjenigen der Furculae, auch würde diese Beziehung noch bedeutsamer, wenn man sich vorstellte, dass diese Endosternite, welche z. B. bei *Newportia* am Hinterrande schon tief eingebuchtet sind (Abb. 32 *vx*), eine immer stärkere Zerteilung erführen. An Sterigmen oder analogen Bildungen fehlt es somit bei den *Chilopoden* keineswegs und wenn man auch nicht den Sterigmen bei Hexapoden vollkommen homologe Bildungen nachweisen kann, so handelt es sich doch um mehr oder weniger ähnliche, welche für das Verständnis jener von Wichtigkeit sind.

In der vorstehenden Arbeit ist eine *Homologisierung der Coxopleuralgebilde aller Chilopoden-Hauptgruppen* durchgeführt und damit eine *Einheitlichkeit* der Anschauung und auch Nomenklatur gewonnen werden. Es ist *nicht* unbedingt notwendig, dass bei *Hexapoden* für die entsprechenden Körperteile dieselbe Terminologie in Anwendung kommt wie bei *Chilopoden*. Teilweise wird das auch gar nicht möglich sein, weil den letzteren verschiedene Gebilde zukommen, welche ersteren fehlen und umgekehrt. *Notwendig* aber ist es, die Homologie der Rumpfsegmente der *Chilopoden* mit der der Thoraxsegmente der *Hexapoden* so weit als möglich klarzustellen. Zur Ermöglichung einer solchen Homologisierung meine ich im vorigen einen kleinen Beitrag geliefert zu haben. Die phylogenetische Entwicklungsrichtung der Bein- und namentlich *Hüftvervollkommnung*, welche uns innerhalb der *Chilopoden* von den *Geophilomorpha* zu den *Scutigeriden* führt, *findet ihre höhere Vollendung und Fortsetzung in den Hüften der Hexapoden*. Insbesondere treten dieselben noch stärker als bei *Notostigmophora* aus dem Rumpfe heraus, indem sie noch geschlossener zylindrisch werden. Ein anderer noch bedeutenderer Unterschied aber ergibt sich aus der *veränderten Funktion der Beine*, welche die Folge der viel geringeren Zahl derselben ist und den damit gesteigerten Leistungen jedes einzelnen Beines. *Die Hüften* der niederen *Hexapoden* haben im Vergleich mit den *Chilopoden*-Hüften eine *vollständige Drehung nach hinten herüber erfahren*. Im Zusammenhang damit sind auch die Pleurite nach hinten verschoben. In meinen „Beiträgen zur vergleichenden Morphologie des Thorax der Insekten mit Berücksichtigung der Chilopoden" habe ich den ersten Versuch einer Homologisierung der coxopleuralen Gebilde beider Klassen unternommen und zunächst *Lithobius* herangezogen (Nova Acta 1902 Bd. LXXXI Nr. 2 Taf. IX). Schon oben habe ich hierzu Stellung genommen. Die Durcharbeitung aller *Chilopoden*-Gruppen (soweit sie mir überhaupt zugänglich sind) ergab neue Gesichtspunkte, sodass insbesondere die dortige Homologisierung der Coxopleure nicht mehr aufrecht zu erhalten ist, d. h. das, was ich in vorliegender Arbeit als Coxopleure erwiesen habe, ist der Coxopleure bei Insekten (in meinen Arbeiten über den Thorax) *nicht* homolog. Genauer will ich hier auf diese Verhältnisse jetzt nicht eingehen, nur weniges andeuten: Die *Katopleure, welche bei allen Chilopoden eine gute Ausbildung* *zeigt, ist jedenfalls auch für die Beurteilung der Hexapoden-Pleuren sehr wichtig.* Insbesondere sind hier die *Scutigeriden* zu beachten. Das Hüftmesser derselben enthält zwischen pleuralem und coxalem Teil ein *Gelenk* (*x* Abb. 42), welches den meisten anderen *Chilopoden* fehlt und *zu vergleichen ist mit dem oberen Gelenk an der Hüftbasis der Insekten,* also zwischen der Hüfte und der der Coxopleure (in meinen Thorax-Arbeiten) zugehörigen Apodeme. Somit könnte der pleurale Anteil des Hüftmessers der Scutigeriden (im Bereich der Katopleure) als eine Vorbildung für die *Apodemen* am Insektenthorax aufgefasst werden. Es würde dann unter den Insekten die „Coxopleure" (1902—1904) gleich zu setzen sein der *Katopleure,* wie ich sie jetzt für alle *Chilopoden* nachgewiesen habe. Ich hoffe in einer späteren Arbeit über den Insekten-Thorax auf diese Dinge zurückkommen zu können.

22. Dezember 1905.

Erklärung der in den Textabbildungen wiederholt vorkommenden Abkürzungen.

apl = Anopleure.
apls = obere Anopleure.
aplm = mittlere „
apli = untere „
kpl = Katopleure.
kpl 1 = vorderes Stück der Katopleure.
kpl 2 = hinteres „ „ „
cpl = Coxopleure.
pco = Procoxa.
pcoi = unteres Stück der Procoxa.
pcom = mittleres „ „ „
pcos = oberes „ „ „
mco = Metacoxa.
mcoi = unteres Stück der Metacoxa.
mcos = oberes „ „ „
euc = Eucoxa.
eup = hintere Eucoxa, Eucoxa posterior.
eui = untere „ „ inferior.
eus = obere „ „ superior.

pt 1, pt 2 = Paratergite.
ipt = interkalare Paratergite.
stp = Stigmapleurit.
stpp = Poststigmapleurit.
ipl und *ipl 1—3* = interkalare Pleurite.
t = Tergit.
it = Interkalartergit.
sps = Suprasternalsklerit.
v = Sternit.
iv = äusseres Stück der interkalaren Sternithälften.
iv 1 = inneres Stück der interkalaren Sternithälften.
α 1, α 2 = Costa coxalis, Hüftrippe.
α = Processus am Ende derselben.
ε, ε 1 = Sternitseitenzapfen, Conus lateralis sterni.
tro = Trochanter.
prf = Präfemur.

Folgende von der Akademie herausgegebene Bände der NOVA ACTA sind durch die Buchhandlung von Wilh. Engelmann in Leipzig zu beziehen:

Band LXXXV		Halle	1906.	4°.
„ LXXXIV		„	1905.	„
„ LXXXIII		„	1905.	„
„ LXXXII		„	1904.	„
„ LXXXI		„	1903.	„
„ LXXX		„	1903.	„
„ LXXIX		„	1901.	„
„ LXXVIII		„	1901.	„
„ LXXVII		„	1901.	„
„ LXXVI		„	1900.	„
„ LXXV		„	1899.	„
„ LXXIV		„	1899.	„
„ LXXIII (noch nicht erschienen).				
„ LXXII		„	1899.	„
„ LXXI		„	1898.	„
„ LXX		„	1898.	„
„ LXIX		„	1898.	„
„ LXVIII		„	1897.	„
„ LXVII		„	1896.	„
„ LXVI		„	1896.	„
„ LXV		„	1896.	„
„ LXIV		„	1895.	„
„ LXIII		„	1895.	„
„ LXII		„	1894.	„
„ LXI		„	1894.	„
„ LX		„	1894.	„
„ LIX		„	1893.	„
„ LVIII		„	1893.	„
„ LVII		„	1892.	„
„ LVI		„	1891.	„
„ LV		„	1891.	„
„ LIV		„	1890.	„
„ LIII		„	1889.	„
„ LII		„	1888.	„
„ LI		„	1887.	„
„ L		„	1887.	„
„ XLIX		„	1887.	„
„ XLVIII		„	1886.	„
„ XLVII		„	1885.	„
„ XLVI		„	1884.	„
„ XLV		„	1884.	„
„ XLIV		„	1883.	„
„ XLIII		„	1882.	„
„ XLII		„	1881.	„
„ XLI P. II		„	1880.	„
„ XLI P. I		„	1879.	„
„ XL		„	1878.	„
„ XXXIX		Dresden	1877.	„
„ XXXVIII		„	1876.	„
„ XXXVII		„	1875.	„
„ XXXVI		„	1873.	„
„ XXXV		„	1870.	„
„ XXXIV		„	1868.	„
„ XXXIII	(= N. F. Bd. XXV)	„	1867.	„
„ XXXII P. II	(= „ „ „ XXIV Abth. 2)	„	1867.	„
„ XXXII P. I	(= „ „ „ XXIV Abth. 1)	„	1865.	„
„ XXXI	(= „ „ „ XXIII)	„	1864.	„
„ XXX	(= „ „ „ XXII)	„	1864.	„
„ XXIX	(= „ „ „ XXI)	Jena	1862.	„
„ XXVIII	(= „ „ „ XX)	„	1861.	„
„ XXVII	(= „ „ „ XIX)	„	1860.	„
„ XXVI P. II	(= „ „ „ XVIII Abth. 2)	Breslau und Bonn	1858.	„
„ XXVI P. I	(= „ „ „ XVIII Abth. 1)	„ „ „	1857.	„
„ XXV P. II	(= „ „ „ XVII Abth. 2)	„ „ „	1856.	„
„ XXV P. I	(= „ „ „ XVII Abth. 1)	„ „ „	1855.	„
„ XXIV Spl.	(= „ „ „ XVI Spl.)	„ „ „	1854.	„
„ XXIV P. II	(= „ „ „ XVI Abth. 2)	„ „ „	1854.	„
„ XXIV P. I	(= „ „ „ XVI Abth. 1)	„ „ „	1854.	„
„ XXIII Spl.	(= „ „ „ XV Spl.)	„ „ „	1856.	„
„ XXIII P. II	(= „ „ „ XV Abth. 2)	„ „ „	1852.	„
„ XXIII P. I	(= „ „ „ XV Abth. 1)	„ „ „	1851.	„