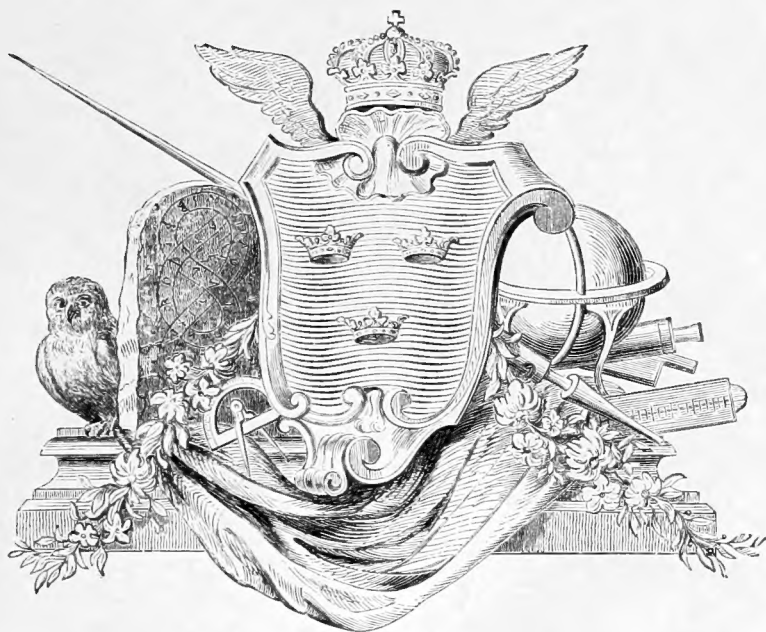


NOVA ACTA
REGIAE SOCIETATIS
SCIENTIARUM
UPSALIENSIS.



SERIEI QUARTAE VOL. V.

UPSALA
EDV. BERLINGS BOKTRYCKERI A.-B.
1923.

INDEX ACTORUM.

N.		Pag.	Tab.
1.	HILDEBRANDSSON, H. H.: Résultats des recherches empiriques sur les mouvements généraux de l'atmosphère. 1918	1—50	6
2.	BERGSTRAND, Ö.: Sur le groupe des étoiles à hélium dans la constellation d'Orion. 1919	1—37	
3.	ZEILON, N.: Sur les équations aux dérivées partielles à quatre dimensions et le problème optique des milieux biréfringents. Première partie. 1919	1—55	3
4.	ZEILON, N.: Sur les équations aux dérivées partielles à quatre dimensions et le problème optique des milieux biréfringents. Deuxième partie. 1921	1—128	3
5.	JUEL, H. O.: Cytologische Pilstudien. II. Zur Kenntnis einiger Hemiasceen. 1921	1—43	2
6.	GISLÉN, TORSTEN: The Crinoids from Dr. S. Bock's expedition to Japan 1914. 1921	1—184	2
7.	JUEL, H. O.: Studien in Burser's Hortus siccus. 1922	1—144	

5244

NOVA ACTA REGIAE SOCIETATIS SCIENTIARUM UPSALIENSIS

SER. IV. VOL. 5. N:o 1.

RÉSULTATS DES RECHERCHES EMPIRIQUES
SUR
LES MOUVEMENTS GÉNÉRAUX DE L'ATMOSPHÈRE

PAR

H. HILDEBRAND HILDEBRANDSSON.

(PRÉSENTÉ A LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES D'UPSALA LE 12 AVRIL 1918).

UPPSALA

EDV. BERLINGS BOKTRYCKERI A.-B.

1918.



Introduction.

Un KEPLER n'aurait pas été possible, si un TYCHO BRAHÉ ne l'avait pas précédé. C'est la même chose dans la météorologie. Avant qu'il soit possible d'étudier sérieusement les causes des mouvements généraux de l'atmosphère, il faut d'abord, et *indépendamment de toute théorie préconçue*, chercher à déterminer avec précision ce qui se passe actuellement dans l'atmosphère, c'est à dire constater par observations directes *quels sont ces mouvements et quelle en est la nature*. Depuis le commencement de la météorologie dynamique au milieu du siècle passé, le but principal pour notre génération a été de concentrer tous nos efforts sur *un objet*: Savoir rassembler des matériaux suffisamment bons et d'une portée convenable; excercer notre patience à élaborer ces éléments en suivant les directions les plus diverses, afin de faciliter les vues d'ensemble et de faire ressortir les traits caractéristiques.

Nous essayerons à exposer ici *les principaux resultats concernant les mouvements généraux de l'atmosphère gagnés par ces recherches empiriques*.

Toutes les représentations des mouvements généraux de l'atmosphère, publiées jusqu'ici, sont des résultats de considérations théoriques plus ou moins mal fondées. On a connu assez bien depuis longtemps la direction moyenne du vent, à un grand nombre de stations, dans presque tous les pays du monde, et aussi, grâce à la collaboration de toutes les marines et aux travaux classiques d'un MAURY, d'un BRAULT, d'un KÖPPEN et d'autres savants, notre connaissance du régime des vents sur les mers a été longtemps très détaillée. Mais les mouvements des couches supérieures de l'atmosphère ont été jusqu'aux dernières années presque inconnus. On connaissait les contre-alizés qu'on avait rencontrés sur les sommets des pics sur des îles, comme Téné-

riffe dans l'Atlantique et Mouna Loa dans le Pacifique. Ce phénomène fut considéré comme une preuve de la loi exprimée par HALLEY 1686: La température de l'air, qui dépend de l'influence calorifique du soleil, va en décroissant de l'équateur aux pôles, or il doit constamment exister un vent supérieur ou courant équatorial, soufflant de l'équateur aux pôles, et un vent inférieur, ou courant polaire, soufflant des pôles à l'équateur.

De plus on a considéré le principe, émis de HADLEY en 1735: Quelle que soit la direction suivie par un courant atmosphérique, la rotation terrestre dévie ce courant à droite dans l'hémisphère boréal, à gauche dans l'hémisphère austral.

Ce principe de HADLEY a été prouvé par la théorie mathématique et vérifié par les expériences bien connues de FOUCAULT et d'autres.

Le principe de HALLEY a aussi été admis par la plupart des météorologistes. Déjà DOVE ne l'adoptait pas. Il pensait que le contre-alizé descendait aux tropiques à la surface terrestre, et les vents du SW ou de l'W régnant sur les mers de la zone tempérée de l'hémisphère nord et les vents correspondant du NW ou de l'W de l'hémisphère sud, sont considérés par lui comme les prolongements des contre-alizés descendus, et les *courants équatoriaux* avancent vers les pôles, tandis que des *courants polaires* marchent en sens contraire, des régions polaires vers les tropiques.

Ces idées de DOVE sont abandonnées, mais ces dernières années on a soulevé des doutes mieux fondées contre le principe de HALLEY. La découverte importante de TEISSERENC DE BORT que l'atmosphère consiste de deux couches: La *Troposphère* depuis la surface terrestre jusqu'à la hauteur de 8—10,000 m, et la *Stratosphère* au-dessus fait une circulation verticale si simple peu probable. En effet, toute la troposphère consiste de circulations cycloniques et anticycloniques avec ses courants ascendants et descendants, et, par conséquent deux courants superposés marchant en sens contraire ne peuvent pas y exister. Dans la stratosphère des courants verticaux n'existent pas, et les courants horizontaux ne sont pas encore étudiés. Il est vrai qu'au-dessus de la zone équatoriale la troposphère s'élève à de très grandes hauteurs, de manière qu'on n'y trouve la stratosphère qu'à une hauteur beaucoup plus grande qu'en Europe, et qu'on a observé au nord de l'équateur sur l'Atlantique, et, par M. BERSON sur le lac Victoria

Nyanza, des nuages cirriformes marchant à une grande hauteur de sud-ouest. Mais, même s'il y avait dans la stratosphère un mouvement général de SW vers le pôle, ce qui amènerait un courant descendant aux environs des pôles, cela n'indiquerait guère *une circulation verticale de toute l'atmosphère entre l'équateur et les pôles*. Il faut observer qu'à la limite inférieure de la stratosphère au-dessus de l'Europe la pression de l'air est déjà petite — 200 mm à la hauteur de 9,600 mètres — et à la hauteur à laquelle on trouve la stratosphère au-dessus de la zone équatoriale la pression de l'air a diminué jusqu'à 50 mm (à 17,400 m), et c'est à cette hauteur que ce courant équatorial supposé pourrait commencer dans la stratosphère. Mais à cet endroit la masse de l'air mise en mouvement est très petite en comparaison avec la masse totale de l'atmosphère. Or, on ne peut pas parler d'une circulation *générale* de l'atmosphère selon le principe de HALLEY.

Récemment une autre objection très grave contre ce principe a été soulevée par Sir NAPIER SHAW et d'autres. Ils font observer que l'épaisseur de l'atmosphère est infiniment petite relativement à la grandeur de la terre. En effet, elle est relativement de la même épaisseur environ que celle du papier qui couvre un globe terrestre de grandeur ordinaire. Une circulation double, régulière dans une couche si mince semble impossible. Il est déjà beaucoup qu'elle existe entre l'équateur et les tropiques.

I.

Les grands courants de l'atmosphère indiqués par le mouvement des cyclones et des anticyclones.

Les cyclones les plus réguliers et les plus dangereux sont les tempêtes tournantes tropicales se déplaçant le long d'une trajectoire. Déjà REDFIELD, REID, PIDDINGTON et d'autres savants et aussi les navigateurs depuis DAMPIER, ont tous constaté que la force du vent est très différente aux deux côtés du disque tournant en marche. Le côté droit est appelé le demi-cercle dangereux et le côté gauche le demi-cercle maniable. On a expliqué cela en admettant que le cyclone soit un tourbillon entraîné par un grand courant d'air. Alors il est évident que sur l'hémisphère boréal, le mouvement de rotation et celui de translation sont dans le même sens dans le demi-cercle droit et opposés dans le demi-cercle gauche.

Sur les deux hémisphères les cyclones marchent entre les tropiques de l'est à l'ouest, dévient à droite sur l'hémisphère boréale et à gauche sur l'hémisphère austral, selon le principe de HADLEY, et en entrant dans la zone tempérée ils marchent par conséquent successivement vers le nord, NNE, NE et E au nord, et vers S, SSE, SE et E au sud de l'équateur. La trajectoire est à peu près parabolique avec le sommet à Lat. 20° — 30° , selon la saison, sur l'hémisphère nord et sur l'Océan Pacifique à Lat. 15° — 25° . Dans la zone tempérée les cyclones, ou minima barométriques sont moins réguliers et leur marche plus variable, mais en général vers un rhumb entre NE et SE. Déjà en 1876 CLEMENT LEY a étudié le premier et plus en détail la marche de ces minima¹. Il a trouvé que le centre se ment en général à peu près à angle droit avec la direction vers laquelle les isobares sont les plus serrées. Si le gradient le plus fort se trouve à l'E, au SE ou

¹ The connection between the relative steepness of gradients in a depression and the course of the depression. Journ. of the Scottish Met. Soc. 1876.

au S du centre la dépression marche le plus souvent vers le N, le NE ou l'E, etc. Cependant si les gradients les plus forts se trouvent au NW, au N ou au NE du centre, celui-ci reste le plus souvent immobile, ou se ment (ordinairement lentement) vers une direction quelconque; pourtant un mouvement vers l'ouest, qu'on devrait trouver alors, est en effet très rare.

Ce fait a inspiré à CLEMENT LEY cette idée, «peut-être plus simple que correcte», dit-il, que la direction du centre est la résultante de deux forces indépendantes, l'une la force du gradient (*«gradient force»*) qui dirige le centre à angle droit de la direction à laquelle les isobares sont les plus serrées, l'autre «une force inconnue, un peu plus forte» que la première qui l'amène vers le NE ou l'E.

En étudiant plus en détail les parties boréales des minima¹ j'ai constaté que les *dépressions ayant une basse pression au nord d'elles ne sont pas fermées en haut au nord du centre. Mais si au contraire la dépression passe au sud d'un maximum, le tourbillon a une hauteur plus considérable et il est fermé même au N du centre.* (Pl. I).

Cela s'explique facilement en admettant que *les dépressions soient des tourbillons dans un courant d'air, marchant de l'ouest à l'est.* Alors il faut qu'elles aient comme les cyclones tropicaux un demi-cercle dangereux à droite et un demi-cercle maniable à gauche.

Si le courant de l'W à l'E — «la force inconnue» de CLEMENT-LEY — est un peu plus fort que la vitesse de rotation au nord du centre, le mouvement de l'air sera de l'W à l'Est relativement à la surface terrestre. Mais la vitesse de rotation dépend du gradient barométrique, et celui-ci doit en général être plus grand s'il y a un maximum vers le nord; et alors la chance est plus grande que la vitesse de rotation dépassera celle du courant de l'W à l'E; mais alors le tourbillon est fermé au nord du centre. Les trajectoires des minima sont plus irrégulières sur l'hémisphère boréal à causa de la répartition irrégulière des terres et des mers; sur l'hémisphère austral au contraire «les braves vent de l'ouest» des marins, engendrés par les vents de l'ouest au sud des maxima tropicaux et ceux au nord des minima de la zone tempérée, sont d'une constance extraordinaire.

¹ HILDEBRANDSSON: Rapport sur les observations internationales des nuages au Comité international météorologique. P. II. p. 22. Upsala 1903.

Le directeur de l'observatoire de Sidney H. C. RUSSEL a étudié le premier la marche des anticyclones sur l'océan Indien¹ et en Australie. Il a trouvé que les anticyclones fixes indiqués sur les cartes des isobares moyennes des tropiques sont causés par *une série d'anticyclones qui passent continuellement de l'ouest à l'est* à des latitudes presque constantes (au tropique du Capricorne), de la même manière que la basse pression au sud de l'Islande en hiver est due à la série continue de dépressions qui traversent cette partie de l'Atlantique nord.

Les trajectoires se trouvent à 37°—38° Lat. S. en été et à 29°—32° en hiver.

Ces études ont été poursuivies par M. WILLIAM LOCKYER dans son traité intéressant sur la circulation des vents de l'hémisphère australe². En comparant les courbes barométriques de deux stations situées sur presque la même latitude, mais à une distance l'une de l'autre de plusieurs degrés en longitude, il pouvait déterminer le temps auquel le maximum avait passé entre ces stations.

Par un grand nombre de mesures semblables il a trouvé que la vitesse moyenne est par jour:

au-dessus de l'Afrique australe 12° en longitude.

» » l'Australie 11°_{,5} » »

» » l'Amérique du sud 11°_{,1} » »

Vitesse moyenne sur les continents 11°_{,5}

Au-dessus des océans la vitesse est par jour 9°_{,2} en longitude pour tous les Océans au sud de l'équateur.

Une recherche analogue sur les minima des ondes barométriques dans les régions antarctiques a donné pour la vitesse moyenne des cyclones à peu près la même valeur: 9°—10° de longitude par jour.

Or, dans l'hémisphère australe il y a deux zones de tourbillons, anticycloniques autour du tropique et cycloniques au sud de 60° Lat. S. Cela est en accord parfait avec les cartes des vents moyens de l'hémisphère austral. En effet, tout autour de la terre entre 40° et 55° Lat. S. règnent »les braves vents de l'ouest«, les vents les plus constants qui existent. Ils résultent des gradients constants entre les maxima au nord et les minima antarctiques. Le régime des vents est

¹ Moving anticyclones in the Southern hemisphere. Roy. Met. Soc. London. Quarterly Journal 1893 p. 23.

² Southern Hemisphere Surface Air Circulation. Solar physics Committee. London 1910.

donc beaucoup plus simple sur l'hémisphère australe, presque tout-à-fait couverte d'Océans, que sur l'hémisphère boréale où les continents causent de grandes perturbations.

Le Fig. 1, fait voir la circulation de l'hémisphère australe selon M. WILLIAM LOCKYER.



Fig. 1.

Or, l'étude des trajectoires des cyclones et des minima barométriques a prouvé qu'il y a un courant constant de l'E à l'W entre les tropiques et des courants en sens contraire de l'W à l'E sur les zones tempérées.

II.

Les grands courants de l'air indiqués par les directions moyennes des nuages.

Pour étudier les directions moyennes des courants de l'air à des altitudes diverses au-dessus du sol on a discuté les observations des mouvements des différentes formes des nuages. Les observations furent organisées par moi en Suède en 1873 et un peu plus tôt en Angleterre par CLEMENT LEY. Peu à peu de telles observations furent commencées en plusieurs pays. Mais au commencement les observations régulières étaient trop rares, souvent leur valeur n'était pas hors discussion, et — ce qui était pire — la classification des nuages était différente en différents pays. D'un autre côté on ne saurait affirmer à priori que la *direction moyenne* d'une certaine forme de nuage *observée* soit celle du *vent dominant* à la même hauteur. En effet, pour qu'on puisse déterminer la direction des courants supérieurs, il faut d'abord qu'il y flotte des nuages, parce que sans cela ils sont invisibles; ensuite il faut que ces nuages ne soient pas cachés par des nuages inférieurs. Or, il est évident que ces conditions ne sont pas toujours satisfaites.

Malgré ces inconvénients, nous avons traité cette question d'une manière préliminaire.

En 1885¹ nous avons discuté pour l'Europe les observations des mouvements des nuages supérieurs, faites à un grand nombre de stations, et, en 1889² nous avons étendu ces recherches autant que possible sur toute la surface terrestre. De ces résultats très concordants je tirai les conséquences suivantes:

1^o Dans les régions supérieures au-dessus des zones tempérées il règne des courants dont la direction est en moyenne de l'ouest à l'est;

¹ The mean directions of Cirrus-clouds over Europe. Quart. Journ. Roy. Met. Soc. 1885.

² Sur la direction moyenne des courants supérieurs de l'atmosphère. Mémoires du congrès internat. météor. à Paris 1889.

2° Entre les tropiques leur direction est en sens contraire — ou de l'est à l'ouest;

3° La direction des courants supérieurs semble coïncider à peu près avec la trajectoire moyenne des centres de dépressions barométriques.

En février 1887 R. ABERCROMBY et moi nous avons présenté deux mémoires devant la Société météorologique Roy. à Londres, dans lesquels nous avons proposé *une classification nouvelle des nuages*. La Conférence météorologique à Munich en 1891 a recommandé cette classification comme *internationale*, et elle nomma une Commission des nuages, dont j'avais l'honneur d'être le président, pour prendre les mesures nécessaires pour la publication d'un *Atlas international des nuages* en couleurs de dimensions et de prix modérés¹.

En même temps la Conférence proposa que des mesures des mouvements et des hauteurs des nuages soient entreprises pendant une année à différentes stations, disséminées sur toute la terre, et on m'a demandé de rédiger des instructions pour ces observations.

Toutes les préparations faites, le Comité permanent météorologique, ainsi que la Commission des nuages se sont réunis à Upsala au mois d'août 1894. On avait organisé pour cette réunion une exposition contenant plus de *trois cents* reproductions de nuages — en photographies, et en couleurs — des diverses parties du monde entier. La Commission, après avoir choisi les figures destinées à être reproduites dans l'atlas international des nuages, chargea une Commission de la publication.

Elle consistait de M. M. H. HILDEBRANDSSON, A. RIGGENBACH et LÉON TEISSERENC DE BORT. De plus la Commission a fixé la description et les définitions des diverses formes des nuages, ainsi que les instructions pour les observateurs. Toutes les propositions furent acceptées par le Comité permanent qui invita tous les établissements météorologiques du monde à exécuter des observations et des mesures des nuages du 1^{er} mai 1896 au 1^{er} mai 1897 selon les instructions adoptées.

Comme, en plusieurs pays, beaucoup de stations n'avaient pas pu commencer les observations à la date fixée à Upsala, la Conférence

¹ L'Atlas des nuages publié par HILDEBRANDSSON, KÜPPEN et NEUMAYER à Hambourg en 1890 avec texte en quatre langues fut adopté comme point de départ pour arriver à une entente sur la classification et la désignation des nuages dans l'Atlas international.

météorologique réunie à Paris en 1896, résolut qu'il serait désirable que les observations directes des nuages soient continuées aux stations secondaires jusqu'à la fin de 1897.

Un grand nombre de pays ont pris part dans cette grande entreprise, et les résultats furent publiés partout dans la forme proposée de la Commission des nuages.

J'ai publié les résultats principaux de cette masse d'observations dans un Rapport au Comité international météorologique. La partie la plus intéressante de ce rapport est celle *sur la circulation générale de l'atmosphère*¹.

Ces recherches ont abouti dans les résultats suivants.

1^o. *Nuages supérieurs.*

Les résultats trouvés dans les mémoires de 1885 et 1889 sont pleinement vérifiés: *Dans la région des nuages supérieurs, Ci et Ci S, la direction du vent est en moyenne de l'ouest à l'est dans les zones tempérées, et de l'est à l'ouest dans la zone tropicale.*

La Fig. 2 et les Tab. 1 et 2 en donnent les résultats pour quelques stations choisies.

Tab. 1.

Direction moyenne des nuages supérieurs pour chaque mois.

	Blue Hill	Upsala	Irkutsk	Hakodate
Janvier . . .	W 4 ^o N	W 41 ^o N	W 45 ^o N	W 2 ^o S
Février . . .	W 1 S	W 43 N	W 45 N	W 17 N
Mars . . .	W 5 N	W 25 N	W 45 N	W 17 N
Avril . . .	W 14 N	W 8 N	W 16 N	W
Mai . . .	W 22 N	W 12 N	W 40 N	W 6 N
Juin . . .	W 28 N	W 11 N	W 11 N	W 6 N
Juillet . . .	W 20 N	W 24 N	W 27 N	W 14 N
Août . . .	W 4 S	W 17 N	W 13 N	W 21 N
Septembre . .	W 13 S	W 23 N	W 22 N	W 6 N
Octobre . .	W 5 S	W 7 N	W 27 N	W 2 N
Novembre . .	W 2 S	W 41 N	W 45 N	W 6 N
Décembre . .	W 6 S	W 36 N	W 45 N	W 14 N

¹ H. H. HILDEBRANDSSON: Rapport sur les observations internationales des nuages au Comité international météorologique. P. I. Upsala 1903, p. 13. Voir aussi, The international observations of Clouds by Dr. H. H. HILDEBRANDSSON. Quarterly Journal of the Roy. météorol. Society. Oct. 1904 et H. H. HILDEBRANDSSON et L. TEISSERENG DE BORT: Les Bases de la Météorologie dynamique. P. II p. 207

Ainsi, à Blue Hill en Amérique (près Boston), à Upsala en Suède, à Irkutsk en Sibérie et à Hakodate au Japon, le vent à la hauteur des nuages supérieurs a partout une direction de l'ouest à l'est avec une composante du N ou du S selon les saisons.

Au contraire le vent supérieur est de l'est à l'ouest aux stations tropicales: square 3 entre l'équateur et 10° N. lat. et 20°—30° W. Long. près de l'Afrique, Paramaribo dans la Guyenne hollandaise et San José en Amérique Centrale.

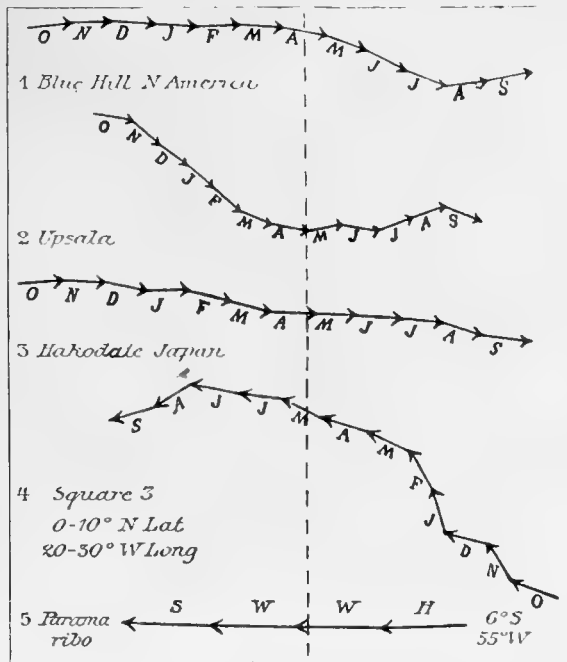


Fig. 2.

Tab. 2.

	Square 3	San José		Square 3	San José
Janvier . . .	E 78° S	E 10° N	Juillet . . .	E 10 S	E
Février . . .	E 60 S	E 22 S	Août . . .	E 32 N	E 30 N
Mars . . .	E 23 S	E 45 N	Septembre . .	E 17 N	E 20 N
Avril . . .	E 18 S	E 15 N	Octobre . . .	E 20 S	E 10 N
Mai . . .	E 26 S	E 73 N	Novembre . .	E 60 S	E 17 N
Juin . . .	E 7 S	E 25 N	Décembre . .	E 15 S	E 20 N

Paramaribo:

Hiver	E	Printemps	E 1° S
Été	E 2° S	Automne	E 1 N

À Mukimbugo, État du Congo, la direction moyenne des Cirrus est de l'E 37° S.

Nous donnons encore pour la zone tempérée les données suivantes sur le mouvement moyen des nuages supérieurs.

Tab. 3.

	Moyennes de toutes les stations en Angleterre	en Allemagne	Nora, Suède 59° 32' N	Tomsk Sibérie 50° 30' N
Janvier . . .	W 2° N	W 7° S	W 49 N	W 42° N
Février . . .	W 10 N	W 42 N	W 32 N	W 50 S
Mars	W 21 N	W 11 N	W 30 N	W 34 S
Avril	W 9 N	W 15 N	W 12 N	W 13 N
Mai	W 5 S	W 36 S	W 2 N	W 73 N
Juin	W 3 N	W 8 S	W 4 S	W 37 S
Juillet	W 11 N	W 12 S	W 8 S	W 20 S
Août	W 5 N	W 13 S	W 1 S	W 22 S
Septembre . .	W 1 N	W 6 N	W 9 N	W 4 S
Octobre . . .	W 9 N	W 35 S	W 14 N	W 2 S
Novembre . .	W 15 N	W 5 S	W 33 N	E 70 S?
Décembre . .	W 58 N	W 2 N	W 29 N	W 10 S

2° Zone des Alizés.

Dans l'Atlantique il n'y a pas de station située au milieu de la zone de l'alizé, mais dans l'alizé du SE de la mer Indienne se trouve l'observatoire excellent de Maurice. Dans le rapport officiel du Directeur, M. T. F. CLAXTON, pour 1897 nous trouvons les directions moyennes mensuelles des nuages supérieurs et celles des vents pour les années 1877—1897. Le nombre total des observations sur les nuages s'élève à 3,393.

Le Tab. 4 et Pl. I B. en donnent les résultats.

Tab. 4. MAURICE.

Mois	Cirrus	Vent	Mois	Cirrus	Vent
Janvier . . .	N 82° W	S 87° E	Juillet . . .	N 43 W	S 65 E
Février . . .	N 80 W	S 80 E	Août	N 15 W	S 67 E
Mars	N 83 W	S 78 E	Septembre . .	N 20 W	S 71 E
Avril	N 68 W	S 72 E	Octobre . . .	N 48 W	S 78 E
Mai	N 61 W	S 64 E	Novembre . .	N 70 W	S 82 E
Juin	N 60 W	S 61 E	Décembre . .	N 78 W	E

Ainsi au milieu de l'alizé de SE le contre-alizé souffle à peu près de NW. Au nord de l'équateur il doit souffler de SW.

Dans les théories de FERREL et de J. THOMSEN il est admis que le contre-alizé continue, au moins en grande partie, comme un vent supérieur du SW jusqu'aux environs du pôle nord. Nous verrons que cela n'est pas vrai.

En effet, le contre-alizé de l'hémisphère boréale est comme tous les vents, dévié à droite, et aux limites polaires de la zone des alizés il est devenu un vent d'ouest. Cette déviation augmente, comme on le sait, avec la hauteur, car un vent supérieur dévie à droite d'un courant inférieur. Au-dessus d'un vent du S. p. e. les nuages inférieurs marchent du SSW, les intermédiaires du SW et les supérieurs de l'W environ, ce qui a été bien constaté depuis longtemps.

A Ténériffe l'alizé souffle sur la mer, un vent du SW au sommet du Pic. Les Cirrus y sont rares, mais 76 observations d'hiver se partagent ainsi:

N	NNW	NW	WNW	W	WSW	SW	SSW
1	1	0	0	27	6	7	2
S	SSE	SE	ESE	E	ENE	NE	NNE
5	3	5	3	2	0	2	1

Ainsi à la hauteur des Cirrus la direction des vents supérieurs est de l'W 15°S en hiver au-dessus de Ténériffe.

A San Fernando (36° 37' Lat. N) à la limite boréale de l'alizé nous avons (1876—85):

Tab. 5. SAN FERNANDO.

Mois	Cirrus	Mois	Cirrus
Janvier . . .	E 30° N	Juillet . . .	W 4° S
Février . . .	W 24 N	Août . . .	W 3 S
Mars	W 8 S	Septembre .	W 4 N
Avril	W 7 N	Octobre . .	W 3 N
Mai	W 3 S	Novembre . .	W 20 N
Juin	W 3 N	Décembre . .	W 35 N

Des Iles du Cap Vert nous n'avons pas d'observations sur les nuages, mais nous verrons plus bas que les observations avec des ballons sondes ont prouvé que le vent supérieur y est SE environ.

Ainsi le vent supérieur tropical de l'E dévie à droite et vient du SE aux Iles du Cap Vert, du SW au centre de la zone des alizés et de l'W à sa limite boréale. C'est la même courbe que celle suivie des cyclones tropicaux. Or, une circulation verticale entre l'équateur et les pôles n'existe pas.

3° Moussons supérieurs.

L'équateur thermique, les alizés et les hautes pressions aux tropiques ont comme on le sait, une oscillation annuelle, se déplaçant toujours avec le soleil du nord au sud et vice versa. *Ainsi une large bande au nord de l'équateur thermique est située sous le contre-alizé du SW en hiver et le courant tropical de l'est en été.* Comme preuve nous donnons les observations suivantes.

Dans les Tab. 6 et 7 et sur Pl. I. C. nous donnons les résultats des observations des Cirrus en Square N:o 39 (10°—20° Lat. N et 20°—30° Long. W) et les moyens des observations des nuages supérieurs et inférieurs faites 1875—1884 à plusieurs stations à Mexique entre 23° et 19° Lat. N.

Tab. 6. SQUARE No. 39 (10°—20° N. et 20°—30° W.).

Mois	Cirrus	Mois	Cirrus
Janvier . . .	W 29° S	Juillet . . .	E 24° S
Février . . .	W 47 S	Août . . .	E 5 N
Mars	W 50 S	Septembre .	E 65 S
Avril	E 43 N	Octobre . .	E 64 S
Mai	W 77 N	Novembre .	W 62 S
Juin	E 32 S	Décembre .	W 63 S

Tab. 7. MEXIQUE.

Mois	N supérieurs	N. inférieurs	Vents à Matatzlan
Janvier . . .	W 55° S	W 64° S	W 80° N
Février . . .	W 53 S	E 67 S?	E 70 N
Mars	W 40 S	W 76 S	E 60 N
Avril	W 32 S	W 44 S	E 33 N
Mai	W 37 S	W 52 S	E 23 N
Juin	E 36 S	E 24 S	E 19 N
Juillet	E 57 S	E 23 S	E 33 N
Août	E 14 S	E 35 S	E 26 N
Septembre . .	E 48 S	E 25 S	E 30 N
Octobre . . .	E 63 S	E 37 S	E 46 N
Novembre . .	W 63 S	E 70 S	E 63 N
Décembre . .	W 62 S	E 68 S	E 55 N

4° Moussons asiatiques.

Le Rév. P. MARC DECHEVRENS, Directeur de l'observatoire de Zi-Ka-Wei près Chang-haï, a trouvé le premier que la direction moyenne des Cirrus n'y a aucune relation avec la distribution moyenne de la pression de l'air à la surface terrestre. Malgré la haute pression en hiver et la basse pression en été au-dessus de l'Asie orientale, *les courants supérieurs y vont en chaque saison constamment de l'ouest.* (Tab. 10).

Nous avons prouvé qu'il arrive partout dans ces parages que les moussons n'atteignent pas toujours la hauteur des nuages intermédiaires. Prenons comme spécimens Manille (14° 36' Lat. N) sous le régime des vents tropicaux de l'E, les moyens des stations Kurrachee, Deesa, Bombay, Poona, Belgaum, Nipur, Jubbelpore et Cuttack dans l'Inde centrale (20° Lat. N en moyenne) et Zi-ka-Wei (31° 11 1/2' N. Lat.)

Tab. 8. MANILLE. (1890—1897) Pl. I E.

Mois	Ci, CiS	CiCu, AS, ACu	Cu, Nb	Vent
Janvier . . .	E 84° S	E 10° N	E 12° N	E 84° N
Février . . .	E 79 S	E 12 N	E 10 N	E 3 N
Mars	E 73 S	E 7 N	E 3 N	E 13 S
Avril	W 7 S	E 4 N	E 1 N	E 38 S
Mai	E 17 N	E 11 S	E 18 S	W 75 S
Juin	E 15 N	E 29 S	E 50 S	E 65 S
Juillet . . .	E 14 N	W 35 S	W 36 S	W 43 S
Août	E 6 N	W 36 S	W 34 S	W 39 S
Septembre . .	E 27 N	W 24 S	W 21 S	W 41 S
Octobre . . .	E 43 S	E 12 N	E 16 N	E 76 N
Novembre . .	E 21 S	E 1 S	E 7 N	E 51 N
Décembre . .	E 35 S	E 5 N	E 8 N	E 58 N

Tab. 9. Stations de l'Inde centrale (oct. 1877—nov. 1879). Pl. I. D.

Mois	Nuages supérieurs	Nuages inférieurs	Vent	
			Bombay 10 années	Cuttack 15 années
Janvier . . .	W 3° N	E 40° N	E 84° N	E 45° N
Février . . .	W 3 N	E 35 S	W 86 N	W 74 S
Mars	W 15 S	E 35 S	W 62 N	W 74 S
Avril	W 20 S	E 15 S	W 38 N	W 73 S
Mai	W 47 S	E 70 S	W 8 N	W 85 S
Juin	W 54 S	W 17 S	W 27 S	W 59 S
Juillet . . .	W 15 S	W 20 S	W 15 S	W 46 S
Août	E 2 N	W 15 S	W 9 S	W 46 S
Septembre . .	E 4 S	W 15 S	W 1 S	W 80 S
Octobre . . .	W 4 S	E 85 S	E 75 N	E 58 N

Mois	Nuages supérieurs	Nuages inférieurs	Bombay 10 années	Vent Cuttack 15 années
Novembre . . .	W 2 S	E 50 S	E 73 N	W 89 N
Décembre . . .	W 35 S	E 65 S	E 73 N	E 78 N

Tab. 10. Zi-ka-Wei. (1895–1898). Pl. II A.

Mois	N. Supérieurs	N. Intremédiaire	N. Inférieurs	Vent
Janvier . . .	W 3 ^o S	W 1 ^o N	W 82 ^o N	W 79 ^o N
Février . . .	W	W 1 S	W 88 N	E 78 N
Mars	W 2 N	W 5 N	E 64 N	E 37 N
Avril	W	W 2 S	W 88 N	E 15 N
Mai	W	W 6 S	E 10 N	E 33 N
Juin	W 5 N	W 6 S	E 24 S	E 36 S
Juillet	W 43 N	W 10 S	E 80 S	E 52 S
Août	N	W 34 S	E 27 S	E 27 S
Septembre . .	W 9 N	W 6 S	E 46 N	E 43 N
Octobre . . .	W 5 N	W 8 S	E 56 N	E 59 N
Novembre . . .	W 7 N	W 18 S	E 73 N	W 83 N
Décembre . . .	W	W	W 78 N	W 64 N

Or, les moussons n'appartiennent pas aux mouvements généraux de l'atmosphère; il faut les considérer comme des perturbations grandioses, et leur hauteur ne dépasse guère 4—5000 m. Au-dessus, les grands courants de l'ouest ou de l'est vont comme à l'ordinaire.

5°. Zone tempérée boréale.

À l'exception des régions des moussons la direction moyenne du vent est dans la zone tempérée de l'ouest depuis le sol jusqu'à la hauteur des nuages supérieurs.

Voici quelques spécimens.

Tab. 11. BLUE HILL, MASS., U.S.A.

Mois	Ci. Ci-S	Ci.-Cu.	A.C., A.S	N. inférieurs	Vent
Janvier . . .	W 4 ^o N	W 4 ^o S	W 19 ^o S	W 8 ^o N	W 10 ^o N
Février . . .	W 1 S	W 2 S	W 16 S	W 9 N	W 20 N
Mars	W 5 N	W 21 N	W 27 N	W 34 N	W 41 N
Avril	W 14 N	W 38 N	W 7 S	W 23 N	W 39 N
Mai	W 22 N	W 22 S	W 16 S	W	W 63 S
Juin	W 28 N	W 5 N	W 14 S	W 8 N	W 43 S
Juillet	W 20 N	W 3 S	W 11 N	W 9 N	W 36 S
Août	W 4 S	W 3 S	W 7 N	W 5 N	W
Septembre . .	W 13 S	W 14 S	W 15 S	W 1 N	W 11 N
Octobre . . .	W 5 S	W 5 S	W 6 S	W 6 N	W 18 N
Novembre . . .	W 2 S	W 3 N	W 16 S	W 7 N	W 7 N
Décembre . . .	W 6 S	W 14 S	W 7 S	W 10 N	W 11 N

Tab. 12. PARIS. 1876—1880. (Renou) (Pl. II C).

Mois	Nuages supérieurs	Nuages inférieurs	Mois	Nuages supérieurs	Nuages inférieurs
Janvier . . .	W 25° N	E 53° N(?)	Juillet . . .	W	W 18° S
Février . . .	W 9 N	W 14 S	Août	W 28° S	W 30 S
Mars	W 13 N	W 40 S	Septembre . .	W 2 S	W 10 N
Avril	W 13 S	W 25 S	Octobre . . .	W 17 S	W 4 N
Mai	W 13 S	W 11 S	Novembre . .	W 4 N	W 15 S
Juin	W 23 S	W 23 S	Décembre . .	W 7 S	W 6 N

Tab. 13. Danemark. (à 56° Lat. N.) 1886—1900 (M. H. Nielsen).

Mois	Nuages supérieurs	Nuages intreméd.	Nuages inférieurs	Vent
Janvier . . .	W 39° N	W 40° N	W 22° S	W 42° S
Février . . .	W 36 N	W 39 N	W 1 N	W 7 S
Mars	W 27 N	W 32 S	W 5 S	W 20 S
Avril	W 15 S	E 75 S	W 24 N	E 60 N
Mai	W 18 S	W 44 S	W 2 N	W 85 N
Juin	W 5 S	W 16 S	W 8 N	W 20 N
Juillet . . .	W 10 N	W 5 S	W 3 S	W 16 S
Août	W 11 S	W 37 S	W 17 S	W 33 S
Septembre . .	W 4 N	W 17 S	W 9 S	W 10 S
Octobre . . .	W 6 S	W 10 S	W 36 S	W 53 S
Novembre . .	W 30 N	W 20 S	W 50 S	W 54 S
Décembre . .	W	W 18 S	W 42 S	W 57 S

Tab. 14. Upsala (Pl. II B).

Mois	Nuages supérieurs	Nuages intreméd.	Nuages inférieurs	Vent
Janvier . . .	W 41° N	W 22° N	W 5° S	W 32° S
Février . . .	W 43 N	W 46 N	W 6 S	W 5 S
Mars	W 25 N	W 28 N	W 22 N	S 37 W
Avril	W 8 N	W 3 N	W 51 N	N 34 E
Mai	W 12 N	W 8 S	W 5 N	E 20 S
Juin	W 11 N	W 1 N	W 19 N	N 1 W
Juillet . . .	W 24 S	W 19 S	W 21 S	S 25 W
Août	W 17 S	W 13 S	W 12 S	S 33 W
Septembre . .	W 23 N	W 5 N	W 17 S	W 32 S
Octobre . . .	W 7 N	W 13 N	W 38 S	S 38 W
Novembre . .	W 41 N	W 25 N	W 23 S	W 38 S
Décembre . .	W 36 N	W 32 N	W 31 S	S 39 W

Tab. 15.

Marche des nuages au-dessus de Norvège, d'Islande et de Grönland.

	Avril—Septembre			Octobre—Mars		
	Nuages supérieurs	Nuages interméd.	Nuages infér.	Nuages supér.	Nuages interméd.	Nuages infér.
Lödingen . . .	W 63° S	W 75° S	W 54° S	W 51° S	W 60° S	W 49° S
Drontheim . . .	W 25 S	W 46 S	W 28 S	W 2 N	W 9 S	W 2 S
Aasnes . . .	W 18 S	W 15 S	W 80 S	W 32 N	W 24 S	E 53 S
Christiania . . .	W 9 S	W 9 S	E 71 S	W 30 N	W 29 S	E 43 S
Thorshavn . . .	W 55 S	E 25 S	W 25 S	W 20 S	W 70 S	W 26 S
Reykjavig . . .	E 70 N	W 80 S	E 57 S	E 50 N	E 60 S	S
Stykkisholm . . .	W 3 N	—	W 81 S	W 43 N	—	W 76 S
Teigarhorni . . .	W 29 N	—	W 3 S	W 70 N	—	W 23 S
Upernivik . . .	W 86 N	—	W 59 S	E 2 S	—	E 46 N

Coordonnées géographiques de ces stations

Lödingen	68° 24' N. Lat.	16° 1' E Long.
Drontheim	63 26 »	10 22 E »
Aasnes	60 37 »	11 58 E »
Christiania	59 55 »	10 43 E »
Thorshavn	62 25 »	6 45 W »
Reykjavig	64 9 »	21 55 W »
Stykkisholm	65 5 »	22 46 W »
Teigarhorni	64 40 »	14 19 W »
Upernivik	72 47 »	56 7 W »

On voit qu'il y a quelques stations, surtout Reykjavig sur la côte sud d'Islande, où la marche des nuages est de l'E ou de NE. Cette exception s'explique facilement. Au sud de Grönland et d'Islande est situé le grand minimum moyen barométrique sillonné presque sans cesse par des minima marchant de l'ouest à l'est. Au nord nous avons les terres vastes froides d'Islande et celles de Grönland, toujours couvertes de glace, au-dessus desquelles il y a le plus souvent, surtout en hiver, une forte pression barométrique. Mais dans une telle situation, nous l'avons vu plus haut, les dépressions sont fortement développées et fermées en haut jusqu' à la hauteur des Cirrus. Le passage de dépressions si fortes étant presque continu, il s'en suit qu'on voit à ces stations les Cirrus marcher en général de l'est malgré la marche des minima de l'ouest à l'est.

À Bossekop (69° 56' N. Lat. 23° 8' Long. E. de Gr.), station norvégienne, M. MOHN a trouvé des mesures des nuages en 1896—97

Tab. 16.

Hauteurs m.	Directions du vent.
0— 1000	W 23° N
1000— 3000	W 12 S
3000— 5000	W 12 S
5000— 7000	W 12 S
7000—10000	W 9 S
au-dessus de 10000	W 13 N

Tab. 17.

Tomsk (Sibérie) (56° 30' Lat. N 84° 30' Long. E)

Mois	Nuages			Vent
	supérieurs	interméd.	inférieurs	
Janvier . . .	W 42° N	W 28° N	W 5° S	W 32° S
Février . . .	W 50 S	W 23 S	W 14 S	W 85 S
Mars . . .	W 34 S	E 24 S(?)	W 48 S	E 52 S
Avril . . .	W 13 N	W 3 S	W 13 S	W 59 S
Mai . . .	W 73 N	W 16 N	W 39 N	W 3 S
Juin . . .	W 37 S	W 8 N	W 22 S	W 49 S
Juillet . . .	W 20 S	W 19 S	W 54 S	E 24 S
Août . . .	W 22 S	W 15 S	W 28 S	W 66 S
Septembre . .	W 4 S	W 13 S	W 7 S	W 52 S
Octobre . . .	W 2 S	W 9 S	W 21 S	W 59 S
Novembre . .	E 79 S	W 45 S	W 35 S	W 72 S
Décembre . .	W 19 S	W 19 N	W 14 S	W 62 S

Tab. 18.

Irkoutsk (Sibérie) 52° 16' Lat. N. 104° 10' Long. E.

Mois	Nuages			Vent
	supérieurs	interméd.	inférieurs	
Janvier . . .	W 45° N	W 7° N	W 29° N	W 5° N
Février . . .	W 45 N	W 24 N	W 45 N	E 36 S
Mars . . .	W 45 N	W 32 N	W 28 N	E 78 N
Avril . . .	W 16 N	W 14 N	W 32 N	E 33 S
Mai . . .	W 40 N	W 41 N	W 45 N	W 23 N
Juin . . .	W 11 N	W 27 N	W 33 N	E 80 S
Juillet . . .	W 27 N	W 27 N	W 53 N	W 65 S
Août . . .	W 13 N	W 45 N	W 34 N	W 24 S
Septembre . .	W 22 N	W 27 N	W 28 N	W 14 N
Octobre . . .	W 27 N	W 34 N	W 39 N	W 34 N
Novembre . .	W 45 N	W 34 N	W 42 N	W 41 N
Décembre . .	W 45 N	W 45 N	W 51 N	W 69 N

6°. *Zone subtropicale.*

Nous avons vu que l'air au-dessus de la zone tempérée est entraîné dans un vaste tourbillon tournant de l'ouest, dont le centre se trouve dans les régions polaires, et que dans ce tourbillon l'air des couches les plus basses se rapproche du centre et celui des couches supérieures s'en éloigne de la même manière que dans un cyclone ordinaire. Or, nous devons attendre que *les courants supérieurs envahissent la pente boréale de la haute pression des tropiques, qui serait ainsi alimentée des deux côtés: par le contre-alizé du côté sud et par un courant de NW du côté nord. C'est précisément ce qui a lieu.*

Par des observations faites pendant »l'année des nuages» on a trouvé les directions moyennes suivantes à des hauteurs différentes, à Washington.

Tab. 19. Washington (38° 53' Lat. N.)

Mètres	Avril—Sept.	Oct.—Mars
0— 1,000	N 42° W	S 71° W
1000— 3,000	N 66 W	N 87 W
3000— 5,000	N 84 W	S 79 W
5000— 7,000	N 89 W	S 80 W
7000—10,000	N 80 W	N
au-dessus de 10,000	N 77 W	N 79 W

Selon des observations faites à Fayal (Açores) et qui nous ont été envoyées par M. CHAVES la marche des Cirrus est du NW en été et du WSW en hiver. En hiver Fayal se trouve sur le régime des vents de la zone tempérée.

Tab. 20. Perpignan, France (42° 41' Lat. N.)

	N. supérieur	intermédiaires	inférieurs
Janvier	W 34° N	W 37° N	W 52° N
Février	W 39 N	W 33 N	W 36 N
Mars	W 32 N	W 33 N	W 24 N
Avril	W 31 N	W 40 N	W 30 N
Mai	W 28 N	W 28 N	W 18 N
Juin	W 18 N	W 13 N	W 10 N
Juillet	W 17 N	W 22 N	W 27 N
Août	W 23 N	W 14 N	W 18 N
Septembre . . .	W 11 N	W 17 N	W 12 N
Octobre	W 15 N	W 4 N	W 14 N
Novembre . . .	W 34 N	W 29 N	W 26 N
Décembre . . .	W 27 N	W 33 N	W 32 N

Tab. 21.

Mois	Madrid	Pola	Tiflis
	(40°23' Lat. N.) Cirrus	(41°22' Lat. N.) Cirrus	(41°22' Lat. N.) Cirrus
Janvier . . .	W 46° N	W 77° N	W 50° N
Février . . .	W 22 N	W 25 N	W 70 N
Mars	W 44 N	W 25 N	W 56 N
Avril	W 20 N	W 27 N	W 25 N
Mai	W 6 S	W 12 N	—
Juin	W 23 S	W 25 N	W 28 N
Juillet	W 32 N	W 12 N	W 65 N
Août	W	W 20 N	—
Septembre . .	W 1 N	W 10 N	W 21 S
Octobre	W 37 N	W 8 N	W 22 N
Novembre . . .	W 36 N	W 3 N	W 50 N
Décembre . . .	W 35 N	W 10 N	W 43 N

Selon M. DALLAS la marche des Cirrus au-dessus du Golfe de Perse est en toute saison du NW

7°. Régions polaires.

Des régions polaires de l'hémisphère boréale les observations du mouvement des nuages sont très rares. Les expéditions arctiques sont en général anciennes, et alors ces observations n'étaient pas encore générales. Pendant »l'année polaire«, août 1882—août 1883, la direction moyenne des nuages supérieurs, Ci et CiSt a été

	Oct.—Mars	Avril—Septembre	
à Jan_ Mayen	W 23° N	W 38° S	selon M. A. SOBIECZKY
à Cap Thordsen	W 55° N	W 7° S	» » N. EKHOLM
	(Jan Mayen 71° Lat. N.)	Cap Thordsen (Spitsberg 78°28' Lat N.)	

À la station la plus boréale, Treuremberg Bay, sur la côte nord du Spitzberg (79° 57' Lat. N.) M. J. WESTMAN a trouvé du Juillet 1899 —Août 1900.

Nuages	Octobre—Mars	Avril—Septembre
supérieurs . .	W 2° N	W 75 S
intermédiaires .	W 30 S	W 72 S
inférieurs . .	W 6 S	W 48 S

Nous donnons les résultats de L'expédition norvégienne polaire de M. NANSEN, 1893—1896, qui flottait avec la glace de l'E à l'W des environs du détroit de Behring jusqu' à Spitzberg, et de l'Expédition polaire de M. ZIEGLER au Pays de François-Joseph. L'expédition séjournait au Cap Flora (80° Lat. N, 50° Long. E) du 21 Mai au 31 Août 1904 et à Teplitz Bay (81 1/2° Lat. N. et 58° Long E.) Nous avons calculé les observations des nuages comme faites à la même station.

NANSEN: *Expédition Polaire 1893--1896.*

Cirrus . . .	S 15° E	CiCu . . .	N 46° W
CiSt . . .	N 66° W	N. inférieurs	N 60° W
Ci + CiSt	N 74° W	Vent . . .	S 23° E

Tab. 22. Pays François-Joseph.

	Nuages	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	NE+E+ SE.	SW+W +NW
Hiver : .	Supérieurs	—	—	6	1	—	—	2	1	7	3
	Interméd.	2	—	10	3	2	—	—	—	15	0
	Inférieurs	5	16	33	42	27	9	24	4	91	37
Printemps	Supérieurs	3	3	1	—	—	1	6	1	4	8
	Interméd.	2	6	8	4	—	—	4	1	18	5
	Inférieurs	10	24	36	38	13	14	27	25	98	66
Été . . .	Supérieurs	3	10	6	1	3	4	4	5	17	13
	Interméd.	2	3	4	6	1	1	6	2	13	9
	Inférieurs	10	39	50	53	7	9	29	42	142	80
Automne	Supérieurs	4	2	6	—	—	1	2	—	8	3
	Interméd.	1	3	5	6	2	1	1	—	14	2
	Inférieurs	16	29	67	63	29	20	19	9	159	48

Vent. Dec.—Février E—S, Mars—Avril E—N (Teplitz); Oct.—Avr. E—NE, Mai—Juill. W—NW, Août—Sept. variables (Cap Flora)

Les vents étaient en général de l'E en Octobre—Avril, de l'W—NW en Mai—Juillet et en Août et en Septembre très variables.

Or, le vent était partout du côté de l'est, sauf en été au Pays de François-Joseph. La direction la plus fréquente des nuages était là aussi celle de l'E—SE avec un maximum secondaire du NW en été.

Au Nord de l'Amérique l'expédition du »Fram», chef M. le Capitaine OTTO SVERDRUP, a séjourné sur les côtes de la Terre d'Ellesmere à l'ouest de la Baie de Baffin 1898—1902¹. Les résultats sont résumés dans Tab. I (hors texte).

¹ Report of the second norwegian arctic expedition in the »Fram» 1898—1902. Vol. I No 4: H. MOHN: Meteorology.

À toutes les hauteurs les vents du N sont en général les plus fréquents, et après les vents du S. qui en été sont prépondérants.

On a seulement considéré deux classes de nuages: *supérieurs* (Ci et CiSt) et *inférieurs* comprenant toutes les autres formes.

On craignait que les vents ne fussent déviés par la direction N—S du détroit qui sépare la Terre d'Ellesmere du Heiberg Land, les stations étant situées près de l'entrée méridionale de ce détroit, mais selon M. SVERDRUP la même direction du vent fut observée aux sommets des montagnes environnant le détroit, et comme les vents du N—S ont un maximum même dans la hauteur des nuages supérieurs on doit accepter cette irrégularité dans le régime des vents, irrégularité qui sera expliquée dans ce qui suit.

De la *zone antarctique* les observations sont plus nombreuses. Nous donnons dans les tableaux suivants un résumé des observations sur la marche des nuages et la direction du vent faites par les expéditions principales.

Tab. 23, »Scotia». Vents

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
1) à Cap Pembroke (51° 41' Lat. S. 57° 42' Long. W) . . .	19,3	9,9	2,8	2,3	4,9	12,8	22,6	25,1
2) à Laurie Island, S Orkney (60° 43' Lat. S. 44° 39' Long. W.)	10,9	2,7	2,1	9,5	9,1	12,5	11,1	36,1
3) Deux croisades sur Weddel Sea Fevrier et Mars 1903 et Mars 1904	15	17	9	9	7	12	12	13

Calmes 6 %

En 3) les vents de l'E sont observés seulement au S de 60° Lat. S.

Tab. 24, »Snowhill» marche des nuages et des vents (64° 22' Lat. S. 56° 69' 45" Long. W)

	Ci, Ci St.	CiCu ACu ASt.	S-Cu. Nb, S.	Vent %
N	0	2	6	0,8
NNW	0	3	7	0,2
NW	2	4	6	0,3
NNW	2	8	6	0,4
W	11	16	15	0,4
WSW	3	4	7	12,5
SW	4	9	13	21,6
SSW	1	6	3	20,4
S	1	2	3	4,9
SSE	0	1	2	0,7
SE	0	2	0	0,9

} 54,5

	Ci, CiSt.	CiCu, ACu, CiSt.	StCu, Nb, S	Vent %
ESE	0	0	1	0,6
E	0	0	3	2,1
ENE	0	1	1	3,9
NE	0	4	3	8,7
NNE	0	0	4	4,5
Somme	24	62	80	Calmes 14,8 variable 2,3

Tab. 25. »Gauss» Vents % (66°2' Lat. S., 89°38' E)

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	
0,1	0,2	0,5	3,9	47,8	10,5	4,5	4,8	
S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	Calmes
2,0	1,1	1,4	3,4	6,3	1,7	0,9	0,2	10,7

Composants en percent (sans calmes)

	Lat. S.	Long. E.	de l'E	de l'W
Kerguelen	49° 25'	69° 53'	5,4	90,3
Heard Island	53° 8'	73° 34'	20,5	73,8
»Gauss»	66° 2'	89° 38'	73,3	16,0

Tab. 26. »Belgica», croisade de 69°38' à 71°36' Lat. S, 80°30' à 96°40' Long. W.

Vents	N	NNE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
Hiver	249	226	131	181	184	142	123	198	94	284	254	621	389	323	24
Été	132	147	504	502	408	334	228	177	132	200	262	215	133	105	84

Tab. 27. »Southern Cross». Cap Adare 71° Lat. S, 170° Long. E.

Vents %	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmes
	3,6	26	9,1	20,4	13,9	4,1	3,1	3,1	40,1
				<u>43,4</u>					

Tab. 28. »Discovery» Ross Island. 77°50' Lat. S, 166°45' Long. E.¹

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
N. supérieurs . . .	% 8	4	6	8	10	26	19	19
						<u>64</u>		
Fumée du Mont Ere- bus (13,000 pieds) }	% 4	2	4	8	12	36	28	6
						<u>76</u>		
N. inférieurs . . .	% 18	10	13	14	18	15	4	8
						<u>47</u>		
Vents	% 11	20	44	16	6	1	0	2
			<u>80</u>					

¹ National antarctic Expedition 1901—1904 P. I p. 495.

8°. *Maximum barométrique de l'Atlantique Nord.*

Les mouvements des couches supérieures de l'air au-dessus du maximum barométrique de l'Atlantique nord étant de la plus haute importance pour notre connaissance des mouvements généraux de l'atmosphère nous les avons étudiés spécialement¹.

Pour cette étude nous avons employé, outre des résultats donnés plus haut, les observations néphoscopiques des Antilles publiées par M. BIGELOW² et celles de M. CHAVES de Horta, île Fayal des Açores³. Enfin nous avons calculé les moyennes des observations des nuages supérieurs publiées par TOYNBEE déjà en 1876 pour les Carrés 38, 39, 40, 2, 3, 4, 301, 302 et 303.

Les résultats sont insérés sur les deux cartes (Pl. V.) sur lesquelles les directions des courants supérieurs au-dessus de la région en question semblent très bien apparaître dans ses traits généraux.

Au-dessus des régions équatoriales le grand courant supérieur de l'E est très bien indiqué. Au-dessus du Cap Vert il vient du SE pour devenir après le contre-alizé du SW au-dessus des pentes méridionales du maximum barométrique, et enfin, dévié de plus en plus à droite, il souffle de l'ouest au-dessus de la crête du maximum.

Aux Antilles, où l'alizé souffle de l'E ou de l'ENE, les courants supérieurs ont une direction tout à fait opposée. Cela a été connu depuis longtemps par le fait que les cendres des volcans aux Antilles tombent toujours à l'est du volcan.

M. BIGELOW a publié les observations seulement sur tableaux graphiques. Nous reproduisons ici (Pl. IV) un de ces tableaux contenant les moyennes de quatre stations. On voit nettement l'opposition entre les courants inférieurs et supérieurs, et aussi *entre les deux courants la marche irrégulière des nuages intermédiaires.*

¹ Haun-Baud der Meteorol. Zeitschrift 190 br. p. 117.

² Studies of the circulation of the atmospheres of the sun and of the earth.

V. Results of the nephoscopic observations in the West Indies during the years 1899—1903. Washington 1904. Weather Review of Weathers Bureau.

³ Communiquées en manuscrit.

Enfin, au nord du maximum barométrique, dans la zone subtropicale les vents supérieurs vont en général du NW ou de l'WNW, comme nous l'avons vu plus haut.

Le plus au Sud, sur l'île Ascension, les Cirrus vont du NE, ce qui correspond à leur marche du SE au Cap Vert.

Les cartes font voir les variations des vents supérieurs avec les saisons, le maximum barométrique étant le plus au N en été et le plus au S en hiver.

III.

Observations aéronautiques.

1° Zone tempérée.

Il est bien connu que des ballons lancés à des hauteurs considérables *vont en général de l'ouest à l'est*. Plus la hauteur est grande, plus les vents supérieurs vont constamment vers l'E. Cela est constaté presque chaque jour à tous les observatoires aéronautiques de l'Europe et de l'Amérique.

Citons seulement comme exemple les lancers pendant l'expédition franco-suédoise à Kiruna à 68° Lat. N. en Laponie Suédoise, organisée par mon ami regretté LÉON TEISSERENC de BORT et moi¹.

Là, pendant mars 1907, février et mars 1908 et août 1909 on a lancé 72 ballons, dont on a retrouvé 47.

De ces ballons il n'y a que 3 qui sont tombés sur un méridien à l'ouest de Kiruna, un seul, après être monté à 10 km., retomba à presque la même place d'où il avait été lancé, mais tous les autres sont tombés à l'E de Kiruna à des distances plus ou moins grandes — quelques-un jusqu'en Finlande à plusieurs centaines de kilomètres du point de départ. *Comme les nuages supérieurs la direction avait en général une composante du nord en hiver et du sud en été.*

Pour étudier la constance croissante des vents de l'ouest avec la hauteur nous avons calculé séparément le nombre des vents de NW—SW et de SE—NE à des hauteurs 0—5000 m des observations faites à Lindenberg en 1912 au moyen de ballons pilotes². (N = N 22¹/₂⁰ W — N 22¹/₂⁰ E, NW = N 22¹/₂⁰ W — N 67¹/₂ W, etc.).

¹ H. MAURICE: L'expédition franco-suédoise à Kiruna, avec une introduction de H. H. HILDEBRANDSSON — Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsala Ser. IV. N:o 7 1913.

² Die Arbeiten des K. preussischen Aeronautischen Observatoriums bei Lindenberg im Jahre 1912. VIII B. p. 197.

De la même manière nous avons calculé les directions des nuages de la même année à Upsala et celle faites à la station antarctique suédoise à Snowhill.

Et enfin nous avons calculé le percent des vents avec composante est de tous les vents NW—SW + SE—NE.

On voit comment décroissent considérablement les vents avec composante de l'est avec la hauteur.

Lindenberg.

	Vents	1000 m	2000 m	3000 m	4000 m	5000 m
NW—SW	65	78	59	42	30	21
SE—NE	52	43	25	16	11	8
Somme	117	121	84	58	41	29
%	44,4	35,5	29,8	27,6	26,8	27,6
N	25	10	8	5	4	2
S	22	10	9	7	2	1

Upsala

<i>Janvier—Mars</i>	Vents	N. inférieurs	N. intermédiaires	N. supérieurs
NNW—SSW	531	139	49	33
SSE—NNE	422	60	0	0
Somme	953	199	49	33
%	44,4	30,2	0	0
N	—	7	2	5
S	—	25	1	0
<i>Juin—Août</i>				
NNW—SSW	438	165	62	57
SSE—NNE	426	159	29	27
Somme	864	324	91	84
%	49,3	49,6	31,9	32,1
N	—	15	1	3
S	—	29	10	4

Snowhill

Année				
NNW—SSW	55,8	57	50	23
SSE—NNE	21,4	14	8	0
Somme	77,2	71	58	23
%	27,7	19,7	13,8	0
N	—	6	2	0
S	—	3	2	1

Il semble qu'on doit conclure de là que les cyclones -et les anticyclones sont des phénomènes qui naissent dans les couches inférieures de l'atmosphère et qui n'atteignent pas toujours les couches supérieures. On suit aussi que les anticyclones se forment et restent par préférence au-dessus des terres froides et sèches, surtout en hiver, tandis que les minima se forment le plus souvent au-dessus des mers.

2^o *Maximum barométrique de l'Atlantique nord.*

Comme nous l'avons vu, les courants d'air au-dessus et tout autour du maximum barométrique du tropique du Cancer sont très compliqués, mais aussi très intéressants à connaître, si l'on veut étudier les mouvements généraux de l'atmosphère. Aussi, à peine ROTHE eut-il réussi à lancer des cerfs-volants d'un steamer, que je lui ai proposé en 1901 de faire de telles expériences sur cette partie de l'Océan. Cependant ce programme était alors trop difficile à exécuter. D'un côté les frais étaient très considérables et d'un autre côté les cerfs-volants ne montent pas en général à des hauteurs assez grandes.

Mais à peine M. ASSMANN eut-il introduit pour ces expériences les petits ballons de caoutchouc qui montent à vitesse sensiblement constante, et dont on peut par conséquent déterminer la trajectoire d'un seul point sur terre ou du pont d'un steamer¹, que S. A. S. le Prince ALBERT de Monaco accompagné de M. HERGESELL entreprit deux expéditions avec son yacht »Princesse Alice» pour exécuter de telles ascensions.

Ces expériences ont été poursuivies en 1904 dans le triangle Oporto — Ténériffe — Açores et en 1905 le long de la route Gibraltar — mer de Sagasso (26^o Lat. N. et 43^o Long. W.) — Açores. Voici les résultats de la première expédition². Dans la couche la plus basse règne l'alizé du NE d'une vitesse moyenne de 7 m/s Il y a une décroissance adiabatique de température et une humidité relative augmentant de 70 à 80 % à 95 % ou souvent à 100 %. Dans ce cas il se forme des Cumuli à la limite supérieure qui se trouve à une hauteur variable entre 100 m. et 600 m. Alors la température monte subitement de

¹ Nous ne traiterons pas ici les méthodes expérimentales employées dans ces recherches — méthodes bien connues à présent.

² Comptes rendus de l'Acad. d. Sc. à Paris le 30 janvier 1905.

plusieurs degrés et l'humidité diminue à 20-10 % seulement. Dans cette couche d'inversion d'une épaisseur de 1000 m. environ, le vent est irrégulier et très faible¹ du NE mais tournant avec la hauteur ordinairement de NE par N vers NW, mais deux fois du NE à l'E vers SE et S. Au-dessus de la couche d'inversion se trouve de nouveau une couche à gradient exactement adiabatique. Cependant l'humidité relative augmente avec la hauteur, de façon que la richesse hygrométrique soit constante, ce qui permet de conclure à un courant descendant. Dans cette couche qui dépasse 4500 m. la plus grande hauteur atteinte dans cette expédition, il règne un vent de NW. Un contre-alizé du SW ne fut observé qu'une seule fois.

Comme exemple, M. HERGESELL donne les résultats typiques du 9 août 1904 à l'ouest des Canaries.

Tab. 29.

Hauteur m.	Température	Humidité relative %	Direction du vent
0	+ 23,0	80	N 52° E
200	20,5	88	
400	18,5	88	N 36 E
500	18,0	93	
600	18,9	80	
800	24,5	35	
1 000	26,4	16	N 29 E
1 200	26,2	16	N 15 E
2 000	18,0	21	
3 000	9,0	30	
4 000	1,5?	40	
4 500	5,6	47	N 25 W

Ces résultats ont été pleinement vérifiés pendant l'expédition en 1905. M. HERGESELL donne le résumé suivant des observations sur les directions des vents.

¹ En général, comme à Trappes à Hald etc., l'étude des hautes pressions a permis de constater, qu'en général, il existe une zone de vents faibles à une certaine hauteur, zone que les cerfs-volants ne peuvent pas franchir ordinairement. Ils forment une ligne horizontale appelée »la ligne de canards.« Voir aussi la marche irrégulière des nuages intermédiaires aux Antilles (Pl. IV) et G. J. P. CAVE: The structure of the atmosphere in clear Weather. Cambridge 1912.

Août	Lat. N.	Long W.	Vents dans les couches successives.
1.	31°10'	19°30'	0—3 420 m. NE, 5 000 NW, 6 740 NE, 7 370 N et à 10 000 NNW
2.	29°17'	21°50'	0—3 540 m. NE 5 450 NW—WNW, 9 420 NE, 10 200 E, 13 240 ENE—NE, au-dessus SE
7.	25°58'	35°7'	0—1 800 m. NE, 2 100 SSE, 5 000 SW, 6 000 SE, 6 600 SSE, 8 400 SW, 9 000 WNW, 12 000 SW, 16 000 SE
8.	20°41'	36°36'	0—2 110 NE, 12 000 NW—WNW.
9.	27°42'	38°34'	0—5 600 NE—NNE, 9 000 NW—NNW
11.	30°4'	42°30'	0—4 140 NNE, 4 240 N, 8 400 NNE
16.	31°44'	42°39'	0—4 540 ENE
23.	37°3'	27°21'	0—2 210 NE, 2 800 NW, 3 280 NE, 3 840 N, 12 330 NNW—NW.

La vitesse des alizés étaient ordinairement 5—6 m. et celle du vent supérieur 10—15 m.

Une seule fois, à la station la plus méridionale, le vent supérieur soufflait du SW—SE; partout d'ailleurs du NW. Or, on n'avait trouvé le contre-alizé du SW qu'une seule fois.

Les expéditions d'« Otaria », le steamer de TEISSERENC DE BORT organisées par lui et ROTCH, étaient plus importantes. La première expédition commençait le 1^{er} juillet 1905, et l'Otaria visitait successivement Madère, les Canaries, les îles du Cap Vert, les Canaries et les Açores. Les observations consistaient, en mer, en lancers de cerfs-volants et de ballons pilotes; ces derniers à l'exception de celui du 13 août, ont été lancés de la terre afin d'avoir une base qui permettrait d'en déterminer exactement la trajectoire.

L'expédition suivante fut faite au mois de février 1906. Elle fut de courte durée, son but principal étant de vérifier si les lancers faits en pleine mer donnaient les mêmes superpositions de courants que ceux faits à Ténériffe. Les ballons lancés en février démontrèrent l'existence du contre-alizé au-dessus de l'alizé dans les régions des îles Canaries. Il restait à étudier la circulation intertropicale elle-même et à poursuivre les sondages dans la partie centrale de l'Atlantique.

La troisième expédition a visité successivement Madère, les îles du Cap Vert, Sierra Léone, l'Ascension, les îles du Cap Vert, Ténériffe, les Açores, puis elle est rentrée en Europe après avoir parcouru un grand quadrilatère à l'ouest des Açores, jusqu'au 47° Long. W de Paris. Partie à la fin d'Avril à Marseille, la mission est rentrée au Havre le 18 Octobre.

Dans cette expédition on a fait 24 lancers de ballons sondes et 46 ascension de cerfs-volants. Par un temps presque calme on a aussi souvent employé des ballons captifs portant l'enregistreur, qui a été de cette manière élevé à près de 5000 m. jusqu'au contre-alizé.

Enfin TEISSERENC DE BORT organisa tout seul encore une expédition qui partit du Havre le 1^{er} juillet 1907 pour les Açores, où commencèrent les premiers lancers de ballons, qui furent continués surtout au sud-ouest des îles du Cap Vert, ce qui a permis de suivre, pendant deux périodes de 13 à 14 jours chacune, la circulation quotidienne à diverses hauteurs au-dessus de ces parages. Plusieurs ballons élevés atteignirent la couche isotherme d'une manière incontestable. Les ascensions furent au nombre de 41 dont 29 ballons sondes et de ces derniers 20 ballons furent retrouvés rapportant de bonnes courbes; les autres servirent de pilotes. Nous donnons ici quelques spécimens typiques des observations nombreuses. (Tab. II—V hors texte).

Les résultats généraux concernant la circulation de l'air sont résumées ainsi par TEISSERENC DE BORT:

— — — »le régime des vents est assez régulier dans une région donnée, et l'on peut ainsi résumer l'ensemble de la circulation sur la partie explorée (35° N à 8° S et côtes d'Europe à 47° W de Paris) qu'il suit.

»L'alizé régulier de N à NE, qui souffle au niveau de la mer, forme une couche, dont l'épaisseur moyenne n'est guère que *d'un millier de mètres*, puis vient une zone de vent ayant encore une composante nord qui ordinairement souffle du NW. Ces vents de NW paraissent cesser à une dizaine de degrés du point de convergence de l'alizé, qui en été se trouve vers 8° N, par conséquent au sud des îles de Cap Vert. Au-dessus, en hauteur, commence la région des vents à composante sud qui forment le contre-alizé. Ces derniers se rencontrent à une altitude moindre lorsqu'on se rapproche de l'équateur: c'est ainsi que vers les îles du Cap Vert le contre-alizé se trouve aux environs de 1,800 m.; à la latitude des Canaries il souffle au-dessus de 3,000 m. ce qui concorde d'ailleurs avec les observations faites au Pic de Ténériffe¹.

¹ Cependant, on voit des tableaux que cette hauteur est très variable.

»La région équatoriale, c'est à dire celle où a lieu le point de rencontre de l'alizé et dont la latitude varie un peu dans le cours de l'année, est occupée par des vents à composante E très prédominante jusqu'aux plus grandes hauteurs qu'on a explorées. Dès le 5^e degré sud on retrouve au-dessus des alizés proprement dits des vents à composante nord qui forment le contre-alizé; ces vents sont du NE et quelquefois du NW. Ces changements de rhumbs peuvent s'expliquer, parce que ces diverses couches superposées viennent de régions différentes du minimum barométrique.

»L'équivalent des vents de NW qu'on rencontre dans l'hémisphère nord, au-dessus de l'alizé de NE, nous est donné par des veines de vent de SW qui se retrouvent aussi aux environs de l'île de l'Ascension au-dessus des vents de SE, alizés de l'hémisphère sud proprement dits. Ces vents sont d'ailleurs superposés à des filets d'alizé ou de contre-alizé.

»Ces intrications de couches de vents différents se rencontrent aussi dans l'hémisphère nord. On en retrouve d'ailleurs des exemples dans les trajectoires des ballons déterminées par des visées faites à Trappes depuis une dizaine d'années, lorsque ces lancers sont faits dans les airs à fortes pressions.

»En résumé, la circulation intertropicale est bien dans ces grands traits telle qu'on l'avait supposée jusqu'ici.

»Le contre-alizé dans son ensemble règne en grandes nappes venant du SE, puis du S, SW et enfin se terminant en vent d'W à la latitude des Açores. Naturellement il y a quelques irrégularités journalières, et l'on rencontre des cas où l'alizé s'étend jusqu'à 7 ou 8 km et même plus¹ et où le contre-alizé semble faire défaut; mais ce sont là des situations transitoires ou limitées à une portion de l'air de forte pression atlantique, comme on s'en aperçoit, lorsqu'on étend les observations sur plusieurs mois de trois années différentes, ce qui permet d'établir le régime normal». — — —

Ainsi, les résultats de M. HERGESELL que le maximum atlantique soit alimenté du côté nord par un vent du NW sont confirmés. Mais, grâce à l'étendue des recherches à des hauteurs plus grandes, à des latitu-

¹ Une fois, le 8 juillet 1906 près Ténériffe on a trouvé un vent du N—NNE jusqu'à une hauteur de 11,050 mètres.

des plus méridionales et à plusieurs années, tout le régime des vents constaté par les observations des nuages a été complètement vérifié.

Quant-aux parages des Antilles, nous avons vu par les observations des nuages de M. BIGELOW que le contre-alizé à la hauteur des CiCu ou des CiSt. (7 à 8 km) souffle de l'ouest ou de l'WSW parfaitement opposé à la direction de l'alizé qui souffle là de l'E—ENE, et qu'il y a entre ces courants à la hauteur des nuages intermédiaires une couche avec des vents variables.

En décembre 1909 M. HERGESELL a exécuté aux parages des Antilles des lancers de la »Victoria Louise« de la Marine Allemande. L'empereur GUILLAUME avait payé lui-même tous les frais de l'expédition, qui embarqua sur »Victoria-Louise« dans le port de St Thomas et les résultats sont donnés dans le tableau VI hors texte.

Comme on le voit, l'alizé soufflait de l'E jusqu'à la hauteur de 7000 m. environ. Cependant la vitesse du vent était très forte 9 ^{m/sec.} jusqu'à 3000 m, mais faible et variable entre 3 et 7000 m. Au-dessus commençait le contre-alizé de l'W qui tournait au-dessus de 10000 m. peu à peu au SW. Sa vitesse était en moyenne 2 ^{m/sec.}

Pour vérifier ces résultats M. JONAS fut envoyé l'année suivante afin de faire des observations de contrôle avec des ballons pilotes. Il arriva avec »Frey« de la marine allemande le 1^{er} décembre à Curaçao, où il resta jusqu'au 9, en poursuivant ses observations le 11—18 à Port of Spain (Trinidad) et le 19—23 décembre en pleine mer autour du Trinidad.

Les résultats de M. HERGESELL furent complètement vérifiés. Jusqu'à 4000 m. le vent d'environ ESE restait constant et assez fort. De 4000 à 8000 m. les vents étaient faibles et variables et au-dessus ils venaient du NW ou du SW.

Or, les résultats tirés des observations des nuages cités plus haut sont tout à fait d'accord avec ceux trouvés par M. M. HERGESELL et JONAS.

3°. *L'hémisphère australe.*

Les officiers de quelques paquebots trafiquant les lignes Hambourg—Amérique du Sud ont lancé 1906—1908 des ballons pilotes pendant leurs voyages selon des instructions du grand établissement de la marine allemande, la *Deutsche Seewarte*. Les résultats de 65 lancers sont publiés par M. KÖPPEL¹ Ces expériences furent continuées pendant 3 années, 1909—1911 par M. H. MEYER, instructeur de navigation sur les vaisseaux d'école de la compagnie »*Norddeutsche Lloyd*» pendant de longs voyages sur l'Atlantique et le Pacifique² Le Tab. VII hors texte donne les observations faites pendant 16 lancers à une hauteur assez grande au sud de Lat. 7° N.

N:o 1—6 du tableau VII hors texte font voir le courant de l'est de la zone tropicale. N:o 7 présente les vents supérieurs du NE correspondant aux vents du SE des îles du Cap Vert. N:o 8—16 continuent des observations faites entre l'Amérique du Sud et l'Australie en plein alizé. On y voit l'alizé du SE et le contre-alizé du NW sous N:o 8, 9, 11 et 14. N:o 15 avec les vents supérieurs du SW correspond avec les vents supérieurs du NW aux environs des Açores. En deux cas, N:o 13 et 14, on a trouvé des vents extraordinaires du S—E au-dessus de 7000 m. En N:o 10, limite polaire de l'alizé, on rencontre au-dessus de 6000 m. les vents de l'ouest de la zone tempérée comme à la limite boréale de l'alizé de l'Atlantique nord. Enfin N:o 12 et 16 font voir des cas irréguliers comme nous en avons rencontré au nord de l'équateur. N:o 12 est un cas où l'alizé du SE souffle du SW avec le contre-alizé régulier du NW. Nous avons vu que TEISSERENC DE BORT trouva une fois à la latitude de Ténériffe que l'alizé du NE soufflait jusqu'à la plus grande hauteur atteinte: N:o 16 donne un exemple analogue pour l'alizé du SE à 17° S sur l'Océan Pacifique.

De ces résultats M. PERLEWITZ constate avec raison qu'*il y a une symétrie parfaite entre les directions des vents au-dessus de l'Atlantique nord et celles au-dessus de l'Atlantique sud et du Pacifique au sud de l'équateur.*

¹ Aufstiege von Pilot ballons auf deutschen Handelsschiffen 1906—1908. Annalen d. Hydrographie und maritimen Meteorologie 1910 p. 201.

² Dr. P. PERLEWITZ: Windbeobachtungen in den höheren Luftschichten des Atlantischen und südlichen Stillen Ozeans nach Pilotenballongaufstiegen von Dr. HARRY MEYER 1909—1911. — lb. 1912 p. 454.

4°. *Batavia et Samoa.*

Nous avons quelques observations faites au moyen de ballons sondes ou pilotes de Batavia, 6° Lat. S. et de Samoa, 14 Lat. S.

Les observations de Batavia du 16 septembre 1911 au 5 juillet 1912 sont publiées dans les »*Publications de la Commission internationale pour l'Aérostation scientifique 1911—1912*».

La station est sous le régime de la mousson de NW et l'alizé de SE, mais comme nous l'avons vu, les moussons sont confinées dans une couche relativement basse de l'atmosphère. Aussi voit-on du Tab. VIII hors texte qu'au-dessus de 100—500 m. il règne des vents d'E comme on aurait pu le prévoir, Batavia étant dans la zone équatoriale. Cependant le 2 mai un vent du SW régnait jusqu'à 4000 mètres où cessaient les observations. Le 11 avril on observait aussi des vents variables entre le NW et le SW au-dessus de 12 km, c'est à dire dans la stratosphère. Cette anomalie se présentait aussi à 5 et 6000 m. le 6 Juin. Du reste les vents de l'E soufflaient aux plus grandes hauteurs atteintes.

De 40 années d'observations horaires les vents de chaque mois sont en moyenne¹.

Jan.	Févr.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juill.
N 48° W	N 42 W	N 29 W	N 31 E	N 50 E	N 56 E	N 53 E
	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.	
	N 46 E	N 34 E	N 32 E	N 1 W	N 54 W	

En hiver la mousson de NW est bien visible, mais en été l'alizé du SE devient NE par des causes locales, Batavia étant situé sur la côte nord de Java.

Nous avons aussi quelques observations de *Samoa* (14° S)² des années 1909 et 1910. Mais la situation de cette île est très exceptionnelle; on pourrait dire qu'elle se trouve en hiver dans l'hémisphère australe et en été presque dans l'hémisphère boréale. En effet, l'équateur thermique qui se trouve en général au nord de l'équateur,

¹ Magnetical and meteorological observations Batavia. Append. Results of meteorol. observations Batavia 1901—1905 and 1866—1905 p. 95—140. Voir aussi Meteorol. Zeitschrift Dec. 1917 p. 424.

² Die aerologischen Ergebnisse 1909 u. 1910 am Samoa Observatorium von Dr. KURT WAGENER, Nachrichten d. K. Gesell. d. Wissenschaften zu Göttingen. 1910 u. 1911.

s'abaisse en été dans cette partie du Pacifique jusqu' au sud de 14° Lat. S. Alors Samoa est situé à peu près sur l'équateur thermique, tantôt un peu au nord, tantôt un peu au sud de celui-ci; les vents avec composante est sont, comme on doit l'attendre, dominants à toute hauteur. En hiver (mai—août) la place se trouve au contraire le plus souvent sous l'alizé de SE et les vents supérieurs ont une composante ouest. Mais les vents à la surface terrestre sont souvent irréguliers à cause des brises de terre et de mer qui sont fortement développées.

Mais les vents supérieurs, déterminés par la marche des Cirri sont aussi irréguliers. Ils ont le plus souvent une composante ouest décidée. Voici les observations des ci:

Saisons de l'hémisphère australe.

	N	NW	W	SW	S	SE	E	NE
Été .	0	1	4	2	1	2	1	0
Hiver .	0	2	5	1	3	1	0	0

Les observations faites à l'aide de cerfs-volants et de ballons pilotes dépassent rarement 3000 mètres. Nous en donnons ici quelques spécimens.

1910 1 Décembre	1910 10 Janvier	1910 18 Février	1909 20 Janvier	1909 29 Mai
0— 400 m. NE	0 m. E.	0 m. E	0 m. NW	0 m. E
400—1200 N	500 E	500 ESE	500 NW	500 E
1200—2000 NNW	1000 E	1000 E	1000 NW	1000 E
2000—3000 NW	1500 E	1125 E	1500 NW	1170 E
3000—3480 E	1780 E		2500 NW	
au-dessus CiSt W	CiSt ESE	Ci SE	Orage	CiSt WNW
1910 19 Mai	1909 2 Juin	1910 7 Juillet	1910 4 Août	1910 18 Oct.
0— 100 m S	0 m. E	0 m. E	0 m.— 300 Calme	0— 200 ENE
100— 200 Calme	500 E	500 E	300— 600 SSE	200— 1200 E
220—1870 ENE	1000 E	1000 E	600—2500 W—SW	1200—1400 ENE
1870—2750 NW	1500 E	1500 E	2500—2900 Calme	1400—2800 NE
2750—7100 NNW	1800 E	2000 S?	2900—5200 SSW—SE	2800—4100 NNE
CiCu W	Ci WNW	—	Ci SSW	—

Nous voyons que le régime des vents de Samoa n'est pas un représentant des courants d'air tropicaux. Les vents sont très changeants d'un jour à l'autre en chaque mois et à chaque hauteur. Cela

dépend de la situation de cette île entre trois régimes de vents: l'alizé de SE, le calme tropical et la mousson de l'Australie, de la Nouvelle Guinée et des îles assez grandes à l'ouest. A cause de cela les gradients de la température et de la pression de l'air sont très irréguliers, d'où provient souvent un vent de l'ouest au lieu de l'est dans les régions supérieures. Nous n'avons pas à discuter ici en détail ces anomalies locales, qui n'influencent pas les mouvements *généraux* de l'atmosphère.

5°. *Observations simultanées en Grönland et en Islande.*

Nous avons vu que la marche des Ci à l'Islande et au Grönland est en moyenne de l'E au lieu de l'W comme on devait le supposer. Quelques expériences faites par M. HERGESELL avec des ballons sondes sur mer dans ces parages ont confirmé ces observations. Pour étudier plus près cette anomalie M. DE QUERVAIN de Zurich et M. THORKELSEN, de l'institut météorologique danois, ont fait des observations simultanées, M. DE QUERVAIN à la côte ouest de Grönland entre 64° 11' et 68° 51' Lat. N et M. THORKELSEN à Akureyri sur la côte boréale de l'Islande de la fin d'Avril jusqu'au commencement de Juillet 1909. Les observations les plus complètes se trouvent dans le Tab. IX hors texte. (Godthaab 64° 11' N, Agto 67° 56' N et Godhavn sur l'île Disco 68° 51' N.)

On voit qu'à Akureyri les vents de l'E règnent souvent dans les couches inférieures, mais ils sont superposés de vents de l'W—NW dans les couches supérieures. Cela est le régime ordinaire des vents au nord du centre d'un minimum qui est ordinairement ouvert en haut. Les grands minima passent aussi en général au S—E de l'Islande.

Sur les eaux de la Baie de Baffin, presque toujours ouvertes et entourées à l'E de Grönland toujours couvert de glace et à l'W de la Terre d'Ellesmere très froide, il se forme presque toujours une *dépression presque immobile*¹ changeant seulement plus ou moins en profondeur. Sur le Grönland s'étend au contraire une langue de haute pression de la mer arctique. Mais, comme nous l'avons vu plus haut, une dépression ayant une haute pression au nord est fermée même en haut. Cela explique que les vents de l'E étaient prédominants à toute hauteur, à peu d'exceptions près, en Mai et en Juin.

¹ Une seule fois, le 5 Mai, une dépression passa de la Baie de Baffin vers l'est au-dessus de Grönland.

Nous avons vu plus haut (Tab. I hors texte) qu'à la terre d'Ellesmere, située au NW de la Baie de Baffin, les vents dominants sont les vents du N depuis le sol jusque dans la région des Cirri. Seulement en été les vents du S sont souvent dominants. Or, la Terre d'Ellesmere est située dans la partie postérieure de la dépression constante sur la Baie de Baffin. Cette dépression ressemble aux tourbillons continus qui se forment dans une baie creusée dans le rivage d'un fleuve. Ici le fleuve c'est le grand courant de l'ouest dominant sur toute la zone tempérée et que nous avons trouvé dans les hautes régions, même dans les régions polaires, Jan Mayen, Kiruna, Spitzberg, Terre de François-Joseph, etc.



IV.

Confirmation des résultats précédents par des phénomènes volcaniques.

Les 29 et 30 Mars 1875 une pluie de cendres très intense tombait en Scandinavie. Les cendres venaient du volcan Askja situé dans la partie orientale de l'Islande ($65^{\circ} 2' N$, $16^{\circ} 40' W$. Gr.) et dont la hauteur est 1000 m. environ. Il y avait une éruption très forte le 29 Mars au matin. Les cendres tombaient à 7^h du matin sur la côte orientale de l'Islande entre Seidisfjord au nord et Berufjord au sud. À 8^h du soir elles tombaient sur la côte occidentale de la Norvège entre Brönö au N et Samnanger près Bergen au S. Par conséquent elles avaient traversé la mer avec une vitesse de 23,8 m. par seconde. À Stockholm les cendres commençaient à tomber à 11^h du matin du jour suivant. Sur la côte de la Baltique elles tombaient entre Sollefteå au N et Södertelje au S. Par conséquent en traversant la Suède le vent avait une vitesse de 14,1 m. par seconde. De l'autre côte de la Baltique on n'avait pas d'observations.

Cette fois les cendres ont été transportées par les vents des couches inférieures ou intermédiaires de l'atmosphère. Par l'éruption du volcan Katmai aux îles Aléoutiennes le 6—8 Juin 1912 au contraire les produits volcaniques furent jetés dans les régions les plus hautes de l'atmosphère. Les poussières les plus fines y restèrent pendant 2—3 mois après avoir été transportées très vite successivement sur l'Amérique du Nord, l'Atlantique et l'Europe, en forme d'un éventail, jusqu'en Sibérie à l'est. Le ciel clair avait tout l'été une couleur grisâtre, et on voyait le soleil à travers de ce voile comme un disque de cuivre poli. Ce phénomène fut observé vers le sud jusqu'à Bassour dans l'Algérie australe, où il a endommagé sérieusement les travaux d'une expédition actinométrique de l'observatoire astrophysique du Smithsonian Institution, sous la direction de son Directeur, M. le Dr. C. G. ABBOT

et M. A. ÅNGSTRÖM de l'Université d'Upsala. En Septembre, quand le phénomène avait presque disparu en Europe, on observait, selon une lettre de M. NAKAMURA, au Japon des crépuscules rouges ressemblant à ceux observés après la célèbre éruption du Krakatau.

Cette éruption du Krakatau le 27 août 1883 est l'éruption la plus formidable en temps historique. Le volcan est situé sur une île dans le détroit entre Sumatra et Java près de l'équateur. A 10^h du matin une explosion énorme jeta une grande partie de l'île dans l'air à une hauteur probablement plus grande que celle de l'atmosphère. Une masse énorme de la poussière la plus fine restait suspendue dans les régions les plus hautes et causa ces crépuscules rouges qui ont duré pendant plusieurs mois. Ces crépuscules rouges faisaient le tour du monde entre les tropiques en 12 jours, c'est à dire avec une vitesse de 34,5 m. par seconde. C'est la première fois que le vent constant de l'est équatorial fut constaté tout autour de la terre.

Le long des méridiens ce phénomène s'étendait au contraire très lentement. Il n'arrivait au Cap Nord et au Grönland méridional que vers la fin de novembre et à Buenos Aires et à Valparaiso au commencement d'octobre.

Ainsi ces exemples qu'on pourrait augementer prouvent l'existence d'un courant de l'ouest à l'est dans la zone tempérée et d'un courant de l'est à l'ouest autour de l'équateur.

Conclusions générales.

De ce qui précède il faut tirer les résultats suivants trouvés sans aucune théorie préconçue directement par des observations faites selon des méthodes différentes :

1^o *Autour de l'équateur thermique il y a un grand courant de l'est à l'ouest. Il est faible en général à la surface terrestre (« Calmes équatoriaux »), mais très constant et très fort dans les couches supérieures de l'atmosphère (34 m. p. s.).*

2^o *Dans les zones tempérées il règne des courants de l'ouest à l'est.*

3^o *Dans les régions supérieures, ces courants sont déviés à droite dans l'hémisphère boréale et à gauche dans l'hémisphère australe. Ainsi le courant équatorial de l'est devient successivement SE. S. SW et W, contre-alizé de l'hémisphère boréale, et NE. N. NW et W, contre-alizé de l'hémisphère australe. Ces courants supérieurs alimentent du côté équatorial les hautes pressions des tropiques. De la même manière les courants de l'W des zones tempérées deviennent en haut resp. NW et SW et alimentent des côtés polaires les maxima tropicaux.*

4^o *De ces maxima soufflent dans les couches inférieures les alizés du NE et du SE vers l'équateur et des côtés opposés les vents de SW—W dans l'hémisphère boréale et de NW—W dans l'hémisphère australe.*

5^o *Des régions polaires les observations sont encore peu nombreuses ; par celles citées plus haut on voit cependant que les vents d'est sont fréquents à la surface terrestre au-dessus de 60°—70°, mais qu'en général des vents de NW—SW soufflent au-dessus dans les régions supérieures. Cela s'explique probablement par le passage fréquent de dépressions barométriques qui ne sont pas fermées en haut à leurs côtés polaires. Seulement, s'il existe un maximum au nord, les vents de l'E soufflent aussi en haut. Sur la Baie de Baffin, dont les eaux plus ou moins ouvertes sont entourées de pays très froids, il existe, surtout en hiver, une dépression presque immobile avec des vents de SE—E à Grönland et de N à la Terre Ellesmere.*

6^o *Plus la hauteur est grande, plus les vents de l'ouest sont constants dans les zones tempérées, dont on doit conclure que les cyclones et les anticyclones sont des phénomènes qui naissent dans les couches inférieures de l'atmosphère.*

7^o Or, un courant supérieur direct de l'équateur vers les pôles n'existe pas, ni un courant inférieur en sens inverse des pôles à l'équateur.

8^o Cependant, il y a un échange lent de l'air le long des méridiens, causé par des tourbillons cycloniques et anticycloniques continus dans les zones tempérées. En effet, chacun de ces tourbillons transporte à l'un côté de l'air du sud au nord et à l'autre du nord au sud. Du reste, comme l'air a un mouvement ascendant dans les cyclones et descendant dans les anticyclones on voit que les masses d'air des différentes latitudes deviennent peu à peu mélangées.

Tableaux.

Tab. I. Terre d'Ellesmere.

Nuages supérieurs (Ci, Ci—St).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Somme
Hiver . . .	22	4	23	6	13	1	3	2	74
Printemps . .	46,5	53,5	44,5	18,5	46	42,5	26,5	9	287
Été . . .	59,5	19	16	13,5	60,5	24	22,5	21	236
Automne . .	45,5	15,5	20	15	18	0,5	6,5	9	130
Année . . .	173,5	92	103,5	53	137,5	68	58,5	41	727

Nuages inférieurs.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Somme
Janvier . . .	8,5	1,5	5	1,5	2	0,5	2	6	27
Février . . .	15	4,5	3	12,5	14	5	1	3	58
Mars . . .	15,5	8	6	4	10	6	2	0,5	51
Avril . . .	15	7	6	13	38,5	26	4,5	3	113
Mai . . .	87	26,5	23	13,5	43	16,5	9	5,5	224
Juin . . .	58,5	17,5	20	32,5	83,5	32,5	20,5	12	277
Juillet . . .	39,5	24,5	14	22	62	9	15	36	222
Août . . .	18	11,5	7	31,5	14,5	6,5	0,5	4	93
Septembre . .	68	17,5	16,5	13	12	0	1	29	157
Octobre . .	77	14,5	8,5	7	32,5	5,5	4	2	151
Novembre . .	20	9	9	3	13	2,5	3,5	1	61
Décembre . .	0	2	0,5	2,5	1	1	0	2	9
Année . . .	421	144	118,5	156	326	111	62,5	104	1443

Vents (percents).

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Somme
Janvier . . .	31,1	7,5	3,9	3,4	9,0	1,0	1,2	5,4	37,5
Février . . .	24,5	6,9	4,0	4,6	12,2	2,5	1,8	5,5	38,0
Mars . . .	26,0	3,0	4,0	7,2	7,9	1,0	1,1	5,1	37,7
Avril . . .	24,0	9,2	4,6	4,0	8,4	3,4	1,2	5,9	39,2
Mai . . .	22,7	7,1	6,3	7,5	12,9	4,9	1,2	8,4	29,0
Juin . . .	18,9	3,7	1,6	9,5	19,4	9,2	2,6	6,0	29,0
Juillet . . .	21,9	3,2	1,1	10,6	15,7	10,9	3,6	8,6	24,2
Août . . .	27,7	5,2	2,2	7,0	17,2	4,2	2,7	7,0	31,5
Septembre . .	41,8	11,5	6,5	2,7	2,8	2,7	3,3	17,6	11,3
Octobre . .	30,7	13,2	3,6	3,9	5,4	2,7	1,2	8,1	31,0
Novembre . .	24,0	10,1	2,2	5,1	8,4	3,6	1,6	5,4	39,5
Décembre . .	26,6	6,9	2,6	4,6	7,4	2,7	1,4	6,5	41,2
Année . . .	26,2	7,4	3,5	5,8	10,6	4,8	1,9	7,4	32,4

Tab. II. Limite boréale de l'alizé.

Le 22 Août 1905. 37° 44' N. 28° 1' W. Açores.		Le 22 Sept. 1907. 32° 49' N. } 32° 27' W.		Le 4 Mai 1906. 31° 13' N. 23° 7' W.		Le 20 Sept. 1907. 31° 45' N. 27° 33' W.	
Hauteur	Direction	Hauteur	Direction	Hauteur	Direction	Hauteur	Direction
40 m	NE	5 m	N 75 E	5 m	N 40 E	5 m	N 82 W
270	N 35 E	500	N 86 E	500	N 34 E	500	N 82 W
500	N 40 E	1000	S 81 E	1000	N 45 E	750	S 66 W
880	N 40 E	1500	N 71 E	2230	N 32 E	1500	S 66 W
1000	N 70 W	2000	N 44 E	2420	N 73 E	3000	S 75 W
1285	N 60 W	4000	N 21 E	3000	N 65 E	4900	S 54 W
1500	N 15 W	4500	N 29 W	3200	N 15 E	5000	N 89 W
2000	N 25 W	5000	N 26 W	3350	S 89 E	7000	N 88 W
2500	N 20 W	6000	N 30 W	5000	S 81 E	9000	S 54 W
2600	N 20 W	8000	N 36 W	5900	S 81 E	10000	N 75 W
3000	N 45 W	10000	N 15 W	6870	N 71 E	11000	S 67 W
3500	N 45 W	13450	N 13 W	7000	S 50 W	12000	S 71 W
4000	N 50 W	13500	N 67 W	8000	S 52 W	14000	S 69 W
4150	N 45 W	14275	N 69 W	8980	S 41 W	15250	S 56 W

Tab. III. Madère—Ténériffe.

Le 16 Août 1905. 32° 38' N. 19° 14' W. Madère		Le 8 Août 1906. 32° 54' N. 23° 13' W.		Le 7 Juillet 1905. 28° 28' N. 18° 35' W. Site Croix de Ténériffe		Le 22 Février 1906. Site Croix de Ténériffe	
5 m	Calme	5 m	N 40 E	3 m	—	5 m	—
500	N 75 W	500	N 39 E	500	N	500	N 53 E
1000	N 35 E	1000	N 42 E	1000	N 80 W	1000	S 65 E
1720	N 50 E	1440	N 19 E	2000	N 5 W	2000	N 80 E
2000	N 15 W	1500	N 21 W	3000	N 45 W	2500	N 40 E
3000	W	2000	N 44 W	3500	N 65 W	3000	S 50 W
4000	N 70 W	2500	N 75 W	3525	N 70 W	3500	N 50 W
5000	N 55 W	2820	N 85 W	4000	S 60 W	4000	N 5 E
6000	S 5 W	3000	S 84 W	5000	S 60 W	5000	S 60 W
7000	N 15 E	3500	S 75 W	6000	S 60 W	6000	S 30 W
8500	N 50 W	4000	S 74 W	7000	S 80 W	7000	S 75 W
10000	S 85 W	4500	N 80 W	7500	S 75 W	8500	W
11000	N 75 W	5000	S 84 W	8000	S 70 W	10000	N 60 W
11640	S 80 W	5340	S 85 W	8460	S 65 W	13000	N 60 W

Tab. IV. Saient-Vincent. Circulation Équatoriale.

Le 17 Juillet 1905. 16° 53' N. 27° 20' W. Saint-Vincent (Iles du Cap Vert.)		Le 23 mai 1906. 8° 57' N. 27° 44' W.		Le 29 Juillet 1907. 23° 3' N. 35° 51' W.		Le 25 Juillet 1907. 10° 6' N. 39° 40' W.	
3 m	—	5 m	N 55 E	5 m	N 62 E	5 m	ENE
500	N 60 E	500	N 64 E	1000	N 73 E	500	N 68 E
1000	N 35 E	1000	S 66 E	2000	N 70 E	1000	N 77 E
2000	N 60 E	2000	S 73 E	3000	N 73 E	1500	N 88 E
3000	N 85 E	2500	S 52 E	3850	N 66 E	2000	N 78 E
3500	N 85 W	3000	S 80 E	4000	N 79 E	2500	N 78 E
4000	S 30 E	3900	S 70 E	6000	N 89 E	3000	N 84 E
6000	S 50 E	4000	S 50 E	7000	N 10 E	3500	N 88 E
6500	N 80 W	5000	S 45 E	7500	S 88 E	4000	N 86 E
7000	S 35 E	5900	S 50 E	10000	S 56 E	5000	N 85 E
8000	S 78 E	6000	S 10 E	12000	S 73 E	6000	N 84 E
9000	S 30 E	7000	S 10 E	13000	N 88 E	7000	N 79 E
10000	S 25 E	8000	S 14 E	14000	S 48 E	8000	S 87 E
10915	S 35 W	8900	S 14 E	15330	N 59 E	8390	S 88 E

Tab. V. Alizé de SE.

Le 19 Juin 1906. 1° 46' N. 24° 55' W.		Le 18 Juin 1906. 1° 1' S. 23° 47' W.		Le 4 Juin 1906. 4° 33' S. 17° 39' W.		Le 10 Juin 1906. 7° 55' S. 16° 46' N. Ascension	
5 m	S 18 E	5 m	S 35 E	5 m	S 35 E	5 m	S 60 E
1000	S 37 E	1000	S 45 E	1000	S 68 E	400	S 62 E
2000	S 22 E	1180	S 44 E	2000	S 30 E	1000	E
3500	S 89 E	1500	N 80 E	3000	S 61 E	2500	E
4000	N 84 E	2000	N 73 E	3500	N 70 E	3500	N 72 E
5000	S 81 E	3390	N 48 E	4400	N 86 E	5000	S 62 E
5500	N 80 E	3500	S 75 E	4500	S 8 W	6000	E
7000	S 70 E	4500	S 78 E	5000	S 18 W	6500	N 15 E
10000	N 80 E	5580	S 73 E	5500	Calme	7000	S 85 W
12000	S 75 E	5900	N 23 E	6000	N 76 E	7500	N 14 W
13000	N 80 E	7000	S 31 E	7000	N 78 E	9000	N 32 W
14000	N 80 E	10000	S 87 E	8140	N 55 E	11000	N 23 W
14500	S 55 E	10200	N 55 E	8500	N 10 W	13000	N 58 W
15270	S 55 E	11450	N 65 E	9460	N 63 W	15800	N 54 W

Tab. VI.

Le 6 Décembre 1909. 15°11'N. 66°58' W.Gr.	Le 7 Décembre 1909. 15°41'N. 66°57' W.Gr.	Le 8 Décembre 1909. 14°27'N. 68°40' W. Gr.	Le 9 Décembre 1909. 15°10'N. 67°31' W. Gr.
1160 m. E 39 N	1450 m. E 25 N	1160 m. E 12 N	2570 m. E 33 N
2610 E 82 N	2610 E 30 N	2900 E 35 N	4400 E 64 S
4060 E	4920 E 13 N	5510 E 7 S	4910 Calme
5510 E 7 S	5510 E 85 N	6380 E 4 N	6740 E
6960 W 78 N	6090 E 42 N	8410 E 6 S	8710 W 60 S
8410 W 40 N	6670 E 7 S	8700 Calme	10920 W 28 S
8990 W 15 S	7830 E 35 N	9280 W 13 S	11470 W 15 N
9570 W 20 N	8120 E 45 S	10730 W	12900 W
10150 W 7 S	10730 W 7 N	12470 W 24 S	15000 W 40 S
11310 W 13 S	11310 W 25 S	13630 W 37 S	16800 E 83 S
12760 W 27 S	12470 W 29 S	14790 W 21 S	
13630 W 68 S	14210 W 21 S	15370 W 19 N	
		16240 W 26 S	
		16530 E 47 S	

Tab. VI (suite).

Le 10 Décembre 1909. 15°45'N. 67°21' W.Gr.	Le 21 Déc. 1909 midi. 17°56'N. 75°58' W.Gr.	Le 21 Déc. soir. 18°8'N. 75°30' W.Gr.	Courbe moyenne des lancers aux 6-10 Déc.
2040 m. E 5 N	1080 m. E	1000 m. E	1005 m. E 22 N
3760 E 25 N	2130 E 30 N	1910 E 20 N	2955 E 31 N
7020 E 55 S	2650 E 84 N	3040 W 68 N	4355 E 6 N
8580 variable	3400 W 30 S	3720 W 40 S	5785 E
10470 W 30 N	5410 W 72 S	4200 E 79 S	7145 E 15 N
11120 W 24 N	6410 W 22 N	5960 W 82 S	8340 W 6 N
13960 W 15 S	7190 W 4 S	6730 W 12 N	10285 W 3 N
14570 variable	8520 W 11 N	7520 W 23 N	11600 W 15 S
15180 W 10 S	9840 W 23 S	8580 W 22 N	13540 W 23 S
15500 W 60 S	10010 W 20 S	9900 W 16 S	14100 W 45 S
	11440 W 25 S	11950 W 20 S	
	11970 W 18 S	12560 W 15 S	

Tab. VII. L'hémisphère australe.

1	2	3	4	5
Le 24 Avril 1906. 7° N, 29° 1/2 W. Gr.	Le 31 Oct. 1907. 4° 23' N, 29° 52' W.	Le 25 Sept. 1907. 1° 18' N. 30° 51' W.	Le 6 Janv. 1910. 0,2° N. 29,8° W	Le 6 Mars 1907. 1° S. 32° W.
0 m. NE	0 m. SSE	0 m. SE	0 m. ESE	0 m. SSE
500 N 57 E	500 S 42 E	500 S 42 E	500 S 52 E	500 S 77 E
1000 N 71 E	1000 S 36 E	1000 S 64 E	1000 S 61 E	1000 S 75 E
1500 S 69 E	1500 S 76 E	1500 N 35 E	1500 S 70 E	1500 S 76 E
2000 S 60 E	2000 N 46 E	2000 S 25 E	2000 S 82 E	2000 S 75 E
2500 S 66 E	2500 N 65 E	2500 S 38 E	2500 N 75 E	2500 S 75 E
3000 S 77 E		3000 S 30 E	3000 N 70 E	3000 S 75 E
			3500 N 58 E	
			4000 N 65 E	
			4500 S 70 E	
			5500 S 50 E	
6	7	8	9	10
Le 4 Janv. 1910. 5,2° S. 30° W.	Le 5 Janv. 1910. 2,1° S 29,6° W	Le 6 Janv. 1908. 26°22' S. 44°26' W.	Le 22 Oct. 1910. 15,3° S. 91,1° W.	Le 1 Déc. 1910. 31° S. 161° E.
0 m. SSE	0 m. E	0 m. SSE	0 m. SSE	0 m. ESE
500 S 62 E	500 N 73 E	500 S 85 E	500 S 85 E	1000 N 25 E
1000 S 76 E	1000 N 42 E	1000 N 85 E	1000 S 82 E	2000 N 25 E
1500 S 85 E	1500 N 17 E	1500 S 15 W	1500 S 82 E	3000 N 74 E
2000 E	2000 N 47 E	2000 N 80 W	2000 E	4000 N 84 E
2500 N 88 E	2500 N 35 E	2500 S 53 W	2500 S	5000 S 85 E
3000 N 75 E	3000 N 35 E	3000 N 70 W	3000 S 15 W	6000 S 63 W
3500 N 50 E	3500 N 35 E	4000 N 62 W	3500 S 35 W	7000 S 87 W
4000 N 65 E	4000 N 35 E	5000 N 54 W	4000 N 85 W	9000 W
			4500 W	10000 N 88 W
			5000 S 75 W	11000 S 72 W
			6000 S 25 W	12000 S 80 W
			7000 N 40 W	
			8000 N 40 W	
			9000 N 30 W	
11	12	13		
Le 30 Oct. 1910. 21,4° S. 114,1° W	Le 3 Nov. 1910. 26° S. 150,4° W.	Le 16 Nov. 1910. 25,3° S. 158,1° W.		
0 m. ENE	0 m. SW	0 m. SE		
1000 N 82 E	500 S 62 W	1000 S 50 E		
2000 S 70 E	1000 S 82 W	1500 N 42 E		
3000 S 28 E	1500 N 82 W	2000 N 12 E		
4000 S 15 E	2000 N 48 W	3000 N 84 W		
5000 N 80 W	2500 N 65 W	4000 N 84 W		
6000 N 75 W	3000 N 62 W	5000 N 84 W		
7000 W		6000 N 15 E		
8000 N 85 W		7000 E		
		8000 E		

Tab. VII (suite).

14	15	16
Le 17 Nov. 1910. 25,5° S. 161° W.	Le 20 Nov. 1910. 26,2° S. 170,6° W.	Le 25 Oct. 1910. 17° S. 98,2° W.
0 m. ESE	0 m. E	0 m. ESE
1000 S 68 E	1000 S 87 E	1000 S 60 E
2000 S	1500 N 72 E	2000 S 50 E
3000 W	3000 S	3000 S 36 E
4000 Calme	4000 S 45 W	4000 S 38 E
5000 W	5000 S 50 W	5000 S 48 E
6000 N 66 W	5500 S 50 W	6000 S 26 E
7000 S 38 W		7000 S 23 E
8000 S		8000 S 12 E
8500 S 13 E		8500 S 20 E

Tab. VIII.

Batavia 6° 11' S, 7^h 7^m 10^s, E Gr.

Le 3 Janvier 1912.	Le 4 Janv. 1912.	Le 11 Avril 1912.	Le 2 Mai 1912.
100 m. N 77 E	S 2 W	500 m. S 85 E	500 S 35 W
1000 N 85 E	S 79 E	N 84 E	1000 S 60 W
2000 N 89 E	S 67 E	N 88 E	2000 S 65 W
3000 S 74 E	N 88 E	S 77 E	3000 S 70 W
4000 S 73 E	S 75 E	N 77 E	4000 S 70 W
5000 S 37 E	N 85 E	S 85 E	
6000 S 60 E	S 65 E	S 47 E	
7000 S 89 E	S 87 E	E	
8000 S 31 E	S 72 E	S 68 E	
9000 S 21 E	S 66 E	S 74 E	
10000 S 8 E	S 87 E	N 77 E	
11000 S 7 E	S 75 E	N 32 E	
12000 S 72 E	S 56 W	N 21 W	Le 6 juin 1912.
13000 S 63 E	S 15 E	S 70 W	100m. S 7 E
14000 N 71 E	N 85 E	N 24 E	1000 N 67 E
15000 N 65 E	N 77 E	N 23 W	2000 N 43 E
16000 S 73 E	S 82 E	S 65 W	3000 E
17000 N 55 E	S 87 E	N 59 W	4000 N 46 E
18000 —	N 28 E	—	5000 N 45 W
19000 —	S 86 E	—	6000 S 36 W

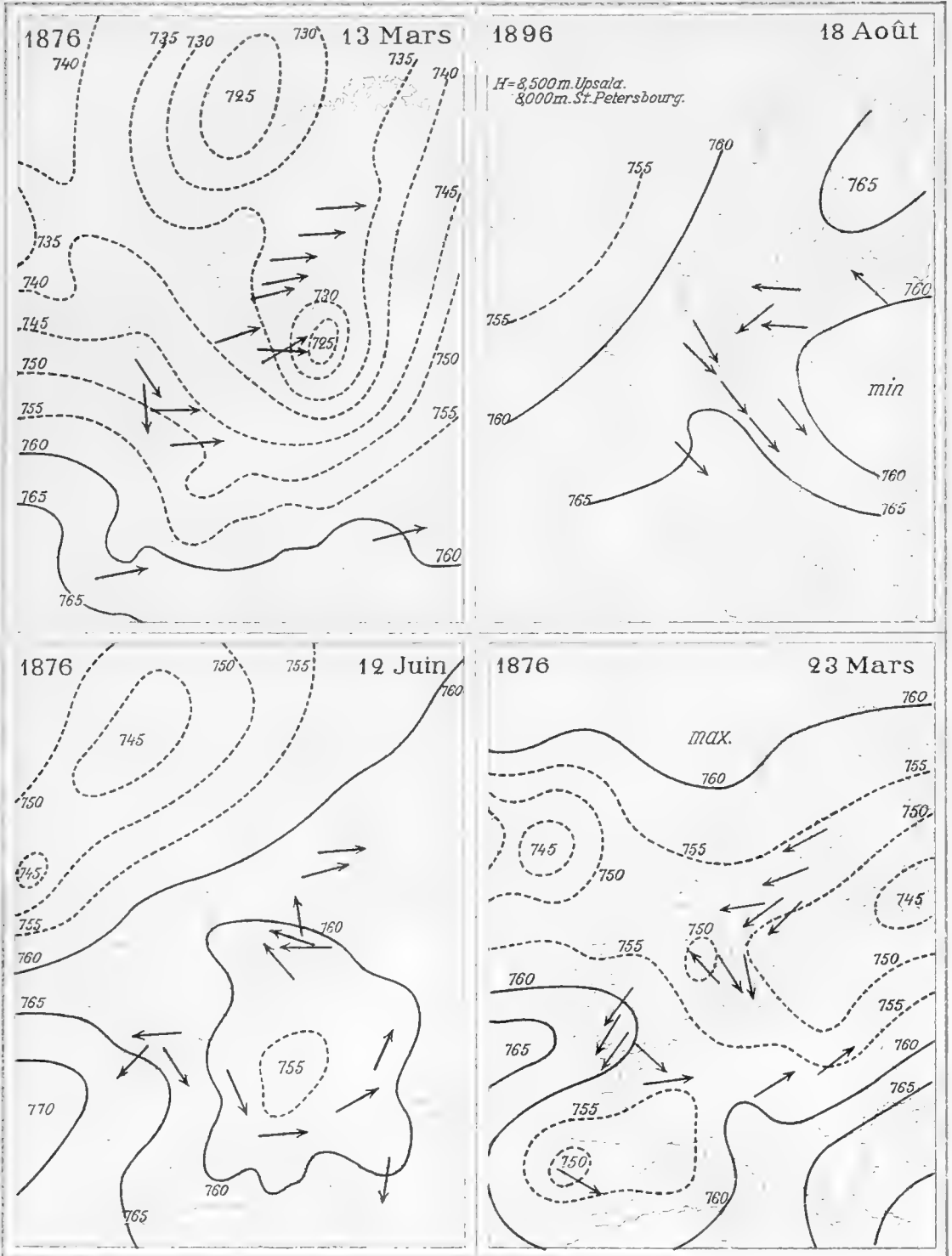
Tab. VIII (suite).

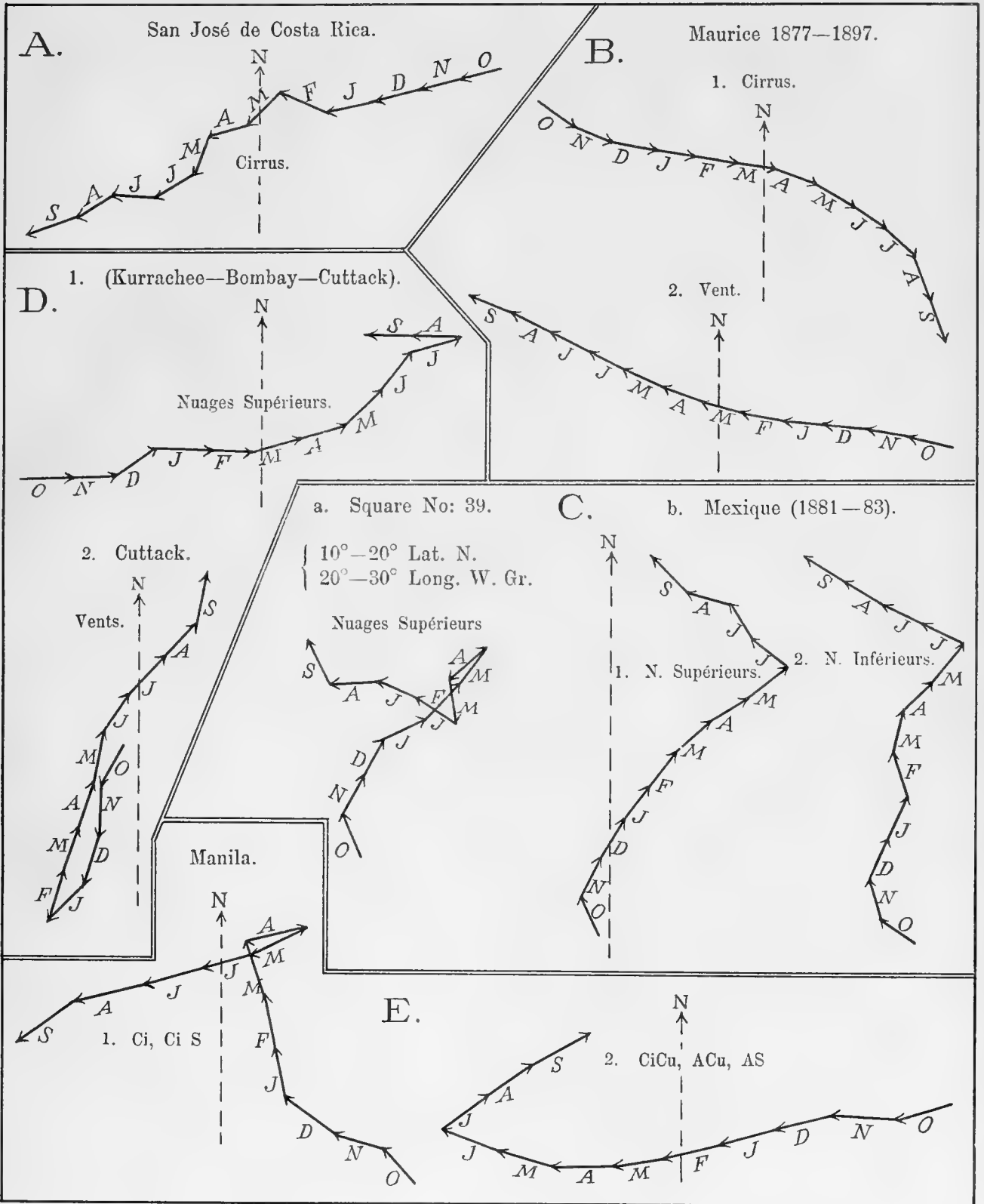
Le 5 Juillet 1912.	Le 16 Sept. 1911.	Le 8 Décembre 1911.
100 N 83 E	100 m. S 25 E	500 m. S 17 W
1000 S 88 E	500 E	1000 S 73 E
2000 N 86 E	1000 N 72 E	2000 S 72 E
3000 S 67 E	2000 S 21 W	3000 N 89 E
4000 S 70 E	3500 S	4000 N 82 E
5000 S 75 E	4000 S 17 E	5000 N 74 E
6000 N 73 E	5000 S 51 E	6000 N 82 E
7000 N 76 E	6000 N 15 E	7000 N 88 E
8000 S 82 E	7000 S 51 E	8000 S 49 E
9000 N 78 E	8000 N 82 E	9000 S 88 E
10000 N 73 E		10000 N 81 E
		11000 N 79 E
		12000 S 74 E
		13000 S 88 E

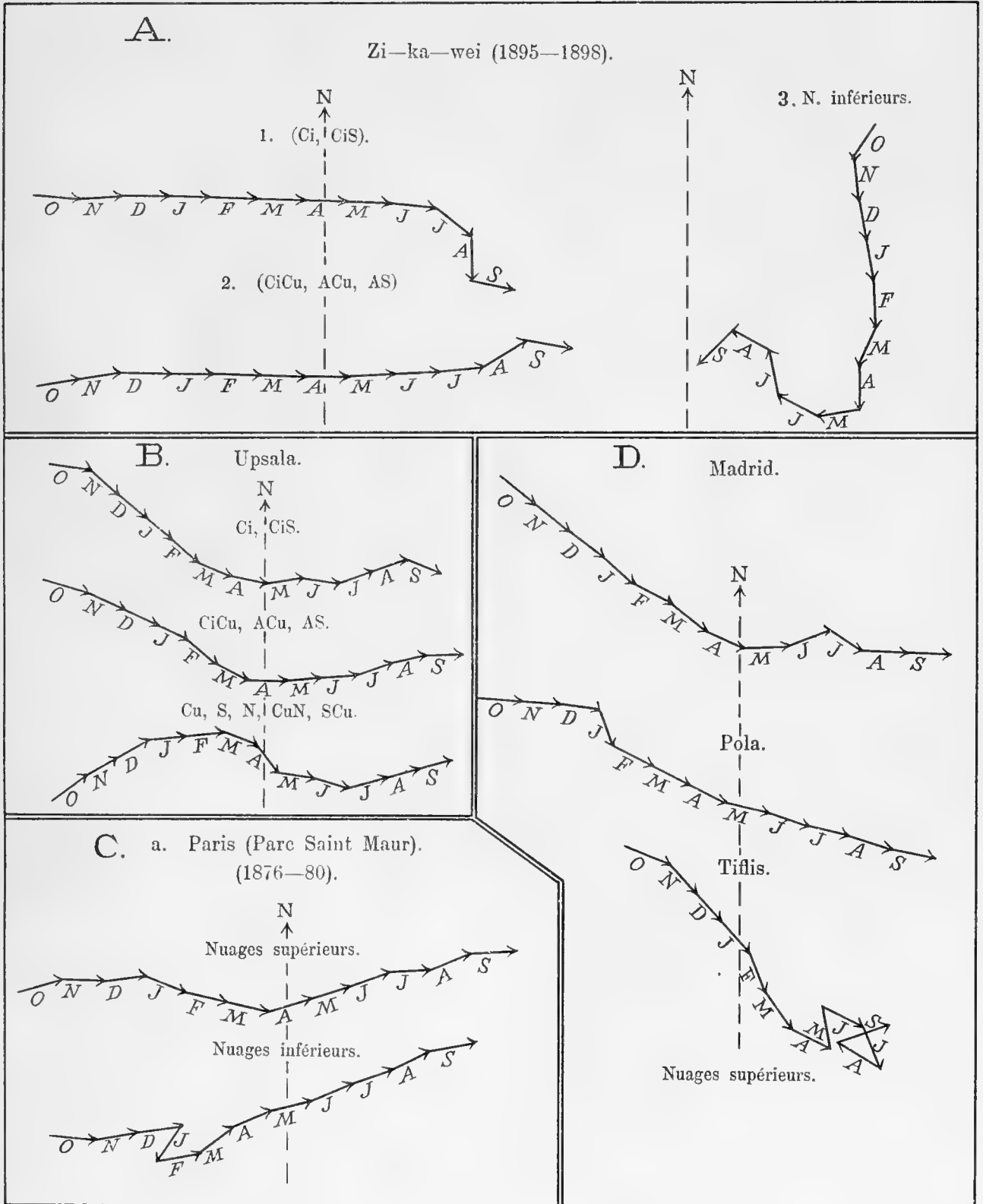
Tab. IX.

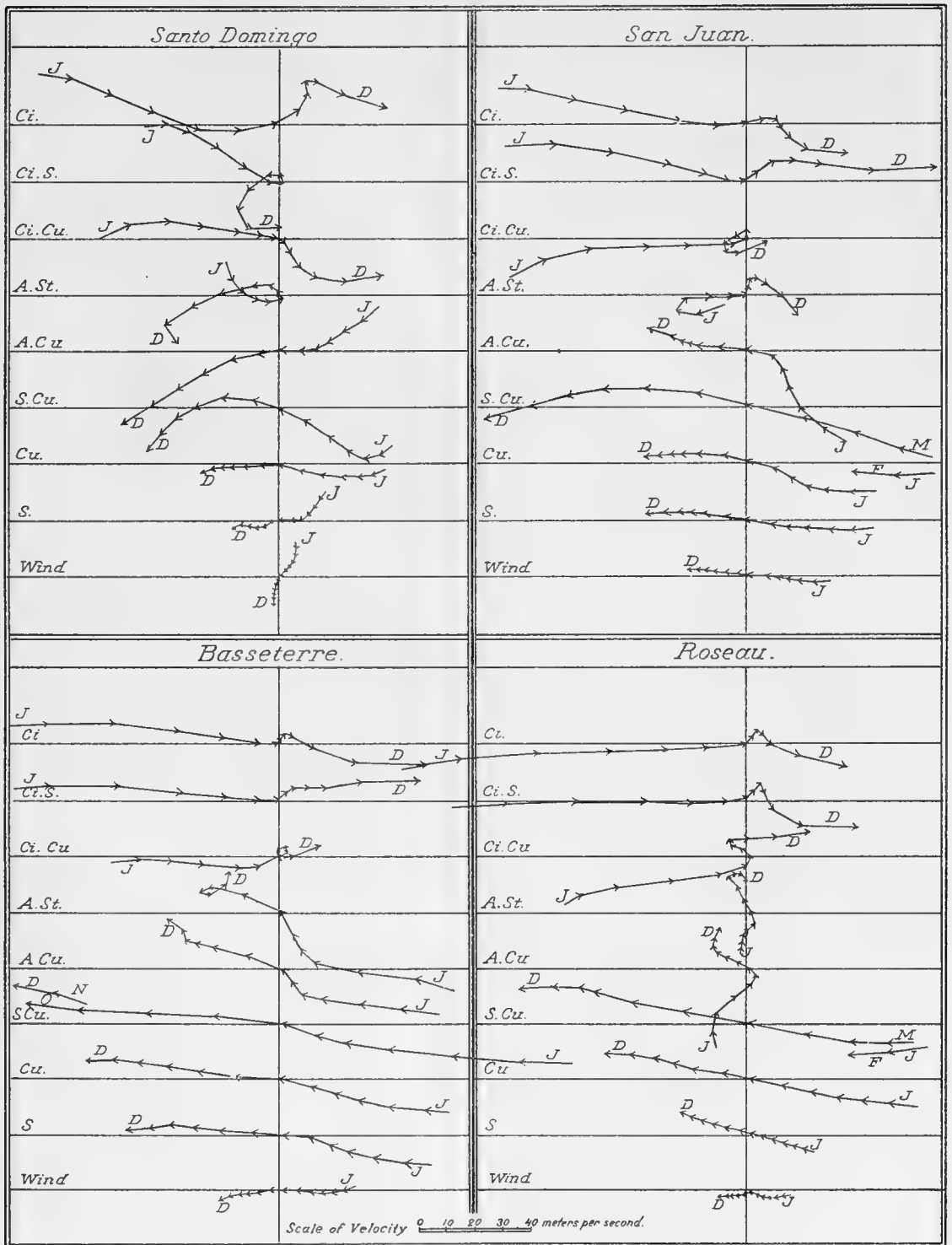
Hauteurs	Godthaab 27 Avril	Akureyri 28 Avril	Godthaab 29 Avril	Godthaab 7 Mai	Akureyri 7 Mai	Godthaab 12 Mai
0 m— 100	N 30 E	S 82 W	N	E 30° N	S 19° E	N 36° E
500— 1000	N 20 E	N 27 W	N 24° E	E	S 11 E	N 42 E
1000— 1500	N 20 E	N 16 E	N 24 E	S 30 E	S 9 E	N 28 E
2000— 2500	E 20 N	N 33 E	N 44 E	S 34 E	S 51 W	N 36 E
3000— 3500	S 33 E	N 16 E	N 29 E	S 15 E	S 60 W	E 7 N
4000— 4500	E 25 S	N 15 E	E	S 4 E	S 55 W	E 20 E
5000— 5500	E 26 S		E 18 S	S 3 E	S 57 W	S 20 E
6000— 6500	E 28 S		E 37 S	S 13 W	S 44 W	S 18 E
7000— 7500	E 20 S		E 42 S	S 9 W	S 37 W	S 20 E
8000— 8500			E 45 S	S 5 W	S 48 W	E 11 S
9000— 9500			S 25 E		S 45 W	N 38 E
11000—11500			E 39 N		S 59 W	E 30 S
13000—13500			E 44 N			
14500—15000			E 10 N			

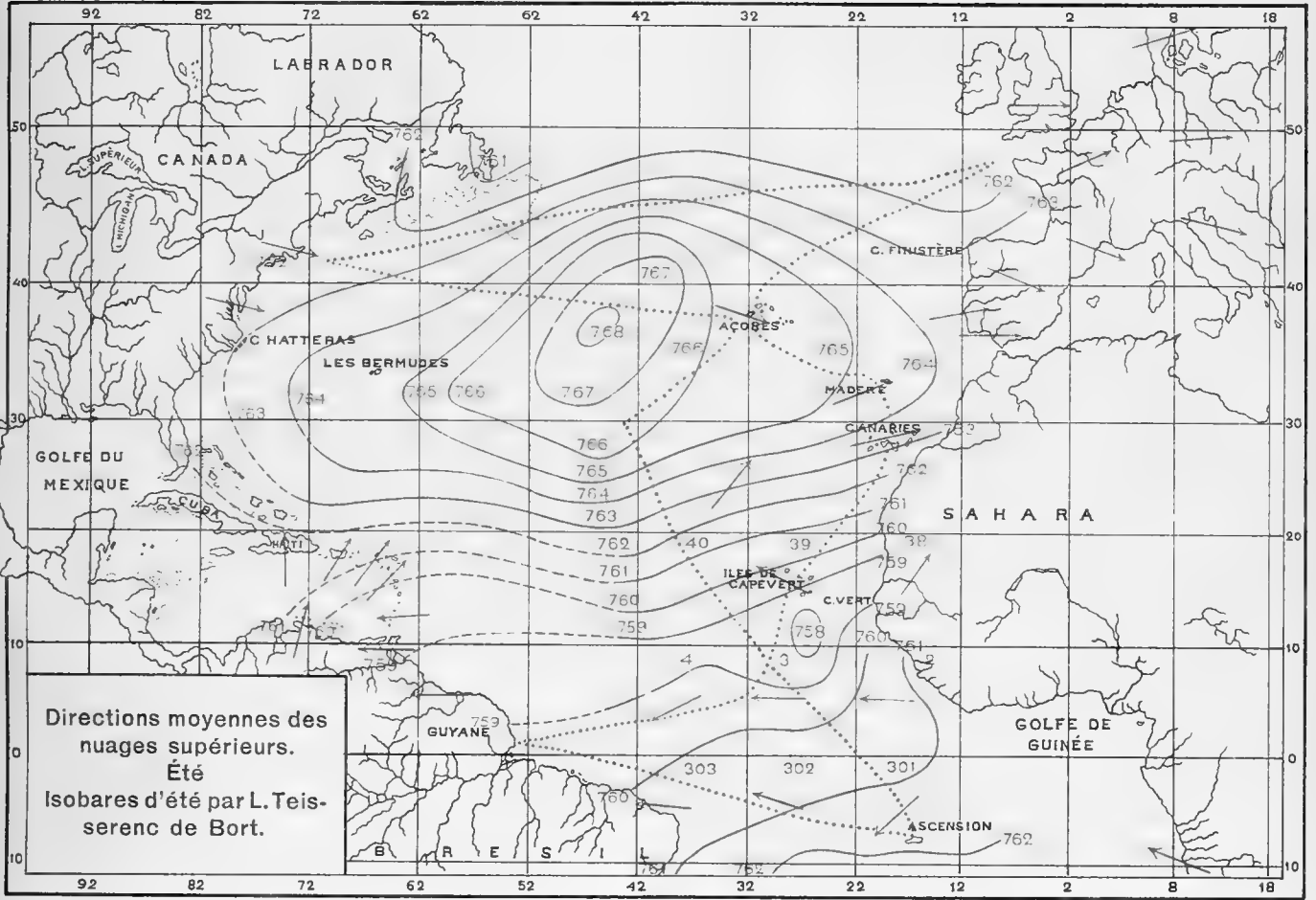
Hautturs	Akureyri 12 Mai	Aqto 29 Mai	Akureyri 29 Mai	Godthaab 21 Juin	Akureyri 21 Juin	Akureyri 22 Juin (soir)
0 m— 100	S 26 E	S 25 W	N 24 W	S 43 W	S 54 E	N 35 W
500— 1000	S 29 W	W 35 S	S 18 W	E 17 N	S 47 E	N 5 S
1000—1500	N 62 W	W 41 S	S 42 W	E 15 S	N 64 E	N 68 W
2000—2500	N 51 W	S 30 W	S 30 W	S 23 W	N 36 E	N 45 W
3000—3500	N 36 W	W 29 S	S 35 W	W 34 S	N 43 E	N 22 W
4000—4500	N 30 W	W 2 S	S 23 W	S 44 W	N 40 E	N 31 W
5000—5500	N 28 W	W 28 N	S 17 W	W 45 S	N 36 E	N 40 W
6000—6500	N 30 W	W 27 N	S 25 W	S 37 W	N 32 E	N 25 W
7000—7500	N 28 W			S 38 W	N 30 E	N 22 W
8000—8500	N 31 W			W 39 S	N 26 E	N 16 W
9000—9500				W 41 S	N 29 E	N 17 W

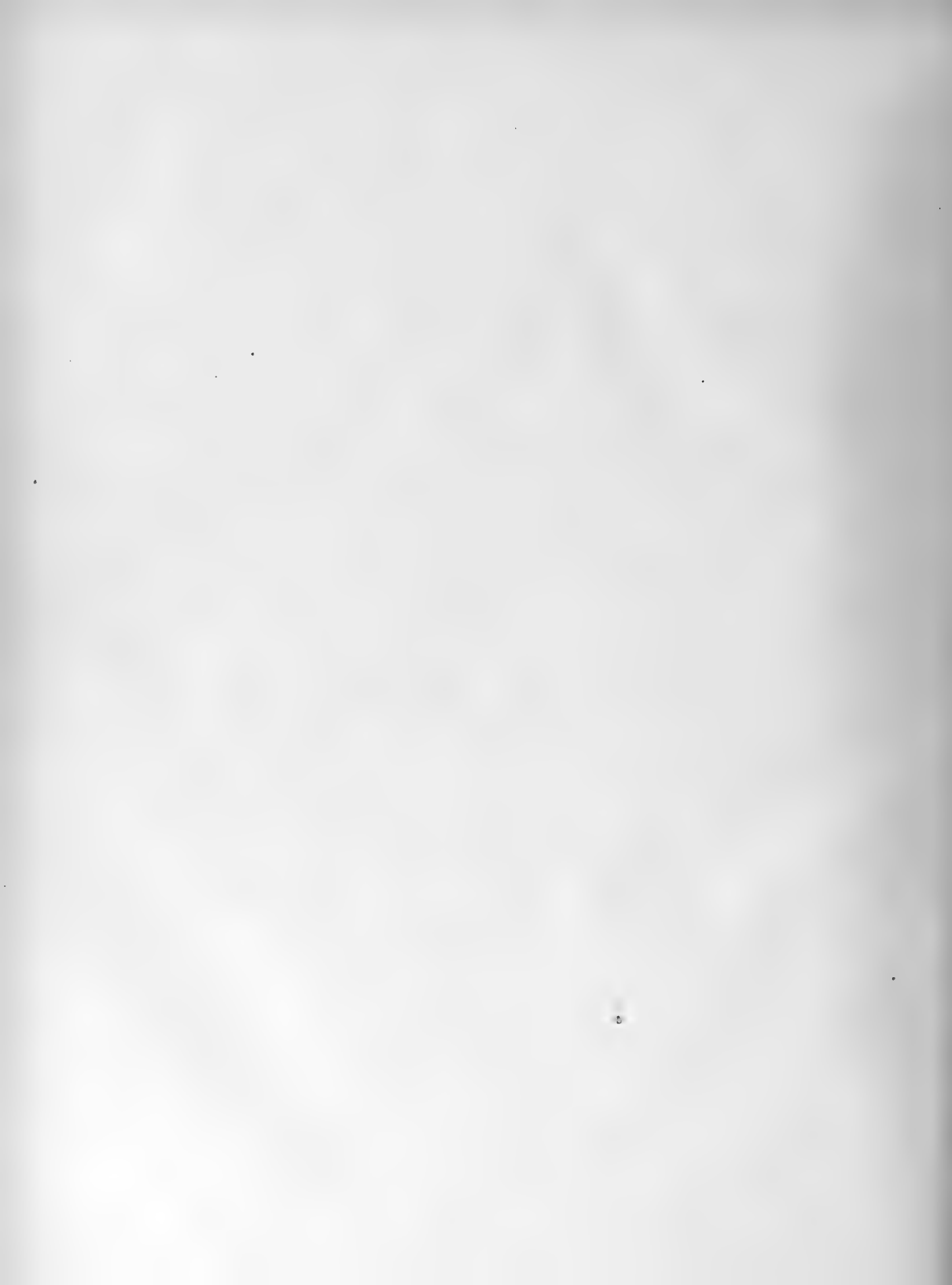


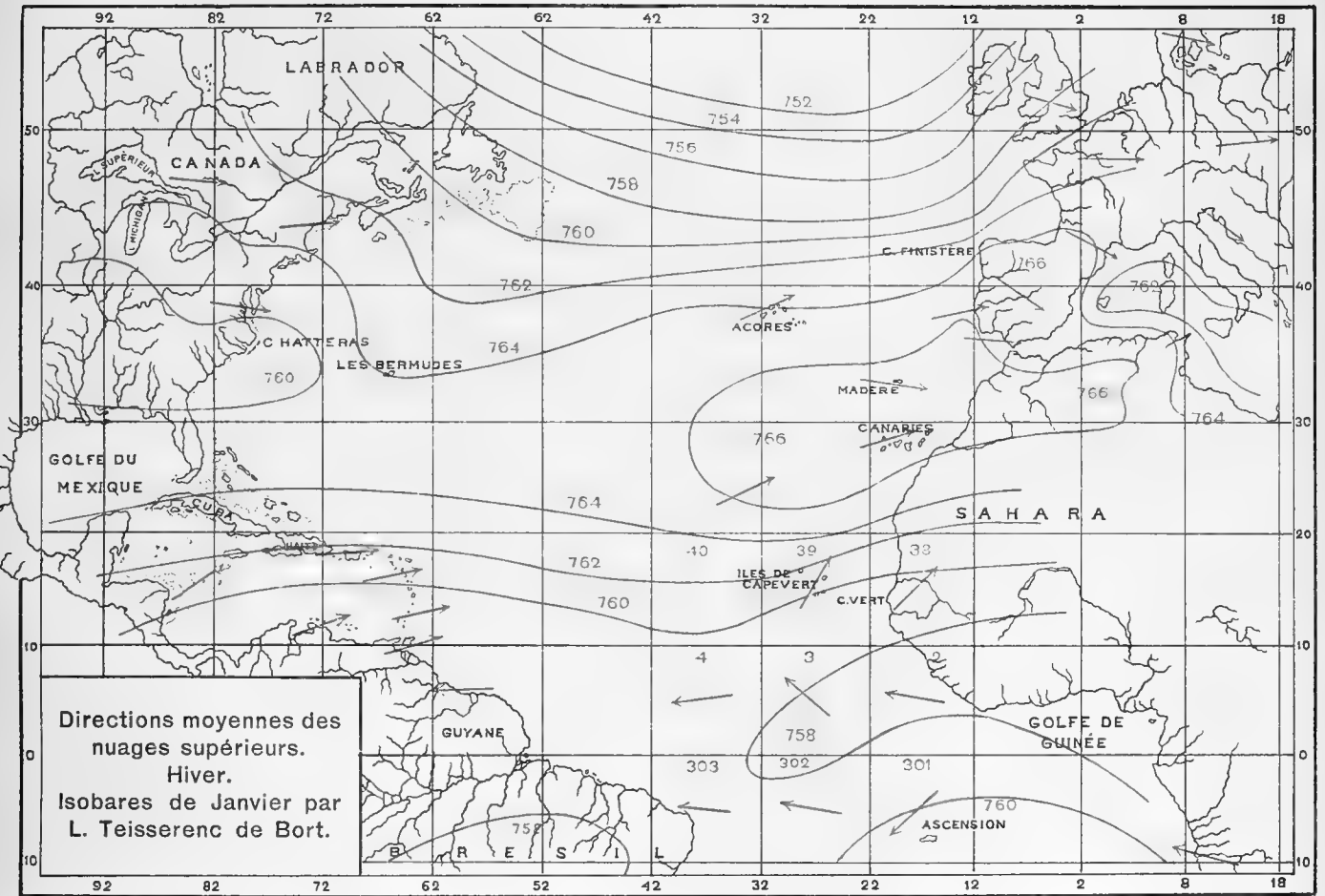












NOVA ACTA REGIAE SOCIETATIS SCIENTIARUM UPSALIENSIS

SER. IV. VOL. 5. N:o 2.

SUR
LE GROUPE DES ÉTOILES A HÉLIUM
DANS
LA CONSTELLATION D'ORION

PAR

ÖSTEN BERGSTRAND

(PRÉSENTÉ A LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES D'UPSALA LE 1 Nov. 1918)

UPPSALA

EDV. BERLINGS BOKTRYCKERI A.-B.

1919.

Table des matières.

	page
I. Introduction	1
II. Vitesses radiales	5
III. Détermination des changements des distances mutuelles apparentes . . .	10
IV. Détermination de la parallaxe du groupe	24

Sur le groupe des étoiles à hélium dans la constellation d'Orion.

I.

Introduction.

Depuis longtemps on a reconnu que la plupart des étoiles les plus lumineuses de la constellation d'Orion, p. ex. β , γ , δ , ϵ , ζ et α , appartiennent à la classe spectrale relativement peu nombreuse caractérisée par l'existence des raies de l'hélium dans le spectre (classe *I b* de VOGEL ou *B* de CANNON-PICKERING). Par ce motif, on a même souvent désigné ce type d'étoiles comme le »type d'Orion«.

Un coup d'œil sur les cartes construites par M. CAMPBELL¹ et par M. KAPTEYN² sur la distribution des étoiles à hélium suffit pour faire reconnaître que ces étoiles forment dans ladite région du ciel un groupe bien nettement défini. Ce groupe est caractérisé, d'ailleurs, par les mouvements propres excessivement faibles des étoiles y appartenant et par leurs vitesses radiales concordantes, dues principalement au mouvement du système solaire, qui est dirigé à peu près vers la région opposée du ciel.

Plusieurs de ces étoiles, situées dans la grande nébuleuse d'Orion, se sont montrées physiquement connectées à celle-ci. En outre, il résulte des travaux photographiques de MM. W. PICKERING³, BARNARD⁴

¹ Lick Observatory Bulletin, N:o 195, 1911, p. 102—103.

² Contributions from the Mount Wilson Solar Observatory, N:o 82, et *Astrophys. Journal*, vol. 40, 1914, pl. IX.

³ W. H. PICKERING, Investigations in astronomical photography (*Annals of the Astr. Obs. of Harvard Coll.*, vol. 32, part I, 1895).

⁴ E. E. BARNARD, Diffused nebulosities in the heavens (*Astrophys. Journal*, vol. 17, p. 77, 1903). Cf. E. E. BARNARD, Photographs of the Milky way and of comets etc. (*Publications of the Lick Obs.*, vol. 11, 1913).

et d'autres que la constellation d'Orion est en grande partie couverte de faibles nébulosités d'une énorme étendue, qui semblent émaner de la grande nébuleuse et qui sont évidemment connectées à plusieurs des plus lumineuses étoiles à hélium.

M. KAPTEYN¹ a montré que, dans cette région, les étoiles des types *B0—B5* sont 12 fois, et celles des types *B8* et *B9*, à peu près 6 fois plus nombreuses qu'ailleurs, et d'après les recherches de M. W. PICKERING², les faibles étoiles »bleues» sont surtout amassées dans et autour de la grande nébuleuse.

Ajoutons enfin que la vitesse radiale de la nébuleuse, déterminée avec une haute précision par KEËLER, VOGEL et M. EBERHARD, MM. BUISSON, FABRY et BOURGET, MM. WRIGHT, FROST, CAMPBELL et d'autres, est en parfait accord avec la vitesse radiale moyenne du groupe des étoiles à hélium.

Ainsi, il est hors de doute que les étoiles appartenant à ce groupe forment dans l'espace un système local, physiquement lié à la grande nébuleuse et aux autres masses nébuleuses étendues autour de celle-ci. Aussi M. KAPTEYN a-t-il donné à ce groupe le nom de »Nebula-group». Nous avons ici affaire à un groupe local, analogue à ceux des Pleïades et des Hyades si bien connus. Spécialement le groupe des Pleïades offre une analogie par cela même qu'il est composé d'étoiles à hélium, enveloppées dans de vastes nébulosités.

Cependant, le groupe d'Orion, plus dispersé que les Pleïades, marche, par rapport au système solaire, dans une direction à peu près coïncidant avec la ligne visuelle, de sorte que son mouvement propre sur le ciel devient extrêmement petit. Dans cet état des choses, il paraît peut-être insensé de chercher à déterminer la distance, sans doute très grande, de ce remarquable groupe d'étoiles, en prenant pour point de départ son mouvement. Néanmoins, en considérant la grande importance pour l'astronomie stellaire d'une connaissance de cette distance et vu la possibilité d'obtenir en même temps une détermination de la vraie position dans l'espace de la grande nébuleuse d'Orion, je n'ai pas hésité à entreprendre cette recherche, en

¹ *Astrophys. Journal*, vol. 47, 1918, p. 106.

² *Harvard College Obs. Circular* 205, 1918.

tenant compte de certaines circonstances dont je vais faire mention en quelques mots.

Vu que le groupe s'éloigne du système solaire avec une certaine vitesse, les distances angulaires mutuelles des étoiles se diminueront peu à peu: tout le groupe semblera se resserrer successivement, pour ainsi dire. Pourvu qu'il soit possible de déterminer ce resserrement, on pourra ainsi apprécier la distance moyenne des étoiles appartenant au groupe, la vitesse radiale étant bien connue par les mesures spectrographiques. Il faut donc étudier d'une manière approfondie les mouvements relatifs apparents de ces étoiles. Or, bien que plusieurs d'entre elles soient des étoiles fondamentales, dont les positions ont été déterminées par de très nombreuses observations méridiennes de haute précision, faites depuis le temps de BRADLEY jusqu'à nos jours, on n'a guère encore pu fixer avec certitude leurs mouvements propres. J'ai pensé qu'en calculant les variations des positions *mutuelles*, on parviendrait peut-être plus facilement au but. En effet, ces étoiles, voisines entre elles, étant souvent observées dans des circonstances à peu près égales (aux mêmes journées d'observation, à des distances zénithales peu différentes etc.), on pourra s'attendre à ce que les positions relatives sont en grande partie délivrées des erreurs systématiques des divers catalogues. De plus, toute l'influence de la précession est éliminée, si l'on se restreint aux distances mutuelles.

Quand même le resserrement perspectif du groupe serait trop petit pour se révéler sûrement de cette manière, la détermination des mouvements relatifs apparents serait d'une haute importance pour notre but. On ne doit que supposer que les mouvements internes dans le groupe soient aussi probables dans la direction de la ligne visuelle que dans une direction perpendiculaire à celle-ci. Les vitesses radiales relatives, comptées en kilomètres par seconde, étant connues, la comparaison de ces vitesses avec les mouvements propres relatifs pourra mener à une appréciation de la distance moyenne du groupe.

Il y a bien des années que j'ai commencé ces calculs, interrompus ensuite plusieurs fois par d'autres travaux et repris après de longs intervalles. Pendant ce temps-là plusieurs travaux ont paru, qui traitent la question des distances des étoiles à hélium et de leur distribution dans l'espace. Parmi ces travaux il faut nommer en pre-

mière ligne les recherches de MM. PLUMMER¹, CHARLIER² et KAPTEYN³. Ces savants astronomes ont attaqué le problème en sortant de points de départ tout différents; cependant les résultats auxquels ils sont parvenus sont, en ce qui concerne les étoiles en question ici, tout à fait en désaccord entre eux. Il s'est donc présenté à moi un motif de plus pour poursuivre mes calculs d'après la méthode que je viens d'esquisser.

Dans la région du ciel ici considérée les étoiles à hélium les plus lumineuses appartiennent principalement aux types $B - B 3$, tandis que les types $B 8$ et $B 9$ sont moins nombreusement représentés. Cette prépondérance des types dits plus jeunes se manifeste d'une manière si prononcée, qu'il faut la regarder comme une particularité spécialement caractéristique du groupe d'Orion (on sait bien que le cas est précisément le contraire pour les Pleïades, où les types plus avancés sont tout prépondérants). Voilà pourquoi je n'ai pris en considération que les types $B - B 5$.

¹ H. C. PLUMMER, On the motions and distances of the bright stars of the types $B - B 5$ (Monthly Notices of the R. Astr. Soc., vol. 73, n:o 3, 1913).

² C. V. L. CHARLIER, Studies in stellar statistics III: The distances and the distribution of the stars of the spectral type B (Nova Acta R. Soc. Scient. Upsal., Sér. IV, vol. 4, n:o 7, 1916).

³ J. C. KAPTEYN, On the individual parallaxes of the brighter galactic helium stars in the southern hemisphere, together with considerations on the parallax of stars in general (Contributions from the Mt Wilson Solar Obs., N:o 82 et Astrophys. Journal, vol. 40, 1914). — J. C. KAPTEYN, On parallaxes and motion of the brighter galactic helium stars between galactic longitudes 150° and 216° (Contr. Mt Wils. Sol. Obs., N:o 147, et Astroph. Journ., vol. 47, 1918).

II.

Vitesses radiales.

Le tableau I contient, d'après la carte et le catalogue de M. CAMPBELL¹, les étoiles du groupe en question appartenant aux types *B — B 5* et dont on connaît les vitesses radiales. Le nombre de ces étoiles, que j'ai prises comme objet de mes calculs, est de 15. Dans le tableau on a ajouté deux étoiles plus faibles (n:os 16 et 17), dont les vitesses radiales ont été déterminées plus tard, et l'étoile ι Orion (n:o 18), laquelle est du type spectral *Oe 5*, mais qui est indubitablement liée d'une manière intime à la grande nébuleuse. Les colonnes 2—7 contiennent le numéro d'après le »Preliminary General Catalogue» de L. Boss, la désignation, la grandeur, l'ascension droite et la déclinaison pour 1900,0, le mouvement propre en ascension droite et en déclinaison de chaque étoile selon Boss, la colonne 8, le type spectral, et la colonne 9, la vitesse radiale observée. Pour ce qui est de cette dernière, je renvoie aux notes données ci-après.

Tableau I.

N:o	Boss P.G.C.	Désignation	Gr.	α 1900	δ 1900	μ	μ'	Sp	<i>V</i>
1	1147	π^4 Orion	3,8	4 ^h 45 ^m ,9	+ 5 ^o 26'	— 0 ^s ,0003	— 0 ^{''} ,006	B 3	+ 23 ^{km} ,3
2	1159	π^5 »	3,8	49,0	+ 2 17	— 0,0002	— 0,003	B 3	+ 24,2
3	1262	τ »	3,7	5 12,8	— 6 57	— 0,0011	— 0,007	B 5	+ 18
4	1277	λ Lièvre	4,3	15,0	— 13 17	0,0000	+ 0,003	B 2	+ 21
5	1284	σ Orion	4,7	16,7	— 0 29	— 0,0003	— 0,003	B 3	+ 28
6	1301	η »	3,4	19,4	— 2 29	+ 0,0004	+ 0,001	B 1	(+ 35,5)
7	1303	γ »	1,6	19,8	+ 6 16	— 0,0005	— 0,019	B 2	+ 18
8	1314	ψ^2 »	4,7	21,6	+ 3 0	— 0,0003	— 0,013	B 2	+ 12,0
9	1339	δ »	2,2	26,9	— 0 22	+ 0,0001	— 0,003	B	+ 18,7
10	1340	ν »	4,8	27,1	— 7 23	+ 0,0002	— 0,012	B	+ 17,0

¹ W. W. CAMPBELL, On the motions of the brighter Class *B* stars (Lick Observatory Bulletin, n:o 195, 1911).

N:o	Boss P.G.C.	Désignation	Gr.	α 1900	δ 1900	μ	μ'	Sp.	V
11	1362	— Orion	4,8	5 ^h 30 ^m ,1	— 6° 5'	+ 0 ^s ,0002	+ 0",006	B 1	+ 29 ^{km}
12	1370	ε »	1,6	31,1	— 1 16	0,0000	— 0,002	B	+ 24,5
13	1398	ζ »	1,7	35,7	— 2 0	+ 0,0005	— 0,007	B	+ 17,5
14	1399	— »	5,1	35,8	— 1 11	— 0,0008	— 0,008	B 3	+ 26,1
15	1435	π »	2,1	43,0	— 9 42	+ 0,0002	— 0,005	B	+ 21
16	1295	— »	5,8	18,6	— 0 15	— 0,0010	— 0,001	B 3	+ 22,4
17	1332	n^1 »	5,7	26,0	+ 3 13	+ 0,0004	— 0,007	B 3	+ 21,6
18	1366	ι »	2,9	30,5	— 5 59	+ 0,0002	— 0,004	Oe 5	+ 21,5

Notes concernant les vitesses radiales.

N:o 1. Étoile double spectroscopique, découverte par MM. CURTIS et REESE (Lick Obs. Bull., 31, et Publ. Astr. Soc. Pac., 15, 1903) et par MM. FROST et ADAMS (Astroph. Journ., 17, 1903). L'orbite déterminée par M. BAKER (Publ. Allegheny Obs., 1, 1909) donna la vitesse $+ 23,27 \pm 0,25$.

N:o 2. Ét. d. sp., découverte par MM. FROST et ADAMS (Astroph. J., 17, 1903). L'orbite déterminée par M. LEE (Astroph. J., 38, 1913) donna $+ 24,20 \pm 0,70$.

N:o 3. Ét. d. sp., découverte par M. FROST (Astroph. J., 25, 1907). J'ai adopté la vitesse du centre de gravité, estimée par M. CAMPBELL (Lick Obs. Bull., 195, 1911) et désignée par lui comme incertaine.

N:o 4. La vitesse adoptée est déterminée par M. CAMPBELL (l. c.).

N:o 5. Ét. d. sp. d'après M. CAMPBELL (l. c.). La vitesse adoptée est celle du centre de gravité, estimée par M. CAMPBELL et désignée comme incertaine.

N:o 6. Ét. d. sp., découverte par MM. FROST et ADAMS (Astroph. J., 15, 1902). La détermination de l'orbite, faite par M. ADAMS (Astroph. J., 17, 1903), donna avec un haut degré de précision la valeur $+ 35,5$ pour la vitesse du système. D'après les recherches de M. BEAL, de l'Observatoire d'Allegheny, la vitesse du système a subi un changement de 25^{km} dans l'espace de temps 1902—1915 (communication à l'American Astronomical Society; voir Astroph. J., 47, p. 335, 1918). L'étoile appartient à celles qui présentent des raies de calcium anormales. Soit que le changement de vitesse soit dû aux conditions phy-

siques et mécaniques du système ou qu'il soit causé par l'influence d'un troisième corps, cette vitesse est inapplicable à notre but et doit être exclue. — Il s'agit ici de la composante plus lumineuse d'une étoile double visuelle. Les observations méridiennes, au contraire, se rapportent au centre du système visuel.

N:o 7. Ét. d. sp., découverte par M. FROST (Astroph. J., 31, 1910). MM. FROST et ADAMS (Publ. Yerkes Obs., II, 1903) avaient trouvé la vitesse +18,0, plus tard un peu modifiée par M. FROST (l. c.) en appliquant certaines corrections aux longueurs d'onde adoptées pour les raies de silicium. La valeur adoptée ci-dessus est celle déduite par M. CAMPBELL (l. c.) de 4 observations de l'Observatoire Lick et de 13 observations de l'Observatoire Yerkes; elle est désignée comme incertaine.

N:o 8. Ét. d. sp., découverte par M. FROST (Astroph. J., 17, 1913). La détermination de l'orbite, faite par M. PLASKETT (Astroph. J., 28, 1908), donna la valeur +12,015 \pm 1,177.

N:o 9. Ét. d. sp., découverte par M. DESLANDRES (C. R., 130, 1900). L'orbite a été déterminée pour la première fois par M. HARTMANN (Astroph. J., 19, 1904), qui a trouvé pour la vitesse la valeur +23,1. M. JORDAN (Publ. Allegh. Obs., III, 1914) a fait subir aux observations de M. HARTMANN une réduction renouvelée, et il en a tiré la valeur +22,85. Sortant d'une nouvelle détermination de l'orbite, basée sur les observations de l'Observatoire d'Allegheny, M. JORDAN (l. c.) a trouvé la valeur +15,20. Enfin une troisième orbite, calculée par M. CURTISS (Astroph. J., 42, p. 135, 1915), donna la valeur +20,15. Pour cette étoile on déduit des mesures des raies de calcium une vitesse constante de +18,7 d'après M. JORDAN (l. c.). J'ai adopté cette dernière valeur, qui est en bon accord avec la moyenne des valeurs tirées des déterminations de l'orbite.

N:os 10 et 11. Les vitesses sont déterminées par M. CAMPBELL (l. c.).

N:o 12. Ét. d. sp., découverte par M. FROST (Astroph. J., 31, 1910). La vitesse adoptée ici est celle du centre de gravité, déterminée par M. CAMPBELL (l. c.) et désignée comme incertaine.

N:o 13. Pour cette vitesse VOGEL et SCHEINER (Publ. Astroph. Obs. Potsdam, VII, 1892) avaient trouvé la valeur +14,8, et M. FROST

(Publ. Yerkes Obs., II, 1903) + 18,3. La valeur adoptée ici est celle donnée par M. CAMPBELL (l. c.).

N:o 14. Ét. d. sp., découverte par M. FROST (Astroph. J., 23, 1906). La détermination de l'orbite, faite par MM. PLASKETT et HARPER (Astroph. J., 30, 1909), donna pour la vitesse du système la valeur + 26,12.

N:o 15. D'après MM. FROST et ADAMS la vitesse est de + 18,7 (Publ. Yerkes Obs., II, 1903, avec des corrections, Astroph. J., 31, 1910). Des observations de l'Observatoire Yerkes, combinées avec 6 observations de l'Observatoire Lick, M. CAMPBELL (l. c.) a déduit la valeur adoptée ci-dessus.

N:os 16 et 17. Les vitesses sont déterminées à l'Observatoire de Mount Wilson par M. ADAMS (Astroph. J., 42, et Contributions Mt Wilson Solar Obs., 105, 1915).

N:o 18. Ét. d. sp., découverte par MM. FROST et ADAMS (Astroph. J., 18, 1903). La détermination de l'orbite, faite par M. PLASKETT (Astroph. J., 28, 1908), donna pour la vitesse du système la valeur + 21,34 ± 0,856. Une réduction nouvelle, faite par MM. PLASKETT et HARPER (Astroph. J., 30, 1909), donna + 21,532.

Il est remarquable qu'il n'y ait pas moins de 11 parmi ces 18 étoiles, qui sont des étoiles doubles spectroscopiques. De plus, trois de ces étoiles doubles spectroscopiques (n:os 6, 8 et 18) et deux des autres (n:os 13 et 17) ont des compagnons visuels. Ainsi, au moins 13 des étoiles en question, ou 72 pour cent, sont des étoiles doubles.

L'étoile 6 ayant été exclue (voir la note ci-dessus), la valeur moyenne des vitesses radiales observées devient

$$V_m = + 21,4^{km} \pm 0,7^{km}.$$

On aura la vitesse radiale vraie en appliquant à la vitesse observée, V , la correction constante

$$K = - 4,7^{km},$$

valable pour les étoiles des classes spectrales $B - B 5^1$. Ainsi, on aura pour la vitesse radiale moyenne du groupe la valeur

$$q_m = + 16,7^{km} .$$

Selon M. CAMPBELL² les meilleurs déterminations de la vitesse de la grande nébuleuse d'Orion ont donné en moyenne la valeur $+ 17,4^{km}$, qui est en bon accord avec la valeur trouvée de q_m .

¹ Voir CAMPBELL, On the motions of the brighter Class B stars (Lick Obs. Bull., n:o 195, 1911), p. 123.

² l. c., p. 105.

III.

Détermination des changements des distances mutuelles apparentes.

Pour la détermination des changements des distances mutuelles dans le groupe, j'ai parcouru tous les catalogues d'étoiles très nombreux qui m'ont été accessibles. Dans plus de 70 de ces catalogues j'ai trouvé indiquées des positions pour une ou plusieurs des 15 étoiles considérées. Ainsi j'ai trouvé que quelques-unes de ces étoiles, surtout les n:os 7, 9, 12, 13 et 15, ont été très largement observées, tandis que quelques autres, p. ex. les n:os 11 et 14, ne figurent que dans un nombre de catalogues assez restreint.

Or, quant aux distances à calculer, on peut les choisir de plusieurs manières différentes. Cependant, il faut naturellement prendre les combinaisons de telle sorte qu'on puisse utiliser pour la détermination des changements le plus grand nombre de catalogues possible. Je me suis enfin décidé à prendre l'étoile δ Orion comme point de repère commun pour toutes les distances à calculer. Pour cette étoile, située à peu près au centre du groupe, on dispose des positions les plus exactes et les plus nombreuses, et en comptant toutes les distances par rapport à δ Orion, le nombre des catalogues qu'il faut exclure, se réduit à un minimum.

Quoique l'influence des erreurs systématiques des divers catalogues soit en grande partie éliminée dans les coordonnées relatives, j'ai réduit toutes les positions au système du »Preliminary General Catalogue» de Boss, pour augmenter autant que possible la précision des résultats. Les corrections systématiques nécessaires à cette réduction ont été déterminées d'après les formules

$$\begin{cases} d\alpha = \Delta\alpha_a + \Delta\alpha_\delta + \Delta\alpha_M \\ d\delta = \Delta\delta_a + \Delta\delta_\delta, \end{cases}$$

les quantités $A\alpha_\alpha$, $A\alpha_\beta$, ... étant calculées à l'aide des tables de Boss¹. De même, tous les poids ont été calculés d'après le système de Boss. Quelques catalogues qui n'ont pas contribué à ce système (la plupart en sont de peu de valeur) ont été exclus. Ce n'est que les catalogues très importants de l'Observatoire de Greenwich de 1900 qui ont été conservés, sans corrections systématiques. Leurs poids ont été calculés d'après les mêmes principes que ceux du catalogue de Greenwich de 1890.

Je vais énumérer ci-après les catalogues utilisés. Au nom de chaque catalogue on a ajouté l'équinoxe auquel il se rapporte et, entre parenthèses, l'abréviation employée dans ce qui suit, en général la même qui a été employée par Boss. Enfin, j'ai indiqué les numéros de celles de nos étoiles que contient chaque catalogue, sauf n:o 9, qui y entre partout.

- BRADLEY-AUWERS 1755 (Br 1755): 1—8, 10, 12, 13, 15;
 PIAZZI 1800 (Pi 00): 1—8, 10, 12, 13, 15;
 POND-AUWERS 1815 (Grw 15): 7, 8, 12, 13;
 STRUVE 1830 (Dpt 30): 13;
 HENDERSON 1833 (Cape 33): 7, 12, 13, 15;
 TAYLOR-DOWNING 1835 (Madr 35): 1—8, 10, 12, 13, 15;
 ROBINSON 1840 (Arm 40): 1—5, 7, 11, 13;
 HENDERSON-HALM 1840 (Edinb 40): 1—8, 10, 12, 13, 15;
 Greenwich 1840 (Grw 40): 7, 12, 13;
 JOHNSON 1845 (Radcl 45): 3, 6, 10, 12;
 Greenwich 1845 (Grw 45): 12;
 Poulkova 1845 (Pulk 45): 2, 3, 6, 7, 12, 13, 15;
 Paris 1845 (Paris 45): 2—5, 7, 8, 12, 13, 15;
 Greenwich 1850 (Grw 50): 1, 3, 4, 7, 12, 15;
 GILLISS 1850 (Stgc 50): 12;
 Poulkova 1855 (Pulk 55)²: 4, 5, 8, 10, 11, 14;
 Paris 1860 (Paris 60): 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12—15;
 Greenwich 1860 (Grw 60): 2, 4, 6, 7, 12, 13, 15;
 YARNALL 1860 (Wash 60): 4, 7, 12, 13, 15;
 Radcliffe 1860 (Radcl 60): 3, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15;
 Greenwich 1864 (Grw 64): 8, 10—13, 15;
 Cape 1865 (Cape 65): 3, 4, 5, 12, 15;
 QUETELET 1865 (Brux 65): 1, 2, 3, 5, 6, 7, 12—15;

¹ L. BOSS, Preliminary General Catalogue, Appendix III.

² Afin de pouvoir utiliser cet important catalogue j'ai pris pour l'étoile 9 la moyenne entre les catalogues de 1845 et de 1865.

- Poulkova 1865 (Pulk. 65) : 1, 2, 3, 6, 7, 12, 13, 15;
 Greenwich 1872 (Grw 72) : 7, 12, 13, 15;
 Paris 1875 (Paris 75) : 2-5, 7, 8, 10-15;
 GOULD 1875 (Cord 75) : 3-6, 10-15;
 ROGERS 1875 (Harv 75) : 1, 3, 8, 12;
 ROMBERG 1875 (Pulk 75) : 1, 2, 3, 6, 7, 11, 12, 13, 15;
 POGSON 1875 (Madr 75) : 1-8, 10, 12, 13, 15;
 EASTMAN 1875 (Wash 75) : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 12, 13, 15;
 Greenwich 1880 (Grw 80) : 1-6, 12-15;
 Cape 1885 (Cape 85) : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 15;
 Poulkova 1885 (Pulk 85) : 1, 2, 3, 6, 7, 12, 13, 15;
 Strassbourg 1885 (Strassb 85) : 1, 2, 3, 6, 7, 12, 15;
 Greenwich 1890 (Grw 90) : 1-8, 10, 12, 13, 15;
 Madison 1890 (Madn 90) : 1, 2, 3, 7, 12, 15;
 KÜSTNER 1890 (Berl 90) : 1, 2, 3, 7, 15;
 Cape 1890 (Cape 90) : 1, 2, 3, 6, 7, 12-15;
 STONE 1890 (Radel 90) : 2-6, 8, 10-15;
 BATTERMANN 1895 (Berl 95) : 2, 7, 15;
 KÜSTNER 1900 (Bonn 00) : 1, 2, 7, 12;
 TUCKER 1900 (Lick 00) : 3, 5, 6, 10, 12, 13, 15;
 Greenwich mer. 1900 (Grw 00 m) : 1, 2, 3, 6, 7, 12, 13, 15;
 Greenwich altaz. 1900 (Grw 00 a) : 1-7, 12, 13, 15.

Tous les calculs préparatoires, mentionnés ci-dessus, étant terminés, on a pour chaque étoile une série de positions valables pour diverses époques et réduites au système de Boss, avec leurs poids. En désignant l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile δ Orion (n:o 9) par α_0 , δ_0 , on aura pour le calcul des distances s et des angles de position ψ , par rapport à cette étoile, les formules suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Delta\alpha = \alpha - \alpha_0 \\
 \Delta\delta = \delta - \delta_0 \\
 \delta_m = \frac{1}{2}(\delta + \delta_0) \\
 \sin \frac{1}{2}s \cdot \sin \psi = \sin \frac{1}{2}\Delta\alpha \cdot \cos \delta_m \\
 \sin \frac{1}{2}s \cdot \cos \psi = \cos \frac{1}{2}\Delta\alpha \cdot \sin \frac{1}{2}\Delta\delta .
 \end{array} \right.$$

Ensuite, soient $p_\alpha, p_\delta; p_{\alpha_0}, p_{\delta_0}$ les poids de $\alpha, \delta; \alpha_0, \delta_0$. On pourra alors, en considérant que les déclinaisons sont petites, calculer le poids p de la distance s d'après les formules

$$\left\{ \begin{aligned} p_{\Delta\alpha} &= \frac{p_\alpha \cdot p_{\alpha_0}}{p_\alpha + p_{\alpha_0}} \\ p_{\Delta\delta} &= \frac{p_\delta \cdot p_{\delta_0}}{p_\delta + p_{\delta_0}} \\ p &= \frac{p_{\Delta\alpha} \cdot p_{\Delta\delta}}{p_{\Delta\alpha} \cos^2 \psi + p_{\Delta\delta} \sin^2 \psi} \end{aligned} \right.$$

Le tableau II comprend pour chaque étoile les résultats auxquels je suis parvenu par ces calculs. La colonne 1 renvoie aux catalogues utilisés, les colonnes 2 et 3 donnent les époques¹ et les poids p , un peu arrondis, la colonne 4, les valeurs des distances s , déduites des observations de la manière indiquée ci-dessus, la colonne 5, les valeurs de s calculées à l'aide des formules données ci-après; la dernière colonne enfin renferme les écarts entre les deux valeurs de s dans le sens observation—calcul.

Tableau II.

Cat.	Époque	p	$s-(s)$ (obs.)	$s--(s)$ (calc.)	O.—C.
<i>Étoile 1.</i>					
$(s) = 11^0 46' 19''$					
Br 1755	1755	0,2	+ 0",92	— 0",03	+ 0",95
Pi 00	1800	0,05	— 1,90	+ 0,26	— 2,16
Madr 35	1832	0,2	— 0,36	+ 0,47	— 0,83
Arm 40	1843	0,05	+ 3,18	+ 0,54	+ 2,64
Edinb 40	1842	0,2	+ 1,54	+ 0,53	+ 1,01
Grw 50	1851	0,5	+ 0,76	+ 0,59	+ 0,17
Brux 65	1864	0,5	+ 0,38	+ 0,67	— 0,29
Pulk 65	1868	2,0	+ 0,60	+ 0,70	— 0,10
Harv 75	1874	1,0	+ 0,82	+ 0,74	+ 0,08
Pulk 75	1877	1,0	— 0,08	+ 0,76	— 0,84
Madr 75	1877	0,2	— 0,86	+ 0,76	— 1,62

¹ Dans quelques cas, où le catalogue ne donne pas les époques des observations, on a admis l'équinoxe comme coïncidant avec l'époque moyenne.

Cat.	Époque	p	$s-(s)$ (obs.)	$s-(s)$ (calc.)	O.—C.
Wash 75	1879	1,0	+ 0',98	+ 0',77	+ 0',21
Grw 80	1882	1,0	+ 1,10	+ 0,79	+ 0,31
Cape 85	1882	1,0	+ 0,96	+ 0,79	+ 0,17
Pulk 85	1885	2,0	+ 0,66	+ 0,81	- 0,15
Strassb 85	1886	2,0	+ 0,78	+ 0,82	- 0,04
Grw 90	1893	2,0	+ 1,38	+ 0,86	+ 0,52
Madr 90	1889	2,0	+ 0,76	+ 0,84	- 0,08
Berl 90	1889	1,0	+ 1,08	+ 0,84	+ 0,24
Cape 90	1888	0,5	- 0,32	+ 0,83	- 1,15
Bonn 00	1895	2,0	+ 0,72	+ 0,87	- 0,15
Grw 00 m	1902	1,0	+ 1,42	+ 0,92	+ 0,50
Grw 00 a	1906	0,5	+ 0,94	+ 0,95	- 0,01

Étoile 2 $(s) = 9^{\circ} 49' 33''$

Br 1755	1755	0,2	+ 0',04	- 0',53	+ 0',57
Pi 00	1800	0,05	+ 5,10	- 0,27	+ 5,37
Madr 35	1832	0,2	- 0,16	- 0,09	- 0,07
Arm 40	1842	0,05	+ 0,04	- 0,04	+ 0,08
Edinb 40	1842	0,5	+ 0,54	- 0,04	+ 0,58
Pulk 45	1845	2,0	- 0,02	- 0,02	0,00
Paris 45	1845	2,0	- 0,16	- 0,02	- 0,14
Grw 60	1858	0,5	- 1,38	+ 0,06	- 1,44
BruX 65	1867	0,2	+ 0,26	+ 0,11	+ 0,15
Pulk 65	1868	2,0	+ 0,38	+ 0,11	+ 0,27
Paris 75	1878	0,5	- 1,98	+ 0,17	- 2,15
Pulk 75	1877	1,0	- 0,34	+ 0,16	- 0,50
Madr 75	1877	0,2	- 0,82	+ 0,16	- 0,98
Wash 75	1878	1,0	- 0,22	+ 0,17	- 0,39
Grw 80	1881	0,5	+ 0,42	+ 0,19	+ 0,23
Cape 85	1882	2,0	+ 0,28	+ 0,19	+ 0,09
Pulk 85	1884	2,0	+ 0,14	+ 0,20	- 0,06
Strassb 85	1886	2,0	+ 0,48	+ 0,22	+ 0,26
Grw 90	1893	2,0	+ 0,74	+ 0,26	+ 0,48
Madr 90	1890	2,0	+ 0,24	+ 0,24	0,00
Berl 90	1888	2,0	+ 0,46	+ 0,23	+ 0,23
Cape 90	1890	1,0	- 0,12	+ 0,24	- 0,36
Radcl 90	1885	0,5	+ 0,18	+ 0,21	- 0,03
Berl 95	1895	1,0	+ 0,10	+ 0,27	- 0,17
Bonn 00	1896	2,0	+ 0,04	+ 0,27	- 0,23
Grw 00 m	1901	1,0	+ 1,24	+ 0,30	+ 0,94
Grw 00 a	1905	1,0	+ 0,16	+ 0,32	- 0,16

Cat.	Époque	p	$s-(s)$ (obs.)	$s-(s)$ (calc.)	O.-C.
<i>Étoile 3</i>					
$(s) = 7^{\circ} 27' 54''$					
Br 1755	1755	0,1	+ 4",84	- 0",74	+ 5",58
Pi 00	1800	0,1	- 0,26	- 0,17	- 0,09
Madr 35	1832	0,2	- 0,82	+ 0,23	- 1,05
Arm 40	1843	0,05	- 0,68	+ 0,37	- 1,05
Edinb 40	1841	0,5	- 0,14	+ 0,34	- 0,48
Radcl 45	1852	0,1	- 1,08	+ 0,48	- 1,56
Pulk 45	1845	1,0	- 0,46	+ 0,39	- 0,85
Paris 45	1843	0,5	- 0,08	+ 0,37	- 0,45
Grw 50	1851	0,5	+ 1,28	+ 0,47	+ 0,81
Paris 60	1859	0,2	+ 1,08	+ 0,57	+ 0,51
Radcl 60	1858	0,2	- 1,40	+ 0,56	- 1,96
Cape 65	1866	0,5	+ 0,20	+ 0,66	- 0,46
Brux 65	1865	0,5	+ 1,22	+ 0,65	+ 0,57
Pulk 65	1868	2,0	+ 1,04	+ 0,68	+ 0,36
Paris 75	1877	0,5	- 0,48	+ 0,80	- 1,28
Cord 75	1877	0,5	+ 2,08	+ 0,80	+ 1,28
Harv 75	1874	1,0	+ 0,18	+ 0,76	- 0,58
Pulk 75	1878	1,0	+ 0,52	+ 0,81	- 0,29
Madr 75	1876	0,2	+ 0,64	+ 0,78	- 0,14
Wash 75	1880	1,0	+ 0,84	+ 0,84	0,00
Grw 80	1882	0,5	+ 1,64	+ 0,86	+ 0,78
Cape 85	1883	1,0	+ 0,36	+ 0,87	- 0,51
Pulk 85	1884	2,0	+ 0,90	+ 0,89	+ 0,01
Strassb 85	1886	1,0	+ 1,44	+ 0,91	+ 0,53
Grw 90	1894	2,0	+ 1,22	+ 1,01	+ 0,21
Madn 90	1889	2,0	+ 1,20	+ 0,95	+ 0,25
Berl 90	1889	2,0	+ 1,00	+ 0,95	+ 0,05
Cape 90	1888	0,5	+ 0,50	+ 0,94	- 0,44
Radcl 90	1885	0,5	+ 0,48	+ 0,90	- 0,42
Lick 00	1899	1,0	+ 1,68	+ 1,07	+ 0,61
Grw 00 m	1902	1,0	+ 0,80	+ 1,11	- 0,31
Grw 00 a	1905	0,5	+ 0,54	+ 1,15	- 0,61
<i>Étoile 4</i>					
$(s) = 13^{\circ} 14' 26''$					
Br 1755	1754	0,1	+ 0",36	+ 0",87	- 0",51
Pi 00	1800	0,1	+ 0,18	+ 0,64	- 0,46
Madr 35	1832	0,2	+ 1,98	+ 0,48	+ 1,50
Arm 40	1846	0,05	+ 1,62	+ 0,41	+ 1,21
Edinb 40	1841	0,5	+ 0,26	+ 0,43	- 0,17
Paris 45	1844	0,5	+ 0,48	+ 0,42	+ 0,06
Grw 50	1852	0,5	+ 0,88	+ 0,38	+ 0,50
Pulk 55	1853	0,5	+ 0,18	+ 0,37	- 0,19
Paris 60	1860	0,2	+ 0,58	+ 0,34	+ 0,24

Cat.	Époque	p	$s-(s)$ (obs.)	$s-(s)$ (calc.)	O.—C.
Grw 60	1857	0,2	+ 0",60	+ 0",35	+ 0",25
Wash 65	1855	0,2	- 0,48	+ 0,36	- 0,84
Cape 65	1866	0,2	- 0,42	+ 0,31	- 0,73
Paris 75	1878	0,2	- 0,08	+ 0,24	- 0,32
Cord 75	1877	0,5	- 0,16	+ 0,25	- 0,41
Madr 75	1877	0,2	+ 0,30	+ 0,25	+ 0,05
Grw 80	1885	0,5	+ 0,30	+ 0,21	+ 0,09
Grw 90	1894	1,0	+ 0,06	+ 0,16	- 0,10
Radcl 90	1886	0,5	+ 0,30	+ 0,20	+ 0,10
Grw 00 a	1906	0,5	+ 0,38	+ 0,10	+ 0,28
<i>Étoile 5</i>					
$(s) = 2^{\circ} 33' 44''$					
Br 1755	1755	0,1	+ 1",10	+ 0",14	+ 0",96
Pi 00	1800	0,05	+ 3,20	+ 0,24	+ 2,96
Madr 35	1835	0,2	- 0,12	+ 0,31	- 0,43
Arm 40	1845	0,1	+ 0,42	+ 0,33	+ 0,09
Edinb 40	1841	0,2	+ 0,72	+ 0,32	+ 0,40
Paris 45	1843	0,5	0,00	+ 0,33	- 0,33
Pulk 55	1856	0,5	- 0,16	+ 0,36	- 0,52
Paris 60	1860	0,1	+ 0,66	+ 0,36	+ 0,30
Cape 65	1866	0,5	+ 1,24	+ 0,38	+ 0,86
Brux 65	1867	0,5	+ 0,18	+ 0,38	- 0,20
Paris 75	1878	0,5	- 1,74	+ 0,40	- 2,14
Cord 75	1877	0,5	- 0,56	+ 0,40	- 0,96
Madr 75	1877	0,2	- 1,48	+ 0,40	- 1,88
Wash 75	1877	0,5	+ 0,56	+ 0,40	+ 0,16
Grw 80	1881	0,5	- 0,20	+ 0,41	- 0,61
Cape 85	1882	1,0	+ 1,08	+ 0,41	+ 0,67
Grw 90	1893	2,0	+ 1,06	+ 0,43	+ 0,63
Radcl 90	1887	0,5	+ 1,04	+ 0,42	+ 0,62
Lick 00	1899	0,5	+ 0,26	+ 0,45	- 0,19
Grw 00 a	1906	0,5	+ 0,14	+ 0,46	- 0,32
<i>Étoile 6</i>					
$(s) = 2^{\circ} 49' 5''$					
Br 1755	1755	0,1	+ 0",92	+ 0",15	+ 0",77
Pi 00	1800	0,05	- 0,10	+ 0,29	- 0,39
Madr 35	1832	0,2	+ 1,48	+ 0,39	+ 1,09
Edinb 40	1842	0,5	- 0,18	+ 0,43	- 0,61
Radcl 45	1852	0,1	+ 0,80	+ 0,47	+ 0,33
Pulk 45	1845	1,0	+ 0,52	+ 0,44	+ 0,08
Grw 60	1858	0,5	- 0,18	+ 0,48	- 0,66
Radcl 60	1856	0,1	- 0,78	+ 0,48	- 1,26
Brux 65	1866	0,5	+ 0,12	+ 0,51	- 0,39
Pulk 65	1867	1,0	+ 0,86	+ 0,51	+ 0,35

Cat.	Époque	p	$s-(s)$ (obs.)	$s-(s)$ (calc.)	O.—C.
Cord 75	1877	0,5	+ 0",88	+ 0",54	+ 0",34
Pulk 75	1877	0,5	+ 0,68	+ 0,54	+ 0,14
Madr 75	1877	0,2	+ 1,30	+ 0,54	+ 0,76
Grw 80	1881	0,5	+ 0,32	+ 0,56	- 0,24
Cape 85	1882	1,0	+ 0,04	+ 0,56	- 0,52
Pulk 85	1884	2,0	+ 0,46	+ 0,57	- 0,11
Strassb 85	1886	2,0	+ 0,96	+ 0,57	+ 0,39
Grw 90	1894	2,0	+ 0,72	+ 0,60	+ 0,12
Cape 90	1888	1,0	+ 0,40	+ 0,58	- 0,18
Radcl 90	1886	0,5	+ 0,86	+ 0,57	+ 0,29
Lick 00	1899	0,5	+ 0,88	+ 0,62	+ 0,26
Grw 00 m	1901	1,0	+ 0,30	+ 0,62	- 0,32
Grw 00 a	1906	0,5	+ 0,54	+ 0,64	- 0,10
<i>Étoile 7</i>					
$(s) = 6^{\circ} 52' 0''$					
Br 1755	1755	0,1	+ 0",98	+ 1",95	- 0",97
Pi 00	1800	0,1	+ 0,52	+ 1,43	- 0,91
Grw 15	1815	1,0	+ 1,62	+ 1,26	+ 0,36
Cape 33	1833	0,5	+ 0,96	+ 1,05	- 0,09
Madr 35	1832	0,2	+ 1,62	+ 1,06	+ 0,56
Arm 40	1841	0,05	+ 0,06	+ 0,96	- 0,90
Edinb 40	1842	1,0	+ 1,00	+ 0,95	+ 0,05
Grw 40	1837	0,5	- 0,26	+ 1,01	- 1,27
Pulk 45	1845	1,0	+ 1,84	+ 0,91	+ 0,93
Paris 45	1846	1,0	+ 1,48	+ 0,90	+ 0,58
Grw 50	1852	0,5	- 0,18	+ 0,83	- 1,01
Paris 60	1861	1,0	+ 0,50	+ 0,73	- 0,23
Grw 60	1859	0,5	+ 0,10	+ 0,75	- 0,65
Wash 60	1852	0,2	+ 0,92	+ 0,83	+ 0,09
Radcl 60	1857	0,1	+ 1,82	+ 0,78	+ 1,04
Brux 65	1868	0,5	+ 1,00	+ 0,65	+ 0,35
Pulk 65	1867	1,0	+ 0,74	+ 0,66	+ 0,08
Grw 72	1872	0,5	+ 0,30	+ 0,60	- 0,30
Paris 75	1876	1,0	0,00	+ 0,56	- 0,56
Pulk 75	1877	2,0	+ 0,08	+ 0,55	- 0,47
Madr 75	1877	0,2	- 0,72	+ 0,55	- 1,27
Wash 75	1882	0,5	+ 1,26	+ 0,49	+ 0,77
Cape 85	1883	0,5	+ 1,02	+ 0,48	+ 0,54
Pulk 85	1885	2,0	+ 0,62	+ 0,45	+ 0,17
Strassb 85	1886	2,0	+ 0,72	+ 0,44	+ 0,28
Grw 90	1893	2,0	+ 0,10	+ 0,36	- 0,26
Madr 90	1890	1,0	+ 0,60	+ 0,40	+ 0,20
Berl 90	1888	2,0	+ 0,82	+ 0,42	+ 0,40
Cape 90	1889	2,0	+ 0,60	+ 0,41	+ 0,19
Berl 95	1895	1,0	+ 0,74	+ 0,34	+ 0,40

ÖSTEN BERGSTRAND,

Cat.	Époque	p	$s-(s)$ (obs.)	$s-(s)$ (calc.)	O.—C.
Bonn 00	1895	2,0	— 0",16	+ 0",34	— 0",50
Grw 00 m	1900	1,0	+ 0,40	+ 0,28	+ 0,12
Grw 00 a	1904	0,5	— 0,38	+ 0,24	— 0,62
<i>Étoile 8</i>					
(s) = 3° 37' 56"					
Br 1755	1755	0,1	+ 7",16	+ 3",24	+ 3",92
Pi 00	1800	0,1	+ 1,30	+ 2,07	— 0,77
Grw 15	1816	0,5	+ 0,52	+ 1,65	— 1,13
Madr 35	1832	0,2	+ 1,02	+ 1,23	— 0,21
Edinb 40	1841	0,5	+ 0,70	+ 1,00	— 0,30
Paris 45	1842	0,2	+ 2,60	+ 0,97	+ 1,63
Pulk 55	1856	0,5	+ 0,48	+ 0,61	— 0,13
Paris 60	1861	0,5	+ 0,10	+ 0,48	— 0,38
Radcl 60	1858	0,2	— 0,40	+ 0,40	— 0,80
Paris 75	1877	0,2	— 0,20	+ 0,06	— 0,26
Harv 75	1874	1,0	+ 0,70	+ 0,14	+ 0,56
Madr 75	1877	0,2	— 1,12	+ 0,06	— 1,18
Grw 90	1893	1,0	— 0,24	— 0,35	+ 0,11
Radcl 90	1883	0,5	+ 0,34	— 0,09	+ 0,43
<i>Étoile 10</i>					
(s) = 7° 0' 8"					
Br 1755	1755	0,1	+ 0",56	— 1",32	+ 1",88
Pi 00	1800	0,1	+ 0,98	— 0,73	+ 1,71
Madr 35	1832	0,1	+ 0,04	— 0,32	+ 0,36
Edinb 40	1842	0,5	— 1,12	— 0,19	— 0,93
Radcl 45	1852	0,2	— 0,70	— 0,06	— 0,64
Pulk 55	1850	0,5	— 1,60	— 0,08	— 1,52
Paris 60	1860	0,2	+ 1,50	+ 0,05	+ 1,45
Radcl 60	1858	0,2	— 0,44	+ 0,02	— 0,46
Grw 64	1866	0,5	+ 1,32	+ 0,13	+ 1,19
Paris 75	1876	0,5	0,00	+ 0,25	— 0,25
Cord 75	1877	0,5	+ 0,60	+ 0,27	+ 0,33
Madr 75	1877	0,2	— 0,10	+ 0,27	— 0,37
Cape 85	1882	0,5	+ 0,30	+ 0,33	— 0,03
Grw 90	1895	1,0	+ 0,62	+ 0,50	+ 0,12
Radcl 90	1885	0,5	+ 0,06	+ 0,37	— 0,31
Lick 00	1899	0,5	+ 1,16	+ 0,55	+ 0,61
<i>Étoile 11</i>					
(s) = 5° 45' 11"					
Arm 40	1842	0,05	+ 0",76	+ 2",08	— 1",32
Pulk 55	1864	0,5	+ 0,66	+ 1,17	— 0,51
Grw 64	1866	0,5	+ 1,70	+ 0,87	+ 0,83
Paris 75	1877	0,5	— 0,42	+ 0,31	— 0,73

Cat.	Époque	p	$s-(s)$ (obs.)	$s-(s)$ (calc.)	O.—C.
Cord 75	1877	0,5	+ 0",50	+ 0",31	+ 0",19
Pulk 75	1877	2,0	+ 0,52	+ 0,31	+ 0,21
Wash 75	1878	1,0	+ 0,24	+ 0,26	- 0,02
Radcl 90	1884	0,5	- 0,50	- 0,05	- 0,45
<i>Étoile 12</i>					
$(s) = 1^{\circ} 23' 9''$					
Br 1755	1755	0,2	+ 2",34	+ 1",00	+ 1",34
Pi 00	1800	0,1	+ 0,76	+ 0,82	- 0,06
Grw 15	1815	0,5	+ 0,34	+ 0,76	- 0,42
Cape 33	1833	0,5	+ 0,92	+ 0,69	+ 0,23
Madr 35	1832	0,2	+ 1,28	+ 0,69	+ 0,59
Edinb 40	1842	1,0	+ 0,24	+ 0,65	- 0,41
Grw 40	1838	1,0	+ 0,12	+ 0,67	- 0,55
Radcl 45	1849	0,5	+ 1,36	+ 0,62	+ 0,74
Grw 45	1845	1,0	+ 0,84	+ 0,64	+ 0,20
Pulk 45	1845	0,5	+ 0,52	+ 0,64	- 0,12
Paris 45	1845	1,0	+ 1,00	+ 0,64	+ 0,36
Grw 50	1851	1,0	+ 0,82	+ 0,61	+ 0,21
Stgo 50	1850	0,2	+ 1,28	+ 0,62	+ 0,66
Paris 60	1861	1,0	+ 0,52	+ 0,57	- 0,05
Grw 60	1858	2,0	+ 0,56	+ 0,59	- 0,03
Wash 60	1854	1,0	+ 0,16	+ 0,60	- 0,44
Radcl 60	1856	0,5	+ 0,66	+ 0,59	+ 0,07
Grw 64	1864	2,0	+ 0,88	+ 0,56	+ 0,32
Cape 65	1864	1,0	+ 0,58	+ 0,56	+ 0,02
BruX 65	1864	0,5	- 0,44	+ 0,56	- 1,00
Pulk 65	1868	2,0	+ 0,18	+ 0,55	- 0,37
Grw 72	1871	2,0	+ 0,54	+ 0,53	+ 0,01
Paris 75	1876	1,0	+ 0,76	+ 0,51	+ 0,25
Cord 75	1877	0,5	+ 0,56	+ 0,51	+ 0,05
Harv 75	1875	1,0	+ 0,32	+ 0,52	- 0,20
Pulk 75	1877	1,0	+ 0,72	+ 0,51	+ 0,21
Madr 75	1874	0,5	+ 0,68	+ 0,52	+ 0,16
Wash 75	1874	3,0	- 0,26	+ 0,52	- 0,78
Grw 80	1883	2,0	+ 0,60	+ 0,49	+ 0,11
Cape 85	1882	1,0	+ 1,08	+ 0,49	+ 0,59
Pulk 85	1885	2,0	+ 0,62	+ 0,48	+ 0,14
Strassb 85	1885	2,0	+ 0,64	+ 0,48	+ 0,16
Grw 90	1894	3,0	+ 0,64	+ 0,44	+ 0,20
Madr 90	1890	1,0	+ 0,66	+ 0,46	+ 0,20
Cape 90	1899	1,0	+ 0,70	+ 0,46	+ 0,24
Radcl 90	1884	1,0	+ 0,50	+ 0,48	+ 0,02
Bonn 00	1895	0,5	+ 1,06	+ 0,44	+ 0,62
Lick 00	1899	0,5	+ 1,18	+ 0,42	+ 0,76
Grw 00 m	1901	3,0	+ 0,20	+ 0,41	- 0,21
Grw 00 a	1904	0,2	+ 0,34	+ 0,40	- 0,06

Cat.	Époque	p	$s-(s)$ (obs.)	$s-(s)$ (calc.)	O.—C.
<i>Étoile 13</i>					
(s) = 2° 44' 9"					
Br 1755	1755	0,2	+ 1",50	+ 0",88	+ 0",62
Pi 00	1800	0,1	+ 1,50	+ 0,92	+ 0,58
Grw 15	1814	0,5	+ 1,82	+ 0,93	+ 0,89
Dpt 30	1830	0,5	+ 0,08	+ 0,94	- 0,86
Cape 33	1833	0,5	+ 0,58	+ 0,95	- 0,37
Madr 35	1832	0,2	+ 1,46	+ 0,94	+ 0,52
Arm 40	1843	0,1	+ 0,60	+ 0,95	- 0,35
Edinb 40	1842	0,5	+ 0,58	+ 0,95	- 0,37
Grw 40	1837	0,5	+ 2,00	+ 0,95	+ 1,05
Pulk 45	1845	1,0	+ 0,58	+ 0,96	- 0,38
Paris 45	1845	1,0	+ 0,70	+ 0,96	- 0,26
Paris 60	1861	1,0	+ 1,08	+ 0,97	+ 0,11
Grw 60	1859	0,5	+ 1,58	+ 0,97	+ 0,61
Wash 60	1855	0,5	+ 1,02	+ 0,97	+ 0,05
Radcl 60	1857	0,2	+ 0,74	+ 0,98	- 0,24
Grw 64	1864	0,5	+ 0,70	+ 0,97	- 0,27
Brux 65	1866	0,5	+ 0,92	+ 0,98	- 0,06
Pulk 65	1867	2,0	+ 0,38	+ 0,98	- 0,60
Grw 72	1872	1,0	+ 1,34	+ 0,98	+ 0,36
Paris 75	1875	1,0	+ 1,20	+ 0,98	+ 0,22
Cord 75	1877	0,5	+ 0,68	+ 0,99	- 0,31
Pulk 75	1877	0,5	+ 0,48	+ 0,99	- 0,51
Madr 75	1877	0,5	+ 1,78	+ 0,99	+ 0,79
Wash 75	1874	1,0	+ 0,52	+ 0,98	- 0,36
Grw 80	1882	1,0	+ 2,06	+ 0,99	+ 1,07
Cape 85	1883	0,5	+ 0,38	+ 0,99	- 0,61
Pulk 85	1885	2,0	+ 1,32	+ 0,99	+ 0,33
Grw 90	1893	3,0	+ 1,02	+ 1,00	+ 0,02
Cape 90	1889	1,0	+ 1,42	+ 1,00	+ 0,42
Radcl 90	1886	0,5	+ 2,08	+ 0,99	+ 1,09
Lick 00	1889	0,5	+ 1,10	+ 1,01	+ 0,09
Grw 00 m	1900	2,0	+ 0,58	+ 1,01	- 0,43
Grw 00 a	1905	0,2	+ 1,06	+ 1,01	+ 0,05
<i>Étoile 14</i>					
(s) = 2° 21' 36"					
Pulk 55	1855	0,5	+ 0",54	+ 0",52	+ 0",02
Paris 60	1861	0,1	+ 0,02	+ 0,64	- 0,62
Brux 65	1864	0,5	+ 0,58	+ 0,69	- 0,11
Paris 75	1878	0,1	+ 1,70	+ 0,96	+ 0,74
Cord 75	1877	0,5	+ 1,22	+ 0,94	+ 0,28
Grw 80	1883	0,5	+ 1,38	+ 1,05	+ 0,33
Cape 90	1889	0,5	+ 0,20	+ 1,16	- 0,36
Radcl 90	1885	0,5	+ 0,90	+ 1,09	- 0,19

Cat.	Époque	p	$s-(s)$ (obs.)	$s-(s)$ (calc.)	O.—C.
<i>Étoile 15</i>					
(s) = 10° 9' 23"					
Br 1755	1755	0,1	+ 1",60	-- 0",29	+ 1",89
Pi 00	1800	0,1	-- 1,88	+ 0,14	-- 2,02
Cape 33	1833	0,5	+ 0,78	+ 0,46	+ 0,32
Madr 35	1832	0,2	+ 1,52	+ 0,45	+ 1,07
Edinb 40	1842	0,5	+ 0,86	+ 0,55	+ 0,31
Pulk 45	1845	1,0	-- 0,16	+ 0,58	-- 0,74
Paris 45	1844	1,0	+ 0,28	+ 0,57	-- 0,29
Grw 50	1851	0,5	+ 1,70	+ 0,64	+ 1,06
Paris 60	1858	0,2	+ 3,34	+ 0,71	+ 2,63
Grw 60	1859	1,0	+ 0,50	+ 0,72	-- 0,22
Wash 60	1852	0,5	+ 1,30	+ 0,65	+ 0,65
Radcl 60	1857	0,2	+ 0,62	+ 0,70	-- 0,08
Grw 64	1864	1,0	+ 1,22	+ 0,76	+ 0,46
Cape 65	1866	0,5	+ 0,60	+ 0,78	-- 0,18
Brux 65	1867	0,5	+ 0,46	+ 0,79	-- 0,33
Pulk 65	1868	1,0	+ 0,46	+ 0,80	-- 0,34
Grw 72	1872	1,0	+ 1,02	+ 0,84	+ 0,18
Paris 75	1875	0,5	+ 0,78	+ 0,87	-- 0,09
Cord 75	1878	0,5	-- 0,52	+ 0,90	-- 1,42
Pulk 75	1877	2,0	+ 1,56	+ 0,89	+ 0,67
Madr 75	1878	0,5	+ 1,66	+ 0,90	+ 0,76
Wash 75	1879	1,0	+ 0,32	+ 0,91	-- 0,59
Grw 80	1882	2,0	+ 1,34	+ 0,94	+ 0,40
Cape 85	1882	1,0	+ 0,52	+ 0,94	-- 0,42
Pulk 85	1884	2,0	+ 0,90	+ 0,96	-- 0,06
Strassb 85	1886	2,0	+ 0,86	+ 0,98	-- 0,12
Grw 90	1894	3,0	+ 1,00	+ 1,05	-- 0,05
Madr 90	1890	1,0	+ 1,04	+ 1,02	+ 0,02
Berl 90	1889	1,0	+ 0,68	+ 1,01	-- 0,33
Cape 90	1889	2,0	+ 0,68	+ 1,01	-- 0,33
Radcl 90	1885	0,5	+ 0,82	+ 0,97	-- 0,15
Berl 95	1894	0,5	+ 0,04	+ 1,05	-- 1,01
Liek 00	1899	0,5	+ 1,88	+ 1,10	+ 0,78
Grw 00 m	1901	3,0	+ 1,00	+ 1,12	-- 0,12
Grw 00 a	1904	0,2	+ 0,94	+ 1,15	-- 0,21

Soient pour une étoile quelconque s_1, s_2, \dots les distances déduites des catalogues, et t_1, t_2, \dots les époques correspondantes. On aura alors un système d'équations de condition:

$$\begin{cases} s_m + (t_1 - t_m) \Delta s = s_1; & (\text{poids} = p_1) \\ s_m + (t_2 - t_m) \Delta s = s_2; & (\text{»} = p_2) \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

où t_m est une époque initiale, s_m , la valeur de la distance s valable pour cette époque, et $\mathcal{A}s$, le changement annuel de s . J'ai traité ces systèmes d'équations d'après la méthode des moindres carrés, en tenant compte des divers poids. Si l'on détermine pour chaque étoile l'époque initiale t_m d'après la formule

$$t_m = \frac{\sum_{\nu=1}^n p_\nu t_\nu}{\sum_{\nu=1}^n p_\nu},$$

où n est le nombre des équations, et si l'on prend comme inconnus

$$\begin{cases} x = s_m - (s) \\ y = 10 \cdot \mathcal{A}s, \end{cases}$$

on aura les systèmes d'équations normales sous la forme

$$\begin{cases} x \cdot \sum_{\nu=1}^n p_\nu = \sum_{\nu=1}^n p_\nu [s_\nu - (s)] \\ y \cdot \sum_{\nu=1}^n p_\nu \left(\frac{t_\nu - t_m}{10} \right)^2 = \sum_{\nu=1}^n p_\nu \left(\frac{t_\nu - t_m}{10} \right) [s_\nu - (s)]. \end{cases}$$

En désignant par ε l'erreur probable d'une équation au poids 1, on obtient les solutions suivantes de ces équations:

Étoile 1 ($n = 23$; $t_m = 1882$):

$$\begin{cases} x = + 0'',789 \pm 0'',064 \\ y = + 0,065 \pm 0,036 \\ \varepsilon = \pm 0'',301. \end{cases}$$

Étoile 2 ($n = 27$; $t_m = 1878$):

$$\begin{cases} x = + 0'',170 \pm 0'',069 \\ y = + 0,057 \pm 0,033 \\ \varepsilon = \pm 0'',374. \end{cases}$$

Étoile 3 ($n = 32$; $t_m = 1878$):

$$\begin{cases} x = + 0'',814 \pm 0'',079 \\ y = + 0,126 \pm 0,042 \\ \varepsilon = \pm 0'',392. \end{cases}$$

Étoile 4 ($n = 19$; $t_m = 1867$):

$$\begin{cases} x = + 0'',302 \pm 0'',072 \\ y = - 0,051 \pm 0,027 \\ \varepsilon = \pm 0'',186. \end{cases}$$

Étoile 5 ($n = 20$; $t_m = 1877$):

$$\begin{cases} x = + 0'',400 \pm 0'',131 \\ y = + 0,021 \pm 0,059 \\ \varepsilon = \pm 0'',403. \end{cases}$$

Étoile 6 ($n = 23$; $t_m = 1879$):

$$\begin{cases} x = + 0'',554 \pm 0'',053 \\ y = + 0,033 \pm 0,026 \\ \varepsilon = \pm 0'',214. \end{cases}$$

Étoile 7 ($n = 33$; $t_m = 1874$):

$$\begin{cases} x = + 0'',580 \pm 0'',057 \\ y = - 0,115 \pm 0,025 \\ \varepsilon = \pm 0'',313. \end{cases}$$

Étoile 8 ($n = 14$; $t_m = 1861$):

$$\begin{cases} x = + 0'',484 \pm 0'',158 \\ y = - 0,260 \pm 0,056 \\ \varepsilon = \pm 0'',376. \end{cases}$$

Étoile 10 ($n = 16$; $t_m = 1871$):

$$\begin{cases} x = + 0'',193 \pm 0'',152 \\ y = + 0,130 \pm 0,060 \\ \varepsilon = \pm 0'',375. \end{cases}$$

Étoile 11 ($n = 8$; $t_m = 1875$):

$$\begin{cases} x = + 0'',413 \pm 0'',119 \\ y = - 0,507 \pm 0,171 \\ \varepsilon = \pm 0'',279. \end{cases}$$

Étoile 12 ($n = 40$; $t_m = 1872$):

$$\begin{cases} x = + 0'',532 \pm 0'',041 \\ y = - 0,040 \pm 0,020 \\ \varepsilon = \pm 0'',398. \end{cases}$$

Étoile 13 ($n = 33$; $t_m = 1871$):

$$\begin{cases} x = + 0'',982 \pm 0'',060 \\ y = + 0,009 \pm 0,025 \\ \varepsilon = \pm 0'',304. \end{cases}$$

Étoile 14 ($n = 8$; $t_m = 1875$):

$$\begin{cases} x = + 0'',900 \pm 0'',082 \\ y = + 0,188 \pm 0,067 \\ \varepsilon = \pm 0'',146. \end{cases}$$

Étoile 15 ($n = 35$; $t_m = 1876$):

$$\begin{cases} x = + 0'',878 \pm 0'',060 \\ y = + 0,097 \pm 0,032 \\ \varepsilon = \pm 0'',345. \end{cases}$$

Les valeurs de ε s'harmonisent assez bien avec la valeur $\pm 0'',3$, indiquée par Boss comme l'erreur probable correspondant au poids 1.

Les étoiles 11 et 14, dont on n'a que très peu d'observations, ont été exclues des calculs qui suivent.

Des valeurs de x , y on obtient enfin les valeurs initiales des distances s et les changements annuels Δs , contenus dans le tableau III. On y retrouve aussi les valeurs approchées des angles de position ψ .

Tableau III.

Étoile	Époque	ψ	s	Δs
1	1882	299 ⁰ ,4	11 ⁰ 46' 19'',79 \pm 0'',06	+ 0'',0065 \pm 0'',0036
2	1878	285,5	9 49 33,17 \pm 0,07	+ 0,0057 \pm 0,0033
3	1878	208,1	7 27 54,81 \pm 0,08	+ 0,0126 \pm 0,0042
4	1867	192,8	13 14 26,30 \pm 0,07	- 0,0051 \pm 0,0027
5	1877	267,4	2 33 44,40 \pm 0,13	+ 0,0021 \pm 0,0059
6	1879	221,2	2 49 5,55 \pm 0,05	+ 0,0033 \pm 0,0026
7	1874	344,8	6 52 0,58 \pm 0,06	- 0,0115 \pm 0,0025
8	1861	338,4	3 37 56,48 \pm 0,16	- 0,0260 \pm 0,0056
10	1871	179,5	7 0 8,19 \pm 0,15	+ 0,0130 \pm 0,0060
12	1872	129,9	1 23 9,53 \pm 0,04	- 0,0040 \pm 0,0020
13	1871	126,2	2 44 9,98 \pm 0,06	+ 0,0009 \pm 0,0025
15	1876	156,6	10 9 23,88 \pm 0,06	+ 0,0097 \pm 0,0032

IV.

Détermination de la parallaxe du groupe.

Le changement Δs de la distance s est provoqué par trois causes: 1) le mouvement de l'étoile en question, 2) le mouvement de l'étoile de repère, δ Orion, 3) le resserrement perspectif du groupe. Nous désignons par σ la composante du premier mouvement le long du grand cercle joignant l'étoile à δ Orion. Si cette dernière étoile a un mouvement Σ dans la direction dont l'angle de position est P , la composante de ce mouvement le long du même grand cercle est

$$\Sigma \cdot \cos (P - \psi) .$$

Enfin, la diminution apparente de la distance s , causée par le resserrement perspectif du groupe, peut, d'une manière approchée, être mise:

$$0,212 \varrho_m \pi \sin s ,$$

π étant la parallaxe moyenne et ϱ_m , la vitesse radiale moyenne (exprimée en kilomètres par seconde) du groupe. Ainsi on aura

$$\Delta s = \sigma - \Sigma \cdot \cos (P - \psi) - 0,212 \varrho_m \pi \sin s .$$

Dans le but de parvenir à une détermination de π , on pourra utiliser cette relation de différentes manières.

Posons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \cdot \sin P = \xi \\ \Sigma \cdot \cos P = \eta \\ 0,212 \varrho_m \pi = \zeta . \end{array} \right.$$

Pour chacune de nos 12 étoiles nous aurons une équation de la forme

$$\xi \sin \psi + \eta \cos \psi + \zeta \sin s + \Delta s = \sigma .$$

Les quantités σ sont tout à fait inconnues. En supposant que les mouvements internes du groupe soient insignifiants et sans caractère systématique, de sorte qu'ils disparaissent en moyenne, on pourrait regarder les σ comme des erreurs accidentelles. Ainsi on aurait un système d'équations de condition de la forme

$$\xi \sin \psi + \eta \cos \psi + \zeta \sin s + \Delta s = 0.$$

En résolvant, d'après la méthode des moindres carrés, ces équations par rapport à ξ , η , ζ comme inconnus, on aurait une détermination de π .

J'ai essayé une telle détermination. En prenant comme unité $0''_{,01}$, on obtient le système d'équations suivant. Après chaque équation on a ajouté son résidu v .

- 0,87 . ξ	+ 0,49 . η	+ 0,20 . ζ	+ 0,65 = 0;	$v = - 0,98$
- 0,96	+ 0,27	+ 0,17	+ 0,57	- 0,58
- 0,47	- 0,88	+ 0,13	+ 1,26	- 0,28
- 0,22	- 0,98	+ 0,23	- 0,51	+ 1,30
- 1,00	- 0,05	+ 0,04	+ 0,21	+ 0,34
- 0,66	- 0,75	+ 0,05	+ 0,33	+ 0,75
- 0,26	+ 0,97	+ 0,12	- 1,15	+ 0,09
- 0,37	+ 0,93	+ 0,06	- 2,60	+ 1,75
+ 0,01	- 1,00	+ 0,12	+ 1,30	- 0,45
+ 0,77	- 0,64	+ 0,02	- 0,40	+ 0,61
+ 0,81	- 0,59	+ 0,05	+ 0,09	- 0,01
+ 0,40	- 0,92	+ 0,18	+ 0,97	- 0,52

Toutes les quantités Δs ont été prises avec le même poids. Les équations normales deviennent:

$$\left\{ \begin{array}{l} + 4,9970 . \xi - 1,4563 . \eta - 0,4462 . \zeta - 0,5936 = 0 \\ - 1,4563 . \xi + 7,0227 . \eta - 0,3911 . \zeta - 5,9176 = 0 \\ - 0,4462 . \xi - 0,3911 . \eta + 0,2105 . \zeta + 0,3314 = 0 . \end{array} \right.$$

Solution (exprimée en secondes d'arc):

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = + 0''_{,0056} \pm 0''_{,0035} \\ \eta = + 0''_{,0105} \pm 0''_{,0028} \\ \zeta = + 0''_{,0157} \pm 0''_{,0173} . \end{array} \right.$$

Erreur probable d'une équation:

$$\varepsilon = + 0'',0062 .$$

Or on a

$$0,212 \cdot \varrho_m = 3,54 ,$$

et ainsi, la valeur trouvée pour ζ donnera:

$$\pi = + 0'',0044 \pm 0'',0049 .$$

La valeur de π étant du même ordre de grandeur que son erreur probable, cette solution prouve seulement que la parallaxe est très petite et que le resserrement perspectif du groupe est presque insensible en comparaison avec les mouvements mutuels des diverses étoiles y appartenant. Aussi la valeur de ε est-elle sensiblement plus grande que la valeur moyenne des erreurs probables des quantités Δs , qui est de $\pm 0'',0037$ environ. Toutefois, il peut être regardé comme établi que la valeur de la parallaxe n'excède pas $0'',01$.

Une limite supérieure est ainsi approximativement fixée pour la parallaxe. Il faut cependant suivre l'autre chemin et prendre en considération les grandeurs des mouvements internes du groupe afin de chercher à atteindre une détermination plus sûre.

D'abord, j'ai formé pour les vitesses radiales V , données dans le tableau I, les écarts de leur moyenne

$$V_m = + 21,4^{km}$$

ou — ce qui est la même chose — les écarts des vitesses réduites ϱ de leur moyenne

$$\varrho_m = + 16,7^{km} .$$

Le tableau IV contient ces écarts $V - V_m = \varrho - \varrho_m$.

Tableau IV.

Étoile	$\varrho - \varrho_m$	Étoile	$\varrho - \varrho_m$
1	+ 1,9 ^{km}	11	+ 7,6 ^{km}
2	+ 2,8	12	+ 3,1
3	- 3,4	13	- 3,9
4	- 0,4	14	+ 4,7
5	+ 6,6	15	- 0,4
7	- 3,4	16	+ 1,0
8	- 9,4	17	+ 0,2
9	- 2,7	18	+ 0,1
10	- 4,4		

Si l'on suppose que ces écarts soient distribués comme des erreurs accidentelles, on trouve que la valeur probable d'un écart est

$$\varepsilon_\varrho = \pm 2,92^{km}.$$

Or ces écarts sont dus, d'une part, aux mouvements radiaux relatifs des étoiles, et de l'autre, aux erreurs d'observation. Soient $\bar{\varrho}$ la valeur probable du mouvement relatif et ε_0 l'erreur d'observation probable; on aura donc:

$$\bar{\varrho}^2 = \varepsilon_\varrho^2 - \varepsilon_0^2.$$

Pour chercher à me faire une idée de l'influence des erreurs d'observation, j'ai calculé les valeurs de V_m et de ε_ϱ en supprimant les vitesses radiales désignées comme incertaines, c.-à-d. celles des étoiles 3, 5, 7 et 12. La valeur moyenne devient alors

$$V'_m = + 21,2^{km} \pm 0,8^{km},$$

et on aura

$$\varrho'_m = + 16,5^{km},$$

avec les écarts suivants:

Tableau V.

Étoile	$\varrho - \varrho'_m$	Étoile	$\varrho - \varrho'_m$
1	+ 2,1 ^{km}	13	- 3,7 ^{km}
2	+ 3,0	14	+ 4,9
4	- 0,2	15	- 0,2
8	- 9,2	16	+ 1,2
9	- 2,5	17	+ 0,4
10	- 4,2	18	+ 0,3
11	+ 7,8		

L'écart probable dévient dans ce cas

$$\varepsilon'_\varrho = \pm 2,90^{km} .$$

Ce résultat est presque identique au précédent, ce qui semble indiquer que les écarts ont leur origine principalement dans les mouvements véritables des étoiles et que les erreurs d'observation jouent un rôle inférieur. Par ce motif je me suis arrêté à la première solution.

En cherchant à apprécier la valeur probable $\bar{\varrho}$ des mouvements relatifs comptés le long de la ligne visuelle, on parviendra donc indubitablement à une *limite inférieure* pour cette valeur en supposant que ε_ϱ soit dû en quantités égales aux mouvements véritables et aux erreurs d'observation, c.-à-d. que

$$\bar{\varrho}^2 = \varepsilon_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_\varrho^2 .$$

De l'autre côté, on aura une *limite supérieure* pour $\bar{\varrho}$ en négligeant tout à fait les erreurs d'observation, c.-à-d. en prenant

$$\bar{\varrho}^2 = \varepsilon_\varrho^2 .$$

On aura donc avec sûreté:

$$2,1 < |\bar{\varrho}| < 2,9 .$$

Probablement la valeur de $|\bar{\varrho}|$ est assez éloignée des deux limites. Ainsi, sans trop tomber dans l'erreur, on pourra adopter la valeur moyenne entre les deux extrêmes, c.-à-d.

$$\bar{\varrho} = \pm 2,5^{km} .$$

Cela implique que l'erreur d'observation probable est à peu près

$$\varepsilon_0 = \pm 1,5^{km},$$

valeur bien plausible.

On aura maintenant à comparer les vitesses radiales avec les mouvements perpendiculaires à la ligne visuelle. Supposé que les mouvements mutuels des étoiles appartenant à ce groupe soient également probables dans toutes les directions, il faudra que la valeur probable $\bar{\sigma}$ des mouvements σ satisfasse approximativement à la relation

$$\bar{\sigma} = 0,212 \bar{\varrho} \pi.$$

Or nous avons, d'après ce qui précède, pour chaque étoile:

$$\xi \sin \psi + \eta \cos \psi + \mathcal{A}s + 0,212 \varrho_m \pi \sin s = \sigma.$$

L'appréciation de la grandeur des σ dépend donc en partie de la connaissance de π . Cependant, le terme multiplié par π étant très petit, l'interpolation nécessaire n'offre pas de difficulté.

La méthode que j'ai suivie n'est qu'approchée, mais elle donne sans doute le meilleur résultat qu'on puisse tirer des mouvements seuls, en opérant avec les hypothèses les plus simples et les plus naturelles. En voici le principe, qui repose sur la supposition que les mouvements mutuels soient distribués selon la loi d'erreurs, supposition fréquemment vérifiée par M. KAPTEYN dans ses travaux sur les mouvements et la distribution des étoiles à hélium.

J'ai formé le système d'équations à deux inconnus ξ , η de la forme

$$\xi \sin \psi + \eta \cos \psi + \mathcal{A}s + 0,212 \varrho_m \pi \sin s = 0,$$

en y introduisant successivement différentes valeurs de π . Les erreurs probables d'une équation, ε_σ , obtenues pour les solutions successives, réduction faite pour l'erreur d'observation, peuvent être considérées comme des valeurs approchées de $\bar{\sigma}$ et qui correspondent aux valeurs données de π . Par interpolation j'ai pu fixer sans difficulté la valeur de π , à laquelle correspond la valeur de $\bar{\sigma}$, satisfaisant en même temps la relation

$$\bar{\sigma} = 0,212 \bar{\varrho} \pi.$$

J'ai fait le calcul en mettant successivement

$$\begin{aligned} \text{I: } & 0,212 \pi \varrho_m = 1,5, \\ \text{II: } & \quad \gg \quad = 3,0, \\ \text{III: } & \quad \gg \quad = 4,5, \end{aligned}$$

et j'ai trouvé les solutions indiquées dans le tableau VI. Les valeurs de π ont été calculées en admettant que

$$\varrho_m = + 16,7^{km} .$$

Tableau VI.

Solution	π	ξ	η	ε_σ	$\bar{\sigma}$
I	0",0042	+ 0",0056 \pm 0",0027	+ 0",0104 \pm 0",0023	\pm 0",0059	0",0046
II	0,0085	+ 0,0072 \pm 0,0028	+ 0,0116 \pm 0,0023	\pm 0,0060	0,0047
III	0,0127	+ 0,0089 \pm 0,0029	+ 0,0128 \pm 0,0025	\pm 0,0063	0,0051

Or l'erreur d'observation est en moyenne

$$\varepsilon_0 = \pm 0",0037 .$$

D'après la formule

$$\bar{\sigma}^2 = \varepsilon_\sigma^2 - \varepsilon_0^2 ,$$

on aura ainsi les valeurs de $\bar{\sigma}$ données dans la dernière colonne du tableau VI. On trouve que $\bar{\sigma}$, considéré comme fonction de π , ne varie qu'assez lentement avec π . Ainsi, l'intersection de la courbe représentant cette fonction et de la ligne droite déterminée par l'équation

$$\bar{\sigma} = 0,212 \bar{\varrho} \pi$$

donne la valeur cherchée de la parallaxe avec un assez haut degré de sûreté. Pour

$$\bar{\varrho} = 2,5$$

on obtient ainsi:

$$\pi = + 0",0089 .$$

La valeur correspondante de $\bar{\sigma}$ est

$$\bar{\sigma} = 0",0047 .$$

La détermination de $\bar{\sigma}$ dépend essentiellement des valeurs de $\mathcal{A}s$ tirées des observations méridiennes. Les chiffres donnés dans le tableau III font connaître que la précision avec laquelle les quantités $\mathcal{A}s$ sont déterminées n'est point la même pour les différentes étoiles. Surtout pour les étoiles 5, 8 et 10 l'erreur probable de $\mathcal{A}s$ est considérablement supérieure à celle des autres. Pour avoir un système de valeurs de $\mathcal{A}s$ plus uniforme en ce qui est du degré de précision, j'ai refait les calculs en supprimant ces étoiles. Alors la valeur moyenne de l'erreur d'observation probable s'abaisse à

$$\varepsilon_0 = \pm 0'',0030 .$$

Ainsi j'ai obtenu les nouvelles solutions contenues dans le tableau VII.

Tableau VII.

Solution	π	ξ	η	ε_σ	$\bar{\sigma}$
I	0'',0042	+ 0'',0070 \pm 0'',0025	+ 0'',0068 \pm 0'',0021	\pm 0'',0047	0'',0036
II	0,0085	+ 0,0090 \pm 0,0027	+ 0,0081 \pm 0,0023	\pm 0,0051	0,0041
III	0,0127	+ 0,0108 \pm 0,0030	+ 0,0095 \pm 0,0026	\pm 0,0057	0,0049

L'interpolation donne alors pour la parallaxe la valeur

$$\pi = + 0'',0076 .$$

Cette dernière valeur est sans doute plus sûre que celle obtenue auparavant. Les valeurs de ξ , η et $\bar{\sigma}$ y correspondant sont

$$\begin{cases} \xi = + 0'',0085 \pm 0'',0026 \\ \eta = + 0,0078 \pm 0,0023 \\ \bar{\sigma} = 0'',0040 . \end{cases}$$

Pour π j'adopte comme valeur définitive le chiffre arrondi

$$\pi = 0'',008 .$$

Il est difficile d'indiquer l'erreur probable de π . Des deux quantités, $\bar{\sigma}$ et $\bar{\rho}$, dont π dépend essentiellement, la première est assez

bien connue par la discussion des observations méridiennes. Quant à $\bar{\varrho}$ nous avons admis la valeur . .

$$\bar{\varrho} = 2,5^{km} .$$

D'après ce qui précède $\bar{\varrho}$ est indubitablement renfermé entre les limites $2,9^{km}$ et $2,1^{km}$. Si l'on fait le calcul en employant ces valeurs extrêmes, on obtient pour π les valeurs

$$\pi = + 0'',0063$$

et

$$\pi = + 0'',0095 .$$

J'estime que l'erreur probable de la valeur adoptée comme définitive peut être mise à $\pm 0'',001$ environ. En tous cas on exagérerait sans doute beaucoup en la mettant égale à $\pm 0'',002$.

Enfin, il résulte que la distance du groupe est de 125 parsecs en chiffre rond. Or l'étendue apparente du groupe étant à peu près 20° , son diamètre perpendiculaire à la ligne visuelle serait de 40 parsecs. En supposant que le diamètre suivant la ligne visuelle soit du même ordre de grandeur, on peut donc admettre que la parallaxe des étoiles les plus rapprochées soit de $0'',009$ et celle des plus éloignées, de $0'',007$ environ.

M. PLUMMER¹ a cherché à déterminer les distances des étoiles du type spectral *B* en posant comme hypothèse que les mouvements de toutes ces étoiles soient parallèles au plan de la Voie Lactée. Ses calculs ont été basés sur les mouvements propres de Boss et les vitesses radiales de M. CAMPBELL.

En employant une toute autre méthode M. CHARLIER² a également déterminé les distances des étoiles à hélium. M. CHARLIER a tout simplement supposé que les étoiles appartenant à la même classe spectrale aient la même grandeur absolue. Partant des étoiles à vitesse radiale connue, il a déduit des valeurs moyennes pour les grandeurs absolues. Ces valeurs moyennes étant prises comme vala-

¹ H. C. PLUMMER, l. c. (M. N. of the R. Astr. Soc., vol. 73, n:o 3, 1913).

² C. V. L. CHARLIER, l. c. (Nova Acta R. Soc. Sc. Upsal., sér. IV, vol. 4, n:o 7, 1916).

bles pour toutes les étoiles appartenant à une même classe, la grandeur apparente donne immédiatement la parallaxe.

M. KAPTEYN¹ a traité la question des parallaxes des étoiles à hélium dans une série de mémoires importants, dont celui qui vient de paraître s'occupe entre autres des étoiles ici en question. Il s'est établi que les étoiles à hélium ont une tendance fort prononcée à s'amasser en grands groupes ou courants, dont les membres ont des mouvements bien parallèles. En profitant de cette circonstance M. KAPTEYN a pu déterminer les parallaxes d'un grand nombre de ces étoiles avec un haut degré de sûreté. Quant à la région du ciel où est situé le groupe d'Orion, M. KAPTEYN a trouvé que les étoiles à hélium y forment un grand courant dont le vertex est à peu près:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 17^{\text{h}} 44^{\text{m}} \\ \delta = + 11^{\circ} . \end{array} \right.$$

La parallaxe moyenne des étoiles appartenant à ce courant est d'après M. KAPTEYN

$$\pi = 0'',0081 \pm 0'',0007 .$$

Le groupe d'Orion («the Nebula-group») est un groupe local situé si près de l'anti-vertex, que M. KAPTEYN n'en a pu directement déterminer la parallaxe par la même méthode. Cependant, en prenant en considération les lois des luminosités valables pour les étoiles dans et en dehors de ce groupe local, il a fait une appréciation du rapport de leurs parallaxes moyennes, et il a ainsi déduit pour le groupe d'Orion la parallaxe moyenne

$$\pi = 0'',0054 \pm 0,0009 .$$

M. KAPTEYN a eu égard aux dimensions du groupe en attribuant la parallaxe $0'',0057$ aux étoiles ayant un mouvement propre plus grand que $0'',008$, et la parallaxe $0'',0051$ aux autres. Il a tracé les limites du groupe un peu plus étroitement que je ne l'ai fait ci-dessus, de sorte que les étoiles 1, 2, 4, 7 et 15 n'entrent pas dans son »nebula-group«.

¹ J. C. KAPTEYN, l. c. (Contributions from the Mt Wilson Solar Obs., nos 82 et 147; Astrophys. Journ., vol. 40 et 47, 1914 et 1918).

Dans le tableau VIII, j'ai rapproché les valeurs trouvées par MM. PLUMMER, CHARLIER et KAPTEYN pour les étoiles en question. Les valeurs admises par M. KAPTEYN pour les parallaxes des étoiles appartenant au »nebula-group», et qui ne sont pas directement déduites des mouvements, ont été mises entre crochets.

Tableau VIII.

Étoile	π PLUMMER	π CHARLIER	π KAPTEYN
1	nég.	0",0103	0",0053
2	0",0203	0,0098	0,0055
3	0,0753	0,0115	[0,0057]
4	0,0066	0,0042	0,0061
5	nég.	0,0071	[0,0051]
6	0,0058	0,0053	[0,0057]
7	0,0267	0,0138	0,0087
8	0,0109	0,0036	[0,0057]
9	0,0006	0,0229	[0,0051]
10	0,0057	0,0079	[0,0057]
11	0,0076	0,0030	[0,0057]
12	0,0085	0,0344	[0,0051]
13	nég.	0,0258	[0,0057]
14	(0,1670)	0,0059	[0,0057]
15	nég.	0,0258	0,0063
16	—	0,0045	[0,0057]
17	—	0,0047	[0,0057]
18	—	—	[0,0051]

On voit que les valeurs trouvées par MM. PLUMMER et CHARLIER sont en général complètement en désaccord entre elles et avec celles de M. KAPTEYN. De plus, ces deux méthodes ont donné pour nos étoiles, sans doute situées à des distances peu différentes, des parallaxes tout à fait incompatibles. Cela paraît indiquer que ces méthodes, dont on pourrait se servir pour déduire des *valeurs moyennes* des parallaxes des étoiles à hélium considérées, sont inapplicables en ce qui est des parallaxes *individuelles* des différentes étoiles. L'étoile double β Scorpion pourra servir comme encore un exemple propre à jeter de la lumière sur la portée de l'hypothèse de M. CHARLIER. Les grandeurs apparentes des deux composantes sont $2,90^m$ et $5,06^m$. D'après ladite hypothèse, M. CHARLIER obtient pour le rapport des distances:

$$10^{0,2(5,06-2,90)} = 2,7 .$$

Ainsi la distance du compagnon serait à peu près 3 fois plus grande que celle de l'étoile principale, résultat incompatible avec le fait qu'il s'agit ici d'une étoile double, dont les composantes forment un système physique et, naturellement, sont situées à la même distance de nous.

En effet, on ne pourra pas supposer que toutes les étoiles appartenant à une certaine classe spectrale aient approximativement la même grandeur absolue. Les recherches de M. KAPTEYN sur les lois des luminosités des étoiles à hélium ont mis à jour que les différences en grandeur absolue des étoiles appartenant à la même classe s'élèvent souvent à 4^m ou encore davantage. C'est donc à dire que la luminosité d'une étoile peut bien être 50 fois plus grande que celle d'une autre. Dans certains cas, on trouvera même des différences beaucoup plus grandes¹. Dans cet état des choses, la détermination des distances individuelles faite en partant simplement des grandeurs apparentes ne paraît pas bien justifiée. Ainsi, il semble que les rapprochements qu'a faits M. CHARLIER des valeurs de quelques-unes des parallaxes calculées d'après son hypothèse à celles déterminées à l'aide de mesures directes soient assez illusoires. On pourrait en dire autant des considérations qu'il a faites sur ces parallaxes (d'ailleurs n'embrassant que les étoiles les plus brillantes), comme donnant une sorte d'»image de squelette» du système de la Voie Lactée.

Il paraît à priori que la méthode de M. PLUMMER se prêterait mieux à la détermination des parallaxes des étoiles à hélium. Sans doute, les mouvements de ces étoiles ont une tendance générale à se diriger parallèlement au plan de la Voie Lactée. Cependant, notre groupe est situé si près de l'anti-vertex des mouvements que la méthode n'est guère applicable dans ce cas. Voilà pourquoi cette méthode a donné pour nos étoiles des résultats si mauvais. Dans d'autres régions du ciel les parallaxes calculées d'après cette méthode seront peut-être plus sûres.

En tout cas, c'est en étudiant les grands courants des étoiles à hélium que M. KAPTEYN a pu le premier aller jusqu'au bout de la possibilité de déterminer les distances d'un grand nombre de ces étoiles en se servant de leurs mouvements.

¹ D'après les estimations de M. W. H. PICKERING (Harvard Coll. Obs. Circular 205, 1918), les plus grandes différences de grandeur absolue des étoiles du type *B* dans le voisinage immédiat de la nébuleuse d'Orion s'élèveraient même à 11^m, ce qui correspond à un rapport des luminosités de 25 000 fois!

Pour me faire une idée des relations qu'ont, entre elles, les trois méthodes mentionnées, j'ai fait une comparaison des valeurs trouvées pour les distances de 66 étoiles communes aux catalogues des trois calculateurs (je me suis borné au premier des catalogues de M. KAPTEYN, embrassant le grand courant des étoiles à hélium dans l'hémisphère australe). La distance moyenne de ces 66 étoiles est, selon M. KAPTEYN, à peu près = 100 parsecs. En prenant les valeurs de M. KAPTEYN comme des »standards», j'ai trouvé que les écarts s'élèvent, aussi bien pour le catalogue de M. PLUMMER que pour celui de M. CHARLIER, en moyenné à 60 parsecs environ. On trouve aussi que les valeurs de M. CHARLIER sont systématiquement trop grandes.

La valeur que j'ai déduite pour la parallaxe du groupe est presque identique à celle trouvée par M. KAPTEYN pour la parallaxe moyenne du grand courant qui entoure le groupe. Il s'ensuivrait de là que le groupe d'Orion fait probablement partie, avec la grande nébuleuse, de ce grand courant, dont il constitue peut-être une sorte de noyau. En effet, la différence des parallaxes que M. KAPTEYN avait déduite du rapprochement des lois des luminosités, ne semble pas si grande ni si indubitablement établie qu'elle rende inadmissible une telle hypothèse. Quoi qu'il en soit, on pourra regarder comme sûrement fixé l'ordre de grandeur de la distance du groupe des étoiles à hélium et de la grande nébuleuse d'Orion.

Il faut encore noter, à ce sujet, que les parallaxes hypothétiques que M. HERTZSPRUNG a déduites pour quelques étoiles doubles appartenant à ce groupe sont du même ordre de grandeur que la valeur trouvée ci-dessus. M. HERTZSPRUNG a trouvé:¹

$$\begin{aligned} \text{pour } \zeta \text{ Orion} &= \text{Boss 1398: } \pi = 0'',_{0032} \\ \text{» } \sigma \text{ »} &= \text{» 1389: } \pi = 0'',_{0060} \\ \text{» 32 »} &= \text{» 1331: } \pi = 0'',_{0138} . \end{aligned}$$

M. STEBBINS² a déduit des variations d'éclat de δ Orion, étoile variable du type d'Algol, une parallaxe hypothétique plus petite, à savoir

$$\pi = 0'',_{0032}.$$

¹ Astrophysical Journal, Vol. 47, p. 170, 1918.

² J. STEBBINS, The eclipsing variable star δ Orionis (Astroph. Journal, vol. 42, n:o 2, 1915).

La moyenne de ces 4 valeurs est

$$\pi = 0'',0078,$$

valeur presque identique à celle trouvée ci-dessus.

Les valeurs que j'ai trouvées pour les quantités ξ , η donnent pour le mouvement annuel de l'étoile δ Orion relativement au groupe:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\alpha} = + 0'',0085 \pm 0'',0026 \\ \mu_{\delta} = + 0'',0078 \pm 0'',0023 . \end{array} \right.$$

Dans le catalogue de Boss, on trouve pour le mouvement propre en α et en δ de cette étoile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = + 0'',0015 \pm 0'',0014 \\ \mu' = - 0'',0030 \pm 0'',0014 . \end{array} \right.$$

Delà, on trouverait pour le mouvement propre total du groupe entier:

$$\bar{\mu} = 0'',013 \pm 0'',003 .$$

dans l'angle de position

$$\bar{P} = 213^{\circ} .$$

Certes, ces chiffres ne sont pas très certains. Cependant, on ne peut guère nier que les mouvements propres donnés par Boss pour les étoiles de ce groupe indiquent une tendance assez marquée à se diriger dans cette direction.



NOVA ACTA REGIAE SOCIETATIS SCIENTIARUM UPSALIENSIS

SER. IV. VOL. 5. N:o 3.

SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES
PARTIELLES A QUATRE DIMENSIONS

ET

LE PROBLÈME OPTIQUE DES MILIEUX
BIREFRINGENTS

PAR

NILS ZEILON

v Première Partie

(PRÉSENTÉ A LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES D'UPSALA LE 7 NOV. 1919)

UPPSALA

EDV. BERLINGS BOKTRYCKERI A.-B.

1919.

A Monsieur VITO VOLTERRA

Hommage de reconnaissance et de respect

Introduction.

1. Les équations dont s'occupe le présent travail s'écrivent en forme symbolique:

$$A. \quad f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u}\right) U = \varphi(x, y, z, u).$$

On a dénoté par f un polynôme *homogène* de degré quelconque, aux coefficients constants arbitraires, des quatre symboles de dérivation, tandis que φ est une fonction arbitraire des quatre variables indépendantes.

On sait que l'étude des équations A renferme des problèmes fameux dans le développement de la Physique Mathématique. Il suffit de citer certains cas de mouvement ondulatoire, dont celui de la propagation des ondes élastiques dans un milieu quelconque est le prototype bien connu et important.

Sauf pour le cas le plus simple des équations de deuxième ordre, la théorie des équations ci-dessus, encore très peu avancée au point de vue des généralités, se rapporte plutôt à des problèmes spéciaux dont la Physique exige la résolution dans des conditions toutes particulières. Le but que nous nous proposons ici est de déduire les propriétés communes aux équations de la forme A en tant qu'elles se manifestent par l'analyse de *l'intégrale fondamentale*. On sait que le problème ainsi posé, tout en étant le plus simple dans l'ordre des idées générales est aussi d'une grande importance pour la Physique. Rappelons par exemple un problème historique qui a bien des fois attiré l'attention des mathématiciens sans que la résolution en ait encore été fournie. Le problème du centre lumineux à l'intérieur d'un cristal à

deux axes renferme tout ce qui reste d'obscur et de mystérieux dans l'optique des milieux biréfringents, et sera résolu dès qu'on connaîtra les propriétés de l'intégrale fondamentale d'une équation de sixième ordre appartenant au type A.

2. La discussion suivante se rattachera à l'expression

$$I. \quad F = \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \frac{e^{i(ax + \beta y + \gamma z + \delta u)}}{f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} d\alpha d\beta d\gamma d\delta ;$$

expression d'abord purement symbolique et construite dans le but de satisfaire d'une manière formelle à l'équation

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u}\right) \int_D F(x-x_0, y-y_0, z-z_0, u-u_0) \varphi(x_0, y_0, z_0, u_0) dx_0 dy_0 dz_0 du_0 = \\ = \varphi(x, y, z, u),$$

(x, y, z, u) étant un point arbitraire à l'intérieur du domaine D à 4 dimensions, et la fonction φ étant supposée développable en forme d'une intégrale de FOURIER octuple.

L'expression I est symbolique, nous venons de le dire; en effet elle est le plus souvent divergente, et il faudra lui donner un sens en appliquant une méthode de sommation convenable. La fonction ainsi obtenue sera l'intégrale fondamentale de l'équation A, et il s'agira de discuter ses propriétés et en premier lieu le caractère de ses discontinuités. On verra que la discussion n'est pas sans présenter des difficultés d'une nature souvent curieuse, résultant surtout de la nécessité d'admettre que *l'équation A soit à caractéristique réelle*. C'est là une nécessité essentielle vu le fait qu'une restriction à cet égard rendrait nos résultats dépourvus de tout intérêt physique.

Chapitre I.

Géométrie de la caractéristique.

1. Il nous sera d'abord indispensable de rappeler certaines notions de la théorie des surfaces algébriques. On y retrouvera, dans une forme quelquefois modifiée pour notre but spécial, des applications bien connues et souvent fort élémentaires du principe de dualité.

Soit l'équation A d'ordre n , supposée homogène et irréductible; la caractéristique est alors définie par l'équation *tangentielle*

$$1) \quad f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 ,$$

équation dans laquelle, à cause de l'homogénéité, nous mettrons souvent

$$\gamma = 1 .$$

Dans l'espace à 4 dimensions des x, y, z, u l'équation 1) représente une surface homogène, savoir un *cône*, dont l'équation ponctuelle s'obtient par l'élimination de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entre 1) et les équations

$$2) \quad \frac{x}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}} = \frac{y}{\frac{\partial f}{\partial \beta}} = \frac{z}{\frac{\partial f}{\partial \gamma}} = \frac{u}{\frac{\partial f}{\partial \delta}}$$

lesquelles, le plus souvent, nous écrirons

$$\frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2} = \frac{z}{f_3} = \frac{u}{f_4} .$$

Il suffira de connaître la section de la surface conique par un plan quelconque qui ne passe pas par l'origine des coordonnées. Choisissons par exemple le plan

$$u = \text{const, soit } = 1 ,$$

nous aurons une surface algébrique dans l'espace à trois dimensions des (x, y, z) . C'est cette projection de la caractéristique dans l'espace ordinaire que nous étudierons par la suite et à laquelle pour plus de brièveté nous donnerons souvent le nom de caractéristique.

2. Soit, pour n fixe:

$$\Gamma(x, y, z, u) = 0$$

la projection ainsi définie; les équations 1) et 2) expriment ce fait bien connu que Γ est l'enveloppe de l'ensemble de plans

$$3) \quad ax + \beta y + z + \delta u = 0$$

dont les paramètres satisfont à la relation

$$f(\alpha, \beta, 1, \delta) = 0.$$

Par l'élimination de α on arrive à l'équation

$$f\left(-\frac{\beta y + z + \delta u}{x}, \beta, 1, \delta\right) = f^{(\alpha)} = 0$$

d'une *courbe algébrique* entre β et δ dans laquelle x, y, z, u entrent en qualité de paramètres. Les conditions pour que (x, y, z, u) se trouve sur Γ s'expriment par les relations

$$4) \quad xf_2 - yf_1 = 0, \quad uf_1 - xf_4 = 0,$$

soit

$$4 \text{ bis) } \quad \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \delta} = 0.$$

Ainsi la caractéristique se définit comme le *lieu géométrique* des x, y, z, u pour lesquels la *courbe algébrique* $f^{(\alpha)}$ (ou ses équivalents $f^{(\beta)}, f^{(\delta)}$) possède des points doubles.

La nouvelle définition est la conséquence immédiate de la réciprocity des surfaces f et Γ . Coupons l'espace (α, β, δ) où l'on a dessiné la surface $f(\alpha, \beta, 1, \delta) = f(\alpha, \beta, \delta) = 0$ par un plan arbitraire 3), x, y, z, u étant des paramètres. L'équation $f^{(\alpha)}$ nous donne alors la section dans le plan par la surface f . En vertu de la correspondance par

dualité ce plan est tangent à f chaque fois que (x, y, z, u) se trouve sur I , et la définition ci-dessus n'exprime que ce fait que la section par un plan tangent est une courbe algébrique possédant le point de contact comme point double.

3. Voici une première indication d'une correspondance importante que nous aurons à approfondir plus loin. Le point double est un point isolé ou non selon le signe du déterminant HESSIEN

$$\left(\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta \partial \delta}\right)^2 - \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \delta^2},$$

e. à. d. selon que la surface

$$f(\alpha, \beta, \delta) = 0$$

est convexe ou aux courbures opposées dans le point (α, β, δ) considéré. Or, on sait que les deux domaines: le voisinage de (α, β, δ) et le voisinage réciproque de (x, y, z, u) sur I , qui se correspondent par dualité, sont ou tous les deux convexes ou tous les deux à courbures opposées. Donc: la nature de I au point (x, y, z) décide de la nature du point double de la courbe $f^{(\alpha)}$.

Dans la suite, sauf un cas d'exception dont nous ferons bientôt mention, nous faisons pour la théorie générale l'hypothèse restrictive que la surface $f(\alpha, \beta, \delta)$ soit dépourvue de singularités ponctuelles. Cela revient donc au même que la surface I manque de singularités tangentielles (plans tangents doubles etc.); son ordre, ou la classe de f , est alors égal à $n(n-1)^2$, et elle possède un certain nombre de lignes doubles etc. correspondant aux singularités tangentielles de f . Parmi ces singularités tangentielles il importe de noter la courbe parabolique qui divise f en domaines alternativement convexes et aux courbures opposées, correspondant, comme nous venons de le remarquer, à des domaines de I de la même nature. Dans l'hypothèse admise ci-dessus, une surface I arbitraire ne possède pas de courbe parabolique, mais les dits domaines sont séparés par des courbes qui constituent autant de branches d'une arête de rebroussement. En effet, I possède une arête de rebroussement laquelle correspond à la surface développable enveloppée par les plans tangents à la courbe parabolique de f . Sur cette dernière surface, le passage d'un domaine convexe à un domaine de

l'autre catégorie se fait à travers la courbe parabolique, aux points de laquelle l'un des rayons de courbure est *infini*, tandis que sur I' le passage analogue se fait par les points de l'arête de rebroussement où le produit des rayons de courbure est *nul*.

4. *Les cônes* Γ_δ . Pour approfondir les rapports qui lient notre théorie actuelle à celle des équations à trois variables, la représentation particulière suivante de I' nous sera souvent utile. Considérons les équations

$$f(\alpha, \beta, 1, \delta) = 0,$$

$$I \quad \alpha x + \beta y + z + \delta u = 0 = \alpha x + \beta y + z' = 0,$$

$$x f_2 - y f_1 = 0.$$

auxquelles il faut ajouter

$$I' \quad x f_4 - u f_1 = 0$$

pour avoir le système complet de la caractéristique. On vérifie immédiatement que l'équation I' s'obtient en écrivant que les équations I subsistent pour les deux valeurs δ et $\delta + d\delta$, de manière que I' se présente comme l'enveloppe de la famille des surfaces I , où l'on a regardé δ comme un paramètre variable.

Prenons une valeur fixe quelconque de δ ; nous reconnaissons que les équations I ont la forme du système qui détermine la caractéristique de l'équation aux trois variables x, y, z' :

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z'}, \delta \frac{\partial}{\partial z'}\right) U = \varphi.$$

Pour la connaissance des cônes Γ_δ , définis par I , il suffit donc de se référer à la théorie connue¹ des équations à 3 dimensions.

Dans l'espace des α, β, δ , la première des équations I représente la section de la surface $f(\alpha, \beta, \delta)$ par un plan $\delta = \text{const}$. La courbe algébrique entre α et β , ainsi obtenue, ne possède pas en général de points doubles. Une exception ne pourra se produire que dans

¹ Sur les intégrales fondamentales des équations à caractéristique réelle de la Physique Mathématique. Arkiv f. mat. Stockholm 1913.

l'un des cas suivants. 1) La surface f possède une ligne double, 2) f possède un point double par lequel passe le plan δ considéré, 3) Le plan δ est tangent à f . Nous venons d'écarter les deux premiers cas, tandis que le troisième sera facilement inclus dans la discussion suivante en qualité de cas limite. Le cône Γ_δ sera donc, en général, donné par une équation homogène en x, y, z' :

$$5) \quad \Gamma_\delta(x, y, z') = 0$$

d'ordre $n(n-1)$; la section C_δ de ce cône par un plan quelconque qui ne passe pas par le sommet

$$x = y = z' = 0,$$

sera une courbe dépourvue de singularités tangentielles, c. à. d. qui n'a pas de tangente double ni d'inflexion. Nous connaissons d'ailleurs dans ses traits principaux la conformation des C_δ ; pour cela rappelons pour un moment l'importance algébrique du cône caractéristique d'une équation à 3 variables.

5. Dans l'équation 5) $\Gamma_\delta(x, y, z')$ n'est autre chose que le discriminant irréductible du système algébrique aux deux inconnues α, β :

$$6) \quad \begin{aligned} f(\alpha, \beta, \delta) &= 0, \\ \alpha x + \beta y + z' &= 0, \end{aligned}$$

δ ayant toujours sa valeur paramétrique fixe. Au point de vue algébrique Γ_δ est donc le lieu des x, y, z' pour lesquels deux paires de racines (α, β) se confondent. On sait que les deux racines $(\alpha_\mu, \beta_\mu), (\alpha_\nu, \beta_\nu)$ qui deviennent égales au passage d'une branche $\Gamma_{\delta, \mu\alpha}$ de Γ_δ , sont réelles sur le côté convexe et deviennent complexes et conjuguées sur le côté concave de $\Gamma_{\delta, \mu\nu}$. Deux branches $C_{\delta, \mu\nu}$ et $C_{\delta, \mu\alpha}$ qui permutent la même branche (α_μ, β_μ) avec deux autres, (α_ν, β_ν) soit (α_x, β_x) , se rencontrent en un point de rebroussement autour duquel on aura en général une permutation cyclique entre les trois racines. Définissons les branches de C_δ qui permutent une même branche α_μ , en fixant cette branche par exemple au moyen d'un prolongement analytique exécuté à partir d'un point Q où α_μ est complexe, et étendu

dans toutes les directions jusqu'à ce qu'on rencontre partout des branches de C_δ qui permutent α_μ . L'ensemble des $C_{\delta\mu\nu}$ ainsi trouvés formera un polygone, dont les angles seront des points de rebroussement, et qui tourne toujours son côté concave vers Q .

On a ainsi, pour la configuration des I_δ , une idée assez précise qui nous permettra des conclusions sur les circonstances algébriques de notre problème actuel. En résumé, nous avons choisi de représenter I' au moyen de l'ensemble de ceux de ses cônes tangents, au nombre ∞^1 , dont les sommets se trouvent sur une droite passant par l'origine

$$x = y = z = 0$$

de l'espace ordinaire; droite d'ailleurs arbitraire, car le choix de l'axe des z ne représente évidemment qu'une simplification purement formelle qui dans tous les cas pourrait être effectuée au moyen d'une transformation homographique convenable. Les sommets des cônes appartenant à notre système particulier remplissent donc l'axe des z , mais il est évident que pour certains intervalles de l'axe les cônes correspondants pourront être tout à fait imaginaires. Un tel intervalle est alors limité par des points dans lesquels l'axe des z pénètre I' et où la partie réelle du cône tangent a dégénéré dans le seul plan tangent mené à I' par ce point.

Prenons toujours une valeur particulière de δ et soit \bar{z} la valeur de z qui définit le sommet de I_δ ; on aura les coordonnées du sommet

$$7) \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \bar{z} + \delta u = 0.$$

6. Tout point de I' appartient ainsi à deux cônes infiniment voisins. Pour les questions algébriques qui se rattachent à cet arrangement il sera commode de se laisser guider par la construction géométrique. Prenons un point (x', y', z') voisin du point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de I' dans l'espace $u = \text{const}$, et coupons par un plan passant par $(x' y' z')$ et l'axe des z . *Ecartons d'abord le cas où la section de I' par ce plan possède un point d'inflexion voisin de $(x' y' z')$* ; on aura donc une courbe qui, selon le cas, est convexe ou concave vers ce point, tandis que les différents cônes I_δ sont coupés le long de génératrices rectilignes issues des points de l'axe des z et tangentes à la dite section de I' .

Pour définir les cônes I_δ qui passent par (x', y', z') il suffit de faire, dans la section plane, la construction des tangentes menées par $(x'y'z')$. Si ces tangentes découpent sur l'axe des z les ordonnées z_1, z_2 etc., les valeurs δ correspondantes résultent immédiatement de la relation 7), savoir

$$8) \quad \delta_1 = -\frac{\tilde{z}_1}{u}, \quad \delta_2 = -\frac{\tilde{z}_2}{u}, \text{ etc.}$$

Parmi ces valeurs δ on en trouve deux qui se confondent quand (x', y', z') , en se tenant dans le plan choisi, vient coïncider avec (Pl. I) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. La fig. 1 (Pl. I) accuse la différence entre les côtés convexe et concave de la section de I ; l'un sera le domaine de deux tangentes réelles donnant des δ_1, δ_2 voisins et réels, tandis que sur l'autre les deux tangentes sont devenues imaginaires en même temps que δ_1, δ_2 sont devenus complexes (et conjugués).

Par ce raisonnement nous arrivons à une définition modifiée de I , savoir *comme le lieu des points (x, y, z) pour lesquels deux points de branchement δ se confondent.*

Ce qu'on a voulu dire par »point de branchement« résulte nettement de ce qui précède. Au lieu de faire varier (x', y', z') et tenir δ fixe, tenons ce point fixe et faisons varier δ . Les racines (α, β) des équations 7) deviennent alors des fonctions algébriques de δ , dont deux branches coïncident quand on se trouve sur un cône I_δ . Cela, pour $x = x'$, etc., arrive quand

$$\delta = \frac{\delta_1}{\delta_2},$$

de manière que ces deux valeurs nous donneront des points de branchement des deux fonctions algébriques α, β . On retrouve la définition de I comme le lieu des points doubles d'une courbe algébrique, mais la nature des points doubles est maintenant, pour ainsi dire, précisée de manière qu'on se les figure comme le *résultat de la fusion de deux points de branchement.*

7. Prenons toujours la fig. 1, où la droite OC représente la génératrice rectiligne d'un cône I_δ . Faisons tourner le plan secteur autour de l'axe des z ; on aura des figures successives du type 1, et OC engendrera une branche $I_{\delta, \mu\nu}$, dès que, comme nous le suppo-

sons, on ne dépasse aucune des arêtes de rebroussement de I_δ . Considérons le domaine de I qui est ainsi engendré par $I_{\delta, \mu\nu}$ et la même branche des cônes voisins. Parmi l'ensemble de génératrices des cônes I_δ , qui enveloppent cette partie de I on ne trouve alors aucune tangente principale (ou d'inflexion) de I , car d'après un théorème bien connu une telle tangente n'est autre que l'arête de rebroussement d'un cône tangent. Il résulte alors que le domaine considéré de I , soit $I_{\mu\nu}$, se trouve entièrement d'un seul côté d'un $I_{\delta, \mu\nu}$ arbitraire, et qu'il est tangent à $I_{\delta, \mu\nu}$ le long d'une courbe engendrée par le point de contact C de la fig. 1, laquelle tourne son côté concave vers la même direction que les $I_{\delta, \mu\nu}$. On en tire que la partie de I engendrée par la fig. 1, est convexe, si les $I_{\delta, \mu\nu}$ sont concaves vers la gauche, et qu'elle est à courbures opposées dans le cas contraire, résultat qui s'exprime en disant qu'un domaine de I est l'enveloppe des côtés concaves ou convexes des branches de cônes correspondantes, selon qu'il est convexe ou à courbures opposées.

L'orientation différente des I_δ envers I entraîne des circonstances algébriques différentes. Appelons, par abréviation, le «côté extérieur» de I , celui qui tourne vers les I_δ , et supposons que $(x'y'z')$ franchisse I en allant du côté extérieur au point $(x''y''z'')$ du côté intérieur. Au commencement on a donc deux valeurs δ_1, δ_2 voisines et réelles qui deviennent complexes et conjuguées après le passage de I par $C = (\bar{x} \bar{y} \bar{z})$. La nature de I en $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ se fait remarquer dans la manière dont se comportent les fonctions algébriques (α_μ, β_μ) .

Soit p. ex. le cas d'un domaine convexe. En se reportant à la figure on reconnaît que (x'', y'', z'') se trouve du côté concave de toute branche $I_{\delta, \mu\nu}$ en question, tandis qu'à l'extérieur les cônes I_δ qui satisfont à la relation

$$\delta_1 < \delta < \delta_2$$

tournent leurs côtés convexes vers $(x'y'z')$. Ainsi le passage de $(x''y''z'')$ en $(x'y'z')$ fait franchir, en allant des côtés concaves aux côtés convexes, certain petit intervalle de cônes I_δ , intervalle dont l'étendue est déterminée par les deux cônes réels et voisins qui passent par $(x'y'z')$. Le cas des courbures opposées diffère par ce que le passage des cônes de cet intervalle se fait dans la direction contraire. Rappelons ce que nous venons de dire sur la réalité des (α_μ, β_μ) , nous concluons que

dans le cas d'un domaine convexe les fonctions algébriques α_μ, β_μ , en général complexes dans le domaine de valeurs réelles δ considéré, deviennent par le passage de I , réelles pour tout δ à l'intérieur de l'intervalle $\delta_1 < \delta < \delta_2$, tandis que dans le cas des courbures opposées ces mêmes fonctions, en général réelles, deviennent complexes pour $\delta_1 < \delta < \delta_2$.

8. La construction du n° 6 nous servira à étendre au cas de 4 dimensions une notion qui nous a été utile dans la théorie des équations à trois variables.

Soit, à l'extérieur de I , (x, y, z) un point au voisinage d'un cône $I_{\bar{\delta}}$ dont le sommet définit la valeur $\bar{\delta}$ correspondante, et parmi le nombre des cônes passant par (x, y, z) distinguons I_{δ_1} et I_{δ_2} . Quand (x, y, z) s'approche d'un point de $I_{\bar{\delta}}$, l'un de ces deux cônes coïncidera avec $I_{\bar{\delta}}$, c. à. d. δ_1 , soit δ_2 , deviendra égal à $\bar{\delta}$. Nous disons, selon le cas, que la racine δ_1 ou δ_2 est adjointe à $I_{\bar{\delta}}$ en ce point.

La construction géométrique montre¹ que I_{δ_1} et I_{δ_2} ont des sommets qui sont situés:

du même côté de $\bar{\delta}$ quand (x, y, z) se trouve entre I et $I_{\bar{\delta}}$

de l'un et de l'autre côté, quand (x, y, z) se trouve à l'extérieur et de I et de $I_{\bar{\delta}}$.

Supposons que nous restions dans ce dernier domaine. L'observation ci-dessus sert alors à séparer les branches δ_1 et δ_2 ; stipulons p. ex. que δ_1 soit inférieur à $\bar{\delta}$. Cette stipulation faite, les deux branches sont définies par prolongement analytique, sans aucune ambiguïté, dès qu'on s'abstient de toucher à I . Or, faisons tendre (x, y, z) vers $I_{\bar{\delta}}$; le résultat sera différent selon qu'on s'approche de l'un ou de l'autre côté de la courbe de contact $C_{\bar{\delta}}$ de $I_{\bar{\delta}}$ avec I . En effet, en s'approchant dans la fig. 1 de la partie de $I_{\bar{\delta}}$ au-dessus de $C_{\bar{\delta}}$, c'est évidemment le cône dont le sommet est au-dessus de z qui y coïncide avec $I_{\bar{\delta}}$ tandis que les circonstances sont renversées au-dessous de $C_{\bar{\delta}}$. Il y a donc, sur la courbe $C_{\bar{\delta}}$, entre les deux branches δ_1 et δ_2 , un échange du rôle de racine adjointe; Dans la fig. 1, δ_2 est la racine adjointe à $I_{\bar{\delta}}$ au-dessus de $C_{\bar{\delta}}$, et δ_1 remplit la même fonction au-dessous de cette courbe; c'est le résultat d'une permutation entre les deux branches, effectuée sur $C_{\bar{\delta}}$ en vertu du contact avec I .

¹ Le cas singulier d'une tangente d'inflexion étant toujours écarté.

Tout cela nous a donné des résultats que nous retrouverons plus loin au moyen du calcul effectif. Appelons encore l'attention sur une formule qui jouera alors un certain rôle. Soit, par abréviation

$$\delta = 0 ,$$

il résulte de ce que nous venons de dire que δ_1 et δ_2 sont alors de signes contraires à l'extérieur commun de I et $I_{\bar{\delta}}$ et de même signe entre I et $I_{\bar{\delta}}$. Tenant encore compte de ce que ces deux valeurs sont complexes et conjuguées à l'intérieur, il vient:

$$\delta_1 \delta_2 < 0 \text{ à l'extérieur de } I_{\bar{\delta}} = I_0$$

$$\delta_1 \delta_2 < 0 \text{ à l'intérieur de } I_{\bar{\delta}} ,$$

«l'intérieur de $I_{\bar{\delta}}$ » étant alors défini comme ce voisinage de $I_{\bar{\delta}}$ qui contient la partie de I enveloppée par les branches considérées des $I_{\bar{\delta}}$.

9. *Introduction d'un cas singulier.* Jusqu'ici nous avons laissé de côté les singularités tangentielles que pourra présenter la section plane de notre représentation géométrique. Dans le cas général les singularités du cône $I_{\bar{\delta}}$ appartiennent aux deux catégories des *arêtes de rebroussement* où deux branches $I_{\bar{\delta}, \mu\nu}$, $I_{\bar{\delta}, \mu\lambda}$ se confondent et des *génératrices doubles* où deux branches se pénètrent sans se confondre. A ces singularités correspondent, dans la section plane des $I_{\bar{\delta}}$, des singularités tangentielles: l'arête de rebroussement devient une tangente principale, c. à. d. tangente d'inflexion, tandis que la génératrice double touche I en deux points qui ne se confondent pas.

Commençons par la tangente double, qui dans le cas d'une surface f sans singularités, ne comporte pas grande difficulté, les branches de $I_{\bar{\delta}}$ ne s'y confondant pas. Prenons la fig. 2, où l'on a dessiné deux »branches» de I , enveloppées par des branches *distinctes* des $I_{\bar{\delta}}$. La construction mènera, pour chaque point de la génératrice double, à deux racines adjointes qui deviennent égales quand on s'en approche. Néanmoins il n'y aura aucune confusion puisque ces deux racines appartiennent à des branches distinctes de $I_{\bar{\delta}}$ et ne deviennent égales que par accident due au rôle double que joue OC comme appartenant aux deux branches qui s'y coupent. Les conclusions ci-dessus

subsistent donc sans modification à condition, bien entendu, que l'on veuille à ce que la définition de la racine adjointe se fasse expressément pour une branche déterminée $I_{\bar{\delta}, \mu\nu}$ de $I_{\bar{\delta}}$.

Le cas de la tangente double, peu intéressant en lui-même, nous donnera cependant l'occasion d'introduire un cas singulier, important par l'intérêt des applications qui s'y rattachent, et qu'il sera convenable de traiter dès maintenant.

En prenant, dans le cas ordinaire, une section voisine de celle dessinée dans la fig. 2, la tangente double voisine de OC ne passe plus par \bar{z} . Supposons maintenant que cela arrive au contraire pour toute section voisine; l'ensemble des tangentes doubles passant par $\bar{\delta}$ engendrent une partie de cône correspondant à deux branches $I_{\bar{\delta}, \mu\nu}$ qui sont venues se confondre totalement. On a alors un cas singulier, et les circonstances algébriques se sont modifiées.

Laissant de côté le cas où la surface f possède des lignes doubles, passons de suite au cas qui réalise les conditions formulées ci-dessus; c'est celui où f possède des points (coniques) doubles. Dans la surface réciproque correspondra à ce point un *plan tangent double* qui touche I le long d'une courbe plane, laquelle par dualité correspond au cône tangent à f mené par le point conique. C'est donc une courbe de second ordre, ce cône tangent étant de cet ordre, et par sa correspondance à une surface développable c'est nécessairement une courbe *parabolique*.

Soit \bar{z} le point où le plan tangent double coupe l'axe des z ; tout vecteur, issu de z , qui coupe la courbe de contact C de second ordre, sera une tangente double de I ; on se trouvera donc dans le cas décrit ci-dessus où l'on aura tout un intervalle de sections planes de la forme 2.

Le cas classique est représenté par la fig. 3 (Pl. I). C_1 et C_2 sont les deux sections du plan secteur OC_1C_2 par la courbe C , laquelle dans un cas spécial célèbre est un cercle. Pour avoir une idée de l'arrangement on s'imagine que la fig. 3 représente une surface de révolution autour d'un axe mené par le *point conique* Q (lequel d'ailleurs est l'image par réciprocity d'une courbe parabolique de f à propriétés analogues à la courbe C). Vu de l'extérieur le domaine entre Q et C montre l'aspect d'un trou circulaire au centre Q aux

parois à courbures opposées et dont la courbe parabolique forme la lèvre supérieure circulaire, le tout couvert par la plaque plane du plan double. Au delà du trou la surface est partout convexe.

Cela posé, la fig. 3 servira à étudier les racines adjointes au plan double. Au voisinage de C_2 , p. ex., on aura 3 racines δ qui se confondent en $\bar{\delta}$, et par conséquent il y aura 3 branches δ entre lesquelles il faut partager le rôle de racine adjointe. Fixons ces branches $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ au point A_2 , voisin de C_2 , choisi arbitrairement à «l'extérieur» du plan P , de manière que δ_1, δ_2 représentent les deux racines qui se confondent sur I' , au voisinage de C_2 . On reconnaît que le rôle de racine adjointe s'échange toujours d'après le même principe entre δ_1 et δ_2 , le passage à travers C_2 permutant ces deux racines entre elles. On aura en outre la branche δ_3 , adjointe au plan double, et cela *aux deux côtés de C_2* .

Il y aura de même trois branches à discuter autour de C_1 . Quant à la manière dont ces branches résultent par prolongement analytique des racines existant au point A_2 , on rencontre là une question quelque peu délicate qu'il nous faudra renvoyer à un moment ultérieur après quelques préliminaires indispensables.

10. *Circonstances particulières au voisinage d'un domaine de I' à courbures opposées.* La cas singulier du n° précédent montre que la définition de I' comme lieu des points δ confondus n'est plus absolument juste, puisqu'elle inclut aussi le plan singulier. Nous allons pourtant voir plus tard que le plan double conserve l'analogie avec I' aussi sous des rapports moins artificiels, ce qui pourrait servir à motiver la définition. Seulement elle reste en défaut par d'autres raisons encore; c'est ce que la discussion des *tangentes principales*, laissée jusqu'ici de côté, nous fera voir.

Soit en effet la section plane de I' par un plan passant par l'axe des z , et supposons que cette section contienne une tangente d'inflexion. La section découpe alors nécessairement un domaine de I' à courbures opposées; on va reconnaître *qu'une coïncidence entre deux racines δ peut alors avoir lieu sans l'intervention de I'* . En effet, dans ladite section, le passage de (x, y, z) à travers la tangente d'inflexion, exécuté sans toucher à I' , confond, eu les faisant changer de réalité, deux tangentes δ , qui, tant qu'elles sont réelles, touchent I' aux deux côtés du point d'inflexion. Ce dernier, point de contact entre

T et une tangente d'inflexion, correspond évidemment à *trois* racines confondues.

Considérons maintenant des sections voisines successives et traçons partout les tangentes d'inflexion. L'ensemble des tangentes engendrera une surface réglée I_δ tangente à T le long de la courbe i_δ des points d'inflexion. Le côté réel de T (par rapport aux racines δ) étant toujours celui que tourne T vers le cône tangent, on reconnaît que par le passage à travers i_δ les côtés réel et complexe s'échangent entre eux.

La surface I_δ est encore un lieu géométrique qui fait confondre deux valeurs δ . Appelons «l'intérieur de I_δ » le domaine contenu entre I_δ et T ; la fig. 4 montre immédiatement qu'à un point de ce domaine correspondent trois racines qui se confondent et deviennent imaginaires par le passage à travers l'une des génératrices de I_δ . On poursuit facilement la connexion des branches en faisant un circuit autour du point d'inflexion.

Partons de Q_1 (fig. 4) avec les trois branches $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ qui coïncident toutes les trois dans le point d'inflexion C_i et dont δ_2, δ_3 correspondent à des tangentes touchant T au voisinage de C_i . En franchissant I_δ en Q' , δ_2 et δ_3 se confondent de manière qu'en Q'' au delà de I_δ il n'existe qu'une seule branche réelle qui s'appelle toujours δ_1 . Franchissons T ; on retrouvera de nouveau en Q_2 les deux branches δ_2, δ_3 ; soit p. ex. δ_2 celle qui est la plus voisine de la valeur commune en C_i . Franchissons I_δ en Q''' ; ce sont maintenant les branches δ_1 et δ_2 qui deviennent complexes, et la seule branche réelle qui nous reste en Q'''' s'appelle δ_3 . Franchissons T en retrouvant δ_1 et δ_2 , et en choisissant, comme il nous sera permis, δ_2 pour celle dont la tangente touche près de C_i . Par les quatre passages on fait donc confondre successivement

$$(\delta_1\delta_3), (\delta_2\delta_3), (\delta_1\delta_2), (\delta_1\delta_2),$$

et l'on reviendra en Q sans permutation entre les racines, après avoir fait le circuit complet autour de C_i .

La surface I_δ ressemble donc à T par une propriété importante; elle en diffère, d'abord en ce qu'elle est tout particulièrement liée au choix de l'axe des z comme directrice et puis par la manière dont les deux valeurs δ s'y approchent de leur valeur commune. En effet, nos

figures montrent que les valeurs en question se tiennent toujours, au voisinage de I_δ , du même côté de la valeur commune, tandis que, pour la caractéristique, les circonstances varient selon la position du point considéré par rapport à la tangente qui définit la valeur commune¹.

11. Pour fixer nos idées prenons le cas particulier du domaine hyperboloïde autour du point double conique circulaire du n° précédent. En se reportant à la section principale de la fig. 3, on construit facilement la forme de sections différentes par des plans passant par l'axe commun des z . On a obtenu ainsi, dans la fig. 5 (Pl. II), une suite de sections voisines, (0), (1), (2), etc. On s'imaginera p. ex. que (0) soit la section par le plan du papier, les autres sections étant obtenues en tournant le plan secteur par des petits angles convenables dans une même direction.

Supposons par exemple qu'on ait fixé une tangente d'inflexion I_δ dans la section (4), correspondant à une racine $\bar{\delta}$. Par le sommet \bar{z} on mène donc deux tangentes voisines de I_δ dans toute section (3), (2) etc., située, dans la fig. 5, à gauche de (4), tandis que pour une section arbitraire au delà de (4) ces tangentes ne sont plus réelles. La tangente d'inflexion marque ainsi la limite d'un cône I_δ , dans laquelle deux branches de ce cône coïncident; c'est par un fait bien connu une arête de rebroussement du cône.

Si, dans notre figure, nous rangeons les diverses génératrices de I_δ en deux groupes selon que le point de contact se trouve en haut ou en bas, le premier groupe nous donne une branche de I_δ qui touche le côté droit de I tandis que l'autre groupe touche son côté gauche. Or, les I_δ étant convexes vers I , il s'ensuit que la première branche de I_δ est convexe vers la gauche et l'autre vers la droite, conformément à l'assomption d'une arête de rebroussement en I_δ . Entre deux points de contact, dans une section quelconque, on a nécessairement franchi une tangente d'inflexion, c. à. d. on a franchi la courbe i_δ échangeant les côtés réel et complexe de I . Évidemment c'est là ce que nous exprimons par le fait que les deux branches de cône touchent des côtés (géométriquement) différents de I .

¹ C. à. d. selon qu'on s'approche de I dans une direction faisant un angle fini ou nul avec I .

12. Revenant aux circonstances qui correspondent au point double (n° 9), nous sommes maintenant en état d'expliquer la connexion des racines se permutant sur le plan double. La fig. 6 nous donne une section voisine du plan central par le point double; c'est une courbe à deux inflexions et à une tangente double, trace du plan P singulier. On reconnaît qu'au voisinage de C_2 on a quatre branches réelles $\delta_1 \dots \delta_4$, dont les trois premières coïncident en C_2 . Le passage de Q_2 en Q_1 voisin de C_1 ne peut évidemment se faire sans franchir les deux tangentes d'inflexion tracées par la surface I_δ .

Si d'abord Q_2 s'approche de P , sans franchir I_δ (c. à. d. s'approche d'un point à droite de C_2), on voit que δ_1 et δ_3 coïncident. Franchissons I_δ pour suivre le chemin pointillé jusqu'en Q' ; δ_2 et δ_4 se confondent sur I_δ , et il ne nous restera en Q' que les prolongements analytiques de δ_1 et δ_3 , restés distincts pendant tout le passage. Si Q' s'approche de P , ce seront toujours δ_1 et δ_3 qui y deviendront égaux et l'on arrivera en Q'' avec deux branches réelles qui s'appellent toujours δ_1 et δ_3 . Allons de Q' en Q_1 ; on retrouvera par le passage de l'autre branche de I_δ les deux branches δ_2 , δ_4 devenues de nouveau réelles. D'autre part, on pourra franchir I' en allant p. ex. en Q''' ; on a alors permuté et rendu complexes δ_1 et δ_2 et l'on arrivera en Q'''' avec δ_3 et δ_4 , qui évidemment coïncident si l'on s'approche de I^δ au dessous de C_{11} .^{*} En suivant cet argument on arrive au résultat de la fig. 6, où, sur les différentes parties de I' , I_δ et P , on a marqué les branches δ qui se confondent. La connexion entre les racines est ainsi complètement éclaircie; on voit qu'il est possible de définir partout, sans ambiguïté, les racines réelles par prolongement analytique des racines au point de départ Q_2 .

Chapitre II.

Préliminaires algébriques.

§ 1.

L'équation approximée de la caractéristique.

1. L'analyse des indications géométriques du chapitre I ne sera au fond autre chose que la théorie bien connue des surfaces algébriques telle qu'elle se présente par développement au voisinage d'un point arbitraire. Seulement, pour notre problème actuel, il nous faudra présenter la théorie sous un point de vue particulier et dans une forme modifiée par la nécessité de considérer des fonctions algébriques qui sont liées à des manières particulières de représenter la surface étudiée.

Rappelons d'abord quelques généralités d'une nature élémentaire. Soit, dans l'espace des α, β, δ ,

$$1) \quad f(\alpha, \beta, \delta) = 0$$

l'équation d'une surface algébrique d'ordre n , et soient pour $\alpha = \beta = \delta = 0$

$$f_1, f_2, f_3, f_{11}, f_{12}, \text{ etc.},$$

les valeurs des diverses dérivées de premier et de deuxième ordre. On sait que la Hessienne:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

décide de la nature de la surface à l'origine. Or, soit

$$\xi = f_1\alpha + f_2\beta + f_4\delta = 0$$

l'équation du plan tangent à l'origine, et posons

$$f^{(\alpha)} = f\left(\frac{\xi - f_2\beta - f_4\delta}{f_1}, \beta, \delta\right).$$

Pour de petites valeurs de α, β, δ satisfaisant à l'équation 1) ξ est une quantité de deuxième ordre et on aura un développement de la forme :

$$0 = f^{(\alpha)} = \xi + \frac{1}{2}\left[\beta^2 \cdot \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} + 2\beta\delta \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta \partial \delta} + \delta^2 \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \delta^2}\right]$$

avec les coefficients :

$$2) \quad \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} = -\frac{1}{f_1^2} \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{f_1^2} (f_1^2 f_{22} - 2f_1 f_2 f_{12} + f_2^2 f_{11});$$

$$\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \delta^2} = -\frac{1}{f_4^2} \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_4 \\ f_1 & f_{11} & f_{14} \\ f_4 & f_{41} & f_{44} \end{vmatrix} = \frac{1}{f_4^2} (f_1^2 f_{44} - 2f_1 f_4 f_{14} + f_4^2 f_{11})$$

$$\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta \partial \delta} = -\frac{1}{f_1^2} \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_4 & f_{41} & f_{42} \end{vmatrix} = \frac{1}{f_1^2} (f_1^2 f_{42} - f_1 f_2 f_{14} - f_1 f_4 f_{12} + f_2 f_4 f_{11}).$$

On a, par un calcul élémentaire :

$$3) \quad H = f_1^2 \left(\left(\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta \partial \delta} \right)^2 - \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \delta^2} \right) = -f_1^4 \left(\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \delta} \right)^2 - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \delta^2} \right).$$

2. Il s'agira d'abord d'avoir l'équation approximée de la caractéristique. Soient $f_x, f_{x\lambda}, x, \lambda = 1, 2, 3, 4$, les dérivées de premier et de deuxième ordre de la fonction homogène $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, et considérons, pour $\gamma = 1$, l'équation:

$$4) \quad f(\alpha, \beta, 1, \delta) = 0$$

dont la Hessienne s'écrit:

$$(n-1)^2 H = |f_{x\lambda}| = \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{41} & \dots & f_{44} \end{vmatrix}.$$

Soit $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}$, un système de valeurs, solutions de 4) et soit $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$ un point correspondant de T , c. à. d. tel que le plan tangent mené par lui ait des cosinus directeurs proportionnels à $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, 1, \bar{\delta}$. On aura au voisinage:

$$\alpha = \bar{\alpha} + \alpha', \quad x = \bar{x} + x', \quad \text{etc.},$$

et l'équation de T s'obtiendra par l'élimination de α', β', δ' entre

$$5) \quad \frac{x}{\frac{\partial f}{\partial \alpha'}} = \frac{y}{\frac{\partial f}{\partial \beta'}} = \frac{z}{f_3} = \frac{u}{\frac{\partial f}{\partial \delta'}}$$

avec:

$$6) \quad 0 = f = f_1 \alpha' + f_2 \beta' + f_4 \delta' +$$

$$\frac{1}{2} [f_{11} \alpha'^2 + f_{22} \beta'^2 + f_{44} \delta'^2 + 2f_{24} \beta' \delta' + 2f_{41} \delta' \alpha' + 2f_{12} \alpha' \beta'].$$

L'équation du plan tangent étant:

$$Z = \bar{\alpha} x + \bar{\beta} y + z + \bar{\delta} u = \bar{\alpha} x' + \bar{\beta} y' + z' + \bar{\delta} u' = 0,$$

on tire de 5) et 6):

$$\frac{x}{f_1 + \alpha'f_{11} + \beta'f_{12} + \delta'f_{14}} = \frac{y}{f_2 + \alpha'f_{21} + \beta'f_{22} + \delta'f_{24}} = \frac{u}{f_4 + \alpha'f_{41} + \beta'f_{42} + \delta'f_{44}} =$$

$$= \frac{z}{\alpha'f_1 + \beta'f_2 + \delta'f_4}, \quad \text{soit } = \frac{1}{z},$$

de manière à nous mener au système:

$$\begin{aligned} \alpha'x + \beta'y + \delta'u + 0 + Z &= 0 \\ \alpha'f_1 + \beta'f_2 + \delta'f_4 - Zx + 0 &= 0 \\ \alpha'f_{11} + \beta'f_{12} + \delta'f_{14} - x \cdot z + f_1 &= 0 \\ \alpha'f_{21} + \beta'f_{22} + \delta'f_{24} - y \cdot z + f_2 &= 0 \\ \alpha'f_{41} + \beta'f_{42} + \delta'f_{44} - u \cdot z + f_4 &= 0 \end{aligned}$$

d'où résulte comme équation de Γ :

$$7) \quad \begin{vmatrix} x & y & u & 0 & Z \\ f_1 & f_2 & f_4 & Z & 0 \\ f_{11} & f_{12} & f_{14} & x & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{24} & y & f_2 \\ f_{41} & f_{42} & f_{44} & u & f_4 \end{vmatrix} = 0$$

3. Dans le déterminant 7) il faut retenir les termes des deux premiers ordres en x' , y' , etc. En observant que

$$\frac{\bar{x}}{f_1} = \frac{\bar{y}}{f_2} = \frac{\bar{u}}{f_4} = \frac{\bar{z}}{f_3} = \frac{1}{z}$$

et que les termes en Zx' , Z^2 etc. sont d'ordre supérieur à 2, il vient facilement comme première approximation:

$$-\frac{2H}{z} \cdot Z + \begin{vmatrix} 0 & x' & y' & u' & 0 \\ 0 & f_1 & f_2 & f_4 & 0 \\ f_1 & f_{11} & f_{21} & f_{41} & x' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_4 & f_{41} & \dots & f_{44} & u' \end{vmatrix} = 0$$

En forme développée et dans la projection $u = \text{const}$, c. à. d. pour $u' = 0$, cela nous donne pour la caractéristique l'équation suivante,

$$\text{I. } Z = \bar{\alpha}x' + \bar{\beta}y' + z' = -\frac{zf_4^2}{2H} \left(x'^2 \cdot \frac{\partial^2 f^{(\delta)}}{\partial \beta^2} + 2x'y' \frac{\partial^2 f^{(\delta)}}{\partial \alpha \partial \beta} + y'^2 \frac{\partial^2 f^{(\delta)}}{\partial \alpha^2} \right)$$

où les coefficients, analogues à ceux de 2), sont

$$\frac{\partial^2 f^{(\delta)}}{\partial \beta^2} = \frac{1}{f_4^2} (f_2^2 f_{44} - 2f_2 f_4 f_{24} + f_4^2 f_{22}), \text{ etc., etc.,}$$

$f^{(\delta)}$ dénotant la fonction $f(\alpha, \beta, \frac{\xi - \alpha f_1 - \beta f_2}{f_4})$.

Partons de I pour le calcul de la Hessienne de T en $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$; on tire de la formule 3):

$$\text{II. } \mathfrak{H} = \frac{z^2 f_4^2}{H} = \frac{z^4 u^2}{H}.$$

L'équation du plan tangent nous montre que dans la projection dans l'espace des x, y, z on a

$$\frac{\partial z'}{\partial x'} = -\bar{\alpha}, \quad \frac{\partial z'}{\partial y'} = -\bar{\beta},$$

pour la normale au point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Donc, on aura pour le produit des rayons de courbure principaux de T :

$$\text{II}'. \quad \frac{1}{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2} = \frac{\bar{z}^4 u^2}{(1 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)^2} \cdot \frac{1}{H}.$$

Les relations II et II' nous donnent la connexion entre la convexité de Γ et celle de la surface f . Les deux Hessiennes étant de même signe, les domaines correspondants des deux surfaces sont de même nature et en particulier la réciprocité de la courbe parabolique et de l'arête de rebroussement s'établit de suite par le fait que l'une des Hessiennes est l'inversion de l'autre.

§ 2.

Développement des fonctions algébriques au voisinage de Γ et des cônes $\Gamma\delta$.

3. Nous allons retrouver l'équation de la caractéristique en cherchant à approfondir l'algèbre de celles des racines α , β , δ de

$$8) \quad f(\alpha, \beta, 1, \delta) = 0.$$

qui en vertu de la relation

$$9) \quad \alpha x + \beta y + z + \delta u = 0$$

définissent l'ensemble des plans tangents à Γ . Il suffira, pour les généralités, de développer jusqu'au deuxième ordre des petites quantités.

Précisons cet énoncé. Nous étudions des valeurs

$$\alpha = \bar{\alpha} + \alpha', \quad \beta = \bar{\beta} + \beta', \quad \delta = \bar{\delta} + \delta'$$

voisines d'une combinaison arbitraire de valeurs $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})$ racines de 8). La stipulation que α' , β' , δ' seront à regarder comme de petites quantités du premier ordre entraîne pour tout point (x, y, z, u) considéré l'obligation que ce point appartienne à un plan tangent

dont les cosinus directeurs diffèrent infiniment peu de ceux du plan $P_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}}$:

$$9') \quad Z = \bar{\alpha}x + \bar{\beta}y + z + \bar{\delta}u = 0$$

passant par le point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de Γ .

Dans $P_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}}$ nous distinguons l'ensemble de valeurs $(x_{\bar{\delta}}, y_{\bar{\delta}}, z_{\bar{\delta}})$ telles que

$$10) \quad xf_2 - yf_1 = 0, \quad (f_1 = f_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, 1, \bar{\delta}), \text{ etc.}),$$

lesquelles dans $P_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}}$ tracent une génératrice rectiligne de $\Gamma_{\bar{\delta}}$; sur cette génératrice se trouve particulièrement le point de contact avec Γ , $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tel que

$$11) \quad xf_3 - uf_1 = 0.$$

Soit, comme ci-dessus:

$$f(\alpha', \beta', \delta') = f(\bar{\alpha} + \alpha', \bar{\beta} + \beta', 1, \bar{\delta} + \delta');$$

$$0 = \alpha x + \beta y + z + \delta u = \alpha' x + \beta' y + \delta' u + Z.$$

En éliminant α' nous étudions l'équation:

$$A. \quad f\left(-\frac{\beta' y + Z + \delta' u}{x}, \beta', \delta'\right) = 0,$$

qui nous définit β' comme fonction algébrique de δ' , dépendant des paramètres x, y, Z, u . Pour plus de brièveté, nous écrivons au lieu de A simplement

$$A'. \quad f = f(\beta', \delta') = 0,$$

et d'une manière analogue les dérivées de la fonction f nous donneront des fonctions:

$$f_1 = f_1(\beta', \delta') = f_1\left(-\frac{\beta'y + Z + \delta'u}{x}, \beta', \delta'\right) \text{ etc.,}$$

Quelque fois la clarté exigera que la notation indique le procédé d'élimination employé; nous écrirons alors $f^{(\alpha)}$, $f_1^{(\alpha)}$ etc. au lieu de f , f_1 , respectivement.

4. L'intérêt de l'équation A) se rattache aux conditions dans lesquelles elle possède une racine double. En développant au voisinage de $\beta' = 0$ on aura:

$$A') \quad 0 = f(\beta', \delta') = f(0, \delta') + \beta' \left(\frac{\partial f}{\partial \beta'}\right)_0 + \frac{1}{2} \beta'^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \beta'^2}\right)_0,$$

savoir:

$$A'') \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \beta'^2}\right)_0 \beta' = -\left(\frac{\partial f}{\partial \beta'}\right)_0 \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \beta'}\right)_0^2 - 2f(0, \delta') \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \beta'^2}\right)_0}.$$

Le discriminant:

$$B') \quad \Delta_{\beta'} = \left(\frac{\partial f}{\partial \beta'}\right)_0^2 - 2f(0, \delta') \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \beta'^2}\right)_0$$

mis égal à zéro formule donc la condition de deux branches (α_μ, β_μ) , (α_ν, β_ν) confondues en (x, y, z, u) pour la valeur $\bar{\delta} + \delta'$ de δ . En langage géométrique, B') nous donne l'équation du cône $\Gamma_{\bar{\delta} + \delta'}$ voisin du cône $\Gamma_{\bar{\delta}}$ qui passe par $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, u)$.

Développons B') par rapport à δ' . Il vient:

$$B'') \quad \Delta_{\beta'} = R + 2\delta'Q + \delta'^2P = 0$$

avec

$$C) \quad P = \left(\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta \partial \delta}\right)^2 - \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \delta^2},$$

$$C) \quad Q = \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta} \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta \partial \delta} - \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \delta} \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2},$$

$$R = \left(\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta} \right)^2 - 2f^{(\alpha)} \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2},$$

où l'on a supprimé les accents superflus, et où les valeurs de la fonction $f^{(\alpha)}$ et de ses dérivées se déduisent de la fonction

$$f(\alpha', \beta', \delta') \quad \text{pour } \alpha' = -\frac{Z}{x}, \quad \beta' = \delta' = 0.$$

On a négligé toute dérivée d'ordre supérieur à deux; c. à. d. on a admis pour f le développement 6) du n° 2. Ainsi:

$$f^{(\alpha)} = f\left(-\frac{Z}{x}, 0, 0\right) = -f_1 \cdot \frac{Z}{x} + \frac{1}{2} f_{11} \frac{Z^2}{x^2};$$

$$D) \quad \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta} = \frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \left(f_2 - \frac{y}{x} f_1\right) - \frac{Z}{x} \left(f_{12} - \frac{y f_{11}}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \delta} = \frac{\partial f}{\partial \delta} - \frac{u}{x} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \left(f_4 - \frac{u}{x} f_1\right) - \frac{Z}{x} \left(f_{14} - \frac{u f_{11}}{x}\right),$$

et, en analogie avec les formules 2) du n° 1,

$$\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} = \frac{1}{x^2} (x^2 f_{22} - 2xy f_{12} + y^2 f_{11}), \quad \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \delta^2} = \frac{1}{x^2} (x^2 f_{44} - 2xuf_{14} + u^2 f_{11}),$$

$$\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta \partial \delta} = \frac{1}{x^2} (x^2 f_{24} - xy f_{14} - xuf_{12} + yu f_{11}),$$

$f_1, f_{21}, \dots, f_{11}, f_{12}$, etc. étant les coefficients du développement 6).

Or, dans ces formules, on admettra que le point

$$x = \bar{x} + x', \quad y = \bar{y} + y', \quad \text{etc.}$$

se trouve au voisinage, soit de $I_{\bar{\delta}}$, soit de I . Dans les deux cas on aura des fonctions algébriques $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ complètement déterminées par la position de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, u)$ et par la valeur $\bar{\delta}$. Il suffira, en première approximation, de mettre

$$x' = y' = z' = 0$$

dans toute dérivée de deuxième ordre de $f^{(a)}$. Ainsi en particulier

$$P = \frac{1}{x^2} \cdot \bar{H}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}),$$

où H n'est autre que la fonction Hessienne du n° 1 modifiée par la substitution de \bar{x} , \bar{y} , \bar{u} pour f_1 , f_2 , f_4 respectivement et donnée en forme explicite par l'expression

$$\begin{aligned} \text{E)} \quad H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) &= \bar{x}^2(f_{24}^2 - f_{22}f_{44}) + \bar{y}^2(f_{14}^2 - f_{11}f_{44}) + \bar{u}^2(f_{12}^2 - f_{11}f_{22}) + \\ &+ 2\bar{u}\bar{y}(f_{11}f_{24} - f_{14}f_{12}) + 2\bar{x}\bar{u}(f_{22}f_{14} - f_{24}f_{12}) + 2\bar{y}\bar{x}(f_{44}f_{12} - f_{14}f_{24}). \end{aligned}$$

5. Appliquons les formules ci-dessus à la déduction de l'équation approximative de I . Pour un point voisin de I les expressions

$$f_2 - \frac{y}{x}f_1 = \frac{1}{x}(f_2x' - y'f_1), \quad f_4 - \frac{u}{x}f_1 = \frac{1}{x}(f_4x' - u'f_1)$$

deviennent de petites quantités de premier ordre; l'équation B') nous donne donc deux racines δ' voisines de zéro correspondant aux deux cônes $I_{\bar{\delta} + \delta}$ passant par le point (x, y, z, u) . En annulant le discriminant de B') :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_\delta = Q^2 - PR = \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} \left(2f^{(\alpha)} \left[\left(\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta \partial \delta} \right)^2 - \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \delta^2} \right] + \right. \\
 \left. + \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \delta^2} \left(\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta \partial \delta} \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta} \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \delta} + \right. \\
 \left. + \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \delta} \right)^2 \right) = 0
 \end{aligned}$$

nous trouvons donc la condition pour que ces deux points de branchement coïncident dans un point double. Or, au voisinage de I la distance Z du plan tangent est à considérer comme une quantité de deuxième ordre. En négligeant les termes Z^2 , Zx' , etc., projetons pour un moment dans l'espace des x constants, et posons, en nous reportant au n° 1,

$$H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) = \frac{H}{x^2}, \quad H = H(f_1, f_2, f_4).$$

Il vient, avec $x' = 0$, par un calcul facile

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_\delta = \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \left[2f_1 \frac{ZH}{\bar{x} f_1^2} + \frac{y'^2}{\bar{x}^2} \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \delta^2} - \frac{2y'u'}{\bar{x}^2} \frac{\partial^6 f^{(\alpha)}}{\partial \beta \partial \delta} + \frac{u'^2}{\bar{x}^2} \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} \right]. \\
 = 0.
 \end{aligned}$$

Or, les différents axes de coordonnées n'entrant d'aucune manière particulière dans les calculs ci-dessus, l'équation de I dans l'espace des (x, y, z) doit se déduire par permutation cyclique. On trouve, en annulant l'expression entre les crochets,

$$0 = 2Z \cdot H + z \left(x'^2 \frac{\partial^2 f^{(\delta)}}{\partial \beta^2} - 2x'y' \frac{\partial^2 f^{(\delta)}}{\partial \alpha \partial \beta} + y'^2 \frac{\partial^2 f^{(\delta)}}{\partial \alpha^2} \right),$$

conformément au résultat du n° 1.

6. L'équation B') possède une racine zéro à condition que

$$C') \quad R = 0.$$

Nous avons alors une racine $\delta = \bar{\delta}$; c. à. d. nous nous trouvons sur le cône $I_{\bar{\delta}}$, et C') nous donne son équation approximative, valable à condition que les (x, y, z) considérés ne s'éloignent pas trop du plan $P_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}}$. Regardons donc la distance Z de ce plan tangent comme une quantité de deuxième ordre; C') nous donnera alors l'équation d'un cône parabolique représentant $I_{\bar{\delta}}$ pour toute génératrice voisine de celle tracée dans $P_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}}$.

Dans un point arbitraire, voisin de $P_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}}$ mais non de I , l'expression

$$xf_4 - uf_1$$

n'est plus infiniment petit. Par conséquent le coefficient Q a une valeur finie, et B' ne peut servir que pour déterminer une seule racine δ' . Au voisinage de $I_{\bar{\delta}}$ on trouve ainsi

$$\delta' = \frac{-R}{2Q},$$

équation déterminant le déplacement du sommet d'un cône $I_{\bar{\delta}}$ en fonction du déplacement d'un point arbitraire par où passe le cône.

Les équations simultanées

$$A = 0, \quad R = 0$$

déterminent la courbe de contact entre $I_{\bar{\delta}}$ et I . Les expressions ci-dessus montrent qu'on a alors

$$C'') \quad Q = 0.$$

C'') nous donne donc l'équation d'une surface qui passe par la courbe $C_{\bar{\delta}}$. Or, reportons-nous à l'expression C) de Q ; nous reconnaissons immédiatement que Q ne disparaît pas du premier ordre pour $Z = 0$. La surface Q , en passant par $C_{\bar{\delta}}$, coupe donc I par un angle fini. Il s'ensuit qu'en marchant soit sur I soit sur $I_{\bar{\delta}}$ à travers la courbe $C_{\bar{\delta}}$ on doit nécessairement franchir la surface Q ; c. à. d. *le coefficient Q de B') change de signe par le passage à travers la courbe de contact.*

Cet énoncé résulte d'ailleurs immédiatement des considérations géométriques du chapitre précédent. En effet, prenons un point de I avec la valeur commune $\delta' = -\frac{Q}{P}$ voisine de la valeur zéro en $C_{\bar{\delta}}$; la construction géométrique fait voir que cette valeur prend des signes différents aux deux côtés de $C_{\bar{\delta}}$.

7. Éluçidons ces généralités au moyen de l'exemple fourni par les deux cas typiques des équations de deuxième ordre. Soit

$$f(\alpha, \beta, 1, \delta) = \alpha^2 + \beta^2 \pm 1 - \delta^2.$$

La théorie approximative est alors exacte, et nous trouvons pour δ l'équation:

$$12) \quad (z + \delta u)^2 + (\pm 1 - \delta^2)(x^2 + y^2) = 0,$$

laquelle pour une valeur δ fixe nous donne l'équation du cône correspondant.

En vertu de 12) les $I_{\bar{\delta}}$ sont des cônes circulaires aux sommets

$$\bar{z} = -\delta u, \quad x = y = 0;$$

la tangente de l'angle d'ouverture est proportionnelle à

$$\frac{1}{\sqrt{\delta^2 \pm 1}}.$$

I. Soit en 12) le signe positif. Les $I_{\bar{\delta}}$ deviennent imaginaires pour

$$|\bar{\delta}| < 1,$$

tandis que pour $|\bar{\delta}| = 1$ on retrouve les deux plans

$$z \pm u = 0$$

correspondant aux deux points par lesquels l'axe des z pénètre l'enveloppe sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2$$

II. Dans le cas du signe $-$, les cônes circulaires 12) sont tous réels et enveloppent l'hyperboloïde aux courbures opposées

$$x^2 + y^2 - z^2 = u^2$$

Remplaçons maintenant dans 12) δ par $\bar{\delta} + \delta'$; nous aurons pour δ'

$$P\delta'^2 + 2Q\delta' + R = 0,$$

avec

$$P = u^2 - x^2 - y^2$$

$$Q = \bar{\delta}(u^2 - x^2 - y^2) + uz$$

$$R = (z + \bar{\delta}u)^2 + (\pm 1 - \bar{\delta}^2)(y^2 + x^2)$$

$$PR - Q^2 = \pm (x^2 + y^2)(u^2 - x^2 - y^2 \mp z^2).$$

L'équation $Q = 0$ nous donne ainsi certaine surface de second ordre, savoir un parabolôïde coupant la caractéristique d'abord le long d'un cercle situé dans le plan

$$\pm z\bar{\delta} + u = 0$$

et puis le long du cercle

$$u^2 - x^2 - y^2 = 0$$

dans le plan $z = 0$; en outre le parabolôïde passe par le point $x = y = 0$, $z + \bar{\delta}u = 0$, c. à. d. par le sommet du cône.

8. *Les racines δ' au voisinage de la courbe de contact.* Par la résolution de l'équation B'') du n° 4 nous avons obtenu:

$$D) \quad \delta'_1 = -\frac{1}{P}(Q \pm \sqrt{Q^2 - PR})$$

expression dans laquelle

$$Q = 0 \quad \text{représente surface passant par } C_{\bar{3}}$$

$$R = 0 \quad \quad \quad \gg \quad \text{cône } I_{\bar{3}}$$

$$Q^2 - PR = 0 \quad \gg \quad \text{caractéristique } I$$

tandis que le coefficient P est proportionnel à la Hessienne H et de même signe qu'elle, cette Hessienne étant à son tour inversement proportionnelle à la Hessienne \mathfrak{H} de I .

Pour fixer le signe des δ' stipulons que la racine carrée de D) prenne le signe $+$ à l'extérieur commun de $I_{\bar{3}}$ et de I . Tant que nous nous déplaçons dans ce domaine sans franchir I , le radical conserve un signe invariable. Faisons donc coïncider (x, y, z) avec un point de $I_{\bar{3}}$ où $R = 0$; il s'ensuit que δ'_1 s'annulera à condition que l'on se trouve du côté des valeurs Q négatives; δ'_1 est alors la racine adjointe à $I_{\bar{3}}$. Franchissons $C_{\bar{3}}$ c. à. d. la surface Q ; conformément aux résultats du n° 8 du chapitre I, δ'_2 remplira la même fonction pour l'autre domaine de $I_{\bar{3}}$.

Il s'agira dans la suite de connaître la manière dont se comportent les trois quantités que voici:

$$\text{a) } \quad \delta'_1 + \delta'_2 = -\frac{2Q}{P}$$

$$\text{b) } \quad \sqrt{\delta'_1 \delta'_2} = \sqrt{\frac{R}{P}}$$

$$\text{c) } \quad -\delta'_1 + \delta'_2 = 2\sqrt{Q^2 - PR}.$$

Pour éviter toute ambiguïté dans la détermination des branches nous projetons dans le domaine complexe par la substitution de

$$\text{à } \quad f(\alpha', \beta', \delta') + i\varepsilon = 0$$

$$f(\alpha', \beta', \delta') = 0.$$

Pour tenir compte de la modification ainsi introduite dans nos formules observons que l'équation $A')$ du n° 4 change par l'addition de l'ima-

ginaire $i\varepsilon$, qui par conséquence apparaît dans le terme constant de B' multiplié par le facteur $\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}$. Toute la différence consiste donc dans la substitution de

$$R + i\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = R + i\varepsilon A\beta^2$$

à R . Ainsi:

$$b^{\text{bis}}) \quad \sqrt{\delta'_1 \delta'_2} = \sqrt{\frac{R + i\varepsilon A\beta^2}{P}}$$

$$c^{\text{bis}}) \quad \delta'_2 - \delta'_1 = 2\sqrt{Q^2 - P(R + i\varepsilon A\beta^2)}.$$

a) La somme des racines n'a pas changé; elle reste réelle et s'annule et change de signe par le passage à travers $C_{\bar{\delta}}$.

b) Le radical paraissant dans le produit b^{bis} possède une partie imaginaire de signe invariable tant que l'on ne franchit pas le cône $I_{\bar{\delta}}$. L'expression

$$\sqrt{\frac{R}{P}}$$

est imaginaire à l'un et réel à l'autre côté de $I_{\bar{\delta}}$. Rappelons que la dernière circonstance se produit du côté que tourne $I_{\bar{\delta}}$ vers I' puisque les δ'_1, δ'_2 sont complexes et conjugués à «l'intérieur» de I' .

Partons donc d'un point de ce domaine réel pour lequel $\frac{R}{P} > 0$, et posons

$$\frac{R + i\varepsilon A\beta^2}{P} = \varrho e^{i\theta}.$$

Nous sommes partis d'une valeur ϱ finie avec θ voisin de zéro, soit positif, en supposant que

$$13) \quad \frac{\varepsilon A\beta^2}{P} > 0.$$

Franchissons $R = 0$; le radical, proportionnel à \sqrt{i} pour $R = 0$, deviendra à peu près purement imaginaire sans avoir jamais pris des valeurs réelles. Il y a donc les deux possibilités que voici,

1. On aura l'inégalité 13) avec

$$\sqrt{\delta'_1 \delta'_2} = +\sqrt{\rho} e^{\frac{i\theta}{2}}$$

au point de départ; en s'approchant de $I_{\frac{\pi}{3}}$ ρ va en diminuant et θ s'approche de $\frac{\pi}{2}$. A l'autre côté de $I_{\frac{\pi}{3}}$ θ s'approche de plus en plus de $\pi - \varepsilon_1$, ε_1 étant une petite quantité > 0 . On trouve donc pour les valeurs du radical les variations indiquées par le chemin supérieur de la fig. 9.

2. On aura

$$\frac{\varepsilon A \rho^2}{P} < 0$$

avec

$$R + i\varepsilon A \rho^2 = \rho e^{-i\theta}$$

$$\sqrt{\delta'_1 \delta'_2} = \sqrt{\rho} e^{-\frac{i\theta}{2}};$$

on revient donc au chemin symétrique dans le demi-plan inférieur.

c) La différence des racines se comporte de manière analogue par rapport au passage à travers I . On trouve selon le signe de ε un chemin situé dans le demi-plan supérieur ou inférieur de l'argument, équivalent pour $\varepsilon = 0$ au quart d'un circuit entourant l'origine.

9. *Etude d'un argument particulier.* Prenons encore la fonction algébrique suivante:

$$d) \quad q = \delta'_1 + \delta'_2 - 2\sqrt{\delta'_1 \delta'_2},$$

où en disposant convenablement le signe de ε nous avons obtenu que la valeur du radical reste toujours dans le premier quadrant de son champ complexe. L'expression q ne s'annule sur I qu'à condition que

$$\delta'_1 + \delta'_2 > 0,$$

$\sqrt{\delta'_1 \delta'_2}$ étant réel et > 0 au voisinage de I . Selon le signe de P q s'annule donc du côté négatif ou positif de Q , soit pour le domaine I_+ de I . La fig. 10 (Pl. III) représente dans le champ de la variable com-

plexe q le résultat d'un circuit fait autour de la courbe de contact, dans une section arbitraire coupant I' et I'_3 . On est parti, dans la fig. 10 a, du point 0 avec $\delta'_2 = 0$ et $q = \delta'_1 > 0$, ce point appartenant par hypothèse au côté positif de Q . On observe que

$$\begin{aligned} q &= 0 \text{ sur } I'_+ \\ &= \delta'_1(0) > 0 \text{ sur } I'_3, \end{aligned}$$

donc

$$0 < q < \delta'_1 \text{ entre } I'_+ \text{ et } I'_3.$$

Avec une partie imaginaire très petite et positive on se déplace donc de manière que la partie réelle va en diminuant jusqu'au voisinage de I'_+ où à peu près $q = 0$. Franchissons I' en $a\bar{a}$; après la traversée on a (pour $\varepsilon = 0$) $q < 0$; on a donc fait un demi-circuit dans le demi-plan supérieur des q . A l'intérieur de I' l'argument reste à peu près réel et négatif même au delà de I'_- jusqu' en $1\bar{1}$ où $\sqrt{\delta'_1\delta'_2}$ devient imaginaire. On a donc les circonstances qui se traduisent par le chemin complexe de la fig. 10 b

§ 3.

Les fonctions algébriques dans le cas du plan tangent double.

10. Nous avons insisté, aux n^{os} 11—13 du chapitre I, sur le cas singulier d'un point double conique. Soit α , $\bar{\beta}$, 1 , $\bar{\delta}$ le point singulier et mettons

$$\bar{\alpha} + \alpha' \text{ etc; } \hat{\alpha} \text{ au lieu de } \alpha_2 \dots \text{ etc;}$$

nous avons

$$14) \quad \bar{f}_1 = \bar{f}_2 = \bar{f}_3 = f_4 = 0$$

et nous trouvons au voisinage du point double le développement:

$$\begin{aligned} f(\alpha', \beta', \delta') &= f_{11}\alpha'^2 + f_{22}\beta'^2 + f_{44}\delta'^2 + 2[f_{21}\beta'\delta' + \dots + f_{12}\alpha'\beta'] \\ &+ \dots \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les termes de deuxième ordre nous donnent donc l'équation du cône tangent à f en $(\alpha, \beta, \bar{\delta})$. Par rapport à ces termes l'analyse du cas actuel n'est que celle du point ordinaire où l'on a tenu compte des relations 14); il n'y a donc rien de nouveau en matière de calcul.

Il s'agit de répéter l'analyse du n° 4, avec:

$$\alpha x + \beta y + z + \delta u = 0,$$

(x, y, z) étant voisin du plan double $P_{\alpha, \beta, \bar{\delta}}$ dont l'équation s'écrit, soit

$$15) \quad Z = \bar{\alpha}x + \bar{\beta}y + z + \delta u = 0,$$

soit aussi:

$$15') \quad \alpha'x + \beta'y + \delta'u = 0.$$

De plus l'introduction des relations 14) dans nos formules du n° 4 nous donne de suite pour δ' l'équation:

$$F) \quad \mathfrak{A}\delta' = \Re Z^2 + 2\mathfrak{Q}Z\delta' + \mathfrak{P}\delta'^2 = 0$$

avec

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{\bar{x}^2} H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$$

$$F') \quad \mathfrak{Q} = \frac{1}{\bar{x}^2} (\bar{x}(f_{22}f_{14} - f_{24}f_{12}) + \bar{y}(f_{11}f_{24} - f_{14}f_{12}) + \bar{u}(f_{12}^2 - f_{11}f_{22}))$$

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\bar{x}^2} (f_{12}^2 - f_{11}f_{22})$$

Puisque, pour les points différents de $P_{\alpha\beta\bar{\delta}}$, on développe toujours au voisinage du même point $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}$, les expressions F), F') restent valables encore que l'on fait varier $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$ arbitrairement dans le plan double. L'équation F) fait voir les deux racines δ' qui pour un point arbitraire de $Z = 0$ coïncident dans leur valeur commune zéro pour changer de signe par le passage à travers le plan double. Seulement l'équation devient illusoire au voisinage de

$$16) \quad \mathfrak{P} = 0, \quad Z = 0.$$

La disparition de \mathfrak{P} indique la nécessité de procéder à des termes d'ordre supérieur, les points de la courbe 16) correspondant au moins à trois racines δ' qui se confondent. On conclut, en se reportant aux considérations géométriques du chapitre I que les équations 16) nous donnent la courbe de contact \mathfrak{C} de $P_{\alpha\beta\delta}$ avec Γ .

L'expression de \mathfrak{P} fait retrouver le fait bien connu que \mathfrak{C} est une conique dessinée dans le plan double, laquelle divise ce plan en deux domaines à propriétés différentes. Appelons le *domaine intérieur* celui vers lequel \mathfrak{C} tourne son côté concave. Il importe d'insister sur le signe de la fonction \mathfrak{P} dans les deux domaines.

Pour cela rappelons que \mathfrak{C} correspond par dualité au cône tangent mené par le point double $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\delta}$. On doit donc retrouver son équation en éliminant α' , β' , δ' entre les équations:

$$17) \quad f(\alpha', \beta', \delta') = 0, \quad \frac{x}{\frac{\partial f}{\partial \alpha'}} = \frac{y}{\frac{\partial f}{\partial \beta'}} = \frac{z}{\frac{\partial f}{\partial \delta'}}; \quad \alpha'x + \beta'y + \delta'u = 0,$$

dont la dernière est équivalente à $Z = 0$. Or, ces équations établissent une correspondance réciproque entre le cône f dans l'espace à trois dimensions $(\alpha', \beta', \delta')$ et un autre cône dans l'espace des (x, y, u) , dont l'équation doit s'écrire

$$\mathfrak{P} = 0.$$

Les équations 17) sont équivalentes à la condition que le discriminant Δ_g de

$$18) \quad f\left(-\frac{\beta'y + \delta'u}{x}, \beta', \delta'\right) = 0 \quad (\delta' = 1)$$

s'annule. Pour former ce discriminant il suffit de se reporter aux formules du n° 4 en y introduisant

$$Z = 0; \quad f_1 = f_2 = f_3 = 0; \quad (\delta' = 1).$$

On trouve immédiatement $Q = R = 0$ et le discriminant se réduit bien à \mathfrak{P} .

Considérons maintenant un point de l'espace (x, y, u) distinct du cône \mathfrak{P} . Les racines β' de 18) sont alors réelles ou complexes selon que $\mathfrak{P} \geq 0$. Or, au point de vue géométrique, nous savons que des valeurs réelles ou complexes de β' correspondent à des plans tangents menés par le vecteur (x, y, u) au cône \mathfrak{P} , plans réels ou imaginaires selon que (x, y, u) se trouve du côté convexe ou concave du cône. De là cette conclusion:

La fonction Hessienne \mathfrak{P} du plan double prend des valeurs, négatives dans le domaine intérieur et positives dans le domaine extérieur.

11. Pour décider de la réalité des racines de F) on formera le discriminant

$$A = Z^2 (\Omega - \mathfrak{P}\mathfrak{R}),$$

qui se calcule facilement d'après le n° 4. Il suffit de noter que le second facteur est une expression homogène de deuxième ordre qui ne contient ni z ni u . Dans l'espace u l'équation

$$19) \quad \Omega^2 - \mathfrak{P}\mathfrak{R} = 0$$

représente donc deux plans passant par l'axe des z ; lesquels, par une analyse facile, coupent le plan double le long de deux tangentes menées à la conique \mathfrak{C} . Soit par ex. \mathfrak{C} une ellipse; les deux tangentes découpent donc dans le plan double un certain angle contenant l'ellipse \mathfrak{C} ; au delà de cet angle les racines δ' deviennent imaginaires¹.

L'artifice du n° 9 servira enfin à élucider la connexion des racines à travers le plan $Z = 0$. Par l'introduction de l'imaginaire $i\varepsilon$ on écrira au lieu de F)

$$F^{bis)} \quad A_{\beta'} = \mathfrak{R}Z^2 + i\varepsilon A_{\beta^2} + 2\Omega Z\delta' + \mathfrak{P}\delta'^2.$$

¹ On vérifie immédiatement cette conclusion par la construction géométrique. On reconnaît d'ailleurs que les deux tangentes dessinées dans $\mathfrak{P}_{\alpha, \beta, \delta}$ par 19) et qui limitent la partie plane de I_{δ} sont des génératrices singulières de ce cône résultant en effet chacune de la fusion de deux arêtes de rebroussement.

§ 4.

Développements au voisinage d'une tangente d'inflexion et d'une courbe parabolique.

12. L'analyse que nous venons de faire, n'est au fond que l'application de la théorie élémentaire des surfaces de deuxième ordre. Nos résultats, suffisants pour les généralités, deviennent illusoire s'il arrive que le coefficient de δ'^2 dans l'équation B', savoir la Hessienne H , s'annule. Il faudra alors procéder jusqu'aux termes de troisième ordre. Nous avons déjà signalé deux cas importants qui exigent une telle discussion plus complète. Il nous suffira d'illustrer le procédé en choisissant des circonstances quelque peu particulières.

Soit d'abord la surface des tangentes d'inflexion; une arête de rebroussement de $I_{\frac{2}{3}}$ passant par $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ correspond à un point d'inflexion de la courbe

$$20) \quad f^{(\alpha)} = f(0, \delta') + \beta' \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta'} + \frac{1}{2} \beta'^2 \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta'^2} + \frac{1}{3} \beta'^3 \frac{\partial^3 f^{(\alpha)}}{\partial \beta'^3} = 0.$$

c. à. d. à la condition que pour $x' = y' = z' = 0, \delta' = 0$ on ait

$$\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta'^2} = 0.$$

Ce coefficient est donc de premier ordre par rapport aux petites quantités x' , etc. De plus on trouve en développant:

$$f^{(\alpha)}(0, \delta') = -f_1 \frac{Z}{x} + \delta' \frac{1}{x} (xf_4 - uf_1) + \frac{1}{2} \delta'^2 \cdot A_{\delta^2} + \dots$$

$$21) \quad = zZ + \mu \delta' + \nu \delta'^2$$

$$\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta'} = \frac{1}{x} (x'f_2 - y'f_1) + \delta' A_{\beta\delta} + \dots$$

$$= \sigma + \tau \delta' + \dots$$

En négligeant d'abord le terme en β^{12} on trouve un discriminant de la forme:

$$22) \quad \Delta_{\beta} = \frac{1}{4}(zZ + \mu\delta' + \nu\delta'^2)^2 + \frac{1}{27}(\sigma + \tau\delta')^3,$$

qui égalé à zéro nous donne le cône $\Gamma_{\delta'}$. Ici le coefficient μ est fini à l'exception du voisinage de T où il s'annule comme

$$x'f_4 - u'f_1;$$

σ est du premier ordre et ν et τ sont finis. Au voisinage de $\Gamma_{\delta'}$ on conclut donc que

$$\sigma + \tau\delta'$$

est de l'ordre des x' , y' etc., et on satisfera à 20) en prenant β^{13} de l'ordre de $f(0, \delta')$, c. à. d. β' de l'ordre de

$$(\sigma + \tau\delta')^{\frac{1}{2}},$$

en vertu de 22). Par cette assumption les termes

$$f(0, \delta'), \quad \beta' \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta'}, \quad \beta^{13} \cdot \frac{\partial^3 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^{13}}$$

deviennent tous de l'ordre $\frac{3}{2}$ par rapport aux petites quantités, tandis que le terme en β^{12} devient de l'ordre 2. L'omission faite est donc admissible.

On tire de 22) que, pour $\delta' = 0$,

$$23) \quad \frac{zZ}{2} = \frac{1}{\sqrt{27}} \sigma^{\frac{3}{2}}$$

ce qui, dans le plan des Z , σ , nous donne bien une courbe au point d'arrêt $Z = \sigma = 0$.

Posons

$$\delta' = \delta'' - \frac{\sigma}{\tau}$$

nous aurons au lieu de 22),

$$24) \quad (\xi + \eta\delta'' + \nu\delta''^2)^2 + \delta''^3 = 0$$

avec

$$\xi = \frac{\sqrt{27}}{2} \left(zZ - \frac{\mu\sigma}{\tau} \right), \quad \eta = \frac{\sqrt{27}}{2} \left(\mu - \frac{2\nu\sigma}{\tau} \right), z$$

13. Retenons jusqu'à la 3^{ème} puissance de δ'' et calculons le discriminant de 24). On trouve une expression de la forme:

$$A = \xi^3 D(\xi, \eta)$$

où D est une fonction entière rationnelle des ξ, η , qui s'annule pour $\xi = \eta = 0$. Or ξ est toujours infiniment petit; il s'ensuit que D ne s'annule que pour de très petites valeurs de η , c. à. d. il faut que μ , soit $xf_4 - uf_1$ soit très petit. On se trouve donc au voisinage de I_δ et par conséquent

$$D = 0$$

nous donne l'équation de la caractéristique.

Pour une valeur finie de η on trouve encore deux racines égales quand

$$25) \quad \xi = 0, \text{ soit } zZ = \frac{\mu\sigma}{\tau}.$$

Or l'équation 22) représente dans le plan des Z, σ une courbe, laquelle en première approximation s'obtient en faisant subir à la courbe 23) une translation proportionnelle à δ' dirigée la long de la droite 25); en effet c'est une courbe parallèle à 23) ayant un point d'arrêt en

$$Z = -\frac{\mu\delta'}{z}, \quad \sigma = -\tau\delta'.$$

L'équation 25) nous donne donc bien le lieu des arêtes de rebroussement; c'est en première approximation l'équation du plan tangent de la surface I_δ .

Pour les différentes valeurs de δ' l'équation 22) dessine dans le plan des Z, σ une famille de courbes dont les points d'arrêt découpent sur la droite 25) des longueurs proportionnelles aux valeurs δ' correspondantes. Par un point arbitraire du plan passent deux courbes de

la famille, déterminant deux valeurs δ' qui évidemment sont aux signes égaux ou contraires selon que le point se trouve à l'extérieur ou à l'intérieur de l'angle de rebroussement de la courbe 23) au point d'arrêt à l'origine.

Les équations simultanées

$$\xi = 0, \quad D = 0, \quad \text{c. à. d.} \quad \xi = \eta = 0$$

représentent le contact entre I_δ et I . Il suffit de se reporter à l'équation 24) pour reconnaître qu'on a alors, comme il faut bien, *trois* racines δ'' égales et nulles. Pour achever la discussion des branches δ'' il faut résoudre l'équation; par une discussion facile on retrouvera pour la connexion des racines autour de la courbe de contact des résultats déjà déduits par des considérations géométriques.

14. Une remarque importante concerne les racines β' de 20) au voisinage du cône I_δ . Négligeons toujours le terme en β'^2 ; et posons

$$\beta'_1 = u + v, \quad \beta'_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \quad \text{etc.,}$$

la formule de CARDANI nous donne:

$$\frac{u^3}{v^3} = -\frac{1}{\frac{\partial^3 f^{(a)}}{\partial \beta'^3}} \Im(\sigma + \tau \delta' \mp \sqrt{\Delta_\beta}) = -\frac{1}{\frac{\partial^3 f^{(a)}}{\partial \beta'^3}} \Im(\tau \delta'' \mp \sqrt{\Delta_\beta})$$

Au voisinage de I_δ , c. à. d. pour $\xi = 0$, 24) nous a fait voir que Δ_β est de l'ordre δ'^2 ; il s'ensuit que u et v sont de l'ordre $\sqrt[3]{\delta''}$. L'arête de rebroussement passant par le point correspondant appartient au cône $\delta'' = 0$, $\delta' = -\frac{\sigma}{\tau}$, valeur δ' qui nous donne bien trois valeurs β' confondues.

Formons, au voisinage de $\delta'' = 0$, la fonction:

$$\frac{\partial f^{(a)}}{\partial \beta'} \quad \text{pour} \quad \beta' = \beta'_1 = u + v.$$

On trouve immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial^3 f^{(\alpha)}}{\partial \beta'^3} (\beta'_1 - \beta'_2) (\beta'_1 - \beta'_3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^3 f^{(\alpha)}}{\partial \beta'^3} (u^2 + uv + v^2). \end{aligned}$$

On a obtenu une expression proportionnelle à

$$\frac{u^3 - v^3}{u - v} \text{ c. à. d. à } \frac{\sqrt{\mathcal{A}\beta}}{u - v}.$$

$\mathcal{A}\beta$ étant de l'ordre δ''^2 , $u - v$ de l'ordre $\sqrt[3]{\delta''}$ on a donc une fonction qui pour $\delta'' = 0$ s'annule de l'ordre $\delta''^{\frac{2}{3}}$.

15. \S *Séparation des racines autour d'une courbe parabolique.* Soit toujours cette courbe due au point conique réel du n° 10, point aux coordonnées $\alpha' = \beta' = \delta' = 0$. Nous mettons, après une transformation homographique convenable,

$$26) \quad 2f(\alpha', \beta', \delta') = \alpha'^2 + \beta'^2 - \delta'^2 + f^{(3)}(\alpha', \beta', \delta').$$

Considérons le voisinage d'une génératrice particulière du cône tangent

$$27) \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = \varrho'^2 = \delta'^2$$

soit

$$27') \quad \alpha' = \delta' \cos \varphi, \quad \beta' = \delta' \sin \varphi$$

et introduisons les relations 27') dans les termes $f^{(3)}$ de 3^{ième} ordre. Il vient

$$26^{\text{bis}}) \quad 2f = 0 = \alpha'^2 + \beta'^2 - \delta'^2 - \mu \delta'^3$$

où μ ne dépend que de l'angle φ d'un plan tournant autour de l'axe des δ' .

En introduisant

$$\alpha' = - \frac{\beta'y + Z + \delta'u}{x}$$

on observe que la substitution de $-x$, $-y$ à x , y respectivement va changer, pour Z , u , δ' fixes, α' , β' en $-\alpha'$, $-\beta'$ respectivement, c. à. d. φ en $\varphi + \pi$, ce qui en général nous donnera une valeur différente de μ . L'équation 26^{bis}) ne reste donc valable qu'à condition que les x , y soient à signes déterminés.

Cela posé on trouve pour $f^{(a)}$ le discriminant:

$$28) \quad \Delta_{\beta'} = \frac{1}{x^2} (\delta'^3 \cdot \mu (x^2 + y^2) - \delta'^2 (u^2 - x^2 - y^2) - 2\delta' u Z - Z^2)$$

de manière que l'équation

$$29) \quad \Delta_{\beta'} = 0$$

nous donne trois racines zéro pour

$$30) \quad Z = 0, \quad u^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

La courbe parabolique 30) est donc une ellipse, section du plan double par un cylindre circulaire.

Pour de petites valeurs de $(u^2 - x^2 - y^2)$ on satisfera à 29) en supposant que δ' soit de l'ordre de $(u^2 - x^2 - y^2)$ et Z de l'ordre de $(u^2 - x^2 - y^2)^2$. Dans l'expression entre crochets de 28) tous les termes sont alors de l'ordre de $(u^2 - x^2 - y^2)^3$ à l'exception du terme Z^2 qui devient d'ordre supérieur. Après l'omission de ce terme l'équation 29) a donc une racine

$$\delta' = \delta'_3 = 0$$

Dans une section telle que celle de la fig. 6, cette racine correspond au voisinage de C_2 à la tangente touchant I' près de C_1 ; la figure confirme le fait que cette tangente donne une valeur δ' infiniment petite et d'ordre supérieur relativement aux δ'_1 , δ'_2 des tangentes qui touchent près de C_2 . Ainsi l'équation

$$\delta' \left(\delta'^2 - \delta' \frac{u^2 - x^2 - y^2}{\mu (x^2 + y^2)} - \frac{2uZ}{\mu (x^2 + y^2)} \right) = 0$$

nous donne:

$$31) \quad \frac{\delta'_1}{\delta'_2} = \frac{u^2 - x^2 - y^2}{2u(x^2 + y^2)} \pm \sqrt{\frac{(u^2 - x^2 - y^2)^2 + 8uZ\mu(x^2 + y^2)^2}{4\mu^2(x^2 + y^2)^2}};$$

ces valeurs se confondent sur la caractéristique dont l'équation au voisinage de la courbe parabolique s'écrit

$$32) \quad Z = -\frac{(u^2 - x^2 - y^2)^2}{8\mu u(x^2 + y^2)} = -\frac{(u^2 - r^2)^2}{8\mu r^2}$$

On écrira encore, au voisinage de $r = u$,

$$32') \quad Z = -\frac{1}{2\mu u} (u - r)^2$$

équation donnant, dans le demi-plan négatif d'une section normale au plan double, deux arcs de parabole dont, par la remarque faite, l'un seulement fournit la section cherchée de I .

La coefficient de δ^2 en 28) nous donne la fonction Hessienne \mathfrak{P} du plan double, fonction négative pour l'intérieur de l'ellipse \mathfrak{C} ,

$$x^2 + y^2 < u^2.$$

Calculons, par comparaison, la fonction

$$P(\bar{x}, \bar{y}, u) = \frac{H(x, \bar{y}, u)}{\bar{x}^2} = \frac{H(f_1, f_2, f_3)}{x^2 \bar{x}^2}$$

aux points avoisinants de I . L'expression de $f^{(a)}$ nous donne

$$P = \left(\frac{\partial^2 f^{(a)}}{\partial \beta \partial \delta} \right)^2 - \frac{\partial^2 f^{(a)}}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 f^{(a)}}{\partial \delta^2} = \frac{3\mu \delta' (x^2 + y^2) - (u^2 - x^2 - y^2)}{x^2},$$

où il faut introduire pour δ' la valeur commune que prennent les racines 31) sur I savoir

$$33) \quad \delta'_r = \frac{u^2 - x^2 - y^2}{2\mu(x^2 + y^2)}.$$

Donc

$$P = \frac{u^2 - x^2 - y^2}{2x^2},$$

c. à d.

$$H(f_1, f_2, f_3) = z^2 \frac{u^2 - x^2 - y^2}{2}.$$

Les fonctions \mathfrak{Y} et P sont donc au voisinage de la courbe \mathfrak{C}' de signes contraires; le signe de P étant d'ailleurs fixé par la nature de I , nécessairement à courbure hyperbolique à l'intérieur et à courbure elliptique à l'extérieur du cylindre circulaire.

On tire de 33)

$$z = \frac{f_4}{u} = -\frac{\delta'_r}{u} = -\frac{u^2 - x^2 - y^2}{2uu(x^2 + y^2)},$$

d'où, d'après la formule II, du n° 1

$$\mathfrak{H} = \frac{z^4 u^2}{H} = \frac{u^2 - x^2 - y^2}{2u^2 u^2 (x^2 + y^2)}$$

Sur la courbe \mathfrak{C} , z^4 et H disparaissent simultanément, mais z^4 s'annule d'ordre supérieur de manière que \mathfrak{H} s'annule. \mathfrak{C} est donc bien une courbe parabolique, comme on vérifie d'ailleurs immédiatement en partant de l'équation 32') de I .

Par la formule 31) avec la valeur zéro pour δ'_3 , la séparation des branches est achevée. On aura toujours $\delta_1 = \delta_2$ sur I tandis que pour $Z = 0$ on aura

$$\delta'_1 = 0, \text{ soit } \delta'_2 = 0$$

selon que $u^2 - x^2 - y^2 \geq 0$. La racine δ'_1 est donc adjointe au domaine intérieur du plan double, et δ'_2 remplit la même fonction pour le domaine extérieur. Tout cela s'accorde avec les conditions au point C_2 telles que nous les avons représentées dans la fig. 6.

§ 5.

Préliminaires sur les intégrales des fonctions algébriques appartenant à la surface f .

16. On s'attendra, par analogie avec les équations à trois dimensions, à ce que l'expression fondamentale F de l'introduction se réduise à certaines intégrales abéliennes possédant, dans l'espace des

(x, y, z, u) , la caractéristique comme cône singulier. Nous discutons ici préliminairement quelques cas typiques élémentaires.

Prenons, dans la notation du n° 4,

$$\frac{\partial f}{\partial \beta'} = A_{\beta^2} \cdot A_{\beta'} = \frac{1}{x} (xf_2^{(\alpha)}(\beta', \delta') - yf_1^{(\alpha)}(\beta', \delta'))$$

avec

$$A_{\beta'} = P(\delta' - \delta'_1)(\delta' - \delta'_2),$$

où P par le facteur positif $\frac{1}{z^2 x^2}$ diffère de la Hessienne H de $f(\alpha, \beta, \delta)$ en $(\bar{\alpha}, \beta, \bar{\delta})$. Nous considérons les deux intégrales que voici:

$$A = \int \frac{d\delta'}{(\bar{\delta} + \delta') \sqrt{A_{\beta'}}$$

$$B = \int \frac{d\delta'}{(\bar{\delta} + \delta')^2 \sqrt{A_{\beta'}}$$

Écrivons de nouveau δ au lieu de $\delta + \delta'$; nous avons

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{P}} \int \frac{d\delta}{\delta \sqrt{(\delta - \delta_1)(\delta - \delta_2)}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{P} \sqrt{\delta_1 \delta_2}} \log \frac{2\delta_1 \delta_2 - (\delta_1 + \delta_2)\delta + 2\sqrt{\delta_1 \delta_2} \sqrt{(\delta - \delta_1)(\delta - \delta_2)}}{\delta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{P}} \int \frac{d\delta}{\delta^2 \sqrt{(\delta - \delta_1)(\delta - \delta_2)}} = \frac{1}{\sqrt{P} \cdot \delta_1 \delta_2} \left[\frac{\sqrt{(\delta - \delta_1)(\delta - \delta_2)}}{\delta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \log \frac{2\delta_1 \delta_2 - (\delta_1 + \delta_2)\delta + 2\sqrt{\delta_1 \delta_2} \sqrt{(\delta - \delta_1)(\delta - \delta_2)}}{\delta} \right]. \end{aligned}$$

On suppose que les intégrales soient étendues le long de chemins aboutissant dans l'un des points de branchement. Soit p. ex. un chemin allant de δ_1 jusqu'à un point arbitraire a ; on est ramené à

$$A = -\frac{1}{\sqrt{P}V_{\delta_1\delta_2}} \log \frac{2\delta_1\delta_2 - a(\delta_1 + \delta_2) + 2\sqrt{\delta_1\delta_2}V(a - \delta_1)(a - \delta_2)}{a(\delta_2 - \delta_1)}.$$

Le choix de la valeur a n'influe pas sur la singularité logarithmique pour $\delta_2 = \delta_1$. En effet, on constate de suite que l'intégrale étendue entre deux points a, b , tous les deux distincts de δ_1 et de δ_2 , reste régulière même pour $\delta_2 = \delta_1$. Soit donc particulièrement $a = \infty$; nous aurons:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}V\bar{P}} \log \frac{\delta_1 + \delta_2 - 2\sqrt{\delta_1\delta_2}}{\delta_1 - \delta_2}$$

et pour la même raison:

$$B \cdot \sqrt{P} = -\frac{1}{\delta_1\delta_2} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2(\delta_1\delta_2)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{\delta_1 + \delta_2 - 2\sqrt{\delta_1\delta_2}}{\delta_1 - \delta_2}.$$

17. Soit d'abord la valeur commune $\bar{\delta}$ de δ_1, δ_2 distincte de zero; les intégrales ci-dessus n'ont, dans l'espace des x, y, z , d'autre singularité que l'infinité logarithmique en $\delta_2 = \delta_1$, apparaissant quand (x, y, z) coïncide avec le point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de I .

On écrit donc:

$$\log \frac{\delta_1 + \delta_2 - 2\sqrt{\delta_1\delta_2}}{\delta_1 - \delta_2} = \log \frac{\sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2}} = \log \frac{\delta_1 - \delta_2}{(\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2})^2} = \log \frac{\delta_1 - \delta_2}{4\bar{\delta}}.$$

Reportons-nous à la discussion du n° 8 pour la marche dans le champ complexe de l'argument $\delta_1 - \delta_2$. Par la manière dont l'imaginaire ε entre dans nos équations on reconnaît que les δ_1, δ_2 ont de petites parties imaginaires à signes contraires dans le «domaine réel» extérieur à I . Stipulons que le point δ_1 choisi comme limite d'intégration soit celui situé dans le demi-plan complexe positif. L'argument $\delta_1 - \delta_2$ suivra alors l'un des deux chemins dessinés dans la fig. 9; le choix entre les deux étant fixé par le signe de

$$\varepsilon A \delta^2.$$

Supposons que ce soit le chemin supérieur; nous trouvons, dans la limite de $\varepsilon = 0$,

$$A = -\frac{1}{\delta\sqrt{P}} \left(\Re \left(\log \frac{\delta_1 - \delta_2}{4\delta} \right) + \frac{\pi i}{4} \right)$$

soit

$$A = -\frac{1}{\delta\sqrt{P}} \Re \left(\log \frac{\delta_1 - \delta_2}{4\delta} \right)$$

selon que (x, y, z) , voisin de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, est intérieur ou extérieur à Γ .

Quant à la réalité de nos expressions le résultat diffère selon la nature du point $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

a) Soit $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un point à courbure elliptique de Γ ; la Hessienne H est alors négative et \sqrt{P} a une valeur imaginaire pure. Il s'ensuit que

le passage à travers un point du domaine convexe de la caractéristique fait subir à l'intégrale A un saut brusque réel dont la grandeur s'exprime algébriquement:

$$\frac{\pi}{4\delta\sqrt{-P}}$$

b) Dans un point à courbure hyperbolique, \sqrt{P} sera au contraire réel; on aura donc une infinité logarithmique réelle. Soit

$$Z - I(x', y') = 0$$

l'équation approximée de la caractéristique, et soit au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$Z - I(x', y') = \xi;$$

on trouve que

par le passage à travers un point aux courbures opposées de Γ l'intégrale A devient infinie comme

$$-\frac{1}{\delta\sqrt{P}} \log \xi, \text{ pour } \xi = 0$$

ξ dénotant la distance de (x', y', z') à Γ .

Les conclusions subsistent sans altération essentielle pour l'intégrale B ; on n'aura évidemment qu'à remplacer le facteur $\frac{1}{\delta}$ par $\frac{1}{\delta^2}$.

18. Le cas de $\bar{\delta} = 0$ se complique par l'intervention d'un cône tangent particulier savoir $\Gamma_{\bar{\delta}} = \Gamma_0$ qui devient aussi une surface singulière pour nos intégrales. En effet, au voisinage de ce cône on a toujours une racine δ' , soit δ'_1 voisine de zéro de manière que le facteur

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}}$$

prend des valeurs infiniment grandes. Soit d'abord un point x', y', z' voisin de Γ_0 mais à distance finie de Γ ; on écrit

$$A_{\beta} = 2Q\delta' + R,$$

de manière que A va dégénérer en

$$\int_{\delta'_1}^{\infty} \frac{d\delta'}{\delta' \sqrt{2Q} \sqrt{\delta' - \delta'_1}} = \frac{\pi}{\sqrt{2Q\delta'_1}},$$

où

$$\delta'_1 = -\frac{R}{2Q}.$$

Écrivons, pour le voisinage de Γ_0 , c. à. d. pour les valeurs très petites de R , conformément aux formules C), D) du n° 4,

$$Z = I(x', y') + \xi_0, \quad R = \frac{2\bar{f}_1}{x} A_{\beta^2} \cdot \xi_0;$$

nous tirons que, au passage à travers $\Gamma_{\bar{\delta}} = 0$, l'intégrale A devient algébriquement infinie de l'ordre

$$\frac{\pi i}{\sqrt{\xi_0}}$$

ξ_0 dénotant la distance de x', y', z' à Γ_0 .

Par le même raisonnement on voit que dans les circonstances analogues, l'intégrale B devient infinie de l'ordre

$$\frac{\pi i}{\sqrt{\xi_0^2}}.$$

19. Revenons maintenant aux circonstances près de F . Il s'agit de la manière dont se comporte l'intégrale A quand on franchit F par un circuit complet autour de la courbe C de contact. Nous savons d'après la fig. 10 b qu'un tel circuit correspond pour l'argument

$$\delta_1 - \delta_2$$

à deux chemins identiques décrits dans les directions contraires dans le premier quadrant des valeurs complexes, et pour l'argument

$$\delta_1 + \delta_2 - 2\sqrt{\delta_1\delta_2}$$

à une courbe fermée située tout entière dans le demi-plan complexe supérieur. On revient donc au point de départ avec la même détermination du logarithme. *L'intégrale A reste uniforme dans l'espace des (x, y, z, u) .*

Partons donc d'un point situé entre Γ_0 et F , soit côté positif de la surface Q . On franchit F en faisant un demi-circuit autour de la valeur nulle de l'expression

$$q = \delta_1 + \delta_2 - 2\sqrt{\delta_1\delta_2}$$

tandis que

$$\delta_1 - \delta_2$$

décrit le quart d'un circuit dans le demi-plan positif. C'est pourquoi la différence

$$\log(\delta_1 + \delta_2 - \sqrt{\delta_1\delta_2}) - \log(\delta_1 - \delta_2)$$

s'augmente du quart de la période:

$$\frac{\pi i}{4},$$

la variation se faisant dans le sens positif pour les deux arguments.

Après le trajet à l'intérieur de F on franchit cette surface de nouveau du côté négatif de Q ; le premier argument reste alors fini et le second décrit de nouveau le même chemin qu'auparavant mais dans le sens inverse en allant de valeurs imaginaires et positives à des valeurs

réelles positives. La somme s'augmente donc encore du quart de période $\frac{\pi i}{4}$. Finalement, après la traversée de I_0 du côté négatif de Q , on aura un second demi-circuit dans le demi-plan supérieur des q lequel réduit la première intégrale de la demi-période $\frac{\pi i}{2}$, sans changer l'autre intégrale, de manière qu'on revient bien à la valeur initiale au point de départ.

Puisque, au voisinage de I , on a toujours, $\delta_1 \delta_2 > 0$, on a ainsi au passage de I des discontinuités logarithmiques, qui dans le cas d'une courbure elliptique nous donnent des sauts brusques algébriques réels. *Seulement ces sauts se prennent aux deux côtés de C dans les directions contraires, ou, si l'on veut, tous les deux dans la direction précisée par un sens de rotation autour de C .*

On arrive ainsi avec des déterminations différentes du logarithme dans les points voisins de I_0 , selon que l'on se trouve à l'un ou l'autre côté de C , résultat qui s'accorde avec la manière dont se comporte le logarithme à l'extérieur du cône singulier. On a donc, pour le cas d'un domaine convexe de I , obtenu l'arrangement qui suit. A l'intérieur de I_0 on a $\sqrt{\delta_1 \delta_2}$ réel et de

$$\frac{i}{\sqrt{\delta_1 \delta_2} \sqrt{-P}} \log \frac{q}{\delta_1 - \delta_2}$$

ne reste autre partie réelle¹ que la fonction discontinue composée de différentes fractions de la période algébrique. Traversant I_0 avec les infinités algébriques différentes correspondant à $\sqrt{\delta_1 \delta_2} = 0$ on arrive aux valeurs réelles de

$$\frac{i}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}};$$

l'intégrale s'exprime donc, à l'extérieur de I_0 , au moyen de la partie réelle d'un logarithme, à l'argument complexe, qui par un demi-circuit dans ce domaine extérieur s'augmente d'une demi-période imaginaire.

¹ l'argument q du logarithme étant, dans ce domaine, ou réel ou imaginaire pur.

On revient toujours à ce logarithme réel dans le domaine considéré. En discutant ci-dessus les distances finies de I le côté extérieur de Γ_0 correspond à $\delta_1 < 0$; avec $\frac{i}{\sqrt{\delta_1}}$ réel nous aurons comme partie réelle de l'intégrale un logarithme réel infiniment petit au voisinage de Γ_0 .

20. Pour un point hyperbolique de Γ , le facteur

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \frac{1}{\sqrt{P}}$$

étant réel, on trouve à l'intérieur de Γ_0 le logarithme réel

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \frac{1}{\sqrt{P}} \log \frac{q}{\delta_1 - \delta_2}$$

à l'argument réel et aux périodes imaginaires. On retrouve donc sur I des infinités réelles logarithmiques. Or, en franchissant Γ_0 , l'argument devient complexe, et le facteur du logarithme devient imaginaire. Il nous reste donc comme partie réelle un arc cot réel par la variation duquel on arrive à des discontinuités algébriques sur Γ_0 , différant aux deux côtés de C par la demi-période (infiniment grande).

$$\frac{\pi}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \frac{1}{\sqrt{P}}$$

Notons encore la manière dont se comporte le logarithme réel quand on s'approche de Γ_0 du côté intérieur. Supposons qu'on fasse tendre δ_2 vers zéro avec $\delta_1 \neq 0$; on aura

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \log \frac{\delta_1 + \delta_2 - 2\sqrt{\delta_1\delta_2}}{\delta_1 - \delta_2} = \frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \log \left(1 - 2\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}} \right),$$

expression qui pour $\delta_2 = 0$ tend vers une valeur finie.

Finalement, pour les singularités réelles au passage de I , l'arrangement diffère selon la position par rapport à C . Soit, $\delta_1 = \delta_2 + \xi$; on constate que l'un côté de C correspond à

$$\delta_1 + \delta_2 - 2\sqrt{\delta_1\delta_2} = 0 \quad \text{c. à. d.} \quad \sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_2} = 0$$

et l'autre côté à

$$\delta_1 + \delta_2 - 2\sqrt{\delta_1\delta_2} = 0, \quad \delta_1 - \delta_2 = 0 \quad \therefore \quad \sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2} = 0.$$

On trouve donc une infinité de l'ordre

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}\sqrt{P}} \log \xi$$

selon que l'on se trouve de l'un ou de l'autre côté de la courbe de contact.

Remarquons que beaucoup des résultats ci-dessus se laissent prédire sans l'artifice choisi pour la détermination des branches. Considérons par ex. la fonction

$$\log \frac{\delta_1 + \delta_2 - 2\sqrt{\delta_1\delta_2}}{\delta_1 - \delta_2}$$

à l'extérieur de I_0 . L'expression tend vers

$$\log 1 = 0$$

pour $\delta_2 = 0$, c. à. d. pour la partie de I_0 à laquelle δ_2 est la racine adjointe, et vers

$$\log (-1) = \pi i$$

quand la racine adjointe s'appelle δ_1 .

21. La discussion de l'intégrale B) s'achève d'après les mêmes principes. La différence consiste dans l'apparition de la singularité algébrique

$$-\frac{1}{\delta_1\delta_2} \frac{1}{\sqrt{P}},$$

infinité du premier ordre, réelle seulement dans le cas d'une courbure hyperbolique, et dans la multiplication du terme logarithmique par le facteur

$$\frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 \delta_2}.$$

Ce facteur a l'effet de supprimer le changement de signe à travers C. En effet, par ce passage le facteur change lui-même de signe et renverse de nouveau le sens dans lequel se présentent les discontinuités.

22. Ajoutons un mot sur les circonstances relatives à la surface des tangentes d'inflexion. Nous avons vu au n° 14 que

$$\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta'}$$

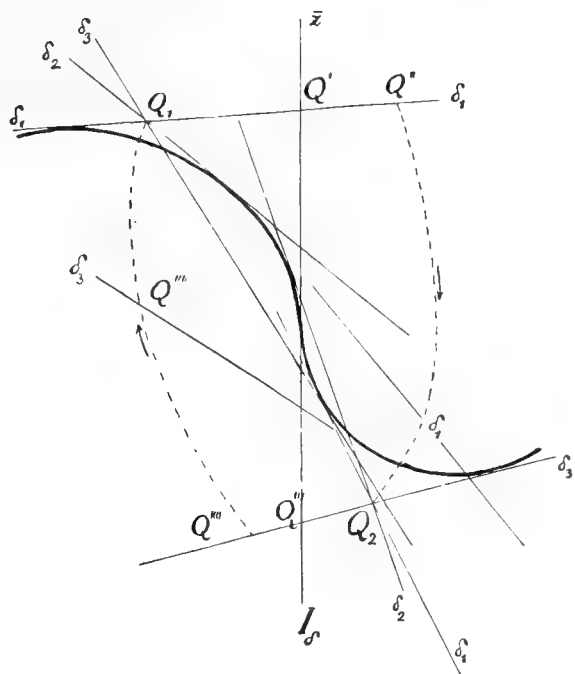
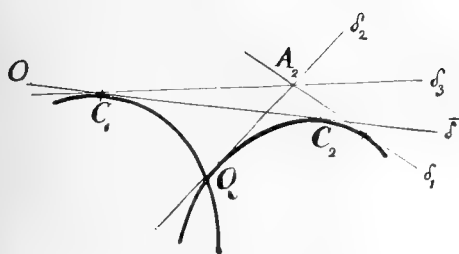
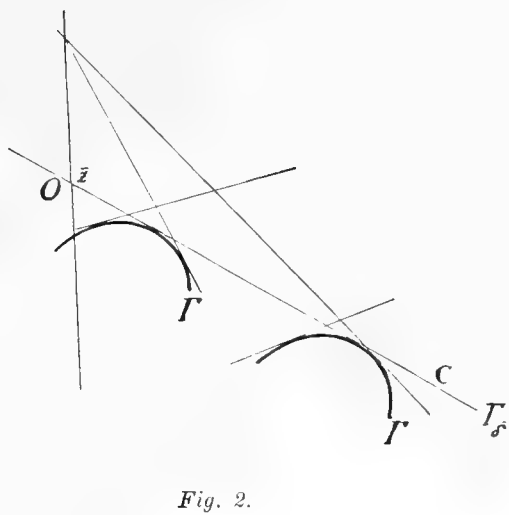
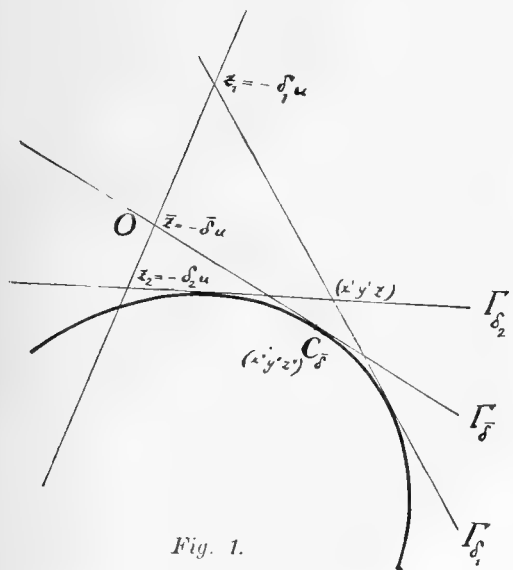
s'annule alors de l'ordre δ'^3 ; pour l'étude de

$$\int \frac{d\delta'}{\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta}}$$

on revient donc à l'intégrale

$$\int \frac{d\delta'}{\delta'^2}$$

qui reste finie. Il s'ensuit que *les intégrales abéliennes de la courbe $f^{(\alpha)}$ restent régulières dans les points de la surface I_3 .*



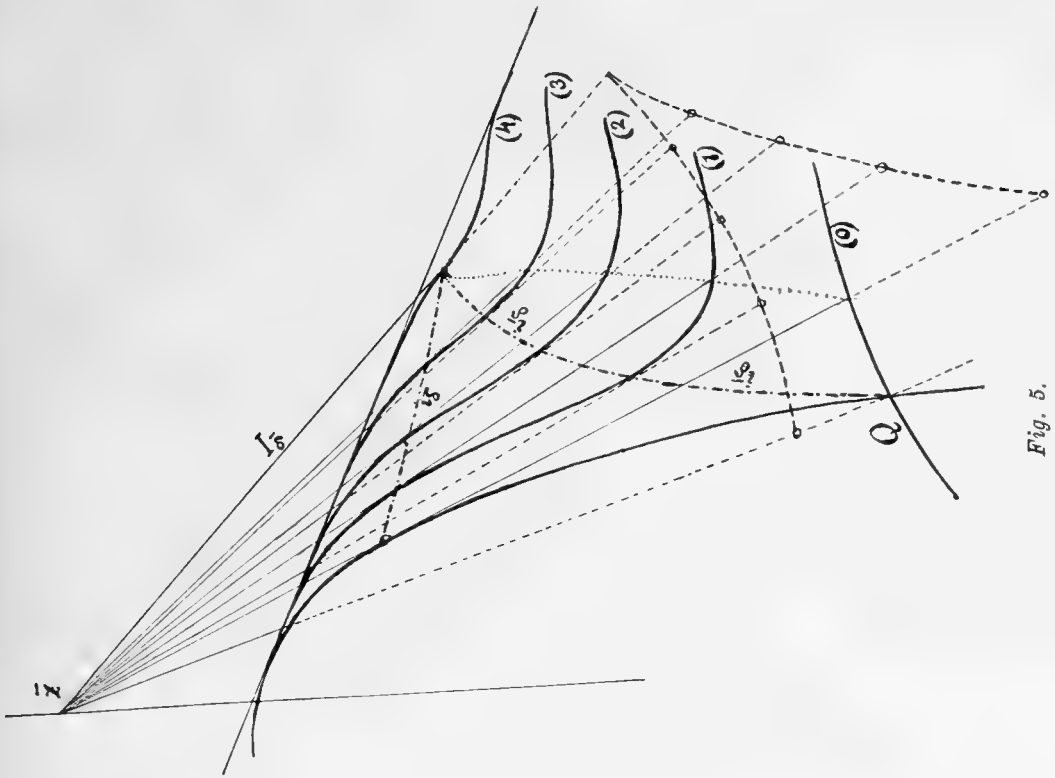


Fig. 5.

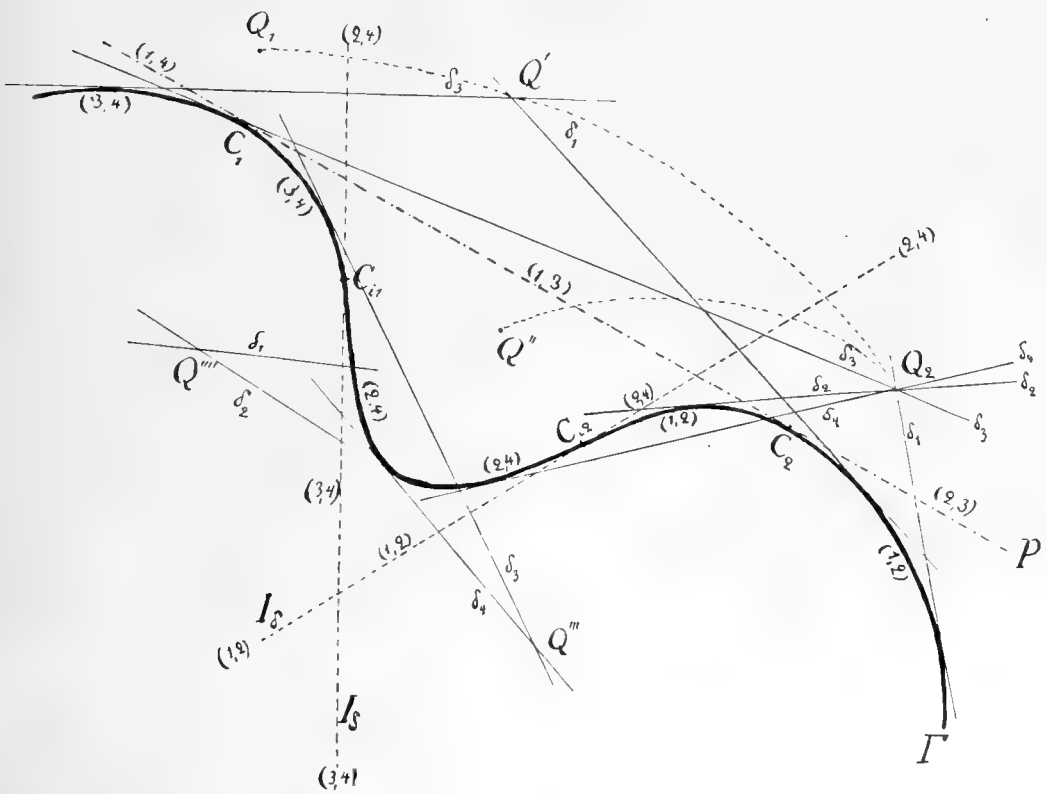


Fig. 6.

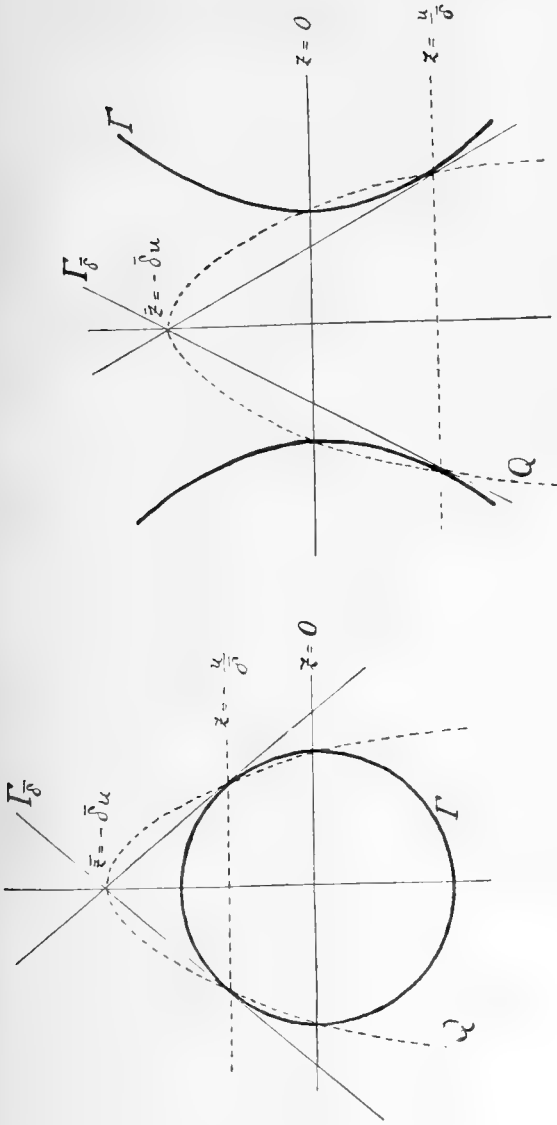


Fig. 8.

Fig. 7.

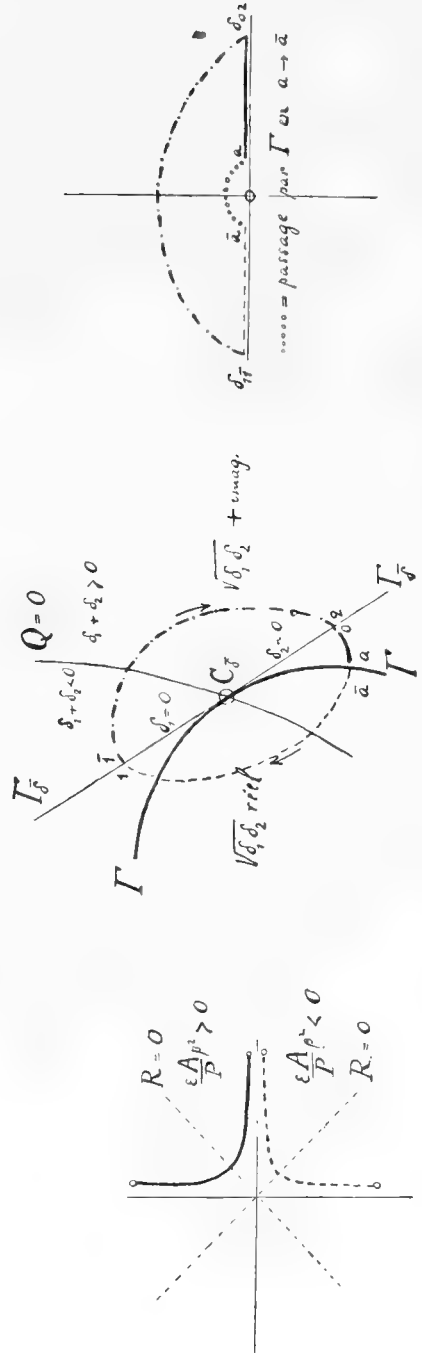


Fig. 9.

Fig. 10 a.

Fig. 10 b.

NOVA ACTA REGIAE SOCIETATIS SCIENTIARUM UPSALIENSIS

SER. IV. VOL. 5. N:o 4.

SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES
PARTIELLES A QUATRE DIMENSIONS

ET

LE PROBLÈME OPTIQUE DES MILIEUX
BIRÉFRINGENTS

PAR

NILS ZEILON

Deuxième Partie

(PRÉSENTÉ A LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES D'UPSALA LE 4 FÉVRIER 1921)

UPPSALA

EDV. BERLINGS BOKTRYCKERI A.-B.

1921.

Chapitre III.

Les singularités de l'intégrale fondamentale.

§ 1.

Application du calcul des résidus aux dérivées d'ordre $n-3$.

1. La première partie du présent ouvrage a fourni des préliminaires nécessaires d'une nature algébrico-géométrique. L'artifice décrit au n° 8, chapitre II, servira maintenant à constituer une méthode de sommation de l'expression divergente

$$\text{I.} \quad F = \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u)}}{i^n f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} d\alpha d\beta d\gamma d\delta.$$

Ainsi nous partons de la définition

$$F = \lim_{\varepsilon=0} F_\varepsilon,$$

$$\text{I}^{\text{bis}} \quad F_\varepsilon = \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u)}}{i^n (f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + i\varepsilon \gamma^n)} d\alpha d\beta d\gamma d\delta;$$

Le calcul se rattache le plus convenablement aux dérivées de cette expression de l'ordre $n-3$ par rapport à x, y , etc.; ce sont là comme on le vérifie aisément des fonctions homogènes d'ordre -1 .

Soit donc

$$F_{n-3} = \psi^{(n-3)} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u} \right) F$$

une combinaison linéaire arbitraire des dérivées d'ordre $n - 3$, à coefficients constants; nous partons de

$$F_{n-3} = \lim_{\varepsilon=0} F_{\varepsilon, n-3}$$

$$\text{II. } F_{\varepsilon, n-3} = \frac{i}{16\pi^4} \int \int \int \int \frac{\psi^{(n-3)}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u)}}{f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + i\varepsilon\gamma^u} d\alpha \dots d\delta,$$

expression qui se prête immédiatement à l'application du calcul des résidus. Il semblerait tout d'abord assez naturel de définir une valeur principale de l'expression primordiale divergente en modifiant insensiblement les chemins d'intégration de manière à éviter les zéros du dénominateur f . Mais on rencontrerait là cette difficulté que pour arriver à un résultat correct et bien défini il faut essentiellement calculer au moyen d'un procédé de limite dont on puisse facilement pénétrer la portée algébrique et qui soit sans ambiguïté, c. à. d. tel qu'il ne se modifie pas insensiblement pendant l'exécution du calcul. C'est pour cela qu'on a préféré projeter les zéros de f dans le domaine complexe d'une manière absolument fixée.

Toutefois il faut observer que la convergence de l'expression II n'est pas encore assurée, vu le fait que le domaine d'intégration contient le zéro

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0,$$

point multiple d'ordre n . Seulement cette singularité, étant ponctuelle, ne fait aucune difficulté. Il suffit, comme dans les cas analogues des équations d'un nombre moindre de variables¹, de former un certain terme de correction, solution de l'équation sans second membre, lequel ajouté à II donne une expression convergente, permettant le calcul au moyen des procédés ordinaires. Ce terme correctionnel ne paraîtra plus après l'application du théorème des résidus, et en nous référant aux dits cas analogues nous sommes en droit de nous dispenser de donner ici son expression explicite, son existence seule étant admise implicitement.

1. L'intégrale II se traite d'abord comme l'expression correspondante dans la théorie des équations à trois variables. Remplaçons

$$\alpha, \beta, \delta$$

¹ Voir: Les intégrales fondamentales des équations à caractéristique réelle, etc., Arkiv f. Matematik, Stockholm 1913.

par

$$\alpha\gamma, \beta\gamma, \delta\gamma$$

respectivement; après une transformation facile il vient

$$1. \quad F_{\varepsilon, n-3} = \frac{i}{16\pi^4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi^{(n-3)}(\alpha, \beta, 1, \delta)}{f(\alpha, \beta, 1, \delta) + i\varepsilon} e^{i\gamma(\alpha x + \beta y + z + \delta u)} d\alpha d\beta d\gamma d\delta - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi^{(n-3)}(\alpha, \beta, 1, \delta)}{f(\alpha, \beta, 1, \delta) + i\varepsilon} e^{i\gamma(\alpha x + \beta y + z + \delta u)} d\alpha d\beta d\gamma d\delta \right).$$

Pour avoir la partie réelle, on fournit le résultat désiré au moyen d'une seule intégrale réelle pure par la substitution de

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{f + i\varepsilon} + \frac{1}{f - i\varepsilon} \right) \text{ à } \frac{1}{f + i\varepsilon},$$

de manière à obtenir l'expression

$$1^{\text{bis}} \quad F_{\varepsilon, n-3} = - \\ - \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi^{(n-3)}(\alpha, \beta, \delta) f(\alpha, \beta, \delta)}{f^2 + \varepsilon^2} \sin \gamma(\alpha x + \beta y + z + \delta u) d\alpha d\beta d\gamma d\delta$$

2. Exécutons maintenant l'intégration en α , et supposons d'abord que

$$x > 0.$$

Pour des valeurs fixes de β, δ on aura certaines racines, soit de

$$2) \quad f + i\varepsilon = 0,$$

soit de

$$2') \quad f - i\varepsilon = 0,$$

lesquelles deviennent en partie réelles pour $\varepsilon = 0$, tandis que les autres restent complexes et se divisent en paires conjuguées.

Soit d'abord α_v , une racine de 2), choisie à partie imaginaire positive pour des valeurs particulières de β , δ , et considérons—la comme fonction algébrique de β en tenant δ arbitraire mais fixe. L'introduction de l'imaginaire $i\varepsilon$ a effectué que

$$f_1(\alpha_v)$$

ne disparaît plus pour des valeurs réelles de β . Il s'ensuit donc que les diverses racines, solutions de 2) ou de 2'), restent des branches distinctes dans tout le domaine réel des β , et qu'en particulier elles *conservent des parties imaginaires de signes invariables*, tant que ε reste distinct de zéro. Il importe de noter ce qui résulte des α_v , solutions de 2), et des α_e , solutions de 2'), quand on fait marcher ε vers zéro, par rapport aux diverses branches de la fonction algébrique α définie par

$$3) \quad f(\alpha, \beta, \delta) = 0.$$

Pour cela, considérons le voisinage d'un point de branchement, réel pour $\varepsilon = 0$. Supposons que deux racines de 3) deviennent égales à $\bar{\alpha}$ pour $\beta = \bar{\beta}(\delta)$; on aura un développement de la forme:

$$f_1\alpha' + \frac{1}{2}f_{11}\alpha'^2 + \varphi \pm i\varepsilon = 0,$$

f_1 et φ s'annulant pour $\beta = \bar{\beta}$, de manière que

$$\alpha' = -\frac{f_1}{f_{11}} \pm \frac{1}{f_{11}} \sqrt{A \pm 2if_{11}\varepsilon}$$

Fixons les signes de manière à prendre les racines à partie imaginaire positive. Une discussion analogue à celle du n° 8, montre que parmi les quatre déterminations possibles les deux que voici

$$\alpha'_v = -\frac{f_1}{f_{11}} - \frac{1}{f_{11}} \sqrt{A - 2if_{11}\varepsilon}$$

$$\alpha'_e = -\frac{f_1}{f_{11}} + \frac{1}{f_{11}} \sqrt{A + 2if_{11}\varepsilon}$$

donnent le signe désiré. En faisant passer β par la valeur $\bar{\beta}$, de manière que A passe de valeurs positives à des valeurs négatives, on reconnaît, p. ex. pour $f_{11} > 0$, que des deux radicaux

$$\frac{1}{f_{11}} \sqrt{A + 2if_{11}\epsilon}, \quad \frac{-1}{f_{11}} \sqrt{A - 2if_{11}\epsilon}$$

le premier, en se tenant toujours dans le premier quadrant de ses valeurs complexes, passe de valeurs à peu près réelles et positives à des valeurs à peu près imaginaires positives. Le second, au contraire, restera toujours dans le deuxième quadrant en allant de valeurs à peu près réelles négatives à des valeurs voisines de l'axe imaginaire positif.

On en conclut que les racines α_v, α_q , pour $\epsilon = 0$, se comportent différemment selon que l'on se trouve de l'un ou de l'autre côté du point de branchement. Soit d'abord le côté réel; on y retrouve en α_v, α_q deux branches différentes de la fonction algébrique α , donnant au voisinage de $\beta = \bar{\beta}$ des signes différents à

$$f_1(\alpha, \bar{\beta}, \delta);$$

en effet, pour $\epsilon = 0$

$$f_1(\alpha_v, \bar{\beta}, \delta) = -\sqrt{A}, \quad f_1(\alpha_q, \bar{\beta}, \delta) = +\sqrt{A}.$$

Au contraire, du côté complexe du point de branchement les α_v, α_q deviennent identiques, tous les deux fournissant celle des deux branches α conjuguées qui est à partie imaginaire positive.

Après cette digression, revenons à l'intégration de l'expression 1), exécutée par rapport à α autour des demi-plans supérieur ou inférieur selon le cas. On trouve des contributions du type

$$4) \quad \pm \frac{1}{16\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \gamma \left(\sum \frac{\psi(\alpha_v, \beta, \delta)}{f_1(\alpha_v, \beta, \delta)} e^{i\gamma(\alpha_v x + \beta y + z + \delta u)} + \right. \\ \left. + \sum \frac{\psi(\alpha_q, \beta, \delta)}{f_1(\alpha_q, \beta, \delta)} e^{i\gamma(\alpha_q x + \beta y + z + \delta u)} \right) d\beta d\delta d\gamma$$

permettant l'exécution immédiate de l'intégration par rapport à γ et donnant:

$$5) \quad \frac{+i}{16\pi^2} \int_{\gamma}^{\gamma+\sigma} \int_{\gamma}^{\gamma+\sigma} \left(\sum \frac{\psi(\alpha_v, \beta, \delta)}{f_1(\alpha_v, \beta, \delta)(\alpha_v x + \beta y + z + \delta u)} + \sum \frac{\psi(\alpha_e, \beta, \delta)}{f_1(\alpha_e, \beta, \delta)(\alpha_e x + \beta y + z + \delta u)} \right) d\beta d\delta$$

Les α_v, α_e étant, d'après ce qui précède, des branches bien définies des deux fonctions algébriques appartenant aux équations 2) et 2'), on aura obtenu des formules qui permettront l'application du théorème des résidus à l'intégration par rapport à β . Intégrons donc autour du demi-plan supérieur des β ; il faudra tenir compte des points de branchement, tels que

$$f_1(\alpha_v, \beta, \delta) = 0, \quad f_1(\alpha_e, \beta, \delta) = 0$$

et des pôles, tels que

$$\alpha_v x + \beta y + z + \delta u = 0, \quad \alpha_e x + \beta y + z + \delta u = 0.$$

Discutons d'abord les résidus. Pour une valeur arbitraire de δ , toute valeur β satisfaisant à l'une ou à l'autre des équations est contenue parmi les zéros des équations:

$$f\left(-\frac{\beta y + z + \delta u}{x}, \beta, \delta\right) \pm i\varepsilon = 0.$$

3. Il importe surtout de connaître la manière dont ces zéros qui sont réels pour $\varepsilon = 0$, se déplacent dans le domaine complexe. Soit

$$\beta_1 = \beta'_1 + i\beta''_1$$

une racine quelconque; on trouve:

$$\beta''_1 = \frac{+i\varepsilon x}{x f_2\left(-\frac{\beta'_1 y + z + \delta u}{x}, \beta'_1, \delta\right) - y f_1\left(-\frac{\beta'_1 y + z + \delta u}{x}, \beta'_1, \delta\right)}$$

Donc pour

$$\varepsilon x > 0$$

on a obtenu un pôle à partie imaginaire positive ou négative selon le signe de

$$xf_2^{(\alpha)}(\beta', \delta) - yf_1^{(\alpha)}(\beta', \delta),$$

en adoptant les notations du chapitre II.

Or, une branche α_v quelconque, racine de 2), possède une partie imaginaire de signe constant en tout point β réel et par conséquent aussi de ce même signe en tout point β voisin de l'axe réel et à distance finie des points de ramification annulant

$$f_1(\alpha_v, \beta, \delta).$$

Il s'ensuit que les α_v , une fois déterminés pour un point arbitraire réel β, δ , restent des branches bien définies dans le domaine d'intégration réel, et il sera loisible de déformer le chemin d'intégration des β dans le demi-plan complexe supérieur en évitant les points de ramification β_n , tels que

$$6) \quad f_1(\alpha_v, \beta, \delta) = 0,$$

et les pôles β_m , racines de

$$7) \quad \alpha_v x + \beta y + z + \delta u = 0.$$

Pour les résidus, on prendra les zéros de la fonction rationnelle

$$8) \quad f^{(\alpha)} = f\left(-\frac{\beta y + z + \delta u}{x}, \beta, \delta\right) + i\varepsilon = 0.$$

Soit

$$\beta_1 = \beta'_1 + i\beta''_1$$

une racine quelconque de 8); en vertu de

$$\beta''_1 = -\frac{i\varepsilon x}{xf_2^{(\alpha)} - yf_1^{(\alpha)}};$$

on a pour

$$\varepsilon x > 0$$

obtenu un pôle à partie imaginaire positive, si

$$9) \quad x f_2^{(\alpha)} - y f_1^{(\alpha)} < 0.$$

Ici, quant à la branche particulière α_v , choisie, la partie imaginaire a toujours retenu le même signe en tout point β réel et par conséquent aussi au pôle β_1 , voisin de l'axe réel et à distance finie des points de branchement β_n . Mais, en vertu de 7), α_v et β au pôle en question possèdent des parties imaginaires de même signe ou de signes contraires selon que x et y sont de signes inverses ou égaux. Supposons que ce soit le premier cas qui ait lieu; il s'ensuit que β_1 n'annule l'expression 7) que pour celles des racines α_v , qui donnent une valeur *négative* à $f_1^{(\alpha)}$.

Ces conditions sont renversées pour les branches du type α_ρ , dont les parties imaginaires, pour le même signe de $f_1^{(\alpha)}$, sont contraires à celles de α_v . Si β_μ est une racine de

$$6') \quad f\left(-\frac{\beta y + z + \delta u}{x}, \beta, \delta\right) - i\varepsilon = 0$$

à partie imaginaire positive, c. à. d. telle que

$$x f_2^{(\alpha)} - y f_1^{(\alpha)} > 0,$$

on est assuré que, pour $xy < 0$,

$$\alpha x + \beta y + z + \delta u = 0$$

détermine une valeur α , à partie imaginaire positive, qui se retrouve parmi les α_ρ correspondant à $f_1^{(\alpha)} > 0$.

3. Cela posé, achevons l'intégration de l'expression 1) par rapport à α . Pour la première intégrale on aura à tenir compte (pour $x > 0$) des racines α_v à partie imaginaire positive, c. à. d. de celles qui donnent une valeur négative à $f_1^{(\alpha)}(\alpha_v, \beta, \delta)$, et d'une manière analogue on prendra pour la deuxième intégrale les α'_v , qui rendent f_1 positif. Il vient

$$4') \quad F_{\varepsilon, n-3} = \frac{1}{8\pi^3} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_x^{+\infty} \int_0^{\infty} \sum \frac{\psi(\alpha_v, \beta, \delta)}{f_1(\alpha_v, \beta, \delta)} e^{i\gamma(\alpha_v x + \beta y + z + \delta u)} d\beta d\delta d\gamma + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\gamma}^{+\infty} \int_x^0 \sum \frac{\psi(\alpha'_v, \beta, \delta)}{f_1(\alpha'_v, \beta, \delta)} e^{i\gamma(\alpha'_v x + \beta y + z + \delta u)} d\beta d\delta d\gamma \right\} +$$

en intégrant autour du demi-plan positif et négatif respectivement. L'expression 4') permettra l'intégration immédiate par rapport à γ , menant à

$$5') \quad F_{\varepsilon, n-3} = \frac{i}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum \pm \frac{\psi(\alpha_v, \beta, \delta) d\beta d\delta}{f_1(\alpha_v, \beta, \delta)(\alpha_v x + \beta y + z + \delta u)},$$

où le signe \pm se prend maintenant selon que, pour les branches réelles,

$$f_1(\alpha_v, \beta, \delta) \gtrless 0.$$

Donc, prenons la partie réelle de 1) en tenant compte aussi des α_e . On remplacera 5) par

$$10) \quad F_{\varepsilon, n-3} = \frac{i}{16\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum \pm \frac{\psi^{(n-3)}(\alpha_v, \beta, \delta)}{f_1(\alpha_v, \beta, \delta)(\alpha_v x + \beta y + z + \delta u)} + \right. \\ \left. + \sum \mp \frac{\psi^{(n-3)}(\alpha_e, \beta, \delta)}{f_1(\alpha_e, \beta, \delta)(\alpha_e x + \beta y + z + \delta u)} \right) d\beta d\delta,$$

le signe \pm se référant toujours à une branche à partie imaginaire positive, et par l'intégration autour du demi-plan supérieur des β on obtiendra une somme des résidus aux pôles voisins de l'axe réel:

$$11) \quad F'_{\varepsilon, n-3} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{+\infty}^{+\infty} \left(\sum \frac{\psi^{(\alpha)}(\beta_m, \delta)}{x f_2^{(\alpha)}(\beta_m, \delta) - y f_1^{(\alpha)}(\beta_m, \delta)} + \right. \\ \left. + \sum \frac{\psi^{(\alpha)}(\beta_u, \delta)}{x f_2^{(\alpha)}(\beta_u, \delta) - y f_1^{(\alpha)}(\beta_u, \delta)} \right) d\delta$$

en vertu de la relation

$$f_1 d\alpha + f_2 d\beta = 0,$$

et ici, pour récapituler, les β_m correspondent à

$$xf_2^{(\alpha)} - yf_1^{(\alpha)} < 0, \quad f_1^{(\alpha)} < 0, \quad \text{pour } \varepsilon = 0$$

et les β_μ à

$$xf_2^{(\alpha)} - yf_1^{(\alpha)} > 0, \quad f_1^{(\alpha)} > 0.$$

Pour x et y de même signe, on obtiendra une expression de même forme avec cette différence que les β_m, β_μ correspondent maintenant à des α_n, α_ρ à partie imaginaire négative. L'intégrale sera donc prise avec le signe négatif en même temps que les contributions obtenues correspondent à des $f_1^{(\alpha)}$ de signes renversés. Il s'ensuit que l'expression 11) reste toujours valable, avec cette stipulation que

pour les contributions réelles à $F''_{\varepsilon, n-3}$ les branches β se prennent toujours de façon que

$$xf_2^{(\alpha)} - yf_1^{(\alpha)}$$

soit positif ou négatif selon que, au pôle considéré,

$$\frac{f_1^{(\alpha)}}{x}$$

est positif ou négatif.

Dans cet énoncé on a ajouté à $f_1^{(\alpha)}$ le facteur

$$\frac{1}{x}$$

dans le but, aisément expliqué, de rendre le théorème indépendant du signe de x .

On trouvera encore, dans le demi-plan, des pôles qui restent complexes même pour $\varepsilon = 0$. On aura une contribution $F''_{\varepsilon, n-3}$ de forme analogue à 11), intégrale dans laquelle il n'est évidemment plus nécessaire de retenir l'imaginaire $i\varepsilon$.

4. La discussion précédente a tenu compte des résidus de la fonction intégrée par rapport à β . En déformant tant qu'il sera possible le chemin d'intégration, il nous restera une intégrale double

$$\begin{aligned}
 12) \quad F''_{n-3} &= \frac{i}{16\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\delta \left\{ \sum_{(\beta k)} \int \sum \frac{\overline{+} \psi^{(n-3)}(\alpha_\nu, \beta, \delta)}{f_1(\alpha_\nu x + \beta y + z + \delta u)} d\beta + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{(\beta \kappa)} \int \sum \frac{\overline{+} \psi^{(n-3)}(\alpha_\rho, \beta, \delta)}{f_1(\alpha_\rho x + \beta y + z + \delta u)} d\beta \right\} \\
 &= \frac{i}{16\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\delta \Omega(x, y, z, u, \delta)
 \end{aligned}$$

étendue le long de lacets entourant les divers points de ramification, annulant

$$f_1(\alpha_\nu, \beta, \delta) \quad \text{et} \quad f_1(\alpha_\rho, \beta, \delta)$$

respectivement.

Par la formule

$$\text{III.} \quad F_{\varepsilon, n-3} = F'_{\varepsilon, n-3} + F''_{\varepsilon, n-3} + F'''_{\varepsilon, n-3}$$

une dérivée d'ordre $n-3$ est ainsi exprimée par la somme d'une intégrale abélienne simple et d'une intégrale abélienne double, dont la première est due aux périodes polaires de l'intégrale simple de troisième espèce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum \frac{\overline{+} \psi^{(n-3)}(\alpha_\nu, \beta, \delta)}{f_1(\alpha_\nu x + \beta y + z + \delta u)} + \sum \frac{\overline{+} \psi^{(n-3)}(\alpha_\rho, \beta, \delta)}{f_1(\alpha_\rho x + \beta y + z + \delta u)} \right) d\beta.$$

L'étude des intégrales du type $F'''_{\varepsilon, n-3}$ joue un rôle important dans la théorie des fonctions algébriques à deux variables. On sait que

$$\Omega(x, y, z, u, \delta),$$

considère comme fonction de δ , possède certains points critiques, points logarithmiques dans lesquels on a des développements de la forme

$$\Omega = \omega(\delta - \delta_c) + \omega_1(\delta - \delta_c) \log(\delta - \delta_c),$$

ω et ω_1 étant holomorphes en δ_c et composés par les périodes cycliques de Ω ; ces points δ_c sont des valeurs (indépendantes de x, y, z, u) pour lesquelles deux points de branchement coïncident.

On en tire comme résultat général que l'intégrale en δ sera composée d'une part de lacets entourant les points critiques, la fonction intégrée différant aux deux bords par une certaine période cyclique de Ω , et d'autre part de lacets autour des points de ramification δ_m, δ_μ annulant les dénominateurs

$$xf_2^{(\alpha)} - yf_1^{(\alpha)}.$$

5. C'est, dans l'expression de $F_{\varepsilon, n-3}$, l'intégrale simple qui nous intéresse surtout. En prenant (x, y, z) voisin de Γ , on sait par les résultats du chapitre II, que deux points de ramification de la fonction algébrique intégrée vont en s'approchant infiniment l'un de l'autre de manière à fournir, pour $\varepsilon = 0$, un pôle au travers duquel le chemin d'intégration, mené entre les deux points, est pour ainsi dire forcé de passer. A cette circonstance correspondent des singularités d'une nature logarithmique, dont nous ferons l'étude approfondie dans un prochain chapitre, en nous restreignant cependant à une classe particulière d'équations. Pour le cas général la présence des fonctions multiformes dans l'expression III rend quelque peu délicate la question de savoir si l'intégrale simple épuise les singularités de $F_{\varepsilon, n-3}$; pour éviter de nous engager trop dans les difficultés de la théorie des intégrales abéliennes doubles, nous y répondrons par la référence au chapitre IV et par la déduction, dans le prochain paragraphe, des singularités réelles de F_{n-3} par une voie plus directe et plus élémentaire.

§ 2.

Les singularités de F_{n-3} au voisinage de la caractéristique.

6. Considérons le voisinage d'un point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ arbitraire de Γ . Nous partons de l'hypothèse qu'une singularité en ce point doit provenir de ceux des éléments d'intégration qui sont voisins du point double que possède

$$f^{(\alpha)}(\beta, \delta)$$

en $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, c. à. d. qui sont voisins des valeurs $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}$ du plan tangent par ce point. En vertu de cette hypothèse on écrira, en retenant, comme au n^o 2, la partie réelle des expressions,

$$13) \quad F_{n-3} = i \frac{\psi^{(n-3)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{16\pi^4}.$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma(\alpha'x + \beta'y + z + \delta'u)} \left(\frac{1}{f(\alpha', \beta', \delta') + i\varepsilon} + \frac{1}{f(\alpha', \beta', \delta') - i\varepsilon} \right) d\alpha' \dots d\delta'$$

= fonction continue au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Dans la formule ainsi admise on a supposé que $f(\alpha', \beta', \delta')$ se réduise au développement approximatif:

$$f(\alpha', \beta', \delta') = f_1\alpha' + f_2\beta' + f_4\delta' + \frac{1}{2} f_{11}\alpha'^2 + \dots$$

lequel, par une transformation homographique, nous supposons maintenant écrit dans la forme:

$$f(\alpha', \beta', \delta') = f_1\alpha' + f_2\beta' + f_4\delta' + \frac{1}{2} (f_{11}\alpha'^2 + f_{22}\beta'^2 + f_{44}\delta'^2),$$

restriction peu essentielle qui servira à simplifier beaucoup nos calculs.

En remplaçant

$$\alpha', \beta', \delta'$$

par

$$\alpha' = \frac{f_1}{f_{11}}, \quad \beta' = \frac{f_2}{f_{22}}, \quad \delta' = \frac{f_4}{f_{44}}$$

respectivement, on est ramené à étudier l'intégrale

$$14) \quad I = \frac{i\psi^{(n-3)}}{8\pi^4} \int_0^{\pi} e^{i\gamma(z \frac{x f_1}{f_{11}} - \frac{y f_2}{f_{22}} - \frac{u f_4}{f_{44}})} \cdot K d\gamma,$$

où l'on a dénoté par K l'intégrale triple

$$15) \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\gamma(\alpha'x + \beta'y + \delta'u)}}{f_{11}\alpha'^2 + f_{22}\beta'^2 + f_{44}\delta'^2 + \frac{H z^2}{f_{11}f_{22}f_{44}} + 2i\epsilon} d\alpha' d\beta' d\delta',$$

expression dans laquelle, d'accord avec nos formules antérieures:

$$\begin{aligned} z^2 H &= z^2 H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) = H(f_1, f_2, f_4) = -f_{11}f_{22}f_{44} \left(\frac{f_1^2}{f_{11}} + \frac{f_2^2}{f_{22}} + \frac{f_4^2}{f_{44}} \right) = \\ &= -z^2 (\bar{x}^2 f_{22} f_{44} + \bar{y}^2 f_{11} f_{44} + \bar{u}^2 f_{11} f_{22}). \end{aligned}$$

Quant à l'intégrale K , elle est facile à évaluer; seulement le calcul en est différent selon les signes des f_{11} , f_{22} , f_{44} . Il faut discuter séparément les deux cas suivants:

- a) f_{11} , f_{22} , f_{44} sont tous les trois de même signe, soit positifs;
- b) l'un deux, soit f_{44} , est négatif.

7. *Calcul de K .* Nous partons d'une transformation linéaire orthogonale d'un caractère bien connu. Soit:

$$\begin{aligned}
 \alpha' &= \alpha \frac{x}{r} + \beta \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \delta \frac{xu}{r\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 \beta' &= \alpha \frac{y}{r} - \beta \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \delta \frac{yu}{r\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 \delta' &= \alpha \frac{u}{r} - \delta \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} ; \\
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + u^2} .
 \end{aligned}
 \tag{a}$$

On sait que les formules ci-dessus représentent une rotation qui fait coïncider l'axe des α avec le vecteur (x, y, z) . En effet:

$$\begin{aligned}
 \alpha'x + \beta'y + \delta'u &= \alpha r \\
 \alpha'^2 + \beta'^2 + \delta'^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 \\
 d\alpha' d\beta' d\delta' &= d\alpha d\beta d\delta .
 \end{aligned}$$

La transformation ci-dessus s'applique directement au cas (a); il suffira de remplacer

$$\alpha' \text{ par } \frac{\alpha'}{\sqrt{f_{11}}} \text{ etc.}$$

Dans le cas (b) nous modifions la transformation par la substitution de

$$i\delta, i\delta', -iu$$

à

$$\delta, \delta', u$$

respectivement. Ainsi:

$$\begin{aligned}
 \alpha' &= \alpha \frac{x}{r} - \beta \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \delta \frac{xu}{r\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 \beta' &= \alpha \frac{y}{r} - \beta \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \delta \frac{yu}{r\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 \delta' &= -\alpha \frac{u}{r} - \delta' \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} ; \\
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 - u^2} ;
 \end{aligned}
 \tag{b}$$

de manière que

$$\alpha'x + \beta'y + \delta'u = a'$$

$$\alpha'^2 + \beta'^2 - \delta'^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \delta^2$$

$$d\alpha'd\beta'd\delta' = d\alpha d\beta d\delta.$$

Les formules (b) fournissent une *transformation réelle* tant que r est réel. Au contraire, pour r imaginaire, on aura une transformation complexe, laquelle, pour α' , β' , δ' réels, rendra α et δ imaginaires pures; il faudra donc alors varier α , δ entre $\pm i\infty$.

8. Soit d'abord le cas (b) avec $f_{44} < 0$. Posons, au lieu de α' etc.,

$$\frac{\alpha'}{\sqrt{f_{11}}}, \frac{\beta'}{\sqrt{f_{22}}}, \frac{\delta'}{\sqrt{-f_{44}}},$$

nous trouvons

$$16) \quad K = \frac{1}{\sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\gamma(\alpha'x_1 + \beta'y_1 + \delta'u_1)} d\alpha' d\beta' d\delta'}{\alpha'^2 + \beta'^2 - \delta'^2 + \frac{Hz^2}{f_{11}f_{22}f_{44}} + 2i\varepsilon}$$

en posant pour le moment

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{f_{11}}}, \quad y_1 = \frac{y}{\sqrt{f_{22}}}, \quad u_1 = \frac{u}{\sqrt{-f_{44}}}.$$

On observe d'ailleurs, avec la notation correspondante, que

$$\frac{H}{f_{11}f_{22}f_{44}} = - \left(\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 + \bar{u}_1^2 \right) = - (\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 - u_1^2) = - \bar{r}_1^2;$$

il s'ensuit donc que H et \bar{r}_1^2 sont de même signe.

Avant de procéder, remarquons que pour avoir l'intégrale singulière complète de l'équation (13), il faut ajouter à K l'intégrale qui résulte de K par la substitution de $-\varepsilon$ à ε . Or, en

$$17) \quad \bar{K} = \frac{1}{\sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\gamma(\alpha'x_1 + \beta'y_1 + \delta'u_1)} d\alpha' d\beta' d\delta'}{\alpha'^2 + \beta'^2 - \delta'^2 + \frac{Hz^2}{f_{11}f_{22}f_{44}} - 2i\varepsilon}$$

le remplacement de α' , β' , δ' par $-\alpha'$, $-\beta'$, $-\delta'$ fait reconnaître que \bar{K} est la conjuguée de K . On en conclut que l'intégrale I fournit la partie singulière désirée à condition qu'on y remplace K par la partie réelle de $2K$.

Cela posé, soit d'abord (\bar{x}, \bar{y}, z) un point à courbure hyperbolique, de manière que H soit positif et que par conséquent

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - u_1^2}$$

voisin de \bar{r}_1 , soit réel. L'application de la transformation (b) nous donne

$$K = \frac{1}{\sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha, \beta, \delta} \frac{e^{i\alpha\gamma r_1} d\alpha d\beta d\delta}{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2 - z^2 \bar{r}_1^2 + 2i\varepsilon}$$

Modifions le chemin d'intégration des δ , en tenant compte des deux pôles

$$\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{z^2} \bar{r}_1^2 + 2i\varepsilon}.$$

En vertu des considérations du n^o 8, chapitre II, ces deux pôles, pour $\varepsilon > 0$, sont situés, l'un dans le premier et l'autre dans le troisième quadrant des δ complexes. Par déformation à travers les deux autres quadrants on remplacera donc l'axe réel des δ par l'axe imaginaire parcouru de $+i\infty$ à $-i\infty$, de manière que

$$K = \frac{1}{\sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{+i\infty}^{-i\infty} \frac{e^{i\alpha\gamma r_1} d\alpha d\beta d\delta}{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2 - z^2 \bar{r}_1^2 + 2i\varepsilon},$$

d'où, en écrivant $-i\delta$ au lieu de δ :

$$= \frac{-i}{\sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha\gamma r_1} d\alpha d\beta d\delta}{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 - z^2 \bar{r}_1^2 + 2i\varepsilon}.$$

Introduisons maintenant les coordonnées polaires

$$\alpha = \varrho \cos \vartheta = \varrho \xi, \quad \beta = \varrho \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \text{etc.},$$

$$d\alpha d\beta d\delta = \varrho^2 \sin \vartheta d\varrho d\vartheta d\varphi = -\varrho^2 d\varrho d\xi d\varphi.$$

Nous trouvons:

$$\begin{aligned} K &= \frac{i}{\sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varrho\xi r_1 \gamma}}{\varrho^2 - z^2 \bar{r}_1^2 + 2i\varepsilon} \varrho^2 d\varrho d\xi d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{r_1 \gamma \sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \int_0^\infty \frac{\varrho d\varrho}{\varrho^2 - z^2 \bar{r}_1^2 + 2i\varepsilon} (e^{i\varepsilon r_1 \gamma} - e^{-i\varepsilon r_1 \gamma}) \\ &= \frac{2\pi}{r_1 \gamma \sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\varepsilon r_1 \gamma} \varrho d\varrho}{\varrho^2 - z^2 \bar{r}_1^2 + 2i\varepsilon}. \end{aligned}$$

L'intégration autour du demi-plan supérieur complexe des ϱ donnera un résidu provenant du pôle

$$-\sqrt{z^2 \bar{r}_1^2 - 2i\varepsilon},$$

à peu près réel et négatif, égal à

$$-|z| \cdot \bar{r}_1$$

pour $\varepsilon = 0$, dont l'introduction nous donnera enfin

$$K = \frac{2\pi^2 i}{r_1 \gamma \sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} e^{-i|z| r_1 \bar{r}_1 \gamma}$$

avec la partie réelle double:

$$18) \quad P.R. 2K = \frac{4\pi^2}{r_1 \gamma \sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \sin(|z| r_1 \bar{r}_1 \gamma)$$

9. Passons au point *elliptique*, à une valeur r_1 *imaginaire*. Par la même transformation, complexe dans ce cas, il vient

$$K = \frac{1}{\sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha\gamma r_1} d\alpha d\beta d\delta}{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + z^2 r_1^2 + 2i\varepsilon},$$

ou en posant $-i\alpha, i\beta$ au lieu de α, β ,

$$= \frac{1}{\sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+\alpha\gamma r_1} d\alpha d\beta d\delta}{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + z^2 r_1^2 + 2i\varepsilon},$$

r_1 étant supposé imaginaire positif. L'introduction des coordonnées polaires mènera au calcul identique avec cette différence cependant qu'un facteur i a disparu. On trouve donc comme partie réelle

$$19) \quad P. R. 2K = \frac{-4\pi^2}{i r_1 \gamma \sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \cos(z r_1 \bar{r}_1 \gamma).$$

On remarque que, indépendamment de la réalité de \bar{r}_1 , la partie réelle en question est fournie dans les deux cas par l'expression

$$20) \quad P. R. 2K = P. R. \frac{4\pi^2 i}{r_1 \gamma \sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} e^{-i|x| r_1 \bar{r}_1 \gamma}.$$

10. Le calcul de l'intégrale I s'achève maintenant en peu de mots.

1. \bar{r}_1 est réel. En tenant compte des relations

$$f_1 = \bar{x}z, \text{ etc.},$$

et en introduisant la valeur 18), il vient

$$21) \quad I + \bar{I} = \frac{\psi^{(n-3)}}{4\pi^2 r_1 \sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \left(\int_0^1 \frac{e^{i\gamma(Z - x(x_1 \bar{x}_1 + y_1 \bar{y}_1 + u_1 \bar{u}_1) + |x| r_1 \bar{r}_1)}}{\gamma} d\gamma \right. \\ \left. - \int_0^1 \frac{e^{i\gamma(Z - \frac{1}{z}(x_1 \bar{x}_1 + y_1 \bar{y}_1 + u_1 \bar{u}_1) - |x| r_1 \bar{r}_1)}}{\gamma} d\gamma \right),$$

intégrales singulières pour la valeur zéro des exposants. Or, au voisinage du point considéré, c. à. d. pour

$$Z = 0, \quad x_1 = \bar{x}_1, \quad \text{etc.}$$

c'est, selon le signe de z , le premier ou le deuxième exposant qui s'annule. Soit p. ex. $z > 0$; on aura approximativement

$$Z - z(x_1\bar{x}_1 + y_1\bar{y}_1 + u_1\bar{u}_1) + zr_1\bar{r}_1 = Z + \frac{\bar{r}_1 z}{2} \left(x_1'^2 \left(\frac{\partial^2 r_1}{\partial x_1^2} \right)_{x_1=\bar{x}_1} + y_1'^2 \left(\frac{\partial^2 r_1}{\partial y_1^2} \right)_{y_1=\bar{y}_1} \right)$$

en posant

$$x_1 = \bar{x}_1 + x_1', \quad \text{c. à. d.} \quad x_1' = \frac{x_1'}{\sqrt{f_{11}}}, \quad \text{etc.}$$

$$u_1' = 0.$$

Avec:

$$\bar{r}_1^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 - u_1^2 = -\frac{H}{f_{11}f_{22}f_{44}}$$

cela nous donne

$$22) \quad Z + \frac{f_{11}f_{22}f_{44}}{2H} z(x_1'^2(\bar{y}_1^2 - \bar{u}_1^2) + y_1'^2(\bar{x}_1^2 - \bar{u}_1^2)) = q,$$

expression qui égalée à zéro, en tenant compte des conditions particulières actuelles, nous ramène à l'équation bien connue de la caractéristique (équation I, p. 22, 1^{ère} partie).

Or, reportons-nous aux propriétés de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos \gamma q}{\gamma} d\gamma,$$

dont (en supposant p. ex. que nous ayons retenu l'imaginaire $i\epsilon$) il faut prendre la valeur principale¹; nous trouvons qu'au voisinage de I l'intégrale I contient le terme singulier

$$\frac{\psi^{(n-3)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{4\pi^2 \bar{\gamma}_1 \sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \log q = \frac{\psi^{(n-3)}}{4\pi^2 \sqrt{H}} \log q.$$

Pour $z < 0$, la deuxième intégrale \bar{I} donnera par le même calcul le terme logarithmique

¹ Voir: Das Fundamentalintegral etc., Arkiv f. Matematik, Stockholm 1911.

$$-\frac{\psi^{(n-3)}}{4\pi^2\sqrt{H}} \log q,$$

q ayant toujours l'expression 22).

2) r_1 est imaginaire. L'introduction dans 14) de 20) nous donne:

$$23) \quad I + \bar{I} = \frac{-i\psi^{(n-3)}}{4\pi^2 i r_1 \sqrt{-f_{11}f_{22}f_{44}}} \left\{ \int_0^z \frac{e^{i\gamma \left(z - \frac{1}{z} (x_i \bar{x}_i + y_i \bar{y}_i + u_i \bar{u}_i) + \frac{1}{z} r_1 \bar{r}_1 \right)}}{\gamma} d\gamma + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{e^{i\gamma \left(z - \frac{1}{z} (x_i \bar{x}_i + y_i \bar{y}_i + u_i \bar{u}_i) + \frac{1}{z} r_1 \bar{r}_1 \right)}}{\gamma} d\gamma \right\},$$

expression qui, pour $z \geq 0$, nous mène à l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin \gamma q}{\gamma} d\gamma,$$

égale à

$$\pm \frac{\pi}{2} \text{ pour } q \geq 0.$$

On trouve donc, en allant des valeurs négatives de q aux valeurs positives, une discontinuité en forme d'un saut brusque algébrique.

Or, reportons-nous aux formules du n° 5, chapitre II. On y a trouvé deux racines δ réelles pour

$$A_\delta = 2 \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} \frac{H}{x^2} \cdot zq > 0.$$

Or ici

$$\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} = \frac{1}{x^2} (f_{22} \bar{x}^2 + f_{11} \bar{y}^2)$$

est essentiellement positif, et par conséquent le côté réel de I correspond à

$$q \geq 0$$

selon que

$$z \leq 0.$$

11. Les résultats ci-dessus ont été obtenus en supposant pour f un développement particulier valable au voisinage de $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\delta}$. Leur validité n'en dépend cependant pas, la Hessienne H étant invariante par rapport aux substitutions orthogonales. Nous avons donc l'énoncé suivant:

(a) *En franchissant la caractéristique en un point à courbure elliptique une dérivée d'ordre $n - 3$ subit, en allant du côté complexe au côté réel, un saut brusque algébrique, de grandeur*

$$22) \quad \pm \frac{\psi^{(n-3)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{4\pi\sqrt{-H}}$$

selon que, au point considéré

$$23) \quad z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) \gtrless 0.$$

(b) *Au voisinage d'un point de I' à courbure hyperbolique une telle dérivée possède une singularité logarithmique réelle de manière à y devenir infinie comme*

$$\pm \frac{\psi^{(n-3)}}{4\pi^2\sqrt{H}} \log q, \text{ pour } q = 0,$$

selon que l'une ou l'autre des inégalités 23) a lieu.

§ 3.

Application aux équations de deuxième ordre.

12. Les développements du § précédent nous fournissent en même temps la méthode la plus commode pour évaluer les solutions fondamentales des équations typiques de deuxième ordre. Il suffit de dériver l'équation en question par rapport à z ; en égalant ψ^{n-3} à 1 et en admettant pour $f(\alpha, \beta, \delta)$ un développement exact de second ordre, nos formules donnent immédiatement les intégrales fondamentales

cherchées. Par une disposition convenable des coefficients nous réduisons les dites équations aux trois cas typiques que voici:

$$1^{\text{er}} \text{ cas.} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) U = \varphi$$

$$2^{\text{ième}} \text{ cas.} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) U = \varphi$$

$$3^{\text{ième}} \text{ cas.} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) U = \varphi,$$

et évidemment, pour ces trois équations, on sera ramené aux formules du § précédent en y introduisant

$$\psi^{(n-3)} = 1, \quad Z = z;$$

$$f_1 = f_2 = f_4 = 0,$$

et puis, selon le cas:

$$1^{\text{er}} \text{ cas.} \quad f_{11} = f_{22} = f_{44} = 1; \quad zr_1 = i;$$

$$2^{\text{ième}} \text{ cas.} \quad f_{11} = f_{22} = 1; \quad f_{44} = -1; \quad zr_1 = i;$$

$$3^{\text{ième}} \text{ cas.} \quad f_{11} = f_{22} = 1; \quad f_{44} = -1; \quad zr_1 = 1.$$

Pour avoir les solutions fondamentales des diverses équations de deuxième ordre les fonctions obtenues exigeront une dérivation par rapport à z ; seulement elles présenteront en général des singularités qui rendront cette opération impossible au voisinage de la caractéristique.

13. 1^{er} cas. L'équation est à caractéristique imaginaire;

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + u^2}$$

est toujours réel, et l'on trouve

$$P.R.2K = \frac{-4\pi^2}{\gamma\sqrt{x^2 + y^2 + u^2}} e^{-\gamma\sqrt{x^2 + y^2 + u^2}}$$

et en introduisant en I , il vient

$$\begin{aligned} F &= \frac{-i}{2\pi^2\sqrt{x^2 + y^2 + u^2}} \int_0^\infty \frac{e^{i\gamma(z+i\sqrt{x^2+y^2+u^2})}}{\gamma} d\gamma = \\ &= \frac{1}{2\pi^2\sqrt{x^2 + y^2 + u^2}} \operatorname{arc\,cot} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + u^2}} \end{aligned}$$

En dérivant cette expression par rapport à z , on retrouve la solution fondamentale bien connue

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2\pi^2(x^2 + y^2 + z^2 + u^2)}$$

appartenant à l'équation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) U = \varphi.$$

2^{ième} cas. Le résultat va différer selon que

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 - u^2}$$

est réel ou imaginaire. On aura, soit

$$\begin{aligned} P.R.2K. &= P.R. \frac{4\pi^2}{i\gamma\sqrt{x^2 + y^2 - u^2}} e^{-\gamma\sqrt{x^2 + y^2 - u^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dans le cas réel, soit

$$P.R.2K = \frac{-4\pi^2}{\gamma\sqrt{u^2 - x^2 - y^2}} \cos \gamma\sqrt{u^2 - x^2 - y^2}$$

dans l'autre cas. Donc, pour

$$u^2 - x^2 - y^2 > 0$$

on trouve:

$$F = \frac{i}{4\pi^2 \sqrt{u^2 - x^2 - y^2}} \left(\int_0^z \frac{e^{i\gamma(z + \sqrt{u^2 - x^2 - y^2})}}{\gamma} d\gamma + \int_0^z \frac{e^{i\gamma(z - \sqrt{u^2 - x^2 - y^2})}}{\gamma} d\gamma \right)$$

Donc on aura pour les valeurs de F :

$$F = \begin{cases} 0 & \text{pour } u^2 - x^2 - y^2 < 0 \\ \frac{-1}{4\pi \sqrt{u^2 - x^2 - y^2}} & \gg u^2 - x^2 - y^2 > 0, z > \sqrt{u^2 - x^2 - y^2} \\ 0 & \gg u^2 - x^2 - y^2 > 0 \\ & -\sqrt{u^2 - x^2 - y^2} < z < +\sqrt{u^2 - x^2 - y^2} \\ \frac{1}{4\pi \sqrt{u^2 - x^2 - y^2}} & \gg u^2 - x^2 - y^2 > 0, z < -\sqrt{u^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

On a donc obtenu la valeur zéro dans l'intérieur de la sphère caractéristique

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et en franchissant cette surface, à courbure elliptique, nous retrouvons les sauts brusques algébriques qu'exige la théorie générale. Outre ces singularités nous avons encore des singularités algébriques au passage du cylindre

$$u^2 - x^2 - y^2 = 0$$

tangent à la sphère. L'apparition de ce cylindre singulier est due au facteur $\frac{\partial}{\partial z}$, c. à. d. au facteur γ en

$$f = \gamma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2),$$

c'est le cône tangent à I correspondant à $\gamma = 0$, ce qui évidemment revient à $\delta = \infty$. Nous nous trouvons donc bien au cas du n° 19, 1^{ère} partie, dont le résultat présent sert à vérifier les conclusions. En particulier nous constatons de nouveau ce fait que le contact entre la caractéristique et le cône tangent singulier renverse le sens dans lequel se prennent les discontinuités: en effet le passage à travers I' au-dessous du cercle

$$z = 0, \quad u^2 = x^2 + y^2$$

fait augmenter la fonction F , tandis qu'elle diminue d'une quantité correspondante au-dessus de la courbe de contact, en allant toujours, bien entendu, de l'intérieur de la sphère à l'extérieur.

Vu l'importance de l'équation actuelle il n'est peut-être pas sans intérêt de confronter la fonction F obtenue avec les faits classiques de la théorie des vibrations lumineuses. On sait que KIRCHHOFF a intégré l'équation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) \varphi = 0$$

en introduisant la fonction

$$\frac{\varepsilon(r-u)}{r}, \quad r = \sqrt{u^2 + y^2 + z^2}$$

aux propriétés suivantes. La fonction ε est partout zéro sauf pour $r = u$, où elle devient infinie de manière que l'intégration par rapport à r à travers cette valeur nous donne le résultat 1. Cherchons ce qui résulte de la fonction de Kirchhoff par l'intégration par rapport à z . Nous trouvons

$$\int_0^z \frac{\varepsilon(r-u)}{r} dz = \mp \int_0^r \frac{\varepsilon(r-u) dr}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

formule dans laquelle il faut prendre le signe négatif pour $x < 0$. L'intégration nous donne

$$0 \quad \text{pour } r < u$$

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 - x^2 - y^2}} \quad \gg \quad r > u, z \geq 0,$$

c. a. d. une fonction identique, à un facteur numérique près, à celle obtenue ci-dessus.

3^{ième} cas. On trouve

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 - u^2}$$

$$P.R.2K = \frac{4\pi^2}{\gamma\sqrt{x^2 + y^2 - u^2}} \sin \gamma\sqrt{x^2 + y^2 - u^2}$$

pour

$$x^2 + y^2 - u^2 > 0$$

et

$$P.R.2K = -\frac{4\pi^2}{\gamma\sqrt{u^2 - x^2 - y^2}} e^{-\gamma\sqrt{u^2 - x^2 - y^2}}$$

pour

$$u^2 - x^2 - y^2 > 0, \sqrt{u^2 - x^2 - y^2} > 0,$$

soit par conséquent

$$F = \frac{1}{4\pi^2\sqrt{x^2 + y^2 - u^2}} \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{i\gamma(z + \sqrt{x^2 + y^2 - u^2})}}{\gamma} d\gamma - \int_0^{\infty} \frac{e^{i\gamma(z - \sqrt{x^2 + y^2 - u^2})}}{\gamma} d\gamma \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2\sqrt{x^2 + y^2 - u^2}} \log \frac{z + \sqrt{x^2 + y^2 - u^2}}{z - \sqrt{x^2 + y^2 - u^2}}$$

ou

$$F = \frac{1}{2\pi^2\sqrt{u^2 - x^2 - y^2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\gamma(z + i\sqrt{u^2 - x^2 - y^2})}}{\gamma} d\gamma =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2\sqrt{u^2 - x^2 - y^2}} \operatorname{arc} \cot \frac{z}{\sqrt{u^2 - x^2 - y^2}}$$

selon la position par rapport au cylindre

$$x^2 + y^2 = u^2.$$

La caractéristique est maintenant aux courbures opposées et nous retrouvons bien, d'accord avec nos généralités, des singularités logarithmiques réelles au passage au travers de I . En effet, pour $z > 0$, c. à. d. au-dessus de la courbe de contact avec le cylindre nous retrouvons en franchissant I la singularité logarithmique

$$- \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{x^2 + y^2 - u^2}} \log q, \text{ pour } q = 0$$

tandis que pour $z < 0$, F devient infini de l'ordre

$$+ \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{x^2 + y^2 - u^2}} \log q.$$

Pour $x^2 + y^2 - u^2$ tendant vers zéro la fonction F tend vers des valeurs finies et se définit de l'autre côté du cylindre par la fonction *arc cot* ci-dessus, laquelle sur le cylindre devient algébriquement infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$, conformément au rôle de cône tangent singulier que joue encore ce cylindre.

Chapitre IV.

Équations à caractéristique essentiellement réelle.

§ 1.

Introduction d'un cas particulier important.

1. Revenons aux équations 11) et 12) du n^o 4. Nous nous occuperons dès maintenant d'une classe d'équations pour lesquelles l'intégrale double $F''_{\varepsilon, n-3}$, rentrant dans l'expression de $F_{\varepsilon, n-3}$, disparaît.

Supposons que pour des valeurs β, δ quelconques réelles toutes les racines α de

$$1) \quad f(\alpha, \beta, \delta) = 0$$

soient réelles. Dans ce cas la fonction algébrique α définie par 1) ne possède pas de points de ramification réels, et une branche réelle quelconque reste distincte dans tout le domaine d'intégration. Nous disons que la fonction $f(\alpha, \beta, \delta)$ et par conséquent la caractéristique correspondante, est *essentiellement réelle*.

Pour une valeur arbitraire de δ (exception faite des points doubles de f) la fonction intégrée par rapport à β dans la formule 10) ne possède donc au voisinage de l'axe réel d'autres singularités que les divers zéros, réels pour $\varepsilon = 0$, de

$$a_r x + \beta y + z + \delta u, \quad a_o x + \beta y + z + \delta u.$$

En déformant le chemin d'intégration dans l'intérieur du demi-plan supérieur, on dépassera d'abord certains de ces pôles donnant la somme de résidus représentée par 11). Continuons la déformation sans atteindre toutefois aucun des points de ramification, ni des pôles complexes, tous à distance finie des β réels; nous aurons obtenu un chemin d'intégration C' , se trouvant tout entier dans le demi-plan su-

périeur, le long duquel la fonction intégrée est partout finie. Or, l'imaginaire $i\varepsilon$ n'a d'autre mission que celle de fixer les branches au voisinage des valeurs réelles, et il n'y a plus rien pour nous empêcher de mettre $\varepsilon = 0$ dans l'intégrale le long de C' . Mais dans ce cas les branches des types α_v et α_ρ deviennent identiques en fournissant l'ensemble des branches, toutes réelles, de 1).

Cela posé, reportons-nous à la manière dont les signes de 10) ont été fixés. Il s'ensuit qu'une branche arbitraire de 1), correspondant sur l'axe réel à un signe déterminé de f_1 , figurera dans 10) deux fois, savoir sous la notation de α_v et sous celle de α_ρ avec le signe contraire. Le procédé décrit n'a évidemment occasionné aucune confusion parmi les branches, ainsi les α_v et α_ρ , affectés du signe +, épuiseront nécessairement l'ensemble des branches, restées distinctes, de 1). L'intégrale le long de C est donc nulle pour $\varepsilon = 0$, et il ne nous restera que la contribution 11) comme expression de $F_{\varepsilon, n-3}$ dans la limite.

Le cas actuel entraîne donc une simplification considérable. Pour une équation à caractéristique essentiellement réelle les dérivées d'ordre $n - 3$ de l'intégrale fondamentale s'expriment au moyen d'une intégrale abélienne simple de première espèce.

2. *Modification du procédé de limite.* Dans l'équation 10) les résidus correspondant aux diverses branches réelles α sont provenus de deux expressions analytiques différentes. Le calcul indique cependant la possibilité d'atteindre le but par une seule expression; c'est ce qu'on effectuera en faisant changer de signe l'imaginaire $i\varepsilon$ avec la dérivée $f_1(\alpha, \beta, \delta)$. Dans la suite nous supposons que ce soient les racines δ_v de

$$f(\alpha, \beta, \delta) = 0$$

qui pour des valeurs α, β arbitraires soient réelles; la modification en question s'obtient en écrivant

$$i\varepsilon f_4(\alpha, \beta, \delta)$$

au lieu de $i\varepsilon$. Ainsi nous partons de l'expression:

$$\text{II}'. \quad F_{\varepsilon, n-3} = \frac{i}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_x^x \int_0^x \int_{-x}^x \psi^{(n-3)} \left(\frac{1}{f + i\varepsilon f_4} + \frac{1}{f - i\varepsilon f_4} \right) \cdot e^{i\gamma(\alpha x + \beta y + z + \delta u)} d\alpha d\beta d\gamma d\delta.$$

Par hypothèse

$$f(\alpha, \beta, \delta) \text{ et } f_4(\alpha, \beta, \delta)$$

n'ont pas dans le domaine réel des racines δ communes, et on est assuré que, pour une racine δ_v de f , $f_4(\alpha, \beta, \delta_v)$ retient un signe invariable. Une exception pourra avoir lieu si f possède des points doubles. Le dénominateur s'annule alors, mais il n'est question là que d'une singularité ponctuelle que, d'une manière connue, on mettra de côté par l'addition d'un terme de correction convenable. Si la singularité est du type des points coniques étudiés dans la 1^{ère} partie, les branches δ qui y coïncident ne permutent pas d'ailleurs, et la supposition d'un f_4 à signe invariable reste toujours vraie.

Un zéro δ_v réel de f , possède approximativement la partie imaginaire très petite

$$\mp i\epsilon \frac{f_4(\alpha, \beta, \delta_v)}{f_4(\alpha, \beta, \delta_v)} = \mp i\epsilon.$$

La première intégrale de II') possède donc exclusivement des pôles à partie imaginaire négative. Pour $u > 0$, l'intégration par rapport à δ autour du demi-plan supérieur nous donnera la contribution nulle, tandis que la seconde intégrale nous mènera à

$$\begin{aligned} F_{\epsilon, n-3} &= -\frac{1}{8\pi^3} \int \int \int_0^{\infty} \sum \frac{\psi^{(n-3)}(\alpha, \beta, \delta_v) e^{i\gamma(ax+\beta y+z+\delta_v u)}}{f_4(\alpha, \beta, \delta_v) - i\epsilon f_{44}} d\alpha d\beta d\gamma \\ &= -\frac{1}{8\pi^3 i} \int \int \sum \frac{\psi^{(n-3)}(\alpha, \beta, \delta_v) d\alpha d\beta}{(ax + \beta y + z + \delta_v u)(f_4(\alpha, \beta, \delta_v) - i\epsilon f_{44})} \\ &= \frac{1}{8\pi^3 i} \int \int \frac{\psi^{(n-3)}\left(\alpha, \beta, -\frac{ax + \beta y + z}{u}\right) d\alpha d\beta}{u\left(f\left(\alpha, \beta, -\frac{ax + \beta y + z}{u}\right) - i\epsilon f_4\left(\alpha, \beta, -\frac{ax + \beta y + z}{u}\right)\right)}, \end{aligned}$$

la somme des résidus de la fonction rationnelle

$$\frac{\psi^{(n-3)}(\alpha, \beta, \delta)}{(ax + \beta y + z + \delta u)(f - i\epsilon f_4)}$$

étant nulle.

Pour $u < 0$, on aura le calcul identique par rapport à la première intégrale de Π' , sauf en ce que l'intégration se fera autour du demi-plan inférieur dans le sens contraire. On combinera le résultat dans la formule commune:

$$\text{IV} \quad F_{\varepsilon, n-3} = \frac{i}{8\pi^3 u} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi^{(n-3)}\left(\alpha, \beta, -\frac{\alpha x + \beta y + z}{u}\right) d\alpha d\beta}{f\left(\alpha, \beta, -\frac{\alpha x + \beta y + z}{u}\right) + i\varepsilon f_4}$$

en observant que le signe de i est sans importance pour la partie réelle de l'expression.

Pour revenir aux notations de la 1^{ère} partie nous écrivons encore au lieu de IV

$$\text{IV}' \quad F_{\varepsilon, n-3} = \frac{i}{8\pi^3 x} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi^{(n-3)}\left(-\frac{\beta y + z + \delta u}{x}, \beta, \delta\right) d\alpha d\beta}{f\left(-\frac{\beta y + z + \delta u}{x}, \beta, \delta\right) + i\varepsilon f_4}$$

Procédons à l'intégration par rapport à β ; nous retrouvons comme expression de $F_{\varepsilon, n-3}$ une somme d'intégrales abéliennes simples de première espèce

$$\text{V.} \quad F_{\varepsilon, n-3} = \mp \frac{1}{4\pi^2} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \sum \frac{\psi^{(n-3)}(\beta_{\mu}, \delta) d\delta}{x f_2^{(\alpha)}(\beta_{\mu}, \delta) - y f_1^{(\alpha)}(\beta_{\mu}, \delta) + i\varepsilon(x f_{42}^{(\alpha)} - y f_{41}^{(\alpha)})}$$

en prenant le signe $-$ ou $+$ selon que $x \geq 0$.

3. Dans la formule ci-dessus on a écrit, comme au n^o 3 du chapitre II,

$$f\left(-\frac{\beta y + z + \delta u}{x}, \beta, \delta\right) = f^{(\alpha)}(\beta, \delta),$$

et, pour une valeur arbitraire réelle de δ , on a dénoté par β_{μ} les racines à partie imaginaire positive de

$$2) \quad f^{(\alpha)}(\beta, \delta) + i\varepsilon f_4^{(\alpha)}(\beta, \delta) = 0$$

Tout d'abord la formule V se simplifie. En vertu de nos préliminaires algébriques l'intégration porte sur un dénominateur qui pour des va-

leurs arbitraires de x, y, z, u s'annule au plus de l'ordre $\frac{1}{2}$. La retention de l'imaginaire $i\varepsilon$ n'a donc d'autre mission que celle de fixer les branches β_μ qui doivent rentrer dans l'expression. On écrira donc, pour un ε assez petit:

$$V') \quad F_{\varepsilon, n-3} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum \frac{\psi^{(\alpha, n-3)}(\beta_\mu, \delta) d\delta}{xf_2^{(\alpha)}(\beta_\mu, \delta) - yf_1^{(\alpha)}(\beta_\mu, \delta)} .$$

Le choix des branches β_μ pour une valeur particulière de δ ne présente de difficulté que pour celles qui sont réelles pour $\varepsilon = 0$. Mais on tire de 2) qu'en posant

$$\beta_\mu = \beta'_\mu + i\beta''_\mu$$

avec β''_μ très petit, on aura en première approximation

$$3) \quad \beta''_\mu = - \frac{\varepsilon x f_4^{(\alpha)}(\beta'_\mu, \delta)}{x f_2^{(\alpha)}(\beta'_\mu, \delta) - y f_1^{(\alpha)}(\beta'_\mu, \delta)} .$$

On peut tirer de là que V') mène au fond à la même expression des deux côtés de $x = 0$. Prenons-en la partie réelle, en écrivant pour un moment dans IV'

$$4) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{i}{f^{(\alpha)} + i\varepsilon f_4} - \frac{i}{f^{(\alpha)} - i\varepsilon f_4} \right) \text{ au lieu de } \frac{i}{f^{(\alpha)} + i\varepsilon} .$$

Pour l'intégration relative à β , il est évident qu'on pourra mettre $\varepsilon = 0$ dans les résidus correspondant aux racines β complexes de $f^{(\alpha)}$. Mais dans ces pôles

$$\frac{1}{f^{(\alpha)} + i\varepsilon f_4} \text{ et } - \frac{1}{f^{(\alpha)} - i\varepsilon f_4}$$

fournissent les résidus identiques aux signes contraires. Donc cet énoncé,

Une branche β_μ , rentrant dans V' , ne donne par l'intégration le long des δ réels, de contributions réelles à l'expression que dans ces intervalles de δ où la branche est réelle.

Il s'ensuit que pour le prolongement de V' à travers $x = 0$, il suffit que les intervalles réels mènent aux mêmes expressions analytiques. Tout d'abord il faut préciser ce qu'on entend par une branche β relativement à un tel prolongement. Dans le langage géométrique du chapitre I, les valeurs réelles β_μ sont déterminées par les plans tangents menés par (x, y, z) au cône Γ_δ . Si ce cône passe au voisinage du point, on a, après l'introduction de l'imaginaire $i\varepsilon f_4$ du n° précédent, en vertu de A'), 1^{ère} partie p. 25

$$5) \quad \beta'_2 = \frac{1}{\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}} \left(-\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta} + \sqrt{A_\beta - 2i\varepsilon f_4^{(\alpha)}(\beta, \delta) \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}} \right),$$

où

$$A_\beta = P\delta'^2 + 2Q\delta' + R = 0$$

nous donne l'équation du cône Γ_δ , les fonctions

$$f_4^{(\alpha)}, \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}$$

se prenant pour la valeur réelle commune $\beta' = 0$ sur Γ_δ . Modifions un peu la notation ci-dessus par l'observation que les fonctions $P, Q, R, \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}$ contiennent toutes

$$\frac{1}{x^2}$$

en facteur. Soit

$$A_{\beta^2} = x^2 \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2},$$

$$A = x^2 A_\beta = H\delta'^2 + 2Qx^2\delta' + Rx^2;$$

on trouve immédiatement

$$(6) \quad xf_2^{(\alpha)} - yf_1^{(\alpha)} = \sqrt{A - 2i\varepsilon f_4^{(\alpha)} \cdot A_{\beta^2}},$$

tandis que le radical rentrant dans l'expression des β'_1, β'_2 devient

$$6') \quad \pm \frac{x}{A\beta^2} \sqrt{A - 2i\epsilon f_4^{(\alpha)} A\beta^2} .$$

L'expression 6) étant continue et bien définie pour $x = 0$, on tire de 6') que pour une *branche* définie et représentée d'une manière continue par un plan tangent variable il faut admettre que le radical et en particulier *la petite partie imaginaire associée change de signe des deux côtés de $x = 0$.*

En cela, d'abord, on a supposé que (x, y, z) soit un point voisin d'un cône Γ_δ particulier, et on y a précisé une branche et un plan tangent individuel par le choix du signe de l'expression

$$7) \quad xf_2^{(\alpha)} - yf_1^{(\alpha)} .$$

Mais il n'y a rien qui empêche de s'éloigner de Γ_δ le long de ce plan particulier; du moins tant que l'on ne rencontre pas d'autres branches de Γ_δ qui touchent le plan, on est assuré que 8) reste réel et à signe constant. Cela posé, dépassons $x = 0$; on conclut que la petite partie imaginaire associée à la valeur réelle β , restée constante sur le plan, *change de signe à ce moment*, en vertu de 3).

Or, pour

$$x = \alpha' + i\alpha'' , \quad \beta = \beta' + i\beta''$$

la relation

$$\alpha x + \beta y + z + \delta u = 0$$

nous donne

$$8) \quad \alpha''x + \beta''y = 0 .$$

Si α, β sont une paire de branches complexes au voisinage de $x=0$, elles ne deviennent pas réelles à la fois pour $x = 0$, sauf dans des conditions singulières. Car alors leur valeurs réelles définiraient un plan tangent double isolé relatif au Γ_δ considéré. On en tire que, pour des δ arbitraires, et si $x = 0$ n'est pas un plan tangent singulier de Γ_δ ,

$$\alpha'' \neq 0 \quad \text{pour } x = 0 .$$

D'autre part, pour une paire (α, β) réelle, on a par la formule analogue à 3)

$$\alpha'' = + \frac{\varepsilon y f_4}{x f_2 - y f_1} ;$$

α'' reste donc toujours distinct de zéro.

En vertu de 8) une branche β arbitraire est réelle pour $x = 0$, et sa partie imaginaire change de signe à travers ce plan.

En particulier, pour retenir dans l'espace entier les mêmes branches β_μ correspondant à un δ particulier, il faut leur associer une partie imaginaire négative du côté des x négatifs.

Ainsi, dans V'), remplaçons le résultat relatif aux $x < 0$, par celui obtenu en intégrant autour du demi-plan négatif des β . On retrouve la même formule

$$V'') \quad F_{\varepsilon, n-3} = - \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum \frac{\psi^{(n, n-3)}(\beta_\mu, \delta) d\delta}{x f_2^{(\alpha)}(\beta_\mu, \delta) - y f_1^{(\alpha)}(\beta_\mu, \delta)},$$

valable pour des x quelconques, et, en se reportant à la relation 3), l'expression est fixée partout par la règle suivante.

(A.) Les branches réelles rentrant dans V'' pour une valeur δ arbitraire doivent être choisies de façon que

$$6) \quad x f_2^{(\alpha)}(\beta_\mu, \delta) - y f_1^{(\alpha)}(\beta_\mu, \delta) \geq 0$$

selon que pour cette valeur δ

$$9) \quad f_4^{(\alpha)}(\beta_\mu, \delta) = z(x, y, z, u, \delta) u \leq 0.$$

Il importe avant tout de connaître la connexion des β_μ regardés comme des branches d'une fonction algébrique de δ et des x, y, z . D'abord, en un point (x, y, z) fixe, la fonction 6) s'annule en certains points de ramification, et on sait qu'elle reste réelle et à signe invariable dans l'intervalle inclus entre deux points permutant la même branche β_μ . On verra que la règle (A) suffira pour bien définir le prolongement des β_μ partout dans le domaine d'intégration réel ainsi que dans l'espace des (x, y, z) réels.

§ 2.

Sur la connexion des branches β_μ .

4. Pour décider laquelle des inégalités 9) a lieu pour les diverses valeurs de δ , rappelons que l'équation de $I_{\bar{\delta}}$ est homogène en

$$10) \quad x, y, z + \bar{\delta}u,$$

ainsi que pour $\beta = \beta_{\bar{\delta}}$, la fonction

$$f_4^{(\omega)} = f_4 \left(-\frac{\beta_{\bar{\delta}} y + z + \bar{\delta}u}{x}, \beta_{\bar{\delta}}, \bar{\delta} \right),$$

$\beta_{\bar{\delta}}$ étant aussi défini par une équation homogène par rapport aux variables (10).

Soit (x, y, z) un point situé sur une génératrice particulière quelconque de $I_{\bar{\delta}}$; en déplaçant ce point le long de la génératrice on ne change donc pas les rapports des $x, y, z + \bar{\delta}u$, et la fonction $f_4^{(\omega)}$ reste invariable. Finalement on arrivera au point de contact avec I , où l'on a l'équation non homogène

$$z = \frac{1}{u} f_4 = \frac{1}{x} f_1 = \frac{1}{y} f_2 = \frac{1}{z} f_3 = z.$$

En particulier,

$$f_4 = 0$$

exige que la génératrice touche un point de I où

$$z = 0,$$

un tel point appartient par conséquent à un plan double tangent à I .

Ainsi, toute branche de $I_{\bar{\delta}}$ qui n'est pas un plan double, porte sur toute génératrice une valeur z de même signe, et pour trouver ce signe il suffit de se reporter au domaine de I que touche la branche en question.

Par cette stipulation la distribution des valeurs de z sur I est fondamentale pour le choix des branches β_μ . En variant δ on aura

une suite indéfinie de branches de cônes. Une branche variable retiendra en général une fonction z de signe constant. Outre qu'au cas qu'une branche variable traverse un plan double, une exception à cette règle pourra avoir lieu au passage par $z = \infty$. Cela peut évidemment arriver pour $\delta = \infty$, cas particulier auquel nous reviendrons plus tard. Notons seulement que la courbe de contact entre I et I_∞ divisera en général I en domaines portant des z à signes différents.

5. Considérons maintenant une branche β_1 réelle comme fonctions de valeurs x, y, z, u, δ variables. Commençons par varier (x, y, z) le long du côté réel du cône particulier au voisinage duquel une formule telle que 5) a servi à la détermination de la branche. Par ce déplacement on se tient toujours dans le domaine des f_4 à signe invariable, et l'équation 5) détermine toujours la même branche, *du moins tant qu'on ne dépasse pas les plans tangents aux arêtes de rebroussement du cône* où l'on a

$$11) \quad \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} = 0.$$

A ce moment, dans une section plane à travers le cône, β_1 devient tangent à une autre branche de I_δ , c. à. d. commence à toucher un autre côté du polygone courbe tracé par I_δ dans le plan de la section. Le point de contact de la tangente a donc dépassé un angle du polygone dans lequel la fonction 10) s'annule pour prendre des valeurs de signe contraire sur l'autre côté du polygone.

Pour expliquer ce qui arrive alors, on pourrait se servir des formules des n^{os} 13, 14 du chapitre II, pour la marche des trois branches se permutant autour d'un angle de rebroussement. Il est cependant plus commode d'employer la représentation géométrique. Soit le triangle de la fig. 1, Pl. I, un tel polygone, dessiné dans le plan

$$z + \delta u = \text{const},$$

et se trouvant par hypothèse tout entier dans le domaine des x positifs, afin que dans la formule 5) on ait à prendre le signe supérieur. L'équation

$$\alpha x + \beta y + z + \delta u = 0$$

nous donne pour $x = 0$

$$\beta = -\frac{z + \delta u}{y}, \quad (z + \delta u > 0),$$

relation qui détermine une branche β_1 au moyen de la section découpée par la tangente sur l'axe des y .

Cela posé, faisons se déplacer le point Q le long du côté intérieur du triangle dans le sens positif indiqué par les flèches, et construisons au voisinage des deux côtés de l'angle A_2 les deux tangentes passant par un point variable (Q, Q') . On voit que la section découpée *augmente* quand Q tourne dans le sens positif. En dirigeant les tangentes dans les directions allant de Q et de Q' aux points de contact respectifs, on conclut que *tant que les sections respectives sont de même signe, la tangente dirigée dans le sens positif fournit numériquement la plus grande des deux valeurs β* .

Or, une *branche β* se définit géométriquement sans ambiguïté par déplacement continu du point de contact. En fixant de cette manière une particulière des tangentes, on voit que, par la variation de (x, y, z) , elle *change de direction* au passage de l'angle A_2 , et qu'elle fournit la plus grande ou la plus petite valeur β selon qu'on se trouve de l'un ou de l'autre côté du polygone. Le radical

$$\frac{1}{\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}} \sqrt{A_{\beta'} - 2i\epsilon f_4^{(\alpha)} \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}}$$

retenant une partie imaginaire de même signe mais changeant le signe de sa partie réelle avec le facteur $\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}$, on en tire que la racine β_1 , définie par 5), *reste bien la même branche au point de vue géométrique, même par le passage d'un angle de rebroussement.*

On pourra de même faire procéder le point Q vers l'intérieur du polygone. Par variation continue d'une même tangente on définira une branche distincte, à partie imaginaire de signe constant puisque le déterminant

$$xf_2 - yf_1$$

ne s'annule que par le passage à travers I_{δ} . La construction géométrique sert donc immédiatement à fixer les branches à partie imaginaire positive en un point arbitraire à l'intérieur du polygone; il suffit de se déplacer le long des diverses tangentes menées par le point jusqu'au voisinage immédiat des points de contact respectifs (*mais sans les dépasser*). En fixant alors la grandeur numérique d'une section par rapport à celle de l'autre tangente voisine, on arrive donc à la conception *d'une tangente quelconque comme porteur d'une partie imaginaire de signe constant, transporté vers l'intérieur du polygone, et invariable envers une variation arbitraire de la tangente.*

6. Il y a cependant une exception importante à cette règle. Considérons le point Q'' voisin du point O , dans lequel la tangente $\beta^{(0)}$ menée par l'origine $x = y = 0$, touche le polygone. En fixant les parties imaginaires des deux tangentes β_1 β_2 par Q'' à partir des deux côtés A_1A_2 et A_2A_3 , la règle ci-dessus donne le signe — aux deux parties imaginaires.

Faisons s'approcher Q'' de A_1A_3 , p. ex. à la gauche de O , en franchissant $\beta^{(0)}$ de manière que β_2 passe par cette tangente. La section de β_2 , d'abord négative, changera de signe par ce procédé. Évidemment les conclusions du n° précédent ne sont plus directement applicables aux conditions en Q'' . *Il faut que β_2 change le signe de sa partie imaginaire au passage de $\beta^{(0)}$, puisqu'on doit nécessairement au voisinage de AO retrouver deux tangentes à parties imaginaires de signes contraires.*

La tangente $\beta^{(0)}$, dont la section est nulle, *correspond à une racine β infinie.* Prenons le terme β^n de

$$f^{(\alpha)} = 0;$$

il s'ensuit que $f^{(\alpha)}$ possède une racine infinie à condition qu'un certain polynôme homogène d'ordre n , indépendant de δ , s'annule, soit

$$12) \quad P_n(x, y) = 0$$

L'équation 12) nous donne n plans, passant par l'axe des z ; un tel plan a tracé dans la fig. 1 la tangente singulière $\beta^{(0)}$.

Une analyse facile montre que le long de A_1A_3 la fonction

$$\frac{\partial^2 f^{(a)}}{\partial \beta^2}$$

change de signe en passant par des valeurs infinies. La discussion des conditions auprès de A_1O et de OA_3 montre alors que les résultats du n° précédent subsistent généralement dans tout l'intérieur du polygone avec la stipulation particulière que *toutes les fois qu'une tangente coïncide avec $\beta^{(a)}$, la branche correspondante, en même temps qu'elle atteint des valeurs infinies, change le signe de sa partie imaginaire.*

Les plans 12) touchent l'ensemble des I_δ dont les branches respectives restent réelles, et ils forment des lieux singuliers pour la connexion des β_μ dans l'espace. Quand (x, y, z) s'approche d'un tel plan, une certaine branche réelle β , pour des valeurs arbitraires de δ , va s'éloigner vers l'infini réel pour se retrouver dans l'autre demi-plan complexe de l'autre côté du plan. Il y a donc un certain inconvénient dans ce fait que les branches ne se définissent pas d'une manière unique et monogène pour l'espace entier.

Quant à l'expression V, elle reste cependant, comme il le faut bien, continue. En effet, le résidu, disparaissant ou apparaissant selon le cas, est évidemment nul.

Nous verrons d'ailleurs plus tard que la classe d'équations particulièrement en vue est exempte de ces conditions singulières.

7. Les développements ci-dessus ne dépendent au fond que du déplacement *relatif* de (x, y, z) et du cône I_δ . Il n'y aura donc aucune nouvelle difficulté à rendre valables les résultats pour une variation arbitraire des I_δ . On tire, d'une manière générale, la conclusion que, pour un point (x, y, z) à variation quelconque, assujéti seulement à la condition de ne pas franchir les plans P_n , une branche β_μ réelle, introduite dans l'expression V pour des valeurs particulières de $x, y, z, u, \delta, \gamma$ figurera aussi tant qu'elle restera réelle, et elle sera dans ces conditions identique à une branche réelle à prolongement analytique bien précisé par la construction géométrique faite d'une façon continue par rapport à l'ensemble des I_δ .

§ 3.

Déplacement des points de branchement.

8. Passons dans le domaine des β_1, β_2 complexes en faisant franchir T_δ par (x, y, z) . Les développements du n° 8, chapitre II, montrent que β_1 , affecté d'une petite partie imaginaire positive à l'intérieur du cône, passe dans une branche complexe à partie imaginaire de même signe. En variant δ , cette racine restera complexe jusqu'à ce qu'on arrive à une nouvelle valeur δ dont le cône correspondant passe par (x, y, z) et permute la branche avec une autre; à ce moment β_1 deviendra encore réel sauf à une petite partie imaginaire positive. Le prolongement de la branche se fait donc d'une manière unique aussi au delà des points de ramification; *la branche reliendra, tant qu'elle restera finie, le signe de sa partie imaginaire pour des valeurs quelconques réelles des variables*, et elle figurera toujours dans V , si elle y rentre pour des valeurs particulières.

Il suffira donc de prendre une certaine branche dans son domaine complexe, en la précisant en tout autre point par la disposition des points de ramification. Menons par un point (x, y, z) de T_δ la génératrice correspondante, découpant sur l'axe des z la section z_1 ; on a

$$\delta_1 = -\frac{\tilde{z}_1}{u}, \quad (\text{pour } \varepsilon = 0).$$

Pour décider de la manière dont δ_1 a été projeté dans le domaine complexe, on fera glisser (x, y, z) le long de la génératrice. δ_1 restera constant, et au voisinage de T on aura

$$x^2R + 2\delta'x^2Q + \delta'^2H = 0,$$

où les coefficients R, Q, H résultent des formules C) du n° 4, chapitre II, par la substitution de

$$f^{(\alpha)}(\beta, \delta) + i\varepsilon f_4^{(\alpha)}(\beta, \delta) \text{ à } f^{(\alpha)}(\beta, \delta).$$

En négligeant les produits des très petites quantités $f^{(\alpha)}, \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta}, \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \delta}$ par ε , on arrive à

$$13) \quad \delta_1, \delta_2 = \frac{1}{H} \left(-x^2 Q \pm \sqrt{x^4 Q^2 - Hx^2 R + 2i\epsilon H f_4^{(\alpha)}(\beta, \delta) A_{\beta^2}} \right),$$

Q et R ayant les valeurs C du chapitre II.

Fixons les signes de 13) de manière à partir, dans le domaine réel, de la valeur positive du radical

$$\sqrt{x^4 Q^2 - Hx^2 R}.$$

Il s'ensuit que, pour $\epsilon = 0$, δ_2 est la plus grande ou la plus petite des deux racines δ selon que

$$H \gtrless 0,$$

c. à d. selon que la génératrice en question touche un domaine de Γ' à courbure hyperbolique ou elliptique. Cela posé, le signe de la partie imaginaire du radical en 13) dépend manifestement du signe du produit

$$f_4^{(\alpha)}(\beta, \delta) A_{\beta^2}.$$

On obtient ainsi la règle suivante.

B. Si deux cônes infiniment voisins touchent un domaine convexe de Γ , le plus grand des δ_1, δ_2 est déplacé au-dessous, et le plus petit au-dessus du chemin d'intégration des δ , et inversement selon que

$$f_4^{(\alpha)}(\beta, \delta) A_{\beta^2} \gtrless 0$$

Si le domaine est à courbures opposées, on a le théorème analogue, sauf en ce que les mots «plus grand» et «plus petit» s'échangent mutuellement.

A partir du côté concave de Γ_{δ_1} , soit de Γ_{δ_2} , avec une valeur complexe de β_1 , les valeurs réelles de la branche de l'autre côté doivent donc se déduire en faisant un demi-circuit dans l'un ou l'autre sens autour du point de ramification. On obtient ainsi le tableau suivant

	$zuA_{\beta^2} > 0$		$zuA_{\beta^2} < 0$
(B) $H < 0$	$\xrightarrow{+ \text{imag}} \xrightarrow{\circlearrowright} - \text{réel} \xrightarrow{\circlearrowleft} + \text{imag}$	$\xrightarrow{+ \text{imag}} \xrightarrow{\circlearrowleft} + \text{réel} \xrightarrow{\circlearrowright} + \text{imag}$	
$H > 0$	$\xrightarrow{- \text{réel}} \xrightarrow{\circlearrowleft} + \text{imag} \xrightarrow{\circlearrowright} - \text{réel}$	$\xrightarrow{+ \text{réel}} \xrightarrow{\circlearrowright} + \text{imag} \xrightarrow{\circlearrowleft} + \text{réel}$	

Les notations «+ imag, — réel», etc., se reportent alors au radical rentrant dans l'expression approximative de β_1 . Ainsi, p. ex. »— réel» veut dire que des deux branches β on prend la plus petite.

Pour les valeurs négatives de $\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}$, on sait que les signes \pm dans la formule 13) correspondent aux signes \mp de la fonction

$$xf_2^{(\alpha)} - yf_1^{(\alpha)}.$$

Le tableau (B) nous fait donc, comme il faut bien, retrouver la règle (A).

9. La règle du n° précédent s'applique d'abord aux conditions au voisinage de Γ . Avec cette restriction on vérifie sans peine qu'elle reste valable indépendamment du signe de x . Or si l'on se déplace le long d'une tangente individuelle, la partie imaginaire, déterminée par des fonctions homogènes sur le cône Γ_δ , ne changera pas. La tangente portera donc en tout point une partie imaginaire de signe constant, du moins tant qu'on ne dépasse pas l'axe des z , où évidemment l'expression 13) devient indéterminée. Il faudra en effet admettre qu'à ce moment le radical de 13) change de signe.

Dans la fig. 2) supposons des génératrices Γ_δ touchant Γ du côté des $x < 0$, et prenons sur une tangente particulière deux points $Q(x \gtrless 0)$. Soit

$$\delta_1 < \bar{\delta} < \delta_2,$$

et supposons, pour fixer les idées, que la nappe supérieure des Γ_δ variables soit convexe vers le bas de la figure. Par conséquent les $\Gamma_\delta = \Gamma_{\delta_1}$, à $\delta_1 < \bar{\delta}$, présentent leurs faces convexes vers $Q(x > 0)$ tandis que les Γ_{δ_2} sont orientés de la façon analogue vers $Q(x < 0)$. Ainsi, du côté des x positifs, $\bar{\delta}$ se trouve à l'extrémité droite d'un intervalle réel et à l'extrémité gauche pour $x < 0$. Or, d'après la stipulation sur les branches β , il faut (pour $uA_\beta > 0$) avoir des branches à partie imaginaire positive dans le premier cas, menant à un radical réel positif dans l'intervalle réel, et dans le deuxième cas des branches à partie imaginaire négative avec un radical correspondant négatif dans l'intervalle réel. Ainsi l'arrangement dans les deux cas sera

$$x > 0 \frac{\bar{\delta}}{\beta + \text{réel}} \overset{\bar{\delta}}{\curvearrowright} + \text{imag} \qquad x < 0 \frac{\bar{\delta}}{-\text{imag}} \overset{\bar{\delta}}{\curvearrowleft} - \text{réel},$$

et $\bar{\delta}$ est déplacé de côtés différents selon le signe de x .

La règle B) est donc toujours valable; pour l'appliquer à une tangente arbitraire passant par (x, y, z) il suffit de se déplacer jusqu'au voisinage de I' , seulement il faut renverser la direction du déplacement trouvé, si par ce passage on a dépassé l'axe des z .

Dans les conditions de la figure, où la section de I' coupe l'axe des z , on vérifie facilement ce théorème en faisant glisser la tangente I'_δ , en emportant avec elle le point $Q(x > 0)$, jusqu'à arriver dans la position pointillée dont le point de contact se trouve par rapport au plan $x = 0$ du même côté que Q . Cette variation, par les méthodes de la discussion suivante, ne changera pas le signe du déplacement imaginaire. La détermination alors obtenue au voisinage du côté droit de I' sera conforme à celle ci-dessus.

10. Complétons la discussion dans un détail important. Soit dans la fig. 3 la section d'un domaine à courbure hyperbolique; fixons les idées par la supposition d'un point conique double. Les tangentes OA, OB, OC sont des génératrices appartenant au cône I'_δ au sommet O .

En vertu de la forme du cône tangent passant par un domaine à courbures opposées (fig. 5, 1^{ère} partie), OB et OC , qui se trouvent des deux côtés d'une tangente d'inflexion, appartiennent à deux branches de I'_δ se rencontrant en une arête de rebroussement. En faisant glisser OB sur la surface du cône on arrivera donc à la position de OC après avoir dépassé l'arête, pour les points de laquelle on a

$$A_{\beta^2} = 0.$$

La formule 13) donne alors une partie imaginaire nulle de δ_1 comme indication de ce que l'approximation est devenue insuffisante.

Soit maintenant Q un point de OB voisin du point de contact C_2 . La figure montre que, relativement à l'autre tangente construite en Q , z_1 se trouve du côté des z positifs, c. à. d. δ_1 est la plus petite des deux valeurs en Q . Faisons glisser Q sur I'_δ , en restant voisin de la courbe de contact, *mais sans la franchir*; nous arriverons en Q' après avoir tourné autour de l'angle de rebroussement. La construction des tangentes en Q' fait voir que dans la nouvelle position δ_1 est devenu le plus grand des deux δ , c. à. d. par les règles ci-dessus et en tenant compte du changement de signe du facteur $\frac{\partial^2 f^{(a)}}{\partial \beta^2}$, δ_1 a tou-

jours retenu le signe de sa partie imaginaire. Par la marche autour de l'angle de rebroussement on a fait glisser l'autre racine δ_2 le long du côté inférieur de l'axe réel, en la faisant dépasser δ_1 pour atteindre une valeur réelle supérieure à celle de δ_1 . Par la définition de la *branche* δ_1 au moyen d'une tangente à variation continue, on a donc conclu que δ_1 se projette dans le domaine complexe de la façon identique pour les deux branches d'un cône se rencontrant en un arête de rebroussement.

10. On peut aller plus loin. Soit le point Q'' au voisinage de OA , génératrice touchant un domaine elliptique. On a donc $H < 0$, tandis que $H > 0$ sur OB , OC . De plus, en vertu du n° 15, chapitre II, z change de signe¹ à travers la courbe elliptique \mathcal{C} . Nos règles mènent donc en Q'' à une partie imaginaire qui est encore du même signe qu'en Q ou Q' .

Un point de ramification δ_1 est donc projeté dans le même demi-plan complexe, indépendamment de la position de (x, y, z) par rapport aux diverses branches du cône Γ_{δ_1} .

L'énoncé implique cependant une certaine réserve; il faut bien que le point choisi pour fixer le signe imaginaire en question se trouve toujours dans la même position par rapport à la courbe de contact de Γ_{δ_1} et Γ . Par le passage à travers cette courbe les mots «plus grand» et «plus petit» doivent évidemment s'échanger, si l'on

¹ Il est vrai que les développements à cette occasion s'appliquent au cas particulier que l'axe des z pénètre par le centre de l'ellipse. On saura cependant toujours déplacer l'axe des z dans cette position par une substitution homographique

$$\begin{aligned} x &= ax_1 + by_1 + cz_1 + du_1; & \alpha &= a\alpha_1 + b\beta_1 + c + d\delta_1; \\ y &= a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d'u_1; & \beta &= a'\alpha_1 + b'\beta_1 + c' + d'\delta_1; \\ & \text{etc.,} & & \text{etc.,} \end{aligned}$$

avec

$$ax + \beta y + z + \delta u = a_1x_1 + \beta_1y_1 + z_1 + \delta_1u_1.$$

Les relations

$$\frac{f_1^1}{x_1} = \frac{f_2^1}{y_1} = \frac{f_3^1}{z_1} = \frac{f_4^1}{u_1} = \frac{af_1^1 + bf_2^1 + cf_3^1 + df_4^1}{ax_1 + by_1 + cz_1 + du_1} = \frac{f_1}{x} = \bar{x},$$

valables pour les points de Γ , montrent que \bar{x} reste invariant relativement à la substitution.

se tient toujours sur un cône individuel Γ_{δ_1} . Ce fait s'explique par la permutation des δ par le contact avec F ; on établira, comme à une occasion antérieure, la vraie connexion en stipulant que le radical

$$\sqrt{Q^2 - PR}$$

change de signe sur la courbe de contact. Notre théorème ci-dessus reste toujours vrai à condition que le point (x, y, z) choisi soit pris entre F et le sommet de Γ_{δ_1} .

11. Le théorème du n° précédent entraîne une conséquence un peu fâcheuse pour la marche des branches à travers la surface des tangentes d'inflexion. Soit (fig. 3) Q''' voisin de l'arête de rebroussement I_δ ; en faisant coïncider Q''' avec cette tangente on sait que deux tangentes, d'abord réelles, viennent se confondre pour devenir complexes et conjuguées de l'autre côté de I_δ . Or, ces deux tangentes, d'après ce que nous venons de dire, sont affectées de petites parties imaginaires de même signe tant qu'elles se trouvent du côté réel, c. à. d. il faut admettre que l'un des points de ramification au passage de I_δ franchisse l'axe réel pour entrer dans l'autre demi-plan. Conformément à cette notion, nos formules donnent aussi une partie imaginaire nulle pour

$$\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} = 0.$$

§ 4.

Conditions particulières au voisinage de la surface I_δ .

12. Reportons-nous à la section de la fig. 3. Par un point Q voisin de I_δ passent deux courbes, dont les points d'arrêt découpent sur la trace de I_δ des longueurs proportionnelles aux valeurs δ_I, δ_{II} correspondantes (Cf. n° 12, chapitre II). Relativement à un cône quelconque intermédiaire à δ_I et δ_{II} le point Q se trouve évidemment à l'intérieur de l'angle de rebroussement avec trois branches réelles, soit, par une notation conforme à celle d'une application ultérieure,

$$\beta_2, \beta_3, \beta_4$$

ces branches. D'autre part, par rapport à tout cône en dehors de l'intervalle $\delta_I \delta_{II}$, Q se trouve dans la position extérieure. La seule

branche réelle qui reste dans ce cas s'appelle β_3 pour les cônes à la droite et β_2 pour ceux à la gauche. Soit $\delta_{II} > \delta_I$, et commençons en $\delta < \delta_I$ avec la branche réelle β_2 . En arrivant en δ_I on retrouvera les deux autres branches réelles β_3, β_4 , et en dépassant δ_{II} , β_2 et β_4 deviennent complexes de manière que β_3 reste seul réel. Ainsi on écrira

$$\delta_I = \delta_{3,4}, \quad \delta_{II} = \delta_{2,4},$$

en mettant en évidence les branches permutées.

Tout cela s'applique au «côté réel» de I_δ . Faisons déplacer Q dans la position Q' ; on n'aura plus de courbes réelles passant par Q' ; δ_I et δ_{II} sont devenus complexes et conjugués.

En vertu du n° 12, chapitre II, δ_I et δ_{II} sont deux racines de l'équation¹

$$14) \quad A_{\beta'} = \frac{1}{4} (zZ + \mu\delta + r\delta^2)^2 + \frac{2}{9 \frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3}} (\sigma + \tau\delta)^3 = 0,$$

dans laquelle on a

$$\sigma = \frac{1}{x} (x'f_2 - y'f_1) - \frac{Z}{x^2} (xf_{12} - yf_{11}) \dots, \quad \tau = A_{\beta\delta}, \quad \mu = xf_4 - uf_1,$$

ce dernier coefficient étant fini pour des distances finies de Γ . Posons

$$\delta = \delta' - \frac{zZ}{\mu}.$$

On trouve immédiatement qu'au voisinage de I_δ , c. à. d. pour

$$\sigma - \frac{zZ\tau}{\mu}$$

très petit, on a

$$\delta' = - \frac{\sqrt{S}}{3\mu \sqrt{\frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3}}} \left(\frac{zZ\tau}{\mu} - \sigma \right)^{\frac{2}{3}}$$

soit

$$\frac{\delta_I}{\delta_{II}} = - \frac{zZ}{\mu} \mp \frac{\sqrt{S}}{3\mu \sqrt{\frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3}}} \left(\frac{zZ\tau}{\mu} - \sigma \right)^{\frac{2}{3}}.$$

¹ On a corrigé dans la suite quelques erreurs qui se sont glissées dans les formules des n°s 12—14 du chapitre II, erreurs d'ailleurs sans conséquence pour les conclusions faites à ces endroits.

En vertu de 21), n° 12, on a posé

$$z = -\frac{f_1}{x}.$$

En remplaçant z , μ par $-z$, $-\mu$, on aura donc un coefficient z du même signe que

$$\bar{z} = f_4 \mu.$$

On projettera donc dans le domaine complexe en écrivant tout simplement

$$Z - i\varepsilon \text{ au lieu de } Z$$

partout où Z figure explicitement.

Du côté réel de I_δ , c. à. d. pour

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3} \left(\sigma - \frac{zZ\tau}{\mu} \right) < 0$$

on voit immédiatement que le premier terme de 15)

$$-\frac{z}{\mu} (Z - i\varepsilon)$$

décide du signe de la partie imaginaire. *Les deux points de branchement sont projetés tous les deux au-dessus ou tous les deux au-dessous de l'axe réel selon que*

$$\frac{z}{\mu} \lesseqgtr 0,$$

résultat qui s'accorde avec les stipulations des n°s précédents. Le passage par $\mu = 0$ correspond au passage à travers le point d'inflexion, point de contact avec Γ , des deux côtés duquel il faut échanger dans nos règles les mots «plus grand» et «plus petit».

Dans le domaine complexe où

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3} \left(\sigma - \frac{zZ\tau}{\mu} \right) > 0$$

le radical imaginaire de 15) fixera le signe en question, et on aura bien pour $\varepsilon = 0$ les deux racines conjuguées. Il faut établir la connexion des branches β entre les deux côtés de I_δ .

Soit, comme au n° 14, chapitre II

$$\begin{aligned}
 & \beta_2 = u + v \\
 17) \quad & \beta_3 = \varrho u + \varrho^2 v \quad \varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}} \\
 & \beta_4 = \varrho^2 u + \varrho v
 \end{aligned}$$

avec

$$18) \quad \frac{u^3}{v^3} = \frac{\partial^3 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^3} \left(z(Z - i\varepsilon) + \mu\delta + \sqrt{(z(Z - i\varepsilon) - \mu\delta)^2 + \frac{8}{9} \frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3} (\sigma + \tau\delta)^3} \right).$$

Prenons d'abord une valeur réelle δ fixe, et faisons varier (x, y, z) relativement au cône Γ_δ (fig. 4). Nous supposons que les conditions soient telles qu'en partant de Q à l'extérieur de l'angle de rebroussement β_2 représente la racine réelle (pour $\varepsilon = 0$) et que β_2 et β_3 possèdent des parties imaginaires de signe positif.

Evidemment en Q on a

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3} (\sigma + \tau\delta) > 0$$

puisqu'il faut que u^3, v^3 soient réels même pour $zZ + \mu\delta = 0$. Pour trouver les conditions pour que l'arrangement ci-dessus ait lieu, marchons vers le point a au voisinage de la droite,

$$\sigma + \tau\delta = 0$$

droite qui évidemment n'est que la trace de I_δ . Pour que β_3 soit à partie imaginaire positive il faut que

$$u > v,$$

ce qui, en prenant dans 18) le radical positif, exige qu'en a

$$c) \quad zZ + \mu\delta > 0, \quad u^3 > 0, \quad v^3 = 0,$$

et par conséquent

$$c') \quad \frac{\partial^3 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^3} > 0.$$

Or, en ce même point

$$\beta_2 = u + v = 2\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{\frac{z(Z - i\varepsilon) + \mu\delta}{\frac{\partial^3 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^3}}},$$

possède, en prenant la racine réelle pour $\varepsilon = 0$, une partie imaginaire positive, si

$$c'') \quad z < 0.$$

Les conditions $c - c''$ suffisent pour préciser partout les signes des parties imaginaires en question. Or, au point de départ Q , les valeurs réelles u^3, v^3 sont de signes contraires, et en vertu de c)

$$u^3 > 0, \quad v^3 < 0.$$

En mettant

$$u^3 = r e^{i\theta}, \quad v^3 = r' e^{i\theta'}$$

on prendra pour $\varepsilon = 0, \quad \theta = 0, \quad \theta' = \pi,$

et il faudra poser, pour avoir les racines réelles nécessaires,

$$19) \quad u = \sqrt{r} e^{\frac{i\theta}{3}}, \quad v = e^{\frac{2\pi i}{3}} e^{\frac{i\theta'}{3}}.$$

Au moment du passage à travers I_δ on a approximativement

$$v^3 = \frac{-4(\sigma + \tau\delta)^3}{3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3}\right)^2 (zZ + \mu\delta)}$$

de manière que l'argument θ' de v^3 va différer de 3π entre a et a . Ainsi procédons avec

$$\theta = 0, \quad \theta' = -2\pi$$

vers le côté droit de la courbe I_δ , et pénétrons dans l'intérieur de l'angle de rebroussement avec des valeurs complexes conjuguées de u^3, v^3 . Pour déterminer maintenant les signes des parties imaginaires prenons p. ex. les points de la tangente par le point d'arrêt où

$$zZ + \mu\delta = 0.$$

On y trouve

$$20) \quad \frac{u^3}{v^3} = \frac{3}{\frac{\partial^3 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^3}} \left(i\varepsilon \pm \sqrt{\frac{8}{9 \frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3}} (\sigma + \tau\delta')^3 - z^2 \varepsilon^2} \right).$$

Quant au signe du radical imaginaire pur, on sait par un argument souvent employé, qu'il est le même que celui que possède la partie imaginaire de ce radical en un point arbitraire en dehors de l'angle de rebroussement. Or, dans ce domaine réel le radical

$$\begin{aligned} & \sqrt{(z(Z - i\varepsilon) + \mu\delta)^2 + \frac{8}{9 \frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3}} (\sigma + \tau\delta)^3} = \\ & = \sqrt{(zZ + \mu\delta)^2 + \frac{8}{9 \frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3}} (\sigma + \tau\delta)^3 - 2iz\varepsilon(Z - \mu\delta)} \end{aligned}$$

possède une partie imaginaire de signe égal à celui de

$$-z(zZ + \mu\delta),$$

signe positif au voisinage du côté droit de l'angle. On aura ainsi, en b,

$$21) \quad \begin{aligned} u^3 &= i(\varepsilon\lambda + \nu) \\ v^3 &= i(\varepsilon\lambda - \nu), \quad \lambda = -\frac{z}{\frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3}} > 0, \quad \nu > 0. \end{aligned}$$

En faisant marcher, à l'intérieur de l'angle

$$\begin{aligned} \theta & \text{ de } 0 \text{ par } \frac{\pi}{2} \text{ à } \pi, \\ \theta' & \gg -2\pi \gg \frac{-5\pi}{2} \text{ à } -3\pi \end{aligned} \quad (\text{pour } \varepsilon = 0)$$

on a obtenu que 19) fournit, comme il faut bien, des u, v complexes et conjugués; de plus en vertu de 21)

$$|u| > |v|,$$

u se trouvant dans le demi-plan positif. On en conclut facilement que β_2, β_3 sont bien encore les racines à partie imaginaire positive.

Tenons maintenant (x, y, z) fixe en Q du «côté réel» de I_δ (fig. 4) et faisons varier δ en commençant en $\delta < \delta_I$. La courbe variable de la fig. 4 b glissera au-dessus de Q , qui va traverser l'intérieur de l'angle de rebroussement dans la direction de droite à gauche en amenant la détermination des arguments que donne la fig. 4. On en tire que pour $\delta = \delta_I$

$$\theta = 0, \quad \theta' = -2\pi, \quad u = \sqrt[3]{r}, \quad v = e^{\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{r} e^{-\frac{2\pi i}{3}} = \sqrt[3]{r}$$

$$u = v, \quad \beta_3 = \beta_4,$$

et que pour $\delta = \delta_{II}$

$$\theta = \pi, \quad \theta' = -3\pi, \quad u = \sqrt[3]{r} e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad v = \sqrt[3]{r} e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

$$u = v e^{\frac{2\pi i}{3}} = \rho v, \quad \beta_2 = \beta_4.$$

La représentation des racines par les formules 17—20 établit donc bien les permutations de la fig. 4 b. En dépassant δ_{II} , les valeurs réelles de $\sqrt[3]{u^3}$, $\sqrt[3]{v^3}$ s'appellent

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} u = \rho u, \quad e^{\frac{4\pi i}{3}} v = \rho^2 v,$$

valeurs toutes les deux négatives pour

$$zZ + \mu\delta < 0, \quad \sigma + \tau\delta < 0.$$

La branche réelle est maintenant β_3 , conformément aux stipulations initiales.

D'autre part, soit le point fixe Q' voisin du côté complexe de I_δ . Pour une valeur δ réelle, l'équation 19) nous définit deux valeurs u, v réelles, telles que

$$u > v$$

et que β_2 et β_3 sont à partie imaginaire positive. Partons de l'axe réelle des δ vers l'un ou l'autre demi-plan complexe jusqu'aux points de ramification complexes. D'après 18) on y a

$$u^3 = v^3 = \pm \text{imaginaire pur}$$

selon que

$$zZ + \mu\delta = \pm \text{imaginaire pur}.$$

Apellons donc δ_I le point de ramification tel que $\mu\delta_I$ se trouve dans le demi-plan positif. On tire de 18) qu'en faisant varier δ de δ_I en δ_{II} à travers l'axe réel, soit par $\delta = -\frac{zZ}{\mu}$, on fait marcher

$$\theta \text{ de } \frac{\pi}{2} \text{ par } 0 \text{ en } -\frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3} \left(\sigma - \frac{zZ\tau}{\mu} \right) > 0 \right)$$

$$\theta' \gg \frac{\pi}{2} \gg \pi \gg \frac{3\pi}{2},$$

de manière que pour $\delta = \delta_I$

$$u = \sqrt[3]{r} e^{\frac{\pi i}{6}}, \quad v = e^{\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{r} e^{\frac{\pi i}{6}} \quad (r = r')$$

$$u = e^{\frac{4\pi i}{3}} v = \varrho^2 v, \quad \beta_2 = \beta_3,$$

et que pour $\delta = \delta_{II}$

$$u = \sqrt[3]{r} e^{\frac{\pi i}{6}}, \quad v = e^{\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{r} e^{\frac{\pi i}{6}}$$

$$u = e^{-\frac{4\pi i}{3}} v = \varrho v, \quad \beta_2 = \beta_4$$

Ainsi, les expressions 17) servent à représenter les branches $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ des deux côtés de I_δ de telle manière que ces racines retiennent toujours les signes respectifs de leurs parties imaginaires. Seulement, par le passage à travers I_δ les points de ramification changent pour ainsi dire de fonction; du côté réel de I_δ on a les deux points réels

$$\delta_{34}, \delta_{24} \quad (\delta_{34} < \delta_{24})$$

et du côté complexe les deux points conjugués

$$\delta_{23}, \delta_{24}.$$

Les deux points réels étant déplacés dans le demi-plan complexe positif pour $z\mu < 0$, on reconnaît que des deux points complexes, δ_{24} est situé dans le demi-plan contenant initialement les deux points de ramification du domaine réel.

On voit sans peine que les énoncés ci-dessus restent valables pour des signes quelconques des coefficients $z, \mu, \frac{\partial^3 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^3}$.

§ 5.

Les intégrales F_{n-3} et la solution fondamentale \mathcal{F} .

13. On intègre, dans la formule V), les mêmes branches bien définies, d'une fonction algébrique de δ aux paramètres x, y, z, u . Il vient

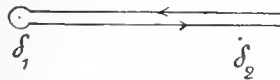
$$VI \quad F_{\varepsilon, n-3} = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{(\delta_\nu)} \int \frac{\psi^{(\alpha, n-3)}(\beta_\mu, \delta) d\delta}{x f_2^{(\alpha)}(\beta_\mu, \delta) - y f_1^{(\alpha)}(\beta_\mu, \delta)} \quad (u > 0).$$

Les intégrales sont étendues le long de lacets joignant certains points de ramification à l'infini, et pour chaque lacet on tiendra compte des branches β_μ qui s'y permutent.

L'intégrale VI, abélienne de première espèce, reste en général finie et continue pour des valeurs arbitraires de l'espace réel. Il sera donc en général loisible de mettre $\varepsilon = 0$ dans VI), définissant ainsi une valeur limite F_{n-3} , valable aux points arbitraires de l'espace réel, avec la restriction pourtant que l'existence des plan P_n peut introduire dans le choix des branches β_μ . Il faut faire exception pour les points de I' et de I_δ , dans lesquels un δ_ν se confond, pour $\varepsilon = 0$, avec un autre point de ramification.

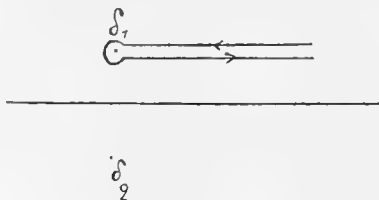
Faisons s'approcher δ_1 du point δ_2 dans le demi-plan inférieur. On est mené, pour le voisinage des deux points, à des intégrales des types déjà étudiés au chapitre II. D'abord, en vertu du n° 22, une telle intégrale reste régulière au passage de la surface I_δ .

D'autre part, soit un point de I' , p. ex. de la catégorie $H < 0$ avec $z > 0$. En vertu du tableau B, l'expression VI) contient du côté réel le lacet



entourant la plus petite des deux δ , et mené p. ex. parallèle à l'axe réel; on aura à prendre des valeurs négatives du radical intégré sur

le bord inférieur du lacet. On obtiendra comme partie réelle la période entière de l'intégrale relative aux deux points δ_1, δ_2 . Du côté complexe le lacet



calculé avec un radical imaginaire et positif sur le bord inférieur, possède une partie réelle équivalente à la demi-période. On retrouve donc entre les côtés réel et complexe de Γ la différence brusque d'une demi-période

$$22) \quad + \frac{\psi^{(n-3)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{4\pi\sqrt{-H}}, \quad (H < 0, z > 0).$$

Et ainsi de suite, pour les différents cas, conformément aux résultats du chapitre III.

14. Ajoutons un mot sur le rôle particulier que joue en apparence le cône $\Gamma_\delta = \Gamma_\infty$, correspondant à $\bar{z} = \infty$, à cause du changement de signe de z à travers des valeurs infinies. Il semble que la courbe de contact de ce cône avec Γ doive diviser Γ en domaines dont les singularités soient de signes contraires. Or, un tel arrangement est impossible puisque l'axe des z , contenant le sommet du cône, n'occupe aucune position particulière relative à Γ .

Tout d'abord l'expression 22) a l'apparence de s'annuler sur la dite courbe. Il n'en est rien, car en effet, pour $\delta = \infty$, l'introduction de

$$\bar{\alpha} = \frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial x}}{\frac{\partial \Gamma}{\partial u}} \bar{\delta}, \quad \bar{\beta} = \frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial y}}{\frac{\partial \Gamma}{\partial u}} \bar{\delta}$$

nous mène à

$$23) \quad \frac{\bar{\delta}^{n-3} \psi^{(n-3)} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial y}, \quad 0, \quad 1 \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \end{array} \right)}{4\pi \sqrt{-H}},$$

et dans cette expression, δ changeant de signe en même temps que \bar{z} , on a trouvé une discontinuité de même signe des deux côtés de la courbe de contact. Mais la Hessienne

$$H(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, 1, \bar{\delta}) = \bar{\delta}^{2(n-2)} H\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\delta}}, \frac{\bar{\beta}}{\bar{\delta}}, \mu, 1\right)$$

devient, pour $\mu = 0$, la Hessienne d'une surface cylindrique en $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\delta}}, \frac{\bar{\beta}}{\bar{\delta}}$, savoir de

$$f\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\delta}}, \frac{\bar{\beta}}{\bar{\delta}}, 0, 1\right) = 0,$$

Hessienne qui par conséquent s'annule, et cela d'ailleurs, par un calcul facile, de l'ordre μ^2 . On a donc bien

$$H = \bar{\delta}^{2(n-3)} H',$$

H' restant fini pour $\delta = \infty$, et on revient, comme il est bien nécessaire, au même saut brusque, pris dans le même sens des deux côtés de la courbe de contact.

15. Pour l'expression de la solution fondamentale on pourrait partir de la formule I^{bis}, en la réduisant le plus possible par des méthodes analogues à celles du chapitre III. Il est cependant facile de remplacer ce calcul par l'intégration directe des dérivées F_{n-3} . On vérifie sans difficulté que

$$VII. \quad F_\varepsilon = \frac{i}{16(n-4)\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum \frac{(\alpha_v x + \beta y + z + \delta u)^{n-4} \log(\alpha_v x + \beta y + z + \delta u)}{f_1(\alpha_v, \beta, \delta)} + \right. \\ \left. + \sum \frac{(\alpha_\rho x + \beta y + z + \delta u)^{n-4} \log(\alpha_\rho x + \beta y + z + \delta u)}{f_1(\alpha_\rho, \beta, \delta)} \right\} d\beta d\delta$$

même, pour la dérivée générale d'ordre $n-3$, à l'expression 10) du § 1.

L'intégrale fondamentale s'exprime donc dans le cas général au moyen d'une intégrale algébrico-logarithmique double.

Si l'équation est essentiellement réelle on a un résultat plus simple. Dans VII) vont alors figurer toutes les branches a_ν , a_ρ , et la fonction intégrée par rapport à β n'est au fond plus multiforme. L'intégrale

$$\frac{i}{16 \sqrt{n-4} \cdot \pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum \frac{(ax + \beta y + z + \delta_\mu u)^{n-4} \log(ax + \beta y + z + \delta_\mu u)}{f_4(a, \beta, \delta_\mu)} da d\beta,$$

δ_μ étant l'ensemble des racines de

$$f(a, \beta, \delta) + i\epsilon f_4 = 0,$$

mènera manifestement à

$$\frac{i}{16 \sqrt{n-4} \cdot \pi^3} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\frac{ax+\beta y+z}{u}}^{+\infty} \frac{(ax + \beta y + z + \delta u)^{n-4} da d\beta d\delta}{f(a, \beta, \delta) + i\epsilon f_4},$$

et se transformera pour $x \geq 0$, $u > 0$ en

$$\frac{+i}{16 \sqrt{n-4} \cdot \pi^3 x} \int_{\xi=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^{n-4} d\xi d\beta d\delta}{f\left(\frac{\xi - \beta y - z - \delta u}{x}, \beta, \delta\right) + i\epsilon f_4};$$

en intégrant par rapport à

$$\xi = ax + \beta y + z + \delta u$$

le long d'un chemin mené vers ∞ dans le demi-plan supérieur et évitant les zéros du dénominateur.

Or, l'intégrale par rapport à β , δ a la forme des intégrales discutées ci-dessus, et l'on trouve:

$$\text{VIII. } F_\epsilon = \frac{-1}{4 \sqrt{n-4} \pi^2} \int_0^{+\infty} \xi^{n-4} d\xi \sum_{(\delta_\nu \xi)} \int \frac{d\delta}{x f_{2\mu} - y f_{1\mu}};$$

$$f_{2\mu} = f_2\left(\frac{\xi - \beta_\mu y - z + \delta u}{x}, \beta_\mu, \delta\right), \text{ etc.}$$

Ici, $\delta_{\nu\xi}$ sont certains points de ramification qui dépendent de ξ et qui sont tels que

$$\delta_{\nu\xi} = \delta_{\nu} \text{ pour } \xi = 0 .$$

Les parties imaginaires de ces points de branchement se déterminent d'après les principes des §§ précédents; on retrouvera pour $\xi = 0$ les mêmes branches qu'à ces endroits; en effet l'algèbre de la fonction

$$f\left(\frac{\xi - \beta y - z - \delta u}{x}, \beta, \delta\right)$$

est celle d'un $f^{(\alpha)}$ avec la variable z remplacée par

$$z - \xi ,$$

et nous venons de voir que la détermination des branches se fait d'une manière unique et bien fixée pour tout l'espace réel.

L'expression est donc précisée sans ambiguïté; par sa dérivation on retrouve d'ailleurs facilement les fonctions VI du n^o 13. En faisant $\varepsilon = 0$, il vient donc que:

L'intégrale fondamentale d'une équation essentiellement réelle est fournie par une intégrale abélienne double, de première espèce pour des x, y, z arbitraires. La formule VIII montre qu'elle est partout finie et continue, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 4$ inclusivement, dans l'espace entier réel, y inclus les points de la caractéristique, où ses dérivées d'ordre $n - 3$ deviennent infinies d'ordre logarithmique.

Par la discussion du § précédent nous savons que les lacets intervenant dans nos formules se définissent toujours d'une manière unique et que les fonctions algébriques intégrées le long de ces lacets sont toujours choisies de la même manière, indépendante de la variation de (x, y, z) . De là enfin cette conclusion générale:

L'intégrale fondamentale et ses dérivées sont des fonctions uniformes et monogènes dans l'espace réel correspondant à une valeur u positive arbitraire.

De plus on reconnaît facilement que la formule VIII est encore valable pour $u < 0$ à condition de la prendre avec le signe contraire.

§ 6.

Équations réductibles. Vérification de la propriété fondamentale.

16. Jusqu'ici nous avons supposé que $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ soit une forme irréductible. Dans la théorie des équations de trois variables l'étude d'une combinaison différentielle à deux facteurs joue un rôle important. Nous nous bornons ici aux équations de la forme

$$\text{IX} \quad \frac{\partial}{\partial u} f \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u} \right) U = \varphi,$$

résultant de la combinaison de l'équation f avec l'équation particulière auxiliaire

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \Phi.$$

L'équation est d'ordre $n+1$, et elle mènera à une expression fondamentale qui permettra la formation immédiate d'une dérivée quelconque d'ordre $n-2$. Pour avoir des intégrales sommables on écrira p. ex.

$$(\delta + i\mu)(f(\alpha, \beta, \delta) + i\epsilon f_4(\alpha, \beta, \delta))$$

au lieu de

$$\delta f(\alpha, \beta, \delta).$$

Si μ est positif, l'intégration par rapport à δ autour du demi-plan positif (pour $u > 0$) ne donnera pas de résidu pour $\delta = 0$. Les calculs précédents s'appliquent donc directement à l'équation actuelle. On aura au lieu de VI des expressions de la forme

$$\text{X} \quad F_{\epsilon, \epsilon_1, n-2} = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{(\delta_\nu)} \int \frac{\psi^{(\alpha, n-2)}(\beta_\mu, \delta) d\delta}{(\delta + i\mu)(xf_2^{(\alpha)} - yf_1^{(\alpha)})},$$

représentant une certaine somme d'intégrales abéliennes de troisième espèce appartenant à la courbe algébrique

$$f^{(\alpha)} = 0.$$

L'expression X est valable à condition que f soit du type essentiellement réel. Dans le cas général on conclut qu'elle représente les singularités réelles de l'intégrale fondamentale de IX.

Pour ces singularités on revient aux intégrales étudiées aux nos 18—20 de la 1^{ère} partie. L'équation réductible se distingue par l'intervention, en outre des singularités ordinaires de la caractéristique, d'un cône singulier

$$\Gamma_\delta = \Gamma_0.$$

Sur ce cône on a trouvé des singularités algébriques de la même nature que celles que présente la solution fondamentale de l'équation

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, 0\right)U = \varphi(x, y, z)$$

sur le cône caractéristique correspondant, et ces singularités se prennent dans des directions contraires des deux côtés de la courbe de contact de Γ_0 avec Γ .

On a là l'analogie complet d'un théorème de la théorie des équations à trois dimensions.

À présent l'intérêt de l'équation IX repose surtout sur ceci qu'elle va nous faciliter la discussion de la formule de GREEN relative à l'équation f . Pour cela la supposition d'un f essentiellement réel entraînera encore une simplification considérable.

17. Soit donc $f(\alpha, \beta, \delta)$ une surface du type essentiellement réel (par rapport à δ). Nous disons qu'il est possible de déterminer une sphère de rayon ϱ suffisamment petit pour que, par un point arbitraire à l'intérieur

$$24) \quad x^2 + y^2 + z^2 < \varrho^2,$$

projeté dans un espace $u = \text{const.}$ quelconque, on ne puisse mener aucun cône Γ_δ réel. Car dans le cas contraire on aura un cône tangent réel passant par le sommet

$$x = y = z = 0,$$

et la caractéristique F étant homogène dans l'espace à quatre dimensions, on aura le même cône dans les projections parallèles correspondant aux diverses valeurs constantes de u . Mais pour $u = 0$ ce cône coïncidera avec la trace conique de F dans cet espace. Donc F coupe le plan

$$u = 0$$

par une trace réelle. Or, pour la surface f réciproque, en vertu des relations

$$\frac{f_4}{u} = \frac{f_1}{x} = \frac{f_2}{y} = \frac{f_3}{z},$$

une telle section réelle $u = 0$, correspond à

$$f_4 = 0.$$

On aura donc, sauf dans des cas singuliers (lignes doubles etc.) qui ne se présenteront que pour des positions toutes particulières des axes, des points de ramification réels relatifs à la fonction algébrique δ , et l'équation n'est plus du type désiré.

Le cône tangent par $x = y = z = 0$ étant imaginaire, on conclut en particulier que les conditions du n° 6, chapitre IV, ne sont pas réalisées; les plans P_n sont imaginaires. De plus les équations

$$f(\alpha, \beta, 1, \delta) = 0$$

$$\alpha x + \beta y + z + \delta u = 0$$

ne sont, à l'intérieur de la sphère 24), satisfaites pour aucun système de valeurs α, β, δ réelles. En particulier la fonction

$$f(\alpha, \beta, 1, 0)$$

ne s'annule jamais dans le domaine réel, et elle mènera à une caractéristique à trois dimensions

$$25) \quad F_0(x, y, z) = 0 \quad (u = \text{const.})$$

dont toutes les branches sont imaginaires.

18. En adoptant l'équation auxiliaire du n° 15 on sera mené à l'intégrale

$$26) \quad F_{\varepsilon, \mu} = \frac{i}{16\pi^4} \iiint \int \frac{e^{i\gamma(\alpha x + \beta y + z + \delta u)} d\alpha d\beta d\gamma d\delta}{(\delta + i\mu)(f(\alpha, \beta, \delta) + i\varepsilon f_4(\alpha, \beta, \delta))}.$$

L'équation étant d'ordre $n + 1$, on en formera les dérivées d'ordre $n - 2$, et on trouvera une expression de la forme:

$$27) \quad F_{\varepsilon, \mu, n-2} = \frac{i}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi^{(n-2)}\left(\alpha, \beta, -\frac{\alpha x + \beta y + z}{u}\right) d\alpha d\beta}{(\alpha x + \beta y + z - i\mu u)\left(f\left(\alpha, \beta, -\frac{\alpha x + \beta y + z}{u}\right) + i\varepsilon f_4^{(\delta)}\right)}$$

pour

$$u \geq 0.$$

A l'intérieur de la sphère 24) le terme

$$i\varepsilon f_4^{(\delta)} = i\varepsilon f_4\left(\alpha, \beta, -\frac{\alpha x + \beta y + z}{u}\right)$$

peut évidemment être supprimé, la fonction $f^{(\delta)}$ ne possédant que des racines complexes. Une discussion facile montre que dans ces conditions l'expression 27) tend vers

$$27') \quad F_{\mu, n-2} = \frac{i}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi^{(n-2)}(\alpha, \beta, 0) d\alpha d\beta}{(\alpha x + \beta y + z - i\mu|u|)f(\alpha, \beta, 0)}.$$

19. L'intégrale 27) formellement solution de l'équation

$$28) \quad \frac{\partial}{\partial u} f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u}\right) U = 0$$

possède donc dans l'espace des (x, y, z) , pour un u quelconque, outre la singularité superficielle de I' , le seul point singulier $x = y = z = 0$, point réel isolé du cône singulier I_0 . En écrivant la formule de GREEN, relative à 28) on aura donc à intégrer le long de trois hypersurfaces, savoir

1) Une hypersurface quelconque fermée S entourant un point arbitraire

$$29) \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad u = u_0.$$

2. Une hypersurface double, parallèle à la caractéristique et suivant à petites distances les deux côtés de la portion d'elle qui se trouve à l'intérieur de S .

3. Un cylindre parallèle à l'axe des u et en renfermant la section découpée par S ; ce cylindre se projettera dans l'espace $u = \text{const}$, dans la forme de la sphère 24).

Le long de ces surfaces on aura, outre les intégrales contenant des dérivées d'ordre inférieur, à exécuter des intégrales de la forme:

$$\frac{1}{n} \iiint g(x_0, y_0, z_0, u_0) (\cos(N, x)F_1 + \cos(N, y)F_2 + \cos(N, z)F_3 + \cos(N, u)F_4) dO,$$

où par

$$F_1 = F_1(x - x_0, y - y_0, z - z_0, u - u_0) = f_1 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u} \right) F(x - x_0, y - y_0, z - z_0, u - u_0), \text{ etc.,}$$

on a dénoté des combinaisons linéaires des dérivées de premier ordre de 27), $\psi^{(n-2)}$ y étant remplacé par

$$f_{11}, f_{12}, \text{ etc., etc.,}$$

20. On démontre d'abord que l'intégrale relative à Γ disparaît. On prouve cela le plus facilement par l'intégration de l'expression F encore une fois par rapport à δ , de manière que la formation directe des dérivées d'ordre $n - 1$ soit permise. On aura ainsi des intégrales de la forme

$$30) \quad \int_{\Gamma} \int_{\delta} g(x_0, y_0, z_0, u_0) (\cos(\Gamma, x)f_1^{(\alpha)} + \cos(\Gamma, y)f_2^{(\alpha)} + \cos(\Gamma, z)f_3^{(\alpha)} + \cos(\Gamma, u)f_4^{(\alpha)}) \frac{dO d\delta}{\delta^2 ((x - x_0)f_2^{(\alpha)} - (y - y_0)f_1^{(\alpha)})}.$$

le chemin d'intégration des δ tournant toujours d'une façon définie autour du pôle double $\delta = 0$. Or, la surface étant parallèle à I , on a

$$\cos (I, x) \propto \bar{\alpha}, \quad \cos (I, y) \propto \bar{\beta}, \quad \cos (I, z) \propto 1, \quad \cos (I, u) \propto \bar{\delta},$$

et, dans les points singuliers, la fonction intégrée se trouve multipliée par le facteur

$$\cos (I, x)\bar{f}_1 + \cos (I, y)\bar{f}_2 + \cos (I, z)\bar{f}_3 + \cos (I, u)\bar{f}_4 \propto f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}) = 0,$$

qui s'annule du premier ordre. On a donc des intégrales continues sur I , et l'intégration étendue sur les deux surfaces, aux directions normales contraires, donnera un résultat zéro.

Cela posé, on peut faire disparaître l'intégration momentanément introduite. Considérons p. ex. les conditions dans l'espace des (x, y, z) . En donnant un petit accroissement quelconque à u , la projection de I dans l'espace u se déplacera dans l'un ou l'autre sens, transportant avec elle les valeurs continues des intégrales 9). On retrouvera la même dérivée indépendamment du sens dans lequel on fait varier la variable u .

20. Quant à l'intégration le long du tube entourant l'axe des u , on y a

$$\cos (N, u) = 0,$$

et on est ramené à étudier l'intégrale

$$31) \quad \Phi(u - u_0, \varrho) = \int (\cos (\varrho, x_0)F_1 + \cos (\varrho, y_0)F_2 + \cos (\varrho, z_0)F_3) \varrho d\sigma$$

étendue sur la surface de la sphère σ

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varrho^2.$$

Choisissons pour ϱ une valeur fixe, très petite, et considérons l'expression ci-dessus pour des u variables. Tout d'abord, elle est une fonction continue de u .

En effet, une discontinuité ne peut provenir que de l'intégration sur σ à travers la section par I . Soit donc τ la trace de I sur σ ,

variable avec $u - u_0$; les dérivées d'ordre $n - 2$ de F y deviennent infinies d'ordre logarithmique, et par conséquent les dérivées F'_1 , etc., deviennent infinies au plus du premier ordre. Il s'ensuit que l'intégration sur une bande de largeur faible renfermant τ , donnera un résultat en général fini (non nul). En donnant à u un accroissement très petit, la bande se déplacera très peu sur σ en renfermant toujours τ à son intérieur. L'intégrale correspondante aura retenu une valeur finie qui n'aura changé qu'infiniment peu par la variation de u .

En particulier *la continuité subsiste encore pour $u - u_0 = 0$* ¹.

Or soit

$$|u - u_0|$$

très grand relativement à ϱ . Dans l'espace (x, y, z) la caractéristique a passé tout à fait en dehors de la petite sphère, les courbes τ sont toutes imaginaires, et en vertu du n° 18, les dérivées d'ordre $n - 2$ s'expriment par des intégrales de la forme 27'), *indépendantes de u* . Dans l'expression de Φ on écartera donc en F_1, F_2, F_3 toute dérivée par rapport à u . Mais alors l'équation 31) se réduit à la formule analogue, formée dans l'espace à trois dimensions, relative à une solution fondamentale à caractéristique imaginaire. Il vient, en ce référant à 27'),

$$32) \quad \Phi(u - u_0, \varrho) = \Psi(u - u_0, \varrho) \varphi = \mp u \frac{1}{2} \varphi(x, y, z, u_0)$$

$$\frac{|u - u_0|}{\varrho} \text{ très grand,}$$

le signe étant choisi selon que

$$u \gtrless u_0.$$

¹ Il paraît de prime abord que le plan $u = 0$ doit intervenir comme surface singulière. Il n'en est rien; la discussion de l'expression 27) montre que $F_{\varepsilon, \mu, u-2}$, ainsi que ses dérivées de premier ordre, tend vers des valeurs continues (d'ailleurs nulles) pour $u = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 > 0$. En particulier, dans le cas important étudié au chapitre VI, on intègre, pour $u = 0$, des fonctions identiquement nulles.

Intégrons finalement dans la direction du tube. On aura

$$33) \quad \int \varphi(x, y, z, u_0) \Psi(u - u_0, \varrho) du_0,$$

où Ψ , défini par 32), s'approche vers les deux bouts du cylindre des valeurs asymptotiques $\pm \frac{1}{2}$, valeurs d'ailleurs que pour une valeur u arbitraire on atteindra avec une approximation quelconque en diminuant suffisamment le rayon ϱ . Dérivons 33) par rapport à u ; après une intégration partielle on aura l'expression

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial u_0} \Psi(u - u_0, \varrho) du_0,$$

dans laquelle on peut maintenant faire tendre ϱ vers zéro. On trouve finalement

$$34) \quad \frac{1}{2} \int_u^u \frac{\partial \varphi}{\partial u_0} du_0 - \frac{1}{2} \int_u^u \frac{\partial \varphi}{\partial u_0} du_0 = \varphi(x, y, z, u).$$

En vertu de 34) on est donc parvenu à une intégrale fondamentale. On a obtenu une formule de GREEN de la forme

$$\varphi(x, y, z, u) = \frac{\partial}{\partial u} \int_V F(x - x_0, \dots) f \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}, \frac{\partial}{\partial z_0}, \frac{\partial}{\partial u_0} \right) \varphi(x_0, y_0, z_0, u_0) dV + \frac{\partial I}{\partial u}.$$

La dérivation peut d'ailleurs s'exécuter

$$\varphi = \int_V F \cdot f \varphi dV + \frac{\partial I}{\partial u};$$

V est alors le volume limité par S , et l'intégrale I , étendue sur S , renferme des dérivées d'ordres divers de F et de φ .

Chapitre V.

Équations essentiellement réelles possédant des plans singuliers.

§ 1.

Variation de T_δ à travers un plan double.

1. Dans le § 3 du chapitre II nous avons étudié l'algèbre d'un plan tangent double dû à un point conique de la surface f . Pour la classe d'équations qui nous occupe ici cette discussion se complète dans un détail important. Notons que la conique \mathcal{C} , courbe de contact avec P , est *nécessairement* une ellipse. En effet, l'équation approximative

$$f_{44}\delta'^2 + 2\delta'(f_{14}\alpha' + f_{24}\beta') + f_{11}\alpha'^2 + 2f_{12}\alpha'\beta' + f_{22}\beta'^2 = 0$$

doit toujours donner deux racines δ' réelles. Il faut donc que

$$\alpha'^2(f_{14}^2 - f_{11}f_{44}) + 2\alpha'\beta'(f_{14}f_{24} - f_{12}f_{44}) + \beta'^2(f_{24}^2 - f_{22}f_{44})$$

soit une forme positive, savoir que

$$(f_{14}f_{24} - f_{12}f_{44})^2 - (f_{14}^2 - f_{11}f_{44})(f_{24}^2 - f_{22}f_{44}) < 0,$$

ce qui, par référence à l'équation de \mathcal{C} , prouve la proposition.

2. Aux points du plan double on a

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0,$$

les parties imaginaires des branches réelles disparaissent et nos intégrales deviennent indéterminées. Il faudra donc fixer leurs valeurs

en s'approchant du plan de l'un ou de l'autre côté. La discussion présentera certains points assez délicats, dont l'éclaircissement demandera avant tout une conception bien nette du mécanisme du cône tangent. Supposons que l'axe des z passe en dehors de l'ellipse centrale et reportons-nous à la fig. 5 de la première partie pour avoir la forme du cône T_0 franchissant en partie le domaine hyperboloïde autour du point double Φ . Par la symétrie de l'arrangement ce cône possède deux arêtes de rebroussement, et deux de ses branches se rencontrent dans la génératrice par Φ pour toucher ensuite la nappe intérieure de la surface. On a donc, dans une section arbitraire, (menée par simplification par le point double) des traces de la forme des fig. 5—6.

Dans ces figures, les branches telles que AA' sont provenues de génératrices de la catégorie OA (voir fig. 2), et les branches BB' et BC ($B'C'$) sont engendrées par des génératrices OB , OC respectivement. On a pour

$$\begin{aligned} AA', & \quad H < 0, \quad z \geq 0 \\ BB', B\Phi, B'\Phi, & \quad H > 0, \quad z \leq 0 \\ \Phi C, \Phi C', & \quad H < 0, \quad z \leq 0, \end{aligned}$$

et les OA , OB , OC sont des tangentes de T , définies par la supposition que O soit supérieur au point \bar{z} par où l'axe des z pénètre le plan double. Cherchons maintenant à poursuivre la déformation du cône en faisant marcher O d'une position très peu au-dessus de \bar{z} à une nouvelle position immédiatement au-dessous de ce point. Nous considérons deux cas.

a) *La section coupe l'ellipse \mathcal{E} .* En s'approchant, par la marche de O vers \bar{z} , du plan double, OA reste tangent à un domaine elliptique de T et servira par conséquent à former partie d'une branche AA' , évidemment, d'après la fig. 3, au-dessus du domaine central elliptique et tournant son côté concave vers la face supérieure de ce domaine. Quand OA , pour $O = \bar{z}$, passe par la position C_1C_2 dans le plan double, on aura toujours à définir la connexion des branches par déplacement continu des point de contacts respectifs. Donc après le passage, OA devient tangent au domaine hyperbolique de T pour appartenir à une branche de cône de l'autre catégorie, concave vers la face inférieure du

disque elliptique. Nous avons désigné cette branche (pointillée) par aa' . De la manière analogue, OB commence par former la branche BB' présentant son côté concave vers le côté inférieur du disque, et finit par former la branche bb' , de la première catégorie, au-dessus du disque et concave vers celui-ci.

La fig. 5) montre ce procédé par lequel la courbe en plein passe graduellement dans la courbe pointillée. Ainsi, en se déplaçant dans le sens indiqué par les petites flèches, BB' et une certaine partie $A_iA'_i$ de AA' s'approchent, en s'aplatissant de plus en plus, mutuellement et du plan double pour s'y confondre pour $O = \bar{z}$. A ce moment les deux branches échangent, pour ainsi dire, entre elles leurs caractères respectifs, et on retrouve ensuite deux branches qui s'éloignent l'une de l'autre et du plan double.

Les points $A_iA'_i$ ne sont, pour $O = \bar{z}$, autres que les points par où les tangentes zL , zL' , menées à \mathbb{C} par \bar{z} (fig. 5 b), coupent le plan de la section 5). En effet, dans une trace telle que celle de la fig. 3, très voisine de l'une de ces droites, les points C_1C_2 se sont approchés infiniment l'un de l'autre, et la courbe entre ces points s'est infiniment aplatie. En même temps deux tangentes d'inflexion se sont mutuellement rapprochées pour se confondre, soit en $\bar{z}L$, qui par conséquent appartient comme droite double (arête de rebroussement) à I_3 . Ainsi, dans la limite, A_i , A'_i coïncident avec les angles B , B' respectivement, et la trace de I_3 possède ces points comme points d'arrêt.

La fig. 5 b), représentant les conditions telles qu'elles se dessinent dans le plan double, servira à décider comment l'intérieur de l'ellipse est orienté par rapport à la section 5), dont la trace est marquée en 5 b) par la corde $A_iA'_i$. Prenons un point E entre C_2 et A_i ; ce point se trouve par rapport à la section $\bar{z}E$ dans la même position que F à la droite de C_2 dans la section zC_1C_2 de la fig. 3. Dans cette figure une génératrice voisine de OC_1C_2 , coupant le plan double en un point *très voisin de* C_2 , passera à la gauche de F dans la position OA ($O > \bar{z}$) et à la droite de F dans la position Oa ($O < \bar{z}$). On revient facilement à l'arrangement de la fig. 5, et C_2 , C'_2 y figurent comme les sections de la corde $A_iA'_i$ avec des courbes AA' , aa' infiniment voisines de $A_iA'_i$.

Le resultat principal de tout cela est que, pour tout point entre C_2 et C'_2 , on trouve du côté supérieur du plan exclusivement des courbes

aux caractères $H < 0$, $z \gtrsim 0$, s'approchant ou s'éloignant du point selon que $O \gtrsim \bar{z}$, et du côté inférieur, variant de la même manière, exclusivement des courbes aux caractères contraires $H > 0$, $z \lesssim 0$.

b) La section passe en dehors de \mathbb{C} . Prenons p. ex. une section par Φ et $\bar{A}_i \bar{A}_i'$ (fig. 5a). On trouve facilement une figure telle que 6).

L'arrangement diffère d'une manière typique du cas précédent. Les courbes aux différents caractères marchent toujours dans la même direction, celles à $H < 0$, $z \gtrsim 0$ avançant sur celles de l'autre catégorie.

3. Prenons maintenant dans les divers cas des points très voisins du plan singulier. Nos figures permettront immédiatement des conclusions sur les points de ramification δ .

a) Q' , fig. 5), est au voisinage de la face supérieure du disque elliptique. On voit que Q' est « balayé » deux fois par une courbe

$$H < 0, \quad z \gtrsim 0,$$

d'abord par AA' dans sa marche vers $A_i A_i'$, et ensuite par bb' dans la direction contraire. Les δ correspondants s'appellent (fig. 6, 1^{ère} partie) δ_1 et δ_3 . Les deux tangentes infiniment voisines, passant par Q' , sont évidemment réelles pour les δ contenus dans l'intervalle

$$\delta_1 < \delta < \delta_3, \quad \text{c. à. d.} \quad z_1 > O > z_3.$$

a') Par Q'' , sur la face inférieure du disque, passent de la même manière deux courbes de la catégorie

$$H > 0, \quad z \lesssim 0,$$

et on retrouve toujours un intervalle réel entre δ_1 et δ_3 .

L'apparition, en Q' et Q'' , d'un tel petit intervalle réel exprime géométriquement le fait que la Hessienne du plan double

$$H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) = x^2 P$$

est négative pour le domaine central. Les observations ci-dessus suffisent pour faire reconnaître que le passage de Q'' à Q' est lié à une discontinuité analogue au passage du côté complexe de T au côté réel. En effet, la contribution réelle en Q'' proviendra de l'intégration étendue entre δ_1 et δ_3 sur un radical

$$x f_2 - y f_1$$

devant prendre le signe \pm , d'après la règle fondamentale, selon que $z \leq 0$ pour les courbes en question. L'expression analogue en Q'' se prendra avec le signe contraire, z étant ≥ 0 . Il s'ensuit que l'intégrale réelle augmentera par la période associée aux deux points de ramification $\delta_1 \delta_3$.

b) Q_2 (fig. 6) extérieur à \mathcal{C} , est voisin de $\overline{A_i A_i'}$. Le balayage dans ce cas est fourni de la même façon pour les deux faces du plan par deux courbes marchant dans la même direction, d'abord par une courbe $H < 0$, $z > 0$ et ensuite par une courbe de l'autre catégorie. Les branches s'appellent δ_2 , δ_3 , mais l'intervalle entre δ_2 et δ_3 est maintenant *imaginaire*, correspondant au signe positif de la Hessienne $H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$ du plan double.

La fig. 5), quoique moins claire dans ces détails, fait voir que les points voisins de $A_i C_2$, soit de $C_2' A_i'$, sont assujettis aux mêmes conditions. Le résultat 6) est donc valable pour tous les points *extérieurs* à C' et *inclus* dans le secteur $L\bar{z}L'$.

§ 2.

L'intégrale F_{n-3} au voisinage du plan double.

En un point arbitraire, voisin du plan double, on a, d'après le n° 10, chapitre II, pour $\varepsilon = 0$

$$1) \quad x f_2 - y f_1 = x \sqrt{A_{\beta'}} = x \sqrt{R Z^2 + 2 Q Z \delta' + P \delta'^2}.$$

Projetons dans le domaine complexe. Le terme imaginaire introduit dans l'équation F^{bis}) du n° 1) aura un signe fixé par les règles du chapitre précédent.

Or, nous venons d'admettre que le passage d'une génératrice particulière par le plan double correspond au passage du point de contact, d'une manière continue, à travers la courbe \mathcal{C} . Donc, puisque z et H changent de signe à la fois, la partie imaginaire de δ conserve le même signe des deux côtés du plan, et l'énoncé du n° 10, chapitre IV se complète de manière à rester valable *même si* (x, y, z) franchit un plan singulier.

Soit toujours, dans la fig. 6, 1^{ère} partie, l'axe des y dirigé vers le haut, et prenons le point (x, y, z) dans la position Q_2 . On y trouve selon nos règles que ¹

$$(Q_2) \quad \begin{array}{l} \delta_1 \text{ est à partie imaginaire positive,} \\ \delta_3, \delta_2, \delta_4 \text{ sont } \gg \gg \gg \text{ négative.} \end{array}$$

La partie de F_{n-3} dont la continuité est douteuse s'écrit par conséquent

$$2) \quad I = - \frac{\psi^{(n-3)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{4\pi^2} \int_{(\delta_1)} \frac{d\delta}{xf_{\frac{1}{2}}^{(\alpha)} - yf_{\frac{1}{2}}^{(\alpha)}}.$$

a) Soit d'abord le voisinage du domaine central, où δ_1 coïncide avec δ_3 . On a, en vertu de 1)

$$3) \quad \frac{\delta'_1}{\delta'_3} = - \frac{Z}{P} (Q \pm \sqrt{Q^2 - PR}),$$

formule qui représente, au point de vue géométrique, la vraie connexion des branches. On y a choisi les signes \pm dans la supposition que la face supérieure corresponde à

$$Z > 0, \quad ^1$$

δ'_1 devant être numériquement inférieur à δ'_3 en tout point situé, tel que Q' , sur la face supérieure du disque central.

¹ On a supposé, pour le choix des branches, que le domaine à courbure elliptique de Γ en dehors de \mathcal{U} corresponde à

$$x > 0, \quad u > 0.$$

Le signe admis pour Z s'accorde bien avec cette hypothèse. En effet, soit le cas du n^o 15, 1^{ère} partie; on a trouvé à l'extérieur de \mathcal{U}

$$x = - \frac{u^2 - x^2 - y^2}{2\mu u(x^2 + y^2)}, \quad u^2 - x^2 - y^2 < 0.$$

x étant positif, l'équation

$$Z = - \frac{(u^2 - x^2 - y^2)^2}{8\mu u(x^2 + y^2)}$$

montre que la caractéristique est située relativement au plan double du côté des Z négatifs.

Pour le domaine complexe, on écrira au lieu de 3)

$$3') \quad \frac{\delta'_1}{\delta'_3} = - \frac{Z}{P} (Q \pm \sqrt{Q^2 - PR}) \pm i\varepsilon',$$

ε' étant très petit et assurément positif des deux côtés du plan.

L'intégrale 2) contient donc le terme logarithmique

$$\begin{aligned} & - \frac{i\psi^{(n-3)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{2\pi^2 x \sqrt{-P}} \log(\delta'_1 - \delta'_3) = - \\ & - \frac{i\psi^{(n-3)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{2\pi^2 \sqrt{-H}} \log 2 \left(\frac{Z}{P} \sqrt{Q^2 - PR} + i\varepsilon' \right). \end{aligned}$$

La partie imaginaire du logarithme est singulière, et nous donne pour $\varepsilon = 0$, 0 ou πi , selon que $Z \leq 0$. On a donc retrouvé la singularité dont l'existence a été prévue dans le § précédent.

En franchissant le disque central elliptique du plan double, une dérivée F_{n-3} augmente par un saut brusque algébrique de la grandeur

$$4) \quad \frac{\psi(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{2\pi \sqrt{-H}}.$$

Ce saut se prend dans la même direction que les sauts brusques dans les points elliptiques de Γ immédiatement en dehors de la courbe \mathfrak{C} .

Si $z > 0$ en ces points, le saut du plan se fait donc dans la direction menant de la face intérieure vers l'extérieure.

On a supposé ci-dessus que Q_2 se soit approché du plan double sans avoir franchi préalablement la tangente d'inflexion I_δ . En allant dans la position Q' , on sait que δ_2 et δ_1 sont devenus complexes, l'une des deux racines, soit δ_2 , étant projetée dans le demi-plan supérieur. Ce fait est sans importance, δ_2 ne se permutant pas sur la partie en question du plan double. D'ailleurs on verra plus tard que la fonction intégrée reste uniforme en un tel point de ramification.

5. Dans le cas b), Q_2 s'approche d'un point extérieur à \mathfrak{C} mais intérieur à $L\bar{z}L_1$, soit à la droite de C_2 . L'intégrale I , ainsi que F_{n-3} , reste continue, puisque δ_1 reste distinct en un tel point. D'autre

part faisons marcher Q' dans la position Q_1 ; δ_1 et δ_4 sont devenus réels de nouveau et on a

$$(Q_1) \quad \begin{array}{cccc} \delta_1, \delta_2, \delta_4 & \text{à partie imaginaire positive} & & \\ \delta_3 & \gg & \gg & \gg \text{ négative.} \end{array}$$

Quand Q_1 passe à travers le plan double à la gauche de C_1 , δ_1 et δ_4 coïncident; F_{n-3} reste cependant continu, puisque dans la somme de lacets les points confondus figurent tous les deux; les deux lacets correspondants deviennent équivalents à la période (d'ailleurs imaginaire) relative aux deux points.

6. Pour

$$Q^2 - PR < 0$$

on se trouve à l'extérieur du secteur $L\bar{z}L'$. L'équation

$$A_{\beta'} = 0$$

donne deux points de ramification complexes et conjugués, qui pour $Z = 0$ coïncident accidentellement en une valeur réelle commune. On revient ainsi à un seul lacet entourant l'un de ces deux points, et ce lacet, emprisonné entre les points confondus, fournira en apparence une singularité logarithmique réelle pour $Z = 0$. Or, il est évident qu'un tel état des choses est impossible, puisque la forme du secteur $L\bar{z}L'$ dépend du choix accidentel de l'ordre d'intégration adopté.

Pour l'explication, il faut se reporter aux fig. 5, 6 des cônes T_{δ} . Dans les cas étudiés aux n^{os} précédents on n'avait à tenir compte, par rapport à un cône particulier, que d'une seule branche β , intervenant dans l'expression 2) et donnant, pour le domaine réel, le vrai signe au radical $xf_2 - yf_1$. Il en est autrement dans le cas présent. Par tout point extérieur Q_e , suffisamment voisin du plan double, il est possible de mener deux tangentes réelles à une courbe quelconque voisine du plan double, et ces deux tangentes restent réelles pendant la variation des courbes à travers $\bar{A}_i\bar{A}'_i$, et elles ne se confondent pas, sauf par accident, quand $O = \bar{z}$ et que Q_e se trouve sur le prolongement de $A_iA'_i$.

Montrons que si l'une de ces deux branches rentre dans l'expression de $F_{\varepsilon, n-3}$, l'autre y figure aussi. Soit par exemple les tangentes β_2 et

β_3 de la fig. 5), β_2 tangente à bb' avec $z > 0$, et β_3 à aa' avec $z < 0$. Les deux courbes aa' et bb' infiniment voisines donnent nécessairement le même signe à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2},$$

car autrement cette fonction disparaîtrait sur le plan double. Cela posé, les règles du chapitre IV donnent à β_2 et à β_3 des parties imaginaires de même signe.

Mais ces deux branches touchent des courbes correspondant à des z de signes contraires; l'intégration le long de l'axe réel des δ doit donc introduire des valeurs de signes contraires de

$$xf_2 - yf_1$$

pour ces deux branches. Il s'ensuit que, pour $\varepsilon = 0$, on a retrouvé au voisinage de $\delta' = 0$, les deux branches:

$$\frac{\beta'_2}{\beta'_3} = \frac{1}{\partial^2 f} \left(- \frac{\partial f}{\partial \beta'} \pm \sqrt{A_{\beta'}} \right),$$

se confondant pour $Z = 0$, $\delta' = 0$. Pour le lacet autour du point de ramification complexe le radical $\sqrt{A_{\beta'}}$ figurera dans deux termes aux signes contraires, et l'intégrale restera bien finie.

Une dérivée F_{n-3} est donc continue en tout point du plan double en dehors de l'ellipse \mathcal{C} .

6. Le caractère singulier du plan double se vérifie d'ailleurs par les formules du § 2, chapitre III. En y mettant $z = 0$, les équations 21) et 23) donnent immédiatement une intégrale, continue pour $H > 0$, deux singularités logarithmiques réelles se détruisant mutuellement, et discontinue pour $H < 0$ d'une manière qu'on peut décrire comme l'effet de deux singularités du type elliptique confondues et ajoutées l'une à l'autre.

Ces circonstances s'interprètent immédiatement par la conception du plan double comme un cas limite. Au lieu de

$$f(\alpha, \beta, \delta) = 0$$

écrivons

$$5) \quad f(\alpha, \beta, \delta) + \frac{1}{2} \lambda^2 = 0.$$

Le développement approximatif du n° 6, deviendra

$$6) \quad f_{11}\alpha'^2 + f_{22}\beta'^2 + f_{44}\delta'^2 + \lambda^2 = 0,$$

donnant pour $f_{44} < 0$, deux racines δ réelles. On se trouve donc dans le 2^{ième} cas du § 3. Au voisinage de $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\delta}$, les F_{n-3} doivent se comporter d'une manière analogue à l'intégrale de la fonction de KIRCHHOFF construite au § cité. Or à 6) correspondra une caractéristique en forme d'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{f_{11}} + \frac{y^2}{f_{22}} + \frac{Z^2}{\lambda^2} = -\frac{u^2}{f_{44}},$$

très aplatie, se rapprochant infiniment du plan $Z = 0$ pour $\lambda = 0$.

Par la substitution 5) on a donc fait disparaître le plan double. Une analyse facile, étendue aux termes de 3^{ième} ordre, montre qu'au voisinage de la courbe parabolique originale la nappe extérieure de f passe graduellement dans la face supérieure de l'ellipsoïde et forme avec elle une seule nappe extérieure continue, complètement séparée de la nappe intérieure, laquelle est constituée par le domaine à courbure hyperbolique communiquant avec la face inférieure du disque ellipsoïdal à travers une arête de rebroussement en forme d'ellipse plane. Une section à travers la surface modifiée donnera donc une section ressemblant beaucoup aux tracés des cônes T_b dans les figs 5, 6.

Or, en vertu du n° 14, chapitre III, les faces supérieure et inférieure de l'ellipsoïde possèdent un $z \gtrless 0$ respectivement. Les sauts brusques correspondants sont donc positifs dans la direction des Z croissants, et en pénétrant le disque leur somme donnera bien la discontinuité double.

Remarquons finalement que les signes des discontinuités au passage de Γ ou d'un plan double, se fixent toujours par les signes de H et de z , indépendamment du signe de u . En effet, le signe du radical $xf_2 - yf_1$ à choisir dépend de H et du produit zu . Or, pour $u < 0$, l'intégrale VI discontinue se prend avec le signe contraire; on revient donc à la même loi pour $u \gtrless 0$.

Chapitre VI.

Le problème du centre lumineux dans un milieu anisotrope.

§ 1.

Les équations de Lamé.

1. La discussion du chapitre précédent a surtout tenu en vue l'application au problème particulier indiqué dans le titre de cet ouvrage. Pour les milieux anisotropes les recherches classiques de LAMÉ, de FRESNEL etc., basées sur la conception du rayon lumineux, avaient posé les fondements d'une optique géométrique souvent en accord éclatant avec les faits physiques et présentant l'apparence d'une grande analogie avec la théorie ordinaire des milieux transparents. Il était donc assez naturel de s'imaginer que les lois optiques fondamentales du milieu biréfringent devaient se déduire des équations différentielles par une extension du principe de Huyghens formulé d'une manière analogue à la célèbre déduction de KIRCHHOFF pour l'optique isotrope. Dans cet ordre d'idées le problème à poser était celui de trouver la manière de propagation dans un milieu quelconque indéfini de la lumière émise par une seule source ponctuelle et instantanée. On sait que la résolution de ce problème s'est heurtée à des difficultés d'une nature surprenante et même inexplicable du point de vue classique. C'est à M. VOLTERRA¹ qu'est due l'explication pourquoi les tentatives dans cette direction ont échoué. C'est qu'on était guidé par une fausse analogie et qu'au fond pour les milieux anisotropes la question est d'une toute autre catégorie, pour laquelle les notions élémentaires de l'optique géométrique ne sont plus rigoureusement vraies. En effet, selon M. VOLTERRA, la perturbation lumineuse émanant de la source ne sera plus distribuée sur la seule surface des ondes comme le suppo-

¹ Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents. Acta Math. 16, 1892/93.

saient les conceptions classiques, mais il y aura encore de la *lumière diffuse répandue à l'intérieur du front d'onde*. On verra que la solution explicite présentée dans la suite vérifiera bien les conclusions de M. VOLTERRA.

2. Au point de vue formel le problème à résoudre est le suivant. Partons du système des équations de LAMÉ en y ajoutant des membres droits arbitraires

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} - c^2 \frac{\partial W}{\partial y} + b^2 \frac{\partial V}{\partial z} = X, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - a^2 \frac{\partial U}{\partial z} + c^2 \frac{\partial W}{\partial x} = Y,$$

A)
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - b^2 \frac{\partial V}{\partial x} + a^2 \frac{\partial U}{\partial y} = Z,$$

avec

$$U = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \text{ etc.},$$

Ici u représente le temps, ξ, η, ζ sont les composantes du déplacement lumineux, et X, Y, Z sont les forces sollicitant l'unité de masse. Il suffira, pour les vibrations transversales, d'admettre que X, Y, Z s'expriment par un potentiel vectoriel aux composantes λ, μ, ν , de manière que

1)
$$X = \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial \nu}{\partial y}, \text{ etc.}$$

Cela posé, les intégrales du système A) se présentent dans la forme suivante. Considérons la forme différentielle

I.
$$\Omega = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(b^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a^2 b^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left((b^2 + c^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (c^2 + a^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (a^2 + b^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^4}{\partial u^4},$$

et soit le vecteur φ, ψ, χ tel que

B)
$$\Omega \varphi = \lambda, \quad \Omega \psi = \mu, \quad \Omega \chi = \nu.$$

En posant:

$$2) \quad F_1 = \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad F_2 = \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \text{etc.},$$

un calcul facile mène à¹

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} - a^2 \mathcal{A} F_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \\ C) \quad \eta &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} - b^2 \mathcal{A} F_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \\ \zeta &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial u^2} - c^2 \mathcal{A} F_3 + \frac{\partial}{\partial z} \left(a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Au lieu des déplacements ci-dessus, prenons les composantes du potentiel vectoriel par où les vibrations transversales doivent se déduire. Ainsi soit les composantes

$$\Phi, \quad \Psi, \quad X$$

de ce potentiel avec

$$\xi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \text{etc.},$$

on écrit au lieu de C

$$3) \quad \Phi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - c^2 \frac{\partial F_3}{\partial y} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial z},$$

avec des formules analogues pour Ψ et X . En introduisant les expressions des F_1, F_2, F_3 on donnera aux relations 3) une forme plus symétrique

¹ Voir VOLTERRA, Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik. Arch. f. Math. u. Phys. III. Leipzig 1914.

$$4) \quad \Phi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \left((b^2 + c^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (c^2 + a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (a^2 + b^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + a^2 \mathcal{A}\varphi - \\ - a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((b^2 + c^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (c^2 + a^2) \frac{\partial \psi}{\partial y} + (a^2 + b^2) \frac{\partial \chi}{\partial z} \right).$$

Or, pour la formation du *curl*, dans ces expressions le vecteur potentiel

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((b^2 + c^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (c^2 + a^2) \frac{\partial \psi}{\partial y} + (a^2 + b^2) \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)$$

est sans importance. Nous mettons donc

$$\Phi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \left((b^2 + c^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (c^2 + a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (a^2 + b^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + \\ + a^2 \left(\mathcal{A}\varphi - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \right)$$

$$D) \quad \Psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - \left((b^2 + c^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (c^2 + a^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (a^2 + b^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \\ + b^2 \left(\mathcal{A}\psi - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \right)$$

$$X = \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} - \left((b^2 + c^2) \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + (c^2 + a^2) \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + (a^2 + b^2) \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right) + \\ + c^2 \left(\mathcal{A}\chi - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \right).$$

Pour parvenir maintenant à la théorie du centre lumineux, supposons que le milieu soit sollicité par un potentiel vectoriel, toujours nul, sauf à l'instant $u = 0$ à l'intérieur de l'élément de volume contenant l'origine. Admettons que dans ces conditions ses composantes soient infinies de manière que

$$\int \lambda dx dy dz du = l, \quad \int \mu dx dy dz du = m, \quad \int \gamma dx dy dz du = n,$$

où l, m, n sont certaines constantes et où le domaine d'intégration, infiniment petit du quatrième ordre, contient le point $x = y = z = u = 0$.

En posant

$$5) \quad \begin{matrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{matrix} = \begin{matrix} l \\ m \\ n \end{matrix} \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi^4} \int_{-A}^{+A} \int_{-A}^{+A} \int_{-A}^{+A} \int_{-A}^{+A} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u)} d\alpha d\beta d\gamma d\delta$$

on aura effectué ces conditions, et en vertu de B)

$$6) \quad \begin{matrix} \varphi \\ \psi \\ \chi \end{matrix} = \begin{matrix} l \\ m \\ n \end{matrix} F(x, y, z, u),$$

F étant la solution fondamentale de l'équation de quatrième ordre

$$\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u} \right) U = 0.$$

On arrive ainsi, pour les composantes du potentiel vectoriel représentant l'émanation d'une source ponctuelle momentanée, aux formules

$$\begin{aligned} \Phi = & \left[l \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \left((b^2 + c^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (c^2 + a^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (a^2 + b^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + a^2 \Delta \right) - \right. \\ & \left. - a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D') \quad \Psi = & \left[m \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \left((b^2 + c^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (c^2 + a^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (a^2 + b^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + b^2 \Delta \right) - \right. \\ & \left. - b^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = & \left[n \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \left((b^2 + c^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (c^2 + a^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (a^2 + b^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + c^2 \Delta \right) - \right. \\ & \left. - c^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] F. \end{aligned}$$

Ces composantes s'expriment donc par certaines combinaisons des dérivées de deuxième ordre de F .

Dans le cas particulier de

$$a^2 = b^2 = c^2, \text{ soit } = 1,$$

on pourra retrancher de D') le vecteur potentiel

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

et on aura

$$\frac{\Phi}{\Psi} = \frac{l}{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - A \right) F.$$

Mais dans ce cas

$$\Omega = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - A \right)^2 U;$$

on revient donc pour les fonctions Φ , X , Ψ à des multiples de la solution fondamentale de

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - A \right) U = 0,$$

c. à. d. qu'on retrouve la fonction de KIRCHHOFF étudiée au chapitre III.

La discussion des fonctions D') se fait commodément en les intégrant par rapport au temps u . Ainsi les expressions

$$E) \quad f\Phi du, f\Psi du, fX du$$

seront fournies par les membres droits de D') en y remplaçant F par la solution fondamentale G de

$$\frac{\partial}{\partial u} \Omega U = 0.$$

On aura l'avantage que les expressions qui résultent permettent l'exécution immédiate des dérivations figurant en D'). Les fonctions E) devien-

nent ainsi les analogues de la fonction de KIRCHHOFF intégrée, c. à. d. de la fonction discontinue, définie par

$$\begin{aligned} & 0 && \text{pour } x^2 + y^2 + z^2 > u^2 \\ & \frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} && \text{» } x^2 + y^2 + z^2 < u^2. \end{aligned}$$

3. L'équation Ω appartient à la catégorie essentiellement réelle. C'est ce qu'on reconnaît immédiatement en résolvant

$$\Omega(\alpha, \beta, 1, \delta) = 0$$

par rapport à δ . La proposition résulte encore des propriétés bien connues de la *surface des ondes* réciproque à Ω . En effet, l'équation de I s'obtient par la substitution de

$$\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2} \text{ à } a^2, b^2, c^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} I = u^4 a^2 b^2 c^2 - u^2 (a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2) + \\ + (x^2 + y^2 + z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) = 0 \end{aligned}$$

est une surface dont la projection dans l'espace des (x, y, z) est tout à fait analogue à celle de $\Omega(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dans l'espace des α, β, γ . Or, on sait que, pour $u > 0$, la surface I passe deux fois par un point arbitraire (x, y, z) selon que le point va appartenir à l'une ou l'autre des deux nappes réelles. La surface étant paire par rapport à u , on a encore les deux racines u négatives, numériquement égales aux deux racines positives. La même conclusion subsiste pour la variable δ en Ω ; on a donc bien quatre racines δ , toujours réelles dans le domaine des α, β, γ réels.

§ 2.

La surface de Fresnel. Disposition des points de ramification.

4. La formation des intégrales de notre problème exigera la connaissance préliminaire de la manière dont les signes des fonctions

$$7) \quad H, z, \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}$$

sont repartis sur la caractéristique. Dans ses traits généraux cette question est résolue par les propriétés classiques de T . On sait que c'est une surface à deux nappes, à quatre points doubles coniques réels, partout convexe sauf pour ces domaines de la nappe extérieure, de forme hyperboloïde, qui entourent les points doubles. Un tel domaine, à courbure hyperbolique, est limité par la courbe circulaire de contact avec l'un des quatre plans doubles. Ainsi la Hessienne H , en général *négative*, change de signe à travers les quatre cercles paraboliques, pour prendre des valeurs *positives* sur les parois de chaque cavité. La nappe intérieure étant convexe, H change aussi de signe en allant de l'une à l'autre nappe à travers un point double.

Quant à z , nous avons vu que cette fonction s'annule et change de signe en franchissant un des cercles \mathcal{C} . Partout ailleurs les f_1, f_2 , etc., restent de signe constant; z ne s'annule donc en aucun autre point. Il faut noter cependant que, par la symétrie des choses, la section de T avec le plan $z = 0$ fournit la courbe de contact avec le cône T_∞ . Il s'ensuit qu'en traversant ce plan z change de signe en passant par des valeurs infinies.

Vient finalement la troisième des fonctions 7). Dans une section arbitraire menée par l'axe des z , elle ne s'annule que si la section coupe un domaine à courbures opposées, auquel cas elle change de signe aux deux points d'inflexion communs à T et à la branche correspondante de I_δ .

On a ainsi une connaissance assez précise des lieux géométriques qui font changer de signe aux fonctions z et $\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}$. Pour décider du choix à faire en un point arbitraire, il suffira de considérer une section particulière.

5. Soit

$$a > b > c.$$

On a, pour $\beta = 0$,

$$8) \quad \Omega(\alpha, \beta, \delta) = a^2 b^2 c^2 \left(\alpha^2 + 1 - \frac{\delta^2}{b^2} \right) \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{\delta^2}{a^2 c^2} \right) = 0,$$

de manière que le plan $\beta = 0$ contient les quatre points doubles de f ,

$$9) \quad \bar{\alpha} = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}, \quad \bar{\delta} = \pm b \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}},$$

$$\bar{\beta} = 0.$$

Par réciprocity la section $y = 0$ contiendra les points doubles réels de Γ . On y a

$$10) \quad \Gamma = (x^2 + z^2 - b^2 u^2)(a^2 x^2 + c^2 z^2 - a^2 c^2 u^2) = 0,$$

section constituée par un cercle et une ellipse se coupant aux quatre points réels

$$11) \quad X = \pm c u \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad Z = \pm a u \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

$$Y = 0$$

On calcule aisément les valeurs de z que porte la courbe 10) en un point arbitraire $(x, 0, z)$.

Soit d'abord un point du cercle

$$10') \quad x^2 + z^2 - b^2 u^2 = 0.$$

On trouve

$$12) \quad \alpha = \frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial x}}{\frac{\partial \Gamma}{\partial z}} = \frac{x}{z}, \quad \beta = 0, \quad \delta = \frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial u}}{\frac{\partial \Gamma}{\partial z}} = -\frac{b^2 u}{z},$$

tandis que pour $\beta = 0$,

$$\Omega_1 = 2a^2 b^2 c^2 a \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{\delta^2}{a^2 c^2} + \frac{1}{a^2} \left(\alpha^2 + 1 - \frac{\delta^2}{b^2} \right) \right).$$

L'introduction des valeurs 12) nous donne

$$13) \quad z = \frac{\Omega_1}{x} = \frac{2a^2b^2c^2}{z^3} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{b^4u^2}{a^2c^2} \right),$$

expression qui fait d'abord retrouver le fait que z est de signes différents des deux côtés de $z = 0$. En tenant compte de l'équation du cercle on écrira au lieu de 13)

$$13') \quad z = \frac{2b^2}{z^3} (z\sqrt{a^2 - b^2} + x\sqrt{b^2 - c^2})(z\sqrt{a^2 - b^2} - x\sqrt{b^2 - c^2}).$$

Les deux droites

$$x = \pm z \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$$

coupent le cercle en quatre points appartenant aux quatre courbes \mathcal{C} respectives.

La discussion analogue relative à l'ellipse

$$10'') \quad a^2x^2 + c^2z^2 - a^2c^2u^2 = 0$$

montre que les signes de z se disposent selon la fig. 7. Donc, pour $z > 0$, z est positif sur la nappe intérieure et sur les parties hyperboliques de la nappe extérieure, négatif partout ailleurs.

6. Par les formules du chapitre II on a

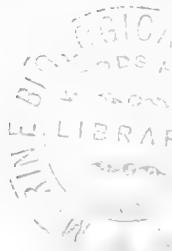
$$\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} = \frac{1}{x^2} (x^2 f_{22} - 2xy f_{12} + y^2 f_{11}) = f_{22},$$

dans la section 10). Pour $\beta = 0$, on trouve

$$f_{22} = 2a^2b^2c^2 \left(a^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{\partial^2}{\partial^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right).$$

Il en vient pour les points du cercle 10')

$$f_{22} = \frac{2a^2b^2c^2}{z^2} \left(x^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) + z^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right) = \frac{2b^2}{z^2} (a^2c^2u^2 - a^2x^2 - c^2z^2)$$



tandis que, sur l'ellipse 10''),

$$f_{22} = \frac{2a^4}{z^2} (b^2u^2 - r^2 - z^2) .$$

Chaque courbe porte donc des valeurs positives de la fonction $\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}$ sur cette partie qui se trouve à l'intérieur de l'autre courbe, de manière que, dans la section particulière en question, la fonction est positive sur la nappe intérieure.

Pour $y = 0$, $\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}$ change donc de signe aux points doubles. Dans une section voisine de $\bar{y} = 0$ le changement de signe s'opère, comme nous venons de le dire, aux divers points d'inflexion. Il résulte que $\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}$ est positif sur toute la nappe intérieure, ainsi que sur certaines parties des domaines hyperboliques limitées par les courbes de contact, évidemment fermées, entre Γ et I_δ . Ainsi, toute branche de Γ_δ , tangente à la nappe extérieure, porte des $\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}$ négatifs, sauf celles qui touchent la face intérieure de cette nappe.¹

7. Pour l'étude des 12 points de ramification que possède la fonction algébrique β définie par

$$f^{(\alpha)} = \Omega^{(\alpha)} = 0 ,$$

commençons par considérer des sections par l'axe des z à travers les quatre domaines hyperboloïdes. Par raison de symétrie toutes les cavités sont de même forme et de mêmes dimensions, et elles sont toutes incluses dans le même angle découpé de l'espace des (x, y, z) par un plan tournant autour de l'axe des z . La fig. 8 montre la trace correspondant à une position arbitraire de ce plan. On y a dessiné les 8 tangentes d'inflexion, orientées d'une façon symétrique et déterminant quatre valeurs que prend δ sur cette section particulière de la surface I_δ ; nous désignons ces valeurs par ordre croissant par

$$I_1, I_2, I_3, I_4 .$$

¹ On a indiqué ces résultats dans la section 9 b d'un cône Γ_δ en traçant en plein les parties de Γ_δ correspondant aux valeurs négatives de $\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}$.

Quelquefois il nous faudra distinguer les deux tangentes à gauche ou à droite portant la même valeur I ; dans ce cas employons la notation

$$I_{1g}, I_{1d}, \text{ etc.}$$

Si la section variable vient coïncider avec le plan $y = 0$, les tangentes I deviennent les tangentes aux points doubles,

$$G_{1g}, G_{1d}, G_{2g}, G_{2d}, \text{ etc.}$$

portant les quatre valeurs

$$\delta = G_1, G_2, G_3, G_4.$$

Comme à des occasions antérieures nous désignons sous le nom du côté réel de I_δ ou d'une tangente individuelle I côté où les deux tangentes qui s'y confondent sont réelles. Deux tangentes, soit I_{1d}, I_{2d} , touchant la même cavité, désignent la trace de la *branche* de I_δ relative à ce domaine. Dans l'espace en dehors de la nappe extérieure de T , la condition de se trouver du côté réel des deux tangentes définit ce qu'on peut appeler *l'intérieur réel* de la branche. De cette façon, le domaine extérieur haché de la fig. 8 est l'intérieur réel commun à deux branches I_δ . Sur la face intérieure de la nappe de T considérée les conditions sont plus compliquées; nous y reviendrons plus tard.

Précisons encore le terme de *domaine* ou *espace extérieur*. Nous voulons dire par là l'espace en dehors d'une surface fermée, constituée par les parties convexes de la nappe extérieure de T en combinaison avec les quatre disques plans circulaires qui couvrent les cavités hyperboloïdes.

Soit Q un point de ce domaine. La fig. 8 fait voir qu'on saura mener par Q 8, 6 ou 4 tangentes réelles selon que Q se trouve à l'intérieur réel par rapport à deux (position Q), à l'une seulement (position Q') ou à aucune (position Q'') des branches de I_δ . On observe qu'on n'aura de tangentes doubles qu'au cas où Q sera situé sur un plan double. Car autrement on aurait des sections de $\Omega(\alpha, \beta, \delta)$, réciproques aux I_δ , possédant des points doubles autres que les points coniques de la surface, ce qui n'a pas lieu. En particulier les tangentes d'inflexion ne coupent, ni ne touchent la nappe intérieure.

Soit maintenant

$$\delta = - zu$$

le sommet d'un cône variable; en partant de $\delta = -\infty$ ce sommet glis-
sera vers le bas de la fig. 8. Désignons la trace du cône dans un
plan secteur arbitraire, p. ex. perpendiculaire à l'axe des z . Au départ
on aura une figure identique à la section de T par le plan $z = 0$,
c. à. d. constituée par un cercle et une ellipse:

$$(x^2 + y^2 - c^2u^2) (a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2u^2) = 0;$$

seulement il y faut ajouter les projections des 4 points coniques, points
doubles isolés de la section actuelle. Ces projections d'ailleurs coïn-
cident deux à deux à l'intérieur du cercle (fig. 9 a). En faisant croître
 δ la trace retient d'abord la forme de deux courbes fermées convexes,
l'une à l'intérieur de l'autre, mais les points doubles confondus se sont
séparés et deux de ces points se sont approchés de la courbe intérieure
pour coïncider avec elle au moment que

$$\delta = G_1.$$

Dès maintenant on aura des génératrices touchant deux domaines
à courbure hyperbolique, et la courbe intérieure présentera des deux
côtés, d'une façon symétrique, la formation triangulaire caractéristique,
à deux points d'arrêt et à un point double, des fig. 5 et 6 (fig. 9 b).
Ces deux triangles, par la variation continue de δ , vont en crois-
sant en dimensions relatives, pour atteindre leur plus grande étendue
au passage de δ par sa valeur sur les plans doubles supérieurs.
Par la discussion du chapitre précédent, les courbes intérieure et ex-
térieure se sont alors en partie confondues dans la trace droite du plan
double, et en même temps les parties confondues, limitées d'ailleurs par
la section du cône avec la surface I_δ , se permutent d'une façon cor-
respondant à l'échange des δ sur le plan double (fig. 9 c). Après cela,
on retrouve encore une trace de la forme 9 b, les triangles vont en
diminuant pour se rétrécir de nouveau en un point double pour

$$\delta = G_2.$$

Seulement, avant que cela arrive on a évidemment franchi la nappe extérieure de I ; la courbe fermée extérieure de nos figures est donc devenue imaginaire en s'éloignant graduellement vers l'infini. Finalement, pour $\delta > G_2$, on retrouvera le point double isolé comme auparavant, avec cette différence pourtant qu'il se déplace à l'extérieur de la courbe intérieure, seule trace réelle, marchant à son tour vers l'infini et devenant imaginaire au passage de z par la nappe intérieure de I .

On retrouve évidemment la même marche du cône en faisant ensuite décrire les intervalles réels symétriques des δ positifs. En cherchant à se rendre compte de la façon dont le cône variable glisse au-dessus d'un point tel que Q il suffit cependant de considérer les cônes aux sommets positifs. Il s'agira donc en particulier d'en étudier la trace dans un plan contenant Q , soit toujours perpendiculaire à l'axe des z . L'interprétation de la discussion ci-dessus est compliquée par le fait que le sommet variable passe à travers ce plan. Pour la trace dans le plan

$$z = z_0$$

il faut donc s'imaginer que les dimensions des fig. 9 vont en diminuant pour $\delta < \delta_0$ pour se rétrécir en un seul point pour $\delta = \delta_0$. Après le passage de cette valeur, les traces vont en s'élargissant de nouveau, mais c'est maintenant la nappe supérieure du cône qui coupe le plan par Q . On se servira toujours des fig. 9 en s'imaginant qu'un point quelconque du côté gauche d'une figure se remplace par son image symétrique par rapport au sommet du cône, c. à. d. par rapport au centre O du dessin. Ainsi, p. ex., le triangle gauche de 9 b est projeté du côté droit et glissera, pour $\delta > \delta_0$, au-dessus des points à l'intérieur réel de la branche I_δ correspondante.

Selon sa position par rapport aux branches de I_δ , un point fixe sera balayé par un cône variable de l'une ou de l'autre des formes 9). Or, ce qui nous intéresse n'est que la position relative du cône envers Q , et on représentera aussi bien les choses en faisant marcher Q , selon le cas, à travers l'une ou l'autre des figures diverses. Les chemins ainsi obtenus, différeront surtout par l'apparition ou l'absence de domaines triangulaires parcourus. Sous ce point de vue, la fig. 9 b, est la trace réelle la plus générale possible, *et il suffira*

de symboliser les conditions différentes par des chemins traversant les divers domaines de cette figure. Soit ainsi le point Q à l'intérieur de deux branches I_δ , et soit $y > 0$. La fig. 8 indique qu'on commence en $\delta = -\infty$ avec 4 branches β complexes; il faut donc partir à l'intérieur de la figure en a . Le glissement à travers Q du domaine triangulaire et de la branche extérieure convexe de la nappe inférieure de I_δ sera figurée par le vecteur aa' . En allant de a' en ∞ on a évidemment établi la correspondance à la position $\delta = \delta_Q$, aux dimensions nulles de la trace I_δ . Dans cette position les 4 tangentes β réelles deviennent identiques de direction, conformément à ce que la droite joignant Q au sommet du cône est commune à tous les plans tangents par Q . Toutefois ces plans, ainsi que les β , restent distincts, ne se confondant que dans cette projection particulière. Pour la marche à travers la nappe supérieure du cône on revient donc du côté gauche de 9 b par le chemin $\infty a''a'''$, sans confusion entre les branches.

Numérotons les points de ramification figurés par les divers passages de la fig. 9 b. dans l'ordre

$$\delta_I, \delta_{II}, \delta_{III}, \delta_{IV}, \delta_V, \delta_{VI}, \delta_{VII}, \delta_{VIII},$$

que les dépasse le chemin $aa' \infty a''a'''$. Supposons que pour $\delta = \delta_I$, les racines se permutant et devenant réelles s'appellent β_1, β_2 ; on retrouvera les deux autres branches réelles β_3, β_4 pour $\delta = \delta_{II}$. Les dénominations étant celles de la figure, on a, d'après les règles du chapitre IV, fait en sorte que, pour $x > 0$,

$$\beta_2, \beta_3$$

sont à parties imaginaires positives. En effet, dans une section par la nappe inférieure on a

$$z + \delta u < 0;$$

de plus, sur la branche intérieure du cône (pointillée dans la fig. 9 b) on a

$$z > 0, \quad \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2} > 0.$$

Mais évidemment la section y de la racine

$$\beta_1 = - \frac{z + \delta u}{y}$$

est inférieure à celle de β_2 , donc (le long de aa' entre I et II)

$$\beta_1 > \beta_2$$

et par les dites formules β_1 est à partie imaginaire négative.

En rappelant qu'on revient vers le côté gauche de la fig. 9 b sans permutation entre les branches du côté droit, on trouve que les permutations aux points δ_I , δ_{II} , etc., se représentent par les symboles

$$\delta_I = (1, 2), \delta_{II} = (3, 4), \delta_{III} = (2, 4), \delta_{IV} = (2, 4)$$

$$\delta_V = (2, 4), \delta_{VI} = (2, 4), \delta_{VII} = (3, 4), \delta_{VIII} = (1, 2).$$

8. Pour avoir le résultat analogue par rapport à d'autres positions de Q , il faut bien comprendre le sens de la fig. 9 b. Notons que la trace fermée extérieure représente une branche I_δ qui touche toujours I' aux points convexes de la nappe extérieure. Donnons à δ une valeur quelconque fixe, et faisons varier Q en restant toujours en dehors de ce cône convexe. On peut p. ex. faire tourner Q dans le plan de la fig. 9 b le long de la courbe pointillée; quelque soit le déplacement de Q , même à travers les branches de I_δ , toujours est-il *que les deux tangentes menées à cette branche extérieure se déplacent avec Q d'une manière continue sans permutation, et que par conséquent elles représentent partout les mêmes branches β* . En d'autres termes, en retenant la détermination ci-dessus, il faut admettre que la circonférence extérieure de la fig. 9 b permute en tout point les branches β_2 et β_1 . Cela posé, en retenant bien le caractère relatif de la fig., un point Q' à la droite de I_{1a} c. à d. extérieur au domaine réel de la branche I_δ correspondant au point double à la droite, est tel qu'il ne sera pas traversé par le domaine triangulaire à la droite du cône variable, c. à d. que sa marche relative se fera à l'extérieur d'un angle limité par les deux vecteurs marqués I_δ dans la fig. 9 b. Ces vecteurs, ainsi que leurs prolongements du côté gauche de la fig., représentent d'une manière *schématique* la trace de deux branches I_δ , toujours avec la stipulation

que le côté gauche du dessin ($x < 0$) se reporte à la variation de la nappe supérieure du cône. Les racines réelles du côté concave de la circonférence extérieure s'appelant partout β_1, β_3 , on conclut que les points d'arrêt et les points de section avec les quatre demi-droites I_δ divisent la trace intérieure de la fig. 9 b en différentes parties aux permutations bien définies, telles qu'on les a marquées par les chiffres de la figure.

La marche relative d'un point tel que Q' est ainsi symbolisée par le chemin $bb' \infty a''a'''$, et les points de ramification réels sont

$$\delta_I = (1, 3), \quad \delta_{IV} = (2, 4), \quad \delta_V = (2, 4), \quad \delta_{VI} = (2, 4), \quad \delta_{VII} = (3, 4), \quad \delta_{VIII} = (1, 2).$$

De même, dans la position Q'' , on aura le chemin $bb' \infty$ revenant d'une façon symétrique par $b''b'''$ en dehors du triangle gauche, avec

$$\delta_I = (1, 3), \quad \delta_{IV} = (2, 4), \quad \delta_V = (2, 4), \quad \delta_{VIII} = (1, 3).$$

9. Revenons maintenant à la fig. 8 pour la projection des δ dans le domaine complexe. Il faut alors décider si une tangente particulière, au voisinage du point de contact, fixe la plus grande ou la plus petite des deux δ . Soit en Q , $z > 0$, $u > 0$; la relation

$$\delta = -\frac{\bar{z}}{u}$$

fait voir que le sommet inférieur correspond à la plus grande des racines. Nous indiquons par les notations «max» et «min» la grandeur relative d'un δ particulier.

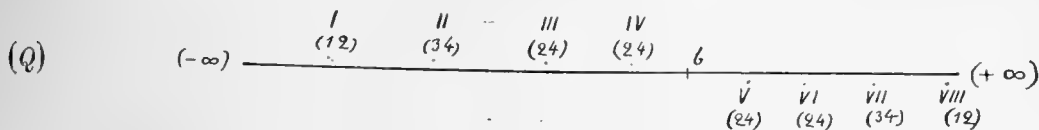
Les signes des parties imaginaires respectives dépendent des signes de

$$H, \quad zu, \quad A_{\bar{z}}$$

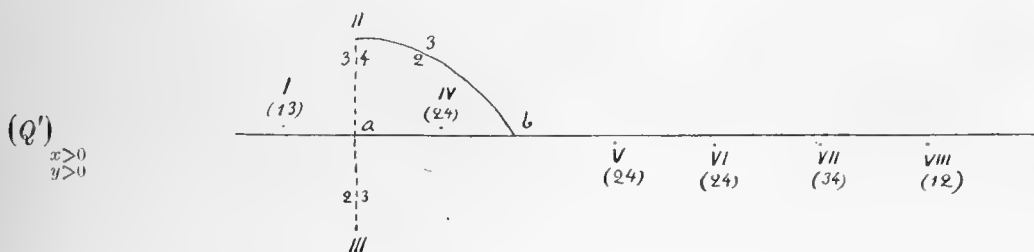
aux points de contact des différentes génératrices. On aura encore l'un ou l'autre signe selon que Q et le point de contact se trouvent du même côté de $x = 0$ ou non, ce qu'on a indiqué par le signe \pm de la colonne « x » ci-dessus. La partie imaginaire cherchée est fournie par la dernière colonne.

	x	H	zu	A_{β^2}	$P.I.$
δ_I min	+	-	+	+	+
δ_{II} max	+	+	+	+	+
δ_{III} min	+	+	+	-	+
δ_{IV} min	+	-	-	-	+
δ_V min	-	-	-	-	-
δ_{VI} min	-	+	+	-	-
δ_{VII} max	-	+	+	+	-
δ_{VIII} min	-	-	+	+	-

On a donc ce résultat que les quatre points à la droite ($x > 0$) sont déplacés dans le demi-plan supérieur. La disposition des points de ramification réels est ainsi complètement élucidée. On a l'arrangement que voici



10. Dans la position Q' les deux points δ_{II} , δ_{III} sont devenus complexes et conjugués. En même temps, d'après les résultats du chapitre IV, § 4, ces deux points par le passage de I_δ , ont changé leur manière de fonctionner. On aura la figure suivante:



Il faut noter seulement, que relativement à la discussion antérieure, il y a ici une différence de notation. β_2 et β_3 sont toujours les racines à partie imaginaire positive, mais la racine réelle dans l'intervalle d'où δ_{II} et δ_{III} sont disparus, s'appelle maintenant β_3 au lieu de β_2 , c. à. d. la notation nouvelle a permuté les chiffres 2 et 3. La fig. Q' est donc bien conforme au résultat obtenu à cette occasion. Or, on sait que

les permutations associées de cette façon aux δ_{II} , δ_{III} déplacés, sont essentiellement définies en prolongeant les branches β à partir d'un point $\delta = a$, réel au voisinage de la valeur réelle commune des δ_{II} , δ_{III} au moment du passage à travers I_δ . On peut interpréter ce fait d'une manière qui importera pour certaines conclusions dans la suite. Joignons δ_{II} à un point b à la droite de δ_{IV} , par un lacet direct au-dessus du point à partie imaginaire positive δ_{IV} , mais tel qu'il n'y ait aucun autre point de ramification entre le lacet et l'axe réel. A partir de b , ce lacet est équivalent au lacet entourant IV (2, 4) suivi du lacet passant par a autour de II (3, 4) en combinaison avec le lacet (2, 4) décrit de nouveau dans le sens contraire. Le chemin ainsi obtenu permute évidemment les branches β_2 , β_3 .

Cela posé, cherchons à identifier les deux paires de racines δ conjuguées qui nous restent encore à retrouver. Il est naturel de présumer que ces points doivent être associés aux deux autres branches de la surface des tangentes d'inflexion. Ainsi faisons procéder Q' vers I_{4d} , tout en restant à l'intérieur réel de I_{1g} , I_{2g} . En arrivant dans une position Q''' à la gauche de I_{2g} et à la droite de I_{4d} on verra apparaître deux nouvelles racines δ_{IX} , δ_X dont les tangentes touchent la cavité inférieure droite. Ces deux points sont distincts des 8 points considérés jusqu'ici. Car autrement on aurait évidemment retrouvé de nouveau les δ_{II} , δ_{III} devenus complexes au passage de I_{4d} . Or, en retenant l'imaginaire $i\varepsilon$, un point de ramification individuel se définit partout dans l'espace des (x, y, z) réels par prolongement analytique bien défini et se représente sans ambiguïté par une même tangente bien fixée dans tout domaine où le point est réel. Restons donc du côté réel de I_{4d} et marchons vers Q^{IV} du côté réel des deux tangentes I_{2d} , I_{4d} ; les tangentes IX et X sont assurément distinctes des tangentes se permutant sur I_{1d} , I_{2d} .

Quant aux branches permutées par δ_{IX} , δ_X il faut seulement un peu de précaution pour appliquer la fig. 9 b. Les tangentes IX et X appartiennent manifestement à la nappe supérieure d'un F_δ à sommet négatif, s'éloignant vers l'infini négatif avec des δ croissants. La trace dessinée variable sera toujours celle de la fig. 9 b, mais avec une différence importante: c'est que dans les points correspondants on a partout changé le signe de z , tous les points de contact des génératrices qui interviennent étant du côté des $z < 0$. Les signes des autres

fonctions H etc., qui servent à préciser le prolongement des branches sont au contraire disposés de la même manière qu'auparavant. Or, on sait que, pour une tangente réelle, orientée d'une façon géométrique définie, le changement de signe de z fait changer de signe la partie imaginaire de β associée. Il s'ensuit que pour avoir toujours, dans 9 b, les β_2, β_3 à parties imaginaires positives, il faut pour un cône à sommet négatif les représenter par les tangentes dénotées par β_1, β_4 pour les cônes supérieurs. On a donc, entre les z positifs et négatifs la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

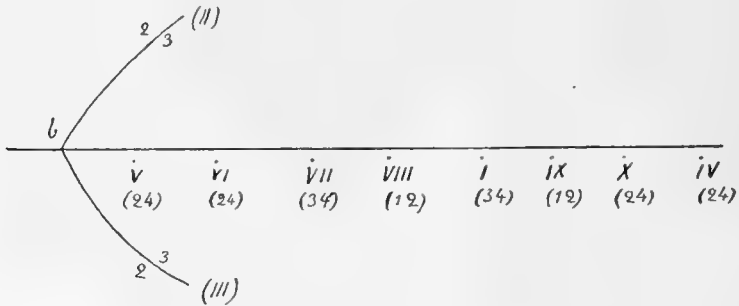
Il n'est peut-être pas superflu de remarquer qu'il n'y a là aucune discontinuité dans la représentation géométrique d'une branche β . Les domaines des cônes positifs et négatifs sont séparés par un intervalle où tous les cônes sont imaginaires.

Cela posé, la situation de Q''' est telle qu'on commence en $\delta = -\infty$ avec des racines β réelles, et le résultat ci-dessus s'interprète par les permutations rencontrées le long du chemin $\infty a'a$ menant à l'intérieur de la figure, suivi du chemin $cc'\infty$, lequel évidemment parcourt un domaine présentant la substitution désirée. Pour la projection relative à l'axe réel on a

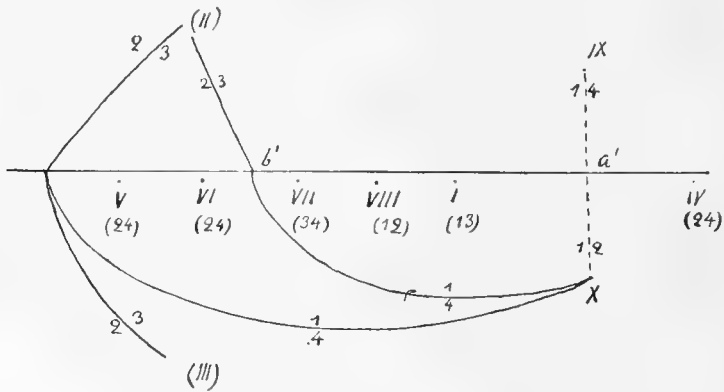
	x	H	zu	A_{β^2}	$P.I.$
δ_V min	—	—	—	—	—
δ_{VI} min	—	+	+	—	—
δ_{VII} max	—	+	+	+	—
δ_{VIII} min	—	—	+	+	—
δ_I min	+	—	—	+	—
δ_{IX} max	+	+	—	+	—
δ_X min	+	+	—	—	—
δ_{IV} min	+	—	+	—	—

Quant aux $\delta_{II}, \delta_{III}$ perdus de vue, on sait toujours qu'ils ne se sont pas confondus avec d'autres points de ramification. La marche de Q n'a pas pu affecter le prolongement des β à partir du point b , resté à la gauche de tous les points de branchement complexes. On conclut

que les lacets menés de b autour de δ_{II} et de δ_{III} permutent toujours β_2 et β_3 . On a ainsi



11. Précisons maintenant la disposition de δ_{IX} et de δ_X dans le domaine complexe en revenant vers le côté complexe de I_{4d} . Les deux points redevenus complexes, on se reporte encore aux conditions du § 4, chapitre IV. Seulement les racines qui se permutent autour de l'angle de rebroussement s'appellent dans le cas présent $\beta_1, \beta_4, \beta_2$, lesquels le long de cc' se comportent de la même manière que $\beta_3, \beta_2, \beta_4$ relativement à l'angle symétrique. C'est pourquoi on trouve



Joignons IX et X à b dans l'intervalle à 4 branches réelles à la gauche de δ_V ; les lacets directs obtenus permutent β_1 et β_4 .

En poursuivant ce genre d'argument il n'y a finalement aucune difficulté à identifier les deux points $\delta_{XI}, \delta_{XII}$ qui restent encore.

Par rapport aux figures ci-dessus on remarque que la position de b est dans une certaine mesure arbitraire. Soit p. ex. b' entre δ_{VI} et δ_{VII} . Des lacets menés de ce point directement à $\delta_{II}, \delta_{III}$ ainsi qu'à

δ_{IX} et δ_X permutent encore β_2, β_3 et β_1, β_4 . Entre δ_{VI} et δ_{VII} on a encore, selon la fig. 9 b, 4 branches β réelles, et après avoir tenu compte aussi de δ_{XI} et de δ_{XII} on est finalement conduit à ce théorème:

Dans l'espace extérieur des (x, y, z) des lacets, issus d'un point $\delta = b$ dans un intervalle à 4 branches β réelles pour $\varepsilon = 0$, et menés directement aux divers points de ramification complexes, permutent toujours deux branches à parties imaginaires qui en b sont de même signe.

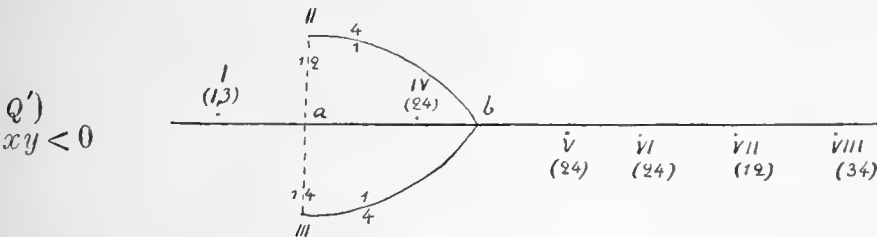
12. La démonstration ci-dessus est cependant particulière en ce que la marche à travers les domaines triangulaires de la figure schématique 9 b s'est toujours faite du côté des x, y positifs. Il y a certaines modifications pour $xy < 0$. Soit $x > 0, y < 0$.

Un point intérieur aux deux branches I_δ supérieures introduira dans ce cas le chemin $cc' \infty c''c'''$. Les 8 points de ramification qui en résultent se trouveront dans la disposition identique à celle donnée par la fig. 8 au point Q , mais les permutations correspondantes se sont modifiées

$$Q) \quad \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \\ (34) & (12) & (24) & (24) \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \check{V} & \check{VI} & \check{VII} & \check{VIII} \\ (24) & (24) & (12) & (34) \end{array}$$

de manière que les points du type (12) et (34) ont pour ainsi dire changé de place. Au moment où Q passe à travers $y = 0$ les deux points I et II se dépassent l'un l'autre en coïncidant en une valeur δ commune fixée par la génératrice joignant Q au point double.

Si maintenant Q , dans les conditions actuelles, franchit I_{1a} , on marquera dans la fig. 9 b le chemin $dd' \infty c''c'''$, et les points réels sont ceux de la figure suivante



Au point a la racine réelle, affectée d'une petite partie imaginaire positive, s'appelle donc toujours β_3 , tandis que β_1 est à partie imaginaire

négative. Les racines $\beta_1, \beta_4, \beta_2$ se permutent autour de l'angle de rebroussement et on a donc le schéma ci-dessus. Les lacets issus du point b permutent β_1 et β_4 , et le théorème du n° précédent reste vrai.

En prenant de la manière analogue Q du côté des x négatifs, on aura encore, avec $y > 0$, le même vecteur $cc' \infty c''c'''$ de la fig. 9 b. Le côté gauche est alors associé à la nappe inférieure de T , et nous retrouvons les mêmes conclusions que pour $y < 0$. *La sortie d'une branche quelconque de I_δ fait toujours transporter dans le domaine complexe des points de ramification des types (2, 3) et (1, 4).*

On a trouvé ci-dessus que les conditions en Q diffèrent d'une manière caractéristique pour $y \geq 0$. Soit toujours Q à l'intérieur commun des deux branches de I_δ , mais se trouvant dans le plan $y = 0$; la marche à travers la fig. 9 b fait à deux occasions coïncider deux points de ramification réels, des types (12) et (34), c. à. d. δ_I avec δ_{II} et δ_{VII} avec δ_{VIII} . Nous sommes par cela dans la nécessité de considérer un lieu singulier d'une nature laissée jusqu'ici de côté.

13. *Caractère singulier du plan $y = 0$.* L'existence d'une telle singularité est la conséquence nécessaire de la présence des points doubles de T , c. à. d. des plans tangents doubles de Ω . Pour un cône T_δ arbitraire la droite menée du sommet z à un point double est à regarder comme une génératrice double du cône. Dans le cas actuel le plan des $y = 0$ est le lieu géométrique de toutes les génératrices doubles. En un point arbitraire de ce plan les quatre droites menées aux points doubles définissent ainsi quatre valeurs δ doubles, en général distinctes, et ces quatre génératrices doubles restent réelles même si les cônes tangentes autrement sont devenus imaginaires. Le cas du n° précédent montre qu'au plus deux des valeurs doubles peuvent correspondre à des points δ réels coïncidants; pour une valeur double de l'autre catégorie la génératrice double isolée correspond à deux δ complexes devenues momentanément réelles et égales.

L'exemple réel montre que la coïncidence se fait sans permutation des branches. On a bien pour (3, 4) = (1, 2)

$$\beta_3 = \beta_4, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \beta_1 \neq \beta_3.$$

On a les conditions analogues dans le cas complexe. Soit (x, z) un point arbitraire du plan $y = 0$, et prenons la droite menant au point double

$$X = cu \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad Z = au \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

coupant l'axe des z en $\bar{z} = -\delta u$. L'équation de cette droite sera

$$11) \quad \frac{z + \delta u}{x} = \frac{Z + \delta u}{X}.$$

L'introduction de

$$\alpha = -\frac{\beta y + z + \delta u}{x} = -\frac{Z + \delta u}{X}$$

montre par un calcul élémentaire que

$$\Omega^{(\alpha)} = 0$$

fournit bien deux racines β^2 égales

$$12) \quad \beta^2 = -\frac{a^2 c^2 (a^2 + b^2) + a^2 (b^2 + c^2) - \delta^2 (c^2 + a^2)}{a^2 c^2},$$

α ayant la valeur 11). L'expression 12) est positive si

$$-a \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}} < \delta < -\frac{b^2}{a} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}}$$

et négative en tout autre cas. Il s'ensuit que les racines β ne sont réelles sur la droite double que si

$$G_1 < \delta < G_2,$$

G_1, G_2 étant les valeurs correspondant aux tangentes à la section de I' par le plan double. On se trouve donc alors dans le cas réel dont nous venons de faire mention.

Au contraire, toute droite double isolée mène à une valeur β^2 négative. On a donc alors une paire de valeurs β égales à partie

imaginaire positive, et une autre paire de β confondus à partie imaginaire négative. On en conclut que l'un des points de ramification coïncidents permute β_2 avec β_3 et l'autre β_1 avec β_4 .

Le caractère singulier du plan $y = 0$ est ainsi représenté par les relations symboliques

$$\delta(3, 4) = \delta(1, 2)$$

pour les points réels et

$$\delta(2, 3) = \delta(1, 4)$$

pour les points complexes.

Dans ces relations les branches sont d'abord définies à partir d'une valeur δ réelle au voisinage de la valeur commune des deux points confondus. Ainsi, au cas complexe, on a prolongé les β en partant d'un intervalle à 4 branches complexes.

Or, en se reportant aux diverses figures ci-dessus, on reconnaît de suite qu'une telle stipulation est équivalente à celle de partir d'un intervalle à 4 branches réelles. Ainsi, dans la fig. (Q) p. 95., déplaçons b dans l'intervalle complexe à la gauche de I; un tel déplacement mettra en jeu les lacets successifs (2 4), (2 4), (3 4) (1 2) et changera un lacet du type (2 3) en un lacet du type (1 4) et inversement.

14. L'existence des points doubles a donc rendu particulièrement facile l'identification des points de ramification dans ce plan. D'une manière analogue on sait que le plan $x = 0$ contient 4 points doubles complexes. En raisonnant sur la fonction algébrique α , dont les points de ramification sont identiques à ceux de β , on conclut que toute droite joignant un point arbitraire $(0, y, z)$ à l'un de ces points complexes coupe l'axe des z en un point complexe \bar{z} et que les 4 valeurs complexes $\bar{\delta} = -\bar{z}u$ sont des valeurs doubles des 8 points de ramification complexes. On aura encore deux valeurs égales non nulles de α^2 ; les deux α correspondant à l'un des points confondus sont donc à parties imaginaires de même signe, de manière que

$$\delta(1, 4) = \delta(2, 3)$$

aux 4 points $\bar{\delta}$ en question. Ces points étant distincts, on a donc retrouvé l'ensemble des points de ramification complexes. Dans cette

dernière relation symbolique le choix des branches pour des valeurs réelles de δ reste d'abord indéterminé. Or, faisons varier (x, y, z) librement dans l'espace extérieur; la valeur commune des deux β au point de branchement complexe, variant avec (x, y, z) , retiendra une partie imaginaire de signe constant, tant qu'on reste du même côté de $x = 0$, et tant que $\bar{\delta}$ reste complexe, puisque des valeurs réelles confondues de β et de α définissent toujours un point de ramification réel. On déplacera donc $\bar{\delta}$ avec les deux branches confondues, retenant au voisinage de $\bar{\delta}$ leurs parties imaginaires de même signe, jusqu'à arriver en une position (x, y, z) où $\bar{\delta}$ devient réel.

Le plan $(x = 0)$, d'où nous sommes partis, passe à l'extérieur de l'angle contenant les branches I_6 . Un résultat constaté à une occasion antérieure nous a fait retrouver des points de ramification complexes dans ce domaine. En effet, par le § 6 du chapitre V, deux racines δ , complexes ailleurs, deviennent réelles et égales sur le secteur extérieur d'un plan double. On a vu alors que les deux points de ramification confondus permutent les mêmes branches β réelles, affectées de petites parties imaginaires de même signe, et que la valeur réelle commune des deux δ est située dans un intervalle à 4 branches β réelles. Toutes ces conditions se représentent immédiatement en faisant circuler (x, y, z) à l'extérieur de la fig. 9 c (correspondant à $z > 0$); on voit que les tangentes confondues dans les divers points extérieurs des deux plans doubles visibles dans cette section particulière s'appellent β_1, β_4 , soit β_2, β_3 selon que

$$xy \lesseqgtr 0.$$

On a donc, sur les secteurs extérieurs des plans doubles

$$\delta(1, 4) = \delta(1, 4) \quad \text{pour } xy < 0$$

$$\delta(2, 3) = \delta(2, 3) \quad \text{» } xy > 0.$$

Il n'est pas difficile de démontrer que les divers secteurs en question font retrouver l'ensemble des 8 points complexes.

15. Cela posé, il se peut qu'un point $\bar{\delta}$ particulier, avec lequel on est parti de $x = 0$, se confonde sur le premier plan double rencontré (en b , fig. 9 c), en prenant la valeur réelle δ définie par la section de ce plan avec l'axe des z . Si tel n'est pas le cas, on

continuera de varier (x, y, z) en se tenant toujours à l'extérieur des I_δ , ce qui se fera en passant par des points tels que Q'' (fig. 8). Finalement on arrivera au plan $y = 0$, sur lequel tous les points de ramification prennent deux à deux des valeurs communes réelles. Dans ce cas, la valeur commune des deux branches associées à $\bar{\delta}$ est toujours complexe et sa partie imaginaire a retenu le signe initial au voisinage de $x = 0$. Il s'ensuit que, *en variant arbitrairement les (x, y, z) dans cet angle extérieur de l'espace extérieur, un point de ramification reste en général complexe et ne devient réel que par accident sur le plan $y = 0$ et sur un plan double. Sa valeur réelle se trouve alors dans un intervalle à 4 branches β complexes ou à 4 branches réelles selon le cas, et les deux branches β se permutant autour du point dans une position arbitraire, se définissent par prolongement analytique de deux branches à parties imaginaires de même signe à partir d'un intervalle de l'une ou de l'autre catégorie.*

Cet énoncé nous ramène par une autre voie aux propriétés des points complexes retrouvées en franchissant les I_δ . Ainsi on pourra d'abord fixer les branches dans les intervalles complexes pour $y = 0$. Il arrivera alors que les valeurs réelles confondues de $\bar{\delta}$ se trouveront dans des intervalles différentes à 4 branches complexes. Or, en vertu des considérations ci-dessus, des lacets issus de deux intervalles de la même catégorie sont de même type; *on pourra donc choisir un point de départ commun à tous les lacets dans le domaine complexe, tel que ces lacets permutent tous, ou β_1 avec β_4 , ou β_2 avec β_3 .*

En variant ensuite (x, y, z) à partir de $y = 0$, les points de ramification restés réels se déplaceront le long de l'axe des δ ; il se pourra donc qu'un tel point dépasse la valeur b initiale. Pour ne pas faire changer de caractère aux lacets, il suffit évidemment de faire varier b en même temps, de manière à rester toujours dans un intervalle de même caractère.

On a maintenant une idée assez précise de ce qui arrive quand Q franchit une branche de I_δ . Une paire de points conjugués s'approchera d'une valeur δ réelle, *incluse dans un intervalle où antérieurement deux branches β sont réelles.* On aura ainsi les deux cas typiques



On vérifie immédiatement que le départ de a ou de a' mène aux permutations discutées au chapitre IV.

On note seulement que l'arrangement ci-dessus suppose que Q se trouve à l'extérieur du cylindre Γ_∞ . Le passage dans l'intérieur de ce cylindre entraîne des modifications non essentielles et faciles à discuter.

§ 3.

La solution du problème optique.

16. En vertu du § 1 du présent chapitre l'émission du centre lumineux est représentée par la formule

$$F) \quad \int \Phi du = \\ = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{\mu=2}^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\delta^2 \cdot ((b^2+c^2)\alpha_\mu^2 + (c^2+a^2)\beta_\mu^2 + a^2+b^2) + a^2(\alpha_\mu^2 + \beta_\mu^2 + 1)] - a^2\alpha_\mu(l\alpha_\mu + m\beta_\mu + n)}{(\delta + i\mu) (x\Omega_2^{(a)}(\beta_\mu, \delta) - y\Omega_1^{(a)}(\beta_\mu, \delta))} d\delta$$

en connexion avec les équations analogues pour

$$\int \Psi du, \quad \int X du,$$

obtenues par permutation cyclique des coefficients

$$l, m, n \text{ et } a, b, c,$$

comme indiquent les expressions D'). On a

$$F') \quad \left\{ \begin{array}{l} a_\mu x + \beta_\mu y + z + \delta u = 0 \\ \Omega + i\varepsilon\Omega_4 = (\alpha^2 + \beta^2 + 1) (b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2) \\ \quad - \delta^2((b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + a^2 + b^2) + \delta^4 \\ \quad + 2i\varepsilon\delta(2\delta^2 - ((b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + a^2 + b^2)) \\ \quad = 0 \end{array} \right.$$

et la sommation en F) s'étend aux deux racines

$$\beta_2, \beta_3$$

à partie imaginaire positive du système F' . L'expression $F)$ est ainsi une somme de deux intégrales abéliennes appartenant à la courbe

$$\Omega^{(\alpha)} = \Omega\left(-\frac{\beta y + z + \delta u}{x}, \beta, 1, \delta\right) = 0,$$

du 4^{ième} ordre et du genre $p = 3$, étendues le long de lacets autour de certains points de ramification dont le choix est fixé par les conventions du § précédent.

Soit $\mu > 0$. L'intégration autour du demi-plan inférieur introduira le résidu pour

$$\delta = -i\mu$$

c. à. d.

$$\delta = 0$$

à la limite. Soit A cette fonction, de même que B et C les résidus correspondants de $f\mathcal{P}dt$ et de fXd_t . Il résulte de $F)$ que A, B, C sont des expressions indépendantes de u , purement algébriques, constituées par certaines sommes de résidus aux zéros β_μ de

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + \beta y + z = 0 \\ \Omega(\alpha, \beta, 1, 0) = (\alpha^2 + \beta^2 + 1)(b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2) = 0. \end{array} \right.$$

Les A, B, C se calculent donc immédiatement par la résolution des deux équations de deuxième ordre. Pour $a = b = c = 1$, ces fonctions se réduisent, en négligeant les composantes d'un vecteur potentiel, à

$$\frac{l}{n} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

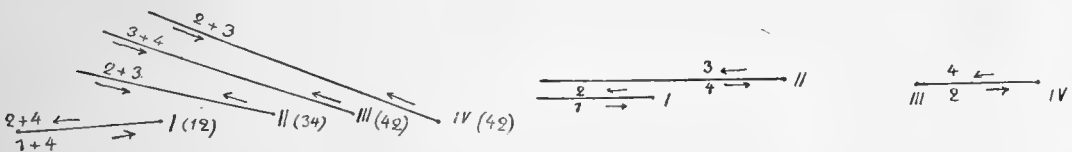
L'étude des fonctions $F)$ va différer selon le domaine de l'espace dans lequel on se trouve. La caractéristique combinée avec les quatre disques circulaires des plans doubles divise l'espace des (x, y, z) en trois parties, savoir les domaines *extérieur* (Σ), *intermédiaire* (T), et *intérieur* (Y). Les deux premiers sont séparés par ce que nous appelons le *front d'onde antérieur*, constitué par la partie convexe de la nappe extérieure de Γ rendue surface fermée par les disques couvrant

les cavités, tandis que le domaine intérieur est limité par le *front d'onde postérieur*, c. à. d. par la surface fermée de la nappe intérieure. Le domaine intermédiaire se divise encore en cinq parties séparées, savoir en quatre cavités T_c aboutissant dans les quatre points doubles respectifs et recouvertes chacune par l'un des disques circulaires, et en un domaine T_i à connexion multiple, intermédiaire entre les deux nappes de Γ . Nous allons voir que les fonctions F) prennent des valeurs très simples dans les domaines Σ et Y .

17. (*Domaine Σ .*) La discussion du § précédent nous mène au théorème suivant, important au point de vue physique:

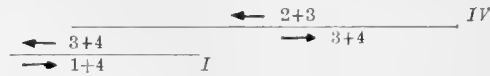
Les fonctions $\int \Phi du$, $\int \Psi du$, $\int X du$ sont identiquement nulles dans l'espace extérieur.

En effet, soit p. ex. la fig. (Q) du n° 7, et partons de b avec les deux branches (2, 3). Des points de ramification à partie imaginaire positive menons des coupures vers l'infini; en allant de b directement vers les points complexes on sait que ces points complexes permutent β_2 avec β_3 de manière que la somme F), symétrique par rapport à ces deux racines, prendra la même valeur aux deux bords des coupures respectives. On n'aura donc à tenir compte que des lacets joignant les quatre points I, II, III, IV à ∞ .



Le chemin d'intégration déformé mène immédiatement aux deux lacets allant de I et de II , à $-\infty$, et à la période relative aux deux points III et IV . Or, ces trois chemins, pour $\varepsilon = 0$, peuvent être ramenés à coïncider avec l'axe réel des δ . Notons que, tous les points de ramification étant négatifs dans ce cas, il n'y a aucune collision avec le point singulier $\delta = -i\mu$. Cela posé, la fig. 9 b montre de suite que par les chemins ainsi obtenus on intègre partout les branches en question dans des intervalles où elles sont complexes. Il s'ensuit qu'une racine particulière s'est permutée avec sa conjuguée sur l'autre bord du chemin et qu'on intègre partout une différence de racines imaginaire pure, conformément à l'observation du n° 12, chapitre IV.

Si l'on sort de I_b pour aller dans la position Q') les conditions se simplifient. La figure (Q') réduit le chemin d'intégration aux deux lacets



dont le résultat est toujours imaginaire pur.

Finalement, dans une position telle que Q''' , en dehors du cylindre I_∞ , tous les points de ramification réels se sont posés dans le demi-plan inférieur. Les branches définies en b ne possèdent donc que des points de ramification du type (2, 3) dans le demi-plan positif; la fonction intégrée y est uniforme, et l'intégrale le long du contour fermée est nulle.

On reconnaît sans difficulté que les trois cas ci-dessus sont typiques pour les conditions diverses que présente l'espace Σ . Notre théorème est donc prouvé.

18. (*Domaine Y*). L'expression F) se simplifie par le fait que tous les points de branchement sont complexes. On pourra donc mettre ε directement égal à zéro, et on écrira p. ex.

$$13) \quad \int \Phi du = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi^{(2, \alpha)}(\beta, \delta) d\beta d\delta}{(\delta + i\mu)\Omega^{(\alpha)}(\beta, \delta)}$$

formule dans laquelle on a dénoté par $\psi^{(2)}$ le polynôme de deuxième ordre de β , $\alpha = -\frac{\beta y + z + \delta u}{x}$, figurant dans F), et où la fonction réelle $\Omega^{(\alpha)}$ ne s'annule maintenant pour aucune combinaison de valeurs β, δ réelles. La partie réelle de 13) s'écrit

$$\int \Phi du = \frac{i}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} d\delta \left(\frac{\psi^{(2, \alpha)}}{(\delta + i\mu)\Omega^{(\alpha)}} - \frac{\psi^{(2, \alpha)}}{(\delta - i\mu)\Omega^{(\alpha)}} \right)$$

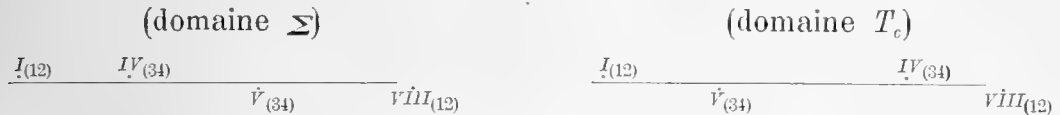
Dans cette intégrale, en exécutant l'intégration par rapport à δ , les racines de $\Omega^{(\alpha)}$ mènent évidemment, à la limite $\mu = 0$, à des contri-

butions qui sont égales et de signes contraires pour les deux termes y figurant. Par l'intégration autour du demi-plan supérieur il ne nous restera donc que le résidu par rapport à $i\mu$, nous donnant:

$$\int \Phi du = \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\beta \cdot \psi^{(2, \omega)}(\beta, 0)}{\Omega^{\omega}(\beta, 0)} = \frac{A}{2}.$$

Les parties réelles des $\int \Phi du$, $\int \Psi du$, $\int X du$ se réduisent dans l'espace intérieur aux expressions algébriques, indépendantes de u , $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$.

19. (Domaine T_c .) En partant d'un point de l'espace Σ , soit de Q'' , franchissons maintenant la partie centrale d'un plan double pour rentrer dans l'intérieur de la cavité T_c . Par ce passage, deux points de ramification, appelés ci-dessus δ_{IV} et δ_V , en coïncidant pour $\varepsilon = 0$, se dépassent mutuellement, en retenant toutefois les signes de leurs parties imaginaires. L'effet sera représenté par les deux figures



on aura toujours les lacets autour des points I et IV, mais le dernier lacet ne porte plus sur des racines partout complexes. En effet, les branches se permutant autour de IV sont réelles entre IV et V; le lacet étant toujours mené de δ_{IV} à $-\infty$, on conclut que la partie réelle de l'intégrale sera représentée par le chemin double entre V et IV, c. à d. par la période relative à ces deux points.

Si le passage à travers le disque central se fait à l'intérieur de I_δ il n'y a aucune modification essentielle. On aura les figures respectives



La partie réelle de la période relative aux points III, IV sera à l'intérieur de T_c , pour $\varepsilon = 0$, égale à la période calculée autour de V et IV.

L'intégrale $f\Phi du$ s'exprime à l'intérieur d'un domaine T_c par la période de l'intégrale abélienne F) relative aux deux points de ramification qui se confondent sur la partie centrale du plan double correspondant.

On voit sans peine que ces périodes sont de signes symétriques dans les quatre domaines T_c . Il suffit de comparer deux domaines symétriques par rapport au plan $z = 0$. On y a des valeurs z de signes contraires, mais en même temps on intègre le long de valeurs δ de signes contraires; le dénominateur δ (pour $\mu = 0$) a donc changé de signe en allant de l'un à l'autre domaine. Or, d'après la règle fondamentale A) on intègre toujours de façon que

$$x\Omega_2^{(\alpha)} - \Omega_1^{(\alpha)} \geq 0, \quad z \leq 0$$

dans les intervalles réelles. Mais dans la cavité du point double supérieur on a

$$z < 0, \quad \delta < 0.$$

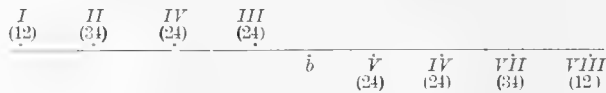
On en tire facilement que

$$f\Phi du = l\Pi_1 - m\Pi_2 - n\Pi_3,$$

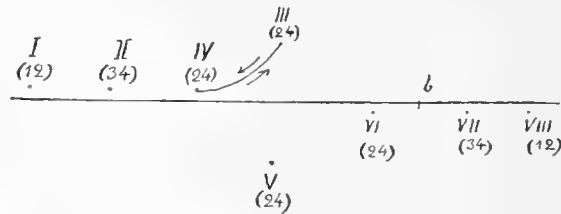
où Π_1, Π_2 , sont pairs, tandis que Π_3 est impair par rapport à Z .

20. (Domaine T_i .) Partons de Q (fig. 8) et pénétrons la nappe extérieure de I en restant à l'intérieur du domaine haché. Par cette marche on franchit d'abord le plan double P , ce qui fait changer l'orientation relative de δ_{III} et de δ_{IV} ; en franchissant ensuite I on fait coïncider δ_{III} avec δ_V .

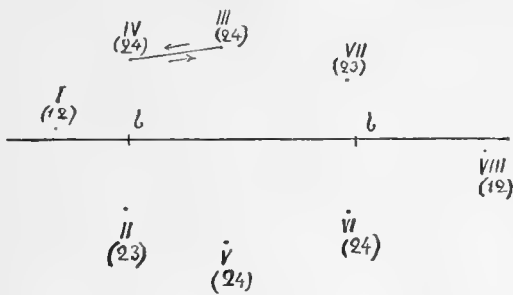
On a ainsi



avant le passage de I et



après. On a maintenant 4 branches réelles entre VI et VII ou entre II et IV et on peut choisir b dans l'un quelconque des intervalles. On retrouve comme contribution réelle la période autour de δ_{III} et δ_{IV} . Fran-
chissons maintenant I_{2y} ; δ_{VI} et δ_{VII} deviennent complexes et δ_{VII} p. ex. se
posera, avec la notation (2, 3) dans le demi-plan supérieur. On aura ainsi
toujours la même période. Enfin on pénétrera I_{2z} en faisant coïncider
 δ_{II} avec δ_{IV} . On aura dans le demi-plan positif un nouveau point de
branchement δ_{IV} , obtenu par déplacement continu d'un point antérieur,
dont le fonctionnement est toujours représenté par le symbole (2, 4),
à partir des points b ci-dessus.



On retrouve donc encore la période relative aux deux points complexes
 δ_{III} , δ_{IV} .

On note d'ailleurs que par déformation du chemin d'intégration
cette période s'exprime, à part du résidu pour $\delta = 0$, au moyen de la
période relative aux deux points I et VIII. On arrivera donc à la
nappe intérieure de I' avec la période relative aux points qui s'y
confondent, et on retrouvera immédiatement la singularité algébrique
qu'exige la théorie générale.

21. En particulier, on revient pour les points de I' à certaines
intégrales hyperelliptiques. Soit p. ex. un point du domaine convexe
du front d'onde antérieur; on y a obtenu deux (demi-)périodes,
dont l'une est relative aux deux points de ramification confondus, et
l'autre se reporte à deux points restés distincts. La première est liée
à la singularité au passage de I' ; c'est une fonction algébrique en
 x, y, z . La seconde intégrale, continue au point considérée, doit de
même être algébrique, la somme des deux périodes étant nulle à
l'extérieur du front d'onde.

Vérifions ce fait important par une autre voie. Il suffira pour cela de considérer des points extérieurs aux I_δ , puisque par une transformation homographique on peut toujours faire en sorte qu'un point arbitraire soit extérieur à la nouvelle surface I_δ .

Soit d'abord un cas particulier. Prenons le plan $y = 0$, en supposant que les points coniques réels soient situés dans le plan $x = 0$, c. à. d. que l'on ait

$$b > a > c.$$

On aura l'avantage des notations employées ci-dessus, et le résultat sera identique à celui pour le plan $x = 0$ au cas

$$a > b > c.$$

La section de I' est fournie par le cercle de rayon b renfermant à son intérieur l'ellipse concentrique aux axes $2a$, $2c$. Soit $\bar{\delta}$ la valeur double en un point du cercle; la substitution de $\delta - \bar{\delta}$ à δ nous donne une équation de la forme

$$\Omega^{(a)} \propto \beta^4 + 2\beta^2(p\delta^2 + 2q\delta + r) + (p'\delta^2 + 2q\delta + r')\delta^2 = 0.$$

Les deux autres points de ramification réels, représentés par les tangentes à l'ellipse, donnent $\beta = 0$; ce seront les deux racines δ_I , δ_{VIII} de

$$p'\delta^2 + 2q'\delta + r' = 0,$$

avec les branches coïncidentes

$$\frac{\beta_1}{\beta_3} = \pm \sqrt{-(p\delta^2 + 2q\delta + r) + \sqrt{(p\delta + 2q\delta + r)^2 - \delta^2(p'\delta^2 + 2q'\delta + r')}}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que le point en question soit à l'intérieur de la branche I_∞ tangente à la nappe intérieure.

On a donc

$$\bar{\delta} = -\frac{b^2u}{z}$$

et par des calculs élémentaires, pour

$$\left(\delta - \frac{b^2u}{z}\right)^2 = c^2\alpha^2 + a^2, \quad (p'\delta^2 + 2q'\delta + r = 0),$$

$$p\delta^2 + 2q\delta + r = \alpha^2c^2(b^2 - c^2) + a^2(b^2 - c^2) > 0,$$

tandis que, pour $\delta = 0$, $\alpha = \frac{x}{z}$,

$$p\delta^2 + 2q\delta + r = \frac{x^2}{z^2} a^2(c^2 - b^2) + c^2(a^2 - b^2) < 0.$$

On vérifie aussi, d'accord avec la construction géométrique, que δ_I, δ_{VIII} , sont situés des deux côtés de $\delta = 0$. Les racines β_1, β_3 restent réelles et distinctes dans l'intervalle $\delta_I \delta_{VIII}$; cet intervalle contient le point $\delta = 0$, point double pour les deux autres racines

$$\frac{\beta_2}{\beta_4} = \sqrt{-(p\delta^2 + 2q\delta + r) - \sqrt{(p\delta^2 + 2p\delta + r)^2 - \delta^2(p'\delta^2 + 2q'\delta + r')}}.$$

Soit comme cas typique l'intégrale

$$\frac{\partial F}{\partial z},$$

et considérons la demi-période

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\delta_{VIII}}^{\delta_I} \frac{d\delta}{x \left(\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta} \right)_{\beta_2}}$$

On revient à une intégrale hyperelliptique en posant

$$\lambda = \frac{\delta}{\beta_2}.$$

La courbe

$$\frac{\delta^2}{\lambda^4} (1 + 2\lambda^2(p\delta^2 + 2q\delta + r) + \lambda^4(p'\delta^2 + 2q'\delta + r')) = 0$$

nous donnera

$$\frac{d\delta}{\partial f^{(\alpha)} \partial \beta} = \frac{\delta d\lambda}{\lambda^2 \left(\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \delta} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta} \right)},$$

$$\delta = \frac{1}{\lambda^4 p' + 2\lambda^2 p + 1} (q'\lambda^4 + 2q\lambda^2 + \lambda\sqrt{D}),$$

$$\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \delta} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta} = \frac{\delta^2}{\lambda^3} \sqrt{D}.$$

Le signe du radical est alors choisi de façon que $\delta > 0$ pour $\lambda > 0$. Soit, en effet,

$$\beta_2 > 0, \left(\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta} \right)_{\beta_2} > 0$$

dans l'intervalle $\delta_{VIII} \delta_I$. Avec

$$\delta_{VIII} < 0, \delta_I > 0$$

on a

$$\lambda = -\infty \text{ pour } \delta = \delta_{VIII}$$

$$\lambda = +\infty \text{ pour } \delta = \delta_I,$$

et il faut toujours intégrer avec des valeurs positives de $\frac{\delta}{\lambda}$. Ainsi, δ et λ devant changer de signe en même temps, on conclut que l'expression δ ci-dessus reste valable dans toute l'étendue de l'intervalle. Il vient donc l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda d\lambda}{x\delta\sqrt{D}},$$

d'où en remplaçant λ par $-\lambda$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda d\lambda}{x\sqrt{D}} (p'\lambda^4 + 2p\lambda^2 + 1) \left(\frac{1}{q'\lambda^4 + 2q\lambda^2 - \lambda\sqrt{D}} - \frac{1}{q'\lambda^4 + 2q\lambda^2 + \lambda\sqrt{D}} \right) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{x(r'\lambda^2 + 2r)} \end{aligned}$$

L'expression est donc bien algébrique.

22. L'étude que nous venons de faire peut servir à ébaucher une démonstration directe de la disparition de nos expressions à l'extérieur du front d'onde antérieur. Soit un point de ce domaine extérieur; la courbe $f^{(\alpha)}$ est réciproque au cône tangent mené par le point

à I et représente la section réelle de la surface f menée par un point (α, β, δ) intérieur à la nappe intérieure de f . On peut supposer que la courbe $f^{(\alpha)}$ de 4^{ième} ordre consiste en deux traits fermés distincts, l'un à l'intérieur de l'autre; si tel n'est pas le cas on peut toujours atteindre le but par une projection différente, soit en considérant $f^{(\beta)}$ ou $f^{(\delta)}$, soit en faisant une transformation linéaire convenable. Pour plus de généralité, considérons dans l'espace à 4 dimensions la section de I par le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u = 0$$

dans l'espace des α, β, γ ; on aura un cône, p. ex. dans l'espace des β, γ, δ , dont la section par le plan $\gamma = 1$ nous donne la courbe $f^{(\alpha)}$. Supposons résolu le problème géométrique suivant: déterminer un point E extérieur aux deux branches fermées de $f^{(\alpha)}$, tel que les quatre tangentes menées à $f^{(\alpha)}$ par E touchent en quatre points en ligne droite. Par le point E ainsi déterminé menons la droite OE par le sommet du cône $f^{(\alpha)}(\beta, \gamma, \delta)$, et coupons le cône par un plan arbitraire parallèle à OE , soit par le plan

$$\gamma' = \beta \cos \varphi + \gamma \sin \varphi = 1.$$

Dans la nouvelle section, E est rejeté vers l'infini, et par une transformation linéaire préalable entre β et γ on a fait en sorte qu'au point (x, y, z) correspond par réciprocity une courbe $f^{(\alpha)}$, constituée toujours par deux traits fermés, telle que par les 4 points réels dans lesquels elle est coupée par une certaine droite, passent 4 tangentes qui sont toutes parallèles.

La transformation linéaire, soit

$$\beta' = -\beta \sin \varphi + \gamma \cos \varphi$$

$$\gamma' = \beta \cos \varphi + \gamma \sin \varphi$$

variera en général avec x, y, z mais sera toujours possible, pour un point arbitraire de la catégorie en question. Avec

$$x' = -x \sin \varphi + z \cos \varphi$$

$$z' = x \cos \varphi + z \sin \varphi$$

on sera revenu aux formules des chapitres précédents. On peut donc supposer d'avance que $f^{(\alpha)}$ ait la propriété désirée.

Cela posé, introduisons le système suivant de coordonnées obliques. Prenons la dite droite comme l'axe des δ' et la direction commune des 4 tangentes comme l'axe des β' ; soit de plus l'origine située à l'intérieur de la courbe intérieure. On a ainsi fait en sorte que la fonction algébrique β' de δ' définie par la courbe $f^{(\alpha)}$, prend toujours la valeur 0 aux quatre points de ramification réels. Dénotons encore par

$$\delta'_{\text{I}}, \delta'_{\text{IV}}, \delta'_{\text{V}}, \delta'_{\text{VIII}}$$

ces 4 points, dont deux, soit $\delta'_{\text{I}}, \delta'_{\text{VIII}}$, appartiennent au trait extérieur et correspondent par réciprocity à certains plans tangents à la nappe intérieure de T . On a encore fait en sorte qu'une droite mobile

$$\beta' = \frac{\delta'}{\lambda},$$

au paramètre λ , coupe $f^{(\alpha)}$ en 4 points réels, pour toute valeur réelle de λ entre $\pm \infty$; deux de ces points appartiennent à la courbe extérieure et deux à la courbe intérieure. Les deux traits de $f^{(\alpha)}$ étant distincts, il n'y a certainement pas de permutation entre les deux catégories; les quatre points restent des fonctions distinctes, bien déterminées, de λ .

Une droite $\delta' = \text{const}$, coupe la courbe intérieure en deux points, réels pour

$$\delta'_{\text{IV}} < \delta' < \delta'_{\text{V}},$$

correspondant aux valeurs β'_1, β'_3 ; soit

$$\beta'_1 < 0, \beta'_3 > 0,$$

de manière que la droite mobile, pour λ arbitraire, coupe la courbe en question aux deux points

$$(\beta'_1, \delta'_1), (\beta'_3, \delta'_3)$$

avec

$$\delta'_1 = \delta_{IV}, \delta'_3 = \delta_V \text{ pour } \beta' = \beta'_3 = 0, \lambda = +\infty$$

$$\delta'_1 = \delta_V, \delta'_3 = \delta_{IV} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad ; \lambda = -\infty,$$

en faisant tourner la droite d'une manière continue; pendant cette marche un point particulier δ'_3 , défini sans ambiguïté, *change de signe* pour $\lambda = 0$.

Cela posé, la racine β'_3 , figurera dans une période en forme d'intégrale

$$\frac{A}{4\pi^2 x} \int_{\delta'_{IV}}^{\delta'_V} \frac{d\delta'}{\left(\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta'}\right)_{\beta'_3}},$$

où A est le déterminant de la transformation obliquangle.

Soit

$$\left(\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta'}\right)_{\beta'_3} > 0;$$

on aura nécessairement

$$\left(\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta'}\right)_{\beta'_3} < 0$$

pour une valeur δ' arbitraire dans l'intervalle en question.

Par la transformation

$$\frac{\delta'}{\beta'_3} = \lambda$$

on obtient

$$\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta'_3} d\beta'_3 + \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \delta'} d\delta' = 0$$

$$d\delta' - \lambda d\beta'_3 = \beta'_3 d\lambda$$

$$\frac{d\delta'}{\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta'_3}} = \frac{\beta'_3 d\lambda}{\lambda \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \delta'} + \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta'_3}} = \frac{\lambda^2 \delta' d\lambda}{\frac{\partial f}{\partial \delta'}},$$

en posant

$$\varphi(\delta', \lambda) = \lambda^4 f^{(\alpha)}\left(\frac{\delta'}{\lambda}, \delta'\right).$$

L'intégration par rapport à δ' entre δ'_{IV} et δ'_{V} relativement à la racine «supérieure» β'_3 fait marcher λ entre $-\infty$ et $+\infty$; on intégrera le long de la courbe avec le point variable (β'_3, δ'_3) , et il vient l'intégrale

$$4\pi^2 \bar{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 \delta'_3 d\lambda}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta'}\right)_{\delta'_3}}.$$

δ'_3 étant la racine «supérieure» de

$$\varphi(\delta', \lambda) = 0,$$

relative à la courbe intérieure, racine fixée par la condition que

$$\frac{\delta'_3}{\lambda} > 0, \text{ et par conséquent } \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta'}\right) > 0.$$

Pour compléter la période il faut encore intégrer la racine négative β'_1 dans la direction contraire de δ'_V à δ'_{IV} . On suivra alors le point (β'_1, δ'_1) le long de la partie inférieure de la courbe, en faisant tourner la droite dans la même direction. En dépassant l'axe des δ' , λ change de $+\infty$ à $-\infty$, et en décrivant la courbe on fait encore marcher λ de $-\infty$ à $+\infty$. On a maintenant

$$\frac{\delta'}{\beta'_1} = \lambda,$$

$$\frac{d\delta'}{\partial f^{(\alpha)}} = \frac{\lambda^2 \delta'_1 d\lambda}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta'}\right)_{\delta'_1}}$$

différentielle dans laquelle

$$d\delta' \text{ et } \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \beta'_1}$$

sont tous les deux négatifs. D'accord avec cela

$$\frac{\delta'}{\lambda} > 0 ,$$

et le terme asymptotique de φ , pour $\lambda = \infty$, étant de quatrième ordre,

$$\frac{1}{\lambda^3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta'} \right)_{\delta'}$$

change bien de signe à travers $\lambda = \pm \infty$.

On trouve donc

$$\frac{\Delta}{4\pi^2 x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 \delta'_1 d\lambda}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta'} \right)_{\delta'_1}} ,$$

intégrale qui porte encore, comme il faut bien, sur des contributions exclusivement positives.

Le raisonnement identique relatif à la courbe extérieure donne encore les deux intégrales portant sur les racines δ'_2, δ'_4 . Ces intégrales sont négatives, puisque cette courbe correspond au signe contraire de z .

La somme des quatre intégrales

$$\frac{\Delta}{4\pi^2 x} \sum_1^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 \delta'_\nu d\lambda}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta'} \right)_{\delta'_\nu}}$$

est bien nulle, puisqu'elle est étendue sur la somme des résidus de la fonction rationnelle de δ'

$$\frac{\delta'}{\varphi(\delta', \lambda)} .$$

Si maintenant (x, y, z) s'approche de la nappe extérieure de Γ , la courbe intérieure va se rétrécir en un point double isolé, par lequel passent les axes de coordonnées. La substitution

$$\frac{\delta'}{\beta'} = \lambda$$

réduit la courbe $f^{(\alpha)}$ à une courbe hyperelliptique

$$\frac{\varphi}{\lambda^4} = f^{(\alpha)} = \frac{\delta'^2}{\lambda^4} (\lambda^2 f^{(2)}(1, \lambda) + 2\lambda \delta f^{(3)}(1, \lambda) + \delta'^2 f^{(4)}(1, \lambda)) = 0,$$

et nous définit les deux racines

$$\frac{\delta'^2}{\delta^4} = \frac{1}{f^{(4)}(1, \lambda)} (-\lambda f^3(1, \lambda) \pm \lambda \sqrt{D}).$$

La période correspondante

$$\frac{\mathcal{A}}{4\pi^2 x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta'_1 \lambda^2 d\lambda}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta'}\right)_{\delta_1}} + \frac{\delta'_4 \lambda^2 d\lambda}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta'}\right)_{\delta_4}} \right)$$

se réduit à

$$\frac{\mathcal{A}}{4\pi^2 x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{f^{(2)}(1, \lambda)}.$$

Or $f^{(2)}(1, \lambda)$ est provenu du polynôme $f^{(\alpha)}(\beta', \delta')$ des termes de deuxième ordre au point double $\beta' = \delta' = 0$; on a donc

$$f^{(\alpha)}(1, \lambda) = \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta'^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta' \partial \delta'} + \lambda^2 \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \delta'^2},$$

et pour la Hessienne $\frac{H'}{x^2}$ de cette expression on a

$$\frac{H'}{x^2} = \mathcal{A}^2 \frac{H}{x^2}.$$

On trouve donc le résidu

$$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{-H}},$$

égal et de signe contraire au résidu relatif au point double que fournit la période autour des points de ramification confondus.

23. On reconnaît encore le théorème ci-dessus en partant directement de l'intégrale double

$$\frac{i}{8\pi^3 x} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta d\delta}{f^{(\alpha)}(\beta, \delta) + i\epsilon f_4^{(\alpha)}}$$

transformée aux coordonnées obliques

$$\frac{iA}{8\pi^3 x} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta' d\delta'}{f^{(\alpha)}(\beta', \delta') + i\epsilon f_4^{(\alpha)}}$$

Dans le cas le plus simple $f_4^{(\alpha)}$ sera de même signe le long de l'un des traits fermés de $f^{(\alpha)}$. Sur la courbe extérieure on aura, pour $z > 0$, par une discussion d'un type connu, $z > 0$, $\frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \beta^2}, \frac{\partial^2 f^{(\alpha)}}{\partial \delta^2} > 0$. On en tire qu'en coupant par la droite mobile, les racines δ' négatives seront projetées d'un côté et les racines positives de l'autre côté de l'axe réel des δ' . Or, la substitution

$$\beta' = \frac{\delta'}{\lambda}, \quad d\beta = -\frac{\delta' d\lambda}{\lambda^2},$$

fait décrire par λ le chemin de $+\infty$ à $-\infty$ pour $\delta' > 0$, et le chemin de $-\infty$ à $+\infty$ pour $\delta' < 0$. Il vient donc

$$-\frac{i}{8\pi^3 x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\delta' d\delta'}{f^{(\alpha)}\left(\frac{\delta'}{\lambda}, \delta'\right) + i\epsilon f_4} - \int_0^{+\infty} \frac{\delta' d\delta'}{f^{(\alpha)}\left(\frac{\delta'}{\lambda}, \delta'\right) + i\epsilon f_4} \right)$$

Dans cette intégrale on pourra faire $\epsilon = 0$ dans tout intervalle exempt de ceux contenant les quatre racines, toutes réelles, $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4$. On aura donc des contributions partout imaginaires, sauf aux demi-résidus correspondant au passage immédiatement au-dessus ou au-dessous des pôles. Chacun des deux termes passe de cette manière par deux zéros, situés par rapport à la première intégrale de l'un et par rapport à la seconde intégrale, de l'autre côté de l'axe réel. Les deux

intégrales étant de signes contraires, on aura 4 demi-résidus de même signe, à somme nulle.

L'essentiel dans ce raisonnement est la réduction possible à une courbe entre δ' et λ , telle que les quatre racines restent réelles et distinctes dans tout le domaine réel des λ . Cette possibilité est évidemment liée au fait que le front d'onde antérieur présente vers l'extérieur une face partout convexe. On observe d'ailleurs que la démonstration n'est pas affectée par la présence de points d'inflexion de la courbe $f^{(\omega)}$; la restriction à des points (x, y, z) extérieurs aux branches I_δ n'est donc pas essentielle.

§ 4.

Propriétés de la solution. Résumé.

24. La preuve que nos fonctions représentent la solution fondamentale du problème de LAMÉ est fournie par la méthode du § 6, chapitre IV. La supposition essentielle était alors que le cône I_0 fût imaginaire, le sommet seul excepté. Dans le cas présent il y a cette modification que les droites menées de l'origine aux points coniques, c. à d. les axes optiques de Γ , sont à regarder comme des droites doubles isolées du cône; en effet, en correspondance à la nature singulière du plan $y = 0$, on y a des points de ramification confondus. Il n'y a là cependant aucune singularité pour nos intégrales, puisque les valeurs β qui s'y confondent sont complexes et que par conséquent les discontinuités possibles ne peuvent pas apparaître par l'intégration dans le domaine réel.

Il a résulté des §§ précédents que les dérivées de deuxième ordre de la solution fondamentale de

$$\frac{\partial}{\partial u} fU = \frac{\partial}{\partial u} \Omega U = 0$$

sont partout nulles pour $u = 0$, et qu'il faut les prendre toutes avec le signe contraire pour $u < 0$. Ce dernier fait est d'ailleurs évident par cette raison que nos fonctions sont venues de l'intégration par rapport à u de fonctions qui, par raison de symétrie, sont nécessaire-

ment paires par rapport à u . Cette observation nous permettra une modification importante au point de vue physique.

Le point capital de la discussion du chapitre IV est la déduction de l'équation 14, § 6, en conséquence des valeurs que prennent les dérivées de deuxième ordre sur l'axe des u . Or, prenons la fonction paire de u , définie pour des u quelconques par

$$\int^{|u|} F(u) du,$$

et ajoutons-la à la solution fondamentale du § 1. Les composantes Φ , Ψ , X du potentiel vectoriel contenant seulement des dérivées d'ordre pair par rapport à u , cela revient à ajouter à $\int \Phi du$, etc., des intégrales de la forme

$$\int^{|u|} \Phi du.$$

Les fonctions ajoutées, toutes nulles pour $u = 0$, sont toujours continues à travers ce plan, et on a ajouté des solutions de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u} \Omega U = 0,$$

telles que les solutions qui résultent sont toutes nulles pour $u < 0$. On a encore des dérivées d'une solution fondamentale: en effet l'équation 14) du § 6 (chapitre IV) est évidemment remplacée par

$$\int^u \frac{\partial \varphi}{\partial u_0} du_0 = \varphi(x, y, z, u).$$

Pour des valeurs positives de u on a simplement multiplié par 2 les fonctions discutées dans les §§ précédents. La solution modifiée répond ainsi à la condition physique d'une perturbation nulle en tout moment u antérieur au moment d'émission $u = 0$.

25. Résumons finalement les propriétés de la solution obtenue.

Le vecteur lumineux a été exprimé par le *curl* d'un potentiel vectoriel aux composantes Φ , Ψ , X , s'exprimant à leur tour par certaines dérivées de 2^{ième} ordre de la solution fondamentale F de l'équation

$$\Omega U = 0,$$

soit

$$\Phi = \Phi^{(2)} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial u} \right) F, \text{ etc., etc.,}$$

En formant les intégrales

$$\int \Phi du, \text{ etc.,}$$

on est arrivé aux expressions

$$\frac{-1}{2\pi^2} \sum_{2,3} \int \frac{\Phi^{(2), (\omega)}(\beta_\mu, \delta) d\delta}{\delta(x\Omega_2^{(\omega)} - x\Omega_1^{(\omega)})},$$

intégrales abéliennes de troisième espèce, associées à la courbe de genre 3

$$f^{(\omega)} = \Omega \left(-\frac{\beta x + z + \delta u}{x}, \beta, \delta \right) = 0.$$

Ces intégrales sont des fonctions uniformes des x, y, z, u partout continues, sauf aux points appartenant à la caractéristique Γ et aux domaines centraux circulaires des plans doubles.

En tout point exempt de ces lieux singuliers la différentiation par rapport au temps u , ainsi que la différentiation figurant dans l'opération du *curl*, peut s'exécuter immédiatement.

Le potentiel Φ, Ψ, X est nul pour toute valeur négative du temps u , ainsi que pour une valeur arbitraire positive u , en tout point (x, y, z) à l'extérieur du front d'onde antérieur et en tout point intérieur au front d'onde postérieur.

Les fonctions $\int \Phi du$, etc., présentent les discontinuités suivantes.

En franchissant, dans l'espace x, y, z , la caractéristique en un point convexe, en allant dans la direction des valeurs croissantes de

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

ces intégrales subissent des sauts brusques algébriques, d'ordre -1 , de la grandeur

$$\pm \frac{1}{2\pi} \frac{\Phi^{(2)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{\delta \sqrt{-H}},$$

H étant la Hessienne au point considéré, et $\alpha, \bar{\beta}, \bar{\delta}$ étant les valeurs

$$\bar{\alpha} = \frac{\frac{\partial I}{\partial x}}{\frac{\partial I}{\partial z}}, \quad \bar{\beta} = \frac{\frac{\partial I}{\partial y}}{\frac{\partial I}{\partial z}}, \quad \bar{\delta} = \frac{\frac{\partial I}{\partial u}}{\frac{\partial I}{\partial z}}.$$

Le signe \pm se prend selon le signe positif ou négatif de z .

Le passage à travers le disque circulaire d'un plan double correspond de la même manière au saut brusque de la grandeur double

$$\pm \frac{1}{\pi} \frac{\Phi^{(2)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{\delta \sqrt{-H}}.$$

Aux points à courbure hyperbolique de Γ , les intégrales deviennent infinies d'ordre logarithmique

$$\mp \frac{1}{2\pi^2} \frac{\Phi^{(2)}(\alpha, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{\delta \sqrt{-H}} \log q, \quad \text{pour } q = 0.$$

Les divers lieux singuliers se rencontrent aux quatre cercles \mathcal{C} de contact entre Γ et les plans doubles; on y trouve une infinité d'ordre $\frac{1}{2}$, la Hessienne H s'annulant sur ces courbes.

En comparant ces résultats avec les faits classiques dans la théorie des milieux isotropes, on a vu que les singularités des domaines convexes sont tout à fait analogues à la manière dont se comporte, sur la surface d'onde sphérique, la fonction de KIRCHHOFF intégrée par rapport aux temps. Soit

$$u = I_u(x, y, z)$$

l'équation de Γ en un point convexe, et soit

$$E(u - I_u)$$

une fonction de la nature de celle introduite par KIRCHHOFF, c. à. d. nulle partout sauf en $u = I_u$, valeur à travers laquelle l'intégration par rapport à u donne la valeur 1; on peut exprimer l'analogie en

question en disant que, au voisinage d'un tel point convexe, les Φ , Ψ , X se comportent comme

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\Phi(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta})}{\delta\sqrt{-H}} E(u - I'_a), \text{ etc.,}$$

aux points des disques circulaires on aura les fonctions analogues

$$\pm \frac{1}{2\pi} \frac{\Phi}{\delta\sqrt{-H}} E\left(u + \frac{\bar{\alpha}x + \bar{\beta}y + z}{\bar{\delta}}\right).$$

Les surfaces que nous avons appelé les deux fronts d'onde sont donc de vraies caustiques, dans le sens de la surface sphérique du principe de HUYGHENS; on y a de la lumière concentrée selon une loi algébrique analogue.

On a encore de la lumière résiduelle répandue dans l'espace intermédiaire aux deux fronts d'onde. La distribution en est représentée par certaines périodes d'intégrales abéliennes du genre 3, et se fait, exception faite pour les domaines singuliers logarithmiques ci-dessus, d'une manière partout continue.

En faisant l'une des constantes a, b, c , soit a , égale à une autre b , on revient d'une manière continue au cas bien connu d'un milieu aux axes optiques confondus. On sait que toute la perturbation se réduit alors à la distribution discontinue sur la surface d'onde partout convexe. On en conclut que, pour a voisin de b , la lumière diffuse continue deviendra relativement peu importante, sauf au voisinage des domaines logarithmiques, devenus, dans ces conditions, de dimensions très petites. Les quatre disques jouent alors, pour ainsi dire, le rôle de couvercles empêchant la lumière diffuse de se propager en avant du front d'onde antérieur.

Note.

Sur la permutation des points de ramification à travers I_δ .

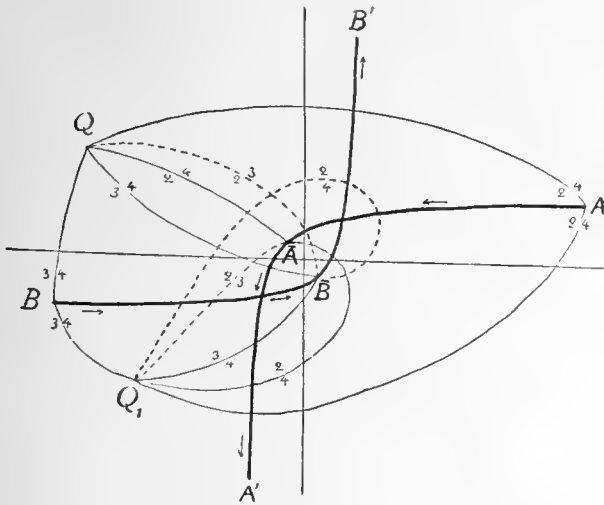
Il n'est peut-être pas superflu de remarquer que le résultat du § 4, chapitre IV, relatif à la manière dont se comportent les δ_I, δ_{II} au passage de I_δ , doit nécessairement s'accorder avec le prolongement analytique des branches β permutées. Il faut donc que des lacets issus d'un point fixe, entourant les deux points de ramification et se déformant continûment avec le déplacement continu des δ_I, δ_{II} , permutent toujours les mêmes branches β , définies au point de départ. L'équation 15) du § 4 peut s'écrire

$$\frac{\delta_I}{\delta_{II}} = a + i\varepsilon \mp (b + i\mu)^{\frac{3}{2}},$$

b passant de valeurs positives à des valeurs négatives en allant du côté réel de I_δ au côté complexe. Quand b marche à travers zéro le radical

$$+ (b + i\mu)^{\frac{3}{2}} = r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\theta}{2}}$$

décrit dans le champ complexe un chemin tel que $AA'A'$ ci-dessous (pour $\mu > 0$). La



marche correspondante de δ_{II} sera simplement figurée par une certaine translation de ce chemin. De la manière analogue BBB' représente la marche de δ_I . On voit qu'au moment de franchir I_δ les deux points exécutent un mouvement rotatoire l'un autour de l'autre, et le sens de cette rotation dépend manifestement de signe du μ , c. à. d. du coefficient $\frac{\varepsilon}{\mu}$ de la formule 15).

Si, pour $b > 0$, δ_I, δ_{II} se trouvent du côté inférieur du l'axe réel, on partira avec les

deux lacets $QB(3, 4), QA(2, 4)$, issus d'un point *au-dessus* des positions initiales de δ_I et de δ_{II} . En suivant la marche des δ_I, δ_{II} , ces lacets se déformeront dans les positions $Q\bar{B}, Q\bar{A}$. On remplace immédiatement $Q\bar{B}$ par un lacet pointillés

évidemment permutant β_2, β_3 , lequel par déformation continue deviendra le lacet joignant Q à B' directement. Le lacet $Q\bar{A}$ au contraire permet immédiatement d'être déformé dans la position QA' et permutera toujours β_2 avec β_4 . On revient donc aux points de ramification δ_{23}, δ_{24} dans les demi-plans supérieur et inférieur respectivement.

D'une façon analogue, pour l'axe réel au-dessous de la position initiale des δ_I, δ_{II} , on aura les lacets Q_1B, Q_1A , soit $Q_1\bar{B}, Q_1\bar{A}$ ci-dessus. Le second se remplace par le lacet direct pointillé $Q_1\bar{A}$, permutant β_2 et β_3 , et ensuite on remplace $Q_1\bar{B}$ par le lacet pointillé au-dessus de $Q_1\bar{A}(2, 3)$; on obtient ainsi un nouveau lacet $Q_1\bar{B}$ permutant β_2 et β_4 .

On vérifie facilement que le sens de rotation est sans conséquence pour ces conclusions; on revient donc toujours à l'énoncé du § 4.

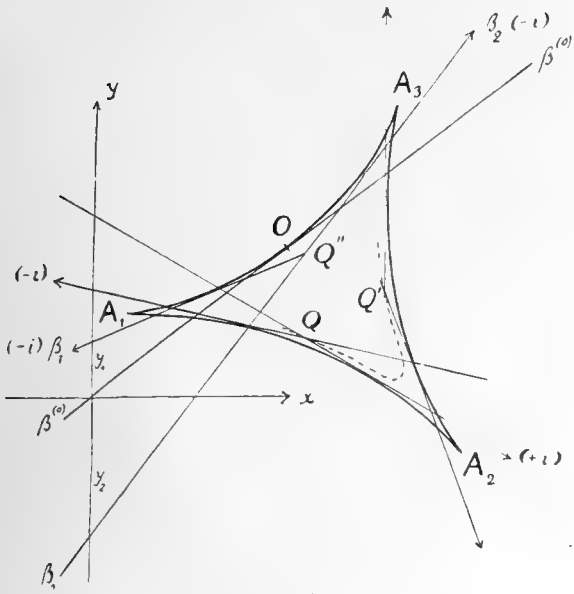


Fig. 1.

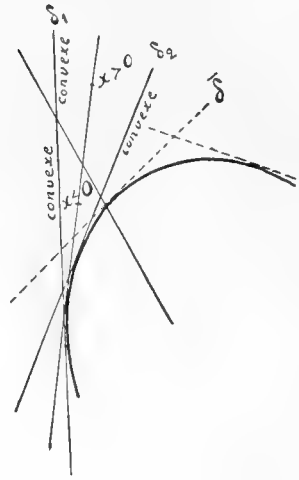


Fig. 2.

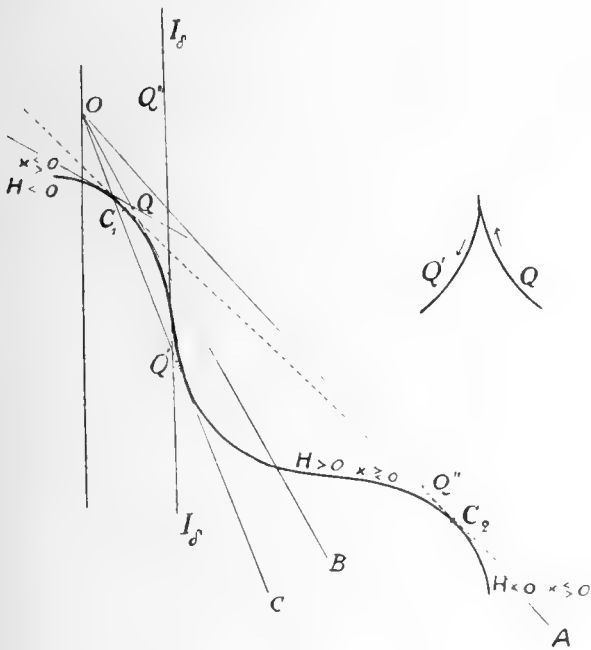


Fig. 3.

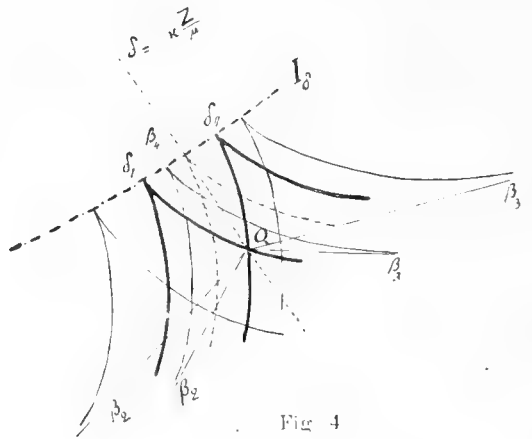


Fig. 4

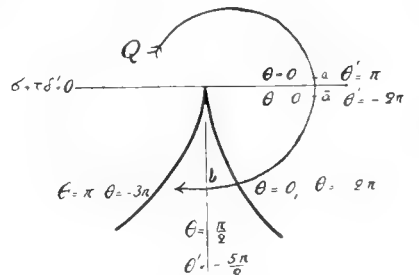


Fig. 4 b.



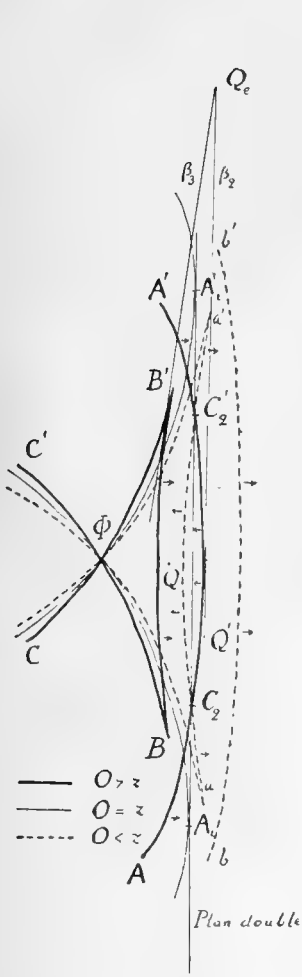


Fig. 5.

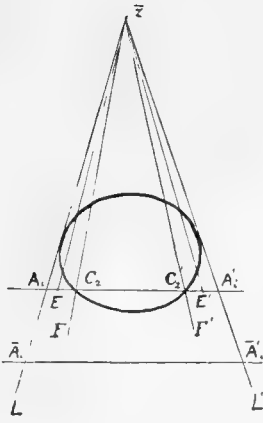


Fig. 5 b.

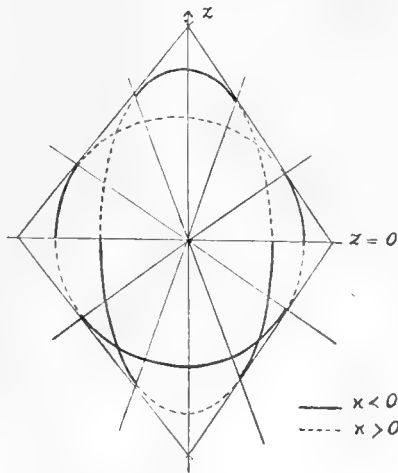


Fig. 7.

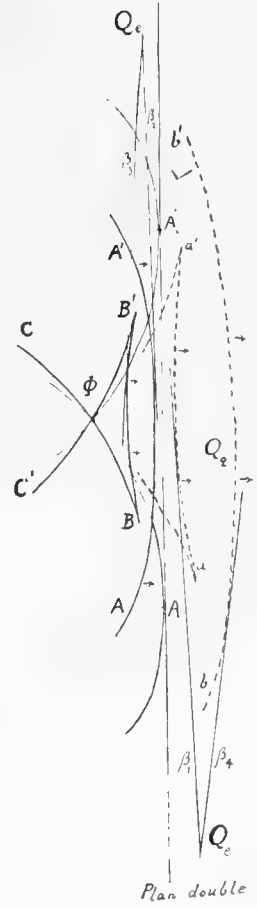


Fig. 6.

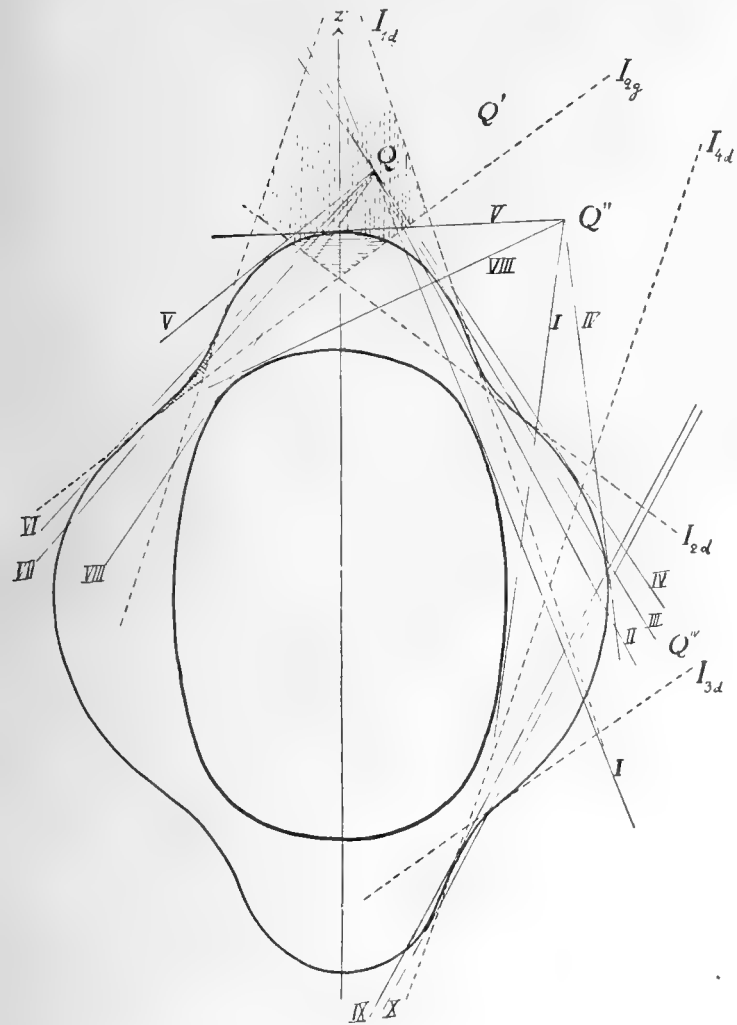


Fig. 8.

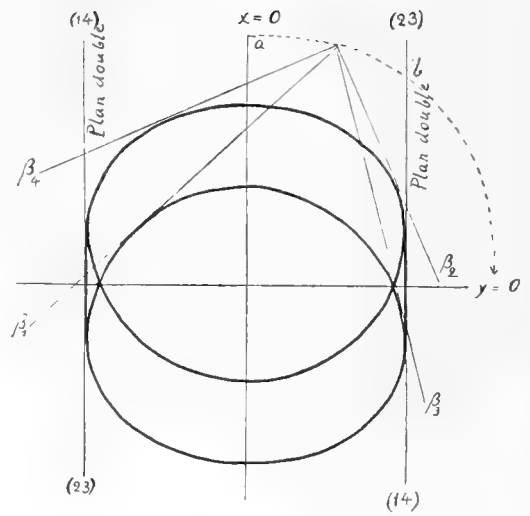


Fig. 9 c.

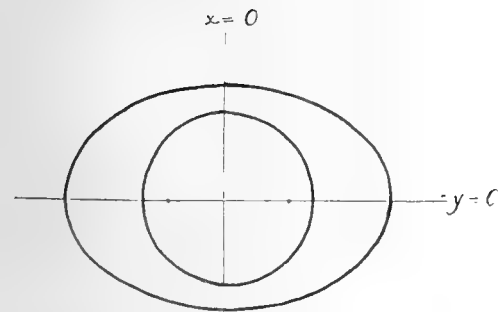


Fig. 9 a.

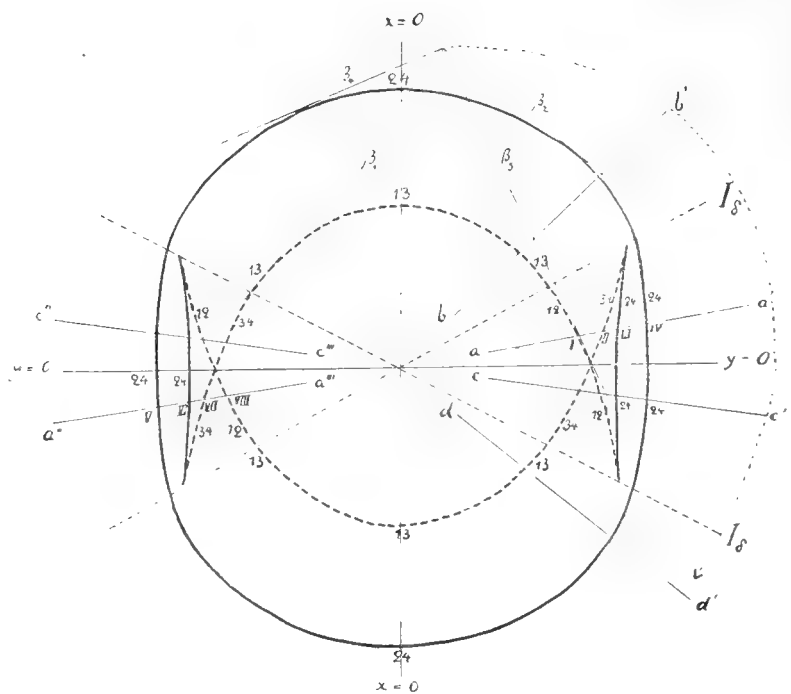


Fig. 9 b.

Errata.

Première Partie.

- Page 26, ligne 5, en remontant, lisez $\frac{1}{x^2} (x^2 f_{22} \dots)$ au lieu de $\frac{1}{x_2} (x^2 f_{22} \dots)$.
- Page 28, ligne 4, en remontant, lisez $y'^2 \frac{\partial^2 f^{(\delta)}}{\partial \alpha^2}$ au lieu de $y'^1 \frac{\partial^2 f^{(\delta)}}{\partial \alpha^2}$.
- Page 28, ligne 10, en remontant, lisez $-\frac{2y'u' \partial^2 f^{(\alpha)}}{x^2 \partial \beta \partial \delta}$ au lieu de $-\frac{2y'u' \partial^6 f^{(\alpha)}}{x^2 \partial \beta \partial \delta}$.
- Page 31, ligne 9, en descendant, lisez $x^2 P = x^2 + y^2 - u^2$ au lieu de $P = u^2 - x^2 - y^2$;
 $-x^2 Q$, $-x^2 R$, $x^4 (PR - Q^2)$ au lieu de Q , R , $PR - Q^2$ respectivement.
- Page 32, formule c, lisez $-\delta'_1 + \delta'_2 = \frac{2}{P} \sqrt{Q^2 - PR}$ au lieu de $-\delta'_1 + \delta'_2 = \sqrt{Q^2 - PR}$.
- Page 33, formule c^{bis}), lisez $P(\delta'_2 - \delta'_1)$ au lieu de $\delta'_2 - \delta'_1$.
- Page 35, formule 14, lisez f_3 au lieu de f_8 .
- Page 35, ligne 3, en remontant, lisez $f_{11}\alpha'^2 + f_{22}\beta'^2 + f_{44}\delta'^2$ au lieu de $f_1\alpha^{12} + f_{22}\beta^{12} + f_{44}\delta^{12}$.
- Page 39, tenez compte de la note de la page 48, 2^{ième} partie.
- Page 51, ligne 8, en remontant, lisez $\log(\delta_1 - \delta_2)$ au lieu de $\log(\delta_4 - \delta_2)$.
- Page 51, ligne 6, en remontant, lisez $\frac{\pi i}{2}$ au lieu de $\frac{\pi i}{4}$.
- Page 52, ligne 2, en descendant, lisez $\frac{\pi i}{2}$ au lieu de $\frac{\pi i}{4}$.
- Page 52, ligne 4, en descendant, lisez πi au lieu de $\frac{\pi i}{2}$.

Deuxième Partie.

- Page 9, formule 11), lisez $\int_{-\infty}^{+\infty}$ au lieu de $\int_{+\infty}^{+\infty}$.
- Page 31, ligne 5, en remontant, lisez $\frac{1}{8\pi^3 i}$ au lieu de $\frac{-1}{8\pi^3 i}$.
- Page 31, ligne 4, en remontant, lisez $\frac{-1}{8\pi^3 i}$ au lieu de $\frac{1}{8\pi^3 i}$.
- Page 32, formule IV, lisez $\frac{-i}{8\pi^3 u}$ au lieu de $\frac{i}{8\pi^3 |u|}$.
- Page 32, ligne 8, en descendant, lisez: Pour revenir aux notations de la 1^{ère} partie nous écrivons encore au lieu de IV, pour $u > 0$,
- Page 32, formule IV', lisez $d\beta d\delta$ au lieu de $dad\beta$
- Page 60, formule X, lisez $F_{\varepsilon, \mu, n-2}$ au lieu de $F_{\varepsilon, \varepsilon_1, n-2}$.

NOVA ACTA REGIAE SOCIETATIS SCIENTIARUM UPSALIENSIS

SER. IV. VOL. 5. N:o 5.

CYTOLOGISCHE PILZSTUDIEN

II. ZUR KENNTNIS EINIGER HEMIASCEEN

VON

H. O. JUEL.

MIT 2 TAFELN UND 4 TEXTFIGUREN.

(DER KÖNIGL. SOCIETÄT DER WISSENSCHAFTEN ZU UPSALA MITGETEILT AM 1. APRIL 1921.)

UPPSALA

EDV. BERLINGS BOKTRYCKERI A.-B.

1921

Während über die höheren oder eigentlichen Askomyceten schon mehrere eingehende cytologische Untersuchungen vorliegen, so dass die Cytologie dieser Abteilung der Pilze in ihren Hauptzügen ziemlich klar darzuliegen scheint, so kann man dasselbe nicht sagen von den Hemiasceen oder niederen Askomyceten. Zwar fehlt es nicht an cytologischen Untersuchungen über diese Pilze, die Resultate derselben sind aber bei weitem nicht so gut, wie bei den eigentlichen Askomyceten, was wohl der Kleinheit dieser Objekte und den technischen Schwierigkeiten, die mit ihrer Untersuchung verbunden sind, zuzuschreiben ist. In meinen früheren Mitteilungen über die Cytologie von *Dipodascus* und *Taphridium* hatte ich über Kernteilungen bei diesen Pilzen sehr wenig zu berichten. Seit der Zeit habe ich neue Präparate dieser beiden Hemiasceen gemacht und auch meine älteren nochmals durchmustert. Ausser diesen Objekten habe ich auch eine *Endomyces*-Art und mehrere Arten von *Taphrina* untersucht. Dank der besseren optischen Hilfsmittel, die mir in den späteren Jahren zur Verfügung standen, bin ich jetzt zu weit besseren Resultaten als früher gelangt. Bei *Endomyces* und *Taphrina* konnte ich die Kernteilungen genauer beschreiben, als es früheren Forschern gelungen war. Und meine Studien an den *Taphridium*-Arten haben unsere Kenntnisse über die Kernteilungsvorgänge in ihren Asken nicht unwesentlich gefördert. Freilich gibt es bei allen diesen Pilzen in Bezug auf diese Verhältnisse noch vieles aufzuklären. Ich glaube aber nicht, dass ich es durch fortgesetzte Studien an meinem Materiale weiter bringen würde, sondern habe mich dazu entschlossen, meine Resultate jetzt zu veröffentlichen.

Endomyces decipiens.

Taf. I, Fig. 1--22.

GUILLIERMOND hat in seiner Arbeit über die Endomycetaceen (1909) neben den Resultaten seiner eigenen Untersuchungen eine Übersicht geliefert von allem, was damals über die morphologischen Verhältnisse dieser Pilze bekannt war. Er hat ferner daran einen »Essai sur la phylogénie des Levûres« geknüpft (1909, p. 46), in welchem er die verschiedenen Gattungen der Saccharomycetaceen von verschiedenen Typen der Endomycetaceen abzuleiten versucht. Es kann nach diesen Untersuchungen und Ausführungen GUILLIERMOND's keinem Zweifel unterliegen, dass jene beiden Familien mit einander aufs engste verwandt sind.

Die Verfasser, welche die vegetativen Kernteilungen der Saccharomyces-Hefezellen studiert haben (wie JANSSENS et LEBLANC 1898, WAGER 1898, WAGER and PENISTON 1910, GUILLIERMOND 1903, 1904, 1910), sind der Ansicht, dass diese Teilungen in den meisten Fällen amitotisch sind. Nur bei *Saccharomyces Ludwigii* und *Schizosaccharomyces octosporus* wollen JANSSENS und LEBLANC »une division indirecte très réduite« beobachtet haben. Und nach GUILLIERMOND (1905, p. 362) ist die Teilung in den vegetativen Zellen von *S. saturnus* öfters mitotisch. In den Hyphenenden von *Endomyces*-Arten hat er Kernteilungen gesehen, die Bilder die er davon bekam, waren aber wenig deutlich, und er bezeichnet sie als amitotisch (1909, p. 11, 21, 28).

Im Askus von *Saccharomyces* haben JANSSENS und LEBLANC (1898) und WAGER (1898) zwei successive Kernteilungen beobachtet. Die ersteren nennen diese Teilung »une sorte de cinèse très réduite«. WAGER bezeichnet den Vorgang als eine Teilung »by elongation and constriction«, findet es aber möglich, dass hier »a simple intermediate stage of karyokinesis« vorliegt. GUILLIERMOND (1910, p. 558) nimmt an, dass die Teilungen im Askus der Saccharomyceten Mitosen sind, scheint sie aber nicht besonders studiert zu haben. Er hat dagegen Mitosen in den durch Kopulation der Sporen gebildeten Zygoten von *S. saturnus* abgebildet (1905, Pl. 8 Fig. 74). Die Bilder von Kern-

teilungen in jungen Asken von *Eremascus fertilis*, die Frl. STOPPEL gesehen hatte, waren ziemlich undeutlich, liessen aber mit Sicherheit auf mitotische Teilung schliessen. GUILLIERMOND (1909) hat in den Asken von *End. fibuliger*, *End. Magnusii* und *Saccharomyopsis capsularis* Bilder gesehen, die an Kernspindeln erinnern, wagt aber nicht zu behaupten, dass wirkliche Mitosen vorliegen.

Wenn die hier referierten bisherigen Versuche, die Kernteilungsvorgänge bei den Endomycetaceen und Saccharomycetaceen aufzuklären so wenig Erfolg gehabt haben, so liegt dies gewiss an den technischen Schwierigkeiten, die mit dem Studium dieser Objekte verbunden sind. Bei meiner Arbeit mit *Dipodascus* hatte ich die Erfahrung gemacht, dass für Kernstudien die Mikrotomschnitte weit geeigneter waren, als die Präparate, die ich durch Totalfärbung und nachheriges Überführen in Glycerin oder Balsam verfertigt hatte. Es gibt aber eine *Endomyces*-Art, die sich zum Herstellen von Mikrotomschnitten vorzüglich eignet, nämlich *E. decipiens* TUL., die in *Armillaria mellea* parasitisch lebt. Die angeschwollenen Lamellen, in denen der Parasit seine Mycelien und Asken entwickelt, können fixiert und in Paraffin eingebettet werden. Meine Vermutung, dass von diesem Pilze hergestellte Mikrotomschnitte einige neue Tatsachen in Bezug auf die Kernteilungen erschliessen würden, hat sich als richtig erwiesen. Ich will die Resultate dieser Untersuchung jetzt mitteilen.

Das Material wurde in verdünntem Zinkchlorid-Essig-Alkohol fixiert, und die Mikrotomschnitte mit Eisen-Hämatoxylin und Lichtgrün-Nelkenöl gefärbt. Meine Präparate enthalten junge vegetative Mycelien und ältere Mycelien mit Massen von Asken in verschiedenen Entwicklungsstadien. Die jüngsten Entwicklungsstadien konnte ich jedoch leider nicht finden.

Die Zellen des Mycels sind immer einkernig. Die Kerne sind sehr klein, zeigen aber deutlich einen Nukleolus und Chromatinkörper. In den peripherischen Teilen der Mycelmassen, wo die Hyphen noch im Wachstum sind, habe ich nach Kernteilungen gesucht, diese scheinen aber in meinen Präparaten nicht häufig vorzukommen und sind auch wegen ihrer Kleinheit schwierig zu erkennen. Die Bilder von solchen, die ich hier reproduziert habe, waren etwas undeutlich, ich habe aber den bestimmten Eindruck, dass hier keine einfache Durchschnürungen, sondern wirkliche Mitosen vorliegen (Fig. 1—3 Taf. 1).

Bei den *Eremascus*-Arten entsteht der Askus, gerade wie bei *Dipodascus*, durch die Kopulation zweier kurzer Mycelzweige, deren beide Kerne im Askus verschmelzen. *Endomyces Magnusii* LUDW. verhält sich ähnlich, nur sind die beiden Zweige verschieden, die Befruchtung ist heterogam. Bei *End. fibuliger* LINDN. entstehen an den askusbildenden Hyphen paarweise stehende kurze Äste, die sich aneinander legen, und die den kopulierenden Ästen der vorigen deutlich entsprechen. Nach GUILLIERMOND'S Angaben soll aber keine Fusion eintreten, der Ascus entsteht an der Spitze des einen Astes und ist von Anfang an einkernig. Jene Kopulationszweige sind also rudimentär, und Apogamie ist eingetreten. *End. capsularis* (SCHÖNN.) hat keine solche kopulierende Äste, die Askusbildung ist ganz ungeschlechtlich. Nach den Angaben TULASNE'S und BREFELD'S verhält es sich so auch mit *E. decipiens*.

Ich hielt es für nötig, diese älteren Angaben über die Entstehung der Asken bei *E. decipiens* nachzuprüfen. Aus GUILLIERMOND'S Abbildungen (1909, Pl. 14 und 15) ersieht man, dass bei *E. fibuliger* die kopulierenden Äste, die bei jener Art funktionslos sind, ziemlich unscheinbar sein können, und es wäre daher möglich, dass solche Organe bei *E. decipiens* übersehen worden sind. Ich untersuchte in Formalin konserviertes Material des Pilzes, fand aber am Grunde der Asken keine Spuren von Kopulationen. Dagegen habe ich in den Mikrotomschnitten an ein paar Stellen wirklich einige Kopulationen gefunden (Fig. 4—6). Einmal sah ich sogar einen Askus, der als das Resultat einer Kopulation entstanden zu sein schien. Dies sind aber entschieden nur Ausnahmefälle, die als Atavismen aufgefasst werden können.

Die allerjüngsten Entwicklungsstadien der Asken habe ich in meinen Präparaten nicht gefunden. Vielleicht werden die Asken in den fertilen Myzelmassen ziemlich simultan angelegt, und war mein Material schon zu weit in seiner Entwicklung vorgeschritten. Die jüngsten Asken, die ich gesehen, sind schon ziemlich gross und enthalten einen Kern, der weit grösser und auch reicher an chromatischer Substanz als derjenige der vegetativen Zellen ist.

Von der ersten Kernteilung im Askus habe ich nur selten Prophasen gesehen, wahrscheinlich weil der Kern in diesen Stadien empfindlich ist und meistens schlecht fixiert wird. Die beiden Bilder, die ich reproduziert habe (Fig. 7, 8), zeigen einen recht grossen Kern

mit einem ausgeprägten Chromatinfaden und sind dadurch den Spiremstadien heterotypischer Teilungen ähnlich. Kernspindeln in verschiedenen Stadien habe ich oft gesehen. Die Kernwandung bleibt während des ganzen Teilungsprozesses erhalten, und die Spindel liegt anfangs diametral im Kern mit ihren Polen in der Kernwandung. Am Äquator liegt eine dichte Chromatinmasse, in der die einzelnen Chromosomen nicht zu unterscheiden sind. Ebenso wenig kann man die Fasern unterscheiden, welche die achromatische Spindel bilden (Fig. 9). In späteren Stadien verlängert sich die Spindel erheblich (Fig. 10—12). Zuweilen dehnt sich dabei auch die Kernwandung entsprechend aus, öfters dringt aber das eine oder beide Enden der Spindel durch dieselbe hervor. Wie sich die Chromosomen während der Teilung verhalten, konnte ich wegen der Kleinheit dieser Objekte nicht ermitteln.

Die Tochterkerne und die Kernfiguren der zweiten Teilung sind weit kleiner (Fig. 13). Auch bei dieser Teilung verlängern sich die Spindeln, aber nicht so stark (Fig. 14, 15). Es entstehen vier Kerne, die ungefähr so gross sind wie die vegetativen (Fig. 16).

Die jetzt folgenden Vorgänge sind sehr schwierig zu beobachten. Es werden bei dieser Art immer nur 4 Sporen im Askus gebildet, und man sollte daher erwarten, dass nach der zweiten Kernteilung sofort die Sporenbildung eintreten müsste, dass also die in Fig. 16 und Fig. 22 dargestellten Stadien unmittelbar auf einander folgen würden. Dem ist aber nicht so, denn dazwischen liegen Vorgänge, die schwierig zu verfolgen sind, weil das Plasma nach der zweiten Teilung sich zu einem dichten Klumpen in der Mitte des Askus ansammelt, und die kleinen Kerne innerhalb dieser Masse gehäuft liegen. Was diese Vorgänge, von denen einige Bilder in Fig. 17—21 dargestellt sind, zu bedeuten haben, ist schwierig zu verstehen. Es entstand bei mir der Verdacht, dass vielleicht eine dritte Kernteilung hier vor sich geht, und ich habe viel Mühe darauf verwendet nach Bildern zu suchen, die eine solche Vermutung bestätigen könnten. In einigen Fällen glaubte ich in der Tat in Kernen des Vierkernstadiums diametral liegende stabförmige Körper zu sehen, die Kernspindeln sein könnten. Fig. 17 stellt einen solchen Askus vor. In anderen Fällen glaubte ich in der zentralen Plasmamasse mehr als vier, vielleicht doppelt so viele, Kerne zu sehen, wie Fig. 18 es zeigt. Diese Bilder waren aber nicht so deutlich, dass ich zu behaupten wage, diese Deutungen seien richtig.

Nach Abschluss der Kernteilungen tritt die Ausbildung der vier Sporen ein. Ein Entwicklungsstadium, das ich mehrmals beobachtet habe, zeigt in der zentralen Plasmamasse vier parallel liegende eng spindelförmige und dunkel gefärbte Körper (Fig. 19). In anderen Stadien, die ich als spätere auffasse, teilt sich die Plasmamasse in vier parallele Portionen, und die färbbare Substanz sammelt sich in der Mitte jeder Portion, und noch später findet man an jeder dieser Stellen einen Kern (Fig. 20). Diese Portionen sind die Sporenanlagen. Die Sporen werden dann von Membranen umkleidet, behalten aber zuerst ihre längliche Form und parallele Lagerung bei (Fig. 21). Später werden sie dicker und werden umgelagert, so dass sie den Askusraum ausfüllen (Fig. 22). Von überzähligen Kernen war während der Ausbildung der Sporen nichts zu sehen.

Weil ich in meinen Präparaten dieses Pilzes die Chromosomen nicht deutlich sehen und noch weniger zählen konnte, so kann ich über die Kernphasenverhältnisse nur Vermutungen aussprechen. Der Askusbildung geht keine Kopulation voraus, und es wäre daher am einfachsten anzunehmen, dass die Chromosomenzahl während der ganzen Entwicklung unverändert bleibt. Die erste Teilung im Askus zeigt aber einige Züge, die unstreitig an eine heterotypische Teilung erinnern, nämlich die Grösse des Kerns und der Kernfigur, sowie das Auftreten eines Spiremstadiums. Wenn wir daher annehmen, dass im Askus eine Reduktion stattfindet, müssen wir auch annehmen, dass die Kerne sowohl im jungen Askus als in den Zellen des askusbildenden Mycel diploid sind, die aus der Reduktionsteilung im Askus hervorgehenden Kerne dagegen haploid. Wenn die Sporen haploide Kerne haben, so müsste aus ihnen ein Mycel mit haploiden Kernen entstehen, und der Übergang von der haploiden zur diploiden Phase müsste dann im vegetativen Mycel stattfinden, z. B., durch Kopulationen zwischen Mycelzellen. Die Kopulationen, die ich beobachtet habe (Fig. 4—6), haben ganz den Anschein rudimentärer Gebilde und sind auch zu selten, um zur Erklärung herbeigezogen zu werden, denn wenn solche Kopulationen eine Rolle im Kernphasenwechsel spielten, müssten sie regelmässig auftreten. Wenn also dieser Wechsel nicht im Mycel stattfindet, so müssen wir annehmen, dass das ganze Mycel diploid ist, und dass der Übergang zu dieser Phase der Bildung des Mycel vorangeht. Sporenkopulationen sind nicht bei *Endomyces*-Arten beobachtet worden, kom-

men aber unter den Saccharomyceten vor. Nach GUILLIERMOND (1905) kopulieren die Sporen von *S. Ludwigii* fast regelmässig, und dieser Vorgang ist mit einer Kernfusion verbunden. Die Kopulationen finden bei dieser Art oft schon innerhalb des Askus statt. Dass die Sporen von *E. decipiens* nicht kopulieren, dürfte sicher sein, denn BREFELD (Untersuchungen IX, p. 134) hat bei seinen Kulturen des Pilzes solche nicht gesehen. Es bleibt dann nur der Ausweg, eine Kernfusion im Askus vor der Sporenbildung anzunehmen. Einige Bilder, die ich oben erwähnt habe, deuten auf eine dritte Kernteilung im Askus hin (Fig. 17 und 18). Während der Sporenbildung sah ich keine übriggebliebenen Kerne im Askus, obgleich nur vier Sporen gebildet werden. Dies könnte erklärt werden, wenn wir annehmen, dass die acht Kerne im Askus paarweise mit einander kopulieren, so dass die vier Sporen diploide Kerne bekommen.

Das Resultat dieser Erwägungen ist also, dass bei *E. decipiens* zwei Alternativen möglich sind, entweder gänzliches Fehlen eines Kernphasenwechsels, oder dieser Wechsel findet ausschliesslich im Askus statt, nämlich durch eine Reduktion und eine gleich darauf folgende Fusion. Im letzteren Falle wäre diese Art mit *Saccharomyces Ludwigii* zu vergleichen, denn dieser Pilz dürfte in den vegetativen Zellen diploide und nur in den Sporen haploide Kerne haben.

Dipodascus albidus.

Taf. I, Fig. 33 und 34.

Bei meiner früheren Untersuchung über diesen Pilz (JUEL 1902) konnte ich keine Kernteilungsstadien finden. DANGEARD gelang es später ein solches Stadium zu beobachten, er hat nämlich eine Telophase der dritten Teilung im Askus abgebildet (DANGEARD 1907, Pl. II Fig. 3).

Bei einer späteren Durchmusterung meiner *Dipodascus*-Präparate traf ich einmal auf ein paar Kernteilungsbilder, die ich hier reproduziere. Das eine zeigt den Fusionskern, der ziemlich gross ist und einen spiremartigen Chromatinfaden besitzt (Fig. 33). Der zweite Fall

zeigt diesen Kern in der Telophase seiner Teilung (Fig. 34). Aus der Grösse dieses Kerns und aus dem Aussehen der Prophase darf man wohl schliessen, dass hier eine Reduktionsteilung vorliegt. Ich habe auch spätere Mitosen im Askus gesehen, die Kernfiguren waren aber sehr klein und bildeten nur kleine an den Enden verdickte Stäbchen.

Taphridium.

Taf. I, Fig. 23–32.

Die Gattung *Taphridium* wurde von LAGERHEIM und mir (JUEL 1901, 1902) aufgestellt. Der Typus der Gattung ist *Taphrina umbelliferarum* ROSTR., in welcher wir einen zu den Protomycetaceen gehörenden Pilz erkannt hatten, und für welche wir die neue Gattung bildeten. Der von uns untersuchte Pilz wächst auf *Heracleum sibiricum* L., die auf *Peucedanum*-Arten wachsenden Formen werden vorläufig zu derselben Art gerechnet. Als besondere Art schied ich aber eine auf *Ferula communis* L. wachsende Form aus, die ich *T. algeriense* nannte. VOLKART (1903) beschrieb einen auf *Crepis blattarioides* (L.) wachsenden Pilz als *Taphrina rhaetica*, erkannte aber später, dass er zur Gattung *Taphridium* gehört, und von BÜREN (1915, p. 69) nennt ihn *T. rhaeticum* VOLKART. Ohne Zweifel ist es dieselbe Art, welche LAGERHEIM auf *C. succisifolia* (ALL.) gesammelt und in VESTERGRÉN'S Microm. sel. Nr. 719 unter dem Namen *Taphridium Crepidis* ohne Beschreibung distribuiert hat. MAIRE (1908, p. CXLVI) fand sie auf *C. pygmaea* L. und bildete für sie die neue Gattung *Volkartia*, weil sie sich von *Taphridium* dadurch unterscheidet, dass die aus den Sporangien hervortretenden Schläuche länglich sind und ein *Taphrina*-ähnliches Hymenium bilden. LIRO (LINDROTH 1904) beschrieb eine auf *Cicuta virosa* L. wachsende neue Art als *T. Cicute* LINDR., die jedoch, wie ich unten zeigen werde, nicht in diese Gattung gehören dürfte. Endlich hat von BÜREN (1915, p. 70) die von SAPPIN-TRUFFY und DANGEARD behandelte auf *Helosciadium inundatum* (L.) KOCH wachsende *Protomyces*-Form, für welche der letztere den Artnamen *P. inundatus* vorgeschlagen hatte, in die Gattung *Taphridium* unter dem Namen *T. inundatum* (DANG.) BÜREN

gestellt, weil sie nach den Angaben der beiden französischen Verfasser ihre Sporen innerhalb der Chlamydospore bildet. Später hat er aber festgestellt, dass diese Art sich nicht immer so verhält, sondern dass sie oft nach Art eines *Protomyces* einen Schlauch aus der Chlamydospore heraustreten lässt, in welchem die Sporenbildung stattfindet, und er (VON BÜREN 1917) bringt sie daher in die Gattung *Protomyces* zurück.

VON BÜREN (1915) will die *Taphridium*-Arten auf zwei Gattungen verteilen, für die Arten *umbelliferarum* und *rhaeticum* bildet er die Gattung *Volkartia* MAIRE (emend.), in der Gattung *Taphridium* behält er die Art *algeriense*. Über die Berechtigung dieser Teilung der Gattung will ich mich jetzt nicht äussern, sondern vorläufig nur die Nomenklaturfrage behandeln. Der Gattungsname *Taphridium* wurde von mir zuerst in einer Mitteilung über algerische Pilze (1901) publiziert, und dort wurde auch die neue Art *T. algeriense* zuerst beschrieben. Aber sowohl dort als in der ausführlicheren Abhandlung über *Taphridium* (1902) habe ich recht deutlich hervorgehoben, dass die neue Gattung für die Art *Taphrina umbelliferarum* ROSTR. aufgestellt worden war, und dass ich die auf *Ferula* wachsende Form von jener Art ausscheiden und mit dem Namen *algeriense* belegen wollte. Der Typus der Gattung *Taphridium* ist also die Art *umbelliferarum*. Wenn *Volkartia rhaetica* MAIRE in diese Gattung gestellt wird, wie es VON BÜREN will, so wird der Name *Volkartia* nur ein Synonym zu *Taphridium*. Wenn aber die Art *algeriense* eine selbständige Gattung bilden soll, so muss sie einen neuen Gattungsnamen bekommen.

Durch die trefflichen Arbeiten VON BÜREN's sind unsere Kenntnisse über die morphologischen und biologischen Verhältnisse der *Protomyces*-Arten wesentlich erweitert worden. Er hat diese Arten auch cytologisch studiert und hat unter anderem die Vierteilung der Sporenmutterzellen konstatieren können. Dagegen scheint mir sein Versuch, die Vorgänge im Sporangium zur Begrenzung der Gattungen zu verwenden, verfehlt zu sein (VON BÜREN 1915, p. 71, 1917, p. 22). Er stützt sich nämlich dabei auf Angaben und Vermutungen, die ich in meiner früheren Arbeit ausgesprochen habe, die aber unten berichtigt werden sollen. Wichtig ist seine Entdeckung, dass *Prot. inundatus* sowohl Dauerechlamydosporen als Sommerchlamydosporen bildet, und er zieht mit recht daraus den Schluss, dass dies Merkmal zur Gattungsbegrenzung nicht zu brauchen ist. Als unterscheidende⁶⁶ Merkmal zwi-

schen *Protomyces* und *Taphridium* bleibt dann nur die Bildungsstätte der Chlamydosporen übrig, bei *Protomyces* liegen sie in den tieferen Geweben unregelmässig gehäuft, bei *Taphridium* bilden sie unter der Epidermis eine zusammenhängende Schicht. Zwischen diesen beiden Typen sind bisher keine Zwischenformen bekannt. *Taphridium Cicute* LINDR. bildet die Chlamydosporen im Mesophyll und dürfte daher ein *Protomyces* sein, wahrscheinlich mit *P. inundatus* nahe verwandt, weil die Chlamydosporen nicht überwintern.

Über die Berechtigung der Gattung *Volkartia* MAIRE (nicht von BÜREN) kann ich mir keine bestimmte Meinung bilden, da ich die dazu gehörende Art *V. rhaetica* nicht gesehen habe. Die Abbildung VOLKART'S lässt vermuten, dass die Schläuche hier ganz nach Art einer *Taphrina* gebildet werden, also ohne Trennung zwischen Endo- und Exosporium. Wenn es sich so verhält, so unterscheidet sich diese Art hierdurch von allen anderen Protomycetaceen und MAIRE'S Gattung dürfte dann mit Recht bestehen.

Ich will jetzt meine neuen Resultate in Bezug auf die Cytologie von *Taphridium umbelliferarum* und *algeriense* mitteilen.

Taphridium umbelliferarum.

Taf. I, Fig. 23—29.

Das Entwicklungsstadium des Sporangiums, das ich in meiner früheren Arbeit (1902) in Fig. 2 abgebildet habe, bezeichnet offenbar eine neue und wichtige Phase in der Entwicklung. Die Kerne sind weit grösser als in den vorhergehenden Stadien und befinden sich in einem Spiremstadium. Beides kann vielleicht als Vorbereitung zu einer Reduktionsteilung erklärt werden. Der Übergang von dem kleinkernigen Stadium scheint sich aber ziemlich schnell zu vollziehen, und man bekommt den Eindruck, dass die grossen Kerne nicht so zahlreich sind, wie vorher die kleinen. Dies erweckt den Verdacht, dass die grossen Kerne durch Fusionen der kleinen entstanden sein könnten. Ich habe mich bemüht solche Fusionen zu entdecken, bin aber zu keinem sicheren Resultate gelangt. Eine paarige Verteilung der Kerne konnte ich weder in vegetativen Zellen, noch in den jungen Sporangien bemerken. In den Stadien, die dem Auftreten der grossen Kerne vorangehen, sah ich zuweilen Kerne von etwas verschiedener Grösse, wobei die grösseren durch Fusion von kleinen entstanden sein könn-

ten, die Verschiedenheit könnte aber auch dadurch erklärt werden, dass nicht alle Kerne gleichzeitig in die Zuwachsperiode eintreten.

Bei meiner Darstellung beginne ich jetzt mit der eben erwähnten spiremähnlichen Phase (Fig. 23). Die Vorbereitungen zu den bald erfolgenden Kernteilungen zeigen sich darin, dass die Kerne gegen die Peripherie wandern und dabei eine Kontraktion erleiden (Fig. 24). Der Chromatinfaden zieht sich zu kürzeren Fäden oder Klumpen zusammen, die intensiv gefärbt sind, und der ganze Kern erscheint dabei kleiner als im Spiremstadium.

Über die Kernteilungen im Sporangium hatte ich in meiner früheren Arbeit nur wenig mitzuteilen, und die Abbildung, die ich dort in Fig. 3 gegeben habe, ist insofern unglücklich, als sie die Vorstellung erweckt, als lägen die in Teilung begriffenen Kerne im Sporangium zerstreut. Die Figur war nach einer Reihe von Schnitten zusammengestellt und sollte die Oberfläche des Sporangiums darstellen. Wenn die Kerne sich teilen, liegen sie nämlich alle, oder wenigstens die allermeisten, an der Peripherie. Es werden zwei Teilungen ausgeführt, die wahrscheinlich ziemlich schnell aufeinander folgen.

Sobald die Kerne an die Sporangiumwand gelangt sind, teilen sie sich. In dem in Fig. 25 dargestellten Sporangium liegen die Kerne im allgemeinen an die Wand gedrückt und enthalten innerhalb der noch erhaltenen Kernwand eine meistens tangential gerichtete Kernspindel. Eine Anzahl Kerne sind noch im Innern des Sporangiums zurückgeblieben und auch einige von diesen scheinen Kernspindeln zu enthalten.

Nach dieser Kernteilung folgt wahrscheinlich sehr rasch eine zweite, die in Fig. 26 dargestellt ist. Die Kernfiguren liegen hier weit dichter und sind doppelt so klein als diejenigen der in Fig. 25 abgebildeten ersten Teilung. Die zweite Teilung ist ausgeprägt simultan. Alle Kernfiguren liegen an der Wand, im Innern liegen nur einige Kerne, welche die erste Teilung nicht mitgemacht haben, und die wahrscheinlich nicht mehr entwicklungsfähig sind. Die Kernspindeln liegen auch bei der zweiten Teilung ziemlich tangential und sind noch von ihren Kernwandungen umgeben. Ein Schlussstadium dieser Teilung zeigen Fig. 27 und 28. Die Kerne liegen hier alle an der Peripherie, sehr dicht und in gleicher Entfernung von einander geordnet. Sie bestehen nur aus einer dichten Chromatinmasse ohne Kernwand und scheinen durch Plasmazüge miteinander verbunden zu sein. Später

bekommen sie Wände und die verbindenden Plasmazüge verschwinden. Das Innere des Sporangiums enthält in diesen Stadien nur degenerierende Kernreste.

Während dieser letzteren Vorgänge hat sich das Plasma im Sporangium in eine dichtere peripherische Zone und eine inhaltsärmere, von grossen Vakuolen erfüllte innere Partie abgesondert. In der peripherischen Zone, welche sämtliche Kerne enthält, tritt jetzt die Sporenbildung ein. In keinem Falle habe ich etwas bemerkt, was auf eine vorhergehende Bildung von Sporenmutterzellen deuten könnte. Die Sporen müssen also direkt in der peripherischen Plasmamasse entstehen. Wie dies zugeht, ist wegen der Kleinheit der entstehenden Sporen schwierig zu beobachten. In dem in Fig. 29 abgebildeten Schnitte sieht man in dieser Plasmamasse zahlreiche kleine runde Körper, die wahrscheinlich junge Sporen sind. Sie sind nur schwach und diffus gefärbt, so dass ich keinen Kern in ihnen wahrnehmen konnte. Sie liegen nicht mehr in einer einzigen Schicht, und scheinen auch zahlreicher zu sein, als die Kerne im vorhergehenden Stadium (Fig. 28). Ich vermute daher, dass zwischen diesen Stadien noch eine Kernteilung liegt, wahrscheinlich mit mehr oder weniger radial gerichteten Kernspindeln. Später wird die peripherische Zone allmählich breiter, und die inhaltsarme Partie in der Mitte wird kleiner. Die Sporen verlassen die Peripherie und verteilen sich im Sporangiumraum. Sie sind jetzt gewachsen und stellen kugelförmige Körper mit einem deutlichen Kern dar. Dieses Stadium ist in meiner früheren Arbeit (1902) in Fig. 4 abgebildet. Ausser den Sporen enthält das Sporangium auch übriggebliebene Kerne. Man kann diese auch in etwas älteren Sporangien finden, zuweilen zu grösseren Klumpen zusammengeballt. Wahrscheinlich werden sie dann bald aufgelöst, denn in reifen Sporangien fand ich keine Kernreste mehr.

In meiner früheren Arbeit hielt ich es für möglich, dass jene runden jungen Sporen, die jetzt überall im Sporangium zerstreut liegen, Sporenmutterzellen sein könnten, und dass die wirklichen Sporen aus ihnen durch Teilungen entstehen würden. Zwar hatte ich keine solchen Teilungen gesehen, aber die auffallende Unähnlichkeit dieser jungen Sporen mit den Sporen im reifen Sporangium erweckte in mir einen Zweifel an der Identität dieser Gebilde, und ich nahm daher meine Zuflucht zu der Annahme, dass hier ein Teilungsstadium vor-

komme, obgleich ich es in meinen Präparaten nicht gefunden hatte. Ich bin jetzt überzeugt, dass keine solchen Teilungen vorkommen, sondern dass jene runden Zellen wirklich die eigentlichen Sporen sind. Sie sind aber nicht, wie ich früher annahm, überall im Sporangium entstanden, sondern, wie oben beschrieben ist, an der Peripherie desselben und nach einer Periode von Kernteilungen, die ich früher zum Teil übersehen hatte, weil diese Teilungen nur selten zu beobachten sind.

Es bleibt aber zu erklären, wie die ei- oder birnförmigen Sporen, die das reife Sporangium erfüllen, aus den runden Sporen im jungen Sporangium entstehen. Die letzteren färben sich nur schwach, ihr Inhalt scheint homogen und ihr Kern tritt wenig deutlich hervor, während die Sporen im reifen Sporangium eine weit deutlichere Struktur und eine kräftigere Färbung zeigen. Übergänge zwischen den beiden Typen konnte ich nicht finden. Ich muss daher auch jetzt bezweifeln, dass diese Gebilde identisch sind. ROSTRUP (1890) und MASSALONGO (1889) haben behauptet, dass die Asken von Konidien erfüllt sind, welche durch Sprossung der Sporen entstanden sind. Sie haben aber den Pilz für eine *Taphrina* angesehen, und konnten die Vielsporigkeit der Asken wohl nicht anders als durch Konidiensprossung erklären. Ob sie eine solche wirklich wahrgenommen, ist daher zweifelhaft. Dagegen scheint mir eine Angabe von MAIRE über *Taphridium rhaeticum* zuverlässiger, weil er weiss, dass es sich um eine Protomycetacee handelt. Er sagt nämlich (1908, p. CXLVI) von den Sporen: »Elles apparaissent de suite en nombre considérable, et se multiplient encore par bourgeonnement.» Ich vermute, dass ein solcher Vorgang auch bei *T. umbelliferarum* stattfindet, obgleich ich in meinen Präparaten keine Sprossungsstadien wahrnehmen konnte. Vielleicht können diese Verhältnisse besser an frischem Material als an Mikrotomschnitten beobachtet werden. Die birnförmigen Zellen im reifen Sporangium dürften also nicht Sporen, sondern Konidien sein.

Taphridium algeriense.

Taf. I, Fig. 30—32.

Auch bei dieser Art tritt in den Sporangien ein Stadium ein, in welchem die Kerne an Grösse zunehmen und eine deutlichere Struktur mit einem Nukleolus und einem spiremartigen Chromatinfaden bekommen. In meiner früheren Arbeit ist dieses Stadium in Fig. 8 abgebil-

det. Das nächste damals beobachtete Stadium zeigte erheblich kleinere, in der Peripherie gelagerte Kerne, und ich vermutete, dass diese durch eine Teilung der grossen Kerne entstanden seien. Ich habe jetzt diese Teilung gefunden. Sie ist ausgeprägt simultan, alle Kernfiguren liegen dabei in der Peripherie, sind tangential gerichtet und liegen diametral in der noch ziemlich deutlich begrenzten Kernhöhle (Fig. 30). Diese Teilung dürfte der ersten Teilung bei *T. umbelliferarum* entsprechen, die Spindeln liegen in ungefähr derselben Entfernung von einander, wie bei dieser, sie sind aber etwas kleiner. Auf diese Kernteilung folgen die Entwicklungsstadien, die ich früher beschrieben und abgebildet habe (1902, Fig. 9—12), und die in der Bildung der peripherisch gelagerten Sporenmutterzellen resultieren.

Etwas später treten in den Sporenmutterzellen Kernteilungen ein. Ich habe nur in ein paar Sporangien solche Teilungen beobachtet, und die Bilder waren nicht sehr deutlich. Der in Fig. 31 abgebildete Fall zeigt in mehreren Mutterzellen Kernspindeln, die an der Wandung der Zelle liegen. Der zweite Fall ist in Fig. 32 dargestellt. Dies ist eine Telophase, die Chromatinmassen liegen an der Wandung und sind noch durch Faserzüge verbunden. Vielleicht ist es die Telophase einer zweiten Teilung in den Mutterzellen, denn zuweilen glaubte ich die Reste zweier Spindeln in einer Zelle zu sehen. Über die Weise, in welcher die Sporen, dann erzeugt werden, konnte ich keine Klarheit gewinnen. Aus der Zahl und der Anordnung der eben gebildeten Sporen (vergl. Fig. 11 und 13 meiner früheren Arbeit) bekommt man den Eindruck, dass mehr als zwei Sporen aus jeder Sporenmutterzelle entstehen müssen. Diese Annahme stimmt mit VON BÜREN'S Beobachtungen (1915, p. 15) überein, denn nach ihm bildet jede Mutterzelle bei *P. macrosporus* vier Sporen. Eine dem Stadium der Sporenmutterzellen vorausgehende Kernteilung, wie sie bei *T. algeriense* vorkommt, hat er bei *Protomyces* nicht beobachtet, aber es ist wohl nicht ausgeschlossen, dass er dieses Stadium übersehen hat.

Durch die neuen Tatsachen und Berichtigungen früherer Angaben, die ich oben hervorgelegt habe, hat es sich herausgestellt, dass *Tuphvidium umbelliferarum* sowohl mit *T. algeriense* als mit den übrigen Protomycetaceen näher übereinstimmt, als ich früher geglaubt hatte. Auch bei *T. umbelliferarum* sammelt sich die Hauptmenge des Plasmas zu einer dichteren Schicht an der Peripherie des Sporangiums, und hier

finden die Teilungen und die Sporenbildung statt. Eine Aufteilung jener Plasmaschicht in Portionen oder Sporenmutterzellen scheint dagegen nicht stattzufinden, und dies bildet einen wichtigen Unterschied zu den meisten übrigen Repräsentanten der Familie. In dieser Beziehung scheint aber *Protomyces inundatus* eine Mittelstufe einzunehmen, denn bei dieser Art fand VON BÜREN (1917, p. 5) die Plasmaportionen nur undeutlich gegen einander begrenzt.

Ich habe in meiner früheren Arbeit (1902, p. 25) angenommen, dass die Sporangien der Protomycetaceen mit Sporangien der Phycomyceten (z. B. Saprolegnia) homolog wären, also gonidienbildende Organe, die mit dem geschlechtlichen Cyclus der Pflanze nichts zu tun hätten. Seit der Zeit sind aber viele neue Tatsachen in Bezug auf die Entwicklungsgeschichte der Pilze bekannt geworden, und neue Gesichtspunkte sind in den Vordergrund getreten. Wir suchen jetzt bei den Pilzen einen Kernphasenwechsel festzustellen. VON BÜREN (1915, p. 73) hat schon die Protomycetaceen von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet. Er nimmt an, »dass in der jungen Dauerspore die Kernverschmelzung stattfindet, und dass ferner die Reduktion bei der Bildung der Sporen im Moment der Vierteilung der Sporenmutterzelle erfolgt.« Bei der Betrachtung der Frage, an welcher Stelle die Kerne, die später verschmelzen, in die gleiche Stelle zusammengeführt werden, weist er darauf hin, dass dies wohl bei der Kopulation der Sporen, die ja bei mehreren Protomycetaceen beobachtet wurde, geschehen könnte. Er hat ferner in den Sporangien von *P. macrosporus* zu wiederholten Malen Bilder angetroffen, die eine deutliche paarige Annäherung der Kerne zeigen, hält aber diese Beobachtungen nicht für entscheidend, weil es sich auch um späte Telophasen handeln könnte (l. c., p. 18).

Für die Auffassung, dass die Kernteilungen, die zur Sporenbildung führen, eine Reduktionsteilung darstellen, sprechen mehrere Umstände. Solche sind der plötzliche Zuwachs der Sporangiumkerne, das Spiremstadium, das sie dann durchlaufen, das Auftreten zweier aufeinander folgender und simultan ausgeführter Teilungen. Diese Sporangien sind daher nicht mit den Sporangien der Saprolegnien zu vergleichen, sondern müssen vielmehr ein Glied in der geschlechtlichen Entwicklung darstellen. Es gibt dann zwei Alternativen, indem man sie entweder von Gametangien oder von Oogonien ableiten kann. Das einfachste wäre,

mit DANGEARD (1906, p. 277) eine nahe Verwandtschaft zwischen den Chytridieen und den Protomycetaceen anzunehmen. Die Sporangien der letzteren könnten aus Gametangien entstanden sein, und die kopulierenden Sporen könnten einfach als umgewandelte Zoogameten aufgefasst werden. Bei der zweiten Alternative, Ableitung von Oogonien, wird die Sache etwas komplizierter, weil wir dann Verlust der männlichen Geschlechtsorgane und andere damit verknüpfte Veränderungen annehmen müssen. Diesmal will ich mich doch nicht weiter auf solche Spekulationen einlassen.

Was nun den Kernphasenwechsel bei den Protomycetaceen betrifft, so scheinen mir zwei Alternativen vorzuliegen. 1) Bei der Sporenkopulation erfolgt auch Kernfusion; die Kerne im Mycel und in den Sporangien sind also diploid, Reduktion erfolgt bei der Bildung der Sporen, welche haploide Kerne bekommen. 2) Bei der Sporenkopulation erfolgt keine Kernfusion; im Mycel und in den Sporangien sind Kernpaare vorhanden; Kernfusionen erfolgen im Sporangium, die diploiden Kerne erleiden sofort eine Reduktionsteilung, wodurch haploide Sporen erzeugt werden. Ich halte die letztere Alternative für die wahrscheinlichere, weil eine Entwicklungsphase mit konjugierten Kernen eine sowohl bei Asko- als Basidiomyceten häufige Erscheinung ist, und besonders weil die *Taphrina*-Arten immer gepaarte Kerne im Mycel haben. Die erstere Alternative ist doch nicht ohne weiteres von der Hand zu weisen, da eine mit Kernfusion verbundene Sporenkopulation bei gewissen Saccharomyceten konstatiert ist. Wie sich die Protomycetaceen in dieser Beziehung verhalten, bleibt also eine offene Frage. Sie könnte vielleicht am leichtesten gelöst werden, wenn man feststellen könnte, wie die Kerne in den kopulierenden Sporen und in den aus ihnen hervorstwachsenden jungen Mycelien sich verhalten. VON BÜREN'S Bestrebungen in dieser Richtung (1915, p. 7) waren leider ohne Erfolg.

Taphrina.

Taf. II.

Schon aus den 80er Jahren, also aus einer älteren Epoche, liegen Angaben über Kernteilungen in Asken von *Taphrina*-Arten vor. SADEBECK (1884, p. 100, Taf. 3 fig. 20) behauptet bei *T. turgida* Mitosen

gesehen zu haben, und die Abbildungen können vielleicht Telophasen einer ersten Teilung im Askus darstellen, wenn auch seine Abbildungen mit den Bildern, die man an Mikrotomschnitten bekommt, wenig Ähnlichkeit haben. FISCH (1885, p. 50, Taf. I Fig. 8—14) hat bei *T. Sadebeckii* JOHANS.¹⁾ grosse tonnenförmige Kernspindeln mit recht grossen Chromosomen abgebildet, diese Bilder dürften aber ziemlich frei konstruiert sein.

DANGEARD konstatierte (1894, p. 30), dass bei *T. deformans* (BERK.) TUL. die Zelle, die sich zum Askus entwickeln wird, anfangs zwei Kerne enthält, dass diese verschmelzen, und dass dann drei Kernteilungen im Askus stattfinden. Die Vorgänge der Teilung beschreibt er nicht. IKENO (1901) untersuchte *T. Johansonii* SAD., konstatierte die Kernverschmelzung und beschrieb die Vorgänge, welche der Sporenbildung vorausgehen. Er fand keine Anzeichen von Mitosen, sondern nur eine »Zerklüftung des Chromatinkörpers« und dann eine Vermehrung desselben durch Sprossung. Um die so gebildeten Chromatinkörper oder Kerne bilden sich Sporen und diese gehen sofort zur Konidien sprossung über. In einer späteren Arbeit behandelt IKENO (1903) ausser derselben Art auch *T. Kusanoi* IKENO, *T. Cerasi* (FUCK.) SAD., *T. Pruni* TUL. und *T. deformans* (BERK.) TUL. Bei allen konstatiert er die Kernverschmelzung. Er findet auch bei diesen Arten jene Zerklüftung des Chromatinkörpers, welcher als ein Zellkern einfacher Art betrachtet wird. Die Teilung desselben erfolgt bei *T. Johansonii* und *T. Kusanoi* durch Sprossung, bei *T. Cerasi* und *T. Pruni* hat er aber Kernteilungsfiguren abgebildet, die Teilung wird jedoch als eine Karyokinese einfacher Art bezeichnet. Jede Zelle der vegetativen Hyphen soll einen Chromatinkörper enthalten, wo solche mit zwei Körperchen vorkommen, wird dies auf eine Teilung zurückgeführt.

Wie hieraus zu ersehen ist, sind unsere Kenntnisse über die Cytologie von *Taphrina* noch recht mangelhaft. Vor allem muss geprüft werden, ob diese Pilze typische Kerne haben und ob wirkliche Mitosen vorkommen. Auch gilt es nachzuforschen, woher die beiden Kerne stammen, die im jungen Askus verschmelzen, um dadurch den

¹⁾ Jüngere Stadien, wo er die subkutikulare Lage des Pilzes erkennt, identifiziert FISCH richtig mit *Exoascus flavus* SAD. = *T. Sadebeckii* JOH., bei älteren hält er dagegen die mit verdickten Wänden versehenen askogenen Zellen für Epidermiszellen, und bildet aus diesen Stadien seinen »*Ascomyces endogenus*«.

Kernphasenwechsel bei dieser Gattung aufzuklären. Bei meinen systematischen und floristischen Studien über *Taphrina*¹ hatte ich vielfach Gelegenheit cytologisches Material zu sammeln, und ich will jetzt die Resultate mitteilen, die aus der Untersuchung dieses Materiales hervorgegangen sind. Es stammt von den folgenden Arten:

- Auf Prunus: *Pruni* TUL., *Rostrupiana* (SAD.), *Cerasi* (FUCK.) SAD.
 » Potentilla: *Potentilla* (FABL.) JOHANS.
 » Pyrus: *bullata* (B. et BR.) TUL.
 » Alnus: *alnitorqua* TUL., *epiphylla* SAD., *Sadebeckii* JOHANS.
 » Betula: *betulina* ROSTR., *carnea* JOHANS.
 » Populus: *aurea* (PERS.) FR.

In Bezug auf die Terminologie ist folgendes zu bemerken. Das Anfangsstadium des Askus ist eine kleine zweikernige Zelle. Diese schwillt zu einer Chlamydospore an, die Kerne verschmelzen und die Wandung wird etwas verdickt. Dann keimt die Chlamydospore unter der Bildung eines Schlauches, des Askus in beschränkterem Sinne.

Taphrina Pruni und Rostrupiana.

Fig. 35—40.

Die erstere wächst auf *Prunus domestica*, die letztere auf *P. spinosa*. Sie stehen einander sehr nahe und werden hier zusammen besprochen.

Wenn der Parasit nur einen Teil der jungen Pflaume befallen hat und sich noch in einem frühen Entwicklungsstadium befindet, kann man in der Peripherie des kranken Teils noch vegetatives Mycel finden. An Flächenschnitten (Fig. 35) sieht man bei starker Vergrößerung, dass die langen und schmalen Hyphenzellen in der Mitte je ein Paar von Kernen enthalten. Die beiden Kerne liegen dicht aneinander gedrückt. Im Kern sieht man einen ziemlich grossen Nukleolus und eine körnig-fädige Chromatinmasse. Im allgemeinen liegen die Chromatinmassen der beiden Kerne gegen einander gerichtet, und bei schwacher Vergrößerung fliessen daher die Bilder der Kerne zusammen, so dass man leicht den Eindruck eines einzigen Kerns bekommt.

¹ JUEL, Om *Taphrina*-arter på *Betula* (Sv. botan. tidskr. 3, 1909); Beiträge zur Kenntnis der Gattungen *Taphrina* und *Exobasidium* (Ibid. 6, 1912).

Der Umstand dass die Kerne eines Paares immer dicht neben einander liegen, macht es sehr wahrscheinlich, dass sie konjugierte Kerne sind und nicht durch eine Teilung entstandene Schwesterkerne. Es ist dann zu vermuten, dass sie auch konjugierte Teilungen ausführen, wie diejenigen der Basidiomyceten. Es ist mir aber nicht gelungen, Teilungsstadien in diesen Zellen zu beobachten.

Ich gehe jetzt zur Beschreibung der Asken dieser Arten über, und beginne mit einem Stadium, wo er fast ausgewachsen ist. Der Schlauch ist dann gleichmässig von Plasma erfüllt, der Kern liegt in der Mitte. Er ist gross und zeigt einen völlig typischen Bau, hat einen grossen, runden Nukleolus und ein körniges, vom Nukleolus getrenntes Chromatin. In einem etwas späteren Stadium bildet das letztere gleichdicke Fäden (Fig. 36). In den folgenden Prophasenstadien sammelt sich das Chromatin an der einen Seite des Kernraums, während der Nukleolus an der anderen Seite liegt und eine abgeflachte Form angenommen hat (Fig. 37). Vielleicht entspricht dieses Stadium einer Synapsis. Ich habe dagegen vergeblich nach Bildern gesucht, die als Diakinesen gedeutet werden könnten.

Während dieser Vorgänge hat der Askus sich in Bezug auf seine Form und seinen Inhalt etwas verändert. Wenn die Kernteilungen beginnen, ist er oben etwas breiter und stumpfer geworden, das Plasma hat sich im oberen Teil angesammelt, erscheint aber dabei etwas substanzärmer als vorher. Die erste Kernfigur hat in der Regel eine transversale Lage (Fig. 38). Sie dürfte noch innerhalb der Kernhöhlung liegen, diese scheint aber von keiner Kernwand umgeben zu sein. Der Nukleolus liegt nicht mehr in dieser Höhlung, sondern öfters neben ihr, und seine Form kann ziemlich verschieden sein. Die schmale und zarte Spindel ist an den Enden spitz, und die Spitzen sind etwas dunkler gefärbt. Die Chromosomen sind winzig, ihre Zahl und Form konnte nicht konstatiert werden. Die Kernfiguren der zweiten Teilung sind kleiner als die erste. Sie liegen einander gegenüber in gleicher Höhe an der Askuswand und sind meist auch transversal gerichtet. Die dritte Teilung (Fig. 39) zeigt noch kleinere Kernspindeln. Ich fand sie meist in der Längsrichtung liegend. Sie scheinen in sehr schwach begrenzten Kernhöhlen zu liegen, und neben jeder von diesen liegt ein runder Nukleolus.

Die Sporenbildung ist schwierig zu untersuchen, weil in diesem Stadium das Plasma offenbar sehr dünnflüssig ist, so dass die Asken leicht schrumpfen. In günstigen Fällen findet man über das sporenbildende Plasma an der Wand gelagert, einen Hohlcylinder darstellend (Fig. 40). In dieser Schicht liegen die Kerne gelagert, um sie sammelt sich dichteres Plasma zu runden Massen, in welchen dann die Sporen ausgeformt werden. Die fertig gebildeten Sporen liegen in einem spärlichem Epiplasma eingebettet.

Der Umstand, dass das Plasma während der Sporenbildung eine wandständige Lage einnimmt, scheint nicht vorher beobachtet worden zu sein, verdient aber hervorgehoben zu werden, da dies bei den eigentlichen Askomyceten nicht der Fall sein dürfte.

* *Taphrina Cerasi.*

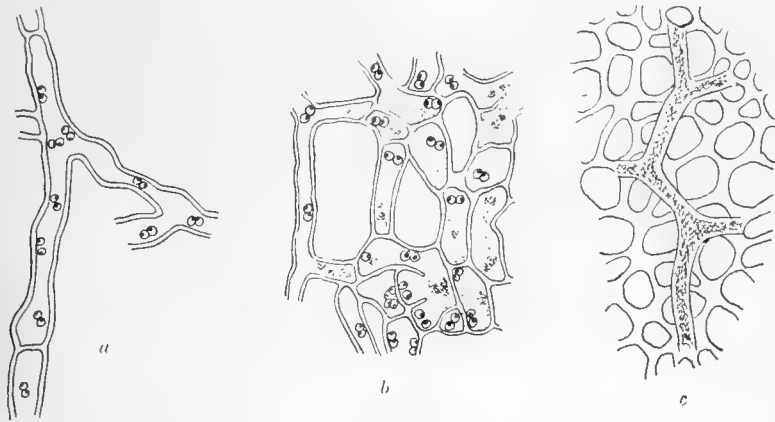
In meinen Präparaten von dieser Art fand ich keine deutlichen Kernteilungsbilder. Ich will hier nur die Bildung der sogen. Stielzelle erwähnen. Wenn der Askusschlauch hervorzuwachsen begonnen hat, entsteht im untersten Teil der Chlamydospore eine Vakuole, die sich schnell vergrößert, bis sie, den Plasmainhalt vor sich nach oben treibend, fast den ganzen Raum der ursprünglichen Chlamydospore einnimmt. Sobald die Sporen gebildet sind, sieht man das Plasma durch eine sehr dünne nach oben gewölbte Wand gegen den unteren Zellraum begrenzt. In diesem ist nur ein sehr spärlicher Rest von dünnem Wandplasma übrig. In älteren Asken ist der Schlauch nach unten von einer etwas dicker gewordenen und jetzt nach unten konvexen Wand begrenzt. Diese bildet eine direkte Fortsetzung der übrigen Wandung des reifen Schlauches. Der untere Zellraum, der die »Stielzelle« darstellt, erscheint ganz leer.

Taphrina bullata.

Textfig. 1.

Von dieser einjährigen, fleckenbildenden Art habe ich junge Entwicklungsstadien untersucht. In der Peripherie eines sehr jungen

Fläckens besteht das Mycel aus langen und dünnen, etwas verzweigten vegetativen Hyphen (Textfig. 1 a). Diese sind nur spärlich septiert,



Textfig. 1.

Flächenschnitte von *Taphrina bullata*. a Sehr junges vegetatives Mycel. Zellen mit mehreren Kernpaaren (900: 1). b Übergang vom vegetativen zum askusbildenden Mycel. Zellen mit mehreren oder einzelnen Kernpaaren, eine Zelle gelappt, in Teilung begriffen (825: 1). c Zusammenhängende Schicht von jungen Askus (Kerne nicht in diesem Schnitt), darüber ein Rest vom vegetativen Mycel (825: 1).

und jede Zelle enthält mehrere Kernpaare, die in ziemlich gleichen Abständen von einander liegen. Etwas weiter nach innen findet man breitere und weniger regelmässig gestaltete Zellen, in welchen die Kernpaare nicht mehr in einer Reihe liegen. Auch treten kürzere, oft gelappte Seitenzweige auf (1 b). Alle diesen Hyphenelemente enthalten in jeder Zelle mehrere Kernpaare. Bald müssen aber in ihnen Wände gebildet werden, denn wenn man sich dem Zentrum des Fleckens nähert, findet man dicht gedrängte ziemlich isodiametrische Zellen mit je einem Kernpaar. Nur hie und da kan man zwischen ihnen Reste der ersterwähnten dünnen vegetativen Hyphen entdecken (1 c).

Diese Art ist unter den von mir untersuchten die einzige, die in jüngeren Stadien mehrkernige Zellen hat. Die gelappten Zellen entsprechen denjenigen, die SADEBECK (1893, p. 23, Taf. I, Fig. 8, 9) bei der nahe verwandten *T. Crategi* beschrieben hat. Aus jeder solchen Zelle entstehen mehrere Askus, während die gelappten Zellen von *T. aurea*, die unten beschrieben werden, die Anlage eines einzigen Askus darstellen.

Stadien der Kernteilung und Sporenbildung konnte ich in meinen Präparaten von dieser Art nicht finden, obgleich in ihnen einkernige

Asken und solche mit Sporen zusammen auftreten. Wahrscheinlich geschehen die Kernteilungen simultan in der Nacht.

Die »Stielzelle« wird wie bei der vorigen Art gebildet. Sie enthält einen deutlichen Rest von Plasma, aber keinen Kern. Wenn eine Menge von Asken im Hymenium gleichzeitig reifen, durchbrechen sie nicht jede für sich die Kutikula, sondern diese wird auf einer grösseren Strecke erhoben, und unter ihr sammelt sich dann eine dicke Masse von Sporen und Konidien, die also nicht ausgeschleudert werden, sondern entweder durch Regen oder durch Tiere verbreitet werden müssen.

Taphrina Potentillae.

Fig. 41—44.

Diese Art wird von SADEBECK und GIESENHAGEN in die Gattung *Magnusiella* gestellt, weil ihre Asken nicht aus einem subkutikularen Hymenium, sondern einzeln als Endzellen aufsteigender Hyphenäste gebildet werden. Übergänge zwischen diesen beiden Formen der Askusbildung scheinen jedoch vorzukommen, z. B. bei *T. flavá* FARL.

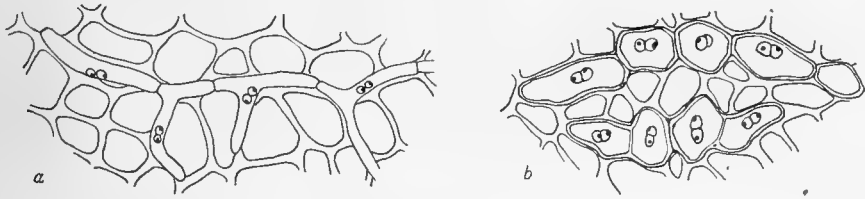
Das vegetative Mycel ist im Parenchym der befallenen Teile der Pflanze verbreitet, unterhalb der Epidermis bildet es aber eine dichtere zusammenhängende Schicht, und diese ist die Bildungsstätte der meisten fertilen Zweige. Zahlreiche solche Hyphenzweige wachsen zwischen den Epidermiszellen gegen die Kutikula empor. In jungen Stadien besteht ein solcher Zweig aus einer langen und schmalen Zelle mit einem Kernpaar in der Mitte (Fig. 41). Später erweitert sich diese Zelle nach oben, und in der dicht unter der Kutikula liegenden Erweiterung findet man einen grösseren durch Verschmelzung gebildeten Kern (Fig. 42). Der erweiterte Teil verlängert sich dann zum Askus. Die erste Kernspindel liegt transversal (Fig. 43), bei der zweiten (Fig. 44) ist dies nicht immer der Fall.

Die Asken bilden bei dieser Art keine so regelmässige Schicht, wie bei anderen Arten. Auch kann es vorkommen, dass die askusbildende Hyphenschicht an einzelnen Stellen zwischen den Epidermiszellen hervordringt, so dass ein lokales subkutikulares Hymenium entsteht.

Taphrina alnitorqua.

Textfig. 2. Taf. II, Fig. 45.

In den erkrankten Blattscheiben dürfte kein rein vegetatives Mycel vorkommen, denn das ganze Mycel scheint bei der Askusbildung verbraucht zu werden. In den jüngsten untersuchten Entwicklungsstadien findet man enge verzweigte Hyphen, die in jeder Zelle ein Kernpaar enthalten (Textfig. 2 a). In einem älteren Stadium sind die



Textfig. 2.

Flächenschnitte von *Taphrina alnitorqua*. a Sehr junges Mycel (750: 1).
b Älteres Mycel, in Askusanlagen zerfallen (750: 1).

Zellen kürzer und angeschwollen, ohne Zweifel haben seit dem vorigen Stadium Querteilungen stattgefunden. Diese Zellen sind junge, noch zweikernige Chlamydosporen. Sie verbreitern sich später noch mehr, so dass sie zur Zeit der Kernfusion eine fast zusammenhängende Schicht bilden.

Die erste Kernteilung im Askus habe ich einige Male gesehen. Die Spindel steht meistens transversal und liegt diametral in der Kernhöhle (Fig. 45). Schon vor der Kernteilung ist alles Plasma in den Schlauch ausgewandert, so dass der Raum der Chlamydospore ganz leer ist. Wenn etwas später der Askusschlauch seine Wandung verdickt, bildet er unten eine neue Wandpartie, wodurch die leere »Stielzelle« abgegrenzt wird.

Taphrina Sadebeckii.

In meinen Präparaten dieser Art habe ich die Kernteilungsstadien in den Asken nicht gefunden. Nach der ersten Teilung findet man die beiden Tochterkerne einander gegenüber in gleicher Höhe, die erste Kernfigur muss also transversal sein.

Die Bildung des Schlauches und der Stielzelle findet in derselben Weise statt, wie bei der sehr nahe verwandten *T. epiphylla*.

Taphrina epiphylla.

Textfig. 3. Taf. II, Fig. 49—51.

Diese Art befällt ganze Sprosse. Sehr junge, noch im Wachstum begriffene Sprosse wurden fixiert, um das vegetative Mycel zu studieren. Es zeigte sich, dass dieses nur an der Oberfläche des Stammes auftritt, gerade wie es SADEBECK (1884, p. 96) für *T. abitorqua* angegeben hat. Die Hyphen folgen meist den seichten Furchen zwischen den Epidermiszellen und schmiegen sich der Oberfläche dicht an (Textfig. 3 a). Sie sind jedoch wahrscheinlich von einer sehr dünnen Kutikula bedeckt. JOHANSON (1887, fig. 1) bildet das vegetative Mycel dieser Art unter der Kutikula eines Blattstiels wachsend ab. Der Flächenschnitt zeigt, dass diese engen und wenig verzweigten Hyphen in jeder Zelle ein Kernpaar führen. Im Gegensatz zu dem Verhalten bei den vegetativen Mycelien anderer untersuchter Arten liegen die beiden Kerne nicht in einer Reihe nach einander, sondern in gleicher Höhe in der Mitte der Zelle (3 b).

Die fertig gebildete Chlamydospore ist mit einer ringsum gleichdicken Membran bekleidet, und wo zwei gegen einander stossen, hat jede ihre eigene distinkte Membran. Nach innen sind diese Membranen gegen die Zellwände der Epidermis deutlich begrenzt, nach aussen ist die ganze Chlamydosporenschicht von der sehr dünnen Kutikula bedeckt. Das Hervorsprossen des Schlauches hat bei dieser Art, wie bei der vorigen, besonders grosse Ähnlichkeit mit einem Keimungsprozesse. In der Mitte der Aussenwand entsteht nämlich ein kleines Loch, und durch dieses dringt das Plasma, mit einem dünnen Endospor bekleidet, papillenförmig hervor (Fig. 49). Die Papille vergrössert sich zum Schlauch, und das Loch in der Wandung wird dabei allmählich weiter. Im unteren Teil der Chlamydospore entsteht dabei eine Vakuole, welche grösser wird, je nachdem das Plasma in den Schlauch auswandert (Fig. 50). Endlich ist die Chlamydospore ganz geleert, und dann bildet das Schlauchplasma nach unten eine Wand gegen den leeren Zellraum. Die ganze Wand um den Schlauchinhalt erfährt dann eine gelinde Verdickung.

Auch bei dieser Art konnte ich die Stadien der Kernteilungen nicht finden. Aus der Lage der Tochterkerne schliesse ich auf eine transversale Richtung der ersten Kernfigur (Fig. 51).



Textfig. 3.

Taphrina epiphylla. a. Querschnitt eines jungen, noch wachsenden Zweiges, Mycelfäden an der Oberfläche (700: 1). b. Flächenschnitt desselben Zweiges mit vegetativem Mycel (750: 1).

Taphrina betulina.

Fig. 46—48.

Wenn die Chlamydospore fertig gebildet ist und der Schlauch hervorbrechen soll, geschieht dies nicht ganz wie bei den beiden vorigen Arten. Man sieht nämlich, wie die ganze Aussenwand sich verdünnt und hervorwölbt, so dass der Schlauch von Anfang an dieselbe Breite hat, wie die primäre Zelle. Die »Stielzelle« entsteht wie bei anderen Arten und ist leer an Inhalt.

Der Askus ist bei dieser Art sehr gross im Verhältnis zu seinem Plasmahalt. Während der Kernteilungsphase bildet das Plasma nur eine dünne wandständige Schicht, in der die Kerne liegen. In den Präparaten sind die Asken daher in den vorgerückteren Stadien sehr geschrumpft. Die Kerne sind ziemlich klein, was wohl mit der geringen Plasmamenge zusammenhängt, und die Kernfiguren (Fig. 46—48) sind kleiner als bei anderen Arten. Die erste liegt transversal, die folgenden verschieden orientiert. Bei allen Teilungen lagen die Spindeln noch innerhalb der Kernhöhle.

Taphrina carnea.

Fig. 52.

Diese Art bildet keine »Stielzelle«. Beim Hervorbrechen des Schlauches wölbt sich die ganze Aussenwand der Chlamydospore hervor, wie bei der vorigen Art. In der Chlamydospore treten dann die

selben Vorgänge ein, wie bei den mit Stielzellen versehenen Arten, so dass der ganze Zellraum entleert wird, bis auf unscheinbare Plasmareste, die an der Wand haften bleiben. Die Sporen- und Konidienbildung geschieht ausschliesslich im Schlauch, und bei der Reife liegt die Konidienmasse nur im Schlauch, während die Chlamydospore leer ist. Dies ist an meiner Abbildung (JUEL 1908, Taf. 7, Fig. 5) zu sehen. In diesem Stadium wird wahrscheinlich die Konidienmasse ausgeschleudert. JOHANSON (1885, Fig. 6) bildet einen Askus ab, der ganz mit Konidien erfüllt ist. Wenn dies richtig ist, dürfte es ein überreifes Stadium darstellen. Ein Ausschleudern dürfte dann nicht mehr stattfinden können.

Das Fehlen der Stielzelle beruht also nur darauf, dass das Plasma sich nicht durch eine Wand vom leeren Zellraum der Chlamydospore abgrenzt, sonst entspricht dieser Raum völlig einer »Stielzelle«.

Die Asken dieser Art schrumpfen beträchtlich zusammen bei der Behandlung und bilden deshalb kein gutes Objekt für Studien über Kernteilungen. Einmal habe ich die erste Kernspindel in einem Askus gesehen, sie lag in der Kernhöhle und war transversal gerichtet. Ein Askus mit vier Kernen zeigte diese in gleicher Höhe an der Wand liegend, im Achkernstadium sind die Kerne unregelmässig gelagert.

Die Sporenbildung scheint nicht in der typischen Weise vor sich zu gehen, indem nur einige der acht Kerne zur Sporenbildung verwendet werden, die übrigen dagegen degenerieren. In dem abgebildeten Askus (Fig. 52) sind nach meiner Auffassung die etwas kleineren, dichteren und dunkler gefärbten Körper Sporen. Es sind deren vier vorhanden, der vierte ist vom übrigen Inhalt verdeckt. Ein Kern ist in diesen Sporen nicht deutlich zu unterscheiden, was aber in jungen Sporen oft vorkommt. Die vier übrigen, etwas grösseren und helleren Körper, sind Kerne mit deutlichen Nukleolen. Die Anzahl der Sporen dürfte verschieden sein können. Sehr bald nach diesem Stadium tritt an den Sporen Konidienbildung ein, und die überflüssigen Kerne werden aufgelöst.

Taphrina aurea.

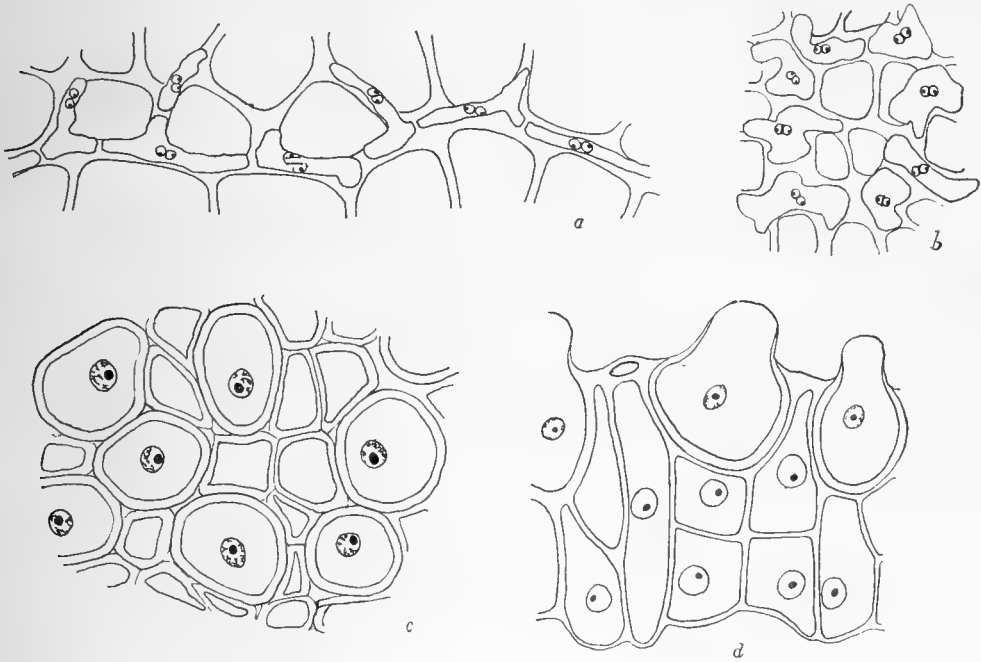
Textfig. 4. Taf. II, Fig. 53—55.

Von dieser einjährigen und fleckenbildenden Art untersuchte ich sehr junge Entwicklungsstadien. Das jüngste Mycel, das ich gesehen

habe, besteht aus dünnen Hyphen mit einem Kernpaar in jeder Zelle (Textfig. 4 a).

Einmal glaube ich in einer solchen Zelle eine Kernteilung gesehen zu haben. Statt des Kernpaares lag in der Mitte der Zelle ein Paar sehr dünner parallel liegender Stäbchen, und neben ihnen die Nukleolen. Die Kernhöhlen waren zum Teil erhalten (Taf. II, Fig. 53). Ich fasse dieses Bild als die Telophase einer konjugierten Teilung auf.

An älteren Stadien findet man etwas breitere Hyphen, an noch älteren sind die Hyphen in kürzere und mehr verbreiterte, oft gelappte



Textfig. 4.

Taphrina aurea (750: 1). a Sehr junges, vegetatives Mycel. b Älteres Mycel in unregelmässig geformte Zellen zerfallen. c Flächenschnitt durch die Epidermis, die grossen runden Zellen sind Chlamydosporen, zwischen ihnen kleinere Epidermiszellen. d Dasselbe Stadium wie c. Epidermis in Querschnitt, Zellen palisadenförmig, einige quergeteilt.

Zellen zerfallen (4 b). In jeder dieser Zellen liegt ein Kernpaar. Später runden sie sich ab und werden zu Chlamydosporen (4 c).

Anfangs liegen die jungen Chlamydosporen über den radialen Wänden der Epidermiszellen (4 b). An späteren Stadien, wenn die Kernfusion eingetreten ist, sieht man sie keilförmig zwischen diese

Zellen eindringen (4 d). Zum Teil dürfte dieses durch den Zuwachs der letzteren verursacht sein. Die Epidermis wird nämlich unter dem Einflusse des Parasiten stark verändert, ihre Zellen verlängern sich und können bei starkem Angriffe palissadenförmig werden. Sie können sogar tangentielle Wände bekommen, so dass sie an gewissen Strecken zwei- bis dreischichtig werden (4 e).

Von den Entwicklungsstadien, in welchen die Kernteilungen stattfinden, habe ich mehrere gute Präparate. Trotzdem ist es mir nicht gelungen Kernteilungsfiguren zu finden, obgleich ich auf das Suchen nach solchen viel Mühe verwendet habe. Ich muss daher annehmen, dass bei *T. aurea* die Kerne im Askus in anderer Weise als bei anderen Arten geteilt werden. Die Bilder, die man bei dieser Art von eben geteilten Kernen bekommt, sind etwas variierend, ziemlich oft kommt es aber vor, dass vier oder mehr kleine Kerne mitten im Askus dicht zusammengehäuft liegen (Fig. 54). Durch Mitosen gebildete Kerne pflegen immer weiter auseinander zu liegen, und ich nehme daher an, dass diese Kerne amitotisch, durch Zerfall des Askuskerns, entstanden sind. Wie dies zugeht, lasse ich dahingestellt sein, ich konnte mir keine klare Vorstellung darüber bilden. Wahrscheinlich sind es solche amitotische Teilungen bei der nahe verwandten *T. Johansonii* SAD., von denen IKENO eine Beschreibung gegeben hat, obgleich ich seine Beschreibung der Vorgänge im Askus nicht mit meinen Beobachtungen bei *T. aurea* in Übereinstimmung bringen kann.

In Bezug auf die Sporenbildung zeigt diese Art dieselbe Abweichung vom typischen Vorgang wie die vorige Art. Nur wenige, in vielen Fällen nur zwei Kerne werden zur Bildung von Sporen verwendet, die übrigen verkümmern. Die Sporen sind kugelförmig. Sie beginnen sofort längliche Konidien zu bilden (Fig. 55), so wie IKENO es für *T. Johansonii* beschrieben hat.

Die »Stielzelle« wird in derselben Weise, wie bei anderen Arten, gebildet. Sie ist bei *T. aurea* sehr klein und kann mitunter ganz fehlen.

Allgemeine Bemerkungen.

Die Abteilung Hemiasci umfasst nach meiner Auffassung die primitiven Typen der Mycomyceten, die wahrscheinlich den Phycomyceten am nächsten stehen, obgleich es ziemlich unklar ist, aus welcher oder welchen Ordnungen unter den letzteren sie hervorgegangen sind. Von den eigentlichen Askomyceten unterscheiden sich die Hemiasceen dadurch, dass ihre Sporangien oder Asken direkt am Mycel entstehen, während bei den Askomyceten Fruchtkörper mit askogenen Hyphen gebildet werden. Zwischen Sporangien und Asken dürfte bei den Hemiasceen kein prinzipieller Unterschied zu machen sein. Man nennt diese Organe Sporangien, wenn sie von Anfang an mehrkernig sind und zahlreiche Sporen erzeugen, Asken wenn sie anfangs nur ein Kernpaar enthalten, und nur acht oder weniger Sporen erzeugen. Die Asken dürften aber aus den Sporangien durch eine Reduktion in Bezug auf die Zahl der Kerne und Sporen hervorgegangen sein.

Die Abteilung Hemiasci möchte ich vorläufig in drei Verwandtschaftskreise teilen. Den ersten bildet allein die Gattung *Ascoidea*, den zweiten *Dipodascus*, die Endomycetaceen und die Saccharomyceten, den dritten die Protomycetaceen und die Exoasceen. Ob *Ascoidea* mit irgend einer der anderen Reihen verwandt ist oder nicht, scheint mir ganz unklar, da die Cytologie dieser Gattung noch unvollständig bekannt ist. Zwischen den beiden übrigen Reihen bestehen ohne Zweifel nur entfernte verwandtschaftliche Beziehungen. Eine natürliche Abteilung der Pilze stellen also die Hemiasci nicht dar, ebensowenig als, z. B., die Abteilungen Zygomycetes oder Chytridinæ.

Die Gattung *Ascocorticium*, die bisher nur durch BRÉFELD'S Beschreibung (Untersuchungen IX, p. 145) bekannt ist, gehört wohl gar nicht zu den Hemiasceen, sondern ist wahrscheinlich ein Discomycet mit sehr reduziertem Fruchtkörper.

DANGEARD (1907, p. 30) stellt die Gattungen *Dipodascus* und *Eremascus* in die Abteilung »Gamétangiées» zusammen, wobei er allerdings von der Annahme ausgeht, dass *Eremascus albus*, deren Cytologie nicht erforscht ist, mehrkernige Kopulationszellen habe, wie *Dipodascus*. Auch ED. FISCHER (Handwörterbuch der Naturwissenschaften,

Bd. 7, p. 896) und ATKINSON (Phylogeny in Ascomycetes, Ann. Missouri Bot. Gard. 1914, p. 364) sind geneigt, verwandtschaftliche Beziehungen zwischen *Dipodascus* und den Endomycetaceen anzunehmen. Auch ich schliesse mich dieser Auffassung an. *Dipodascus* ist ein sehr primitiver Typus unter den Mycomyceten, denn dieser Pilz ist durchaus aus Zellen mit mehreren Kernen aufgebaut, dies gilt nämlich sowohl von seinen vegetativen Zellen, als auch von seinen Oidien und Sexualorganen. In den letzteren ist jedoch schon eine Differenzierung der Kerne eingetreten, denn nur je einer der Kerne hat sexuelle Funktion. Von diesem Typus können die Endomycetaceen abgeleitet werden, wobei man eine Reduktion in der Zahl der Kerne anzunehmen hat. *E. Magnusii* steht *Dipodascus* am nächsten, denn bei dieser Art sind die vegetativen Zellen zum grössten Teil mehrkernig, und die Oidien enthalten meist 2 bis mehrere Kerne. Die Sexualzellen dagegen haben nur je einen einzigen Kern, und der Ascus bildet nur vier Sporen. Bei den übrigen Endomycetaceen ist die Reduktion noch weiter gegangen, sie bestehen in allen Teilen aus einkernigen Zellen. Eine Ausnahme machen die Endglieder des Mycels bei *Eremascus fertilis*, welche mehrere Kerne enthalten. Diese Angaben stammen von DANGEARD (1907) und GUILLIERMOND (1909). Den Endomycetaceen schliessen sich die Saccharomycetaceen an, als reduzierte Formen, bei denen das typische Mycel durch andere Wuchsformen ersetzt worden ist.

Eine andere Reihe der Hemiasceen bilden die Protomycetaceen mit den Gattungen *Protomyces*, *Protomycopsis* und *Taphridium*, und die Exoasceen mit der einzigen Gattung *Taphrina*, aus welcher man jedoch vielleicht einige Arten unter dem Gattungsnamen *Magnusiella* ausscheiden kann. Die Exoasceen werden im Allgemeinen als Pilze von ganz unsicherer systematischer Stellung betrachtet. Ich will jetzt die Gründe anführen, warum ich sie in die Protomycetaceen-Reihe stelle.

Ich brauche kaum auf die habituelle Ähnlichkeit zwischen *Taphridium* und *Taphrina* hinzuweisen. *Taphridium umbelliferarum* und *T. rhaeticum* wurden ja zuerst als Arten von *Taphrina* beschrieben. Die Gattung *Taphridium* wurde wegen der ausgeprägten Protomycetaceenmerkmale von *Taphrina* ausgesondert. Diese Merkmale sind: die zahlreichen Kerne in den Mycelzellen und den Sporangien; die Chlamydosporennatur der Sporangien, und ihre Keimung durch Ausstossen des Endosporiums, welches letzteres Merkmal die Hauptart der Gattung mit

Protomyces verbindet; und endlich die Art in welcher die Sporen gebildet werden, welche bei *T. algeriense* ganz mit *Protomyces* übereinstimmt. Auch in der Lage der Sporangien nähert sich *Taphridium* an *Protomyces*, da sie nicht ausserhalb, sondern innerhalb der Epidermis gebildet werden.

Die Gattung *Taphrina* ist durch das subkutikulare Wachstum ihres Mycels charakterisiert, und die Anpassung an diese ungewöhnliche Art des Parasitismus dürfte mehrere Eigentümlichkeiten dieses Typus erklären. Es gibt aber in dieser Beziehung eine gewisse Verschiedenheit zwischen den Arten der Gattung. Den extremen Fall bilden die Arten, die ausschliesslich subkutikulares Mycel haben, wie, z. B., *T. epiphylla*. Andere, wie *T. Pruni*, haben vegetatives Mycel im Parenchym, während das askogene Mycel nur unter der Kutikula entwickelt wird. Eine dritte Stufe nimmt *T. Potentillae* ein, hier ist die Bildungsstätte der Asken eine unter der Epidermis liegende Mycelschicht. Diese Art steht also in Bezug auf die Lokalisierung nicht weit von *Taphridium*. Wenn wir die *Protomyces*-Form, die in den inneren Geweben diffus auftritt, zum Ausgangspunkt nehmen, können wir hier eine Entwicklung erblicken, die durch verschiedene Stufen eine immer mehr oberflächliche Lokalisierung anstrebt.

Bei *Taphrina*, wie bei *Taphridium*, werden die Sporangien oder Asken interkalär angelegt, der Unterschied ist nur, dass sie bei *Taphrina* oft in ununterbrochenen Reihen liegen. Sie können auch bei dieser Gattung im früheren Entwicklungsstadium als Chlamydosporen aufgefasst werden, und das Hervorwachsen des Schlauches oder eigentlichen Askus als ein mit der Keimung einer Chlamydospore ganz homologer Vorgang. Diese Auffassung ist bereits von PIERCE (1900, p. 37) ausgesprochen worden. Ich zitiere nach ihm das Folgende:

»the walls of the ascogenous cells are heavy. The early steps in the development of the asci from these cells (the development of a papillalike elevation on the upper surface of the cells) cause the rupture or dissolution of the heavy wall where the elevation occurs. The phenomenon is that of the germination of a heavy-walled spore, or, perhaps, more properly, the outgrowth or prolongation of an endospore through the rupture of the epispore. The fact to be noted is the perfect resting condition into which the ascogenous cells may pass before the

development of the ascus, as shown by the marked delimitation between the thin wall of the forming ascus and the heavy wall of the ascogenous cell.»

Bei den Protomycetaceen finden wir in Bezug auf die Keimung der Chlamydospore verschiedene Verhältnisse. Dauersporen, die nach einer Winterruhe keimen, haben die meisten *Protomyces*- und *Protomycesopsis*-Arten, direkt sporenbildende Chlamydosporen haben *Protomyces inundatus* (Sommerform), *P. Cicuta* und die *Taphridium*-Arten. In Bezug auf die Keimungsweise finden wir folgende Fälle. Bei *P. macrosporus*, *P. inundatus* (Dauerform) und *T. umbelliferarum* tritt das Endospor als ein kugelrunder Schlauch ganz aus dem Exospor heraus. Bei *P. pachydermus* und anderen Arten ist der Schlauch länglich und bleibt mit seinem unteren Ende im Exospor stecken, eine Spaltung der Chlamydosporenwand scheint jedoch auch hier einzutreten. Bei *T. rheticum* ist die Form des Schlauches dieselbe, hier dürfte aber bei der Keimung keine Spaltung der Wandung in Endospor und Exospor stattfinden, wenigstens bekommt man durch VOLKART'S Abbildung (1903, Fig. 3) diesen Eindruck. Endlich haben wir den Fall, dass kein Schlauch gebildet wird, sondern die Sporen direkt aus der Chlamydospore entleert werden, wie bei *T. algeriense*, *P. inundatus* (Sommerform) und *P. Cicuta*.

Bei den *Taphrina*-Arten trennt sich das Endospor nicht vom Exospor. Im übrigen zeigt das Hervorwachsen des Askus grosse Übereinstimmung mit der Keimung einer Chlamydospore, besonders ist dies auffallend bei *T. epiphylla* und *T. Sadebeckii*, wo der Schlauch sich durch ein kleines Loch im Exospor hervorzwängt.

Durch den Besitz einer »Stielzelle« unterscheiden sich die Mehrzahl der *Taphrina*-Arten von den Protomycetaceen. Ich betrachte aber die Arten ohne »Stielzelle« als einen ursprünglicheren Typus. Wenn wir den ausgewachsenen Askus von *T. carnea* mit der gekeimten Chlamydospore von *T. rheticum* vergleichen, so finden wir eine völlige Übereinstimmung im Bau: der Schlauch bildet die direkte Fortsetzung der entleerten Chlamydospore.

Die wahre Natur der »Stielzelle« ist schon von PIERCE richtig erfasst worden. Er sagt nämlich (l. c., p. 38):

»The contents of the forming ascus are finely granular, and as the ascus elongates these contents crowd into the upper

portion and a septum is formed across the basal part in such a manner as to cut off the now emptied ascogenous cell as a stalk cell for the ascus».

Meine Beobachtungen haben diese Auffassung völlig bestätigt. Die Wandpartie, welche den Schlauch gegen die leere Chlamydospore abgrenzt, ist wahrscheinlich eine spät eingetretene Neubildung, die nicht bei allen Arten eingeführt ist. Sie bietet offenbar den Vorteil, dass sie das Rückfliessen der Sporenmasse in die Chlamydospore verhindert.

Vergleichen wir jetzt die Protomycetaceen und die Exoasceen in Bezug auf die cytologischen Verhältnisse. Bei *Taphrina* treten die Kerne immer in Paaren auf. Für die Protomycetaceen ist dies nicht sicher nachgewiesen. Dafür sprechen jedoch VON BÜREN's oben erwähnte Beobachtungen von gepaarten Kernen in den Chlamydosporen von *Protomyces*. Weiter sprechen dafür die bei mehreren Protomycetaceen eintretenden Kopulationen der Sporen, welche wohl wahrscheinlich keine Kernfusion, sondern nur eine Paarung der Kerne herbeiführen. Wie die Paarung der Kerne bei *Taphrina* zu Stande kommt, ist nicht bekannt. Weder BREFELD (Unters. IX, p. 141) noch PIERCE (1900, p. 38) haben bei ihren Kulturen der Sporen Kopulationen beobachtet. Dass solche doch vorkommen können, halte ich für wahrscheinlich, weil ich in der Litteratur zwei Angaben gefunden habe, welche nach meiner Ansicht auf solche Kopulationen hindeuten. FISCH, dessen Beschreibung vom Keimungsvorgang einen zuverlässigeren Eindruck macht, als seine Bilder von Mitosen, gibt an, dass der von der Konidie getriebene Keimschlauch sich vor dem Eindringen in die Wirtspflanze blasenförmig erweitert. Seine Abbildung (1885, Fig. 18) gibt aber den Eindruck, dass zwei Konidien hier mit einander kopuliert haben. Und JOHANSON (1887, p. 15, fig. 2) teilt mit, dass die Konidien von *T. borealis* JOHANS. (= *epiphylla* SAD.) oft paarweise zusammenhängen. Dass solche Kopulationen bei *Taphrina*, wie bei einigen Protomycetaceen, nicht regelmässig auftreten, hat vielleicht seine Erklärung in einer solchen geschlechtlichen Differenzierung derselben, wie sie KNIEP für gewisse Ustilagineen nachgewiesen hat.

Über die Kerne im vegetativen Mycel von *Taphrina* war bisher fast nichts bekannt. Die von DANGEARD (1894, p. 32) abgebildeten 2-kernigen Zellen gehören dem askogenen Mycel an. IKENO's Angaben

sind unklar, er spricht von Chromatinkörpern in den vegetativen Zellen (1903, p. 19), seine Abbildungen lassen mich aber in Zweifel, ob diese Körper Kerne sind. Dagegen habe ich oben erwiesen, dass das Mycel in den jüngsten, noch ganz vegetativen Stadien bei *T. Pruni*, *T. alni-torqua*, *T. epiphylla* und *T. aurea* aus Zellen mit je einem Kernpaar besteht, dass aber *T. bullata* in den entsprechenden Stadien mehrere Kernpaare in jeder Zelle aufweist.

Wenn wir annehmen dürfen, dass die Kerne bei den Protomycetaceen, wie bei *Taphrina*, zu Paaren auftreten, so kann der letztere Typus von dem ersteren abgeleitet werden, indem man eine Reduktion in der Anzahl der Kerne annimmt. Dieser Reduktionsvorgang wäre dann demjenigen, den ich in Bezug auf die *Dipodascus-Endomyces*-Reihe angenommen habe, analog. Für *Taphrina* hängt diese Reduktion ohne Zweifel mit dem Übergang zum subkutikulären Wachstum kausal zusammen. *T. bullata* steht in Bezug auf die Zahl der Kerne im vegetativen Mycel den Protomycetaceen näher als die übrigen untersuchten Arten.

Was endlich die Vorgänge in den Sporangien und Asken betrifft, so sind die Unterschiede zwischen den Protomycetaceen und den *Taphrina*-Arten vielleicht nicht so gross, wie es den Anschein hat, weil sie lediglich auf verschiedene Zahlenverhältnisse zurückgeführt werden können. Bei den ersteren enthält die Chlamydospore von Anfang an zahlreiche Kerne, welche vermutlich paarweise zusammengehören. Das sporenbildende Plasma sammelt sich an der Peripherie, bei den Arten mit länglichem Schlauche im oberen Ende desselben, und hier finden wahrscheinlich nach einander drei simultane Kernteilungen statt. Das Auftreten von Sporenmutterzellen, das für die meisten charakteristisch ist, fehlt wenigstens bei einer Art, *Taphridium umbelliferarum*, gänzlich. Die Sporen erzeugen bei einigen Arten schon im Sporangium Konidien. Bei *Taphrina* ist die Zahl der Kerne in der Chlamydospore auf ein einziges Paar herabgesetzt. Im Schlauch wandert das Plasma gegen das obere Ende und sammelt sich, wie ich oben hervorgehoben habe, an der Peripherie, wo drei simultane Kernteilungen ausgeführt werden. Konidiensprossung im Askus ist eine häufige Erscheinung in dieser Gattung.

Ein Versuch, den *Taphrina*-Typus vom gewöhnlichen Askomycetentypus abzuleiten, stösst auf weit grössere Schwierigkeiten, weil

man dann nicht nur ein gänzlichcs Unterdrücken des Fruchtkörpers, sondern auch das Verschwinden der für diesen Typus charakteristischen Hakenbildung an den askogenen Hyphen annehmen müsste. Die Ableitung vom Protomycetaceentypus muss im Vergleich hiermit viel ungezwungener erscheinen.

Zusammenfassung.

Endomyces decipiens hat mitotische Kernteilungen in den vegetativen Zellen. Der Askus hat einen grossen Kern, der ein spiremähnliches Stadium durchläuft, wenigstens zwei Mitosen werden ausgeführt, die wahrscheinlich eine Reduktionsteilung darstellen. Weil dieser keine Kernfusion vorausgehen dürfte, wird die Hypothese aufgestellt, dass eine dritte Teilung erfolgt, und dass die acht Kerne im Askus paarweise kopulieren, um die vier Sporenkerne zu bilden.

Bei *Dipodascus* zeigt der Fusionskern eine spiremähnliche Phase und bildet dann eine verhältnissmässig grosse Kernfigur.

Bei *Taphridium umbelliferarum* findet die Sporenbildung, wie bei übrigen Protomycetaceen, in einer peripherischen Plasmaschicht statt. Zwei simultane Kernteilungen mit tangential liegenden Spindeln werden ausgeführt. Es wird vermutet, dass eine dritte mit mehr radial gerichteten Spindeln dann erfolgt. Sporenmutterzellen werden nicht gebildet. Die birnförmigen Zellen, welche den reifen Askus erfüllen, dürften Konidien sein, welche von den runden Sporen wahrscheinlich durch Sprossung gebildet sind.

Bei *Taphridium algeriense* geht der Bildung der Sporenmutterzellen eine simultane Kernteilung mit tangentialen Spindeln voraus. In den Sporenmutterzellen finden Kernteilungen statt, wahrscheinlich zwei auf einander folgende.

Bei den untersuchten *Taphrina*-Arten enthalten die vegetativen Zellen typische Kerne, die immer paarweise dicht neben einander liegen, und ohne Zweifel konjugierte mitotische Teilungen ausführen. *T. bullata* hat in jeder solchen Zelle mehrere Kernpaare, die übrigen Arten nur ein Paar. Im Askus finden bei der Mehrzahl der Arten drei typische Mitosen statt, die erste Kernspindel steht fast immer trans-

versal. Während der Sporenbildung ist das Plasma zu einer peripherischen Schicht im Askus gesammelt. Bei *T. aurea* dürften die Teilungen im Askus amitotisch sein. Bei dieser Art und bei *T. carnea* bilden nur einige der acht Kerne Sporen, diese beginnen sogleich Konidien zu erzeugen, die übrigen Kerne degenerieren.

Die askogene Zelle der *Taphrina*-Arten ist eine Chlamydospore, welche bald keimt, indem das Endospor zu einem Schlauch, dem Askus, auswächst. Bei den meisten Arten wird das in den Schlauch hinausgewanderte Plasma nach unten durch eine Wand gegen die jetzt leere Chlamydospore abgegrenzt. Die »Stielzelle« ist nur die leere Chlamydospore.

Der *Endomyces*-Typus dürfte aus dem *Dipodascus*-Typus durch eine Reduktion in Bezug auf die Anzahl der Kerne hervorgegangen sein. In ähnlicher Weise dürfte der *Taphrina*-Typus vom Protomyceetaceen-Typus abzuleiten sein. Die beiden letzteren Typen dürften in den Mycelien konjugierte Kerne haben, und diese Phase dürfte in beiden Fällen durch Sporen- oder Konidien-kopulationen eingeleitet werden.

Verzeichnis der zitierten Litteratur.

1. Zu *Dipodascus*.

- DANGEARD, P. A., 1907. Recherches sur le développement du périthèce chez les Ascomycètes. *Le Botaniste*, sér. 10, p. 30.
- JUEL, H. O., 1902. Über Zellinhalt, Befruchtung und Sporenbildung bei *Dipodascus*. *Flora*, 91.

2. Zu den Endomycetaceen und Saccharomycetaceen.

- DANGEARD, P. A., 1907. Recherches sur le développement du périthèce. *Le Botaniste*, sér. 10.
- GUILIERMOND, A., 1902. Recherches cytologiques sur les levures et quelques moisissures à formes levures. Thèse, Lyon.
- , 1904. Le noyau de la levure. *Annal. mycol.*, 2.
- , 1905. Recherches sur la germination des spores et la conjugaison chez les levures. *Revue gén. de botan.*, 17.
- , 1909. Recherches cytologiques et taxonomiques sur les Endomycétées. *Revue gén. de botan.*, 21.
- , 1910. Remarques critiques sur différentes publications parues récemment sur la cytologie des levures et quelques observations nouvelles sur la structure de ces champignons. *Centralbl. für Parasitenk.*, 26: II.
- , 1911. Le développement et la phylogénie des levures. *Revue des sc. pures et appl.* 22.
- , 1912. Nouvelles observations sur la sexualité des levures. *Arch. für Protistenk.*, 28.
- JANSSENS et LEBLANC, 1898. Recherches cytologiques sur la cellule de levure. *La Cellule*, 14.
- STOPPEL, ROSE, 1907. *Eremascus fertilis* nov. spec. *Flora*, 97.
- WAGER, H., 1898. The nucleus of the yeast-plant. *Annals of botany*, 12.
- WAGER and PENISTON, 1910. Cytological observations on the yeast plant. *Annals of botany*, 24.

3. Zu den Protomycetaceen.

- VON BÜREN, G., 1915. Die schweizerischen Protomycetaceen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Entwicklungsgeschichte und Biologie. *Beitr. zur Kryptog.-Flora der Schweiz* 5.
- , 1916. Beitrag zur Kenntnis des Mycel der Gattung *Volkartia*. *Mitteil. der naturf. Gesellsch. in Bern*.

- VON BÜREN, 1917. Beitrag zur Biologie und Entwicklungsgeschichte von *Protomyces inundatus*. Ibid.
- DANGEARD, P. A., 1906. Recherches sur le développement du périthèce. *Le Botaniste*, sér. 9.
- JUEL, H. O., 1901. Contributions à la flore mycologique de l'Algérie et de la Tunisie. *Bull. Soc. mycol. de France*, 17.
- , 1902. *Taphridium Lagerh. et Juel*, eine neue Gattung der Protomycetaceen. *Bihang K. Sv. Vetensk.-Akad. Handl.*, 27: III.
- LINDROTH, J. L., 1904. Mykologische Mitteilungen, 12. *Acta Soc. Faun. et Flor. Fenn.*, 26.
- MAIRE, R., 1908. Contribution à l'étude de la flore mycologique des Pyrénées. *Bull. Soc. botan. de France*, 55.
- VOLKART, A., 1903. *Taphrina rhætica* und *Mycosphærella Aronici*. *Ber. deutsch. botan. Gesellsch.*, 21.

4. Zu *Taphrina*.

- DANGEARD, P. A., 1894—95. La reproduction sexuelle des Ascomycètes. *Le Botaniste*, sér. 4.
- FISCH, C., 1885. Ueber die Pilzgattung *Ascomyces*. *Botan. Zeitung*, 43.
- GIESENHAGEN, K., 1901. *Taphrina*, *Exoascus* und *Magnusiella*. *Botan. Zeitung*, 59.
- IKENO, S., 1901. Studien über die Sporenbildung bei *Taphrina Johansonii* Sad. *Flora*, 88.
- , 1903. Die Sporenbildung von *Taphrina*-Arten. *Flora*, 92.
- JOHANSON, C. J., 1885. Om svampslägtet *Taphrina* och dithörande svenska arter. Öfversigt K. Sv. Vetensk.-Akad. Förhandl.
- , 1887. Studier öfver svampslägtet *Taphrina*. *Bihang K. Sv. Vetensk.-Akad. Handl.*, 13: III.
- JUEL, H. O., 1909. Om *Taphrina*-arter på *Betula*. *Svensk botan. Tidskrift*, 3.
- PIERCE, N. B., 1900. Peach leaf curl: its nature and treatment. U. S. Dep. of Agric., Bull. n:o 20.
- SADEBECK, R., 1884. Untersuchungen über die Gattung *Exoascus* und die durch dieselbe um Hamburg hervorgerufenen Baumkrankheiten. *Jahrb. Hamburg. wissensch. Anst.*, 1.
- , 1893. Die parasitischen *Exoasceen*. Ibid., 10: 2.

Erklärung der Tafeln.

Taf. I.

Fig. 1—22. *Endomyces decipiens*.

- Fig. 1—3. Mitosen in vegetativen Hyphen. Vergrößerung 1900: 1.
» 4—6. Kopulationen zwischen Hyphenzellen, als Atavismen aufzufassen. 1200: 1.
» 7—22. Askus in verschiedenen Stadien. 1200: 1.
» 7, 8. Spiremännliche Phase des Kerns.
» 9—12. Phasen der 1. Kernteilung.
» 13. Askus mit 2 Kernen.
» 14, 15. Phasen der 2. Kernteilung.
» 16. Askus mit 4 Kernen.
» 17. Die vier Kerne in Mitose?
» 18. Askus mit 8 Kernen?
» 19—21. Stadien der Sporenbildung.
» 22. Askus mit älteren, jedoch noch runden Sporen.

Fig. 23—29. *Taphridium umbelliferarum*. 1900: 1.

- Fig. 23. Partie eines Querschnitts von einem Sporangium mit grossen Spiremchenkern.
» 24. Späteres Stadium, Kerne mit klumpenförmigen Chromatinmassen.
» 25. Flächenschnitt eines Sporangiums mit peripherisch gelagerten Kernspindeln der 1. Teilung.
» 26. Flächenschnitt mit Kernspindeln der 2. Teilung.
» 27. Flächenschnitt, Telophase der 2. Teilung.
» 28. Dasselbe Sporangium in Querschnitt. Einzelkerne an der Peripherie, im Innern desorganisierte Kernreste.
» 29. Querschnitt, späteres Stadium, Kerne oder junge Sporen im peripherischen Plasma unregelmässig gelagert.

Fig. 30—32. *Taphridium algeriense*. 1900: 1.

- Fig. 30. Flächenschnitt eines Sporangiums vor der Bildung der Sporenmutterzellen, Kernspindeln der 1. Teilung an der Peripherie lagernd.
» 31, 32. Flächenschnitte, Phasen der in den Sporenmutterzellen stattfindenden Kernteilung.

Fig. 33 und 34. *Dipodascus albidus*. Ca 1200: 1.

- Fig. 33. Askus mit grossem Fusionskern in spiremähnlicher Phase.
 » 34. Telophase der ersten Teilung.

Taf. II.

Fig. 35—40. *Taphrina Pruni*.

- Fig. 35. Junge, noch vegetative Hyphen mit Kernpaaren. 1900: 1.
 » 36. Spiremähnliche Phase des Askuskerns. 1500: 1.
 » 37. Spätere Phase, vielleicht als Synapsis aufzufassen. 1500: 1.
 » 38. Erste Kernteilung im Askus. 1900: 1.
 » 39. Dritte Kernteilung im Askus. 1900: 1.
 » 40. Sporenbildung. 1900: 1.

Fig. 41—44. *Taphrina Potentillæ*.

- Fig. 41. Sehr junger Askus, vor der Kernfusion. 1500: 1.
 » 42. Etwas älterer Askus, mit Fusionskern. 1500: 1.
 » 43. Erste Kernteilung im Askus. 1900: 1.
 » 44. Zweite Kernteilung im Askus. 1900: 1.

Fig. 45. *Taphrina alnitorqua*. 1900: 1.

- Fig. 45. Erste Kernteilung im Askus.

Fig. 46—48. *Taphrina betulina*. 1900: 1.

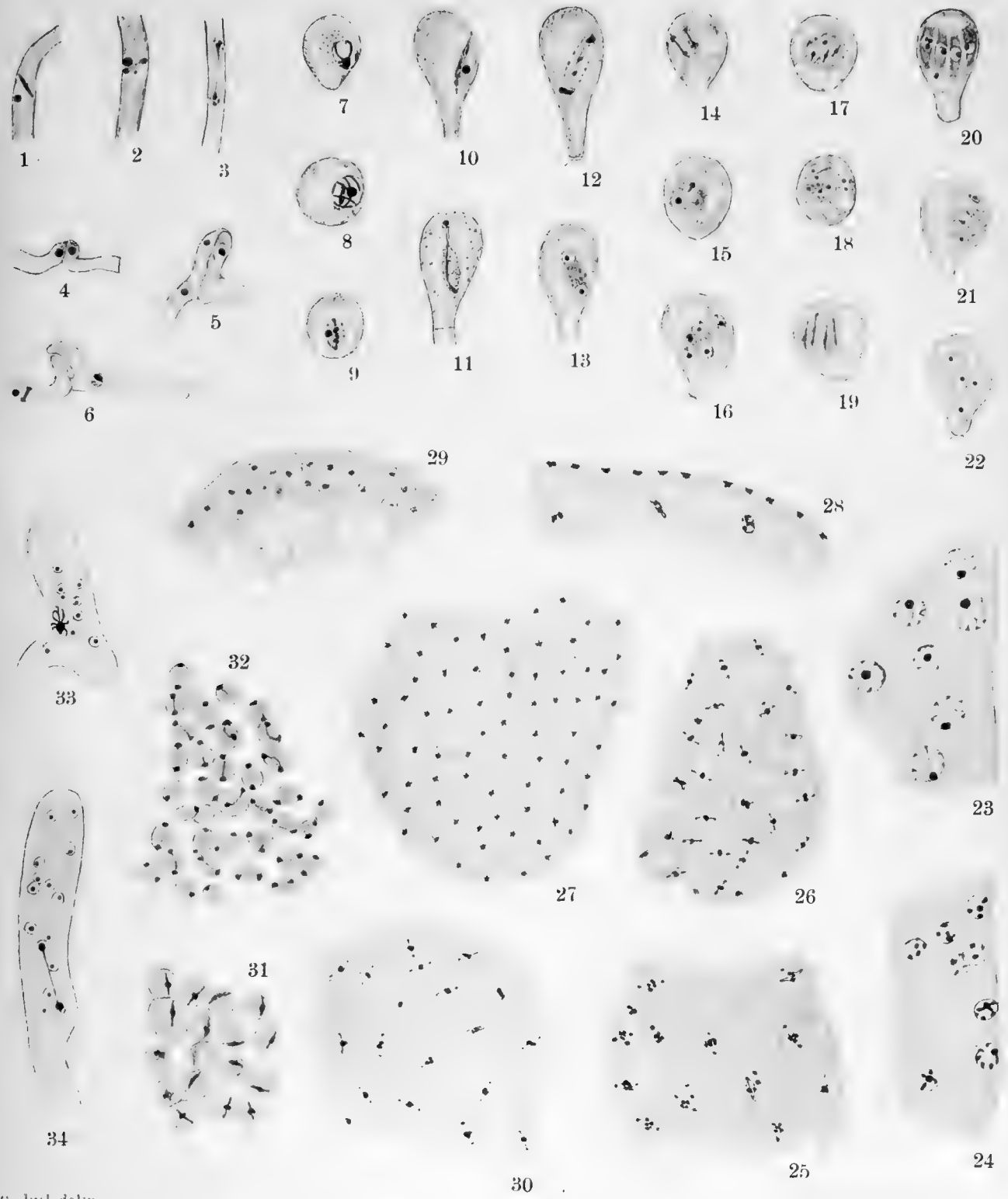
- Fig. 46. Erste Kernteilung im Askus.
 » 47. Zweite Kernteilung.
 » 48. Dritte Kernteilung.

Fig. 49—51. *Taphrina epiphylla*. 1000: 1.

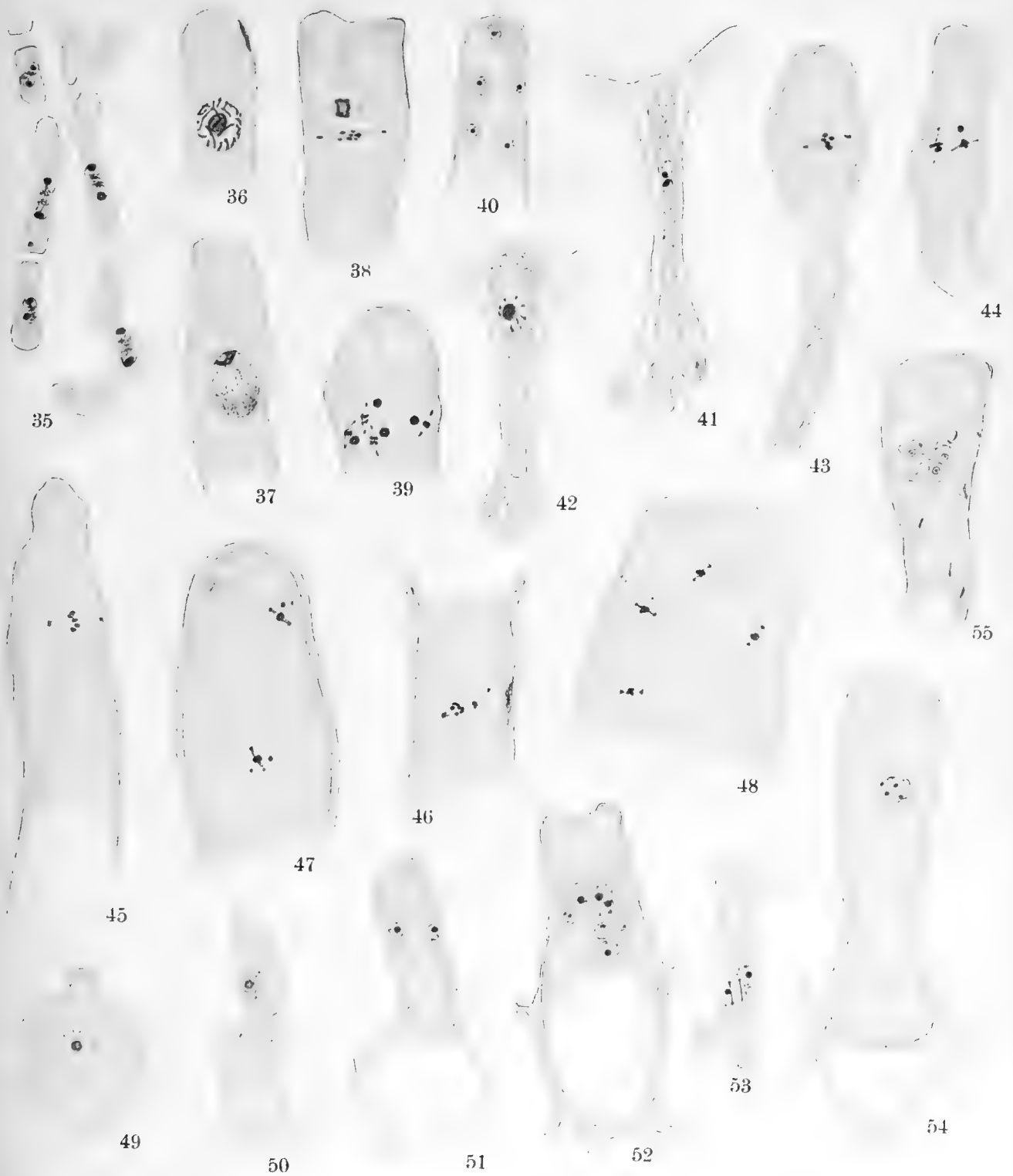
- Fig. 49. Erstes Hervorbrechen des Askusschlauches.
 » 50, 51. Weitere Entwicklung des Askus, Bildung der »Stielzelle».

Fig. 53—55. *Taphrina aurea*.

- Fig. 53. Zelle des jungen vegetativen Mycel, die Kerne dürften eine konjugierte Teilung ausführen. 1900: 1.
 » 54. Askus mit »Stielzelle», die einen leeren Raum darstellt. Die vielleicht amitotisch erzeugten Kerne bilden einen Haufen in der Mitte des Askus. 1000: 1.
 » 55. Ein Askus, der drei sprossende Sporen und fünf degenerierende Kerne enthält. 1000: 1.
-







NOVA ACTA REGIAE SOCIETATIS SCIENTIARUM UPSALIENSIS

SER. IV. VOL. 5. N:o 6.

THE CRINOIDS

FROM

DR. S. BOCK'S EXPEDITION TO JAPAN 1914

BY

TORSTEN GISLÉN

WITH 2 PLATES AND 162 TEXTFIGURES

(PRESENTED TO THE ROYAL SOCIETY OF SCIENCE OF UPSALA NOVEMBER 4th 1921)

UPPSALA

EDV. BERLINGS BOKTRYCKERI A.-B.

1922.

The Crinoids

from

Dr. S. Bock's Expedition to Japan 1914.

This systematic work is an investigation of the fine and very interesting Crinoid material that was brought home by Dr. SIXTEN BOCK's Japanese expedition of 1914 and which has kindly been delivered to me by Dr. Bock for determination. On many occasions the determination has been facilitated by comparison with the crinoids that Dr. MORTENSEN of Copenhagen has collected in the same regions and also kindly delivered to me for determination.

I am much indebted to Mr A. H. CLARK of Washington for the very valuable information he has always readily rendered me. To Professor A. WIRÉN of Uppsala I also wish to express my thanks for the kind interest with which he has followed my investigations.

The translation has been made by myself with the assistance of my sister Miss MÄRTHA GISLÉN. The work was afterwards revised by Mr HENRY ALEXANDER M. A. and to both these helpers I herewith offer my heartiest thanks.

Finally I beg to express my gratitude to Miss SIGRID OHLSSON and Miss A. STARUP, who have kindly drawn in Indian ink the text-figures made by myself in pencil.

The points of view that I have followed in my investigation have chiefly been the same as I applied when revising the crinoid material brought home from Australia by Dr. MJÖBERG, though I have been able to begin and complete the determination of the Japanese Crinoids with a deepened knowledge and also to apply a more tho-

roughly worked out systematical method. Thus I have for each species given a more or less detailed description of a typical specimen and for the rest of the individuals belonging to the same type I have given an account of the divergences from the normal type. I have also given numerical specifications for such characteristics as were the subject of statistical treatment.

What I have often felt as a deficiency is, that the authors of the species-descriptions within this group, especially during the last few years, have not given any specifications either as to which characteristics they have considered to be significant for the species or to which previously described species the newly described type might be most closely related. It has therefore become unnecessarily tedious to find out from the multitude of the stated characters those which are specific for the species. Because of this I have added to the description of every new species or variety a short summary and discussion of the characteristics that I have thought to be distinguishing ones for the species, and a statement as to which previously described species the new one might be most closely related to.

Since the days of the Challenger papers there are few works that have given any figures of the newly described Crinoids and in the cases where this has been done it is almost without exception only habitus-figures that have been reproduced as drawings or photos. When it is necessary to reproduce a habitus-picture of a Crinoid a photo is doubtlessly most suitable, n. b. if well taken. A picture of an entire animal must always involve great schematization, which becomes more visible in Crinoids than in other animals because the Crinoids consist of such an innumerable quantity of ossicles, the number, sculpture and form of which represent the proper genus and species characteristics. A good photo, on the contrary, can quite correctly reproduce a habitus-picture and, in addition, a good many of the more microscopical characters. But when it is a question of giving a complete picture of a newly described species the macroscopical photo is, however, not satisfactory alone, at least not in the case of a Comatulid species. Then one must also add to the habitus-picture drawings (or microphotos) to visualize the specific characters for the species, which one usually takes from the appearance, form, number and size of the Cd and cirrals; from the sculpture of the arms and especially

from their proximal parts; from the occurrence of the pinnules and their relative size and ornamentation. It will therefore be seen that in most species I have given drawings of Cirri, of the proximal and distal pinnules that are especially characteristic, and of Br joints and Centrodorsals, where they have any characteristic sculpture or otherwise show any appearance specific for the species.

As to the systematical classification I have followed A. H. CLARK'S system. Though in some particular cases this perhaps needs criticizing, still it is certainly right in its principal traits. In his large work on the Comatulids of the Siboga Expedition, CLARK has brought together a good many of his systematical observations previously published in numerous investigations and now one can more easily estimate the value of the new system. In certain cases he has perhaps, however, gone too far in subdividing the genera; the recent known Crinoids comprising about 600 species are distributed in 132 genera. The apparent disproportion between the number of species and genera will in the future be diminished by new expeditions adding many new species to the small genera. By this the division into genera will certainly persist in many cases, but on the other hand I do not think that in course of time one will be able to keep apart genera in which for instance the difference in genus *A* is only that P_1 is the longest pinnula, in *B*: P_2 , in *C*: P_3 .

Though I have studied about 40 of the above-mentioned genera, I do not consider that I have yet sufficiently detailed knowledge to put the system through a suitable criticism and apply new restrictions to certain genera. Besides, it seems to me as if the study of the inner anatomy (in the Comatulid genera and families still quite a *terra incognita*) ought to precede a discussion of the mutual relation between the different groups. I hope in the future to be able to begin this study and throw some light upon the matter.

Dr. Bock's Japanese Expedition brought home 53 different species and varieties of Crinoids, distributed in 29 genera. I have given below a list of the contents of the collection and at the same time the depths at which the specimens were swept. (In the case of the specimens from Kiu-Shiu there are sometimes no statements of the

depths, but according to Dr. BOCK they are said to be taken from at most a depth of 200 metres)¹.

- Comatella brachycirra* n. sp. 145—209 metres
Comatella maculata (P. H. CARP.) 145—182 metres
Comatella stelligera (P. H. CARP.) 145—209 metres
Commissia peregrina var. *magnifica* n. var. 192 metres
Comissia parvula A. H. CLARK 209—728 metres
Comissia gracilipes A. H. CLARK 728 metres
Comissia ignota var. *minuta* n. var. 127—209 metres
Comaster delicata var. *grandis* n. var. 72—182 metres
Comaster serrata A. H. CLARK 127—209 metres
Comantheria grandicalyx (P. H. CARP.) 54—72 metres
Comantheria grandicalyx var. *flagellipinna* n. var. 20—63 metres
Comanthus solaster A. H. CLARK 2—4 metres
Comanthus pinguis A. H. CLARK 136 metres
Comanthus (Vania) annulata (BELL) 127 metres
Comanthus (Vania) parvicirra α *comasteripinna* (MÜLLER) n. n. 0—63 metres
Comanthus (Vania) parvicirra β *comanthipinna* n. subsp. 63 metres
Catoptometra Hartlaubi A. H. CLARK 245 metres
Catoptometra magnifica var. *minor* n. var. 127—182 metres
Eudiocrinus indivisus SEMPER 182 metres
Eudiocrinus gracilis var. *pulchellus* n. var. 127—182 metres
Eudiocrinus Loveni n. sp. 145 metres
Liparometra grandis A. H. CLARK, ?—145 metres
Cenometra bella (HARTLAUB) 63 metres
Cyllometra disciformis (P. H. CARP.) 162—728 metres
Cyllometra manca (P. H. CARP.) 47 metres
Cyllometra albopurpurea A. H. CLARK 163—182 metres
Cyllometra pulchella n. sp. 136—163 metres
Tropiometra afra var. *macrodiscus* (HARA) 3—5 metres
Tropiometra encrinus (LÜTKEN) 163 metres
Neometra multicolor A. H. CLARK 163 metres

¹ The statements as to the depths, according to Dr. BOCK, ought not to be taken too strictly, with the exception of the depths from the Kiu-Shiu locality. In other cases they only signify the length of the wire let out of the trawl.

- Pectinometra flavopurpurea* A. H. CLARK 364—728 metres
Pterometra trichopoda A. H. CLARK 145—182 metres
Asterometra macropoda A. H. CLARK 163 metres
Asterometra anthus A. H. CLARK 127—209 metres
Stenometra dentata n. sp. 182—209 metres
Crossometra septentrionalis A. H. CLARK 364 metres
Perissometra araneā n. sp. 200 metres
Diodontometra Bocki n. gen. & sp. 209 metres
Compsometra parviflora A. H. CLARK 127—145 metres
Compsometra serrata A. H. CLARK 0—3 metres
Toxometra æquipinna n. sp. 273 metres
Iridometra melpomene A. H. CLARK 182—728 metres
Dorometra nana (HARTLAUB) Diver (about 0—5 metres)
Dorometra briseis A. H. CLARK 728 metres
Dorometra parvicirra (P. H. CARP.) 145—163 metres
Psathyrometra Wireni n. sp. depth?
Erythrometra rubra A. H. CLARK 163 metres
Clarkometra elegans n. gen. & sp. 127—163 metres
Thaumatometra comaster A. H. CLARK 273—728 metres
Metacrinus nobilis var. *tenuis* n. var. 182—400 metres
Metacrinus rotundus P. H. CARP. 182—254 metres
Metacrinus interruptus P. H. CARP. 145—400 metres
Metacrinus interruptus form. *ornatus* new form 182—400 metres.

If I disregard *Compsometra serrata*, which is also found on the shore at Shimonoseki, the above-enumerated species are scattered over 3 different localities. These 3 localities are the Sagami Bay, the district round the Goto Islands, and the Bonin Islands.

From Sagami the following species were brought home: 1) *Commissia parvula*, 2) *C. gracilipes*, 3) *Comanthus solaster*, 4) *C. parvicirra a comasteripinna*, 5) *Liparometra grandis*, 6) *Cyllometra disciformis*, 7) *Tropiometra afra macrodiscus*, 8) *Pectinometra flavopurpurea*, 9) *Crossometra septentrionalis*, 10) *Compsometra serrata*, 11) *Toxometra æquipinna*, 12) *Iridometra melpomene*, 13) *Dorometra briseis*, 14) *Thaumatometra comaster* and 15) *Metacrinus rotundus*. Further there is a young Comasterid from a great depth, which is probably *Comatulides decameros* sp. juv. In all therefore 15 or 16 species from Sagami, one of which is new (N:r 11).

From Kiu-Shiu and the Goto Island are collected: 1) *Comissia parvula*, 2) *Comanthus pinguis*, 3) *Catoptometra Hartlaubi*, 4) *Cyllometra manca*, 5) *Cyllometra pulchella*, 6) *Neometra multicolor*, 7) *Asterometra macropoda*, 8) *Perissometra aranea*, 9) *Psathyrometra Wireni*, 10) *Erythrometra rubra*, 11) *Metacrinus nobilis tenuis*, 12) *M. interruptus*, 13) *M. interruptus form. ornatus* and 14) *M. rotundus* or 14 species, including 3 new species and a new form. N:r 1 und 14 are common with the Crinoid fauna of the Sagami bay, n:r 11, 12 and 13 with that of the Bonin Islands.

From the Bonin Islands there are:

1) *Comatella brachycirra*, 2) *C. maculata*, 3) *C. stelligera*. 4) *Comissia peregrina magnifica*, 5) *C. ignota minuta*, 6) *Comaster delicata grandis*, 7) *C. serrata*, 8) *Comantheria grandicalyx*, 9) *C. grandicalyx flagellipinna*, 10) *Comanthus annulata*, 11) *C. parvicirra a comasteripinna*, 12) *C. parvicirra β comanthipinna*, 13) *Catoptometra magnifica minor*, 14) *Eudiocrinus indivisus*, 15) *Eu. gracilis pulchellus*, 16) *Eu. Loveni*, 17) *Liparometra grandis*, 18) *Cenometra bella*, 19) *Cyllometra albopurpurea*, 20) *C. disciformis* 21) *Tropiometra encrinus*, 22) *Pterometra trichopoda*, 23) *Asterometra anthus*, 24) *Stenometra dentata*, 25) *Diodontometra Bocki*, 26) *Compsometra parviflora*, 27) *Dorometra nana*, 28) *D. parvicirra*, 29) *Clarkometra elegans*, 30) *Metacrinus nobilis tenuis*, 31) *M. interruptus*, 32) *M. interruptus form. ornatus*. Among these 32 species there are 2 belonging to new genera, 5 new species, 7 new varieties, and one new form. N:r 11 and 17 are also found in the Sagami-list, N:rs 30, 31 and 32 in the one from the Goto Islands.

As to the Sagami-species one can note some forms from a depth of 100—400 fathoms (182—728 metres) which have not before been found north of the archipelago of the Sunda-Islands. Probably it is the warm Kuro-Shio stream which passes northwards along the eastern shore of Japan that has brought up the larva-stages of these southern species and that makes their duration in this northern waters possible. According to the statement of Mr A. H. CLARK and the holothurian specialist Dr. H. OHSIMA a southern wool continues to assert itself in the marine fauna up to the Sendai Bay, i. e. somewhat north of the 38th latitude. The prominent point and Kingwa-San here prevent further penetrating of the warm water and of southern forms and marks the northern boundary of Indo-pacific animals. *Comissia parvula* was previously found at the Philippine Islands and the smaller Sunda-Islands at a depth of 73—522 metres. In the Bockian Collections the species

was swept from Sagami at a depth of 209—728 metres. *Comissia gracilipes*, collected at the Kei-Islands at a depth of 595—984 metres, is found at Sagami at 728 metres. *Cyllometra disciformis* occurs at the Philippines from 0—325 metres, at Sagami the species is found from 182—728 metres and, finally, *Toxometra* at the Philippines and the Sunda-Islands, where the genus is represented by the species *paupera*, occurring at a depth of 0—502 metres, was brought home from Sagami from 273 metres.

A woof of southern forms is also visible at the Goto Islands by the occurrence of the species *Cyllometra manca*, *Psathyrometra Wireni*, *Metacrinus interruptus* and *M. nobilis* var. *tenuis*.

The Crinoid fauna of the Bonin-Islands was quite unknown before. The 32 species that have been brought home from these islands, show that the crinoid fauna forms a mixture between the South Japanese fauna and that of the Sunda Islands and Oceania with a woof of some more peculiar and diverging forms. South Japanese species or ones closely related to these are *Comatella brachycirra*, *Comaster serrata*, *Comantheria grandicalyx*, *Cyllometra albopurpurea*, *Asterometra anthus* and *Stenometra dentata*. Most of the rest are represented by the same or closely-related forms in the waters round the Sunda islands and the Philippines or belong to species with ubiquitous distribution. *Eudiocrinus gracilis*, formerly reported from Burma, is represented by a somewhat diverging form. Of the same genus there is a new species *Eu. Loveni*, which reminds one both of *Eu. gracilis* and *venustus*, but is otherwise a special type. It is strange that a variety of the East African *Comissia ignota* is found at the Bonin Islands. As a parallel in the distribution one might quote *Tropiometra afra* and *Tropiometra afra macrodiscus*. Both the new genera of the collection also originate from these islands. The genus *Diodontometra* is a *Charitometrid* form, most closely related to *Charitometra*, a genus known from great depths at the Kermadec and Fiji islands, though the new genus differs from *Charitometra* by having XX arms and a double opposing spine, an almost unparalleled condition, formerly observed only in the genus *Epimetra* fam. *Colobometride*. The new genus *Clarkometra* is also interesting especially from an animal-geographical point of view. The genus belongs to the subfamily *Perometrine* of *Antedonidae* and is most closely related to the East American genus *Hypalometra*,

from which it differs, however, in several characteristics. A small number of genera from the Indian ocean are already known with corresponding types in the Caribbean sea. The above-mentioned genera still show a couple of these interesting correspondences.

Some of the species found at the Bonin islands (e. g. *Tropiometra encrinus*, *Vania annulata*) are met with here at greater depths than those formerly reported in the literature.

A tendency to abbreviation of the cirri can be traced in several species from the Bonin islands. Thus *Conatella brachycirra*, *Catoptometra magnifica minor*, *Eudiocrinus gracilis pulchellus*, and *Stenometra dentata* differ from closely related forms by the cirri being unusually short in comparison with the arms (compare several newly described species in CLARK'S Siboga work, where in forms from the Sunda islands an opposite tendency prevailed).

Some of the Bonin localities seem to have had a very rich crinoid fauna. From St. 59 one notes no less than 13 species. It may be of some interest to note that while the crinoid fauna from this rich locality only shows full-grown specimens, the list from e. g. St 47 only includes the young of large species and mature individuals of small forms. Obviously a current favourable for the one as well as for the other has brought larvæ of numerous forms. In the latter case quoted this has occurred rather recently and it is therefore only the small species that have reached maturity.

The collection as a whole gives a good idea of the abundance of crinoids that prevails in Japanese waters.

The family *Comasteridae* is represented by 16 species, one of which is a new species, and 5 can be considered as new varieties. In the systematical investigation of this family I have discussed in special detail the forms of *Comanthus (Vania) parvicirra* and the value the characters may have in this sub-genus. The collection is rich in young forms and an especially great number of young Comasterids have been placed at my disposal. All these young forms, like all young forms of Comasterids, are exceedingly difficult to identify and one may usually think oneself very fortunate if the young Crinoid is determinable as to genus. Hitherto descriptions are chiefly published only for grown-up forms and therefore the characteristics that might possibly be used to distinguish young ones are unnoticed or unknown. If the fauna

at a certain place is approximately known and evolution-series are brought home, the prospects of identifying young forms are considerably brighter. I therefore considered it of a certain interest to make a combination of the young Comasterid forms from the Bonin Islands and, partly by comparing them with one another, partly by studying given evolution-series, try to produce the characteres that might be of systematical value. Thus, among other things, I think I have found that the appearance of the disk can give certain fixed points for judging the systematic position of the young Comasterids.

The family *Zygometridae* is represented by 5 forms including one new species and two new varieties. As always, here too I have been very cautious in establishing new species and have preferred to set up a new form as a variety rather than as a species if the distinguishing characteristics have seemed to me to be less decided or I have otherwise had any doubt about the value of the distinguishing marks quoted. Therefore it is very possible that some of the new forms described as varieties will in future turn out to be new species.

Of the families *Mariametridae*, *Colobometridae*, *Tropiometridae* and *Calometridae* there are, except *Cyllometra pulchella* n. sp., only previously known species with a number of species 1, 5, 2 and 2 respectively. *Cyllometra disciformis* is swept from greater depths than were previously known and because of this the cirrals are exceptionally short in correspondence with A. H. CLARKS statement on the Siboga material. *Antedon macrodiscus*, described by the Japanese HARA 1895, I have put as a variety under *Tropiometra afra*, from which it only differs by having a greater number of cirrals, a character that in this case I cannot consider to have a species-distinguishing value, as it is the only differing one. The relation between the genera *Calometra* and *Neometra* I have discussed in connection with the description of specimens of *Neometra multicolor*.

The family *Thalassometridae* appears with 4 species, one of which is new, *Stenometra dentata*, in a certain way intermediate between the genera *Stenometra* and *Daidalometra*. Of *Asterometra anthus* I have had an opportunity to study a very rich material, which has been subjected to statistical investigation. This has given the result that both the Clarkian species *A. acerba* and *A. lepida* cannot be considered as forms differing from the above-mentioned species but might become absorbed

in *A. anthus*. Both in this and in the first-mentioned, newly described species there are some very tender young forms with defective pinnulation and orals not yet resorbed. I have also observed these ossicles in some small *Comasterid* youngs and in a young *Compsometra serrata*.

Of *Charitometridæ* there are 3 species, one of them belonging to a new genus, the above-mentioned *Diodontometra*. Moreover a new species of the genus *Perissometra* is also described.

The family *Antedonidæ* counts in the collection 12 species, distributed over 4 sub-families: 1) *Antedoninae*: 7 species, including a new one, 2) *Zenometrinae*: one species (new), 3) *Perometrinae*: 2 species (one new genus, the above-mentioned *Clarkometra*) and 4) *Batymetrinae*: 1 species.

Compsometra serrata as also the above-mentioned *Cyllometra pulchella* were brought home in great numbers and the statistical investigation that I have carried out shows here, as almost everywhere when one has to do with nearly fullgrown crinoids, an astonishing constancy in the number of cirri, cirrals, pinnulars, etc. A certain variability is, however, always visible and to establish its range seems to be of rather great importance. *Psathyrometra Wireni* is peculiar in so far as it has sexual products on P₂, a character restricted otherwise to the subfamily *Bathymetrinae* or occurring exceptionally in *Antedoninae*.

Of stalked Crinoids there are only representatives for the Penta-crinoid genus *Metacrinus*, which is represented by 4 different species or forms (including a new variety and a new »form«). *Metacrinus Stewarti* for reasons quoted is considered to be an unimportant form-deviation from the *M. rotundus* type and is therefore treated as a synonym of this species. As to *M. interruptus* (P. H. CARP.) I have on the contrary considered that there are reasons for not agreeing with Mr. SPERRY's views as to the identity of this species with *M. rotundus* and I have therefore treated it as a separate species.

The material of *Metacrinus*-forms is extraordinarily fine and interesting from an ontogenetical point of view. A young specimen of *M. interruptus* may be the youngest known specimen of a *Metacrinus* species and shows many interesting conditions of organisation. In a couple of species it has been possible to follow the increase in the thickness of the stem and an estimate of the total length of the grow-

ing stem has given figures from 2 to 2,5 metres. It is, however, to be noticed that large forms, such as *M. rotundus*, probably have stems which during their increase of thickness become a good deal longer. Concerning both the first-mentioned species and the latter ones it is very possible that the length-increase of the stem is continued *even after* the increase of thickness has ceased. A couple of measurements have shown that the thickness of the stem can even decrease proximally, which ought probably to be regarded as a phenomenon of old age. The study of the components of the division-series has led to interesting results which will be treated in a special investigation in connection with the question of the new formation and augmentation of the number of arms in the genus *Metacrinus* and in the discussion of the relation between pinnulæ and arms.

Concerning the terminology I have used the same names as in my work upon the MJÖBERGIAN Crinoids, i. e. about the same as BATHER, A. H. CLARK etc. have employed.

Thus R (the radial) is the first ossicle of the arm. The ossicles between the radial and the first arm-ramification are denoted as primibrachials 1, 2, etc. (I Br 1, I Br 2). The last ossicle before this arm-division is an axillary (I Brax), carrying on its distal surface two secondary arms. If the animal has only X arms there are no further arm-ramifications, otherwise after the I Brax the secundibrachials (II Br:s) follow with the 2nd, 4th or, among the stalked crinoids, even a more distal segment forming an axillary. On this a new division-series, the tertibrachial (III Br), may possibly arise, then perhaps a IV Br series and so on. The segments of the arm-branches that are not further divided are signified as brachials (Br) with the number of the segments counted from the last axillary.

The number of the Cirri (C) as well as of the arms is written in roman figures, the number of the segments in arabic ones. By the word »whorl» in the description of cirri I mean their arrangement in a horizontal line, but I speak of »row» when referring to their arrangement in a vertical line.

The pinnules (P) are denoted on the outside of the arm by ordinals, on the inside they are indicated by letters (a, b, c). I Br (Costal), II Br (Distical), III Br (Palmar), and IV Br (postpalmar) pinnules I

have, however, contrary to my procedure in the Mjöbergian work, denoted by $P_I (=P_C)$, $P_{II} (=P_D)$, $P_{III} (=P_F)$ and $P_{IV} (=P_{PP})$.¹

In order to demonstrate the ramifications of the arms I have used the same schemes that I demonstrated in my Mjöbergian investigation. In these schemes synarthries are indicated by hyphens, syzygies by the plus sign. Though synarthries and syzygies have different marks they can, however, in certain species pass over to each other to an unlimited extent and in such dubious cases I have often put a query instead of one of the above-mentioned marks. The »pseudo-» syzygy when fully developed is denoted as a »true» syzygy. Roman numerals signify the number of division-series, thus for instance II=II Br, arabic ones = the ordinals of the segments. Br as usual = brachial, R=radial. I have marked the regenerate by adding an index to the number of the segment. The index mark 1 forms the sign of a first regeneration, 2 of a second one and so on. The distribution of the pinnules is indicated by horizontal lines which are applied below or above the symbol of the segment according as the pinnula is fixed inside or outside the arm.

The abbreviations that I have used are the following:

B = basale	br = breadth	
Br = brachiale	h = height	D = Dorsal cirrus whorl
C = cirrus	L = length	V = Ventral cirrus whorl
Cd = Centrodorsale	N = number	
IR = interradially	S = number of segments	
P = pinnula	T = teeth.	
R = radiale		

¹ For the pronunciation of these symbols I suggest: primi-p., secundi-p., tertii-p. etc.

Comasteridæ A. H. CLARK.

Subfam. Capillasterinæ A. H. CLARK.

Comatella A. H. CLARK.

C. brachycirra n. sp.

Fig. 1—3. Photo 1.

From St. 53 (5 sp.), 55 (2 sp.), 56 (2 sp.), 59 (7 sp.) = 16 specimens.

Sp. 1 (St. 56) Cd flattened, free dorsal surface small, smooth, peripherically somewhat furrowed, diameter 1.5 mm.

Cirri XVIII, 10—12; 5—7 mm. in a close, irregular whorl (most are broken). The first segment somewhat shorter than long, 2^d segment $L = 2 \times br$, somewhat hour-glass shaped, 3^d and 4th segments $L = 3 - 3\frac{1}{2} \times br$. (4th segment with the disto-dorsal part bent outwards), 5th segment $L = 2 \times br$, 6th and following segments L about = br with unimportant, obtuse, dorsal spines. The dorsal spines of the two last segments more pointed. Terminal claw strongly bent, quickly tapering, $L = 2 \times$ the penultimate segment.

B—s appearing IR as knobs. R—s almost hidden by Cd on the middle, or presenting themselves as narrow bands.

I Br 1 $L = \frac{1}{3} br$, laterally free, united with I Br 2 by a synarthry. I Brax $h = \frac{2}{3} br$, forming a low pentagon, the distal margins a little bent outwards. The II Br:s are 2, appearing in 2 cases (the arms are partly broken). Arms at least XII, 50—60 mm:s.

Br 1 on their inner side standing together or free, 6—7 first Br-segments discoidal then oblique joints, h (the longest) = br . Syzygies 1 + 2 on the inner side of the ramifications on the II Br:s, 3 + 4 on the outer side, then 12 + 13, 17 + 18, 21 + 22 etc. with an interval of 3 oblique joints. The breadth of the arms is 0.8 mm. 16 Br-segments pro cm (12 if the syzygial pairs are counted as units) in lateral view not overlapping. The bases of the arms remarkably smooth.

P_1 — P_3 with a comb. P_1 22 (\pm 7 T, their $L = 1\frac{1}{2} \times$ the br of the segment) 5,5 mm. (Segments 1 and 2 short, the following ones \geq br), P_2 17 (6 T) 3,5 mm., P_3 \pm 17 (6 T) 3,5 mm., P_4 16; 4,5 mm. a little spiny, P_6 14; 3,5 mm. Distal p-s. 18; 5—6 mm:s (1 segment short, the following ones $L = 1\frac{1}{2}$ br; unimportant hooks on the last segments, compare the figure).

Mouth central. Disk 4 mm., dark brown with lime-granules. Anal funnel short, 1,2 mm. The arms a lighter, uniform brown (in spirit).

Sp. 2 (St. 56) C. XVI, 11; 6,5 mm. The arms XV, 35—40 mm. P_1 24 (8 T) 6 mm. P_2 19 (6 T); P_3 18 (6 T) 4 mm. The distal p. 15; 6 mm., Cd. peripherically ruddy. Disk 3,5 mm.

Sp. 3 (St. 59) C. XXV 11; 6—7 mm. C. in two whorls, The arms XIV \pm 60 mm. P_1 22—24 (8 T) 7 mm. The distal p. 20; 7,5 mm., P_5 15; 4 mm. without a comb.

Sp. 4 (St. 59) C. XVII, 9—11; 4—6 mm. The arms XIV or XV, 50 mm. P_1 25 (7 T) 5,5 mm. P_2 and P_3 with 5—6 T, P_4 14; 3,5 mm. Distal p. 17; 5,5 mm.

Sp. 5 (St. 59) C. XX 10—11; 4,5—7 mm. The arms more than XII, broken. P_1 23 (7 T) 5,5 mm.

Sp. 6 (St. 59) C. XII in a single whorl. The arms XII, 50 mm. P_1 23 (7 T) 5,5 mm. P_2 18 (6 T) 3,2 mm., P_3 18 (5 T) 3,2 mm., P_4 14. Distal p. 15; 5,5 mm. Disk 3,5 mm. The specimen somewhat more slender than the foregoing ones. The Br-segments in the distal arm-part $L = 1\frac{1}{2}$ br, somewhat spiny in the distal margin.

Sp. 7 (St. 59) C. XV 11; 5 mm. The arms XIII, 45 mm. P_1 22 (8 T) 5 mm., P_2 19 (7 T) 3,5 mm., P_3 6 T, 3 mm. Distal p. 18; 6,5 mm.

Sp. 8 (St. 59) C. XXI, 10—11; 5—6 mm. The arms $>$ XII. P_1 28 (7 T) 5,5 mm. P_2 22 (7 T), 3,7 mm., P_3 21 (7 T) 3,5 mm., P_4 14; 3,5 mm. Distal p. 12; 3,5 mm. In this and the following specimen shorter Br-segments which are bent more outwards.

Sp. 9 (St. 59) C. XVII, 10—11; 4—5 mm. The arms XII \pm , 25—30 mm. P_1 23 (8 T) 4,5 mm., P_2 21; 3,5 mm., P_3 20 (7 T) 3,5 mm. Distal p. 15; 5 mm.

Sp. 10 (St. 55) Cirri XVIII 10—11; 6 mm. The arms XIV, 70 mm. P_1 8 T, 6 mm., P_2 21; 5 mm. P_4 15; 4,5 mm. Distal p. 18; 7 mm.

Sp. 11 (St. 55) C. XVIII 10—11, 5,5—6,5 mm. The arms XIII, 60 mm. P_1 25 (8 T) 6 mm., P_4 15; 4,5 mm. Distal p. 20; 7 mm.

Sp. 12 (St. 53) C. XIII 11; 7 mm. The arms XVIII, 65—75 mm. P₁ 25—27 (8—9 T) 6 mm., P₂ 22, P₃ 21 (6 T) 4 mm., P₄ 15. Distal p. 18; 7 mm. Occasionally P₄ with a comb 5 T, 17 segments. The specimen is lighter coloured. Perhaps a hybrid with some of the following species. The Br-segments somewhat more spiny than those of the preceding specimens.

Sp. 13 (St. 53) C. XVII 10—11, 5—6 mm. The arms XV, 45 mm. P₁ 7 T, P₂—P₃ with teeth. Distal p. 16; 5 mm. These sp. and the 3 following ones more reddish-brown than the preceding.

Sp. 14 (St. 53) C. XIV 10—11, 5—6 mm. The arms XV, 50 mm., P₁ 7 T, P₂ (and P₃) with teeth. Distal p. 17; 5,5 mm.

Sp. 15 (St. 53) C. XVII 10; 6 mm. The arms X, 55 mm., P₁—P₃ with teeth. Distal p. 19; 6 mm.

Sp. 16 (St. 53) C. XIV 10; 5 mm. The arms XV, 20 mm. P₁ 20 (6 T) 3,5 mm., P₂ is sometimes lacking, P₃ always absent. Distal p. 12; 3 mm. Disk 2,5 mm.

An illustration of the division of arms from *Sp. 2*.

$$I \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l} II \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l} Br \ 1-2 \ 3 + 4 \dots 16 + 17 \dots 21 + 22 \dots 25 + 26 \dots \\ Br \ 1 + 2 \ (4 + 5) \dots 13 + 14 \dots 17 + 18 \dots 21 + 22 \dots \end{array} \right. \\ \\ II \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l} Br \ 1 + 2 \dots 13 + 14 \dots \\ Br \ 1-2 \ 3 + 4 \dots 13 + 14 \dots \end{array} \right. \end{array} \right.$$

In sp. 7 exceptionally one case with II Br 4 (1—2 3—4)

$$I \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l} II \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l} Br \ 1-2 \ 3 + 4 \dots 13 + 14 \dots \\ Br \ 1-2 \ 3 + 4 \dots 12 + 13 \dots \end{array} \right. \\ \\ II \ 1-2 \ 3-4 \left\{ \begin{array}{l} Br \ 1-2 \dots 11 + 12 \dots 15 + 16 \dots 19 + 20 \dots \\ Br \ 1, 2 + 3 \dots 10 + 11 \dots 14 + 15 \dots 18 + 19 \dots \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Cd varies in diameter between 1 and 2 mm. Cirri appearing in one or two whorls. Cirrale 2 : L = 1¹/₂ — 2 × br; Cirrale 3 : L = 2¹/₂ — 3 × br; Cirrale 4 : L = 3¹/₂ × br; Cirrale 5 : L = 1¹/₂ — 2 × br.

This species is most closely related to *C. decora* A. H. CLARK from Japan but is separated from this species, by 1): the cirri, which

compared with the arms are much shorter and always have 10—11 segments (with very long 3^d and 4th segments) instead of 12—13, 2) never III Br:s, 3) syzygies between Br 1 and 2 or 3 and 4, only exceptionally between 2 and 3, 4) P₁ is much shorter and with fewer segments in *C. brachycirra* than in *C. decora*. Teeth 6—9 instead of 12. 5) P₁—P₃ with a comb (*C. decora* has teeth on P₁—P₆).

Comatella maculata (P. H. CARP.).

Syn.: see Siboga Exp. Vol. 42 B (A. H. CLARK: Unstalked Crinoids) p. 7.

Fig. 4—6.

From St. 53 (1 sp.) 59 (2 sp.) = 3 specimens.

Sp. 1 (St. 59) Cd 3,5 mm., free dorsal pole 2,5 mm. Cirri XXI, 19; 10—12 mm. in a single or double whorl. First and 2^d segments short, 3^d cubical, somewhat hour-glass-shaped, 4th a little longer, 5—7th segments L = 1½ br. Then shorter segments again with dorsal spines. Penultimate segment L = br. Terminal claw coarse L = 1½ × the foregoing segment. A young cirrus has the 4—7th segments somewhat longer, L = 2 × br.

B-s and R-s as in the preceding species. I Br 1 h = 1/5 br. laterally free. I Brax h = 1/3 br, the border against II Br 1 a little bent outwards. I Br 2 forms with I Br 1 a small synarthrial tubercle. II Br:s are 2.

The arms are XV (or perhaps XVI), partly broken, 65 mm. Primipostaxillaries inside for the most part united. Syzygies 1—2, 3 + 4, 14 + 15, 23 + 24 or 13 + 14, 18 + 19, then with an interval of 5 to 6 oblique articulations. The proximal part of the arm not quite smooth. Br:s 1—8 discoidal, then oblique joints. Distal segments tolerably short, the margins a little spiny and somewhat bent outward like a collar. 16—17 segments pro:cm (If syzygial pairs are counted as units there are 14) Breadth of arms 1,2 mm.

P₁—P₆ with combs. P₁ 36—38 (18 T) 9 mm. Teeth rather narrow, 1/2—1/3 of the segment's breadth. P₂ ± 30 (15—17 T) 6,5 mm., P₃—P₅ with decreasing length. P₆ 22 (12 T) 4,5 mm. Distal p. 17—18; 5—6 mm.

Disk 8 mm. Anal funnel 1.5 mm. Mouth and anus subcentral. Colour dark brown, regenerated parts white.

Sp. 2 (St. 59) Cd. 3 mm., pentagonal, flat dorsal pole 2 mm.

C. XXV 15—19; 9—11 mm. The 4th—5th segments are the longest L = 1 3/4 br, 6th segment a little shorter, a transition segment. After this (as in sp. 1) highly polished segments.

The arms are XIII, 55 mm. Syzygies with an interval of 4—6 oblique articulations.

P₁ 38 (19—22 T) 9 mm.; P₄ 30 (\pm 18 T) 7.5 mm., P₅ 17; 4.5 mm. and P₆ 15; 4 mm. without combs, but with dorsal hooks and as in the preceding p. with small spiny knobs on the outer side of the proximal segments. Distal p. 19; 6 mm. The 6 last segments with dorsal hooks. The segments somewhat longer than broad, with spiny borders. — Disk 6.5 mm.

Sp. 3 (St. 53) C. XXIII 15—16 (D), 17—18 (V), 7—9 mm. The 4th and 5th segments longest, L = 2 \times br. From the 5th segment a dorsal transverse crista.

The arms X, 40 mm. +. Syzygies with an interval of 5 to 6 oblique joints. Axillary h = 1/2 br. 1 Br 1 h = 1/5 br. Primipostaxillaries free inside.

P₁—P₄ with a comb. P₁ 30 (18 T) 5 mm., P₂ \pm 13 T, a little shorter. P₃ and P₄ with still shorter combs, P₅ 11; 3 mm. Distal p. 13; 5 mm.

Disk 5 mm. Mouth subcentral.

The base of the arms tolerably smooth. Synarthrial tubercles unimportant. The arms as in the preceding specimens rather coarse. Distal Br-segments a little overlapping, not bent outwards, with spiny borders.

The specimens agree with those of CARPENTER and CLARK except that the joint between Br 1 and 2 is of a synarthrial not of a syzygial nature and that the proximal pinnules are somewhat shorter.

Comatella stelligera (P. H. CARP.).

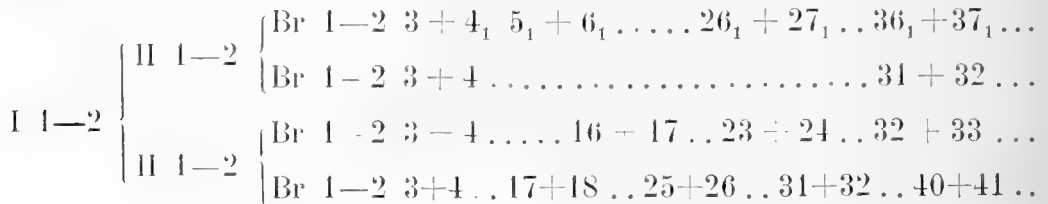
Fig. 7—9.

Syn.: see Siboga Exp. 42 B, A. H. CLARK, Unstalked Crinoids, p. 5.

From St. 43 (1 sp.) 56 (1), 59 (2) = 4 specimens.

Sp. 1 (St. 59) Cd discoidal 3,7 mm. Free dorsal surface 2 mm. C. XXVIII 20—24, 15—20 mm. in two whorls. 1st and 2^d segments shorter than long, 3^d one somewhat longer, like the nearest one following in the centre a little squeezed together, 4th—6th segments L = ± 1 1/2 br, 7th segment a transition segment, the 8th and the following ones highly polished. From the 7th segment a small dorsal spine, which at first consists of a minute, transverse, spiny crista, about the 11th segment constricted to a simple spine protruding from the distal part of the segment. Distal cirrals L = 1/2—2/3 × br. The height of the spine = 1/4—1/3 of the breadth of the segment. Opposing spine more pointed and a little smaller than the preceding ones. Terminal claw curved L = 1 2/3 × the penultimate segment.

R-s visible as narrow bands. I Br 1 h = 1/3 × br, baso-laterally united, like all the following ossicles of the proximal part of the arm with the ends somewhat thickened, bent outwards, and with small spines. A distinct synarthrial tubercle. I Brax triangular or low pentagonal, h = 1/3 br, laterally somewhat squeezed together. II Br-s are 2, appearing in 8 cases. II Br 1 as Br 1 on the inside united. Br 1 and 2 narrow, a little broader on the outside. After Br 7 oblique segments with the distal margins widened, overlapping and spiny. An example of the arm-ramification (a little differing in one branch) is given below.



In some exceptional cases Br 1 + 2, 3 + 4 on the inner side of the divisions. Syzygies distally with an interval of 5—6 oblique joints. Arms XVIII, 80 mm. 17—18 segments pr. cm. (14—15 if the syzygial pairs are counted as units). Segments short, longest side $L = \frac{3}{4} \times br$. The breadth of the segments 0.8—1.4 mm.

P_1 — P_5 or P_6 with combs. $P_1 \pm 37$ (17—18 T) 9.5 mm., $P_3 \pm 35$ (± 20 T) 6.5 mm. P_4 37 (Teeth from 11th segment), $P_5 \pm 30$ (T from 12th segment), P_6 28 (15 T) or 17 without a comb, 4.5 mm. Teeth tolerably high, narrow, $h = \frac{2}{3}$ of the br of the segments. P_7 16, P_8 15; 4.2 mm. Segments not longer than broad. Proximal segments knobby and spiny, distally widened, not as in CARPENTER'S figure with a small wing-like process but with a longitudinal spiny crista. Distal p. 18—20; 5 mm. The last 4—5 segments on each p. with paired dorsal hooks.

Disk 10 mm. Anal funnel 2.5 mm. Mouth and anus sub-central. Disk smooth without incrustated granules.

Sp. 2 (St. 59) C. XX 14—18, 6—12 mm. in a whorl only partly double.

Arms XVI 65 mm. (VI young regenerated arms). Syzygies most often 1—2, 3 + 4 . .

P_1 — P_4 with combs. P_1 31 (15 T) 6 mm., P_2 30 (17 T) 5 mm., P_4 23 (14 T) 4.2 mm. Teeth narrow, pointed. P_5 13; 4 mm. Distal p. 16; 5 mm., with small spines. The proximal parts of the arms somewhat smoother than in the preceding specimen.

Example of the arm-ramifications and distribution of syzygies in a somewhat abnormal arm.

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{I } 1-2 \\ \text{II } 1+2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Br } 1-2 \quad 3+4 \dots 16+17 \dots 25+26 \dots 32+33 \dots 38+39 \dots \\ \text{Br } 1+2 \dots 16+17 \dots 23+24 \dots 29+30 \dots 35+36 \dots \\ \text{Br } 1-2 \quad 3+4 \dots 17+18 \dots 22+23 \dots 26+27 \dots 31+32 \dots \end{array}
 \end{array}$$

To this species I have also referred a X-armed specimen differing chiefly only by being smaller than the ones described above.

Sp. 3 (St. 56) Cd very slight vaulted, 1 mm. C. XXV (III of them very small): 13 (D) 16 (V), 6—9 mm., usually in two whorls. 1st and 2^d segments short; 3^d one $L = 1\frac{1}{2} br$, a little hour-glass-shaped, 5th and 6th segments $L = 2 \times br$ with widened distal parts, 6th segment with a

spiny, transverse, dorsal crista which at the 10th one is constricted to a simple spine ($h = \frac{1}{4}$ of the br of the segment). Terminal claw $L = 1\frac{1}{2} \times$ preceding segment, blunt, somewhat curved.

I Br 1 $h = \frac{1}{3}$ br, laterally separated by the R-s. A weak synarthrial tubercle and a close articulation with the axillary. I Br 2 $h = \frac{1}{3}$ br low pentagonal, distal margins form an obtuse angle. Arms X, about 35 mm. Br 1 and 2 in close articulation with one another. Br 1—6 discoidal, then oblique joints. Syzygies with an interval of 4—6 oblique articulations. The outer margins of the distal segments very much bent outward and finely spinous.

$$I \ 1-2 \begin{cases} \text{Br } 1-2 \ 3 + 4 \dots 14 + 15 \dots 19 + 20 \dots 24 + 25 \dots \\ \text{Br } 1-2 \ 3 + 4 \dots 14 + 15 \dots 19 + 20 \dots 24 + 25 \dots 31 + 32 \dots \end{cases}$$

P_1 — P_5 with combs. P_1 32 (18 T: $h =$ or $\frac{2}{3}$ of the segment) 6,5 mm. P_2 31 (18 T) 5 mm., P_3 24 (15 T) 4 mm., P_4 similar, P_5 24 (14 T) 3,5 mm. Distal p. ± 17 ; 4,5 mm. 3—5 distal segments with dorsal hooks.

Mouth and anus subcentral. Colour yellow-brown with white spots. Cirri white.

Sp. 4 (St. 43) C. XVIII 14—17, 6—10 mm. Dorsal spine from the 6th segment.

Arms XII, 55 mm. II Br:s are 2. Syzygies with an interval of 3—4 oblique joints. The segments fairly strongly collar-shaped and spiny.

P_1 and P_2 with long combs composed of 15—20 teeth. P_1 5,5 mm. P_2 4,5 mm., P_5 with ± 10 T: 3 mm., P_6 without a comb. Distal p. 13; 4 mm.

Mouth and anus subcentral. Disk 4—5 mm., brown-green. Calcareous parts lighter, olive-brown. Somewhat approaching *C. maculata* but with more slender arms.

The young forms of the above-described species are very similar to one another and probably cannot be distinguished from each other. Presumably the two last-described species pass through a stage with cirri built as in *C. brachycirra*.

A comparison between the characteristics for the species described above also shows that *C. maculata* comes near to *C. stelligera* and

except for the number of cirrals chiefly differs by having thicker and coarser arms, smoother arm-bases, and by having the distal Br-segments less bent outward.

It is to be supposed that the 3 species described above make hybrids. A specimen (Sp. 12) of *C. brachycirra* approaches the 2 other *Comatellas* by having somewhat spiny Br-segments. Compare also Sp. 4. of *C. stelligera*.

Comissia A. H. CLARK.

***C. peregrina* var. *magnifica* n. var.**

Fig. 10, 11. Photo 2.

From St. 59: 2 specimens.

Sp. 1. Cd pentagonal with somewhat prolonged corners. Diameter 5.5 mm. Free dorsal part 2.5 mm. Height 1.5 mm.

Cirri thrown off, pits of XXXV—XL in 2 whorls.

R—s appearing as small flaps in the corners. I Br 1 $h = \frac{1}{6}$ br laterally united with each other, forms with I Brax a low synarthrial tubercle as Br 1 with Br 2. Axillary $h = \frac{1}{3}$ br, low pentagonal. Br 1 grown together inside. Br 2 on the outer side 3 × broader than on the inner side. Br 3 + 4 narrow bands; 4th and 5th segments form a weak tubercle directed inwards, 5th and 6th give rise to a similar one directed outwards; 6th—7th and 8th—9th form inward directed, 7th—8th and 9th—10th outward directed knobs, then rounded segments with more or less oblique articulations. Syzygies 3 + 4 .. 13 + 14 .. 17 + 18 etc. with an interval of 3 to 4 oblique articulations. Distal Br-segments triangular, the long side $\frac{2}{3}$ × br. The arm-profile distally smooth, proximally somewhat serrate. Arms X, 150—170 mm. 16 segments pr. cm. (if syzygial pairs are counted as units 11 or 12). Breadth of the arms 2.5—1.3 mm.

P₁ 50—55 (22—25 last segments rolled in a double spiral with large rather pointed teeth, $h =$ the br of the segment. 2^d—7th or 8th segments with dorsal knobs, weakly projecting. The remaining segments smooth, though distally weakly collar-shaped, not at all or only a little longer than broad) 17 mm., P₂ 13 mm. P₃ and P₄ still some-

what shorter with combs which, as on all the comb-provided pinnules, are rolled a couple of turns; P_5 27; 12 mm. without a comb. Distal p. 25—28; 12—13 mm. The first 20—25 pairs of pinnules with the proximal segments distally somewhat bent outwards and with small spines. The segments of the distal p-s somewhat hour-glass-shaped, their ends distinctly spine-crowned. Last pinnulars with weak hooks.

Mouth subcentral. Anal funnel lateral, small, short, 2 mm. standing stiffly upright. Disk 11 mm. with small calcareous granules. Colour (in formol) yellowish brown.

Sp. 2. Cd more flat and rounded than in the preceding specimen. Diameter 5.5 mm.

C. broken. Pits of \pm XXX ones in a single or double whorl. There are 5 segments of a cirrus left. These segments slowly increase in length, the 5th segment L about = $\frac{2}{3}$ br., a little hour-glass-shaped. Arms X, 145 mm., most of them broken. Syzygies with an interval of 3 oblique articulations, 16 segments pr. cm.

P_1 — P_4 with a comb, P_4 40 (22 T) 12 mm. Distal p. \pm 30; 14 mm.

Though except for a small stump in *Sp. 2* cirri are lacking, it is evident that both these specimens ought to be connected most closely with *C. peregrina*. From this species they differ, among other things, by having a more considerable size (Arm-length about 160 mm. against 120 mm. in the main species) and more cirri. Judging from the Clarkian descriptions the proximal arm-parts and pinnules also seem to be considerably more spiny. *C. peregrina* has also cirral 5 indicated as a transition segment, while the above-described specimen has a 5th cirral that does not show a trace of being a transition segment and has the br only $\frac{2}{3}$ of the L. Presumably therefore the cirri are also longer and composed of more segments.

Comissia parvula A. H. CLARK.

Fig. 12—14.

Syn.: *Comissia parvula* 1912 A. H. CLARK Proc. Biol. Soc. Washington. Vol. 25, p. 19; 1918 A. H. CLARK Siboga Exp. Bd 42 B, p. 23.

From St. 4 (1 sp.), 8 (1), 36 (1), 37 (1) = 4 specimens.

Sp. 1 (St. 37) Cd discoidal, 2.5 mm., free part 1.5 mm.

C. XXI 10—13; 6.5—8 mm. in a partly double whorl. 1st segment shorter than long, 2^d L = 1½ br, 3^d longest and narrowest L = 3 × br, 4th segment L = 2 br, 5th and the following ones broader and shorter L = 1½ br. Antepenultimate segment L about = 1⅓ br. A small dorsal knot from about the 5th segment. Opposing spine inconspicuous. Terminal claw curved, pointed, somewhat longer than the preceding segment.

R—s concealed. I Br 1 slightly visible, narrow bands, h about ⅓ × br. Axillary low pentagonal or triangular, h = ½ × br. Br:s 1 almost free inside. Br 2 about twice as broad on the outer side. After Br 7 or 8 oblique articulations. Distal segments smooth, not overlapping. Syzygies for ex: 3 + 4 .. 11 + 12 .. 14 + 15 .. 18 + 19 .. 22 + 23 etc. with an interval of 2 to 3 oblique articulations; 15 segments pr cm. (11 if the syzygial pairs are counted as units). Arms X, 45—50 mm. The breadth of the Br:s at the middle parts of the arms about 1 mm. The longer side of the distal segments = br.

P₁—P₃ with a comb. P₁ ± 30 (9—10 T) 7 mm., P₂ ± 26 (9 T) 6 mm., P₃ ± 25 (9 T) 4.5 mm. with a genital gland to the 4th segment. The height of the teeth about = the br of the segment, P₅ 13; 4.2 mm. 3 to 4 last segments with dorsal prominences. Broad, coarse segments, the most proximal ones notched on the distal side and somewhat widened in the distal part, by which the bases of the pinnules somewhat resemble those of *Compsometra serrata*. Distal p. 17; 5.5 mm. The bases of the pinnules from P₃ to P₂₀ swollen by gonads.

Disk smooth, 5.5 mm. Mouth central.

Sp. 2 (St. 36) Cd 2.5 mm., free dorsal part 1.5 mm. C. XXII 12; 5 mm. (only one cirrus left) in a single whorl. 3^d segment longest L = 3½ br. Distal segments laterally compressed and shorter. Antepenultimate segment a little longer than broad.

R—s appearing as small flaps in the corners. I Br 1 $h = \frac{1}{8}$ br, latero-basally united with one another. I Br 2 low triangular, $h = \frac{1}{3} \times$ br. A weak synarthrial tubercle with close articulation between I Br 1 and 2. The arms X, smooth, broken, about 25 mm. Syzygies with an interval of 3 oblique articulations.

P_1 — P_3 with a comb. P_1 26 (9 T) $\pm 4,5$ mm., P_2 ± 22 (8 T) $\pm 3,5$ mm. P_3 similar, 3 mm. Distal p. 13 segments. Disk 3 mm.

Sp. 3 (St. 8) C. \pm XX 12—13; 5—5,5 mm. (some of the dorsal ones very small 9; 2 mm.; these have an antepenultimate segment whose $L = 1\frac{1}{2} \times$ br), 2^d segment $L = 2 \times$ br, 3^d $L = 3 \times$ br, 4th $L = 2 \times$ br; antepenultimate segment as in *Sp.* 2.

The arms X, 15—20 mm. I Br 1 $h = \frac{1}{5}$ br. Axillary triangular $h = \frac{1}{2}$ br. Br 1 + or — 2. Br 1 $h = \frac{1}{3}$ br; Br 2 $h = \frac{1}{3}$ br (on the outer side) or $\frac{1}{5}$ br (on the inner side). Syzygies with an interval of 3 oblique articulations.

P_1 — P_3 with a comb. P_1 ± 24 (10 T) 5 mm., P_3 17 (8 T) 3,5 mm. P_4 11; 3,5 mm. The segments coarse, smooth, somewhat swollen.

Sp. 4 (St. 4) A specimen corresponding to *Sp.* 1 which has crept into a calcareous sponge. C. 12; 5,5 mm. Antepenultimate segment $L =$ br. Arm-length about 30 mm. P_1 — P_3 with a comb.

Comissia gracilipes A. H. CLARK.

Fig. 15—17.

Syn.: *Comissia gracilipes* 1912 A. H. CLARK Proc. Biol. Soc. Washington. Vol. 25, p. 19; 1918 A. H. CLARK Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 22.

From St. 35: 2 specimens.

Sp. 1. Cd 2 mm., free dorsal part 1,3 mm. C. XVIII 9—12: 4—6 mm. in a single whorl. 3^d segment $L = 3 \times$ br, 4th segment $L = 2 \times$ br, a transition segment. Antepenultimate segment $L = \frac{1}{2}$ br.

R—s and I Br 1 almost completely hidden by Cd. Axillary triangular $h = \frac{1}{3} \times$ br. Br:s 1 united inside, $h = \frac{1}{4} \times$ br, in close articulation with Br 2, the height of which (on the outer side) is $\frac{1}{2} \times$ br. Arms X, 35 mm. The br of the Br:s at the middle parts of the arms

0,6 mm. 16 segments pr cm. (12, if the syzygial pairs are counted as units). The longer side of the distal Br-segments = $1^{1/3} \times \text{br}$.

P_1 25–27 (9–11 T) 5 mm., P_2 23 (11 T). Teeth somewhat longer, narrower and more pointed than in *C. parvula*. P_3 (16; $3^{1/3}$ mm.) and the following ones without a comb with swollen pinnule-bases. Distal p. 13–15; 4–5 mm. The segments are long ($L = 2 \times \text{br}$), swollen into knots at the ends. Disk $3,5$ mm.

Sp. 2 Cd $1,8$ mm. C. \pm XX 9; 4 mm. (only one cirrus remaining). Antepenultimate segment $L = 1^{1/2} \times \text{br}$.

R—s concealed. I Br 1 appearing at the margin of Cd. Axillary $h = 1/3 - 1/4 \times \text{br}$, with strongly concave distal sides. Br 1 + or — 2. Br 1 only united by skin on the inside. Arms rather smooth, broken, X, probably about 15 mm. Syzygies with an interval of 3 oblique articulations.

P_1 and P_2 with combs. P_1 26 (9 T) 4 mm. P_2 \pm 22 (7–8 T) 3 mm. P_3 10–12; $2,5$ mm. Disk $2,5$ mm.

The specimens are habitually more slender and provided with more spiny distal pinnules than in *C. parvula*. A comb only occurs on P_1 and P_2 . The genital glands are well developed in *Sp. 1*. Though *C. gracilipes* is rather closely related to *C. parvula*, it can, however, scarcely turn out to be a young form of this species. For, in the first place, *Sp. 1* of *C. gracilipes* described above is mature, secondly in this specimen Cd still hides more of the I Br-series than in *C. parvula* (if the first-mentioned species were a young form one might expect the opposite conditions). In other respects the above-described specimens of *C. gracilipes* agree with A. H. CLARK'S short diagnosis.

Commissia ignota var *minuta* n. var.

Fig. 18–20. Photo 3.

From St. 42 (1 sp.), 45 (9), 45 A (1), 47 (5), 55 (11), 61 (2)
= 29 specimens.

Sp. 1 (St. 45) Cd $1,5$ mm. Free dorsal part 1 mm. C. XV 10; $3,5$ mm. 2^d segment hour-glass-shaped $L = 1^{1/2} \times$ the distal br, 3^d segment $L = 3 \times \text{br}$, 4th $L = 2 \times \text{br}$, 5th $L = 1^{3/4} \times \text{br}$, 6th and 7th segment

$L = 1 \frac{1}{3}$ br. Antepenultimate segment $L =$ or somewhat larger than br; last 3 to 4 segments with a small, dorsal spine. Terminal claw strongly bent, somewhat longer than the preceding segment.

R—s appearing as small corner-flaps. I Br 1 $h = \frac{1}{6} \times$ br, laterally free, the angle between them about 45° . United with the axillary by syzygy. I Br 2 triangular $h = \frac{1}{2} \times$ br, with very concave distal sides. Br 1 and 2 rather narrow, $h = \frac{1}{4} \times$ br, on the outer side twice as broad. Arms X, ± 20 mm. The arm-bases fairly smooth. Syzygies, for instance, 3 + 4 ... 11 + 12 ... 15 + 16 .. distally with an interval of 3 oblique articulations. The longer side of the distal segments $L = 2 \times$ br. 20 Br-segments pr cm. (15, if the syzygial pairs are counted as units). The br of the segments 0,5 mm.

P_1 — P_2 with a comb. Teeth 8—10. P_1 27; 4 mm., P_2 23; 3,5 mm. P_3 11; 2,5 mm. with a genital gland. Distal p. 14; 4,5 mm. 2^d to 4th pinnulars somewhat notched on the outer side (especially on P_1 and P_2). The bases of the p—s however smooth because of connecting skin.

Disk smooth, ± 2 mm. Mouth central. Cushion-formed swellings along the ambulacral furrows. Anal funnel broad, coarse, short.

Sp. 2 (St. 45) P_3 — P_{12} with genital glands. For further details of these as well as the following specimens see the table.

Sp. 3 (St. 45) P_2 very small. Disk 2 mm.

Sp. 4 (St. 45) I Br 1 $h = \frac{1}{5} \times$ br. P_3 — P_9 with genital glands.

Sp. 5 (St. 45) Disk 3 mm. *Sp. 6* (St. 45) Disk 3 mm. Specimens 6—10 young, more slender individuals.

Sp. 7 (St. 45) Antepenultimate cirral in the smallest cirri $L = 1 \frac{1}{2} \times$ br. I Br 1 bent outwards almost at a right angle. Disk 2,5 mm.

Sp. 8 (St. 45) Segments somewhat more spiny than in the preceding specimens.

Sp. 9 (St. 45) —. *Sp. 10* (St. 45) I Br 1 $h = \frac{1}{4} \times$ br. Disk 2 mm.

Sp. 11 (St. 42) I Br 1 almost completely hidden. P_1 with 23 segments. Disk thrown off. Basal star visible.

Sp. 12 (St. 47) Cd 2 mm., free dorsal pole 1,5 mm. IV C. very small. I Br 1 $h = \frac{1}{8}$ br. Usually Br 1 + 2, 3 + 4; P_1 with 24, P_2 with 20 segments. The bases of the pinnules with strong genital swellings. Disk 3 mm. Colour brown.

Comissia ignota var. minuta.

Number of Specimens and Stations		Cirri			Arms		1 Br 2 h: br	P ₁			P ₂			P ₃		Dist. p.	
		N	S	L	N	L		T	L	T	L	S	L	S	L		
Sp. 1	St. 45	XV	10	3,5mm.	X	± 20	1:2	8-10	4	8-10	3,5	11	2,5	14	4,5		
Sp. 2	St. 45	XVI	10	3,5 »	X	± 30	—	8-10	—	8-10	—	—	—	—	—		
Sp. 3	St. 45	XIX	9-10	2,5-3 »	X	15	—	T	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 4	St. 45	XVI	9	3,5 »	X	20	—	T	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 5	St. 45	XIV	10	3,5 »	X	—	—	8-10	—	8-10	—	—	—	—	—		
Sp. 6	St. 45	XVI	10-12	3,4-4,5 »	X	—	—	T	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 7	St. 45	XVII	8-9	2-3 »	X	25	—	T	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 8	St. 45	XIII	9-10	2-3 »	X	25	—	T	3,5	T	2	—	—	12	3,5		
Sp. 9	St. 45	XVI	8-9	—	X	20	—	7	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 10	St. 45	XV	9-10	3 »	X	± 20	2:3	8	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 11	St. 42	XVI	10-12	4 »	X	± 20	1:2	8	4	T	—	—	—	13	3		
Sp. 12	St. 47	XX	10-11	4 »	X	30	1:5	9	4	9	3,5	11	3	14-15	3,5		
Sp. 13	St. 47	XX	8-9	2-3 »	X	27	1:3	T	—	T	—	9	3,5	13	—		
Sp. 14	St. 47	XIX	9-10	3-4 »	X	25	1:3	8	4	7	3,5	12	3	12	—		
Sp. 15	St. 47	XIII	9-10	2-3 »	X	± 20	1:2	8	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 16	St. 47	XIV	9-10	2,5-3 »	X	—	1:2	8	—	T	—	10	2	—	—		
Sp. 17	St. 55	XIX	10	3 »	X	25	—	8	—	8	—	—	—	12	—		
Sp. 18	St. 55	XIX	9-10	3-4 »	X	30	1:3	T	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 19	St. 55	XV	8-9	3 »	X	18	1:3	T	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 20	St. 55	—	—	—	X	22	—	T	—	T	—	—	—	10	—		
Sp. 21	St. 55	—	—	—	X	14	—	T	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 22	St. 55	XVI	8	2 »	X	18	—	T	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 23	St. 55	—	—	—	X	—	—	T	—	(T)	—	—	—	—	—		
Sp. 24	St. 55	XV	9	3 »	X	18	1:3	T	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 25	St. 55	XVI	9	1,5 2,5 »	X	12	1:2	T	—	—	—	—	—	—	—		
Sp. 26	St. 55	XIX	10	3 »	X	—	—	T	—	T	—	—	—	—	—		
Sp. 27	St. 55	XIX	9	2,5 »	X	± 15	1:3	9	—	(T)	—	—	—	—	—		
Sp. 28	St. 61	XIII	10	3 »	X	15	1:3	8	—	—	—	—	—	12	3		
Sp. 29	St. 61	XII	8-9	2-2,5 »	X	12	2:3	8	—	—	—	—	—	—	—		

Catoptomeira magnifica minor Sp. 5-8.

Number of Specimens and Stations		Cirri			Arms		1 Br 2 h: br	P ₁			P ₂			P ₃		Dist. p.	
		N	S	L	N	L		S	T	L	S	T	L	S	L	S	L
Sp. 5 (St. 47)	XXI	10-13	3-7	X	35	1:1	—	—	—	18	—	4,5	—	—	18	5,5	
Sp. 6 (St. 47)	XXIII	11-13	3-4,5	XI	28	1+:1	—	—	3	—	—	3	—	—	14	4,5	
Sp. 7 (St. 47)	XIX	11-14	5-8	X	35	2:3	± 20	—	3,5-4	16-19	—	3,5-5	16	4	—	—	
Sp. 8 (St. 61)	XXV	11-14	4-8	XI	45	2:3	—	—	4	—	—	5	—	—	18	6,5	

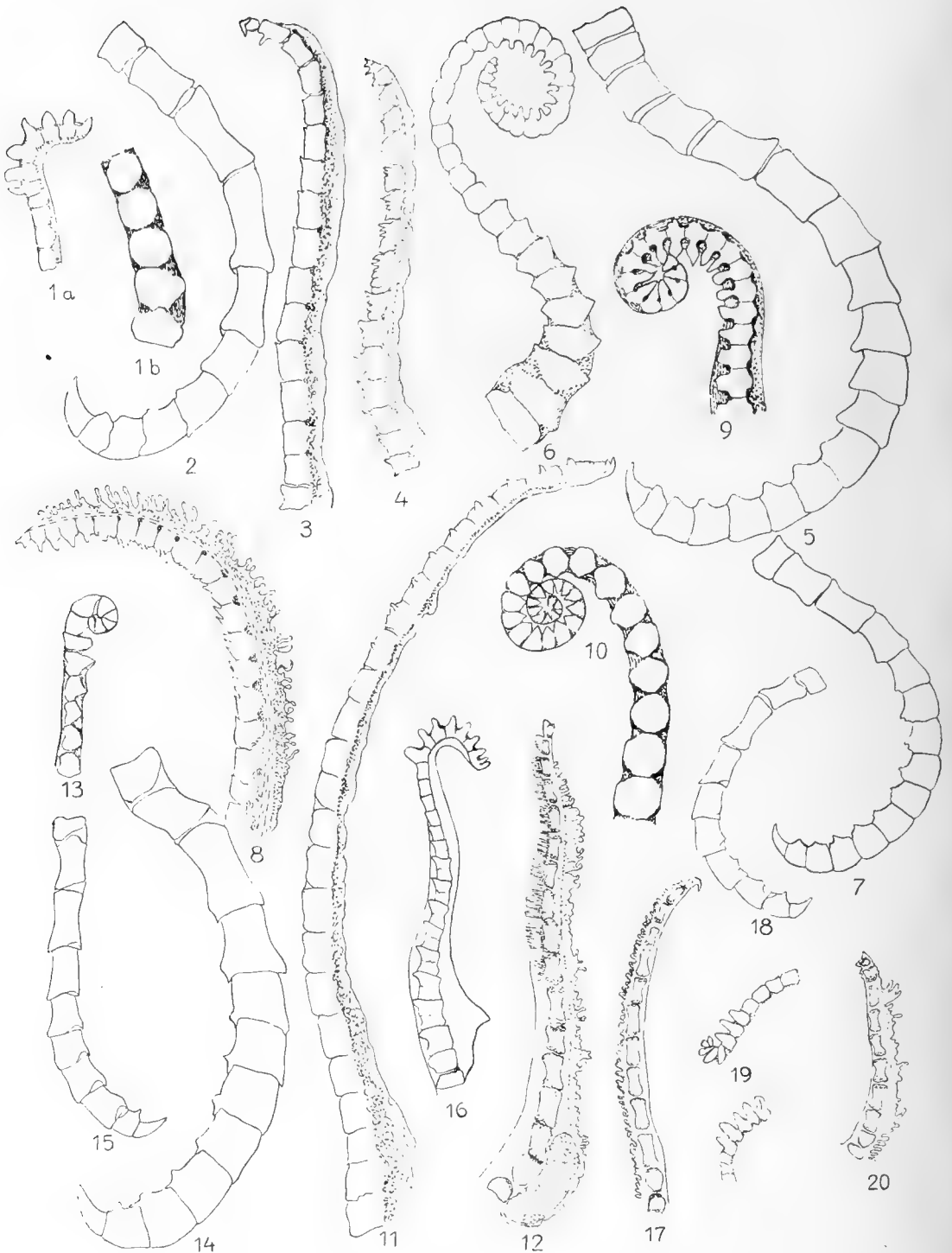


Fig. 1—3. *Comatella brachycirra* (St. 56 Sp. 1) 1 a) The comb on the distal part of P_1 , $\times 17\frac{1}{2}$, 1 b) The proximal part of P_1 , $\times 17\frac{1}{2}$, 2) A cirrus $^{14}/_1$, 3) A distal pinnule $^{14}/_1$; Fig. 4—6 *Comatella maculata* (St. 59), 4) Distal pinnule $^{14}/_1$, 5) Cirrus $^9/_1$, 6) P_1 with the comb, $\times 17\frac{1}{2}$; 7—9 *Comatella stelligera* (St. 59), 7) Cirrus $^9/_1$, 8) Distal pinnule $^{14}/_1$, 9) The tip of P_1 (17 T.), $\times 17\frac{1}{2}$; 10—11 *Comissia peregrina magnifica* (St. 59 Sp. 1) 10) The tip of P_1 $^{14}/_1$, 11) Distal pinnule $^{14}/_1$; 12—14 *Comissia parvula* (St. 37 Sp. 1) 12) Distal pinnule with a small genital gland $^{14}/_1$, 13) The tip of P_1 , $\times 17\frac{1}{2}$, 14) Cirrus $^{14}/_1$; 15—17 *Comissia gracilipes* (St. 35 Sp. 1) 15) Cirrus $^{14}/_1$, 16) P_1 $^{14}/_1$, 17) A distal pinnule $^{14}/_1$; 18—20 *Comissia ignota minuta* (St. 55) 18) Cirrus $^{14}/_1$, 19) The tip of P_1 $\times 17\frac{1}{2}$, 20) Distal pinnule $^{14}/_1$.

Sp. 13 (St. 47) I Br 1 as in the preceding specimen.

Sp. 14 (St. 47) I Br 1 $h = \frac{1}{8}$ br; Br 1 and 2 each $h = \frac{1}{4} \times$ br. P_1 with about 25, P_2 with 20 segments. This and the two following specimens young individuals with gonads only slightly prominent.

Sp. 15 and *16* (St. 47) I Br 1 $h = \frac{1}{3}$ br. Cd 1,8 mm.

Sp. 17 (St. 55) With genital glands well developed like both the following specimens.

Sp. 18 and *19* (St. 55) I Br 1 almost completely hidden.

Sp. 20 (St. 55). Fixed on a worm-tube. *Sp. 21* and *22* (St. 55) Pinnules a little swollen by genital glands.

Sp. 23 (St. 55) P_2 sometimes lacking. *Sp. 24* (St. 55) R—s somewhat visible. I Br 1 $h = \frac{1}{6} \times$ br.

Sp. 25 (St. 55) R—s narrow bands. I Br 1 $h = \frac{1}{6} \times$ br. 3^d cirral the longest $L = 3 \frac{1}{2}$ br. Antipenultimate cirral $L = 1 \frac{1}{3} \times$ br. P_2 lacking.

Sp. 26 (St. 55) Pinnules genitally swollen. *Sp. 27* (St. 55) Antipenultimate cirral $L = 1 \frac{1}{3} \times$ br. I Br 1 $h = \frac{1}{6} \times$ br.

Sp. 28 (St. 61) R—s concealed. I Br 1 $h = \frac{1}{4}$ br. Syzygies with an interval of 3 oblique articulations. P_2 inconspicuous or lacking.

Sp. 29 (St. 61) I Br 1 $h = \frac{1}{2} \times$ br. P_2 — P_4 lacking.

As is evident from the comparison given above, the number of cirri varies between XII and XX (usually XV—XVI) and the number of cirrals between 8 and 12 (usually 9—10). The specimens seem to be mature at an arm-length of 25—30 mm., as in such specimens the pinnules are strongly swollen, but even with shorter arms the genital gland is quite visible. All specimens with complete pinnulation have combs on P_1 and P_2 but no teeth on P_3 . The number of teeth varies between 7—10 and is usually 8. — It is interesting to observe the relation between the length and breadth of the most proximal Br-segments. The smallest specimens (e. g. *Sp. 25* and *29*) have the R—s plainly visible. I Br 1 is rather long in minor specimens ($h = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times$ br), but becomes more and more short during growth (in full-grown specimens the h is $= \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \times$ br or the ossicle is almost completely hidden by Cd). The length of the axillary also usually decreases (from $L = \frac{2}{3}$ to $\frac{1}{5} \times$ br) but is never hidden by Cd.

The specimens approach *C. ignota*, from which they differ by having, on an average, more cirri, by some differences in the conditions of length of the cirrals, by smaller size etc.

Finally a few words about the relation between the genera *Comatella* and *Comissia*. When A. H. CLARK in 1909 proposed these two genera he characterized the first-mentioned one (Smiths. Misc. Coll. Vol. 52 p. 207) thus, that species belonging to this genus should have the first syzygy between Br 3 and 4 in arms situated on I Brax, but the first syzygy between Br 1 and 2 in arms coming from axillaries of higher numbers. According to CLARK'S view some arms should therefore be divided by »extraneous» some others by »intraneous division» and thus one might in this genus have crinoids with so-called »compound arms». In the later proposed species *Comatella decora* CLARK has found a syzygy between Br 2 + 3 or on the outer side of the arm-divisions between Br 3 + 4. *Comatella brachycirra* MIHI usually, but far from always, has Br 1 + 2 on the inner side, 3 + 4 on the outer side of the arm-divisions. The specimens of *C. maculata* and *C. stelligera* that I have investigated usually have Br 1—2 3 + 4, in the case both of the inner and outer side of the division-series; in a few cases, however, we find Br 1 + 2. — Most often, therefore, the »compound» nature of the arms is visible, but by no means always. From what is mentioned above it is evident that the compound nature never appears in X-armed young *Comatellas*. How are then the latter to be distinguished from the genus *Comissia*, the species of which always have X arms? As to this A. H. CLARK in the Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 23 has remarked that the young of *Comissia* can be distinguished from the X-armed young of other genera by very short and broad I Br-series, the ossicles of which are said to be united in very close articulation. As I have tried to show in describing *Comissia ignota minuta* this only holds good in full-grown specimens of the species. The small young of large *Comissia*-species might therefore have rather long I Br-segments and are consequently similar to young *Comatellas*. Just as the immanent tendency to »compound arm-division» did not appear in X-armed young *Comatellas* it cannot, if it exists, assert itself in *Comissia*-species which never reach beyond the X-armed stage. In reality, therefore, the difference between the genera turns out to be a difference between a group of X-armed and a series of multibrachiate forms of *Capillasterinae*. Joint characteristics by which both the genera are distinguished from other genera within the subfamily are as follows: P₁ on Br 2, short Br-segments, complete pinnulation, cirri of normal comasterid type, at

least P_1 and P_2 with a comb, proximal pinnulars never with strong prominences. — Whether the limit between the genera *Comatella* and *Comissia* is a natural one I must leave an open question.

This seems to be the place to mention a young Comasterid swept from a depth of 400 fathoms in Sagami Bay (St. 37). If this young specimen described below belongs to any previously known *Comasterid* species there are only a few of which one might expect that it may be a young form, for the number of Comasterids found at a depth of more than 150 fathoms is only about 10. Since the proximal segments are rather high and narrow and the arm-bases widely separated, one can eliminate both the above-described *Comissia*-species (which are deep-water forms); of the remaining ones it approaches closest to *Comatulides decameros*, known from great depths off Japanese coasts. There is, however, in the young specimen an important difference from this species: there are dorsal spines on the cirrals. It is however, rather likely that the absence of dorsal spines is not a primary feature in *Comactiniinae*. Under such circumstances it is possible that dorsal spines can appear in the young specimens and then again disappear. The formation of the cirrals in the other *Comatulides*-species (*C. australis*) perhaps also points in this direction; A. H. CLARK remarks that: »the last 4 or 5 segments before the penultimate have their distal dorsal margin very slightly thickened.» Description as follows:

C. XIX 11—14; 5—6 mm. The 4th segment longest $L = 2\frac{1}{2} \times br.$ 3^d and 5th somewhat shorter. From the 7th segment a weak dorsal prominence. Terminal claw curved, pointed, somewhat longer than the preceding segment.

R—s $h = \frac{1}{5} br.$, at the middle hidden by Cd. I Br 1 $h = \frac{1}{3} \times br.$, laterally free, united with I Br 2 by synarthry. This ossicle low pentagonal, $h = \frac{1}{2} br.$ Br 1 free inside, like the following ossicle on the inner side somewhat narrower. Br 1 and 2 united by a close articulation. All the segments after Br 4 somewhat hour-glass-shaped, distally bent outwards and spiny. Arms X, 35 mm., proximal parts rather narrow, well separated from each other. Syzygies 3 + 4 . . 11 + 12 . . 15 + 16 etc. with an interval of 3 oblique articulations. Segments distally somewhat longer than broad.

P_1 25.5 mm. with 8—10 T, the tip smooth. P_2 and P_3 with combs. P_a 8 T. P_4 11; 3 mm. without a comb. P_7 14; 4.2 mm. Distal p. \pm 15; 5 mm. Basal segments short, spiny, the distal ones longer ($L = 1\frac{1}{2}$ br).

Disk 5 mm., swollen, somewhat cushion-formed, without granules; clearly visible from the dorsal side in the broad interspaces between the arms, reaching to Br 4. Mouth and arms subcentral. Anal funnel 2.5 mm.

Subfam. Comasterinæ A. H. CLARK.

Comaster (L. AGASSIZ) A. H. CLARK.

Comaster delicata var *grandis* n. var.

Fig. 26—29. Photo 4.

From St. 45 (3 sp.), 51 (1), 59 (1), 60 (1) = 6 specimens.

Sp. 1 (St. 51) Cd thickly discoidal, 10 mm., free dorsal pole 5 mm., flat with somewhat raised margins.

C. XLII 27—28 (D) 30—32 (V) 35—40 mm. in 2 to 3 whorls. 1st and 2^d segment shorter than long, 3^d and 4th cubical, 5th—9th somewhat longer than broad to $L = 1\frac{1}{2} \times$ br. Dorsal spine from the 11th segment (Length of this segment = br). From about the 15th segment $L = \frac{1}{2} \times$ br. Dorsal spines and opposing spine very small, $h = \frac{1}{6} \times$ the breadth of the segment. Terminal claw $L = 1\frac{1}{4} \times$ preceding segment.

I Br 1 almost completely hidden by Cd. I Brax pentagonal $h = \frac{1}{2}$ br, distal margins weakly concave. The disk visible in the narrow interspaces between the outer sides of the II Br:s and I Brax. II Br:s are 4 (3 + 4). II Br 1 and 2 with distinct synarthrial tubercle. Primi-postaxillaries completely grown together inside. From II Br 2 the distal margins of the segments are somewhat collar-shaped, bent outwards and provided with small spines. III Br:s are 2 (1—2) in 8 cases of 13. IV Br:s: 4 (in all 13 cases). Arms XLVI 130 mm. Br 1—7 discoidal, then oblique joints. Syzygies for instance: 3 + 4 .. 12 + 13 17 + 18 etc. with an interval of 4 to 5 oblique articulations. The

height of the segments = $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \text{br.}$ 13—14 segments pr cm. (11, if the syzygial pairs are counted as units). The breadth of the arms proximally 3—3.5 mm. In the middle arm-parts 2 mm.

$P_{II} \pm 40$ (6—8 T) 14—17 mm., P_{IV} 32 (5—6 T) 10 mm., P_1 and P_2 decreasing, P_3 about 20 (5 T) 5 mm. This, however, not always so decided, but P_2 or P_3 are most often the shortest. In the posterior arms the pinnules are genitally swollen after P_{IV} . Combs to P_{20} — P_{25} , most often on every two p., here and there even to P_{30} . The basal segments of the pinnules distally somewhat bent outwards and bordered with spines. Genital p. 7 mm. Distal p. 20—25; 9 mm. Dorsal hooks on the last 9—12 segments.

Disk smooth, without calcareous granules or papillæ, 25 mm. Anal funnel central, short, verruciform, $L = 4$ mm. Colour yellow-brown. Cirri whitish with brown transverse bands.

In the pinnules and arms an ento-parasitic new myzostomid, compare *Protomyzostomum*.

Sp. 2 (St. 45) The free dorsal surface of Cd 4 mm. C. XXVII 23—25 (D) 25—27 (V), 25—30 mm. in 2 whorls.

R—s appearing in the corners. I Br 1 h = $\frac{1}{4} \times \text{br.}$, united by synarthry with I Brax. Laterally of half their height fused with each other. Disk somewhat more visible in the interspace between the arms than in the preceding specimen. I Brax flattened pentagonal, $h = \frac{2}{3} \times \text{br.}$ Primipostaxillaries united inside for the most part. II Br:s are 4 (3 + 4) 9 cases, III Br:s : 2, 13 cases, IV Br:s : 4, 3 cases. Synarthrial tubercle between II and III Br 1—2. Arms XXXV + (probably XXXIX in the complete specimen) 125 mm. Arm-bases in this and the following specimen smoother than in the preceding one. The breadth of the arms proximally 2.2 mm., in the middle of the arm 1.7 mm.

$P_{II} \pm 40$ (7 T) 16 mm. $P_{IV} \pm 38$ (7 T) 15 mm., $P_1 \pm 25$ (6 T) 5 mm. P_2 18; 3 mm. Then longer p. again; combs here and there at least to P_{25} . Distal p. 18; 7 mm.

Disk 18 mm. Anal interradius large, swollen, with calcareous papillæ. Colour grey-yellow.

Sp. 3 (St. 45) C. XX 19—20 (D), 26—27 (V), 12—25 mm. II Br:s are 4 (9 cases), III Br:s : 2, IV Br:s : 2, V Br:s : 2 (1 case). Arms XLVII 105 mm.

Primipostaxillaries united inside. II Br:s are 4, III Br:s: 2 (in 4 cases) Arms XX 90 mm. Syzygies as in Sp. 1. 14 segments pr cm. (11, if the syzygial pairs are counted as units). Breadth of the segments 1,2 mm.

P_{II} 35 (8 T) 10 mm.; P_1 31 (6 T) 9,5 mm., P_2 — P_4 4—3,5 mm., decreasing, with 5 T and 15—20 segments. A short comb here and there to P_{25} ; the interspaces are, however, very large after P_{15} . Distal p. 17; 6,5 mm.

Disk 11 mm., finely papillous. Anal funnel central. Colour yellow-red. A *Protomyzostomum* incysted.

Resembles *Comantheria grandicalyx* var. Sp. 1 in general appearance.

Sp. 5 (St. 45) Cd covered with small cavities, 2,5 mm., free dorsal pole 1,5 mm. C. XVII 15—20; 10—19 mm. 6th to 8th segments the longest ones, $L = 1\frac{1}{2} \times br$; 9th segment a transition segment. Opposing spine $h = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times br$ of the segment.

I Br 1 $h = \frac{1}{4} \times br$, laterally free from each other, a weak synarthrial tubercle with I Br 2. II Br:s are 4 (3 + 4). Arms XIII 65 mm. Syzygies with an interval of 3 to 4 oblique articulations.

P_1 25 (6—7 T). P_2 5 T; 5,5—9 mm. P_3 and P_4 4 T; 4,5 mm. P_1 — P_5 with small, spiny, dorsal processes on the 2^d to 5th segment. A comb here and there to P_{15} .

Disk 9 mm. Anal interradius with large calcareous papillæ. Mouth marginal. Colour (in spirit) white.

Sp. 6 (St. 59). C. XXIV 11—15; (4)—10 mm. 3^d segment $L = 1\frac{1}{2} \times br$. 4th and 5th $L = 2 \times br$. 6th or 7th a transition segment. Dorsal spine very indistinct. Opposing spine $h = \frac{1}{4} \times$ the br of the segment.

R—s nearly hidden by Cd. I Br 1 $h = \frac{1}{3} \times br$, laterally almost free. Axillary $h = \frac{1}{2} \times br$, its lateral sides bent sidwards at an angle to I Br 1. Primipostaxillaries united inside. II Br:s are 4, III Br:s: 4 (in one case on an inner arm). Arms XXI 55 mm. Syzygies as in the preceding specimen. Distal segments $L = 1\frac{1}{2} \times br$, narrow, almost smooth, somewhat overlapping distally.

$P_{II} \pm 30$ (7—8 T) mm. $P_1 \pm 30$ (7 T) 7 mm. or shorter, P_2 21 (7 T) 4 mm. P_3 18 (5 T) 3,7 mm. P_6 21 (6 T) 4,5 mm. Spiny processes on the proximal segments. Combs with 5—6 T here and there at least to P_{13} . Distal p. 16—17; 5,5 mm. The last two segments with dorsal hooks.

Disk 7,5 mm., papillous. Mouth marginal. Anus central.

To this species one might also assign a very young specimen from St. 44, described among the young ones (see below).

An examination of the occurrence of the combs gives the following result:

Sp. 1 On an arm situated on III Brax: $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_8 P_{10} P_{11}$
 $P_{15} P_{17}$ (P_{18-19} are lacking)
 $P_{21} P_{23} P_{25} P_{27}$ (After P_{30} no comb).

The same arm on the other side $P_1-P_6 P_8 P_{10} P_{12} P_{14} P_{16} P_{17}$
 P_{19} then usually more sparse.

Sp. 2 On an arm situated on III Brax $P_1-P_5 P_7 P_9 P_{11} P_{13} P_{15} P_{17}$
 $P_{18} P_{20} P_{22} P_{24}$.

Sp. 3 » » » » » » » $P_1-P_4 P_6$ (P_8 broken) $P_{10} P_{12}$
 $P_{13} \dots P_{19} P_{21}$ (P_{20-30} broken) P_{31} .

Sp. 4 » » » » » I Brax $P_{II} P_1-P_5 P_7 P_9 P_{14} P_{20}$.

Sp. 6 » » » » » » $P_{II} P_1$ (P_2 and P_3 usually very small, sometimes without a comb) $P_4 P_6$ (P_{7-11} broken) P_{14} .

Other arms of this specimen show that more than 6—8 p. on each side of the arm do not occur.

Example from sp. juv. St. 44: P_1 (P_2, P_4 are lacking), no more combs. —

This species is most closely related to *C. delicata* but differs by having larger dimensions and more cirri and cirrals, as well as by the abundant occurrence of 4 IV Br:s.

Comaster serrata A. H. CLARK.

Fig. 21—25.

Syn.: *Comatula serrata* 1907 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 33, p. 154.

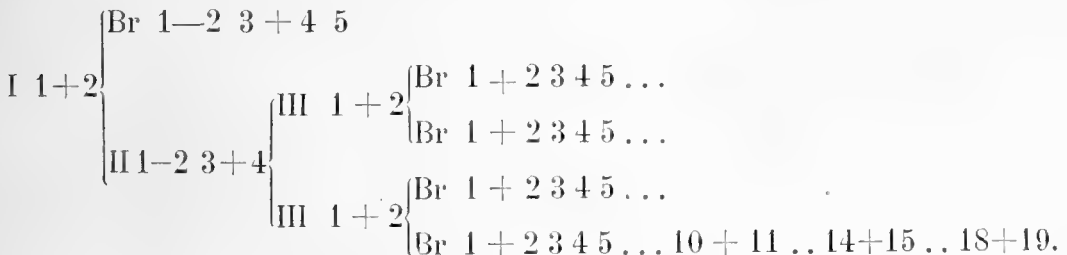
Comaster serrata 1908 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 33, p. 686; 1912 Crin. Ind. Oc. p. 89; 1915 Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 214; 1918 Siboga Exp. 42 B, p. 37.

Comaster parvicirra 1908 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 34, p. 306.

From St. 45 (1 sp.) 55 (1), 59 (1) = 3 specimens.

Sp. 1 (St. 59) Cd 2,2 mm., free dorsal pole 1 mm. C. XVII, 10—11; 5—7 mm. in a single or double whorl; 1st segment short, 2^d strongly hour-glass-shaped L = 1^{1/2} × br; 3^d L = 3 × br, 4th somewhat shorter L = 2^{1/2} × br. 5th segment a transition segment. Dorsal spine small, indistinct, on the distal part of the segment. Penultimate segment L = br with opposing spine; h of this one about = ¹/₅ × the br of the segment. Terminal claw L = ± 2 × the preceding segment, strongly curved.

R—s concealed. I Br 1 h = ¹/₄ × br, partly hidden by Cd. I Brax h = ¹/₃ × br, almost triangular. A syzygy between I Br 1 and 2. All the way from I Brax the margins of the segments are distally bent outwards and very spiny. II Br:s are 4, III Br:s 2 (1 + 2). Arms XXVIII 50—70 mm. Br: 1 + 2 except when the arm originates from a I Brax; then occurs Br 1—2 3 + 4. Br 1—7 discoidal, then oblique joints. 16 segments pr cm. (12 if the syzygial pairs are counted as units). The breadth of the arms 0,7 mm. Segments distally: L = 1^{1/2} × br, slender, hour-glass-shaped.



P_{II} and P_1 25—30 (6 T) 6 mm., 11—13 first segments with very spiny distal collars, $P_2 \pm 23$; 5 mm. (The 7 most proximal segments spiny), $P_3 \pm 20$; 3 mm., $P_4 \pm 15$ (5 T), 2,5 mm. P_1 — P_4 or P_5 with combs, then on every two or three pinnules to about P_{20} . The teeth of the combs: $h = 1\frac{1}{2} \times$ the br of the segments. Distal p. 20; 6,5 mm. the segments (except the most proximal): $L = 2 \times$ br, at the ends knotty swollen and spiny.

Mouth central. Anal funnel lateral, papillated. Disk smooth without granules, 6 mm. Colour brownish.

Sp. 2 (St. 55) C. XIV, 9—10, 4—6 mm. 3^d and 4th segments $L = 3 \times$ br.

R—s narrow bands. I Br:s 1 laterally free, $h = \frac{1}{3}$ br. I Brax $h = \frac{1}{2}$ br, pentagonal. Primipostaxillaries united inside. II Br:s are 4 (3 cases); III br:s : 2 (2 cases). The arms are XV 45 mm. Syzygies with an interval of 3 oblique articulations.

P_1 — P_4 with combs; afterwards here and there but scarcely farther than to P_{10} . Example $P_1 P_2 P_3 P_4 P_6 P_9$. P_1 with 5, P_2 with 4 T.

Mouth subcentral. Anal funnel large, papillated, swollen, 1,5 mm. Disk 3 mm., dark brown. Colour for the rest light grey-brown.

Sp. 3 (St. 45) C. XVI 8—9; 2—3 mm. 3^d and 4th segment $L = 3 \times$ br.

I Br 1 laterally free, $h = \frac{1}{3}$ br. Axillary $h = \frac{1}{2} \times$ br. Primi-postaxillaries free inside. II Br:s are 4, III Br:s : 2. Arms XIII 25 mm. Br-segments strongly bent outwards and serrate. Syzygies as before. (After III Brax 1 + 2 3 4 5 . .). Length of the distal segments = $1\frac{1}{2} - 2 \times$ br.

P_1 — P_3 or P_4 with short, high combs of 4—5 T. $P_1 \pm 25$; 2,5—3 mm. No distal pinnules with combs. Distal p. 12—14; 4—5 mm.

Disk 2,5 mm., a little cushion-shaped. Mouth central. Anal funnel short, coarse, smooth, length 0,8 mm., breadth about the same.

See for the rest the description of the young forms from Bonin Island (p. 58), some of which certainly belong to this species.

As in the preceding species, *the young forms* of this one *seem to lack combs on distal pinnules*. The finest example of this is *Sp. 3* of *Comaster serrata*. The specimen in question is a connecting link between the X-armed young forms (it has like these only a couple of proximal pinnules provided with combs) and the full-grown specimens

(in conformity to which it has the III Br series with following Br 1+2 developed and is therefore certainly determinable). — The combs occur more and more abundantly on larger specimens and, finally, in full-grown specimens reach far out on the distal parts of the arms. Usually a comb occurs on every second pinnule. — The late ontogenetical occurrence of combs on distal pinnules probably has a correspondence in the phylogenetical evolution and might stand in a certain relation to an altered manner of living and a different mode of catching the food, a question that I shall discuss in another connection.

Comantheria A. H. CLARK.

C. grandicalyx (P. H. CARP)

Fig. 30, 31.

Syn.: *Actinometra grandicalyx* 1882 P. H. CARPENTER Journ. Linn. Soc. Vol. 16, p. 520.

Comantheria grandicalyx 1912 A. H. CLARK Crin. Ind. Oc. p. 90; Smithson. Misc. Coll. Vol. 60, N:o 10, p. 7; 1915 Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 214; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 43.

From St. 52: 2 specimens.

Sp. 1 Cd 10 mm. in diameter, the dorsal surface very concave, free dorsal pole 6 mm.

C. ± LXXV 26 (D) 25 mm., 30—31 (V) 29—34 mm., in about 3 close whorls. 1st to 5th segments shorter than long to cubical. 6th to 11th or 14th a little longer than broad, the following segments decreasing, $L = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times \text{br.}$ From the 20th or 25th segment a very weak and indistinct dorsal spine. Opposing spine a little stronger. Terminal claw rather coarse, somewhat longer than the penultimate segment.

I Br 1 almost concealed. I Brax low pentagonal $L = \frac{1}{3} \times \text{br.}$, the distal margins concave. II Br 1 basally united in pairs inside. III Br 1 and 2 and sometimes also Br 1 and 2 fused in pairs on the inner side. II Br:s : 4 (3 + 4), III Br:s : 2 (1—2, a weak synarthrial tubercle), IV Br:s : 4 (3 + 4). The components of the division series smooth, broad,

tolerably flat. Disk only appearing slightly between the inner sides of the II Br series. Arms LVIII 120 mm. Syzygies for instance 3 + 4 .. 16 + 17 .. 22 + 23 .., distally with an interval of 4 oblique articulations. 16 segments pr cm. (13 if the syzygial pairs are counted as units). The breadth of the arms at the middle 2,2 mm. Br segments very short, $L = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times \text{br}$.

$P_{II} \pm 60$; 30 mm., about 20 T (37th to 58th segment) the tip smooth; the teeth rather thin, low, $h = \frac{1}{2}$ of the br of the segments. P_{IV} or P_1 22—28 mm., ± 20 T. $P_2 \pm 15$ mm. with about 15 T. P_3 6 T, 11 mm. If P_{IV} is lacking only 4 pinnules (P_{II} — P_3) with teeth, P_6 9,5 mm. Genital p. 14 mm. Distal p. 25; 11 mm., the 3 last segments with small dorsal hooks. The proximal pinnules have the first 5—12 segments provided with small prominences; the notches between these partly filled up by skin.

Disk 40 mm. Mouth marginal. Anal funnel central, sharply set off from the anal interradius, $L = 14$ mm. No calcareous granules or papillæ in the skin. Colour brown; a somewhat lighter middle-line on the dorsal side of the arm. On about 10 of the posterior arms 25—30 pairs of pinnules are without ambulacral furrows. The ambulacral furrow of the arm, however, always remain.

Sp. 2 The dorsal free surface of Cd slightly concave, 9 mm. $C \pm$ LXX 27 (D) 30 (V) 25—30 mm.

II Br—s: 4 (3 + 4), III Br—s: 2 (20 cases), IV Br—s: 4 (3 + 4) 26 cases, V Br—s: 2 (2 cases). Arms LXVIII, 130 mm. or shorter. The formation of the arms as before.

$P > 35$ mm., > 80 segments. Teeth from the 40th or 55th to the 75th segment. Comb best developed about the 60th segment. P_{IV} — P_3 decreasing, with teeth. All the arms with ambulacral furrows.

Disk 42 mm. Anal funnel 17 mm.

Breadth of the Br—s 50 mm. from the base of the arms 1,8 mm. Distally 0,6 mm. The joints very swollen, thick and coarse.

P_{II} 75—80; 30—33 mm. with a very indistinct comb, partly hidden by skin; ± 12 T, the tip of the pinnula smooth. P_{IV} ± 12 T similar to the preceding p. P_I with 18 T, which are more strongly developed, ± 23 mm. P₂ ± 40 (6 T) 16 mm., the tip smooth. P₃ shorter with some few, small teeth, P₄ ± 25 (no T) 6 mm. Genital p. 12 mm. Basal segments as in the chief species. Distal p. ± 30 ; 14 mm. Length of the pinnulars = $1\frac{1}{2} \times$ br. Dorsal hooks indistinct. Distal p. spirally rolled.

Disk 38 mm. Colour red-yellow.

Sp. 2 (St. 62) Cd 11 mm., free dorsal pole 7 mm. C \pm L, 27—32; 24—29 mm. 13th—18th segment a transition segment.

II Br—s: 4, III Br—s: 2, IV Br—s: 4 (3+4), in one case 2; V Br—s 2 (one case). Arms LXVIII 90—110 mm. 19 segments pr cm.

P_{II} ± 65 (10—17 indistinct T) 32 mm., P_{IV} 28 mm. ± 55 (12 pinnules with small T), P₂ 31 (8 T) 12 mm., P₃ 25 (5 T) 8 mm., P₄ no T, 6 mm. Genital p. ± 20 ; 8,5 mm. Distal p. ± 25 ; 11 mm.

Disk 33 mm. Anal funnel 12 mm., somewhat swollen but well marked out from the disk. Mouth adradial, marginal. Colour brown-orange to grey-brown.

Both these specimens are distinguished from the chief species by the nearly smooth distichal pinnule, by very short Br-segments, by a more slender constitution and by the trifling size of the disk when compared with length of the arms. (The last-described specimen, however, somewhat approaches *C. grandicalyx*).

Comanthus A. H. CLARK.*C. solaster* A. H. CLARK.

Fig. 33, 34.

Syn.: *Comatula solaster* 1908 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 33, p. 153.

Comanthus solaster 1909 A. H. CLARK Videnskabl. Meddelelser Kobenhavn, p. 147; 1912 Crin. Ind. Oc., p. 94; 1915 Journal Acad. Sci. Vol. 5, p. 214; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 49.

From St. 20 (1 sp.), 28 (1) 38 (2) = 4 specimens.

Sp. 1 (St. 38) Cd 11 mm., free dorsal pole a little concave 7.5 mm. C \pm LXX 18—23; 12—21 mm. in 2 or 3 whorls. Cirri very diversiform in appearance, often slender, straight, weak; sometimes of the usual type; coarse, thick and strongly curved (compare Fig. 34). The first-mentioned ones have the 1st segment short, 2^d—3^d or 4th cubical or a little longer. 5^d—8th segment L = \pm 2 \times br (when the C are of the later type these segments have only L = 1 $\frac{1}{4}$ \times br). From about the 10th segment L = $\frac{1}{2}$ \times br. Dorsal transverse ribbon or knot occurs from 12th or 16th segments. Terminal claw rather coarse, somewhat longer than the penultimate segment.

I Br 1 hidden by Cd. I Brax triangular h = $\frac{1}{2}$ \times br, distal angle very acute, separating II Br—s 1, which are only narrow tips inside. The other primipostaxillaries united inside. II Br—s : 4, III Br—s : 4, IV Br—s : 4. Arms L 110—130 mm. Division series smooth, very close. From the dorsal side only the bases of the distichal pinnules visible (the first 6 segments). Disk concealed in dorsal view. Syzygies : 3 + 4 . . 17 + 18 . . 23 + 24 or 3 + 4 . . 14 + 15 . . 18 + 19 etc. with an interval of 4 oblique articulations. Br 4 — \pm Br 70 with distally overlapping, thickened segments with small spines, then smooth arms. 20—21 segments pr cm. (15—16 if the syzygial pairs are counted as units). II Br—s : br = 4 mm. Br 1 br = 2,3 mm.; 50 mm. from the arm-base the br is = 1,3 mm.

P_{II} \pm 60; about 25 mm. with 8—16 weak teeth, 2 to 5 last pinnulars smooth, the basal segments angular, a little knotty. P_{III} similar somewhat shorter. P_{IV} or P_I about 20 mm. (11 T). P₂ with 8 rudi-

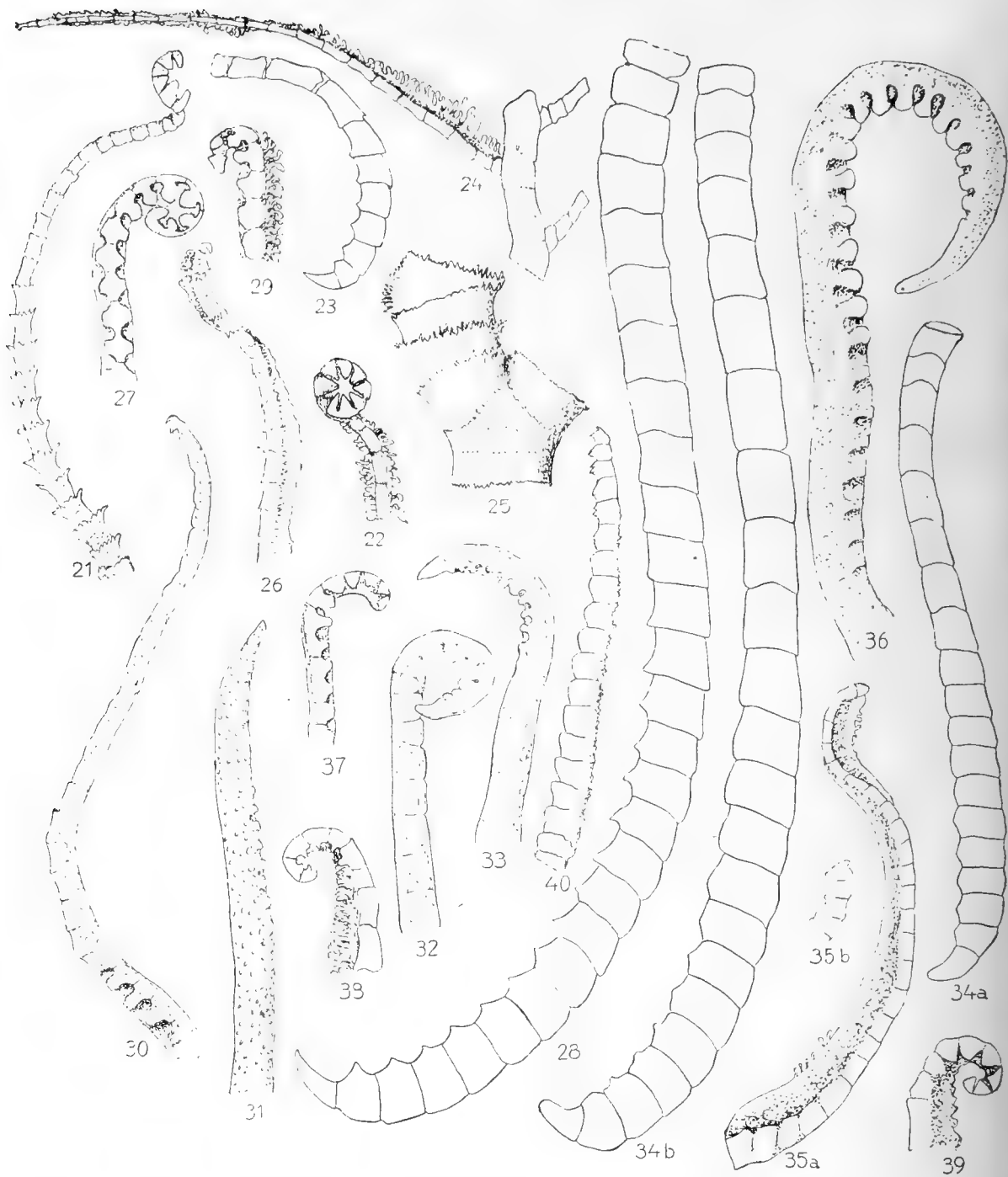


Fig. 21—25. *Comaster serrata* (St. 59) 21) P_{II}^{14/1}, 22) The tip of P₁₀ (9 T), × 17½, 23) Cirrus ⁹/₁, 24) An arm-stump with distal p—s ¹⁴/₁, 25) The base of an arm with I and II Br series. The spines which occur at the distal margins of the segment are most often broken ¹⁴/₁; 26—29 *Comaster delicata grandis* (Sp. 1) 26) The tip of a distal pinnule ⁹/₁. 27) The tip of P_{II}^{14/1}, 28) Cirrus ⁷/₁, 29) The tip of a genital p. with a comb, × 17½; 30, 31 *Comantheria grandicalyx* (St. 52) 30) Distal pin-

mentary teeth, still shorter, P_3 6.5 mm. without a comb. Genital p. 11—12 mm. Distal p of about equal length. On all pinnules 2^d—5th or 7th segments with small prominences.

Disk 30 mm., without granules. Mouth admarginal. Anal funnel subcentral, 7 mm.

Sp. 2. (St. 38 A). Cd 10 mm. dorsal pole a little concave, 6.5 mm. C. LXV 22—24; 12—25 mm.

I Br 1 $h = \frac{1}{10} \times \text{br}$. I Brax $h = \frac{1}{2} \text{br}$. II, III and IV Br—s: 4 (the last-mentioned division-series appearing in 2 cases). Arms XLII 125—155 mm.

Disk 32 mm. Anal funnel 8 mm. Colour as in the preceding specimen violet-brown. Cirri and regenerated parts somewhat lighter.—A splendid specimen.

Sp. 3 (St. 28) Cd 10 mm., free dorsal pole 7 mm. C. LV 20—26; 12—22 mm.

I Br 1 slightly visible. Axillary almost triangular $h = \frac{2}{3} \times \text{br}$. II and III Br—s: 4. Arms XL 105—125 mm. Sutures between the distichal and palmar segments slightly visible, division-series not quite so smooth as in *Sp.* 1.

$P_{II} \pm 55$ (10—12 T) 24—25 mm. T indistinct, h about $\frac{1}{3}$ of the br of the segment. P_{III} to P_2 shorter; also P_3 with a small comb. Genital p. 10 mm. Distal p. 11—12 mm. — Disk 32 mm. Anal funnel 6 mm.

Sp. 4 (St. 20) Cd 10 mm., dorsal pole 8 mm. C. \pm LX 20—24, 14—23 mm. in 2 whorls. A great many empty joint-cavities.

II and III Br—s: 4. Arms XL 105—120 mm. Division series and arms as in *Sp.* 1,

$P_{II} \pm 50$; 28 mm. P_{III} with 6—8 very low T.; 5 to 6 top-segments smooth; ± 20 mm., P_1 — P_3 decreasing ($P_2 \pm 10$ mm., P_3 7 mm. without a comb.) Distal. p. 9 mm. — Disk 28 mm. Anal funnel 6 mm.

nule $\frac{1}{1}$, 31) The tip of $P_{II} \frac{1}{1}$; 32) *Comantheria grandicalyx flagellipinna* (St. 54) 32) The tip of $P_{II} \frac{1}{1}$; 33, 34) *Comanthus solaster* 33) The tip of $P_{II} \frac{1}{1}$, 34 a) Dwarf cirrus b) Cirrus of the larger type $\frac{1}{1}$; 35, 36) *Comanthus pinguis* (St. 58) 35) Distal pinnule (observe the dimpled perisome; common to all larger comasterids) b) The tip of the pinnule in lateral view to show the slight dorsal hooks (observe stout cirri) $\frac{1}{1}$, 36) The tip of $P_{II} \frac{1}{1}$; 37—40) *Comanthus annulata* (St. 42) 37) The tip of P_{II} , $\times 17 \frac{1}{2}$, 38) The tip of P_7 viewed from the inside, showing slight teeth-like swellings which constitute ridges supporting the teeth on the outside of the pinnule, $\times 17 \frac{1}{2}$, 39) The same pinnule viewed from the outside with 7 stout teeth, $\times 17 \frac{1}{2}$, 40) Distal pinnule with stout dorsal hooks (observe small cirri) $\frac{1}{1}$.

In all these specimens one finds the variable appearance of the cirri peculiar to *C. solaster*. The only difference from the specimens described by A. H. CLARK is the number of C, which in the Bockian species are more numerous and arranged in 2 to 3 whorls. The above-described specimens might perhaps therefore be characterized as a forma *multicirra*.

Comanthus pinguis A. H. CLARK.

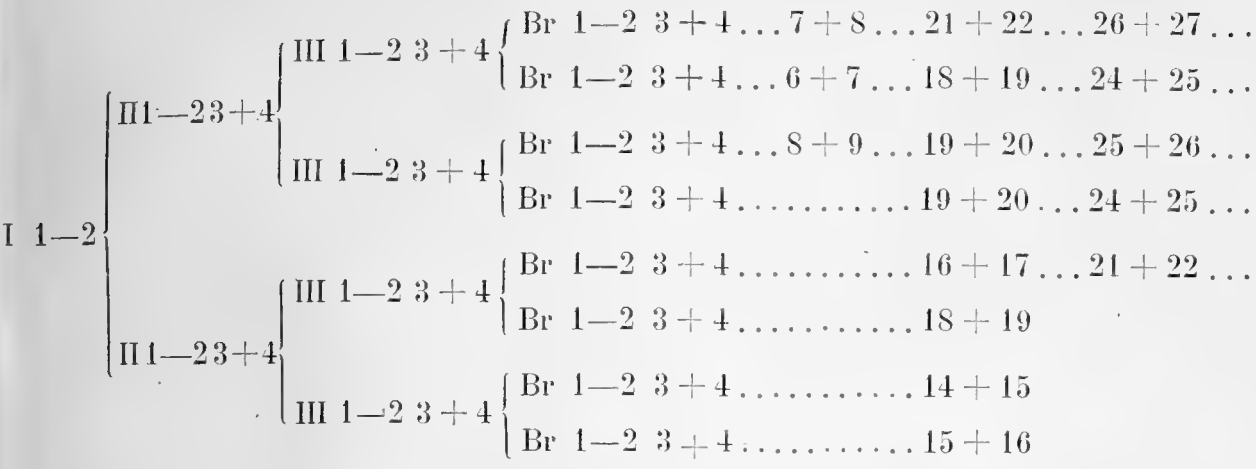
Fig. 35, 36.

Syn: *Comanthus pinguis* 1919 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 37, p. 29; 1912 Crin. Ind. Oc. p. 94; Smiths. Misc. Coll. Vol. 60, No 10, p. 9; 1915 Monograph; Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 214; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 49.

From St. 14 (2 sp.), 15 (1) [18 (1)] = 4 specimens.

Sp. 1 (St. 14) Cd almost hemispherical, 9 mm., free dorsal pole 5 mm., a little hollowed in the middle. C. XXXVIII 28—33; 30—36 mm. in 2 whorls. 1st and 2^d segments short, 3^d to 5th cubical or somewhat longer., 6th—10th segment $L = 1\frac{1}{2}$ br. Distal ones $L = \frac{1}{2} \times$ br. Dorsal prominences from the 15th to 20th segments, $L = \pm \frac{1}{5}$ of the br of the cirral. A weak opposing spine. Terminal claw slightly curved. $L = 1\frac{1}{2} \times$ the preceding segment.

R—s slightly visible at the corners. I Br 1 $h = \frac{1}{4}$ br, in the basal half united with each other. Between them a depression in the perisome. I Brax $h = \frac{1}{3} \times$ br, pentagonal, the distal margins slightly concave. The br 6,5—7 mm. Primipostaxillaries united inside. On their distal, interdistichal side a depression as between the primibrachial series. Divisions-series broad, smooth, flattened, but the perisome between them is quite visible. The distance between II Br 3 in two different division-series is 3,5 mm. Disk reaching to II Br 2 or 3. II and III Br—s: 4 (3 + 4). Arms XXXVIII 125 mm. +, very fragile. Br-segments distally somewhat, but only slightly, thickened. Syzygies distally with an interval of 4 oblique articulations. Example of arm-ramification and proximal syzygies:



16 segments pr cm. (13, if the syzygial pairs are counted as units).

P_{II} 50—55; 30 mm., last 5 segments smooth. T 20 low, thin, h = ± 1/4 of the br the pinnular, P_{III} 45, last 6 segments smooth, 15 T, ± 25 mm. P_I 45 (15 T) 22 mm. (last 5 segments smooth), P₂ 8 T, 10 mm., P₃ 6 T, 8 mm. (h of T = 1/2—1/3 of the br of the segment. One or two distal segments without teeth), P₄ and P₅ usually with a rudimentary comb. Distal p. ± 25; 10 mm. 3^d to 5th pinnular with skin connecting the knots as in *Comantheria grandicalyx*, most distinct on proximal p.

Disk 32 mm. without granules. Mouth adradial. Anal cone 6 mm. Colour: dorsally light yellow, ventrally yellow-red with a sharp colour-border, especially on the lateral sides of the division-series.

Sp. 2. (St. 14) Cd 9 mm., free dorsal pole rather flat, 6 mm., h = 2 mm. C. XXXIV 28—31; 30—38 mm.

Arms XXXVIII 140 mm. The components of the division-series a little thickened in the articulations and therefore the arm-bases are not quite as smooth as in Sp. 1.

P_{II} ± 50 (16 T) 35—42 mm. P_{III} 12 T, 5 to 6 top-segments, as usual, smooth, 30 mm. P_I 13 T (3 top-segments smooth), ± 25 mm. P₂ 8 T, P₃ 6 T., 7 mm. P₄ and P₅ still a little shorter also with combs. P₆ longer without a comb.

Disk 32 mm. Anal funnel 5 mm. Colour as in Sp. 1. Disk, however, spotted with olive-brown.

Sp. 3. (St. 15) Cd 8 mm., free dorsal pole 5 mm. C. XXXII 23—28, 18—25 mm. Dorsal spines a little stronger than in the preceding specimen.

I Br 2 $h = \frac{1}{3}$ br, the distal angle somewhat prolonged, br = 6 mm. Arms XXXII 115 mm. The interspaces between II Br 3 : 2,5 mm. The arm-branches somewhat more slender than in the preceding specimens.

$P_{II} \pm 45$ (5 to 14 T,, the tip smooth) 26—33 mm. P_{III} or P_1 (± 10 T) 23 mm. P_2 8—9 T, 18 mm.; P_3 — P_5 with a small, short comb (3—5 T); P_6 without a comb 18; 5,5 mm.

Disk 28 mm. Anal cone 4,5 mm. Colour a little more grey-brown than in the foregoing specimens.

One may possibly also assign a young Comasterid (St. 18) to this species.

Sp. 4 ? (St. 18) C. XIII 10—12; 2,5—3 mm. 3^d—5th segment longest $L = 1 \frac{1}{2} \times$ br.

R—s $h = \frac{1}{3} \times$ br. I Br 1 $h = \frac{1}{2} \times$ br, laterally free. I Brax $h = \frac{2}{3} \times$ br, pentagonal, the distal margins straight. Br 1 inside almost free. Arms X, 7 mm. 1st syzygy between Br 3 and 4. The segments distally collar-shaped, spiny, and overlapping.

P_1 with an indistinct comb, the tip is smooth, the pinnule rolled. T 7 low, sparse, obtuse. P_2 — P_4 to P_5 are lacking.

Disk 2,3 mm. Mouth and anus subcentral. Anal cone 1 mm. Disk rather »lean», weakly papillated.

A comparison with specimens in Dr MORTENSEN'S collection from Japan showed that it is only the very largest specimens of *C. pinguis* that have the ossicles of the division-series so broad that they grow together laterally. The division-series are, however, always (even when not in lateral contact) strikingly broad and flat. *C. japonica*, according to the scheme in the Siboga volume, has narrow division-series, leaving broad parts of the perisome unprotected. Nevertheless A. H. CLARK says about the original specimen (Leyden Mus. Vol. 33, p. 181) that »the division-series are rather broad». The formation of I Brax seems to be a characteristic of species more certain than this one. While *C. pinguis* has an axillary that in old specimens gets almost straight distal margins, these in *C. japonica* are very concave, and therefore the distal angle of the axillary becomes very prolonged (As also in *C. solaster*).

Comanthus (Vania) annulata (BELL).

Fig. 37—40.

Syn: See 1918 A. H. CLARK Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 53.

From St. 42 A = 1 specimen.

Sp. 1 Cd flattened, 4 mm. Dorsal pole 3 mm. C. XV 15; 9—10 mm. in a single whorl. 1st and 2^d segment shorter than long, 3^d segment cubical, 4th and the following ones longer, a little hour-glass-shaped, 6th segment the longest, $L = 1\frac{1}{2} \times br.$ From 7th or 8th segment a weak and indistinct dorsal prominence. The L of distal segments = $\frac{2}{3} \times br.$ The cirrus in the distal part somewhat pressed together and in lateral view somewhat thickened. The terminal claw short, coarse, a little longer than the penultimate segment. Cirri weak, small.

R—s somewhat projecting at the corners. I Br 1 laterally fused with each other, distally broader, $h = \frac{1}{5} \times br.$ I Brax low pentagonal, $h = \frac{1}{3} \times br.$ laterally united as usually also II Br : s 1. Primipostaxillaries fused inside. Bases of the arms smooth. The branches of the arms close together. Syzygies 3 + 4, 11 + 12, 16 + 17 etc. with an interval of 4 oblique articulations. Br 1—7 discoidal, then oblique joints. II Br—s : 4 (3 + 4), III Br—s : (3 + 4). Arms XL 80—120 mm. dimorphous. Distal segments slightly thickened at the distal ends. 14 Br-segments pr. cm. (11, if the syzygial pairs are counted as units). The br. of the arms proximally 2.5 mm., distally 1 mm. or less.

$P_{II} \pm 50$ (6—8 T) 16—18 mm., $P_{III} 45$ (5—6 T) 12 mm., $P_1 \pm 35$ (7 T) 10 mm. $P_2 \pm 20$ (7 T) 6 mm., sometimes without a comb, P_3 with or without a comb. Teeth then on every second or third pinnule to P_{11} . Distal p. ± 20 ; 8 mm. (1st and 2^d segments short, the rest longer than broad, the last 4 to 5 segments with dorsal hooks). The bases of the p. rather smooth.

Disk 20 mm. Anal funnel central. Mouth interradial. Colour (in spirit) grey-brown. The shorter, posterior arms coarser, their p. often without ambulaeral furrow.

Comanthus (Vania) parvicirra (J. MÜLLER).

Syn.: See 1918 A. H. CLARK Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 54.

C. parvicirra α *comasteripinna* n. subsp.

Fig. 41—43.

Syn.: *Comaster multifida* and *typica* 1919 T. GISLÉN K. V. A:s handl. Bd. 59, No 4, p. 14 and 9.

From St. 40 (1), 49 (broken arms), 63 (1) = 2 specimens +.

Sp. 1 (St. 40) Cd 3 mm., only slightly raised above the dorsal surface. C. IX 13—15; 4—7 mm., in a single, incomplete whorl. 1st segment short, 2^d and 3^d about cubical, 6th longest $L = 1\frac{1}{2} \times \text{br.}$ From the 7th segment a weak dorsal prominence. Opposing spine $h = \frac{1}{5}$ of the br of the segment. Terminal claw curved, $L = 1\frac{1}{2} \times \text{penultimate segment.}$

R—s $h = \frac{1}{6} \text{ br.}$ I Br. I $h = \frac{1}{4} \text{ br,}$ laterally united. I Brax $h = \frac{1}{3} \text{ br,}$ laterally free, low pentagonal. Primipostaxillaries united inside. II Br—s 4 (9 cases), 2 (1 case), III Br—s 4 (4 cases). Arms XXIV 90 mm. Division-series smooth. The basal arm-segments somewhat »chubby,» then slightly overlapping and with small spines distally. The br. of the arms proximally 1,8 mm. Syzygies 3 + 4 (sometimes 4 + 5 or still later) . . 11 + 12 . . etc. with an interval of 4 oblique articulations. 14—15 segments pr cm. (11, if the syzygial pairs are counted as units).

$P_{11} \pm 45$ (9—10 T) 12 mm. P_1 8—11 T; 10 mm.; P_2 8—9 T, 20—25; 5—7 mm. P_2 or P_3 shortest, the latter with 15 segments (8—9 T) 4—5 mm. Combs on about every second p to P_{25} or P_{30} . Example $P_4 P_5 P_7 P_9 P_{11} P_{13} P_{15} P_{17}$ etc. Distal combs with about 10 T. Distal p. 22—28; 10 mm.

Disk 15 mm., without granules, hemispherically swollen. Anal funnel central, 3 mm. Colour: dark sepia. Disk in dorsal view somewhat visible between the arms, not reaching farther than to III Brax.

St. 49 (Broken arms) Arms 100—140 mm. The proximal parts of the arms $\text{br} = 2,2 \text{ mm.}$ Syzygies as before 16 (resp 13) segments pr cm.

Combs with 8—10 T at leasto P_8 or P_{10} .

To this species there also belongs very probably a young specimen from Sagami which shows a great resemblance to larger individuals in Dr MORTENSEN'S collection from the same locality referable to *C. parvicirra*. Description as follows:

Sp. 2 (St. 63) Cd 1,9 mm. free dorsal part 1,6 mm. C. lacking. Pits of XVII in a single whorl.

R—s narrow, at the middle almost concealed bands. I Br 1 h = $\frac{1}{3}$ br, laterally free. I Brax h = $\frac{1}{2} \times$ br, pentagonal, br = 1,3 mm. Disk visible in the interspaces (br = 0,5 mm.) between the arms. II Br—s : 4 (4 cases). Arms XIV 20 mm. Primipostaxillaries united inside basally. II Br 1 h = $\frac{1}{5}$ br. II Br 2 and Br 2 distally and dorso-laterally broader. Syzygies 3 + 4 . . 10 + 11 etc. with an interval of 3 to 4 oblique articulations. Arm-segments after Br 4 distally bent outwards and a little small-spiny 20 (resp. 16) segments pr cm.

P₁ with 8—10 large T., tip not smooth. P₂ similar, somewhat shorter, 3 mm., P₃ 12. \pm 3 mm., basally a little swollen (by a gonad?) — Basal pinnulars weakly carinate. Distal p 12—14, 3,5 m. coarse, short segments, distally dorsal hooks (cf. fig.)

Disk 5 mm. Anus central. Colour yellow-brown. The last mentioned specimen most probably referable to the 3^d subspecies (*γ. vanipinna* represented in Dr. MORTENSEN'S collection from Sagami; otherwise cf. p. 52).

Comanthus (Vania) parvicirra β comanthipinna n. subsp.

Fig. 44, 45.

From St. 40 - 1 specimen.

Sp. 1 Cd 3 mm. C. VII 13—14; 8—9 mm. coarser and more curved than in the preceding sub-species.

B—s projecting IR. II Br—s : 4 (4 cases), 2 (6 cases), III Br—s : 4 (2 cases). Arms XXII 105 mm., most of them loose, broken. Syzygies with an interval of 4 oblique articulations. 12—13 segments pr cm (10, if the syzygial pairs are counted as units). Breadth of the arms 2,3 mm.

P_{II} \pm 40; 13 mm. with a comb as in typical *Comanthus-Cenolia*-species, that is in this case + 12 low, thin teeth which on both sides

(proximally and distally on the pinnule) obliterate. The tip of the p. with 2 or 3 smooth segments. $P_1 \pm 12$ mm. P_2 5,5 mm. P_3 and the following ones without a comb. Distal p. 27; 11 mm. The segments: $L - 1\frac{1}{2} \times br$, the 4 outermost ones with distal hooks.

Disk thrown off. The pinnules of some arms without ambulacral furrows.

Both these newly proposed sub-species of the polyform *C. parvicirra* differ in many characteristics from each other. Thus for instance β has coarser arm-bases and somewhat fewer Br-segments pr cm. but it is chiefly the different appearance of the comb that has caused me to separate these two types and to denote them by different names.

Within the sub-fam. *Comasterinae* of the fam. *Comasteridae* one can distinguish chiefly 3 different types of combs. The first of these, which I should like to call the *Comaster*-type, is characterized by a short, strongly rolled comb, with some few, large and close teeth. The combs occur on every second or third p. to rather far out on the arm. The second, the *Comanthus*-type, has combs with a greater number of teeth, which are small and low, and therefore thinly placed. They become smaller proximally and distally and obliterate towards the tip of the pinnule, leaving the latter smooth. The combs occur on a very few proximal pinnules (never farther than P_6) and in an unbroken series, that is never on every second or third p. as in type 1. The 3^d type — to a certain extent an intermediate one — is the *Vania*-type, which has rather high and large teeth right out to the tip of the pinnule. Combs occur as in type 2 in an unbroken series.

Both the first-mentioned types are usually very regularly associated with certain genera within the above-mentioned sub-family *Comasterinae*. Type 1 is found in the genus *Comaster*, type 2 is, as far as I have been able to verify, characteristic of the genera *Comantheria*, *Comanthina* (?), and *Comanthus* (*Cenolia*). In the genus *Comanthus* (*Vania*) the use of this characteristic, like so very many others, becomes, however, impossible in the diagnosis. To *Comanthus-Vania* are assigned two species distinguished from each other by such an artificial character as the number of arms. The facts of the matter are undoubtedly, however, that *Comanthus* (*Vania*) *annulata* represents one group of forms

with a generally greater number of arms which are longer and coarser, *C. (Vania) parvicirra* another one with a smaller number of more slender arms. Nevertheless, both the »species» vary so considerably that they often intrude upon each other's spheres.

The specimens obtained by the Bockian expedition, show that within the subgenus *Vania* there occur types of combs of both the *Comaster*-, *Comanthus*- and (of this I have been convinced by observations on Dr MORTENSEN'S Japanese specimens of this species) of the *Vania* type too. In revising the Bockian collection I have distinguished type 1 and 2 in *C. (Vania) parvicirra* by ranging them in two different sub-species. I have been neither able nor willing to discuss the innumerable synonyms of this species — A. H. CLARK has given an imposing synonym list in Siboga Exp. Vol. 42 B. It is not possible to distribute the names of this list among the 2 new sub-species because most of the authors have given no information about the occurrence and appearance of the combs. Even A. H. CLARK, who has described hundreds of specimens belonging to this species, has hardly given any other information except about cirri and division-series. It is therefore natural that he has escaped making the observation that a comb of the *Comaster*-type also occurs in the sub-genus *Vania*. Already in my work upon the crinoids of Dr MjÖBERG'S expedition I recorded the statement of P. H. CARPENTER about the occurrence of the *Comaster*-type in 3 of the species referred by A. H. CLARK to the *parvicirra*-group, viz. *Actinometra elongata*, *simplex* and *quadrata*. All the MjÖbergian specimens, however, had 4 components in the II Br-series and the *Comaster*-type in respect of the distribution of pinnules, and consequently, trusting to the Clarkian genus-diagnosis, I referred the above-mentioned species, most suitably referable to *Vania parvicirra*, to the genus *Comaster* and assigned the specimens with coarser cirri to *C. multifida* and those with rudimentary cirri to *C. typica*. Since then I have had an opportunity to establish that the occurrence of combs far out on the arms is not exclusive to the genus *Comaster* but is also found in the genus *Comanthus* subgenus *Vania*.

It is not curious that both these species of the subgenus, *Vania* have caused great trouble to all authors by their extreme variability in practically all distinguishing characteristics otherwise successfully used. Not only are cirri and cirrals, division-series and Br-segments

very variable in appearance and number; to this is added, as mentioned above, the varying development and distribution of the pinnule-combs. In *Vania annulata* the combs in the above-described specimen reached as far as P_{11} . In a specimen from Java of the same form-series (still not described; possibly, however, belonging to a new species on account of the very long, slender and well-separated arms) the combs occur on every second pinnule and reached at least P_{35} . As to *Vania parvicirra* I refer to the descriptions given above.

A. H. CLARK in a letter to me writes about both these species as follows: »The species of *Comasterinae* are the most difficult of all Crinoids — I may even say of all the Echinoderms — to determine. The two species which I call *parvicirra* and *annulata* are very likely arbitrary divisions of one type; but it is convenient to call the smaller individual with 30 or fewer arms *parvicirra* and the larger with 30—70 arms¹ *annulata*. Many specimens of the latter with the III Br series 2 are practically indistinguishable from certain species of *Comantheria*. »

According to this division *Comaster typica* Sp. 2 Mihi 1919 would be assigned to *Vania annulata*. Nevertheless it corresponds closely with the other specimens in the Mjöbergian collection and has also unusually short arms and therefore I should be disposed to include it in *Vania parvicirra*.

As to the reason of the polyformity of this subgenus I will only point to the following:

It is possible that the two species of *Vania* have become a rubbish heap for divers species difficult of solution or types inconvenient for the systematist. In such a case it would be possible to put order into the now confusing multitude and to get a survey over the existing types by a detailed description of specimens. Characteristics that might perhaps be applied would be the number, presence or absence of cirri, the br of the arm-bases, the appearance and formation of the Br-segments, of the division series, of the proximal (and also distal) pinnules and pinnulars, of the disk and eventually of calcareous spicules, that is to say the inclusion of all characteristics and then an examination of a large material.

¹ According to the Siboga work 35—60 arms.

Further it may be that these possibly existing small species partly make hybrids between themselves and perhaps partly also form crossings with proximal species in the genera *Comaster*, *Comantheria* and *Comanthus*. If these hybrids are fertile they will after a couple of generations be split into countless different types. Supposing, for instance, that a form without cirri, with III and IV Br-s:4, and with a *Comanthus*-comb (restricted to proximal pinnules) were crossed with a form with cirri, with III and IV Br-s:2, and with *Comaster*-comb (that is short, high combs dispersed to distal pinnules). Further, supposing that such a hybrid were fertile and therefore in the 2^d generation was normally split in the different possibilities of combination. Then one would get forms that might be referred to all the genera known within the sub-fam. *Comasterinae*. (If, e. g., the first 3 gens as heterozygotic might be represented with different forms: rudimentary cirri, mixture of 2 and 4 components in the III and IV division-series, one would get 108 different possibilities). The great variability in the division-series even in the same specimen seems to be a proof of the probability of the heterozygotic nature of certain specimens of *C. parvicirra*.

In a special paper I will treat a 3^d possible influencing cause, viz. alteration in the mode of catching food.

Though in many cases the *Comasterids* show primitive characteristics such as clumsy formation, frequently (in the genus *Comaster*) a primitive way of arm-division, a number of components in the division-series that is very indefinite, it is evident that in other characteristics the family is in fast development and has entered quite a specific direction of evolution. A lot of the characteristics which are engaged in such a development have this apparently caused by the changed manner of catching food and are treated in connection with this question.

The variability of the cirri is probably caused by another factor and their regression, which is observable in different species of the *Comasterid* family, I suppose to be caused by the dorsal hooks on the distal pinnules having taken over the anchoring function that otherwise falls upon the cirri. These dorsal hooks are to be found in most of the *Comatulids*, though usually visible only by strong magni-

fication. In the *Comasterids* they are large and well developed, they appear smallest in species with powerful cirri as in *Comanthus pinguis*. Everyone who has worked somewhat with species of this genera, knows that for instance a *Comaster* or *Vania parvicirra* has a strong power of attaching itself by means of the dorsal hooks of the distal pinnules. Consequently the cirri will become superfluous or perhaps even be a hindrance if the animal wishes to creep about, which by the observations of H. L. CLARK is proved to be the manner of locomotion of some *Comasterids*. Because of this they become reduced and in many genera they have totally obliterated (as in species of *Capillaster*, *Comatula*, *Comaster*, *Comantheria*, *Comanthina* and *Vania*).

As appears from the above investigation the subgenus *Vania* is a very critical genus, forming to a certain extent a middle link between *Comantheria-Comanthus* and *Comaster*. The reason why I have not united all these genera is that I perceive the possibility of *Vania* representing a rallying group of hybrids and hybrid-splittings with combinations of characteristics from different form-circles. I should have liked to put *Vania* as a separate genus between *Comaster* and *Comantheria-Comanthus*. In this case I would have distinguished it from the the first-mentioned genus by the III Br—s chiefly consisting of 4 components, from the two latter ones by comb-provided pinnules often occurring far out on the arms. Nevertheless the characterizing in such a case is not satisfactory, if one does not transfer all the *Vanias* of *comanthipinna*-type to the genus *Comanthus (Cenolia)*. Perhaps therefore, it is for the present quite as good to keep the classification made by A. H. CLARK and put *Vania* as a sub-genus under *Comanthus*. Still it is then to be observed that, according to his scheme of examination, *V. parvicirra a comasteripinna* ought to be referred to *Comanthus* if one pays attention to the division-series, to *Comaster* if one takes into consideration the occurrence of the combs. Compare also in this connection the above quoted statement of A. H. CLARK. Another solution; and this a rather good one, might be possible. This would be to subdivide *Comasterine* into 2 genera: *Comaster* and *Comanthus*, the first one characterized by comb-provided pinnules occurring distally on every second or third pinnule, the latter one with comb-provided pinnules in an unbroken series. With such a division the

two types would also be easy to keep apart if it were a question of systematically proximal forms, for, as is shown above, such forms are to be found, no matter how the division is made. On the same specimens the combs seldom or never vary in occurrence on different arms and so to this extent they offer a better distinguishing feature than the division-series. The sub-division proposed above is still, however, impossible to carry out because of the incompleteness of the preceding species-descriptions in the statements as to the appearance and occurrence of combs. So much, however, can be said, that to the first mentioned genus might be referred the genus *Comaster* sensu A. H. CLARK, *Vania* (pro parte) and eventually *Comanthina* (and *Comantheria*) pro parte. To *Comanthus* sensu nova should be referred *Comantheria*, *Comanthina* (p.p.), *Comanthus* (*Cenolia*) and *Vania* p.p.

Young *Comasterids* from the Bonin Islands:

From St. 44 (1), 45 (15), 47 (6), 50 (1), 53 (1), 54 (1),
61 (1) = 26 specimens.

Comatella sp.

Sp. 1 (St. 53) C. XI 8—9; 2—2.5 mm. 3^d segment $L = 2 \frac{1}{2} \times \text{br.}$ Terminal claw curved, longer than the penultimate segment.

B—s projecting between the R—s as small corners. R—s narrow bands. I Br 1 $h = \frac{1}{3} \times \text{br.}$ Arms X, ± 15 mm. Syzygies with an interval of 3 oblique articulations. The segments somewhat folded outwards and spiny.

P_1 with a comb of 5—6 T. P_2 and P_3 absent.

Disk smooth, dark-brown. Mouth central. Anal funnel small, not papillated.

Comatella sp. juv. or the young forms of a large *Comissia* sp.

Sp. 1 (St. 45) C. XIX 14—16; 6—8 mm. 4th segment the longest, $L = 2 \frac{1}{2} \times \text{br.}$ Dorsal spine from the 4th segment. — R-s narrow bands. I Br 1 $h = \frac{1}{4} \text{ br.}$, laterally free. Axillary $h = \frac{1}{2} \times \text{br.}$, forms with the preceding segment a low synartrial tubercle. Br 2 on the outer side

twice as broad. Arms X, 45 mm. Syzygies with an interval of 3 oblique articulations. Distal segments $L = 1\frac{1}{2} \times br$, weakly spiny, but not bent outwards. — P_1 and P_2 with a comb; P_3 usually, P_4 always absent. P_1 25—30 (10 T), 5,5 mm, strongly rolled at the tip. — Mouth subcentral. Anal cone, small, marginal. Disk 4 mm.

Probably a young form of *Comissia peregrina magnifica* like both the following ones.

Sp. 2 (St. 45) C. XIII 12—14; 4—5 mm. 3^d and 4th segment $L = 2 \times br$. Arms X, 25 mm. P_1 and P_2 with a comb. P_4 and usually P_3 absent. P_1 with 9 T. Mouth central. Disk 2,5 mm.

Sp. 3 (St. 45) C. XII 10—11; 2,5 mm. Arms X, 15 mm. P_1 with a comb, then a gap to Br 11 or 13. Mouth central. Disk 2,5 mm.

Sp. 4 (St. 47) C. XVII 12—15; 6—7 mm. 3^d and 4th segment $L = 1\frac{1}{2} - 2 \times br$.

I Br 1 $h = \frac{1}{3} br$, laterally free. Axillary $h = \frac{2}{3} br$, pentagonal. Br 1 $h = \frac{1}{4} br$, Br 2 $h = \frac{1}{3} br$. Arms X, 30 mm. Arm-bases smooth. Syzygies as in *Sp. 1* (St. 45). $P_1 - P_3$ with a comb ($P_1 \pm 15 T$, P_3 8—11 T), P_4 lacking. Distal p. 12—14; 3,5 mm. Strong dorsal hooks on the 3 last segments. Disk smooth, dark-brown, 3,5 mm. Mouth subcentral. Anal funnel short. (Disk half thrown off, under this a new regenerated one).

Sp. 5 (St. 47) C. XI 8—9; 2 mm. 3^d segment the longest $L = 3 \times br$. — I Br 1 $h = \frac{1}{4} br$. Axillary triangular with very concave distal margins forming an acute distale angle, $h = \frac{1}{2} br$. Br-segments spiny and bent outwards. Arms X, 10 mm. P_1 7 T, 2,5 mm. P_2 absent. P_3 without a comb.

Sp. 4 and *5* perhaps young *Comatella maculata* (or *stelligera*).

Sp. 6 (St. 61) C. XV 9—12; 2—3,5 mm. — R-s $h = \frac{1}{4} br$. I Br 1 $h = \frac{1}{3} br$. Axillary $h = \frac{1}{2} br$. Syzygies as in *Sp. 1* (St. 45). Arms X, 20 mm. — P_1 with 9 sparse T. $P_2 - P_4$ lacking. Mouth central. Disk 2 mm., dark-brown, pentagonal. Anal funnel small.

Young *Comaster serrata*. the two last ones probably *C. delicata grandis*.

Sp. 1 (St. 45) C. XIV 9; 2 mm. R-s $h = \frac{1}{4} br$. I Br 1 $h = \frac{1}{3} br$. Arms X, 10 mm. Br-segments strongly serrate and bent outwards. P_1 (and P_2 if not absent) with a short high comb; P_3 and P_4 lacking. Mouth central. For the rest like *Sp. 3* of *Comaster serrata*.

Sp. 2 (St. 47) C. XIII 9; 2,5—3 mm. 3^d and 4th segments $L = 2\frac{1}{2} \times \text{br.}$

Arms X, 15—20 mm. The arm-bases rather serrate. Between Br 1 and 2 a close synarthry. Syzygies with an interval of 3 oblique articulations. P₁ (and P₂ when present) with a short, high comb of 4—5 T. P₃ lacking. No distal pinnules with combs

Mouth central. Disk 1,2 mm. Anal funnel short, wart-shaped; the anal interradius with calcareous plates in the skin, but no papillæ.

Sp. 3 (St. 44) C. XIII 9—10; 3—4 mm. 3^d—5th segments $L = 2 \times \text{br.}$ — R-s $h = \frac{1}{7} \text{ br.}$ I Br 1 $h = \frac{1}{3} \text{ br.}$, laterally free, articulating closely with the axillary, which is pentagonal $h = \frac{2}{3} \text{ br.}$ Br 1 basally united inside. Syzygies as in *Sp.* 2 (St. 47) Arms X, 22 mm. Br-segments rather long, distally somewhat bent outwards and spiny. Proximal parts of the arms well separated. Disk reaching to Br 2. P₁ 21 (5 large T) 2,5 mm. The height of the teeth $= \frac{1}{3} \times$ the br of pinnular. P₂, P₃ and sometimes P₄ absent. Pinnulars very spiny. Distal p. 14; 3 mm. (The 3^d and following segments $L = 4 \times \text{br.}$). No combs on the distal p.

Disk 3 mm. Anal cone subcentral, swollen, papillated.

Young forms of *Comantheria* (doubtful whether *sp.* 2 belongs to this genus).

Sp. 1. (St. 45) C. XIV 11—17; 3—6,5 mm. 4th segment the longest, $L = 1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2} \times \text{br.}$ From the 7th segment a dorsal prominence fixed a little before the distal margin. Opposing spine $h = \frac{1}{3}$ of the br of the segment, coarser and more pointed than the preceding ones. Cirri from the dorsal whorl considerably more tender.

R-s $h = \frac{1}{7} \text{ br.}$ I Br 1 $h = \frac{1}{3} \text{ br.}$, laterally free, a weak synarthrial tubercle with the axillary, which has the $h = \frac{1}{2} \text{ br.}$ with somewhat concave distal margins. Syzygies 3+4, 11+12, 16+17 etc. with an interval of 4 oblique articulations. Br:s 1 united inside to $\frac{2}{3}$. Arms X, broken, 15 mm.+. The arm-bases tolerably smooth, after Br 7 with the distal margins a little bent outwards and spiny. Breadth of the arms proximally 0,6—0,8 mm.

P₁ 27 (9—11 rather low, triangular T, $h = \frac{3}{4}$ of the segment) 5,5 mm. P₂ 6 T; 3 mm., P₃ rudimentary, P₄ without a comb 11; 1,5 mm.

Disk 4 mm. Anal tube chimney-shaped, 1.5 mm., subcentral. The skin smooth, without papillæ. Mouth somewhat marginally displaced.

Sp. 2 (St. 45) C. XIX 9-12; 2-4.5 mm. — B-s visible in the corners. R-s $h = 1/5$ br. I Br 1 $h = 1/2$ br. Arms X, 25 mm. The distal borders of the axillaries spiny and bent outwards. Syzygies 3 + 4, 11 + 12, distally with an interval of usually 3 oblique articulations. Distal Br-segments $L = 2 \times$ br, strongly hour-glass-shaped and spiny.

$P_1 \pm 20$ (about 5 coarse T) 3 mm., P_2 absent, P_3 without a comb 7; 1.5 mm. Distal p. \pm ; 2.2 mm. — Disk 2.5 mm. Anal funnel 1 mm. Mouth somewhat dislocated.

A young form of *Vania*.

Sp. 1 (St. 50) C. XII 9; 2-3 mm. slender, in a single whorl 4th segment the longest $L = 2 \times$ br. Cd low, flattened. — R-s narrow bands $h = 1/5$ br. I Br 1 $h = 1/2$ br, laterally free. Axillary $h = 2/3$ br, pentagonal. Primipostaxillaries well separated inside. The synarthry between Br 1 and 2 usually rather similar to the syzygy between Br 3 and 4. Br 1 and 2 $h = 1/3$ br, the outside somewhat broader. Arms X, 12 mm. Br-segments serrate, only slightly overlapping. Syzygies with an interval of 3 oblique articulations, — $P_1 \pm 6$ T, P_2 and P_3 rudimentary or lacking. The following pinnules without a comb. Distal p. 2.5 mm. — Disk 2.5 mm., reaching to Br 1. Anal cone smooth, 1.2 mm., sharply set off with a papilla whorl round the opening. Mouth marginally displaced. Colour yellow-brown.

Unrecognisable Comasterid young forms.

Sp. 1 (St 47) C. XVIII 12-17 (usually 15-17), 4-8 mm. Opposing spine a little longer than the preceding ones. — Axillary $h = 1/2$ br. II Br-s in a regenerate 2 (2 cases). Arms XII, 30 mm. Syzygies with an interval of 3 or 4 oblique articulations. — P_1 - P_4 with a comb, P_2 and P_3 often very small (1-2 mm.) $P_1 \pm 26$ (6-7 T) 5.5 mm. Distal p 12-13; 4.5 mm.

Disk 3.5 mm. Anal tube papillated, subcentral, narrow, 2 mm. sharply set off from the disk. Mouth marginal.

Differs by the formation of the disk from the above-described *Comatellas*.

Sp. 2 (St. 54) Cd 0.8 mm. C. XIII 9-10; 2.5-3 mm. 3^d segment $L = 2^{1/4}$ br.

R-s $h = 1/4$ br, partly concealed by the angular Cd. I Br 1 $h = 1/2$ br. Axillary $h = 2/3$ br. Distal margins somewhat concave. Arms X, 15 mm. Br 1 $h = 1/2$ br, contiguous in pairs inside, not broader on the outside. Br 2 $h = 1/2$ br, a little broader on the outside. Syzygies usually 1-2, 3+4; Distally with an interval of 3 oblique articulations. Br-segments long, serrate and bent outwards. — P_1 with 8 heart-shaped T. P_2 and P_3 wanting. Distal p. 3 mm. — Disk 2.2 mm. Anal funnel 1 mm. I R calcareous plates.

Sp. 3 (St. 47) C. XI 8-9; 2.5-3 mm. — R-s $h = 1/4$ br. I Br 1 $h = 1/2$ br. Axillary $h = 2/3$ br. Arms XI. II Br-s 4 (1 case). The segments very serrate.

P_1 with 4-5 T. P_2 missing — Disk coarsely granulated with calcareous grains and plates. Small oral plates. Probably a *Comaster*.

Sp. 4 (St. 47) C. XIII 10-11; 2-2.5 mm. — R-s $h = 1/2$ br. I Br 1 $h = 2/3$ br. The arm-bases serrate. Arms X, ± 10 mm. — P_1 with some few T (probably 5 to 6) rolled to a close globe. P_2 - P_4 wanting. — Mouth central. Disk 1.3 mm. Orals!

From St. 45 there are, besides, 9 small young *Comasterids*. Some of these specimens apparently belong to the sub-family *Comasterinae* (*Comaster* and *Comantheria*), but some of the others are practically impossible to determine either with regard to subfamily or to genus.

Sp. 5 (St. 45) C. XIV, 9, strongly bent. Arms XII, 15 mm. II Br-s 4. III Br-s 2. P_1 and P_2 and perhaps P_3 with a short comb. Mouth central. Anal cone smooth (a *Comantheria* or *Comaster*).

Sp. 6 (St. 45) C. XII 8-9; ± 2 mm. 4th segment the longest $L = 3 \times$ br. 5th and 6th segment $L = 2 \times$ br. Antepenultimate one $L = 1\frac{1}{2} - 2 \times$ br. — R-s band-shaped, $h = 1/4$ br. I Br 1 $h = 1/3$ br, laterally free. II Br-s : 4. Arms XII, 14 mm. — P_1 with 6 high T, 3 mm. P_2 and P_3 usually absent. P_a with 4 T. No distal combs on the distal pinnules. — Mouth and anus subcentral. Disk 2 mm. Anal funnel papillated. — (Probably as sp. 7 a *Comaster*).

Sp. 7 (St. 45) C. XII 9—10; 2,5—4 mm. Arms X, 20 mm. somewhat smoother than in the preceding sp. — P_1 7 T, P_a 6 T, P_2 and P_3 wanting. — Mouth a little displaced. Anal cone strongly papillose.

Sp. 8 (St. 45) C. XIV 8—11; 2,5—4 mm. Arms XII, 16 mm. II Br-s 2. — P_1 7 T. P_2 and P_3 missing. Anal cone papillated.

Sp. 9. (St. 45) C. XVII 10—14; 3—4,5 mm. 3^d and 4th segment, $L = 2$ br. Arms X, 15 mm. of serrate type. P_1 5 high T. P_2 and P_3 absent.

Sp. 10 (St. 45) C. IX 7—9; 2—2,5 mm. Arms X, 12 mm. — $P_1 \pm 6$ T. P_2 and P_3 wanting. Mouth central.

Sp. 11 (St. 45) C. XVI 10. Arms X, 10 mm. P_2 — P_4 wanting.

Sp. 12 (St. 45) C. XVII 8—9. Arms X, ± 15 mm. P_1 9 T. P_2 missing, P_3 without a comb. — Anal tube smooth. — Perhaps *Commissia ignota minuta*.

Sp. 13 (St. 45) C. XIII 9—10; 3 mm. Arms X, broken. R—s concealed. — $P_1 \pm 6$ T, P_2 rudimentary.

Above I have brought together all the young Comasterids from the Bonin Island that I have not been able without doubt to identify to a certain species. With regard to some specimens, however, I am rather sure as to which species they belong by comparison with somewhat larger, systematically determinable specimens from the same locality. (This is for instance true of *Comaster serrata* sp. juv 1).

At the same time as the investigation made above I also tried to establish some characteristics of systematical value for the determination of the young Comasterids. Even a hasty reflection tells us at once that this is a very difficult task. For the systematical characteristics in the Comasterids, as in all Comatulids, are taken from the length, breadth, appearance and order of magnitude of the calcareous ossicles which combine to constitute the animal, and these are very different in young specimens and in full-grown ones. — If guided by the figures and statements given above one examines the characters, the following facts are evident.

1) The cirri in all young forms correspond to a type about the same as the one in *Comaster serrata* or *Comatiella brachycirra*, that is to a number of segments of ± 10 , where the 3^d and 4th segments are the longest, $L = 2$ or $3 \times$ br.

2) The higher division-series, which are an important characteristic of classification, have not yet appeared.

3) The proximal ossicles of the arm become longer compared with the breadth, the younger the animal is. This is also applicable to a still greater extent to the distal Br-segments. The distal ends of the Br-segments are serrate and bent outwards.

4) The comb on the proximal pinnules, a very reliable characteristic in adolescent and full-grown specimens, tends at an early stage to a uniform type and therefore all small young forms have combs with a few, high, rather large teeth. The young forms of the *Comaster*-genus only have combs on the proximal pinnules.

5) In the very earliest stages the disk has a central mouth and a marginal anal tube.

As a general rule one can say that young *Comasterids* which have a pinnule-gap on the proximal arm-parts (here of course excluding *Comasterids* of the *Comatilia* type) are impossible to determine even with tolerable certainty.

The comparison between the appearance of the disk shows, however, that here perhaps, one might get certain fixed points for the judgement of the systematical position of the animal.

The young of the species of *Comatella* and large *Comissia* have a central or subcentral mouth and a short, narrow, inconspicuous anal tube. The skin is tightly stretched on the ventral side between the arms so that the disk gets a characteristically lean appearance.

The young forms of *Comissia ignota minuta* are also in the early stages recognized by having the ambulacral furrows surrounded with cushion-shaped slopes, probably marking the extension of the gonads on the disk, and this condition together with the characteristic proximal Br-ossicles (already at an early stage very short), the coarse pinnule-bases, soon thickened by the genital glands, and the smooth proximal arm-parts make them fairly easy to distinguish from young forms of other species in the collection.

The young forms of *Comaster* and *Comantheria* in the early stages also have a »fat» (swollen) disk. The anal tube is large, thick and coarse, a little swollen, often (especially in *Comaster delicata grandis*) strongly papillated or plated. In *Comaster* — species the length-growth of the anal tube soon ceases, and in larger individuals the tube

gets a characteristic wart-shaped appearance, while in *Comantheria* it continues to lengthen to a long, large chimney. In smaller young forms the mouth is central, but except in *Comaster serrata* it is soon dislocated marginally.

The young of *Vania* has, if my determination is correct, a rather long unswollen anal cone, and a tolerably »lean» disk.

Naturally the fixed points obtainable by an examination of the disk, are only to be used together with the other characteristics which are found. If, however, in the comparison and systematizing of the Comasterid youngs one takes into consideration the appearance and formation of the disk, I believe that we will be able to predict with greater probability than otherwise to which species or genus the young Comasterid in question might be referred.

Zygometridae A. H. CLARK.

Catoptometra A. H. CLARK.

C. Hartlaubi A. H. CLARK.

Fig. 48—51.

Syn: *Antedon Hartlaubi* 1907 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 33, p. 72;

Zygometra Kochleri 1907 A. H. CLARK Smiths. Misc. Coll. Vol. 50, p. 339;

Catoptometra Hartlaubi 1908 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 34, p. 317; 1912 Crin Ind. Ocean, p. 106; 1915 Monograph pp.; Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 214; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 63.

From St. 5 = 1 specimen.

Sp. 1 Cd. large, flattened, a little deepened in the centre, with calcareous granules which towards the margin are arranged in about 10 rays. Diameter 5 mm. free dorsal pole 3,5 mm. h = 0,8 mm.

C. XXVIII 14—15 (D) 16—17 (V), 11—17 mm. in two close, alternating whorls, 2^d segment cubical, 3^d a little longer, slightly hour-glass-shaped (= most of the following cirrals), 5th—7th segment L = 2 br, then shorter again L = 1 1/2 — 1 1/4 br, without dorsal spines. Penultimate segment L = 1 1/5 br with dorsal medially placed, very weak opposing spine, h about 1/5 of the br of the segment. Terminal claw narrow, somewhat curved, longer than the preceding segment.

R—s and I Br 1 concealed by the overlapping Cd. The distal margin of I Br 1, however, visible, in syzygial articulation with I Br 2, which is triangular, $h = \frac{1}{4}$ br. I Br-s 1 laterally united. II Br-s : 4. Primipostaxillaries united inside, twice as broad on the outside. II Br 1 $h = \frac{1}{2}$ br, forms with the somewhat broader II Br 2 a projecting synarthrial tubercle. An inconspicuous similar one also between Br 1 and 2. Arms XX (or XIX, one arm broken in II Br 3 +), 70 mm. Br 1—8 discoidal. All the distal segments somewhat squeezed together at the middle with the ends furnished with small spines and bent outwards. Proximal segments short. Distal segments $L = \pm$ br. Example of syzygies: 3 + 4, 11 + 12, 21 + 22, 30 + 31 . . distally with an interval of about 7 oblique articulations. 17 segments per cm. (15, if the syzygial pairs are counted as units).

P_{II} 29, ± 7 mm. (7 first segments coarse, then more narrow). P_1 33; 13 mm. (The segments a little longer than broad, 2^d—4th with small prominences resembling those on the proximal pinnules of, for instance, *Comatula pectinata*, but very much less developed). P_2 of about the same length. $P_3 \pm 10$ mm., $P_a \pm 20$; 5,5 mm. Genital pinnules 12 mm. Distal p. 20; 8 mm. (Basal pinnulars especially on proximal p. with small, spiny prominences). 3 pairs of small sacculi per segment. — Disk thrown off. Colour (in formol) white.

Closest to *C. Hartlaubi*, from which it differs by the occurrence of an opposing spine and the pinnules which, compared with the arm-length, are somewhat longer.

Catoptometra magna var. minor n. var.

Fig. 46, 47.

From St. 46 (1), 47 (3), 59 (3), 61 (1) = 8 specimens.

Sp. 1 (St. 59) Cd flat, dorsal free pole granular, 3,5 mm. C. XXV 20—21; 17—22 mm. in a partly double whorl. 1st and 2^d segments short, 3^d cubical, 4th a little longer, 5th and 6th segment $L =$ about $1\frac{1}{3} \times$ the distal br, the length then slowly decreasing. Proximal segments hour-glass-shaped with the distal ends especially widened. Usually no dorsal spine except on the antepenultimate segment. This cirral $L = 1\frac{1}{4}$ br. Opposing spine inconspicuous $h = \frac{1}{4}$ of the br of

the segment. Terminal claw pointed. L about the same as the preceding segment.

R—s very narrow bands, partly hidden by the able-formed Cd. I Br 1 laterally free $h = \frac{1}{4}$ br, in syzygial articulation with I Brax, which is low pentagonal $h = \frac{1}{3}$ br. II and III Br-s: 2. Arms XXIV, broken. II Br 1 and 2 with a weak synarthrial tubercle. Ex. of syzygies: 3 + 4, 8 + 9, 14 + 15.. then with an interval of 4 to 5 oblique articulations. Br 1—10 discoidal, then oblique segments, distally with small spines and somewhat overlapping.

P_1 22; 5,5 mm. P_2 36; \pm 10 mm., P_3 40; 13 mm.; P_5 29, \pm 9 mm., P_{10} 15; 6 mm. P_1 to about P_7 with 1st to 5th or 6th segments provided with large prominences, $h = \frac{1}{3}$ — $\frac{1}{4}$ of the br of the segment. Distal p. \pm 20; 6 mm. Proximal segments distally somewhat serrate and widened.

Disk incised, largest diameter 13, shortest 8 mm., with fine calcareous granules. Mouth central.

Sp. 2 (St. 59) Cd as before, 4 mm, dorsally with small papillæ. Free dorsal pole 3 mm. C. XXIV 15—19; 9—11 mm. Opposing spine $h = \frac{1}{3}$ of the br of the segment.

II and III Br-s: 2. Arms partly broken, XXI (perhaps still II) arms, 60 mm. I Br 1 $h = \frac{1}{3}$ br. Lateral borders of the I and II Br series a little spiny. Syzygies with an interval of 4 to 5 oblique articulations.

P_1 22—24; 3,5—4 mm. P_2 (in a regenerate) 25; 5 mm., P_4 22; 6 mm. The carination on the proximal p. only from P_1 — P_3 . Distal p. 4,5 mm. (The length of the segments = $3 \times$ br). — Disk 6 mm. Anal cone 1,7 mm.

Sp. 3 (St. 59) Cd 5 mm., free dorsal surface 3,5 mm., radially furrowed. C. XXII 19—20; 16—18 mm, in a double whorl. — Arms XXIII, broken. I Br 1 $h = \frac{1}{3}$ br, laterally free. I Brax $h = \frac{1}{3}$ br. II and III Br-s 2, in one case, however, II Br 3 (1—2—3, without a p.). Proximal segments with 3—4 small lateral knots, which on I Br 1 ornament the whole proximal margin, a similar ornation, though less distinct, on II and III Br 1. Primipostaxillaries grown together inside in $\frac{3}{4}$. — P_1 25, \pm 5 mm.

Disk incised. Longest diameter 12, shortest 6 mm.

This specimen differs from the preceding ones by its lighter colour and by the ornation of the proximal ossicles.

To this species belong a number of young forms with X—XII arms, of which I describe a specimen from St. 46:

Sp. 4 (St. 46) Cd almost hidden by Cirri. C. XXIII 10—14; 3—7 mm. 1st segment short, 2^d cubical and hour-glass-shaped, 3^d segment $L = 1\frac{1}{2}$ br, 4th $L = 2 \times$ br, strongly hour-glass-shaped, then shorter segments. Antepenultimate one $L = 1\frac{1}{4}$ br. Opposing spine $h = \frac{1}{3}$ of the br of the segment. Terminal claw a little shorter than the preceding segment.

R—s rounded, smooth, disto-laterally well separated. I Br 1 $h = \frac{1}{3}$ br, united with I Brax in syzygial articulation. I Br 2 $h = \frac{1}{2}$ br. Example of syzygies: 3 + 4, 10 + 11 etc. with an interval of 6 oblique articulations. II Br-s 2 (a very young regenerate). Arms XII, 35—40 mm., slender. The segments smooth, rather long, and a little hour-glass-shaped. The arm-bases well separated, leaving broad spaces of the perisome visible.

P_1 22; 4 mm., P_2 20; 4,2—5,5 mm., P_3 19; 4,3 mm., P_4 15; 3,8 mm., P_6 3 mm. Basal segments with weak prominences. The L of the distal segments = $2 \times$ br. Distal p. 18; 5 mm. with very long pinnulars, $L = 4-5 \times$ br.

Disk incised, with calcareous granules at the ambulacral furrows. Anal cone long, narrow, 1,5 mm.

Sp. 5 (St. 47) I Br 1 $h = \frac{1}{2}$ br. Syzygies with an interval of 3—4 oblique articulations. Otherwise as for the following sp. see the scheme p. 27.

Sp. 6 (St. 47) I Br 1 $h = \frac{3}{4}$ br. Syzygies with an interval of 4—8 oblique articulations.

Sp. 7 (St. 47) I Br 1 $h = \frac{1}{2}$ br. Syzygies with an interval of 6 oblique articulations. P_6 14; 3,5 mm. Disk »lean«, incised 2—3 mm. Anal funnel 1,5 mm.

Sp. 8 (St. 61) I Br 1 $h = \frac{1}{2}$ br. Syzygies with an interval of 5—7 oblique articulations. In these small specimens the prominences on the proximal p-s are indiscernible.

The above-described specimens differ from *C. magnifica* by having fewer arms, shorter cirri, and very much shorter proximal pinnules. These differences are also to be found in specimens in Dr. MORTENSEN'S collection, and therefore I wish to separate the form as a new variety: *minor*.

Eudioerinus P. H. CARP.**Eu. indivisus** (SEMPER).

Fig. 52.

Syn.: *Ophioerinus indivisus* 1868 SEMPER Arch. Naturgesch. I, p. 68.*Eudioerinus indivisus* 1882 P. H. CARPENTER Journ. Lin. Soc. (Zool.) Vol. 16, p. 495; 1888 Chall. Rep. Vol. 26 p. 81 ff.; 1912 A. H. CLARK Crin. Ind. Oc., p. 102; 1915 Monograph. p. 37, 42, 50; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 65.? *Eudioerinus granulatus* 1894 BELL. P. Z. S. p. 397; 1913 A. H. CLARK Smiths. Misc. Coll. Vol. 61: 15, p. 21

From St. 59: 1 specimen.

Sp. 1 Cd 3 mm., free dorsal pole 2 mm., flattened, with a somewhat arched dorsal surface.C. XIX 19—21; 11—15 mm. in a single or double whorl. 1st—3^d segments short, 4th—7th L = 1½ — 2 the median br, like the following cirrals strongly hour-glass-shaped. The distal segments shorter. Antepenultimate one not very much longer than broad (L = 1⅕ br). 14th—18th segments less swollen at the ends. Opposing spine h = ⅓ of the br of the segment. Terminal claw somewhat longer than the preceding segment.R—s nearly concealed, the visible border adorned with small knots. 1 Br 1 + 2 with a weak median prominence. The arm-bases smooth, without longitudinal prominences as in *Eu. variegatus*. A prominence between Br 2 and 3 formed in the oblique articulation on the right. A similar knot on the left between Br 4 and 5, and one more on the right between Br 5 and 6, then less pronounced. Arms V, broken. Breadth of Br 1: 1,9 mm. Ex. of Syzygies: 3 + 4, 8 + 9... After Br 10 oblique articulations. Out to Br 4 small, ventro-lateral rows of knots.P₁ 10; 4 mm. P₁ 10; 4 mm. P_a 10; 7,5 mm. P₂ 11; 8 mm. These p. extraordinarily coarse and thick, sharply triangular; 3^d segment on P₁ and P_a about cubical. The distal segments, L = 1¾ br, without distal, spiny borders. P_b and P₃ much more slender, the latter 17; 8 mm. L of the segment 2½ — 3 × br.

Disk thrown off, probably about 3 mm. Colour yellow-brown.

This specimen is closest to *Eu. indivisus*, though the longest cirrals are rather short to belong to this species. Nevertheless it has

considerably longer cirri than the above-mentioned species and in this respect approaches *Eu. granulatus* BELL which, according to A. H. CLARK, is synonymous with the first-mentioned species. On the figure of *Eu. granulatus* by BELL P_b (? P_2 , for, though the arm is drawn from the left side, still the pinnules stand on ossicles corresponding to P_1 and P_2 ; a faulty drawing?) has 26 segments and has a length of 22 mm. P_a (P_1) has 16 segments. If the figure is correctly drawn, the existence of *granulatus* ought to be authorized at least as a variety.

Eudiocrinus gracilis var *pulchellus* n. var.

Fig. 60—63. Photo 5.

From St. 45 (5), 46 (2), 47 (2), 48 (1), 53 (1) = 11 specimens.

Sp. 1 (St. 46) Cd flattened 1,5 mm., free dorsal pole 1 mm.

C. XIX 13—15; 5,5—6,5 mm. 1st and 2^d segments shorter than long, 3^d L = br, 4th—6th segment L = $\pm 2 \times$ the median br, then the segments shorter again. Antepenultimate cirral L about = br.

R—s smooth I Br 1 h = br. Br-s not overlapping even in distal segments. The proximal muscular articulations dark-coloured. From Br 7 oblique joints with a couple of dark longitudinal bands. Syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 13 + 14 etc. with an interval of 3 oblique articulations. Arms V, 40 mm. Breadth of Br 1 = 0,8 mm.

P_1 10; 2,5 mm. P_1 10; 3 mm. P_a 10; 4 mm., P_2 12; 4 mm. (2^d segment of P_a and P_2 L not fully as large as br, 3^d segment somewhat longer than broad — L = $1\frac{1}{3}$ — $1\frac{1}{2}$ br — distal segments L = $3 \times$ br, a little widened at the distal ends but only slightly spiny), P_b 11; 3,5 mm., P_3 12; 3,5 mm. Distal p. 15—16; 5,5 mm. (The L of the pinnulars = 3 — $4 \times$ br. The last segments with dorsal hooks. 3 pairs of large sacculi per segment).

Disk thrown off, has been about 2 mm.

Sp. 2 (St. 46) 3^d segment on P_1 and P_a L = $1\frac{1}{3}$ br. Anal funnel 0,8 mm. Disk 1,5 mm. For further details see the table as for the following specimens.

Sp. 3 (St. 45) Cd 1 mm., free dorsal pole 0,5 mm. 3^d segment of P_1 and P_a as in *Sp. 2*. Disk 2 mm.

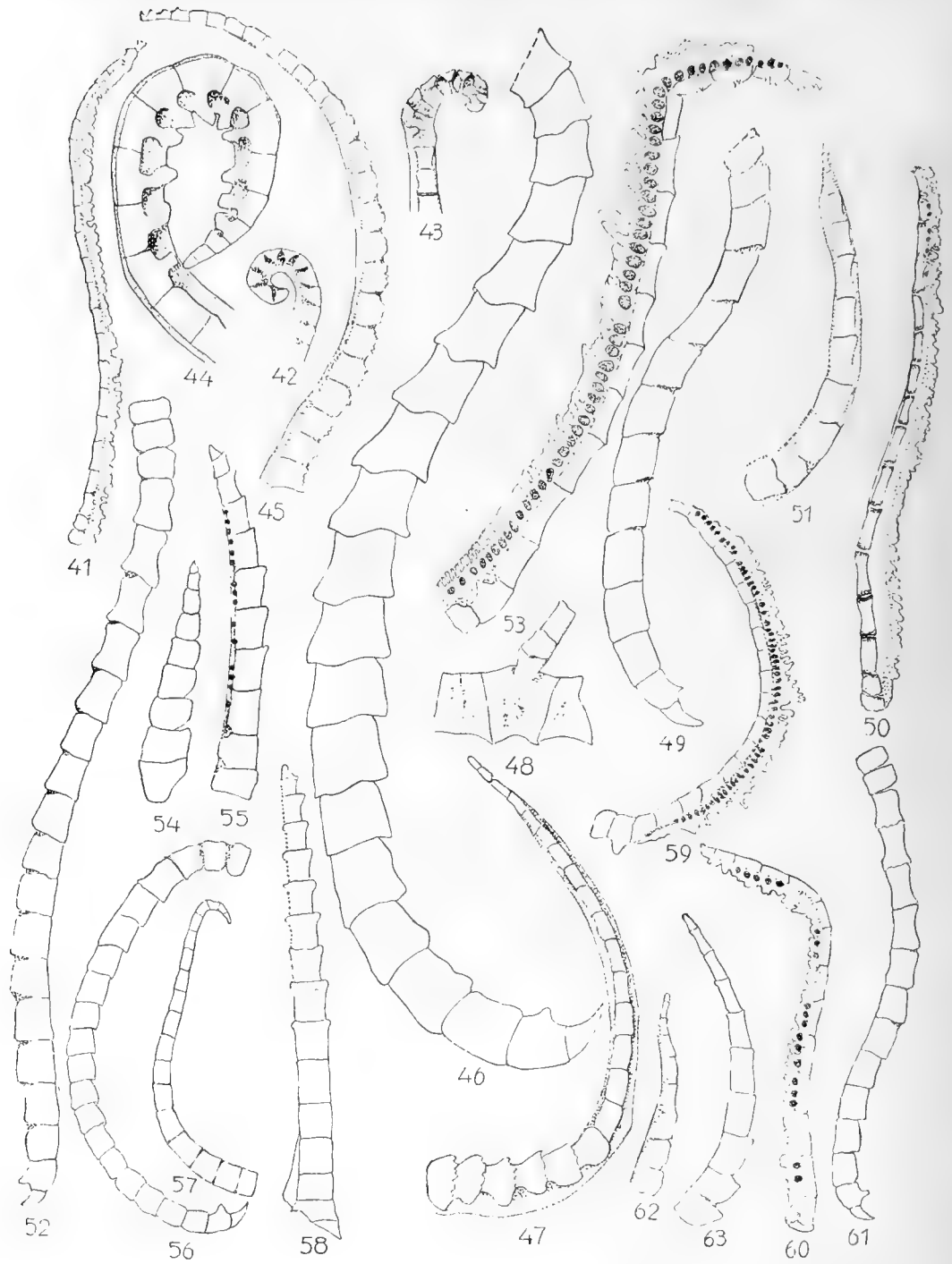


Fig. 41-43. *Comanthus parvicirra* a *comasteripinna* (St. 40) 41) Distal pinnule $\frac{9}{1}$. 42) PII; the tip with 9 T., $\times 17\frac{1}{2}$, 43) The tip of P₁₃ also with 9 T. (observe the supporting ridges), $\times 17\frac{1}{2}$; 44, 45 *Comanthus parvicirra* β *comanthipinna* (St. 40), 44) The tip of P₁^{14/1}, 45) Distal pinnule; coarse, short segments $\frac{14}{1}$; 46, 47 *Catoptometa magnifica minor* (St. 59), 46) Cirrus $\frac{9}{1}$, 47)

Sp. 4 (St. 45) The segments of distal pinnules $L = 3 \times \text{br.}$ Disk 2 mm.

Sp. 5 (St. 45) Disk as in Sp. 4. — Sp. 6 (St. 45) the proximal border of I Br 1 very slightly bent outwards. P_2 and P_3 with rather serrate distal segments. Disk 2 mm.

Sp. 7 (St. 47) Cirral 5 $L = 2 \text{ br.}$ hour-glass-shaped. 3^d segment on P_1 and P_a $L = 1\frac{1}{3} \text{ br.}$ P_c 12—13; 4,5 mm. Distal pinnulars (on the distal p) $L = 3 - 3\frac{1}{2} \times \text{br.}$ Disk 2 mm.

Sp. 8 (St. 47). The cirrals a little shorter ($L = 1\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} \text{ br.}$). 3^d segment of P_a $L = 1\frac{1}{2} \text{ br.}$ Disk 1,8 mm.

Sp. 9 (St. 48). 3^d segment of P_a $L = 1 - 1\frac{1}{4} \text{ br.}$ The segments of the distal p. $L = 2 \times \text{br.}$

From St. 45 and 53 there are 2 very small specimens with very serrate arm-bases. Sp. 6 (St. 45) presents a transition form to these ones and shows that they are young forms of the above-described species.

Description as follows (for statements as to the figures see the table):

Number of Specimens and Stations	Cirri			Arms L	P_1		P_1		P_a		P_2		P_b		P_3		Dist. p.	
	N	S	L		S	L	S	L	S	L	S	L	S	L	S	L	S	L
Sp. 1 (St. 46)	XIX	13—15	5,5—6,5	40	10	2,5	10	3	10	4	12	4	11	3,5	12	3,5	15—16	5,5
Sp. 2 (St. 46)	XVII	10—14	4,5—6,5	30	8	2	8	2	10	3,5	10	3,2	12	—	—	—	14	5
Sp. 3 (St. 45)	XIX	13—15	4—6,5	35	7—8	2	9	2,5	11	3,5	—	—	12	—	—	—	18	6
Sp. 4 (St. 45)	XV	14—15	5—6,5	40	8	2,2	9	2,7	10	4,5	11	4,5—5	—	—	—	—	18	6,2
Sp. 5 (St. 45)	XVIII	12—13	3,5—5	25	9	2,2	9	2,4	10	3,3	10	3	12	3,2	13	3,2	—	—
Sp. 6 (St. 45)	± XX	13—14	4—5	23	6—7	1,8	8	2,2	9	3,2	9	2,7	10	3	11	3,5	—	—
Sp. 7 (St. 47)	XVI	13—16	6,5—8	40	8	2,5	8	—	—	—	13	5	—	—	—	—	18	7
Sp. 8 (St. 47)	XVI	12—15	5—6	35	7	2	8	—	13	4,2	12	—	12	4	—	—	—	—
Sp. 9 (St. 48)	XIV	14—16	6—7	30	8	2	9	2,2	13	3,7	—	—	11	3,5	—	—	14	4,5
Sp. 10 (St. 45)	XX	11—12	2,5—3	± 20	6	1,5	6	—	8	2	—	—	—	—	—	—	—	—
Sp. 11 (St. 53)	XV	8—12	2—4	10 +	6	1,2	7	1,2	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Genital pinnule $1\frac{1}{1}$; 48—51 *Catoptometra Hartlaubi* (St. 5), 48) Some Br-segments and the base of a distal pinnule $1\frac{1}{1}$, 49) Cirrus $9\frac{1}{1}$, 50) Distal pinnule (the tip missing) $1\frac{1}{1}$, 51) Genital pinnule (observe fewer and stouter segments than in the distal pinnule; fig. 48 from the intermediate territory) $1\frac{1}{1}$; 52) *Eudiocrinus indivisus* (St. 59) Cirrus $9\frac{1}{1}$; 53—56 *Eudiocrinus Loveni* (Sp. 1) 53) Distal pinnule $1\frac{1}{1}$, 54) P_1 (observe the peculiar form of the basal segments) $1\frac{1}{1}$, 55) P_a $1\frac{1}{1}$, 56) Cirrus $9\frac{1}{1}$; 57—59 *Cenometra bella* (St. 49) 57) P_1 $9\frac{1}{1}$, 58) P_2 ($1\frac{1}{2}$ of the first segment cut away) $9\frac{1}{1}$, 59) Distal pinnule (4 pairs of sacculi per segment, the last pinnular a little incised) $9\frac{1}{1}$; 60—63 *Eudiocrinus gracilis pulchellus*, 60) Distal pinnule $1\frac{1}{1}$, 61) Cirrus $1\frac{1}{1}$, 62) P_1 $1\frac{1}{1}$, 63) P_a $1\frac{1}{1}$.

Sp. 10 (St. 45) 3^d cirral: $L = 1\frac{1}{4} \times$ the distal widened part of the segment. 4th segment, strongly hour-glass-shaped, $L = 2 \times$ the diameter of the distal part. 5th and 6th segment proximally a little narrower. 7th to antepenultimate one laterally compressed $L = 1\frac{1}{2}$ br. Opposing spine sharp, $h = \frac{1}{2}$ of the br of the segment. Terminal claw pointed, curved, somewhat longer than the preceding segment.

R a narrow band with a median prominence, separated at the corners by the B-s. I Br 1 proximally bent outwards with a median keel, $h = \frac{1}{3}$ of the thickness of the segment, laterally viewed. A similar prominence on the distal part of I Br 2 and Br 1 and 2, where laterally, however, it has no distinct border. The ends of the segments a little bent outwards. From Br 8 oblique joints. Ex of syzygies: 3 + 4, 13 + 14 and then with an interval of 3 (to 4) oblique articulations. Arms V, ± 20 mm., distally tolerably smooth.

2^d to 4th pinnulars of P_1 : $L = 1\frac{1}{2}$ br. 3^d to 5th segment of P_a $L = 2 \times$ br. The distal ends of the segments spiny and somewhat bent outwards. The pinnulars of the distal pinnules very long ($L = 4 - 5 \times$ br). — Disk 1 mm. Colour (in spirit) yellow-white. The saeculi are dark. The anal cone smooth, subcentral. Mouth subcentral.

Sp. 11 (St. 53) Strong prominences on the proximal ossicles as in *Sp. 10*. 3^d segment of P_a $L = 1\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4}$ br.

The two last-described specimens are of an ornate type but evidently young forms of the preceding specimens.

The full-grown specimens differ from *Eu. gracilis* by their smaller size, by having more but shorter cirri, and by P_1 and P_2 being not much longer or more slender than the rest of the proximal pinnules.

Eudiocrinus Loveni n. sp.

Fig. 53—56. Photo 6.

From St. 47 = 1 specimen.

Sp. 1 Cd 1,8 mm. C. XX 20—21; 9—10 mm. 1st and 2^d segments shorter than long. 3^d cubical, 5th—7th $L = 1\frac{1}{4} \times$ br. The segments are smooth, slightly hour-glass-shaped, rather coarse. Opposing spine $h = \frac{2}{3}$ of the br of the segment. Terminal claw curved, $L =$ the preceding segment.

R—s narrow, smooth bands, $h = \frac{1}{5} br$. I Br 1 + 2 $h = br$, as Br 1 and 2 with ventro-lateral, rather pronounced ledges. Br 1 $br = 1,4 mm$. Syzygies: 3 + 4, 8 + 9, 12 + 13 etc. with an interval of 3 oblique articulations. Arms V, 40—45 mm. smooth.

P_1 9; 3,5 mm. (1—3 or 5 segments with a distally directed crista. 1st segment much decreasing proximally, 2^d segment broadest. The h of the crista = $\frac{1}{3}$ of the br of the segment, compare the figure), P_1 10; 4 mm., similar to the preceding, P_a 11; 5 mm. (3^d segment $L = 1\frac{1}{2} br$, distal segments with a somewhat spiny border, $L = 2 - 2\frac{1}{2} br$), P_2 11; 5 mm., P_b 12; 5 mm., P_3 11; 5 mm. (with a small spiny garland on the distal segments). Distal p. 16—17; 4,5 mm. (the segments' $L = 3 br$, the 3 last ones with dorsal hooks; 4 pairs of large sacculi per segment).

Colour: Cirri white. Arms dorsally brown with white transverse spots. The pinnulars whitish, the sacculi dark-coloured (in alcohol).

At first I had some doubt whether this specimen was not only a full-grown specimen of those described as *Eu. gracilis pulchellus*. Nevertheless some differences are of such a nature that I have been obliged to believe that the specimen differs not only by characteristics of age. The most important differences are as follows:

1) The cirrals are short, not very much longer than broad, not at all or only slightly hour-glass-shaped (Cf. *Eu. pinnatus* and *variegatus*). 2) P_1 and P_1 are on the proximal segments provided with prominences that are lacking in *Eu. gracilis pulchellus*. By these prominences it approaches *Eu. venustus*. 3) Further *Eu. Loveni* differs from *Eu. gracilis pulchellus* by the arms which, though of about the same length as in the last-mentioned species, are much coarser, 4) by the more spiny borders of the distal segments of P_2 and P_3 , 5) by the relatively short distal pinnules.

The newly proposed species, which I have called after the late Prof. S. LOVÉN, is thus a peculiar type connected with many species within the genus *Eudiocrinus*.

Mariametridæ A. H. CLARK.

Liparometra A. H. CLARK.

L. grandis A. H. CLARK.

Fig. 85, 86.

Syn: *Himerometra grandis* 1908 A. H. CLARK Wash. Proc. Biol. Soc. Vol. 21, p. 222.

Dichrometra grandis 1909 A. H. CLARK Proc. Biol. Soc. Vol. 22, p. 13; 1912. Crin. Ind. Oc, p. 150.

Liparometra grandis 1913 A. H. CLARK Wash. Proc. Biol. Soc. Vol. 26, p. 143; 1915 Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 214; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 103.

From St. 39 (1), 47 (1) = 2 specimens.

Sp. 1 (St. 39) Cd discoidal, free dorsal pole 2,5 mm. C. XXIX 27—30 (D) 31—38 (V), 16—24 mm. in two close whorls. 1st—3^d segment with a little convex proximal and concave distal margins in lateral view. 4th and the following segments slowly increasing to L = br (at the 15th or 20th segment). No dorsal spine. Opposing spine small, coarse, blunt-ended, h = $\frac{1}{3}$ of the br of the segment. Terminal claw short, coarse, L = the preceding segment.

R—s narrow bands. I Br 1 h = $\frac{1}{3}$ br, in lateral apposition. I Brax low pentagonal, h = $\frac{1}{3}$ br, with concave distal margins. I Br 1 and 2 form a low synarthrial tubercle. II and III Br—s: 2, (III Br—s in 6 cases on the outer sides). Primipostaxillaries united inside. Arms XXVI, 120 mm. The br of Br 1 = 1,6—1,8 mm. Br 2 twice as long on the outside. The first 10 Br-segments rectangular, h = $\frac{1}{2}$ br, then slightly oblique joints.

1st syzygy usually between Br 3 and 4 but often exceptions (see the example). Distally with an interval of 7—12 oblique articulations. Example of arm-division:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{I } 1-2 \\ \text{II } 1-2 \\ \text{III } 1-2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Br } 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 + 9 \dots 20 + 21 \dots 30 + 31 \dots \\ \text{Br } 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 + 9 \dots 18 + 19 \dots 28 + 29 \dots \\ \text{Br } 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 + 6 \dots 21 + 22 \dots 30 + 31 \dots 41 + 42 \dots \end{array} \right.
 \end{array}$$

Example of the distribution of the distal syzygies (from arm 3, in the above-quoted example) .. 30 + 31 ... 41 + 42 ... 52 + 53 ... 65 + 66 ... 78 + 79 .. 90 + 91 .. 101 + 102 ... 109 + 110 .. Distal segments discoidal, short, $L = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ br. Lateral profile rather smooth. 17—18 segments per cm. (16, if the syzygial pairs are counted as units). The arms are very close to one another (interspaces chiefly between I Br 2—Br 4 on the outer side of the divisions).

P_1 (9—)18—21; (4—)11 mm. (the 4th and the following segments slender, $L = 1\frac{1}{2} - 2$ br, like the segments of following pinnules smooth), P_2 19—25; 11—18 mm., P_3 17—20; 14—16 mm. (in a single case only S; 4 mm., is a young regenerate), P_4 14—16; 10—13 mm., P_8 14; 6,5 mm. Distal p. ± 20 ; 8,5—10,5 mm. (The L of the segments = $2 \times$ br).

Disk strongly incised, smallest diameter 5, largest 7 mm. The soft parts do not cover the whole ventral surface of the division-series. Colour: violet with lighter and darker transverse bands on the arms.

S.p. 2 (St. 47) C. XXIII (11—)14—17; (3,5—)5,5—7 mm. 5th—7th segments longest, $L = 1\frac{1}{2}$ br. No dorsal spines; the segments are, however, laterally compressed, forming a very weak carina. Opposing spine: $h = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ of the br of the segment.

R—s as before. I Br 1 $h = \frac{1}{3}$ br, with slight, lateral prominences. I Brax $h = \frac{3}{4}$ br, almost 6-angular by the backward directed median synarthrial tubercle. Arms X, 27 mm. Br 1 united inside, $\frac{1}{2}$ as wide outside with a convex outer margin (= an indistinct lateral prominence). 1st syzygy between Br 3 and 4 distally with an interval of 5—7 oblique articulations. The Br-segments smooth.

P_1 13—15; 4,5—5,5 mm. (Longest segments: $L = 2\frac{1}{2}$ br), P_2 13; 5 mm. (Segments to $3 \times$ br), P_3 10; 3 mm., P_4 9; 2 to 3 mm. Then longer p-s again. Distal p. 15; 4,5 mm.

Disk incised 2,5—4 mm., whitish. Otherwise the animal is red-brown.

The specimen described last might perhaps, because of the short 3^d pinnula, be a young of *Lamprometra protectus*. It is, however, to be noticed that it is not until a rather advanced stage that the young forms obtain the relation between the lengths of the proximal pinnules which is peculiar to the full-grown species. For P_1 is first formed, then P_2 , and finally P_3 . The above-mentioned shortness of P_3 might therefore be ascribed to the youth of the animal.

The length of the proximal p—s in Sp. 1 is, as shown above, very variable. It seems to me to be rather unfortunate within this family to base the characteristics of genus on the relation between the length of P₁, P₂ and P₃, as has been done in the genera *Liparometra*, *Lamprometra* and *Dichrometra*, which surely are very closely related to each other.

Colobometridae A. H. CLARK.

Cenometra A. H. CLARK.

C. bella (HARTLAUB).

Fig. 57—59, 74.

Syn.: *Antedon bella* 1890 HARTLAUB Nachr. Ges. Göttingen 1890, p. 174; 1891 Leop. Carol. Cur. Vol. 58: 1; p. 43.

Cenometra bella 1909 A. H. CLARK Wash. Proc. Biol. Soc. Vol. 22, p. 8; 1912 Crin. Ind. Oc., p. 153; 1915 Journ. Acad. Sci., Vol. 5, p. 214; Monograph pp. 48, 67.

From St. 49: 1 specimen.

Sp. 1. Cd thickly discoidal ($h = 1.5$ mm.) with raised margins round the free dorsal surface, the diameter of which is 2 mm. — C. XXVI 34—38; 16—18 mm. in two whorls. The 12 first segments: L about $\frac{1}{2}$ — $\frac{2}{3}$ br, the following ones similar or a little shorter. The distal half of the cirrus with a low transverse ribbon, which is indistinctly (or not at all) divided into two tubercles (slightly projecting in lateral view). Opposing spine: $h = \frac{1}{2}$ of the br of the segment. Terminal claw coarse, blunt-ended, L about the same as the preceding segment.

R—s $h = \frac{1}{4}$ br, most apparent in the corners, baso-laterally united. I Br 1 $h = \frac{1}{3}$ br, laterally free, forming with I Brax a distinct synarthrial tubercle. I Brax $h = \frac{2}{3}$ br, pentagonal. A ventro-lateral prominence on each ossicle from I Br 1 — Br 1, largest on II Br 1, where it occupies the whole side of the ossicle and reaches $\frac{1}{5}$ of the lateral h of the segment. II and III Br—s: 2 (the latter ones on the outer sides). Primipostaxillaries basally united inside. Arms XXVI, 90 mm. Syzygies: 3 + 4, 12 + 13, distally with an interval of 7 (—10)

oblique articulations. The Br-segments rather smooth, 21 segments per cm. (18, if the syzygial pairs are counted as units). The longer side of the distal brachials, $L = \frac{2}{3}$ br, the shorter one $L = \frac{1}{2}$ br.

P_1 18; ± 5 mm., P_2 15–16; 9 mm. (very much stiffer and twice as coarse or more than the other p-s. The distal ends of the pinnulars from the 6th segment thickened and with a spiny garland). P_3 12; 4 mm., P_4 similar, P_a always present though often only 2–3 mm. Distal p. 17–18; 7.5 mm. (distal pinnulars $L = 2-3 \times$ br).

Disk incised 8–11 mm. in diameter. Colour white with small brown spots. Anal cone short, pointed, 2.5 mm. The distal half of the p. quite violet-brown, the arms lighter with brown spots.

Differing from *C. bella* only by somewhat more cirri, which usually have transverse crista instead of a pair of tubercles, and by the primipostaxillaries, which are only united basally.

Cyllometra A. H. CLARK.

C. disciformis (P. H. CARP.).

Fig. 68–69.

Antedon disciformis 1888 P. H. CARPENTER Chall. Rep. Vol. 26, p. 228.

Cyllometra disciformis 1912 A. H. CLARK Crin. Ind. Oc., p. 158; 1913 Smiths. Misc. Coll. Vol. 61: 15, p. 34; 1915 Monograph; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 116.

From St. 12 (1), 33? (1), 35 (1) = 3 specimens.

Sp. 1 (St. 35) Cd discoidal, free dorsal part 2 mm. C. XV 25–27; 13–15 mm. in an almost single whorl. 3^d and 4th segments cubical, 5th–7th one slightly longer than broad, then shorter again, the distal ones $L = \frac{2}{3}$ br. The 5th(or 7th) to the 12th segment with a small dorsal transverse ribbon with an excavation in the middle forming an indistinct double tubercle, from about the 13th segment a simple dorsal spine, $h = \frac{1}{4}$ of the br of the cirral. Opposing spine $h = \frac{1}{2}$ of the br of the segment. Terminal claw about as long as the preceding segment.

The distal borders of the R-s visible under the Cd. I Br 1 $h = \frac{1}{5}$ br, laterally free. I Brax $h = \frac{1}{3}$ br. Primipostaxillaries united

inside. II Br—s: 2. Arms XVI, 90 mm. slender, smooth, well separated basally. Inconspicuous synarthrial tubercles. The br of Br 1: 1,1—1,2 mm. Example of syzygies: 3 + 4, 11 + 12, 17 + 18 etc., distally with an interval of 3—4(—5) oblique articulations. Br 1—7 discoidal, then oblique joints. The longer side of the distal Br—s: L = br. 19—20 segment per cm. (15, if the syzygial pairs are counted as units).

P₁ 15; 5,5 mm. smooth, P₂ 19; 9—9,5 mm. (5th—12th segment: L = 2—2 1/2 br, with spiny prominences on the distal ends of the segments. The tip of the pinnule usually smooth), P₃ 14—15; 7—7,5 mm. similar to the preceding. P₄ (12; 4 mm.) and the following ones smooth. Distal p. 20—22; 8 mm. (1st and 2^d segment short, coarser than the following ones, the distal end of the 2^d segment therefore forms a weak notch against the outer segments which are longer, L = 2—3 × br; the last segment provided with microscopic dorsal hooks). Disk thrown off.

Cirri and division-series white. The distal parts of the arms spotted with red-brown. Proximal pinnules white, the other p—s with strongly coloured sacculi (which are about 4 pairs per segment) and otherwise light brown-violet.

The scheme given below is an example of the pinnulation of the proximal arm parts. P₁ is always lacking on the inner side, when there are 4 arms on a I Brax.

$$\text{therefore I 1-2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Br 1-}\bar{2} \ 3 + 4 \ \bar{5} \ \bar{6} \ \bar{7} \\ \text{II 1-2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Br 1-}\bar{2} \ 3 + 4 \ \bar{5} \ \bar{6} \ \bar{7} \\ \text{Br 1-}\underline{2} \ 3 + 4 \ \underline{5} \ \underline{6} \ \underline{7} \end{array} \right. \text{ but I 1-2} \left\{ \begin{array}{l} \text{II 1-2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Br 1-}\bar{2} \ 3 + 4 \ \bar{5} \ \bar{6} \ \bar{7} \\ \text{Br 1-}\underline{2} \ 3 + 4 \ \underline{5} \ \underline{6} \ \underline{7} \end{array} \right. \\ \text{II 1-2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Br 1-}\bar{2} \ 3 + 4 \ \bar{5} \ \bar{6} \ \bar{7} \\ \text{Br 1-}\underline{2} \ 3 + 4 \ \underline{5} \ \underline{6} \ \underline{7} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Sp. 2 (St. 33) Probably also belonging to this species (possibly a young *C. albopurpurea*).

Cd 0,8 mm. C. XX 15—18; 5—6 mm. (the dorsal C. 12; 2,5 mm.). The L of the segments at most 1 1/3 br. 4th—8th segment with a double dorsal spine, then a single prominence in the middle of the segment. Antepenultimate segment usually smooth. Opposing spine h = 1/2 of the br of the cirral. Terminal claw as long as the pre-

ceding segment. The first segments proximally somewhat narrower, and therefore a rather serrate proximal profile.

R—s narrow bands. I Br 1 h = $\frac{3}{4}$ br, laterally free. Axillary h = $\frac{1}{4}$ br. Br 1 h = $\frac{1}{2}$ br, basally united inside. Arms X, 25 mm. Syzygies with an interval of 3—4 oblique articulations. Distal Br-segments L = $1\frac{1}{2}$ br, smooth.

P₁ 6—7; 2 mm. P₂ \pm 10; 4 mm. P₃ 7—8; 2,5 mm. P_a lacking, P_b 9; 2,5 mm. (3^d and the following segments L = 2—3 \times br, smooth). Distal p. \pm 3,5 mm.

Disk thrown off. Colour: violet spots on a white ground.

A young specimen of *Colobometridae*, probably referable to this species, is also:

Sp. 3 (St. 12) Cd discoidal, br 1,5 mm. — C. X 16—18; 5,5—6 mm. The cirrals are rather short, the longest ones L = the distal br. From the 4th—7th segments a transverse crista. A single dorsal spine from the 7th cirral.

I Br 1 and 2 with a weak longitudinal carination. Arms X, broken. Syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 14 + 15 etc. with an interval of 3 oblique articulations.

P₁ 10, shorter than P₂, which is 11; 4 mm. P₃ 9; 3 mm. P₅ 11. P_a absent. Disk thrown off.

Fixed on an *Acanthogorgia Dofleini* KÜKTH. & GORZ.¹

Though *C. disciformis* is evidently very closely related to *C. manca* I have, however, kept them as separate species. A. H. CLARK distinguishes the first-mentioned one from *C. manca* by the long proximal cirrals. Nevertheless at the same time he states (Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 116) that the length of the cirrals rapidly decreases in specimens of *C. disciformis* from deeper water. The deepest localities from which this species has previously been dredged are 180 fathoms. The above-described specimens are found at depths of 400 and 90 to 200 fathoms respectively and have therefore very short cirrals approaching those of *C. manca*. I have described below a specimen from Kiu Shiu Islands belonging to this species. In this one the cirrals are never longer than broad. It is moreover a smaller form than the above-described species from shallower water but in spite of that with shorter cirrals. The larger *C. disciformis* seems also to have fewer arms in

¹ For this information I am indebted to my friend Mr. MAGNUS AURIVILLIUS.

proportion to the length of the arms. A distinguishing characteristic of value might also be the distribution of the syzygies. In *C. disciformis* the syzygies are separated by 3 to 4, in *C. manca* by 9 to 10 oblique articulations. This difference is also to be found in the original descriptions, where the first-mentioned species is said to have syzygies with a syzygial interval of 2—6, the latter with an interval of 4—10 (usually 7—8) joints. The preceding species also seems to be more slender and to have longer and narrower distal pinnules than the one described below.

It might be worth while to call attention to the fact that the genus *Cyllometra*, as also many other *Colobometrids*, approaches in many respects the *Antedonid* subfam. *Perometrinæ*. Both groups have an inconstant P_a . The *Colobometrids*, being an *Oligophreat* family, have unusually long pinnulars and cirrals, where the first-mentioned ones especially are very similar to those of the *Antedonidae*. *Perometrinæ*, on the other hand, being a *Macrophreat* family, has short cirrals and pinnulars. The basal rays are often absent in the *Colobometridæ* and the rosette very similar to that of the *Macrophreats*. Also the centrodorsal cavity is unusually large. A feature distinguishing *Colobometridæ* from *Perometrinæ* is the occurrence of a double spine-row or a transverse crista on the proximal cirrals. On the distal segments, however, the dorsal spine is single. If a reduction of the spines of the proximal cirrals took place, we might probably refer a *Colobometrid* to *Perometrinæ*. It seems therefore as if we should find connections between *Colobometridæ* and *Perometrinæ*; the latter is possibly in this case to be deduced from the former and has developed convergently with the *Antedonid* typus (cf. p. 89 ff.).

Cyllometra manca (P. H. CARP.).

Fig. 66, 67.

Syn.: *Antedon manca* 1888 P. H. CARPENTER Chall. Exp. Vol. 26, p. 226.

Cyllometra manca 1907 A. H. CLARK Smiths Misc. Coll. Vol. 50, p. 357; 1912 Crin. Ind. Oc., p. 156; 1913 Smiths. Misc. Coll. Vol. 61: 15, p. 34; 1915 Monograph p. 89, 374; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 116.

From St. 19: 1 specimen.

Sp. 1 Cd large, discoidal, free dorsal pole 2,8 mm. C. XXIII 23—25; 10—11 mm. in two whorls. All segments are shorter than long,

the proximal ones are longest, $L = \frac{3}{4}$ br. From the 6th segment a double dorsal spine, which at the 15th(—17th) segment becomes a single one, $h = \frac{1}{4}$ of the br of the segment. The paired prominences distinct, close to one another, only on the 6th—9th segment indistinct, almost forming a transverse ridge. The antepenultimate and the nearest preceding segments with weaker spines. Opposing spine $h = \frac{1}{2}$ of the br of the segment. Terminal claw coarse, somewhat curved, about as long as the preceding segment.

R—s narrow bands. I Br 1 free laterally, $h = \frac{1}{4}$ br (br = 0,8 mm). I Brax $h = \frac{2}{3}$ br, as II Br 2 with a slight synarthrial tubercle. Primitopostaxillaries united inside. II Br—s: 2. No III Br—s. II Br 1 $h = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times$ br (narrower on the inner side, broader on the outer side). Arms XIX, 50 mm. smooth. After Br 7 oblique segments. Distal segments triangular with slightly swollen articulations. Syzygies: 3 + 4, 15 + 16 or 18 + 19, distally with an interval of 7—10 (usually 9—10) oblique articulations. 18 segments per cm. (16, if the syzygial pairs are counted as units).

P_1 12; 4 mm. Is occasionally missing on the inner side of a II Brax. P_2 14; 7 mm., outer segments with spiny collars, P_3 12; 4,5 mm., P_4 11; 4 mm., P_a is most often absent, P_b 12; 5,5 mm., P_c shorter. P_2 and P_b very much coarser than the other pinnules, longest segments $L = 2$ br, somewhat angular and spiny. The other pinnules with smooth segments. Distal p. 14—17; 4,5—6 mm. Disk thrown off. Colour yellow with black-red spots.

Example of the distribution of pinnules and division of arms.

$$I \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l} II \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l} Br \ 1-\bar{2} \ 3 + 4 \ \bar{5} \ \underline{6} \ \bar{7} \dots \\ Br \ 1-\underline{2} \ 3 \ 4 \ \bar{5} \ \dots \bar{6} \ \bar{7} \dots \end{array} \right. \\ II \ 1-\underline{2} \left\{ \begin{array}{l} Br \ 1-\bar{2} \ 3 + \underline{4} \ \bar{5} \ \underline{6} \ \bar{7} \dots \\ Br \ 1-\underline{2} \ 3 + \bar{4} \ \underline{5} \ \bar{6} \ \underline{7} \dots \end{array} \right. \end{array} \right.$$

In this as in the following species the specimens that are found in the collection have the double prominences of the cirrals not very distinctly marked.

Cyllometra albopurpurea A. H. CLARK.

Fig. 64, 65.

Syn.: *Cyllometra albopurpurea* 1908 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 34, p. 239; 1912 Crin. Ind. Oc, p. 158; 1913 Smiths. Misc. Coll. Vol. 61: 15, p. 34; Wash. Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 43, p. 400; 1915 Monograph pp. 54, 289; Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 214; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 115.

Cyllometra manca 1907 H. L. CLARK Bull. Mus. Comp. Zool. Vol. 51, p. 289 (according to A. H. CLARK 1915 Monograph p. 54 = *albopurpurea*).

From St. 53 (2), 59 (2) = 4 specimens.

Sp. 1 (St. 59) Cd discoidal, 4.5 mm., free dorsal surface 3 mm., $h = 1.8$ mm. C. XXIX 31—35; 19—21 mm., 3^d and 4th segments cubical, 5th—9th slightly longer, then shorter segments again, 10th—12th segments with a dorsal transverse ridge, 13th—16th with a 3-pointed prominence, 16th—24th with a double spine then a single dorsal spine. The double prominences sometimes not distinctly separated. Dorsal spine very small, but in side view well bounded, fixed at the middle of the cirral. $h = \frac{1}{5}$ of the br of the segment. Opposing spine considerably larger $h = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ of the br of the segment. Terminal claw pointed, curved, about as long as the preceding segment.

R—s projecting under the margin of Cd. I Br 1 $h = \frac{1}{6}$ br, laterally free. I Brax $h = \frac{1}{2}$ br, the lateral sides bent at a slight angle to the preceding ossicle. A well-developed synarthrial tubercle between I Br 1 and 2. II and III Br—s: 2, the later ones on the outer sides. Arms XXVI, broken (probably XXVIII in a complete specimen). Ex. of syzygies: 3 + 4, 18 + 19, distally with an interval of (6—)9 oblique articulations. Arms smooth, after Br 9 oblique joints.

P_1 17; 6 mm., (P_1 on Br 2 from the inner side of a II Brax: 14; 6 mm.), P_2 17—18; 9.5 mm., P_3 16—18; 7—8 mm. The distal segments of P_2 and P_3 very long, $L = 3$ br), in the distal margin serrate. P_a lacking, $P_b = P_2$. P_1 usually absent on the inner side after a III Brax. Distal p. ± 20 ; 7 mm.

Disk very much incised, smallest diameter 4, largest one 10 mm. Colour: red-violet with yellow longitudinal bands. Distally with yellow and red spots mingled.

Example of division of arms and distribution of pinnules:

purea-cirri). Nevertheless certain differences might be given which speak in favour of the preservation of the species *albopurpurea*. *C. manca* in the above-described specimen has 25 cirrals at a cirrus-length of 11 mm; the cirrals are shorter than long; *C. albopurpurea* does not have the same number of cirrals until a cirrus-length of 15 mm.; the proximal cirrals are longer than broad. Both the species during their evolution show a tendency towards short cirrals, but reach this stage at different cirrus-lengths. The characteristic dorsal spine of *C. albopurpurea* (and *gracilis*) is, in a somewhat similar form, to be found in the above-described young stage, referred with some doubt to *C. disciformis*.

As to the young stages it may be noted that young forms of *C. albopurpurea* have more than X arms already at an arm-length of about 15 mm., when the brachials are still very juvenile, long, and strongly hour-glass-shaped. The young of *C. disciformis* even at an arm-length of 25 mm. has X arms and rather smooth brachials.

Cyllometra pulchella n. sp.

Fig. 133—140. Photo 9.

From St. 6 (7), 12 (1), 13 (33), 16 (2), 17 (3) — 46 specimens.

Sp. 1 (St. 13) Cd thickly discoidal, the free, flat, dorsal surface 1.5 mm. C. XXIV 25—29; 10—12 mm. in two whorls. 1st—3^d segment shorter than broad, 4th about cubical, 5th somewhat longer, the following ones L about $1\frac{1}{3}$ br. Antepenultimate segment a little longer than broad. From about the 7th segment a slight dorsal transverse carination, at the 12th or 14th segment a little thickened on both sides of the median line, appearing there as two inconspicuous tubercles (visible only by high magnification); from the 15th or 20th segment a single swelling which disappears again on the outermost cirrals. Penultimate segment about as long as broad, with an opposing spine, $h = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ of the br of the segment. Terminal claw pointed, curved, $1\frac{1}{2}$ times as long as the preceding segment.

R—s very narrow bands, laterally united in the proximal half. I Br—s 1 laterally free, $h = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times$ br. I Brax pentagonal, $h = \frac{2}{3}$ br, forms vid I Br 1 a small synarthrial prominence with an indis-

tinctly limited tubercle, not at all or only slightly prominent in lateral view. Br 1 and 2 with a similar though still smaller prominence. Br—s inwardly united basally: Ex. of syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 14 + 15 etc. with an interval of 3 (exceptionally only 2) oblique articulations. Arms X, 40—45 mm. First 10 Br—s discoidal, not »wall-sided», then oblique joints. Arms smooth.

P₁ 13—15; 3—5 mm. (The pinnulars smooth, cubical to L = 1 1/2 × br), P₂ 16; 5—6,5 mm., longer and stouter than the preceding pinnule, the middle segments often with small, distal tubercles, P₃ 12; 3—4 mm. as the following ones smooth; P₄ 13; of the same length or shorter. P₅ and the following pinnules again longer. P_a absent, P_b 14; 4,5 mm. Distal p-s ± 20; 5 mm. (1st and 2^d segments short, 3^d cubical, the following pinnulars long and slender, L about = 2 br).

Disk incised, smooth, without calcareous granules, 3 mm. — Colour light-brown (in the preserved animal).

Sp. 2 (St. 13) Cd knob-formed, free dorsal surface 1,3 mm. Terminal claw about as long as the penultimate segment. — Axillary a low hexagon, h = 2/3 br. II Br—s: 2. Syzygies with an interval of 2—3 oblique articulations. Br 1—8 discoidal. — Distal p—s with a notch between the 2^d and 3^d segment (a similar condition though not so decided in *Sp.* 1 too) by which the 2^d segment seems to form a small prominence. For further details as in the following specimens cf. the table.

Sp. 3 (St. 13) The distal pinnules as above. *Sp.* 4 and *Sp.* 5 (St. 13) —.

Sp. 6 (St. 13) All the cirri with the exception of a young one, broken. Some arms with widely separated syzygies. Example:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{I } 1-2 \\ \text{II } 1-2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Br } 1-2 \ 3+4 \dots 16+17 \dots 20+21 \dots 27+28 \dots 33+34 \dots \\ \text{Br } 1-2 \ 3+4 \dots 23+24 \dots 28+29 \dots 34+35 \dots \\ \text{Br } 1-2 \ 3+4 \dots 18+19 \dots 26+27 \dots 33+34 \dots 40+41 \dots \end{array} \\
 \text{or I } 1-2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Br } 1-2 \ 3+4 \dots 9+10 \dots 14+15 \dots 23+24 \dots \\ \text{Br } 1-2 \ 3+4 \dots 15+16 \dots 22+23 \dots \end{array} \right.
 \end{array}$$

All the other specimens with normal distribution of syzygies. Colour of the specimen: whitish with red spots.

Sp. 7, *Sp.* 8 and *Sp.* 9 (St. 13) —.

Sp. 10 (St. 13) P_a in one case present (10 segments); $L = 2,2$ mm.

Sp. 11 (St. 13) P_a in one case present = the preceding specimen.

Sp. 12 (St. 13) —.

Sp. 13—28 (St. 13) P_a exceptionally present. P_1 in rare cases lacking on a Br 2, when this ossicle stands on the inner side of a II Brax. Arms X: 7 cases, XI: 3 cases, XII: 3 cases, XIII: 1 case, XIV: 1 case, XV: 1 case.

Sp. 29—33 (St. 13) not examined.

Sp. 34 (St. 6) The free dorsal surface of Cd 2 mm. Syzygies with an interval of 3—4 oblique articulations distally. P_1 about = P_2 .

Sp. 35 (St. 6) P_c 12; 4 mm. Colour, as in most of the preceding specimens, yellowish, with small, sparse, crimson spots here and there. Disk thrown off.

Sp. 36 and 37 (St. 6) Syzygies with an interval of 3 oblique articulations. Colour as in *Sp.* 35.

Sp. 38 (St. 6) In arms situated on II Brax ex. of syzygies: 3 + 4, 13 + 14, 18 + 19 . . etc. with an interval of only two oblique articulations. The proximal pinnules on the distal side slightly carinated. Disk thrown off. Colour (as in *Sp.* 39—43) more uniformly yellowish (in formol-spirit).

Sp. 39 (St. 6) Syzygies with an interval of 3—4 oblique articulations.

Sp. 40 (St. 6) Syzygies with an interval of 2—3 oblique articulations. The segments are rather long, juvenile. P_2 relatively small.

Sp. 41 (St. 12) Cirri in a single or double whorl. R—s broad bands. I Br 1 h = $1/2$ br. No synarthrial tubercle.

Sp. 42 and *Sp.* 43 (St. 16) R—s appearing as narrow bands.

Sp. 44 (St. 17) Disk 4 mm. Colour as in the preceding specimens tigered (white, with small, rather sparse violet spots).

Sp. 45 and *Sp.* 46 (St. 17) Arms X, 28 and 32 mm. respectively.

A comparison of the number of arms shows the following distribution: X arms: 15 cases, XI: 8 cases, XII: 10 cases, XIII: 5 cases, XIV: 1 case, XV: 2 cases. Here, as in *Astererometra anthus*, one can observe the condition that it is not always the largest specimens that

Number of Specimens and Stations	Cirri		Arms		P ₁		P ₂		P _b		P ₃		P ₄		Distal p.				
	N	S	N	L	S	L	S	L	S	L	S	L	S	L	S	L			
					P _a														
Sp. 1 (St. 13)	XXIV	25-29	10-12	X	40-45	13-15	3-5	—	16	5-6,5	14	4,5	12	13	3-4	13	+ 3,5	+ 20	5
Sp. 2 (St. 13)	XXVI	20-24	8-10	XII	40	—	3,5	—	13-14	5	14	5	10	12	3,5	12	—	+ 15	4,5
Sp. 3 (St. 13)	XXVII	19-22	+ 9	XI	40	—	3	—	13	3,5-4,5	14	5	11	9	2,5	9	2	16	5,5
Sp. 4 (St. 13)	XXIV	21-22	9	XII	45	—	4	—	17	6	16	5,5	13	—	4	—	—	+ 18	5
Sp. 5 (St. 13)	XXVIII	19-26	8-11	XI	35	—	3	—	16	5,5	14	4	12-14	11	3,5-4	11	2,5	+ 18	4,5
Sp. 6 (St. 13)	XXVII	27	7	XII	40	—	2,5	—	12	4	12	3,5	11	—	2,5	—	—	14-18	3,5-5
Sp. 7 (St. 13)	XXVII	18-25	6-11	XII	35	—	3,2	—	12	5	13	4,2	12	13	4	13	2,7	16	5
Sp. 8 (St. 13)	XXIV	20-23	8-9	XI	35	—	3	—	13	4,7	12	4	11	12	2,5	12	2,2	17	5
Sp. 9 (St. 13)	XXV	18-23	7-9	XIII	40	—	3,5	—	17	6	15	5,5	14	13	3	13	2,7	18	5
Sp. 10 (St. 13)	XXXI	19-25	7-11	XI	40	—	3,5	×	16	6	15	5	11	10	3,5	10	2,5	—	—
Sp. 11 (St. 13)	XXI	20-21	8	XII	25	—	2,5	×	14	4,5	10	3	10	—	2,2	—	—	—	—
Sp. 12 (St. 13)	XXIV	20-25	7-9	X	33	—	3,5	—	16-18	7	13	5	12	13	3,5	13	3	—	—
Sp. 34 (St. 6)	XXVIII	22-26	9	XIII	45	—	3	—	14	5,5	14	—	10	10-12	3	10-12	2-3	+ 18	5
Sp. 35 (St. 6)	XXV	19-25	10-11	X	45	—	3,5	—	13	5,5	14	5,5	12	10-12	4	10-12	2,5-3	+ 20	5,5
Sp. 36 (St. 6)	XXIX	19-23	8-10	XII	45	—	3	—	15	5	13	4,7	10	10	2,5	10	2,3	18	4,5
Sp. 37 (St. 6)	XXVII	18-27	7-11	X	52	—	3,2	—	16	5	13	4,5	11	11	3	11	2,7	+ 18	5
Sp. 38 (St. 6)	XXVIII	19-22	7-9	XIII	30	—	3,3	—	15	6	12	5	11	12	3	12	2,5	+ 18	5
Sp. 39 (St. 6)	XXIV	18-22	7-9	X	40	—	3	—	15	5,5	10	3,7	10	10	2,5	10	2,2	21	5
Sp. 40 (St. 6)	XXI	16-19	5-7	XV	25	—	3	—	11	4	+ 9	2,2	9	—	2	—	—	+ 15	3,5
Sp. 41 (St. 12)	XXII	16-24	8-10	XII	40	—	3	—	—	+ 4	9	4	9	—	2,5	—	—	+ 14	4
Sp. 42 (St. 16)	XX	18-24	8-12	XI	45	—	3,5	—	15	5,5	13	4,7	12	11	4	11	2,6	18-19	6
Sp. 43 (St. 16)	XXVI	20-25	7-8	XIII	30	—	2,8	—	13	4	10	2,5	9	11	3	11	2	+ 18	5,5
Sp. 44 (St. 17)	XXIII (P)	20-23	7-8	X	35	—	3	—	14	4,5	—	—	12	—	3	—	—	—	—

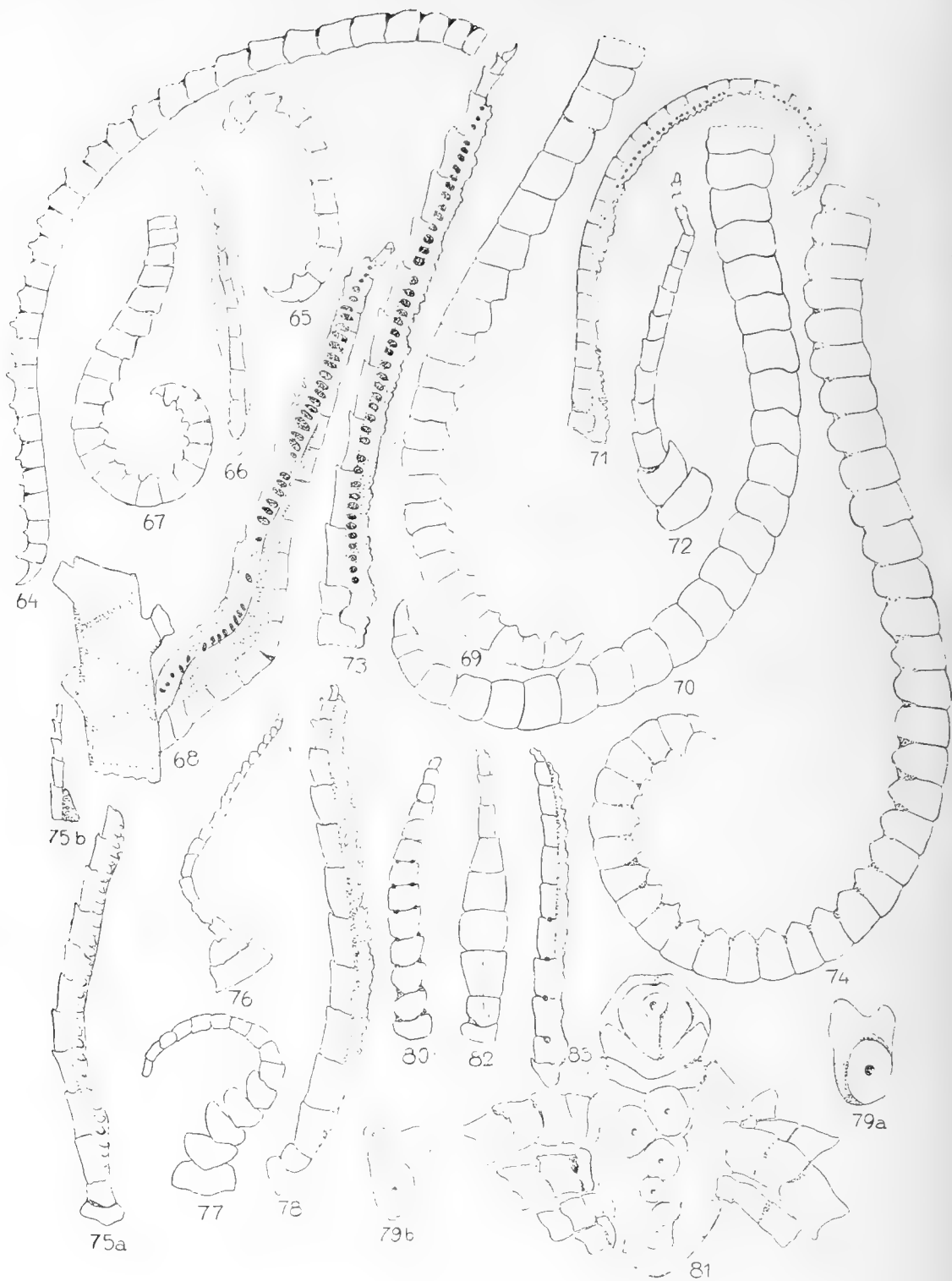


Fig. 64, 65. *Cyllometra albopurpurea* 64) Large cirrus (St. 59) $\frac{7}{1}$, 65) Cirrus from a young specimen (St. 53 Sp. 4) $\frac{14}{1}$; 66, 67 *Cyllometra manca* (St. 19) 66) Distal pinnule $\frac{14}{1}$, 67) Cirrus $\frac{9}{1}$;

have the most arms, but rather the reverse. It is probable, as I have suggested when treating the above-mentioned species, that the question of catching the food plays a certain rôle, but possibly (though not very likely, considering that I have often seen »duplicative» regenerates situated on Br 1, but never a single arm regenerated from the same ossicle) one might also connect the phenomenon with the fact that the family *Colobometridæ* strongly tends to a X-armed type and that this is reached only after a transition stage with more than X arms.

By the small transverse carination (on some segments replaced by a pair of microscopic tubercles) on the proximal cirrals the new species proves itself to be a form of an *Oligophreat* type, though otherwise it presents much that reminds us of certain *Perometrins* (the relatively large size of the centrodorsal cavity and the position of the rosette, which only radially forms »spout-like» processes).

The new species approaches most to *C. manca*, from which it differs by a smaller and less discoidal Cd, by longer cirrals, which have only inconspicuous carinations, by the absence of III Br—s, by the short interval between the syzygies, and by P₂ being almost smooth.

The species is an interesting form, showing a strong tendency of convergence towards the *Macrophreat* type.

68, 69 *Cyllometra disciformis* (St. 35) 68) Arm-stump with a genital pinnule ¹⁴/₁, 69) Cirrus ⁹/₁; 70, 71 *Tropiometra encrinus* (St. 45), 70) Cirrus ⁹/₁, 71) Distal pinnule ⁹/₁; 72, 73 *Pectinometra flavopurpurea* 72) P₁ ¹⁴/₁, 73) Distal pinnule (4—5 pairs of Sacculi per segment) ¹⁴/₁; 74) *Cenometra bella* Cirrus ⁹/₁; 75, 76 *Neometra multicolor* (St. 12). 75 a) Distal pinnule (the tip broken) ¹⁴/₁, b) The tip of the pinnule from another specimen (in Dr MORTENSEN'S collection) ¹⁴/₁, 76) P₁ ¹⁴/₁; 77, 78 *Crosso-metra septentrionalis* (St. 36), 77) P_{II} (the 7 last segments broken) ¹⁴/₁, 78) Distal pinnule ¹⁴/₁; 79—83 *Diodontometra Bocki* (St. 56) 79 a) The penultimate segment viewed from the proximal end, b) The same segment viewed from the distal end, X 17 ¹/₂; 80) P₁ ¹⁴/₁, 81) Cd with the cirri arranged in radial groups (observe the distal face of I Br 1) ⁹/₁, 82) Genital pinnule ¹⁴/₁, 83) Distal pinnule ¹⁴/₁.

Tropiometridæ A. H. CLARK.

Tropiometra A. H. CLARK.

Tr. afra var. macrodiscus (HARA).

Syn.: *Antedon macrodiscus* 1895 HARA Zool. Mag. Tokyo Vol. 7, p. 115.

Tropiometra macrodiscus 1907 A. H. CLARK Smiths. Misc. Coll. Vol. 50, p. 349; 1908 H. L. CLARK Bull. Mus. Comp. Zool. Vol. 51 (N:o 11), p. 279; 1912 A. H. CLARK Smiths. Misc. Coll. Vol. 60, N:o 10, p. 28; 1915 Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 214; Monograph pp. 52, 54, 275; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 131.

Tropiometra afra (part) 1908 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 34, p. 315; 1912 Crin. Ind. Oc., p. 176.

From St. 27 = 9 specimens.

Sp.: 1 (St. 27) Cd discoidal, flat dorsal surface with slight radiating swellings, 10 mm.

C. XLIII 36—39, \pm 40 mm. in two whorls. The segments are uniform, cubical or somewhat ($L = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ br) shorter. No dorsal spine. Terminal claw a little longer than the penultimate segment. Cirri coarse. Ventral cirri shortest and with a less number of segments.

R—s somewhat projecting in the corners. I Br 1 $h = \frac{1}{6}$ br, laterally grown together as are also the bases of the axillaries. The articulations between the proximal ossicles indistinct. I Br 2 $h = \frac{1}{3}$ br, pentagonal or almost triangular with a small median tubercle well marked off from I Br 1. The proximal segments flattened, granular, as is often the case in *Oligometrides*. Arms X, 190—210 mm. Br 1 united inside in pairs, their br 5.5 mm. Br 1 and 2 on the outer side twice as long. All the distal segments short, discoidal. Ex. of syzygies: 3 + 4, 8 + 9, 13 + 14, 30 + 31, 39 + 40, 50 + 51 or 3 + 4, 9 + 10, 15 + 16, 28 + 29, 41 + 42, 51 + 52... Distally with an interval of about 8 oblique articulations. The L of the segments = $\frac{1}{4}$ br. 14 segments per cm. (12, if the syzygial pairs are counted as units).

P₁ 25—27; 20 mm., P₂ 34; 26 mm. (L. of the segments = $1\frac{1}{2}$ br). P₂—P₁₀ slowly decreasing, larger and coarser than the following pinules. Ambulacral furrow does not appear until P₉(—P₁₁) (with the exception of on an arm shorter than the other ones). Distal p. \pm 35; 15

mm. (3—5 last segments with weak dorsal hooks, the other segments $L = 1\frac{1}{2} - 2$ br).

Disk 22 mm. Mouth subcentral. Anal cone 5 mm. Colour: dark chocolate violet.

Sp. 2 (St. 27) $P_1 - P_{11}$ without ambulacral furrow. For further details see the table.

Sp. 3 (St. 27) $P_1 - P_{10}$ without ambulacral furrow.

Sp. 4 (St. 27) P_3 28; 22 mm. $P_1 - P_4$ or P_7 without ambulacral furrow. Example of distribution of syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 18 + 19, 28 + 29, 36 + 37, 42 + 43, 48 + 49, 54 + 55, 59 + 60, 69 + 70, 77 + 78, 82 + 83, 99 + 100..

Sp. 5 (St. 27) $P_1 - P_5$ or P_8 without ambulacral furrow. Disk 26 mm.

Sp. 6 (St. 27) P_3 33, 23 mm. $P_1 - P_{11}$ or P_{16} without ambulacral furrow. Disk 25 mm.

Number of specimen	Cirri			Length of arms	P_1		P_2		Dist. p.		Diam. of dorsal pole of Cd
	N	S	L		S	L	S	L	S	L	
Sp. 1	XLIII	36-39	± 40	190-210	25-27	20	34	26	± 35	15	10 mm.
Sp. 2	XXX	34-40	30-50	150-180	± 30	22	± 30	—	± 30	14	5
Sp. 3	XLV	34-38	32-42	130-250	34	26	42	30	40-45	16-18	7
Sp. 4	XXXVI	37-40	35-42	—	24-28	24	33	27	± 35	15	7
Sp. 5	XXXIII	36-41	30-40	120-180	34	21	32	21	35	14	9
Sp. 6	XXXIV	38-40	± 40	150-220	26	18	30	23	33	12	6
Sp. 7	L	33-38	35-45	180-240	35	23	25 +	—	37-40	18	7
Sp. 8	XLIII	28-40	30-50	245-265	33-42	25-30	± 35	25-30	36	18	9
Sp. 9	XXXVI	28-39	38-45	190-215	27	18	± 30	21	32	18	7,5

Sp. 7 (St. 27) P_3 38; 30 mm. $P_1 - P_9$ or P_{11} without ambulacral furrow.

Sp. 8 (St. 27) Diameter of Cd 12 mm. Some cirri with a slight opposing spine. In the pharynx a couple of very large *Myzostomas*. $P_1 - P_8$ without ambulacral furrow. Disk 29 mm.

Sp. 9 (St. 27) $P_1 - P_9 (-P_{11})$ without ambulacral furrow. Disk 24 mm.

The relative size of the proximal pinnules is very variable. P_1 is, however, always more slender because of the lack of a gonad.

Tropimetra afra macrodiscus differs according to A. H. CLARK from *Tr. afra* by the presence of longer and coarser cirri which have more cirrals. This difference is also to be found in those that

were brought home by the Boeckian expedition. Nevertheless I cannot consider that a form that only differs in a characteristic of such a low systematic value as this is to be counted as more than a variety. Besides one must bear in mind that *Tr. macrodiscus* is only known from Sagami Bay, while *Tr. afra* is known from the coasts of Africa, Australia and New Guinea. Therefore it is very probable that transition forms may be brought home from the intervening territory. Compare also A. H. CLARK'S own descriptions of specimens from Sagami (Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 34, p. 315), which are not very different from *Tr. afra*. Accordingly I am of the opinion that the differences of *Tr. macrodiscus* certainly cannot be given more than the value of those of a variety.

***Tropiometra encrinus* (LÜTKEN).**

Fig. 70, 71.

For the older synonymy see 1912 A. H. CLARK Crin. Ind. Oc. p. 177 pro parte (only specimens east of India belonging to this species).

Tropiometra encrinus 1911 A. H. CLARK Austral. Mus. Mem. Vol. 4, part 15, p. 780; (?) Fauna Süd-West Austr. Bd 3, Lief. 13, p. 440; 1912 Rec. Ind. Mus. Vol. 7, p. 270, (?) Smiths. Misc. Coll. Vol. 60: 10, p. 29; 1913 Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 43, p. 402; 1914 A. REICHENSBERGER Crin. Aru u. Kei-Inseln, Senckenbg. Vol. 35, p. 106; 1915 A. H. CLARK Monograph pp.; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 131.

From St. 45: 1 specimen.

Sp. 1 Cd flattened, free dorsal pole 2 mm., with indistinct scars after fallen cirri. — C. XX 25—29 (one cirrus regenerated from the 11th segment), 18—24 mm. in two whorls. Cirrals uniform $L = \frac{1}{2}$ — (distally) $\frac{2}{3}$ br, antepenultimate segment $L = \text{br}$. Opposing spine an indistinct prominence. Terminal claw $L = 1\frac{1}{2} \times$ the preceding segment, curved, pointed.

R—s $h = \frac{1}{4}$ br, broadest in the corners. I Br 1 $h = \frac{1}{3}$ br, laterally free. Axillary triangular $h = \frac{1}{3}$ br. Arms X, 105 mm. Br 1: br 2,7 mm., united inside in pairs to $\frac{1}{3}$ of their height, on the outside twice as long like Br 2. Example of syzygies: 3 + 4, 8 + 9 (or 9 + 10), 16 + 17, distally with an interval of 5 to 9 oblique articulations. The brachials distally somewhat overlapping, giving the distal parts of the arms a somewhat serrate profile. The proximal arm-parts smooth, a little

flattened. I Brachials laterally with a sharp edge, never a medio-dorsal carination. 15 segments per cm. (12—13, if the syzygial pairs are counted as units).

P_1 24—25; 12.5 mm. smooth, 2^d—4th segment with a slight keel on the side which faces the distal parts of the arms, P_2 similar, P_3 25, 12 mm. P_5 21; 11 mm. P_8 23; 8 mm. P_1 — P_5 without ambulacral furrows, larger and coarser than the other pinnules, with gonads. Nevertheless not so marked as in *Tr. afra macrodiscus*. Distal p. \pm 30; 14 mm. (1st to 2^d or 3^d segment short, then $L = 1\frac{1}{2} - 2 \times br$). Disk 13 mm. Colour: red-violet.

I have kept this *Tr. encrinus* as a species, though it is obvious that intermediate forms are to be found in territories between the region of distribution of *Tr. carinata* and that of *Tr. encrinus*. According to A. H. CLARK (Siboga Exp. Vol. 42 B) *Tr. encrinus* is said to be restricted to the territories east of India, *Tr. carinata* to occur west of this peninsula. In Crinoids of the Indian Ocean (1912) he is not of the same opinion. In this work he certainly separates *Tr. carinata* from *encrinus*, but of *Tr. encrinus* he says that it appears to the westward to Aden, the Red Sea etc. About the cirrals he states that: »the outer segments are about twice as broad as long as in *Tr. carinata*». In the Siboga work he distinguishes the species by the distal cirrals, which in the former species are »much less than twice as broad as long» in *Tr. carinata*: »more than twice as broad as long». It may be questioned which distinguishing feature he used in 1912 to keep the two species separate.

REICHENSBERGER (1914 p. 107) states that specimens from Ceylon that he has examined present some variations in the relation between L and br of the cirrals. In a table he has given the cirrus-length and the number of cirrals of the different specimens, but his assertion that one »aus einem Vergleich der Gliederzahlreihe mit der Cirrenlänge ohne weiteres einsieht» that the relation between L and br of the cirrals varies is not, however, quite correct. The proportions between L and br might have been the same even if the number of cirrals and length of cirri has varied, for the coarseness of the cirrus is also subject to variability.

REICHENSBERGER'S second criterion of the identity of the two species (that P. H. CARPENTER has described a young specimen from Bahia

with longer cirrals) shows nothing, for, as is well known, all young Crinoids have longer cirrals. As a general opinion one may say that the difference given by CLARK 1918 seems to be the only distinguishing feature, but that it is probable that the difference is only a function of different geographical and ecological factors. Here, as always, one has, however, also to keep in mind the probability of hybridisation between two separate forms, which would give intermediate forms in the transition territory. Such intermediate forms are, according to REICHENSPERGER, found at Ceylon, but whether they are caused by geographical factors or by hybridisation cannot yet be determined.

Calometridæ A. H. CLARK.

Neometra A. H. CLARK.

N. multicolor A. H. CLARK.

Fig. 75, 76.

Syn.: *Antedon discoidea* (part) 1906 Mc CLENDON Bull. Amer. Mus. Vol. 22, pp. 120, 125, 126 according to A. H. CLARK.

Antedon multicolor 1907 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 33, p. 130.

Antedon thetis 1907 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 33, p. 151.

Calometra multicolor 1907 A. H. CLARK Smiths. Misc. Coll. Vol. 50, p. 363.

Neometra multicolor 1912 A. H. CLARK Crin. Ind. Oc. p. 183; Smiths. Misc. Coll. Vol. 60: 10, p. 29; 1915 Monograph pp. 67, 329, 363; Wash. Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 214; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 133.

From St. 12 = 2 young specimens.

Sp. 1 (St. 12) Cd slightly arched, dorsally flattened, 1.5 mm., C. XII 27—30; 11 mm. in a thin whorl. 1st segment short, 2^d cubical, 3^d a little longer, 4th and the following ones $L = 1\frac{1}{2}$ br, distally shorter. The distal parts of the cirrals from the 5th segment somewhat collar-shaped and bent outwards. Dorsal spine single, from about the 15th segment. Opposing spine $h = \frac{1}{2}$ of the br of the segment. Terminal claw curved, shorter than the penultimate segment.

R—s $h = \frac{1}{4}$ br, IR prolonged to tips which separate I Br 1 laterally. I Br 1 $h = \frac{1}{3}$ br, widely spread out from each other, provided with slight lateral prominences and an inconspicuous medio-dorsal list

(as is also the case in the preceding and following ossicle). Between I Br 1 and 2 a close articulation. Axillary $h = \frac{3}{4}$ br, without a lateral flange. II Br—s: 2. Arms XII, 30 mm. Primipostaxillaries basally united inside. Br 2 on the outside twice as broad than on the inside.

Ex. of syzygies: 3 + 4, 12 + 13, 17 + 18, 21 + 22.. etc. with an interval of 3 to 4 oblique articulations.

P_1 19; 4.5 mm. (the 2 first segments strongly enlarged. 1st segment $h = \frac{1}{3}$ br with a wing which is broader than the br of the segment, 2^d segment $h = \frac{1}{2}$ br with a smaller wing, the following segments slender $h = 1\frac{1}{2}$ br, rather smooth, though angular). P_2 17; 7 mm. coarser than P_1 (1st and 2^d segments as in P_1 but more slightly alated, 3^d and the following segments $L = 3 - 4 \times$ br, distal segments shorter, with small distal, spiny whorls). P_3 10; 5 mm. (only the 1st segment with a wing). A wing on the 1st segment more and more inconspicuous out to P_{10} or P_{15} . Distal p. 15; 7 mm. (1st and 2^d segment a little enlarged $L = \frac{1}{2} - 1.1$ br, 3^d and following segments $L = 2 - 2\frac{1}{2}$ br. Last 4 segments shorter and more delicate, with distal, spiny whorls). Disk thrown off. Ectoparasitical *Eulima*.

Sp. 2 (St. 12) C. X 28—31, ± 11 mm. A dorsal spine from the 12th segment.

The R—s IR projecting. The carination on I Br 1 and 2 very slight and indistinct. Arms X, 32 mm. Syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 13 + 14 etc. with an interval of 3 oblique articulations.

P_1 21; 5 mm. P_2 14 +; 6 mm., P_3 13; 4.7 mm. Distal p. 13 +; 6 mm.

Disk thrown off. — The specimen sticking to an *Acanthogorgia Dofteni* KÜKTH. & GORZ.

The description evidently corresponds on the whole to A. H. CLARK's description of *Antedon thetis* which is a young form of *N. multicolor*. A characteristic in which specimen 1 differs from both the CLARKIAN descriptions, is a slight medio-dorsal carination of the radials and the I Br series.

Possibly the original Clarkian opinion that *Calometra* and *Neometra* ought to be united in one genus is the right one. The difference between the two genera, namely that P_1 and P_2 in *Calometra* are about as long as the following pinnules, in *Neometra* considerably longer, scarcely holds good (see the comparison given below).

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P _{Dist.}
<i>C. callista</i>	5 mm.	6—7 mm.	slightly	decreasing	—
<i>N. (C.) diana</i>	10 mm.	13—15 mm.	17 mm.	—	—
<i>N. sibogæ</i>	11—12 mm.	11—12 mm.	15 mm.	11 mm.	—
<i>N. alecto</i>	7 mm.	10 mm.	12 mm.	10 mm.	—
<i>N. multicolor</i>	—	much longer than P ₁ , very variable, usually twice	usually conside- rably smaller	—	—
<i>N. spinosissima</i>	10 mm.	a little longer	20 mm.	similar	—
My specimen 1 of <i>N. mult.</i>	4,5 mm.	7 mm.	5 mm.	—	7 mm.

When one takes into consideration that the length of P₂ in *N. multicolor*, as stated by CLARK, is very variable, I cannot think that the above quoted characteristic can be a genus-separating one. It may be true and applicable to full-grown individuals that the arms are X—XI in *Calometra* but XVI—XL in *Neometra* but this characteristic alone is hardly of genus-separating value. The other distinguishing marks which are given in the diagnosis of the two genera are (with the exception of the one cited below) common to both of them. *Calometra diana* seems to be an interesting intermediate link between *Calometra* and *Neometra*.

In one characteristic, however, both the genera seem to be separated and for the present I have not brought them together. The R—s are of different formation. In *C. callista* the interradial processes from R characteristic of *Neometra* are lacking and I Br-s 1 are therefore in lateral opposition. Judging from the figure given by CARPENTER (Chall. Exp.) the R—s in *C. discoidea* also seem to have a similar formation, though an evident approach to the *Neometra* type may be traced (cf. A. H. CLARK Smiths. Misc. Coll. Vol. 61: 15, p. 42). It is, however, also to be noted that other *Calometrid* genera (e. g. *Pectinometra*) often have an interradial prominence on the R—s.

Pectinometra A. H. CLARK.

P. flavopurpurea A. H. CLARK.

Fig. 72, 73.

Syn.: *Antedon discoidea* (part) 1906 Mc CLENDON Bull. Amer. Mus. Vol. 22, pp. 120, 125, 126 according to A. H. CLARK.

Antedon flavopurpurea 1907 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 33, p. 134.

Calometra flavopurpurea 1907 A. H. CLARK Smiths. Misc. Coll. Vol. 50, p. 363.

Pectinometra flavopurpurea 1912 A. H. CLARK Crin. Ind. Oc., p. 188; 1915 Wash. Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 215; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 138.

From St. 34 (5 sp.), 35 (1), 36 (1) = 7 specimens.

Sp. 1 (St. 36) Cd flattened, 2,2 mm., free dorsal pole 1,5 mm. C. XIX 21—24 (D) 25—27 (V), 9—12 mm. in two whorls, arranged in 10 rows. 4th segment a little longer than broad, 5th and 6th longest, L = 1¹/₄ br, then shorter again, distally L = 1/2 br. From the 7th segment a dorsal spine, compressed from the sides and therefore crista-shaped, distally shortened to a spine. Opposing spine similar to the preceding ones, h = 1/3 of the br of the segment. Terminal claw shorter than the penultimate segment.

R—s with a pointed interradial prominence which separates I Br-s 1. These ossicles with a medio-dorsal, slightly two-topped crista and small lateral prominences which meet above the radial processes. I Br 1 \bar{h} = 1/3 br. I Br 2 h = 1/2 br, in the proximal half a crista continuing this one on I Br 1. II Br-s: 2. Arms XVIII, 50 mm. II Br 1 basally contiguous inside, with a lateral process on the proximal outer margin. A similar though indistinct one on Br 1. II Br 1—2 with an indistinct synartrial prominence. Br 2 twice as narrow on the inside, thickened on the outside to receive P₁. Example of division of arms and distribution of syzygies:

$$\begin{array}{l}
 \text{I } 1-2 \left\{ \begin{array}{l} \text{II } 1-2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Br } 1-2 \ 3+4 \dots 13+14 \dots 19+20 \dots 25+26 \dots \\ \text{Br } 1-2 \ 3+4 \dots 12+13 \dots 18+19 \dots 26+27 \dots \\ \text{Br } 1-2 \ 3+4 \dots 11+12 \dots 17+18 \dots 22+23 \dots 27+28 \dots 32+33 \dots \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{array}$$

The segments not overlapping, distally somewhat longer than broad.

P_1 13; \pm 4 mm. (much more slender than the following p. Two first segments with wing-like processes, 1st segment $br = 3 h$, 2^d one $br = 2\frac{1}{2} h$, 3^d segment about cubical. Distal segments slender, longer than broad), P_2 10; 4,2 mm. P_3 9; 3,7 mm. P_4 9; 3,8 mm. with still more insignificant wings. Distal p. 15—16; 6,5 mm. (1st and 2^d segments short and somewhat swollen, last 3 slender with distal spiny whorls. The other segments smooth, $L = 3 - 4 \times br$). Disk thrown off. Colour (in spirit) yellow-brown, cirri with white and red-grey bands alternating.

Two *Myzostomas* on the pinnules.

Sp. 2 (St. 35) Cd 3 mm, free dorsal pole 2,5 mm. C. XX 25—30; 14—18 mm. arranged in 5 interradian groups, separated by radial interspaces.

R—s not very much IR prolonged. Arms XVII, 65 mm. II Br-s: 2. Br segments about 100. The bases of the arms bent outwards from Cd at almost a right angle. Syzygies with an interval of 4—6(—11) oblique articulations. The segments slightly overlapping and serrate.

P_1 14—15; 4—5,2 mm. (3^d segment $h = 1\frac{1}{2} br$), P_2 14; 6,8—7 mm. (4th—10th segment $L = 2 - 2\frac{1}{2} br$), P_3 13; 6,5 mm. coarser than the two preceding ones, P_4 9+; 4,7 mm. A wing on the first two segments out to P_7 . Distal p. 15—17; 7,5—8 mm. The pinnules are stiff.

Disk 5 mm. with close calcareous granules. Anal cone 2 mm. narrow, with coarse calcareous granules. Colour: arms with yellow and violet bands alternating (= all the following specimens), cirri as in *Sp. 1*.

Sp. 3 (St. 34) Cd 2,3 mm., free dorsal part 1,8 mm. C. XX 22—31; 9—17 mm., indistinctly separated in groups. R—s with small interradian prominences. Arms XVIII (+ I?), 75 mm. P_1 18; 5,5 mm., P_2 19; 8 mm., P_3 17; 8,5 mm., P_4 15; 8 mm. Distal p. 15—16; 9—9,5 mm.

Sp. 4 (St. 34) Cd 3,2 mm., free dorsal pole 2,5 mm. C. XXIII 29—33; 14—18 mm. Arms \pm XX, 85 mm. R—s not very much IR prolonged. I Br-s I contiguous basally. Syzygies with an interval of (6—)11—14 oblique articulations. — P_1 19 segments, P_2 21; 9,5 mm. P_{10} 13; 6,2 mm. Distal p. 15; 9—9,5 mm.

Sp. 5 (St. 34) Cd 4 mm., bare pole 3 mm. C. XXII 27—37; 17—24 mm. The cirrus-groups IR well separated. I. Brax almost without median tubercle, $h = \frac{1}{2} br$. Arms \pm XX. P_1 22; 7 mm. — Disk coarsely granulated, strongly incised, largest diameter 8 mm., smallest 4 mm.

Sp. 6 (St. 34) C. XXII 25—31; 14—20 mm. Arms \pm XX, 90 mm. Br-segments about 130, from about Br 100 a slight median carination. Syzygies with an interval of 4—10 oblique articulations. — P_1 18; 5,5 mm. P_2 17; 9,5 mm, P_3 16—17; 8,5—9 mm., P_4 16; 9,5 mm., P_9 13; 6 mm. Distal p. 17; 9—10 mm. — Disk regenerating, 3,5 to 7 mm. in diameter.

Sp. 7 (St. 34) The dorsal, free surface of Cd 2 mm. C. XIX 25—35; 14—18 mm. Arms \pm XVI, 45 mm. — P_1 15; 4,5 mm. P_2 17; 7 mm. Distal p. 14; 8,5 mm. P_a small 3,5—4 mm. P_b and P_c 17, \pm 9 mm. Disk regenerating.

The interradiial prominences of the R—s most distinct on the youngest specimens, then the I Br-s I increase more rapidly and come in lateral apposition. In the largest specimens I Brax is almost rhombic with variable carination. The wing-like prominences on the 1st and 2^d segments of the proximal pinnules are in *Sp. 6* distinct out to about P_{10} but still noticeable on the distal pinnules.

Thalassometridæ A. H. CLARK.

Pterometra A. H. CLARK.

Pt. trichopoda A. H. CLARK.

Fig. 101, 102.

Syn.: *Ptilometra trichopoda* 1908 A. H. CLARK Wash. Smiths. Misc. Coll. Vol. 52, p. 224.

Pterometra trichopoda 1911 A. H. CLARK Wash. Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 39, p. 545; 1912 Crin. Ind. Oc., p. 190; 1915 Monograph, p. 81; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 143.

From St. 75 (1 sp.), 48 (1), 59 (3) = 5 specimens.

Sp. 1 (St. 45) Cd h = 2 mm., br = 2 mm. with 5 radially arranged warts on the dorsal cone.

C. XXIV 67 (D)—75 (V), 38—44 mm. arranged in 10 rows, 2 rows in every radius, and 2 or 3 cirri in every row. 4th segment cubical, 5th to about 20th L = 1½ br, then shorter segments again. Distal

segments $L = \frac{1}{2}$ br with a strong dorsal spine ($h = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$ of the br of the segment) from the 30th or the 40th segment. 5th—12th with a large ventral spine in the distal margins of the segments. The ventral spine curved and projecting over a part of the following segment, $L = \frac{1}{3}$ of the br of the cirral. Terminal claw about as long as the preceding segment.

B—s projecting in the corners. R—s $h = \frac{1}{8}$ br with a medio-dorsal tubercle, sharply set off on the ossicle. I Br 1 $h = \frac{1}{4}$ br, laterally contiguous in the basal parts, with a longitudinal crista. I Br 2 $h = \frac{1}{3}$ br with a similar crista on the proximal $\frac{2}{3}$ of the ossicle. A similar prominence also on the II Br—s and on Br 1—2. II Br—s: 2. Arms XX, 60 mm. Br 1—9 discoidal, then oblique joints. Distal segments (from about the 40th segment) provided with a slight dorsal spine as in an *Asterometra*-species. Ex. of syzygies: 3 + 4, 16 + 17, 23 + 24, 30 + 31 . . etc.

P_1 11; 4,5 mm. P_2 16; 8 mm. P_3 11; 8 mm. P_6 12; 9 mm. (1st segment $L = \frac{1}{2}$ br, 2^d about cubical, 3^d and the following ones $L = 1 \frac{1}{2} - 2 \times$ br, prismatic, smooth). Distal p. 18; 10 mm. (the last 6 segments more delicate, slightly collar-shaped). — Disk thrown off. Colour (in spirit): arms and p—s white-grey. Cirri violet.

Sp. 2 (St. 48). C. XV 64—70; 35—44 mm. Arms XIV, 50 mm. II Br—s: 2.

P_1 8; 4,2 mm. P_2 10; 5,2 mm. P_3 10; 5,8 mm.

Sp. 3 (St. 59) C. XVI 61—68; 30—35 mm. A dorsal spine from the 22th (—26th) segment; the ventral spine from the 4th—the 10th (or 12th) one.

R—s $h = \frac{1}{6}$ br. I Brax $h = \frac{1}{2}$ br. Arms XIV +, broken. — P_1 7 +, 3,5 mm. Disk 6,5 mm. with calcareous granules. — Differing from *Sp.* 1 by the lower and dorsally smooth Cd. A younger specimen.

Sp. 4 (St. 59) Cd $h = 3$ mm., dorsally as in *Sp.* 1. C. XXII 66—84; 30—48 mm. The ventral spine from the 4th to the 13th segment. — Primipostaxillaries basally contiguous inside. I Br 1 and II Br 1 with the proximal borders somewhat bent outwards on both sides of the median line. In the latter case (II Br 1) this condition only on the outside. Arms XX, broken. II Br—s: 2. Syzygies with an interval of 6—7 oblique articulations. The Br—s with a blunt dorsal

spine from about the 15th segment. P_1 10 +, 5 mm. Disk 10 mm., thrown off.

Sp. 5 (St. 59) Cd h = 1.5 mm., with 5 indistinct, radial tubercles, and a slight central prominence. — C. XV 68—75; 32—37 mm. The ventral spine from the 4th—10th segment. Dorsal spine from the 20th—25th.

Arms XVII, broken. II Br—s: 2. P_1 9; 4 mm. Disk very much incised and granulated. Longest diameter 6, shortest 3 mm.

The proximal parts of the animals narrow; the arms after about Br 8 strongly bent outwards. Differ from the original specimen chiefly by having fewer arms and a somewhat smaller size.

Asterometra A. H. CLARK.

A. macropoda A. H. CLARK.

Fig. 99, 100.

Syn: *Antedon macropoda* 1907 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 33, p. 136.

Ptilometra macropoda 1908 A. H. CLARK Wash. Smiths. Misc. Coll. Vol. 50, p. 359.

Asterometra macropoda 1908 A. H. CLARK Bull. Mus. Comp. Zool. Vol. 51, p. 245; 1912 Crin. Ind. Oc. p. 193; 1915 Monograph pp. 155, 235 etc.; Wash. Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 215; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 141.

From St. 12 = 2 specimens.

Sp. 1 (St. 12) Cd: br = 3 mm., visible h = 2 mm. 5 dorsal, close, radial tubercles arranged round a small, central cavity. — C. XVI 55—75; 45—55 mm. in 5 groups separated by inconspicuous radial interspaces. The 10th to the 25th segments: $L = 1\frac{1}{3}$ — $1\frac{1}{2}$ br. From about the 30th segment $L = \text{br}$, from the 40th $L = \frac{2}{3}$ br, the distal segments $L = \frac{1}{2}$ br. About the 25th segment the cirrus becomes serrate on the dorsal side in lateral profile. The dorsal spine h = $\frac{1}{4}$ of the br of the segment, on the distal segments smaller. Opposing spine h = $\frac{1}{3}$ of the br of the segment. Terminal claw a little shorter than the penultimate segment. Cirri laterally pressed together.

R—s h = $\frac{1}{3}$ br, with a small tubercle well limited. I Br—s 1 baso-laterally fused, somewhat broader than the R—s, in close synarthrial articulation with the axillary. No synarthrial prominence. Axil-

lary $h = 1/2$ br. Arms X, 65 mm. Br—s 1 inside united in pairs to $1/3$ of the h , like Br 2 broader on the outside. The ossicles laterally flattened out to Br 4. After Br 10 oblique joints. Syzygies usually 3 ± 4 , $21 + 22$, $32 + 33$, $42 + 43$ etc. with an interval of 8–10 oblique articulations. In one abnormal case, however:

$$I \ 1-2 \ \left\{ \begin{array}{l} \text{Br } 1-2 \ 3 + 4 \ (5 + 6) \dots 22 + 23 \dots 38 + 39 \dots \\ \text{Br } 1-2 \ \dots \dots \dots 27 + 28 \dots \end{array} \right.$$

After Br 50(–60) a prominent, distally directed, median, dorsal claw which on the outermost segments becomes a strong spine, $h = 1/3-1/2$ of the br of the Br, when viewed in lateral profile. 7–8 of the most distal Br—s with rudimentary pinnules.

P_1 9–10; ± 5 mm. (P_a 10; 5 mm., a little more slender) coarse and thick with prismatic pinnulars. 1st and 2^d segments short, the other ones somewhat longer than broad. P_2 8–10; 5 mm., P_3 similar, Distal p. 16; 6,5 mm. Disk thrown off. Colour (in spirit) white.

Sp. 2 (St. 12) C. XV 85–90; 75–80 mm. A dorsal spine from about the 40th segment.

I Br 1–2 with a slight synarthrial prominence. Each of the two ossicles with a central, inconspicuous, small wart. I Br 2 moreover with 2 low ridges starting from the wart and running proximolaterally. Arms X, 70 mm. Ex. of syzygies: $3 + 4$, $9 + 10$, $13 + 14$, $19 + 20 \dots$ or $3 + 4$, $(7 + 8)$, $14 + 15$, $19 + 20$, $26 + 27$, $32 + 33$, $44 + 45, \dots$ A dorsal Br spine from about the 50th segment. The rudimentary Br—s are 8.

P_1 13; 5,5 mm., P_2 10; 5,7 mm., P_3 11; P_4 12; 6 mm., P_a 14; P_b 11. of about the same length. Distal p. 16–20; 7 mm. (1st and 2^d segment shorter and a little thicker than the following ones, the L of which is $1 1/2 \times$ br). The pinnules laterally compressed and therefore with a dorsal rim. — Disk thrown off.

The specimens are closely related to *A. macropoda*, from which they differ by having almost smooth proximal brachials. *Sp.* 1 is a rather young individual with cirri shorter than the arms. The radial, dorsal tubercles of Cd are, however, well developed and by this it can easily be distinguished from *A. anthus*. The dorsal spines of the cirri are not so prominent and pointed as in *A. anthus* (cf. the figures).

Asterometra anthus A. H. CLARK.

Fig. 92—98, Photo 16.

Syn.: *Antedon longicirra* (part) 1893 BELL Journ. Linn. Soc. Vol. 24, p. 339.*Antedon anthus* 1907 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 33, p. 136.*Ptilometra anthus* 1908 A. H. CLARK Smiths Misc. Coll. Vol. 50, p. 359.*Asterometra anthus* 1912 A. H. CLARK Crin. Ind. Oc., p. 193; 1915 Wash. Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 215; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B. p. 141.*Asterometra acerba* 1909 A. H. CLARK Proc. Biol. Soc. Vol. 22, p. 147; 1912 Crin. Ind. Oc., p. 193; 1915 Monograph p. 181; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B. p. 141.*Asterometra lepida* 1908 A. H. CLARK Wash. Proc. Biol. Soc. Vol. 21, p. 229; 1909 Videnskabl. Meddelser, København, p. 181; 1912 Crin. Ind. Oc., p. 195; 1915 Wash. Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 215; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B. p. 141.

From St. 45 (5), 46 (2), 47 (5), 53 (11), 54 (2), 55 (1), 56 (7), 57 (1), 59 (20) = 54 specimens.

Sp. 1 (St. 51) Cd pointedly conical, br 3 mm., visible h = 3 mm. Dorsal pole smooth, arched, somewhat hollowed at the top.C. XVII 80—81; 50—55 mm. arranged in rows which are separated by radial interspaces. 1st and 2^d segments short, then increasing to cubical or a little longer (5th—20th segment), distally decreasing again, from about the 40th segment $L = \frac{1}{2}$ br. Usually the 3^d(or 5th)-about the 15th segments have a dorsal crista, which is most marked on the proximal segments. The 15th—25th segments are most often more or less smooth, then a dorsal crest appears, which distally becomes pronounced to dorsal spines. Opposing spine larger than the preceding ones, $h = \frac{1}{2}$ of the br of the segments (3—5 last segments before the penultimate one have very slight dorsal spines or lack them entirely. Terminal claw short, as long as the preceding segment).R—s $h = \frac{1}{4}$ br with a tubercle on the medio-dorsal part. I Br 1 baso-laterally united, br = $2\frac{1}{2} \times L$. I Brax low pentagonal, like the preceding ossicle with an indistinct, median, longitudinal crista. II Br—s : 2, similar to the I Br—s. Arms XVI, 65 mm. Primipostaxillaries connected basally in pairs. Arms laterally sharply flattened out to about Br 10. Ex. of syzygies: 3 + 4, 12 + 13, 22 + 23, 30 + 31, 37 + 38 ... or 3 + 4, 13 + 14, 21 + 22, 28 + 29, 35 + 36, 41 + 42, 48 + 49, 55 + 56 .. in a single case 4 + 5, 13 + 14 ... After Br 10 decidedly

triangular segments. The Br—s with a median, dorsal, distally directed spine after the 40th(—50th) segment. The last 10 Br—s with rudimentary pinnules.

P₁ 12; 5 mm. (1st segment shorter than long, the following ones L = 1 1/2—2 br, smooth, prismatic), P₂ 12; 5,5 mm. P₃ 12; 6 mm. P₁₀ 15; 8 mm. Distal p. 18; 10 mm. (The L of the segments = 2 br).

Disk 8,5 mm. Colour (in spirit) yellow-brown. In life probably flame-coloured (the spirit and still more the formalin in which the following specimens are preserved brightly red-coloured). — One arm with an entoparasitical gastropode (*Stylina?*).

Sp. 2 (St. 56) Cd br 4 mm., h 4 mm. The dorsal cavity slightly developed. No distinct dorsal spine on the cirri before the 20th(or 25th) segment (the 6th—12th segment with a slightly indicated dorsal crista). Syzygies in some cases 1 + 2 3 + 4.. or 3 + 4 5 + 6. Example:

$$\begin{array}{l}
 \text{I 1-2} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Br 1-2 3 + 4... 7 + 8 9 + 10... 13 + 14.. 20 + 21..} \\
 \quad \quad \quad 27 + 28... 33 + 34... 39 + 40... \\
 \text{II 1-2} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Br 1 + 2 3 + 4.. 9 + 10.. 15 + 16.. 20 + 21.. 28 + 29..} \\
 \quad \quad \quad 34 + 35.. 40 + 41.. 45 + 46.. \\
 \text{Br 1-2 3 + 4... 10 + 11... 17 + 18... 25 + 26.. 32 + 33..} \\
 \quad \quad \quad 38 + 39.. 43 + 44.. 48 + 49..
 \end{array}
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

Parasitic *Stylinas*. For further details, as in the following specimens, see the table.

Sp. 3 (St. 56) Cd without dorsal cavity. Cirrals with a dorsal crista on most of the C. from the 4th—5th segment. No gap between this and the dorsal spines, which occur from about the 15th segment. The arms laterally flattened to Br 4. A dorsal spine on the Br—s from about the 60th segment. Last 8 segments with rudimentary p—s. — Parasitic *Stylinas*.

Sp. 4 (St. 56) Cd lower than in the preceding specimen, not conical at the top. H: 1,5 mm., br 2,5 mm. No dorsal cavity. — Cirrals 3—5 with a dorsal spine, then a crista. About the 15th segment smooth cirrals which gradually become dorsal spines distally. — R—s with a slight tubercle. Dorsal spine from the 40th Br.

Sp. 5 (St. 56) Cd and C. as in *Sp. 4*. R—s with a very high and well marked tubercle. I Br 1 with a trace of a crista. Br—s with a dorsal spine from about the 20th segment. Last 7 segments with rudimentary pinnules.

Sp. 6 (St. 56) 3^d—5th cirral with a small dorsal spine; 6th—10th (or 15th) segments smooth. R—s with a very small tubercle. Dorsal spine from the 40th Br.

Sp. 7 (St. 56) A rather small specimen. The cirrus-segments longer than in the preceding specimens. 2^d—6th cirral with both a ventral and a dorsal crista, 7th—10th (or 12th) segments smooth. — R—s with a high prominence. I Br—s almost smooth. Example of syzygies: 3 + 4, 14 + 15, 22 + 23, 31 + 32 . . . Dorsal spine from the 35th Br. 2—4 segment with rudimentary p—s. — Parasitic *Stylina*.

Sp. 8 (St. 59) Cd pointedly conical, h = 3 mm. Cirri with a dorsal spine from 3^d—7th (or 15th) segments, after these usually some smooth cirrals. 9th—25th segments longer than broad. All the distal segments with spines. Opposing spine usually not longer than the preceding ones. — R—s h = $\frac{1}{3}$ br. Arms laterally flattened out to Br 8. Dorsal claw from the 60th Br. Colour red-brown.

Sp. 9 (St. 59) More often than in *Sp. 8* weak spines before the opposing spine. R—s: h = $\frac{1}{3}$ br with a dorsal crista. Dorsal claw from the 50th or 60th Br, h = $\frac{1}{3}$ of the br of the segment. The L of the distal pinnulars = 2 $\frac{1}{2}$ br.

Sp. 10 (St. 59) H of Cd 2,5 mm. No dorsal spine before the 20th (—25th) cirral. From about Br 65 a dorsal claw, h = $\frac{1}{5}$ of the segment.

Sp. 11 (St. 59) R—s: br = 2 $\frac{1}{2}$ × L. Dorsal claw from about Br 50, the h as in sp. 10.

Sp. 12 (St. 59) Cd rather bluntly conical, h = 2 mm. R—s with a very slight dorsal tubercle. The proximal Br—s a little knobby. Dorsal spine from the 50th (—60th) Br. The L of distal pinnulars 2 $\frac{1}{2}$ — 3 × br.

Differs by having a somewhat lower and more rounded Cd and a weaker radial tuberele.

Sp. 13 (St. 59) H of Cd 3 mm. R—s: h = $\frac{1}{4}$ br with a slight dorsal tubercle. Arms broken. 1st syzygy in one case between Br 1 and 2. Fewer pinnulars on P₁ (8) after II Brax. Disk 7 mm.

Sp. 14 (St. 59) Cd pointedly conical, $h = 2,8$ mm. The proximal row of prominences on the cirri indistinctly separated from the distal one. R—s $h = \frac{1}{3}$ br with a dorsal tubercle, indistinctly limited distally. Dorsal spine from the 50th Br.

P_4 10; 6 mm., P_5 14; 7,5 mm. The longest segments on the distal p—s at least $L = 3$ br. Disk 6 mm.

Sp. 15 (St. 59) R—s $h = \frac{1}{4}$ br with a dorsal crista. Dorsal spine from about the 40th Br. P_4 11; 6 mm. The L of the distal pinnulars = $2 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{2}$ br.

Sp. 16 (St. 59) II of Cd 3 mm., bluntly conical. R—s: $h = \frac{1}{5}$ br with a dorsal tubercle. A dorsal claw from the 60th Br ($h = \frac{1}{3}$ of the br of the segment). P_4 13; 8,5 mm. The L of the distal pinnulars $2 - 2 \frac{1}{2}$ br. — Parasitic *Stylina*.

Sp. 17 (St. 59) R—s $h = \frac{1}{4}$ br with a dorsal tubercle. Dorsal claw from Br 50. The L of distal pinnulars $2 \frac{1}{2} - 3$ br.

Sp. 18 (St. 59). Cd bluntly dome-shaped, $h = 4,5$ mm. Cirrus-marks arranged in 5 groups; in each group 3—5 C. All the cirri thrown off. R—s $h = \frac{1}{5}$ br. Arms sharply flattened laterally out to Br 4. Dorsal spine from about Br 55. An example of multiplicative regeneration of arms:

$$I \ 1-2_1 \left\{ \begin{array}{l} II_1 \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l} Br_1 \\ Br_1 \end{array} \right. \\ \\ II_1 \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l} Br_1 \\ Br_1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Sp. 19 (St. 59) Cd a pointed cone. R—s: $h = \frac{1}{3}$ br with a dorsal crista. A dorsal claw from about Br 55. The L of distal pinnulars $2 \frac{1}{2}$ br.

Sp. 20 (St. 59) H of Cd 3,5 mm. R—s $h = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$ br with a dorsal crista. A dorsal spine from Br 55. The L of distal pinnulars $2 \frac{1}{2} - 3$ br.

Sp. 21 (St. 59). Dorsal Br spine from about the 40th segment, slowly increasing. The L of distal pinnulars $2 \frac{1}{2}$ br.

Sp. 22 (St. 59) H of Cd 2,5 mm., pointedly conical. R—s $h = \frac{1}{4}$ br with a dorsal tubercle. Dorsal Br-spine appearing first about the

75th segment, rather low. P_4 12; 6,5 mm. The L of distal pinnulars 2—2¹/₂ br.

Sp. 23 (St. 59) R—s $h = \frac{1}{3}$ br with a slight tubercle. Dorsal Br-spine from the 50th segment. The L of distal pinnulars 2 br.

Sp. 24 (St. 59) H of Cd 3 mm., cylindrical, dorsally rounded with a small cavity. R—s $h = \frac{1}{6}$ br with a dorsal crista; a slight carination on I Br 1 and 2. Dorsal Br-spine rather weak, from about the 50th segment. The L of distal pinnulars 2 br. — Parasitic *Stylinas*.

Sp. 25 (St. 59) R—s $h = \frac{1}{4}$ br with a dorsal tubercle. I Br 1 smooth. Arms broken.

Sp. 26 (St. 59) Cd a rather low ($h = 2$ mm.), pointed cone. The short dorsal cirri with the 7th—14th segments slender, L = 2 br. — R—s $h = \frac{1}{3}$ br with a dorsal crista. Dorsal Br-spine from the 50th segment. The L of the distal pinnulars 2—2¹/₃ br. Disk 7 mm.

Sp. 27 (St. 59) H of Cd 3,5 mm. R—s $h = \frac{1}{3}$ br with a dorsal crista. Dorsal Br-spine from the 50th segment. The L of the distal pinnulars 2—2¹/₂ br.

Sp. 28 (St. 46) Cd: h : 3, br : 3 mm. Most cirri broken or very small. From the 7th cirral a dorsal crista which is gradually transformed into a dorsal spine. R—s $h = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ br with a small dorsal tubercle. B—s IR visible. Dorsal Br-spine from about the 55th segment, strongly curved, slowly increasing. The L of the distal pinnulars 2¹/₂—3 br.

Sp. 29 (St. 46) A young individual. Cd smaller, $h = 1$ mm. Cirri slender, as in the dorsal whorl in older specimens. R—s: $h = \frac{1}{4}$ or $\frac{2}{3}$ br with a dorsal longitudinal crista. The arm-bases laterally flattened out to Br 4. Dorsal Br-spine from the 50th segment; because of the shortness of the arms only a small part of the arms spiny. The L of the distal pinnulars 2¹/₂ br.

Sp. 30 (St. 53) R—s $h = \frac{1}{5}$ br with a dorsal tubercle. Dorsal Br-claw from the 45th segment. The L of distal pinnulars on the distal pinnules 2 br.

Sp. 31 (St. 53) Cd with an arched and rounded dorsal pole. The proximal and distal series of prominences on the cirri not distinctly separated. R—s $h = \frac{1}{4}$ br with a dorsal spine or crista. II Br—s as always : 2. A pair of new regenerated arms of somewhat unequal size.

Dorsal Br-claw from about the 50th segment P₅ 10; 7 mm. P₈ 13; 7,5 mm. The L of distal pinnulars = 2—2¹/₂ br.

Sp. 32 (St. 53) R—s h = ¹/₃ br with a dorsal crista. Dorsal Br-claw from the 50th segment. The L of distal pinnulars 2 br.

Sp. 33 (St. 53) R—s as in the preceding specimen. Dorsal Br-spine from the 50th segment. P₅ 14; 7 mm. — The L of distal pinnulars 2—2¹/₂ br. P₃ of an arm grown out to a complete new arm.

Sp. 34 (St. 53) Cd rather low. Cirri typical. R—s h = ¹/₂ br with a dorsal crista. A very indistinct carination of I Br 1 and 2 and Br 1 and 2. Dorsal Br-spine from the 50th segment, rather low but rapidly increasing the last cm. The L of the distal pinnulars 2¹/₂ br.

Sp. 35 (St. 53) H of Cd 2,5 mm., pointedly conical. R—s h ¹/₃ br with a dorsal crista. Dorsal Br-spine from the 50th segment. The arms with 80—90 Br—s. The L of distal pinnulars 2 br. — Parasitic *Stylinas*.

Sp. 36 (St. 53) Cd as before. Dorsal Br-spine from about the 40th segment. The Br-segments 70—75.

Adolescent or juvenile specimens.

Sp. 37 (St. 53) Cirri: 1st segment short, 2^d somewhat longer than broad, 3^d L = 2¹/₂ br, 4th and 5th cirral L = 2 br, 6th segment L = 1¹/₂ br, distally widened, 7th and the following ones L = br, with an inconspicuous dorsal carination, which is transformed distally into a dorsal spine. Opposing spine h = ¹/₂ of the br of the segment. Terminal claw about as long as the penultimate segment.

B—s especially projecting in the corners, form basally a narrow, continuous ring. R—s h = 1¹/₂ br, with a strong, longitudinal crista in the proximal ²/₃. R—s laterally contiguous, enclose practically the whole intestinal sac. I Br—s 1 with a medio-dorsal crista, like the axillaries well separated from each other laterally. The entire arm only 13—18 segments.

P₁—P₃ usually absent. Sometimes, however, P₁ and P₃ developed. Observe the considerable length of the distal pinnules, when compared with the arm. The Br—s, especially Br 8 and 11, appear almost as axillaries because of the relatively great size of the pinnules. Example of pinnulation:

$$R \ I \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l} Br \ 1-\bar{2} \ 3+4 \ 5 \ 6 \ \bar{7} \ \bar{8} \ \bar{9} \ 10+11 \ \bar{12} \ \bar{13} \ \bar{14} \ 15 \ 16 \ 17 \\ Br \ 1-2 \ 3+4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \bar{8} \ \bar{9} \ 10+\bar{11} \ \bar{12} \ \bar{13} \end{array} \right.$$

Disk concealed, probably with orals; compare for instance sp. 38, 44, 45, 50, 51.

Sp. 38 (St. 53) The L of the distal pinnulars = 3 br. Rudimentary *orals*.

Sp. 39 (St. 53) and *Sp.* 40 (St. 53) The L of the distal pinnulars on the distal p—s $2^{1/2}$ br.

Sp. 41 (St. 45) L of cirral 5—7 = $1^{1/2}$ br. The L of the distal segments = br. A dorsal spine from cirral 10. — B—s projecting IR as small prominences. R—s h = $1^{1/2}$ br, in lateral apposition, with a strong longitudinal crista, proximally ending in a blunt spine. I Br—s 1: h = $1/2$ br. I Brax h = $2/3$ br. A slight synarthrial carination. Arms »wall-sided« with small lateral crests out to Br 2. The entire arm with 40 Br—s. A dorsal Br-spine from the 25th segment. The distal pinnulars with small spiny whorls in the distal ends. 3^d and 4th pinnular L = 3 br.

Sp. 42 (St. 45) — *Sp.* 43 (St. 45) —.

Sp. 44 (St. 45). The L of the segments of the dorsal cirri $1^{1/2}$ — 2 br. Complete pinnulation. Small *orals*.

Sp. 45 (St. 45) P₂ wanting. *Orals* large and well developed, covering $1/3$ of the radius of the disk.

Sp. 46 (St. 47) R—s: h = $2/3$ br with a dorsal crista. The L of the distal pinnulars of the distal pinnules 2 br.

Sp. 47 (St. 47) R—s h = $1^{1/2}$ br. An indistinct median crista on I Br 1 and 2. The L of the distal pinnulars = $2^{1/2}$ br.

Sp. 48 (St. 47) R—s h = $1^{1/2}$ br. The L of the distal pinnulars $2^{1/2}$ —3 br. *Orals* resorbed.

Sp. 49 (St. 47) R—s: h = br. I Br—s 1 and 2 rather smooth.

Sp. 50 (St. 47) R—s: h \geq br. A crista on I Br 1 and 2 with slight medio-dorsal tubercles. P₂ sometimes lacking. The L of the distal pinnulars $2^{1/2}$ br. *Orals* thin, but well preserved.

Sp. 51 (St. 54) 4th cirral the longest L = 3 br. Dorsal spine from the 6th (— 10th) segment. — R—s h = $1^{1/2}$ br, with a well bordered median tubercle. I Br—s 1 and 2 similar, but with a median keel, h = $2/3$ and $1/1 \times$ br respectively. A slighter keel on Br 1 and 2.

I Br 1 and Br 1 with a slight lateral carination. P_2 lacking. Small orals.

Sp. 52 (St. 54) R—s h = br. I Br 1 and 2 with a rather distinct median crista. The L of the distal p—s = 2 br.

Sp. 53 (St. 55) 3^d—6th cirral the longest, L = 2^{1/2} br. L of the distal segments 1^{1/2} br. A dorsal carination from cirral 9. Opposing spine: h = ^{1/2} of the br of the segment.

B—s as in *Sp.* 37. R—s h = ^{1/2} br, with a high carina, IR somewhat extended and projecting as flaps between I Br—s 1. The very last Br-segments with a small dorsal spine. The pinnule-supporting Br-s usually shaped like axillaries. — The first pinnule most often on Br 7 (sometimes also a small P_1). An axillary partly supports a long arm on the left, which is 5 mm. long, and provided with a small P_1 and distal pinnules, and partly a smaller arm on the right, 2 mm., without pinnules. Of the remaining arms too the right ones are usually a little shorter than the left ones. P_3 12; 2 mm. Example of pinnulation:

$$R \ I \ 1-2 \ \left\{ \begin{array}{l} Br \ 1-2 \ 3 + 4 \ 5 \ 6 \ \bar{7} \ \bar{8} \ \bar{9} \ \underline{10} \ \overline{11} \ 12 + \underline{13} \ 14 \ 15 \\ Br \ 1-2 \ 3 + 4 \ 5 \ 6 \ \underline{7} \ \underline{8} \ \underline{9} \ \underline{10} \ \underline{11} \ \underline{12} \ 13 \ 14 \ 15 \end{array} \right.$$

Sp. 54 (St. 57) R—s h = br. I Br 1 and 2 rather smooth. P_2 missing. The L of the distal pinnulars = 2 br. Disk 1,8 mm. Orals resorbed. A small intumescence for a parasitic *Stylina*.

Generally the radial crista is more distinct on the R—s in younger specimens since the R—s are longer then. With increasing age the R—s are more and more concealed by Cd, and shortened by the rapid increase in the breadth. By this the crista also grows smaller and finally only remains as a rounded tubercle.

An investigation of the number of arms in the (nearly) full-grown specimens 1—36 shows the following distributions. X arms: 18 specimens, XI: 9 sp., XII: 5 sp., XIII: 2 sp., and XVI: 2 sp. It is rather peculiar that the largest specimens often have only X arms, while the multibrachiate specimens have shorter arms. A similar condition is also noticed in *Cyllometra pulchella* and has perhaps something to do with the catching of the food.

THE CRINOIDS FROM DR. S. BOCK'S EXPEDITION TO JAPAN 1914. 111

Number of Specimens and Stations	Cirri			Arms		Interspace of obliq. artic. between the syzygies	P ₁		P ₂		P ₃		Dist. p.	
	N	S	L	N	L		S	L	S	L	S	L	S	L
Sp. 1 (St. 56)	XVII	80-81	50-55	XVI	65	6-9	12	5	12	5,5	12	6	18	10
Sp. 2 (St. 56)	XX	85-90	60-70	XII	90-100	4-7	13	6	13	7	13	6,5	17-9	11
Sp. 3 (St. 56)	XX	71-86	40-56	XI	80	4-6	12	5,5	9	5,5	9	6	18-19	11,5
Sp. 4 (St. 56)	XVI	69-76	40-55	X	70	6-11	8	4	10	5	10	5	16	10
Sp. 5 (St. 56)	XVI	59-82	26-54	X	80	6-8	—	5	—	5,5	—	5	19	10
Sp. 6 (St. 56)	XVI	57-68	35-48	XII	55	6-9	9	4,5	9	5,5	7	6	15	8
Sp. 7 (St. 56)	XIII	39-62	14-29	X	35	—	9	3,5	9	4	10	4	16	7
Sp. 8 (St. 59)	XVII	77-90	45-65	X	95	4-6	12	7	12	8	9	7,5	16	11
Sp. 9 (St. 59)	XIX	56-75	40-50	XI	75	6-7	12	5,5	11	6,5	7	9	5	18
Sp. 10 (St. 59)	XVII	65-85	45-60	XI	85	4-6	14	6,5	14	8,5	13	8	22	12,5
Sp. 11 (St. 59)	XVIII	65-85	40-65	X	85	5-10	11	5,5	11	6	11	6	20	13
Sp. 12 (St. 59)	XX	65-80	40-55	X	95	6-11	12	6,5	12	7,5	11	7	22	13,5
Sp. 13 (St. 59)	XXI	55-+	35-+	XIII	—	—	8-10	5	9-10	6	8	5,5	—	—
Sp. 14 (St. 59)	XX	60-70	30-55	X	85	4-5	11	6,5	13	9	11	8	21	12,5
Sp. 15 (St. 59)	XVIII	50-65	30-50	XI	70	6-9	11	6	11	6,5	9-10	6,5	18	11
Sp. 16 (St. 59)	XXII	—	—	XI	95	4-7	12	7	13	9	11	7	—	10+
Sp. 17 (St. 59)	XX	61-82	40-65	X	85	4-6	—	—	12	7	10+	7	17-20	11,5-13,5
Sp. 18 (St. 59)	XX	—	—	XII	100	6-7	13	7	14	9,5	12	8	—	12+
Sp. 19 (St. 59)	XVII	65-83	38-68	X	85	(3-5)-6	—	—	—	—	—	—	19	11,5
Sp. 20 (St. 59)	XXII	72-82	55-73	X	105	6	—	—	—	—	—	—	22	15
Sp. 21 (St. 59)	XIX	75-86	38-63	X	85	5-6	—	—	—	—	—	—	17	11
Sp. 22 (St. 59)	XXI	55-75	30-57	X	75	6-7(-17)	10	5	12	5,5	10	6	20	11
Sp. 23 (St. 59)	XVIII	56-76	32-57	XI	65	4-6	—	5	11	5,7	10	6	19	10,5
Sp. 24 (St. 59)	XXIII	68-77	45-60	X	70	5-7	—	—	—	—	—	—	—	± 10
Sp. 25 (St. 59)	XVIII	70-100	55-70	X	—	—	9	6	11	7,5	9	7	—	—
Sp. 26 (St. 59)	XV	56-70	25-47	X	± 60	5-6	10	5,5	—	—	—	—	18	9,5
Sp. 27 (St. 59)	XVII	67-82	48-62	XI	85	6-9	11	5,5	12	7	9	6,2	18	10
Sp. 28 (St. 46)	XXII	—80	45	XVI	70	4-8	12	—	13	—	P ₁	12	—	16
Sp. 29 (St. 46)	XV	41-46	14-18	X	25	3-6(-9)	8-9	2,5	9	3	8	2,5	15-16	5,5-6
Sp. 30 (St. 53)	XXI	69-85	45-70	XII	90	4-7	—	—	—	—	—	—	19-22	11,5-12,5
Sp. 31 (St. 53)	XVI	62-81	40-65	XIII	80	6(-17)	11	5,5	11	6	12	5,5	19	11,5-12
Sp. 32 (St. 53)	XVII	65-72	25-40	XII	55	4-6	11-12	5,5	11	6	9	—	17	8,5-9,5
Sp. 33 (St. 53)	XVIII	65-85	36-53	X	75	5-7	13	5,5	12	6	11	5,8	18-20	11-11,5
Sp. 34 (St. 53)	XIV	55-64	30-35	XI	70	5-6	13	5	11	5,8	9	5,8	18	11,5
Sp. 35 (St. 53)	XI	60-65	25-35	XI	50	7-8	—	—	—	—	—	—	18	10
Sp. 36 (St. 53)	XVI	50-60	20-30	X	45	5-7	9	3,5	10	3,8	9	3,5	18	9
Sp. 37 (St. 53)	XI	20-21	2,5-3,0	X	7	—	—	—	—	—	—	—	14	3
Sp. 38 (St. 53)	XIV	20-35	7-10	X	15	—	—	—	—	—	—	—	15	5,5
Sp. 39 (St. 53)	XI	25-35	8-13	X	15	—	—	—	—	—	—	—	15	5,5
Sp. 40 (St. 53)	XIII	17-31	3-11	X	15	—	—	—	—	—	—	—	15	5,0
Sp. 41 (St. 45)	XI	27-34	7-10	X	15	5	7	2,3	7	2	9	—	13	5
Sp. 42 (St. 45)	XII	26-36	7-11	X	18	4	8	2,3	8	2	—	—	13	5
Sp. 43 (St. 45)	XVI	23-32	5-10	X	15	—	9	2,5	8	2,1	10	3,2	—	—
Sp. 44 (St. 45)	—	13-30	2-8	X	12	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Sp. 45 (St. 45)	XIV	12-26	2-5	X	8	—	7	1,7	—	—	—	—	—	—
Sp. 46 (St. 47)	XIII	42-46	15-23	XII	35	5-6	—	—	—	—	—	—	17	7
Sp. 47 (St. 47)	XIV	27-34	5-9	X	20	—	8	3	8	2,5	—	—	15	5,5
Sp. 48 (St. 47)	XII	25-36	7	X	12	5	7	—	8	2	—	—	11	5
Sp. 49 (St. 47)	XIV	—	12	X	25	—	10	3	10	3,5	9	± 3,5	—	—
Sp. 50 (St. 47)	X	20-32	4-10	X	15	—	9	2	9	1,8	8-9	2,5	12	4
Sp. 51 (St. 54)	XVI	(14)-27	(3)-7	X	8	—	9	2,2	—	—	—	—	—	—
Sp. 52 (St. 54)	XV	—	10-16	X	25	—	—	—	—	—	—	—	—	6,5
Sp. 53 (St. 55)	XI	16-22	4-5	X	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Sp. 54 (St. 57)	XV	17-32	4-10	X	12	—	8	2,5	—	—	10	2,8	14	4

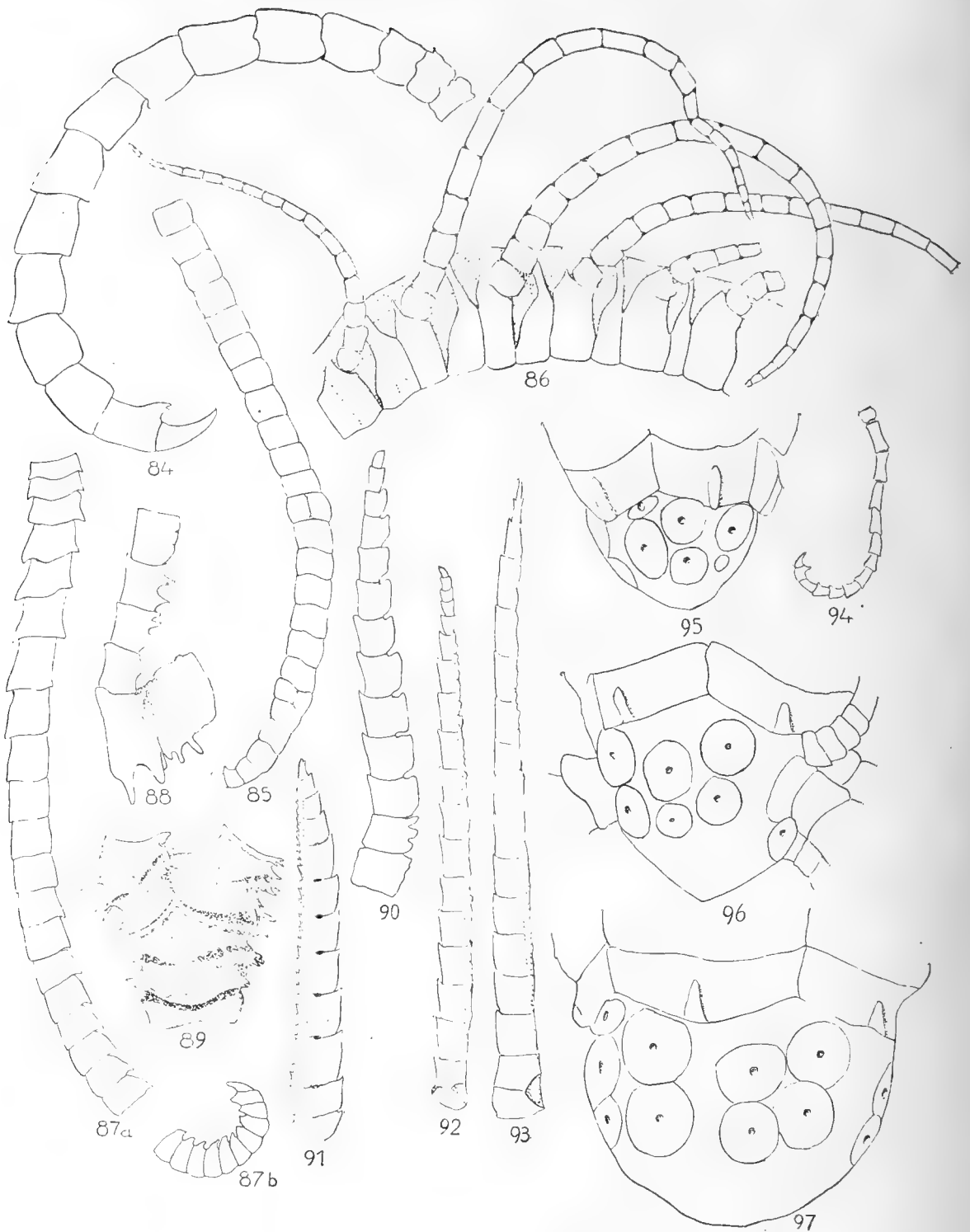


Fig. 84 *Diodontometra Bocki* Cirrus $\frac{2}{1}$; 85, 86 *Liparometra grandis* (St. 39) 85) The distal part of a cirrus with two abnormally longitudinally split cirrals $\frac{2}{1}$. 86) The proximal part of an arm with P_1-P_6 (P_4-P_6 with broken tips); observe Br 1 + 2 3 + 4, $\frac{2}{1}$; 87-91 *Stenometra dentata* (St. 56) 87 a) The most proximal 20 cirrals, b) The distal part of the cirrus $\frac{2}{1}$, 88) Br 2-4 with the base of P_1 $\frac{14}{1}$. 89) The proximal part of the arm $\frac{2}{1}$, 90) P_1 $\frac{14}{1}$, 91) Distal pinnule of the type of *A. anthus* (St. 56) $\frac{2}{1}$, 92-97 *Asterometra acerba* (St. 59) $\frac{2}{1}$, 94) Cirrus of a very young animal (Sp. 51), $\times 17 \frac{1}{2}$, 95) Cd of Sp. 34 (*lepada* type) $\frac{2}{1}$, 96) Cd of Sp. 27 $\frac{2}{1}$, 97) Cd of Sp. 18 $\frac{2}{1}$.

The L of the distal p-s with some irregularities follows the L of the arms; nevertheless it shows great variability in specimens with an arm-length of 70—90 mm.

A. H. CLARK has distinguished the two species *A. anthus* and *A. acerba* by the following characteristics:

<i>A. anthus</i>	<i>A. acerba</i>
A) Distal pinnules 9 mm.	a) distal pinnules 13 mm.
B) The outer segments of distal p-s: L = 2 × br.	b) the outer segments of dist. p-s L ≥ 3 × br.
C) The Br dorsal spines long and strongly curved	c) the Br dorsal spines blunt, short, not much curved.
D) R—s with a rounded tubercle	d) R—s with a dorso-ventrally elongated tubercle.
E) I Br-s without median carination	e) I Br-s with a faint, low median carination.
(F) Arms more than X.	f) Arms X).

Some examples from the above-described specimens may be quoted and may be denoted as follows:

<i>Sp. 1</i> A(a) Bc D E F	<i>Sp. 14</i> a b C D E f
<i>Sp. 9</i> Aa Bb C d E F	<i>Sp. 15</i> Aa b C d E F
<i>Sp. 24</i> A(a) B c d e (F) f	<i>Sp. 34</i> (A)a Bb Cc d e F
<i>Sp. 12</i> a (B)b C D E f	<i>Sp. 20</i> a b C d E f

From the above cited examples it seems evident to me that the characteristics of *A. anthus* and *acerba* are irregularly mixed in the different specimens. CLARK lays special stress upon the fact that the L of the distal pinnules and pinnulars and the blunt spines on the distal Br-s are characteristic of *acerba*. This combination scarcely ever occurs in the above-described specimens, but often long p-s together with strongly developed Br-spines.

From what is stated above — the examples could be multiplied — it seems to me to be clear that *A. anthus* and *acerba* ought to be referred to the same species.

A. lepida is a third species of the genus *Asterometra* that A. H. CLARK has described. It is a form differing from the two previously mentioned species (which have a large cylindrical Cd with a conical end) by a small and conical Cd. It is further mentioned that the cirrus-sockets

are smaller and therefore the cirri too, which are lacking on the only known specimen, are probably more slender than in the other species. With regard to the last characteristic I may emphasize the following facts. It is a general rule that cirri formed in the dorsal cirrus-whorl (also dating from a younger stage) are more slender than the ventral ones, which are formed at an older stage. The more robust the specimen is, the more coarse are also the cirri. Thus for instance the cirri in sp. 24 are thin and slender, in sp. 11 and 12 very much coarser and thicker. This character is therefore not necessarily so very important, when other distinguishing features which support the suggestion of a real difference between the species are not added. — With regard to *A. lepida* it is also stated that Cd should have a specific formation. A glance at the collected facts given above in the descriptions of the specimens shows that the appearance of Cd is also subject to great variation. I have selected sp. 18, 27 and 34 to be reproduced. The last-mentioned specimen, which has an arm-length of 70 mm. and is therefore of the same size as the single specimen of *A. lepida* found, has a small, conical Cd with relatively small cirrus-sockets. Cd of sp. 27 (arm-length 85 mm.) is a transition-form to Cd of Sp. 18 (arm-length 100 mm.) which is of typical *A. anthus-acerba* formation.

As all transitions between these two types are found among the above-described specimens, I cannot consider *A. lepida* to be a separate species but regard it only as a younger individual of *Asterometra anthus*.

Finally some words about the above-described very young specimens. One can plainly follow the growth-abbreviation of all ossicles, already observed by P. H. CARPENTER. Perhaps one finds this fact demonstrated best in the proportion between L and br of the cirrals (cf. e. g. sp. 1; 37 and 53), but one can also get good subjects for demonstration in the R—s and proximal Br-s. In the latter one can also follow the disappearance of the juvenile carina on I Br 1 and 2 and the appearance of certain marks of old age (the indistinct crista on the same ossicles in certain old specimens). The pinnulars seem to be but slightly affected by this abbreviation (cf. e. g. sp. 1 and 54).

The occurrence of orals is also very interesting. In specimens of an arm-length of less than 10 mm. they are well preserved, but

usually begin to be resorbed at an arm-length of 10—12 mm. and are completely lost when the arms measure 15. mm., that is at about the same time as the arms get a complete pinnulation. — The smallest specimens have also large B—s which form a continuous ring visible under the radial whorl. In the smallest specimens the latter practically encloses the whole intestine sac. All these primitive characteristics thus persist rather late.

Stenometra A. H. CLARK.

St. dentata n. sp.

Fig. 87—91. Photo 7.

From St. 55 (1), 56 (5), 59 (3) = 9 specimens.

Sp. 1 (St. 56) Cd cylindrical, the flattened, dorsal pole with small spines; diameter of the dorsal surface 2 mm. H of the free part of Cd 1.5 mm.

C. XXIV 74—76; 25—34 mm. in two close whorls, which are ventrally divided in groups, separated IR. by ribbons of Cd. 1st segment short with a distal collar which, especially ventrally, has a somewhat serrate border. 2^d and 3^d segments $L = \frac{1}{2}$ br, similar to the preceding segment but with a slighter distal collar. 4th and 5th segments cubical or a little longer. 6th—10th slightly hour-glass-shaped, $L = 1\frac{1}{2}$ br. 1st—7th segments with a small ventral spine, slightly projecting in lateral profile, because of the above-mentioned collar. 8th—13th(—16th) segments smooth, then a dorsal spine. Distal segments $L = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times$ br. Dorsal spine small, distinct, distally curved, $h = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ of the br of the segments. Opposing spine somewhat coarser, $h = \frac{1}{2}$ of the br of the segment. Terminal claw about as long as the penultimate segment.

R—s narrow bands, IR somewhat bent outwards by the inter-radial ribbons on Cd, $L = \pm \frac{1}{6}$ br. I Br 1 $h = \frac{1}{4}$ br, laterally free, with a median carination and moreover both proximally and distally a vertical 4—5-lobated calcareous plate, constituting the enlarged and overlapping ends of the segment. I Brax $h = \frac{1}{2}$ br, rhomboidal, in the

proximal part with a well-bordered, strong, median tooth visible in side view as a high bidentate wing, which, together with the disto-median tubercle of I Br 1, forms a strong synarthrial prominence. The distal border of I Brax obtuse-angled, with 6—7 pointed prominences. II Br-s: 2, similar to the I Br-s, but with smaller and weaker synarthrial tubercles. Arms probably XX (II branches broken), 65 mm., indistinctly flattened laterally. The first 6 Br-s smooth, but with prominent, lamelli-shaped lobated prominences both proximally and distally (cf. above). In addition the most proximal Br-s partly with a median, dorsal prominence, which develops more distally to a dorsal spine, partly with a pair of similar medio-lateral prominences, alternately most developed on the left and on the right. These lateral tubercles, situated on both sides of the median dorsal spine, disappear at the 15th to 20th Br-segments and from these only the median dorsal spine remains. The distal segments rather strongly pressed together from the sides. Ex. of syzygies: 3 + 4, 22 + 23 or 3 + 4, 35 + 36 etc. with an interval of 6—11 oblique articulations. About 5 distal segments with rudimentary pinnules.

P_1 12—13; 8 mm. (5—7 first pinnulars concave on the outside, the concavity bordered by a more or less lobate wing-like prominence; 6th and the following segments a little longer than broad, smoother with a smaller wing and somewhat spiny distal collars); P_2 11; 5,5 mm. P_3 6; 4,5 mm. P_4 7, a little longer. Distal p. 12; 5 mm. (1st and 2^d segments short, the following ones $L = 1\frac{1}{2} - 2$ br, the two last segments short again. The pinnulars smooth, in the proximal part triangular, in the distal part rounded).

Disk encrusted with coarse granules, like the other weak parts dark-brown. The ossicles are a lighter brown.

Sp. 2 (St. 56) C. XX 57—61; 20—25 mm. A dorsal spine already on the 12th cirral. Arms \perp XX, 65 mm. I Brax rhombical. Already about Br 10 the dorsal claw is the only remaining prominence. Ex. of syzygies: 3 + 4, 31 + 32 or 3 + 4, 6 + 7, 32 + 33 etc.; distally with an interval of 8—11 oblique articulations. P_1 13; 7,5 mm. P_2 10; 5 mm. P_3 8; 4 mm. P_4 7; 3 mm. P_5 8; 3,5 mm. Distal p-s 11; 6 mm.

Sp. 3 (St. 56) C. XXVII 37—56; 14—24 mm. Dorsal surface of Cd 1,5 mm. Arms XX, 50 mm. Br-s with shorter processes than in the preceding specimens. A single dorsal spine from Br 10. Arms

distinctly flattened laterally out to Br 5. Syzygies with an interval of 13—16 oblique articulations. P₁ 13—15; 5,5—7,5 mm. P₂ 9—11; 4,5—5 mm. P₃ 8—9, 4—5 mm. Distal p-s 11; 5 mm.

Sp. 4 (St. 56) C. XXI 43—57; 18 — ± 22 mm. The 6 first cirrals with a real ventral spine. Dorsal spine from about the 10th—20th segment. Arms XV, 45 mm. The median keel on I Br 2 somewhat lower than in *Sp. 1*. Arms after Br 6 without lateral prominences. The dorsal Br-spine low. Syzygies with an interval of 5—18 oblique articulations. About 90 Br segments. The distal segments with rudimentary p-s are about 5. Example of arm-branching:

$$\begin{array}{l}
 I \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l}
 II \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l}
 Br \ 1-2 \ 3 + 4 \dots 35 + 36 \dots 56 + 59 \dots \\
 Br \ 1-2 \ 3 + 4 \dots 33 + 34 \dots 44 + 45 \dots 53 + 54 \dots
 \end{array} \right. \\
 \\
 II \ 1-2 \left\{ \begin{array}{l}
 Br \ 1-2 \ 3 + 4 \dots 29 + 30 \dots \\
 Br \ 1-2 \ 3 + 4 \dots 30 + 31 \dots 43 + 44 \dots
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

P₁ 12; 4 mm. (last 8 segments collar-shaped, their distal parts overlapping; a similar condition, though not so marked on P₂—P₄). P₂ 9; 3,5 mm. P₃ 9; 3 mm. P₄ 8; 3 mm. Distal p. 12; 5,5 mm.

Sp. 5 (St. 56) C. XVIII 54—65; 25—30 mm. Arms XV, 60—65 mm. A regenerate from a II Br 1 with 2 small, still smooth arms. P₁ 8—13; 4—6 mm. P₂ 8; 4 mm. P₃ 7; 3 mm. Distal p. 9—10; 5,5 mm.

Sp. 6 (St. 59) C. XVIII 62—65; 24—28 mm. Arms XVI, broken. II Br-s: 2. P₁ 13; 5 mm. Disk 6 mm.

Sp. 7 (St. 59) C. XVII 53—60; 23—28 mm. Arms XV +, broken. II Br-s: 2. P₁ 13; 6 mm. Disk 7 mm.

Sp. 8 (St. 59) C. XIV 40—43; 15—18 mm. in a partly double whorl, hardly divided in groups. The dorsal surface of Cd 1 mm. — Arms XII, 40 mm. The calcareous lamels on the proximal ossicles only slightly serrate. A single dorsal spine from Br 8. Syzygies with an interval of 5—8 oblique articulations. Example:

$$\begin{array}{l}
 \text{I } 1-2 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Br } 1-2 \quad 3 + 4 \dots 16 + 17 \dots 23 + 24 \text{ etc. with an interval of} \\
 \quad \quad \quad 5 \text{ oblique articulations} \\
 \text{II } 1-2 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Br } 1-2 \quad 3 + 4 \dots 21 + 22 \dots \text{ etc. with an interval of} \\
 \quad \quad \quad 7-8 \text{ oblique articulations} \\
 \text{Br } 1-2 \quad 3 + 4 \dots 21 + 22 \dots \text{ etc. with an interval of} \\
 \quad \quad \quad 8 \text{ oblique articulations.}
 \end{array}
 \right.
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

P_1 10; 4—4,3 mm. P_2 9; 3,5 mm. P_3 7; 2,5 mm.

Sp. 9 (St. 55) C. XV 20—21; 3,5—5 mm. (2^d segment with a small ventral spine, 3^d—5th segment L = 2 br, hour-glass-shaped, then shorter segments, from about the 10th L = br or shorter. A dorsal spine from the 6th segment, h = 1/4 of the br of the segments. Opposing spine h = 1/2 of the br of the segment.

R—s h = 1/2 br with a median crista and small distal prominences, IR fused and elongated, separating I Br-s 1. I Br 1 h = 2/3 br with a median tubercle and latero-distal prominences. Similar, still larger, lobate flanges on I Brax, Br 1 and Br 2. I Br 2 h = br, triangular with a small cavity in the distal angle. Arms X, 13 mm. Br (1—2) h = br, as the syzygial pairs Br 3 + 4. From Br 15 a medio-dorsal claw. The left arm often a little longer and better developed, in one case, however, the reverse. P_1 5; 1 mm., P_2 and P_3 as P_b and P_c usually lacking. Distal p. 10; 2 mm. Example of pinnulation:

$$\text{I } 1-2 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Br } 1-2 \quad 3 + 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 + 14 \dots 20 + 21 \dots \dots \dots 29 \\
 \text{Br } 1-2 \quad 3 + 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 + 17 \dots 22 + 23 \dots 27
 \end{array} \right.$$

Orals h = 1/4 of the radius of the disk, only the acute angle remaining (the base and the inner parts resorbed).

With regard to the number of the cirrals this species is most closely related to *St. diadema*, but well separated from this by the formation of Cd, by the shortness of the cirri, when compared with the arms (the latter are at least twice as long as the cirri) and by the large and many prominences on the ossicles of the arm-bases. By this the new species approaches *Daidalometra (hana)*, a genus properly distinguished from *Stenomestra* only by a smaller number of arms. The above-described species is to a certain extent a transition-form between the above-mentioned genera.

Charitometridæ A. H. CLARK.

Crossometra A. H. CLARK.

Cr. septentrionalis A. H. CLARK.

Fig. 77, 78.

Syn.: *Charitometra distincta* (preoccupied) 1908 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 34, p. 312.

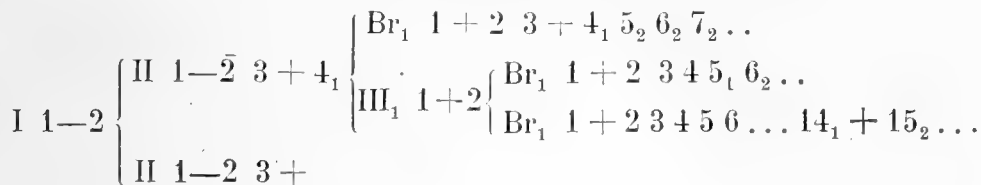
Pachylometra septentrionalis 1911 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 39, p. 554; 1912 Crin. Ind. Oc., p. 215; 1915 Wash. Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 215.

Crossometra septentrionalis 1918 A. H. CLARK Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 176.

From St. 36 = 1 specimen.

Sp. 1 (St. 36) Cd br 3 mm., h 1.5 mm., rounded conical, free dorsal surface without tubercles, 1.5 mm. C. XIX 14—16; 14—17 mm. very coarse, in a single or double whorl and 10 rows. 5th segment the longest L = 1½ br. From the 8th segment a dorsal, longitudinal crista. The ventral margin of the distal segments about as long as the br. Opposing spine h = 1/3 of the br of the segment. Terminal claw curved, somewhat longer than the preceding segment.

Br—s projecting as large interradian prominences. R—s: h = 1/8 br with a median tubercle. I Br 1 h = 1/5 br, laterally united, as on the proximal part of I Brax with a median tubercle. I Br 2 h = 1/3 br. II Br—s: 4 with similar median prominences. Primipostaxillaries united inside. III Br—s: 2, developed on the inner sides. These ossicles and Br 1 and 2 with still slighter median tubercles. Arms XVIII +, 70 mm., strongly wall-sided out to Br 2. The bases of P_{II} visible between the arm-bases. Br 1—12 discoidal, then oblique joints. 1st syzygy on the inner side usually between Br 1 and 2. Distally with an interval of 4 oblique articulations. Example: Br 1—2 3 + 4... 11 + 12... 16 + 17... 21 + 22... The distal Br-s with a low, not overlapping dorsal spine. Example of arm-branching and regeneration:



P_{II} 22; \pm 5 mm. 1st–5th segments thickened with dorsal prominences similar to those in the fam. *Calometridae* (cf. the figure). 1st segment $L = \frac{1}{2}$ br. The 7th and following segments more slender, a little flattened. Distal segments: $L \geq$ br. P_1 \pm 18; 4 mm., P_2 14; 3,2 mm. Distal p. 13–14; 4,5 mm. (The first 2 and last 2 segments short, the other ones $L = 2 - 2^{1,2}$ br).

Disk very closely and coarsely granulated, »lean», somewhat incised, diam. 4 mm., not completely regenerated, dark-brown. The animal otherwise white (in spirit).

The above-described specimen is as a young of *Cr. septentrionalis*.

Though the species-name *Cr. distincta* is older still, in conformity with A. H. CLARK, I do not wish to use it, partly because it is a nomen nudum, partly because the name *distincta* was given by P. H. CARPENTER to a species in the closely-related genus *Pachylometra* (CLARK did not separate this genus from *Crossometra* before 1918).

Perissometra A. H. CLARK.

P. aranea n. sp.

Fig. 103, 104.

From St. 7 a: 1 specimen.

Sp. 1 (St. 7 a) Cd a low cone, br 2 mm. Dorsally with a central cavity and small side-cavities. C. XIV 17–21; 10–11 mm. in a single or double whorl and in 10 rows. 1st–3^d segments L shorter than br, 4th one somewhat longer, 5th $L = 1\frac{1}{2}$ br, 6th one $L = 2$ br, distally a little widened, with an inconspicuous dorsal spine. Then shorter segments with a dorsal spine. The cirrals from about the 9th about cubical, antepenultimate segment $L = \frac{3}{4}$ br. Opposing spine $h = \frac{1}{5}$ of the br of the segment. Terminal claw curved, somewhat longer than the preceding segment.

R—s narrow bands, almost concealed. I Br-s 1 contiguous, $h = \frac{1}{4}$ br, with a low median carination. I Brax pentagonal, $h = \frac{1}{3}$ br, with a similar, low longitudinal tubercle; a slight thickening of the distal border, the rest of the ossicle smooth; laterally flattened like

Br 1. Arms X, 70 mm. Br 1 and 2 with a carination similar to the one on the I Brachials but very much slighter. Br-s 1 inside contiguous in pairs, outside broader, as also Br 2. Syzygies: 3 + 4, 13 + 14, 18 + 19... distally with an interval of about 5 oblique articulations. Br 1—10 discoidal, then irregularly oblique joints. The proximal ossicles rounded and smooth; from Br 15 a low, median, longitudinal crista, slightly projecting in lateral profile.

P_1 13; 5 mm. P_a 13; 5 mm. P_2 8—9, 3,5 mm. P_3 similar. P_1 coarser than P_2 . The segments rather uniform, smooth, a little longer than broad, distally somewhat angular. P_4 — P_{12} \pm 10; 3—4 mm. (Proximal segments very slightly dorso-ventrally flattened). Distal p-s \pm 14; 5—6 mm. (1st and 2^d segments shorter and a little coarser than the following ones, which have the $L = 2$ br).

Disk a little incised, with large calcareous granules, diameter 4 mm., colour brown. Otherwise the animal is light yellow-brown.

This new species resembles most closely *P. lata* from which, however, it differs sharply by the cirri, very short in comparison with the arm-length but in spite of this with relatively many segments, by the rather smooth proximal arm-parts, and, above all, by the proximal pinnules, which have a few, rather long pinnulars.

After a comparison with specimens of Dr MORTENSEN'S collection I am convinced that this species often has XI or XII arms attaining a length of > 70 mm. II Br-s are 2. P_1 might get 15 segments and attain a length of \pm 6 mm. P_2 — P_{10} are short, with the 5—6 first segments somewhat thickened in dorsal view.

In the short genital pinnules has the species an unusual resemblance to a spider, whence the name.

Diodontometra n. gen.

This exceedingly peculiar type of the family *Charitometridæ* resembles the genus *Charitometra* by the strongly expanded proximal segments on the genital pinnules. From this genus it differs, however, in several characteristics. The arms are XX, the II Br-s: 2. Cd is high and pointedly conical and the cirri arranged in radial groups, separated by large interradian interspaces. And, finally, the opposing spine is divided into two prominences standing side by side and usu-

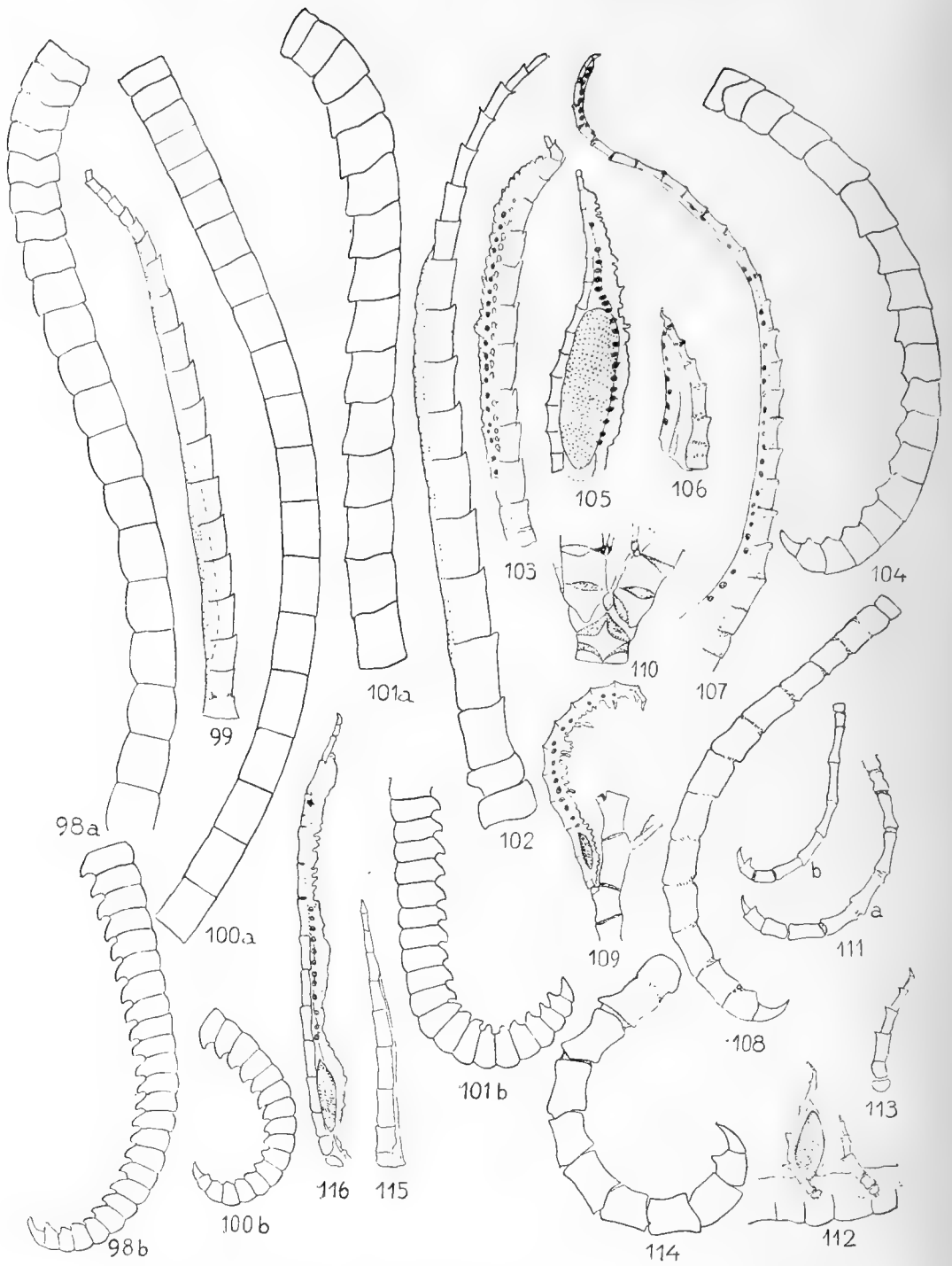


Fig. 98) *Asterometra anthus* a) The proximal, b) the distal part of a cirrus; some of the proximal segments with a slight dorsal spine $\frac{7}{1}$; 99, 100 *Asterometra macropoda* (St. 12), 99) Distal pinnule $\frac{9}{1}$, 100 a) The most proximal 20 segments, b) the distal segments of a cir-

ally flanked by an additional side-spine on each outer side. (A bifurcated opposing spine has been previously noticed only in the genus *Epi-metra* fam. *Colobometridae*).

D. Bocki n. sp.

Fig. 79—84. Photo 10.

From St. 56: 1 specimen.

Sp. 1 (St. 56) Cd pointedly conical, h 3.5 mm., br. 3 mm.

C. XXVI 10—12 (D) 15—17 (V); 5—6 or 15—20 mm. respectively, in 3—4 whorls. The cirri are arranged in 5 radial groups separated by interradian interspaces which are almost as broad as the area occupied by the C. In each group 5—6 cirri, often forming an almost single row. 1st and 2^d segments short, 3^d cubical, 4th increasing, 5th—7th L = 1²/₃ br, 8th(—9th) — the antepenultimate segment not much longer than broad. The dorsal surface of the distal cirrals slightly carinated and overlapping. No dorsal spine. Opposing spine in the distal part of the penultimate segment, large, in the middle deeply incised and therefore bifurcated, on the lateral sides moreover often a small additional spine. Terminal claw slender, curved, pointed, longer than the preceding segment.

R—s visible as narrow bands in the corners. I Br 1 h = 1/4 br, in the basal half laterally grown together, at the middle somewhat narrower because of the synarthrial tubercle from I Brax. I Br 2, pentagonal, h = 1/2 br as the preceding ossicle with a slight median carination, the rest of the ossicle rounded dorsally. The II Br-s are 2, similar to the I Br-s. Primipostaxillaries in the basal half grown together in pairs. Arms XIX + (probably originally XX), 60 mm., in 4 cases broken between I Br 1 and 2 (the synarthrial articulation well

rus ⁷/₁; 101, 102 *Pterometra trichopoda* (St. 45) 101 a) The 15 most proximal cirrals, with a ventral spine from the 4th—the 12th segments b) The 20 most distal cirrals ⁹/₁, 102) Distal pinnule ¹⁴/₁; 103, 104 *Perissometra aranea* (St. 7 a. Sp. 1) 103) Distal pinnule ¹⁴/₁, 104) Cirrus ⁹/₁; 105—108 *Compsometra serrata* (St. 25, Sp. 3) 105) Genital pinnule ¹⁴/₁, 106) P₂ (observe the indistinct stripe under the sacculi; a rudimentary genital cord?) ¹⁴/₁, 107) P₁ ¹⁴/₁, 108) Cirrus ¹⁴/₁; 109—113 *Compsometra parviflora* (St. 47) 109) A stump of the arm with a distal pinnule ¹⁴/₁, 110) The base of an arm from I Br 1—Br 5 ¹⁴/₁, 111) Cirri a) St. 47, b) from the dorsal whorl of a specimen from St. 45; long cirrals ¹⁴/₁, 112) Br 4—8 with P₂ and P₃ ¹⁴/₁, 113) P₁ ¹⁴/₁; 114—116 *Toxometra aequipinna* (St. 4, Sp. 1) 114) Cirrus ¹⁴/₁, 115) P₃ ¹⁴/₁, 116) Distal pinnule with a small genital gland ¹⁴/₁.

developed). Br 1 and 2 with a slight synarthrial tubercle. Arms out to Br 4 laterally flattened. Br 5—10 with the distal ends a little overlapping. The 12 first Br-s discoidal, then oblique joints. The distal segments smooth. 7—8 of the distal Br—s supporting rudimentary pinnules. Ex. of syzygies:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Br } 1-2 \ 3-4 \dots 21 + 22 \dots 31 + 32 \dots 41 + 42 \dots \\ \text{Br } 1-2 \ 3-4 \dots 17 + 18 \dots 26 + 27 \dots 35 + 36 \dots 44 + 45 \dots \end{array} \right.$$

P_1 13; 3,5 mm. P_2 12; 4,5 mm. P_3 11; 4 mm. P_4 10; 3,5 mm. The segments on P_1 — P_2 or P_3 rather uniform, $L = 1/2 - 1/1 \times \text{br}$. On the outer sides of the 3^d and following pinnulars small wings partly caused by small notches between each segment. From P_3 — about P_{12} (10—11 segments, L 3,5—4 mm.) the 3^d—5th (or 6th) segments are flattened dorso-ventrally, cupular, with winglike borders, the 7th—11th pinnulars are narrow and long again. The cupular segments are in dorsal view about cubical, the distal ones $L = 2 \text{ br}$. Distal p. 11; 4 mm. (1st segment short, 2^d cubical, 3^d—10th $L = 1 1/2 \text{ br}$, last segments short, all segments smooth).

Disk thrown off. The colour of the animal light brown; saeculi rather sparse.

Antedonidæ A. H. CLARK.

Antedoninæ A. H. CLARK.

Compsometra A. H. CLARK.

C. parviflora A. H. CLARK.

Fig. 109—113.

Syn.: *Compsometra parviflora* 1912 A. H. CLARK Notes from the Leyden Mus. Vol. 34, p. 133; 1918 Siboga Exp. Vol. 42B, p. 207.

From St. 44 (1), 45 (2), 46 (1), 47 (2), 54 (1) = 7 specimens.

Sp. 1 (St. 46) Cd: br about 1,4 mm. C. \pm XXXV 9—10; 2—2,5 mm. in two close whorls. 3^d—5th segments very much hour-glass-shaped, $L = 2 1/2 - 3 \times$ the distal diameter. The distal cirrals of more uniform thickness. The 7th segment $L = 1 1/2 \text{ br}$.

Axillary $h = \frac{1}{2}$ br, rhombical, the proximal angle covering a part of I Br 1. The axillary is broader than I Br 1. Br-s 1 inside well separated. Arms X, 20 mm.+, but not very much longer.

P_1 10; 4 mm. (a distal, spiny whorl from the 6th pinnular), P_2 7; 2 mm., without genital gland, P_3 7; 2 mm. with a genital gland from the 3^d—the 5th segment. P_8 13; 4 mm. (1st and 2^d segments short, the other ones long).

Disk 4 mm. Anal funnel long.

Sp. 2 (St. 47) C. XXXVII 8—11; 2—4.5 mm. (4th cirral the longest, $L = 3 - 4 \times$ br). R—s concealed. Axillary $h = \frac{2}{3}$ br with strongly concave distal margins. Br-s 1 basally contiguous inside, h of the outer border $\frac{1}{2}$, of the inner one $\frac{1}{4} \times$ br. Arms X, 25 mm.

P_1 7—8; 2 mm. (The L of the segments with the exception of the two first and the very last ones $2-3 \times$ br), P_2 6; 1.2 mm. P_3 8; 2.2 mm. with a genital gland, P_4 8; 2.2 mm. Distal p. 14; 4 mm.

Sp. 3 (St. 47) C. XXXI 9—10; 2.5—3.5 mm.

Axillary as in the preceding specimens. Arms broken, probably between 20 and 25 mm.

P_1 8; 3 mm. (3^d segment $L = 2\frac{1}{2}$, 4th one $L = 3\frac{1}{2}$ br) P_2 5—6; 1.2—1.5 mm. P_3 7; 2 mm. No pinnules genitally swollen.

Disk 1.8 mm. Parasitical *Myzostomids*.

Sp. 4 (St. 45) C. about XXV on a hemispherical Cd; arranged in two whorls: 9—11; 2—4.5 mm. The segments very pronouncedly hour-glass-shaped, those before the antepenultimate cirral $L = 2$ br, antepenultimate segment $L = 1\frac{1}{2}$ br. Cirri from the dorsal whorl with very much longer segments (cf. the figure 111), in this case the terminal claw and opposing spine are relatively large.

I Br 1 $h = \frac{1}{6}$ br. Axillary rhombical, $h = \frac{1}{2}$ br (lower, and with smaller lateral angles than in the preceding specimens). Arms X, 15 mm.+. Br-s 1 inside basally contiguous. Syzygies with an interval of 3 oblique articulations. Br-s rather smooth.

P_1 8; 1.5 mm. P_2 6; 1 mm. P_3 7—8; 1.8 mm. with a genital gland. Disk 2.5 mm. Anal cone 1.3 mm.

Sp. 5 (St. 45) C. \pm XXV 10—11; 2—3 mm. (4th segment $L = \pm 4 \times$ br). Arms about 15 mm. P_1 6; 1 mm. P_2 4; 0.5 mm. or lacking. Disk 1 mm. No gonads developed.

Sp. 6 (St. 44) Cd with scars of about XXV C. Arms X, broken, 3 mm.+. I Br 1 h = $\frac{1}{5}$ br with a thickened rim against the R. Axillary h = $\frac{1}{3}$ br, rhombical. P₁ 7; 1,2 mm. P₂ 4—5; 0,8 mm. P₃ 6; 1,2 mm.

Sp. 7 (St. 54) Cd 0,5 mm. low, rounded, with scars of about XXXV C. arranged in 3 whorls. The central, dorsal pole is occupied by a small rounded star with a scar of the central canal of the stem. — R-s at the rim of Cd. I Br 1 h = $\frac{1}{4}$ br, latero-distally squeezed together. Axillary h = $\frac{1}{2}$ br, rhombical with one proximally and one distally directed lappet. Arms X, about 5 mm. Br-s 1 inside contiguous, h = $\frac{1}{6}$ br, on the outer side twice as broad. Br 2 with a backward directed synarthrial prominence.

P₁ 7; P₂ 5, shorter, P₃ 7, about as long as P₁; P₄ sometimes missing.

The above-described specimens agree well with A. H. CLARK's descriptions of *C. parviflora*. By my specimens the cirrals are a little shorter; one may, however, also find cirri with longer segments, as my figure of a cirrus from *Sp.* 4 shows.

None of these 7 specimens has a genital gland on P₂, contrary to the type specimen from the Siboga St. 50. From some other Siboga-localities, however, there are specimens with a gonad first on P₃, as in the Bockian specimens. Might this difference perhaps have the value of variety? The disparity is probably not a difference of age, since for instance *Sp.* 2 is completely mature and nevertheless has no trace of a genital gland on P₂.

Compsometra serrata A. H. CLARK.

Fig. 105—108.

Syn.: See 1918 A. H. CLARK Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 209.

From St. 1 (4), 2 (3), 3 (1), 21 (1), 22 (3), 23 (1), 25 (3), 26 (2) = 18 sp.

Sp. 1 (St. 25) Cd hemispherical. C. XXIII 12—15; 7 mm. in a single or double whorl. 4th and the following segments a little squeezed together in the middle, L = $1\frac{1}{2}$ × the distal br. Antepenultimate segment L = $1\frac{1}{5}$ br. Penultimate one with a very inconspicuous op-

posing spine. Terminal claw narrow, curved, somewhat longer than the preceding segment.

R—s concealed. I Br 1 h = $\frac{1}{3}$ br, laterally almost free. The axillary h = $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{2}$ br, triangular. Arms X, \pm 25 mm. Br-s 1 united inside in pairs, like the following ossicle on the outer side twice as broad. Br-s 2 on the inner side separated by a rather wide interspace. The first 8 Br-s discoidal, then oblique joints. Ex. of syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 13 + 14, 17 + 18.. etc. Arms rather smooth.

P₁ 15; \pm 5 mm. 1st and 2^d segment short, the other segments L = 2 — 2 $\frac{1}{2}$ br, the distal parts widened, spiny. P₂ 9; 2,3 mm. The proximal cirrals with strongly spiny borders. P₃ (11; 3,5 mm.)—P₅ with a similar dorsal carination on the 6 first segments. From P₃ there is a large genital gland. Genital p. 13—15; 4 mm. The dorsal carination of the proximal pinnules continues at least out to P₁₀, then more indistinct.

Disk 3 mm., white-coloured, without granules, a little swollen. The arms darker. Each cirral with a dark spot proximally.

Sp. 2 (St. 25) The cirrals somewhat more hour-glass-shaped. Syzygies with an interval of 3—4 oblique articulations. P₃ and the following ones with a gonad. P₁—P₆ with strong spiny whorls on the distal parts of the 2^d—5th segments. For further details see the table.

Sp. 3 (St. 25) I Br 1 h = $\frac{1}{6}$ br. Syzygies, as in *Sp. 2*. P₃ and the following pinnules with a genital gland. Colour: somewhat more red-brown than in the preceding specimens.

Sp. 4 (St. 1) The syzygies, as in sp. 5—8, with an interval of 3 oblique articulations. Cirri more than in the preceding specimens, in a double whorl. P₁ and the following ones with very large spiny prominences. P_a 9; 3 mm. Disk 5 mm. Colour reddish.

Sp. 5 (St. 1) Cirri arranged in about 3 whorls. P_a as in sp. 4.

Sp. 6 (St. 1) P_a 8; 2,5 mm. Disk 4,5 mm.

Sp. 7 (St. 1) Cirri in a double, incomplete whorl. P_a 7; 2 mm.

Sp. 8 (St. 2) Cirri in a partly double whorl. P₄ 11; 3 mm. with a genital gland. P_a small. Anal cone large. Disk 5 mm. lighter than the red-grey arms, which dorsally have greyish segments and light articulations.

Sp. 9 (St. 2) P₃ with a gonad. Disk 4,5 mm.

Number of Specimens and Stations	Cirri			Arm-length	P ₁		P ₂		P ₃		Dist. p.	
	N	S	L		S	L	S	L	S	L	S	L
Sp. 1 (St. 25)	XXIII	12-15	7	25	15	± 5	9	2,3	11	3,5	15	4
Sp. 2 (St. 25)	XXIII	9-12	3,5-4,5	20	12	3,5	6	1,5	—	—	9	2
Sp. 3 (St. 25)	XXVI	12-15	6,5-7,5	35	23-28	8-10	9	2,5	12	3,5	18	5
Sp. 4 (St. 1)	XXXVIII	12-14	4-8	35	23	10	8	3	10	4	16	5,5
Sp. 5 (St. 1)	XLV	11-14	6-7	40	21	9	10	3	11	4	—	4,5
Sp. 6 (St. 1)	XLI	11-14	4-7	35	28	11	9	3	12	4	16	4,5
Sp. 7 (St. 1)	XVIII	11-12	4-5	15	16	5	8	2,2	10	3,5	—	3,5
Sp. 8 (St. 2)	XXXI	11-14	4-7	30	± 20	6	7	2	9	2,5	—	4
Sp. 9 (St. 2)	XXVII	11-13	5	20	± 18	5	6	1	8	2	16	3,5
Sp. 10 (St. 2)	XXXII	11-13	± 5	25	17	4	9	2	9	2,2	—	3,5
Sp. 11 (St. 3)	XXV	11-13	7	30	13-15	4,5	9	2,5	11	± 4	17	4
Sp. 12 (St. 23)	XXII	12-13	5-6	25	20	6,5	8	2,5	11	3,5	—	3
Sp. 13 (St. 26)	XXIV	11-13	—	27	15-20	4-6,5	7	2	9	± 3	± 15	4
Sp. 14 (St. 26)	XXXII	11-13	5-6,5	± 20	16	6	8	2,2	—	—	± 18	4,5
Sp. 15 (St. 22)	—	12	5	25	12-16	3-4	8	1,3	—	—	—	2,5
Sp. 16 (St. 22)	—	12	5	25	17	4,5	8	2	—	—	—	3
Sp. 17 (St. 22)	XII	9	1,2	3,2	—	—	—	—	—	—	—	—
Sp. 18 (St. 21)	XIX	9-10	1,5	5	—	—	—	—	—	—	—	—

Sp. 10 (St. 2) P₄ 12; 4 mm., like the following ones with a gonad. Disk 4,5 mm., dark brown.

Sp. 11 (St. 3) P₃ and the following ones with a genital gland. The specimen is a ♀ with many eggs fixed outside the pinnules. Syzygies with an interval of 3-4 oblique articulations. Disk 7 mm.

Sp. 12 (St. 23) P_a 8; 2 mm. Disk 6 mm. Colour: greyish red-violet.

Sp. 13 (St. 26) As is obvious from the table, the L of P₁ is very variable. P_a 7; 2 mm. A genital gland from P₄. The proximal parts of the Br-s darker than the distal parts and by this the arms get a spotted appearance. This condition also often in the preceding specimens. A light longitudinal stripe on the dorsal side of the arms.

Sp. 14 (St. 26) Disk 5 mm. A light-coloured specimen.

Sp. 15 (St. 22) A genital gland from P₃. Disk 3,5 mm. Anal cone 2 mm. swollen at the base.

Sp. 16 (St. 22) Disk 4 mm., anal cone 3 mm. Colour: spotted in light olive-brown and dark-violet (specimen in spirit).

Sp. 17 (St. 22) After P₁ a large pinnule-gap. B-s visible as small tongues IR. Small curved remains of the orals.

Sp. 18 (St. 21) All the proximal pinnules present, though P_2 and P_3 especially are very small and incompletely calcified. Disk swollen. No orals.

The specimens from Shimonoseki (St. 1) obviously differ from the other ones by having more cirri; they are also a little larger and coarser than the rest of the specimens.

It is interesting to observe the great variability in the number of pinnulars and relative lengths of the proximal pinnules.

Toxometra A. H. CLARK.

T. æquipinna n. sp.

Fig. 114—116, Photo 11.

From St. 4; 2 specimens.

Sp. 1 (St. 4) Cd almost discoidal, free dorsal pole ± 1 mm. —

C. XXVIII 10—11, 5—6.5 mm. in a double whorl. 1st segment $L = \frac{1}{2}$ br, 2^d one L about = br, 3^d and the following ones $L = 1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2} \times$ the median br. No dorsal spine. Antepenultimate segment $L =$ br. Opposing spine $h = \frac{1}{3}$ of the br of the segment. Terminal claw curved, a little longer than the penultimate segment.

R—s narrow bands (the distal borders concave), almost concealed by Cd. I Br—s 1 laterally free, $h = \frac{1}{5}$ br, with a small lateral tubercle and a strong, median, longitudinal crista which continues on the proximal $\frac{2}{3}$ of the axillary. This ossicle is hexangular, h of the middle line $\frac{2}{3}$ of the br. The distal margin concave. The proximal and distal edges strongly bent outwards. Arms X, 65 mm. Br—s 1 inside basally contiguous in pairs. Br 1 and 2 with a median tubercle similar to the crista on the I Br series, but more slightly developed than this. After Br 9 oblique joints. All the distal edges of the segments strongly bent outwards, a little proximally directed and finely spinous. This condition most pronounced on the proximal segments. The distal Br—s long ($L = 1\frac{1}{2} - 2$ br) somewhat hour-glass-shaped. Ex. of syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 14 + 15, 19 + 20 etc. with an interval of usually 3 oblique articulations.

P_1 8—9; 3 mm. (3^d and 4^{th} segment the longest, $L = 2$ br, all the segments smooth), P_2 11; 4 mm. similar to P_1 , but coarser, P_3 10; 3,3 mm. P_4 9; 2,2 mm. with a genital gland from the 4^{th} to the 6^{th} segment, much more slender than the preceding ones. Then the pinnules increasing again. P_a 8; 2,3 mm. P_b 8; P_c 8 about as long as P_a . The distal p. 16—17; 6,5—7 mm. (the 3 first pinnulars rather short, the other ones $L = 3 - 4 \times$ br, a little swollen at the joints).

Disk dark brown, otherwise the animal is light brown (in spirit).

Sp. 2 (St. 4) C. XIV 10—11; 4—5 mm.

I Br 1 h = $\frac{1}{4}$ br, with a dorsal tubercle (not a crista) together with the axillary. Arms X, 40 mm. P_1 8; 2,2 mm. P_2 9—10; 2,7 mm. P_3 8; 2 mm. P_a 6; 2 mm. Distal p. 5 mm.

The specimen sticking to a calcareous sponge.

The placing of this species has caused some trouble.

A. H. CLARK, whom I have consulted about this question, writes: »Your new antedonid from Japan may very well be a new species of the genus *Argyrometra*, now known from Hawaii and from New Zealand. The occurrence of this genus in southern Japan is highly probable. This genus belongs to that section of the Antedoninae in which P_3 is similar to the succeeding pinnules. There are two species *A. mortenseni* from New Zealand and *A.* (»*Compsometra*») *crispa* from Hawaii. Smaller species of this genus may well have a more or less discoidal centrodorsal. The large size of P_3 seems to be an especially well marked character both of *Toxometra* and *Dorometra*».

I cannot believe that the species in question ought to be referred to *Argyrometra*. Cd in this genus is conical already at an arm-length of 30 mm. and my species, which has an almost discoidal Cd, is not a smaller species of this genus but has an arm-length of 65 mm. The number of cirri does not amount to XXX; it might have been larger if the species had been a large form of *Argyrometra*, where even small species with an armlength of 30 mm. have a number of LX—LXXX. P_3 has not the same character as the following pinnules, which are genital pinnules and, finally, the Br-structures does not resemble that of *Antedon petasus* but much more that of *Toxometra*.

The above-described species differs from *Toxometra* by the 3 first pinnules, which are of about equal length, and in this it resembles *Andrometra psyche* (and *Iridometra*). The genus *Andrometra*, how-

ever, has a conical Cd, while the above-described species, like *Toxometra paupera*, has a discoidal one. (*Iridometra* has smooth arms and at least 13 segments on P_1 — P_3 .) — To the relation between the relative length of the proximal pinnules is, generally, attached a rather great value in judging the genera within the *Antedonid* family. When characterizing the genus *Toxometra* A. H. CLARK says that P_3 should be the longest p. The case in question shows that one must be rather cautious in using such a character as a generic mark. If my species really belongs to *Toxometra* then P_3 is the longest pinnule only in *T. paupera* and may not be used as a mark of genus. A comparison between the different species described as *T. paupera* shows, moreover, that within this species too there is rather great variability in the relative length of the proximal pinnules. The largest specimen has P_1 15; 5,5 mm., P_2 16; 7,5 mm. and P_3 22; 12—13 mm., the smallest one with an arm-length of 80 mm. has P_1 12; 4,5 mm. P_2 14; 6 mm. P_3 17; 7—7,5 mm. With shorter arms we therefore get a proportionally greater abbreviation of P_3 than of P_1 and P_2 within this species. (Cf. p. 76). I have also demonstrated the same general rule concerning P_2 in *Cyllometra pulchella*.

Nevertheless, because of the following facts, I have not thought the specimens in the Bockian collection to be young forms of *T. paupera*. 1) The cirrals are somewhat shorter than in the species mentioned (if we had been concerned with a young form, they ought to be longer). 2) The distal pinnules are longer than in *T. paupera* when compared with the arm-length. 3) The genital glands are rather well developed. 4) The photo in the Siboga work shows that *T. paupera*, though very much larger than *T. aquipinna*, has smaller prominences on the Br-segments (if the last-mentioned species had been a young form, the condition ought to have been the reverse), and 5) the geographical distribution is rather different, as *T. paupera* is only noted from the Sunda Islands and the Philippines.

Iridometra A. H. CLARK.*I. melpomene* A. H. CLARK.

Fig. 117—119.

Syn.: *Iridometra melpomene* 1911 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 39, p. 559; 1912 Crin. Ind. Oc. p. 230; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 212.

From St. 32 (1), 37 (1) = 2 specimens.

Sp. 1 (St. 32) Cd low, bluntly conical. C. XXXII 10—18 (usually 17—18), 9—11 mm. (The dorsal C. with 10 segments, 2 mm). 1st and 2^d segments short, then the L = 2 — 2¹/₂ br. The segments distally much broader, not hour-glass-shaped. No dorsal spine. Antepenultimate segment L = 1³/₄ br. Penultimate segment L = 1¹/₃ br, with an opposing spine, h = ¹/₃ of the br of the segment. Terminal claw slightly curved, somewhat shorter than the preceding segment.

R—s not very visible. I Br 1 h = ¹/₄ br, a little narrower at the middle because of the slightly backwards directed synarthrial tubercle on I Brax. I Br 2 L = br, rhombic, with a long, low carination on the synarthrial tubercle, the distal angle prolonged. Arms X, ± 40 mm. Br—s 1 basally united inside; Br 2 considerably longer than the preceding ossicle, with a proximal border of the same form as in I Br 2, inside widely separated. Ex. of syzygies: 3+4, 9+10, 14+15 etc. with an interval of about 3 oblique articulations. The distal parts of the arms smooth.

P₁ 14—15; 5,5—6 mm. P₂ 14—15; 6—6,5 mm., P₃ 13; 6 mm. All these p-s very slender, the two first segments short, the following ones L = 3 br. P₄ 8—11; 4 mm. with a genital gland. Distal p-s 16; 6,5 mm.

Disk without calcareous granules, 4,8 mm. Anal cone 2,7 mm. Colour: arms white with red transverse bands.

Sp. 2 (St. 37) C. XXXVIII 10—16; 3—8 mm. Arms X, 37 mm.

P₁ 12; 5,5 mm. P₂ 11; 5 mm. P₃ 10, 5 mm. P₄ 10, with a genital gland from the 3^d—6th segment. Distal p. ± 15; 5,5 mm.

On account of the few segments of P₁ and P₂ and the relatively short P₃ the above-described specimens appear to come next to *I. melpomene*, previously found at Hongkong. *I. adrestine* is a not very different species from south Japan. It is distinguished by some more

(18—20) pinnulars on P_1 — P_3 , ($P_3 > P_2 > P_1$), and usually has somewhat fewer cirrals. An examination of more ample material will probably show that the two forms belong to the same species.

A. H. CLARK 1918 in the Siboga work gives *Antedon minuta* as a synonymous form of *I. adrestine*. If this is correct there might be a mistake in the description of the first-mentioned species. *I. adrestine* is said to have P_1 19; 10 mm. and in this case *A. minuta* can scarcely have P_1 18; 3 mm. because of a rule that one always finds verified in the examination of growth-series of Crinoids and that runs thus: Length and number of segments of a cirrus, an arm or a pinnule stand in a certain relation to the ontogenetical development and in a certain relative proportion, viz. that younger specimens have shorter cirri, arms, and pinnules and fewer cirrals and pinnulars, than the full-grown ones. The figures obtained by these characteristics are rather constant in relation to one another at a given size and when compared with the same characteristic in older and younger individuals of the same species they can be fitted into an arithmetical series.

Dorometra A. H. CLARK.

D. nana (HARTLAUB).

Fig. 123, 124.

Syn.: See 1918 A. H. CLARK Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 216.

From St. 41: 3 specimens.

Sp. 1 (St. 41) The free, flat, dorsal pole of Cd about 0.5 mm. C. \bar{L}_1 10—14; 4—8 mm. 1st segment short, 2^d cubical, 3^d $L = 1\frac{1}{2} - 2 \times$ br, 4th—7th segment: $L = 2 - 3 \times$ br, then shorter again. Antepenultimate cirral $L = 1\frac{1}{2}$ br, penultimate segment $L = 1\frac{1}{3}$ br, with a pointed opposing spine, $h = \frac{1}{2}$ of the br of the segment. Terminal claw curved, somewhat longer than the preceding segment.

I Br 1 almost concealed by Cd. Axillary rhombic, $h = \frac{2}{3}$ br with a slight synarthrial tubercle in the proximal part. Arms X, 30—35 mm. Br—s 1 basally united inside. Br 2 with a small, backward directed synarthrial tubercle; this ossicle is narrower than Br 1, by which a broad interspace ($= \frac{1}{2}$ of the br of the arm) arises between the arm-bases. Syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 14 + 15 etc. with an interval

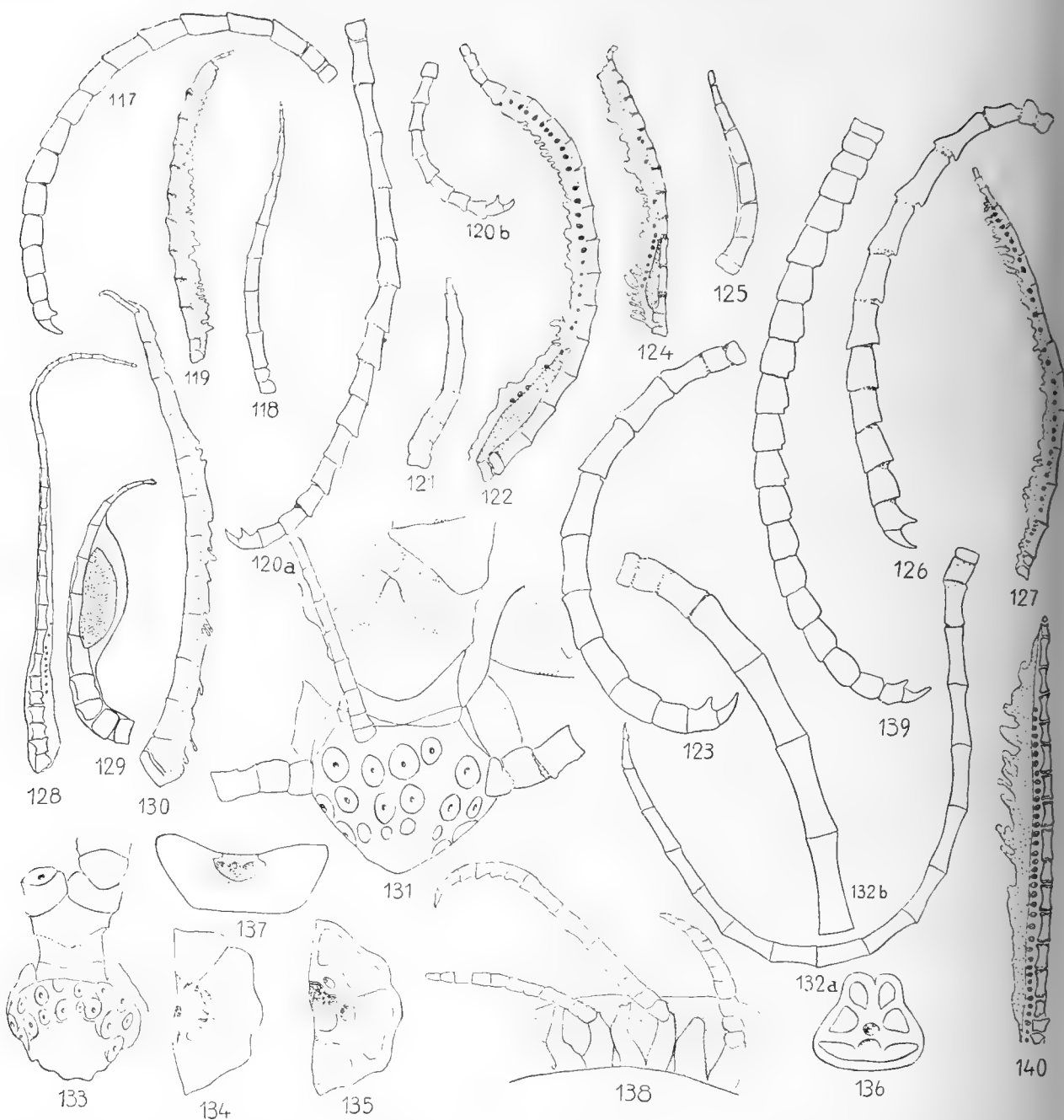


Fig. 117—119 *Iridometra melpomene* (St. 32) 117) Cirrus $\frac{9}{1}$, 118) P_1 $\frac{9}{1}$, 119) Distal pinnule $\frac{9}{1}$; 120—122 *Dorometra briseis* (St. 37) 120) Cirrus a) long one (from the ventral whorl), b) short one (from the dorsal whorl) $\frac{9}{1}$, 121) P_1 $\frac{14}{1}$, 122) Distal pinnule $\frac{14}{1}$; 123, 124 *Dorometra nana* (St. 41) 123) Cirrus $\frac{14}{1}$, 124) Distal pinnule $\frac{9}{1}$; 125—127 *Dorometra parvicirra* 125) P_1 (St. 53), $\times 17 \frac{1}{2}$, 126) Cirrus (St. 47) $\frac{14}{1}$, 127) Distal pinnule (St. 53) $\frac{14}{1}$; 128—132 *Psathyrometra Würeni* (St. 6) 128) P_1 $\frac{14}{1}$, 129) P_2 with a genital gland from the 5th—8th segments $\frac{14}{1}$, 130) Distal pinnule $\frac{14}{1}$, 131) Cd with the cirrus-groups and the bases of the arms $\frac{14}{1}$, 132) A younger and more slender but complete cirrus, b) the 7 first segments of an out-grown cirrus $\frac{14}{1}$; 133—140 *Cyllometra pulchella* (St. 13) 133) Cd with the cirrus-sockets and an arm-base $\frac{9}{1}$, 134) The proximal faces of the radials and half of the rosette $\frac{14}{1}$, 135) Half Cd seen from the ventral side $\frac{14}{1}$, 136) The distal articulation of the R $\frac{14}{1}$, 137) Half of Cd in lateral view, showing the central cavity $\frac{14}{1}$, 138) Br 2—8 with P_1 — P_3 $\frac{9}{1}$, 139) Cirrus $\frac{14}{1}$, 140) Distal pinnule $\frac{14}{1}$.

of 3 oblique articulations. The segments are smooth, rather short, never much longer than broad.

P_1 11; 3 mm. P_2 and P_3 broken. P_a 9; 2,5 mm. P_b 10, of about the same length or a little longer. P_c 13; 5 mm. much larger and coarser than P_1 and P_2 , like these p—s rather smooth. P_c with a small genital gland. P_d and the following ones about 3 mm. Distal p. 15—17; 4,5—5,5 mm.

Disk somewhat swollen with a smooth, ungranulated skin, pentagonal, 5 mm. Colour: like the specimens of the Siboga Expedition with close, small spots of violet-brown on white ground, the soft parts olive-brown (specimens in spirits).

Sp. 2 (St. 41) C. XLIX 12—14; 4—9 mm. Arms X, broken.

P_1 10; 3 mm. For the rest as the preceding specimen.

Sp. 3 (St. 41) C. about L 10—12; 4—8 mm. Arms X, 35 mm. Syzygies as before. P_1 8; 3 mm. P_2 6—8; 2,7 mm. P_3 15; 6 mm. P_4 12; 3,7 mm. Distal p. \pm 16; 5 mm.

Disk 5 mm. Somewhat smaller spots, appearing only at the articulations, by which the specimen seems to be lighter.

Differs from *D. nana* only by greater number of cirri and by the Br—s 1, which are basally united inside.

Dorometra briseis A. H. CLARK.

Fig. 120—122.

Syn.: *Antedon briseis* 1907 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 33, p. 83.

Iridometra briseis 1908 A. H. CLARK Wash. Proc. Biol. Soc. Vol. 21, p. 131; 1912 Crin. Ind. Oc., p. 231; 1915 Wash. Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 215.

Dorometra briseis 1918 A. H. CLARK Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 216.

From St. 35 (1), 37 (2) = 3 specimens.

Sp. 1 (St. 37) C. XLVII 10—17; 3—11 mm. 1st segment L = br, 2^d one L = 2 br, 3^d—5th segments the longest, L = 3—3 1/2 br. The segments somewhat hour-glass-shaped, specially widened distally.

R—s indistinctly visible in the corners. I Br 1 h = 1/6 br, partly concealed at the middle by the tongue-like prominence from the axillary, laterally free and provided with a small tubercle. I Br 2 about rhombic, h = 2/3 br, with concave distal margins and a backward directed

tongue. Br—s 1 free inside. Br 2 with a backward projecting prominence, similar to that of the axillary. Arms X, 40 mm. smooth; the syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 16 + 17 etc. with an interval of 3 oblique articulations. The longer side of the proximal Br—s L about = br, on the distal segments L = 1 1/2 br.

P₁ 8; 2,7 mm., P₂ 8; 2,5 mm., P₃ 13; 4,7 mm., P₆ 14; 5,5 mm. Distal p—s ± 18; 6,5 mm.

Colour: yellow-white; the arms with transverse bands of brown-red *large* spots.

Sp. 2 (St. 37) C. XXXIV 9—12; 2—7 mm. Arms X, 20 mm.

P₁ 7; 2,2 mm., P₂ 7; 2 mm., P₃ 10; 3 mm. Distal p—s 15; 5 mm.

Sp. 3 (St. 35) C. about XXXV 11—14; 6—10 mm. built as before. H of the opposing spine ²/₃ of the br of the segment.

Axillary with concave distal margins, h = ²/₃ br. Br—s almost free inside, twice as broad on the outer side; the outer half partly hidden by the backward directed tongue from Br. 2. Arms X, 45 mm. Syzygies with an interval of 3(—4) oblique articulations.

P₁ 9—10; 3—3,5 mm., P₂ 8—9; 2,5—3 mm., P₃ 11—12; 4,2—5 mm. P₄ 10; 4,5 mm. with a genital gland. Distal p. 17; 5,5 mm.

Disk 5 mm. Colour as before.

All these specimens differ from *D. briseis* by having more cirri and by longer P₃, by which they resemble *D. nana*. Nevertheless the size of P₃ in the latter species always differs much more from the other p—s than in *D. briseis*, the cirrals are shorter in *D. nana* (cf. the descriptions of the two species), and the colour seems to be consistently different, as *D. nana* has small, closely-arranged spots, while *D. briseis* has some few, large dark flecks separated by large white parts of the arms and pinnules.

Dorometra parvicirra (P. H. CARP.)

Fig. 125—127.

Syn.: See 1918 A. H. CLARK Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 216.

From St. 47 (1), 53 (1) = 2 specimens.

Sp. 1 (St. 53) Cd hemispherical. C. about XXX, fallen. Cirrus-sockets arranged in two irregular whorls. A loose cirrus 14; 5,5 mm.

3^d and 4th segments the longest ones, $L = 2 - 2\frac{1}{2}$ br, like the preceding ones a little hour-glass-shaped. Antepenultimate segment $L = 1\frac{1}{2}$ br. Opposing spine $h = \frac{1}{2}$ of the br of the segment. Terminal claw narrow, pointed, somewhat curved, as long as the penultimate segment.

R-s $h = \frac{1}{7}$ br. I Br-s I $h = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ br, laterally free, but in close contact by a small, lateral tubercle, at the middle partly hidden by the synarthrial tubercle from the axillary. Axillary rhombic, $h =$ br. The lateral angles a little pointed by a small prominence. Arms X, broken, probably between 20 and 30 mm. Br-s I united on the inside, twice as broad on the outside, medio-laterally narrower by the tubercle from Br 2. Ex. of syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 14 + 15 etc. with an interval of 3 oblique articulations. First 10 segments about discoidal, then oblique joints. Arms rather smooth.

P_1 8; 2 mm. (1st segment short, 2^d one cubical, 3^d $L = 1\frac{1}{2}$ br, 4th—7th segment $L = 2 - 3 \times$ br), P_a 7; 1,5 mm., P_2 8; 2,5 mm., P_3 10; 4 mm. (The segments somewhat hour-glass-shaped, $L = 3 - 4$ br), P_4 7; 2 mm., $P_5 \pm 9$; 3 mm. Distal p-s about 15; 5 mm. (Longest segments $L = 3 - 3\frac{1}{2}$ br).

Disk 3 mm., rather much incised, granulated both IR and inter-brachially. Colour: brown. — With some large *Myzostomas*.

Sp. 2 (St. 47) Cd rounded, dome-shaped, dorsally papillated. C. \pm XXV, 11—14; 2,5—7 mm. in 2 or 3 whorls, 3^d—6th segments the longest, $L = 1\frac{1}{2}$, 2 and $2\frac{1}{2} \times$ br. Opposing spine $h = \frac{2}{3}$ of the br of the segment, directed obliquely outwards.

Axillary rhombic, $h = \frac{2}{3}$ br, with a low synarthrial tubercle, located somewhat in front of the tongue-like posterior prominence (the same in sp. 1). Arms X, 35 mm. Syzygies as before.

P_1 9; 2,7 mm. (The L of the segments $3 - 3\frac{1}{2}$ br), P_a 7; 2 mm., P_2 10; 3,5 mm., P_3 14; 5,5 mm., P_4 9; 2,5 mm. Distal p. 16; 5 mm. (Longest segments $L = \pm 4 \times$ br). The genital glands not very prominent.

Disk smooth, somewhat incised, without granules. Colour: brown. — With *Myzostomas*.

Properly speaking, the above-described specimens only differ from *D. parvicirra* (P. H. CARP.) by their smaller proportions. Therefore I have not separated them as a special variety, though the axillaries

and I Br 1 are of somewhat different form, not so much pronounced, however, in the larger specimen. These differences are therefore probably due to the animals' different ages.

Zenometrinæ A. H. CLARK.

Psathyrometra A. H. CLARK.

Ps. Wireni n. sp.

Fig. 128—132. Photo 12.

From St. 6 : 1 specimen.

Sp. 1 (St. 6) Cd pointedly conical, $h = 2$ mm., $br = 2,2$ mm. The cirrus-sockets in 5 radial groups, separated by narrow, interradian interspaces. Each radial group with 7—8 cirri. (The most dorsal cirrus-sockets more or less indistinct or disappeared). In each group there are two rows (with 3—4 cirrus-sockets), forming an angle with each other, and between these rows there is an incomplete one with 1—2 cirri.

Cirri fallen or broken, marks after XXXIX. A young, complete, fallen cirrus with 18 segments, 10 mm. 1st segment short, 2^d cubical, 3^d $L = 1\frac{3}{4}$ br, 4th segment $L = 2\frac{1}{2}$ br, 5th—7th cirral $L = 3 - 3\frac{1}{2}$ br then slowly decreasing; antepenultimate segment $L = 2\frac{1}{4}$ br; penultimate one $L = 2$ br. Terminal claw almost straight, $L = \frac{1}{2}$ of the preceding segment (cf. the figure). The first 7 segments of a full-grown cirrus also remaining. These are larger and coarser, but otherwise of about the same proportions as in the young cirrus. (Except the 3^d segment, where $L = 1\frac{1}{3}$ br). This cirrus has probably been of a L of about 15 mm.

R—s somewhat visible in the corners. I Br—s 1 laterally free, latero-distally a little squeezed together, $h = \frac{1}{4}$ br. Axillary $h = \frac{3}{4}$ br, broader than the preceding ossicle, rhombic, the posterior margin slightly curved, because of the low, backward directed, synarthrial tubercle; distal tongue narrow, very much prolonged. Arms X, 40 mm., (broken, probably about 60 mm.) Br—s 1 basally contiguous inside, the outer border twice or three times as broad as the inner one. Br 2

also very much more narrow on the inside; slight synarthrial tubercle between Br 1 and 2. The distance from the R—s to the first syzygy is 3,2 mm. After Br 12 oblique joints. Ex. of syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 14 + 15, 21 + 22 or 3 + 4, 9 + 10, 16 + 17, 20 + 21 etc. with an interval of 3 oblique articulations. The first 10 Br—s with the distal margins somewhat thickened and bent outwards; distally the arms are smooth.

$P_1 \pm 30$; 6 mm. The 5 first segments with notches (as in for instance *Ps. mira*), shorter than long to cubical; then the segments are slender, more or less hour-glass-shaped, $L = 1\frac{1}{2}$ —2 br, the whole pinule very slender and whip-shaped, P_a similar, ± 25 ; P_2 11—12; 3,5—4 mm. (First 3 segments shorter than long, the following ones $L = 2$ — $2\frac{1}{2}$ br. From the 5th—the 8th segment a large genital gland; P_2 stouter than P_1). P_b similar, 11 segments. P_3 11; 3,7 mm. Distal p. 16; 5,5 mm. (1st and 2 segments short, 3^d and the following ones long and slender, $L = 2\frac{1}{2}$ —3 br, the articulations somewhat swollen).

Disk a little incised, 4,5 mm., without granules. Anal tube 2,3 mm. The ossicles white, the weak parts yellowish (on the preserved specimen).

The above-described new species is a rather interesting type. By the formation of Cd it documents its relationship to the subfam. *Zenometrineae*. The formation of cirri and P_1 both hint at the above-mentioned subfamily as well as the subfam. *Thysanometrineae* (Both these characteristics are however common both to *Thysanometrineae* and to a couple of genera in *Zenometrineae*). And finally — and this is the really strange condition — the animal has a large genital gland on P_2 , a phenomenon elsewhere found in *Ps. anomala*, in *Bathymetrineae*, and exceptionally in *Antedoninae* (Compare *Compsometra parviflora*). Of late A. H. CLARK has shown that a genital gland on P_2 does not occur in all species of *Bathymetrineae* (as he at first supposed), though it is a very usual characteristic in the subfamily mentioned.

It is perhaps not an accident that this characteristic, otherwise common to the *Bathymetrineae*, is found in *Zenometrin* forms. This is an additional support for A. H. CLARK's supposition (though possibly not a very important one, considering that a genital gland is also found exceptionally in the *Antedoninae*) that the two first-mentioned subfamilies might be more closely related. To be correctly understood, I will say, however, that, contrary to A. H. CLARK, I am more inclined to think

the *Zenometrinæ* to be the original type because of the formation of the Cd which probably more than that of the *Bathymetrinæ*, resembles the Cd of the more primitive (*Atelecrinoid?*) forms from which the Macrophreats originate.

The new species, which I have named after Prof. A. WIRÉN of Uppsala, is in other respects approaches closest to *Ps. inusitata* and *Ps. anomala*.

Perométrinæ A. H. CLARK.

Erythrometra A. H. CLARK.

E. rubra A. H. CLARK.

Fig. 150—152.

Syn.: *Antedon ruber* 1907 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 33, p. 146.

Erythrometra ruber 1908 A. H. CLARK Wash. Proc. Biol. Soc. Vol. 121, p. 126; Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 34, p. 316; 1909 København, Videnskabl. Meddel. p. 190; 1912 Crin. Ind. Oc. p. 233; 1915 Wash. Journ. Acad. Sci. Vol. 5, p. 215; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 236.

From St. 11 = 3 specimens.

Sp. 1 (St. 11) C. XX 24—25 (D), 34—36 (V); 7—11 mm. 1st and 2^d segments short, 3^d cubical, 5th the longest, $L = 1\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3}$ br, then slowly decreasing, 10th segment about cubical. From this segment a dorso-distal swelling on the cirrals, and this prominence gradually develops into a blunt, longitudinal crista (most prominent about 9—10 segments from the last one). Antepenultimate segment almost smooth. Opposing spine stout, $h = \frac{2}{3}$ of the br of the segment. Terminal claw curved, L about the same as the penultimate segment.

R—s $h = \frac{1}{6}$ br. I Br 1 $h = \frac{1}{2}$ br, laterally almost free, though nearly standing, distally somewhat incised in the middle by the obtuse-angled proximal border of the axillary. The synarthrial swelling inconspicuous. Axillary rhombic, $h = \frac{3}{4}$ br, lateral angles with very slight, small spines. Arms X, 25 mm. +. Br—s 1 inwardly united by pairs, outwardly $1\frac{1}{2} \times$ broader. The proximal border of Br 2

similar to that of I Br 2. Joints after Br 10 triangular, smooth. Syzygies: 3 + 4, (9 + 10), 15 + 16, 21 + 22, distally with an interval of usually 3—4 oblique articulations.

P₁ 11—12; 4,2 mm. (1st and last segments short, the other ones L = 2—2 1/2 br, smooth cirrals), P₂ 11; 4 mm. (Distal segments slightly swollen and spiny), P₃ 8—9; 2,2 mm., P₄ still a little shorter, then again longer p—s. Distal p ± 13; 3 mm. (1st and 2^d segments somewhat stouter than the following ones), P_a usually absent. The proximal pinnules are stiff.

Colour (on preserved material) yellow-brown. Cirri white. Disk 2,5 mm., finely papillous. Anal cone narrow, L = 0,8 mm.

Sp. 2 (St. 11) C. XXXII 15—16 (D), 25—28 (V); 2,5 and 7 mm. respectively.

I Br 1 with 3 small lateral tubercles on each side. Arms X, broken. After Br 7 wedge-shaped segments. Ex. of syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 14 + 15.

P₁ 9; 3,5 mm. (Distal segments slightly collar-shaped and a little spiny). P₂ 8; 2,5 mm. Similar to P₁; P₃ 9, about as long as P₂. P_a absent.

Disk with large calcareous granules also interbrachially, where the perisome reaches to Br 4. Colour salmon-red. Cirri white.

Sp. 3 (St. 11) The free dorsal surface of Cd small-grained, 0,8 mm. C. XIV 17—19 in a single whorl. 4th segment the longest, with a dorsal tubercle, which at the 7th segment passes over to a stout dorsal spine, less developed on the antepenultimate segment.

Arms X, broken. Syzygies with an interval of 3—4 oblique articulations.

P₁ 11; 3 mm. P₂ 11; 4,2 mm. (the distal borders of the pinnulars with small spines), P₃ 9; 3 mm., P₄ 10; 2 mm., P_a absent.

Colour white, with pale pink spots on the arms.

Though the above-described specimens differ from *Erythrometra rubra* by having almost smooth arm-bases and proximal pinnules, I have referred them to this species, as the other characteristics coincide, and considered the differences to be ascribable to different ages in my specimens and those described of A. H. CLARK.

A. H. CLARK originally called the species *Antedon ruber*. When a little later he created his new classification of the Comatulids and

referred the species to a new genus of feminine gender, he still preserved the second name *rubra* with a masculine inflection. To adapt the adjectival second name to the genus-name, I have therefore called the species *E. rubra*.

Clarkometra n. gen.

In all morphological characteristics this new genus proves to be a *Macrophreat* form and is to be included in the subfamily *Perometrinæ*. (Nevertheless I will call attention to the fact that the dorsal prominence on 5th–8th cirral is a transversely curved, even crista. This reminds one of the condition in the family *Colobometridæ*, where the crista is, however, always forked or serrate.)

Clarkometra agrees with the Central-American genus *Hypalometra* in the absence of P_1 and P_a , but differs from this one by a low, flattened Cd, by short cirri, which are composed of a rather small number of about cubical segments, and by the occurrence of 2 pairs of oral pinnules. Of the other distinguishing marks I ought, perhaps, to mention the appearance of the cirrus-sockets on Cd. (The perforation for the central canal is situated in the middle of a relatively large calcareous wart located in the central part of the cavity in which the cirrus is fixed) — A. H. CLARK in a letter to me has supposed that the species described below might possibly be identical with, or nearly related to, »*Antedon impinnata*» mentioned by P. H. CARPENTER from Mauritius (Chall. Exp. p. 206). It is possible, though not very likely, that the new species might be nearly related to CARPENTER'S species — from his very incomplete description one only learns that P_a , P_b and P_2 are absent — that it is identical with my species I consider to be out of the question, partly because of the statements about the number of cirri and cirrals, partly on account of the geographical distribution. Besides, the statements about the pinnulation rather point to a young animal than to a full-grown individual. For in connection with the notice of absence of P_2 , P_a and P_b nothing is said about P_1 , and one must therefore suppose that this pinnula is present.

This new, very interesting genus I have called after A. H. CLARK, who has done such very meritorious work on the systemisation of the Comatulids.

Cl. elegans n. sp.

Fig. 141—149, Photo 8.

From St. 43 (15 sp.), 53 (2) = 17 specimens.

Sp. 1 (St. 43) Cd low, arched, br = 1,8 mm., free dorsal surface 1 mm., somewhat granulated. H of Cd 1 mm. (from the R—s to the dorsal pole).

C. XXX 15—18; 3,5—5 mm. in two close, alternating whorls. 1st segment shorter than long, 2^d and 3^d cubical, 4th L = 1 1/4 × br, then slowly decreasing. 5th—7th (or 8th) segment with a low, transverse, curved crista which from the 8th cirral concentrates to a small, simple dorsal tubercle. Opposing spine pointed, rather large (h = 1/2 of the br of the segment). Terminal claw curved, rather stout, length about the same as the preceding segment. The whole cirrus rather stout.

R—s almost concealed at the middle by Cd, a little tongue-like in the corners. I Br-s 1 baso-laterally contiguous or free, h = ± 1/4 br, with a small medio-dorsal tubercle. Axillary h = 3/4 br, almost hexagonal with a low, synarthrial, longitudinal crista (rather slightly bordered) in the proximal 2/3. Arms X, 30—35 mm., smooth. Br-s 1 united inwardly to 2/3. Br 2 on the outside twice as broad. Br 1 and 2 with a slight synarthrial prominence similar to that of the I Br series. Ex of syzygies: 3 + 4, 9 + 10 . . distally with an interval of 3 oblique articulations. The proximal segments rather long.

P₁ and P_a absent. P₂ 12; 6,5 mm. (1st segment short, 2^d a little longer than broad, 3^d L = 2 br, 4th and 5th segment L = 3—4 × br, slender, at the ends somewhat widened. From the 3^d segment the distal ends are indistinctly collar-shaped and have spiny borders), P_b 6 mm. P₃ 11; 5 mm. P₄ 10; 3,2 mm. with a genital gland and considerably shorter segments. Distal p-s. 16; 5,5 mm. (1st, 2^d and the last segments short, the other ones L = 2 br).

Disk without calcareous granules, incised, longest diameter 4, shortest 2,5 mm. Anal cone long, ± 2 mm.

Cirri white, the arms red-violet.

Sp. 2 (St. 43) The size of the disk as before. Anal cone 1,5 mm. Colour a little lighter: red-grey with a light, dorsal, longitudinal band. For further details compare the table.

Sp. 3 (St. 43) R—s narrow bands. 1 Br-s 1 laterally free. The synarthrial tubercle indistinct. P_b 9; 3 mm.

Sp. 4 (St. 43) R—s well visible, h = $\frac{1}{6}$ br. No synarthrial tubercle. Broken arms.

Sp. 5 (St. 43) R—s as in *Sp. 4*. P_b 7; 2,7 mm.

Sp. 6 (St. 43) P_b 9; 4,2 mm.

Sp. 7 (St. 43) P_b 8; 3,3 mm. Disk: longest diameter 3,5, shortest one 2 mm.

Sp. 16 (St. 53) Opposing spine h = $\frac{2}{3}$ of the br of the segment. P_b 8; 3 mm. Disk 3 mm., not so distinctly incised. Anal cone 2 mm.

Sp. 17 (St. 53) Disk 2,5 mm.

Number of specimens & stations	Cirri			Arms		P ₂		P ₃		P ₄		Dist. p.	
	N	S	L	N	L	S	L	S	L	S	L	S	L
<i>Sp. 1</i> (St. 43.)	XXX	15—18	3,5—5	X	30—35	12	6,5	11	5	10	3,2	16	5,5
<i>Sp. 2</i> (St. 43.)	XXVIII	16—19	3,5—5,5	X	25	12	5,5	10	4,7	10	3	15-17	5
<i>Sp. 3</i> (St. 43.)	—	14—15	4,5	X	20	9	4	8	3,5	7	2,3	12	4
<i>Sp. 4</i> (St. 43.)	XV	13	3—3,5	X	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Sp. 5</i> (St. 43.)	XVII	13	3—3,5	X	12	8—9	2,7	7—8	2,5	8	1,5	10	2,5
<i>Sp. 6</i> (St. 43.)	XXVIII	13—16	3,5—6	X	27	9	4,2	7—8	3,2	8	2,5	16	5
<i>Sp. 7</i> (St. 43.)	XXIII	14—16	2,5—3,5	X	—	8	3,3	8	3	—	—	—	—
<i>Sp. 16</i> (St. 53.)	XXV	15	4—5	X	27	8	3,5	8	3	8	2,7	15	4
<i>Sp. 17</i> (St. 53.)	XIV	12—15	3—4,5	X	15—20	9	3	9	2,5	—	—	± 15	4

Bathymetrinæ A. H. CLARK.

Thaumatometra A. H. CLARK.

Th. comaster A. H. CLARK.

Fig. 153—156.

Syn: *Thaumatometra comaster* 1908 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 34, p. 232; 1912 Crin. Ind. Oc. p. 246; 1915 Wash. Journ. Acad. Sci. Vol. 5 p. 215; 1918 Siboga Exp. Vol. 42 B, p. 256.

From St. 37 (and 4) = 2 specimens.

Sp. 1 (St. 37) Cd very low and flattened, conical, br = 2 mm., h about 0,6 mm. The free, dorsal surface 1,1 mm. C. $\frac{+}{-}$ XXXV 12—15; 7—8 mm. in a double whorl. (1st segment short, 2^d cubical, 3^d L =

2 br, 4th—6th L = 3 × br, rather much hour-glass-shaped, 7th segment L = 2 1/2 br, antepenultimate one L very slightly greater than br. Terminal claw curved, about as long as the preceding segment). The distal cirrals smoother, in side view thickened.

R—s concealed. I Br-s 1 laterally free, in the middle incised by the backward projection from the axillary. Their lateral h = 1/4—1/3 of the br of the segments. Axillary h = br, with a tongue-like prominence both proximally and distally; the proximal projection is longer than the distal one. The side-angles of the axillary overlapping the I Br-s 1. Arms X, 45—50 mm. Br-s 1 inwardly contiguous basally, on the outside three times as wide. Br 2 with a stout synarthrial tongue. The first syzygial pair (3 + 4) a little broader inside than outside. The following segments irregularly squarish. The distal Br-s knotty and swollen, somewhat longer than broad. Ex. of syzygies: 3 + 4, 9 + 10, 14 + 15 etc. with an interval of 3 oblique articulations.

P₁ 15; 7 mm (1st and 2^d segments short, 3^d L = 2—2 1/2 br, 4th and the following ones L = 3—4 br), P₂ 8; 4 mm. (with a genital gland from the 3^d or 4th to the 7th segment), P₃ 9; 4,5 mm. (a gonad from the 3^d to the 7th segment). The distal segments a little spiny distally. Distal p-s. ± 16; 6—7 mm.

Disk 3,8 mm., smooth, without stouter granules. Anal cone 3,2 mm.

Sp. 2 (St. 4) A very young specimen, probably belonging to this species.

C. ± XXVI 7—10; 2—3 mm. in 2 whorls. Cd low, flattened, almost hidden by cirri. (2^d cirral L = 1 3/4 br, the following segments L = 4 × br, distally somewhat expanded. Antepenultimate segment L = 1 3/4 br. Penultimate segment L = br, with an indistinct opposing spine).

I Br 1 h = 1/3 br. Axillary h = 3/4 br, the backward directed corner with a large synarthrial tongue, about twice as long as the distal angle. Arms X, 10 mm. +. Br-s 1 almost free inside. Br 2 with a synarthrial tongue. — P₁ ± 10; 1,8 mm. (L of the segments = 2 1/2 br). Between P₁ and the distal pinnules a gap. Disk 1,3 mm. Anal cone 1 mm., narrowly sausage-shaped.

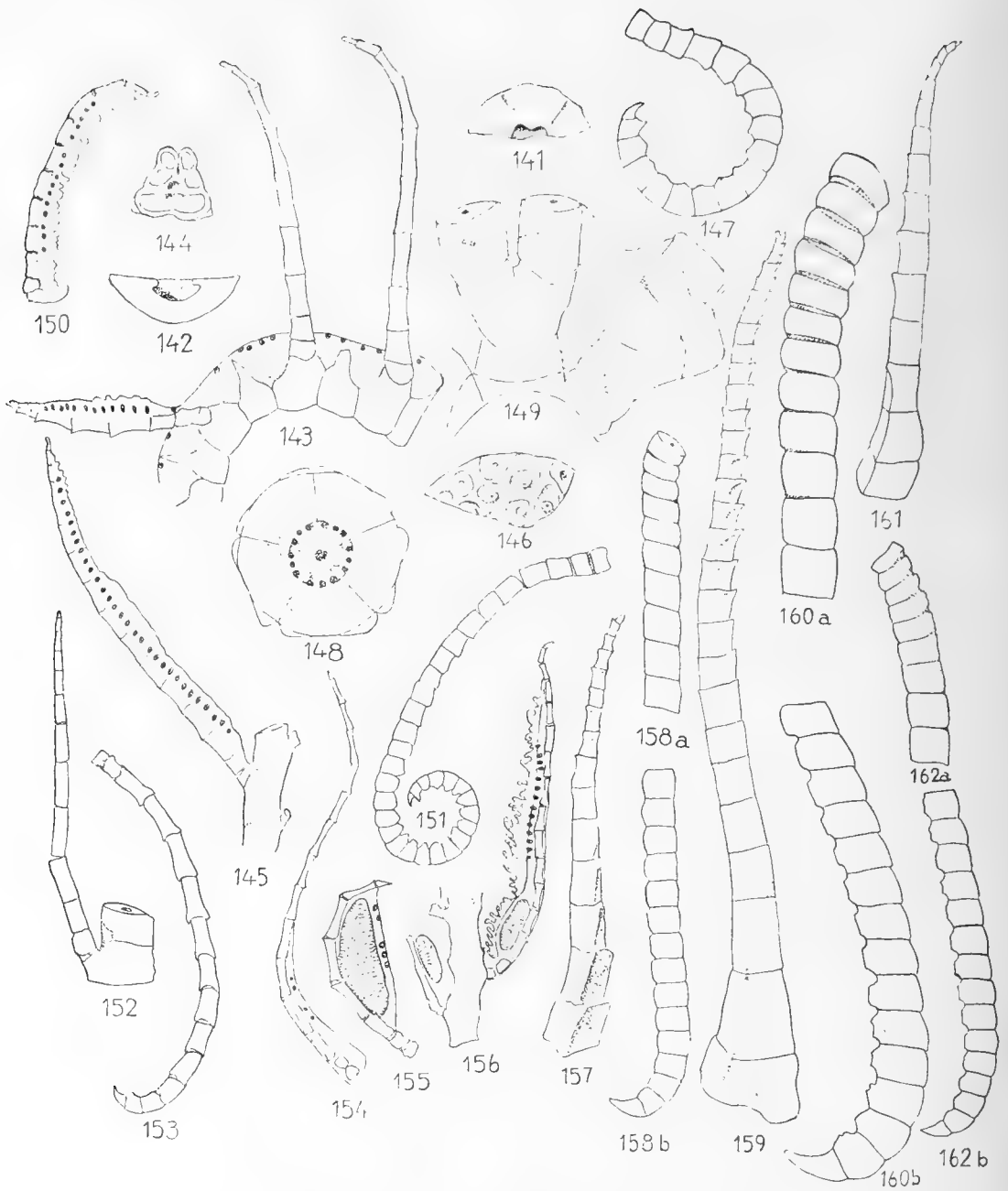


Fig. 141—149 *Clarkometra elegans* (St. 43) 141) Half Cd viewed from the ventral side ¹⁴/₁, 142) Half Cd viewed laterally, showing the extension of the central cavity ¹⁴/₁, 143) Br 4—11 with P₂—P₄ ¹⁴/₁, 144) The distal face of the R ¹⁴/₁, 145) Some Br segments and a distal pinnule ¹⁴/₁, 146) A part of Cd viewed from the dorsal side (observe the calcareous warts at the bottom of the cirrus-sockets), × 17 ¹/₂, 147) Cirrus ¹⁴/₁, 148) Proximal radial faces with the rosette in situ, × 17 ¹/₂, 149) The arm-bases out to Br 3 ¹⁴/₁; 150—152 *Erythrometra rubra* (St. 11) 150) Distal pinnule ¹⁴/₁,

It seems to me as if *Th. cypris* were rather indistinctly separated from the above-described species.

The dorsal prominences of the cirrals are not developed in the above specimens. Is this condition, perhaps, common to all small species of the genus *Thaumatometra*? If P_2 may have a genital gland in *Antedoninae*, and the dorsal prominences of the cirrals may be absent in *Bathymetrinae* the limit between the two sub-families becomes rather vague.

Pentacrinidæ (D'ORBIGNY).

Metacrinus P. H. CARPENTER (WYV. THOMS. M. S.).

M. nobilis var *tenuis* n. var.

Fig. 161, 162.

From St 7 (2), 9 (5), 56 (1), 58 (1) = 9 specimens. Also a stemless crown without indication of the locality.

Sp. 1 (St. 9) Full-grown internodes with 10—13 internodal joints, 13—18.5 mm. (8, 9 and 10 internodals each 1 case, 11 : 5 cases, 12 : 5 cases, 13 : 4 cases). Interarticular pores to the 12th internode. The 3 most proximal nodals without cirri. Full number of internodal joints in the 6th internode. The stem with 22 internodes; total length 275 mm. Diameter of the stem 3.5—4.5 mm. The segments are pentagonal, smooth; the 10 most distal internodes, however, with the joints in the radial line a little concave and provided with small tubercles. Here and there on the internodals tubercles also IR.

Cirri reaching over 2—2½ internodes. 50 segments (IXth nodal) 44 mm., 44 (XIII) 36 mm., 44 (XVI) 36 mm., 40 (XVII) 31 mm., 40 (XVIII) 30 mm. 7th segment L—br; 15 last segments with dorsal spines. L of the terminal claw = 1½ times the preceding segment.

151) Cirrus $\frac{9}{1}$, 152) Br 2 and 3 with P_1 $\frac{14}{1}$; 153—156 *Thaumatometra comaster* (St. 37), 153) Cirrus $\frac{9}{1}$, 154) P_1 $\frac{14}{1}$, 155) P_2 with a genital gland $\frac{14}{1}$, 156) An arm-stump with distal pinnules (a small genital gland from the 3^d—the 5th segments) $\frac{9}{1}$; 157, 158 *Metacrinus interruptus* (Sp. 10) 157) P_1 (I Br 3) viewed somewhat more laterally than in the two following species, $\times 4\frac{1}{2}$, 158) Cirrus a) Proximal part b) Distal part, $\times 4\frac{1}{2}$; 159, 160 *Metacrinus rotundus* (Sp. 2) 159) P_1 , $\times 4\frac{1}{2}$, 160) Cirrus a) Proximal b) Distal part, $\times 4\frac{1}{2}$; 161, 162 *Metacrinus nobilis tenuis* (Sp. 1) 161) P_1 , $\times 4\frac{1}{2}$, 162) Cirrus a) Proximal part (observe: by the position of the basal cirrals the cirrus is bent downwards, not, as in the two preceding species, upwards) b) Distal part, $\times 4\frac{1}{2}$.

No opposing spine. The cirrus-socket entering somewhat into the supra- and infra-nodal joint.

B—s contiguous, shield-shaped, h: 1,3, br: 3,5 mm. R—s soldered together laterally, h = 1,3 mm., br = 4 mm. I Br-s 4 (1 + 2); 7 mm. II Br-s 7 (2 + 3) or 7 (3 + 4) each in 4 cases, 9 mm. The two remaining divisions broken. III Br-s 11 (3 + 4) 3 cases, 13 (3 + 4) 2 cases, 15 (3 + 4) 2 cases; 11—15 mm., the other ones broken. IV Br-s 13 (3 + 4), 15 (3 + 4) each in one case. The Br-s smooth. The perfect specimen probably with LV arms; the total arm-length is 95 mm. L of an unramified arm from III Brax 65 mm.

P₁ (to the right on I Br 2 and to the left on I Br 3 in 2 cases, the reverse condition in 3 cases) 14—15; 13 mm. (1st and 2^d segments stout, square, the L in total 3 mm., the rest of the segments strongly compressed), P₂ 17; 18 mm., P₃ 17—18; 18 mm., P₄ 14; 12 mm. — Disk with small calcareous granules. — Colour, in spirits, white with a green-bluish tinge.

Sp. 2 (St. 9) 18 Internodes; 240 mm. Internodal joints 13 (1 case), 14 (12 cases); 15,5—18 mm. Interarticular pores to the 10th internode. Full number of internodal joints and number of proximal nodals without cirri as in *Sp. 1*. Diameter of the stem 4,5—4,8 mm.

Cirri extending over 2 internodes. Length on the Xth nodal 40 mm., 43 (XIIth nodal) 38 mm., 48 (XIII) 35 mm. The fixing point for the cirrus just touching the supranodal. The infranodal joint sloping towards the fixing point. I Br-s 4 (1 + 2) 9 mm. only remaining in one case. II Br-s 7 (3 + 4) 11 mm. (1 case).

P₁ to the right on I Br 2, to the left on I Br 3 in the only occurring case.

Sp. 3 (St. 9) 23 internodes, 295 mm. Internodal joints 12 (1 case), 13 (11 cases), 14 (5 cases); 12,8—16,2 mm. Interarticular pores to the 10th or 11th internode. The joints are pentagonally rounded, smooth. Diameter of the stem 4,8—5,5 mm.

Cirri 55 (Xth node) 59 mm., 53 (XIII) 58 mm. 51 (XX) 55 mm.; extending over 2³/₄—3¹/₂ internodes. From the 8th segment the cirrals are as long as broad. The 20 last joints with a slight dorsal carination. The crown thrown off from the B—s.

Sp. 4 (St. 9) 17 internodes, 225 mm. Internodal joints 13 (6 cases), 14 (6 cases), 15 (1 case); 15—18 mm. Interarticular pores to

the 9th internode. Diameter of the stem 4,7—5,0 mm. The segments are smooth, distally almost perfectly round or 10-agonal by a slightly developed radial tubercle. The interrarial tubercles usually smaller than the radial ones, all of them very inconspicuous.

Cirri 47 (IXth node) 48 mm., 46 (XI) 46 mm., 46 (XIV) 46 mm. Reaching over 2¹/₂ internodes. — Crown thrown off.

Sp. ♂ (St. 9) 13 internodes; 125 mm. Internodal joints 13 in all the full-grown internodes; 14,7—15 mm. Interarticular pores to the 10th internode. Diameter of the stem 4,0—4,4 mm. 3 proximal nodal joints without cirri. Full number of nodal joints in the 6th internode. The segments as before smooth or slightly swollen in the middle. Cirri 44 (IX), 43 (XII) 40 (XIII), 35—40 mm. Extending over 2¹/₄ internodes. The crown thrown off.

Loose crowns (St. 9)

1) R—s h: 1,3, br: 4,5 mm. I Br-s 4 (1 + 2); 13 mm., occurring in 5 cases. II Br-s 5 (3 + 4) 2 cases, 6 (1 case), 7 (7 cases) with syzygies between the 2^d and 3^d segment in 4 cases, between the 3^d and 4th in 3 cases; 7—10 mm. III Br-s 9 (3 + 4) 4 cases, 10: 1 case, 11 (3 + 4) 8 cases, 13 (3 + 4) 5 cases; 9—11 mm. The higher figures usually on the inner side. IV Br-s 11 (3 + 4) 4 cases, 13 (3 + 4) 3 cases, 15 (3 + 4) 5 cases, 17 (3 + 4) 2 cases, 19 (3 + 4) 5 cases, 21 (3 + 4) 3 cases; 10—20 mm. Arms LX, 140 mm., smooth. Length of an undivided arm from IV Brax 90 mm. 40—50 last mm-s. with rudimentary p-s. Syzygies: 3 + 4, 17 + 18, 37 + 38, 56 + 57 etc.

P₁ to the right on I Br 2 in 5 cases. Distal p-s ± 15; 10 mm.

Disk ± 14 mm., coarsely granulated. Anal tube 12 mm. Colour lightly red-grey.

2) A very broken specimen. I Br-s 4 (1 + 2) 1 case; 8,5 mm. II Br-s 8 (2 + 3, 5 + 6) or 8 (1 + 2, 4 + 5) 2 cases; 12 mm. — III Br-s 15 (3 + 4) 1 case; 17 mm. P₁ to the right on I Br 2 in the only occurring case.

Example of pinnulation:

$$\begin{array}{l}
 I \ 1 + \underline{2} \ \bar{3} \ 4 \left\{ \begin{array}{l} II \ 1 + \underline{2} \ \bar{3} \ 4 + \bar{5} \ \underline{6} \ \bar{7} \ 8 \left\{ \begin{array}{l} III \ 1 \ 2 \ 1 \\ III \ 1 \ 2 \ 3 + \underline{4} \dots\dots \underline{14} \ 15 \end{array} \right. \\ \\ II \ \underline{1} \ 2 + \bar{3} \ \underline{4} \ 5 + 6 \ 7 \ 8 \left\{ \begin{array}{l} III \ 1 \ \underline{2} \ 3 + \\ III \ 1 \ 2 \ 3 + \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{array}$$

Sp. 6 (St. 7) *A stemless crown*. — R—s 1×3 mm. I Br-s 4 (1 + 2); 7 mm.; present i 4 cases. II Br-s 7 (2 + 3) 4 cases, 8: 3 cases, of which the syzygies between 1 + 2, 4 + 5 in 1 case, between 2 + 3, 5 + 6 in 2 cases; 10 mm. The other ones broken. III Br-s 9 (3 + 4) 1 case, 11 (3 + 4) 7 cases, 13 (3 + 4) 6 cases; 8—11 mm. IV Br-s 11 (3 + 4) 3 cases, 13 (3 + 4) 10 cases, 15 (3 + 4) 1 case, 17 (3 + 4) 1 case, 18 (3 + 4, 8 + 9, or 3 + 4, 13 + 14) 2 cases, 20 (3 + 4, 12 + 13) 1 case, 22 (3 + 4, 15 + 16) 2 cases, 23 (3 + 4, 6 + 7, 16 + 17) 3 cases, 25 (3 + 4, 6 + 7, 17 + 18 or 3 + 4, 10 + 11, 20 + 21 the former condition in 2, the latter in 1 case), 27 (3 + 4, 11 + 12, 23 + 24) 1 case; 10—22 mm. The higher figures on the inner sides, e. g. 13—22—25—13; 13—23—22—11; 15—27—25—11 Arms LVI (probably about LXXV in the complete specimen), total length 115 mm. +. The length of a free arm after a IV Brax 75 mm. Rudimentary pinnules on the last 30 mm. The distal Br-s somewhat collar-shaped.

P_1 12; 10 mm. (to the left on I Br 2 in 3 cases of 4), P_2 14; P_3 14; 15 mm. P_7 and the following ones 12—15; 10 mm. At the transition to the rudimentary pinnules the number of segments are 14....12, 9, 8, ., 7, 7, 8, ., 6, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2, . . .

Sp. 7 (St. 7) *A stemless chalice*. I Br-s 4 (1 + 2); 7 mm. II Br-s 6 (3 + 4) 1 case, 7 (3 + 4) 5 cases, 7 (2 + 3) 1 case; 8—9 mm. III Br-s 9 (3 + 4) 1 case, 11 (3 + 4) 3 cases, 13 (3 + 4) 1 case; 10—12,5 mm. IV Br-s 11 (3 + 4) 2 cases, 13 (3 + 4) 2 cases, 17 (3 + 4) 1 case; 10—14 mm. A perfect specimen, probably, with about LXX arms; total length 105 mm. L of the unramified arm after IV Brax 65 mm. Part of the arm with rudimentary p-s 35 mm. Syzygies after a IV Brax: 3 + 4, 29 + 30, 41 + 42 or 3 + 4, 23 + 24, 42 + 43

P_1 8—10 (to the right on I Br 2 in 2 cases, to the left in 3 cases); 7 mm. Distal p-s + 12; 9,5 mm.

A loose crown without indication of the locality: I Br-s 4 (1 + 2); 7 mm. II Br-s 5 (2 + 3) 1 case, 7 in 9 cases, of which in 1 case the syzygies between 1 + 2, in 3 cases between 2 + 3, and in 5 cases between 3 + 4; 8—10 mm. III Br-s 9 (3 + 4) 2 cases, 11: 9 cases (the syzygy in 1 case 2 + 3, in 8 cases 3 + 4), 13 (3 + 4) 8 cases; 10,5—13 mm. IV Br-s 11 (3 + 4) 1 case, 13 in 12 cases (2 cases: 4 + 5; 10 cases: 3 + 4), 15 (3 + 4) 7 cases, 17 (3 + 4) 1 case, 19 (3 + 4) 4 cases, 20 (3 + 4, 14 + 15 or 3 + 4, 16 + 17: 2 cases, or 3 + 4, 17 + 18 or

3 + 4, 18 + 19) 5 cases, 21 (3 + 4) 1 case, 22 (3 + 4, 13 + 14 or 3 + 4, 15 + 16) 2 cases, 24 (3 + 4, 15 + 16) 1 case; 10—17.5 mm. V Br-s 13 (3 + 4) 1 case. — Arms LXXIV. Total length 135 mm. Free arm-length after IV Brax 75 mm. The arm-part with rudimentary p-s 35 mm.

P_1 (to the right on I Br 2 in 5 cases) 10; 13 mm., P_3 14; 17 mm. Distal p. 13; 11—12 mm. Disk 10 mm. Anal cone 7 mm.

Sp. 8 (St. 56) 15 internodes, 160 mm. Internodal joints 11: 3 cases, 12: 3 cases, 13: 6 cases; 9—13 mm. Interarticular pores to the 7th internode: 3 proximal nodals without cirri. Full number of internodals at the 4th internode. Diameter of the stem 2.5—2.8 mm.

Cirri 38 (VI) 28 mm., 37 (VII) 29 mm., 36 (IX) 30 mm., 34 (XI) 26 mm., 36 (XIII) 21 mm., 35 (XV). Cirri extending over 2 internodes.

B—s 1 × 2 mm. R—s 1 × 3 mm. I Br—s 4 (1 + 2); 6 mm., in 4 cases. II Br-s 7 (2 + 3); 6 mm. in 1 case. III Br-s 11 (3 + 4) 2 cases; 9 mm. IV Br-s 11 (3 + 4) 1 case, 15 (3 + 4) 1 case, 21 (3 + 4) 2 cases. The other arm-divisions broken. Total L of the arms 80 mm. Free part from a III Brax 55 mm. Part of the arm with rudimentary p-s about 10 mm. Ex. of syzygies: 4 + 5, 24 + 25, 34 + 35 . .

P_1 (to the right in 2 cases of 4) 12—14; 10—11 mm. P_2 15; 11 mm. Distal p-s 11; 6 mm.

Sp. 9 (St. 58) 14 internodes, 100 mm. Number of internodals 6—11; 5.5—10 mm. Interarticular pores to the 6th internode. Diameter of the stem 0.8—1.6 mm. Number of internodal joints, counted proximo-distally (from the chalice), are: 0, 0, 0, 1, 3, 7, 9 (6 mm.) 10 (8.2 mm.) 11 (9), 10 (8), 11 (9), 10 (8.5), 9 (7), 7 (5.5), 6 (5), 11 (10), 10 (9). Stem smooth.

Cirri 26 (VII) 18 mm., 25 (X) 16 mm., 23 (XIII) 14 mm., 21 (XV). From the 4th segment the L of the segments are = 1¹/₂ br, last 7 segments L = br or shorter. A dorsal spine scarcely developed. Cirri extending over 2 internodes.

I Br-s 4 (1 + 2) in 4 cases, 5 (1 + 2 3 + 4) 1 case; 5 mm. II Br-s 7 (2 + 3) 5 cases, 8 (1 + 2, 4 + 5 or 2 + 3, 6 + 7, the former condition in 1 case, the latter one in 3) 4 cases; 6 mm. III Br-s 11 (3 + 4: 8 cases, 2 + 3: 1 case) 9 cases, 13 (3 + 4) 7 cases, 15 (3 + 4) 2 cases; 8—10 mm. IV Br-s 11 (3 + 4) 1 case, 13 (3 + 4) 12 cases, 14 (3 + 4, 10 + 11) 1 case, 15 (3 + 4) 3 cases, 17 (3 + 4) 7 cases, 19 (3 + 4) 1 case; 6—7 mm. Arms LXII +, total length 30 mm. Free L after a III Brax

10—12 mm. The part of the arm that supports the rudimentary pinules 3 mm. The arms derived from IV Brax of very different lengths, cf. the table below:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{III} \dots 3 + 4 \dots 13 \\ \text{III} \dots 3 + 4 \dots 11 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{IV} \dots 3 + 4 \dots 17 \\ \text{IV} \dots 3 + 4 \dots 13 \end{array} \right\}$	Br $\bar{1} \bar{2} 3 + \bar{4} \dots 9$	3 mm.
		Br $\underline{1} \underline{2} 3 4$	0,8 mm.
		Br $\bar{1} \bar{2} 3 + \bar{4} \dots 7$	1,2 mm.
		Br $\underline{1} \underline{2} 3 + \underline{4} \dots 13$	5,0 mm.

P_1 (to the right on I Br 2 in 5 cases) 9; 5 mm., P_2 10; P_3 10; $P_{IV \text{ Br}}$, 7; 2 mm.

Disk coarsely granulated, with a long, plated anal tube. No orals remaining.

As is evident from the descriptions given above the number of cirrals and cirri is to a certain degree proportional to the thickness of the stem, that is to the age of the specimen. The different stages of age that the present specimens represent permit a rough estimate of the L of the stem in a full-grown specimen. *Specimen 3* has a L of the stem of 295 mm. and an increase of 4,8—5,5 mm. of the stem-diameter. *Sp. 2* has a 240 mm. long stem and a diameter of 4,5—4,8 mm. *Sp. 1* has a stem-length of 275 mm. and a stem-diameter of 3,5—4,5 mm. In *Sp. 8* the stem on a L of 160 mm. has increased from 2,5—2,8 mm. and in *Sp. 9* from 0,8—1,6 mm. on a L of 100 mm. To judge from these specimens the increase of the diameter of the stem is thus rapid to 1,5 mm. rather slow at about 2,5 mm., again somewhat more rapid between 3,5 and 4,5 mm. retarded between 4,5 and 4,8 mm., and a little faster between 5,0 and 5,5 mm. Nevertheless there is a general decrease in the rapidity of the thickness-growth of the stem, i. e. younger specimens grow faster, older ones usually more slowly. The total length of the stem, judging from the above figures, might be between 1,5 and 2,0 metres.

To the so-called *nobilis*-group DÖDERLEIN has assigned 4 species: *M. nobilis*, *varians*, *suluensis* and *superbus*. I can here leave the two last-mentioned ones out of the question, as they are well separated from the 2 preceding species and from the above-described variety. *Metacri-*

mus nobilis with varieties and *M. varians* DÖDERLEIN has distinguished according to the below combined scheme:

I Large species. Diameter of the stem 5—7,5 mm. IV Brachials ordinary. Internodals smooth, without distinct furrows between the joints.

M. nobilis

1) 8 internodal joints. Cirri extending over 4 internodes.

Diameter of the stem 5—6 mm. 5 »Radials» *M. nob. var. sumatranus*

2) 9—10 internodal joints. Cirri extending over 3—4 internodes.

Diameter of the stem 6—7,5 mm. 6(—7) »Radials» *M. nob. var. timoriensis*

3) 10—12 internodal joints. Cirri extending over 3 internodes.

Diameter of the stem 6—7 mm. 5 »Radials» *M. nob. var. nobilis*.

4) 13—15 Internodal joints, otherwise as in the preceding variety. Here is to be mentioned also the sp. from Siboga Stat 251, 253, 254.

M. nob. var. murrayi.

II Small species. Diameter of the stem 4—5 mm. Rarely IV Br-s. Internodal joints 6—8. Distinct furrows between the internodals. Cirri extending over 4—5 internodes.

M. varians.

To which species ought the above-described specimens then to be referred? From the point of view of the diameter of the stem and the number of pinnulars they are most closely related to *M. varians*, but by the number of internodals, L of cirri and number of cirrals, by the occurrence of IV Br-s, by the number of internodes with interarticular pores they approach *M. nobilis* and especially the varieties *nobilis* and *murrayi* of this species. Why have I not referred them to these two varieties, which moreover may scarcely be considered as more than types of individual variation? The smaller diameter of the stem in my specimens is an important distinguishing mark, but merely because of this I would not establish a new variety, as the difference might be due to a difference in age. As I have pointed out above, the number of the cirrals is to a certain degree in proportion to the size of the animal. When therefore, in spite of the delicate stem, the Bockian specimens have a number of cirrals reaching or exceeding that stated for *M. nobilis*, the different diameters of the stems cannot be considered as due to differences of age. Besides, the proximal pinnules in the new variety are shorter than both in *M. nobilis* and *variens*.

Two of the previously described varieties of *M. nobilis* show in separate characteristics an approach to *M. varians*: *M. n. var. suma-*

tronus by the number of internodal joints, by the diameter of the stem, by the L of the cirri when compared with the L of the internodes; *M. n. var. timoriensis* by the variability of the I Br-s. It ought therefore not to be so surprising that the new variety of *M. nobilis* established here approaches *M. varians* in a couple of characteristics: a slender stem and short pinnules.

Metacrinus rotundus P. H. CARP.

Fig. 159, 160.

Syn.: *Metacrinus rotundus* 1884 P. H. CARPENTER Chall. Exp. Vol. 11, p. 344; 1885 Trans. Linn. Soc. Ser. 2 Vol. 2, p. 436; 1902 (04) FRANK SPERRY Proc. Mich. Acad. Sci., p. 195; 1908 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 34, p. 529; 1911 Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 39, p. 487; Notes from the Leyden Mus. Vol. 33, p. 192; 1912 Crin. Ind. Oc. p. 270; Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 43, p. 408; Smiths. Misc. Coll. Vol. 60, No 10, p. 33; 1913 Smiths. Misc. Coll. Vol. 61, No 15, p. 69; 1915 Monograph p. 89.

Metacrinus Stewarti 1884 P. H. CARPENTER Chall. Exp. Vol. 11, p. 344; 1885 Trans. Linn. Soc. Ser. 2. Vol. 2, p. 443; 1908 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 34, p. 529; 1912 Crin. Ind. Oc., p. 270.

The Vega specimen 1884 P. H. CARPENTER Chall. Exp. Vol. 11, p. 344.

From St. 10 (1 sp.), 24 (1), 29 (1), 30 (1), 31 (2), 32 (1) = 7 specimens.

Sp. 1 (St. 30) 24 Internodes; total length of the stem 400 mm. 3 nodal joints before the first cirrus-bearing node. Full number of internodals in the 5th internode. Interarticular pores to the 12th internode. Internodal joints 11:3 cases, 12:9 cases, 13:3 cases, 14:3 cases, 15:2 cases; 14—17 mm. Stem after the 16th node decumbent in the bed-ooze. Full-grown segments rounded. The socket for the cirrus extending to the supra-, but not to the infranodal joint. Interradial swellings or tubercles on the nodals (slightly developed distally).

Cirri 44 (VIIIth node), 48 (XI), 37 (XII), 44 (XV); 49—56 mm. L of the 5 first segments = $\frac{1}{3}$ br, about the 12th cirral L = br. A dorsal longitudinal carination, more or less divided into 2 prominences, on each ossicle appearing after the 20th cirral. Cirri extending over $2\frac{1}{2}$ — $3\frac{1}{4}$ internodes.

B-s contiguous, L = $\frac{2}{3}$ br. I Br-s 7 (1 + 2, 4 + 5) in 5 cases; 16 mm. Primpotaxillaries free inside. II Br-s 7 (3 + 4) 1 case, 10:1

case, 11 (3 + 4) 6 cases, 13 (3 + 4) 1 case, 21 (3 + 4) 1 case; 19—32 mm. III Br-s 9 (3 + 4) 1 case, 10:1 case, 11 (3 + 4) 2 cases, 12:1 case, 13 (3 + 4) 9 cases, 15 (3 + 4) 1 case, 16 (3 + 4, 6 + 7) 1 case, 17 (3 + 4) 1 case, 18:1 case, 25 (3 + 4) 1 case; 17—32 mm. IV Br-s 13 (3 + 4) 1 case, 15 (3 + 4) 1 case, 16 (4 + 5, 8 + 9) 1 case, 17 (3 + 4) 1 case, 18 (3 + 4, 13 + 14:1 case, 4 + 5:1 case) 2 cases, 19 (3 + 4:2 cases, 4 + 5:1 case) 3 cases, 21 (3 + 4) 1 case, 25 (3 + 4) 1 case, 26 (3 + 4, 12 + 13) 1 case. V Br-s 19 (4 + 5) 1 case, 23 (8 + 9) 1 case. Arms LIII. Total length 180 mm. Arm-length after a III Brax 110 mm. with 107—116 Br-s. The arms proximally wall-sided thus, that the lateral borders of I Br 1 are contiguous, and the left side of I Br 2 + the first segment of the pinnule correspond to the right side of I Br 2 and 3. Syzygies after a III Brax 3 + 4, 37 + 38, 52 + 53, 70 + 71, 107 or 3 + 4, 26 + 27, 50 + 51, 74 + 75, 87 + 88, 113 + 114, 116. After a IV Brax the figures are: 3 + 4, 20 + 21, 45 + 46, 79 + 80, or 3 + 4, 8 + 9, 18 + 19, 28 + 29, 38 + 39 . . .

P_1 24—32; 30—35 mm. The 10 most proximal segments sharply quadrangular, strongly compressed laterally after the 2^d segment, with ambulacral furrow, (to the right on I Br 2 in 5 cases), P_2 24—30; P_7 — P_{10} the shortest ones, then longer p-s again. The most distal segments on P_1 — P_4 with collars with small spines. From P_5 smooth segments. The p-s from the middle parts of the arms 12—15 mm. The last 20 pairs of p-s rudimentary with 2—4 segments.

Chalice in transverse section about 20 mm. Colour (in spirits) whitish, the arms light brown. Syzygial pairs white. — Disk with coarse granules. — The specimen handed over to the museum at Gothenburg.

Sp. 2 (St. 31) 23 Internodes, 350 mm. Interarticular pores to the 11th internode. 4 nodal joints without cirri. Full number of internodals in the 6th internode. Internodal joints 11:10 cases, 12:6 cases, 13:2 cases (11 distally, 12 proximally); 15—18 mm. Diameter of the stem 6.0—6.2 mm.

Cirri 53 (IXth node), 55 mm., 49 (X) 53 mm., 46 (XIX) 50 mm., 49 (XXII) 50 mm. Extending over 2^{1/2}—3 internodes. Cirrals 1.5—1.8 mm. in cross section. The last 20—30 segments with a double dorsal spine as in *Sp. 1*. The facet for the cirrus extending over ³/₄ of the nodal and over ¹/₄ of the supranodal joint. Interradial tubercles on

the nodals stoutly developed often as far as the XXth node. Internodal joint with slight interradiial swellings and indistinct ring-ridges, often disappearing radially.

B—s 3×6 mm. hardly contiguous. R—s $1,7 \times 8$ mm. band-shaped, with a concave distal margin. I Br-s 7 with syzygies between 1 + 2, 4 + 5 in 4 cases, between 1 + 2, 4 + 5, 6 + 7 in 1 case; 17—19 mm. II Br-s 2 (1 + 2) 1 case, 6 (1 + 2, 5 + 6) 1 case 7 (1 + 2 : 1 case, 3 + 4 : 5 cases, 5 + 6 : 1 case) 7 cases, 8 (3 + 4) 1 case; 5—15 mm. III Br-s 7 (3 + 4 or 5 + 6) 2 cases, 9 (3 + 4) 3 cases, 11 (3 + 4) 6 cases, 12 : 1 case, 13 (3 + 4 : 3 cases, 1 + 2 : 1 case) 4 cases, 15 (3 + 4) 3 cases, 17 (3 + 4) 1 case; 12—24 mm. IV Br-s 9 (3 + 4) 1 case, 11 (3 + 4) 1 case, 13 (1 + 2 : 2 cases, 3 + 4 : 3 cases) 5 cases, 15 (3 + 4) 2 cases, 17 (1 + 2 or 4 + 5) 2 cases, 18 (5 + 6, 11 + 12) 1 case, 20 (3 + 4, 9 + 10) 1 case, 23 (3 + 4) 1 case, 25 (3 + 4) 1 case, 26 (3 + 4, 15 + 16) 1 case, 29 (3 + 4, 14 + 15, 19 + 20) 1 case, 32 (3 + 4, 21 + 22) 1 case; 12—34 mm. V Br-s 10 (7 + 8) 1 case, 14 (3 + 4, 10 + 11), 17 (3 + 4), 18 (3 + 4, 8 + 9), 22 (3 + 4, 15 + 16), 24 (3 + 4, 13 + 14) each in one case; 16—26 mm. Arms LIV, total L 170 mm. Free, undivided part 80—120 mm. The distal parts of the Br-s somewhat overlapping and provided with small spines.

P₁ (to the right on I Br 2 in 5 cases) 32; 35 mm. Disk finely granular. Colour: uniformly duskish grey. The arms regenerated from the III Br.

Sp. 3 (St. 31) 25 internodes, 375 mm. 3 proximal nodal joints without cirri. Full number of internodal joints in the 6th internode. Number of internodals 10 : 4 cases, 11 : 13 cases, 12 : 3 cases; 14—17 mm. Interarticular pores to the 9th internode. Diameter of the stem $6,3-6,5$ mm. The intercirral tubercle not very prominent after the 7th node. The ring-ridge slightly developed.

Cirri 46 (IX) 54 mm., 53 (XII) 54 mm., 50 (XXI) 52 mm. Extending over $3-3\frac{1}{2}$ internodes.

B—s 3×5 mm. R—s: $2,5 \times 6,5$ mm. I Br-s 7 (1 + 2, 4 + 5) 4 cases, 8 (1 + 2, 4 + 5) 1 case; 18—21 mm. II Br-s 5 (2 + 3) 1 case, 7 (3 + 4) 1 case, 8 : 1 case, 9 (3 + 4 or 4 + 5 or 5 + 6 or 6 + 7) 4 cases, 11 (4 + 5) 1 case, 12 (1 + 2, 11 + 12 or 1 + 2, 4 + 5) 2 cases; 10—20 mm. III Br-s 13 (3 + 4) 3 cases, 15 (3 + 4; 1 case 2 + 3) 9 cases, 16 : 1 case, 17 (3 + 4) 5 cases, 18 (3 + 4, 13 + 14) 1 case, 19

(3 + 4) 1 case; 19—28 mm. IV Br-s 13 (5 + 6) 1 case, 17 (3 + 4 or 3 + 4, 12 + 13) 2 cases, 18 (3 + 4, 14 + 15) 1 case, 19 (3 + 4 or 3 + 4, 9 + 10, 15 + 16) 2 cases, 20 (3 + 4, 9 + 10 or 3 + 4, 15 + 16 or 3 + 4, 16 + 17 or 3 + 4, 17 + 18) 4 cases, 22 (3 + 4, 19 + 20 or 3 + 4, 20 + 21) 2 cases, 24 (3 + 4, 17 + 18) 1 case, 25 (3 + 4, 12 + 13, 20 + 21) 1 case, 26 (3 + 4, 22 + 23) 1 case, 28 or 29 (1 2 (3) + 4 5 6 + 7 8 . .) 1 case (the 3rd segment rudimentary); 17—32 mm. Arms LVI, total L 175 mm., a regenerated part only 140 mm. The undivided part of the arm 75—110 mm. Example of the decrease in the number of pinnulars: 13, 10, 10, 8, 7, 5, 4, 4, 3, 3, . . (7—1.5 mm.).

P₁ (to the right on I Br 2 in 4 cases of 5) 22—24; P₅ (on II Br 5) 15; 15 mm. P₁₅ 17; 12 mm.

Sp. 4 (St. 32) 28 internodes, 460 mm. 3 nodal joints without cirri. Full number of internodals at the 6th internode. Internodal joints 11:14 cases, 12:8 cases, 14:1 case; 14—17 mm. (distally the shortest internodes). Interarticular pores to the 9th internode. Diameter of the stem 6.7—6.0 mm.! (Thus a more slender stem proximally. Slight, incomplete ridges on the internodals.)

Cirri 45 (VII), 44 (XII), 43 (XV), 45 (XXV); 46—49 mm. Extending over 2¹/₂—3 internodes.

B-s 2 × 6 mm, R-s 2 × 7 mm. I Br-s 7 (1 + 2, 4 + 5: 4 cases; 1 + 2, 3 + 4: 1 case) 5 cases; 18—19 mm. II Br-s 6: 1 case, 7 (3 + 4; 1 case 4 + 5) 9 cases; 13—15 mm. III Br-s 11 (5 + 6) 1 case, 13 (3 + 4; 1 case 5 + 6) 9 cases, 15 (3 + 4) 5 cases, 17 (3 + 4: 2 cases, 1 + 2, 4 + 5, 14 + 15: 1 case) 3 cases, 19 (3 + 4) 1 case, 20 (3 + 4, 17 + 18) 1 case; 19—26 mm. IV Br-s 18 (3 + 4, 7 + 8) 1 case, 19 (3 + 4, 7 + 8, 15 + 16 or 5 + 6) 2 cases, 20 (3 + 4 or 3 + 4, 16 + 17) 2 cases, 22 (3 + 4, 9 + 10 or 5 + 6, 18 + 19) 2 cases, 24 (6 + 7) 1 case, 30 (3 + 4, 18 + 19) 1 case; 19—25 mm. Arms XLIX, total L 185 mm. Free arm-length 90—120 mm. A lot of new regenerated arms. Ex of syzygies: 3 + 4, 23 + 24 . . .

P₁ (to the right on I Br 2 in 3 cases of 5) 18—19; 24 mm, P₂ 17; P₄ 18; P₁₅ 18; 15 mm.

One radial branch shows an irregular pinnulation;

$$R \begin{matrix} 1 & 1 & + & \underline{2} & 3 & 4 & + & \underline{5} & 6 & 7 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{II } \underline{1} \underline{2} \underline{3} + \underline{4} \underline{5} \underline{6} \underline{7} \\ \text{II } \underline{1} \underline{2} \underline{3} + \underline{4} \underline{5} \underline{6} \underline{7} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{III } 13 \{ \dots \\ \text{III } 15 \{ \dots \\ \text{III } 19 \{ \dots \\ \text{III } 15 \{ \dots \end{array} \right.$$

Sp. 5 (St. 24) 17 internodes, 220 mm. 4 nodal joints without cirri. Full number of internodals in the 5th internode. Internodal joints 9:1 case 10:3 cases, 11:9 cases; 12—15 mm. Interarticular pores to the 10th internode. Diameter of the stem: 5_{,1}—5_{,4} mm. Every second internodal joint somewhat lower as far as the 10th internode.

Cirri 44 (IX), 47 (X), 45 (XI), 44 (XVII), 32 (XVIII); 37—46 mm. Extending over 2½—3 internodes.

B—s heart-shaped, not contiguous laterally. I Br-s 7 (1 + 2, 4 + 5:3 cases, 1 + 2, 3 + 4:1 case) 4 cases, 8 (1 + 2, 4 + 5) 1 case; 15—17 mm. II Br-s 9 (3 + 4) 1 case, 11 (3 + 4) 8 cases, 13 (3 + 4) 1 case; 15—21 mm. III Br-s 11 (3 + 4) 1 case, 13 (3 + 4) 3 cases, 15 (3 + 4) 5 cases, 16 (3 + 4, 14 + 15) 1 case, 17 (3 + 4) 1 case, 18 (3 + 4, 13 + 14 or 3 + 4, 14 + 15 or 3 + 4, 15 + 16) 3 cases, 20 (3 + 4, 16 + 17:2 cases 3 + 4, 13 + 14:2 cases) 4 cases, 21 (3 + 4, 13 + 14) 1 case, 22 (3 + 4, 18 + 19) 1 case. Arms XL, total L 155—175 mm. Br-s about 115. Ex. of syzygies: 3 + 4, 13 + 14, 22 + 23 etc. with an interval of 6—10 oblique articulations. The arm-segments distally somewhat spiny and overlapping.

P₁ (to the right on I Br 2 in 4 cases of 5) 18; 22 mm. P₂ 22 +; 27 mm., P₃ 23; 23 mm., P₄ 20; 18 mm., P₅ 23; 19 mm. (smoother), P₆ 20; 17 mm. P₁ (to the left on I Br 2: 1 case) 24; 25 mm. P₁₀ 21; 16 mm. Disk coarsely granular. Light spots at the syzygial pairs.

Sp. 6 (St. 29) 23 internodes, 370 mm. Interarticular pores to the 9th internode. 4 nodes without cirri. Full number of internodals in the 5th or 6th internode. Number of internodal joints 10:2 cases, 11:4 cases, 12:7 cases, 13:1 case, 16:1 case, 17:2 cases, 19:1 case; length of the internodes 14—24 mm. Diameter of the stem 6_{,5}—6_{,5} mm. The ring-ridge of the internodals divided in a radial middle tubercle and a low ridge on each side of the tubercle. A similar condition also often in the preceding specimens.

Cirri 52 (IX) 53 mm., 49 (XI) 50 mm., 47 (XV) 50 mm. Extending over $2\frac{1}{2}$ —3 internodes.

B—s 3×6 mm. R—s $1,3 \times 6$ mm. I Br-s 7 (1 + 2, 4 + 5) 2 cases, 8 (1 + 2, 4 + 5, 7 + 8 or 1 + 2, 3 + 4, 6 + 7) 2 cases, 10 (1 + 2, 3 + 4, 6 + 7, 9 + 10) 1 case; 21—25 mm. II Br-s 7 (3 + 4) 4 cases, 8 (3 + 4 or 2 + 3, 7 + 8) 2 cases, 9 (3 + 4) 3 cases, 10 (1 + 2, 6 + 7) 1 case; 12—17 mm. III Br-s 11 (3 + 4) 1 case, 12 (3 + 4, 7 + 8) 1 case, 13 (3 + 4) 8 cases, 14 (3 + 4, 8 + 9) 1 case, 15 (3 + 4) 3 cases, 16 (3 + 4, 12 + 13 or 3 + 4, 13 + 14) 2 cases, 17 (3 + 4) 4 cases; 17—26 mm. IV Br-s 15 (3 + 4) 2 cases, 16 (3 + 4, 14 + 15) 1 case, 17 (3 + 4: 4 cases, 5 + 6: 1 case, 10 + 11: 1 case) 6 cases, 19 (3 + 4) 1 case, 20 (3 + 4, 6 + 7) 1 case, 21 (3 + 4, 15 + 16, 20 + 21) 1 case, 23 (3 + 4) 1 case, 24 (3 + 4, 8 + 9¹ or 3 + 4, 16 + 17) 2 cases, 26 (3 + 4, 6 + 7) 1 case; 20—29 mm. Arms LVI, total L 205 mm., Free undivided part of the arm 95—140 mm. 35—40 mm. of the distal parts of the arms with rudimentary p-s. The number of pinnulars in the transition region is 14, 13, 15, 12, 9, 10, 10, 7, 4, 4, 3, 3, . . .

P₁ (to the right on I Br 2 in 5 cases) 23; P₂ 24. Disk stoutly granulated. The arms light-brown, darker in the proximal parts (the transition usually at II or III Br 3 + 4). Syzygial pairs white.

Sp. 7 (St. 10) 30 internodes, 360 mm. 6 nodal joints without cirri. Full number of internodals in the 6th or 7th internode. Internodal joints: 9:2 cases, 10:14 cases, 11:9 cases (in 2 of the cases an internodal joint visible only on one side of the stem). Length of the internodes 11,5—14 mm. Interarticular pores to the 11th internode. Diameter of the stem 5,5—6,5 mm. The stem with somewhat stouter ridges than in the preceding specimens (similar to the distal part of the stem i Sp. 2).

Cirri 48 (XI) 51 mm., 54 (XIV), 56 mm., 40 (XIX) 46 mm., 37 (XX) 42 mm., 47 (XX) 52 mm., 33 (XXI) 38 mm., 44 (XXII) 46 mm., 47 (XXII) 51 mm., 43 (XXIII), 46 (XXIV) 50 mm. Extending over $2\frac{3}{4}$ — $3\frac{1}{4}$ internodes. The thickness of the cirrus 1,5—1,8 mm.

B—s $2\frac{1}{2} \times 5$ mm. R—s 1 or 2×5 or 7 mm. I Br-s ¹⁾ 4 (1 + 2), ²⁾ 5 (4 + 5), ^{3, 4, 5)} 5 (1 + 2, 4 + 5), ⁶⁾ 12 (9 + 10 or perhaps 13:1 + 2, 10 + , 11 the two first ossicles in this case almost completely grown

¹ 8+9 almost grown together.

together, probably I + II Br-s, see below); 15—30 mm. II Br-s 7 (3 + 4: 2 cases, 2 + 3: 1 case) 3 cases, 8 (3 + 4) 1 case, 9 (3 + 4) 3 cases, 11 (3 + 4) 2 cases, 13 (3 + 4 or 5 + 6) 2 cases, 20 (3 + 4, 14 + 15) 1 case; 18—34 mm. III Br-s 11 (3 + 4) 1 case, 13 (3 + 4) 5 cases, 14 (3 + 4, 11 + 12) 1 case, 15 (3 + 4) 3 cases, 17 (3 + 4: 2 cases, 5 + 6: 1 case) 3 cases, 18 (16 + 17) 1 case, 19 (3 + 4) 2 cases, 21 (3 + 4) 4 cases; 20—28 mm. Arms XLIV, total L 170 mm. Undivided part of the arm 100—110 mm. The transition to rudimentary p-s rapid: 13, 12, 5, 4, 4, 3, 2... 6,5—1,5 mm. The arm-part with short p-s 30—40 mm.

P₁ (to the right on I Br 2 in 1 case and on I Br 1: 2 cases; on I Br 3 in 3 cases; therefore the first p, 3 times to the right, 3 times to the left) 26; 35 mm. (on I Br 2), P₂ 25; 29 mm., P₃ 24, 25 mm., P₄ 25; 23 mm., P₅ 21; 19 mm., P₆ 20; 17 mm. P₁ (on I Br 3) 23; 27 mm. The distal segments with rather strong, distal collars, P₁₀ 13; 19 mm.

Disk 15—20 mm., coarsely granular. Colour in spirits white.

The XXth node has a short, deformed cirrus in the same radius as I Br = 12. The XXI and XXII nodes have no cirrus in this radius. The infranodal facet of the last node is not newly broken, but overgrown by some Bryozoan colony, which also occurs in the empty cirrus-facets on the XXIst and XXII^d nodes. The internodal joints at the XXth node are a little shorter than in the other parts of the stem. The I Br-série with 4 and 12 components stand alongside of each other and are normally directed upwards; the bases of the other ones are horizontally directed and 2 (the 4th and 5th) are a double-arm standing on 4 radial small ossicles. Thus the whole crown turns, as if it had been lying on the side on the 4th and 5th radius and by the continued growth had tried to rise into a vertical position. Possibly one might infer from what is said above that the crown was injured, when it was on the present XXth node and that at the same time the stem was broken at the present XXXth(last) node. If this is the case the abnormal divergences are to be explained by this accident.

In some specimens there occurs a large *Myzostoma*, probably *M. cirripedium*, v. GRAFF.

Example of arm-division and distribution of syzygies from Sp. 2:

$$\begin{array}{c}
 \text{III } \bar{1} \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \bar{5} \bar{6} \bar{7} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{IV } \bar{1} \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \cdot 9 \\ \text{IV } 1 + 2 \dots 17 \\ \text{IV } 1 + \bar{2} \dots 13 \\ \text{IV } 1 \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \dots 13 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{V } \bar{1} \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \cdot 10 + \bar{11} \bar{14} \\ \text{Br } \bar{1} \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \cdot 9 + \bar{10} \dots \\ \text{Br } \bar{1} \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \dots 21 + \bar{22} \dots \\ \text{Br } 1 \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \dots 25 + \bar{26} \dots 38 + \bar{39} \dots \\ \text{Br } \bar{1} \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \dots 26 + \bar{27} \dots \\ \text{Br } 1 + 2 \bar{3} \bar{4} \bar{5} + \bar{6} \dots 23 + \bar{24} \dots \\ \text{Br } \bar{1} \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \dots \\ \text{V } 1 \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \cdot 8 + 9 \cdot 18 \left\{ \begin{array}{l} \text{Br } \bar{1} \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \dots \\ \text{Br } 1 \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \cdot 20 + \bar{21} \dots \end{array} \right. \end{array} \right. \\
 \left. \right\} \text{II } 1 + 2 \\
 \text{III } \bar{1} \bar{2} \bar{3} \bar{4} \bar{5} + \bar{6} \bar{7} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{IV } \bar{1} \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \dots 11 \\ \text{Br } 1 \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \dots 11 + \bar{12} \dots 41 + \bar{42} \dots \\ \text{Br } \bar{1} \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \dots 18 + \bar{19} \dots 37 + \bar{38} \dots \\ \text{IV } 1 \bar{2} \bar{3} \bar{4} + \bar{5} \cdot 17 \left\{ \begin{array}{l} \text{Br } \bar{1} \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \cdot 19 + \bar{20} \dots \\ \text{V } 1 \bar{2} \bar{3} + \bar{4} \cdot 13 + \bar{14} \cdot 24 \end{array} \right. \end{array} \right. \\
 \left. \right\} \text{II } 1 + 2 \dots 7 \\
 \text{RII} + \bar{2} \bar{3} \bar{4} + \bar{5} \bar{6} \bar{7}
 \end{array}$$

In 1884 P. H. CARPENTER in the Challenger Exp. mentioned the so called Vega-specimen as a separate species (in the table p. 344), and then the following year (Trans. Linn. Soc.) he discussed its separate position. According to him the species in question had higher internodal joints (both relatively and absolutely), which was of less diameter than in *M. interruptus* and regularly 6 radials, that is according to a more modern indication I Br 7 (1 + 2, 4 + 5). In the collections of the Uppsala museum there is also a specimen of a *Metacrinus* taken by the Vega-expedition in the Yedo-Bay at a depth of 65 fath. With regard to the diameter of the stem it approaches most to *M. rotundus* (the diameter is 6,0—5,8 mm.) The internodal joints are really somewhat higher (1,4—1,55 mm.) than in *M. rotundus*, where, according to my calculations, the h of the segments is 1,3—1,4 mm. (The last described specimen 7 differs by the segment being only 1,15—1,35 mm.)¹. Nevertheless it does not seem advisable to distinguish the Vega-Specimen even as a variety on the basis of such vague features. (Observe that the original Vega-specimen is said to have a slender stem. If it is a young specimen of *M. rotundus* it is perfectly natural that the joints are rather high, at least relatively.) As to the »Radials» they are in the Vega-specimen at my disposal: 6 : 4 cases, 7 : 1 case (according to CARPENTER'S indication) or I Br 5 : 1 case, 6 (3 + 4) 3 cases, 7 (3 + 4) 1 : case (modern indication). II Br-s are in the case at hand 7 (3 + 4) 3 cases, 9 (3 + 4 or 4 + 5) 2 cases, 11 (3 + 4 or 2 + 3) 2 cases, the other ones broken. Thus it differs in no essential way from *M. rotundus*, to which species I therefore refer the »Vega-specimen» of P. H. CARPENTER.

In the same work as he described *M. rotundus* P. H. CARPENTER gives an account of the appearance of a stem-fragment of a *Metacrinus* from Singapore, which he calls *M. Stewarti*. This species is said to be distinguished from *M. rotundus* and *interruptus* (which it approaches most closely) by the statement that, »the joints have much more distinct horizontal ridges (p. 443). They give it a certain amount of resemblance to the stems of *M. Wyvilli* and *cingulatus*». The separate position of the species is evidently considered by the author to be most clearly demonstrated by the different appearance of the infranodal

¹ The h. of the joints is obtained by measuring the whole internode and dividing its L by the number of internodal joints.

faces of the nodal joint in *M. rotundus* (Pl. 52, fig. 3, not as stated in the description fig. 2) and in the debated stem-fragment (Pl. 52, fig. 15). According to the description this face in *M. Stewarti* (p. 444) is »quite different from the circular syzygial surface in *M. rotundus* (Pl. LII, fig. 3) and resembles that of *M. interruptus*. The syzygial surface of the nodal joint, however, is somewhat lobate as in the Vega-specimen». It appears from the figures that this stem very much resembles that of the above-described *Sp. 7*, which has more angular internodal joints with stronger ring-ridges than the typical *M. rotundus*. The importance that CARPENTER attached to the appearance of the nodals and internodals has proved to be a little exaggerated and to some extent is subject to individual variation as well as the tubercles and ridges on the sides of the segments. At first I supposed that *M. Stewarti* ought to be considered a variety of *M. rotundus* and referred to *Sp. 7* here. By a comparison of the different stems in the collection I become, however, convinced that one ought not to separate *M. Stewarti* even as a variety. With regard to appearance and formation of ridges and tubercles the most distal part of the stem in *Sp. 2* agrees completely with *Sp. 7*, on the other hand the 11th—17th internodes are rounded, without radial ridges or corner-tubercles and therefore of the usual *M. rotundus*-type. *Sp. 3* has indistinct ring-ridges and sharply pentagonal segments in the 10th—16th internodes, but in the most distal internodes rounded segments without ridges again.

H. L. CLARK in 1916 described a new species most closely related to *M. rotundus* as *M. cyaneus*. (Commonwealth of Austral. Fisheries Vol. 4, part. 1 p. 9). The Radials in this species are usually 6 (1 + 2, 4 + 5) but often 7 (1 + 2, 4 + 5); P_1 20 mm. $< P_2 < P_3$; P_4 25 mm. = P_5 , P_6 shorter; the Br-s a little overlapping in the middle of the arm, the longest cirri with 60—64 cirrals, internodals 7—15 (usually 9—14). These are the most important features that the author gives to characterize the species. The only real differences between my specimens of *M. rotundus* and *M. cyaneus* are the number of cirrals and radials. The number of internodals are about the same in both species, the arms are in *M. rotundus* (the type) »tolerably smooth», in my specimens a little serrate in lateral profile, in *M. cyaneus* »the brachials have somewhat flaring distal margins . . . becoming smooth near the armtip.» The L

of the proximal p—s is subject to too great a variation to be given any great importance (compare Sp. 5 and 7). Considering that the localities for the two species are widely separated, it is highly probable that the differences in the number of cirrals [45 in the type specimen, 47 mm.; (32—)43—53 in my specimens (37—)46—57 mm.; ?—60 or 64 in *M. cyaneus*, 50—65 mm.] and radials (5—6 in *M. rotundus* type; 4—12, usually 7, occasionally 5 or 8, in my specimens; and 4—7, usually 6, often 7, occasionally 5, in *M. cyaneus* will turn out in the future to be deviations of merely edafic value. For the present *M. cyaneus* ought to be considered as a variety of *M. rotundus*.

***Metacrinus interruptus* P. H. CARPENTER.**

Fig. 157, 158; Photo 13—15.

Syn. *Metacrinus interruptus* 1884 P. H. CARPENTER Chall. Exp. Vol. 11, p. 367; Trans. Linn. Soc. London Ser. 2. Vol. 2, p. 438 ff.; 1902 (04) SPERRY Proc. Mich. Acad. Sci, p. 195; 1908 A. H. CLARK Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 34, p. 528; 1912 Crin. Ind. Oc. p. 269.

From St. 9 (1 sp.), 45 (10), 56 (4), 58 (2), 59 (3) = 20 specimens.

Sp. 1 (St. 45) For the L of the stem, the number and L of the internodes and internodal joints, and the thickness of the stem in this as in the following specimens see the table. The medium height of the internodal joints 1,1—1,3 mm. 3 proximal nodals without cirri. Full number of internodals in the 4th internode. The distal face of the nodal round. The intercirral tubercle on some nodals slightly prominent. Stem rounded, tolerably smooth, but with small radial prominences. Interarticular pores to the 8th internode.

Cirri 36 (VIIIth cirrus-bearing node) 32 mm., 37 (XI) 32 mm., 37 (XV). Extending over 2—2 1/4 internodes. I Br—s 7 (1 + 2, 4 + 5) 5 cases; 9 mm. II Br—s 9 (3 + 4) 1 case, 10:1 case, 11 (3 + 4) 8 cases; 10—12 mm. III Br—s 11 (3 + 4) 4 cases, 13 (3 + 4) 8 cases, 15 (3 + 4) 5 cases, 17 (3 + 4) 2 cases, 18 (3 + 4, 14 + 15) 1 case; 10—14 mm. IV Br 17 (3 + 4) 1 case; 13 mm. Arms XLI, total L 90 mm. L of the undivided arm 55 mm. Part of the arm with rudimentary p—s 20 mm. I Br series smooth. II Br—s and the following segment a little overlapping distally.

P_1 (in 5 cases to the right on I Br 2) 14; 12 mm. (1st segment short, 2^d one largest), P_2 14; 10 mm., P_3 13; 8 mm. Brachial p—s 10; 6 mm. Disk coarsely granulated, 11.5 mm.

Sp. 2 (St. 45) The medium h of the internodals 1,3—1,45 mm. 4 nodal joints without cirri. Full number of internodals in the 5th internode. Internodal joints with rather prominent interrarial swellings, which disappear in the 8th internode, and low ring-ridges on the sharply pentagonal stem. Interarticular pores to the 7th internode. Cirri 37; 32 mm.

I Br—s 7 (1 + 2, 4 + 5) 5 cases; 10 mm. II Br—s 9 (3 + 4) 1 case, 10: 1 case, 11 (3 + 4) 8 cases; 11 mm. III Br—s 11 (3 + 4) 1 case, 12: 1 case, 13 (3 + 4) 7 cases, 15 (3 + 4) 1 case, 19 (3 + 4) 3 cases, 20 (4 + 5, 13 + 14) 1 case, 21 (3 + 4: 2 cases, 4 + 5: 1 case, 5 + 6: 1 case) 4 cases, 23 (3 + 4) 1 case, 24 (3 + 4, 19 + 20) 1 case; 12—17 mm. Arms XL, total L 100 mm. Undivided part of the arm 60 mm.; 20 mm. with rudimentary p—s.

P_1 (to the right on I Br 2 in 5 cases) 17; P_2 and P_3 17; P_5 14. Br—p. 14; 9 mm. One pinnule swollen by an entoparasitic *Myzostoma*.

Sp. 3 (St. 45) 5 nodals without cirri. Full number of internodal joints in the 3^d internode. The segments tolerably smooth. The syzygial face of the nodal rounded. Interarticular pores to the 7th internode.

Cirri 35 (IV) 28 mm., 36 (VII) 32 mm., 35 (IX) 29 mm. 8th—11th segments the longest L = 1¹/₂ br.

B—s 1 × 1,5 mm., R—s 1,8 × 2,5 mm. I Br—s 7 (1 + 2, 4 + 5) 5 cases; 10 mm. II Br—s 9 (3 + 4) 7 cases, 11 (3 + 4) 3 cases; 10—12 mm. III Br—s 11 (3 + 4) 2 cases, 13 (3 + 4) 8 cases, 15 (3 + 4) 2 cases, 17 (3 + 4) 3 cases, 18 (3 + 4, the outer arm more weakly developed) 1 case, 19 (3 + 4) 3 cases, 20 (3 + 4, the new arm bending outwards on the outer side) 1 case; 10—15 mm. IV Br—s 15 (3 + 4) 3 cases, 17 (8 + 9) 1 case; 12—13 mm. Arms XLIV, total L 95 mm. Unbranched arm 55 mm. Part of the arm with rudimentary p—s 20—22 mm.

P_1 (to the right on I Br 2 in 4 cases) 11; 9 mm. Br—p 10; 6 mm.

In the same pot also 2 stem-fragments, one with 4 internodes, 11 internodals, L of the internodes 14 mm; diameter of the stem 3 mm. Cirri 36; 32 mm; the other with 6 internodes, 11—13 interno-

dals; L of the internodes 15—17 mm. Diameter of the stem 3,5—4,0 mm., Cirri 39; 36 mm.

Sp. 4 (St. 45) Infranodal joint pentagonally rounded. The cirrus socket hardly touches the supranodal joint. Interarticular pores to the 7th internode. 4 nodals without cirri. Full number of internodals in the 4th or 5th internode.

Cirri 41 (V) 26 mm., 39 (VIII) 31 mm., 42 (XI) 32 mm., 41 (XII) 31 mm., 37 (XV), 35 (XVIII) 28 mm. A dorsal carination from the 20th or 25th cirral.

B—s 1,3 × 1,8 mm. R—s 1,8 × 3,2 mm. I Br—s 7 (1 + 2, 4 + 5) 5 cases; 10,5 mm. II Br—s 9 (3 + 4) 1 case, 11 (2 + 3: 6 cases, 3 + 4; 3 cases) 9 cases; 9,5—11,5 mm. III Br—s 9 (3 + 4) 1 case, 13 (3 + 4) 7 cases, 15 (3 + 4) 3 cases, 19 (3 + 4) 1 case, 20 (3 + 4, 14 + 15 or 3 + 4, 17 + 18) 2 cases, 21 (3 + 4) 2 cases, 23 (3 + 4) 1 case, 24 (3 + 4, 14 + 15) 1 case; 7,5—21,5 mm. Arms XXXVIII, total L 90 mm. Unbranched part of the arm 50—55 mm., 15—20 mm. with rudimentary pinnules. Ex. of syzygies: 3 + 4, 34 + 35 or 3 + 4, 23 + 24, 36 + 37, 59 + 60 . . .

P₁ (to the right on I Br 2 in 5 cases) 13; 11 mm. P₂ similar. Br—p. 11; 7 mm. One P₂ with an entoparasitic *Myzostoma*.

Sp. 5 (St 45) 3 nodal joints without cirri. Full number of internodals in the 5th internode. Interarticular pores to the 9th internode. Stem rounded.

Cirri 45 (VIII) 35 mm., 45 (IX) 42 mm., 43 (XI) 40 mm., 42 (XIII) 37 mm., 42 (XVII) 36 mm., 40 (XX) 34 mm., 39 (XXII) 33 mm., 38 (XXVI) 27 mm.

B—s 1 × 2 mm. R—s 1,3—3 mm. I Br—s 6 (1 + 2, 4 + 5) 1 case, 7 (1 + 2, 4 + 5) 4 cases; 10—12 mm. II Br—s 7 (3 + 4) 1 case, 11 (3 + 4) 9 cases; 10—13 mm. III Br—s 10 (6 + 7, peculiar pinnulation { III $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$ $\bar{4}$ $\bar{5}$ 6 + $\bar{7}$ $\bar{8}$ $\bar{9}$ 10 { $\begin{matrix} \text{Br} \\ \text{Br} \end{matrix}$) 1 case, 11 (3 + 4) 1 case, 12 (3 + 4, 8 + 9) 1 case, 13 (3 + 4) 5 cases, 14 (3 + 4, 10 + 11) 1 case, 15 (3 + 4) 1 case, 16 (3 + 4, 11 + 12) 1 case, 17 (3 + 4) 3 cases, 18 (3 + 4, 14 + 15; 2 cases or 3 + 4, 15 + 16: 1 case) 3 cases, 19 (3 + 4, 14 + 15) 1 case; 9—16 mm. IV Br—s 13 (3 + 4) 1 case, 14 (3 + 4, 11 + 12) 1 case, 18 (3 + 4, 15 + 16) 1 case; 13—16 mm. Arms XLI +,

total L. 130 mm. Unbranched arms 100 mm., 30–40 mm. with rudimentary p—s.

P₁ (to the right on I Br 2 in 4 cases) 19; many p—s with encysted *Myzostomas*.

Sp. 6 (St. 45) 4 nodals without cirri. Full number of internodal joints in the 5th internode. Interarticular pores to the 9th internode. Stem somewhat more rounded and smoother than in the preceding specimens.

Cirri 43 (X) 37 mm., 44 (XII) 40 mm., 42 (XV) 38 mm. First 6 cirrals short, L = $\frac{1}{3}$ br.

I Br-s 5 (1 + 2, 4 + 5) 1 case, 7 (1 + 2, 4 + 5) 4 cases; 9–11 mm. II Br-s 9 (3 + 4) 5 cases, 11 (3 + 4) 5 cases; \pm 10 mm. III and IV Br-s bent down, impossible to count. Arms XLIV, total L 110 mm. Unbranched part of the arms 80 mm.

P₁ (to the right on I Br 2 in 4 cases) 14–17; 12–13 mm. P₂ 16–19; P₃ 16; 10 mm. Br-p. 13; 7 mm. Disk 10–12 mm. Anal tubus 4 mm.

Sp. 7 (St. 45) 6 nodal joints without cirri. Full number of internodals in the 4th internode. Average height of internodal joints 1,3–1,5 mm. A slight intercirral tubercle to about the XVth node. The distal face of the nodal joint lobated. Ring-ridge inconspicuous. Interarticular pores to the 8th internode.

Cirri 41 (VI) 35 mm., 42 (IX) 37 mm., 41 (XI) 34 mm., 41 (XIV) 36 mm., 39 (XVII) 35 mm., 40 (XIX) 34 mm.

B—s 1,3 × 2 mm, contiguous. R—s 2 × 4 mm. I Br-s 7 (1 + 2, 4 + 5) 5 cases; 12 mm. II Br-s 11 (3 + 4) 10 cases; 14 mm. III Br-s 11 (3 + 4) 3 cases, 13 (3 + 4) 3 cases, 15 (3 + 4) 4 cases, 17 (3 + 4) 3 cases, 19 (3 + 4) 5 cases, 21 (3 + 4) 2 cases; 11–19 mm. IV Br-s 13:1 case, 15:2 cases, 17:1 case, 21:1 case, all with a syzygy between 3 + 4; 12–14 mm. Arms XLV, total L 115 mm. Unbranched part of the arm 75 mm.. Syzygies with an interval of 17–25 oblique articulations.

P₁ (to the right on I Br 2 in 4 cases) 16; 14 mm. Br-p. 13; 7 mm.

Sp. 8 (St. 45) 3 nodals without cirri. Full number of internodals in the 5th internode. Interarticular pores to the 9th internode. Infranodal joint rounded. The segments are remarkably smooth and rounded.

Cirri 44 (IX) 36 mm., 41 (XIII) 35 mm., 41 (XVI) 32 mm., 39 (XVIII) 31 mm., 38 (XX) 28 mm.

B—s 1×2 mm., R—s $1,3 \times 3$ mm. I Br-s 7 (1 + 2, 4 + 5) 4 cases, 8 (1 + 2, 4 + 5) 1 case; 11—13 mm. II Br-s 9 (3 + 4: 2 cases, 5 + 6 1 case) 3 cases, 10: 1 case, 11 (3 + 4) 6 cases; 11—13 mm. III Br-s 13 (2 + 3: 1 case, 3 + 4: 8 cases) 9 cases, 15: 1 case, 17: 4 cases, 19: 6 cases, syzygies between 3 + 4; 12—18 mm. IV Br-s 13 (3 + 4) 1 case, 17 (3 + 4) 1 case, 28 (3 + 4, 15 + 16) 1 case; 12—25 mm. Arms XLIII, total L 130 mm. Unbranched part of the arms 95 mm., with about 120 Br-s. Syzygies with an interval of 8—23 oblique articulations. 30—35 mm. with rudimentary p—s.

P_1 (to the right on I Br 2 in 3 cases) 20—21; 18 mm. P_2 22; 17 mm. P_3 21; 14 mm. Br-p. 16; 8,5 mm. The syzygial pairs lighter coloured.

Sp. 9 (St. 45) 4 nodals without cirri. Full number of internodals in the 4th internode. Interarticular pores to the 7th internode.

Cirri 42 (VII) 35 mm., 42 (IX) 34 mm., 41 (XIII) 35 mm., 38 (XV) 30 mm. Extending over $1\frac{1}{2}$ —2 internodes.

I Br-s 7 (1 + 2, 4 + 5) 5 cases; 11 mm. II Br-s 9 (3 + 4) 4 cases, 11 (3 + 4: 3; 4 + 5: 2; 6 + 7: 1) 6 cases; 10—12 mm. III Br-s 11 (3 + 4) 1 case, 12: 2 cases, 13 (3 + 4: 3; 4 + 5: 1; 5 + 6: 1) 5 cases, 14: 1 case, 15 (3 + 4) 2 cases, 17 (3 + 4) 2 cases, 19 (3 + 4) 1 case, 22 (3 + 4, 20 + 21) 1 case, 23 (3 + 4) 2 cases, 25 (3 + 4) 1 case; 10—23 mm. IV Br-s 17 (3 + 4: 2; 11 + 12: 1) 3 cases, 19 (5 + 6) 1 case; 12—14 mm. Arms XLII +, 110 mm. Unbranched part of the arms 70 mm. Syzygies with an interval of 12—30 oblique articulations.

P_1 (to the right on I Br 2 in 5 cases) 15; 11 mm. Br-p. 14; 6,5 mm.

Sp. 10 (St. 59) 2 nodals without cirri. Full number of internodals in the 6th internode. Interarticular pores to the 10th internode. Internodal joints pentagonally rounded with a slight ring-ridge. No intercirral tubercle.

Cirri 38 (XI) 37 mm., 39 (XIII), 37 (XIV) 34 mm., 39 (XVIII), 38 (XX) 35 mm., 38 (XXII), 37 (XXIII) 33 mm. The dorsal longitudinal carination is indistinct.

B—s 1×2 mm. R—s $1,5 \times 4$ mm. I Br-s 7 (1 + 2, 4 + 5) 5 cases; 10 mm. Breadth 5 mm. II Br-s 9 (3 + 4) 2 cases, 13 (3 + 4) 3 cases; 11—12 mm. The other ones broken. III Br-s 11 (3 + 4) 1 case, 13 (3 + 4) 3 cases, 16 (3 + 4, the outer arm somewhat weaker) 1 case, 19 (3 + 4) 1 case, 26 (3 + 4, 22 + 23) 1 case; 13—25 mm. IV Br-s 13 (3 + 4) 1 case, 17 (3 + 4) 2 cases; 12—16 mm. The arms partly broken, total L 120 mm. A complete radius with X arms. Unbranched part of the arms 85 mm.

P_1 (to the right on I Br 2 in 3 cases) 17; 16 mm.; P_1 (to the right on I Br 3 in 2 cases) 15; 14 mm. Br-p. 14; 9 mm.

Sp. 11 (St. 59) 4 nodal joints without cirri. Full number of internodals in the 7th internode. Interarticular pores to the 12th internode.

Cirri 48 (IX) 47 mm., 46 (XII) 50 mm., 44 (XVI) 49 mm., 45 (XVIII) 49 mm., 41 (XXI) 42 mm. Cirri extending over $2\frac{1}{2}$ —3 internodes.

B—s $1 \times 1,5$ mm., small, not contiguous. R—s 2×4 mm. I Br-s 7 (1 + 2, 4 + 5) 4 cases; 12 mm. One radius broken. II Br-s 7 (3 + 4) 1 case, 11 (3 + 4) 2 cases; 9—13 mm. The other ones broken. III Br-s 11 (3 + 4) 1 case, 13 (3 + 4) 2 cases, 20 (3 + 4, 13 + 14 or 3 + 4, 15 + 16) 2 cases; 13—22 mm. IV Br-s 16 (3 + 4, 11 + 12) 1 case, 19 (1 + 2, 4 + 5, 15 + 16) 1 case; 15—16 mm. Arms 155 mm. (A complete radius with IX arms.) Unbranched part of the arms 100 mm.; 25—30 mm. with rudimentary p—s. Syzygies with an interval of 5—8 oblique articulations.

P_1 (to the right on I Br 2 in 4 cases) broken. P_1 (to the left on I Br 3) 24; 23 mm., P_2 27; 23 mm. Br-p. 15; 10 mm.

Sp. 12 (St. 59) 6 nodal joints without cirri. Full number of internodals in the 5th internode. Interarticular pores to the 8th internode. Stem smooth, pentagonal, the joints proximally with a slight radial concavity. The distal face of the nodal joint almost round. Cirri 38—39; 28—29 mm.

B—s $1 \times 1,2$ mm., laterally contiguous. R—s $1 \times 2,5$ mm. I Br-s 5 (1 + 2, 4 + 5) 1 case, 7 (1 + 2, 4 + 5) 4 cases; 8—11 mm. II Br-s 9 (3 + 4) 5 cases, 11 (3 + 4) 4 cases; 11—13 mm. The 10th radius broken. III Br-s 11 (3 + 4) 2 cases, 13 (3 + 4) 7 cases, 15 (3 + 4) 2 cases, 16 (3 + 4) 1 case, 17 (3 + 4) 2 cases, 19 (3 + 4 : 2;

3 + 4, 7 + 8: 1 case) 3 cases; 13—18 mm. IV Br-s 17 (3 + 4) 1 case, 18 (3 + 4) 1 case, 23 (3 + 4, 13 + 14, 20 + 21) 1 case; 15—20 mm. Arms on a perfect specimen probably \pm XLV; total L 115 mm. Unbranched part of the arm 80 mm. Syzygies with an interval of 6—12 oblique articulations. The Br segments after II Brax with somewhat overlapping distal margins.

P_1 (to the right on I Br 2 in 5 cases) 20; 16 mm., [P_1 (on I Br 3) 16; 13 mm.] P_2 19; 14 mm. Br-p. 14; 6—7 mm.

Sp. 13. (St. 56) 4 nodal joints without cirri. Full number of internodals in the 4th internode. Interarticular pores to the 7th internode. The distal face of the nodal joint pentagonally rounded.

Cirri 29 (V) 27 (VI) 28 (VII); 21—22 mm. 4th segment L = br, 5th—8th segments L = $1^{2/3}$ br. Cirri extending over $1^{1/2}$ —2 internodes.

B—s $0,6 \times 1,0$ mm. soldered together laterally. R—s 1×2 mm. a little bent outwards, thus forming an angle with the basals. I Br—s 7 (1 + 2, 4 + 5); 8 mm. in the 3 perfect radii. II Br—s 11 (3 + 4) 2 cases, 13 (3 + 4) 1 case, 14 (3 + 4) 1 case; 10—11 mm.; the other ones broken. III Br—s 13 (3 + 4) 3 cases, 15 (3 + 4) 1 case, 19 (3 + 4) 2 cases, 20 (3 + 4, 16 + 17) 2 cases; 9—14 mm. IV Br—s 18 (3 + 4, 13 + 14: 1; 3 + 4, 14 + 15: 1; 3 + 4, 16 + 17: 1) 3 cases. All new arms on the inside of IV Brax reinforced p—s, very small with 5—6 segments, 2 mm. The outer arms = the original arms: 12 mm.

Arms in the complete specimen probably XLV, total L 55 mm.; 12 mm. with rudimentary p—s. The small, new arms appear on the border to the rudimentary pinnules. (The preceding pinnule of the original arm with 7, the succeeding one with 3, and the ones that then follow with 2 segments; the young arm itself with 6—7 segments). These new arms differ from the other adjacent p—s by the distal spinosity and by supporting one or two small p—s with 2—3 segments; The syzygy between Br 3 and 4 is usually developed.

P_1 (to the right on I Br 2 in 5 cases) 9; 6 mm. Br-p. 9; 5,5 mm. Example of arm-branching:

$\left. \begin{array}{l} I\ 1+2\ 3\ 4+5\ 6\ 7 \\ II\ 3+4\ 13 \\ II\ 3+4\ 11 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} III\ 3+4\ 13 \\ III\ 3+4\ 19 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} IV\ 3+4\ 13+14\ 18 \\ Br\ 3+4\ 16+17\dots 38 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} Br\ 3+4\ 8+9\ 18+19\ 25 \\ Br\ 3+4\ 7 \end{array} \right\}$	
		$\left. \begin{array}{l} Br\ 3+4\dots\dots 31 \\ Br\ 3+4\dots\dots\dots 41 \end{array} \right\}$		
	$\left. \begin{array}{l} III\ 3+4\ 16+17\ 20 \\ III\ 3+4\ 13 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} Br\dots 3+4\dots\dots 37 \\ Br\dots 3+4\dots\dots 25 \end{array} \right\}$		
		$\left. \begin{array}{l} Br\ 3+4\dots\dots\dots 32 \\ IV\ 3+4\ 14+15\ 18 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} Br\dots 6 \\ Br\ 3+4\ 14+15\ 17+18\ 26 \end{array} \right\}$	

Sp. 14 (St. 56) Interarticular pores to the 6th internode. 5 internodals without cirri. Full number of internodals in the 3^d internode.

Cirri 34 (VIIth cirrus-provided node); 34 (IX) 22 mm., 32 (XII).

B—s 1 × 1,3 mm. R—s 1 × 3 mm. forming an angle with the B—s. The arms broken. P₁ (to the right on I Br 2 in 5 cases) 12; 9 mm. Disk 7 mm. Anal cone 5 mm.

Sp. 15 (St. 56) 3 nodal joints without cirri. Full number of internodals in the 3^d internode. Interarticular pores to the 6th internode. The distal internodes often have one of the middle internodal joints provided with tubercles; this is an indication of the formation of a nodal joint. One such middle node is perfectly developed between the 2^d and 3^d internodes, counted from the distal end of the stem. (Here therefore only 4 and 3 internodal joints appear.) The distal stem-joints almost perfectly round.

Cirri 34 (IV) 22 mm., 32 (VII), 30 (XI), 30 (XIII) 17 mm., 28 (XV). The cirrus-sockets of the distal nodals do not quite reach to the proximal border of the joint. Nevertheless, the usual type is to be found already at the IXth node, where the joints also begin to become somewhat pentagonal.

The arms broken. P₁ (to the right on I Br 2 in 3 cases) 12; 7 mm. Disk 6 mm. Anal cone 5 mm.

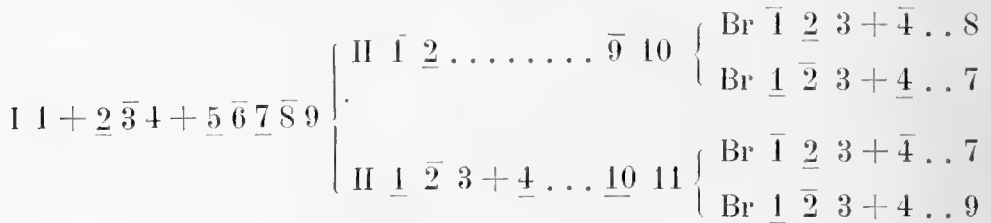
Sp. 16 (St. 56) 8 nodals without cirri. Full number of internodals in the first internode. Interarticular pores to the 2^d internode. The number of internodals when counted proximo-distally runs as fol-

lows: 12, 11, 11, 9, 8, 7, 7, 7, 5. The internodal joints are longer than broad. Also the nodal joints are long (compare photo 14). The cirrus-sockets do not reach the proximal border of the nodal. The two most distal internodes with attempts at formation of nodal joints on some joints.

Cirri 22 (II) 9,5 mm., 19 (III) 11 mm., 19 (V) 10 mm. 2^d cirral L = br. 4th—8th one L = 2 br.

B—s 0,5 × 0,5 mm. R—s h = 1,3 mm., br (at the base) 1 mm., forming an angle with the basals. I Br-s 7: (1 + 2, 4 + 5) 2 cases, 8 (1 + 2, 3 + 4) 1 case, 9 (1 + 2, 4 + 5) 2 cases; 5—7 mm. II Br-s 10: 4 cases, 11 (2 + 3: 1; 3 + 4: 3; 4 + 5: 1) 5 cases, 12: 1 case; 7—8 mm. Arms XX; 18 mm. Unbranched part of the arm 1—4 mm. P₁ (to the right on I Br 2 in 5 cases) 9; 3,7 mm. P₂ 11; 4,2 mm.

Example of arm-branching:



The inner arms a little shorter, 2 mm., the outer arms about 3 mm. Disk reaching to I Br 2.

Sp. 17 (St. 58) 6 nodal joints without cirri. Full number of internodals in the 3^d internode. Interarticular pores to the 4th internode. Number of internodal joints counted proximo-distally as follows: 6, 9, 10, 9, 8, 8, 9, 8, 7, 8, 7, 6.

Cirri 27 (IV) 15 mm., 23 (VI) 13 mm., 24 (VIII) 11 mm., 21 (X) 10 mm., 19 (XII) 8 mm.

B—s pentagonal, directed straight upwards. R—s forming with the B—s an angle of about 135°. I Br—s 7 (1 + 2, 4 + 5) 5 cases; 6 mm. II Br—s 11 (3 + 4: 2; 2 + 3: 1) 3 cases; 12 (2 + 3, 7 + 8: 1; 2 + 3, 5 + 6: 1; 2 + 3, 6 + 7: 1; 3 + 4, 6 + 7: 1) 4 cases, 13 (3 + 4) 1 case, 14 (3 + 4, 8 + 9) 1 case; 7—10 mm. III Br—s 14 (3 + 4, 10 + 11: 2; 3 + 4, 11 + 12: 1; 3 + 4, 12 + 13: 1; 3 + 4, 13 + 14: 1) 5 cases, 15 (3 + 4) 2 cases, 16 (3 + 4, 8 + 9) 1 case, 20 (3 + 4, 10 + 11) 1 case; 7—9 mm. Arms XXVIII, in the complete specimen, probably, XXIX; total L 30

mm.; last 5 mm:s with rudimentary p—s. The new arms on the inside of III Brax very short, about 1 mm. (the main arm from the same III Brax 5 mm.) An outer ramification in one case shorter, though with normal pinnulation, elsewhere always shorter branches on the inside.

Example of arm-branching:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{III} \dots 3 + 4 \dots 10 + 11 \dots 14 \\ \text{Br} \dots 3 + 4 \dots 12 \quad 5 \text{ mm.} \\ \text{Br} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \quad 1 \text{ mm.} \\ \text{Br} \dots 3 + 4 \dots 12 + 13 \dots 22 \end{array} \right.$$

P_1 (to the right on I Br 2 in 4 cases) 9; 4,5 mm. P_2 9; P_3 10; P_6 10; 5 mm.

Disk 2—3 mm. in diameter with calcareous plates. No orals.

Sp. 18 (St. 58) 3 nodals without cirri. Full number of internodals in the 4th internode. Interarticular pores to the 7th internode.

Cirri 32 (VI) 21 mm., 30 (VIII) 19 mm. 4th segment cubical.

I Br—s 7 (1 + 2, 4 + 5: 3 cases; 1 + 2, 3 + 4: 2 cases) 5 cases; 8 mm. II Br—s 9 (3 + 4) 4 cases, 11 (3 + 4: 4; 2 + 3: 2) 6 cases; 8—10 mm. III Br—s 11: 1 case, 13: 7 cases, 15: 2 cases, 17: 7 cases, 18 (3 + 4) 1 case, 19: 2 cases, everywhere the syzygies 3 + 4; 8—12 mm. Arms XL, total L 55 mm. Rudimentary p—s on the last 12—15 mm.

P_1 (to the right on I Br 2 in 4 cases) 11; 7 mm. P_3 11; 5 mm. Br—p. 9; 5 mm.

To this species probably also belongs *Sp.* 19 (St. 9) 3 nodals without cirri. Full number of internodals in the 6th internode. Interarticular pores to the 10th internode. The segments are rounded with a slight ring-ridge. Distally of the fixing point for the cirral there is a slight, swollen ridge effaced at the middle. The cirrus-socket extends up over the distal part of the supranodal but does not reach the infranodal joint.

Cirri 43 (XI) 45 mm., 40 (XVIII) 40 mm. Extending over 2—2¹/₄ internodes.

B—s 1,8 × 3,7 mm., laterally not contiguous, except on the supernumerary side. There are 6 R—s.

I Br—s 4 (1 + 2) or 1 + 2 3 4 +; the other ones broken in the 1st syzygy.

Sp. 20 (St. 45) 4 nodal joints without cirri. Full number of internodal joints in the 5th internode. Interarticular pores to the 10th internode. Between the internodal joints there are in several cases incomplete internodals, only visible, however, on one side of the stem. The joints pentagonally rounded with low ring-ridges.

Cirri 45—48; 37—45 mm. The 8th segment cubical.

I Br 7 (1 + 2, 4 + 5), 1 case, 8 (1 + 2, 4 + 5), 1 case, the other arms bent downwards and their dorsal parts hidden.

Arms LH; 160 mm. Rudimentary p—s on the most distal 30 mm. of the arms.

P₁ to the right on I Br 2 in 4 cases; in one case the reverse. Disk 14 mm. Anal funnel 5 mm. Colour in life bright green.

To a certain extent forming a transition to the form *ornatus*.

Metacrinus interruptus forma ornatus.

From St. 9 (1), 59 (1) = 2 specimens.

Sp. 21 (St. 9) 4 nodals without cirri. Full number of internodals in the 7th internode. Interarticular pores to the 11th internode. Stem proximally narrower. The joints, especially the distal ones, markedly pentagonal. Every second internodal joint provided with an unbroken ring-crista. The infranodal face of the nodal joint lobate. The supranodal joint somewhat incised by the cirrus socket. The nodal joint a little thicker than the other joints. No distinct intercirral tubercle.

Cirri 41 (XI) 42 mm., 41 (XV) 40 mm. Extending over 3 internodes. 8th cirral L = br. The dorsal carination divided in a distinct proximal and distal portion.

B—s laterally not contiguous. R—s 1,7 × 4,8 mm. The arms broken at the first syzygy (I Br 1 +).

Sp. 22 (St. 59) 5 nodals without cirri. Full number of internodals in the 5th internode. Interarticular pores to the 8th internode. The joints decidedly pentagonal. Intercirral tubercle well developed. Every second internodal joint with interrarial tubercles. 8th—10th internodes a little smoother.

Cirri 39 (IX) 32 mm., 40 (X) 34 mm., 34 (XII) 28 mm. Extending over 2 internodes. 6th cirral L = br.

B—s 1,5 × 2,5 mm., R—s 1,5 × 3,5 mm. I Br—s 6 (1 + 2) 1 case,

7 (1 + 2, 4 + 5) 4 cases; 12 mm. II Br—s 7 (3 + 4) 3 cases, 9 (3 + 4) 2 cases, 11 (3 + 4: 2; 2 + 2: 1) 3 cases; 9—13 mm. III Br—s 9 (3 + 4) 1 case, 11 (3 + 4) 3 cases, 12: 1 case, 13 (3 + 4) 5 cases, 15 (3 + 4) 3 cases, 17 (3 + 4) 1 case, 19 (3 + 4) 2 cases; 9—17 mm. IV Br—s 15 (3 + 4) 4 cases, 16 (4 + 5, 10 + 11) 1 case, 17 (3 + 4) 2 cases, 19 (3 + 4) 1 case, 21 (3 + 4) 1 case, 23 (3 + 4) 1 case, 25 (3 + 4) 1 case, 27 (3 + 4) 1 case; 14—24 mm. V Br—s 15: 1, 17: 1, 19: 2 cases (syzygy between 3 + 4); 15—19 mm. Arms partly broken, in a complete specimen probably about LX; total L 105 mm. Unbranched arms 60 mm.; 10—20 mm. with rudimentary p—s. The number of the segments of the p—s at the transition 11, 11, 9, 8, 7, 4, 3, 2, 2. Syzygies with an interval of about 20 oblique articulations.

P_1 (to the right on I Br 2 in 3 cases) 16—17; 12 mm., P_5 15; 9 mm., P_{10} 14; 8 mm.

Disk 13 mm. Anal cone 4,5 mm.

The present material of *M. interreptus* forms an extraordinarily fine and interesting series. *Sp. 16* may be the youngest known stage of recent pentacrinoids¹ or at least of the genus *Metacrinus*.

As to the thickness-growth of the stem one can observe that the increase is most rapid among the young specimens and generally decreases with growing age. When the diameter of the stem is less than 1 mm. the stem thickens with 0,1 mm. for a length-growth of about 15 mm. From 1,0—2,5 mm. generally the same enlargement of the diameter of the stem is reached with an length-growth of 25 mm. (An exception is, however, *Sp. 13*, but one must notice that the preserved part of the stem is relatively short and the whole thickness-growth only 0,1 mm.; the divergence might therefore be ascribed to errors of measurement.) From 2,5—3,0 mm. the diameter of the stem increases with 0,1 mm. on 30—35 mm. Between 3,0 and 4,0 mm. the same growth takes place on 60—120 mm. and over 4,0 mm. an equivalent thickening is attained on a length-growth of about 80 mm. Exceptions are *Sp. 11* with a thick stem, but rapid growth (0,1 mm. pro 33 mm.) and *Sp. 21*, where the diameter of the stem is proximally decreasing. A

¹ A figure of a very young specimen of *Isocrinus decorus* of about the same size is also presented by A. H. Clark in 1908 (Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 35, p. 88; a stem fragment) and in 1915 (Monograph p. 205; the same stem, here the figure is correctly placed) and by H. L. Clark in 1918 (Bull. Lab. Nat. Hist. Iowa Vol. 7, Rep. Crin. & Echin. of the Bahama Exp.).

Number of Specimens and Station	Internodes		Internodal joints		Diameter of the stem	Cirri		I Br	II Br	Arms		P _I		P _{Br}	
	N	Total L	N	L		S	L			N	Total L	S	L	S	L
Sp. 1 (St. 45)	18	205	10 ³ 11 ¹²	11-14,3	3,0-3,2	36-37	32	7 ⁵	9-11	40	90	14	12	10	6
Sp. 2 (St. 45)	9	110	11 ⁴ 12 ¹	14,5-16	3,7-3,7	37	32	7 ⁵	9-11	40	100	17	—	14	9
Sp. 3 (St. 45)	9	100	11 ⁴ 12 ³	13,5-15	2,7-3,0	35-36	29-32	7 ⁵	9-11	44	95	11	9	10	6
Sp. 4 (St. 45)	18	225	11 ⁸ 12 ⁵ 13 ¹ 14 ¹	12,5-16,5	2,6-3,0	35-42	28-32	7 ⁵	9-11	38	90	13	11	11	7
Sp. 5 (St. 45)	26	345	10 ⁴ 11 ¹⁸	12,5-15	2,8 3,6	38-45	27-42	6 ¹ 7 ⁴	7-11	41+	130	19	—	—	—
Sp. 6 (St. 45)	14	160	11 ¹⁰	14-15	4,0-4,2	42-44	37-40	5 ¹ 7 ⁴	9-11	44	110	14	12-13	13	7
Sp. 7 (St. 45)	23	345	11 ¹² 12 ⁶ 13 ²	14,7-17,5	3,5-3,7	39-42	34-37	7 ⁵	11	45	115	16	14	13	7
Sp. 8 (St. 45)	20	300	11 ³ 12 ⁵ 13 ⁵ 14 ³	14,5-18,5	3,3-3,8	38-44	28-36	7 ⁴ 8 ¹	9-11	43	130	20-21	18	16	8,5
Sp. 9 (St. 45)	17	285	12 ⁴ 13 ³ 14 ⁴ 15 ³	15-20	3,0-3,3	38-42	30-35	7 ⁵	9-11	42+	110	15	17	14	6,5
Sp. 10 (St. 59)	26	360	10 ¹ 11 ¹⁷ 12 ³	14,5-16,5	3,7-4,0	37-39	33-37	7 ⁵	9-11	±45	120	17	16	14	9
Sp. 11 (St. 59)	23	300	10 ⁴ 11 ³	13-16	4,1-5,0	41-48	42-50	7 ⁴	7-11	±45	155	24	23	15	10
Sp. 12 (St. 59)	19	210	10 ⁸ 11 ⁷	11,5-13	2,7-3,5	38-39	28-29	5 ¹ 7 ⁴	9-11	±45	115	20	16	14	6-7
Sp. 13 (St. 56)	7	57	11 ¹ 12 ³	11,3-12,5	1,8-1,9	27-29	21-22	7 ³	11-14	±45	55	9	9	9	5,5
Sp. 14 (St. 56)	12	130	10 ¹ 11 ⁹	12-13	1,8-2,3	32-34	22	—	—	—	—	12	12	—	—
Sp. 15 (St. 56)	15	120	3 ¹ 4 ¹ 7 ² 8 ¹ 10 ⁷ 11 ¹	3-11,5	1,5-2,0	28-34	17-22	—	—	—	—	—	—	—	—
Sp. 16 (St. 56)	9	60	5 ¹ 7 ³ 8 ¹ 11 ² 12 ¹	3-7,5	0,4-0,8	19-22	9,5-11	7 ² 8 ² 9 ¹	10-12	20	18	9	3,7	—	—
Sp. 17 (St. 58)	12	85	6 ¹ 7 ² 8 ⁴ 9 ² 10 ¹	5-8	0,6-1,2	19-27	8-15	7 ⁵	11-14	28+	30	9	4,5	10	5
Sp. 18 (St. 58)	7	47	11 ³ 15 ¹	10-12	1,5-1,7	30-32	19-21	7 ⁵	9-11	40	55	11	7	9	5
Sp. 19 (St. 9)	17	230	10 ² 11 ¹⁰	15,5-17,5	4,7-5,0	40-43	40-45	4 ¹	—	—	—	—	—	—	—
Sp. 20 (St. 45)	23	390	11 ⁸ 12 ⁴ 13 ⁵ 14 ¹ 15 ¹	16-21	4,4-4,9	45-48	37-45	7 ⁸ 8 ¹	—	52	160	—	—	—	—
Sp. 21 (St. 9)	20	205	9 ¹ 10 ⁶ 11 ⁶ 14 ¹	11-14	5,1-4,8	41	40-42	—	—	—	—	—	—	—	—
Sp. 22 (St. 59)	13	150	11 ⁹	14-14,5	3,3-3,5	34-40	28-34	6 ⁷ 7 ⁴	7-11	±60	105	16-17	12	14	8

full-grown specimen therefore continues the length-growth of the stem, but the diameter of the stem is very little or not at all increased and might (in old specimens?) even decrease. An full-grown *M. interruptus* might thus have a total stem-length of 2—2,5 metres, but from what is mentioned above it is probable that in older specimens it might be considerably larger. The previously described specimens of *M. rotundus* probably have much longer stems, for these only show an inconspicuous or no increase of the diameter. The fact that large specimens exhibit a decrease of the diameter of the stem (cf. *M. rotundus* Sp. 4, *M. interruptus* Sp. 21) has also been observed by DÖDERLEIN (Siboga Exp. Vol. 42 A, p. 29 ff.). I have not established any periodicity in the growth of the stem-diameter in *M. interruptus*.

The proximal segments of the cirrals are short and discoidal, but the number of these short segments is evidently a function of the age of the animal. In e. g. Sp. 16 cirral 2 is already as long as broad, in Sp. 17 the 3^d, in Sp. 18 the 4th, in Sp. 14 the 5th, in Sp. 5 the 6th, in Sp. 6 the 7th and in Sp. 19 the 9th segment is cubical. In the corresponding specimens the number of cirrals and their L are on an average 20 (10 mm.), 23 (12 mm.), 31 (20 mm.), 33 (22 mm.), 42 (35 mm.), 41 (38 mm.), 42 (43 mm.). — The distal cirrals are, as in the comatulids, longer in younger specimens; e. g. Sp. 16 has the L of the 4th—8th cirrals = 2 br (cf. Sp. 3). The same prolongation is also seen in the stem-joints, which in the youngest specimens are longer than broad. Therefore the cirrus-sockets on the nodals in the young specimens do not reach the proximal border.

The interarticular pores cease very constantly at the 7th or 8th, in some rare cases in large specimens (10, 19, 20, 21) not until the 9th or 10th internodes. In the very young specimens 14—17 the pores have disappeared already at the 2^d to 6th internodes — a manifestation of more rapid stem-growth.

Full number of internodal joints in the largest specimens (6, 10, 11, 19, 20, 21) appears in the (5th—)6th—7th internodes, on the other hand in the smallest specimens already in the (4th—)3^d or even in the first internode (Sp. 3, 13—18).

SPERRY has doubted whether *M. rotundus* and *M. interruptus* should be considered as different species. I grant he is right inasmuch as there is no essential difference in the number of components

of the II and III Br-series in the two species. The number of II Br-s. however, in *M. rotundus* is somewhat more variable (2—7—11—21) than in *M. interruptus*, where, with rare exceptions, it stops between 9 and 11. Further I quite agree with SPERRY in his statement about the variability of the infranodal face.

But — nevertheless — there are some differences. In the original specimens of *M. rotundus* and *interruptus* there was measured a stem-diameter of 5,0 and 4,25 mm. respectively. This difference might seem slight, but my measurements of both the species show that it is of rather great importance: only 4 of the 22 specimens of *M. interruptus* have a stem-diameter of more than 4,2 mm., and these 4, evidently very old specimens, do not attain a stem-thickness of more than 5,1 mm. In *M. rotundus*, on the other hand, there are only 2 specimens (with relatively rapid growth of the stem) which do not come up to 6 mm. (CARPENTER'S specimen is evidently to be compared with the Bockian Sp. 5); all the full-grown ones have a diameter of the stem of 6,0—6,7 mm.

M. rotundus is therefore a larger species and from this some other differences also follow. Thus the cirrals often number 50—55, contrary to *M. interruptus*, where they very seldom exceed 45. The inter-articular pores in the latter species disappear at the 7th or the 8th internodes (seldom at the 9th or 10th), in the former species they disappear first at the 9th—12th internodes.

As to the number of the ossicles in the I Br-series a comparison between the two species turns out thus: *M. rotundus* has 7 I Br-s in 26 cases, 8 or 5 each in 4 cases; 4, 10 or 12 each in 1 case. (It is, however, to be noticed that here are included the figures from the abnormal Sp. 7). *M. interruptus* has 7 I Br-s in 76 cases, 8 in 5 cases, 5 and 6 each in 2 cases, 4 and 9 each in 1 case. (Here the young specimen 16, however, contributes 3 figures differing from 7). Thus it is impossible to deny that in *M. rotundus* there is a somewhat greater variability in the number of the I Br-s.

The cirri extend over $2\frac{1}{2}$ — $3\frac{1}{2}$ internodes in *M. rotundus*, over $1\frac{1}{2}$ — $2\frac{2}{3}$ internodes, only exceptionally over 3 internodes, in *M. interruptus* (Sp. 11, 21). (The last-mentioned L only occurs in the largest specimens).

I have therefore preserved the two species as different types of species value.

The newly proposed form *ornatus* I might possibly have been able to consider as a variety, if I had had more plentiful material at my disposal. It differs from the chief species by the well developed ornamentation of the internodal joints and, probably, by a somewhat greater number of arms (Sp. 22 with about LX arms). Nevertheless it might be considered that the greater number of arms is a mere chance; cf. the 20th specimen (observe also that Sp. 20—22 are rather large specimens). Therefore, keeping in view the appearance of the stems in *M. rotundus*, I will not set up a new variety based only on the ornatation of the internodals and because of that I have preferred only to note the new type as a »form».

I do not consider that the change in the number of internodals in the above-described specimens causes any sub-dividing into varieties. (Sp. 8, 9 and 20 show specially high figures). It is to be noticed that the very youngest specimens have a smaller number of internodal joints. That is because the middlemost internodal joints have got a complete cirrus-whorl. There are often on the other internodals too small prominences where the cirrus ought to have been inserted if the joint had been a nodal. I do not doubt that the still unknown, very small young forms of this family will turn out to have all or most internodal joints provided with cirrus-like prominences, thus approaching the type that is shown in the distal part of the stems of *Rhizocrinus*. The differentiation into nodal and internodal joints is certainly a secondary phenomenon. —

**List of the stations
where Crinoids were obtained.**

Chronologically arranged and numbered.

Station 1 Japan, Shimonoseki, on the shore at low tide, ³⁰/₃ 1914; formol-spirit.
Compsometra serrata 4 sp.

St. 2 Japan, Sagami, Misaki, Aburazubo 2—3 Metres, ¹⁹/₄ 1914. *Compsometra serrata* 3 sp.

St. 3 Japan, Sagami, Misaki, on the shore, low tide ⁴/₅. Formol-spirit. *Compsometra serrata* 1 sp.

St. 4 Japan, Sagami, Misaki, 150 fathoms (the Metacrinus-shoal) ⁵/₅; 96 ⁰/₁₀ Alc.
Comissia parvula 1 sp. *Toxometra equipinna* 2 sp. *Thaumatometra comaster* sp. juv? 1 sp.

St. 5 Japan, Kiu Shiu, Kagoshima, 135 fathoms ¹³/₅. Formol. *Catoptometra Hartlaubi* 1 sp.

St. 6 Japan, Kiu Shiu, Kagoshima and Okinoshima, Scraper I and II, ¹³⁻¹⁴/₅ and ¹⁸/₅ (In the same pot). Formol-spirit (60 or 110—220 fathoms). *Cyllometra pulchella* 7 sp.
Psathyrometra Wireni 1 sp.

St. 7 Japan, Kiu Shiu, Goto Islands, 23 Miles N. W. (128° 11' East; 32° 17' N). 110 Fath. Oseaki, Trawl III ¹⁴/₅. Formol. *Metacrinus nobilis* var. *tenuis* 2 sp.

St. 7 a Japan, Kiu Shiu, Goto Islands, Trawl IV, 110 fathoms, ¹⁴/₅. Formol. *Perisometra aranea* 1 sp.

St. 8 Japan, Kiu Shiu, Goto Islands, Trawl II, Bottom-temp. 13,7° C, 115 Fathoms ¹⁴/₅. Formol-spirit. *Comissia parvula* 1 sp.

St. 9 Japan, Kiu Shiu, Goto Islands, 90—115 fathoms, ¹⁴⁻¹⁵/₅. Formol. *Metacrinus nobilis* var. *tenuis* 5 sp., *Metacrinus interruptus* 1 sp., *Metacrinus interruptus* form *ornatus* 1 sp.

St. 10 Japan, Kiu Shiu, Goto Islands, about 100 fathoms. May. *Metacrinus rotundus* 1 sp.

St. 11 Japan, Kiu Shiu, Goto Islands. Scraper, Pallas rock, 5 Miles E. to S. 90 fathoms. ¹⁵/₅. Formol spirit. *Erythrometra rubra* 3 sp.

St. 12 Japan, Kiu Shiu, Goto Islands, the coral bank. 90 Fathoms ¹⁵/₅. Formol-spirit. *Cyllometra disciformis* 1 sp., *Cyllometra pulchella* 1 sp., *Asterometra macropoda* 2 sp., *Neometra multicolor* 2 sp.

St. 13 Japan, Kiu Shiu, Goto Islands. 128° 50' E, 33° 41' N. Trawl II, 75 fathoms. Sand. Bottom-temp. 15,9° C., ¹⁷/₅. Formol or Formol-spirit. *Cyllometra pulchella* 33 sp.

St. 14 Japan, Kiu Shiu, Goto Islands, 128° 50' E, 33° 41' N. Trawl III, 75 fathoms. Sand. ¹⁷/₅. Formol. *Comanthus pinguis* 2 sp.

St. 15 Japan, Kiu Shiu, Goto Islands. The same locality, Trawl IV. ¹⁷/₅. Formol. *Comanthus pinguis* 1 sp.

- St. 16 Japan, Kiu Shiu, Goto Islands, The same locality. Trawl VII, $^{17}/_5$. Formol. *Cyllometra pulchella* 2 sp.
- St. 17 Japan, Kiu Shiu, Goto Islands, The same locality. Trawl I, $^{17}/_5$. Formol-spirit. *Cyllometra pulchella* 3 sp.
- St. 18 Japan, Kiu Shiu, Okinoshima, Scraper I and II, 50—60 fathoms, Bottom-temp. $16,6^{\circ}$ C., $^{18}/_5$. Formol-spirit. cf. *Comanthus pinguis* sp. juv. 1 sp.
- St. 19 Japan, Kiu Shiu, Okinoshima, Scraper V, 26 fathoms. Bottom temp. 17° C., $^{18}/_5$. *Cyllometra manca* 1 sp.
- St. 20 Japan, Sagami, Misaki, 2 Metres, $^{19}/_5$. Formol. *Comanthus solaster* 1 sp.
- St. 21 Japan, Sagami, Misaki, on the shore at low tide, $^{28}/_5$. 70 % spirit. *Compsometra serrata* sp. juv. 1 sp.
- St. 22 Japan, Sagami, Misaki, 0—2 Metres, $^{28}/_5$, 96 % alcohol. *Compsometra serrata* 3 sp.
- St. 23 Japan, Sagami, Misaki, Corallina, $^5/_6$, spirit. *Compsometra serrata* 1 sp.
- St. 24 Japan, Sagami, Misaki, straight off the shore, 140 fathoms, $^6/_6$, 70 % Alc. *Metacrinus rotundus* 1 sp.
- St. 25 Japan, Sagami, Misaki, on the shore at low tide, $^{13}/_6$, 70 % Alc. *Compsometra serrata* 3 sp.
- St. 26 Japan, Sagami, Misaki, on the shore at low tide (Corallina) $^{14}/_6$, spirit. *Compsometra serrata* 2 sp.
- St. 27 Japan, Sagami, Misaki, Diver, 3—5 Metres, $^{14}/_6$. *Tropiometra afra* var. *macrodiscus* 8 sp.
- St. 28 Japan, Sagami, Misaki, Rocky bottom, 2—3 M. $^{14}/_6$, formol-spirit. *Comanthus solaster* 1 sp.
- St. 29 Japan, Sagami, Misaki, mud, 200 Metres, $^{23}/_6$. *Metacrinus rotundus* 1 sp.
- St. 30 Japan, Sagami, Misaki, straight outside the shore, sandy bottom, 200 M. $^{23}/_6$. *Metacrinus rotundus* 1 sp.
- St. 31 Japan, Sagami, Misaki, straight outside the shore, 100 fathoms $^{23}/_6$. Alcohol. *Metacrinus rotundus* 2 sp.
- St. 32 Japan, Sagami, Misaki, Okinose, 100 fathoms, $^{26}/_6$. Alcohol. *Iridometra melpomene* 1 sp., *Metacrinus rotundus* 1 sp.
- St. 33 Japan, Sagami, Misaki, Okinose, 100—200 fathoms, $^{26}/_6$. Alcohol. *Cyllometra disciformis?* sp. juv. 1 sp.
- St. 34 Japan, Sagami, Misaki, Okinose, 400 fathoms, $^{26}/_6$. Alcohol. *Pectinometra flavopurpurea* 5 sp.
- St. 35 Japan, Sagami, Misaki, Okinose, 400 fathoms $^{28}/_6$. Alcohol. *Comissia gracilipes* 2 sp., *Cyllometra disciformis* 1 sp., *Pectinometra flavopurpurea* 1 sp., *Dorometra briseis* 1 sp.
- St. 36 Japan, Sagami, Misaki, straight off the shore, 200 fathoms $^1/_7$. Alcohol. *Comissia parvula* 1 sp., *Pectinometra flavopurpurea* 1 sp., *Crossometra septentrionalis* 1 sp.
- St. 37 Japan, Sagami, Misaki, Okinose, 400 fathoms $^8/_7$. Alcohol. *Comissia parvula* 1 sp., ?*Comatulides decameros* sp. juv. 1 sp., *Iridometra melpomene* 1 sp., *Dorometra briseis* 2 sp., *Thaumatometra comaster* 1 sp.

- St. 38 Japan, Sagami, Misaki, rocky bottom, 2—4 Metres, $\frac{3}{7}$. Alcohol. *Comanthus solaster* 1 sp.
- St. 38 A. Japan, Sagami, Misaki, rocky crevices, 3—5 Metres. *Comanthus solaster* 1 sp.
- St. 39 Japan, Sagami, Misaki, *Liparometra grandis* 1 sp.
- St. 40 Japan, Bonin Islands (Ogasawara), Taki Ura, Diver, coral-bottom, $\frac{28}{7}$. Alcohol. *Comanthus parvicirra* 2 sp.
- St. 41 Bonin Islands, Taki Ura, Diver, coral-bottom, $\frac{28}{7}$. Alcohol. *Dorometra nana* 3 sp.
- St. 42 Bonin Islands, West from Port Lloyd, 65 fathoms, $\frac{31}{7}$. Alcohol. *Comissia ignota minuta* 1 sp.
- St. 42 A. Bonin Islands, West from Port Lloyd, 70 fathoms, $\frac{31}{7}$. Alcohol. *Comanthus annulata* 1 sp.
- St. 43 Bonin Islands, NW from Ototojima, 80 fathoms, $\frac{31}{7}$. Alcohol. *Comatella stelligera* 1 sp., *Clarkometra elegans* 15 sp.
- St. 44 Bonin Islands, NW from Ototojima, 70 fathoms, $\frac{31}{7}$. Young *Comasterid* 1 sp., *Compsometra parviflora* 1 sp.
- St. 45 Bonin Islands, East from Chichijima, 80 fathoms, $\frac{31}{7}$. Alcohol. *Comissia ignota minuta* 9 sp., *Comaster delicata grandis* 3 sp., *Comaster serrata* 1 sp., Young *Comasterids* 15 sp., *Eudiocrinus gracilis pulchellus* 5 sp., *Pterometra trichopoda* 1 sp., *Asterometra anthus* sp. juv. 5 sp., *Compsometra parviflora* 2 sp., *Metacrinus interruptus* 10 sp.
- St. 45 A. Bonin Islands, East from Chichijima, 90 fathoms $\frac{31}{7}$. Alcohol. *Comissia ignota minuta* 1 sp., *Tropiometra encrinus* 1 sp.
- St. 46 Bonin Islands, East from the Channel, 70 fathoms, $\frac{1}{8}$. Alcohol. *Eudiocrinus gracilis pulchellus* 2 sp., *Catoptometra magnifica minor* sp. juv. 1 sp., *Asterometra anthus* 2 sp., *Compsometra parviflora* 1 sp.
- St. 47 Bonin Islands, East from Channel, 80 fathoms, $\frac{1}{8}$ (August). Alcohol. *Comissia ignota minuta* 5 sp., Young *Comasterids* 6 sp., *Eudiocrinus gracilis pulchellus* 2 sp., *Eudiocrinus Loveni* 1 sp., *Catoptometra magnifica minor* spp. juv. 3 sp., *Liparometra grandis* sp. juv. 1 sp., *Asterometra anthus* spp. juv. 5 sp., *Compsometra parviflora* 2 sp., *Dorometra parvicirra* 1 sp.
- St. 48 Bonin Islands, East from Chichijima, 100 Metres, $\frac{1}{8}$. Formol. *Eudiocrinus gracilis pulchellus* 1 sp., *Pterometra trichopoda* 1 sp.
- St. 49 Bonin Islands, the Channel, 35 fath. $\frac{2}{8}$. Alcohol and formol. *Comanthus parvicirra a comasteripinna*, broken arms, *Cenometra bella* 1 sp.
- St. 50 Bonin Islands, Chio-ta-jima, on the shore at low tide, $\frac{3}{8}$. Alcohol. Young *Comasterid* 1 sp.
- St. 51 Bonin Islands, the Channel, 40 fath. $\frac{3}{8}$. Alcohol. *Comaster delicata grandis* 1 sp.
- St. 51 A. Bonin Islands, the Channel, 35 fath. $\frac{3}{8}$. Formol. *Comantheria grandicalyx* var. *flagellipinna* 1 sp.
- St. 52 Bonin Islands, Taki-no-ura Channel, 30—40 fath. $\frac{3-4}{8}$. Alcohol. *Comantheria grandicalyx* 2 sp.
- St. 53 Bonin Islands, Higashijima (2 Miles East), sand + broken shells, 90 fath., $\frac{7}{8}$. Alcohol. *Comatella brachycirra* 5 sp., *Comatella maculata* 1 sp., Young *Comasterid* 1 sp.,

Eudiocrinus gracilis pulchellus sp. juv. 1 sp., *Cyllometra albopurpurea* spp. juv. 2 sp., *Asterometra anthus* (some young ones) 11 sp., *Dorometra parvicirra* 1 sp., *Clarkometra elegans* 2 sp.

St. 54 Bonin Islands, East from Chichijima, 70 fath., ⁷/₈, broken shells + sand. Young *Comasterid* 1 sp., *Asterometra anthus* spp juv. 2 sp., *Compsometra parviflora* 1 sp.

St. 55 Bonin Islands, ENE. from Chichijima, 115 fath., shells + sand, ¹⁵/₈. Alcohol. *Comatella brachycirra* 2 sp., *Comissia ignota minuta* 11 sp., *Comaster serrata* 1 sp., *Asterometra anthus* sp. juv. 1 sp., *Stenometra dentata* sp. juv. 1 sp.

St. 56 Bonin Islands, East from the Channel, 115 fath. ¹⁵/₈. Alcohol. *Comatella brachycirra* 2 sp., *Comatella stelligera* 1 sp., *Asterometra anthus* 7 sp., *Stenometra dentata* 5 sp., *Diodontometra Bocki* 1 sp., *Metacrinus nobilis tenuis* 1 sp., *Metacrinus interruptus* 4 sp.

St. 57 Bonin Islands, East from Chichijima, 100 fath., ¹⁵/₈. *Asterometra anthus* sp. juv 1 sp.

St. 58 Bonin Islands, the islands East from Chichijima, 180 Metres, ¹⁵/₈. *Metacrinus nobilis tenuis* 1 sp., *Metacrinus interruptus* 2 sp.

St. 59 Bonin Islands, ENE from Anojima, 100 fath. ¹⁵/₈, formol or alcohol. *Comatella brachycirra* 7 sp., *Comatella maculata* 2 sp., *Comatella stelligera* 2 sp., *Comissia peregrina magnifica* 2 sp., *Comaster delicata grandis* sp. ad. 1 sp., *Comaster serrata* 1 sp., *Catoptometra magnifica minor* 3 sp., *Eudiocrinus indivisus* 1 sp., *Cyllometra albopurpurea* 2 sp., *Pterometra trichopoda* 3 sp., *Asterometra anthus* 20 sp., *Stenometra dentata* 3 sp., *Metacrinus interruptus* 4 sp.

St. 60 Bonin Islands, ENE from the Channel, 100 fathoms, ¹⁵/₈. Formol. *Comaster delicata grandis* 1 sp.

St. 61 Bonin Islands, ESE from the Channel, 83 fath., ¹⁶/₈. Formol. *Comissia ignota minuta* 2 sp., Young *Comasterid* 1 sp., *Catoptometra magnifica minor* sp. juv 1 sp.

St. 62 Bonin Islands, the Channel between Chichijima and Anojima, 20 Metres, August. *Comantheria grandicalyx var. flagellipinna*. 1 sp.

St. 63 Japan, Sagami, Misaki, on the shore at low tide, ¹⁴/₈. Alcohol. *Comanthus parvicirra a comasteripinna* sp. juv. 1 sp.

Misprints.

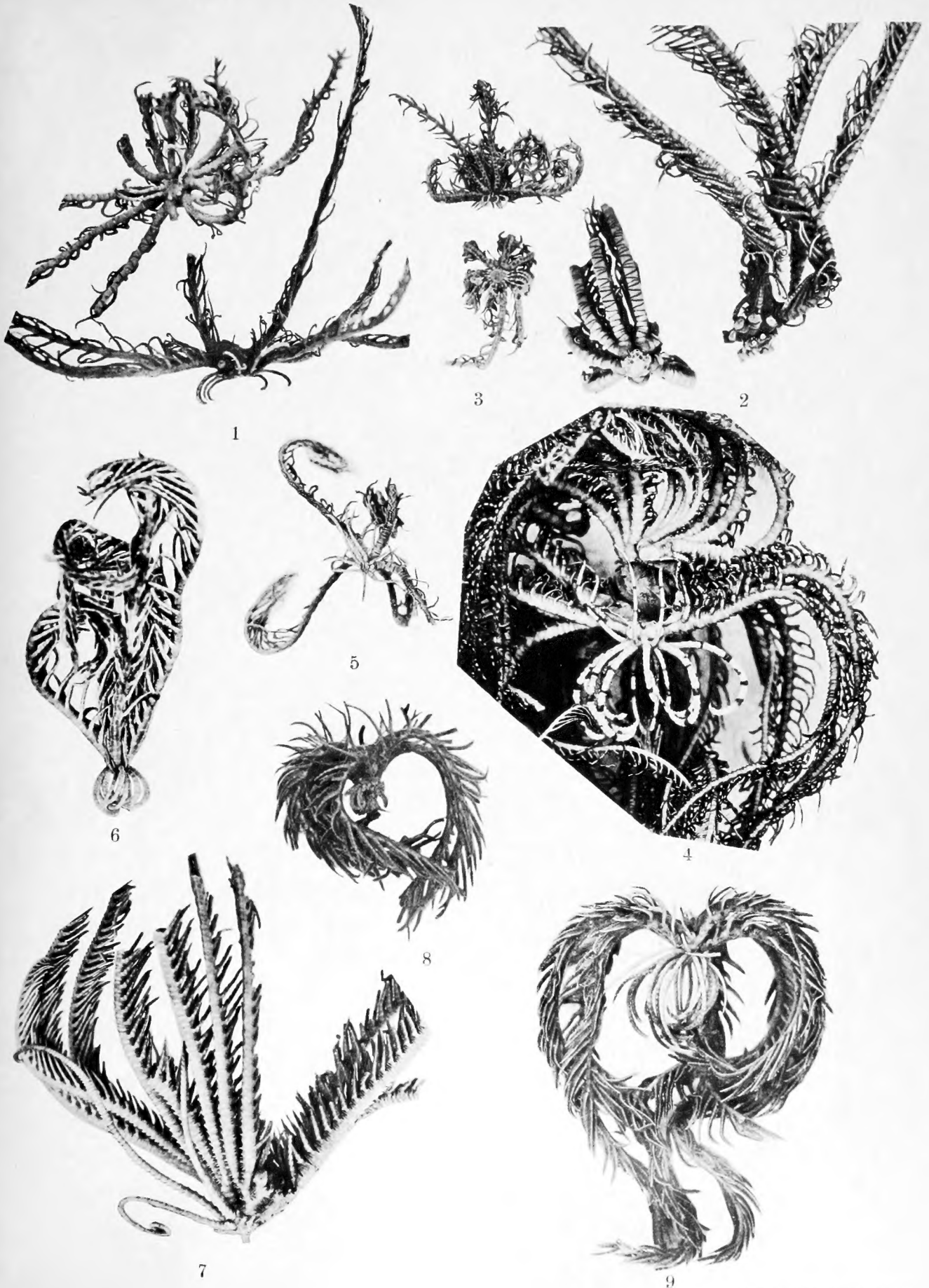
- p. 66, 3^d line from below for able-formed read table-formed.
 p. 75, 16th » » » » inside, ¹/₂ » inside, 1 ¹/₂.
 p. 99, 6th » » » » 75 » 45.
 p. 123, 1st » » above » bifucation » bifurcation.
 p. 159, 7th » » below » 54 (XIV) 56 mm. » 51 (XIV) 56 mm.

Photos: Plate I.

- 1) *Comatella brachycirra* (St. 56 Sp. 1 and 2; 1 in lateral view) about $\times 2$.
- 2) *Comissia peregrina magnifica* (St. 59 Sp. 1 and 2) nat. size.
- 3) *Comissia ignota minuta* (St. 47) $^{2/1}$.
- 4) *Comaster delicata grandis* (St. 45 Sp. 3) nat. size.
- 5) *Eudiocrinus gracilis pulchellus* (St. 45) $^{2/1}$.
- 6) *Eudiocrinus Loveni* (St. 47 Sp. 1) $^{2/1}$.
- 7) *Stenometra dentata* (St. 56) $^{2/1}$.
- 8) *Clarkometra elegans* (St. 43 Sp. 1) $^{2/1}$.
- 9) *Cyllometra pulchella* (St. 13) $^{2/1}$.

Plate II.

- 10) *Diodontometra Bocki* (St. 56 Sp. 1) $^{2/1}$.
 - 11) *Toxometra æquipinna* (St. 4, Sp. 1) P_3 visible to the left, $^{2/1}$.
 - 12) *Psathyrometra Wireni* (St. 6, Sp. 1) $^{2/1}$.
 - 13) *Metacrinus interruptus* (St. 56 Sp. 16) the newly formed arms of somewhat unequal size; about $\times 1^{3/4}$.
 - 14) *Metacrinus interruptus* (Sp. 16) the same specimen viewed from another side, $^{2/1}$.
 - 15) *Metacrinus interruptus* (St. 56 Sp. 13) the ne arms of very different length, $^{2/1}$.
 - 16) *Asterometra anthus* (St. 55 Sp. 53) a very young specimen, $^{4/1}$.
-



MBL WHOI Library - Serials



5 WHSE 04154

