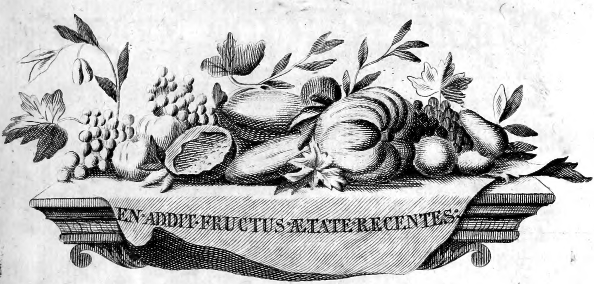
NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMVS IV.

ad Annum MDCCLII. et MDCCLIII.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLVIII.

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS IV.

*
* *
* *
* * * *

Dum quartum hoc *Nouorum Commentariorum* volumen tardius, quam par eſt, in lucem prodit, nullam quidem indigenis excuſationem afferre tenemur, vt qui ſtudii noſtri in euulgandis vtiliſſimis libris probe gnari, procul dubio gratias habebunt Academiae, quod, aliarum gentium morem imitata, ante omnia Patriae conſulere ſtudet, vernacula potius lingua, quam aliena, in ſcriptis publici iuris faciendis vtendo: Exteris autem, ſi tardam debiti exſolutionem aegre ferent, et inprimis diſſertationum in hoc volumine contentarum auctoribus, ſi conquerentur, ſcripta ſua inter manus noſtras nouitatis delectamento priuari, nunciamus, editionem eorum, quae hoc excipient, voluminum ſine mora proceſſuram eſſe. Nunc enim, aucto operarum et prelorum numero, Academia vtrique fini proſpexit: non deerit ciuibus, non deerit exteris. Sic grata agnoſcens PETRI MAGNI et OPTIMAE ELISABETAE in ſe beneficia legibus a Conditore et Inſtauratrice ſibi praeſcriptis nunquam non ſatisfacere allaborabit.

MATHEMATICA.

In hac *Leonh. Eulerus* V. Cel. vtramque facit paginam. Dissertationem ordo et conspectus hic est:

I.

De Numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum p. 3.

Non frustra est, quod veteres Mathematici, vti ex scripti *Euclidis* ac *Diophanti* liquet, summo studio numerorum indolem scrutati, proprietatibus eorum haud mediocr ter delectati sunt. Praeterito etiam saeculo primi ordinis Geometrae plurimum studii in exploranda numerorum natura consumserunt, inter quos *Fermatius*, Senator Tolosanus, ita eminuit, vt eius sagacitatem etiam nunc nemo sit assecutus. Mos tunc inualuerat, veritates, quas quisque inuestigasset, nude potius ad caeterorum ingenia exercenda, proponere, quam demonstrationes, docendi causa, indicare, quo factum est, vt sublimes *Fermatii* meditationes in hoc genere adhuc hodie magis miremur, quam cognoscamus, propterea quod post eius obitum scripta, quibus earum demonstrationes continebantur, temporis iniuria maximo huius scientiae damno interierunt. Praestantissimus itaque auctor huius dissertationis haud inutiliter operam suam collocare censendus est, dum huiusmodi deperditas demonstrationes Fermatianas restaurare conatur, etiamsi nostro quidem aeuo hoc studium, quod in numerorum natura inuestiganda consumitur, plane derelictum, atque adeo a plerisque spretum, videatur. Quanquam enim hoc quidem tempore Mathematici in cultura Analyseos sublimioris et partibus Matheseos applicatae, quae veteribus inaccessae fuerunt, potissimum elaborare solent, nulla tamen veritas prorsus sterilis et omni vsu destituta videtur. Quin potius numerorum proprietates plerumque multo maiorem sagacitatem et ingenii vim postulant, quod vel ex eo colligere licet, quod in reliquis Matheseos partibus vix vlla cognoscatur veritas, cuius demonstratio non ante iam fuerit perspecta, cum contra plurimae habeantur numerorum proprietates, quarum veritatem adhuc sine demonstratione admittere cogimur, auctoritate potissimum *Fermatii* inducti, qui se eas demonstrasse palam est professus. Ad hoc genus referendae sunt plures insignes proprietates numerorum, qui sunt binorum quadratorum aggregata, quarum demonstrationes Cel. Auctor in hac dissertatione proponit. De his numeris, si quidem bina quadrata eos componentia fuerint inter se prima, seu communem diuisorem non admittant, id prorsus est singulare, quod alios diuisores non agnoscant, nisi qui ipsi eiusdem sint indolis, binorum scilicet quadratorum summae, cuius rei demonstratio haud parum ardua hic suppeditatur. Deinde cum omnes huius generis numeri, si fuerint primi, vnitate minuti per quaternarium sint diuisibiles, siue in hac forma $4n + 1$ contineantur, memorabile est, vicissim omnes numeros primos huius formae $4n + 1$ simul esse summas duorum quadratorum, cuius demonstrationis autem se

nondum

nondum compotem esse factum Cel. auctor ingenue fatetur, etiamsi eius veritatem extra dubium collocauerit: in quo insigne conspicitur specimen, etiam in mathematicis eiusmodi dari veritates, quas sine perfecta demonstratione credere cogimur. In sequenti volumine Commentariorum nostrorum plena eiusdem demonstratio apparebit, qua omnia, quae hinc deriuantur, penitus confirmabuntur. Hic ex ista proprietate egregiam deduxit methodum, eamque satis facilem, explorandi, vtrum numerus huius formae $4n + 1$, quantumuis fuerit magnus, primus sit, nec ne? Totum negotium huc redit, vt exploretur, vtrum talis numerus propositus in summam duorum quadratorum resolui queat, an minus? vbi tres casus sunt perpendendi. Primo, si numerus propositus nullo prorsus modo in duo quadrata sit resolubilis, certum est, eum non esse primum, sed duos ad minimum factores habere formae $4m - 1$; secundo, si vnico modo in duo quadrata fuerit resolubilis, eaque sint prima inter se, hoc certum est indicium numerum propositum esse primum; tertio, si is plus vno modo in duo quadrata discerpi queat, necessario erit compositus, eiusque diuisores inde assignari possunt. Vulgo autem iudicium, vtrum numerus propositus sit primus, nec ne? haud parum molestiae creare solet, si is centena millia superet. Ad hunc enim terminum vsque habentur tabulae numerorum primorum passim obuiae, atque adeo finicis characteribus exaratae. Pro maioribus autem numeris adhuc alia via non patuit, nisi vt diuisio per omnes numeros primos vsque ad radicem quadratam numeri propositi tentetur.

tentetur. Nunc autem, dum numerus propositus in forma $4n+1$ contineatur, totum negotium multo minore labore absoluitur, cuius plura ad calcem huius tractationis extant specimina, quod eo magis notatu dignum videtur, quod nulla operatio per diuisores instituatur.

II.

De constructione aptissima molarum alatarum p. 41.

Nonsolum inter artifices, sed etiam Geometras, quaestio iam pridem est agitata, quemadmodum alas in machinis, quae vi venti impelluntur, instrui oporteat, vt maximus inde effectus obtineatur. Geometris quidem haec quaestio haud difficilis est, postquam inuenerunt, ad alas circumagendas a vento maximam vim exeri, si earum superficies ad venti directionem sub angulo 54° 45′ fuerit inclinata, verum in hoc negotio non totam quaestionem sunt contemplati, propterea quod iste angulus tum solum maximam impulsionem producit, quamdiu machina adhuc est in quiete. Simulac vero machina iam in motu versatur, vti principia, quibus haec inuestigatio innitebatur, non amplius locum habent, ita etiam illi angulo nulla praerogatiua relinquitur. Quare cum effectus huiusmodi machinarum non in quiete, sed in motu sit constitutus, angulus ille nihil quicquam ad earum perfectionem confert; atque adeo experientia compertum est, angulum multo maiorem feliciori successu in hoc machi-

machinarum genere adhiberi. Qui hinc ansam sumserunt Theoriam arguendi, quod saepe praxi aduersetur, statum quaestionis perperam intellexerunt, cum angulus ille 54°. 45′ per Theoriam inuentus praxi vtique inseruiat, si modo circumstantiae cum iis, quae in Theoria sunt positae, conueniant; quis autem consensum postulet, si in Theoria ad alias conditiones, atque in praxi, respiciamus?

In hac dissertatione Cel. Eulerus luculenter ostendit, si alae in motu versentur, maiorem angulum inclinationis statui oportere, vt a vento maxima vis excipiatur, atque adeo pro quouis celeritatis gradu circa extremitates alarum inclinationem magis ad angulum rectum accedere debere, quam circa axem. Quod cum etiam ab aliis sit obseruatum, Auctor hic monet, ne hac quidem correctione adhibita, Theoriam perfecte cum praxi conciliari. Neque enim, dum maximum effectum intendimus, id postulamus, vt quouis momento vis alas circumgens sit maxima; sed simul ad celeritatem, qua ea vis agit, est respiciendum: propterea quod fieri potest, vt minor vis celerius agens maiorem effectum producat, quam vis maior tardius agens. Cum igitur quaestio non ad quantitatem vis impellentis, sed potius ad quantitatem effectus sit reuocanda, huius mensuram ante rite stabiliri oportet, quam enodatio quaestionis suscipi queat. Omnium autem machinarum effectus tanquam eleuatio ponderis cuiusdam spectari potest, et quia effectus eo maior aestimatur, quo celerius idem pondus, vel quo maius pondus eadem celeritate attollitur, productum ex pondere in celeritatem, qua eleuatur, iustam exhibebit mensuram effectus cuiusque machinae. Iam vero hoc idem productum in omnibus machinis semper aequale est producto ex vi impellente in celeritatem, qua agit, vnde et hoc productum veram effectus, quem machina praestare valet, quantitatem suppeditat. Ex quo intelligitur, exiguam vim, dummodo satis celeriter agat, quantumuis magnum effectum producere posse. Neque hic obiectio valet, fieri forte posse, vt parua vis magno ponderi eleuando non sufficiat: notum enim est, quemadmodum quamuis machinam disponi conueniat, vt etiam a minima vi maximum onus superari queat; scilicet quo maius fuerit onus, id eo propius centro motus applicari oportet, quo eius motus tanto tardior euadat, quod vtcunque machina ex simplicibus fuerit composita, semper fieri potest. Hinc ad effectum molae alatae a priori determinandum, singula alarum elementa considerari, et vis venti ea impellens, quatenus circumactionem promouet, in celeritatem cuiusque elementi multiplicari debet, quo facto omnium horum productorum elementarium summa praebebit totum machinae effectum.

Ex hoc principio Auctor molarum alatarum effectum in genere definit, quaecunque sit alarum figura et dispositio, et quaecunque motus gyratorii celeritas, hincque deinceps methodo maximorum et minimorum cum formam alarum, tum vero potissimum motus gyratorii celeritatem inuestigat, vt effectus prodeat maximus

mus. Eidem fundamento innititur regula iam ſatis nota pro molis aquariis aliisque machinis, quae rota a flumine circumacta impelluntur, dum ita inſtrui ſolent, vt celeritas palarum ſit tertia pars celeritatis fluminis. Verum in molis alatis, vbi actio venti prorſus eſt diuerſa, praeter expectationem eiusmodi maximum elicitur, quod rationi aeque atque experientiae contrarium videtur. Docet enim calculus maximum effectum comparari, ſi ſuperficies alarum ad directionem venti plane fuerit normalis, eaeque celeritate infinita circumagantur: tum quidem vis venti impellens euaneſcit, quod tamen non obſtat, quin per celeritatem infinitam multiplicata productum finitum praebeat, quod ipſum calculus maius oſtendit, quam ſi machina aliter inſtrueretur. Verum tamen certum eſt, talem diſpoſitionem in praxi nullo modo locum habere poſſe, vnde cauſam huius diſſenſus theoriae ab vſu practico accuratius inueſtigari oportet, quae in eo poſita reperitur, quod in Theoria quaedam aſſumuntur, quae in praxi obſeruari nequeunt. Quod diſcrimen, ſi diſtincte fuerit perſpectum, deinceps non amplius erit difficile, Theoriam ita ad praxin accommodare, vt perfectus conſenſus obtineatur. Ac primo quidem notandum eſt, in Theoria nullam frictionis rationem eſſe habitam, cuius quantum ſit momentum in machina aliter inſtruenda mox videbimus. Deinde etiam, dum alae celerrime circumaguntur, craſſitie ſua inſignem ab aëre reſiſtentiam patiuntur, quae in Theoria penitus eſt neglecta. Denique in Theoria aſſumitur, motum machinae ſtatim ab initio ita ad vniformitatem componi, vt vis impellens cum

 onere

onere superando in aequilibrium constituatur, quod autem in praxi eo tardius euenit, quo maiori opus fuerit celeritate, quae si adeo sit infinita, machina ad hunc statum, maximum effectum producentem, nunquam perueniet. His notatis ostendendum, si hae conditiones in praxi impleri possent, Theoriam nihil absurdi indicaturam, ita, vt intelligi queat, quo magis alarum inclinatio ad angulum rectum accedat, eaeque simul celerius circumagantur, eo maiorem effectum impetrari posse. Ne idea infiniti obruamur, ponamus, superficiem alarum cum venti directione facere angulum 89°, easque centies singulis minutis secundis circumagi debere: vim autem totam a vento exceptam tantum ponderi vnius vnciae aequiualere, quae vero per tantam celeritatem multiplicata productum exhibeat, quod sit = 1000, cui simul effectus machinae aequabitur. Ad quem obtinendum, si onus superandum aequiualeat ponderi 110000 vnciarum, machina ita est disponenda, vt vis impellens vnius vnciae cum hoc tanto onere in aequilibrio constituatur, quod nihil habet absurdi. Tum machina actioni venti exposita tandem praedictum celeritatis gradum consequetur, atque effectum assignatum producet, etiamsi, antequam ad hanc celeritatem pertingat, effectus futurus sit minor, verum hoc interuallum in calculo pro nihilo reputatur. Hinc intelligere licet, si angulus inclinationis adhuc propius ad 90° augeatur, quo vis impellens magis diminueretur, vlterius aucta celeritate, fieri posse, vt adhuc maior effectus producatur, qui adeo vsque ad 90° crescere queat, vbi certam quantitatem, eamque maximam, sit assecuturus.

In-

Interim tamen ternae rationes ante allegatae impediunt, quominus haec ad praxin transferri possint. Imprimis autem frictio est impedimento, quae etsi plerumque instar oneris considerari potest, tamen eius resistentiam non vti oneris pro lubitu diminuere licet. Cum enim oneris resistentia diminuatur, dum id propius ad centrum motus applicatur, haec diminutio in frictione locum habere nequit, quae pro structura machinae semper ad certam distantiam a centro motus manet applicata; deinde similis fere ratio est illius resistentiae aeris, a crassitie alarum oriundae. Denique etiamsi hae resistentiae non obstarent, quo minus celeritas infinita efficeret, vt machina demum tempore elapso infinito, hoc est, nunquam, eam adipisceretur, effectumque expectatum produceret. Ob has causas Cel. Auctor praecipue in hoc elaborasse videtur, vt rationem frictionis in calculum induceret, qua cognita, dispositionem machinae ita determinauit, vt superata frictione maximus effectus produceretur, in quo iam nullum amplius incommodum praxi aduersans cernitur, sed potius egregius consensus deprehenditur. Obseruat autem, frictionem tantam esse posse, vt ea sola a dato vento ne quidem superari, multo minus vllus effectus obtineri queat; vnde perspicitur, in hoc machinarum genere diminutionem frictionis maximi esse momenti, ita, vt ea parum minuta, multo maior effectus sit proditurus, qui, si frictio parumper esset maior, plane nullus esset futurus. Quare nullum est dubium, quin hinc maxima emolumenta in praxin sint redundatura.

III.

Elementa Doctrinae solidorum p. 109.

itemque

IV.

Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita p. 140.

Quanquam Stereometria inter disciplinas Matheseos elementares referri solet, plurimum tamen abest, quominus ea solide pertractata, atque, veluti Geometria plana, in systema certum redacta sit censenda. Cum enim in Geometria plana, post lineas et angulos, figurae potissimum rectilineae examinentur, earumque proprietates demonstrentur, quibus ob simplicitatem circulus adiungi solet, ita in Stereometria, iactis fundamentis de inclinatione planorum et angulis solidis, corpora hedris planis inclusa tractari, eorumque proprietates euolui conueniret, vbi imprimis haec corpora in certas classes distribui oporteret, quibus porro ob simplicitatem globus cum cylindro et cono adiungi posset. Verum in elementis stereometricis nihil prorsus de diuisione corporum in certas classes secundum hedrarum numerum reperitur: sed quaedam tantum species, veluti prismata, pyramides et corpora regularia dicta, praetermissis reliquis omnibus, sine vlla partitione et connexione mutua proferuntur. Quod autem in Geometria

metria plana facillimum erat figuras rectilineas secundum laterum numerum, quippe cui numerus angulorum semper est aequalis, in classes digerere, id in Stereometria, si tantum ad corpora hedris planis inclusa attendamus, multo magis est arduum, cum numerus hedrarum solus ad hoc non sufficiat. Si enim ambitum horum corporum spectemus, ea nonsolum hedris terminantur, sed etiam angulis solidis, et binarum hedrarum concursibus, qui a Cel. Auctore, ob defectum aptioris et recepti nominis, *acies* vocantur; quarum rerum, quae non constanti quadam lege inter se connexae videntur, in corporum classibus constituendis vtique rationem haberi decet: propterea quod in corporibus, eodem hedrarum numero contentis, ingens diuersitas, ratione angulorum solidorum et hedrarum, qua indoles eorum vehementer variatur, locum habere possit. Ita octaedrum, prisma sexangulare, et pyramis super basi heptagona extructa octo hedris includuntur, quis autem haec tam diversa corpora vna eademque classe complecti vellet? Hinc Cel. Auctor tres praecipuos characteres ad corpora in classes distinguenda constituit, qui sunt 1° numerus hedrarum, 2° numerus acierum, ac 3° numerus angulorum solidorum. Qui haec attentius perpenderit, facile agnoscet, ea ad indolem quorumuis corporum perspiciendam ita esse necessariam, vt iis neglectis elementa Stereometriae nullo modo solide ac scientifice tradi queant, vnde mirum est, neminem adhuc de hisce principiis Stereometriae constituendis cogitasse, hancque disciplinam vltra terminos Euclideos vix quidquam esse promotam, cum tamen omnes Geometrae in hoc studio plurimum fuerint occupati.

cupati. Verum euolutio memoratorum characterum multo difficilior est, quam primo intuitu videtur. Deprehenduntur enim, certa quadam lege inter se connecti, cuius ratio ita abscondita videtur, vt Auctor eam primum sine demonstratione, soli inductioni innixus, attulerit, ac postmodum demum post plura tentamina demonstrationis compos sit factus, quam in schediasmate subnexo seorsim exposuit. Veritas autem haec, demonstratu tam difficilis, in hoc consistit, vt in omni corpore hedris planis incluso aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum solidorum semper binario excedat numerum acierum, quae propositio analoga est ei, qua in Geometria plana numerus angulorum cuiusque figurae rectilineae numero laterum aequalis pronunciatur. Atque vt haec fundamentum cognitionis figurarum continet, ita illa in Stereometria prima solidae cognitionis principia complecti est putanda. Statim ergo atque in corpore trium memoratorum characterum bini fuerint cogniti, tertius inde facillime innotescit. Si enim numerus angulorum solidorum fuerit $= S$, numerus acierum $= A$, et numerus hedrarum $= H$, semper habetur $S + H = A + 2$, hincque vel $S = A + 2 - H$, vel $H = A + 2 - S$, vel $A = S + H - 2$, quae relationis simplicitas ob demonstrationis difficultatem magis miranda videtur. Deinde cum figurarum planarum haec sit palmaria proprietas, quod omnes anguli iunctim sumti aequales sint bis tot rectis, quot sunt anguli, demtis quatuor: ita etiam circa solida hedris planis inclusa Auctor quasi similem proprietatem demonstrat, quae circa angulos singularum hedrarum versatur,

quorum

quorum omnium ſumma ſemper aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot in corpore habentur anguli ſolidi, demtis octo. Plures alias praeterea in medium allatas conſpicimus inſignes corporum talium proprietates ex numero laterum hedrarum petitas, prout eae vel ſunt triangulae, vel quadrilaterae, vel pentagonae, etc. vnde Cel. Auctor concludit ex meris hedris hexagonis, vel plurium angulorum, nullum ſolidum conſtrui poſſe. Ex his ſtabilitis principiis fluunt tandem claſſes et genera ſolidorum, eorumque praecipuae proprietates, quae campum ampliſſimum aperiunt, hanc doctrinam vberius excolendi, ſiquidem hinc completum Stereometriae ſyſtema condi poſſet.

V.

De Motu Corporum Coeleſtium p. 161.

Quando motus cuiuspiam corporis coeleſtis dicitur ſiue regularis, ſiue irregularis, ante omnia notandum, has voces ad cognitionem noſtram ita referri, vt ſi motus ille opinioni noſtrae conſentaneus deprehendatur, regularis, contra vero irregularis iudicetur. Ita veteribus fortaſſe motus corporum coeleſtium irregulares ſunt viſi, ſtatim atque animaduerterunt, ea non in circulis ferri, ſiquidem eorum opinio ad ſolum motum circularem fuerat adſtricta. Hodie autem, poſtquam *Kepleri* ſententia de orbitis ellipticis a *Newtono* firmiſſimis argumentis mechanicis eſt munita, regulae Keplerinae ita animos noſtros occupauerunt, vt, ſi quae corpora coeleſtia ſecundum eas exactiſſime mouerentur, eorum motus a nobis maxime regularis iudicaretur, neque iam a nobis aliae irregularitates agnoſcantur, niſi vbi motus ab illis regulis deuiare obſeruatur. Eos ſcilicet motus in coelo pro regularibus habemus, qui fiunt in ſectionibus conicis, ita areae circa alterum focum deſcriptae ſint temporibus proportionales, a qua lege quidquid aberrauerit, ad irregularitates referre ſolemus; quae eo cenſentur maiores, quo maior fuerit iſta aberratio. Primum quidem Planetas principales perfecte ſecundum hanc legem circa Solem moueri ſunt viſi, atque adeo *Streetius* in Tabulis Carolinis eorum Aphelia immota ſtatuit; ex quo etiam nunc in eorum motibus alia irregularitas admitti non ſolet, niſi quatenus a regulis *Kepleri* diſcedunt. In Luna autem inſignis ab his regulis aberratio eſt obſeruata, cuius motus proinde iure ab Aſtronomis pro maxime irregulari habetur. Deinde vero etiam in motu Saturni haud leues aberrationes ſunt animaduerſae, nomine irregularitatum ſatis ſuperque notae. Tandem vero compertum eſt, nullum plane inter corpora coeleſtia dari, cuius motus regulis *Kepleri* perfecte ſit conformis, quod vel ex motu Apheliorum et nodorum, quae puncta ex ſententia *Kepleri* quieſcere debebant, in optimis autem Tabulis Aſtronomicis mobilia ſtatuuntur, manifeſtum eſt; Ex quo ſuſpicari licet, Cometarum motus, niſi forte prope inſignes Planetas praetergrediantur, ſolos eſſe regulares. Quando autem omnis irregularitas ita eſt comparata, vt per motum lineae abſidum exacte repreſentari poſſit, vix ea ſentitur, dum

dum tabulae motum referentes ab illis regulis non recedere videntur: ſin autem, vti in Luna fit, excentricitas praeterea variabilis aſſumi, atque etiam aequatio aliis correctionibus indiget, irregularitas maior adeſſe cenſetur. Niſi igitur iſtae irregularitates admodum fuerint enormes, eae commodiſſime ita definientur, vt motu quodam regulari a vero minime diſcrepante, tanquam fundamento conſtituto, aberrationes ad continuam mutationem, tam lineae abſidum, quam excentricitatis, ipſiusque orbitae, reuocentur. Hoc ergo inſtitutum Cel. Auctor, poſtquam iam alio modo motum Lunae, perturbationesque Saturni, inueſtigaſſet, in hac diſſertatione omni ſtudio proſequitur, cum id ad calculum Aſtronomicum maxime accommodatum videatur. Cum autem irregularitates motui ſeſe immiſceant, ſimulac vires ſollicitantes non ad punctum fixum diriguntur, neque quadratis diſtantiarum ab eo fuerint reciproce proportionales, inueſtigationem ita inſtituit, vt praeter talem vim quadrato diſtantiae reciproce proportionalem, vnde motus omnino regularis eſſet proditurus, Planetam inſuper ab aliis quibuscunque viribus ſollicitari concipiat. Ad quarum effectum cognoſcendum primo examinat caſum, quo planeta hactenus motu regulari latus ſubito a vi externa ictum reciperet, eoque deinceps aliam orbitam deſcribere adigeretur, quae quantum a priſtina cum ratione poſitionis lineae abſidum, tum excentricitatis, tum vero etiam ratione axis, ſeu parametri, ſit diſcrepatura, ſedulo exquirit. Deinde hunc ictum infinite paruum facit, ſingulisque momentis reperi vtcunque concipit, quandoquidem perturbationes a viribus quibuscunque oriundas tanquam ictus momentaneos considerare licet. Hoc modo Planetae motus ita ad orbitam variabilem reducetur, vt primo situs lineae absidum, tum excentricitas, ac tertio latus rectum, fiant quantitates variabiles, quas Auctor ex datis viribus perturbantibus sollicite determinat, indeque ad quoduis tempus anomaliam veram isti variabilitati consentaneam deriuat, vnde tandem Planetae motus perfecte innotescit. Haec autem praecepta generalia tradidisse Auctori sufficit, cum eorum applicatio ad quempiam casum nimis prolixos calculos postularet, sine quibus nullas plane huiusmodi inuestigationes suscipere licet. Ceterum ex iis, quae de perturbationibus Saturni, motu Lunae, et anomaliis motus Terrae, est commentatus, abunde perspicitur, quemadmodum haec praecepta per calculum exequi, atque ad vsum transferri oporteat.

PHYSICO-MATHEMATICA.

Primo loco occurrunt:

Georgii Wolffgangi Krafftii Resolutiones Problematum ad Architecturam ciuilem spectantium p. 199.

Quamuis Architectura ciuilis, profundioris Matheseos subsidio vix indigere plurimis videatur, atque huius adplicatio ad problemata architecturam spectantia com-

communiter negligatur, falli tamen, qui ita iudicant, re ipſa ſaepius iam oſtenſum eſt. Sunt autem problemata iſta Architectonica, a ſublimiori Matheſi pendentia, inprimis quidem ea, quae aedificiorum firmitatem concernunt. Non tamen penitus excludenda ſunt, quae venuſtatem ſpectant, quanquam fateri fas ſit, minorem eſſe Matheſeos in poſterioribus, quam in prioribus, vſum. Vtriusque generis problemata tractat Clariſſ. Auctor in hac diſſertatione, quae et plurimos aliorum errores corrigit, et plura hactenus ab aliis non ſoluta problemata comprehendit.

Initium ducit Auctor a diligentiori concamerationum architectonicarum, quas fornices vocant, conſideratione. Supponit, vti fecerunt Auctorum architectonicorum optimi quiuis, venuſtatem atque commoditatem dimenſionis Geometricae poſtulare, vt cunei omnes, ex quibus fornix conſtat, ita parentur, vt lecti eorum ſinguli, ſeu rectae, ſecundum quas ſibi incumbunt cunei, ad medium fornicis punctum, tanquam ad centrum, convergant. Calculo tum inquirit, quanta in fornice, hac ratione conſtructo, ſit vis cuneorum reſpectiua, quacum quiuis eorum in plano, cui incumbit, verſus fornicis centrum deſcendere nititur. Quoniam autem, ex mente Auctoris, requirit fornicis firmitas, vt niſus hic, quem cuneus quiuis exercet, vbiuis ſit aequalis, deducit exinde, dari non poſſe fornicem, debita firmitate praeditum, cuius cunei omnes eſſent aequales mole, ac idem haberent pondus abſolutum, vnde porro concludit, inae-

 qualem

qualem fornicis cuiusuis in diuerfis locis craffitiem neceffario admittendam effe, atque, fi debita detur cuneis vbiuis longitudo, fecundum curuae cuiusuis ductum, firmum atque ftabilem erigere fornicem, in poteftate effe. Anfam haec praebent Auctori, corrigendi errorem a *Serlio*, *Durero*, *Hartmanno* commiffum, qui quippe folos ellipticos arcus fornicibus conftruendis aptos iudicarunt, ad venuftatem tamen potius forfitan, quam ad ftabilitatem fornicis refpicientes. Neque minus falli oftendit Clariff. Auctor *Gregorium*, *Coupletum*, *Polhemium*, qui fecundum catenariae ductum conftrui poffe fornicem, vbiuis aeque craffum, et aequalis vbiuis ponderis cuneorum refpectiui, pronunciarunt. Non tamen negat, conftrui poffe, fi catenaria alia circumdetur curua fibi parallela, fornicem vbiuis aeque craffum, ac perfecte ftabilem, quamuis enim in fornice eiusmodi partium grauitas refpectiua aequalis reddi omnino nequeat, fit tamen firmus atque ftabilis fornix eiusmodi, quoniam cuneus quiuis fuperior tanta vi furfum vrgetur, quanta fibi fubiectum premit, vt primus rite oftendit *Iac. Bernoullius*. Cum itaque fecundum quamcunque libuerit curuam conftruere fornicem firmum liceat, liberum erit Architecto, eligere eam, quam alio refpectu optimam iudicauerit. Praecipue igitur ad venuftatem refpiciendum eft. Pendere autem videtur haec fornicum pulchritudo a duplici potiffimum fundamento. Inuenuftus namque partim eft fornix, cuius partes aut inter fe, aut cum fulcris, quibus imponitur, fenfibilem includunt angulum, fiue poplitem, prouti loqui amant Architecturae periti, partim is, cuius partes fubito

bito et multum curuaturam immutant: haec nempe ſubita curuaturae mutatio animum ſpectatoris magnopere laedere ſolet. Reiicit hac de cauſa, Auctor, curuam, quam vt fornicibus aptam commendant, ac delineare docent Architecti, quam poſt *la Hireum*, concinniori tamen methodo, parabolam eſſe oſtendit. Meliores propterea cenſet fornicibus conſtruendis arcus, aut ſemicirculares, aut ſi erigendi ſint fornices depreſſi, ſemi-ellipticos: hi enim poplite nonſolum carent, ſed et alteri venuſtatis requiſito omnino ſatisfaciunt. Effugiunt autem Architecti ellipticorum fornicum exaedificationem, quia harum curuarum deſcriptionem iuſto moleſtiorem exiſtimant, vnde ad arcus circulares confugere ſolent, quos ita inter ſe combinare laborant, vt oculo gratam figuram ellipticae ſimilem, quam oualem vocant, componant. Delineandi eiusmodi fornices methodos ſuppeditat varias *Serlius*, optimam *Blondellus*, cuius tamen ſolutio hoc laborat vitio, quod ſolam fornicis latitudinem datam ſupponat, et, ſi praeterea detur quoque altitudo, ea inutilis euadat. Emendat hunc defectum Auctor, ac modum, ex tribus circuli arcubus componendi oualem aſpectui gratam, ac fornici, cuius datur, tam latitudo, quam altitudo, aptam, docet, infelicesque *Pitoti* in hoc negotio conſumtos labores emendat. Quoniam vero Auctoris ſolutio neceſſario requirit, vt arcus circulares, ſibi inuicem contigui, ex quibus componitur fornix, diuerſis deſcribantur radiis, timendumque hinc ſit, ne curuaturae ſubita mutatio, adſpectum laedat, quid obſeruandum ſit, vt radiorum ſimulque curvaturarum differentia fiat minima, quae eſſe poteſt, inquirit.

Eadem

Eadem haec principia postea adplicando ad turrium arcuata rotunda fastigia, quomodo eleganter delineari haec queant, ostendit.

Spectant hactenus proposita ad casum, vbi fornix imponendus est pilis verticalibus, atque aequalibus; occurrunt autem in Architectura casus, vbi fornices constituendi sunt obliqui, quos *arcs rampants Galli* vocare solent. Erraſſe *Blondellum*, qui ad casum istum arcuum circularium combinationem omnino inutilem esse, existimauit, re ipsa ostendit Clariss. Auctor. Postquam nempe primum, quomodo ellipses fornicibus eiusmodi aptae inueniendae sint, docuit, quomodo ex arcu circulari duplici fornix constituatur poplite carens et venustus, ostendit, siue pilae, quibus fornix incumbit, non sint verticales, sed obliquae, siue sint verticales, at inaequales.

Transit tum Auctor ad tectorum rectilineorum considerationem, ac primum ostendit, quod alia iam ratione inuenerat *Coupletus*, siue tectum sit altius, siue depressius, aequaliter premi tectorum cantheria, ab impositis sibi tegulis, maius tamen esse in tectis altioribus fracturae periculum, quoniam, ob vectem longiorem, maiori momento agit haec pressio in iis, quam in depressioribus. Perhibuerat porro *Coupletus*, minorem esse tectorum altiorum impulsum lateralem, ast falli ipsum demonstrat Auctor, probans, tectum altius maiori semper vi premere extrorsum, quam depressius. Pertinet huc quoque quaestio, de tectis, *Mansardicis* dictis, quae

quae ita conſtruere iubent firmitatis regulae, vt ipſa ſe teneant in aequilibrio, cuius problematis, poſt *Coupletum* aliam Auctor ſolutionem exhibet, lectori aequo ac intelligenti, vtra alteri praeferenda ſit, diiudicandum relinquens. Plura de hac eleganti et in praxi Architectonica valde vtili diſſertatione dicere ſuperuacaneum foret. Notamus errorem operarum, dum tecta Manſardica in diſſertatione Krafftiana p. 232. *Marſardica* fuerunt appellata.

Quae ſequuntur commentationes ſunt *Georgii Guilielmi Richmanni*, V. Cl. quas ipſe typis paratas Academiae exhibuit, poſtumae quidem, ſed non tales, in quibus vltima Auctoris lima deſideraretur. Sunt autem ſequentes:

II.

De virtute Magnetica abſque Magnete communicata Experimenta p. 235.

Occaſionem ad haec experimenta inſtituenda ſuppeditauit vir ſumme reuerendus atque doctiſſimus *Daniel Dumaresque*, SS. Theol. D. et Eccleſiae Anglicanae, quae Petropoli colligitur, Paſtor meritiſſimus, qui vt Muſis, quae et ipſum amant, fauentiſſimus eſt, ſolet ſubinde libros nouos ex Anglia ad ſe miſſos, noua inuenta etiam ex Patria ad ſe perſcripta, cum Academicis communicare. Hac humanitate vſus eſt inter caeteros b. *Richmannus*, qui poſtquam de arte, magnetes artificiales conficiendi, atque de experimentis circa hanc rem in Anglia inſtitutis, ex ſcriptis et litteris ad doctiſſimum *Dumaresquium* perlatis certior fuiſſet factus, mox occaſionem hanc inſtituendarum nouarum diſquiſitionum auide arripuit. Verum fateor, doctrina haec poſt fata viri Clariſſimi, ab aliis multum iam exculta eſt, et ad eximium perfectionis gradum producta; non tamen exiſtimandum hos aliorum labores, inutilia reddidiſſe, quae Academia hic publicae luci exponit *Richmanni* experimenta. Plurima enim ab aliis non notata in hac diſſertatione occurrunt. Primo ſtatim experimento deſcribit modum, quo duplo maiorem, ac *Michelius*, vis magneticae gradum laminae chalybeae impreſſit. Habet tum aliqua memoratu non indigna, circa deſtructionem vis magneticae, eiusque, poſtquam deſtructa fuit, nouam reproductionem. Tradit methodum a nemine, quantum ſcimus, obſeruatam, magneticam vim inſigniter augendi. Namque fulcra ferrea adhibet, quibus laminam, magnetica vi imbuendam imponit. Hoc ignoraſſe Clariſſ. *Michelius* cenſendus eſt, quia nullam huius rei mentionem iniecit. Finem denique imponit diſſertationi experimentis quibusdam, circa attractionem laminarum artificiali magnetiſmo imbutarum, et augmentum huius vis indictis laminis, quae Phyſicis non ingrata futura exiſtimamus.

IIII.

III.

Inquiſitio in legem decrementi et incrementi caloris ſolidorum in aere.

p. 241.

De vi maiori aut minori corporum calorem retinendi, aut ipſum aſſumendi, per experimenta diligentiora exploranda, vix cogitaſſe videntur Phyſici ante Richmannum noſtrum, vnde mirum non eſt, accidiſſe quibusdam, quod raro euitabit, qui ſepoſitis experientiis, ſolorum ratiociniorum ope ad naturae myſteria penetrare conatur, vt nempe in erroreas inciderint hypotheſes. Differt iſta quam loquimur vis omnino ab ea, qua corpora diuerſa aut maioris, aut minoris, caloris gradus capacia dicuntur. Si enim de poſteriori quaeſtio eſt, maximi, quos recipere poſſunt varia corpora, caloris gradus, inter ſe comparantur, nulla habita temporum quibus acquirere aut perdere poſſunt hos calores, ratione; at, ſi de priori ſermo eſt, quaeritur, quodnam corpus ſimilibus circumſtantiis ſuppoſitis, dato tempore maiorem caloris gradum acquirat, aut perdat altero, aut quodnam corpus eundem caloris gradum maiori, quodnam minori temporis interuallo, vel acquirat, vel perdat. Oſtendit alibi Clariſs. Auctor, falſo perhiberi a quibusdam, proprietatem hanc corporum, de qua loquimur, ſequi denſitatum rationem, ita vt corpus denſius, difficilius, rarius, facilius, calore aut priuetur, aut imbuatur. Deprehendit enim Mercurium, Nou. Comm. Tom. III. p. 312. ſeq.

 fluidum

fluidum omnium denſiſſimum, inter fluida craſſiora calori eſſe obedientiſſimum, vnde et optimo conſilio factum eſt, vt ipſum pro conſtruendis Thermometris eligerint recentiores. Solida iam ſub examen vocare ſibi propoſuit Auctor, atque ſumma, qua potuit, ſolertia experimenta, quae huc pertinent, inſtituit. Non deſcribimus methodum, qua in inſtituendis ipſis, vſus eſt. Id enim paucis fieri non poteſt, melioremque, quam hic dare valemus, ex ſcripti ipſius lectione, ideam polliceri ſibi poſſunt lectores. Conſpirant autem omnia a Viro Clariſſimo inſtituta atque deſcripta experimenta, ad probandum, neque a denſitate, neque a cohaerentia abſoluta, neque a duritie corporum, pendere hanc proprietatem, qua calorem vel maiori, vel minori pertinacia retinent, aut auiditate aſſumunt, legem autem, quam hic ſequitur natura, penitus adhuc ignotam eſſe. Indigemus itaque adhuc plurimis in hanc rem inſtitutis experimentis, antequam ſufficientem huius Phaenomeni cognitionem ſperare queamus. Quanquam autem id ſolum egerit Clariſſimus Collega, vt doceret, ignorare nos adhuc quandam ex praecipuis actionis cao is legibus: nihilominus obſtrictos ſe ipſi fatebuntur naturae ſcrutatores. Ab erroribus enim ſe tueri difficillimum eſt, ſi cognitum creditur, quod penitus ignoratur.

Continet haec Clariſſ. *Richmanni* Diſſertatio aliam adhuc diſquiſitionem, ad ſcopum ſcriptionis immediate quidem non ſpectantem, aſt dignam, cuius mentionem quoque iniiciamus. Obſeruarunt iam ante illum Phyſicorum aliqui, aquam in phiala contentam, ebullienti aquae immerſam

mersam, valide quidem incalescere, sed perduci eo nunquam posse, vt et ipsa ebulliat. Sponte se hic offerente occasione, exactius hanc rem Auctor rimatus est, atque inuenit, vix vnquam vltra gradum 205 ascendere Thermometrum Fahrenheitianum, si immergatur aquae, vase metallico, quod vndique maiori ebullientis aquae copia cinctum est, contentae; quod tamen Thermometrum, ebullienti aquae immediate immersum nunquam non ad gradum 212 adscendit. Suspicari quis posset, causam huius Phaenomeni latere forsan in eo, quod aqua non capax quidem sit caloris eius, qui 212 gradui Thermometri Fahrenheitiani respondet, ast quod superfluus ignis, argentum viuum, quod maiorem, quam aqua recipere potest calorem, intret, vt sic Mercurius maiorem obtineat aqua ambiente calorem, atque ad gradum 212 ascendere cogatur. Sed falsam esse hanc hypothesin ostendit Auctor, experimento quo docet, oleum loco aquae vasi metallico, ab ebulliente aqua circumdato, infusum, quanquam itidem maioris, quam aqua, caloris capax sit, nunquam tamen vltro gradum 205 incalescere. Neque ratio inde petenda est, quod vas aquam continens, dum experimenta haec instituuntur, non totum in ebulliente aqua submersum esse solet, sed aliqua sui parte ex ipsa prominet. Expertus enim est Clarisſ. Auctor, etiamsi vas penitus aqua ebulliente vltra horam obtectum fuerit, contentam nihilominus vase hoc aquam, nunquam vltra gradum 205 incaluisse, vt itaque concludendum sit, latere etiam hic naturae arcanum quoddam, cuius causam omnino ad huc ignoramus.

IV.

Tentamen, ſolutionem in diuerſa temperie ad menſuram reducendi.

p. 270.

Notiſſimum eſt, dum ſalia ſoluuntur ab aqua, velocius hoc fieri, ſi fluidum ſoluens maiorem, tardius, ſi minorem poſſideat caloris gradum, nondum tamen hactenus peruentum eſt ad regulam, quam natura hic ſequitur, et cuius ope, quantum ſolutionis increſcat celeritas, creſcente aquae ſoluentis calore, determinari poteſt, quamuis probabile videatur, eſſe velocitates ſolutionum, in ratione celeritatum particularum ſoluentis a calore agitatarum, ſiue in ipſa calorum ratione. Cum vero a priori, vt vocant, regulae huius veritas neutiquam cum certitudine probari queat, ad experimenta properandum eſſe iudicauit Auctor. Confici itaque curauit cubulos ex ſale gemmae, quantum fieri potuit, exacte aequales, quorum alterum in temperie 42, alterum in temperie 84 graduum Thermometri Fahrenheitiani ſolutioni permiſit, atque ſimul, quanta cuiusuis pars dato tempore ſoluta ſit, ope librae mobiliſſimae, accurate annotauit. Inuenit, eſſe ſolutionum celeritates, ſub temperiebus 42 et 84 graduum, quam proxime, vti 1 ad 2, quapropter, pro hoc caſu, ſolutionum velocitates exacte fere ſunt in ratione graduum Thermometri Fahrenheitiani, qui temperiebus fluidi ſoluentis, reſpondent. Quodſi itaque

que, de quo tamen nondum constat, idem obtineret, quod ad caeteros quoque Thermometri huius gradus, omnino scala Thermometri Fahrenheitiani insigni prae reliquis gauderet praerogatiua, atque mirandum valde foret, absque consilio Thermometrum hoc ita esse constructum.

V.

Tentamen rationem caloris respectiuam lentibus et Thermometris definiendi. p. 277.

Constat inter Physicos, datam quandam Mercurii, aut fluidi cuiusdam alterius massam, si augeatur ipsius calor, in maius volumen extendi; neque minus certum est, maiorem caloris gradum maius quoque voluminis augmentum producere. Nondum autem hinc elucet, an augmentum hoc voluminis in eadem prorsus ratione procedat, vti caloris augmentum, vt nempe duplum v. g. caloris incrementum, duplum quoque producat expansionis incrementum, an minus. Dubitarunt ergo non sine ratione Physicorum plerique, an Thermometra nostra ipsa caloris incrementa mensurare apta sint. Per se enim patet, exhibere haec instrumenta immediate, non nisi voluminis Mercurii, Thermometro inclusi, incrementa, quae, an caloris incrementis sint proportionalia, iure dubitatur. Dantur nempe argumenta, quae contrarium indicare non obscure videntur. Possident sine dubio Mercurii

curii particulae vim quandam ipſas ad vnionem perpetuo ſollicitantem, quam calor, dum extenditur Mercurius, ſuperare debet. Admodum autem probabile aliisque naturae legibus analogum videtur, vim iſtam, quo magis dilatatur Mercurius, eo reddi minorem, ita vt in Mercurio multum iam dilatato, idem caloris incrementum de nouo accedens, minorem iam inueniens reſiſtentiam, maiorem producere debeat effectum, quam in Mercurio parum expanſo operari valet. Tentauit Clariſſ. Auctor, rem hanc experimentorum ope, quae lapidis inſtar lydii ſunt in Phyſicis, in lucem collocare, et non ſolum, an vere dilatationis augmenta in maiori creſcant ratione, ac caloris incrementa, determinare, ſed et in ipſam regulam, cuius ope ex dilatationis augmento, augmentum caloris, et vice verſa, inueniri poteſt, inquirere. Res haec eo diligentiore perquiſitione digna iudicanda eſt, quo detecta tandem hac regula ex datis Thermometri gradibus, ipſa calorum incrementa, ſeu potius ratio horum incrementorum, determinari poterunt. Opus erat ad inſtituenda haec experimenta, methodo, diuerſos caloris gradus, cognitae ad ſe inuicem rationis, producendi, quod feliciter Auctor obtinuit, ope lentium conuexarum, quae cylindros radiorum ſolarium in conum colligunt, vnde poſt eas, in diuerſis diſtantiis calores inuerſam quadratorum diſtantiarum a foco rationem, ſequuntur. Expoſuit conis iſtis radioſis, Thermometra perfecte concordantia et aequaliter mobilia, et quanta fuerint aequalibus temporibus dilatationis Mercurii in vtroque incrementa, diligenter annotauit. Ex his poſtea obſeruationibus

tionibus scopum suum attingere laborauit, ac inuenit quidem, in eo, quod dilatationis incrementa in maiori ratione crescant, quam incrementa caloris, non abludere penitus experientiam a Theoria, ast ad legem eruendam, haec experimenta nondum sufficere. Pollicetur itaque sub finem, se laboraturum, vt nouis experimentis quibus Thermometra amplioris scalae adhibere volebat, legem hanc tandem eruat: sed infelix atque improuisa mors Collegae desideratissimi aliis hunc, in quo laborent, campum reliquit.

VI.

De Indice Electricitatis et eius vsu in definiendis artificialis et naturalis Electricitatis Phaenomenis p. 301.

Dissertationem hanc sermoni Academico die VI. Septembris 1753 in solemni Academiae conuentu habendo destinauerat Cel. Auctor: at fato praeuentus, non habuit. Quare cum, quod alias fieri solet, singulariter typis excusa non sit, hic ei locum assignauimus, demtis, quae characterem sermonis constituebant, et huic loco minus apta videbantur. Hoc opusculum coronidem perscrutationibus Physicis Richmannianis imponit. Haec meta stadii ab ipso decursi. Hic exequialis cantus, quo, olorum instar, mortem sibi ipsi praesagire visus est. *Fortitudinem quandam*, dixit, (*) *et in re ancipiti audaciam*

e *nouis-*

(*) p. 335 huius dissertationis.

nouissimis his temporibus Physicis pateret. Sed ipsius damno patuit. Primum de fulmine auertendo cogitabatur. Inde ansam arripuit noster, vt conuenientiam inter Electricitatem naturalem et artificialem magis simul indagaret. Apparatus, quo vtebatur, in ipsa hac dissertatione descriptus est. Fulmen ita attrahens, non auertens, monebatur quidem a plurimis, vt caute procederet. Sed ille fortitudinem suam Physicam eminenti gradu possidebat, periculum sibi non obuersari ratus, quoad index non maiorem Electricitatis gradum monstraret, quam ipsa machina electrica producere possit. Ast factum est, vt repente terribile fulmen oriretur, antequam noster, qui indici suo adstabat, violentiam eius obseruare potuisset. Ita periit eheu! infelici suo fato Richmannus, Physicos suo exemplo docens, quanta cautione opus sit in experimentis huius indolis sine periculo capiendis. Iam ad ipsam dissertationem procedimus.

Primus procul dubio Physicorum est Clariss. Richmannus, qui de construendo indice Electrico, siue instrumento, cuius ope quantitatem productae in corpore quodam Electricitatis ad mensuram reuocare, aut saltem aestimare queamus, cogitauit. Non infeliciter rem ipsi cessisse descriptio inuenti, Commentariorum nostrorum Tomo XIV data, satis indicat. Repetit hanc breui Auctor sub initium dissertationis, statimque, quae ipsi in instrumento hoc adhuc desiderari videntur, ingenue subiungit. Laborare nempe duplici defectu indicem, quod adplicatus corpori cuidam electrificato, vt cito pereat Electricitas

ctricitas, efficere ſoleat, quodque non ſatis commode cuilibet maſſae aut corpori adplicari queat. Vtrique defectui remedium quaerens Auctor, in penitus nouam incidit conſtructionem eiusmodi indicis, quem delineatum et exacte deſcriptum hic ſiſtit. Legant harum rerum auidi deſcriptionem ipſam; inſerere enim eam hic, a ſcopo noſtro alienum eſt.

Abſoluit haec noui indicis electrici inueſtigatio aque deſcriptio primam diſſertationis partem, aſt habet praeterea quoque ipſa haec prior pars egregia plurima ac notatu digna, quo referimus, quae circa lumen conicum, ex angulis ſolidis acutis corporum electrificatorum erumpens, deque coniuncto cum luminis huius apparentia inſigni atque notabili electricitatis decremento, aliisque, quae debilitare ſolent Electricitatem, cauſis, commentatus eſt Vir Clariſſimus.

Progreditur tum Auctor ad primarium diſſertationis ſcopum, qui in eo conſiſtit, vt, quae ope indicis electrici prioris ſui, (poſteriorem namque, quem pauco ante mortem tempore primum exogitauerat, in vſum vocare nunquam potuit) circa Electricitatis Phaenomena obſeruare ipſi contigit, notabilia, deſcribat. Plura ſunt in quibus vtilem expertus eſt indicem ſuum experimenta, quam vt recenſere ea, ac in compendium redigere queamus: hoc ſolum monemus, in duas claſſes diſtribui ab Auctore obſeruationes ſuas; exhiberi primum, quae Electricitatem artificialem, vt vocant, dein quae Electrici-

 tatem

tatem atmospherae aereae ſpontaneam , ſiue fulmineam, aut naturalem, concernunt. In vtroque genere habet Auctor quae ipſi propria, ac, vt orbi erudito innoteſcant, digna, putamus.

Natus erat noſter Pernauiae in Liuonia die XI. Iulii ſt. v. cIↄIↄccxI. patre Wilhelmo Richmanno, Quaeſtore eius vrbis, ſub finem anni 1710, antequam naſceretur noſter, peſte defuncto. Bonas litteras Reualiae, Halae et Ienae gnauiter excoluit, totum ſe Matheſeos et Phyſices ſtudiis conſecrauit. Venit Petropolin, filios Comitis Oſtermanni litteris imbuturus, quo munere per aliquot annos non ſine laude functus eſt. Anno 1535 in Academia Adiuncti munus obtinuit, anno 1741 ad Profeſſionem Phyſices extraordinariam, et anno 1745 ad ordinariam, abitu Cel. Krafftii vacuam, adſcendit. Diem vitae vltimum vidit XXVI. Iulii 1753, Orpheo, Aeſculapio, Zoroaſtri, ſimilis, qui etiam fulmine enecti perierunt, ſed qui magis Ethnicorum fabulis, quam ob hoc ipſum, celebritatem nominis aſſequuti ſunt, cum noſter e contrario famam ſibi ſcriptis partam inſolito hoc mortis genere quam maxime confirmauerit. Si plures erunt eruditi martyres, qui in ipſa functione muneris ſui, et propter eam ipſam, mortem paſſi ſunt, procul dubio Richmannus noſter choream ducet. Caeterum lectorem remittimus ad ea, quae de tragico hoc euentu in ſingulari ſcripto, Tranſactionibus Philoſophicis Anglicanis pro anno 1753 inſerto, commentati ſumus.

PHY-

PHYSICA.

Variorum Auctorum lucubrationes hanc classem constituentes sequente se ordine excipiunt:

I.

Abrahami Kaau Boerhaue Dissertatio de cohaesione solidorum in corpore animali. p. 343.

Etiamsi vir doctissimus nuper apud nos vita defunctus in hac dissertatione cogitata magis sua, quam obseruata, tradiderit; non dubitamus tamen, fore, vt omnes, qui doctrinam de corporis animalis fabrica excolunt, eodem fauore illam, quo priora eius scripta dignati sunt, prosequantur. Reperient enim hic Auctorem in omnibus sibi similem, multa eruditione et iudicii dexteritate argumentum pertractantem, genuinum, vt paucis dicam, *Magni Boerhaauii* discipulum, qui vestigiis diui praeceptoris et auunculi sui vbiuis presse insistit. Tam ample ante illum nemo de hac materia scripsit, nemo comparationem inter corpus animale, vegetabile et minerale, quod ad hanc doctrinam attinet, tam belle instituit. Mos erat Auctori, vt diffusa eruditione pollebat, in quoduis, quod tractabat, argumentum copiose redundante, plura in scriptis suis praestare, quam quidem primum intenderat. Ita hic quoque multa cumulauit, quae sub prae-

praefata inſcriptione vix quisquam quaerat. Nimium certe prolixus euaderem, ſi varia capita ab Auctore noua luce perfuſa enumerarem. Perderet ſuas gratias rudi penicillo adumbrata Veneris imago. Praeterea lectorem cupidum et intelligentem ipſo fonte magis, quam riuulis noſtris, delectatum iri praeuidemus. Sunt potius, quae de defuncto Auctore, memoriam eius omni aeuo digniſſimam recolendi gratia, breuibus adiiciam.

Natus eſt Hagae Comitum die V. Ianuarii 1715 patre *Iacobo Kaau*, Iuris vtriusque atque Medicinae Doctore et Practico Hagenſi, ex nobili familia Scotica oriundo, et matre *Margaretha Boerhauia*, quae Magni *Hermanni Boerhauii* et *Iacobi* Eccleſiaſtis Leidenſis, quibus noſter omnia ſe debere profeſſus eſt, ſoror fuit. A prima iuuentute bonis litteris ſedulo innutritus, anno 1733 Academiam Lugduno-Batauam adiit, ibidemque, cum ſtudio Medico ſe dicaſſet, potiſſimum quidem ex auunculi ore pependit, ſed non minus quoque viris tota Europa celeberrimis *Bernardo Sigefrido Albino*, *Hermanno Oeſterdyk Schachtio*, *Adriano van Royen* et *Hieronymo Dauide Gaubio* praeceptoribus vſus eſt. In optimo ſtudiorum curſu accidit, vt anno 1736 nocte quadam, dormiens, quo caſu neſcius, auditu priuaretur. Surgit nihil tale ſuſpicatus, aduocat famulum, exiraſcitur, quod illum ad iuſſa ſua reſpondentem non audiret; obſeruat autem famulum labia mouentem, pulſat denique tabulam, et, cum neque tunc ſonum perciperet, ſurditatis ſuae conuincitur. Haec praegrauis ipſi iactura fuit: nam poſthac nunquam auditum

tum recepit. Id quoque multum iucunditatis iucundissimae alias cum ipso conuersationis ademit. Oportebat enim cogitata sua vel in tabula scribere, vel per signa in digitis facta prodere, vel interprete loquelae digitum gnari vti. Ille, vt felicissimo erat ingenio, mira facilitate loquelam digitum addidicerat; ad labiorum quoque motum multa, quae quis loquebatur, intelligebat. Cum ab eo tempore praeceptorum viua institutione frui ipsi non liceret, eo plus lectioni optimorum in quauis doctrina librorum incubuit, natura, vt fieri solet, auditus defectum prompta recordatione rerum lectione perceptarum resarciente. Surdos oratores raro bonos euadere palam est; plerumque vel nimis alta, vel nimis remissa, voce loquuntur, quia, vbi extollitur vox, vbi deprimitur, audire nequeunt. At nostro, qui artem, Quinctiliano *corporis eloquentia* dictam, iam ante didicerat, feliciter res successit. Testatur id declamatio Academica, quam die IV. Septembris 1737 *de Gaudiis Alchemistarum* habuit. In ea si nitorem stili, si eruditam, si iucundam, argumenti tractationem spectes, nihil desideraueris. Actionem autem oratoriam in surdo omnes mirati sunt. Tam egregio eruditionis specimine, multo maiora in posterum promittente, promeruit, vt Amplissimi Curatores Academiae Lugduno-Batauae illum *Numo aureo*, decem et quod excurrit drachmatum pondere donarent, in cuius altera parte Pallas repraesentatur insignia Statuum Hollandiae et Occidentalis Frisiae vrbisque Leydensis arbori adpensa respiciens, in altera Epigraphe: ABRAHAMO KAAU IUVENI ORNATISS. DECLAMATIONE ACADEMICA GAUDIA ALCHEMISTARUM RECENSENTI HUNC NUMM. CVRAT. ACAD.

ET

ET VRB. LUGD. CONSS. D. D. cIↃIↃCCXXXVII. Quae ipſe Auctor de hoc ſermone, cum eodem anno typis exſcriberetur, in praefatione obſeruauit, magis ea, quae dixi, illuſtrant. „Hoc in votis erat, inquit, vt „iudicarent auditores, an carenti facultate hauriendi prae-„cepta à ſapientibus auri accommodatae inſtillanda, „vox ſupereſſet aliis animi ſenſa inſinuando idonea. „Hoc obtento laetus abiiſſem. Sed beneuolentia, „nec opinanti, plauſus dedit. Imo auditam benigne „orationem velle ſe et perlegēre teſtati ſunt viri, quorum „iuſſa ſequi debeo.„ Altero poſt anno, qui erat 1738, ſummos in Medicina honores conſecutus eſt, publicato ſpecimine inaugurali de *Scirrho*, quod ſi aegrorum ſalutis ratio eſt, optimis eius ſcriptis annumerari meretur. Nam hoc ſe talem futurum probauit, qualis poſtmodum reuera exſtitit; Medicum nempe theoria non minus, quam praxi, excellentem, experientiam cum ratione prudenter coniungentem, artem quoque Chirurgicam non indignam, quae a Medico addiſcatur, reputantem. Nemo credat, ſpecimen hoc publice ex cathedra ventilatum eſſe. Surditas auctoris, quo minus id fieri potuerit, obſtitit. Praeterea mos eſt in Belgio, vt etiam ſine tam praegnante ratione, colloquia priuata diſputationum publicarum vices obtineant. Et quid hic opus erat multis? cum Promotoribus abunde conſtaret, honores non in indignum collatum iri. Notatu dignum, quod eodem die, qui ventilationi ſpeciminis deſtinatus erat, die ſcilicet XXIII. Septembris, *Magnus Boerhauius* ex hac vita emigraret. Hic adhuc ſaluus, iuſſerat, vt, quia maſcula prole carebat, ipſius ex ſorore nepos *Hermannus Kaau*, qui tunc Hagae Comitum Medicinam exercebat, *Boerhaavii* nomen aſſumeret. Itaque

noſter

noſter fratrem ſuum, dum hoc ſpecimen inaugurale ipſi inſcriberet, *Hermannum Kaau Boerhaave* adpellauit. Hoc argumentum opponendum obtrectatoribus, qui dubitarunt, vtrum re vera auunculus nepotem in communionem nominis adoptauerit. Nam vixit adhuc venerandus ſenex, cum ſpecimen iſtud inaugurale typis exſcriberetur. Num auſus fuiſſet noſter fratri ſuo *Boerhaavii* nomen, auunculo ſuperſtite, tribuere, niſi hic ante obitum ſuum ita iuſſiſſet? *Hermannus* poſt modum anno 1740 Petropolin noſtram euocatus, atque aulae Imperatoriae Medicus conſtitutus eſt. Anno 1743 dignitatem Conſiliarii ſtatus, 1748 die VI. Decembris Conſiliarii intimi et Archiatrorum Comitis munus obtinuit, in quo, omnibus amicus, nemini inuiſus, famam Medici conſummatiſſimi, quem fors raro deſereret, poſt ſe relinquens, die VII Octobris 1753 Moſcuae deceſſit. Hic cum pariter prole maſcula careret, conſentiente filia Magni Boerhavii, quae *Thomſono Comiti* nupſit, anno 1744 *Boerhauianum* nomem in fratrem *Abrahamum* tranſtulit, qui interea temporis, anno nempe 1738, librum de *Perſpiratione* emiſerat, quo ius ſuum, *Boerhaviani* nominis celebritate vtendi, demonſtraſſe videri poterat. Multo ſane ſtudio conſcriptus eſt liber, et multiplici eruditione refertus, quae nec Poetas veteris Latii, perpetuas noſtri delicias, excludit. Proprie et potiſſimum Perſpirationem corporis humani, tam externam, quam internam, anatomice illuſtrat. Acceſſit declamatio *de Gaudiis Alchemiſtarum* ſub calcem recuſa. Intuitu huius libri Academia noſtra auctorem, tunc quidem Hagae Comitum praxin medicam exercentem, anno 1744 die 2. Nouembr. ſociis ſuis exteris annumerauit. Hoc obtento suffragio, *Boerhaavii*, nomen suo noster adiecit, et quidem prima vice cum 1745 Lugduni Batauorum librum ederet, de eo quod *Impetum faciens dictum Hippocrati*, quod *per corpus consentiens Philologice et Physiologice illustratum*, *obseruationibus etiam et experimentis passim firmatum* esse, titulus libri declarat. Principium vitae explicare ardua omnino et subtilissima res est, ad quam auctor, vt in praefatione monet, non nisi crebro hortatu Amicorum se accinxit; ita autem in hoc negotio se gessit, vt aliis vix quidquam addendum reliquisse videatur. Philologicam, quam dicit, argumenti illustrationem omnes fere paginae exhibent. Quid non de Physiologica censendum, quae caput rei est, et in quam omnia contulit, quae ratio et experientia boni dictitant, quae perpeti studio ex tot auctoribus collecta propria sibi facere, et, quod aiunt, in succum et sanguinem conuertere didicerat? Subsequente anno 1746 fratre ita suadente venit Petropolin, acceptis conditionibus pro obeunda Professione Anatomica in Nosocomio marino Petropolitano sibi oblatis. Non autem hic locus erat, vbi haereret diu. Prima occasione in Academia nostra orta, cum post obitum Viri Celeberrimi *Iosiae Weitbrechti* Professio Anatomiae et Physiologiae vacaret, arctius nobis se iunxit, et anno 1747 die VII. Nouembris in locum *Weitbrechti* suffectus est. Quae ab hoc tempore egit in scientiis ipsi demandatis magis excolendis, patent tam ex nostris *Commentariis*, quam ex duobus tractatibus *de monstris*, annis 1754 et 1757 singillatim editis. Habuit quoque di VI. Septembris 1750 in Conuentu Academiae solemni sermonem *de iis*, *quae Virum*

Me-

Medicum perficiunt et exornant, qui etiam tunc typis expressus, et Lugduni Batavorum recusus est. Plura neque dedit Academiae, neque conscripta post obitum reliquit. Nam inchoata memorare, quae luci publicae exponi nequeunt, quid iuuat? Nec mirum. Nam postremis hisce annis multum valde temporis exercitio artis medicae impendere coactus fuit, quod non potuit non studiis ipsius Academicis impedimento esse. Et quamuis sub initium labentis anni ab omni aegrotorum cura, paucis exceptis, se abdicasset; precibus tamen illorum, qui omnem fiduciam in eum collocabant, victus, pristinam assiduitatem continuauit. Mortuus est die XIV. Iulii huius anni 1758 acutissima febre correptus, quae nullis remediis obtemperans, vegetum, quod a natura habuit, corpus intra XI dierum spatium destruxit. Sic periit vltimus *Boerhaaviani* nominis haeres, nulla, cum coelibem vitam duxerit, posteritate relicta. *Hermanni* autem fratris natu maioris filia superest, *Caroli Friderici Kruse*, Medicinae Doctoris et Legionum Praetorianarum Medici sollertissimi, nostrae itidem Academiae socii, lectissima coniux. Ab hoc iam expectabunt Eruditi, quae noster in praefata dissertatione sub calcem promiserat, se *scripta Boerhauiana posthuma*, otium nactus, editurum esse. Non dubitandum multa in scriptis illis latere, quae ad latius promouendos cognitionis humanae limites faciunt, multa inprimis chemica, practica multa, posteris insigniter profutura. Tacemus litterarum commercium, quod *Magno* olim *Boerhauio* cum summis totius Europae Viris intercessit. Unum instar omnium fuit, quod cum *Iacobo Kaau*, affine suo, per plus quam XXX annos gessit. Hic medicus medico, affinis affini, amicus amico, de rebus ad ſcientias et curam morborum facientibus non minus erudite, quam candide, perſcribit. Alter alteri intima cordis penetralia pandit, conſilia petit, dat, nihil praetermittit, quo amicum optimum, affinem coniunctiſſimum, iuuare poſſit. Series litterarum eſt, quacum vix vlla inter adhuc editas comparari poſſit. Tacemus quoque conſultationes medicas, vndequaque ad *Magnum Boerhauium* miſſas. Paucae illae, quae vna cum ipſius conſiliis prodierunt, quid non ſperare iubent de reliquis, in theſauro hoc inaeſtimabili adhuc dum latentibus? Tacemus reliqua. Optamus autem maximopere, vt tandem eruditus orbis horum, quae dixi, ſcriptorum reddatur compos, quo vtilitati non minus publicae, quam gloriae nominis *Boerhauiani*, inſigniter prouiſum iri, nemo dubitabit.

II.

Mus aquaticus exoticus Cluſ. Auctar. Raii Synopſ. Quadrup. Ruſſ. Выхухоль. Auctore Io. Geo. Gmelin. p. 383.

Quod adhuc cum ſcriptis *Stelleri* poſtumis factum, id nunc quoque cum *Gmelinianis* facere Academia inſtituit. Digniora etenim per partes his Commentariis inſerere viſum eſt, illa potiſſimum, quae ad *Hiſtoriam animalium* pertinent, cui Auctor non minorem, quam plantarum deſcriptioni, operam impendit. Sunt autem, quae hic damus, in itinere Sibirico, maxima quidem accuratione, at ſine multo librorum adparatu, conſcripta. Vltimam limam non experta ſunt. Hoc namque operae illi tempori reſeruauerat

Gme-

Gmelinus, quo omnes obseruationes suas ad *Historiam Naturalem* spectantes, cum nouissimis scriptoribus collatas, et iusto ordine dispositas, singillatim edere per partes posset, eadem ratione, vt *Floram Sibiricam* edere incepit. Quemadmodum autem nec hanc vltra tertium Tomum, pauco ante obitum tempore, produxit: ita nihil est, quod de reliquis eius operibus, nisi ita, vt iam agere incipimus, speremus. Putamus quoque, lectorem in his, quas nunc publicae luci damus, obseruationibus non multa desideraturum esse, si collationem cum recentioribus Historiae naturalis Scriptoribus excipias, quam facile quisque suo marte supplebit.

Mus Aquaticus, de quo hic agitur, Russiae indigena est, Volgae et Iaico fluuiis familiaris. In Sibiria nusquam habitat. Opportune itaque *Gmelinus*, in itinere Sibirico Casani aliquam moram faciens, occasione sibi oblata, animal, vt ab hominibus piscaturae intentis ex fluuio extractum erat, videndi, vsus est, dum illius non externam tantum formam descripsit, sed et partes eius genitales, ortum odoris Moschici, quo animal pollet, inuestigandi gratia, cultro anatomico subiecit. Quid in hoc negotio praestiterit, praeconio nostro non indiget. Alias obseruationes adiicere animus est, quae descriptioni *Gmelinianae* instar supplementi inseruiant.

Recte Auctores Historiae Naturalis nouissimi, *Linnaeus* et *Kleinius*, viri celeberrimi, et nostrae Academiae Socii dignissimi, *Muris aquatici exotici* nomen, quo *Clusius* et *Raius* vsi sunt, repudiauerunt. Scilicet hoc illis temporibus ortum debet, cum adhuc Russia extra cultioris Europae limites sita crederetur. Verum quidem, in Canada, Americae septentrionalis regione, idem animal, aut aliud simile nostro, reperiri. Ast non id exoticum est, quod in Europa et in aliis mundi partibus simul, sed quod in his solis, nascitur. Cum muri nostro proprium sit, moschum olere, nihil videtur conuenientius, quam quod citati viri doctissimi *Moschati*, vel *Moschiferi*, epitheton adiungunt. Ita namque mox ex nomine cognoscitur, de quo animali sermo sit; quod et Galli, Angli et Germani vulgari sermone loquentes obseruant. Recte etiam *Linnaeus* murem moschatum inter *Castores* retulit. Castoris enim veram speciem esse, tam ex cauda et pedibus palmatis, quam ex moribus concluditur. *Wychuchol* vox Russica, quid sibi velit ignoro. Neque murem, neque castorem, neque odorem exprimit; forte sonum, quem edit animal; forte ex Tatarorum, aut Calmuccorum, lingua Russicae illata est.

Gmelinus ex descriptione celeberrimi *Reaumuri* perspiciens, animal Americanum a nostro in quibusdam corporis partibus, tam externis, quam internis, differre, diuersitates has sedulo notauit. Mihi quoque, quod ad mores animalis spectat, varia a *Sarrazino* tradita non congruere visa sunt. Ne autem in hac re improuide versarer, scripsi Orenburgum ad Virum Nobilissimum, bonis litteris exornandis natum, *Petrum Ritschkow*, AUGUSTAE Consiliarium et regundae prouinciae praefectum, ipsique maioris confirmationis gratia cogitationes meas, aliquot quaestionibus comprehensas, exposui, ad quas cum Vir humanissimus

manissimus omnino ex mente mea responderit, non dubito, quae ad vlteriorem historiam animalis faciunt, ad Volgam quidem et Iaicum fluuios cuiuis, sed non aeque alibi, comperta, subiicere.

Mus moschiferus fluuios quidem minores et lacus, qui cum fluuiis cohaerent, intrat: nunquam autem reperitur in paludibus, aut stagnis, a fluuiorum commercio remotis. Excipienda stagna, quae tempore verno aquas ex fluuiis extra ripas diffluentes recipiunt, quas subsidentibus vndis reddere nequeunt. In haec quandoque mures moschiferi, cursum aquarum sequentes, transferuntur. Quod dum fit, et dum stagna multum aquae per euaporationem aestiuam, in calidis istis regionibus valde grandem, amittunt, id quod in stagnis aquae restat, odorem moschi a muribus contrahere dicitur. Nunquam procul a ripa exspatiantur. Gressu incedunt lento. Latebras, vt Castores, in riparum praeruptis sibi excauant, quarum ostium infra horizontem depressissimarum aquarum est, et ea interior conditio, vt, dum aquae increscunt, per gradus, quasi per tabulata, loca ab exundatione libera petere possint. In his pariunt, in his pullos educant. Exeunt, quando libet, omni anni tempore, per ostium, quod descripsi, sub aqua latens. Nullum enim aliud istae cauernae habent, et superne nulla illarum indicia adparent. Vescuntur plurimam partem piscibus, raro radicibus herbarum. Calamum aromaticum potiorem illorum cibum esse dubitatur. Sunt enim loca, vbi mures moschiferi copiose degunt, vbi tamen calami aromatici nec vola, nec vestigium, obseruatur. Tantum

ab-

abeſt, vt, quod *Sarrazinus* autumauit, odor moſchicus ex hoc victu oriatur. Falſum quoque, illos ſub terra, talparum more, cuniculos agere. Neque opus eſt cuniculis, cum non ex radicibus viuant, ſed ex piſcibus, quorum capturae vnice dediti ſunt, eique omni anni tempore indulgent. Hoc exinde patet, quia vna cum piſcibus ſemper fere in retia piſcatorum et in alia inſtrumenta piſcaturae inſeruientia incidunt; ſicut viciſſim ipſi a piſcibus maioribus deglutiuntur, vt in Siluris et Luciis, ad Silurorum magnitudinem quandoque excreſcentibus, ſaepius obſeruatum eſt. Cum in ſicco raro reperiantur, modus alius capiendi illos, praeter piſcaturam, non eſt. Praeter pellem et caudam nihil, quod in vſum cedat. Caro neque a Tataris, neque a Calmuccis, omnis generis fercula indiſtincte caeterum appetentibus, comeditur. Imo Lucius, poſtquam murem moſchiferum deglutiit, abiicitur, ob difficilem odorem, ipſi ab hac eſca communicatum. Fragrantiſſimus odor in cauda reſidet, quam ideo piſcatorum non nulli ſolam reſecant, et pellem ob laborem, illam detrahendi, minus curant. Vtraque, et pellis et cauda, blattas odore ſuo fugare dicitur. Hinc eſt, quod cum veſtimentis communiter reponuntur in ciſtis, et a pellionibus aliorum animalium pellibus adpenduntur. Sunt, qui fruſtula pellis fimbriis veſtium intexunt, vt ab aeris peſtilentia et a febribus tuti maneant. Orenburgi pelles duabus copecis et caudarum centum 15 aut 20 copecis venduntur.

Hactenus notitiae a *Ritſchkovio* V. Ampliſſ. ſuppeditatae, ex quibus abunde patet, notabilem eſſe morum diuerſitatem

inter

inter animal Americanum et noſtrum, niſi quis ſuspicari velit, quaedam falſa *Sarrazino* impacta fuiſſe ab aliis, aut minus recte ab ipſo intellecta, quae forſitan nec in ipſa Canada fidem merentur.

Amatores rerum naturalium procul dubio deſiderabunt iconem animalis. Quoniam illa ſub auſpiciis *Gmelini* ad mortui exemplum accurate adumbrari non potuit, curabit Academia, vt in poſterum in loco natali ad viuum delineetur. An icon a *Sarrazino* et *Reaumuro* exhibita animal, vti vere eſt, ſiſtat, alii iudicent, qui figuram cum deſcriptione conferre voluerint.

III.

Rupicapra cornibus arietinis. Ruſſ. степной баранъ. Calmuc. Argali. Auctore *Io. Geo. Gmelin* p. 383.

Mandata Imperatoria multoties in Sibiriam miſſa et annis 1732. et 1733. renouata, de animalibus rarioribus, quae in Ruſſia non habitant, viuis capiendis, et Petropolin tranſportandis, hanc *Gmelino* occaſionem ſubminiſtrarunt, vt animal, cuius nullum adhuc in auctoribus Hiſtoriam naturalem illuſtrantibus veſtigium exſtat, *Rupicapram* nempe *cornibus arietinis*, viuum videre, deſcribere, diſſecare, et delineationem eius curare, ipſi licuerit. Arx eſt *Uſt-Kamenogorskaia* ad *Irtiſch* fluuium eo in loco, vbi hic fluuius ex montium iugo, Tataro-

Tatarorum, Calmuccorum et Mongolenſium lingua *Altai* dicto, egreditur, ſita. Quo cum *Gmelinus* aeſtate 1734 proficiſceretur, accidit, vt tria huius generis animalia in foueas, pro capiendis ceruis, ibi locorum *Maral* dictis, effoſſas, paucis ante aduentum eius diebus, inciderint. *Cerui* ſaepiuscule Petropolin inde viui miſſi, non quod ab aliis ceruis ſpecie differunt, ſed quia in viuario Imperatorio, quod mirifice exornant, commode aluntur. Nam nomen *Maral*, quod Calmuccicum eſt, nihil aliud, quam Ceruum communem, denotat. Neque etiam cerui, ad Ieniſeam fluuium *Sin*, et ad lacum Baical *Iſubr* dicti, alius ſpeciei ſunt, etiamſi *Strahlenbergius* (*) Iſubr pro *Dama* habeat, quod quam falſum ſit, exinde patet, quia nemo eſt, qui dicere poſſit, ſe per totum Imperium Ruſſicum, viuariis exceptis, vsquam Damas vidiſſe. Ex Rupicapris in arcem *Uſt-Kamenogorenſem* allatis vna, aduentante *Gmelino*, cum morte luctabatur. Hanc facili negotio ad diſſecandam obtinuit. Reliquas duas ad viuum deſcripſit et delineari iuſſit. Vtrum Petropolin perlatae ſint dubito. Ferociſſimum namque animal eſt, omnem obedientiam refugiens, et, ſi ciſtae vehiculo imponendae includitur, vehementiſſima agitatione et inedia mortem ſibi contrahit. Habitat non modo ad Irtiſch fluuium, ſed per vniuerſam Sibiriam, qua montibus obſita eſt. Frequenter in confiniis Sinicis verſatur, imo ad littora vsque Oceani Orientalis excurrit. Inacceſſas plerumque rupes inhabitare amat, a montium iugis in camporum planities deſcendit, mox amata ſibi loca

(*) p. 371.

loca repetit. Russica igitur lingua rectius *Kamennoi*, quam *Stepnoi Baran* dicendum esset, quod etiam in locis, vbi perpetuis solum rupibus scatet, nullique campi montes inter iacent, ad Olecmam, inquam, ad Aldanum, Maiam, Iudomam, Ochotam et Udum fluuios, ita vsu venire audiui, cum posterius nomen non nisi ad Irtisch, Obum et Ieniseiam fluuios obtineat. *Argali*, vel, si mauis, *Archali*, Mongolorum ac Calmuccorum vocabulum est, a Tungusis etiam, qui territorium vrbis *Nertschinsk* incolunt, assumptum. Si dicas *Strahlenbergium* (*) Argali ceruis annumerare, hoc nihil est; per *hircum ferum* (einen wilden Bock) interpretatur, et in aliis quoque animalibus genus caprinum cum ceruino negligenter confundit. Confusio autem nusquam hoc loco facilior, quia re vera animal tam a ceruo, quam a capra multum participat, vt ex descriptione patet. Non praetermittendum puto, quod et *Messerschmidius* Vir Cl. qui ab anno 1719 ad annum vsque 1727, eodem, quo *Gmelinus*, studio, maximam Sibiriae partem perlustrauit, in schedis suis eiusdem huius animalis sub die XI. Iulii 1724 mentionem facit. Ex Hodegetico eius video, illum tunc in vico *Galkina* ad *Ingodam* fluuium sub stitisse. Ibi ergo animal vidit, delineauit, et exuuias, tam maris, quam foeminae, parauit, quas Petropolin ad Cancellariam Medicam misit. Quid de exuuiis factum sit ignoro. Delineationes supersunt, quibus cum *Gmelinianis* nostris, quod ad habitum corporis attinet, sic satis conuenit, magnitudinem tantum animalis iusto maiorem, et ceruo adulto fere aequalem raepresentare videntur

(*) l. c.

dentur. Extat quoque in Xenio Iſidis Sibiricae, a *Meſſerſchmidio* poſt reditum ſuum ex Sibiria Academiae oblato, aliqualis Rupicaprae deſcriptio, quam hic adiungere non incongruum putamus. „*Archali* Mas, ſiç ille, *Chol-*
„ *za* Mongolis in Dauria, Indis cis Gangem *Dſhaen-*
„ *gaeli Bheda*, *Acriodorcas*, *Pygargus rupeſtris*, viſu exi-
„ mie pollens, cornibus arietinis mole ſtupendis, habitu
„ ſtatura et pelle cerui, clunibus et cauda capri, albidis,
„ biſulca, ruminans. An *Pygargus* Plinii, Aldrouandi et
„ Ionſtoni? An Ebraeorum *Dyſchon* Deut. XIV. 5? „
Ita *Meſſerſchmidius*, qui vocem *Archali* alio loco et *Argali* ſcribit, pronunciationis in Sibiria vulgatae memor, qua plerumque aſperiores Mongolenſium et Tatarorum ſoni mitius efferuntur. Ex nomine Indico concludendum, animal etiam in India reperiri. Amauit *Meſſerſchmidius* nomina rerum exotica conquirere, eaque, quantum potuit, vbique ſuis locis adſcripſit. Hunc in finem conciliauerat ſibi ſacrificulum Indicum, tunc temporis inter Tunguſos Nertſchienſes degentem, vt, quoad in regionibus trans-baicalenſibus verſaretur, ſecum iret, rerumque omnium nomina Indica et Tangutica ſibi diceret. Ab hoc quoque ſacrificulo Tangutice et Brahmanice ſcribere edoctus eſt, vnde nomina iſta ipſismet earum gentium litteris in Xenio eius ſcripta reperimus. Nomen *Acriodorcae* ob cornua arietina *Meſſerſchmidio* placuiſſe videtur, vt *Pygargi* ob caudae cluniumque colorem, quem tamen *Gmelinus* non albidum, ſed luteſcentem, deſcribit. Tam verum eſt, colorem pilorum, vt qui multum in feris variat, et pro diuerſis anni temporibus ſaepius mutatur, niſi variatio totum animal

mal et conſtanter ; vt in Lepore et Lagopode , occupet , pro nota characteriſtica habendum non eſſe. De excellentia viſus nihil apud *Gmelinum* , quia forſitan venatores hac de re interrogare oblitus eſt. Supplenda itaque haec qualitas ex *Meſſerſchmidio*. Caeterum multa egregia *Gmelino* obſeruata , de quibus ex conſulto tacemus, ne duplicem lectori operam cauſſemur. Speciminis gratia ſit obſeruatio de aeſtu ſanguinis in moribundo animali thermometro explorato , et altera de ſtupenda cornuum mole , qua, reſpectu ad corpus habito , vix maiorem dari confitendum eſt. Vt ille ſummam animalis agilitatem pernicitatemque curſus , ita haec vires , quibus omnino maximis pollet , comprobare videntur. Gradus in Thermometro Delisliano 80 efficiunt in Fahrenheitiano 118 , in Reaumuriano 37 $\frac{1}{2}$. Aſt dubitare licet , vtrum hic tantus calor ſanguinis non potius ſtatui animalis morboſo adſcribi debeat. Res clarior euadet , ſi plures hanc in rem obſeruationes cum animalibus aut tarditate , aut velocitate , eximiis inſtituentur. De cornibus recte monet *Gmelinus* , dari in adultis animalibus maiora , quam quae icon repraeſentat ; addo et magis incuruata. Aſſeruantur hic Petropoli in Muſeo Imperatorio , quae pondus 30 librarum aequant , imo ſuperant.

Caeterum reperitur inter obſeruationes Gmelini manu ſcriptas additamentum aliquod ad deſcriptionem Rupicaprae , quod , cum deſcriptio typis excuderetur , curam noſtram effugit , ideoque illud hoc loco addere placet. Ita ille :

Plinius Hiſt. Nat. Lib. VIII. Cap. XLIX. haec habet: Eſt et in Hiſpania, ſed maxime Corſica, non maxime abſimile pecori, genus Muſmonum, (Muſmonium, aut Muſimonum) caprino villo, quam pecoris velleri, propius. Infirmiſſimum pecori caput etc. *Idem* Libro XXVIII. Cap. IX. ſub finem: Inuenio apud Auctores Graecos animal ceruo minus, et pilo demum ſimile, quod Ophion vocatur. Sardiniam id tantum ferre ſolitam. *Idem* Libr. XXX. Cap. XV. ſub finem: In eadem prouincia (Sardinia) eſt Ophion ceruis tantum pilo ſimilis, nec alibi naſcens. *Geſnerus* autem monſtrat, Muſimon animal cum Ophio idem eſſe, effigiemque Muſimonis a *Theod-Beza* ſecum communicatam exhibet, quae cum Rupicapra cornibus arietinis, a me deſcripta, ſi totam animalis habitum, aut cornuum faciem externam ſpectes, tantum conuenit, vt dubitare non liceat, quin idem ſit animal. Hic quidem Geſnerianae effigiei defectus eſt, vt cornuum ſitum male exprimat, quae magis ad latera, quam in ſuperiori capitis parte, ex rei natura, collocari debuiſſent. Verum tota effigies ita comparata eſt, vt ad naturam haud factam eſſe ſuſpicari liceat. Adde *Geſneri* tempore opus effigies vel animalium, vel plantarum, e deſcriptionibus adornandi, impune exerceri potuiſſe. Alium vero me adhuc caſum ſubolere mihi videor. Effigiei Geſnerianae et magnitudine et habitu cum animalium figuris ex aurichalco fuſis, quae in tumulis ſepulchralibus Saianenſis regionis ad Ieniſeam fluuium reperta ſunt, eximie conuenit. De his vero animalibus dubium non eſt, quin Rupicapram cornibus arietinis exprimant. An non igitur effigies Geſneriana ad ſimile aliquod idolum, ab antiquitate

tate reliquum, delineata esse potuit? Adeoque, dummodo haec effigies Musimonem veterum, aut, quod idem est, Ophion Plinii exprimat, certissimum est, Rupicapram cornibus arietinis esse Musimonem veterum. Expimere autem Musimonem vero est admodum simile, quando quidem *Plinius* patriam Musimonis Sardiniam esse indicat. *Gesnerus* enim a Sardo quodam, viro non illiterato, sibi affirmatum fuisse scribit, Sardiniam alere animal quoddam, quod *Muflonem* vulgo vocent, quod nusquam alibi in Europa reperiatur, pelle et pilis ceruo simile, cornibus Arieti, non longis, sed retro circa aures reflexis, magnitudine mediocris cerui, herbis tantum viuens, in montibus asperioribus degens, cursu velocissimo. Quid distinctius dici potest, si quis animalis descriptionem inter familiares discursus facit? Adeo verum est, quod *Gesnerus* et *Raius*, e cuius Synopsi Quadrupedum ista Gesneriana hausi, nobili in creatorem rerum amore contra *Plinium*, qui L. XXVIII. C. IX. Ophion interiisse arbitratur, propugnarunt, naturam rerum genera et species omnes animalium sedulo semper conseruare. *Tragelaphus Bellonii* multum a Musimone differt, non perparum, vti *Gesnerus* ex effigie tantum sua doctus sentit, quod descriptiones *Bellonii* et meam conferenti patebit Cum Musimon in montosis Schilcae fluuii, in primis in iugo montium, *Stanowoi Chrebet* dicto, et in montosis superioris Ononis fl. regionis, etiam versetur, quibus in locis tam a Russis, quam a Mongolis et Tungusis Argali nomine salutatur, Cl. *Messerschmidio* illius videndi copia facta est, deditque Vir Cl. tres eius effigies, satis rudes, quarum vna masculum a latere, altera eundem

dem ab anteriori parte ſpectatum, tertia foemellam exhibet. Nomen effigiebus adſcripſit: Argali Dauuriae Acriodorcas, Pygargus Ionſt. rupeſtris. Ein Weiß-Arß. Ex *Ionſtoni* quidem deſcriptione Pygargi, cuius illa ſit animalis, vel oculatiſſimnm quemque eruere non poſſe, confido. Verba *Ionſtoni* haec ſunt: Placet et Pygargi *Aldrouandi* verbis agere. Pygargon, (verba eius ſunt) *Plinius*, in praecitatis verbis etc. p. 304. vſque ad finem frequenter ſyluoſa et deſerta frequentans loca. Ipſe igitur *Ionſtonus*, plagiator alias peſſimus, et alienorum corraſor, Pygargon Aldrouandi vocat, alium vero, quod ſciam, non deſcribit. Vt vt haec ſint, quoniam *Ionſtonus* pleraque *Aldrouandi* verba omittit, ſola indicatione paginae contentus, e deſcriptione eius id vnicum perſpicitur, de animali, loca ſiluoſa et deſerta frequentante, ſermonem eſſe. Atqui Muſimon Vett. aut Argali *Meſſerſchmidii* et Mongolorum, ſiluoſis locis non delectatur. Solo igitur nomine Vir Cl. ſeductus fuiſſe videtur, quod clunibus albis Muſimonis, quas forte autumni tempore conſpexerat, apprime conuenire ſibi perſuadebat. Non debuiſſet vero Virum Cl. latere, non Muſimonem tantum, ſed et Ceruum, Animal moſchiferum, Capream Plinii, Capream campeſtrem gutturoſam, Ibicem imberbem et alia huius generis animalia hiſce in regionibus pilos appropinquante autumno mutare, hacque mutatione album clunibus colorem induci non niſi aeſtatis tempore euaneſcentem. Haec *Gmelinus*.

IV.

IV.

Descriptio Animalis Moschiferi, Russice Kabarga dicti.

Auctore *Io. Geo. Gmelin* p. 393.

Quae de Animali moschifero auctoribus historiam naturalem tractantibus innotuerunt, sola fere peregrinantium fide niti in confesso est. Ast horum nemo data opera in id incubuit, vt accuratam et pleniorem de hoc animali notitiam adquireret, cum eruditis communicandam. Pro vulgo scripsisse videntur, quosuis incertos rumores in tabulas referentes, indocti plerumque, et ad ea parum attenti, quae potissimum respicere debuissent. Hinc tanta opinionum diuersitas, tam falsa multa prodita, tam manca, tam incerta omnia, vt Oedipo opus sit, veritatem diuinare, eamque, nisi ocularis inspectio animalis accedat, ab errorum sordibus repurgatam in lucem producere. Quid ineptius, quam quod alii animal moschiferum magnitudine ceruum, alii leporem, aut catum aemulari fabulati sunt? Hi postremi cum Cato zibethico illud confudisse videntur. Alii cornua illi affinxerunt, quae, vt vt falsissima opinio, et a multis aliis reprobata, tam altas egit radices, vt *Kleinius* Vir Cel. sententias diuersas conciliare cupiens, (Quadrup. p. 18.) *Moschorum alios cornutos*, *alios excornes* esse statuerit. Alii dentes exsertos, qui in superiori maxilla sunt, quasi in hoc illi cum apro conueniret, in inferiorem collocarunt. Alii lupinam faciem animali tribuerunt, alii rostrum porcinum. Pellem alii candidam, alii nigram descripserunt.

Aliis bisulcum animal est, aliis quadrisulcum. Alii maximam velocitatem animali adscribunt, alii valde tardum esse perhibent, et tam stolidum, vt ipsum se venatoribus confodiendum praebeat. Et quae non de situ *folliculi moschici* diuersae sententiae? quem alii ad vmbilicum, alii testiculorum loco, imo ad genua alii posuerunt. Non memini, vllum peregrinantium de se scripsisse, quod ipse animal moschiferum suis oculis viderit, multo minus, quod prope contemplatus sit, quod dissecauerit. Animal viuum nunquam in Europam allatum, pelles autem quandoque, ad quas descriptiones et figurae animalis efformatae, aut correctae, sunt a cautioribus. Ast quantum non perdit animal, si figura eius ad pellem exsiccatam, ad exuuias infarctas, exprimitur? Descriptio nihil continere potest, nisi quod ex pelle cognoscitur. Vtilissimam igitur operam nauasse meritissimus *Gmelinus* censendus est, quod, cum natale solum huius animalis attingeret, mox curauit, vt quaedam animalia occisa, tam mares, quam foeminae, sibi ad describendum et dissecandum exhiberentur. Descriptionem ita adornauit, ac si animal prorsus nouum, pro quo et haberi poterat, sibi obtigisset. Praeterea exuuias et sceleton parauit, quae in Museo Imperatorio adhuc conspiciuntur. Laudandus *Tavernerius*, qui folliculum Moschicum propius ad penem, quam ad vmbilicum, extare retulit. Sed ex aliorum relatione loquutus est. Inde forsitan factum, quod recentiores historiae animalium scriptores testimonium eius neglexerunt. *Messerschmidius* V. Cl. *Gmelini* in perlustranda Sibiria antecessor, potuisset sane dicere, quid rei sit, si marem moschicum videre et examinare ipsi licuisset.

At

At foeminam tantum vidit, cuius exuuias Petropolin misit, vt ex ipsius schedis colligitur. Hinc communi errore abreptus, et nihil aduersi suspicans, folliculum cum vulgo pro vmbilicali habuit, et duobus locis *vmbilicalem* nominauit. Nemini, nisi *Gmelino*, fortuna fauit, verum situm folliculi perspiciendi et in apricum producendi. Quid hic praestiterit accuratissimus Auctor, quam sedulo partes genitales maris aeque ac foeminae inuestigauerit atque descripserit, ipsa eius descriptio loquitur. Vnum idemque animal esse, quod sub *Moschi*, seu *Moschiferi*, nomine in Sinis et in regno Tangut, in terris Mongolensibus et in Sibiria reperitur, nemo dubitet. Differt tantum nostrum a Sinico crassioribus pilis et Moschi odore minus fragrante, sicut vicissim Sinicus Moschus a Tibetico, si auctoribus fides, fragrantiore odore superatur. Huiusmodi varietas a diuersa qualitate soli et climatis provenire potest. Attamen nec hoc negandum, Sinas Moschum saepius adulterare, a qua fraude gens Tibetica abstinet. Non abs re erit, varia nomina addere, quibus animal moschiferum in Sibiria salutatur. *Kabarga* Russicum est, sed a Tataris desumtum, qui tamen litteram nominis initialem ita efferunt, vt magis T quam K, audire tibi persuadeas. *Isbrandus* animal *Kabarda* et folliculum *Kabardin* adpellauit, vtrumque falso. Folliculus *Kair* vocatur Tataris, vnde Russis olim *Kairi Kabarginnie* dicti, pro quo nunc *Kabarginnie struia* obtinet, sicut *Bobrowie struia* Castoreum denotant. Sunt gentes ad *Manam* et *Vpsam* fluuios, Ieniseae vadas miscentes, *Camaschincii* et *Taiginzii* dictae. Illis Moschiferum animal *Südö*, his *Togorgo* audit. Ostiaccis ad Ieniseam est

Böſſ. Tunguſis ad Tunguſcam *Tſchanja*, vel *Dſanja*, ad Lenam *Dſeia*, et mas ſeorſim *Möktſchan*, ſeu *Miktſchan*. Iakuti vocant *Daadang*, Mongolenſes, Buraeti et Tunguſi vrbi Nertſchinsk ſubiecti *Küderi* et *Kuderö*, quam vocem *M. Paulus Venetus* (L. II. C. 38) per *Gadderi*, vel, vt in codice Berolinenſi legitur, per *Gudderi* expreſſit. Tunguſicum *Dſeia* imitantes Ruſſi ad Lenam fluuium animal noſtrum *Seiga*, vel *Saiga*, vocant. Eſt autem aliud praeter hoc animal, ſub nomine *Saiga* in citeriori Sibiria ad Irtin, Tobolem et Iaicum fluuios notum, quod cum ad Tanain quoque et ad Boryſthenem habitet, a Coſaccis, mutuato a Tataris Crimenſibus vocabulo, *Suhac* dicitur. Hoc obſeruandum, ne fabulae *Stellero* impactae aſſenſum tribuamus, dum Nouor. Comm. Tomo II. p. 293 animal *Suhac* capream *monocerotem* eſſe perhibuit, quod valde rident Coſacci, animalis *Suhac* probe gnari, at nullius conſcii *monocerotis*. Monſtraui ipſis cornua *Saigae* ex Sibiria allata, et mox omnes eadem animali *Suhac* cornua eſſe profeſſi ſunt. Superſedeo de hoc animali plura dicere, quia deſcriptionem eius a *Gmelino*, qui nomen *Ibicis imberbis* illi indidit, confectam in poſterum dabimus. Non fruſtra *Gmelinus* in Praef. Florae Sibir. Tom I. p. XLIII et XLIV. Sibiriam, ob inſignem in prouentibus naturae diuerſitatem, cis et trans Ieniſeam fluuium notabilem, in duas partes diſterminauit. Animal moſchiferum non niſi Sibiriam vlteriorem inhabitat, cis Ieniſeam fluuium nusquam conſpicitur. Si dixero, reperiri quandoque et ad Vdum fluuium, Oceanum orientalem intrantem, intelligitur, in iſto terrarum tractu vbicunque eſſe. Non autem eadem vbique copia eſt, quia non vbique inuenitur pabulum naturae ipſius conueniens.

Veſci-

Vefcitur enim mufco, fiue lichene, vt Tarandus, et in primis illo delectatur, qui abietibus adnafcitur, vnde raro exftat in filuis, quae abietibus carent. Dicunt etiam radicibus Lilii purpurei, Ruffis *Sarana* dictis, aliarumque herbarum pafci, quas dentibus fuis exfertis e terra effodit. Loca amat, vt valde timidum eft, a focietate hominum remotiora, filuas, montium iuga et campos defertos, hinc inde filuis diftinctos. Habitacula, in quibus per hiemem commoretur, nulla obferuata. Sub diu requiem capiens dormit in niue, nihil virgultorum fibi fubfternens. Autumno coeunt, vere pariunt, vnicum edunt partum. Recens natorum vocem fiftula imitantur venatores, vt matres alliciant, quas tunc globulis traiicivnt. Alias etiam retibus animalia capiuntur, imo canibus. Incidunt quoque in foueas, pro alcibus capiendis effoffas. Si viua capiuntur, inedia pereunt. Neque hinnuli victui ab hominibus dato affuefcunt. *Gmelinus* ad Lenam fluuium fubfiftens omnem lapidem mouit, vt iuniora animalia caperentur, quae manfuefacere fperauit. Capta funt, fed antequam adportarentur, (procul enim erat) interierunt. De folliculis notandum, illos in iunioribus animalibus vix confpicuos effe. Maturitatem adquirunt, cum animal tertium, aut quartum, aetatis annum attingit, poftmodum minuuntur iterum, et in aetate confectis prorfus pereunt. Non nulli auctores tempore plenilunii, aut cum animal coitum appetit, folliculum turgefcere perhibent; dicunt ab aeftu venereo folliculum rumpi, et effluere liquorem Mofchi fuaui odore aera replentem; imo animal venere percitum, aut a venatoribus agitatum, liquorem mofchicum ad arbores et rupes exprimere. Haec vel commenta ſunt, vel relationibus dubiis adſcribenda. In Sibiria nemo eſt, qui talia ſe obſeruaſſe dicat. Reſtat, vt quaedam de iconibus animalis moſchiferi, apud auctores, qui de illo egerunt, exſtantibus, moneamus. *Gmelinus* in icone Isbrandiana nimiam ventri prominentiam, et quod ſine pilis repraeſentetur, taxat. E contrario icon *Tauernerii* corpus animalis nimis villoſum, pedes nimis nudos ſiſtit, caudam animali tribuit, qua caret, folliculum etiam iuſto grandiorem repraeſentat. *Renaudotius* in annotationibus ad antiqua de Indis et Sinis itineraria Arabica p. 217. reprehendit *Tauernerium* et *Theuenotium*, eandem iconem reiterantem, quod animal non cornutum, et dentes exſertos non ſurſum incuruatos, depinxerint. Sed quam hoc fruſtra fecerit, ex deſcriptione *Gmeliniana* et ex ſupradictis adparet. In iconibus à *Neuhofio* et *Kirchero* ſuppeditatis roſtrum porcinum et pedes digitati cenſuram merentur. *Martini Martinii* icon in Atl. Sin. Tab. Xenſi totum habitum corporis animalis difformat, dum gibboſum ſiſtit, et capite ad terram ſegniter inclinato, quod capreoli inſtar, habitu corporis agilitate conſpicui, pingi debuiſſet. *Segeri*, vel potius *Breynii*, icon in Eph. N. C. a. 1675 in eo peccat, quod caput ad inſtar lupi famelici praedae inhiantis effingit. Icon *Schroeckii* in hiſtoria Moſchi, cum qua etiam illa *Valentini* in Muſeo Muſ. concordat, collum nimis protenſum et pedes reſpectu corporis iuſto longiores ſiſtit, manifeſto indicio, quod et a *Schroeckio* non negatur, figuram ad exuuias infarctas adumbratam eſſe. Quid hinc oriri poteſt aliud, quam vt etiam deſcriptiones ad tales figuras efformatae peccent, inter quas vnam Cel.

Kleinii

Kleinii Quadrup. p. 18. diligentiſſimi alias naturae obſeruatoris, memorare lubet, collum protenſum, ſicut eſt in icone Schroeckiana, pro naturali animalis qualitate habentis. Taceo icones *Geſneri*, *Calceolarii*, *Boymii*, quorum errores iam ab aliis indicati ſunt. Ad folliculorum icones quod attinet, minus erratum eſt, quia ipſi folliculi in Europam haud difficulter tranſportari potuerunt. Alii tenuiſſimis pilis obſiti, aut ſere depiles, alii pilis craſſioribus et longioribus tecti, cernuntur. Et vtrumque recte. Haec etenim differentia eſt inter folliculos moſchicos, ex Tibeto et Sinis prouenientes, et illos, qui in Sibiria naſcuntur. Hac dignoſci poſſunt, etiam abſque tentaminibus, odorem plus minus fragrantem indicantibus.

V.

Obſeruationes quaedam nidos et oua auium concernentes.

Auctore *Geo. Wilh. Steller.* p. 411.

Si poſt *Ioſephi Proſperis Zinanni* Comitis de ouis et nidis auium commentationem Venetiis 1737. editam haec b. *Stelleri* noſtri tractatio cuiquam videbitur ſuperflua: apologiam quidem plenariam pro ea afferre nunc non poſſumus, quoniam librum Zinannianum ipſis videre nobis nondum licuit. At certo conſcii, *Stellerum*, dum haec ſcriberet, omnino nullam auctoris Itali eiuſque obſeruationum notitiam habuiſſe; vt qui in vno mundi angulo ſcripſit, paulo poſt quam *Zinanni* liber in altero prodiit: confidimus fore, vt aequioris iudicii viri differtationem

tionem hanc non indignam iudicaturi ſint, quae reliquis auctoris ſcriptis in his Commentariis exſtantibus iungatur. Saltem, quae inter vtrumque auctorem ingeniorum paritas, aut diſparitas, fuerit, inde liqueſcet; aut vnius obſeruationes obſeruationibus alterius magis confirmabuntur; et, quod ob locorum diſtantiam rarasque in terris Kamtſchaticis obſeruatas aues, probabile eſt, non nulla reperientur, noſtro auctori propria, et hiſtoriae auium alicui ornamento futura. Primum auctor in eo verſatur, vt ſententiam illorum refellat, qui ex nidis et ouis auium methodum ornithologicam confici poſſe putauerunt, dein obſeruationes generales de nidorum et ouorum diuerſitate affert, et tandem ad ipſam rem pertractandam ſe accingit, qua ſingula oua diuerſarum auium a ſe viſa ſecundum magnitudinem, colores et maculas ipſis inhaerentes deſcribit, et XXIX. oua in IV Tabulis depicta curioſo harum rerum lectori offert. Quod ad tractationem ipſam attinet, monendum ducimus, has obſeruationes in itinere confectas eſſe, ne quis maiora ſibi hic reperturum eſſe, polliceatur, quam re ipſa offendet. Deniqne obſeruatiunculam de nomine incolarum ad *Kamtſchatka* et *Bolſehaia reka* fluuios habitantium adiiciemus, ab hoc loco non prorſus alienam. Quos namque *Kamtſchedalos* vulgari nomine ſalutamus, hos *Stellerus*, tam in hoc ſcripto, quam in praecedentibus ſuis, *Itaelmenos* vocare aſſolet. Quare hoc? Quia Gens iſta, terris Kamtſchaticis indigena, ipſa ſemet hoc nomine adpellat. Nullum dubium eſt, ſi primi Ruſſi, qui de Kamtſchedalis notitiam perhibuerunt, *Itaelmenorum* vocabulo ad eos deſignandos vſi fuiſſent, illud, tanquam genti iſti proprium, magis quam alienum, promerimeriturum fuisse, vt ab omnibus vsurparetur. Sed alia quaestio est, num *Kamtschedalorum* nomen, omnibus vsu receptum, nulla vrgente necessitate, reiiciendum, et ignotum nouum addiscendum sit? Pleraeque gentes in Sibiria gentilia alia nomina profitentur, quam Russi ipsis tribuere solent. Haec ergo pari modo immutanda essent. Ast quae non inde oriretur confusio? Mittamus ergo *Itaelmenos*, et, vt melius intelligamur, loquamur, si occasio feret, de *Kamtschedalis*.

VI.

Obseruationes Meteorologicae annorum cIↃCCXLIV - - cIↃCCXLVII cum animaduersionibus et consectariis. Auctore *Ios. Ad. Braunio* p. 429.

Solemne esse Academiae, obseruationes meteorologicas instituere, institutas inter se conferre, collatas consectariis illustrare, illustratas luci publicae exponere, ex veteribus Commentariis cuiuis abunde liquet. Ast vltimae obseruationes, in Tomo XIV Vet. Comm. typis exscriptae, finiunt exeunte anno 1743, qui vltimus est, quo *Krafftius* V. Cl. hoc labore vacauit, et etiamsi post huius abitum non defuerint, qui obseruationes continuarent, nemo tamen curam publicationis in se susceperit, antequam *Braunius* V. Cl. qui et ipse ab a. 1751. aeris et tempestatum mutationes sedulo annotauit, huic labori se accingeret. Communicatae cum illo ex tabulario acade-

 mico

mico praecedentium annorum obſeruationes in ſpecula Aſtronomica inſtitutae. Harum quatuor priores annos hic exhibet, ſequentes, excepto vno, qui, neſcio quo caſu, deeſt, ſequenti Commentariorum volumini reſeruat.

ASTRONOMICA.

I.

Methodus inueſtigandi Parallaxin Lunae et Planetarum Eclipſibus ſtellarum fixarum a Luna et Planetis innixa. Auctore *A. N. Griſchow*. p. 451.

Ex quo Academia Scientiarum Pariſienſis Virum Cl. *De la Caille*, vt ſiderum ſcientiam per Parallaxes corporum coeleſtium accuratius indagandas perficeret, ad Bonae ſpei promontorium ablegauit, noſtraque Academia *Griſchouium* V. Cl. in Oeſiliam Inſulam, ſub eodem fere meridiano cum Bonae ſpei promontorio iacentem, ire iuſſit, vt obſeruationes iis, quas *De la Caille* fecerit, correſpondentes inſtitueret, non tantum ſpartam ſuam, ob quam miſſus erat, gnauiter *Griſchouius* expleuit, ſed etiam doctrinam ipſam de Parallaxi Lunae obſeruanda

noua

nouam methodo, Eclipſibus fixarum a Luna innixa, auctiorem reddere ſtuduit. Res in eo verſatur: Eclipſes fixarum a Luna non niſi ad differentias longitudinum terreſtrium definiendas ab Aſtronomis adhibitae adhuc fuerunt; ſucceſſu quidem optimo: nam certiorem longe hanc viam eſſe, quam qua alii per Eclipſes Satellitum Iouis obſeruandas incedunt, quis neſcit? at non tota vtilitate perpenſa, quae ex his obſeruationibus in Aſtronomiam redundare poteſt. Monſtrat itaque Cl. Auctor, ſicut ſecundum methodum ſimpliciſſimam ad determinandas Parallaxes Planetarum duo obſeruatores in duobus locis ſub eodem fere meridiano ſatis longe diſſitis locati requiruntur: ita eundem finem obtineri poſſe, ſi in locis ſub eodem fere parallelo iacentibus, ſatisque longe ab inuicem diſtantibus, duo obſeruatores, per Eclipſes fixarum a Luna, Parallaxeos lunaris quantitatem ſaepius et in diuerſis orbitae lunaris punctis inueſtigare allaborent. Et hanc quidem methodum Parallaxin Lunae obſeruandi, ob longam locorum intercapedinem ab occidente in orientem in Imperio Ruſſico comprehenſorum, inprimis huic Imperio aptam et conuenientem fore Auctor iudicat, quia, ſi vnus obſeruator in ſpecula Aſtronomica Petropolitana, alter in extrema Peninſulae Kamtſchatkae ora, conſtituatur, differentia meridianorum 125 gradus ſuperatura ſit, ideoque in Ruſſia ſola obſeruationes perfici poſſint. Reſpexiſſe videtur Cl. Auctor ad moleſtias itineris longinqui et valde difficilis Kamtſchatkam verſus ſuſcipiendi, dum ſupellectilem inſtrumentorum ſatis modicam, et quae Geographiae Imperii Ruſſici perficiendae ſimul accommodata ſit, proponit. Optamus tantum, vt obſeruator idoneus reperiatur, qni in tantum tempus, quantum ad obſeruationes iſtas requiritur, in Kamtſchatka ſedem figere non dubitet. Quod niſi fuerit, obſeruationes etiam ex vna parte Londini, aut in ſpecula Aſtronomica Grenuicenſi, ex altera in vrbe Nertſchinsk, vt pote agricultura et re pecuaria pollente, inſtitui poterunt; quia haec duo loca pariter ſub eodem fere parallelo iacent, et non multo minori ſpatio, quam Kamtſchatka a Petropoli, a ſe inuicem diſtant. Imo ſpes eſt Aſtronomos Pekinenſes ex Ieſuitis, ſub eodem fere meridiano cum vrbe Nertſchinsk collocatos, operam ſuam huic rei, ſi rogabuntur, addicere non detrectaturos eſſe. His difficultatibus, quae non niſi externae et accidentales ſunt, neglectis, methodus a Cl. Auctore tradita ingenioſa valde eſt, et pro Parallaxi aliorum quoque Planetarum obſeruanda vtilis, ſicut ſub calcem diſſertationis oſtenditur.

II.

Obſeruatio inſoliti luminis auſtralis Petropoli habita. Auctore *A. N. Griſchow*. p. 474.

A lumine boreali radios quandoque vltra verticem horizontis auſtrum verſus porrigi, plures de hoc meteoro obſeruationes loquuntur. Aſt huius a Cl. *Griſchouio* obſeruati luminis auſtralis alia ratio eſt. Hoc in ipſo horizonte per duas veſperas immotum ſtetit, ſine vlla figurae variatione, tandem, nubecula cinctum, radiatiodiationes, fulgurationibus haud abſimiles, et per totum coelum ſe diffundentes, emiſit, donec coelum vndique nubibus tegeretur, ex iſta, vt adparuit, nubecula prouenientibus. Caeterum nullum iisdem noctibus aurorae borealis veſtigium. Obſeruata autem, cum lumen radios emitteret, ſubitanea venti et temperiei aeris mutatio; quare Cl. Auctor tabulam, trium dierum obſeruationes meteorologicas continentem, adiecit.

III.

Obſeruationes Lipſiae habitae a G. *Heinſio*. p. 477.

Quae ſub hac epigraphe vſque ad calcem huius voluminis occurrunt obſeruationes, titulo tantum tenus indicare ſufficiat. Sunt autem ſequentes:

1) Eclipſes Satellitum Iouis diebus 16 Septembr. 10 Octobris et 24 Decembris anni 1749 ſt. n. obſeruatae.

2) Eclipſis Lunae partialis, quae contigit die 23 Decembr. ſt. n. e. a.

3) Obſeruationes meteorologicae, maximum frigus et calorem maximum, quae a. 1749 Lipſiae fuerunt, indicantes, vbi quoque aurora borealis deſcribitur d. 22. Septbr. e. a. Lipſiae et Romae ſimul viſa.

4) Obſeruatio Eclipſis Solis a. 1750. die 8. Ianuarii ſt. n. habita, quae calculum *Manfredi* in Ephemeridibus 19 fere minutis primis anteuertit.

5) Residuum obseruationum Lipsiensium anni 1750, vbi *a*) Comparatio obseruationis Eclipsis Lunae totalis a. 1750. d. 19 Iunii st. n. Lipsiae habitae, et Commentarior. Nouor. Tomo III. insertae, cum aliis eiusdem Eclipsis obseruationibus, Veronae, Cassellis, Berolini et Goettingae institutis, qua simul differentia meridianorum inter loca ista Lipsiamque eruitur. *b*) Obseruatio occultationis Fixae in Serpentario a Luna. *c*) Obseruationes meteorologicae de maximo frigore et calore maximo e. a. Lipsiae et Berolini obseruatis. *d*.) Aurorarum aliquot borealium descriptiones. *e*.) Obseruatio pro declinatione acus magneticae.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE NVMERIS QVI SVNT AGGREGATA DVORVM QVADRATORVM.

AVCT. L. EVLERO.

§. 1.

Naturam numerorum pluribus modis ſcrutari ſolent Arithmetici, dum eorum originem vel per additionem vel per multiplicationem repraeſentant. Prioris generis ſine dubio ſimpliciſſima eſt compoſitio ex vnitatibus, qua omnes numeri integri per aggregationem vnitatum oriri concipiuntur. Tum numeri quoque ita conſiderari poſſunt, prouti ex additione duorum pluriumue aliorum numerorum integrorum naſcuntur, quo pertinet problema de partitione numerorum, cuius ſolutionem aliquot abhinc annis expoſui, in quo quaeritur, quot variis modis quilibet numerus propoſitus per additionem duorum pluriumue numerorum minorum reſultare poſſit. Hic autem conſtitui eam numerorum compoſitionem perpendere, qua per additionem duorum quadratorum prodeunt; et cum hoc modo non omnes numeri oriantur, quoniam ingens eſt eorum multitudo, qui per additionem duorum quadratorum produci nequeunt, in eorum naturam et proprietates, qui ſunt ſummae duorum quadratorum, hic inquiram. Quarum proprietatum etiamſi

 plerae-

pleraeque iam ſint cognitae, et quaſi per inductionem erutae, tamen firmis demonſtrationibus maximam partem deſtituuntur: quarum veritati cum haud contemnenda pars Analyſeos Diophanteae innitatur, in hac diſſertatione plurium huiusmodi propoſitionum, quae adhuc ſine demonſtrationibus ſunt admiſſae, demonſtrationes adornabo, ſimul vero etiam eas commemorabo, quas mihi quidem etiamnunc demonſtrare non licuit, etiamſi de earum veritate nullo modo dubitare queamus.

§. 2. Primum igitur cum numeri quadrati ſint: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, etc. iſtos numeros qui ex combinatione binorum quadratorum oriuntur, inſpexiſſe iuuabit, quos propterea vsque ad 200 hic apponam:

0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, 52, 53, 58, 61, 64, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100, 101, 104, 106, 109, 113, 116, 117, 121, 122, 125, 128, 130, 136, 137, 144, 145, 146, 148, 149, 153, 157, 160, 162, 164, 169, 170, 173, 178, 180, 181, 185, 193, 194, 169, 197, 200 etc.

Hi nempe omnes ſunt numeri vsque ad 200, qui ex additione duorum quadratorum proueniunt: hosque numeros cum omnibus in infinitum ſequentibus vocabo ſummas duorum quadratorum, quos idcirco in hac formula generali $xx+yy$ comprehendi manifeſtum eſt, dum pro x et y ſucceſſiue omnes numeri integri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. ſubſtituuntur. Qui igitur numeri in his non reperiuntur, ii non ſunt ſummae duorum quadratorum, qui ergo

go ſunt vsque ad 200:
3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 51, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 66, 67, 69, 70, 71, 75, 76, 77, 78, 79, 83, 84, 86, 87, 88, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 99, 102, 103, 105, 107, 108, 110, 111, 112, 114, 115, 118, 119, 120, 123, 124, 126, 127, 129, 131, 132, 133, 134, 135, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 147, 150, 151, 152, 154, 155, 156, 158, 159, 161, 163, 165, 166, 167, 168, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 179, 182, 183, 184, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 195, 198, 199, etc.
Vnde patet ſaltem vsque ad 200 multitudinem numerorum qui non ſunt ſummae duorum quadratorum, maiorem eſſe quam eorum qui ſunt ſummae duorum quadratorum. Ceterum inſpicienti ſtatim patebit neutram iſtorum numerorum ſeriem certa et aſſignabili lege contineri; atque ob hoc ipſum difficilius erit vtriusque indolem inueſtigare.

§. 3. Cum omnis numerus quadratus ſit vel par, hocque caſu per 4 diuiſibilis et in hac forma $4a$ contentus, vel impar, hocque caſu in hac forma $8b+1$ contineatur: omnis numerus ex duobus quadratis compoſitus erit vel 1mo. ſumma duorum quadratorum parium, et ad hanc formam $4a+4b$ pertinebit; eritque ergo per 4 diuiſibilis.

Vel 2do. Summa duorum quadratorum alterius paris alterius imparis, et propterea in huiusmodi forma

 $4a+$

$4a + 8b + 1$ ſeu in hac $4a + 1$ continebitur: vnitate ergo excedet multiplum quaternarii.

Vel 3^{tio}. Summa duorum quadratorum imparium, eritque idcirco huius formae $8a + 1 + 8b + 1$ ſeu in hac $8a + 2$ continebitur. Erit ſcilicet numerus impariter par et binario excedet multiplum octonarii.

Quia ergo omnes numeri impares vel vnitate excedunt multiplum quaternarii ſeu huius ſunt formae $4n + 1$ vel vnitate deficiunt a multiplo quaternarii ſeu huius ſunt formae $4n - 1$; patet nullos numeros impares huius poſterioris formae $4n - 1$ eſſe ſummas duorum quadratorum, ſeu ex ſerie numerorum qui ſunt ſummae duorum quadratorum, excluduntur omnes numeri in hac forma contenti $4n - 1$.

Deinde quia omnes numeri impariter pares vel binario ſuperant multiplum octonarii, vt ſint $8n + 2$, vel binario deficiunt a multiplo octonarii vt ſint $8n - 2$, patet nullos numeros huius poſterioris formae eſſe ſummas duorum quadratorum, ſicque ex ſerie numerorum qui ſunt ſummae duorum quadratorum excluduntur numeri huius formae $8n - 2$.

Interim tamen probe obſeruandum eſt neque omnes numeros in hac forma $4n + 1$, neque in hac $8n + 2$ contentos eſſe ſummas duorum quadratorum. Illius enim formae excluduntur numeri: 21, 33, 57, 69, 77, 93, 105, 129, etc. huius vero iſti: 42, 66, 114, 138, 154, etc. quorum ratio deinceps inueſtigabitur.

§. 4.

§. 4. Interim tamen numeri, qui ſunt ſummae duorum quadratorum ita nexu quodam inter ſe coniunguntur, vt ex vno huius indolis numero infiniti alii eiusdem naturae aſſignari queant. Quod quo facilius perſpiciatur, ſequentia lemmata, quae quidem vulgo ſatis ſunt nota, adiungam.

I. Si numerus p ſit ſumma duorum quadratorum, erunt quoque numeri $4p$, $9p$, $16p$ et generatim nnp ſummae duorum quadratorum.

Cum enim ſit $p = aa + bb$, erit $4p = 4aa + 4bb$; $9p = 9aa + 9bb$: $16p = 16aa + 16bb$ et $nnp = nnaa + nnbb$, quae formulae ſunt pariter ſummae duorum quadratorum.

II. Si numerus p ſit ſumma duorum quadratorum, erit quoque $2p$, et generatim $2nnp$ ſumma duorum quadratorum.

Sit enim $p = aa + bb$ erit $2p = 2aa + 2bb$. Sed eſt $2aa + 2bb = (a+b)^2 + (a-b)^2$, vnde erit $2p = (a+b)^2 + (a-b)^2$, ac propterea ſumma duorum quadratorum. Hinc vero porro erit $2nnp = nn(a+b)^2 + nn(a-b)^2$.

III. Si numerus par $2p$ fuerit ſumma duorum quadratorum, erit etiam eius ſemiſſis p ſumma duorum quadratorum.

Sit enim $2p = aa + bb$, erit numerorum a et b vterque vel par, vel impar: vnde vtroque caſu erit tam $\frac{a+b}{2}$ quam $\frac{a-b}{2}$ numerus integer. Eſt vero $aa + bb =$

$bb = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, quo valore ſubſtituto fit $p = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

Hinc ergo omnes numeri pares, qui ſunt ſummae duorum quadratorum, per continuam biſectionem tandem reuocantur ad numeros impares eiusdem indolis. Quare viciſſim ſi ſoli numeri impares, qui ſunt ſummae duorum quadratorum cognoſcantur, ex iis omnes quoque pares per continuam duplicationem deriuabuntur.

§. 5. Deinde notatu dignum eſt ſequens theorema, quo natura numerorum, qui ſunt ſummae duorum quadratorum non mediocriter illuſtratur.

THEOR. *Si* p *et* q *ſint duo numeri, quorum vterque eſt ſumma duorum quadratorum, erit etiam eorum productum* pq *ſumma duorum quadratorum.*

DEM. Sit $p = aa + bb$ et $q = cc + dd$ erit $pq = (aa + bb)(cc + dd) = aacc + aadd + bbcc + bbdd$: quae expreſſio hoc modo repraeſentari poteſt vt ſit:

$pq = aacc + 2abcd + bbdd + aadd - 2abcd + bbcc$, ideoque $pq = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$: vnde productum pq erit ſumma duorum quadratorum. Q. E. D.

Ex hac propoſitione ſequitur, quomodocunque plures numeri, qui ſinguli ſint ſummae duorum quadratorum inuicem multiplicentur, producta ſemper eſſe ſummas duorum quadratorum. Atque ex forma generali tradita patet, productum ex duobus huiusmodi numeris duplici modo

in

in duo quadrata resolui posse: si enim sit $p=aa+bb$, et $q=cc+dd$, erit tam $pq=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$, quam $pq=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$, quae formulae erunt diversae, nisi sit, vel $a=b$, vel $c=d$. Sic cum sit $5=1+4$, et $13=4+9$, productum $5.13=65$ duplici modo erit summa duorum quadratorum, scilicet erit $65=(1.3+2.2)^2+(2.3-1.2)^2=49+16$, et $65=(2.2-1.3)^2+(2.3+1.2)^2=1+64$. Atque si productum habeatur ex pluribus numeris, qui singuli sint summae duorum quadratorum, id pluribus modis in duo quadrata resolui poterit. Vti si proponatur numerus $1105=5.13.17$, eius resolutiones in duo quadrata erunt hae: $1105=33^2+4^2=32^2+9^2=31^2+12^2=24^2+23^2$. Quatuor scilicet hic resolutiones locum habent.

§. 6. Quanquam autem ita euictum est, si factores p et q sint summae duorum quadratorum, etiam fore productum pq summam duorum quadratorum; tamen huius propositionis conuersa hinc non sequitur, vt, si productum sit duorum quadratorum summa, etiam eius factores sint numeri eiusdem naturae, neque enim hanc conclusionem regulae Logicae, neque ipsa rei natura probarent. Nam numerus $45=36+9$ est summa duorum quadratorum, interim tamen horum factorum eius 3.15 neuter est summa duorum quadratorum. Magis autem firma videatur haec conclusio: si productum pq, et alteruter eius factor p fuerint duorum quadratorum summae, alterum quoque factorem q fore summam duorum quadratorum. Tametsi autem haec conclusio forte sit vera, regulis tamen ratiocinandi non confirmatur, neque enim

 cum

cum demonſtratum ſit, ſi producti pq, bini factores p et q, ſint duorum quadratorum ſummae, ipſum pq fore ſummam duorum quadratorum, hinc legitima conſequentia inferri poteſt; ſi et productum pq, et alter factor p, ſint ſummae duorum quadratorum, etiam alterum factorem q fore ſummam duorum quadratorum. Huiusmodi enim conſequentiam non eſſe legitimam, vel hoc exemplum euidenter euincet: certum eſt ſi bini factores p et q ſint numeri pares, etiam productum pq fore numerum parem, ſi quis autem hinc concludere velit, ſi productum pq et alter factor p ſint numeri pares, etiam alterum factorem q fore parem, is vehementer falleretur.

§. 7. Quare ſi verum ſit, vt, cum productum pq et alter eius factor p fuerint ſummae duorum quadratorum, alter quoque factor q ſit ſumma duorum quadratorum; haec propoſitio non ex ante demonſtrata poteſt inferri, ſed peculiari demonſtratione muniri debet. Haec autem demonſtratio non tam plana eſt, quam praecedens, et non niſi per plures ambages concinnari poteſt, ac demonſtratio quidem, quam inueni, ita comparata videtur, vt non mediocrem vim ratiocinii requirat. Hanc ob rem propoſitiones, ex quibus tandem non ſolum haec veritas conficitur, ſed etiam aliae inſignes proprietates huiusmodi numerorum, qui ſunt ſummae duorum quadratorum, cognoſcuntur, cum ſuis demonſtrationibus hic ordine proponam, operamque dabo, vt nihil quicquam in rigore demonſtrandi deſiderari queat. Iis autem, quae hactenus de his numeris praemiſi, vti ſunt triuia et in vulgus nota, ita inſtar lemmatum in ſequentibus demonſtrationibus vtar.

PRO-

PROPOSITIO I.

§. 8. *Si productum* p q *sit summa duorum quadratorum, et alter factor* p *sit numerus primus, pariterque duorum quadratorum summa, erit quoque alter factor* q *summa duorum quadratorum.*

DEMONSTRATIO.

Sit $pq = aa + bb$, et $p = cc + dd$; quia p est numerus primus, erunt c et d numeri inter se primi. Erit itaque $q = \frac{aa + bb}{cc + dd}$, et propterea, ob q numerum integrum, numerator $aa + bb$ per denominatorem $cc + dd$ erit diuisibilis. Hinc quoque per $cc + dd$ diuisibilis erit numerus $cc(aa + bb) = aacc + bbcc$; at cum etiam hic numerus $aa(cc + dd) = aacc + aadd$ per $cc + dd$ sit diuisibilis, horum numerorum differentia $aacc + bbcc - aacc - aadd$ seu $bbcc - aadd$ per $cc + dd$ diuisibilis sit necesse est. Cum autem sit $cc + dd$ numerus primus, et $bbcc - aadd$ factores habeat $bc + ad$ et $bc - ad$, alteruter horum factorum, nempe $bc \pm ad$ per $cc + dd$ erit diuisibilis. Sit itaque $bc \pm ad = mcc + mdd$: quicunque autem numeri sint a et b, ii ita exprimi possunt, vt sit $b = mc + x$, et $a = \pm md + y$, existentibus x et y numeris integris siue affirmatiuis siue negatiuis. His vero valoribus pro b et a substitutis aequatio $bc \pm ad = mcc + mdd$ induet hanc formam: $mcc + cx + mdd \pm dy = mcc + mdd$ seu $cx \pm dy = 0$. Hinc erit $\frac{x}{y} = \mp \frac{d}{c}$, et quia d et c sunt numeri primi inter se, necesse est, vt sit $x = nd$ et $y = \mp nc$, vnde habebitur $a = \pm md \mp nc$ et $b =$

 $mc +$

$mc + nd$, huiusmodi scilicet valores habere debebunt numeri a et b, vt numerus $pq = aa + bb$ sit diuisibilis per numerum primum $p = cc + dd$. Verum istis valoribus pro a et b substitutis fiet:
$pq = mmdd - 2mncd + nncc + mmcc + 2mncd + nndd$, seu $pq = (mm + nn)(cc + dd)$. Iam ob $p = cc + dd$ erit $q = mm + nn$; ideoque si productum pq fuerit summa duorum quadratorum $aa + bb$, et alter factor p sit numerus primus pariterque duorum quadratorum summa $cc + dd$, necessario sequitur etiam alterum factorem q fore summam duorum quadratorum. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 9. Si ergo summa duorum quadratorum diuisibilis sit per numerum primum, qui ipse sit summa duorum quadratorum, etiam quotus ex diuisione resultans erit summa duorum quadratorum. Ita si summa duorum quadratorum fuerit diuisibilis per quempiam ex his numeris primis 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97 etc. quotus semper erit summa duorum quadratorum.

COROLL. 2.

§. 10. Si ergo litterae α, β, γ, δ, etc. denotent huiusmodi numeros primos, qui sunt summae duorum quadratorum; hinc patet, si productum αq sit summa duorum quadratorum, fore etiam factorem q summam duorum quadratorum.

COROLL.

COROLL. 3.

§. 11. Hinc autem porro facile colligitur, si productum $\alpha \beta q$ fuerit summa duorum quadratorum, fore etiam factorem q summam duorum quadratorum. Cum enim sit $\alpha \beta q$ summa duorum quadratorum, per *coroll. praec.* erit quoque βq summa duorum quadratorum; et ob eandem rationem erit quoque q summa duorum quadratorum.

COROLL. 4.

§. 12. Simili modo euidens est, si productum $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon q$ fuerit summa duorum quadratorum, tum quoque factorem q esse summam duorum quadratorum; hinc si productum pq sit summa duorum quadratorum, eiusque factor p productum ex quotcunque numeris primis, quorum singuli sint summae duorum quadratornm, fore etiam alterum factorem q summam duorum quadratorum.

SCHOLION.

§. 13. Regulae Logicae non permittunt, vt haec propositio ita conuertatur, vt, quoties alter factor q sit summa duorum quadratorum, etiam alter factor p pronunciari possit, vel summa duorum quadratorum, si est primus, vel productum ex numeris primis, qui singuli sint summae duorum quadratorum. De hoc ipso enim nondum constat, vtrum productum ex aliquot numeris primis, qui ipsi non sint summae duorum quadratorum, nequeat esse summa duorum quadratorum: quin potius contrario iam habemus casum, quo productum $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ est summa duorum quadratorum, cum tamen eius factores 3 et 3 non sint huius indolis. Verum propositio *coroll. vlt.* ita conuerti potest, vt a negatione consequentis recte ad negationem antecedentis concludatur, quam conuersionem vtpote maximi momenti in hac propositione complectar.

PROPOSITIO II.

§. 14. *Si productum* p q *sit summa duorum quadratorum, eius factor autem* q *non sit summa duorum quadratorum, tum alter factor* p, *si sit numerus primus, non erit summa duorum quadratorum, sin autem non sit primus, saltem factorem certe habebit primum, qui non sit summa duorum quadratorum.*

DEMONSTRATIO.

Cum alter factor p sit, vel numerus primus, vel compositus, vtrumque casum seorsim perpendere conuenit. Sit 1mo p numerus primus; cum igitur si esset summa duorum quadratorum; quoque alter factor q foret summa duorum quadratorum; quod cum hypothesi aduersetur, sequitur, factorem p non esse summam duorum quadratorum. Sit 2do p numerus compositus; et ex praec. liquet, si omnes eius factores primi essent summae duorum quadratorum, etiam alterum factorem q eiusdem fore indolis. Quare cum per hypothesin q non sit summa duorum quadratorum, sequitur, non omnes factores ipsius p esse summas duorum quadratorum. Q. E. D.

COROLL.

COROLL. 1.

§. 15. Si igitur productum pq ſit ſumma duorum quadratorum, eius tamen alter factor q in duo quadrata ſit irreſolubilis; alter factor p, vel ipſe non erit ſumma duorum quadratorum, vel ſaltem factorem habebit primum in duo quadrata irreſolubilem. Vti ſi ſit $pq = 45$ et $q = 3$, erit $p = 15$ et factorem habet 3, qui non eſt ſumma duorum quadratorum.

COROLL. 2.

§. 16. Hinc autem nondum concludere licet, alterum factorem p plane non eſſe ſummam duorum quadratorum, quamuis enim hoc certum ſit caſu, quo p eſt numerus primus, tamen id nondum conſtat caſu, quo p eſt numerus compoſitus; quia p habere poſſet factorem in duo quadrata irreſolubilem, etiamſi ipſe numerus p eſſet ſumma duorum quadratorum.

COROLL. 3.

§. 17. Hoc autem colligere licet; ſi p eſſet ſumma duorum quadratorum, tum non ſolum vnum, ſed ad minimum duos habere debere factores primos in duo quadrata irreſolubiles. Sit enim $p = \alpha \beta \gamma \delta$, et δ factor ille in duo quadrata irreſolubilis; perſpicuum eſt, ſi p eſſet ſumma duorum quadratorum, deleto factore δ, inſuper factorem reſiduum $\alpha \beta \gamma$ factorem in duo quadrata irreſolubilem habere debere.

SCHO-

SCHOLION.

§. 18. Cum de diuiſoribus numerorum, qui ſunt ſummae duorum quadratorum, quaeſtio inſtituitur, circa quadratorum ſummam $aa+bb$, caſus hi probe ſunt diſtinguendi, vtrum haec quadrata aa et bb, ſeu eorum radices a et b ſint numeri primi inter ſe nec ne? Si enim a et b non ſint numeri primi inter ſe, ſed habeant communem diuiſorem n, vt ſit $a=nc$ et $b=nd$, ſumma quadratorum erit $nncc+nndd=nn(cc+dd)$, ac propterea diuiſorem habebit n, hoc eſt, numerum quemcunque. Sin autem radices a et b fuerint numeri primi inter ſe, tum ſumma quadratorum $aa+bb$ plures numeros pro diuiſoribus non admittet: euidens enim eſt huiusmodi ſummam duorum quadratorum $aa+bb$ nunquam per 3 eſſe diuiſibilem. Nam quia per hypotheſin vtrumque quadratum ſeorſim non eſt per 3 diuiſibile, cum alioquin non forent prima inter ſe; ſi ſumma $aa+bb$ eſſet per 3 diuiſibilis, neutrum foret per 3 diuiſibile. Vtriusque ergo radices futurae eſſent, vel huius formae $3m+1$, vel huius $3m-1$; ſed ſumma huiusmodi duorum quadratorum, per 3 diuiſa, ſemper reſiduum 2 relinquit, ideoque per 3 nunquam eſt diuiſibilis. Eodem modo intelligitur, ſummam duorum quadratorum inter ſe primorum $aa+bb$ nunquam eſſe per 7, vel 11, vel 19 etc. diuiſibilem. Quinam autem ſint in genere hi numeri, qui nunquam ſummae duorum quadratorum inter ſe primorum diuiſores exiſtere queant, hoc modo non facile definitur. Demonſtrari igitur conuenit propoſitionem alias quidem ſatis notam, ſummam duorum quadratorum inter ſe primorum alios diuiſores

primos

primos non admittere, nisi qui ipsi sint summae duorum quadratorum. Praemitti autem debet sequens propositio.

PROPOSITIO III.

§. 19. *Si summa duorum quadratorum inter se primorum* $aa + bb$ *diuisibilis sit per numerum* p, *semper exhiberi poterit summa duorum aliorum quadratorum* $cc + dd$ *diuisibilis per eundem numerum* p, *ita vt ista summa* $cc + dd$ *non sit maior quam* $\frac{1}{2}pp$.

DEMONSTRATIO.

Sit summa duorum quadratorum inter se primorum $aa + bb$ diuisibilis per numerum p, et a et b numeri quantumuis magni. Quia ergo neque a neque b seorsim per p diuisibilis est, numeri a et b ita exprimi poterunt, vt sit $a = mp \pm c$ et $b = np \pm d$, vbi numeros m et n ita determinare licet, vt c et d non excedant semissem ipsius p. Erit ergo $aa + bb = mmpp \pm 2mcp + cc + nnpp \pm 2ndp + dd$, quae formula cum et tota diuisibilis sit per p (per hyp.) et eius pars $mmpp \pm 2mcp + nnpp \pm 2ndp$ per se diuisorem habeat p, necesse est, vt altera pars $cc + dd$, quae est summa duorum quadratorum, itidem per p sit diuisibilis. At cum radices c et d non excedant semissem ipsius p, summa quadratorum $cc + dd$ non excedet quadratum $\frac{1}{4}pp$ bis sumtum; ideoque summa duorum quadratorum $cc + dd$ exhiberi potest non maior quam $\frac{1}{2}pp$, quae tamen sit per p diuisibilis. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 20. Si igitur non detur ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum diuiſibilis per numerum p, quae non excedat $\frac{1}{2}pp$, nullae omnino dantur ſummae duorum quadratorum inter ſe primorum, quae per hunc numerum p eſſent diuiſibiles.

COROLL. 2.

§. 21. Sic cum nulla detur ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum infra $\frac{1}{2} \cdot 3^2$ ſeu infra $4\frac{1}{2}$, quae ſit per 3 diuiſibilis, hinc luculenter ſequitur, nullam omnino ſummam duorum quadratorum inter ſe primorum per 3 eſſe diuiſibilem. Similique modo pro numero 7, cum non detur ſumma duorum quadratorum infra $\frac{1}{2}7^2 = 24\frac{1}{2}$ per 7 diuiſibilis, ſequitur ne in maximis quidem numeris dari ſummas duorum quadratorum inter ſe primorum per 7 diuiſibiles.

PROPOSITIO IV.

§. 22. *Summa duorum quadratorum inter ſe primorum diuidi nequit per vllum numerum, qui ipſe non ſit ſumma duorum quadratorum.*

DEMONSTRATIO.

Ad hoc demonſtrandum ponamus ſummam duorum quadratorum inter ſe primorum $aa + bb$ diuiſibilem eſſe per numerum p, qui non ſit ſumma duorum quadratorum. Exhiberi ergo poſſet alia ſumma duorum

qua-

quadratorum inter se primorum $cc + dd$ non maior quam $\frac{1}{2}pp$, quae esset diuisibilis per p. Sit igitur $cc + dd = pq$, et cum p non sit summa duorum quadratorum, vel ipse numerus q non erit eiusmodi summa, vel saltem factorem habebit r, qui non erit summa duorum quadratorum. Quia vero $pq < \frac{1}{2}pp$, erit $q < \frac{1}{2}p$ et multo magis $r < \frac{1}{2}p$. Quare cum $cc + dd$ quoque diuisibilis sit per $r < \frac{1}{2}p$; per *prop. praec.* summa duorum quadratorum $ee + ff$ per eundem numerum r diuisibilis exhiberi posset, quae non excederet $\frac{1}{2}rr$, neque multo magis $\frac{1}{8}pp$. Et cum r non sit summa duorum quadratorum, simili modo procedendo continuo ad minores summas duorum quadratorum deueniretur, quae per numerum non summam duorum quadratorum essent diuisibiles. Quocirca cum in minimis numeris nulla detur summa duorum quadratorum inter se primorum, quae esset diuisibilis per numerum, qui non sit summa duorum quadratorum, ne in maximis quidem numeris eiusmodi erunt summae duorum quadratorum, quae diuisibiles sint per numeros, qui ipsi non essent summae duorum quadratorum. Q. E D.

COROLL. 1.

§. 23. Si ergo summa duorum quadratorum inter se primorum non fuerit numerus primus, omnes eius factores primi quoque erunt summae duorum quadratorum. Quemadmodum igitur productum ex quotcunque numeris primis, qui ipsi sunt summae duorum quadratorum, pariter est summa duorum quadratorum, ita nunc huius propositionis conuersa est demonstrata, vt summa duorum quadratorum (inter ſe primorum) per multiplicationem oriri nequeat, niſi ex numeris, qui ipſi ſint ſummae duorum quadratorum.

COROLL. 2.

§. 24. Omnes ergo numeri, qui ſunt ſummae duorum quadratorum inter ſe primorum, vel ipſi in hac ſerie numerorum primorum continentur:
2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, etc. vel ex duobus pluribusue numeris huius ſeriei per multiplicationem componuntur. Omnes autem hi numeri primi praeter 2 vnitate excedunt multiplum quaternarii ſeu in hac forma $4n+1$ continentur.

COROLL. 3.

§. 25. Si igitur ſumma duorum quadratorum $aa+bb$ diuiſibilis ſit per numerum, qui non fuerit ſumma duorum quadratorum; hinc intelligetur quadrata illa aa et bb non eſſe inter ſe prima, neque adeo eorum radices a et b.

COROLL. 4.

§. 26. Cum autem ſi $a=nc$ et $b=nd$ ſumma duorum quadratorum $aa+bb=nn(cc+dd)$ per quemuis numerum n, qui non eſt ſumma duorum quadratorum, diuidi poſſit, quoniam non ſolum per n, ſed etiam per nn eſt diuiſibilis, euidens eſt, ſi ſumma duorum quadratorum diuiſibilis ſit per quempiam numerum, qui non eſt ſumma duorum quadratorum, tum eam quoque per quadratum huius numeri fore diuiſibilem. Sic cum $45=36+9$ ſit diuiſib. per 3, ſimul quoque diuiſibilis eſt per 9. COROLL.

COROLL. 5.

§. 27. Cum nullus numerorum in hac forma $4n-1$ contentorum ſit ſumma duorum quadratorum, manifeſtum quoque eſt, nullam ſummam quadratorum inter ſe primorum diuidi poſſe per vllum numerum primum, in forma $4n-1$ contentum, qui numeri primi ſunt:
3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, 103, 107 etc.

SCHOLION.

§. 28. Cum omnes numeri primi, qui ſunt ſummae duorum quadratorum, excepto binario, hanc ſeriem conſtituant:
5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, 137, 149, etc.
qui non ſolum in hac forma $4n+1$ continentur, ſed etiam, quantumuis ea longe continuetur, deprehendemus in ea omnes omnino numeros primos huius formae $4n+1$ occurrere: vnde per inductionem ſatis probabiliter concludere licet, nullum dari numerum primum formae $4n+1$, qui non ſimul ſit ſumma duorum quadratorum. Interim tamen cum inductio quantumuis ampla vicem demonſtrationis ſuſtinere nequeat; hanc veritatem, quod omnis numerus primus formae $4n+1$ ſimul ſit ſumma duorum quadratorum, etiamſi nemo agnoſcere dubitet, tamen adhuc demonſtratis matheſeos veritatibus annumerare non licet. *Fermatius* quidem profeſſus eſt, ſe eius demonſtrationem inueniſſe; quia autem eam nusquam publicauit, aſſerto quidem huius profundiſſimi Viri merito fidem adhibemus, iſtamque numerorum proprietatem

credimus ; haecque cognitio noſtra mera fide ſine ſcientia nititur. Quanquam autem ego multum in demonſtratione eruenda fruſtra laboraui , tamen aliud argumentum pro hac veritate adſtruenda reperi , quod etiamſi non ſummum rigorem ſuſtineat , tamen cum inductione coniunctum demonſtrationi pene rigoroſae aequiualere videtur.

PROPOSITIO V.

§. 28. *Omnis numerus primus , qui vnitate excedit multiplum quaternarii , eſt ſumma duorum quadratorum.*

TENTAMEN DEMONSTRATIONIS.

Numeri primi , de quibus hic ſermo eſt , in hac forma $4n+1$ continentur. Quodſi ergo numerus $4n+1$ fuerit primus , demonſtraui per eum ſemper diuiſibilem eſſe hanc formam $a^{4n}-b^{4n}$, quicunque numeri pro a et b ſubſtituantur , dummodo neuter ſeorſim fuerit per $4n+1$ diuiſibilis. Cum autem ſit $a^{4n}-b^{4n}=(a^{2n}-b^{2n})(a^{2n}+b^{2n})$, neceſſe eſt, vt alteruter factor, nempe vel $a^{2n}-b^{2n}$, vel $a^{2n}+b^{2n}$ ſit diuiſibilis per numerum primum $4n+1$. Prout autem pro a et b alii atque alii numeri aſſumuntur , aliis caſibus formula $a^{2n}-b^{2n}$, aliis vero formula $a^{2n}+b^{2n}$ erit per $4n+1$ diuiſibilis : vnde aſſumere licet , etſi quidem hoc nondum firma demonſtratione euincere valeo , ſemper eiusmodi numeros pro a et b aſſignari poſſe , vt formula $a^{2n}-b^{2n}$ non ſit per $4n+1$ diuiſibilis : iis ergo caſibus altera formula $a^{2n}+b^{2n}$ neceſſario per $4n+1$ erit diuiſibilis. Sit $a^n=p$ et $b^n=q$, habebitur biturque ſumma duorum quadratorum $pp + qq$ per $4n + 1$ diuiſibilis, ita vt neutrum quadratum pp vel qq ſeorſim habeat diuiſorem $4n + 1$. Ideoque etiamſi fortaſſe pp et qq communem habeant diuiſorem mm, vt ſit $pp + qq = mm(rr + ss)$, quia factor communis mm diuiſorem non habet $4n + 1$, neceſſe eſt, vt ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum $rr + ss$ habeat diuiſorem $4n + 1$; Conſequenter cum huiusmodi ſumma duorum quadratorum alios non admittat diuiſores, niſi qui ipſi ſint ſummae duorum quadratorum, neceſſe eſt, vt numerus primus $4n + 1$ ſit ſumma duorum quadratorum.

COROLL. 1.

§. 29. Demonſtratio haec igitur eſſet perfecta, ſi modo demonſtrari poſſet, ſemper eiusmodi exiſtere valores pro a et b ſubſtituendos, quibus formula $a^{2n} - b^{2n}$ non fiat diuiſibilis per numerum primum $4n + 1$; iisdem enim caſibus formula $a^{2n} + b^{2n}$ neceſſario eſt diuiſibilis per $4n + 1$.

COROLL. 2.

§. 30. Quod ſi quis autem hanc rem per calculum tentet, non modo ſemper plures caſus, imo infinitos, formulae $a^{2n} - b^{2n}$ reperiet, quibus ea per numerum primum $4n + 1$ non eſt diuiſibilis, ſed etiam pro b vnitatem ponere licet, ita, vt etiam haec formula ſimplicior $a^{2n} - 1$ ſaepe numero per $4n + 1$ non ſit diuiſibilis.

SCHOLION

SCHOLION.

§. 31. Casus seu valores ipsius a, quibus formula $a^{2n} - 1$ certe fit diuisibilis per numerum primum $4n+1$, facile assignari possunt. Primo enim si sit $a = pp$, formula $a^{2n} - 1 = p^{4n} - 1$ semper est diuisibilis per $4n+1$, dummodo p non sit $= 4n + 1$ vel eius multiplo. Deinde si $a = pp \pm (4n + 1)q$, formula $a^{2n} - 1$ quoque diuisorem habet $4n + 1$, resoluitur enim $a^{2n} = (pp \pm (4n + 1)q)^{2n}$ in seriem terminorum, quorum primus est p^{4n}, sequentes vero omnes sponte sunt per $4n + 1$ diuisibiles. Vnde patet, valores idoneos pro a esse omnia residua, quae restant, si numeri quadrati p^2 per $4n + 1$ diuidantur. Haec autem residua siue pro a ponatur r, siue $4n + 1 + r$, siue $(4n + 1)q + r$ prodeunt eadem, vnde omnia possibilia residua obtinentur, si pro p successiue statuantur numeri $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ vsque ad $4n$, at valor $4n$ pro p positus idem dat residuum, quod valor 1, similique modo valores 2 et $4n - 1$, item 3 et $4n - 2$, item 4 et $4n - 3$ etc. eadem dant residua. Vnde cum bina semper residua, quae ex numeris $1, 2, 3, \ldots$ vsque ad $4n$ pro radicibus quadratorum sumtis proueniunt, sint aequalia, numerus diuersorum residuorum resultantium tantum erit $2n$, ideoque totidem dabuntur numeri ipso $4n + 1$ minores, qui non esse possunt residua ex diuisione numerorum quadratorum per $4n + 1$ emergentia; hique numeri pro a substituti semper formulam $a^{2n} - 1$ reddent non diuisibilem per $4n + 1$. Hoc quidem pariter demonstrari nequit; verumtamen quia periculum faciendo, quotcunque etiam numeri hoc modo explorentur, ne unicus quidem casus occurret, quo haec regula

gula fallat, eius veritatem agnoscere oportet. Quo haec clarius perspiciantur, exempla aliquot subiungam, sit primo $4n + 1 = 5$, et casus, quibus formula $a^2 - 1$ per 5 erit diuisibilis, habebuntur, si pro a residua ex diuisione quadratorum per 5 oriunda ponantur, quae residua sunt $1, 4$. At si pro a ponatur vel 2, vel 3, formula $a^2 - 1$ non erit per 5 diuisibilis; his ergo casibus formula $a^2 + 1$ diuisorem habebit 5. Deinde si sit $4n + 1 = 13$, seu $n = 3$, residua, quae ex diuisione numerorum quadratorum per 13 restant, sunt $1, 4, 9, 3, 12, 10$. vnde si quis numerorum reliquorum, $2, 5, 6, 7, 8, 11$, pro a substituatur, non formula $a^6 - 1$, sed $a^6 + 1$ per 13 erit diuisibilis. Porro si $4n + 1 = 17$, seu $n = 4$, quia residua quadratorum per 17 diuisorum sunt $1, 4, 9, 16, 8, 2, 15, 13$, si pro a statuatur quispiam ex reliquis numeris $3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14$, non formula $a^8 - 1$, sed haec $a^8 + 1$ erit per 17 diuisibilis. Cum igitur haec lex perpetuo obseruetur, haec inductio vim demonstrationis fere induere censenda erit; hincque propositio tantopere confirmata videtur, vt eius veritatem non amplius in dubium vocare liceat. Interim tamen operae pretium esset eo maius, si quis rigorosam huius propositionis demonstrationem exhibere posset, quo magis de eius veritate simus certi: nullum enim est dubium, quin eiusmodi demonstratio, tamdiu frustra quaesita, ad plurimas alias insignes numerorum proprietates sit manuductura. Quamquam autem huius propositionis veritas extra dubium est posita, tamen eas consequentias, quae ipsi innituntur, diligenter notabo, ab aliisque, quae rigidis demonſtrationibus muniuntur, diſtinguam: ex hac autem propoſitione nondum demonſtrata ſequuntur haec corollaria, quae hoc nomine notata velim.

COROLL. 3.

§. 32. Si igitur numerus formae $4n+1$ in duo quadrata nullo modo reſolui nequeat, hoc certum erit ſignum, eum numerum non eſſe primum: ſi enim iſte numerus $4n+1$ eſſet primus, certe in duo quadrata reſolui poſſet. Sic cum numeri 21, 33, 57, 69, 77, 93 etc. qui in forma $4n+1$ continentur, non ſint ſummae duorum quadratorum, ex hoc ipſo patet, eos non eſſe primos.

COROLL. 4.

§. 33. In ſerie ergo numerorum, qui ſunt ſummae duorum quadratorum, omnes primo continentur numeri primi huius formae $4n+1$, deinde omnia producta ex duobus pluribusue huiusmodi numeris primis; tam producta ex ſingulis hisce numeris in binarium et quosuis numeros quadratos.

COROLL. 5.

§. 34. Omnes numeri n, ex quibus formula $4n+1$ euadit numerus primus, ſunt ſummae duorum numerorum trigonalium. Cum enim $4n+1$ ſit ſumma duorum quadratorum, erit eius duplum $8n+2$ ſumma duorum quadratorum imparium: ſit ergo $8n+2=(2x+1)^2+(2y+1)^2$, fiet $n=\frac{xx+x}{2}+\frac{yy+y}{2}$. Quare ſi n non ſit ſumma duorum numerorum trigonalium, certe numerus $4n+1$ non erit primus.

PRO-

PROPOSITIO VI.

§. 35. *Si numerus formae* $4n+1$ *vnico modo in duo quadrata inter ſe prima reſolui queat, tum certe eſt numerus primus.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim hic numerus eſt ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum, ſi non ſit prima, ſinguli eius factores erunt ſummae duorum quadratorum. Quare ſi hic numerus non eſſet primus, in huiusmodi ſaltem duos factores reſolui poſſet, vt eſſet $4n+1 = (aa+bb)(cc+dd)$, hoc autem caſu duplex reſolutio in duo quadrata locum habet; ſcilicet:

I. $4n+1=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

II. $4n+1=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$

Haeque reſolutiones ſemper ſunt diuerſae, niſi ſit vel $ac+bd=ad+bc$ vel $ac+bd=ac-bd$. Priori vero caſu foret $ac+bd-ad-bc=0$, ſeu $(a-b)(c-d)=0$, ideoque vel $a=b$ vel $c=d$; atque hinc vel $aa+bb$ vel $cc+dd$ numerus par, quorum neutrum eſſe poteſt diuiſor ipſius $4n+1$ vtpote numeri imparis. Poſteriori vero caſu eſſet vel $b=0$ vel $d=0$, ideoque $4n+1$ vel $=aa(cc+dd)$ vel $=cc(aa+bb)$; vnde haec duo quadrata non forent prima inter ſe contra hypotheſin. Quibus caſibus notatis ſequitur, numerum compoſitum $4n+1$, ſi in duo quadrata inter ſe prima fuerit reſolubilis, eundem ad minimum duobus modis in duo quadrata eſſe reſolubilem. Quo circa ſi tantum vnico modo numerus $4n+1$ sit summa duorum quadratorum, certe non erit compositus, ac per consequens erit primus. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 36. Si igitur proposito quopiam numero formae $4n+1$ post institutum examen comperiatur, eum vnico modo in duo quadrata inter se prima resolui posse, inde tuto colligemus, eum numerum esse primum; etiamsi eius diuisibilitatem per numeros primos more consueto non tentauerimus. Sic cum numerus 73 vnico modo sit summa duorum quadratorum, nempe $64+9$, eum esse primum, certo nouimus.

COROLL. 2.

§. 37. Si ergo methodus expedita haberetur, cuius ope facile inquirere liceret, an et quot modis propositus numerus in forma $4n+1$ contentus in duo quadrata resolui possit exinde promte iudicare poterimus, vtrum sit primus; si enim vnico modo in duo quadrata sit resolubilis, eaque quadrata fuerint prima inter se, is certe pro primo erit habendus.

COROLL. 3.

§. 38. Manifestum autem est, si duo quadrata, in quae numerus quispiam resoluitur, non sint prima inter se, eum numerum non esse primum. Si enim numerus propositus inueniatur esse $= nnaa + nnbb$, tum diuisores habebit n et nn: quod idem est intelligendum, si numerus

numerus propositus ipse sit quadratum, seu $= aa + 0$, tum enim diuisorem habebit a.

SCHOLION.

§. 39. Haec regula numeros primos explorandi tantum ad numeros impares formae $4n + 1$ est adstricta, numeri enim pares quandoque vnico modo in duo quadrata resolui possunt, cum tamen non sint primi; ita 10 vnico modo est summa duorum quadratorum, etsi non est primus, cuius rei ratio est, quod in producto $(aa + bb)(cc + dd)$, cui huiusmodi numeri aequantur, est vel $a = b$ vel $c = d$, quo casu duplex resolutio, quae generatim innui videtur, ad vnam redit, vti in demonstratione est animaduersum. Neque vero hac exceptione regula data infringitur, cum numerorum parium per se facile sit iudicium. Numeri autem impares alterius formae $4n - 1$ hinc sponte excluduntur, quoniam ii plane non in duo quadrata sunt resolubilis. De cetero si numerus $4n + 1$ vel plane non resolubilis sit in duo quadrata, vel pluribus modis haec resolutio succedat, pro priori casu iam notauimus, eum numerum certe non esse primum, etsi hoc nititur *Prop. praec.* non satis rigide demonstrata. Pro casu vero posteriori in sequenti propositione iudicium afferetur.

PROPOSITIO VII.

§. 40. *Qui numerus duobus pluribusue diuersis modis in duo quadrata resolui potest, ille non est primus, sed ex duobus ad minimum factoribus compositus.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus propositus N, qui duplici modo in duo quadrata sit resolubilis; nempe $N = aa + bb = cc + dd$. Quoniam haec quadrata non sunt aequalia, alioquin enim numerus N per se non esset primus, sit $a > b$ et $c > d$, et quia resolutiones hae duae sunt diversae, neque erit $a = c$ neque $b = d$. Sit igitur $a > c$; erit $b < d$; vnde ponatur $a = c + x$ et $d = b + y$. Quare ob $aa + bb = cc + dd$ fiet: $2cx + xx = 2by + yy$. Sit vtraque forma $= xyz$, quia altera per x, altera per y est diuisibilis; fiet $x = \frac{yz - x}{2}$; $b = \frac{xz - y}{2}$; $a = \frac{yz + x}{2}$; $d = \frac{xz + y}{2}$ hincque erit $N = aa + bb = \frac{xxzz + yy + yyzz + xx}{4}$ seu $N = \frac{(yy + xx)(1 + zz)}{4}$. Nisi ergo $xx + yy$ per 4 sit diuisibile, erit $xx + yy$ diuisor ipsius N, sin autem $xx + yy$ sit per 4 diuisibile, vel numerus vtcunque compositus, eius certe factor quidam erit diuisor ipsius N. Cum igitur sit $x = a - c$ et $y = d - b$, numerus propositus $N = aa + bb = cc + dd$ diuisorem habebit vel ipsum numerum $(a - c)^2 + (d - b)^2$, vel eius semissem quadrantemue, et quia numeros a, b et c, d, inter se vtcunque permutare licet, factores ipsius N quoque erunt $(a - d)^2 + (c - b)^2$, vel etiam quia radices a, b, c, d negatiue assumere licet $(a + c)^2 + (d + b)^2$ vel $(a + d)^2 + (c + b)^2$, seu harum formularum semisses aliaeue partes aliquotae. Quare cum numeri plus vno modo in duo quadrata resolubilis factores adeo assignari possint, ille numerus certe non erit primus, sed compositus. Q. E. D.

COROLL.

COROLL. 1.

§. 41. Cum igitur numerus $N = aa + bb = cc + dd$ sit compositus, erit huiusmodi $N = (pp + qq)(rr + ss)$. Hinc autem vicissim duplex resolutio in duo quadrata resultat, erit nempe:

$$a = pr + qs \quad \text{et} \quad c = ps + qr$$
$$b = ps - qr \qquad\quad d = pr - qs.$$

Hincque vlterius obtinetur $a - d = 2qs$ et $c - b = 2qr$, vnde fit $\frac{r}{s} = \frac{c-b}{a-d}$. Quare si fractio $\frac{c-b}{a-d}$ ad minimos terminos reducatur, vt sit $\frac{c-b}{a-d} = \frac{r}{s}$, ex hac fractione $\frac{r}{s}$ orietur numeri N diuisor $= rr + ss$, nisi sit par, nam si fuerit par, eius dimidium sumi debet.

COROLL. 2.

§. 42. Simili modo cum numeros a, b et c, d inter se permutare atque adeo negatiuos ponere liceat, si fractionum harum $\frac{a \pm c}{b \pm d}$, vel $\frac{a \pm d}{b \pm c}$ altera ad minimos terminos reducatur, vt fiat $= \frac{r}{s}$, erit $rr + ss$ semper diuisor numeri propositi N.

COROLL. 3.

§. 43. Quanquam autem hinc plures duobus diuisores nasci videntur, tamen diuersae formulae ita ad eundem diuisorem deducunt, vt non plures quam duo eliciantur, si quidem numerus propositus duobus tantum modis in duo quadrata fuerit resolubilis. Sit, si $N = 85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$; formulae $\frac{9 \pm 7}{6 \pm 2}$; $\frac{9 \pm 6}{7 \pm 2}$ has

qua-

quatuor tantum fractiones in minimis terminis ſuppeditant nempe: $\frac{2}{1}$; $\frac{4}{1}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{1}$; quarum binae poſteriores pro formula $rr + ss$ duplum valorem tantum exhiberit, eius qui ex primis oritur: vnde patebit, factores eſſe binos $2^2 + 1 = 5$ et $4^2 + 1 = 17$. Breuiſſime ergo hi factores inueniuntur, ſi tantum radices quadratorum pares et impares ſeorſim inuicem combinentur, et combinatio parium cum imparibus penitus omittatur, quia hinc fractiones orirentur, numeratorem et denominatorem impares habentes.

PROBLEMA.

§. 44. *Propoſito numero quocunque formae $4n + 1$ explorare vtrum primus ſit nec ne?*

SOLVTIO.

Per operationem deinceps explicandam inueſtigetur numerus propoſitus, vtrum in duo quadrata reſolui poſſet nec ne? et, ſi poſſit, an plus vno modo reſolutio ſuccedat? Si enim reſolutionem in duo quadrata plane non admittat, id per §. 32 certum erit ſignum, numerum propoſitum non eſſe primum, etiamſi haec concluſio ex *Prop. V.* non ſatis demonſtrata ſequatur. Hoc quidem caſu de eius diuiſoribus nihil conſtat; interim tamen certo colligimus, eum diuiſores primos habere formae $4m - 1$, quia ſi omnes eius factores eſſent formae $4m + 1$, is certe in duo quadrata foret reſolubilis. At ſi numerus propoſitus vnico modo ſit in duo quadrata reſolubilis, tum infallibiliter pro primo erit habendus. Sin autem

autem resolutio plus vno modo succedat, tum non solum constabit, eum non esse primum, sed etiam eius diuisores assignari poterunt per §. 43. His perpensis regulam tradam, cuius ope resolubilitas in duo quadrata non difficulter explorari poterit.

Numerus propositus desinet vel in 1, vel in 3, vel in 7 vel in 9; casum quo in 5 desinit hic omitto, quia diuisor 5 tum est manifestus, et indicat numerum non esse primum. Deinde numeri quadrati incipiendo a maximis ipso numero proposito minoribus successiue ab eo subtrahantur, vt pateat, vtrum vnquam numerus quadratus restet, quoties enim hoc euenit, toties resolutio in duo quadrata succedit.

At cum numeri quadrati in nullum horum numerorum 2, 3, 7, 8, desinere queant, subtractio eorum numerorum quadratorum, qui residua dant in hos numeros desinentia omitti poterit. Hinc tantum opus est vt a numero proposito ea quadrata subtrahantur, quae residua in 0, 1, 4, 5, 6, 9, desinentia praebent; nempe

Si numerus propositus desinat in	Quadrata subtrahenda desinent in	Et horum quadratorum radices desinent in
1	0, 1, 5, 6,	0, 1, 4, 5, 6, 9
3	4, 9	2, 3, 7, 8
7	1, 6	1, 4, 6, 9
9	0, 4, 5, 9	0, 2, 3, 5, 7, 8

Pro quolibet igitur numero proposito $4n+1=N$ tot operationes seorsim instituantur, quot radicum idoneae sunt terminationes. Sit igitur pp maximum quadratum huius indolis, quod a numero propoſito N ſubtrahi debet: ac tum ſucceſſiue ſubtrahantur quadrata $(p-10)^2$, $(p-20)^2$, $(p-30)^2$, $(p-40)^2$, etc. Verum reſidua hinc emergentia expedite per continuam additionem inueniri poterunt; Hoc modo

Numerus propoſitus	N
a quo ſubtrahatur	pp
	$N-pp$
Addatur . . .	$20p-100$
	$N-(p-10)^2$
Addatur . . .	$20p-300$
	$N-(p-20)^2$
Addatur . . .	$20p-500$
	$N-(p-30)^2$

Numeri igitur ſucceſſiue addendi ſunt: $20p-100$, $20p-300$, $20p-500$, $20p-700$, etc. qui decreſcunt in ratione Arithmetica per differ. $=200$. Huiusmodi operatio pro ſingulis numeris p, quorum quadrata numero propoſito proxime ſunt minora, et qui deſinunt in aliquem figurarum ſupra indicatarum, inſtituatur, neque vlterius continuetur, quam donec ad ſemiſſem numeri propoſiti N perueniatur. Si enim numerus N fuerit ſumma duorum quadratorum, alterum certe ſemiſſi pſius minus ſit neceſſe eſt. Quo obſeruato, quot hac operatione prodibunt quadrata, tot modis numerus propoſitus in duo quadrata erit reſolubilis. Hanc autem operationem nnon admodum eſſe moleſtam, omnibusque aliis methodis eumeros primos explorandi longe anteferendam, ſequentia xempla declarabunt.

Exem-

EXEMPLVM I.

§. 45. *Explorare vtrum hic numerus* 82421 *primus ſit nec ne?*

Operatio per ſex columnas ſequentes inſtituetur.

p 82421	p 82421	p 82421	p 82421	p 82421	p 82421
286. 81796	285. 81225	284. 80656	281. 78961	280. 78400	279. 77841
□ 625	1196	1765	3460	4021	4580
5620	5600	5580	5520	5500	5480
6245	6796	7345	8980	9521	10060
5420	5400	5380	5320	5300	5280
11665	12196	12725	14300	14821	15340
5220	5200	5180	5120	5100	5080
16885	17396	17905	19420	19921	20420
5020	5000	4980	4920	4900	4880
21905	22396	22885	24340	24821	25300
4820	4800	4780	4720	4700	4680
26725	27196	27665	29060	29521	29980
4620	4600	4580	4520	4500	4480
31345	31796	32245	33580	34021	34460
4420	4400	4380	4320	4300	4280
35765	36196	36625	37900	38321	38740
4220	4200	4180	4120	4100	4080
39985	40396	40805	42020	42421	42820

Cum igitur hic vnicum occurrat quadratum 625, ideoque numerus propoſitus 82421 vnico modo ſit in duo quadrata reſolubilis nempe $= 25^2 + 286^2$, is erit primus.

SCHOLION.

§. 46. In hoc computo quatuor columnae, vbi numeri reſidui deſinunt vel in 5 vel in 0, notabiliter contrahi poſſunt, omittendis omnibus iis, qui non deſinunt vel in 25 vel in 00. Quare in columnis, in quibus reſidua deſinunt vel in 5 vel in 0, ſubtrahatur primo mo proximum quadratum, quod residuum praebet vel in 25 vel in 00 desinens, hocque quadratum dicatur pp, vt residuum sit $= N - pp$: tum quadrata, vnde residua simili modo desinentia oriuntur, erunt $(p-50)^2$, $(p-100)^2$, $(p-150)^2$ etc. ideoque haec residua obtinebuntur si ad $N-pp$ continuo addantur hi numeri $100p-2500$; $100p-17500$; $100p-125000$ qui decrescunt arithmetice secundum differentiam constantem 5000; vnde hae columnae mox ad finem perducentur, dum eas non vltra semissem numeri propositi continuari opus est. Hoc igitur compendium locum habebit in numeris vel in 1 vel in 9 desinentibus, qui propterea, etiamsi sex columnas requirant, dum pro reliquis quatuor sufficiunt, facilius expedientur.

EXEMPLVM 2.

§. 47. *Explorare vtrum hic numerus 100981 primus sit nec ?*

p	100981	p	100981	p	100981	p	100981
316.	99856	315.	99225	309.	95481	310.	96100
	1125		1756		5500		4881
	29100		6200		28400		6100
	30225		7956		33900		10981
	24100		6000		23400		5900
	* 54325		13956		* 57300		16881
p	100981		5800		100981		5700
284	80656		19756	291.	84681		22581
	20326		5600		16300		5500
	25900		25356		26600		28081
$215^2 =$	46225		5400		42900		5300
			30756		21600		33381
			5200		* 64500		5100
			35956				38481
			5000				4900
			40956				43381
			4800				4700
			45756				48081
			4600				
			50356				

Cum

Cum ergo vnicum occurrat quadratum $46225 = 215^2$ vnde fit $100981 = 215^2 + 234^2$, erit hic numerus primus.

EXEMPLVM 3.

§. 48. *Explorare vtrum hic numerus* 1000009 *sit primus nec ne?*

p	1000009
1000	1000000
$3^2 =$	9
	19900
	19909
	19700
	39609
	19500
	59109
	19300
	78409
	19100
	97509
	18900
	116409
	18700
	135109
	18500
	153609
	13300
	171909
	18100
	190009
	17900
	207909
	17700
	225609
	17500
	243109
	17300
	260409
	17100
	277509
	16900
	294409
	16700
	311109
	16500
	327609
	16300
	343909
	16100
	*

*
360009
15900
375909
15700
391609
15500
407109
15300
422409
15100
437509
14900
452409
14700
467109
14500
481609
14300
495909

p	1000009
978..	956484
	43525
	95300
	138825
	90300
	229125
	85300
	314425
	80300
	394725
	75300
	470025

p	1000009
972	944784
$235^2 =$	55225
	94700
	149925
	89700
	239625
	84700
	324325
	79700
	404025
	74700
	478725

p	1000009
997..	994009
	6000
	97200
	103200
	92200
	195400
	87200
	282600
	82200
	364800
	77200
	442000

	1000009
953..	908209
	91800
	92800
	184600
	87800
	272400
	82800
	355200
	77800
	433000

	1000009
995.	990025
	9984
	19800
	29784
	19600
	49384
	19400
	69784
	19200
	88984
	19000
	107984
	18800
	126784
	18600
	145384
	18400
	163784
	18200
	181984
	18000
	199984
	17800
	217784
	17600
	235384
	17400
	252784
	17200
	269984
	17000
	286984
	16800
	303784
	16600
	320384
	16400
	336784
	16200
	352984
	16000
	*

*
368984
15800
384784
15600
400384
15400
415784
15200
430984
15000
445984
14800
460784
14600
475384
14400
489784

Hic

Hic ergo numerus 1000009 duplici modo est in duo quadrata resolubilis quippe $= 1000^2 + 3^2 = 235^2 + 972^2$, vnde is non erit primus: factores vero eius reperientur ex hac formula $\frac{1000 \pm 972}{235 \pm 3}$ ad minimos terminos reducta, vnde oritur;

$$\frac{1000+972}{235+3} = \frac{1972}{238} \overset{2}{\mid} \frac{986}{119} \overset{17}{\mid} \frac{58}{7} \text{ ergo factor } = 3413$$

$$\frac{1000+972}{235-3} = \frac{1972}{232} \overset{4}{\mid} \frac{493}{58} \overset{29}{\mid} \frac{17}{2} \text{ ergo factor } = 293$$

qui factores facilius inuenientur ex formula $\frac{1000-972}{235 \pm 3}$

$\frac{28}{238} = \frac{14}{119} = \frac{2}{17}$ et $\frac{28}{232} = \frac{7}{58}$.

Nouimus ergo esse $1000009 = 293 \cdot 3413$, qui factores nulla alia methodo tam facile reperti fuissent.

EXEMPLVM 4.

§. 49. *Explorare vtrum hic numerus 233033 primus sit nec ne?*

233033	233033	233033	233033
$482^2 =$ 232324	$477^2 =$ 227529	$473^2 =$ 223729	$478^2 =$ 228484
709	5504	9304	4549
9540	9440	9360	9460
10249	14944	18664	14009
9340	9240	9160	9260
19589	24184	27824	23269
9140	9040	8960	9060
28729	33224	36784	32329
8940	8840	8760	8860
37669	42064	45544	41189
8740	8640	8560	8660
46409	50704	54104	49849
8540	8440	8360	8460
54949	59144	62464	58309
8340	8240	8160	8260
63289	67384	70624	66569
8140	8040	7960	8060
71429	75424	78584	74629
7940	7840	7760	7860
79369	83264	86344	82489
7740	7640	7560	7660
87109	90904	93904	90149
7540	7440	7360	7460
94649	98344	101264	97609
7340	7240	7160	7260
101989	105584	108424	104869
7140	7040	6960	7060
109129	112624	115384	111929
6940	6840	6760	6860
116069	* 119464	* 122144	* 118789

Quia

Quia ergo hic numerus, etsi est formae $4n+1$, non est summa duorum quadratorum, vi *Prop. V.* colligimus eum non esse numerum primum. Factores quidem eius hinc assignare non licet, interim tamen concludimus eum saltem duos habere factores formae $4m-1$: qui, inuestigatione instituta, reperientur 467. 499.

EXEMPLVM 5.

§. 50. *Explorare vtrum hic numerus 262657 primus sit nec ne?*

262657	262657	262657	262657
$511^2 = 261121$	$509^2 = 259081$	$506^2 = 256036$	$504^2 = 254016$
1536	3576	6621	8641
10120	10080	10020	9980
11656	13656	$129^2 = 16641$	18621
9920	9880	9820	9780
21576	23536	26461	28401
9720	9680	9620	9580
31296	33216	36081	37981
9520	9480	9420	9380
40816	42696	45501	47361
9320	9280	9220	9180
50136	51976	54721	56541
9120	9080	9020	8980
59256	61056	63741	65521
8920	8880	8820	8780
68176	69936	72561	74301
8720	8680	8620	8580
76896	78616	81181	82881
8520	8480	8420	8380
85416	87096	89601	91261
8320	8280	8220	8180
93736	95376	97821	99441
8120	8080	8020	7980
101856	103456	105841	107421
7920	7880	7820	7780
109776	111336	113661	115201
7720	7680	7620	7580
117496	119016	121281	122781
7520	7480	7420	7380
125016	126496	128701	130161
7320	7280	7220	7180
*132336	*133776	*135921	*137341

Cum igitur hic vnicum quadratum occurrat $16641 = 129^2$ ita vt sit vnico modo $262657 = 129^2 + 496^2$, hique numeri

numeri 129 et 496 ſint inter ſe primi, certum eſt numerum 262657 eſſe primum.

EXEMPLVM 6.

§. 51. *Explorare vtrum hic numerus* 32129 *ſit primus nec ne ?*

32129	32129	32129	32129
$152^2 = 23104$	$177^2 = 31329$	$175^2 = 30625$	$170^2 = 28900$
$95^2 = 9025$	800	1504	3229
12700	15200	3400	3300
* 21725	16000	4904	6529
		3200	3100
32129	32129	8104	9629
$148^2 = 21904$	$173^2 = 29929$	3000	2900
10225	2200	11104	12529
12300	14800	2800	2700
* 22525	* 17000	13904	15229
		2600	2500
		* 16504	* 17729

Hic igitur numerus quoque vnico modo eſt in duo quadrata reſolubilis $= 95^2 + 152^2$, ſed quia hi numeri 95 et 152 non ſunt primi inter ſe, ſed communem diuiſorem habent 19, numerus propoſitus non erit primus, ſed factorem habet $19^2 = 361$, eſtque $32129 = 19^2 . 89$.

SCHOLION.

§. 52. Quanquam haec methodus explorandi numeros vtrum ſint primi nec ne? tantum ad numeros in hac forma $4n + 1$ contentos extenditur, tamen ſaepe numero in diiudicandis numeris magnum ſubſidium afferre poteſt. Quantum autem aliis regulis hoc idem praeſtandi antecellat, quilibet, qui periculum huius rei facere velit, facile experietur. Qui enim numerum millione non minorem via conſueta examinare voluerit, eius diviſionem per omnes numeros primos ad millenarium vsque tentare debet, quod opus intra plures horas non abſoluet: dum ope huius regulae ipſi vix ſemihora opus erit.

DE CON-

DE CONSTRVCTIONE
APTISSIMA MOLARVM ALATARVM

AVCT. L. EVLERO.

Nemo eſt qui ignoret, alas molarum alatarum venti directioni oblique exponi ſolere, vt hoc modo vis lateralis excipiatur qua alae in gyrum agantur, id quod non eueniret, ſi ventus normaliter in alas incideret. Hac de re iam prideme quaeſtio inter Geometras eſt agitata, ſub quonam angulo alae venti impulſionem recipere debeant, vt vi maxima circumagantur, ſicque maximum effectum praeſtare valeant. Plerique quidem hunc angulum conſtituerunt $54°, 45'$, qui etiamnunc fere vbique in praxi obſeruari ſolet; verum notandum eſt ex hoc angulo tum ſolum maximum oriri effectum, quando alae adhuc ſunt in quiete, ac demum ad motum ſunt impellendae. Cum vero machina iam in motu verſatur quoniam ob motum alarum tam vis quam directio venti immutatur, angulus ille hanc praerogatiuam prorſus amittit, atque experientia iam docuit, maiorem effectum obtineri, ſi angulus ille maior quam $54°, 45'$ ſtatuatur. Pendet ergo determinatio huius anguli quoque a motu alarum, qui quo fuerit velocior non difficulter colligere licet, eo maiorem quoque ſumi debere angulum, quem directio venti cum planitie alarum conſtituat. Verum etiam in ipſa alarum celeritate maximi quaedam proprietas locum habet; ſatis enim perſpicuum eſt, ſiue mola nimis celeriter circumagatur, ſiue nimis tarde, vtroque casu effectum produci debiliorem: ex quo intelligitur, dari certum quendam celeritatis gradum, qua si alae circumagantur, maximus inde effectus proficiscatur. Aestimatur autem quantitas effectus ex momento actionis vis impellentis, quod momentum definitur producto ex vi impellente in celeritatem qua machinam mouet; hincque etiam gradus ille celeritatis maxime idoneus vicissim ab obliquitate qua ventus in alas incidit, pendet; vnde duplex nascitur quaestio, qua tam obliquitas alarum ratione directionis venti, quam celeritas motus, quo alae in gyrum aguntur, determinanda proponitur, vt effectus maximus inde obtineatur, seu vt momentum actionis vis impellentis maximum valorem nanciscatur. Quae disquisitio quo latius pateat, eam ita instituam, vt alarum superficiem non planam, sed vtcunque incuruatam sim consideraturus; qua feliciter ad finem perducta concludere tandem licebit, quomodo superficies alarum vbique ad venti directionem comparata esse et quanta celeritate alae gyrari debeant, vt maximum a machinae actione effectum expectare queamus. Vtcunque autem alarum superficies sit incuruata, minima eius elementa pro planis haberi possunt, ex quo inuestigationem hanc a superficiebus planis inchoabo.

PROBLEMA I.

1. *Si ventus data celeritate in superficiem planam quiescentem sub quocunque angulo impingat, definire vim, qua haec superficies a vento sollicitabitur.*

SO-

SOLVTIO.

Sit aa area ſuperficiei planae, quae vim venti excipit, et Φ angulus, quem venti directio cum hoc plano facit: tum vero ſit k altitudo debita celeritate venti. Iam ſi ventus perpendiculariter impingeret, foret eius vis aequalis ponderi columnae aereae, cuius baſis ſit $= aa$ et altitudo $= k$; ſeu haec vis eſſet aequalis ponderi maſſae aereae, cuius volumen $= aak$. Verum propter obliquitatem impulſus haec vis diminui debet in ratione ſinus totius ad ſinum anguli Φ: poſito ergo ſinu toto $= 1$, vis venti in ſuperficiem propoſitam aa celeritate altitudini k debita, et ſub angulo $= \Phi$ incidentis aequabitur ponderi maſſae aereae, cuius volumen $= aak$ ſin. Φ^2, huiusque vis directio perpetuo ad planum propoſitum eſt normalis. Q. E. I.

SCHOLION.

2. Etſi ſolutio huius problematis ſatis ſuperque eſt nota, tamen ab eo initium ducere eſt viſum, vt menſuras abſolutas, quibus in ſequentibus vtar diſtinctius explicare liceat. Primum igitur grauitate ſpecifica aeris cognita haec vis ad cognitam ponderum menſuram reducitur; tametſi vero denſitas aeris valde eſt variabilis, ea plerumque octingenties minor aeſtimatur, quam denſitas aquae; vnde ſi formula aak ſin. Φ^2 per 800 diuiditur, reperitur volumen aquae, cuius ponderi vis inuenta aequatur; quod ſi in pedibus cubicis exprimitur, facile ad libras reducitur tribuendo 70 ℔ ſingulis pedibus cubicis aquae. Quod deinde ad celeritatem venti attinet, ea per ſpa-

tium definiri solet, quod ventus singulis minutis secundis percurrit, quae mensura, quo facilius ad illam altitudinem k reuocari possit, omnes longitudines per datam mensuram metiri conuenit; pro qua assumam pedem Rhenanum. Si igitur venti celeritas sit $= e$ pedum vno minuto secundo, quoniam graue hoc tempore delabitur per spatium $15,625$ pedum et celeritate acquisita spatium duplum $31,25$ ped: conficere valet, erit $\sqrt{15,625} : \sqrt{k} = 31,25 : e$ vnde reperitur $e = 2\sqrt{15,625\,k} = 250\sqrt{\frac{k}{1000}} = 25\sqrt{\frac{1}{10}k}$ et $k = \frac{ee}{62\frac{1}{2}} = \frac{2ee}{125}$ sicque celeritates vtroque modo expressae facile inter se conferri possunt.

PROBLEMA II.

TAB. I. 3. *Si ventus celeritate data secundum datam directionem in elementum superficiei cuiuscunque quiescentis impingat, inuenire vim, qua hoc elementum sollicitabit.*

SOLVTIO.

Fig. 1. Referatur elementum superficiei propositum ad planum quoddam fixum, quod plano tabulae repraesentetur, sitque elementum in sublimi vtcunque positum in Z, vnde ad planum tabulae demittatur perpendiculum ZY. Iam cum elementum hoc pro plano haberi possit, sit eius area infinite parua $= dS$; continuetur hoc planum donec planum tabulae intersecet, sit intersectio recta EF, ita vt planum EZF superficiem propositam in puncto Z tangat. Ex Y ad EF ducatur perpendicularis

YT

YT, iunctaque Z T in eam normalis ducatur Y O, quae simul erit normalis in planum E Z F; ipsi O Y agatur parallela Z N occurrens ipsi T Y productae in N, erit N Z tam ad rectam Z T quam ad planum E Z F normalis. His positis angulus Z T Y erit mensura inclinationis plani E Z F ad planum tabulae, ac ponatur huius anguli complementum seu angulus Y Z T $= \Phi$; et rectae Y Z $= z$ et Y T $= t$; erit $t = z$ tangens Φ; et Y O x sin. Φ, itemque Y N $= \frac{zz}{t} = z$ cos. Φ et Z N $= \frac{z}{\sin.\Phi}$. Exprimat nunc recta Z V directionem venti, cuius celeritas debita sit altitudini k, ita scilicet, vt si ventus per elementum Z penetraret, sit secundum directionem ZV progressurus; ac manifestum est totum negotium huc redire, vt rectae ZV inclinatio ad planum E Z F inuestigetur, posita enim hac inclinatione $= \omega$ erit vis venti in elementum $Z = kdS$ sin. ω^2, quia angulus ω exhibet inclinationem directionis venti Z V ad planum elementi E Z F. Verum ad hunc angulum ω inueniendum ex V in planum E Z F ducatur perpendiculum V S, iunctaque Z S, erit V Z S iste angulus quem vocauimus $= \omega$, ideoque sin. $\omega = \frac{VS}{ZV}$. Ex V ducatur ad E F normalis V R, eritque triangulum R V S simile triangulo T Y O; Hinc si Y P ad Y T normalis agatur, et ex P ducatur P Q ipsi Y O parallela, erit P Q normalis in planum E Z F, et ob T P $=$ R V habebitur P Q $=$ V S. Quare si vocetur Y V $= v$ et angulus T Y V $= \zeta$, quibus positio puncti V continetur, erit P Y $= v$ cos. ζ, ideoque T P $= z$ tangens $\Phi - v$ cos. ζ atque PQ $=$ TP cos. $\Phi = z$ sin. $\Phi - v$ cos. ζ cos. $\Phi =$ VS. Ergo ob Z V $= \sqrt{(zz + vv)}$ erit sin. $\omega = \frac{z \sin.\Phi - v \cos.\zeta \cos.\Phi}{\sqrt{(zz+vv)}}$, vnde dicitur vis venti in elementum propositum $Z = \frac{k\,dS\,(z\,\text{sin.}\,\Phi - v\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\Phi)^2}{zz + vv}$ qua expressione volumen aeris indicatur, cuius pondus vi quaesitae est aequale. Huius autem vis directio est recta Z N normalis ad planum E Z F, existente $YN = z\,\text{cos.}\,\Phi$. Q. E. I.

COROLL. 1.

4. In hac solutione assumsimus elementum Z a vento planum tabulae versus impelli, ita vt inde vis nascatur punctum Z secundum directionem Z N vrgens. Hoc autem non erit nisi sit $z\,\text{sin.}\,\Phi > v\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\Phi$ seu $z\,\text{tang.}\,\Phi - v\,\text{cos.}\,\zeta = TP > 0$ nam si fuerit $z\,\text{sin.}\,\Phi - v\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\Phi$ quantitas negatiua etiamsi eius quadratum, quo vis inuenta exprimitur, aeque sit affirmatiuum, tamen vis directio in contrarium mutatur. Quia enim hoc casu $z\,\text{tang.}\,\Phi - v\,\text{cos.}\,\zeta$ seu T P valorem sortitur negatiuum manifestum est venti directionem vltra Z productam Z V supra planum E Z F prominere, ideoque ventum a regione tabulae in elementum Z incurrere, vnde eius vis in plagam contrariam tendet. Ita quanquam hoc discrimen per formulam inuentam non indicatur, tamen tenendum est expressionem vis venti $\frac{k\,dS\,(z\,\text{sin.}\,\Phi - v\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\Phi)^2}{zz + vv}$ valorem habere affirmatiuum si fuerit $z\,\text{sin.}\,\Phi > v\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\Phi$, sin autem sit $z\,\text{sin.}\,\Phi < v\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\Phi$ illam expressionem vis negatiue assumi debere.

COROLL. 2.

5. Si fiat $z\,\text{sin.}\,\Phi = v\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\Phi$, seu $z\,\text{tang.}\,\Phi = v\,\text{cos.}\,\zeta$, vis venti omnino euanescit: id quod manifestum

fectum eſt quia tum interuallum P T ideoque et V R in nihilum abit; Cadet ergo punctum V in rectam E F, atque directio venti Z V in ipſo plano E Z F erit ſita, vnde elementum Z a vento tantum ſtringetur neutiquam vero impelletur, quia angulus incidentiae V Z S euaneſci. Ex quo caſu eo clarius perſpicitur, ſi ſit z tang. $\Phi > v$ coſ. ζ elemento Z planitiem ſuperiorem ſeu eam, quae a plano tabulae eſt auerſa venti impulſionem recipere, ſin autem z tang. $\Phi < v$ coſ. ζ planitiem inferiorem quae planum tabulae reſpicit, a vento impelli, ſicque effectum plane contrarium produci debere.

COROLL. 3.

6. Si celeritas venti non per altitudinem ipſi debitam k detur, ſed ſpatium exhibeatur, quod ventus vno minuto ſecundo percurrat, vis venti aeque facile exprimi poterit. Sit enim ſpatium a vento vno minuto ſecundo percurſum $= e$ pedum Rhen. atque reliquae quantitates in eadem menſura exprimantur, erit vti vidimus (2), $k = \frac{2}{125} ee$, ita vis qua elementum $Z = dS$ ſecundum directionem Z N impelletur, aequalis erit ponderi voluminis aeris, quod eſt $= \frac{2}{125} ee\,dS . \frac{(z\,\text{ſin.}\,\Phi - v\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{zz + vv}$ ſeu poſita ratione grauitatis ſpecificae aeris ad aquam vt 1 ad 800, vis haec ponderi voluminis aquae aequabitur, quod eſt $= \frac{ee\,dS\,(z\,\text{ſin.}\,\Phi - v\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{50000\,(zz + vv)}$ ped. cub.

COROLL. 4.

7. Poteſt etiam ad calculum contrahendum coefficiens iſte numericus penitus omitti, atque vis venti in elemen-

elementum Z ſimpliciter hac formula $\frac{eed\,S\,(z\,ſin.\,\Phi - v\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\Phi)^2}{zz+vv}$ exprimi, dummodo meminerimus, quando hanc vim d menſuram abſolutam reducere voluerimus, iſtam expreſſionem vel per $\frac{2}{125}$ vel per $\frac{1}{50000}$ multiplicari oportere, aprout quantitatem huius vis vel per pondus voluminis aeris vel per pondus voluminis aquae expreſſam deſideremus: Tum vero quantitates, vt iam monui, ex pede Rhen. pro vnitate aſſumta definiri debent.

C O R O L L. 5.

8. Vis a vento ſecundum directionem Z N elemento Z impreſſa $= \frac{eed\,S\,(z\,ſin.\,\Phi - v\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\Phi)^2}{zz+vv}$ commodiſſime reſoluitur in binas vires, quarum altera vrgeat ſecundum directionem Z Y ad planum tabulae normalem, altera vero agat ſecundum directionem ipſi Y N parallelam. Nam ob angulum $YNZ = YZT = \Phi$, erit

vis ſecundum $ZY = \frac{eed\,S\,(z\,ſin.\,\Phi - v\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\Phi)^2}{zz+vv}\,ſin.\,\Phi$

vis ſecundum $YN = \frac{eed\,S\,(z\,ſin.\,\Phi - v\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\Phi)^2}{zz+vv}\,coſ.\,\Phi$

Id quod intelligendum eſt ſi fuerit $z\,ſin.\,\Phi > v\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\Phi$; ſin autem ſit $z\,ſin.\,\Phi < v\,coſ\,\zeta\,coſ.\,\Phi$, expreſſiones iſtae inuentae negatiuae capi debebunt.

P R O B L E M A. III.

9. *Si ſuperficies quaecunque circa axem fixum data celeritate gyretur, atque directio venti ſit ipſi axi parallela, ſecundum quam in ſuperficiem data celeritate incurrat, inuenire vim, qua quoduis ſuperficiei elementum a vento impelletur.*

SOLV-

SOLVTIO.

Tranſeat axis per punctum C ſitque ad planum tabulae normalis, ita vt etiam directio venti in planum tabulae ſit perpendicularis, cuius celeritas debita ſit altitudini $= k$, ſeu ſingulis minutis ſecundis ſpatium e pedum abſoluat, ita vt ſit $k = \frac{2}{125} e e$ pedum. Iam motus gyratorius ſuperficiei propoſitae circa axem C tantus ſit, vt eius punctum ab axe diſtans interuallo $= f$ percurrat ſpatium u pedum ſingulis minutis ſecundis, ita vt u exprimat hanc celeritatem, ſi celeritas venti exponatur ſpatio e, quod pariter minuto ſecundo conficitur. Sit iam elementum quodcunque ſuperficiei Z in ſublimi poſitum, cuius area ſit $= dS$, vnde ad planum tabulae demittatur perpendiculum $ZY = z$: iungatur recta $CY = s$, quae puncti Z diſtantiam ab axe praebebit, et puncti Z motus circa axem conueniet cum motu puncti Y circa eundem axem. Cum autem diſtantiae f ab axe celeritas ſit $= u$, ob motum angularem diſtantiae $CY = s$ celeritas conueniet $= \frac{us}{f}$, quia celeritas motus angularis ſunt diſtantiis ab axe proportionales. Habebit ergo punctum Y celeritatem $= \frac{us}{f}$ ſecundum directionem Yq ad CY in plano tabulae normalem, eique aequalis erit celeritas puncti Z et ſecundum directionem ipſi Yy parallelam. Venti autem in Z incurrentis directio erit ZY normalis in planum tabulae quippe directioni axis C parallela, atque ſecundum hanc directionem in elementum Z impingeret, ſi hoc elementum quieſceret; verum cum id ipſum ſit in motu, tam celeritas venti, quam eius directio, qua elementum percutit, inde mutabitur. Ad quam mutationem inueniendam Fig. 2.

concipiatur tam elemento quam vento insuper motus aequalis et contrarius ei, quo elementum Z mouetur, imprimi, vt hoc modo ipsum elementum ad quietem reducatur, atque venti motus relatiuus in elementum obtineatur. Ducatur ergo Zz ipsi Yy parallela, capiaturque Zz ad ZY in ratione celeritatis $\frac{us}{f}$ ad celeritatem e, vt sit $Zz = \frac{usz}{ef}$, ac repraesentante ZY veram venti celeritatem e, eius motus relatiuus componetur ex motu secundum ZY et motu secundum Zz. Compleatur ergo parallelogrammum $ZYVz$, erit $YV = \frac{usz}{ef}$ et cum Yy in directum iacebit; quo facto diagonalis ZV referet directionem venti relatiuam in elementum Z, atque celeritas relatiua erit ad celeritatem veram e, vt est ZV ad ZY, ita vt celeritas relatiua sit $= \frac{ZV}{ZY} \cdot e$: Quodsi ergo tantisper angulum, quem directio ZV cum planitie elementi constituit, ponamus $= \omega$ erit vis elemento impressa $= \frac{ZV^2}{ZY^2}\, ee\, dS$ fin. ω^2; seu cum sit $ZV^2 = ZY^2 + YV^2 = zz + \frac{uusszz}{eeff}$ erit haec vis $= (ee + \frac{uuss}{ff})\, dS$ fin. ω^2, quae in planitiem elementi est normalis. Ponamus iam hanc planitiem seu planum tangens superficiem in puncto Z plano tabulae occurrere in recta EF, ad quam ex Y perpendiculum ducatur YT, et ex Y in ductam ZT normalis agatur YO, erit haec in ipsam planum perpendicularis, cui si parallela ducatur ZN rectae TY productae occurrens in N, erit haec ZN directio secundum quam elementum Z a vento impelletur. Porro ex V in TY perpendiculum VP demittatur, itemque ex P in ZT perpendiculum PQ, atque vt in solutione praecedentis problematis vidimus

vidimus, praebebit $\frac{PQ}{ZV}$ finum anguli, quo directio venti Z V in planum E Z F eft inclinata, ita vt fit: fin. $\omega = \frac{PQ}{ZV}$. Hinc vis venti in elementum $Z = d$ S exerta fiet $= \frac{PQ^2}{ZY^2} eed S = PQ^2 . \frac{ee}{zz} d$ S. Iam ad P Q commode exprimendum, ponatur inclinatio elementi feu plani E Z F ad directionem venti veram Z Y, feu angulus $YZT = \Phi$, erit $YT = z$ tang. Φ; $YN = z$ cot. Φ; et $YO = z$ fin. Φ. Praeterea vocetur angulus $FEY = \zeta$, cui aequalis erit angulus V Y P, vnde ob $YV = \frac{usz}{ef}$, fiet $YP = \frac{usz}{ef}$ cof. ζ, hincque habebitur $TP = z$ tang. $\Phi - \frac{usz}{ef}$ cof. ζ, ex quo tandem elicitur $PQ = z$ fin. $\Phi - \frac{usz}{ef}$ cof. ζ cof. $\Phi = \frac{z}{e}$ (e fin $\Phi - \frac{us}{f}$ cof. ζ cof. Φ). Quam ob rem vis, qua elementum $Z = dS$ a vento follicitabitur, erit $= dS$ (e fin. $\Phi - \frac{us}{f}$ cof. ζ cof. $\Phi)^2$, cuius vis directio eft recta Z N normalis ad fuperficiem E Z F, exiftente $YN = z$ cot. Φ. Q. E. I.

COROLL. 1.

10. Si ergo haec expreffio per fractionem $\frac{2}{125}$ multiplicetur, et pes rhenanus pro communi menfura fumatur, prodibit volumen aeris, cuius ponderi haec vis aequatur. Vel fi eadem expreffio per $\frac{1}{50000}$ multiplicetur, obtinebitur volumen aquae, cuius pondus huic vi eft aequale, fi quidem aer octingenties leuior fit quam aqua: Ad hoc autem notandum eft, celeritates per fpatia vno minuto fecundo confecta, haecque fpatia pariter in pedibus exprimi debere, quem celeritates exprimendi modum in pofterum retinebo.

COROLL. 2.

11. Hic iterum tenendum eſt elementum Z non in directione ZN impelli, niſi ſit e ſin. $\Phi > \frac{us}{f}$ coſ. ζ, coſ. Φ, vel e tangens $\Phi > \frac{us}{f}$ coſ ζ. Si enim fuerit e tangens $\Phi < \frac{us}{f}$ coſ. ζ, vis euadit negatiua, etiam, ſi id formula inuenta non declaret, atque elementum in plagam oppoſitam NZ vrgebitur; a parte ſcilicet tum poſtica impulſum aeris excipiet. Perinde ac tabula vento velocius ſecundum eandem plagam mota non ſolum a vento nullam impulſionem accipit, ſed etiam ab aere poſteriori repellitur.

COROLL. 3.

12. Vis haec elementum Z ſecundum directionem ZN ſollicitam commode reſoluitur ſecundum directiones ZY et YN. Hinc autem orietur vis ſollicitans

ſecundum directionem $ZY = dS(e\text{ſin.}\Phi - \frac{us}{f}\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\Phi)^2\text{ſin.}\Phi$

ſecundum directionem $YN = dS(e\text{ſin.}\Phi - \frac{us}{f}\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\Phi)^2\text{coſ.}\Phi$

Haec autem poſterior vis ſecundum directiones Yy et CY reſoluta dabit vim ſollicitantem

ſecundum directionem $Yy = dS(e\text{ſin.}\Phi - \frac{us}{f}\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\Phi)^2\text{coſ}\,\zeta\,\text{coſ}\,\Phi$

ſecundum directionem $CY = dS(e\text{ſin.}\Phi - \frac{us}{f}\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\Phi)^2\text{ſin.}\zeta\,\text{coſ.}\Phi$

ex quibus effectus vis venti ad motum gyratorium ſuperficiei perturbandum colligi poteſt.

COROLL. 4.

13. Perſpicuum autem eſt vires ſecundum directiones ZY et CY vrgentes nihil ad motum gyratorium conferre, quia vtraque ad directionem motus eſt normalis;

lis; Prior enim vis elementum Z tantum ſecundum venti directionem ſollicitat, altera vero id ab axe motus C directe reuellere conatur; Sicque ſola vis in directione Yy, ſecundum quam punctum Z re vera mouetur, reſtat qua motus totius ſuperficiei afficiatur.

COROLL. 5.

14. Momentum huius vis ad motum gyratorium accelerandum ergo inuenietur, ſi vis per longitudinem vectis CY in quem ſecundum Yy normaliter agit, multiplicetur. Cum igitur ſit $CY = s$ erit momentum vis venti ad motum gyratorium accelerandum quatenus ex elemento $Z = dS$ reſultat $s\,dS\,(e\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2$ $\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi$

COROLL. 6.

15. Simili modo momentum actionis huius vis venti definietur. Si vis, quae punctum Z ſecundum motus ſui directionem propellens, quae eſt ea, quam ſecundum Yy agere inuenimus, per celeritatem puncti, Z, quae eſt $= \frac{us}{f}$, multiplicetur. Hanc ob rem vis venti elementum $Z = dS$ impellens praebebit hoc momentum actionis

$$\frac{us\,dS}{f}\,(e\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{us}{f}\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi$$

quod ergo reperitur, ſi momentum illud ſtaticum per $\frac{u}{f}$ multiplicetur.

SCHOLION.

16. Non opus eſſe duco id, quod hic momentum actionis appello, etiamſi haec denominatio noua ſit,

peculiari definitione declarare; cum vis huius denominationis ex applicatione, quam feci, ſponte appareat. Quodſi enim machina quaecunque a vi quacunque in motu conſeruetur, ſpectari debet punctum machinae cui haec vis eſt applicata, huiusque inſuper puncti celeritas et directio ſecundum quam mouetur, tum niſi directio vis ſollicitantis in hanc ipſam directionem incidat, ea per notas reſolutionis regulas ad hanc directionem eſt reducenda, vt obtineatur vis punctum iſtud machinae ſecundum motus ſui directionem ſollicitans, quae etiam tota ad motum machinae accelerandum inſumeretur, niſi obſtacula accelerationem motus impedirent. Tum iſta vis, ſi per celeritatem puncti, cui eſt applicata, multiplicetur, productum erit id, quod hic momentum actionis appello. Vſus autem huius momenti actionis ampliſſimus eſt in diiudicandis omnis generis machinis, nam ſi omnium virium, quibus machina quaepiam incitatur, hoc modo momenta actionis capiantur, atque in vnam ſummam coniiciantur, huic ſummae ſemper aequalis eſt effectus, quem machina producere valet, quocunque demum modo machina ſit ex machinis ſimplicibus compoſita. Quare ſi machina viriumque applicatio ita inſtituatur, vt omnium iunctim ſumtarum momentum actionis fiat maximum, machina quoque maximum edet effectum, quo maior ab iisdem viribus nullo modo obtineri queat. In praeſenti quidem caſu momentum actionis venti in elementum Z impingentis, ita eſt comparatum, vt pluribus modis maximum valorem adipiscatur. Primo enim celeritas u ita definiri poteſt, vt momentum maximum euadat. Deinde tam angulus ζ quam angulus

angulus Φ, quibus inclinatio elementi reſpectu venti continetur, certos valores obtinere poſſunt, vt momentum actionis fiat maximum; atque ſi litteris u, ζ, et Φ ſimul valores ex natura maximi eruti tribuantur, momentum actionis erit maximum maximorum. Verum huiusmodi inueſtigationem hic, vbi adhuc de viribus elementaribus ſermo eſt, ſuſcipere non conuenit, ſed eam differam, donec ad vires finitas ſimus peruenturi.

PROBLEMA IV.

17. *Si ſuperficies quaepiam circa axem fixum data celeritate gyretur, atque directio venti ad hunc axem ſit vtcunque inclinata, ſecundum quam in ſuperficiem data celeritate impingat, inuenire vim, qua quoduis ſuperficiei elementum a vento impelletur.*

SOLVTIO.

Transeat axis per punctum C ſitque is ad planum tabulae normalis, venti autem directio ſit vbique rectae HC parallela, ad cuius poſitionem inueniendam ex eius puncto quopiam H ad planum tabulae demittatur perpendiculum HG, quod axi erit parallelum, et angulus CHG exhibebit inclinationem venti ad axem. Tum ducatur GC in plano tabulae ac directio venti HC determinabitur per angulum CHG et poſitionem rectae GC ſuper plano tabulae. Vocetur ergo angulus CHG $= \theta$, quo directio venti ad axem inclinatur. Deinde conſideretur ſuperficiei elementum quodcunque Z in ſublimi poſitum, cuius area ſit $= dS$, indeque ad planum tabulae demittatur perpendiculum ZY iunctaque CY, cuius reſpectu poſitionem rectae GC noſſe oportet, Fig. 3.

vocen-

vocentur $ZY = z$: $CY = s$, et angulus $YCG = \rho$. Porro planum tangens superficiem in Z secet planum tabulae recta E F, sitque angulus $YEF = \zeta$, et inclinatio plani E Z F ad rectam Z Y sit $= \Phi$ ad quem angulum repraesentandum ducatur vt ante Y T normalis ad E F, iunctaque Z T, erit angulus $YZT = \Phi$ ideoque $YT = z$ tang. Φ. Tum recta Y O ex Y in T Z perpendiculariter ducta erit simul in planum tangens E Z F perpendicularis, eritque $YO = z$ sin. Φ, ac si Z N pariter ad hoc planum sit normalis, fiet $YN = z$ cot. Φ, et angulus $YNZ = YZT = \Phi$. His positis sit Z S directio venti in elementum Z impingentis producta, erit Z S ipsi H C parallela, itemque Y S ipsi G C parallela, hinc ergo habentur angulo: $YZS = GHC = \theta$, et $CYS = YCG = \varrho$. Ergo ob angulum ZYS rectum erit $YS = z \operatorname{tang}. \theta$ et $ZS = \frac{z}{\cos. \theta}$, item ob angulum $EYT = 90° - \zeta$ erit $TYS = \varrho + \zeta - 90°$, vnde si ex S ad T Y perpendicularis S R ducatur erit $YR = z$ tang. θ cos. $(\varrho + \zeta - 90°) = z$ tang. θ sin. $(\zeta + \varrho)$ propter angulum $YSR = 180° - \zeta - \varrho$. Inuenta directione venti vera ZS, secundum eandem elementum $Z = dS$ feriretur, si id quiesceret: motum igitur eius gyratorium considerare oportet. Sit igitur u celeritas in distantia $= f$ ab axe, eritque celeritas gyratoria puncti $Z = \frac{us}{f}$, cuius directio erit parallela ipsi Yy ad CY normali: Quare si celeritas venti vera secundum directionem suam ZS ponatur $= e$ atque ipsi Yy ducatur parallela SV tanta vt sit $ZS : SV = e : \frac{us}{f}$, erit $SV = \frac{us}{ef} ZS = \frac{usz}{ef \cos. \theta}$. Iam recta ZV praebebit directionem relati-

vam,

vam, qua ventus in elementum Z impinget, eiusque celeritas relatiua erit $= \frac{ZV}{ZS} e$. Superest igitur, vt inclinatio huius directionis ZV ad planum EZF indagetur; ad hoc ducatur VP ipsi YT normalis, et quia VS est ad EY normalis, quippe ipsi Yy parallela, erit angulus $SVP = EYT = 90° - \zeta$, vnde fiet $PR = VS \text{ cos}. \zeta = \frac{usz \text{ cos}. \zeta}{ef \text{ cos}. \theta}$, et $TP = TY - YR - PR$ dabit

$$TP = z \text{ tang}. \Phi - z \text{ tang}. \theta \text{ sin}. (\zeta + \varrho) - \frac{usz \text{ cos}. \zeta}{ef \text{ cos}. \theta}$$

Ex P ad ZT ducatur perpendicularis PQ ob ang. $PTQ = 90 - \Phi$, erit $PQ = z \text{ sin}. \Phi - z \text{ tang}. \theta \text{ sin}. (\zeta + \varrho) \text{ cos}. \Phi - \frac{usz \text{ cos}. \zeta \text{ cos}. \Phi}{ef \text{ cos}. \theta}$

At ex praecedentibus patet rationem $\frac{PQ}{ZV}$ dare sinum anguli, quo venti directio ZV ad elementum Z inclinatur, vnde cum celeritas sit $= \frac{ZV}{ZS} e$, erit vis venti in hoc elementum exerta $= dS . \frac{ZV^2}{ZS^2} ee . \frac{PQ^2}{ZV^2} = ee dS . \frac{PQ^2}{ZS^2} = dS \left(\frac{e . PQ \text{ cos}. \theta}{z} \right)^2$, ob $ZS = \frac{z}{\text{cos}. \theta}$. Quam ob rem vis quaesita erit $= dS (e \text{ cos}. \theta . \text{ sin}. \Phi - e \text{ sin}. \theta . \text{ sin}. (\zeta + \varrho) \text{ cos}. \Phi - \frac{us}{f} \text{ cos}. \zeta \text{ cos}. \Phi)^2$ atque directio huius vis est recta ZN ad planum EZF normalis, cuius positionem ita inuenimus determinatam, vt sit $YN = z \text{ cos}. \Phi$. Haec autem expressio dat volumen vel aeris vel aquae, cuius pondus isti vi est aequale, prout ea vel per $\frac{1}{125}$ vel per $\frac{1}{50000}$ multiplicetur. Q. E. I.

COROLL. 1.

18. Hic iterum notandum est, vim, qua elementum Z in directione ZN impelli inuenimus, fieri negatiuam, ideoque in regionem oppositam impelli, si fuerit

$e \cos\theta \sin\Phi < e \sin\theta \sin(\zeta+\varrho)\cos\Phi + \frac{us}{f}\cos\zeta\cos\Phi$ seu $\operatorname{tang}\Phi < \operatorname{tang}\theta \sin(\zeta+\varrho) + \frac{us}{ef}\frac{\cos\zeta}{\cos\theta}$. Quare vt vis illa fit affirmatiua, vti in figura repraefentatur, atque elementum Z fecundum directionem Z N follicitet, neceffe eft, vt fit

$e \cos\theta \sin\Phi > e \sin\theta \sin(\zeta+\varrho)\cos\Phi + \frac{us}{f}\cos\zeta\cos\Phi$

feu $\frac{ef}{us} > \frac{\cos\zeta}{\cos\theta \operatorname{tang}\Phi - \sin\theta \sin(\zeta+\varrho)}$; ad quod eo diligentius eft attendendum, quia hoc difcrimen per formulam inuentam non indicatur.

COROLL. 2.

19. Refolutio huius vis fimili modo inftituitur, quo in problemate praecedente, oriuntur autem hinc vires

fecundum $ZY = dS(e\cos\theta\sin\Phi - e\sin\theta\sin(\zeta+\varrho)\cos\Phi - \frac{us}{f}\cos\zeta\cos\Phi)^2\sin\Phi$

fecundum $CY = dS(e\cos\theta\sin\Phi - e\sin\theta\sin(\zeta+\varrho)\cos\Phi - \frac{us}{f}\cos\zeta\cos\Phi)^2\sin\zeta\cos\Phi$

fecundum $Yy = dS(e\cos\theta\sin\Phi - e\sin\theta\sin(\zeta+\varrho)\cos\Phi - \frac{us}{f}\cos\zeta\cos\Phi)^2\cos\zeta\cos\Phi$

ex quarum vltima obtinetur momentum vis venti ad motum gyratorium accelerandum, quod eft

$sdS(e\cos\theta\sin\Phi - e\sin\theta\sin(\zeta+\varrho)\cos\Phi - \frac{us}{f}\cos\zeta\cos\Phi)^2\cos\zeta\cos\Phi$

momentum autem actionis eiusdem vis eft.

$\frac{us}{f}dS(e\cos\theta\sin\Phi - e\sin\theta\sin(\zeta+\varrho)\cos\Phi - \frac{us}{f}\cos\zeta\cos\Phi)^2\cos\zeta\cos\Phi$.

COROLL. 3.

20. Tribus ergo cafibus momentum actionis euanefcere poteft, quorum primus eft fi $\cos\zeta = 0$ feu angulus ζ rectus, ideoque recta E F ad C Y normalis. Secun-

Secundo momentum actionis etiam fit $= 0$, si cof. $\Phi = 0$ si $\Phi = 90^\circ$, quod euenit, si planum tangens EZF fuerit ad axem motus normale: Tertio momentum actionis fit nullum, si angulus Φ eiusmodi fuerit vt fit

$$\text{tang.}\, \Phi = \text{tang.}\, \theta \,\text{fin.}\, (\zeta + \varrho) + \frac{us}{ef} \cdot \frac{\text{cof.}\, \zeta}{\text{cof.}\, \theta}.$$

PROBLEMA V.

21. *Si ventus data celeritate fecundum directionem quamcunque in alam molae alatae, quae velocitate quacunque circa axem gyretur, impingat, atque fuperficies alae habeat figuram vtcunque incuruatam, inuenire vim, quam ventus in alam exerit, eiusque momentum actionis.*

SOLVTIO.

Transeat axis molae per punctum C fitque normalis ad planum tabulae, venti autem directio fit vbique parallela rectae HC, ex cuius puncto quopiam H in planum tabulae normalis demittatur HG, quae cum axi fit parallela, erit CHG angulus, quem directio venti cum axe conftituit: fit ergo vt ante hic angulus CHG $= \theta$. Superficies alae quaecunque fit referatur ad planum tabulae, in quo fumatur recta CA inftar axis, ad quem coordinatae accommodentur: quae recta CA fimul cum ala in gyrum agatur: dum recta GCB a venti directione pendens manet immota; fitque angulus BCA $= \eta$, qui dum ala gyratur, continuo fiat maior, vim autem venti indagari oportet, dum ala in loco, quem figura exhibet, haeret, ficque quamdiu vim venti per totam alae fuperficiem colligimus, hunc angulum η Fig. 4.

 tan-

tanquam conſtantem ſpectabimus, erit ergo ang. A C G $= 180^\circ - \eta$. Sit venti celeritas $= e$, et poſita diſtantia C A $= f$, ſit celeritas motus gyratorii in hac diſtantia, qua punctum A circa C ſecundum A a progreditur $= u$. Iam ex puncto quocunque ſuperficiei alae Z ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y et ex Y ad rectam C A ducatur normalis Y X, ponanturque tres coordinatae orthogonales, quibus locus puncti Z definitur $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$; et quia ſuperficies alae tanquam data ſpectatur, determinabitur z per x et y, ſeu erit z functio quaepiam ipſarum x et y; ſit igitur differentialibus ſumendis $dz = p\,dx + q\,dy$. Ducatur recta C Y, erit $CY = \sqrt{(xx + yy)}$, et ſin. $XCY = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$, coſ. $XCY = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Hinc applicatione ad problema praecedens facta, erit $CY = s = \sqrt{(xx+yy)}$ et angulus $YCG = \varrho = 180^\circ - \eta - XCY$, vnde ſin. $\varrho =$ ſin. $(\eta + XCY) = \frac{x\,\text{ſin.}\,\eta + y\,\text{coſ.}\,\eta}{\sqrt{(xx+yy)}}$ et coſ. $\varrho = \frac{y\,\text{ſin.}\,\eta - x\,\text{coſ.}\,\eta}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Sit D Z F planum tangens ſuperficiem alae in puncto Z exiſtente Y D rectae C A parallela, et ex natura tangentium erit $YF = \frac{z\,dy}{dz}$ poſito x conſtante, et $YD = \frac{z\,dx}{dz}$ poſito y conſtante. Cum igitur priori caſu ſit $dz = q\,dy$, et poſteriori $dz = p\,dx$ erit $YF = \frac{z}{q}$ et $YD = \frac{z}{p}$, vnde $DF = \frac{z}{pq}\sqrt{(pp+qq)}$ Hinc porro erit ſin. $FDY = \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)}}$ et coſ. $FDY = \frac{q}{\sqrt{(pp+qq)}}$ Iam quia ſupra poſuimus angulum Y E F $= \zeta$ erit $\zeta = FDY + XCY$, vnde obtinebimus: ſin. $\zeta = \frac{px + qy}{\sqrt{(xx+yy)(pp+qq)}}$ et coſ. $\zeta = \frac{qx - py}{\sqrt{(xx+yy)(pp+qq)}}$.

Prae-

Praeterea vero erit $\zeta + \varrho = 180 - \eta + FDY$, vnde colligitur fin. $(\zeta + \varrho) =$ fin. $(\eta - FDY) = \frac{q\, \text{fin.}\,\eta - p\, \text{cof.}\,\eta}{\surd(pp+qq)}$, ficque iam omnes valores fumus confecuti, qui in expreffiones virium quaefitarum ingrediuntur, praeter angulum Φ, ad quem inueniendum ex Y ad DF normalis ducatur YT, iunctaque ZT, erit angulus $YZT = \Phi$. At ob $DF : FY = DY : YT$ erit $YT = \frac{z}{\surd(pp+qq)}$, ideoque tang. $\Phi = \frac{YT}{YZ} = \frac{1}{\surd(pp+qq)}$, ac propterea fin. $\Phi = \frac{1}{\surd(1+pp+qq)}$ et cof. $\Phi = \frac{\surd(pp+qq)}{\surd(1+pp+qq)}$. His valoribus fubftituendis habebimus:

e cof. θ fin. $\Phi = \frac{e\, \text{cof.}\,\theta}{\surd(1+pp+qq)}$; e fin. θ fin. $(\zeta + \varrho)$ cof. $\Phi = \frac{e\, \text{fin.}\,\theta\,(q\, \text{fin.}\,\eta - p\, \text{cof.}\,\eta)}{\surd(1+pp+qq)}$ et $\frac{u\,s}{f}$ cof. ζ cof. $\Phi = \frac{u(qx-py)}{f\surd(1+pp+qq)}$. Ponatur ad abbreuiandum $V = e$ cof. $\theta - e$ fin. $\theta\,(q$ fin. $\eta - p$ cof. $\eta) - \frac{u}{f}(qx - py)$, eritque e cof. θ fin. $\Phi - e$ fin. θ fin. $(\zeta+\varrho)$ cof. $\Phi - \frac{u\,s}{f}$ cof. ζ cof. $\Phi = \frac{V}{\surd(1+pp+qq)}$. Si iam areola elementi fuperficiei in Z, quae pofita eft $= dS$ in plano tabulae elemento $dx\,dy$ immineat, erit $dS : dx\,dy = ZT : YT = 1 :$ fin. Φ ideoque $dS = dx\,dy\,\surd(1+pp+qq)$: vnde vis, qua elementum Z fecundum directionem normalem ZN vrgetur, erit $= \frac{VV\,dS}{1+pp+qq} = \frac{dx\,dy}{\surd(1+pp+qq)} \cdot VV$. Hinc porro orietur vis fecundum directionem $ZY = \frac{dx\,dy}{1+pp+qq} \cdot VV$, et vis fecundum directionem CY feu YI $= \frac{(px+qy)\,dx\,dy}{(1+pp+qq)\surd(xx+yy)} \cdot VV$; et vis fecundum $Yy = \frac{(qx-py)\,dx\,dy}{(1+pp+qq)\surd(xx+yy)} \cdot VV$. Ex hac vltima vi oritur momentum potentiale, ad motum alae accelerandum $= \frac{(qx - py)dxdy}{1 + pp + qq}$. V V, et momentum actionis erit $= \frac{u(qx - py)dxdy}{f(1 + pp + qq)}$. V V , quod reperitur si momentum potentiale per $\frac{u}{f}$ multiplicatur. Vt autem ex viribus his elementaribus eliciantur vires finitae ex tota alae superficie oriundae, ponatur primo x constans, et quaerantur integralia ex sola variabilitate ipsius y resultantia, tumque y ad totam alae latitudinem abscissae C X respondentem extendatur, quo facto formula denuo integretur ex variabilitate ipsius x, tumque x ad totam alae longitudinem extendatur, sicque tam vires quam earum momenta pro tota alae superficie inuenientur. Q. E. I.

COROLL. 1.

22 Vires, quae secundum directiones ZY et YI alam sollicitant, nihil conferunt ad motum alae vel accelerandum vel retardandum, sed prior ad alam ab axe abrumpendam, altera vero ad alam euellendam conatum exerit; vnde alam satis firmiter axi infixam esse oportet, vt his viribus resistere valeat. In hunc finem sufficit istas vires proxime saltem nosse, neque operae pretium foret earum quantitatem nimis studiose per integrationes acquirere, nisi calculus facile expediri possit.

COROLL. 2.

23. Totum ergo integrationis opus ad inuentionem momentorum redit, quae duplicem integrationem requirit. Erit nimirum momentum potentiale $=$ $\int dx \int \frac{VV(qx - py)dy}{1 + pp + qq}$, quo inuento erit momentum actio-

nis

nis $= \frac{u}{f} \int dx \int \frac{VV(qx - py)dy}{1 + pp + qq}$, ideoque totum negotium duplici hac integratione abſoluitur. Perinde autem eſt ab vtra variabili x et y conſtanti aſſumenda prima integratio inſtituatur, quin etiam alias nouas variabiles introducere licet, atque tum in hoc tantum eſt elaborandum, vt duplex integratio perficiatur, quae nullo diſcrimine inter variabiles habito hoc modo indicari poteſt $\int\int \frac{VV(qx - py)dx\,dy}{1 + pp + qq}$.

COROLL. 3.

24. De his viribus et momentis iterum notandum eſt eorum valores tum tantum eſſe affirmatiuos et aſſignatas directiones habere, quando valor ipſius V fuerit affirmatiuus, ſin autem V obtineat valorem negatiuum tum etiam ipſas vires earumque momenta in plagam contrariam agere. Quae conditio huc redit, vt quadrato V V idem ſignum tribuatur, quod conuenit ipſi quantitati V, ita vt ſi valor ipſius V fiat negatiuus, etiam quadrato V V ſignum negationis praefigatur.

COROLL. 4.

25. Quando igitur quaeſtio circa figuram alae ita inſtituatur, vt vis venti plurimum conferat ad eius motum promouendum, figuram alae ita comparatam eſſe oportet, vt nusquam ſeu pro nullo alae elemento valor ipſius V fiat negatiuus. Si enim pro quapiam parte valor ipſius V fieret negatiuus, ab ea motus alae impediretur, atque expediret illam partem reſcindi. Quae cautio eo magis

eſt

eſt obſeruanda, quod calculus nullam huiusmodi diminutionem indicat, etiamſi vsquam V valorem negatiuum ſortiatur.

COROLL. 5.

26. Cum valor ipſius V ita determinetur, vt ſit $V = e \text{ coſ. } \theta - e \text{ ſin. } \theta \,(q \text{ ſin. } \eta - p \text{ coſ. } \eta) - \frac{u}{f}(qx - py)$; hinc apparet, quomodo iſte valor ab obliquitate venti reſpectu axis C pendet, hoc eſt tum ab angulo $CHG = \theta$ et ab angulo $ACB = \eta$. Quare ſi obliquitas iſta euaneſcat, ventusque ſecundum directionem axis in alam impingat, erit $\theta = 0$, ideoque coſ. $\theta = 1$ et ſin. $\theta = 0$, vnde fiet $V = e - \frac{u}{f}(qx - py)$.

COROLL. 6.

27. Sin autem directio venti ſit ad axem C normalis, ideoque plano tabulae parallela, ita vt ſecundum directionem G C B in alas incurrat, ob angulum θ rectum fiet $V = e\,(p \text{ coſ. } \eta - q \text{ ſin. } y) - \frac{u}{f}(qx - py)$

SCHOLION.

28. Quia iam innui poſſe, ſitum cuiusuis elementi Z per alias coordinatas determinari, non abs re erit, hanc determinationem alio modo inſtituere, qui ſaepenumero calculum multo faciliorem reddet. Definiatur ſcilicet interuallum $YZ = z$ ex diſtantia $CY = s$ et angulo ACY, quem ponam $= v$, ita vt iam z ſit functio quantitatum s et v, ex cuius differentiatione naſcatur

ſcatur $dz = P\,ds + Q\,dv$. Iam primo valores praecedentium coordinatarum x et y itemque quantitatum p et q per s, v, P et Q definiri oportet. Erit autem $x = s$ coſ. v, $y = s$ ſin. v, ideoque $dx = ds$ coſ. $v - s\,dv$ ſin. v et $dy = ds$ ſin. $v + s\,dv$ coſ. v quibus valoribus in forma praecedenti $dz = p\,dx + q\,dy$ ſubſtitutis fiet

$$dz = p\,ds\,\text{coſ.}\,v + q\,ds\,\text{ſin.}\,v - p\,s\,dv\,\text{ſin.}\,v + q\,s\,dv\,\text{coſ.}\,v$$

eritque ergo

$$P = p\,\text{coſ.}\,v + q\,\text{ſin.}\,v \text{ et } Q = q\,s\,\text{coſ.}\,v - p\,s\,\text{ſin.}\,v$$

vnde colligitur $P\,\text{coſ.}\,v - \frac{Q}{s}\,\text{ſin.}\,v = p$ et $P\,\text{ſin.}\,v + \frac{Q}{s}\,\text{coſ.}\,v = q$. Hincque porro fit $qx - py = Q$ et $1 + pp + qq = 1 + PP + \frac{QQ}{ss}$. atque $q\,\text{ſin.}\,\eta - p\,\text{coſ.}\,\eta = \frac{Q}{s}\,\text{ſin.}\,(\eta + v) - P\,\text{coſ.}\,(\eta + v)$: Vnde obtinetur: $V = e\,\text{coſ.}\,\theta + eP\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,(\eta + v) - \frac{eQ}{s}\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,(\eta + v) - \frac{uQ}{f}$. ita vt caſu $\theta = 0$ ſit $V = e - \frac{uQ}{f}$. Iam elementum in plano tabulae elemento $Z = dS$ ſubiectum eſt $= s\,ds\,dv$ quod loco $dx\,dy$ ſcribi debet: vnde colligitur

vis ſecundum $ZY = \frac{s\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss} \cdot VV$

vis ſecundum $YI = \frac{P\,s\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss} \cdot VV$

vis ſecundum $Yy = \frac{Q\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss} \cdot VV$

hincque erit vis venti momentum potentiale $= \frac{Q\,s\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss} \cdot VV$, et momentum actionis $= \frac{uVV}{f} \cdot \frac{Q\,s\,ds\,dv}{1 + PP + QQ : ss}$. ex quibus per duplicem integrationem vires et momenta ex tota alae ſuperficie nata eliciuntur.

PROBLEMA VI.

29. *Si superficies alae fuerit figura plana quaecunque ad axem vtcunque inclinata, quae circa axem motu quocunque gyretur, atque ventus in eam data celeritate secundum directionem quamcunque impingat, inuenire vim eiusque momentum, quo ala a vento sollicitabitur.*

SOLVTIO.

Fig. 5. Insistat axis plano tabulae normaliter, transeatque per eius punctum C; venti autem directio vbique parallela sit rectae H C ex cuius puncto quopiam H in planum tabulae demisso perpendiculo H G axi parallelo, sit angulus C H G $= \theta$, quo definitur inclinatio axis ad directionem venti, cuius celeritas sit vt hactenus $= e$. Deinde cum alae superficies sit plana, sit recta D E F eius intersectio cum plano tabulae, ad quam ex C ducatur normalis C D, sitque C D $= c$; et ducta C K ipsi D F parallela ponatur angulus B C K $= \eta$, qui dum ala motu angulari promouetur, continuo crescat; alae autem in distantia f ab axe celeritas sit $= u$. Iam consideretur alae punctum quoduis Z vnde in planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y, et ex Y ad D F ducatur normalis Y T, iunctaque Z T, erit T Z Y angulus, quo planum alae ad axem C inclinatur, qui angulus supra positus est $= \Phi$. Quodsi ergo quasi coordinatae pro figura alae ponantur, D T $= t$, et T Z $= y$, erit T Y $= y$ sin. Φ, et Z Y $= y$ cos. Φ : elementum autem alae erit $= dt\,dy$, quod supra per dS indicauimus. Ducatur recta C Y, et solutione *Probl. IV.* huc

huc translata, erit $YEF = \zeta$, $CY = s$, et $YCG = \varrho$, ac $dS = dt\,dy$. Fiet autem ex praecedentibus denominationibus $s = \sqrt{(tt + (c + y\,\text{fin.}\,\Phi)^2)}$, ac posito tantisper angulo $ECD = \omega$, vt sit $\text{fin.}\,\omega = \frac{t}{s}$; $\text{cof.}\,\omega = \frac{c + y\,\text{fin.}\,\Phi}{s}$, erit angulus $\zeta = 90^\circ - \omega$, ideoque $\text{fin.}\,\zeta = \frac{c + y\,\text{fin.}\,\Phi}{s}$ et $\text{cof.}\,\zeta = \frac{t}{s}$: deinde vero erit $YCG = \varrho = 180^\circ - \eta - \zeta$ ideoque $\zeta + \varrho = 180^\circ - \eta$ et $\text{fin.}\,(\zeta + \varrho) = \text{fin.}\,\eta$, tum vero $s\,\text{cof.}\,\zeta = t$. Hinc prodit vis venti in elementum alae $Z = dt\,dy$ fecundum directionem normalem ZN exerta $= dt\,dy(e\,\text{cof.}\,\theta\,\text{fin.}\,\Phi - e\,\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{ut}{J}\,\text{cof.}\,\Phi)^2$ posito alam in plagam Yy gyrari. Ex quo colligitur

vis fecundum $ZY = dt\,dy(e\,\text{cof.}\,\theta\,\text{fin.}\,\Phi - e\,\text{fin}\,\theta\,\text{fin}\,\eta\,\text{cof}\,\Phi - \frac{ut}{J}\,\text{cof.}\,\Phi)^2\,\text{fin.}\,\Phi$

vis fecundum $CY = \frac{c + y\,\text{fin.}\,\Phi}{s}\,dt\,dy(e\,\text{cof.}\,\theta\,\text{fin}\,\Phi - e\,\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof}\,\Phi - \frac{ut}{J}\,\text{cof.}\,\Phi)^2\,\text{cof.}\,\Phi$

vis fecundum $Yy = \frac{t\,dt\,dy}{s}(e\,\text{cof.}\,\theta\,\text{fin.}\,\Phi - e\,\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{ut}{J}\,\text{cof.}\,\Phi)^2\,\text{cof.}\,\Phi$

Hinc ita elicitur momentum potentiale ad motum alae accelerandum $= t\,dt\,dy(e\,\text{cof.}\,\theta\,\text{fin.}\,\Phi - e\,\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{ut}{J}\,\text{cof.}\,\Phi)^2\,\text{cof.}\,\Phi$, quod per $\frac{u}{J}$ multiplicatum dabit momentum actionis. Confideretur primo t tanquam conftans, atque integrale erit $= yt\,dt(e\,\text{cof.}\,\theta\,\text{fin.}\,\Phi - e\,\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{ut}{J}\,\text{cof.}\,\Phi)^2\,\text{cof.}\,\Phi$ quo exprimitur momentum ex areola alae $y\,dt$ ortum Repraefentetur iam tota ala in plano tabulae fitque ea EMFME, quae a plano ad axem normali fecetur recta DF, vt in figura praecedente, fitque Cc huic alae plano oblique infiftens, ita vt iam fit angulus $CcD = \Phi$, Fig 6.

 et

et linea C D tam ad axem c C quam ad rectam D F normalis. Sic cum sit C D $= c$, erit D $c = \frac{c}{\text{sin.}\,\Phi}$ sicque punctum c in plano alae reperitur, in quo axis hoc planum traiicit. Quod si iam vocetur D T $= t$, et tota ordinata M P M $= v$, posito v pro y, erit momentum vis venti in alae partem M E M impingentis ad motum alae gyratorium accelerandum

$$= \int v\,t\,dt (e \operatorname{cos.}\theta \operatorname{sin.}\Phi - e \operatorname{sin.}\theta \operatorname{sin.}\eta \operatorname{cos.}\Phi - \tfrac{u\,t}{f} \operatorname{cos.}\Phi)^2 \operatorname{cos.}\Phi$$

quod per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis. Manifestum autem est hoc integrale ita capi oportere, vt id euanescat posito $t =$ D E, quo facto si ponatur $t =$ D F prodibit momentum ex tota ala ortum. Integratio autem pendet a natura figurae alae, qua definitur, qualis functio v sit ipsius t, sicque pro quouis casu tam momentum potentiale reperitur, quam momentum actionis, quod habebitur si illud per $\frac{u}{f}$ multiplicetur. Ceterum hic notandum est omnes quantitates quae in hanc formulam ingrediuntur, praeter binas t et v esse constantes, et in integratione pro talibus haberi debere. Q. E. I.

COROLL. 1.

30. Quia linea C D, quam posuimus $= c$, et quae distantiam axis a recta DF designat non in expressionem momenti ingreditur, momentum semper idem manebit, per quodcunque rectae Dc ad DF normalis punctum axis cC transeat, dummodo sibi maneat parallelus. Vel quod eodem redit, nihil refert, per quodnam rectae D c punctum linea D F ducatur, dummodo fuerit ad Dc perpendicularis et in plano alae sita.

COROLL.

COROLL. 2.

31. Data igitur alae figura EMFME in plano tabulae descripta vbicunque axis Cc hoc planum traiiciat, semper eiusmodi planum per axem transiens dabitur, quod simul erit ad planum alae normale, cuius notetur interfectio cD, ita vt planum CcD sit ad planum alae normale, ex quo cognoscetur angulus $CcD = \Phi$, quo axis ad planum alae inclinatur. Tum inuenta recta cD tota alae figura rectis MM, mm isti cD parallelis in elementa $MmmM$ resoluatur, eritque quaeuis ordinata $MM = v$, eiusque distantia á recta cD, nempe $DT = t$; atque momentum pendebit ab aequatione, qua relatio inter t et v exprimitur.

COROLL. 3.

32. Cognita aequatione inter t et v, dummodo pro quauis distantia $DT = t$ a recta cD, ordinata MM fuerit $= v$, vbicunque etiam in recta ipsi cD parallela existat, siue sit in MM, vt figura exhibet, siue magis dextrorsum sinistrorsumue promota, momentum vis venti semper erit idem. Ideoque vna aequatio inter t et v data ad innumerabiles alae figuras erit accommodata.

COROLL. 4.

33. Si elementum areae alae $MmmM$ ponatur $= dS$, erit $dS = v\,dt$, et momentum elementare ex vi venti in areolam $MmmM$ impingentis, erit $=$ $t\,dS(e \operatorname{cos.} \theta \operatorname{sin.} \Phi - e \operatorname{sin.} \theta \operatorname{sin.} \eta \operatorname{cos.} \Phi - \frac{ut}{f} \operatorname{cos.} \Phi)^2 \operatorname{cos.} \Phi$

quod ad motum alae accelerandum confert, nisi eius valor fuerit negatiuus. Quare vt motus alae a vi venti promoueatur, primum necesse est vt t habeat valorem affirmatiuum, sicque tota ala ad easdem partes rectae c D sita esse debet. Si enim quaepiam alae pars ad alteram partem huius rectae c D extenderetur, a vi venti in eam impingentis oriretur momentum contrarium, quo motus alae retardaretur, sicque machina in motu suo impediretur.

COROLL. 5.

34. Praeterea vero ne vis venti motui alae vsquam aduersetur, necesse est, vt haec quantitas

$$e \operatorname{cos.} \theta \operatorname{sin.} \Phi - e \operatorname{sin.} \theta \operatorname{sin.} \eta \operatorname{cos.} \Phi - \frac{ut}{f} \operatorname{cos.} \Phi$$

vbique valorem obtineat affirmatiuum; seu vt membra eius negatiua semper sint minora quam membrum primum affirmatiuum $e \operatorname{cos.} \theta \operatorname{sin.} \Phi$. Vltimum autem membrum $\frac{ut}{f} \operatorname{cos.} \Phi$ semper est negatiuum, fitque maximum, vbi ad alae partem F a recta c D maxime remotam peruenitur. Quod si ergo haec distantia D F ponatur $= f$, ita vt puncti F celeritas gyratoria sit $= u$, oportet vt posito $t = f$, sit haec quantitas $e \operatorname{cos.} \theta \operatorname{sin.} \Phi - e \operatorname{sin.} \theta \operatorname{sin.} \eta \operatorname{cos.} \Phi - u \operatorname{cos.} \Phi$ affirmatiua, tum enim, si fuerit $t < f$, ea multo magis erit affirmatiua.

COROLL. 6.

35. Dum ala gyratur angulus $\eta =$ B C K continuo mutatur, ideoque ne superior formula vnquam negatiuum obtineat valorem tantum efficiendum est, vt quando secundus terminus maximum sortitur valorem negatiuum,

vum, quod fit si angulus η erit rectus, seu sin. $\eta = 1$, tamen illa formula non fiat negatiua. Debebit ergo valor huius formulae
e cos. θ sin $\Phi - e$ sin. θ cos. $\Phi - u$ cos. Φ seu huius
e sin. $(\Phi - \theta) - u$ cos. Φ esse affirmatiuus.

COROLL. 7.

36. Quod si ergo tota ala EMFME ad eandem partem rectae c D fuerit posita, ita vt abscissa t nusquam fiat negatiua, insuperque fuerit e sin. $(\Phi - \theta) - u$ cos. Φ, seu celeritas alae in distantia DF $= f$, non sit maior quam $\frac{e \text{ sin.} (\Phi - \theta)}{\text{cos.} \Phi}$, tum semper et vbique vis venti ad alam promouendam impendetur. Hinc igitur patet, si directio venti cum directione axis, circa quem ala gyratur, non conueniat, sed ab ea declinet angulo θ, hunc angulum minorem esse debere angulo Φ, quo axis ad superficiem alae inclinatur.

SCHOLION.

37. Data ergo figura alae seu saltem relatione inter t et v qua innumerae alae figurae continentur, determinatio momenti vis venti ab his tribus formulis integralibus $\int v\, t\, dt$, $\int v\, t\, t\, dt$, et $\int v\, t^3\, dt$ pendet. Capiantur ergo valores horum integralium per totam alae superficiem, ponaturque

$\int v\, t\, dt = A$; $\int v\, t\, t\, dt = B$ et $\int v\, t^3\, dt = C$

erunt A B C quantitates constantes a sola figura alae pendentes. Atque momentum potentiale vis venti in

alam

alam totam ad eius motum accelerandum erit:
$A ee(\text{cof.}\,\theta\,\text{fin.}\,\Phi - \text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof}\,\Phi)^2\text{cof.}\,\Phi - \frac{2Beu}{f}(\text{cof.}\,\theta\,\text{fin.}\,\Phi - \text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\Phi)\,\text{cof.}\,\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff}\text{cof.}\,\Phi^3$, hincque momentum actionis vis venti in hanc alam erit
$\frac{Aeeu}{f}(\text{cof.}\,\theta\,\text{fin.}\,\Phi - \text{fin}\,\theta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\Phi)^2\text{cof}\,\Phi - \frac{2Beuu}{ff}(\text{cof.}\,\theta\,\text{fin.}\,\Phi - \text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\Phi)\,\text{cof.}\,\Phi^2 + \frac{Cu^3}{f^3}\text{cof}\,\Phi^3$. Quare si directio venti fuerit directioni axis parallela, quemadmodum fere semper molae alatae vento opponi solent, erit momentum potentiale venti ad motum accelerandum tendens

$$A\,ee\,\text{fin.}\,\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{2Beu}{f}\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff}\text{cof.}\,\Phi^3$$

et momentum actionis hinc erit

$$\frac{Aeeu}{f}\text{fin.}\,\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{2Beu^2}{f^2}\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2 + \frac{Cu^3}{f^3}\text{cof.}\,\Phi^3$$

Hoc casu statim colligitur, si ala adhuc sit in quiete vel nunc primum moueri incipiat, momentum fore maximum si fuerit $\text{fin.}\,\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi$ maximum, quod euenit si per differentiationem fiat

$$2\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2 = \text{fin.}\,\Phi^3 \text{ feu tang.}\,\Phi = \sqrt{2}$$

vnde anguli Φ prodit valor $54^\circ, 45'$, qui angulus plerumque in molis alatis obseruari solet. Verum hinc iam satis liquet hanc maximi praerogatiuam in istum angulum non competere, nisi molae ala adhuc sit in quiete, atque pro quouis celeritatis gradu quo mouetur, peculiarem prodire valorem anguli Φ, quo momentum vis venti fiat maximum.

PRO-

PROBLEMA VII.

38. *Si ala fuerit plana, atque axis, circa quem mouetur, directioni venti directe opponatur, inuenire inclinationem, sub qua ala ad axem constitui debet, atque celeritatem alae gyratoriam, qua momentum actionis venti fiat maximum.*

SOLUTIO.

Sit E M F M E figura alae data, in plano tabulae exhibita, per cuius punctum quodpiam c axis C c transeat, cuius inclinatio C c D $= \Phi$ quaeritur. Detur tamen planum C c D, in quo axis constituitur, ad planum alae normale, ideoque interfectio c D, cui parallelae sumantur ordinatae M M, $m\,m$ in ala, positisque D T $= t$, et M M $= v$, pro tota ala per integrationes quaerantur sequentes valores Fig. 6.

$$\int vt\,dt = A, \int vtt\,dt = B \text{ et } \int vt^3\,dt = C.$$

Deinde sit maxima alae ab axe elongatio DF $= f$, et celeritas, qua punctum F circa axem gyratur $= u$, quae etiam ita definienda est, vt momentum actionis fiat maximum. Iam vero quia directio venti in directionem axis incidere assumitur, erit momentum actionis:

$$\frac{Aeeu}{f}\,\text{sin.}\,\Phi^2\,\text{cos.}\,\Phi - \frac{2Beu^2}{ff}\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi^2 + \frac{Cu^3}{f^3}.\,\text{cos.}\,\Phi^3.$$

Ponamus primo celeritatem u iam esse datam, et quaeramus angulum Φ, quo hoc momentum fiat maximum, atque manifestum est, eodem casu maximum fieri momentum potentiale:

$$A\,ee\,\text{fin.}\,\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{2Beu}{f}\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff}\,\text{cof.}\,\Phi^3,$$

quod ergo vt fiat maximum, neceſſe eſt, vt differentiatione inſtituta ſit

$$2A\,ee\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2 - A\,ee\,\text{fin.}\,\Phi^3 - \frac{2Beu}{f}\,\text{cof.}\,\Phi^3 + \frac{4Beu}{f}\,\text{fin.}\,\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi$$
$$- \frac{3Cuu}{ff}\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2 = 0,$$

ſeu diuiſo per $\text{cof.}\,\Phi^3$ ob $\frac{\text{fin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi} = \text{tang.}\,\Phi$, erit

$$A\,ee\,\text{tang.}\,\Phi^3 - \frac{4Beu}{f}\,\text{tang.}\,\Phi^2 - 2A\,ee\,\text{tang.}\,\Phi + \frac{2Beu}{f} = 0$$
$$+ \frac{3Cuu}{ff}\,\text{tang.}\,\Phi.$$

Pendet ergo inuentio anguli Φ a reſolutione huius aequationis cubicae, de qua tamen animaduertendum eſt, valorem inde erutum non conuenire, niſi ſit $e\,\text{fin.}\,\Phi > u\,\text{cof.}\,\Phi$, ſeu $\text{tang.}\,\Phi > \frac{u}{e}$. Quare ſi aequatio cubica plures habeat radices, ex iis ea tantum locum habere poteſt, quae praebet $\text{tang.}\,\Phi > \frac{u}{e}$. At ob A, B, C, quantitates poſitiuas, trium aequationis radicum duae erunt affirmatiuae, ac tertia negatiua; quae hinc excluditur: atque ſi neutra affirmatiuarum fuerit maior quam $\frac{u}{e}$, indicio id erit, momentum continuo creſcere, creſcente angulo Φ, ideoque fore maximum, ſi capiatur $\text{tang.}\,\Phi = \frac{u}{e}$: quo caſu momentum actionis erit $= \left(\frac{A}{f} - \frac{2B}{ff} + \frac{C}{f^3}\right) u^3\,\text{cof.}\,\Phi^3$ $= \left(\frac{A}{f} - \frac{2B}{ff} + \frac{C}{f^3}\right)\frac{e^3\,u^3}{(ee+uu)\sqrt{(ee+uu)}}$. Videndum ergo eſt, vtrum minor valor pro $\text{tang.}\,\Phi$ ex aequatione cubica inuentus maius producat momentum actionis.

At

At contemplemur nunc alteram conditionem, qua quaeritur celeritas u, vt momentum actionis fiat maximum, pro qua angulum Φ tanquam iam cognitum spectemus, atque reperietur.

$\frac{Aee}{f}$ sin.Φ^2 cos.Φ $-$ $\frac{4Beu}{ff}$ sin.Φ cos.Φ^2 $+$ $\frac{3Cuu}{f^3}$cos.$\Phi^3 = 0$, siue Aeetang.Φ^2 $-$ $\frac{4Beu}{f}$ tang.Φ $+$ $\frac{3Cuu}{ff} = 0$,

atque haec aequatio cum praecedente aequatione cubica coniuncta determinabit vtrumque valorem quaesitum Φ et u. Verum si haec aequatio per tang. Φ multiplicata ab illa auferatur, remanebit: $-2Aee$ tang. $\Phi + \frac{2Beu}{f} = 0$, seu tang. $\Phi = \frac{Bu}{Aef}$. qui ergo valor scopo conveniet, dummodo sit maior quam $\frac{u}{e}$, hoc est, si fuerit $B > Af$. At cum sit $B = \int vttdt$, et f sit maximus valor ipsius t, erit $B < f\int vtdt$, hoc est $B < fA$; ideoque valor tang. $\Phi = \frac{Bu}{Aef}$ locum habere nequit, neque ergo vtrique aequationi simul, naturae quaestionis conuenienter, satisfieri potest. Quod vt clarius perspiciatur, ponamus tang. $\Phi = \frac{nu}{e}$, vbi requiritur, vt sit $n > 1$, eritque cos. $\Phi = \frac{e}{\sqrt{(ee+nnuu)}}$, et momentum actionis erit

$$\left(\frac{Ann}{f} - \frac{2Bn}{ff} + \frac{C}{f^3}\right)\frac{e^3u^2}{(ee+nnuu)^{\frac{3}{2}}}$$

vnde primum patet, crescente u, hanc quantitatem continuo crescere, neque maiorem fieri posse, quam si celeritas

ritas alae u ponatur infinita: ex quo ſequitur, hanc celeritatem u tam magnam ſtatui debere, quam circumſtantiae id permittant. Hinc autem ſi celeritas u fuerit determinata, et pro cognita aſſumatur, angulus Φ ex ſuperiori aequatione definietur, vt momentum actionis fiat maximum. Ad hoc ſi ponamus breuitatis gratia;

$$B = \beta A f, \text{ et } C = \gamma B f = \beta \gamma A f f,$$

vti nouimus eſſe β et γ numeros vnitate minores, aequatio illa cubica, ex qua angulus Φ definiri debet, hanc formam induet,

$$ee \text{ tang.} \Phi^3 - 4\beta e u \text{ tang.} \Phi^2 \left. \begin{matrix} -2ee \\ +3\beta\gamma uu \end{matrix} \right\} \text{tang.} \Phi + 2\beta e u = 0,$$

ac poſito $u = me$, erit

$$\text{tang.} \Phi^3 - 4\beta m \text{ tang.} \Phi^2 \left. \begin{matrix} -2 \\ +3\beta\gamma m^2 \end{matrix} \right\} \text{tang.} \Phi + 2\beta m = 0,$$

vbi notandum eſt eſſe debere tang. $\Phi > m$.

Quodſi autem angulus Φ fuerit datus, celeritas u ita definiri poteſt, vt momentum actionis fiat maximum, quod fiet per hanc aequationem quadraticam,

$$\frac{3Cuu}{ff} - \frac{4Beu}{f} \text{ tang.} \Phi + Aee \text{ tang.} \Phi^2 = 0,$$

ſeu $3\beta\gamma mm - 4\beta m \text{ tang.} \Phi + \text{tang.} \Phi^2 = 0$,

poſito vt ante $u = me$: vnde valor ipſius m eruitur

$$m = \frac{2\beta \text{ tang.} \Phi \pm \text{tang.} \Phi \sqrt{(4\beta\beta - 3\beta\gamma)}}{3\beta\gamma}$$

ſeu $m = \frac{2\beta - \sqrt{(4\beta\beta - 3\beta\gamma)}}{3\beta\gamma}$ tang. Φ. at debet eſſe $m <$ tang. Φ. Reſtitutis pro m, β, γ valoribus aſſumtis, habebitur $\frac{u}{e} = \frac{2B - \sqrt{(4BB - 3AC)}}{3C} f \text{ tang.} \Phi$,

qui

qui valor, si fuerit realis et minor quam tang. Φ, substitutus in expressione momenti actionis:

$$\frac{u}{f}\left(Aee\ \text{tang.}\Phi^2 - \frac{2Beu}{f}\ \text{tang.}\Phi + \frac{Cuu}{ff}\right)\text{cos.}\Phi^3$$

ipsi conciliabit maximum valorem, qui erit

$$\frac{2e^3\ \text{sin.}\Phi^3}{27CC}\left[9ABC - 8B^3 + (4BB - 3AC)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Sin autem valor inuentus ipsius $\frac{u}{e}$ fuerit vel imaginarius, vel maior quam tang. Φ. inde colligitur momentum actionis maius fieri non posse, quam si statuatur $\frac{u}{e} =$ tang. Φ. quo casu momentum actionis erit $= \frac{e^3\ \text{sin.}\Phi^3}{f^3}(Aff - 2Bf + C)$. Vnde ex vtroque casu iterum colligitur momentum actionis ratione anguli Φ eo fieri maius, quo maior capiatur angulus Φ. Q. E. I.

COROLL. 1.

39. Si ergo angulus Φ, quo axis ad planum alae est inclinatus, detur, ex eo celeritas alae u definiri potest, qua eius extremitas ab axe interuallo $= f$ distans gyrari debet, vt momentum actionis fiat maximum. Statui scilicet debet $\frac{u}{e} = \frac{2B - \surd(4BB - 3AC)}{3C} f$ tang. Φ, siquidem prodeat $\frac{2B - \surd(4BB - 3AC)}{3C} f < 1$. Sin autem sit ista quantitas vel vnitate maior vel adeo imaginaria, tum maxime conueniet ponere $\frac{u}{e} =$ tang. Φ. Semper igitur esse debet celeritas gyratoria alae tangenti anguli Φ proportionalis.

COROLL. 2.

40. Vt appareat, quomodo valor pro $\frac{u}{e}$ inuentus plerumque sit comparatus, ponamus esse $v = \alpha t^{n-1}$,

eritque area alae totius $\int v\,dt = \frac{\alpha}{n} f^{n}$, quae ponatur $= \Delta$; tum erit

$$A = \int vt\,dt = \frac{\alpha}{n+1} f^{n+1} = \frac{n}{n+1} \Delta f$$

$$B = \int vtt\,dt = \frac{\alpha}{n+2} f^{n+2} = \frac{n}{n+2} \Delta ff$$

$$C = \int vt^3\,dt = \frac{\alpha}{n+3} f^{n+3} = \frac{n}{n+3} \Delta f^3,$$

Atque hinc prodibit momentum actionis

$$n \Delta u \left(\frac{ee}{n+1} \text{tang. } \Phi^2 - \frac{2eu}{n+2} \text{tang. } \Phi + \frac{uu}{n+3} \right) \text{cos. } \Phi^2,$$

quod maximum euadet, si capiatur

$$\frac{u}{e} = \frac{n+3}{3(n+2)} \left(2 - \sqrt{\frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)}} \right) \text{tang. } \Phi;$$

vnde semper fit $\frac{u}{e} < \text{tang. } \Phi$: hincque maximum momentum erit

$$\frac{2}{27} \Delta e^3 \text{sin. } \Phi^3 \cdot \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)^2} \left(nn + 4n + 12 + n(n+4) \sqrt{\frac{n(n+4)}{(n+1)(n+3)}} \right);$$

si ergo fuerit

$n = 1$ erit $\frac{u}{e} = \frac{8 - \sqrt{10}}{9} \text{tang. } \Phi$, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^3 \text{sin. } \Phi^3 . 1,5521$

$n = 2$ erit $\frac{u}{e} = \frac{5 - \sqrt{5}}{6} \text{tang. } \Phi$, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^3 \text{sin. } \Phi^3 . 1,809$

$n = 3$ erit $\frac{u}{e} = \frac{8 - \sqrt{14}}{10} \text{tang. } \Phi$, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^3 \text{sin. } \Phi^3 . 1,895$

$n = \infty$ erit $\frac{u}{e} = \frac{1}{3} \text{tang. } \Phi$, et mom: $= \frac{2}{27} \Delta e^3 \text{sin. } \Phi^3 . 2,000$

COROLL. 3.

41. Quo maior igitur est exponens n, eo maius prodit momentum actionis, atque valor $\frac{u}{e}$ eo propius accedet ad $\frac{1}{3}$ tang. Φ: vnde colligimus, pro data area alae $= \Delta$ eo maius futurum esse momentum actionis, quo magis ala ab axe recedendo dilatetur, seu quo arctior fuerit

fuerit axem verſus. Ceterum apparet, quicunque valor tribuatur exponenti n, ſemper prodire $\frac{u}{e} < \text{tang.}\ \Phi$, vti conditio quaeſtionis poſtulat.

COROLL. 4.

42. Sin autem quaeratur, quisnam angulus Φ ſit maxime idoneus ad momentum actionis plurimum augendum, reſpondere oportet, quo magis hic angulus ad rectum accedat, eo maius prodire momentum actionis. Ideoque conueniet, axem tantum non perpendiculariter ad planum alae conſtituere, vt ſit fere $\Phi = 90°$; tum autem ob tang. $\Phi = \infty$, alam maxima celeritate circa axem gyrari oportebit. Vnde patet, non angulum $54°, 45'$ eſſe aptiſſimum, ſed potius angulum rectum hac praerogatiua gaudere.

SCHOLION.

43. Concluſio haec, qua angulum rectum aptiſſimum inuenimus ad momentum actionis maximum producendum, non ſolum valde paradoxa videtur, ſed etiam experientiae maxime contraria. Quanquam enim experientia teſtatur, angulum inclinationis axis ad alas, ſi maior ſtatuatur quam $54°, 45'$, maiorem producere effectum, hicque angulus interdum ad $72°$ auctus optimo cum ſucceſſu reperitur, tamen dubium eſt nullum, quin effectus magnopere diminuatur, ſi iſte angulus adhuc maior conſtitueretur; atque adeo manifeſtum eſt, ſi ad $90°$ vsque augeretur, vim venti ad alam conuertendam plane euaneſcere, ita vt hoc caſu machina ne minimo quidem oneri eleuando par eſſet. Interim ſi perpendamus

mus tamen angulo hoc tantum non ad 90° aucto celeritatem gyratoriam quoque maximam esse debere, etsi hoc casu vis ipsa mouens eiusque momentum potentiale fere in nihilum abit. Tamen semper machinam ad onus superandum ita applicari posse nouimus, vt vis ista minima onus eleuare valeat, simulque intelligitur, celeritatem oneris ad alae celeritatem rationem quam minimam habere debere; veruntamen quoniam celeritas alarum est quasi infinita, celeritas oneris inde prodire potest satis magna, ac reuera maior erit, quam si angulus Φ minor esset assumtus. Interim tamen fateri conuenit, successum in praxi longe alium deprehensum iri, atque theoria hic innuit, cuius dissensus causa in sola frictione est posita; ita vt certum sit, si machinam ab omni frictione liberare liceret, summum effectum iure expectari posse, si angulus inclinationis axis ad planum alarum propemodum rectus statuatur. Verum frictio impedit hoc casu, quo minus ab angulo Φ nimis magno effectus per theoriam definitus obtineri queat: si enim vis venti ab ala excepta tam fuerit parua, vt frictionem superare nequeat, tum machina ne ad motum quidem excitari poterit, multoque minus vllum effectum producere valebit. Ex quo manifestum est, frictionis rationem in primis haberi debere, si eam alarum dispositionem ac motum definire velimus, vnde maximus effectus proficiscatur, id quod sequente problemate diligentius examinabo.

PROBLEMA VIII.

44. *Data frictione machinae, quae a vi quacunque moueatur, inuenire eam momenti actionis partem, quae*

quae ad effectum, ad quem machina est destinata, producendum vnice impenditur.

SOLVTIO.

Sit M momentum potentiale vis, a qua machina mouetur, quae vis rotae seu vecti applicata concipiatur, cuius celeritas sit $= u$ in distantia $= f$ ab axe motus, eritque $\frac{Mu}{f}$ momentum actionis. Sit porro momentum frictionis $= F$, seu ad frictionem superandam opus sit tanta vi, cuius momentum est $= F$, vbi nota, quando simpliciter de momento loquor, id de momento potentiali esse interpretandum, nulla habita ratione ad celeritatem, quacum vis agit. Denique sit P momentum oneris vel obstaculi, quod superari debet, et cum motus machinae iam ad vniformitatem fuerit perductus, necesse est, vt sit $M - F - P = 0$; nam quamdiu motus machinae acceleratur, acceleratio proportionalis est ipsi $M - F - P$: quare si nulla amplius acceleratio locum habeat, necesse est, vt sit $M - F - P = 0$, seu $P = M - F$. Verum si momentum oneris P per celeritatem angularem $\frac{u}{f}$ multiplicetur, denotabit $\frac{u}{f}P$ momentum actionis oneris, seu onus per motum suum multiplicatum, quo ipso effectus machinae determinatur. Erit ergo effectus machinae $\frac{u}{f}P = \frac{u}{f}(M - F)$, ideoque effectus machinae non producitur a vis mouentis momento actionis toto $\frac{u}{f}M$, sed ab eius parte $\frac{u}{f}(M - F)$. Quare vt effectus edatur maximus, non ipsius $\frac{u}{f}M$ valor, sed ipsius $\frac{u}{f}(M - F)$ maximus existere debet. Q. E. I.

 COROLL.

COROLL. 1.

45. In casu igitur problematis praecedentis, quo erat momentum potentiale venti in alam ibi definitam impingentis $= (Aee \text{ tang.} \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang.} \Phi + \frac{Cuu}{ff}) \text{cos.} \Phi^3$, si momentum frictionis machinae ponatur $= F$, quantitas effectus machinae erit

$$\frac{u}{f}(Aee \text{ tang.} \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang.} \Phi + \frac{Cuu}{ff}) \text{cos.} \Phi^3 - \frac{Fu}{f}:$$

vbi ad homogeneitatem conseruandam notari conuenit, si ee, et uu denotent altitudines celeritatibus e, et u debitas, vim frictionis per pondus voluminis aeris exponi debere, ex qua momentum resultans loco F accipi debet.

COROLL. 2.

46. Vt igitur haec machina in motum concitari possit, ante omnia requiritur, vt sit $(Aee \text{ tang.} \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang.} \Phi + \frac{Cuu}{ff}) \text{cos.} \Phi^3 > F$, vnde iam casus maximi effectus ante inuentus sponte excluditur, quoniam illo casu momentum potentiale vis sollicitantis fiebat infinite paruum: simulque intelligitur, ad id vt machina effectum praestare possit, angulum Φ non nimis prope ad angulum rectum accedere posse, quia alioquin cos. Φ nimis fieret paruus; neque haec diminutio per augmentationem celeritatis u compensari potest, quia esse debet $\frac{u}{e} <$ tang. Φ.

COROLL. 3.

47. Quo igitur effectus machinae reddatur maximus, maximum efficere oportet valorem huius formulae:

$$\frac{u}{f}(Aee \text{ tang.} \Phi^2 - \frac{2Beu}{f} \text{ tang.} \Phi + \frac{Cuu}{ff}) \text{cos.} \Phi^3 - \frac{Fu}{f}$$

Ponatur $u = efz$ tang. Φ, atque *maximum* esse debet e^3 sin. $\Phi^3 (Az - 2Bzz + Cz^3) - Fez$ tang. Φ.

COROLL.

COROLL. 4.

48. Quaeratur primo valor ipſius z, angulo Φ tanquam cognito ſpectato, atque peruenietur ad hanc aequationem: $ee\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi\,(A - 4Bz + 3Czz) = F$, vnde fit $9CCzz = 12BCz - 3AC + \frac{3CF}{ee\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi}$; et $3Cz = 2B - \sqrt{\left(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi}\right)}$: ideoque $u = \frac{2B\,ef\,\text{tang.}\,\Phi}{3C} - \frac{ef\,\text{tang.}\,\Phi}{3C}\sqrt{\left(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi}\right)}$. Subſtituenti enim hunc valorem in expreſſione effectus facile patebit, ſigno radicali negationem tribui debere, quia affirmatio minimum produceret effectum.

COROLL. 5.

49. Si iam valor ipſius z pro cognito habeatur, et angulus Φ quaeratur ad effectum maximum producendum, peruenietur ad hanc aequationem:

$$3ee\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi\,(A - 2Bz + Czz) = \frac{F}{\text{coſ.}\,\Phi^2},$$

quae cum aequatione ante inuenta comparata eliminando F, dabit:

$$\text{coſ.}\,\Phi^2 = \frac{A - 4Bz + 3Czz}{3(A - 2Bz + Czz)};\ \text{et ſin.}\,\Phi^2 = \frac{2(A - Bz)}{3(A - 2Bz + Czz)},$$

quibus valoribus ſubſtitutis tandem reperietur

$$F = \frac{2ee(A - Bz)(A - 4Bz + 3Czz)\sqrt{(A - 4Bz + 3Czz)}}{3(A - 2Bz + Czz)\sqrt{3(A - 2Bz + Czz)}},$$

ex qua valor ipſius z erui debet, quod quidem reſolutionem aequationis octaui ordinis poſtulat.

COROLL. 6.

50. Inuento autem hinc valore ipſius z, ex anterioribus formulis colligitur angulus Φ: ſicque tam alae ad

axem inclinatio, quam celeritas gyrationis obtinebitur, vnde maximus effectus proficiscatur. Quod si autem illa aequatio octaui ordinis plures valores reales pro z exhibeat, vt ex iis recte eligatur, notandum est; primo esse debere $\frac{u}{e} < \text{tang.}\Phi$, seu $fz < 1$; praeterea vero esse debere $ee \sin.\Phi^2 \cos.\Phi\,(A - 2Bz + Czz) > F$, ideoque $F < \frac{2ee(A - Bz)\sqrt{(A - 4Bz + 3Czz)}}{3\sqrt{3}(A - 2Bz + Czz)}$:
vnde necesse est, substituto pro F valore supra inuento, vt sit $\frac{A - 4Bz + 3Czz}{A - 2Bz + Czz} < 1$, seu $B > Cz$;
ergo debet esse tam $z < \frac{B}{C}$, quam $z < \frac{1}{f}$. Cum autem sit $C < Bf$, sufficit, vt sit $z < \frac{1}{f}$, cum inde multo magis fiat $z < \frac{B}{C}$.

COROLL. 7.

51. Quod si angulus Φ tanquam cognitus assumatur, atque celeritas motus gyratorii u ita definiatur, vt effectus fiat maximus, erit, vti vidimus:
$$u = \frac{2Bef\,\text{tang.}\Phi}{3C} - \frac{ef\,\text{tang.}\Phi}{3C}\sqrt{\left(4BB - 3AC + \frac{3CF}{ee\sin.\Phi^2\cos.\Phi}\right)};$$
vnde patet, ob frictionem F hanc celeritatem minorem esse, quam si frictio esset nulla. Frictio ergo duplicem ob causam effectum machinae diminuit: primum enim ipsum momentum actionis $\frac{u}{f}M$ minus euadit; deinde insuper ab eo terminus $\frac{u}{f}F$ subtrahi debet, vt effectus $\frac{u}{f}(M - F)$ obtineatur.

SCHOLION 1.

52. Si iste valor ipsius u angulo Φ respondens in-

in expressione effectus machinae $\frac{u}{f}(M-F)$ substituatur, reperitur iste effectus:

$$\frac{2e^3 \sin.\Phi^3}{27\,CC}\left[9\,ABC - 8\,B^3 - \frac{9\,BCF}{ee\sin.\Phi^2\cos.\Phi} + \left(4\,BB - 3\,AC + \frac{3\,CF}{ee\sin.\Phi^2\cos.\Phi}\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

vnde iam manifestum est, angulum Φ non nimis magnum accipi posse, vt iste effectus fiat maximus; quia alioquin effectus fieret minor, atque adeo euanesceret. Primum autem ne valor ipsius u fiat negatiuus, necesse est, vt sit $A > \frac{F}{ee\sin.\Phi^2\cos.\Phi}$, seu $\sin.\Phi^2\cos.\Phi > \frac{F}{Aee}$: Deinde si breuitatis gratia ponatur $\sqrt{\left(4\,BB - 3\,AC + \frac{3\,CF}{ee\sin.\Phi^2\cos.\Phi}\right)} = Q$, vt sit $u = \frac{ef\,\mathrm{tang}.\Phi}{3\,C}(2\,B - Q)$, erit expressio, quantitatem effectus denotans:

$$\frac{2\,e^3\sin.\Phi^3}{27\,CC}(2\,B - Q)^2(B + Q),$$

qui primum est $= 0$, si $\sin.\Phi = 0$; deinde iterum euanescit, si $2\,B = Q$, seu $\sin.\Phi^2\cos.\Phi = \frac{F}{Aee}$: vnde pro effectu maximo obtinendo angulus Φ minor esse debet, quam is, qui ex aequatione $\sin.\Phi^2\cos.\Phi = \frac{F}{Aee}$ oritur. Verum hic notandum est, maximum valorem ipsius $\sin.\Phi^2\cos.\Phi$ esse $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, ideoque nisi sit $\frac{F}{Aee} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, seu nisi momentum frictionis F minus fuerit, quam $\frac{2}{3\sqrt{3}}Aee$, machinam ne quidem moueri posse; vnde celeritas venti minima e cognoscitur, quae primum machinae motum imprimere valet, quae debita altitudini $ee = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{F}{A}$. Quare nisi venti celeritas fuerit maior, machina in quiete persistit. At si celeritas venti satis fuerit magna, vt sit $ee > \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{F}{A}$, erit quoque $\frac{F}{Aee} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$: hincque duobus casibus euenire poterit, vt fiat sin. Φ^2 cos. $\Phi = \frac{F}{A e e}$, quorum altero est $\Phi < 54^\circ, 45'$, altero $\Phi > 54^\circ, 45'$: casu enim $\Phi = 54^\circ, 45'$ fit sin. Φ^2 cos. $\Phi = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Post casum ergo $\Phi = 0$, duo insuper casus dantur, quibus effectus machinae euanescit, qui sint $\Phi = 54^\circ, 45 - \mu$, et $\Phi = 54^\circ, 45' + \nu$. et citra quos limites continetur conditio sin. Φ^2 cos. $\Phi > \frac{F}{A e e}$: ex quo intelligitur, machinam non commoueri posse, nisi angulus Φ intra limites $54^\circ, 45' - \mu$, et $54^\circ, 45' + \nu$ contineatur. Quo circa etiam intra hos limites quaeri debet is angulus Φ, qui maximum effectum producit: manifestum autem est, pro qualibet venti celeritate peculiarem angulum Φ prodire, et quidem pro minimo vento, qui machinae impellendae par est, inuentum iri $\Phi = 54^\circ, 45'$; ex quo sequitur, vt machina etiam a vento maxime debili commoueri queat, hunc angulum esse aptissimum. Quoniam enim pro quouis venti celeritatis gradu angulum Φ immutare non licet, magis expedit, eum ita statuere, vt machina etiam a minimo vento impulsa effectum edat, quam eius effectum pro fortiore vento ita augere, vt tum a vento leniori plane commoueri nequeat. Quod si autem ventum nimis debilem non curemus, machinaque ita instruenda sit, vt a vento satis forti, qui expressionem $\frac{F}{A e e}$ iam notabiliter minorem praebeat, quam $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, impulsa maximum producat effectum, tum angulum Φ vna cum celeritate *u* ex aequationibus supra inuentis determinari oportet.

SCHOLION. 2

53. Scilicet cum fuerit $\frac{F}{A e e} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, ponatur eius valor

valor $\frac{F}{\Delta e e} = \frac{v n}{3 \sqrt{3}}$, ita vt sit $m < 1$, et quaeratur valor ipsius z ex hac aequatione $m = \frac{(A - B z)(A - 4 B z + 3 C z z)^{\frac{3}{2}}}{A (A - 2 B z + C z z)^{\frac{3}{2}}}$

$= \frac{A - B z}{A} \left(\frac{A - 4 B z + 3 C z z}{A - 2 B z + C z z} \right)^{\frac{3}{2}}$, cuius aequationis resolutio cum sit difficillima, tribuantur ipsi z successiue plures valores, ex quibus statim apparebit, quinam valorem producat ipsi m proxime aequalem; quo cognito facile is valor ipsius z eruetur, qui aequationi huic exactius conueniat. Inuento autem valore hoc z, inclinatio axis ad alam Φ elicietur ex alterutra harum formularum:
$\text{sin.}\, \Phi^2 = \frac{2 (A - B z)}{3 (A - 2 B z + C z z)}$; vel $\text{cos.}\, \Phi^2 = \frac{A - 4 B z + 3 C z z}{3 (A - 2 B z + C z z)}$, eritque tum celeritas $u = e f z \,\text{tang.}\, \Phi$. Ad hanc operationem ostendendam ponamus pro alae figura $v = \alpha t^{n-1}$, sitque area alae $= \Delta = \frac{\alpha}{n} f^n$, erit:
$A = \frac{n}{n+1} \Delta f$, $B = \frac{n}{n+2} \Delta f f$, et $C = \frac{n}{n+3} \Delta f^3$, ergo $\frac{(n+1) F}{n \Delta e e f} = \frac{2 m}{3 \sqrt{3}}$. Ponatur autem $z = \frac{x}{f}$, vt sit $u = e x \,\text{tang.}\, \Phi$, et $x < 1$;

erit $\text{sin.}\, \Phi^2 = \frac{2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2} \right)}{3 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2x}{n+2} + \frac{xx}{n+3} \right)}$; et $\text{cos.}\, \Phi^2 = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{4x}{n+2} + \frac{3xx}{n+3}}{3 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2x}{n+2} + \frac{xx}{n+3} \right)}$;

atque valorem ipsius x erui oportet ex hac aequatione

$$m = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{\frac{1}{n+1} - \frac{4x}{n+2} + \frac{3xx}{n+3}}{\frac{1}{n+1} - \frac{2x}{n+2} + \frac{xx}{n+3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ponamus exempli caussa $n = 1$, vt figura alae sit rectangularis, vti vulgo fieri solet, cuius area sit $= \Delta$, erit $m = \frac{3 F \sqrt{3}}{\Delta e e f}$; et $m = \frac{3 - 2 x}{3} \left(\frac{6 - 16 x + 9 x x}{6 - 8 x + 3 x x} \right)^{\frac{3}{2}}$; porroque

sin. Φ^2

$$\text{fin. } \Phi^2 = \frac{12 - 8x}{18 - 24x + 9xx}; \text{ et cof. } \Phi^2 = \frac{6 - 16x + 9xx}{18 - 24x + 9xx}.$$

Cum esse debeat $x < 1$, ponatur $x = \frac{y}{10}$, erit

$$m = \frac{15 - y}{15}\left(\frac{600 - 160y + 9yy}{600 - 80y + 3yy}\right)^{\frac{3}{2}}; \text{ et cof.} \Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{600 - 160y + 9yy}{600 - 80y + 3yy}.$$

Ponantur iam pro y fucceffiue numeri $0, 1, 2, 3$ etc. et valores refultantes in fequenti tabula erunt:

y	$m = \frac{3F\sqrt{3}}{\Delta eef}$	cof. Φ^2	ang. Φ	Celer. ang. $\frac{u}{e}$
$y=0$	$m=1,00000$	cof. $\Phi^2 = \frac{1}{3}$	$\Phi = 54°, 45'$	$\frac{u}{e} = 0,0000$
$y=1$	$m=0,74242$	cof. $\Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{449}{523}$	$\Phi = 57, 40$	$\frac{u}{e} = 0,1580$
$y=2$	$m=0,50661$	cof. $\Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{316}{452}$	$\Phi = 61, 8$	$\frac{u}{e} = 0,3628$
$y=3$	$m=0,29944$	cof. $\Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{201}{387}$	$\Phi = 65, 25$	$\frac{u}{e} = 0,6558$
$y=4$	$m=0,13093$	cof. $\Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{104}{328}$	$\Phi = 71, 2$	$\frac{u}{e} = 1,1639$
$y=5$	$m=0,01827$	cof. $\Phi^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{275}$	$\Phi = 79, 59$	$\frac{u}{e} = 2,8308$

Si vlterius progrediendo ponatur $y = 6$, valor ipfius m fit imaginarius, neque enim valor ipfius x fuperare poteft hunc limitem $\frac{8 - \sqrt{10}}{9}$, feu y hunc $5,3752$; quo cafu fit $\Phi = 90°$, et $\frac{u}{e} = \infty$, atque $m = 0$, pro frictione euanefcente. Patet ergo, quo minor fiat valor ipfius m, eo magis angulum Φ fuperare limitem $54°, 45'$, eoque maiorem fore motum gyratorium. Ita fi frictio tanta effet, vt valor expreffionis $\frac{3F\sqrt{3}}{\Delta eef}$ fieret $= \frac{1}{2}$, tum inclinatio axis ad alam maxime idonea foret $61°, 8'$ et celeritas $u = 0,3628\, e$, feu propemodum $u = \frac{1}{3} e$. Intelligitur hinc etiam, quo maior fuerit alae fuperficies Δ, fimulque eius longitudo f quia hinc valor ipfius m eo minor prodit, eo maiorem effe debere angulum, quem axis cum alis conftituit, eoque etiam velociorem fieri

motum

motum gyratorium alarum. Quod si plures alae simul axi sint affixae, singulaeque ad eum aequaliter inclinatae, facile perspicitur ad valorem ipsius m obtinendum, expressionem $\frac{3 F \sqrt{3}}{\Delta eef}$ insuper per numerum alarum, diuidi debere, siquidem alae sint inter se similes. Ita si quatuor alae constituantur, quarum quaelibet sit aequalis illi vni, quam sumus contemplati, valor ipsius m erit $= \frac{3 F \sqrt{3}}{4 \Delta eef}$, et ex hoc valore ipsius m tam angulus maxime conueniens Φ, quo singulae alae ad axem sunt inclinandae, tam celeritas motus u in distantia ab axe $= f$, ex eadem tabella cognoscetur.

PROBLEMA IX.

54. *Si machina instructa sit quatuor alis planis et aequalibus, atque axis a directione venti declinet angulo dato inuenire momentum actionis a vi venti oriundum.*

SOLVTIO.

Sit cuiusque alae longitudo $DF = f$, et extremitatis F celeritas $= u$; figura autem alae exprimatur vt supra aequatione inter abscissam $DT = t$, et ordinatam $MM = v$, vnde sit $\int v t dt = A$; $\int v t t dt = B$; et $\int v t^3 dt = C$. Tum sit inclinatio axis ad planum cuiusque alae $= \Phi$, et angulus, quem directio venti cum axe constituit $= \theta$; celeritas autem venti sit $= e$. In situ autem alarum quocunque sit pro ala prima angulus $BCK = \eta$; erit hic angulus pro ala secunda $= \eta + 90°$, pro tertia $= \eta + 180°$, et pro quarta $= \eta$

Fig. 6. Fig. 5.

$= \eta + 270^\circ$. Momentum ergo impulſionis venti erit:

pro ala I. $= Aee(\cos.\theta \sin.\Phi - \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi)^2 \cos.\Phi - \frac{2Beu}{f}(\cos.\theta \sin.\Phi - \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi)\cos.\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff}\cos.\Phi^3$

pro ala II. $= Aee(\cos.\theta \sin.\Phi - \sin.\theta \cos.\eta \cos.\Phi)^2 \cos.\Phi - \frac{2Beu}{f}(\cos.\theta \sin.\Phi - \sin.\theta \cos.\eta \cos.\Phi)\cos.\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff}\cos.\Phi^3$

pro ala III. $= Aee(\cos.\theta \sin.\Phi + \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi)^2 \cos.\Phi - \frac{2Beu}{f}(\cos.\theta \sin.\Phi + \sin.\theta \sin.\eta \cos.\Phi)\cos.\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff}\cos.\Phi^3$

pro ala IV. $= Aee(\cos.\theta \sin.\Phi + \sin.\theta \cos.\eta \cos.\Phi)^2 \cos.\Phi - \frac{2Beu}{f}(\cos.\theta \sin.\Phi + \sin.\theta \cos.\eta \cos.\Phi)\cos.\Phi^2 + \frac{Cuu}{ff}\cos.\Phi^3$

Quibus in vnam ſummam collectis, erit momentum totale in omnes quatuor alas ſimul exertum

$$Aee(4\cos.\theta^2 \sin.\Phi^2 + 2\sin.\theta^2 \cos.\Phi^2)\cos.\Phi - \frac{8Beu}{f}\cos.\theta \sin.\Phi \cos.\Phi^2 + \frac{4Cuu}{ff}\cos.\Phi^3$$

quod per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis. Verum ne vlla ala vnquam ab aere in parte poſtica percutiatur, vnde motus impediretur, neceſſe eſt, vt ſit $e \cos.\theta \sin.\Phi - e \sin.\theta \cos.\Phi > u \cos.\Phi$, ſeu $\frac{u}{e} < \cos.\theta \times (\mathrm{tang}.\Phi - \mathrm{tang}\,\theta)$; ideoque angulus Φ maior eſſe debet quam angulus θ. Caeterum notatu hic dignum eſt, momentum totum non amplius pendere ab angulo η, ſeu id eundem perpetuo valorem obtinere, in quocunque ſitu alae reſpectu directionis venti verſentur, quoniam termini angulum η inuoluentes ſe mutuo ſuſtulerunt. Q. E. I.

COROLL.

COROLL. 1.

55. Si angulus θ fuerit valde paruus, erit cof. $\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta\theta$; et cof. $\theta^2 = 1 - \theta\theta$; fin $\theta^2 = \theta\theta$: vnde momentum vis venti erit $4Aee\,\text{fin.}\Phi^2\,\text{cof.}\Phi - \frac{8Beu}{f}\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\Phi^2 + \frac{4Cuu}{ff}\,\text{cof}\,\Phi^3 - 2Aee\theta\theta(2\,\text{fin}\,\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2)\text{cof.}\Phi + \frac{4Beu}{f}\,\theta\theta\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2$. Ab obliquitate ergo venti refpectu axis momentum vis venti augetur quantitate $2e\theta\theta\,\text{cof.}\Phi[\frac{2Bu}{f}\,\text{fin}\,\Phi\,\text{cof.}\Phi - Ae(2\,\text{fin.}\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2)]$, vnde fi fuerit $\frac{u}{e} > \frac{Af(2\,\text{fin.}\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2)}{2B\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\Phi}$, vis venti ab obliquitate augetur; fin autem fuerit $\frac{u}{e} < \frac{Af(2\,\text{fin.}\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2)}{2B\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\Phi}$, vis venti ab obliquitate diminuitur.

COROLL. 2.

56. Si vis venti ab obliquitate θ augetur, quod euenit, fi $\frac{u}{e} > \frac{Af(2\,\text{fin.}\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2)}{2B\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\Phi}$, manifeftum eft, hoc augmentum ad certum tantum terminum extendi, vltra quem fi obliquitas θ augeatur, vis non folum iterum decrefcat, fed etiam prorfus euanefcat. Dabitur ergo hoc cafu eiusmodi obliquitas, vnde momentum vis venti maximum oriatur. Cum autem effe debeat $\frac{u}{e} < \text{tang}\,\Phi$, perfpicuum eft, hunc cafum locum habere non poffe, nifi fit $\text{tang.}\Phi > \frac{Af(2\,\text{fin.}\Phi^2 - \text{cof}\,\Phi^2)}{2B\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\Phi}$, hoc eft, nifi fit $2B\,\text{fin.}\Phi^2 > 2Af\,\text{fin.}\Phi^2 - Af\,\text{cof.}\Phi^2$, feu $\text{tang.}\Phi^2 < \frac{Af}{2(Af - B)}$. Conditiones ergo, fub quibus ab obliquitate θ momentum vis venti augetur, funt: primo fi $\text{tang.}\Phi^2 < \frac{Af}{2(Af - B)}$; deinde vt $\frac{u}{e}$ contineatur intra limites $\text{tang.}\Phi$, et $\frac{Af(2\,\text{fin.}\Phi^2 - \text{cof.}\Phi^2)}{2B\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\Phi}$.

COROLL. 3.

57. Quod si hae conditiones locum habeant, obliquitas θ, quae maximum vis augmentum producit, determinabitur per hanc aequationem:

$$-8\,A e e \sin.\theta \cos.\theta \sin.\Phi^2 \cos.\Phi + 4\,A e e \sin.\theta \cos.\theta \cos.\Phi^3 + \frac{8\,B e u}{f} \sin.\theta \sin.\Phi \cos.\Phi^2 = 0,$$

seu

$$-2\,A\,e \cos.\theta \sin.\Phi^2 + A\,e \cos.\theta \cos.\Phi^2 + \frac{2\,B u}{f} \sin.\Phi \cos.\Phi = 0,$$

vnde elicitur: $\cos.\theta = \frac{2\,B\,u \sin.\Phi \cos.\Phi}{A e f(2 \sin.\Phi^2 - \cos.\Phi^2)}$. Quo valore substituto, prodibit vis venti momentum maximum:

$$2\,A e e \cos.\Phi^3 - \frac{8\,B\,B\,u\,u \sin.\Phi^2 \cos.\Phi^3}{A f f(2 \sin.\Phi^2 - \cos.\Phi^2)} + \frac{4\,C\,u\,u}{f f} \cos.\Phi^3.$$

EXEMPLVM.

58. Sint singulae alae rectangulares, et area cuiusque $=\Delta$: tum vero $Cf = f$, et $Ce = g$, et latitudo $mm = nn = b$, erit $\Delta = (f-g)b$; $A = \frac{1}{2}b(ff-gg)$; $B = \frac{1}{3}b(f^3-g^3)$; et $C = \frac{1}{4}b(f^4-g^4)$. Conditiones ergo, sub quibus ab obliquitate venti respectu axis θ vis venti augetur, sunt: Primo $\tang.\Phi^2 < \frac{\frac{1}{2}fb(ff-gg)}{fb(ff-gg)-\frac{2}{3}b(f^3-g^3)}$, seu $\tang.\Phi^2 < \frac{3f(f+g)}{2(f-g)(f+2g)}$, tum vero $\frac{u}{e}$ intra hos limites $\tang.\Phi$, et $\frac{3f(f+g)(2\sin.\Phi^2 - \cos.\Phi^2)}{4(ff+fg+gg)\sin.\Phi \cos.\Phi}$ contineri oportet. Deinde vero obliquitas inuenitur

Fig. 7.

$$\cos.\theta = \frac{4\,u(ff+fg+gg)\sin.\Phi \cos.\Phi}{3\,e f(f+g)(2\sin.\Phi^2 - \cos.\Phi^2)}.$$

Ipsum autem momentum maximum, quod hinc oritur, est $\Delta \cos.$

$$\Delta \operatorname{cof.}\Phi^3\left(ee(f+g)+\frac{uu}{9ff(2\operatorname{fin.}\Phi^2-\operatorname{cof.}\Phi^2)}\left[\frac{2(f-g)^2(ff+4fg+gg)}{f+g}\operatorname{fin.}\Phi^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-9(f+g)(ff+gg)\operatorname{cof.}\Phi^2\right]\right)$$

quod momentum etiam ita exhiberi poteſt, vt ſit

$$\frac{2ee\operatorname{cof.}\Phi^3}{ff}\left(Aff+\frac{2Cuu}{ee}-\frac{4BBuu\operatorname{fin.}\Phi^2}{Aee(2\operatorname{fin.}\Phi^2-\operatorname{cof.}\Phi^2)}\right).$$

Pro quo iterum angulus Φ ita definiri poteſt, vt id fiat maximum, quod eueniet, ſi Φ definiatur ex hac aequatione:

$$-3\operatorname{fin.}\Phi\operatorname{cof.}\Phi^2\left(Aff+\frac{2Cuu}{ee}-\frac{4BBuu\operatorname{fin.}\Phi^2}{Aee(2\operatorname{fin.}\Phi^2-\operatorname{cof.}\Phi^2)}\right)+\frac{8BBuu\operatorname{fin.}\Phi\operatorname{cof.}\Phi^4}{Aee(2\operatorname{fin}\Phi^2-\operatorname{cof}\Phi^2)^2}=0$$

ſeu $3Aff+\frac{6Cuu}{ee}-\frac{12BBuu\operatorname{fin.}\Phi^2}{Aee(2\operatorname{fin.}\Phi^2-\operatorname{cof.}\Phi^2)}=\frac{8BBuu\operatorname{cof.}\Phi^2}{Aee(2\operatorname{fin.}\Phi^2-\operatorname{cof.}\Phi^2)^2}$.
Ad quam reſoluendam ponatur $2\operatorname{fin.}\Phi^2-\operatorname{cof.}\Phi^2=z$, erit $\operatorname{fin.}\Phi^2=\frac{1+z}{3}$; $\operatorname{cof}\Phi^2=\frac{2-z}{3}$, et aequatio induet hanc formam: $3Aff+\frac{6Cuu}{ee}=\frac{4BBuu(1+z)}{Aeez}+\frac{8BBuu(2-z)}{3Aeezz}$,

ſeu $9\frac{AAeeffzz}{uu}+18ACzz=12BBz(1+z)+8BB(2-z)$
$$=4BB(4+z+3zz),$$

vnde reperitur:

$$\frac{4B}{z}=-\frac{B}{2}+\sqrt{\left(\frac{9AAeeff}{uu}+18AC-\frac{47}{4}BB\right)}$$

ſeu $\frac{1}{z}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{9AAeeff}{BBuu}+\frac{18AC}{BB}-\frac{47}{4}\right)}$,

quae ſolutio latiſſime patet, et ad omnes alarum figuras extenditur: pro caſu autem huius exempli erit

$\frac{1}{z}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{81eeff(ff-gg)^2}{4uu(f^3-g^3)^2}+\frac{81(ff-gg)(f^4-g^4)}{4(f^3-g^3)^2}-\frac{47}{4}\right)}$, vel

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{\left[\frac{81eeff(ff-gg)^2}{uu(f^3-g^3)^2}+\frac{(f-g)^2(34f^4+68f^3g+21ffgg+68fg^3+34g^4)}{(f^3-g^3)^2}\right]}$$

ſi alae ad axem vsque extendantur, vt ſit $g=0$, erit $\frac{1}{z}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{\left(\frac{81ee}{uu}+34\right)}$; et $z=\frac{8}{\sqrt{\left(\frac{81ee}{uu}+34\right)}-1}$

vnde $\operatorname{fin.}\Phi^2=\frac{\sqrt{\left(\frac{81ee}{uu}+34\right)}+7}{3\sqrt{\left(\frac{81ee}{uu}+34\right)}-3}$, et $\operatorname{cof.}\Phi^2=\frac{2\sqrt{\left(\frac{81ee}{uu}+34\right)}-10}{3\sqrt{\left(\frac{81ee}{uu}+34\right)}-3}$, et $\text{tang.}\Phi^2 = \frac{V(\frac{81ee}{uu}+34)+7}{2V(\frac{81ee}{uu}+34)-10} < \frac{3}{2}$; Quare vt hic casus locum habere poſſit, debet eſſe

$V(\frac{81ee}{uu}+34)+7 < 3V(\frac{81ee}{uu}+34)-15$, ſeu

$$11 < V(\frac{81ee}{uu}+34);$$

hincque $87 < \frac{81ee}{uu}$, vel $\frac{u}{e} < V\frac{81}{87}$.

Praeterea vero $\frac{u}{e}$ contineri debet intra hos limites: $\text{coſ.}\theta(\text{tang.}\Phi - \text{tang.}\theta)$, et $\frac{3(2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2)}{4\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}$.

Sit $\frac{u}{e} = V\frac{81}{110}$, erit $z = \frac{8}{11}$; $\text{ſin.}\Phi = V\frac{19}{33}$; $\text{coſ.}\Phi = V\frac{14}{33}$; $\text{tang.}\Phi = V\frac{19}{14}$. vnde ob $\text{coſ.}\theta = \frac{4u}{3e} \cdot \frac{\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}{2\,\text{ſin.}\Phi^2 - \text{coſ.}\Phi^2}$ erit $\text{coſ.}\theta = \frac{1}{2}V\frac{133}{55} = V\frac{133}{220}$; $\text{ſin.}\theta = V\frac{87}{220}$; et $\text{tang.}\theta = V\frac{87}{133}$.

Iam videamus, an ſit $\frac{u}{e} < \text{coſ.}\theta(\text{tang.}\Phi - \text{tang.}\theta)$; ſeu an ſit $V\frac{81}{110} < V\frac{133}{220}(V\frac{19}{14} - V\frac{87}{133})$, ſeu $V\frac{162}{133} < V\frac{19}{14} - V\frac{87}{133}$ quod autem non ſuccedit: neque vero etiam aliis valoribus pro $\frac{u}{e}$ aſſumendis his conditionibus ſatisfieri poteſt.

PROBLEMA X.

59. *Determinare figuram alarum aptiſſimam, vt cum ventus ſecundum directionem axis in eas incidit, maxima ab eo excipiatur vis, ſeu vt tum momentum actionis fiat maximum.*

SOLVTIO.

Sit C c axis, ſecundum cuius directionem ventus impingat celeritate ſua $= e$ in alam C M H H M C, cuius figura non ſit plana, quae tamen a plano axi nor-

Fig. 8.

normali ſecetur recta C T F, quam inſtar diametri alae conſiderabo; ad quam omnes normales M M, *m m* ſint in ſuperficie alae poſitae, ita vt ſingula elementa M M *m m* ſint plana, ſed diuerſimode ad axem C *c* inclinata: Quanquam enim hoc modo nulla oritur ſuperficies continua, ſed potius infinita multitudo elementorum M M *m m* inter ſe non niſi in diametro C F cohaerentium, tamen etiam in extremitatibus *m*, *m* tam prope ad ſe inuicem accedent, vt ſuperficiem continuam mentiantur, atque etiam practice facillime confici poſſe videntur. Sit igitur longitudo alae C F $= f$, et celeritas gyratoria puncti F $= u$: tum vocetur abſciſſa quaecunque C T $= t$, cui reſpondens ordinata ſit M M $= v$, eritque elementum alae M *m m* M $= v\,dt$, quod per hypotheſin eſt planum, ad quod axis C *c* inclinatus ſit angulo $= \Phi$, quem ergo variabilem aſſumo, ac in quovis loco T ita conſtituo, vt inde maximum momentum reſultet. Hinc ex §. 29 ob $\theta = 0$ erit momentum vis venti in hoc alae elementum M *m m* M $= v\,dt$ ita expreſſum $= v\,t\,dt\,(e\,\text{ſin.}\Phi - \frac{ut}{f}\,\text{coſ.}\Phi)^2\,\text{coſ.}\,\Phi$: quod ergo vt maximum fiat, angulus Φ conuenienter definiri debet, quod hac aequatione praeſtabitur:

$\text{ſin.}\Phi(e\,\text{ſin.}\Phi - \frac{ut}{f}\,\text{coſ.}\Phi) = 2\,\text{coſ.}\Phi(e\,\text{coſ.}\,\Phi + \frac{ut}{f}\,\text{ſin.}\Phi)$ ſeu $e(\text{ſin.}\Phi^2 - 2\,\text{coſ.}\,\Phi^2) = \frac{3ut}{f}\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi$, quae praebet $\text{tang.}\Phi^2 = \frac{3ut}{ef}\,\text{tang.}\,\Phi + 2$, et $\text{tang.}\,\Phi = \frac{3ut}{2ef} + \sqrt{(\frac{9uutt}{4eeff} + 2)}$; ergo ſec. $\Phi = \sqrt{[3 + \frac{9uutt}{2eeff} + \frac{3ut}{ef}\sqrt{(\frac{9uutt}{4eeff} + 2)}]}$; hincque coſ. $\Phi =$

$$\frac{1}{\sqrt{[\frac{9uutt}{2eeff} + 3 + \frac{3ut}{ef}\sqrt{(\frac{9uutt}{4eeff} + 2)}]}}.$$ Hinc ergo

ergo pro quauis ab axe diſtantia $CT = t$ definitur inclinatio elementi $M\,m\,m\,M$ ad axem, angulus ſcilicet Φ, ſub quo etiam ventus in hoc elementum impinget. Pendet autem determinatio huius anguli Φ praeter abſciſſam $CT = t$, etiam a celeritate puncti $F = u$, ſeu potius a ratione huius celeritatis ad celeritatem venti e. Dummodo ergo haec ratio fuerit conſtans, ſingulis alae elementis hinc aptiſſima inclinatio tribui poterit, vt momentum vis venti in totam alam fiat maximum. Erit autem pro diſtantia ab axe euaneſcente $t = 0$, angulus $\Phi = 54^\circ, 45'$, cum ſit tang. $\Phi = 2$. at pro extremitate $t = f$, erit tang. $\Phi = \frac{3u}{2e} + \sqrt{\left(\frac{9uu}{4ee} + 2\right)}$, vnde patet, hunc angulum eo magis ſuperare angulum illum $54^\circ, 45'$, quo maior fuerit ratio $\frac{u}{e}$. Verum ad momentum totum per integrationem inueniendum expedit abſciſſam t per angulum Φ exprimere, quam viciſſim: vnde fiet $t = \frac{ef}{3u} \cdot \frac{\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2}{\sin.\Phi \cos.\Phi}$, et $dt = \frac{ef}{3u} \cdot \frac{d\Phi(\sin.\Phi^2 + 2\cos.\Phi^2)}{\sin.\Phi^2 \cos.\Phi^2}$, atque $e \sin.\Phi - \frac{ut}{f}\cos.\Phi = e\sin.\Phi - \frac{e}{3} \cdot \frac{\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2}{\sin.\Phi} = \frac{2e}{3\sin.\Phi}$; ſicque erit elementum momenti: $\frac{4e^4ff}{81uu} \cdot \frac{v\,d\Phi(\sin.\Phi^4 - 4\cos.\Phi^4)}{\sin.\Phi^5 \cos.\Phi^2}$, quod ita integrari debet, vt poſito $t = 0$, ſeu tang. $\Phi = 2$, euaneſcat; tum vero ponatur $t = f$, ſeu tang. $\Phi = \frac{3u}{2e} + \sqrt{\left(\frac{9uu}{4ee} + 2\right)}$; ſicque momentum pro tota ala prodibit, quod deinde per $\frac{u}{f}$ multiplicatum dabit momentum actionis vis venti. Cum autem v ſit functio ipſius t, in ea pro t ſubſtitui debet valor $t = \frac{ef}{3u} \cdot \frac{\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2}{\sin.\Phi \cos.\Phi}$. Ita ſi ſit $v = A + Bt + Ctt + Dt^3$ etc. erit:

$v =$

$$v = A + \frac{Bef}{3u} \cdot \frac{(\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2)}{\sin.\Phi \cos.\Phi} + \frac{Ce^2f^2}{9uu} \cdot \frac{(\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2)^2}{\sin.\Phi^2 \cos.\Phi^2}$$

$$+ \frac{De^3f^3}{27u^3} \cdot \frac{(\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2)^3}{\sin.\Phi^3 \cos.\Phi^3}$$ etc. Hinc autem ob $\frac{d\Phi(\sin.\Phi^4 - 4\cos.\Phi^4)}{\sin.\Phi^5 \cos.\Phi^2} = \frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}(\tang.\Phi^2 - 4\cot.\Phi^2)$ et $\frac{\sin.\Phi^2 - 2\cos.\Phi^2}{\sin.\Phi \cos.\Phi} = \tang.\Phi - 2\cot.\Phi$ erit momentum totale:

$$+ \frac{4Ae^4ff}{3^4uu}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}(\tang.\Phi^2 - 4\cot.\Phi^2)$$

$$+ \frac{4Be^5f^3}{3^5u^3}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}(\tang.\Phi^2 - 4\cot.\Phi^2)(\tang.\Phi - 2\cot.\Phi)$$

$$+ \frac{4Ce^6f^4}{3^6u^4}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}(\tang.\Phi^2 - 4\cot.\Phi^2)(\tang.\Phi - 2\cot.\Phi)^2$$

$$+ \frac{4De^7f^5}{3^7u^5}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}(\tang.\Phi^2 - 4\cot.\Phi^2)(\tang.\Phi - 2\cot.\Phi)^3$$

etc.

Verum ad has integrationes expediendas notandum eſt, eſſe

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\tang.\Phi^n = \frac{\tang.\Phi^{n-1}}{(n-1)\sin.\Phi^3} - \frac{(n-4)}{n-1}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\tang.\Phi^{n-2}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cot.\Phi^n = -\frac{\cot.\Phi^{n-1}}{(n+2)\sin.\Phi^3} - \frac{(n-1)}{n+2}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cot.\Phi^{n-2}$$

quarum formularum ope formulae magis compoſitae continuo ad ſimpliores reducuntur. At pro ſimpliciſſimis eſt

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3} = -\frac{\cos.\Phi}{2\sin.\Phi^2} + \frac{1}{2}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\tang.\Phi = -\frac{1}{\sin.\Phi} + \int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cot.\Phi = -\frac{1}{3\sin.\Phi^3}$$

Hinc magis compoſitae prodibunt:

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\tang.\Phi^2 = \frac{\tang.\Phi}{\sin.\Phi^3} - \frac{\cos.\Phi}{\sin.\Phi^2} + \int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi} = \frac{1}{\cos.\Phi} + \int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cot.\Phi^2 = -\frac{\cos.\Phi}{4\sin.\Phi^4} + \frac{\cos.\Phi}{8\sin.\Phi^2} - \frac{1}{8}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\tang.\Phi^3 = \frac{\sin.\Phi}{2\cos.\Phi^2} + \frac{1}{2}\int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cot.\Phi^3 = -\frac{\cos.\Phi^2}{5\sin.\Phi^5} + \frac{2}{15\sin.\Phi^3}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\tang.\Phi^4 = \frac{1}{3\cos.\Phi^3}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi^3}\cot.\Phi^4 = -\frac{\cos.\Phi^3}{6\sin.\Phi^6} + \frac{\cos.\Phi}{8\sin.\Phi^4} - \frac{\cos.\Phi}{16\sin.\Phi^2} + \frac{1}{16}\int\frac{d\Phi}{\sin.\Phi}$$

Integrale ergo erit:

$$+\frac{4Ae^4ff}{3^4uu}\left(\frac{1}{cos.\Phi}(1+\tfrac{1}{2}cot.\Phi^2+cot.\Phi^4)+\tfrac{3}{2}\int\frac{d\Phi}{sin.\Phi}\right)$$
$$+\frac{4Be^5f^3}{3^5u^3}\left(\frac{tang.\Phi}{cos.\Phi}(\tfrac{1}{3}+\tfrac{22}{5}cot.\Phi^2+\tfrac{4}{5}cot.\Phi^4-\tfrac{8}{5}cot.\Phi^6)-\tfrac{3}{2}\int\frac{d\Phi}{cos.\Phi}\right.$$
$$+\frac{4Ce^6f^4}{3^6u^4}\left(\frac{tang.\Phi^2}{cos.\Phi}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{11}{3}cot.\Phi^2-3cot.\Phi^4-\tfrac{10}{3}cot.\Phi^6+\tfrac{8}{3}cot.\Phi^8)\right.$$
$$-7\int\frac{d\Phi}{sin.\Phi}$$

vbi huius modi constans adiici debet, vt posito tang.$\Phi = \sqrt{2}$, seu cot.$\Phi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ et cos.$\Phi = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, integrale euanescat. Notandum vero est esse $\int\frac{d\Phi}{sin.\Phi} = l\,tang.\tfrac{1}{2}\Phi$ et $\int\frac{d\Phi}{cos.\Phi} = -l\,tang.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\Phi) = l\,tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$. Q. E. I.

COROLL. 1.

60. Ex quantitate momenti hoc modo inuenta insuper definiri posset ipsa celeritas u, vt momentum actionis fiat maximum, sed quia hoc modo in calculos intricatissimos delaberemur, consultius videtur, rationem quandam inter celeritates u et e assumere, quae experientiae maxime censeatur conueniens. Videtur autem ratio $u : e = 1 : 3$ commodissima, ita vt celeritas in alarum extremitate sit minor celeritate venti; quippe quo casu expressiones inuentae simplicissimae euadunt.

COROLL. 2.

61. Sit igitur $u = \frac{1}{3}e$, et in quauis ab axe distantia $= t$ pro inclinatione elementi alae ad axem Φ, erit tang. $\Phi = \frac{t+\sqrt{(tt+8ff)}}{2f}$; vnde in alae extremitate erit inclinatio Φ tanta, vt sit tang. $\Phi = 2$. Cum

igitur

igitur prope axem sit tang. $\Phi = \surd 2$, seu inclinatio $54°$, $45'$, circa extremitatem alarum erit inclinatio $63°$, $26'$.

COROLL. 3.

62. Sumta pro alae latitudine v, quae distantiae ab axe t conuenit, hac aequatione $v = A + Bt + Ctt$, momentum potentiale vis venti in totam alam calculo secundum formulas inuentas euoluto sequenti modo expressum reperietur:

$$0,3233 \cdot \tfrac{4}{9} Aeeff + 0,2074 \cdot \tfrac{4}{9} Beef^3 + 0,1520 \cdot \tfrac{4}{9} Ceef^4,$$

quae quantitas per $\frac{u}{f}$, seu $\frac{e}{3f}$ multiplicata dabit momentum actionis ex tota ala oriundum.

COROLL. 4.

63. Sin autem haec eadem ala esset plana, et vbique ad axem eandem inclinationem Φ teneret, atque etiam ponatur $u = \frac{1}{3} e$, tum ex formulis supra datis colligetur momentum potentiale vis venti in hanc alam

$$+ Aeeff\left(\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\Phi^2 - \tfrac{2}{9}\,\text{tang.}\Phi + \tfrac{1}{36}\right)\text{cos.}\Phi^3$$
$$+ Beef^3\left(\tfrac{1}{3}\,\text{tang.}\Phi^2 - \tfrac{1}{6}\,\text{tang.}\Phi + \tfrac{1}{45}\right)\text{cos.}\Phi^3$$
$$+ Ceef^4\left(\tfrac{1}{4}\,\text{tang.}\Phi^2 - \tfrac{2}{15}\,\text{tang.}\Phi + \tfrac{1}{54}\right)\text{cos.}\Phi^3$$

COROLL. 5.

64. Quare si pro hac ala plana statuatur $\Phi = 54°, 45'$, seu tang. $\Phi = \surd 2$, erit momentum eius:

$$0,30846 \cdot \tfrac{4}{9} Aeeff + 0,19624 \cdot \tfrac{4}{9} Beef^3 + 0,14287 \cdot \tfrac{4}{9} Ceef^4;$$

sin autem inclinatio vbique statuatur $\Phi = 63°, 26'$, seu tang. $\Phi = 2$, erit momentum eius:

$$0,31862 \cdot \tfrac{4}{9} Aeeff + 0,20572 \cdot \tfrac{4}{9} Beef^3 + 0,15130 \cdot \tfrac{4}{9} Ceef^4.$$

Vtroque ergo casu momentum est minus, quam si alae inclinatio variabilis tribuatur.

COROLL. 6.

65. Posteriori tamen casu, quo $\Phi = 63^\circ, 26'$ momentum multo propius accedit ad momentum alae, in qua inclinatio Φ ad extremitates continuo augetur; et defectus vix est sensibilis. Vnde nisi alae inclinatio variabilis tribui queat, expediet eius inclinationem ad axem vbique $63^\circ, 26'$ constitui, quam $54^\circ, 45'$, quia hoc modo ad momentum maximum proxime acceditur. Intelligendum autem hoc est, si statuatur $u = \frac{1}{3}e$; nam si celeritas u maior caperetur, tum angulus inclinationis Φ quoque maior euaderet.

PROBLEMA XI.

66. *Alis planis rotam alatam ita instruere, vt a vento non solum vis maxima excipiatur, sed etiam effectus machinae, habita frictionis ratione, maximus reddatur.*

SOLVTIO.

Tab. II. Fig. 1. Concipiatur axis plano tabulae perpendiculariter insistere in puncto C, circa quem disponantur plures alae triangulares, verticibus suis in puncto C concurrentes, et quae in planum tabulae orthogonaliter proiectae polygonum regulare repraesentent, ita vt nihil vacui inter eas relinquatur. Sint nimirum singula triangula isoscelia G C G proiectiones alarum, cuiusmodi in figura duodecim exhibentur. Sic enim obtinetur, vt quaecunque fuerit alarum inclinatio, ventus in omnes simul impingere possit, neque vlla ala impulsionem venti in aliam impediat.

Quan-

Quando ergo ventus ſecundum directionem axis incidit, omnis aeris copia, quae intra capacitatem polygoni advehitur, in alas impingit, ita vt maior venti copia excipi nequeat, quin alae longiores reddantur. Sit ergo H C H vna ala quaecunque, ad axem ſub dato angulo $= \Phi$ inclinato, quae triangulum iſosceles G C G ſecet recta C F, ita vt ſemiſſium H C F, H C F alter ſupra planum tabulae cadat, alter infra. Sit iam longitudo huiusmodi alae C F $= f$, baſis H H $= h$, et baſis proiectionis G G $= g$, erit ob ang. F H G $= \Phi$, $g = h\,\text{ſin.}\Phi$, et $h = \frac{g}{\text{ſin.}\Phi}$; Datur enim G G $= g$ ex altitudine C F $= f$ et numero laterum polygoni, vnde h per g exprimi conuenit. Venti celeritas ponatur, vt ante $= e$, et celeritas rotae huius alatae in puncto F $= u$: numerus porro alarum ſit $= n$, erit $\frac{1}{2}g$ tangens arcus $\frac{360}{2n}$ radio exiſtente $= f$, ſeu $\frac{g}{2f} = \text{tang.}\frac{1}{n}180^\circ$: ideoque $g = 2f\,\text{tang.}\frac{1}{n}180^\circ$. Iam cum ala H C H ſit triangularis, poſita eius abſciſſa quaecunque C T $= t$ et ordinata M M $= v$, erit $v = \frac{h}{f}t$: vnde colligitur pro tota ala:

$$A = \int vtdt = \tfrac{1}{3}ffh;\ B = \int vttdt = \tfrac{1}{4}f^3h;\ C = \int vt^3dt = \tfrac{1}{5}f^4h.$$

Ex quibus conficitur momentum vis venti vnam alam impingentis $= ffh(\frac{1}{3}ee\,\text{ſin.}\Phi^2\text{coſ.}\Phi - \frac{1}{2}eu\,\text{ſin.}\Phi.\text{coſ.}\Phi^2 + \frac{1}{5}uu\,\text{coſ.}\Phi^3)$; vbi notandum eſt, eſſe debere $\frac{u}{e} < \text{tang.}\Phi$. Ponatur ergo $u = ex\,\text{tang.}\Phi$, ita vt ſit $x < 1$, eritque momentum

$$eeffh\,(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{5}xx)\,\text{ſin.}\Phi^2\text{coſ.}\Phi,\ \text{ſeu ob } h = \frac{g}{\text{ſin.}\Phi}$$

$$eeffg(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{5}xx)\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi.$$

Hinc momentum vis venti omnes n alas percutientis erit

$$neeffg\,(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{5}xx)\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi.$$

 Sit

Sit nunc momentum frictionis $= F$; ita vt onus mouendum sit a momento $neeffg(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}xx)\sin.\Phi\cos.\Phi - F$, quod multiplicatum per $\frac{u}{f} = \frac{ex}{f}\operatorname{tang}.\Phi$ dabit momentum actionis seu effectum machinae, qui erit

$ne^3fgx(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}xx)\sin.\Phi^2 - \frac{ex}{f}F\operatorname{tang}.\Phi$.

Ponatur $F = \mu\, neeffg$, quia hoc modo vis frictionis commodissime ad vim mouentem comparatur, eritque effectus machinae: $ne^3fgx[(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}xx\ \sin.\Phi^2 - \mu\operatorname{tang}.\Phi]$. Quod vt fiat maximum tam x quam angulus Φ definiri poterunt, quod fiet his aequationibus:

$(\frac{1}{3}-x+\frac{3}{5}xx)\sin.\Phi^2 = \mu\operatorname{tang}.\Phi$, et $2(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}xx)\sin.\Phi\cos.\Phi = \frac{\mu}{\cos.\Phi^2}$,

vnde elicitur: $x = \frac{15\sin.\Phi^2 - \sqrt{15(4-\sin.\Phi^4)}}{6(1+2\sin.\Phi^2)} = \frac{10(2\sin.\Phi^2-1)}{15\sin.\Phi^2+\sqrt{15(4-\sin.\Phi^4)}}$

tum vero angulus Φ per sequentem aequationem determinatur. $1 = \frac{3\mu}{2\sin.\Phi^2\cos.\Phi^3}[8+\sin.\Phi^2-\sqrt{15(4-\sin.\Phi^4)}]$

Vnde si angulus Φ fuerit inuentus, erit momentum actionis seu totus machinae effectus:

$\frac{\mu ne^3fgx\sin.\Phi(2\sin.\Phi^2-1)}{2\cos.\Phi^3} = \frac{1}{3}ne^3fgx.\frac{\sin.\Phi^3(2\sin.\Phi^2-1)}{8+\sin.\Phi^2-\sqrt{15(4-\sin.\Phi^4)}}$,

at celeritas motus rotae in F erit $u = ex\operatorname{tang}.\Phi =$

$\frac{10(2\sin.\Phi^2-1)e\operatorname{tang}.\Phi}{15\sin.\Phi^2+\sqrt{15(4-\sin.\Phi^4)}}$. Q. E. I.

COROLL. 1.

67. Patet ergo, angulum Φ semper esse debere semi recto maiorem, siquidem machina moueri debeat. Nam si $\Phi = 45°$, vel $\sin.\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, erit $x = 0$, $u = 0$, et ipse machinae effectus $= 0$: qui casus locum obtinet, si $\mu = \frac{1}{6\sqrt{2}}$, hoc est, si fuerit momentum frictionis $F = \frac{neeffg}{6\sqrt{2}}$. Nisi ergo fuerit frictio minor, machina commoueri non poterit, seu vt motus subsequatur, necesse est, vt sit $\mu < \frac{1}{6\sqrt{2}}$.

COROLL.

COROLL. 2.

68\. Quia difficile eſt, ex data frictione ſeu valore ipſius μ, angulum Φ inuenire, maxime conducit, pro Φ ſucceſſiue plures valores intra limites 45° et 90° aſſumere et inde valores ipſius μ prouenientes notare, vt ex huius modi tabula viciſſim pro dato μ valor conueniens anguli Φ colligi poſſit. Qui calculus, quo ob irrationalitatem minus impediatur: ponatur $\sin.\Phi^2 = \frac{10pp - 6qq}{5pp + 3qq}$, erit $\operatorname{cof}.\Phi^2 = \frac{9qq - 5pp}{5pp + 3qq}$, et $x = \frac{5(p-q)}{5p-3q}$, et $\frac{u}{e} = x \operatorname{tang}.\Phi$; porro $\frac{1}{\mu} = \frac{5(5p-3q)^2}{10pp-6qq} \cdot \frac{1}{\operatorname{cof}.\Phi^3}$, atque effectus machinae erit $= \frac{1}{2} n e^3 fg \cdot \frac{xx(p+q)}{(5p-3q)} \cdot \sin.\Phi^3 = \frac{1}{2} n e^3 fg \cdot \frac{1}{5} x^3 \cdot \frac{p+q}{p-q} \sin.\Phi^3$, vbi notandum eſt, $\frac{pp}{qq}$ intra limites 1 et $\frac{9}{5}$ contineri debere.

COROLL. 3.

69\. Cum area totius polygoni, in quod rota alata proiicitur, ſit $= \frac{1}{2} nfg$, exhibebit $\frac{1}{2} neefg$ vim venti in aream huius polygoni, ſi celeritate ſua $= e$ in eam directe impingeret, quam ergo vim, cognita venti celeritate, facile definire licet: Sit igitur iſta vis $\frac{1}{2} neefg = V$, eritque momentum frictionis $F = 2\mu . Vf$. Atque per eandem vim V effectus machinae ſeu momentum actionis ita definietur, vt ſit $= \frac{\mu x \sin.\Phi (2 \sin.\Phi^2 - 1)}{\operatorname{cof}.\Phi^3} . Ve$: quo exprimitur onus per celeritatem ſuam multiplicatum. Cum autem ſit $u = ex \operatorname{tang}.\Phi$; erit hoc momentum actionis $= \frac{\mu(2 \sin.\Phi^2 - 1)}{\operatorname{cof}.\Phi^2} . Vu$. Vnde ſi reſiſtentia oneris ſit $= Q$, erit oneris celeritas $= \frac{\mu(2 \sin.\Phi^2 - 1)}{\operatorname{cof}.\Phi^2} . \frac{Vu}{Q}$, ex quo modus machinam ad onus applicandi concluditur.

TABVLA

TABVLA

pro quauis frictione exhibens angulum inclinationis alarum ad axem rotae, celeritatem rotae et effectum totum ipsius machinae

Momentum Frictionis.	Angul Inclin:	Celeritas rotae in extremit:	Effectus Machinae,	qui etiam hoc modo expr:
0, 235702 V f	45°	0, 000000 e	0, 000000 V e	0, 00000 V u,
0, 175837 V f	50	0, 127686 e	0, 004718 V e	0, 036950 V u
0, 122871 V f	55	0, 281334 e	0, 017968 V e	0, 063869 V u
0, 079653 V f	60	0, 469882 e	0, 037427 V e	0, 079653 V u
0, 047001 V f	65	0, 711154 e	0, 060147 V e	0, 084576 V u
0, 024370 V f	70	1, 042160 e	0, 083159 V e	0, 079795 V u
0, 010362 V f	75	1, 550395 e	0, 103842 V e	0, 066978 V u
0, 003084 V f	80	2, 499421 e	0, 120105 V e	0, 048053 V u
0, 000386 V f	85	5, 208606 e	0, 130454 V e	0, 025046 V u
0, 000000 V f	90	∞	0, 134001 V e	0, 000000 V u

COROLL. 4.

70. Ex hac ergo tabula perſpicitur, ſi momentum frictionis fuerit $= 0, 235702$ V f, vel etiam maius, tum vim venti non parem eſſe machinae ad motum excitandae, etiamſi nulla oneris reſiſtentia ſit ſuperanda. Effectus ergo machinae hoc caſu erit nullus; neque ventus machinam mouere valebit, niſi ſit momentum frictionis $F < 0, 235702$ V f, vel niſi ventus iam tanta moueatur celeritate, vt ſit $0, 235702 . \frac{1}{2}\, n e e f f g > F$.

COROLL. 5.

71. Quo autem minor momentum frictionis fuerit pars quantitatis V f, eo maior capi debet angulus inclina-

inclinationis Φ, eoque celerior tribuendus erit motus rotae; atque ipse effectus machinae eo fiet maior: qui tamen limitem $0,134001\ Ve$ nunquam superare potest. Vbi notandum est, si momentum frictionis fuerit $\frac{1}{30}Vf$, effectum tantum esse semissem, sin autem momentum frictionis sit $\frac{1}{12}Vf$, effectum tantum fore circiter quadrantem illius summi effectus.

SCHOLION.

72. Quando momentum frictionis est pars notabilis quantitatis Vf, minor tamen quam eius pars quarta, patet, quantum intersit, si frictio adhuc vltra diminuatur: sic si momentum frictionis sit circiter pars sexta ipsius Vf, effectus machinae erit propemodum $= \frac{1}{200}Ve$: at si frictio eo vsque diminuatur, vt eius momentum sit $\frac{1}{8}Vf$, quae est leuis diminutio, effectus erit $\frac{1}{57}Ve$, ideoque fere quadruplo maior, quam casu praecedente. Data autem frictione, ita vt vltra diminui nequeat, patet, impedimentum inde oriundum eo fore minus, quo maior fuerit area polygoni GFGF etc; et cum etiam aucto radio f diminuatur, manifestum est, coefficientem quantitatis Vf in prima columna in ratione triplicata radii f diminui, sicque hoc pacto multo maiorem coefficientem termini Ve in quarta columna obtineri, ideoque effectum machinae iam non mediocriter augeri. Praeterea vero ob auctum V hic effectus in ratione duplicata radii f augebitur. Ex quo maxime expediet, vt ala huiusmodi rotata tanta conficiatur, quantam reliquae circumstantiae id permittunt. Hoc autem modo

 incli-

inclinatio alarum ad axem fiet angulus ad rectum multo propius accedens, et celeritas alarum tanto fiet maior. Cum autem quantitas V in ratione duplicata celeritatis venti crescat, quouis casu certa venti celeritas potissimum est spectanda, ad quam machina accommodetur, vt hoc flante vento effectum maximum producat. Tum si ventus magis intendatur, effectus in triplicata ratione celeritatis venti augebitur, quo contenti esse poterimus, etiamsi machina ad hunc ventum non sit instructa. Contra autem flante vento debiliori, effectus in maiori quam triplicata ratione eius celeritatis diminuetur, ex quo, ne effectu machinae saepe penitus frustremur, conueniet machinam ad minimum fere venti gradum, quo frui oporteat, accommodari.

EXEMPLVM.

73. Ponamus ad machinam quamcunque mouendam alam huiusmodi rotatam adhiberi, cuius radius C F sit 20 pedum; et frictionem huius machinae tantam esse, vt ad eam superandam vi opus sit 10 librarum in distantia 20 pedum ab axe applicanda: et quaeritur maxime idonea dispositio huius rotae alatae.

Erit ergo $f = 20$ ped: et momentum frictionis $F = 20.10 = 200$ libr. Sit alarum numerus $n = 12$, erit $g = 40$ tang. $15^\circ = 10,717968$ ped: vnde $V = 6.20.10,717968\, ee$; sit ee altitudo celeritati venti debita in pedibus expressa, atque haec vis V aequabitur ponderi massae aereae, cuius volumen $= 1286,15616\, ee$ ped. cub. seu ponderi voluminis aquae $= 1\frac{1}{5}\, ee$ ped. cub:

cub: hoc eſt, ponderi $112\frac{1}{2}ee$ librarum, tribuendo 70 ℔ vni pedi cubico aquae. Machina ergo moueri non poterit, niſi ſit momentum frictionis $200 < 0,235702 \cdot 20 \cdot 112\frac{1}{4}ee$, hoc eſt, niſi ſit altitudo celeritati venti debita $ee > \frac{3}{8}$ ped: qua celeritate ſingulis minutis ſecundis percurruntur $4\frac{3}{4}$ ped. Niſi igitur venti celeritas maior ſit, quam $4\frac{3}{4}$ pedum, machina ne quidem ad motum excitari poterit. Diſponamus ergo machinam, ita vt maximum producat effectum, ſi ventus conficiat 10 pedes ſingulis minutis ſecundis, ita vt altitudo celeritati venti debita ſit $ee = 1\frac{3}{5}$ ped; eritque vis $V = 180$ ℔, et $Vf = 3600$: vnde erit momentum frictionis $200 = \frac{1}{18}Vf = 0,05555\, Vf$. Quo numero ad primam columnam translato, patebit, angulum, quo alae ad axem rotae inclinari debent, eſſe oportere circiter, 64°. Porro reperitur $u = \frac{2}{3}e$, ita vt extremitas alarum hoc vento flante eſſe debeat $6\frac{2}{3}$ ped. in minuto ſecundo, vnde rota alata reuolutionem quamlibet abſoluere debet tempore 19 ſecundorum circiter. Effectus autem machinae colligetur $= 0,054\, Ve = 9\frac{3}{4}$ ℔. 10 ped. Quare ſi oneris reſiſtentia valeat Q libras, eius celeritas erit $= \frac{97\frac{1}{2}}{Q}$ pedum vno minuto ſecundo. Si ergo onus perpendiculariter attolli debeat ope huius machinae, hocque onus ſit 1000 librarum, id ſingulis horis eleuabitur per ſpatium 351 pedum. Vbi notandum eſt, vnum hominem idem onus ſingulis horis per ſpatium = 180 pedum attollere poſſe, ſi quidem vis hominis, qua minuto ſecundo per ſpatium 2 pedum progreditur, ſtatuatur

25 libr. ex quo intelligitur a duobus hominibus plus praeſtari poſſe quam ab hac machina, ſi vento 10 pedes minuto ſecundo peragrante impellatur. Verum ſi ventus duplo ſit velocior, machina effectum circiter octuplo maiorem edet, ideoque tantum efficiet, quantum 16 homines: Sed hic tenendum eſt, homines ad hunc effectum producendum nulla frictione impediri; Si enim eidem machinae applicentur, vbi frictionem ſuperare debent, multo minus efficere poſſent. Vnus enim homo eidem machinae innitens pondus 1000 ℔ vnius horae ſpatio tantum ad altitudinem 108 pedum eleuabit, ideoque ventus 10 pedum reuera tantum praeſtat, quantum $3\frac{1}{2}$ homines; ventus autem duplo celerior plus quam 28 homines efficiet.

ELEMENTA

ELEMENTA
DOCTRINAE SOLIDORVM.
AVCT. L. EVLERO.

§. 1.

Quemadmodum Geometria in contemplatione figurarum planarum versatur, et quae de lineis et angulis in ea traduntur, ad eius prolegomena referenda sunt; ita Stereometria in contemplatione solidorum occupatur, et quae ibi de inclinatione planorum angulisque solidis explicantur, eius quoque tanquam prolegomena sunt spectanda.

§. 2. Solidum est extensum trium dimensionum vndique terminatum, perinde atque superficies definitur per extensum duarum tantum dimensionum. Duae autem solidorum constituendae sunt classes, prout eorum ambitus figuris siue planis, siue conuexis concauisue includitur.

§. 3. Hic eam tantum classem solidorum, quae vndique figuris planis includuntur, contemplari constitui; perinde atque Geometria a figuris rectilineis exorditur; et quemadmodum figurarum rectilinearum in genere plures insignes proprietates sunt annotatae; ita solidorum huius classis non nullas proprietates generales eruere conabor.

§. 4. Quanquam autem Stereometria iam satis diligenter elaborata videtur, in eaque praeter theoriam inclinationis planorum et angulorum solidorum, formatio plurium solidorum ac potissimum corporum regularium doceri solet; tamen vbique firma huius de solidis doctrinae fundamenta desiderantur, ex quibus huiusmodi solidorum natura in genere intelligi possit.

§. 5. Solidorum igitur contemplatio ad ambitum eorum dirigi debet: cognito enim ambitu, quo solidum vndique includitur, ipsum solidum cognoscitur simili modo, quo cuiusque figurae planae indoles ex eius perimetro definiri solet.

§. 6. Ad ambitum autem cuiusque solidi figuris planis inclusi pertinent 1mo ipsae figurae planae eius ambitum constituentes, quae hedrae vocantur; 2do binarum hedrarum secundum latera concursus, quibus termini lineares solidi oriuntur: hos terminos, quoniam apud scriptores Stereometriae nullum nomen proprium reperio, acies vocabo; 3tio puncta, in quibus tres pluresue hedrae concurrunt, quae puncta anguli solidi appellantur.

§. 7. Triplicis igitur generis termini in quouis solido sunt considerandi; scilicet 1.) puncta; 2.) lineae, 3.) superficies; vel nominibus ad hoc institutum propriis vtendo. 1.) Anguli solidi; 2.) acies; et 3) hedrae. Hisque triplicis generis terminis totum solidum determinatur. Figura autem plana duplicis tantum generis terminos habet, quibus determinatur; 1. scilicet puncta, seu anguli, 2. lineae seu latera.

§. 8.

§. 8. Inſtar exempli propoſitum ſit corpus cuneiforme A B C D E F, cuius termini primi generis, ſeu anguli ſolidi ſunt ſex: A, B, C, D, E, F. Termini ſecundi generis lineares, ſeu acies ſunt numero nouem: A B, BC, CD, DA, AE, DE, BF, CF, EF. Termini denique tertii generis, ſeu hedrae ſunt quinque, nimirum: ABCD, ABFE, ADE, CDEF, BCF. Tab. II Fig. 2.

§. 9. Omnis ergo ſolidorum diuerſitas cum ex numero angulorum ſolidorum, tum ex numero acierum, tum vero ex numero hedrarum naſcitur. Vſitatae autem ſolidorum denominationes ex numero hedrarum peti ſolent, vnde nota ſunt nomina tetraedri, hexaedri, octaedri, dodecaedri et icoſaedri, etſi ea corporibus tantum regularibus tribui ſolent. In genere enim nomine polyedri indicatur corpus quodcunque ſiue regulare, ſiue irregulare, quod certo hedrarum numero includitur.

§. 10. Simili modo ſi diuerſa ſolidorum genera ex numero angulorum ſolidorum definire velimus, eorum nomina erunt tetragonum, pentagonum, hexagonum, heptagonum etc. Atque corpus cuneiforme ante conſideratum hoc modo erit hexagonum appellandum, quod ſecundum hedrarum numerum eſt pentaedrum.

§. 11. Quoniam vero ſolida, quae pari hedrarum numero includuntur, ratione numeri angulorum ſolidorum inter ſe differre poſſunt, ad ea inter ſe diligentius diſtinguenda, conueniet cuiusque denominationem tam a numero hedrarum, quam a numero angulorum ſolidorum petere

petere. Ita solidum cuneiforme ante consideratum vocabitur *pentaedrum hexagonum*; Pyramis triangularis erit *tetraedrum tetragonum*; Prisma triangulare *pentaedrum hexagonum*; Parallelepipedum vero *hexaedrum octogonum* et ita porro.

§. 12. Etsi ergo ad genus figurae planae rectilineae designandum sufficit laterum numerum, quibus includitur, commemorasse, quoniam angulorum numerus semper est aequalis numero laterum; tamen in solidis numerus angulorum solidorum admodum discrepare potest a numero hedrarum, vnde vtrumque numerum nominare opus est. Sic pyramis quadrangularis aeque includitur quinque hedris, ac prisma triangulare, sed illa quinque tantum habet angulos solidos, dum hoc habet sex.

§. 13. Ad solidorum vero genera constituenda superfluum foret praeter hedrarum et angulorum solidorum numeros insuper numerum acierum adiicere, quoniam vti deinceps monstrabo, acierum numerus semper ex numero hedrarum et angulorum solidorum determinatur, ita vt, si datus fuerit tam numerus hedrarum, quam numerus angulorum solidorum, cuiusque solidi inde simul numerus acierum sit cognitus.

§. 14. Vlteriores vero solidorum differentiae petendae sunt cum ex indole hedrarum, seu numero laterum, quibus quaeque hedra includitur; tum vero ex indole angulorum solidorum, prout quisque vel ex tribus, pluribusue angulis planis fuerit formatus. Angulus enim solidus ex paucioribus, quam tribus angulis planis constare

nequit;

nequit; plures autem quotcunque ad angulum ſolidum conſtituendum concurrere poſſunt, dummodo eorum omnium ſumma fuerit quatuor rectis minor.

§. 15. Datis omnibus hedris, quibus ſolidum quodpiam includitur, ſtatim cognoſcetur numerus omnium laterum cunctas hedras includentium, cui numero aequalis eſt numerus omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris reperiuntur, quia in qualibet hedra numerus angulorum aequalis eſt numero laterum.

§. 16. Deinde etiam ſumma omnium angulorum planorum facile exhiberi poteſt, propterea quod in quaque hedra ſumma omnium eius angulorum ex eiusdem numero laterum definitur. Quotcunque enim laterum fuerit hedra quaepiam, ſumma omnium eius angulorum aequatur, vti conſtat, bis tot angulis rectis, quot ſunt latera, demtis quatuor.

§. 17. Ad ſolidum ergo definiendum, praeter numeros angulorum ſolidorum, acierum ac hedrarum, quae res proprie ad ambitum ſolidi pertinent, commode quoque adhiberi poſſunt, cum numerus omnium laterum, ſeu, qui ei eſt aequalis, numerus omnium angulorum planorum, tum vero etiam ſumma omnium horum angulorum planorum.

§. 18. Ex collatione harum quinque rerum, quas in quouis ſolido conſiderare licet, plures inſignes proprietates ſolidorum generales obtineri poſſunt, quae ſimiles erunt earum proprietatum, quae de figuris planis rectilineis

lineis in genere proferri solent. Maior autem istarum rerum, quas in solidis spectamus, numerus plures etiam proprietates generales suppeditabit, quam in figuris planis locum inueniunt.

§. 19. Quas proprietates, cum nemo eorum, qui Stereometriam tractauerunt, fere attigerit, operam dabo, vt si non omnes, tamen praecipuas in medium afferam, atque demonstrationibus confirmem. Quod eo maiorem vtilitatem habiturum videtur, cum sine harum proprietatum cognitione doctrina solidorum neutiquam cum successu tractari queat.

§. 20. Eo magis igitur merito mirum videbitur, quod cum prima Geometriae planae elementa iam a tam longo temporis interuallo omni cura sint elaborata, ac perspicue exposita, prima quasi Stereometriae elementa tantis adhuc tenebris sint inuoluta, nemoque fuerit inuentus, qui ea in lucem protrahere sit conatus.

PROPOSITIO I.

§. 21. *In quouis solido numerus omnium acierum est semissis numeri omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris ambitum eius constituentibus reperiuntur.*

DEMONSTRATIO.

Quaelibet acies in ambitu solidi formatur a duobus lateribus duarum hedrarum, et cum inter omnia latera cunctarum hedrarum bina coniuncta singulas acies constituant,

tuant, manifestum est numerum acierum omnium esse semissem numeri omnium laterum. At numerus omnium laterum aequalis est numero omnium angulorum planorum, quia quaeuis hedra tot habet angulos quot latera. Ergo numerus acierum quoque semissis est numeri omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris ambitum solidi constituentibus reperiuntur. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 22. Cum numerus acierum fractus esse nequeat, perspicuum est, numerum omnium laterum vel omnium angulorum planorum semper parem esse debere; huiusque numeri semissis dabit numerum acierum, quae in ambitu solidi deprehenduntur.

COROLL. 2.

§. 23. Si igitur omnes hedrae ambitum solidi cuiuspiam constituentes fuerint triangula, earum numerus necessario erit par; si enim numerus harum hedrarum esset impar, tum etiam numerus angulorum planorum esset impar; quod euenire non potest. Idem tenendum est de hedris omnibus, quae sunt polygona imparium laterum; scilicet si singulae hedrae fuerint vel triangula, vel pentagona, vel heptagona, vel etc. earum numerus semper debet esse par.

COROLL. 3.

§. 24. Si inter hedras ambitum solidi cuiuspiam constituentes numerus earum, quae sunt vel tetragonae, vel hexagonae, vel octogonae, vel polygonae quaecunque paris laterum numeri, fuerit $= m$, numerus vero earum, quae sunt vel trigonae, vel pentagonae, vel heptagonae, vel polygonae quaecunque imparis laterum numeri $= n$, ita vt numerus omnium hedrarum sit $= m + n$; tum numerus n debet esse par. Quod vero ad numerum m attinet, perinde est siue sit par siue impar.

COROLL. 4.

§. 25. Si ergo ambitus totius solidi constet ex a triangulis, b quadrangulis, c pentagonis, d hexagonis, e heptagonis etc. erit numerus omnium hedrarum $= a + b + c + d + e +$ etc. Numerus vero omnium angulorum planorum, seu laterum erit $= 3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ etc. Numerus autem omnium acierum in ambitu solidi $= \frac{3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \text{etc.}}{2}$ vnde numerus $a + c + e +$ etc. debet esse par.

PROPOSITIO II.

§. 26. *Numerus omnium angulorum planorum vel aequalis est vel maior numero omnium hedrarum ter sumto. Vel numerus angulorum planorum nunquam minor esse potest, quam triplum numeri hedrarum ambitum solidi cuiusquam constituentium*

DEMONSTRATIO.

Omnes hedrae sunt vel triangula vel figurae plurium laterum; si omnes hedrae sunt triangula, numerus laterum

terum ſeu angulorum planorum erit triplo maior, quam numerus hedrarum; ſin autem vel omnes vel aliquae hedrae plures tribus habeant angulos, tum etiam numerus angulorum planorum maior erit quam triplum numeri hedrarum. Semper ergo numerus angulorum planorum vel aequalis eſt vel maior numero hedrarum ter ſumto, ipſoque minor nunquam eſſe poteſt. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 27. Si ergo omnes hedrae fuerint triangulares, numerus angulorum planorum aequalis erit triplo numeri hedrarum; ſin autem non omnes hedrae ſint triangulares, ſed figurae plurium laterum, tum numerus angulorum planorum maior erit, quam triplum numeri hedrarum.

COROLL. 2.

§. 28. In ſolido igitur quocunque, ſi numerus hedrarum ponatur $= H$, et numerus acierum $= A$, quia numerus angulorum planorum eſt, $= 2A$, erit vel $2A = 3H$ vel $2A > 3H$. Impoſſibile ergo eſt, vt ſit $2A < 3H$.

COROLL. 3.

§. 29. Retentis his denominationibus nullum datur ſolidum, in quo ſit $A < \frac{3}{2}H$ vel $H > \frac{2}{3}A$. Quanquam autem hinc relatio inter numerum hedrarum et numerum acierum non determinatur, tamen plurimae relationes excluduntur, quae nunquam locum habere poſſunt.

PROPOSITIO. III.

§. 30. *Numerus omnium angulorum planorum, qui in ambitu cuiusque solidi existunt vel aequalis est vel maior numero angulorum solidorum ter sumto. Vel numerus angulorum planorum nunquam minor esse potest quam triplum numeri angulorum solidorum.*

DEMONSTRATIO.

Quilibet angulus solidus vel a tribus angulis planis formatur vel a pluribus, pauciores enim quam tres anguli plani angulum solidum constituere nequeunt. Hinc si omnes anguli solidi a tribus planis formantur, numerus angulorum planorum triplo maior esse debet quam numerus angulorum solidorum; sin autem ad quosdam angulos solidos constituendos plures anguli plani coniunguntur, numerus angulorum planorum quoque maior erit quam numerus angulorum solidorum, minor autem nunquam esse potest. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 31. Si numerus angulorum solidorum ponatur $= S$, numerus vero acierum $= A$ pro solido quocunque, quia numerus omnium angulorum planorum est $= 2A$, semper erit vel $2A = 3S$ vel $2A > 3S$.

COROLL. 2.

§. 32. Fieri ergo nequit, vt vnquam sit $2A < 3S$, seu $A < \frac{3}{2}S$, seu $S > \frac{2}{3}A$. Quare si praeterea numerus hedra-

hedrarum ponatur $= H$, neque hic numerus H neque numerus S maior esse potest quam $\frac{2}{3}A$.

PROPOSITIO IV.

§. 33. *In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Scilicet si ponatur vt hactenus:
numerus angulorum solidorum $= S$
numerus acierum - - - - $= A$
numerus hedrarum - - - $= H$
demonstrandum est, esse $S + H = A + 2$.

Fateri equidem cogor, me huius theorematis demonstrationem firmam adhuc eruere non potuisse; interim tamen eius veritas pro omnibus solidorum generibus, ad quae examinabitur, non difficulter agnoscetur, ita vt sequens inductio vicem demonstrationis gerere queat.

1. Consideremus ergo primo pyramidem quamcunque super basi A B C D E F G quotcunque laterum constitutam et in apicem H desinentem. Sit numerus laterum basis $= m$, totidemque triangula a basi ad apicem vsque assurgent. Includitur ergo haec pyramis $m + 1$ hedris, quarum m sunt triangula, vna vero polygonum m angulorum seu laterum. Erit itaque numerus hedrarum Fig. 3.

rum $H = m + 1$, atque numerus angulorum ſolidorum pariter eſt $S = m + 1$. Deinde numerus omnium angulorum planorum eſt $= 3m + m = 4m$, vnde numerus acierum erit $A = 2m$. Cum igitur ſit $H + S = 2m + 2$ erit vtique hoc caſu $H + S = A + 2$.

Fig. 2. 2. Sit ſolidum cuneiforme a baſi quocunque laterum A B C D in aciem E F deſinens. Sit baſis polygonum m laterum, erit numerus angulorum ſolidorum binario maior ſeu $S = m + 2$. Deinde praeter ipſam baſin tot aderunt hedrae, quot latera habet baſis, vnde numerus omnium hedrarum erit $H = m + 1$, ex his hedris vna nempe baſis eſt polygonum m laterum, reliquae erunt triangula duabus exceptis, quae eſſe debent quadrilatera, ſuoque concurſu aciem E F conſtituunt; praeter baſin ergo m laterum, habentur $m - 2$ triangula et 2 quadrilatera, ex quo numerus omnium laterum ſeu angulorum planorum erit $= m + 3(m - 2) + 2 . 4 = 4m + 2$, hincque prodit numerus acierum $A = 2m + 1$. Cum ergo ſit $H + S = 2m + 3$ erit $H + S = A + 2$.

Fig. 4. 3. Sit ſolidum arcae ſeu ciſtae ſimile, intra duas baſes A B C D et E F G H contentum, vtraque autem baſis eundem habeat laterum numerum $= m$, eritque numerus angulorum ſolidorum $S = 2m$. Deinde praeter has duas baſes reliquae hedrae erunt quadrilaterae, earumque numerus $= m$, vnde numerus omnium hedrarum erit $H = m + 2$. Angulorum autem planorum numerus ob duas hedras m laterum et m hedras quadrilateras erit $= 2m + 4m = 6m$, hincque acierum numerus conclu-

concluditur $A = 3m$. Quare, cum ſit $H + S = 3m + 2$, erit denuo $H + S = A + 2$.

4. Habeat denuo ſolidum duas baſes A B C D E, et F G H, quae autem non eodem gaudeant laterum numero. Sit ergo pro altera baſi A B C D E numerus laterum maior $= m + n$, pro altera vero baſi F G H numerus laterum $= m$, eritque numerus angulorum ſolidorum $= m + n + m$, ſeu $S = 2m + n$. Tum praeter duas baſes tot erunt hedrae, quot latera habet altera baſis, quae maiori laterum numero gaudet, ſcilicet $m + n$, vnde omnium hedrarum numerus eſt $H = m + n + 2$; quarum cum altera baſis habeat latera $m + n$, altera m, inter reliquas vero hedras, quarum numerus eſt $m + n$, tot eſſe debeant quadrilaterae, quot baſis F G H habet latera, nempe m, ceterae vero, quarum numerus eſt n, ſint triangulares, omnium angulorum planorum numerus eſt $= m + n + m + 4m + 3n = 6m + 4n$, erit numerus acierum $A = 3m + 2n$. Cum igitur ſit $H + S = 3m + 2n + 2$, erit iterum $H + S = A + 2$. Fig. 5.

5. Sit corpus denuo in duas baſes A B C D et L M N terminatum, circa medium autem habeat angulos ſolidos E, F, G, H, I, K. Sit numerus laterum baſis A B C D $= m$, baſis L M N $= n$, numerus autem angulorum ſolidorum circa medium ſit $= p$, qui ſit maior, quam m et quam n. Erit ergo numerus omnivm angulorum ſolidorum $S = m + n + p$. Tum ab angulis ſolidis mediis ad baſin A B C D dirigentur hedrae numero $= p$, quarum m erunt quadrilaterae, reliquae Fig. 6.

 $p - m$

$p - m$ triangulares; ſimili modo ad alteram baſin LMN dirigentur hedrae quoque numero $= p$, quarum n erunt quadrilaterae, reliquae vero $p - n$ triangulares, ſic cum duabus baſibus numerus omnium hedrarum erit $= 2 + p + p$ ſeu $H = 2p + 2$. Quarum cum vna habeat m latera, alia n latera, et quadrilaterarum numerus ſit $= m + n$, trigonalium $= 2p - m - n$, erit omnium angulorum planorum numerus $= m + n + 4(m + n) + 3(2p - m - n) = 6p + 2m + 2n$, ideoque numerus acierum prodit $A = 3p + m + n$. Quare cum ſit $H + S = 3p + m + n + 2$, erit denuo $H + S = A + 2$.

6. Poſitis iisdem atque in caſu praecedente, ſit $m > p$ et $p > n$, erit vt ante numerus angulorum ſolidorum $S = m + n + p$. A baſi autem ABCD iam m hedrae ad angulos ſolidos medios dirigentur, quarum erunt p quadrangulares, et $m - p$ triangulares. Ab angulis autem mediis ad alteram baſin LMN dirigentur p hedrae, quarum erunt n quadrilaterae, et $p - n$ trigonales. Hinc ergo omnium hedrarum numerus erit $= 2 + m + p$ ſeu $H = m + p + 2$, quarum hedrarum vna eſt m laterum, alia n laterum, $p + n$ quadrilaterae, et $m - p + p - n$ ſeu $m - n$ trilaterae. Hanc ob rem omnium angulorum planorum numerus erit $= m + n + 4(p + n) + 3(m - n) = 4p + 4m + 2n$, hincque acierum numerus $A = 2p + 2m + n$. Vnde cum ſit $H + S = 2p + 2m + n$, erit $H + S = A + 2$.

7. Si angulorum ſolidorum mediorum numerus p minor ſit vtroque numero m et n, erit quidem vt ante

angu-

angulorum solidorum numerus $S = m + n + p$. Sed iam a basi A B C D ad angulos medios dirigentur hedrae m, ab altera vero basi hedrae n, et vtrinque erunt p quadrangulares, ex illa vero parte $m - p$, ex hac vero $n - p$ triangulares. Vnde numerus omnium hedrarum erit $= 2 + m + n$ seu $H = m + n + 2$: angulorum autem planorum numerus erit $= m + n + 4 . 2p + 3(m + n - 2p) = 2p + 4m + 4n$. Quare acierum numerus prodit $A = p + 2m + 2n$; et cum sit $H + S = 2m + 2n + p + 2$, erit $H + S = A + 2$.

8. Etsi haec sufficere possent ad veritatem propositionis euincendam, tamen eam praeterea ex corporibus regularibus confirmare lubet. Pro tetraëdro quidem erit numerus hedrarum $H = 4$, quae cum sint triangulares, erit omnium angulorum planorum numerus $= 12$, ideoque acierum numerus $A = 6$, et quia singuli anguli solidi ex tribus planis formantur, erit eorum numerus $S = \frac{12}{3} = 4$: hinc $H + S = 8 = A + 2$. Pro hexaëdro est $H = 6$, et ob singulas hedras quadrilateras angulorum planorum numerus $= 24$, ideoque acierum numerus $A = 12$: ac dum terni anguli plani vnum solidum constituunt, erit solidorum numerus $S = \frac{24}{3} = 8$, sicque $H + S = 14 = A + 2$. Pro octaëdro est $H = 8$, cuius hedrae cum sint trilaterae, erit omnium angulorum planorum numerus $= 24$, ideoque numerus acierum $A = 12$, ac dum quaterni anguli plani vnum solidum formant, erit angulorum solidorum numerus $S = \frac{24}{4} = 6$, sicque $H + S = 14 = A + 2$.

Pro dodecaëdro est $H = 12$, cuius hedrae cum sint pentagonae, erit numerus angulorum planorum $= 5 . 12$

 $= 60$

$= 60$, ideoque numerus acierum $A = 30$. Deinde quia terni anguli plani ad ſolidum concurrunt, erit numerus angulorum ſolidorum $S = 20$, ergo $H + S = 32 = A + 2$. Pro icoſaedro eſt $H = 20$, cuius hedrae cum ſint trigonales, erit angulorum planorum numerus $= 60$, numerusque acierum $A = 30$. Tum vero quia ſinguli anguli ſolidi conſtant quinis planis, erit eorum numerus $S = 12$, ideoque $H + S = 32 = A + 2$.

Cum igitur veritas propoſitionis in his omnibus caſibus ſibi conſtet, dubium eſt nullum, quin ea in omnibus omnino ſolidis locum habeat, ſicque propoſitio ſufficienter videtur demonſtrata.

COROLL. 1.

§. 34. Si ergo in quopiam ſolido detur numerus angulorum ſolidorum S cum numero hedrarum H, inde ſtatim cognoſcetur numerus acierum A, cum ſit $A = H + S - 2$.

COROLL. 2.

§. 35. Datis autem in ſolido quocunque numero angulorum ſolidorum S cum numero acierum A, inde facile colligitur numerus hedrarum H, cum ſit $H = A - S + 2$.

COROLL. 3.

§. 36. Datis autem in ſolido quocunque numero hedrarum H vna cum numero acierum A, inde facile reperietur numerus angulorum ſolidorum S, quia eſt $S = A - H + 2$.

PROPO-

PROPOSITIO V.

§. 37. *Nullum exiſtere poteſt ſolidum, in quo numerus acierum ſenario auctus maior eſſet, quam vel triplum numeri hedrarum, vel triplum numeri angulorum ſolidorum.*

DEMONSTRATIO

Sit numerus acierum $= A$, numerus hedrarum $= H$, et numerus angulorum ſolidorum $= S$, atque ſupra vidimus, fieri non poſſe, vt ſit vel $3\,H > 2\,A$, vel $3\,S > 2\,A$, erunt ergo hae formulae $3\,H > 2\,A$, et $3\,S > 2\,A$ impoſſibiles. Nunc autem vidimus, eſſe $H + S = A + 2$, ſeu $H = A - S + 2$, et $S = A - H + 2$, qui valores in illis formulis impoſſibilibus ſubſtituti dabunt ſequentes formulas impoſſibiles:

$$3\,A - 3\,S + 6 > 2\,A, \text{ et } 3\,A - 3\,H + 6 > 2\,A,$$

quae abeunt in has

$$A + 6 > 3\,S, \text{ et } A + 6 > 3\,H.$$

Vnde manifeſtum eſt, fieri non poſſe, vt numerus acierum ſenario auctus maior ſit, quam vel triplum numeri hedrarum, vel triplum numeri angulorum ſolidorum Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 38. In omni ergo ſolido vel eſt $A + 6 = 3\,H$, vel $A + 6 < 3\,H$, ſimilique modo eſt vel $A + 6 = 3\,S$, vel $A + 6 < 3\,S$. Siue ſi α, β, γ, δ, aſſumantur ad numeros positiuos, cyphra non excepta, designandos, erit:

$$A + 6 + \alpha = 3\,H, \text{ et } A + 6 + \beta = 3\,S.$$

COROLL. 2.

§. 39. Tum vero quia semper est vel $A = \frac{3}{2}\,S$, vel $A > \frac{3}{2}\,S$; item vel $A = \frac{3}{2}\,H$, vel $A > \frac{3}{2}\,H$, erit simili modo

$$A = \tfrac{3}{2}\,H + \gamma, \text{ et } A = \tfrac{3}{2}\,S + \delta$$

vbi γ, et δ, vt ante α, et β non possunt esse numeri negatiui.

COROLL. 3.

§. 40. His posterioribus valoribus in praecedentibus aequationibus substitutis prodibunt hae aequationes:

$$\tfrac{3}{2}\,H + 6 + \alpha + \gamma = 3\,H, \text{ et } \tfrac{3}{2}\,S + 6 + \beta + \delta = 3\,S$$

seu $4 + \frac{2}{3}(\alpha + \gamma) = H$, et $4 + \frac{2}{3}(\beta + \delta) = S$ vnde patet, tam numerum hedrarum, quam numerum angulorum solidorum quaternario minorem esse non posse.

COROLL. 4.

§. 41. Cum sit $H + S = A + 2$, erit hos postremos valores adhibendo, $8 + \frac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = A + 2$, vnde colligitur, numerum acierum A senario nunquam minorem esse posse. Est igitur pyramis triangularis omnium solidorum simplicissimum, quia tam numerus hedrarum, quam angulorum solidorum est $= 4$, et numerus acierum $= 6$.

PROPO-

PROPOSITIO VI.

§. 42. *Nullum existere potest solidum, in quo vel numerus hedrarum quaternario auctus, maior sit duplo numero angulorum solidorum, vel in quo numerus angulorum solidorum quaternario auctus maior, sit duplo numero hedrarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus hedrarum $= H$, numerus angulorum solidorum $= S$, et numerus acierum $= A$, et quoniam supra ostendimus fieri non posse, vt sit vel $3H > 2A$ vel $3S > 2A$, hae duae formulae erunt impossibiles:

$$3H > 2A, \text{ et } 3S > 2A.$$

Cum iam sit $A = H + S - 2$, hoc valore pro A substituto sequentes formulae erunt impossibiles:

$$3H > 2H + 2S - 4, \text{ et } 3S > 2H + 2S - 4$$

quae abeunt in has

$$H + 4 > 2S, \text{ et } S + 4 > 2H.$$

Vnde neque numerus hedrarum quaternario auctus maior esse potest duplo numero angulorum solidorum, neque numerus angulorum solidorum quaternario auctus maior duplo numero hedrarum. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 43. In omni ergo solido vel est $H + 4 = 2S$, vel $H + 4 < 2S$, deinde simili modo est vel $S + 4 = 2H$, vel $S + 4 < 2H$. Si igitur α et β denotent numeros positiuos cyphra non excepta, in omni solido hae

hae aequationes locum habebunt $H + 4 + \alpha = 2S$, et $S + 4 + \mathfrak{a} = 2H$.

COROLL. 2.

§. 44. Cum ſit $S = 2H - 4 - \mathfrak{a}$, et $S = \frac{1}{2}H + 2 + \frac{1}{2}\alpha$, numerus angulorum ſolidorum S neque maior eſſe poteſt, quam $2H - 4$, neque minor quam $\frac{1}{2}H + 2$. Ergo numerus angulorum ſolidorum S extra hos limites $2H - 4$, et $\frac{1}{2}H + 2$ cadere nequit.

COROLL. 3.

§. 45. Simili modo cum ſit $H = 2S - 4 - \alpha$, et $H = \frac{1}{2}S + 2 + \frac{1}{2}\mathfrak{a}$, numerus hedrarum H neque maior eſſe poteſt, quam $2S - 4$, neque minor, quam $\frac{1}{2}S + 2$; vnde numerus hedrarum H extra hos limites $2S - 4$, et $\frac{1}{2}S + 2$ cadere nequit.

COROLL. 4.

§. 46. Deinde ex ſuperiori propoſitione intelligitur, numerum acierum A neque extra hos limites $\frac{3}{2}H$, et $3H - 6$, neque extra hos limites $\frac{3}{2}S$, et $3S - 6$ cadere poſſe; ſimili modo indidem patet, numerum hedrarum H non extra hos limites $\frac{2}{3}A$, et $\frac{1}{3}A + 2$, nec numerum angulorum ſolidorum S extra hos eosdem limites $\frac{2}{3}A$, et $\frac{1}{3}A + 2$ cadere poſſe.

COROLL. 5.

§. 47. Dato ergo numero hedrarum, tam pro numero angulorum ſolidorum, quam pro numero acierum, limi-

limites assignari possunt, quos transgredi nequeant, quosque subiecta tabella exhibet:

	Limites, quos transgredi nequit	
Numerus hedrarum	numerus angulorum solidorum	numerus acierum
4	4 - - - - 4	6 - - - - 6
5	6 - - - - $4\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$ - - - - 9
6	8 - - - - 5	9 - - - - 12
7	10 - - - - $5\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$ - - - - 15
8	12 - - - - 6	12 - - - - 18
9	14 - - - - $6\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$ - - - - 21
10	16 - - - - 7	15 - - - - 24
11	18 - - - - $7\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$ - - - - 27
12	20 - - - - 8	18 - - - - 30
13	22 - - - - $8\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{2}$ - - - - 33
14	24 - - - - 9	21 - - - - 36
15	26 - - - - $9\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$ - - - - 39
16	28 - - - - 10	24 - - - - 42
17	30 - - - - $10\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$ - - - - 45
18	32 - - - - 11	27 - - - - 48
19	34 - - - - $11\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{2}$ - - - - 51
20	36 - - - - 12	30 - - - - 54
21	38 - - - - $12\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$ - - - - 57
22	40 - - - - 13	33 - - - - 60
23	42 - - - - $13\frac{1}{2}$	$34\frac{1}{2}$ - - - - 63
24	44 - - - - 14	36 - - - - 66
25	46 - - - - $14\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{2}$ - - - - 69

COROLL. 6.

§. 48. Sin autem numerus angulorum ſolidorum S eſt datus, pro numero acierum iidem prodeunt limites, quos tabula exhibet, pro numero vero hedrarum ii reperiuntur limites, qui in tabula pro numero angulorum ſolidorum ſunt exhibiti.

COROLL. 7.

§. 49. Verum ſi numerus acierum A ſit datus, quoniam neque numerus hedrarum, neque numerus angulorum ſolidorum hos limites $\frac{2}{3}$ A, et $\frac{1}{3}$ A + 2 excedere poteſt, ſequens tabula limitum conſtruetur:

Numerus acierum	Limites pro numeri H et S	Numerus acierum	Limites pro numeris H et S
6	4 --- 4	20	$13\frac{1}{3}$ --- $8\frac{2}{3}$
7	$4\frac{2}{3}$ --- $4\frac{1}{3}$	21	14 --- 9
8	$5\frac{1}{3}$ --- $4\frac{2}{3}$	22	$14\frac{2}{3}$ --- $9\frac{1}{3}$
9	6 --- 5	23	$15\frac{1}{3}$ --- $9\frac{2}{3}$
10	$6\frac{2}{3}$ --- $5\frac{1}{3}$	24	16 --- 10
11	$7\frac{1}{3}$ --- $5\frac{2}{3}$	25	$16\frac{2}{3}$ --- $10\frac{1}{3}$
12	8 --- 6	26	$17\frac{1}{3}$ --- $10\frac{2}{3}$
13	$8\frac{2}{3}$ --- $6\frac{1}{3}$	27	18 --- 11
14	$9\frac{1}{3}$ --- $6\frac{2}{3}$	28	$18\frac{2}{3}$ --- $11\frac{1}{3}$
15	10 --- 7	29	$19\frac{1}{3}$ --- $11\frac{2}{3}$
16	$10\frac{2}{3}$ --- $7\frac{1}{3}$	30	20 --- 12
17	$11\frac{1}{3}$ --- $7\frac{2}{3}$	31	$20\frac{2}{3}$ --- $12\frac{1}{3}$
18	12 --- 8	32	$21\frac{1}{3}$ --- $12\frac{2}{3}$
19	$12\frac{2}{3}$ --- $8\frac{1}{3}$	33	22 --- 13

Num-

Numerus acierum	Limites pro numeris H et S	Numerus acierum	Limites pro numeris H et S
34	$22\frac{2}{3}$ --- $13\frac{1}{3}$	48	32 --- 18
35	$23\frac{1}{3}$ --- $13\frac{2}{3}$	49	$32\frac{2}{3}$ --- $18\frac{1}{3}$
36	24 --- 14	50	$33\frac{1}{3}$ --- $18\frac{2}{3}$
37	$24\frac{2}{3}$ --- $14\frac{1}{3}$	51	34 --- 19
38	$25\frac{1}{3}$ --- $14\frac{2}{3}$	52	$34\frac{2}{3}$ --- $19\frac{1}{3}$
39	26 --- 15	53	$35\frac{1}{3}$ --- $19\frac{2}{3}$
40	$26\frac{2}{3}$ --- $15\frac{1}{3}$	54	36 --- 20
41	$27\frac{1}{3}$ --- $15\frac{2}{3}$	55	$36\frac{2}{3}$ --- $20\frac{1}{3}$
42	28 --- 16	56	$37\frac{1}{3}$ --- $20\frac{2}{3}$
43	$28\frac{2}{3}$ --- $16\frac{1}{3}$	57	38 --- 21
44	$29\frac{1}{3}$ --- $16\frac{2}{3}$	58	$38\frac{2}{3}$ --- $21\frac{1}{3}$
45	30 --- 17	59	$39\frac{1}{3}$ --- $21\frac{2}{3}$
46	$30\frac{2}{3}$ --- $17\frac{1}{3}$	60	40 --- 23
47	$31\frac{1}{3}$ --- $17\frac{2}{3}$		

COROLL. 8.

§. 50. Ad hanc tabulam insuper notari conuenit, quantum numerorum H et S alter limitem minorem superet, tantundem alterum a limite maiore deficere debere. Ita si numerus acierum A est $= 30$, et numerus hedrarum $H = 12 + n$, erit numerus angulorum solidorum $S = 20 - n$, at $20 - n$ non debet esse minus quam 12, vnde n octonarium superare nequit.

PROPOSITIO VII.

§. 51. *Nullum existere potest solidum, cuius omnes hedrae sint hexagonae, vel plurium laterum; neque vllum existere potest solidum, cuius omnes anguli solidi ex sex, pluribusue angulis planis sint formati.*

DEMONSTRATIO.

Sit vt hactenus numerus acierum $= A$, numerus hedrarum $= H$, et numerus angulorum solidorum $= S$. Quod si iam omnes hedrae essent hexagonae, vel plurium laterum, numerus omnium angulorum planorum esset vel $= 6H$, vel $> 6H$; hinc numerus acierum A foret vel $= 3H$, vel $> 3H$. At supra vidimus, semper esse $A = 3H - 6$, vel $A < 3H - 6$; nullo modo ergo fieri potest, vt esset vel $A = 3H$, vel $A > 3H$; vnde impossibile est, vt omnes hedrae sint vel hexagonae, vel plurium laterum. Q. E Vnum.

Simili modo si omnes anguli solidi ex sex pluribusve angulis planis constarent, foret omnium angulorum planorum numerus vel $= 6S$ vel $> 6S$, hincque numerus acierum A esset vel $= 3S$, vel $> 3S$. At supra demonstrauimus, fieri non posse, vt sit $A + 6 > 3S$, multo minus ergo esse poterit $A = 3S$, vel adeo $A > 3S$. Vnde impossibile est, vt omnes anguli solidi ex sex pluribusue angulis planis constent. Q. E. Alterum.

PROPOSITIO VIII.

§. 52. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu cuiuscunque solidi reperiuntur, aequalis est quater tot angulis rectis, quot vnitates occurrunt in excessu numeri acierum super numerum hedrarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus acierum $= A$, numerusque hedrarum $= H$

$= H$, atque demonſtrandum eſt, ſummam omnium angulorum planorum aequalem eſſe $4A - 4H$ rectis. Ad hoc demonſtrandum conſtet ſolidi ambitus

ex	a	hedris	trigonis
ex	b	hedris	tetragonis
ex	c	hedris	pentagonis
ex	d	hedris	hexagonis
ex	e	hedris	heptagonis
			etc.

erit ergo numerus hedrarum $H = a + b + c + d + e +$ etc. et numerus acierum $A = \frac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ etc.$)$ quia numerus angulorum planorum eſt $= 3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ etc.

Iam cum ſumma angulorum	vnius	trianguli ſit	$=$	2	rectis
- - - - - - - - - - -	vnius	quadrilateri	$=$	4	rectis
- - - - - - - - - - -	vnius	pentagoni	$=$	6	rectis
- - - - - - - - - - -	vnius	hexagoni	$=$	8	rectis
- - - - - - - - - - -	vnius	heptagoni	$=$	10	rectis
	etc.				

erit ſumma omnium angulorum planorum $=$ $2a + 4b + 6c + 8d + 10e +$ etc. angulis rectis,

$$\begin{array}{rl} \text{at eſt } 4A = & 6a + 8b + 10c + 12d + 14e + \text{etc.} \\ \text{et } 4H = & 4a + 4b + 4c + 4d + 4e + \text{etc.} \\ \hline \text{ergo } 4A - 4H = & 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \text{etc.} \end{array}$$

Conſequenter ſumma omnium angulorum planorum aequalis eſt $4A - 4H$ angulis rectis. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 53. Cum ſit vel $2A = 3H$, vel $2A > 3H$, ſi ponamus $2A = 3H + \alpha$, erit ſumma angulorum planorum $= 2H + 2\alpha$, ideoque minor eſſe nequit, quam $2H$ anguli recti.

COROLL. 2.

§. 54. Deinde cum ſit $A = 3H - 6 - \alpha$, erit $4A - 4H = 8H - 24 - 4\alpha$. Hinc ſumma omnium angulorum planorum maior eſſe nequit, quam $8H - 24$ anguli recti. Numerus ideoque angulorum rectorum, quibus ſumma omnium angulorum planorum eſt aequalis, extra hos limites $2H$, et $8H - 24$ cadere nequit.

PROPOSITIO IX.

§. 55. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu ſolidi cuiuscunque occurrunt, aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot adſunt anguli ſolidi, demtis octo.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus angulorum ſolidorum $= S$, ac demonſtrari debet, ſummam omnium angulorum planorum aequalem eſſe $4S - 8$ angulis rectis. Ponatur ad hoc numerus hedrarum $= H$, et numerus acierum $= A$, et quia in praecedente propoſitione demonſtrauimus, ſummam omnium angulorum planorum eſſe $= 4A - 4H$ angulis rectis, ob $H + S = A + 2$, erit $A - H = S - 2$, ideoque $4A - 4H = 4S - 8$. Vnde perſpicuum eſt, ſummam

ſummam omnium angulorum planorum eſſe $= 4S - 8$ rectis, ſeu aequari quater tot rectis, quot ſunt anguli ſolidi demtis octo. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 56. Inſignis ac palmaria haec eſt proprietas ſolidorum, quod ſumma omnium angulorum planorum vnice per numerum angulorum ſolidorum definitur, ſimili modo, quo in quauis figura plana ſumma angulorum ex eorum numero colligitur.

COROLL. 2.

§. 57. Merito igitur deſideratur demonſtratio huius propoſitionis ex ſolo numero angulorum ſolidorum petita, ita vt eam neque numerus hedrarum, neque numerus acierum ingrediatur. Hinc igitur, atque ex propoſitione quarta, cuius ne demonſtrationem quidem apodicticam exhibere potui, eo magis elucet, quam parum etiam nunc elementa Stereometriae ſint exculta.

COROLL. 3.

§. 58. Quoniam ſumma omnium angulorum planorum vnice a numero angulorum ſolidorum pendet, iſte numerus eiusmodi characterem ſolidorum conſtituit, a quo genera ſolidorum deriuanda eſſe videantur. Hinc ergo genera ſolidorum erunt ſecundum numerum angulorum ſolidorum ſequentia: 1. Tetragonum. 2. Pentagonum 3. Hexagonum, 4. Heptagonum etc. quae deinceps per numerum hedrarum magis determinabuntur.

PROBLE-

PROBLEMA I.

§. 59. *Genera notabiliora, ad quae omnia solida figuris planis inclusa, sunt referenda, enumerare, nominibusque idoneis denotare.*

SOLVTIO.

Sit numerus angulorum solidorum $= S$, atque supra vidimus, numerum hedrarum extra hos limites: $2S - 4$, et $\frac{1}{2}S + 2$ cadere non posse. Hinc ex tabella (§. 47.) exhibita pro quouis numero angulorum solidorum sequentia solidorum genera constituentur:

Num. ang. sol.	numerus hedrarum	numerus acierum	Nomina generum
4	4	6	Tetragonum tetraedrum
5	5	8	Pentagonum pentaedrum.
	6	9	Pentagonum hexaedrum.
6	5	9	Hexagonum pentaedrum.
	6	10	Hexagonum hexaedrum.
	7	11	Hexagonum heptaedrum.
	8	12	Hexagonum octaedrum.
7	6	11	Heptagonum hexaedrum.
	7	12	Heptagonum heptaedrum.
	8	13	Heptagonum octaedrum.
	9	14	Heptagonum enneaedrum.
	10	15	Heptagonum Decaedrum.

Num.

Num. ang. solidor.	numerus hedrarum	numerus acierum	nomina generum
8	6	12	Octogonum hexaedrum.
	7	13	Octogonum heptaedrum.
	8	14	Octogonum octaedrum.
	9	15	Octogonum enneaedrum.
	10	16	Octogonum decaedrum.
	11	17	Octogonum hendecaedrum.
	12	18	Octogonum dodecaedrum.
9	7	14	Enneagonum heptaedrum.
	8	15	Enneagonum Octaedrum.
	9	16	Enneagonum enneaedrum.
	10	17	Enneagonum decaedrum.
	11	18	Enneagonum hendecaedrum.
	12	19	Enneagonum dodecaedram.
	13	20	Enneagonum 13edrum.
	14	21	Enneagonum 14edrum.
10	7	15	Decagonum heptaedrum.
	8	16	Decagonum octaedrum.
	9	17	Decagonum enneaedrum.
	10	18	Decagonum decaedrum.
	11	19	Decagonum hendecaedrum.
	12	20	Decagonum dodecaedrum.
	13	21	Decagonum 13edrum.
	14	22	Decagonum 14edrum.
	15	23	Decagonum 15edrum.
	16	24	Decagonum 16edrum.
			etc.

ſuperfluum foret hunc generum ſolidorum catalogum vlte-

 rius

rius continuare, quoniam ex his progreſſio ſequentium generum ſponte perſpicitur. Q. E. I.

COROLL. 1.

§. 60. Notari hic conuenit, nullum dari ſolidum, quod ſeptem habeat acies, cum tamen primum genus tantum ſex habeat acies; ſecundum genus habet octo, ſequentia plures, atque in numeris acierum poſt ſenarium omnes numeri occurrunt, ſolo ſeptenario excepto.

COROLL. 2.

§. 61. Ex primo genere patet, omne ſolidum tetragonon ſimul eſſe tetraedrum, et viciſſim, quod genus, vti eſt ſimpliciſſimum, ita vnicam ſpeciem continet, quae eſt pyramis triangularis quatuor triangulis incluſa.

COROLL. 3.

§. 62. Secundum genus habens 16 angulos planos, et 5 ſolidos, horum quatuor ex tribus planis, vnus ex 4 planis erit formatus, ſimiliterque quinque eius hedrarum quatuor erunt triangula, vna vero quadrilaterum, ex quo hoc genus vnicam ſpeciem, ſcilicet pyramidem ſuper baſi quadrilatera extructam, continet.

COROLL. 4.

§. 63. Tertium genus habens 18 angulos planos, 5 ſolidos, et 6 hedras includetur ſex triangulis, quod vnico modo fieri poteſt, eritque hoc ſolidum pyramis trian-

triangularis geminata, ſeu erit ex duabus pyramidibus ſecundum baſes aequales iunctis compoſitum.

COROLL. 5.

§. 64. Quartum genus pariter vnicam ſpeciem continet tribus quadrilateris, et duobus triangulis incluſam, quae priſma triangulare vocatur. Sequentia genera plerumque plures ſpecies comprehendunt, ſed iis enumerandis immorari non licet, propterea quod adhuc aliae proprietates ſolidorum huc ſpectantes nondum ſatis ſunt euolutae.

SCHOLION.

§. 65. Haec ſunt ergo quaſi prima elementa Stereometriae, quae ſolidorum in genere ſpectatorum affectiones, ac proprietates continent, vnde deinceps ſingularum ſpecierum proprietates ſint deducendae. Propoſitiones ſcilicet hic traditae ſimiles ſunt earum, quae in Geometria plana de proprietatibus generalibus figurarum demonſtrari ſolent, et quae ad has duas reducuntur, vt in omni figura rectilinea primum angulorum numerus aequalis ſit numero laterum, tum vero vt ſumma omnium angulorum aequetur bis tot angulis rectis, quot ſunt latera, demtis quatuor. In ſolidis autem numerus huiusmodi propoſitionum ſundamentalium multo eſt maior, quod quidem ob maiorem rerum, quibus determinantur multitudinem, non eſt mirandum. Hoc autem merito maxime mirum videtur, quod cum non ſolum elementa Geometriae planae ad ſummum perſpicuitatis faſtigium ſint promota, ſed etiam Stereometria iam ab antiquiſſimis Geometris ſit exculta, tamen prima eius quasi fundamenta adhuc inter desiderata sint referenda. Quanquam enim nunc equidem ista fundamenta in lucem protraxisse arbitror, tamen fateri cogor, ea, quae primaria sunt habenda, idoneis, ac vere Geometricis demonstrationibus adhuc destitui, quae ideo potissimum hic proponenda duxi, vt alios, quibus hoc studium curae cordique est, excitem ad istas demonstrationes inuestigandas; quibus inuentis nullum plane est dubium, quin Stereometria ad parem perfectionis gradum, atque Geometria euehatur.

DEMONSTRATIO NONNVLLARVM INSIGNIVM PROPRIETATVM, QVIBVS SOLIDA HEDRIS PLANIS INCLVSA SVNT PRAEDITA.

Auct. L. Eulero.

Quemadmodum figurae planae rectilineae, quarum indoles in Geometria inuestigari solet, certas quasdam habent proprietates generales ac notissimas, veluti quod numerus angulorum aequalis sit numero laterum, et quod summa angulorum aequalis sit bis tot angulis rectis, quot sunt latera demtis quatuor, ita nuper eiusmodi Stereometriae elementa adumbraui, in quibus similes proprietates solidorum hedris planis inclusorum continentur. Cum enim in Stereometria ea corpora, quae circum quaque hedris planis terminantur, primum locum aeque merito occupent, ac figurae rectilineae in Planimetria, seu Geometria proprie sic dicta, ita similia Stereometriae principia stabilire in mentem venit, ex qui-

bus

bus formatio solidorum consequatur, eorumque praecipue proprietates demonstrari queant. In quo negotio maxime mirum visum est, quod cum Stereometria iam a tot seculis aeque ac Geometria sit exculta, eius tamen prima quasi elementa adhuc essent incognita, neque quisquam in tam longo temporis interuallo sit inuentus, qui ea inuestigare, atque in ordinem redigere sit conatus. Hoc autem labore suscepto, cum plures insignes proprietates, quae omnibus corporibus hedris planis contentis sunt communes, detexissem, et quae omnino similes videbantur earum, quae inter elementa figurarum planarum rectilinearum referri solent, non sine summa admiratione deprehendi, praecipuas earum tantopere esse reconditas, vt tum temporis omne studium in earum demonstratione eruenda frustra impendissem. Neque etiam ab amicis in his rebus alias versatissimis, quibuscum illas proprietates communicaueram quicquam luminis mihi est accensum, vnde has demonstrationes desideratas haurire potuissem. Contemplatione enim plurium corporum generum eo sum deductus, vt proprietates, quas in illis deprehenderam, ad omnia plane corpora patere intellexissem, etiamsi id mihi rigida demonstratione ostendere non licuisset; sicque istas proprietates in eam veritatum classem referendas censebam, quas nobis quidem agnoscere, non vero demonstrare esset concessum.

Solidorum autem proprietates generales, quae demonstratione adhuc indigent, ab vna pendent, ita vt si hanc demonstrare liceret, cuncta, quae exhibui, Stereometriae elementa aeque essent firmata, atque elementa Geometriae. Proprietas vero ista nondum demonstrata, quae plures alias in ſe complectitur, hac continetur propoſitione:

In omni ſolido hedris planis incluſo numerus angulorum ſolidorum vna cum numero hedrarum binario ſuperat numerum acierum.

Hinc aliam deriuaui non minus inſignem proprietatem omnibus huius generis ſolidis communem, quae ita ſe habet:

In omni ſolido hedris planis incluſo ſumma omnium angulorum planorum, quibus anguli ſolidi conſtituuntur, aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot ſunt anguli ſolidi demtis octo.

Haecque propoſitio ita cum praecedente cohaeret, vt ſi altera demonſtrari poſſet, ſimul alterius demonſtratio haberetur; vnde defectus elementorum Stereometriae, quae in medium protuli, ſupplebitur, ſi harum duarum propoſitionum alterutrius demonſtratio reperietur.

Cum autem hoc argumentum denuo perpendiſſem, deſideratas harum propoſitionum demonſtrationes tandem ſum adeptus, ad quas ſimili fere modo perueni, quo in Geometria propoſitio analoga de ſumma angulorum figurae cuiusuis rectilineae demonſtrari ſolet. Quemadmodum enim in Geometria figura quaecunque rectilinea reſecandis continuo angulis tandem ad triangulum reducitur, ita propoſito quocunque ſolido hedris planis incluſo, obſeruaui, inde continuo angulos ſolidos reſecari poſſe, vt tandem pyramis triangularis remaneat, quae cum ſit figura inter ſolida ſimpliciſſima, ex cognitis eius proprietatibus hoc modo perſpexi, viciſſim ad proprietates omnivm ſolidorum aſcendi poſſe. In pyramide enim trigonali numerus angulorum ſolidorum eſt $= 4$, numerus

rus hedrarum $= 4$, et numerus acierum $= 6$, cuius duplum 12 dat numerum angulorum planorum, quorum ſumma aequalis eſt 8 angulis rectis.

Sumto quidem puncto quocunque intra ſolidum, ſi inde ad ſingulos angulos ſolidos lineae rectae ductae concipiantur, ſolidum hoc modo in totidem pyramides dividetur, quot ſunt hedrae, quippe quae ſingulae baſes pyramidum conſtituent, dum earum vertices in illo puncto vniuntur. Atque hae pyramides, niſi ſint triangulares, porro facile in triangulares diſſecabuntur. Verum hic modus ſolidum quodcunque in pyramides triangulares reſoluendi ad praeſens inſtitutum parum confert; alterum ergo modum, quo quoduis ſolidum reſecandis ſucceſſiue eius angulis ſolidis tandem ad pyramidem triangularem redigitur, hic exponam, vnde deinceps demonſtratio memoratarum propoſitionum facile concinnabitur.

Similis autem haec operatio eſt eius, qua quaelibet figura rectilinea, dum eius anguli ſucceſſiue reſecantur, tandem in triangulum redigi ſolet. Si enim habeatur figura plana quotcunque laterum ABCDEFGA, ſi ab ea per rectam CE triangulum CDE reſecetur, remanebit figura ABCEFGA, cuius numerus angulorum vnitate erit minor. Si iam denuo recta CF triangulum CFE reſecetur, figura remanebit ABCFGA; vnde ſi porro triangulum BCF, tumque triangulum BGF abſcindatur, relinquetur tandem triangulum ABG. TAB. III. Fig. 1.

Ex hac reſolutione facile ambae palmariae figurarum planarum proprietates demonſtrantur: Sit enim figurae ABCDEFG numerus laterum $= L$, et numerus angulorum $= A$; ac ſi ducenda recta CE inde

angulus

angulus D resecetur, figurae residuae numerus angulorum erit $= A - 1$; numerus autem laterum, quia duo latera C D, et D E sunt sublata, eorum autem loco nouum latus C E accessit, erit $= L - 1$. Hinc patet, si denuo vnus angulus resecetur, numerum angulorum fore $= A - 2$, numerumque laterum $= L - 2$; atque si iam hoc modo n anguli fuerint resecti, figurae residuae numerus angulorum erit $= A - n$, et numerus laterum $= L - n$. Sit iam haec figura residua triangulum, erit $A - n = 3$, et $L - n = 3$; vnde sequitur fore $L = A$, seu in quauis figura rectilinea numerum laterum aequalem esse numero angulorum.

Deinde sit R numerus angulorum rectorum, quibus omnes anguli figurae propositae A B C D E F G simul sumti sunt aequales, atque resecto angulo D, seu triangulo C D E, ab angulis figurae auferantur tres anguli trianguli C D E, qui cum aequales sint duobus rectis, summa angulorum figurae residuae A B C E F G aequabitur $R - 2$ angulis rectis, numero angulorum existente iam $= A - 1$. Si denuo angulus resecetur, vt numerus angulorum sit $= A - 2$, eorum summa erit $= R - 4$ rectis; atque si iam n angulos absciderimus, vt figurae residuae numerus angulorum sit $= A - n$, eorum summa aequabitur $R - 2n$ angulis rectis. Sit nunc ista figura residua triangulum, seu $A - n = 3$, quia summa angulorum est $= 2$ rectis, erit $R - 2n = 2$; inde vero est $2A - 2n = 6$, a qua, si ista aequatio auferatur, erit $2A - R = 4$, seu $R = 2A - 4 = 2L - 4$: sicque constat, in quouis polygono summam omnium angulorum aequalem esse bis tot angulis rectis, quot sunt latera demtis quatuor. Simili

Simili igitur modo, quo ex tali figurarum rectilinearum sectione duas praecipuas huiusmodi figurarum proprietates elicui, pro solidis inuestigationem instituam, dum omnia solida hedris planis inclusa successiua angulorum solidorum resectione tandem ad pyramides triangulares sum reducturus; quorsum cum peruenero, numerus angulorum solidorum, numerus hedrarum, numerus acierum, et summa angulorum planorum omnium erunt cognita. Quae quo fiant planiora, totam rem sequentibus propositionibus complectar.

PROPOSITIO I. PROBLEMA

1. *Proposito solido quocunque hedris planis incluso inde datum angulum solidum ita resecare, vt in solido residuo numerus angulorum solidorum vnitate sit minor.*

SOLVTIO.

Sit O angulus solidus obtruncandus, in quo coeant acies AO, BO, CO, DO, EO, FO, ita, vt is formatus sit ab angulis planis AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA, atque puncta A, B, C, D, E, F repraesentent angulos solidos vicinos corporis, qui cum angulo O cohaerent rectis AO, BO, CO, DO, EO, FO. Cum iam eiusmodi pars a solido abscindi debeat, vt angulus solidus O inde penitus auferatur, reliqui vero omnes relinquantur, neque tamen nouus angulus solidus efformetur, prima sectio instituatur per angulum quempiam vicinum B, secundum planum ABC, donec pertingat ad angulos A et C, tum ex O fiat sectio AOC; quo pacto a so- Fig. 2.

 lido

lido resecabitur pyramis triangularis OABC. Tum cultro ad AC applicato sectio dirigatur ad angulum F per planum AFC, et ex O alia sectio FOC fiat, vt separetur pyramis triangularis OACF. Porro secetur solidum secundum planum CDF, et ex O alia sectio ad DF vsque instituatur, vt hoc modo rescindatur pyramis triangularis OCDF. Denique sectio secundum DEF facta resecabit pyramidem triangularem ODEF; sicque angulus solidus O omnino erit obtruncatus, et quia reliqui anguli solidi manent, nullusque nouus per sectiones factas est formatus, numerus angulorum solidorum in corpore residuo vnitate erit diminutus. Q. E. F.

COROLL. 1.

2. Si solidum ipsum fuerit pyramis triangularis, per huiusmodi sectionem tota remouebitur, vt nihil relinquatur. Verum quia hanc sectionem ideo instituimus, vt tandem ad pyramidem triangularem corpus reducamus, si iam fuerit huiusmodi pyramis, sectione plane non erit opus.

COROLL. 2.

3. Si angulus solidus O, a corpore resecandus, a tribus tantum angulis planis formetur; seu si tres tantum acies in eo concurrant, tum vnica sectione a corpore abscindetur, hocque modo vnica pyramis triangularis auferetur.

COROLL. 3.

4. Si angulus solidus O a quatuor angulis planis formetur,

formetur, totidemque acies in eo concurrant, tum ad eum obtruncandum duae pyramides triangulares resecari debent. Hoc autem duplici modo fieri poterit; nam duae pyramides resecandae erunt vel OABC et OACD, vel OABD et OBCD. Ac nisi puncta A, B, C, D fuerint in eodem plano, inde solidum residuum diuersam accipiet figuram. Fig. 3.

COROLL. 4.

5. Si angulus solidus a quinque angulis planis formetur, rectaeque in eo coeuntes ad quinque alios angulos solidos porrigantur, tum angulus O resecabitur tribus pyramidibus triangularibus abscindendis, hocque quinque diuersis modis fieri poterit, qui diuersa quoque residua relinquant, nisi quinque anguli solidi vicini fuerint in eodem plano siti.

COROLL. 5.

6. Cum igitur ista vnius anguli solidi resectio in quolibet corporis propositi angulo suscipi queat, eaque nisi tres tantum anguli plani ad angulum solidum formandum concurrant, pluribus modis institui possit, patet, quodlibet corpus solidum, nisi iam sit pyramis triangularis, pluribus modis vno angulo solido mutilari posse.

COROLL. 6.

7. Quotcunque ergo corpus propositum habuerit angulos solidos, dum hoc modo eorum numerus continuo vnitate diminuitur, tandem cum quatuor tantum an-

guli solidi superfuerint, id in pyramidem triangularem erit redactum, et quoniam singulae partes abscissae sunt pyramides triangulares, hoc modo totum corpus in pyramides triangulares dissecabitur.

SCHOLION.

8. Si in solido proposito numerus angulorum solidorum sit $= S$, postquam modo indicato vnus eorum fuerit resectus, in corpore residuo numerus angulorum solidorum erit $= S - 1$. In qua diminutione cum vis propositionis contineatur, ea pluribus casibus exceptione indigere videtur; si enim corpus propositum fuerit pyramis triangularis, resecto vno angulo simul tota pyramis aufertur, ita, vt nihil relinquatur. Sectione enim facta secundum planum A B C, quod basin pyramidis O A B C constituit, simul tota pyramis rescinditur. Verum hoc casu res ita concipi potest, ac si basis A B C relinquatur, quae etsi est figura plana nulla crassitie praedita, tamen instar solidi tribus tantum angulis constantis spectari potest, quod duas hedras, tresque acies habere censendum est; referet scilicet prisma triangulare altitudinis euanescentis, in quo hedrae laterales in nihilum abeant, et basis superior cum suis angulis in basin inferiorem incidat. Hoc autem modo ambae supra memoratae solidorum proprietates in saluo manent; quia enim numerus angulorum solidorum hoc casu fit $S = 3$, numerus hedrarum $H = 2$, et numerus acierum $A = 3$, patet, esse $S + H = A + 2$. Tum vero summa angulorum planorum in vtraque hedra contentorum aequatur

Fig. 4.

tur 4 angulis rectis, qui numerus est $= 4\,S - 8$. Idem euenit in omnibus pyramidibus, si angulus verticalis O inde resecatur, vbi tota pyramis simul tollitur, tunc autem sola basis relinqui concipienda est, quae si sit polygonum *n* laterum, spectari poterit instar solidi, in quo numerus angulorum solidorum sit $S = n$, numerus hedrarum $H = 2$, et numerus acierum $A = n$, ita vt denuo sit $S + H = A + 2$. Deinde cum vtraque hedra sit polygonum *n* laterum, omnes anguli in ambabus contenti aequabuntur $4n - 8 = 4S - 8$ angulis rectis, vti alterum Theorema postulat. Etsi autem hi casus veritati non aduersantur, tamen in praesenti negotio non opus est ad eos attendere; cum enim propositum sit omnia solida ad pyramides triangulares reuocare, si solidum iam fuerit istiusmodi pyramis, resectione cuiuspiam anguli penitus erit supersedendum; sin autem sit pyramis basin habens plurium laterum, tum non angulum verticalem, sed quempiam angulorum ad basin sitorum inde abscindi conveniet, qui tribus tantum angulis planis formantur; hoc modo semper post resectionem pyramis relinquetur, cuius angulorum solidorum numerus vno erit minor, quam ante. Atque generatim quodcunque proponatur solidum, semper conueniet resectionem incipi ab angulo solido, qui quam paucissimis angulis planis sit formatus, vt semper quaedam solidi portio sit remansura, donec ad pyramidem triangularem perueniatur. Interim tamen vis sequentium demonstrationum ab hac limitatione non pendet, quippe quam tantum eum in finem adieci, vt incommodum apparens non verum euitetur.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

9. *Si a corpore propoſito angulus quispiam ſolidus modo ante expoſito reſecetur, ſicque numerus angulorum ſolidorum vnitate diminuatur, determinare in corpore relicto tam numerum hedrarum, quam numerum acierum, itemque ſummam omnium angulorum planorum.*

SOLVTIO.

Pro ſolido propoſito ſit numerus angulorum ſolidorum $= S$, numerus hedrarum $= H$, numerus acierum $= A$, et omnium angulorum planorum ſumma aequetur
Fig. 2. R angulis rectis. Sit iam O angulus ſolidus reſecandus, ita, vt eo reſecto in ſolido reliquo numerus angulorum ſolidorum futurus ſit $= S - 1$; atque vt reliquas ſolidi remanentis affectiones cognoſcamus, contemplemur primo ſummam angulorum planorum, quam in ſolido integro ponimus $= R$ angulis rectis. Primo autem reſectione anguli O ex computo angulorum planorum egrediuntur omnes anguli in triangulis AOB, BOC, COD, DOE, EOF, et FOA contenti, quoniam haec triangula a ſuperficie corporis abſcinduntur. Sit n numerus horum triangulorum, ſeu angulorum vicinorum A, B, C, D, etc; atque ſumma angulorum ablatorum erit $= 2n$ angulis rectis. At abſciſſis his triangulis eorum loco ſuperficies corporis iam terminabitur triangulis ABC, ACF, CFD, et DFE, quorum numerus illo eſt binario minor, ideoque $= n - 2$. Cum nunc horum triangulorum anguli ſuperaccedant, eorumque ſumma ſit $= 2n - 4$ angulis rectis, manifeſtum eſt, per reſectionem anguli

anguli solidi O summam angulorum planorum R primo imminui $2n$ angulis rectis, tum vero iterum augeri $2n - 4$ angulis rectis, ex quo diminutio erit 4 ang: rect. Hinc in solido residuo summa omnium angulorum planorum aequabitur $R - 4$ rectis, sicque quouis angulo solido resecto summa omnium angulorum planorum diminuitur quatuor angulis rectis.

Si omnes hedrae in O concurrentes fuerint triangula, abscissione anguli O cunctae istae hedrae resecantur, quarum numerus si dicatur n; hinc numerus hedrarum H diminuetur numero n; at loco harum hedrarum nouae ex sectione ortae hedrae triangulares in superficie corporis apparebunt, scilicet ABC, ACF, CFD, DFE, quarum numerus est $= n - 2$; hinc numerus hedrarum, qui ante erat H, nunc erit $H - n + (n - 2) = H - 2$. Verum si eueniat, vt horum triangulorum duo pluraue in eodem plano sint sita, veluti si triangula ABC, et ACF sint in eodem plano constituta, ea iam non duas, sed vnicam hedram quadrilateram exhibere censentur, ita vt numerus hedrarum futurus sit $= H - 3$; ac si huius modi duarum hedrarum in idem planum incidentia μ vicibus occurrat, numerus hedrarum erit $= H - 2 - \mu$. At si hedrarum in O concurrentium non omnes fuerint triangulares, sed vna veluti AOFQP pluribus lateribus constet, manifestum est, resectione trianguli AOF non totam hedram auferri, sed partem reliquam AFQP etiam nunc in censum hedrarum ingredi; ita numerus Hedrarum erit $= H - 2 - \mu + 1$; atque si inter hedras in O coeuntes reperiantur ν hedrae non triangulares, numerus hedrarum reliquarum erit $= H - 2 - \mu + \nu$.

Pro

Pro numero acierum, quae post resectionem anguli O supererunt, inuestigando, ponamus primo vt ante, omnes hedras in O conuenientes esse triangula; ac primo quidem ex acierum numero recedent acies O A, O B, O C, O D, etc. quarum numerus est $= n$, earum vero loco de nouo accedent acies A C, C F, F D, quarum numerus est $= n - 3$, sicque acierum numerus erit $= A - n + (n - 3) = A - 3$, si quidem nouae hedrae A B C, A C F, etc. fuerint inuicem inclinatae: At si duae earum A B C, et A C F in eodem plano sint sitae, vt vnicam hedram constituere censeantur, euanescet acies A C, eritque acierum numerus $A - 3 - 1$: ac si huiusmodi duarum hedrarum in idem planum incidentia μ vicibus occurrat, vt ante posuimus, numerus acierum erit $= A - 3 - \mu$. Deinde si quaepiam hedrarum angulum O formantium non sit trigonalis, videlicet hedra AOFQP, tum abscissione trianguli AOF noua acies existit AF, quae ante non aderat, vnde numerus acierum hoc casu vnitate augebitur. Ac si, vt ante posuimus, inter hedras in O coeuntes ν hedrae non triangulares reperiantur, numerus acierum in corpore proposito post resectionem anguli O erit $= A - 3 - \mu + \nu$, cum ante fuisset $= A$. Q. E. I.

COROLL. 1.

10. Quod si ergo solidum hedris planis inclusum vno angulo solido mutiletur, vt angulorum solidorum numerus nunc sit $= S - 1$, cum ante esset $= S$, summa omnium angulorum planorum diminuitur quatuor angulis rectis, seu cum ante fuisset $= R$ angulis rectis, nunc erit $= R - 4$ angulis rectis. COROLL.

COROLL. 2.

11 Cum numerus hedrarum, qui ante erat $= H$, nunc post detruncationem anguli O fit $= H - 2 - \mu + \nu$, patet, fieri posse, vt numerus hedrarum maior euadat, id quod eueniet, si sit $\nu > 2 + \mu$, vbi μ et ν eos obtinent valores, qui in solutione sunt assignati.

COROLL. 3

12. Idem patet euenire posse in numero acierum, qui cum ante mutilationem anguli O esset $= A$, nunc repertus est $= A - 3 - \mu + \nu$; qui numerus illo maior est, si $\nu > 3 + \mu$; hoc ergo casu multo magis numerus hedrarum augetur.

COROLL. 4.

13. Cum in expressionibus $H - 2 - \mu + \nu$, et $A - 3 - \mu + \nu$ litterae μ et ν idem significent, patet, decrementum numeri acierum A vnitate maius esse, quam decrementum numeri hedrarum. Ita si numerus hedrarum post obtruncationem vnius anguli solidi fiat $= H - \alpha$, numerus acierum fiet $= A - \alpha - 1$.

COROLL. 5.

14. Hinc ergo differentia inter numerum hedrarum, et numerum acierum, quae initio erat $= A - H$, nunc post remotionem vnius anguli solidi erit $= A - H - 1$. Haec scilicet differentia semper vnitate fit minor, vtcunque corpus ratione litterarum μ et ν fuerit comparatum.

SCHOLION.

15. Ex his iam facillime Theorematum supra memoratorum demonstrationes concinnare licebit, quae nulla re inferiores sint demonstrationibus in Geometria

 vsitatis

vsitatis, nisi quod hic ob solidorum indolem plus imaginationi sit tribuendum, siquidem solida super plano depingantur: at si huiusmodi figurae corporeae formarentur, omnia aeque clara essent futura. Ceterum quae in solutione istius problematis assumsi, per se sunt manifesta; si enim habeatur polygonum A B C D E F, n lateribus terminatum, leuiter attendenti mox patebit, si ea figura diagonalibus ducendis in triangula dissecetur, numerum horum triangulorum fore $= n - 2$, numerumque diagonalium hoc modo ductarum $= n - 3$: quadrilaterum enim vna diagonali in dua triangula, pentagonum duabus diagonalibus in tria triangula, et hexagonum tribus diagonalibus in quatuor triangula dispertitur, et ita porro.

PROPOSITIO III. THEOREMA.

16. *In omni solido hedris planis incluso summa omnium angulorum planorum, qui in eius hedris existunt, aequalis est quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi, demtis octo; seu si numerus angulorum solidorum sit* $= S$, *summa omnium angulorum planorum aequatur* $4S - 8$ *angulis rectis.*

DEMONSTRATIO.

In solido quocunque sit numerus angulorum solidorum $= S$, summa autem omnium angulorum planorum aequetur R angulis rectis, ita vt demonstrari oporteat, esse $R = 4S - 8$. Iam modo ante indicato abscindatur a solido vnus angulus solidus, vt numerus angulorum solidorum, quos habebit, sit $= S - 1$, et summa angulorum

lorum planorum erit $= R - 4$ angulis rectis. Si denuo angulus solidus resecetur, vt reliquorum numerus sit $S - 2$, angulorum planorum summa erit $= R - 8$, atque ita pergendo patebit, pro quouis angulorum solidorum numero summam omnium angulorum planorum fore, vt tabella sequens indicat.

Numerus angulorum solidorum	Summa omnium angulorum planorum
S	R angulis rectis
$S - 1$	$R - 4$
$S - 2$	$R - 8$
$S - 3$	$R - 12$
:	:
:	:
$S - n$	$R - 4n$

Cum igitur hac continua mutilatione peruenerimus ad $S - n$ angulos solidos, summa angulorum planorum erit $= R - 4n$ angulis rectis. At hoc modo tandem peruenietur ad 4 angulos solidos, quo casu corpus abibit in pyramidem triangularem, in qua constat, summam omnium angulorum planorum esse aequalem 8 angulis rectis: hoc est, si sit $S - n = 4$, erit $R - 4n = 8$, seu $R = 4n + 8$. At inde est $n = S - 4$, quo valore hic substituto fiet $R = 4S - 16 + 8 = 4S - 8$, ita vt in quouis solido summa angulorum planorum aequetur quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi demtis octo. Q. E. D.

SCHOLION.

17. Quanquam alterum Theorema ita ab hoc pendet, vt cum hoc fuerit demonſtratum, ſimul illius veritas ſit euicta, tamen ex problemate praemiſſo etiam alterius Theorematis demonſtratio confici poteſt ſequenti modo.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

18. *In omni ſolido hedris planis incluſo numerus hedrarum vna cum numero angulorum ſolidorum, binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Sit in ſolido quocunque propoſito:
numerus angulorum ſolidorum $= S$
numerus hedrarum - - - $= H$
numerus acierum - - - $= A$
atque ante vidimus, ſi reſectione vnius anguli ſolidi numerus S vnitate minuatur, vt ſit $S - 1$, tum differentiam inter numerum acierum et numerum hedrarum futuram eſſe $= A - H - 1$. Continuata ergo hac mutilatione,

ſi numerus angulorum ſolidorum ſit,	Eceſſus numeri acierum ſuper numerum hedrarum erit
S	$A - H$
$S - 1$	$A - H - 1$
$S - 2$	$A - H - 2$
$S - 3$	$A - H - 3$
:	:
:	:
$S - n$	$A - H - n$

Quando

Quando ergo hoc modo ad pyramidem triangularem deuenietur, in qua numerus angulorum ſolidorum eſt $= 4$, numerus hedrarum $= 4$, et numerus acierum $= 6$, ita vt exceſſus numeri acierum ſupra numerum hedrarum futurus ſit $= 2$; euidens eſt, ſi fiat $S - n = 4$, fore $A - H - n = 2$. Inde ergo eſt $n = S - 4$, hinc vero $n = A - H - 2$; ſicque habetur $S - 4 = A - H - 2$, ſeu $H + S = A + 2$; vnde conſtat, in omni ſolido hedris planis incluſo numerum hedrarum H vna cum numero angulorum ſolidorum S binario ſuperare numerum acierum A. Q. E. D.

SCHOLION.

19. Demonſtratis ergo his Theorematibus, elementa Stereometriae, quae ante aliquod tempus explicaui, firmiſſimis demonſtrationibus ſunt munita, ita vt elementis Geometriae nihil plane concedant. Verum prima tantum Stereometriae elementa ſic in medium attuliſſe fateor, quibus haec ſcientia vlterius excolenda ſuperſtrui debeat: quippe quae plurimas praeclaras corporum affectiones in ſe complectitur, quas adhuc omnino ignoramus. Cum autem cuiusque ſolidi propoſiti ſoliditas quaeri ſoleat, coronidis loco modum tradam, ſoliditatem cuiusuis pyramidis triangularis inueniendi; cum enim puncto quocunque intra ſolidum hedris planis incluſum aſſumto, ſolidum in tot pyramides reſoluatur, quot habet hedras, dum quaelibet hedra baſin pyramidis conſtituit, quaeuis autem pyramis, cuius baſis non eſt triangularis, facile in pyramides triangulares reſoluatur; ſufficit, pyramidis triangularis ſoliditatem inueniſſe. Quae cum obtineatur, ſi baſis per tertiam

 partem

partem altitudinis multiplicetur, ostendam, quem ad modum, si latera pyramidis fuerint data, ex iis soliditas definiri queat; perinde ac area trianguli ex datis tribus lateribus determinari solet.

PROPOSITIO V. PROBLEMA.

20. *Datis sex lateribus seu aciebus pyramidis triangularis, eius soliditatem inuenire.*

SOLVTIO.

Fig. 5. Sit A B C D pyramidis triangularis, cuius basis triangulum A B C, et vertex D; ac ponantur eius latera: $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$. Iam in hedris ADB, et ADC ex D ad bases oppositas demittantur perpendicula D P, et D Q, et in basi A B C ex punctis P, et Q educantur ad latera A B, et A C normales P O, et Q O se mutuo secantes in O, erit recta D O perpendicularis ex vertice D in basin A B C, vnde soliditas pyramidis erit $= \frac{1}{3} DO \times$ aream A B C; at ducta A O, erit $DO = \sqrt{(AD^2 - AO^2)} = \sqrt{(AD^2 - AP^2 - PO^2)}$. Iam ex elementis Geometriae constat, esse, $AP = \frac{aa + dd - ee}{2a}$. et $AQ = \frac{bb + dd - ff}{2b}$ Hinc producta Q O in S, si angulus B A C vocetur $= \alpha$, erit $QS = AQ \text{ tang. } \alpha$, et $AS = \frac{AQ}{\text{cos. } \alpha}$, hinc $PS = \frac{AQ}{\text{cos. } \alpha} - AP$. At cum sit $QS : AQ : AS = PS : PO : OS$, erit $PO = \frac{AQ \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\text{tang. } \alpha} = \frac{AQ}{\text{sin. } \alpha} - \frac{AP}{\text{tang. } \alpha}$, seu $PO = \frac{AQ - AP \text{ cos. } \alpha}{\text{sin. } \alpha}$; tum vero $OS = \frac{AS \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\text{sin. } \alpha} = \frac{AQ}{\text{sin. } \alpha \text{ cos. } \alpha} - \frac{AP}{\text{sin. } \alpha}$, ideoque $QO = QS - OS = AQ \text{ tang. } \alpha$

$- AQ$

$-\frac{AQ}{\sin.\alpha\cos.\alpha}+\frac{AP}{\sin.\alpha}=\frac{AP-AQ\cos.\alpha}{\sin.\alpha}$. Hinc erit $AO^2=AP^2+PO^2=\frac{AP^2+AQ^2-2AP.AQ\cos.\alpha}{\sin.\alpha^2}$; ideoque $DO^2=\frac{AD^2\sin.\alpha^2-AP^2-AQ^2+2AP.AQ\cos.\alpha}{\sin.\alpha^2}$. Verum area trianguli A B C eſt $=\frac{1}{2}ab.\sin.\alpha$, ex quo erit ſoliditas pyramidis $=\frac{1}{6}ab\surd(AD^2\sin.\alpha^2-AP^2-AQ^2+2AP.AQ.\cos.\alpha)=\frac{1}{6}\surd[aabbdd\sin.\alpha^2-\frac{1}{4}bb(aa+dd-ee)^2-\frac{1}{4}aa(bb+dd-ff)^2+\frac{1}{2}ab(aa+dd-ee)(bb+dd-ff)\cos.\alpha]$. Deinde ex triangulo A B C eſt $\cos.\alpha=\frac{aa+bb-cc}{2ab}$, ideoque $\sin.\alpha^2=1-\frac{1}{4aabb}(aa+bb-cc)^2$, quibus valoribus ſubſtitutis prodibit ſoliditas pyramidis:

$$\tfrac{1}{12}\surd\left(\begin{array}{l}4aabbdd-dd(aa+bb-cc)^2-bb(aa+dd-ee)^2-aa(bb+dd-ff)^2\\ \qquad+(aa+bb-cc)(aa+dd-ee)(bb+dd-ff).\end{array}\right)$$

quae terminis euolutis in ſequentem abit formam:

$$\tfrac{1}{12}\surd\left(\begin{array}{l}aaccdd+aabbee+aabbff+aaddff+bbccdd+bbddee\\ aaccff+aaeeff+bbccee+bbeeff+ccddee+ccddff\\ \qquad-aabbcc-aaddee-bbddff-cceeff\\ -a^4ff-aaf^4-b^4ee-bbe^4-c^4dd-ccd^4\end{array}\right)$$

quae adhuc commodius ita exhiberi poſſe videtur:

$$\tfrac{1}{12}\surd\left\{\begin{array}{l}+aaff(bb+cc+dd+ee)-aaff(aa+ff)-aabbcc\\ +bbee(aa+cc+dd+ff)-bbee(bb+ee)-aaddee\\ +ccdd(aa+bb+ee+ff)-ccdd(cc+dd)-bbddff\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-cceeff\end{array}\right)$$

Sicque ex datis ſex lateribus a, b, c, d, e, f pyramidis triangularis eius ſoliditas definitur. Q. E. I.

SCHOLION I.

21. Quo ratio, qua in hac expreſſione latera a, b, c, d, e, f inter ſe combinantur, clarius perſpiciatur, notandum eſt, ex iis quatuor formari triangula, ſcilicet

Δ A B C conſtat lateribus a, b, c
Δ A B D - - - - a, d, e
Δ A C D - - - - b, d, f

Δ B C D

$\triangle$ BCD - - - - c, e, f

vnde patet, latus a cum ſingulis reliquorum ad triangula conſtituenda concurrere, praeter quam cum latere f, quamob rem haec latera a et f disiuncta appellabo, quia inter ſe non iunguntur; ſimili modo latera b et e erunt disiuncta, itemque latera c et d.

Occurrunt ergo poſt ſignum radicale primo termini ex lateribus disiunctis formati $aaff$, $bbee$, $ccdd$, qui ſunt multiplicati per ſummam quadratorum reliquorum, deinde iidem termini negatiue ſumti multiplicantur per ſummam ſuorum quadratorum, hincque denique ſubtrahuntur producta ex quadratis ternorum laterum cuiusque trianguli.

SCHOLION 2.

22. Formula quoque pro ſoliditate pyramidis inveniri poteſt aliquanto ſimplicior, ſi tria tantum latera in vno angulo ſolido coeuntia dantur, vna cum angulis planis, quos ibi conſtituunt.

Sint enim tria latera in angulo ſolido A coeuntia

$$AB = a, \quad AC = b, \quad AD = d$$

deinde anguli plani:

$$BAC = p; \; BAD = q; \; CAD = r.$$

Atque ex his ſoliditas pyramidis erit

$$\tfrac{1}{6} abd \sqrt{(1 - \text{coſ.}p^2 - \text{coſ.}q^2 - \text{coſ.}r^2 + 2\,\text{coſ.}p \,.\, \text{coſ.}q \,.\, \text{coſ.}r)}$$

quae reducitur ad formam ſequentem:

$$\tfrac{1}{3} abd \sqrt{\text{ſin.}\tfrac{p+q+r}{2}\,\text{ſin.}\tfrac{p+q-r}{2}\,\text{ſin.}\tfrac{p+r-q}{2}\,\text{ſin.}\tfrac{q+r-p}{2}};$$

vnde patet, vt area prodeat realis, trium angulorum planorum p, q, et r, in angulo quouis ſolido coeuntium binos ſimul ſumtos tertio maiores eſſe debere.

DE MO-

DE MOTV CORPORVM COELESTIVM A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE PERTVRBATO.

AVCT. L. EVLERO.

I.

Motus corporum coeleſtium cenſetur regularis, nulliſque inaequalitatibus perturbatus, ſi ea ita reuoluuntur in ellipſi aliaue ſectione conica, vt circa alterutrum focum areas temporibus proportionales deſcribant. Notum autem eſt, huiusmodi motum regularem oriri, ſi corpora ad iſtum focum continuo ſollicitentur viribus, quae ſint quadratis diſtantiarum reciproce proportionales. Ex quo intelligitur, ſi vires ſollicitantes ab hac lege recedant, motum proditurum eſſe irregularem, ita vt vel orbita non amplius ſit ellipſis, vel areae circa focum deſcriptae rationem temporum non amplius ſequantur. In motu ergo planetarum primariorum perturbatio oriri debet, ſi praeter vim quadratis diſtantiarum reciproce proportionalem, qua ad ſolem vrgentur, aliis quoque viribus quibuscunque ſollicitantur; in planetis autem ſecundariis ſeu ſatellitibus motus perturbatio aeſtimanda eſt ex viribus, quibus praeter eam vim quadratis diſtantiarum reciproce proportionalem, qua ad ſuos planetas principales pelli concipiuntur, inſuper ſollicitantur.

2. Si planeta motu regulari fertur, seu per ellipsis perimetrum ita progreditur, vt circa alterutrum eius focum areas temporibus proportionales conficiat, eius motus sequenti modo ad certas leges reuocatur. Primo scilicet tam positio, quam longitudo axis transuersi ellipsis definiri debet; tum vero species eius, quae siue axe coniugato, siue parametro, siue excentricitate determinatur; tertio ad quodvis tempus propositum anomaliam planetae mediam assignare oportet, quae inuenitur, si a longitudine media longitudo aphelii seu summae absidis subtrahatur. Sicque, si tam tempus periodicum fuerit cognitum, quam momentum, quo planeta semel in abside summa fuerit versatus, inde ad quoduis tempus propositum anomalia media colligi poterit. Ex anomalia autem media porro et specie ellipsis per problema *Keplerianum* definitur anomalia vera, atque distantia planetae a foco; vnde si ad anomaliam veram longitudo absidis summae addatur, orietur tandem longitudo vera; quae eadem quoque obtinetur, si excessus anomaliae verae supra anomaliam mediam ad longitudinem mediam addatur, siue defectus ab ea subtrahatur; qui excessus, vel defectus ab Astronomis Prostaphaeresis appellari solet.

3. In motu regulari tam positio lineae absidum seu axis transuersi, quam eius quantitas vna cum excentricitate perpetuo manent eadem, ita vt, si hae res semel fuerint cognitae, eae nulli deinceps immutationi sint obnoxiae. Harum ergo rerum constantia primarium constituit discrimen inter motum regularem, et irregularem; ita vt, si vel positio axis transuersi, vel eius quantitas,

vel excentricitas mutabilis exiſteret, motus non amplius eſſet regularis, ſed irregularis. Atque hinc motus quicunque irregularis ita ſaltem ad ſpeciem motus regularis reuocari poterit, vt iſtae res tanquam variabiles conſiderentur. Vtcunque enim motus fuerit perturbatus, quaeuis eius portio minima ad motum regularem referri poteſt, dummodo ſitus, quantitas, et ſpecies ellipſis definiatur, ad quam ſpatii elementum a corpore deſcriptum pertineat.

4. Effectus ergo virium motum alias regularem perturbantium in hoc conſiſtet, vt vel poſitionem lineae abſidum immutet, vel axem ellipſis tranſuerſum, vel eius excentricitatem. Atque ſi conſtet, quantam mutationem vires quaecunque perturbantes his tribus rebus pro quouis tempore induxerint, locus planetae inde aeque facile definietur, atque in motu regulari. Quocirca iſte modus effectum virium perturbantium determinandi aptiſſimus atque ad vſum Aſtronomiae accommodatiſſimus videtur. Eo autem Aſtronomi iam reipſa vtuntur, dum in planetis principalibus loca apheliorum mobilia ſtatuunt, et in luna non ſolum apogaeo, ſed etiam excentricitati mutationem continuam tribuere ſolent. Quo igitur facilius effectum virium quarumcunque perturbantium hoc modo per calculum definire liceat, motum primo regularem, qui oritur a viribus reciproce quadrato diſtantiae proportionalibus ad calculum reuocabo, quo facto problemata ad motus perturbationem ſpectantia commodius tractari poterunt.

PROBLEMA. I.

5. *Determinare motum corporis, quod ad punctum* TAB. III.

 fixum Fig. 6.

fixum C perpetuo sollicitatur viribus distantiae eius ab hoc puncto quadratis reciproce proportionalibus.

SOLVTIO.

In plano orbitae, quam corpus circa punctum fixum C *d e* scribit, ducatur recta C *a* ad punctum coeli fixum, a quo elongatio seu longitudo corporis quouis tempore computetur. Elapso tempore t peruenerit corpus in M, ac ponatur eius a puncto C distantia $CM = x$, et longitudo seu angulus $ACM = \Phi$. Vis autem acceleratrix, qua corpus hic ad C vrgetur, fit $= \frac{C}{xx}$; vbi C denotat quantitatem constantem, qua intensitas absoluta huius vis determinatur. His positis ex legibus motus colligitur, motum huius corporis sequentibus binis aequationibus differentio-differentialibus exprimi, sumto elemento temporis dt constante:

I. $2\,dx\,d\Phi + x\,dd\Phi = 0$; II. $ddx - x\,d\Phi^2 + \frac{1}{2}dt^2 . \frac{C}{xx} = 0$.

Minus autem conuenit in his aequationibus elemento temporis dt vti; atque ad homogeneitatem seruandam praestabit loco temporis absoluti motum solis medium introducere, quippe qui aptissimam temporis mensuram suppeditat. Sit igitur distantia solis media a terra $= a$; eius longitudo media tempori t respondens $= \zeta$; et pro distantia x vis solis in terram $= \frac{A}{xx}$, quae si pro $\frac{C}{xx}$ scribatur, ponaturque $x = a$, et $\Phi = \zeta$, vt formulae traditae motum solis medium referant, ob $dx = 0$, et $dd\Phi = 0$, erit $- a\,d\zeta^2 + \frac{1}{2}dt^2 . \frac{A}{aa} = 0$, ideoque $\frac{1}{2}dt^2 = \frac{a^3}{A}d\zeta^2$; qui valor si substituatur, aequatio secunda abit in:

d d x

$$ddx - xd\Phi^2 + \frac{Ca^3}{Axx}d\zeta^2 = 0.$$

At prima aequatio integrata, ob $d\zeta$ iam constans, praebet $xxd\Phi = Ed\zeta$, vnde fit $d\Phi = \frac{Ed\zeta}{xx}$, et $xd\Phi^2 = \frac{EEd\zeta^2}{x^3}$; substituatur hic valor in illa aequatione, vt habeatur:

$$ddx - \frac{EEd\zeta^2}{x^3} + \frac{Ca^3d\zeta^2}{Axx} = 0,$$

quae multiplicata per $2dx$, et integrata dabit

$$dx^2 + \frac{EEd\zeta^2}{xx} - \frac{2Ca^3d\zeta^2}{Ax} + Fd\zeta^2 = 0,$$

ex qua elicitur:

$$d\zeta = \frac{xdx}{\sqrt{(-EE + \frac{2Ca^3x}{A} - Fxx)}},$$

$$\text{et } d\Phi = \frac{Edx}{x\sqrt{(-EE + \frac{2Ca^3x}{A} - Fxx)}},$$

vbi E, et F sunt quantitates constantes ex natura orbitae definiendae. Ponatur $x = \frac{b}{z}$, vt sit $dx = \frac{-bdz}{zz}$, et $\frac{dx}{x} = \frac{-dz}{z}$, eritque:

$$d\zeta = \frac{-bbdz}{zz\sqrt{(-EEzz + \frac{2Ca^3bz}{A} - Fbb)}}, \text{ et}$$

$$d\Phi = \frac{-Edz}{\sqrt{(-EEzz + \frac{2Ca^3b}{A}z - Fbb)}},$$

quae postrema aequatio a quadratura circuli aperte pendet, ad eamque integrandam notandum est, z maximum et minimum valorem obtinere posse, quorum vtroque formula irrationalis in nihilum abeat. Sit igitur ad constantes E et F definiendas, $1 + k$ valor ipsius z maximus, et $1 - k$ valor minimus, vt 1 sit eius valor medius; atque

 (1 +

$(1+k-z)(z-1+k) = -(1-kk) + 2z - zz$ debebit esse factor quantitatis post signum radicale constitutae, altero factore existente E E, vnde oritur

$$\frac{Ca^3 b}{A} = EE, \text{ et } Fbb = EE(1-kk),$$

fietque $\sqrt{(-EEzz + \frac{2Ca^3bz}{A} - Fbb)} = E\sqrt{(1+k-z)} \times (z-1+k) = E\sqrt{[kk-(z-1)^2]}$; Ergo, ob $E = \sqrt{\frac{Ca^3 b}{A}}$, erit

$$d\zeta = \frac{-bbdz}{zz\sqrt{\frac{Ca^3b}{A}[kk-(z-1)^2]}} = \frac{-dz\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}}{zz\sqrt{[kk-(z-1)^2]}};$$

$$d\Phi = \frac{-dz}{\sqrt{[kk-(z-1)^2]}}.$$

Quia $z = 1 + k$ est maximus, et $z = 1 - k$ minimus valor, quilibet medius ita exprimetur commode $z = 1 + k \operatorname{cos}. s$, eritque $\sqrt{[kk-(z-1)^2]} = k \operatorname{sin}. s$, et $dz = -kds \operatorname{sin}. s$: vnde fit

$$d\zeta = \frac{ds\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}}{(1+k\operatorname{cos}. s)^2}, \text{ et } d\Phi = ds,$$

atque $x = \frac{b}{1+k\operatorname{cos}. s}$; hincque $\Phi = D + s$. Quia angulus $ACM = \Phi$, capiatur angulus ACP = quantitati constanti D, eritque angulus $PCM = s$; qui qualis sit respectu orbitae ex distantia $x = \frac{b}{1+k\operatorname{cos}. s}$ colligi poterit. Nam si sit $s = 0$, quo casu C M abit in C P, erit $CP = \frac{b}{1+k}$; erit ergo P id orbitae punctum, vbi corpus minime a puncto C distat, ideoque est absis ima, seu perihelium, si C sit sol. Cum igitur distantia minima sit $= \frac{b}{1+k}$, et prodeat, si $s = 0$; distantia maxima prodibit ponendo $s = 180°$, fitque $= \frac{b}{1-k}$; sicque distantiae minimae e diametro erit opposita: vnde

vnde ſumma harum ambarum diſtantiarum maximae et minimae, $= \frac{2b}{1-kk}$ dabit axem tranſuerſum orbitae, et cum, poſito $s = 90°$, diſtantia fiat ſemilateri recto aequalis, erit ſemilatus rectum $= b$; hincque axis coniugatus $= \frac{2b}{\surd(1-kk)}$. Porro axis tranſuerſus cum ſit $= \frac{2b}{1-kk}$, et diſtantia focorum, (quae eſt exceſſus diſtantiae maximae ſupra minimam) $= \frac{2bk}{1-kk}$, haec per axem tranſuerſum diuiſa dabit excentricitatem $= k$. Tum vero manifeſtum eſt, angulum P C M $= s$ referre anomaliam veram ab abſide ima computatam, cuius longitudo ſeu angulus A C P ſi ponatur $= \omega$; erit longitudo corporis A C M $= \Phi = \omega + s$. Vnde haec naſcitur problematis ſolutio.

Corpus mouebitur in ſectione conica, cuius ſi fuerit 1°. ſemi-latus rectum $= b$; 2°. excentricitas $= k$; 3°. locus abſidis imae ſeu angulus A C P $= \omega$; ad quodvis tempus locus corporis in orbita ita aſſignabitur. Pro tempore propoſito, cui reſpondeat longitudo ſolis $= \zeta$, quaeratur corporis anomalia vera $= s$, ex hac aequatione: $d\zeta = \frac{ds}{(1+k\,cof.\,s)^2} \surd \frac{A\,b^3}{C\,a^2}$, qua inuenta erit longitudo corporis ſeu angulus A C M $= \Phi = \omega + s$, et diſtantia eius C M $= x = \frac{b}{1+k\,cof.\,s}$. Q. E. I.

COROLL. 1.

6. Cum ergo ſit $d\zeta \surd \frac{C\,a^2}{A\,b^3} = \frac{ds}{(1+k\,cof.\,s)^2}$, totum negotium redit ad integrationem formulae huius differentialis, quae euoluitur in hanc formam:

$d\zeta \surd$

$d\zeta \sqrt{\frac{C\,a^3}{A\,b^3}} = ds(1 - 2k\cos. s + 3k^2 \cos. s^2 - 4k^3 \cos. s^3 + 5k^4 \cos. s^4 - \text{etc.})$, qui termini, nisi excentricitas k sit valde magna, tantopere conuergunt, vt sufficiat aliquot ab initio assumsisse. Verum ad integrationem absoluendam conueniet, potestates cosinus anguli s in cosinus angulorum multiplorum conuertere, secundum has formulas:

$$\cos. s = \cos. s$$
$$\cos. s^3 = \tfrac{3}{4}\cos. s + \tfrac{1}{4}\cos. 3s$$
$$\cos. s^5 = \tfrac{3\cdot 5}{4\cdot 6}\cos. s + \tfrac{5}{16}\cos. 3s + \tfrac{1}{16}\cos. 5s$$
$$\cos. s^7 = \tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8}\cos. s + \tfrac{21}{64}\cos. 3s + \tfrac{7}{64}\cos. 5s \text{ etc.}$$
$$\cos. s^9 = \tfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cos. s + \tfrac{21}{64}\cos. 3s + \tfrac{9}{64}\cos. 5s \text{ etc.}$$

etc.

$$\cos. s^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos. 2s$$
$$\cos. s^4 = \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \tfrac{1}{2}\cos. 2s + \tfrac{1}{8}\cos. 4s$$
$$\cos. s^6 = \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \tfrac{15}{32}\cos. 2s + \tfrac{3}{16}\cos. 4s + \tfrac{1}{32}\cos. 6s$$
$$\cos. s^8 = \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \tfrac{7}{16}\cos. 2s + \tfrac{7}{32}\cos. 4s + \tfrac{1}{16}\cos. 6s \text{ etc.}$$
$$\cos. s^{10} = \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \tfrac{105}{256}\cos. 2s + \tfrac{15}{64}\cos. 4s + \tfrac{45}{512}\cos. 6s \text{ etc.}$$

etc.

Erit ergo:

$$\begin{aligned} d\zeta \tfrac{C\,a^2}{A\,b^2} = {} & ds(1 + \tfrac{3}{2}kk + \tfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}k^4 + \tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}k^6 + \tfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}k^8 + \text{etc.}) \\ & - 2\,ds\cos. s(k + \tfrac{3}{2}k^3 + \tfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}k^5 + \tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}k^7 + \tfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}k^9 + \text{etc.}) \\ & + ds\cos. 2s(\tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{5}{2}k^4 + \tfrac{105}{32}k^6 + \tfrac{63}{16}k^8 + \text{etc.}) \\ & - ds\cos. 3s(k^3 + \tfrac{15}{8}k^5 + \tfrac{21}{8}k^7 + \tfrac{105}{32}k^9 + \text{etc.}) \\ & + ds\cos. 4s(\tfrac{5}{8}k^4 + \tfrac{21}{16}k^6 + \tfrac{63}{32}k^8 + \text{etc.}) \\ & - ds\cos. 5s(\tfrac{3}{8}k^5 + \tfrac{7}{8}k^7 + \tfrac{45}{32}k^9 + \text{etc.}) \\ & + ds\cos. 6s(\tfrac{7}{32}k^6 + \tfrac{9}{16}k^8 + \text{etc.}) \end{aligned}$$

et

et integrando habebitur $\zeta\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} =$

$$= \text{const.} + s\left(1 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{3\cdot5}{2\cdot4}k^4 + \tfrac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}k^6 + \text{etc.}\right)$$
$$- 2k\,\text{fin.}\,s\left(1 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{3\cdot5}{2\cdot4}k^4 + \tfrac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}k^6 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{3}{4}k^2\,\text{fin.}\,2s\left(1 + \tfrac{5}{3}k^2 + \tfrac{35}{16}k^4 + \tfrac{21}{8}k^6 + \text{etc.}\right)$$
$$- \tfrac{1}{3}k^3\,\text{fin.}\,3s\left(1 + \tfrac{15}{8}k^2 + \tfrac{21}{8}k^4 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{5}{32}k^4\,\text{fin.}\,4s\left(1 + \tfrac{21}{10}k^2 + \tfrac{63}{20}k^4 + \text{etc.}\right)$$
$$- \tfrac{1}{16}k^5\,\text{fin.}\,5s\left(1 + \tfrac{7}{3}k^2 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{7}{192}k^6\,\text{fin.}\,6s\left(1 + \tfrac{18}{7}k^2 + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

COROLL. 2.

7. Patet hic coefficientem ipsius s esse $= \frac{1}{(1-kk)\sqrt{(1-kk)}}$. Quare si aequatio nostra per $(1-kk)^{\frac{3}{2}}$ multiplicetur, orietur $\zeta\sqrt{\frac{Ca^3(1-kk)^3}{Ab^3}} =$

$$= \text{Const.} + s - 2k\,\text{fin.}\,s + \tfrac{3}{4}k^2\left(1 + \tfrac{1}{6}k^2 + \tfrac{1}{16}k^4 + \tfrac{1}{32}k^6\right)\text{fin.}\,2s$$
$$- \tfrac{1}{3}k^3\,\text{fin.}\,3s\left(1 + \tfrac{3}{8}k^2 + \tfrac{3}{16}k^4\right) + \tfrac{5}{32}k^4\left(1 + \tfrac{3}{5}k^2 + \tfrac{3}{8}k^4\right)\text{fin.}\,4s$$
$$- \tfrac{1}{16}k^5\left(1 + \tfrac{5}{6}kk\right)\text{fin.}\,5s + \tfrac{7}{192}k^6\left(1 + \tfrac{15}{14}kk\right)\text{fin.}\,6s$$
$$\text{etc.}$$

vbi notari conuenit, fractionem $\frac{b}{1-kk}$ exprimere semiaxem transuersum. Erit ergo $\zeta\sqrt{\frac{Ca^3(1-kk)^3}{Ab^3}} - \text{Const.}$ anomalia media, quippe quae tempori est proportionalis, vnde si anomalia media ponatur $= r$, quae pariter ab abside ima computetur, erit $r = \zeta\sqrt{\frac{Ca^3(1-kk)^3}{Ab^3}} - \text{Const.}$ atque

$$s = r + 2k\,\text{fin.}\,s - \tfrac{3}{4}k^2\left(1 + \tfrac{1}{6}k^2 + \tfrac{1}{16}k^4 + \tfrac{1}{32}k^6\right)\text{fin.}\,2s$$
$$+ \tfrac{1}{3}k^3\left(1 + \tfrac{3}{8}k^2 + \tfrac{3}{16}k^4\right)\text{fin.}\,3s - \tfrac{5}{32}k^4\left(1 + \tfrac{3}{5}k^2 + \tfrac{3}{8}k^4\right)\text{fin.}\,4s$$
$$+ \tfrac{1}{16}k^5\left(1 + \tfrac{5}{6}kk\right)\text{fin.}\,5s - \tfrac{7}{192}k^6\left(1 + \tfrac{15}{14}kk\right)\text{fin.}\,6s$$

quae formula ad excentricitates satis notabiles se extendit, ex eaque leui negotio per approximationes ad datam quamuis anomaliam mediam r, ei respondens anomalia vera s, poterit inuestigari. Quod si forte difficile videatur; ad singulos gradus anomaliae verae s quaeratur anomalia media r, qua tabula constructa sine labore inde tabula inuersa formabitur, quae ad singulos gradus anomaliae mediae r respondentes anomalias veras s exhibeat.

COROLL. 3.

8. Inventa autem anomalia vera s, quia longitudo absidis imae posita est $= \omega$, erit longitudo vera seu angulus $ACM = \Phi = \omega + s$. Hinc porro eruitur distantia $CM = x = \frac{b}{1 + k\,\text{cos}.s}$; pro qua, cum ex anomalia media r constet vera s, ad singulos gradus anomaliae mediae r tabula distantiarum x poterit concinnari. Diameter autem corporis ex C spectati apparens, vt et eius parallaxis horizontalis, erit, vt $1 + k\,\text{cos}.s$.

COROLL. 4.

9. Motus quoque huius corporis horarius ex aequatione differentiali colligi poterit, quae est $d\zeta = \frac{ds\sqrt{Ab^3 : Ca^3}}{(1 + k\,\text{cos}.s)^2}$. Nam si $d\zeta$ denotat motum horarium solis medium, erit $d\Phi$ seu ds motus horarius corporis verus, quatenus ex puncto C spectatur. Hinc ergo erit motus horarius solis medius, qui est $148''$ ad motum horarium corporis, vt 1 ad $(1 + k\,\text{cof}.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$: vnde motus horarius corporis erit $= 148''(1 + k\,\text{cof}.s)^2 \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$. Seu cum sit $x = \frac{b}{1 + k\,\text{cos}.s}$, erit $(1 + k\,\text{cof}.s)^2 = \frac{bb}{xx}$, ideoque motus horarius erit $= 148'' \sqrt{\frac{Ca^3b}{Ax^4}}$.

COROLL.

COROLL. 5.

10. Per excentricitatem k cognoſcitur ſpecies ſectionis conicae, quam corpus percurrit; ſi enim fuerit $k = 0$, orbita corporis erit circulus, cuius radius $= b$. Sin autem valor ipſius k ſit vnitate minor, ſiue ſit affirmatiuus, ſiue negatiuus, orbita erit ellipſis, cuius ſemilatus rectum $= b$, et ſemi-axis transuerſus $= \frac{b}{1-kk}$, et diſtantia abſidis imae $= \frac{b}{1+k}$, et ſummae $= \frac{b}{1-k}$. Verum, ſi tertio ſit k vnitati aequalis, ita vt $1-kk$ fiat $= 0$, orbita erit parabola, ſeu ellipſis in infinitum elongata: ſin autem quarto valor ipſius k ſit vnitati maior, ita, vt ſit $1-kk$ numerus negatiuus, tum orbita erit hyperbola. His autem duobus poſterioribus caſibus, et quando orbita eſt ellipſis admodum longa, vbi k prope ad vnitatem accedit, ſeries ante inuenta, quae valorem ipſius ζ exhibebat, vel ſit nimis parum conuergens, vel etiam ſi $k > 1$ diuergens et imaginaria, quibus caſibus peculiari modo integratio aequationis differentialis eſt inſtituenda, cui autem non immoror.

COROLL. 6.

11. Ex aequatione integrali §. 7. inuenta, facile colligitur tempus periodicum corporis, ſiquidem in ellipſi reuoluitur. Ponatur enim $s = 360°$, ita, vt corpus ad eandem abſidem, vnde eſt egreſſum, reuertatur, et quia ſinus omnium angulorum s, $2s$, $3s$, $4s$ etc. euaneſcunt, erit $\zeta \sqrt{\frac{Ca^3(1-kk)^3}{Ab^3}} = 360°$; vnde conſtat, eodem tempore, quo corpus vnam periodum abſoluit, ſolem motu medio conficere angulum $\zeta = 360° \sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3(1-kk)^3}}$,

ſeu

ſeu cum ſit ſemi-axis transuerſus $= \frac{b}{1-kk}$, ponatur is $= f$: at tempus periodicum aequabitur illi tempori, quo ſol motu medio abſoluit angulum $= 360° \sqrt{\frac{Af^3}{Ca^3}}$. Haec formula, ſi ponatur $f = a$, et $C = A$, praebebit tempus periodicum ſolis, ſeu quantitatem anni medii, quae exprimetur per 360°. Vnde tempus periodicum corporis erit ad tempus vnius anni, vt $\sqrt{\frac{Af^3}{Ca^3}}$ ad 1, ſeu vt $\sqrt{\frac{f^3}{C}}$ ad $\sqrt{\frac{a^3}{A}}$; vel tempus periodicum corporis propoſiti erit $= \sqrt{\frac{Af^3}{Ca^3}}$ annis. Hinc apparet, ſi plura corpora circa diuerſa centra virium motu regulari in ellipſibus reuoluantur, fore eorum tempora periodica in ratione compoſita ex directa ſesquiplicata axium transuerſorum et inuerſa ſubduplicata virium abſolutarum, ſeu earum virium, quas centra in aequalibus diſtantiis exerunt.

PROBLEMA II.

12. *Si corpus in* M, *data celeritate et ſecundum datam directionem* M m, *proiiciatur, inuenire eius orbitam, quam ad centrum virium* C *attractum, deſcribit, ſi quidem vis, ad* C *tendens, ponatur quadratis diſtantiarum reciproce proportionalis.*

SOLVTIO.

Sit diſtantia $CM = x$, quae cognita aſſumitur, et vis in M, ad C tendens, $= \frac{C}{xx}$: deinde cum detur celeritas corporis in M, eiusque directio Mm, ne angulo CMm opus habeamus, reſoluatur motus ſecundum Mm in duos laterales ſecundum $M\mu$ et Mn, quorum illius directio $M\mu$ ſit in CM producta, huius Mn ad CM norma-

normalis. Sint autem $M\mu$ et Mn ea spatiola, quae a corpore confici concipiuntur, dum Sol motu medio angulum $d\zeta$ seu spatiolum ad ζ percurrit; ac ponatur $M\mu = m\,d\zeta$ et $Mn = n\,d\zeta$, ita, vt celeritas motus secundum $M\mu$ sit ad solis celeritatem mediam vt m ad a, et celeritas motus secundum Mn ad celeritatem solis mediam vt n ad a. Praeter x et C igitur dantur quoque quantitates m et n; tum vero etiam datur angulus $ACM = \Phi$, seu positio lineae CM respectu lineae fixae CAa: hinc cum angulus MCm sit $= d\Phi$, qui tempusculo $d\zeta$ absoluitur, erit $d\Phi = \frac{n\,d\zeta}{x}$, et $dx = mn = m\,d\zeta$: actio enim vis $\frac{C}{xx}$, quatenus corpus de via Mm retrahit, in elementis $d\Phi$ et dx tantum differentialia secundi gradus producit.

His positis, quae sunt cognita, sit P orbitae, quam corpus est descripturum, absis ima et angulus ACP $= \omega$, anomalia vera seu angulus $PCM = s$; semi-latus rectum orbitae $= b$, et excentricitas $= k$. Quae quantitates, cum quaerantur, habebimus ex problemate praecedente primo $x = \frac{b}{1 + k\cos.s}$ deinde $d\zeta = \frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} \sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^2}}$; et tertio $d\Phi = ds$, ob $\Phi = \omega + s$ et angulum ω constantem; ideoque $ds = \frac{n\,d\zeta}{x}$: quo valore substituto fiet $x = \frac{n}{(1+k\cos.s)^2} \sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^2}} = \frac{b}{1+k\cos.s}$; hincque $n\sqrt{\frac{Ab}{Ca^2}} = 1 + k\cos.s$. Praeter ea ob $dx = m\,d\zeta$ aequatio $x = \frac{b}{1+k\cos.s}$ differentiata dat $dx = \frac{bk\,ds\,\sin.s}{(1+k\cos.s)^2} = m\,d\zeta = \frac{nbk\,d\zeta\,\sin.s}{x(1+k\cos.s)^2}$. Ergo $m(1+k\cos.s) = nk\sin.s$. Tres ergo nacti sumus aequationes, ex quibus tres nostras incognitas b, s et k definire oportet. Scilicet $b = x(1+k\cos.s)$; $n\sqrt{\frac{Ab}{Ca^2}} = 1 + k\cos.s$ atque $m(1+k\cos.s) = nk\sin.s$; at valor ipsius $1+k\cos.s$

ex

ex prima, qui eſt $\frac{b}{x}$ in ſecunda ſurrogatus dat $n\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}} = \frac{b}{x}$ ſeu $Annxx = Ca^3 b$, vnde fit $b = \frac{Annxx}{Ca^3}$; ſicque iam conſtat latus rectum orbitae. Porro ob $\frac{Annxx}{Ca^3} = x(1 + k\,\text{coſ}.s)$ habebimus $1 + k\,\text{coſ}.s = \frac{Annx}{Ca^3} = \frac{nk\,\text{ſin}.s}{m}$; vnde obtinemus $k = \frac{Amnx}{Ca^3\,\text{ſin}.s}$: ſicque erit $1 + \frac{Amnx\,\text{coſ}.s}{Ca^3\,\text{ſin}.s} = \frac{Annx}{Ca^3}$, vnde elicitur $\frac{\text{coſ}.s}{\text{ſin}.s} = \cot s = \frac{n}{m} - \frac{Ca^3}{Amnx} = \frac{Annx - Ca^3}{Amnx}$

et $\text{ſin}.s = \frac{Amnx}{\sqrt{[A^2m^2n^2xx + (Annx - Ca^3)^2]}}$, atque

$$\text{coſ}\,s = \frac{Annx - Ca^3}{\sqrt{[A^2m^2n^2xx + (Annx - Ca^3)^2]}}.$$

Ex quibus definitur excentricitas;

$k = \frac{1}{Ca^3}\sqrt{[A^2m^2n^2xx + (Annx - Ca^3)^2]}$

Ex datis ergo m, n, x, quibus motus, corpori initio impreſſus, determinatur et vi $\frac{C}{xx}$, orbita quam corpus deſcribet, ita definietur, vt ſit

1°. Eius ſemi-latus rectum $b = \frac{Annxx}{Ca^3}$.

2°. Eius excentricitas $k = \frac{1}{Ca^3}\sqrt{[A^2m^2n^2xx + (Annx - Ca^3)^2]}$

3°. Situs lineae abſidum CP ex angulo $PCM = s$ cognoſcitur, cum ſit $\text{tang}.s = \frac{Amnx}{Annx - Ca^3}$: erit enim longitudo abſidis imae ſeu angulus $ACP = ACM - s$. Denique motus corporis in hac orbita cognoſcetur, ſeu ad motum ſolis medium comparabitur, ope huius formulae:

$$d\zeta\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = \frac{ds}{(1 + k\,\text{coſ}.s)^2}.\quad \text{Q. E. I.}$$

SCHOLION.

13. Quia excentricitas k formula irrationali exprimitur, dubium relinquitur, vtrum valor ipſius k ſit affirmatiue accipiendus, an negatiue; vel quod eodem redit, an angulus $PCM = s$ elongationem corporis ab abſide ima

ima exhibeat, an ab abside summa? Verum hoc dubium cessabit, si ad directionem motus secundum $M\mu$ attendamus, seu ad valorem ipsius m, qui, si fuerit affirmatiuus, indicat, corporis a puncto C distantiam augeri, ex quo manifestum est, id ab abside ima ad summam progredi, ideoque punctum P absidem imam referre, vnde angulus PCM duobus rectis erit minor, hincque $\sin. s$ affirmatiuus: quam ob rem excentricitas k affirmatiue erit accipienda. Quodsi autem anomaliam semper ab abside ima computare instituamus, semper quoque valor excentricitatis k positiuus capi debet, atque tum ex expressione sinus et cosinus ipsius s intelligetur, vtrum angulus PCM sit duobus rectis maior an minor: cum sit $\sin. s = \frac{Amnx}{Ca^2k}$ et $\cos. s = \frac{Annx - Ca^3}{Ca^3k}$.

COROLL. 1.

14. Si corpus in M perpendiculariter ad CM proiiciatur, vt motus $md\zeta$ euanescat, in ipso puncto M erit absis vel summa vel ima: Vtra autem ibi existat, sic explorabitur. Cum posito $m = 0$ sit $k = \pm \frac{Annx - Ca^3}{Ca^3}$, prout $Annx$ sit vel maius vel minus quam Ca^3; ita vt valor ipsius k prodeat affirmatiuus; fiet $\cos. s = +1$ si $Annx > Ca^3$, et $\cos. s = -1$ si $Annx < Ca^3$. Priori ergo casu si $Annx > Ca^3$ in M erit absis ima, sin autem $Annx < Ca^3$ in M erit absis summa. At si $Annx = Ca^3$ planum est, orbitam fore circulum ob excentricitatem k euanescentem, hoc ergo casu, quia celeritas corporis secundum Mn est $= nd\zeta$, existente celeritate solis media $= ad\zeta$, erit celeritas corporis ad celeritatem solis vt $\sqrt{Ca}$ ad $\sqrt{Ax} = \sqrt{\frac{C}{x}} : \sqrt{\frac{A}{a}}$.

COROLL.

COROLL. 2.

15. Cum sit semi-latus rectum $b = \frac{Annxx}{Ca^3}$, patet in tantum a motu corpori secundum Mn impresso pendere, atque quadrato huius celeritatis esse proportionale, ita, vt motus secundum Mμ impressus valorem lateris recti plane non immutet. Semi-axis transuersus vero f, quia est $= \frac{b}{1-kk}$, ob $1-kk = \frac{2ACa^3nnx - (mm+nn)AAnnxx}{CCa^6}$ seu $1-kk = \frac{Annx}{CCa^6}[2Ca^3 - Ax(mm+nn)]$, fiet $f = \frac{Ca^3x}{2Ca^3 - Ax(mm+nn)}$.

COROLL. 3.

16. Cum corpus nunc versetur in M, definiri poterit tempus, quo ante per absidem imam P transire debuit, si iam ante hunc motum esset prosecutum. Tempus hoc designabitur angulo ζ, quem inter ea sol motu medio absoluit, et qui per integrationem huius aequationis

$$d\zeta \sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = \frac{ds}{(1+k\,\mathrm{cos}.s)^2} \quad \text{elici debet.}$$

Supra autem vidimus (7) esse integratione per approximationem instituta

$$\zeta\sqrt{\frac{Ca^3(1-kk)^3}{Ab^3}} = s - 2k\,\mathrm{sin}.s + \mathfrak{A}kk\,\mathrm{sin}.2s - \mathfrak{B}k^3\,\mathrm{sin}.3s$$
$$+ \mathfrak{C}k^4\,\mathrm{sin}.4s - \mathfrak{D}k^5\,\mathrm{sin}.5s + \mathfrak{E}k^6\,\mathrm{sin}.6s - \text{etc.}$$

vbi porro breuitatis gratia:

$\mathfrak{A} = \frac{3}{4}(1+\frac{1}{6}k^2+\frac{1}{16}k^4+\frac{1}{32}k^6)$; $\mathfrak{B} = \frac{1}{3}(1+\frac{3}{8}k^2+\frac{3}{16}k^4)$
$\mathfrak{C} = \frac{5}{32}(1+\frac{3}{5}k^2+\frac{3}{8}k^4)$; $\mathfrak{D} = \frac{1}{16}(1+\frac{5}{6}k^2)$; $\mathfrak{E} = \frac{7}{192}(1+\frac{15}{14}kk)$.

Constantem autem ibi adiectam hic negligo, quia posito angulo $s = 0$ simul tempus, quod angulo ζ refertur, euanescere debet. Tempus ergo hoc quaesitum tantum est, cuius interuallo sol motu medio percurrit angulum

$$\zeta = (s - 2k\,\mathrm{sin}.s + \mathfrak{A}k^2\,\mathrm{sin}.2s - \mathfrak{B}k^3\,\mathrm{sin}.3s + \mathfrak{C}k^4\,\mathrm{sin}.4s - \text{etc.})\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3(1-kk)^3}}.$$

vnde hoc tempus facile assignatur. PRO-

PROBLEMA III.

17. *Si corpus, quod motu regulari* A P M *circa* C *descripsit, cum peruenerit in* M *hic impetu quocunque percutiatur, vt eius celeritas et directio in* M *inde subito mutetur, inuenire orbitam, quam post hunc ictum acceptum prosequetur.* Fig. 7.

SOLVTIO.

Quia orbita, quam corpus ante ictum in M describit, ponitur data, sit CP eius absis ima et angulus ACP $= \omega$; tum sit orbitae semi-latus rectum $= b$; excentricitas $= k$, et anomalia vera seu angulus PCM $= s$, tempus autem, quo ab abside ima ad M peruenerit, exprimatur angulo ζ, quem sol interea motu medio descripserit. Sit porro angulus ACM $= \omega + s = \Phi$, et distantia CM $= x$, erit $x = \frac{b}{1 + k\cos.s}$ et $\zeta = (s - 2k\sin.s + \mathfrak{A}k^2\sin.2s - \mathfrak{B}k^3\sin.3s + \mathfrak{C}k^4\sin.4s - \text{etc.}) \sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3(1-kk)^3}}$ posita vi centrali in M $= \frac{C}{xx}$. Nunc consideretur motus verus, quem corpus in M habebit, qui resoluatur, vt ante secundum directiones $M\mu$ et Mn, quorum illius celeritas seu spatium tempusculo $d\zeta$ percursum sit $M\mu = m\,d\zeta$, huius vero $Mn = nd\zeta$, erit, vti ex problemate praecedenti colligere licet $n = (1 + k\cos.s)\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$ et $m = k\sin.s\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$. Nunc autem ictu in M subito facto motus corporis in M ita immutetur, vt eius celeritas secundum $M\mu$ fiat $M\mu' = m'd\zeta$, et celeritas secundum Mn fiat $Mn' = n'd\zeta$; hac vero motus mutatione facta, corpus in alia orbita progredi perget, quae sit A'P'M, cuius absidis imae P' longitudo sit A'CP' $= \omega'$, semi-latus rectum $= b'$, excentricitas $= k'$, et anomalia vera seu angulus $P'CM = s'$. Tempus autem, quo ex P' in M peruenisset, si iam ante in orbita hac noua cucurrisset, sit $= \zeta'$ et $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ etc. sint valores harum litterarum, quas ob mutatum excentricitatis k valorem in k' induent: eritque $\zeta' = (s' - 2k' \sin s' + \mathfrak{A}' k'^2 \sin. 2s' - \mathfrak{B}' k'^3 \sin. 3s' + \text{etc.}) \sqrt{\frac{A\, b'^3}{C a^3 (1 - k'k')^3}}$. Verum ob angulum ACM et distantiam CM eadem nunc ac ante percussionem erit $\omega + s = \omega' + s'$ et $\frac{b}{1 + k \cos. s} = \frac{b'}{1 + k' \cos. s'}$. Praeterea vero ob motum corpori in M de nouo impressum erit $n' = (1 + k' \cos. s') \sqrt{\frac{C a^3}{A\, b'}}$ et $m' = k' \sin. s' \sqrt{\frac{C a^3}{A\, b'}}$ vnde ob $x = \frac{b}{1 + k \cos. s} = \frac{b'}{1 + k' \cos. s'}$ per problema praecedens reperitur.

Primo $b' = \frac{A\, n'n'xx}{C a^3}$

Secundo $k' = \frac{1}{C a^3} \sqrt{[A^2 m'm'n'n'xx + (An'n'x - Ca^3)^2]}$

Tertio $\text{tang.} s' = \frac{A\, m' n' x}{A n'n'x - C a^3}$ siue

$\sin. s' = \frac{A\, m'n'x}{C a^3 k'}$ et $\cos. s' = \frac{A\, n'n'x - C a^3}{C a^3 k'}$.

Hincque ergo noua orbita, in qua corpus post acceptum impetum feretur, innotescet vna cum positione lineae absidum seu angulo $\omega' = \omega + s - s'$. Et quia tempus ab abside ima P' elapsum constat ζ', etiam post hac pro quouis tempore dato, si angulus solaris interea descriptus ad ζ' addatur, anomalia vera illi tempori respondens inuestigari, sicque locus corporis in noua orbita ad quoduis tempus assignari poterit. Q. E. I.

COROLL. 1.

18. Quia est pro orbita, in qua ante percussionem factam corpus mouebatur, $b = \frac{A\, nnxx}{C a^3}$, et pro noua $b' = \frac{A\, n'n'xx}{C a^3}$ erit $\frac{b'}{b} = \frac{n'n'}{nn}$ seu $b' = \frac{n'n'}{nn} b$. Vnde

patet

patet, si motus secundum normalem Mn ab ictu non fuerit immutatus, tum etiam latus rectum orbitae nullum neque augmentum, neque decrementum recipere. Verum si ab ictu motus secundum Mn acceleretur, latus rectum augebitur in duplicata ratione auctae celeritatis, contra in eadem ratione diminuetur, si motus secundum Mn retardetur ab ictu.

COROLL. 2.

19. Inuento semi-latere recto nouae orbitae b', quia est $Ca^2 = \frac{A n' n' x x}{b'}$, anomalia vera noua s', quae per hanc formulam $\text{tang.}\, s' = \frac{A m' n' x}{A n' n' x - Ca^2}$ est definita, etiam hoc simpliciori modo determinari poterit per hanc formulam $\text{tang.}\, s' = \frac{b' m'}{n'(b' - x)}$. Angulo autem s' inuento excentricitas nouae orbitae k' colligetur ex formula $x = \frac{b'}{1 + k' \cos. s'}$, vnde fit $k' = \frac{b' - x}{x \cos. s'}$.

COROLL. 3.

20. Hinc ergo si planeta, qui alias circa solem motu regulari ferretur, a causa quacunque subito percutiatur, atque ab hoc ictu eius vterque motus tam secundum $M\mu$ quam secundum Mn, quae est recta ad CM normalis, alteretur orbita, quam post ictum sequetur, determinabitur. Hoc enim problemate orbitae immutatae tam latus rectum b' cum excentricitate k', quam longitudo perihelii $A'CP' = \omega' = \omega + s - s'$ assignari poterit. Tum vero momento, quo percussio fit, tempus a perihelio, quod angulo solari ζ' definitur, per formulam erutam, reperitur: ad quod si deinceps tempus quodcunque

 ela-

elapſum in angulo pariter ſolari addatur, et ſumma pro ζ ſcribatur, ex eadem formula anomalia vera ſeu longitudo planetae a nouo perihelio eruetur. Quae autem hic de percuſſionibus ſubitaneis ſunt dicta, ad ſollicitationes continuas facile transferri poſſunt, cum quaeuis ſollicitatio continua in infinitas percuſſiones ſubitaneas, quae infinite paruis temporis interuallis ſe inuicem inſequantur, reſolui poſſit; ad quod negotium ſequentis problematis ſolutione erit opus.

PROBLEMA IV.

28. *Si ictus, quem corpus, quod adhuc in orbita* A P M *motu regulari ferebatur, ſubito in* M *patitur, fuerit infinite paruus, definire tam orbitae, quam motus, quo corpus poſt ictum feretur, mutationem.*

SOLVTIO.

Quia ictus ponitur infinite paruus, mutatio, quae inde in motu corporis ſecundum directiones M μ et M n reſoluto, orietur, erit infinite parua. Sic cum ante ictum celeritas corporis ſecundum M μ fuerit $= m\,d\,\zeta$ et ſecundum M $n = n\,d\,\zeta$, ponatur ictu facto celeritas ſecundum M $\mu = (m + dm)\,d\zeta$ et ſecundum M $n = (n + dn)\,d\zeta$, erit ſolutione praecedentis problematis huc translata, $m' = m + dm$ et $n' = n + dn$. Tum ſit ante ictum locus abſidis imae ſeu angulus A C P $= \omega$; orbitae ſemi-latus rectum $= b$, excentricitas $= k$, anomalia vera ſeu angulus P C M $= s$, et tempus ab abſide ima $= t$, quod in arcu ſolari eodem tempore confecto exprimatur. Loco ζ autem hic malo vti littera t, quia poſtea ζ ad tempus quodcunque denotandum adhibebitur. Porro ſit diſtantia

C M

$CM = x$; et angulus seu longitudo vera $ACM = \Phi$; eritque $x = \frac{b}{1 + k\cos.s}$; $\Phi = \omega + s$; et $t = (s - 2k\sin s + \mathfrak{A}k^2\sin.2s - - \mathfrak{B}k^3\sin.3s + \text{etc.})\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3(1-kk)^3}}$ posita vi centrali $= \frac{C}{xx}$, vi solis $= \frac{A}{xx}$ et distantia solis a terra media $= a$. Pro orbita autem, quam corpus post ictum describet, sit, quia omnes mutationes erunt infinite paruae, longitudo absidis imae $A'CP' = \omega' = \omega + d\omega$; orbitae semi latus rectum $b' = b + db$; excentricitas $k' = k + dk$, anomalia vera $P'CM = s' = s + ds$; et tempus ab abside ima $= t' = t + dt$, quod pro ζ' scribi debet.

Erit ergo $d\omega = -ds$, et ds cum reliquis mutationibus db, dk et dt sequenti modo inuenietur. Cum sit $m = k\sin.s\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$ et $n = (1 + k\cos.s)\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$, quia inuenimus $b' = \frac{n'n'}{nn}b$, posito $b + db$ pro b' et $n + dn$ pro n' habebimus $db = \frac{2ndn}{nn}b = \frac{2dn}{1+k\cos.s}\sqrt{\frac{Ab^5}{Ca^3}}$. Deinde ob $\tang.s' = \frac{b'm'}{n'(b'-x)}$ erit $l\tang.s' = lb' + lm' - ln' - l(b'-x)$ ideoque differentiando $\frac{ds}{\sin.s\cos.s} = \frac{db}{b} + \frac{dm}{m} - \frac{dn}{n} - \frac{db}{b-x}$, et ob $db = \frac{2bdn}{n}$ erit $\frac{ds}{\sin.s\cos.s} = \frac{dm}{m} + \frac{dn}{n} - \frac{2bdn}{n(b-x)}$ $= \frac{dm}{m} - \frac{(b+x)dn}{n(b-x)}$, vnde pro m et n substitutis valoribus erit $\frac{ds}{\sin.s\cos.s} = \left(\frac{dm}{k\sin.s} - \frac{(b+x)dn}{(1+k\cos.s)(b-x)}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$.
et quia $x = \frac{b}{1+k\cos.s}$ et $\frac{b+x}{b-x} = \frac{2+k\cos.s}{k\cos.s}$, erit $\frac{ds}{\sin.s\cos.s} = \left(\frac{dm}{k\sin.s} - \frac{dn(2+k\cos.s)}{(1+k\cos.s)k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$, ideoque $ds = -d\omega = \frac{1}{k}\left(dm\cos.s - \frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$.
Denique ob $k' = \frac{b'-x}{x\cos.s}$ seu $lk' = l(b'-x) - lx - l\cos.s$, erit $\frac{dk}{k} = \frac{db}{b-x} + \frac{ds\sin.s}{\cos.s} = \frac{2bdn}{n(b-x)} + \frac{ds\sin.s}{\cos.s}$,
et ob $\frac{b}{b-x} = \frac{1+k\cos.s}{k\cos.s}$ et $n = (1+k\cos s)\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$.
$\frac{dk}{k} = \frac{2dn}{k\cos.s}\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}} + \frac{\sin.s}{k\cos.s}\left(dm\cos.s - \frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$ seu

seu $dk = \frac{1}{\cos.s}\left(dm \sin.s \cos.s + 2dn - \frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s^2}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$
vel $dk = \left(dm \sin.s + \frac{dn(2\cos.s + k + k\cos.s^2)}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{Ab}{Ca^3}}$
Sicque iam haec tria differentialia db, dk et ds seu $d\omega$ elicuimus; restat ergo, vt mutationem in tempore t ab abside ortam eruamus; quod fiet differentiatione aequationis

$$t\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} = (1-kk)^{-\frac{3}{2}}(s - 2k\sin.s + \mathfrak{A}k^2\sin.2s - \mathfrak{B}k^3\sin.3s + \text{etc.})$$

ponendis b, k, s et t variabilibus, et scribendis pro db, dk et ds valoribus iam inuentis. At est, vt ex superioribus constat $(1-kk)^{-\frac{3}{2}}(s - 2k\sin.s + \mathfrak{A}k^2\sin.2s - \mathfrak{B}k^3\sin.3s + \text{etc.}) = \int\frac{ds}{(1+k\cos.s)^2}$ si in hac integratione tantum s, vt quantitas variabilis tractetur. Viciffim ergo huius formulae differentiale, si k constans sumatur, erit $= \frac{ds}{(1+k\cos.s)^2}$, at si simul k pro variabili habeatur, ponamus, esse differentiale completum $= \frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} + S\,dk$ atque constat differentiale primi termini $\frac{ds}{(1+k\cos.s)^2}$ posito k tantum variabili aequale esse debere differentiali posterioris termini $S\,dk$ posito tantum s variabili, fit igitur $dS = V\,ds$, eritque $-\frac{2\,dk\,ds\cos.s}{(1+k\cos.s)^3} = V\,ds\,dk$, ac proinde $V = -\frac{2\cos.s}{(1+k\cos.s)^3}$: et $S = \int -\frac{2\,ds\cos.s}{(1+k\cos.s)^3}$. Quare huius formulae

$$(1-kk)^{-\frac{3}{2}}(s - 2k\sin.s + \mathfrak{A}k^2\sin.2s - \mathfrak{B}k^3\sin.3s + \text{etc.})$$

differentiale plenum, si tam k quam s varientur, erit

$$\frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} - 2dk\int\frac{ds\cos.s}{(1+k\cos.s)^3}$$

Verum est $\int\frac{ds\cos.s}{(1+k\cos.s)^3} = \frac{1}{k}\int\frac{ds(k\cos.s+1-1)}{(1+k\cos.s)^3} = \frac{1}{k}\int\frac{ds}{(1+k\cos.s)^2}$ $-\frac{1}{k}\int\frac{ds}{(1+k\cos.s)^3}$, atque huius formulae posterioris valor integralis perinde reperietur ac prioris. Ponamus igitur, quoniam haec integralia, tanquam cognita, spectare licet:

$\int\frac{ds}{(1+k}$

$$\int \frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} = \mathrm{P}$$

$$\text{et } \int \frac{ds}{(1+k\cos.s)^3} = \mathrm{Q}$$

vbi quidem k, vt quantitas constans spectatur, et integralia P et Q ita capiuntur, vt euanescant posito $s=o$.

eritque $t\sqrt{\frac{\mathrm{C}a^3}{\mathrm{A}b^3}} = \mathrm{P}$ seu $t = \mathrm{P}\sqrt{\frac{\mathrm{A}b^3}{\mathrm{C}a^3}}$, vnde cum sumto tam k quam s variabili sit $d\mathrm{P} = \frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} - \frac{2dk}{k}(\mathrm{P}-\mathrm{Q})$ erit

$$dt = \left[\frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} - \frac{2dk}{k}(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) + \frac{3\mathrm{P}db}{2b}\right]\sqrt{\frac{\mathrm{A}b^3}{\mathrm{C}a^3}}$$

quod est incrementum temporis ab abside ima elapsi, ab effectu percussionis oriundum, vbi autem pro db, ds et dk valores ante inuenti scribi debent, scilicet:

$$db = \frac{2dn}{1+k\cos.s}\sqrt{\frac{\mathrm{A}b^3}{\mathrm{C}a^3}} \quad \text{seu} \quad \frac{db}{b} = \frac{2dn}{1+k\cos.s}\sqrt{\frac{\mathrm{A}b}{\mathrm{C}a^3}}$$

$$ds = \tfrac{1}{k}\left(dm\cos.s - \frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{\mathrm{A}b}{\mathrm{C}a^3}}$$

$$dk = \left(dm\sin.s + \frac{dn(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{\mathrm{A}b}{\mathrm{C}a^3}}$$

qua facta substitutione, erit

$$dt = \left\{\begin{matrix}\frac{dm\cos.s}{k(1+k\cos.s)^2} - \frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{k(1+k\cos.s)^3} - \frac{2(\mathrm{P}-\mathrm{Q})dm\sin.s}{k} \\ -\frac{2(\mathrm{P}-\mathrm{Q})dn(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{k(1+k\cos.s)} + \frac{3\mathrm{P}dn}{1+k\cos.s}\end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{A}bb}{\mathrm{C}a^3}$$

At hoc impulsu mutatio in loco absidis imae facta erit

$$d\omega = \tfrac{1}{k}\left(\frac{dn(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s} - dm\cos.s\right)\sqrt{\frac{\mathrm{A}b}{\mathrm{C}a^3}}$$

Quibus formulis tota mutatio tam in orbita quam in motu, quae ab impulsu infinite paruo oritur, continetur. Q. E. I.

SCHOLION.

22. Quod ad valores formularum P et Q attinet priorem P iam supra inuenimus esse:

P =

$$
\begin{aligned}
P = {} & s\,(1 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{15}{8}k^4 + \tfrac{35}{16}k^6 + \tfrac{315}{128}k^8 + \text{etc.})\\
& - 2k\,\text{fin}.s\,(1 + \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{15}{8}k^4 + \tfrac{35}{16}k^6 + \text{etc.})\\
& + \tfrac{3}{4}k^2\,\text{fin}.2s\,(1 + \tfrac{5}{3}k^2 + \tfrac{35}{16}k^4 + \tfrac{21}{8}k^6 + \text{etc.})\\
& - \tfrac{1}{3}k^3\,\text{fin}.3s\,(1 + \tfrac{15}{8}k^2 + \tfrac{21}{8}k^4 + \text{etc.})\\
& + \tfrac{5}{32}k^4\,\text{fin}.4s\,(1 + \tfrac{21}{10}k^2 + \tfrac{63}{20}k^4 + \text{etc.})\\
& - \tfrac{1}{16}k^5\,\text{fin}.5s\,(1 + \tfrac{7}{3}k^2 + \text{etc.})\\
& + \tfrac{7}{192}k^6\,\text{fin}.6s\,(1 + \tfrac{18}{7}k^2 + \text{etc.})\\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Simili autem modo inueniemus $Q = \int \frac{ds}{(1 + k\,\text{cof}.s)^3}$, fed cum in noftra aequatione occurrat $\frac{1}{k}(P - Q) = \int \frac{ds\,\text{cof}.s}{(1 + k\,\text{cof}.s)^3}$, praeftabit ftatim huius formulae valorem integralem inueftigare. Cum igitur fit

$$
\frac{\text{cof}.s}{(1 + k\,\text{cof}.s)^3} = \text{cof}.s - 3k\,\text{cof}.s^2 + 6k^2\,\text{cof}.s^3 - 10k^3\,\text{cof}.s^4 + 15k^4\,\text{cof}.s^5 - 21k^5\,\text{cof}.s^6 + 28k^6\,\text{cof}.s^7 - 36k^7\,\text{cof}.s^8 \text{ etc.}
$$

reductis poteftatibus cof.s ad cofinus angulorum multiplorum erit

$$
\begin{aligned}
\frac{\text{cof}.s}{(1 + k\,\text{cof}.s)^3} = {} & - k\,(\tfrac{3}{2} + \tfrac{15}{4}k^2 + \tfrac{105}{16}k^4 + \tfrac{315}{32}k^6 + \text{etc.})\\
& + \text{cof}.s\,(1 + \tfrac{9}{2}kk + \tfrac{75}{8}k^4 + \tfrac{245}{16}k^6 + \text{etc.})\\
& - k\,\text{cof}.2s\,(\tfrac{3}{2} + 5k^2 + \tfrac{315}{32}k^4 + \tfrac{63}{4}k^6 + \text{etc.})\\
& + k^2\,\text{cof}.3s\,(\tfrac{3}{2} + \tfrac{75}{16}k^2 + \tfrac{147}{16}k^4 + \text{etc.})\\
& - k^3\,\text{cof}.4s\,(\tfrac{5}{4} + \tfrac{63}{16}k^2 + \tfrac{63}{8}k^4 + \text{etc.})\\
& + k^4\,\text{cof}.5s\,(\tfrac{15}{16} + \tfrac{49}{16}k^2 + \text{etc.})\\
& - k^5\,\text{cof}.6s\,(\tfrac{21}{32} + \tfrac{9}{4}k^2 + \text{etc.})
\end{aligned}
$$

vnde

vnde integratione peracta reperietur:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{k}{1}(P-Q) = & -\tfrac{3}{2}\,k\,s\,(1+\tfrac{5}{2}k^2+\tfrac{35}{8}k^4+\tfrac{105}{16}k^6+\text{etc.})\\
& +\sin.s\,(1+\tfrac{9}{2}k^2+\tfrac{75}{8}k^4+\tfrac{245}{16}k^6+\text{etc.})\\
& -\tfrac{3}{4}k\sin.2s(1+\tfrac{10}{3}k^2+\tfrac{105}{16}k^4+\tfrac{21}{2}k^6+\text{etc.})\\
& +\tfrac{1}{2}k^2\sin.3s(1+\tfrac{25}{8}k^2+\tfrac{49}{8}k^4+\text{etc.})\\
& -\tfrac{5}{16}k^3\sin.4s(1+\tfrac{63}{20}k^2+\tfrac{63}{10}k^4+\text{etc.})\\
& +\tfrac{3}{16}k^4\sin.5s(1+\tfrac{49}{15}k^2+\text{etc.})\\
& -\tfrac{7}{64}k^5\sin.6s(1+\tfrac{24}{7}k^2+\text{etc.})
\end{aligned}
$$

PROBLEMA V.

23. *Si corpus, quod ad centrum virium* C *attrahitur in ratione reciproca duplicata distantiarum, insuper in singulis punctis* M *sollicitetur viribus quibuscunque, inuenire continuam, tam orbitae, quam motus variationem, quae ab his viribus perturbantibus producetur.* Fig. 8.

SOLVTIO.

Exprimat $\frac{C}{xx}$ vim, qua corpus continuo ad centrum C vrgetur, quae si sola ageret, corpus motu regulari circa C gyraretur. Vis autem quae praeter ea in corpus agit, eiusque motum perturbat, in singulis punctis M resoluatur secundum directiones MC et MN, quarum haec ad illam sit normalis. Ponatur vis acceleratrix secundum $MC = M$ et vis acceleratrix secundum $MN = N$, quas vires M et N perturbantes vocabo. Peruenerit corpus ab his viribus sollicitatum in M, existente $CM = x$, et $ACM = \Phi$; atque si nunc vires perturbantes cessarent, corpusque posthac a sola vi $\frac{C}{xx}$ traheretur; id motu regulari incederet, orbitamque ellipticam esset descripturum; pro quo motu regulari ponamus

Longitudinem absidis imae seu angulum $ACP = \omega$

ſemi-latus rectum orbitae $= b$
excentricitatem $= k$
Corporis, dum in M verſatur, anomaliam veram $PCM = s$ et tempus ab abſide ima elapſum $= t$.
Quibus poſitis, erit $x = \frac{b}{1 + k\,cof.s}$; $\Phi = \omega + s$, atque $t = P\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$, exiſtente $P = \int \frac{ds}{(1 + k\,cof.s)^2}$, cuius valorem iam ante inuenimus. Nunc vero, quia corpus, dum in M verſatur, a duabus viribus M et N perturbantibus ſollicitatur, a vi M eius motus ſecundum $M\mu$ diminuetur ita, vt ſecundum hunc motum tempuſculo $d\zeta$ non ſpatium $m\,d\zeta$, ſed ſpatium $m\,d\zeta - \frac{1}{2}M\,dt^2 = m\,d\zeta - \frac{Ma^3}{A}d\zeta^2$ percurrat; ob vim autem N ſecundum Mn ſpatium conficiet eodem tempuſculo $= n\,d\zeta - \frac{Na^3}{A}d\zeta^2$. Qui effectus quanquam tempuſculo $d\zeta$ eduntur, concipiamus tamen eos ſubito corpori in M imprimi; eritque propterea, ſolutione praecedentis problematis huc tranſlata, $dm = -\frac{Ma^3}{A}d\zeta$, et $dN = -\frac{Na^3}{A}d\zeta$. Hanc ob rem nunc quidem corpus in alia orbita apm progredi pergeret, niſi deinceps a viribus perturbantibus afficeretur atque noua haec orbita a praecedente ita differet, vt nunc ſit

ſemi-latus rectum $= b - \frac{2N\,d\zeta}{1 + k\,cof.s}\sqrt{\frac{a^3b^3}{AC}}$
excentricitas $= k - d\zeta\left(M\,ſin\,s + \frac{N(2\,cof.s + k + k\,cof.s^2)}{1 + k\,cof.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$
locus abſidis $= \omega + \frac{d\zeta}{k}\left(M\,cof.s - \frac{N(2 + k\,cof.s)\,ſin.s}{1 + k\,cof.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$
anomalia vera $= s - \frac{d\zeta}{k}\left(M\,cof\,s - \frac{N(2 + k\,cof.s)\,ſin.s}{1 + k\,cof.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$

At tempus ab abſide ima p ad M vsque elapſum erit

$$= t - d\zeta\left(\frac{M\,cof.s}{k(1 + k\,cof.s)^2} - \frac{N(2 + k\,cof.s)\,ſin.s}{k(1 + k\,cof.s)^3} - \frac{2N(P - Q)(2\,cof.s + k + k\,cof.s^2)}{k(1 + k\,cof.s)}\right.$$
$$\left. - \frac{2}{k}M(P - Q)\,ſin.s + \frac{3NP}{1 + k\,cof.s}\right)\frac{bb}{C}$$

Verum quia haec mutatio re vera tempuſculo $d\zeta$ abſoluitur vitur, ea tum demum, cum corpus elapſo tempuſculo $d\zeta$ in m peruenerit, perfecta eſt ſtatuenda, ſicque cum corpus in m verſatur, quod fit confecto angulo $MCm = d\Phi = d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$, vti ex problemate primo, ob $ds = d\Phi$, colligere licet, locus abſidis imae, ſemilatus rectum et excentricitas eos habebunt valores, quos modo aſſignauimus, at anomalia vera ante inuenta nunc augebitur angulo $MCm = d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$, et tempus ab abſide ima elapſum augebitur tempuſculo $d\zeta$: ideoque nunc, dum corpus in m verſatur, erit

anomalia vera $= s + d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} - \frac{d\zeta}{k}\left(M\cos.s - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$,

et tempus ab abſide ima elapſum nunc erit

$$t + d\zeta - \frac{bbd\zeta}{C}\left(\begin{array}{l}\frac{M\cos.s}{k(1+k\cos.s)^2} - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{k(1+k\cos.s)^3} \\ -\frac{2}{k}M(P-Q)\sin.s + \frac{2NP}{1+k\cos.s} - \frac{2N(P-Q)(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{k(1+k\cos.s)}\end{array}\right)$$

Hinc ſi tum, cum corpus in m exiſtit ſecundum legem continuitatis, ponamus

locum Abſidis imae	$aCp = \omega + d\omega$
ſemi-latus rectum	$= b + db$
excentricitatem	$= k + dk$
anomaliam veram	$= s + ds$
tempus ab abſide	$= t + dt$

habebimus harum differentialium ſequentes valores,

$$db = -\frac{2Nd\zeta}{1+k\cos.s}\sqrt{\frac{a^3b^3}{AC}}$$

$$dk = -d\zeta\left(M\sin.s + \frac{N(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$d\omega = \frac{d\zeta}{k}\left(M\cos.s - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$ds = d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} - \frac{d\zeta}{k}\left(M\cos.s - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{1+k\cos.s}\right)\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

ac ſi breuitatis gratia ponamus $\frac{1}{k}(P-Q) = R$, erit

$$dt = d\zeta - \frac{bbd\zeta}{C}\left(\begin{array}{l}\frac{M\cos.s}{k(1+k\cos.s)^2} - \frac{N(2+k\cos.s)\sin.s}{k(1+k\cos.s)^3} + \frac{2NP}{1+k\cos.s} \\ -2MR\sin.s - \frac{2NR(2\cos.s+k+k\cos.s^2)}{1+k\cos.s}\end{array}\right)$$

 Supra

Supra autem vidimus, si quantitas $P \sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$ differentietur sumtis b, k et s variabilibus, eius differentiale fore $\left(\frac{ds}{(1+k\cos.s)^2} - 2R\,dk + \frac{3Pdb}{2b}\right)\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$ ob $R = \frac{1}{k}(P-Q)$ in quo, si pro ds, dk et db valores modo inuenti substituantur, eadem emergit expressio, quam pro valore dt eruimus, vnde sequitur, fore $dt = d.P\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$, ideoque integrando $t = P\sqrt{\frac{Ab^3}{Ca^3}}$. Deinde continua tam orbitae, quam motus mutatio per integrationes formularum db, dk, $d\omega$ et ds debet inuestigari, quo facto ad quoduis tempus propositum orbita, in qua corpus tum mouetur, eiusque in ea locus definiri poterit. Erit autem $dx = k\,d\zeta\,\sin.s\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab}}$ et $ddx = k\,d\zeta^2\cos.s(1+k\cos.s)^2\frac{Ca^3}{Abb} - \frac{Ma^3d\zeta^2}{A}$ qui valor, cum $d\Phi = d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}}$, satisfacit aequationibus $2\,dx\,d\Phi + x\,dd\Phi = -\frac{Na^3}{A}d\zeta^2$, et $ddx - x\,d\Phi^2 = -\frac{Ca^3d\zeta^2}{Axx} - \frac{Ma^3}{A}d\zeta^2$. Q. E. I.

COROLL. 1.

24. Quia t indicat tempus, quo corpus ab abside ima p in M peruenturum fuisset, si motu regulari ita esset ingressum, vt in M eam, quam ibi iam actu habet, celeritatem acquisiuisset, patet, cum corpus iam, antequam in M peruenit, a viribus M et N fuerit in motu suo perturbatum, id re vera nunquam in puncto p esse versatum, ideoque tempore t plane non erit opus ad motum corporis cognoscendum. Atque hinc patet cum tempus t a sola corporis celeritate in M eiusque ibi directione pendeat, id quoque per solas quantitates b, k et s, quae hoc momento locum habent, determinari, neque harum quan-

quantitatum immutationes a viribus perturbantibus M et N profectas in valorem ipsius t ingredi. Quae etiam causa est, quod formulam differentialem pro dt inuentam tam expedite licuit integrare. Quin etiam sine respectu ad variationes litterarum b, k et s habito, valor ipsius t statim ex ipsa rei natura elici potuisset, cum sumtis b et k constantibus esse debeat $t \sqrt{\frac{C a^3}{A b^3}} = \int \frac{d s}{(1 + k \cos . s)^2} = P$.

COROLL. 2.

25. Pro quouis ergo tempore tam orbita, quam locus corporis in ea ex formulis differentialibus, quae valores elementorum $d b$, $d k$, $d \omega$ et $d s$ exhibent, debet definiri, in quibus formulis, etsi variabiles, b, k et s sunt maxime inter se permixtae, tamen si vires M et N sint admodum exiguae prae vi $\frac{C}{x x}$, ac propter ea earum effectus valde parui, facile eiusmodi methodus approximandi reperietur, cuius ope ad quoduis tempus propositum, quod littera ζ indicatur, valores b, k, et s, itemque ω inueniri queant; praecipue si excentricitas k fuerit valde parua. Peruenietur autem tandem ad huiusmodi aequationem integralem.

$$\zeta = S + \text{Const.}$$

in qua, si constans, ita definiatur, vt posito $s = 0$, fiat $\zeta = 0$, valor ipsius ζ indicabit tempus, quo corpus postquam de abside ima vera, ubi erat $s = 0$, excesserit, ad anomaliam veram s pertigerit, vnde, si constet momentum, quo fuerit semel $s = 0$, ad quoduis tempus inde elapsum, quod angulo solari ζ exprimetur, ope superioris aequationis anomalia vera s definietur, quae si addatur ad angulum ω seu longitudinem praesen-

 tem

tem absidis imae, obtinebitur longitudo vera seu angulus A C M. Ex reliquis enim aequationibus rite tractatis pro eodem tempore valores litterarum b, k et ω elicientur, qui simul in aequationem $\zeta = S + \text{Const.}$ ingredientur, quibus inuentis erit vera corporis a centro C distantia $CM = x = \frac{b}{1 + k \cos. s}$. Verum notandum est pro casuum diuersitate saepe numero methodos diuersas has aequationes tractandi adhiberi debere.

COROLL. 3.

26. Si axis orbitae transuersus, qui pariter erit variabilis, ponatur $= f$, cum sit $f = \frac{b}{1 - kk}$, erit $df = \frac{(1 - kk) db + 2bkdk}{(1 - kk)^2}$. Hic si pro db et dk valores ante inuenti substituantur, reperietur:

$df = \frac{-2 d\zeta}{(1 - kk)^2} [M k \sin. s + N (1 + k \cos. s)] \sqrt{\frac{a^3 b^3}{AC}}$, vnde patet, axem transuersum ab vtraque vi perturbante M et N immutari, cum contra latus rectum tantum a vi N, cuius directio est ad radium C M normalis, varietur.

COROLL. 4.

27. Si vis haec perturbans N euanescat, vt motus corporis a sola vi M, quae continuo ad centrum C tendit, perturbetur, latus rectum orbitae ob $db = 0$, perpetuo eiusdem quantitatis manebit. Pro axe transverso autem erit $df = \frac{-2 M k d\zeta \sin. s}{(1 - kk)^2}$, qui ergo perinde atque excentricitas k et longitudo absidis ω continuas mutationes perpetietur. Atque excentricitas quidem k diminuetur, dum corpus ab abside ima ad summam progreditur, contra vero rursus augebitur, dum corpus ab abside sum-

ſumma ad imam reuertitur: ſicque, prout vis M fuerit comparata fieri poteſt, vt poſt quamuis reuolutionem integram excentricitas ad priſtinam quantitatem reducatur. Linea autem abſidum promouebitur, quando coſ.s eſt affirmatiuus, contra retrocedet: fierique ſimili modo poteſt, vt linea abſidum poſt integram reuolutionem in ſitum priſtinum redigatur: quo caſu linea abſidum inuariabilis erit cenſenda, quia linea abſidum eatenus tantum mobilis aeſtimari ſolet, quatenus poſt quamque reuolutionem integram de loco ſuo mota deprehenditur. Pe ſpicuum eſt, hoc euenire debere, ſi vis perturbans M quoque ſit quadratis diſtantiarum a puncto C reciproce proportionalis; quia tum corpus motu regulari in ellipſi immobili incedet.

SCHOLION 1.

28. Quodſi autem ponatur $M = \frac{B}{xx} = \frac{B(1+k\cos.s)^2}{bb}$ exiſtente $N=0$, erit b quantitas conſtans, et

$$dk = -\frac{Bd\zeta(1+k\cos.s)^2\sin.s}{bb}\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$d\omega = \frac{Bd\zeta(1+k\cos.s)^2\cos.s}{bbk}\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$ds = d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} - \frac{Bd\zeta(1+k\cos.s)^2\cos.s}{bbk}\sqrt{\frac{a^3b}{AC}};$$

vnde fit $\frac{ds}{dk} = -\frac{C}{B\sin.s} + \frac{\cos.s}{k\sin.s}$, ſeu $Bkds\sin.s = -Ckdk + Bdk\cos.s$, cuius integrale eſt

$\frac{1}{2}Ckk = Bk\cos.s + D$; vnde ſequens calculus facile expeditur. Erit enim $k = \frac{B\cos.s + \sqrt{(B^2\cos.s^2 + 2CD)}}{C}$, hincque fit $d\omega = \frac{Bds\cos.s}{\sqrt{(B^2\cos.s^2 + 2CD)}}$, et integrando, $\sin.\omega = \frac{B\sin.s}{\sqrt{(B^2 + 2CD)}}$, ex quo patet, integra reuolutione abſoluta, tam excentricitatem k, quam locum lineae abſidum in ſtatum priſtinum reſtitui. Verum hic mirum videbitur, quod tam excentricitas, quam linea abſidum mutabilis reperiatur, cum tamen conſtet, motum corporis eſſe regularem: ſed notandum eſt, hoc calculo non veram corporis orbitam, quae conuenit vi $= \frac{C + B}{xx}$ exhiberi, ſed quouis tempore eam per calculum orbitam indicari, quam corpus motu ſuo proſecuturum eſſet, ſi vis B ſubito ceſſaret. Simili modo reſpondebitur ad dubium, quod forte ex caſu petetur, quo vis M eſt reciproce, vt cubus diſtantiae, quoniam motus fieri in ellipſi mobili eſt demonſtratus, cuius axis et excentricitas nullam mutationem ſubeant: cum tamen hic vtrinque variatio prodeat: ſcilicet iſte modus, quo hic vtimur ad motum definiendum, prorſus eſt diuerſus ab eo, quo hoc caſu motus vulgo determinari ſolet. Verum modus hic traditus motus quoscunque perturbatos ad calculum reuocandi, tum in primis inſignem habet vſum, quando ſubinde vires perturbantes intermittunt, motuique regulari locus conceditur; quem calculus noſter ſtatim manifeſtabit. Interim tamen nullum eſt dubium, quin etiam in perturbationibus continuis ſaepe vtiliter in vſum vocari poſſit.

SCHOLION 2.

29. Caſus, quem hic ſum contemplatus, quo altera vis perturbans erat $M = \frac{B}{xx}$, altera $N = 0$, meretur vlteriorem euolutionem, quoniam deducit ad aequationem maxime perplexam, cum tamen motus re vera ſit regularis. Quoniam inuenimus $d\omega = \frac{B\,ds\,cos.s}{\sqrt{(B^2 cos.s^2 + 2CD)}} = \frac{B\,d\zeta(1 + k\,cos.s)^2\,cos.s}{bbk} \sqrt{\frac{a^3 b}{AC}}$, hinc habebimus: $d\zeta \sqrt{\frac{a^3}{ACb^3}} = \frac{k\,ds}{(1 + k\,cos.s)^2 \sqrt{(B^2 cos.s^2 + 2CD)}}$, vbi ſi pro k valor inuentus ſubſtituatur, $\frac{B\,cos.s + \sqrt{(B^2 cos.s^2 + 2CD)}}{C}$, prodibit $d\zeta \sqrt{\frac{a^3}{ACb^3}} = \frac{C\,ds\,[B\,cos.s + \sqrt{(B^2 cos.s^2 + 2CD)}]}{[C + B\,cos.s^2 + cos.s\sqrt{(B^2 cos.s^2 + 2CD)}]^2 \sqrt{(B^2 cos.s^2 + 2CD)}}$, cuius

cuius integratio maxime ardua videtur. Verum cum certum sit, hunc motum esse regularem, quia a vi $= \frac{B+C}{xx}$ oritur, iuuabit conformitatem huius formulae complicatae cum motu regulari monstrasse. Sit igitur verae orbitae, quam motu regulari corpus describit, latus rectum $= \mathfrak{E}$; excentricitas $= \varkappa$, et anomalia vera $= \sigma$: erit $x = \frac{\mathfrak{E}}{1+\varkappa \cos.\sigma}$; et distantia minima $= \frac{\mathfrak{E}}{1+\varkappa}$, maxima vero $= \frac{\mathfrak{E}}{1-\varkappa}$; Motus autem per problema primum ita erit comparatus, vt sit $d\zeta \sqrt{\frac{(B+C)a^3}{A\mathfrak{E}^3}} = \frac{d\sigma}{(1+\varkappa\cos.\sigma)^2}$. At ex formulis, pro motu perturbato, inuentis est distantia $x = \frac{Cb}{C+B\cos.s^2+\cos.s.\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}}$, vnde, si ponatur $s = 0$, prodit distantia minima, maxima vero si $s = 180°$, sicque erit

$$\frac{\mathfrak{E}}{1+\varkappa} = \frac{Cb}{C+B+\sqrt{(B^2+2CD)}} \text{ et } \frac{\mathfrak{E}}{1-\varkappa} = \frac{Cb}{C+B-\sqrt{(B^2+2CD)}}$$

ex quibus elicitur $\mathfrak{E} = \frac{Cb}{C+B}$ et $\varkappa = \frac{\sqrt{(B^2+2CD)}}{C+B}$. Hinc porro obtinemus

$$x = \frac{Cb}{C+B+\cos.\sigma.\sqrt{(B^2+2CD)}} = \frac{Cb}{C+B\cos.s^2+\cos.s\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}}$$

itaque erit $\cos\sigma = \frac{\cos.s\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}-B\sin.s^2}{\sqrt{(B^2+2CD)}}$ et $1+\varkappa\cos.\sigma = \frac{C+B\cos.s^2+\cos.s.\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}}{C+B}$. Cum autem sit $\sin.\omega = \frac{B\sin.s}{\sqrt{(B^2+2CD)}}$ et $\cos.\omega = \frac{\sqrt{(BB\cos.s^2+2CD)}}{\sqrt{(BB+2CD)}}$, manifestum est, esse $\cos\sigma = \cos.s\cos.\omega - \sin.s\sin.\omega$, ideoque $\sigma = s+\omega$, vnde intelligitur angulum σ a loco fixo esse computatum, prorsus vt in motu regulari fieri solet; sumitur scilicet anomalia vera σ a linea absidum, quae est immobilis. Deinde quia est $d\sigma = ds + d\omega$, at $d\omega\cos.\omega = \frac{B\,ds\cos.s}{\sqrt{(BB+2CD)}}$, erit $d\omega = \frac{B\,ds\cos.s}{\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}}$ et $d\sigma = \frac{ds[B\cos.s+\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}]}{\sqrt{(B^2\cos.s^2+2CD)}}$. Quibus valoribus pro $\mathfrak{E}$, $d\sigma$ et $1+\varkappa\cos.\sigma$ substitutis aequatio ex motu regulari deducta $d\zeta \surd \frac{(B+C)a^3}{Ab^3} = \frac{d\sigma}{(1+\kappa \cos.\sigma)^2}$ induet hanc formam:

$$\frac{(B+C)^2}{CC} d\zeta \surd \frac{Ca^3}{Ab^3} = \frac{(B+C)^2 ds[B\cos.s + \surd(B^2\cos.s^2+2CD)]}{[C+B\cos.s^2+\cos.s\surd(B^2\cos.s^2+2CD)]^2 \surd(B^2\cos.s^2+2CD)}$$

quae multiplicata per $\frac{C}{(B+C)^2}$ eadem plane fit, quam ex consideratione motus perturbati elicuimus.

SCHOLION 3.

30. Quem ad modum calculus etiam secundum nostras formulas facillimus euasisset, si vim perturbantem $\frac{B}{xx}$, quia est reciproce, vt quadratum distantiae, statim cum vi centrali $\frac{C}{xx}$ coniunxissemus, quo facto vires perturbantes euanuissent, motusque regularis sponte prodiisset: ita quoque si in aliis casibus vis perturbans M partem contineat, quae fuerit quadrato distantiae reciproce proportionalis, conueniet eam partem cum vi centrali coniungere, et reliquam partem solum in M relinquere; ita vt vis M discrepantiam tantum vis secundum MC perturbantis a ratione reciproca duplicata distantiarum complectatur. Hoc etiam latius patet atque ad vires applicari potest, quae abhac ratione prorsus diuersae videntur: Sic si vis perturbans secundum directionem MC fuerit $= \frac{B}{x^n} = \frac{B}{b^n}(1+k\cos.s)^n$ ea in huiusmodi duas partes resoluta concipi potest

$\frac{E}{bb}(1+k\cos.s)^2$ et $\frac{E}{bb}(1+k\cos.s)^n - \frac{E}{bb}(1+k\cos.s)^2$,

existente $E = \frac{Bbb}{b^n}$. Tum igitur pro C scribi debebit $C+E$, et litterae M tribuatur valor $\frac{E}{bb}(1+k\cos.s)^2 \times$

[(1+

$[(1+k\cos.s)^{n-2}-1]$; qui si excentricitas k non sit notabilis, multo erit minor, atque minores aberrationes a motu regulari producere reperietur. Ita si excentricitas k fuerit valde parua, erit $M = \frac{(n-2)Ek\cos.s}{bb}(1+k\cos.s)^2$ et scripto C pro C+E breuitatis ergo, posito $N=0$, erit b quantitas constans et

$$dk = -\frac{(n-2)Ekd\zeta\sin.s\cos.s}{bb}(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$d\omega = \frac{(n-2)Ed\zeta\cos.s^2}{bb}(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

$$ds = d\zeta(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{Ca^3}{Ab^3}} - \frac{(n-2)Ed\zeta\cos.s^2}{bb}(1+k\cos.s)^2\sqrt{\frac{a^3b}{AC}}$$

Hinc ergo elicitur $\frac{dk}{d\omega} = -\frac{k\sin.s}{\cos.s}$, et

$\frac{ds}{dk} = \frac{-C}{(n-2)Ek\sin.s\cos.s} + \frac{\cos.s}{k\sin.s}$, vnde fit

$\frac{Cdk}{(n-2)E} = dk\cos.s^2 - kds\sin.s\cos.s$, quae per k multiplicata et integrata dat $\frac{Ckk}{(n-2)E} = kk\cos.s^2 + \frac{D}{(n-2)E}$, vnde obtinetur $k = \sqrt{\frac{D}{C-(n-2)E\cos.s^2}}$. Cum iam sit

$\frac{ds}{d\omega} = \frac{C}{(n-2)E\cos.s^2} - 1$, erit $d\omega = \frac{(n-2)Eds\cos.s^2}{C-(n-2)E\cos.s^2}$ seu

$$d\omega + ds = \frac{+Cds}{C-(n-2)E\cos.s^2} = \frac{+Cds}{C-\frac{1}{2}(n-2)E-\frac{1}{2}(n-2)E\cos.2s}$$

At huius formulae integrale, quatenus a solo angulo s pendet, erit $+s\sqrt{\frac{C}{C-(n-2)E}}$; ideoque $\omega = s(-1+\sqrt{\frac{C}{C-(n-2)E}})$, neglectis inaequalitatibus, quae a sinibus angulorum $2s$, $4s$, etc. pendent: qui sinus, cum euanescant, si $s=0$, $s=90$, $s=180^\circ$, etc. patet singulis reuolutionibus anomaliae, lineam absidum promoueri angulo

$= \frac{\sqrt{C}-\sqrt{[C-(n-2)E]}}{\sqrt{[C-(n-2)E]}}\,360^\circ$. Quare si corpus ad centrum C attrahatur vi $= \frac{C}{xx} + \frac{B}{x^n}$, fueritque excentricitas quam minima, si semi-latus rectum orbitae, seu quod hoc casu eodem redit, distantia corporis media ponatur $= b$, fiatque $E = \frac{B}{b^{n-2}}$; linea absidum orbitae, in qua corpus mouebitur, erit mobilis atque singulis reuolutionibus anomaliae conficiet angulum $= [\frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{(n-2)E}{C+E})}} - 1]\, 360^{\circ}$ quia pro C scribi oportet $C + E$. Vnde patet, si sit $n = 2$, lineam absidum quiescere, progredi vero, si $n - 2 > 0$, at regredi, si $n - 2 < 0$ vel si $n < 2$. Pro motu autem ipso definiendo, quo corpus in hac orbita mutabili proferetur, peruenitur ad hanc aequationem:

$$d\zeta \sqrt{\frac{Ca^{3}}{Ab^{3}}} = \frac{C\,ds}{[\sqrt{(C - (n-2)E\,cos.s^{2})} + cos.s\sqrt{D}]^{2}}$$

cuius resolutio non est difficilis.

31. Hanc autem methodum effectus virium perturbantium definiendi eum potissimum in finem excogitaui, vt eius opera perturbationes, quae in motibus planetarum ob eorum actionem mutuam euenire obseruantur, commodius indagari atque assignari queant. Hinc igitur quantum motus Saturni a Ioue, et motus Iouis a vi Saturni perturbetur, meliori cum successu inuestigari poterit, quam aliis methodis, quae adhuc adhiberi sunt solitae. Deinde si vis Iouis ad Saturnum vsque porrigitur, nullum est dubium, quin ab ea motus Martis, et Terrae, ac fortasse etiam inferiorum planetarum non nihil afficiatur. Denique etiam inuestigatio inaequalitatum motus Lunae hac methodo non parum promoueri videtur, quia vires Solis partim ad vim regularem, partim ad vires perturbantes M et N commode reuocare licet. Sed vnaquaeque harum inuestigationum tanti est momenti, vt peculiarem tractationem mereatur Quam ob rem nunc quidem in ipsa methodi explicatione acquiesco.

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

RESOLVTIONES PROBLEMATVM SPECTANTIVM AD
ARCHITECTVRAM CIVILEM.

AVCTORE
GEORG. WOLFFG. KRAFFTIO.

§. 1.

Cognitionem rerum mathematicam vti requirit *Philoſophia Theoretica*, veri inueniendi ſtudio occupata: ita eandem depoſcit ſibi *Philoſophia* quoque *Practica*, ſalutis noſtrae communis amore incenſa. Atque haec quidem hunc ſummum intelligentiae gradum eo magis neceſſarium ſibi habet, quo facilius eſt ſpeculari et cogitare de re aliqua generaliter, ſine menſuris ac indeterminate: vt vero agamus, vt exerceamus operam quandam, ſine menſuris, ſine omnimoda determinatione, fieri omnino nequit. Nemini ergo obſcurum eſſe poterit, *Architecturam Ciuilem*, hoc eſt, Philoſophiam Practicam in aedificando, nobiliſſimam, dignitatique humanae conuenientiſſimam, ſcientiam cognitione rerum ſuarum mathematica quam plurimum adiuuari; immo eadem, ſi ſapiens eſſe debeat, carere nullo modo poſſe. Fecit hoc, vt cogitarem iam diu *de problematibus Architecturae ciuilis* omnibus illis, quae, a variis Auctoribus pertractata, Geometricam arundinem admoueri ſibi patiuntur, in vnum faſciculum colligendis, atque

atque accurate excutiendis, vt publicae vtilitati pro viribus profim, fed propriae etiam delectationi, quae ad labores maxime nos inuitat, indulgerem.

§. II. Primo quidem campum integrum hic nobis aperit conftructio et aedificatio concamerationum architectonicarum, quae *Fornices*, *Voutes* gallice, appellari folent; aut etiam *Arcus*; vel a *Vitruuio*, lib. VII. cap. 3, *Camerae*; quibus omnibus nihil aliud indigitatur, quam lacunar incuruatum, partes aedificii tegens. De his Cameris pauciffima tradit *Vitruuius*, nempe haec *lib.* VI. *cap.* 11, *fin hypogea, concamerationesque inftituentur: fundationes eorum fieri debent craffiores*; fuadetque ibidem, *vt directiones lapidum, fornicem conftituentium, tendant ad commune centrum arcus medium*; vid. *Blondel*, *Cours d'Architecture*, P. IV. *lib.* 1. *cap.* 2, *p.* 316; Agnouit porro, in loco modo allegato, *fornicationes leuare onus parietum*; adeoque, fi lacunar feneftrae, aut portae, oneri impofito impar fit ferendo, illud effe incuruandum; vel conftitui debere fornicem fupra lacunar; aut etiam muniendum effe illud cantheriis; in angulum coeuntibus, quos vocat *fubcuneatos poftes*; de quo vid. *Perraltum* in verfione Gallica, et notis ad loc. cit. Quibus deinde commentatores *Vitruuii* adiecerunt diuifionem camerarum in *teftudines*, *fornices*, et *hemisphaeria*; de quibus vid. *Philander*, in *notis ad Vitruuii lib.* VII. *cap.* 3. Eadem hac Camerarum firmitate *fimilis* loco vfus eft *Seneca*, *Epift.* 95, *p. m.* 447, dicens: *focietas noftra lapidum fornicationi fimillima eft; quae cafura, nifi inuicem obftarent, hoc ipfo fuftinetur.*

§. III.

§. III. Vt igitur, quae recentiori aetate de firmitate camerarum per Mathesin stabilita sunt, connectamus, sequenti modo rem hanc aggrediamur. Ante omnia praemittamus definitiones. Sit fornix A B C D, vocantur lapides, ex quibus ille est compositus, *cunei*, quia cunei formam habent, veluti E F G H; *voussoir* Gallice. Lineae rectae, iuxta quas sibi incumbunt cunei, F H, E G, sunt *lecti iuncturae*; *conclusurae Vitruuio*, *les lits*, *les joints*; cuneus omnium supremus B C N O, est *tholus*, *vmbilicus*, *la clef de la voute*, *clavis*; columnae, quibus arcus insistit, K A Q, D P R, appellantur *moles*, *pilae*, *piedroits*; arcus interior A B C D est *concauitas*, *l'intrados*; arcus exterior K L M P, si adfuerit, est *conuexitas*, *l'extrados*; basis pilae D P, cui impositus est primus cuneus F H P D, dicitur *puluinar*, *coussinet*, *imposte*. Tab. IV. Fig. 1.

§. IV. Supponunt autem Auctores optimi omnes, lectos singulos conuergere in centrum medium S, et arcui esse perpendiculares, quod *Vitruuius* etiam suadet; (§. II.) nec immerito, quia sic et venustati consulitur, et commoditati tam futurae dimensionis Geometricae, quam constructionis, cuneorum. Deinde assumitur, lectos omnes habere superficies perfecte politas sibi commissas, ita vt vnus cuneus supra alterum perfecte lubricum labi possit, et descendere sine omni resistentia. Si enim firmitas conciliata fuerit cuneis talibus politissimis ex eorundem figura et pondere; tum certa illa maior adhuc erit, si calce, aut caemento, intermixtis sibi mutuo adhuc adhaerescant. Tertio etiam plerumque eligi solent latitudines cuneorum E F, omnes inter se aequales. In arcubus quidem Toscanis easdem inaequales fecit *Vignole*, notante *Blondello*, *Cours d'Architecture*, p. 319, sed ingratum id est visui.

Tab. IV. Fig. 2. §. V. Ponamus nunc cauitatem arcus esse A D F, ac alicuius cunei conclusuram continuatam in centrum esse M C, cui incumbat cuneus, tanquam punctum considerati ponderis absoluti p. Euidens est ad descensum suum niti hunc cuneum in hoc lecto iuxta rectam M C, eodem modo ac si plano inclinato M C, ad horizontem A G, cuius altitudo sit P M $=u$, impositus esset. Conabitur itaque descendere pondere non absoluto, sed respectiuo tantum, quod est $=\frac{pu}{MC}$; hinc etiam tholus ipse, si cadere posset, caderet pondere suo aliquo tantum respectiuo. Ex quo facile patet, si in arcu semicirculari cunei omnes inter se sint aequales, aut eiusdem ponderis, tum superiorem quemuis maiori pondere respectiuo descensurum esse, quia altiori semper incumbit plano inclinato; erit enim hac ratione, ob M C, et p, constantes, pondus respectiuum quoduis vti u; talis itaque fornix ipse per suam structuram inaequaliter se sustinebit, et maxime debilis erit in vertice suo circa tholum. Vt igitur in omnibus cuneis idem sit conatus descendendi, vel idem pondus respectiuum: requiritur vt superior quiuis inferiore suo teneat pondus absolutum minus. Si enim alicubi cuneus quis maiorem habeat conatum descendendi, quam caeteri, is quidem caemento interposito impeditur, sed successu temporis ibi fornix fatiscit. Quare tales fornices semicirculares, in quibus cunei omnes sunt aequales, et eiusdem ponderis, firmi non sunt.

§. VI.

§. VI. Cum ergo requirimus fornicem in singulis punctis suis aeque firmum, ac inde durabilem: efficiendum est, vt singula ipsius puncta habeant vim descendendi, in suis planis inclinatis, eandem, aut pondus respectiuum constans; vtque adeo in hoc versus centrum delabendi conatu nullus cuneorum alterum superet. In quem finem optime dicit *Fontenellius in Histoire des Me-* „ *moires de Paris*, 1729. „ tous les voussoirs, qui com- „ posent une voute, sont des especes de coins; ils ten- „ dent tous à tomber, & il faut qu'aucun ne tombe; „ il faut de plus, afin que la voute soit la plus dura- „ ble qu'il se puisse, qu'ils tendent tous avec une force „ égale à tomber; autrement l'endroit, où il se trou- „ veroit plus de cette force, viendroit à s'abbaisser peu „ à peu.

§. VII. Si nunc ponamus ergo in arcu architectonico singulorum punctorum pondus respectiuum constans: erit $\frac{pu}{MC} = 1$, (§. V.) aut $p = \frac{MC}{u}$; hoc est, pondera absoluta cuneorum debent esse in ratione directa ipsarum MC, atque inuersa ipsarum PM, vt exinde omnium enascatur dein pondus respectiuum idem. Sit porro altitudo arcus $CD = a$, abscissa concauitatis $DF = x$, semiapplicata $FM = CP = y$, erit $u = a - x$; quo substituto prodit cuiusuis cunei pondus absolutum $p = \frac{\sqrt{(y^2 + \overline{a-x}^2)}}{a-x}$.

§. VIII. Ducatur concauitatis tangens DE in vertice arcus D, ad DC nempe normalis, et directio lecti in

 M,

M, quae est MC, producta occurrat tangenti huic in E; atque ob similia triangula PMC, DCE, erit $\frac{MC}{u} = \frac{CE}{CD}$, vnde praecedens mensura ponderum absolutorum hoc etiam exprimi potest modo, vt illa esse debeant in ratione $\frac{CE}{CD}$.

§. IX. Ex puncto N ducatur alia directio lecti alicuius in centrum fornicis BNC, et vocetur anguli BCD sinus m, cosinus n, posito sinu toto $= 1$; atque erit $1 : CB = m : BD$, vnde $CB = \frac{BD}{m}$; sitque etiam ND dimidius tholus, et cuneorum singulorum iuncturae in centrum C continuatae, faciant angulos aequales MCN; atque erit nunc angulus MCN duplus ipsius NCD; et sinus $MCN = 2mn$; *ex elementis Trigonometriae*. Habetur hinc $2mn : BE = n : CE = \frac{BE}{2m}$. Cum adeo esse debeat pondus absolutum in N ad pondus absolutum in $M = \frac{CB}{CD} : \frac{CE}{CD} = CB : CE$. (§. VIII.), erunt eadem pondera inter se vti $\frac{BD}{m} : \frac{BE}{2m} = BD : \frac{BE}{2} = 2BD : BE = BI : BE$, si NDH fuerit tholus integer, et NCH ipsius angulus. Idem ratiocinium extenditur ad omnes reliquos cuneos, si horum singulorum anguli in centro C fuerint aequales, quare patet exinde Theorema *De la Hirii*, *Traité de Mechanique*, *Prop.* CXXV, pondera cuneorum absoluta esse in ratione differentiarum tangentium angulorum, quos faciunt lecti continuati in centrum, qui nempe anguli omnes supponuntur inter se aequales. Quod vero Theorema *De la Hirius* de solo circulo, et longe diuersa ab hac nostra methodo demonstrauit. Sed memorabile fuit hoc inuentum, cum inde

a Via *Vitruvio* vsque ad hoc tempus Architecti in condendis fornicibus nihil certi haberent, quod sequerentur, sed palpando tantum cuneos formarent, testante *Fontenellio in Mem. de l'Acad.* 1704. *p* 95.

§. X. Apparet hinc, pondus absolutum primi cunei FDHP debere esse infinite magnum. Debet enim esse $= \frac{MC}{u}$, (§. VII.); hoc autem casu est $u = 0$, ergo $p = \frac{MC}{0} = \infty$. Nam qualecunque pondus finitum habeat cuneus hic primus, minima vis, premens ipsum secundum directionem lecto suo normalem, a cuneo superiori proximo proficiscens, repellet ipsum a centro, et fornicem turbabit. In hac igitur hypothesi, in qua cunei sunt perfecte lubrici, pondus valde magnum debet tribui cuneo primo, et sequentibus proxime ipsum, vt vim tholi sustinere queant. Quia autem cunei interposita calce vniuntur, adeoque multum absunt a perfecta lubricitate; hinc regula haec, cum in rigore obseruari non possit: nec etiam debet. TAB. IV. Fig. 1.

§. XI. Haec vero regula de pondere infinite magno cunei primi, in eo tantum casu valet, in quo puluinar est horizontale, atque simul, vti diximus, perfecte politum. Cuius rei rationem optime explicat iterum *Fontenellius in Mem. de l'Acad. de Paris*, 1704, *p.* 94, hisce verbis: „ tous les voussoirs, hormis le dernier, ne „ pourroient laisser tomber un autre sans s'elever, à quelle „ elevation ils resistent; mais le dernier (*nobis primus*) „ peut laisser tomber un autre sans s'elever, en glissant ho„ rizontalement, au quel mouvement les poids, tant qu'ils „ sont finis, n'apportent aucune resistance, & ils ne com-

„ mencent à y en apporter une finie, que quand on les „ conçoit infinis. „ Sin autem puluinar ipſum ſit inclinatum ad horizontem: tum primus cuneus requirit pondus abſolutum finitum, traditis regulis conforme; quod primus annotauit *Coupletus, Memoires de l'Acad. des Sciences* 1729. *p* 83.

§. XII. Ex his perſpicitur, nullum rite conſtrui poſſe fornicem, aut arcum architectonicum, in quo cunei omnes idem teneant pondus abſolutum. Quoniam enim generaliter eſt $p = \frac{\sqrt{(y^2 + \overline{a-x}^2)}}{a-x}$, (§. VII.); ponatur $\frac{\sqrt{(y^2 + \overline{a-x}^2)}}{a-x} = 1$, vnde deducitur $y = 0$, quod indicat, nullam curuam huic requiſito efficiendo dari; ſed ſolos lapides quadratos ſibi verticaliter ſuper impoſitos hoc efficere poſſe; quod alias patet.

§. XIII. Colligitur exinde porro, nullam lineam curuam eſſe, quae non apta ſit concamerationi exſtruendae firmiſſimae, nullamque alteri in hoc negotio praeferri poſſe, modo diuerſum etiam, pro cuiuslibet curuae natura, cuneis ſingulis tribuatur pondus abſolutum. Sit ex. gr. parabola, cuius parameter $4a$, efficietur ex illa fornix abſolutiſſimus, ſi cuneorum pondera abſoluta ſint vbique vti $\frac{a+x}{a-x}$, et pondus tholi $= 1$; Cum enim in hac curua ſit $4ax = y^2$, erit, hoc ſubſtituendo in aequatione ſuperiori (§. VII.) $p = \frac{\sqrt{(4ax + a^2 - 2ax + x^2)}}{a-x} = \frac{a+x}{a-x}$; atque ſimiliter in omnibus aliis curuis pondera cuneorum erunt determinanda. Sine ſufficiente ratione

TAB. IV. Fig. 3.

tione igitur statuerunt ellipsin solam construendis fornicibus aptam, nisi venustatis causa hoc fecerunt, *Serlius Architect. l. 1, c. 1; Alb. Dürerus*, atque cum hoc *Dan. Hartmannus, Architect. f.* 7. Si iusta etiam ponderum absolutorum assumatur mensura, conueniens semper inuenietur curua, ad cuius ductum fornix exstruendus est, vt sit firmissimus.

§. XIV. Diximus paullo ante, (§. XII.) nullum dari fornicem, aequabiliter firmum, in quo puncta singula idem teneant pondus absolutum; aut qui vbique eiusdem sit crassitiei, adeoque teneat conuexitatem concauitati parallelam. Sed contrarium asserunt duo Viri egregii, putantes fieri id posse; si fornix exstruatur ad curuitatem illius lineae, quae *catenaria* vocatur, atque illa est, quam assumit libere catena, aeque grauis vbique, ac ex vtraque sua extremitate firmata deorsum pendens. Cui itaque dubio nobis est occurrendum. Primus inuentor huius praxeos est *Dav. Gregorius*, qui in *demonstrationibus de Catenaria, Act. Erud. Lips. a.* 1699, *m. Febr.* dicit: catenam in plano verticali, sed situ inuerso positam, figuram suam seruare, nec decidere, adeoque fornicem facere. Hinc ad talem vsum hanc curvam commendat, atque, cur nihilominus etiam aliae curuae reddant stabiles fornices, causam in eo sitam esse putat, quod hae curuae, in latitudine fornicum, catenariam in se includant et semper comprehendant.

§. XV. Sed mirum videri potest, quae via ad hanc consequentiam duxerit, vt quae catena deorsum pen-

pendens in aequilibrio manet: eadem quoque sursum versa idem faciat. Dum enim deorsum pendet talis catena, vtrinque clauo affixa: ponduſculis ipsius tensionem efficientibus deorsum, et clauis renitentibus, aequilibrium tandem in certa aliqua curuitate catenae consistit; quae vero omnia cessant, cum catenula haec ita incuruata sursum iam erigitur; pondera enim non tendunt eam sursum, vti antea deorsum; et ratiocinium allatum videtur simile esse illius, quo quis probaret, pendulum in aequilibrio situm esse posse etiam tum, cum pondusculum ex situ verticali deorsum tendente transfertur in situm eundem sed sursum tendentem.

§. XVI. Alter, qui denuo in hanc de catenaria incidit opinionem, est *Coupletus*, *in Mem. de l'Acad. des Sciences de Paris*, 1729, *pag.* 87, *probl.* IV; hanc ad fornices aptitudinem huic curuae ex eo adscribens, quoniam Theorema *Hirianum* supra allatum, (§. IX.) in eadem locum inueniat. Sed, praeterquam quod ex falsa suppositione hoc demonstret auctor, nempe dari posse intra catenariam punctum aliquod vnicum, ex quo educi possint perpendiculares in singulas chordas infinite paruas eiusdem, quae scilicet proprietas soli circulo conuenit, et nulli alii praeterea curuae: idem Theorema *Hirianum* ad omnes curuas quadrat; (§. IX.) ex quo palam est, catenariam ad fornices construendos aptiorem non esse, quam aliam lineam inflexam quamuis sententiam *Coupleti* optime expressit *Fontenellius*, in *Histoire de Memoires* 1729, dicendo: " *Mr. Couplet* a pensé, „ qu'une voute, qui auroit la courbure de la chainette, „ pour-

„ pourroit avoir par cette nature tous ſes vouſſoirs egalement peſans, & ſeroit par conſequent d'une epaisſeur uniforme „; ſed nihil contra monuit. Nouiſſime etiam catenariam pro aedificandis fornicibus commendauit in *Commentariis Academiae Scient. Suecicae*, *tomo* IV. *p.* 138, *Clariſſ. Polhemius.* Omnia vero haec eo intelligenda ſunt, vt catenaria ſola, per ſe conſiderata, fornicem efficere ſtabilem nequeat, quia, vt linea, nullam tenet latitudinem, in qua cunei, ad fornicem neceſſarii, et introlabi conantes, concipi poſſent. Si vero capiatur catenaria, eaque ad altitudinem aliquam circumdetur alia curua ipſi parallela, vt priori huic requiſito locus relinquatur: tum demum catenaria, cum alia ſibi curua parallela, fornicem formare poterit vbiuis aeque denſum, et perfecte firmum; non quidem ex ea cauſſa, quam hic ſolam aſſumſimus, vt ſingularum in ea particularum idem ſit pondus reſpectiuum, ſed ex alia, nempe quod ex intro ceſſione hac cuneorum, aeque ponderantium, cuneus ſuperior quiuis tanta vi ſurſum premitur, quanta ipſe deorſum premit ſibi ſubiectum; in qua hypotheſi fornicem a catenaria pendere primus diſtincte oſtendit *Iac. Bernoullius*, in *Operum tomo* II. *pag.* 1119, cuius methodum alia occaſione explicabo.

§. XVII. Cum itaque nulla curuarum alteri palmam praeripiat in conſtituendo fornice, omnes adeoque ad hunc vſum pariter ſint aptae (§. VII.): recte fecerunt ſuperioris aetatis Architecti quidam celebres, qui praeter circulares et ellipticos fornices alias quoque harum formas aſſumpſerunt, quas nempe aſpectui gratas

 eſſe

esse iudicarunt; sed in eo defecerunt a veritate, quod cuique tali curuae, oculis gratae, suam certam et propriam rationem in ponderibus cuneorum non assignauerint. Ita recenset *De la Hire* in *Mem. de l'Acad. des Sciences de Paris* 1702, quosdam hanc tribuisse formam
Tab. IV. fornicibus, quae ex sequenti constructione patescet. Sit
Fig. 4. AB altitudo fornicis, et recta BD, priori ad angulum rectum iuncta, semilatitudo eiusdem; debet fornix tangere has rectas in A & D; praeter ea vero diuidatur vtraque in eundem numerum partium aequalium pro lubitu, tum iungantur puncta EF, GH, IK, et describatur curua, quae tangat alicubi omnes has rectas EF, GH, IK, etc.

§. XVIII. Vt sciatur, qualis sit haec curua, ita ducta, quam *de la Hire* fatetur ab initio habuisse pro ellipsi; ducit idem hic ex quocunque puncto M rectas ML et MN, perpendiculares ad BD et BA, asseritque, patere ex regula de maximis et minimis, quod BD, BF, BL et BA, BE, BN, sint in proportione continua; ex qua proprietate naturam curuae deducit. Cum vero vix perspici possit, quomodo de hac proportione constet: melius soluitur problema hoc per methodum *Hospitalii*, *in Analyse des infinement petits*, §. 146, de inuenienda curua tangente infinite multas rectas, certa lege ductas; quod hac ratione praestabimus. Sit pro tangente EF, $DL = y$, $LM = x$, $BD = a$, $BA = b$; et praeter ea $BE = t$, $BF = u$; et quia, per constructionem, AE similis est pars ipsius AB, qualis est BF ipsius BD: erit AE $(b-t)$: AB(b) = BF(u):

BD

BD(a), hinc $u = a - \frac{at}{b}$; (A) et FD $=$ BD $-$ BF $=$ $a - u = \frac{at}{b}$. Porro eſt FL ($y - \frac{at}{b}$): LM(x) $=$ FB(u): BE(t), aut $ux = ty - \frac{at^2}{b}$ (B). Nunc conſiderandum eſt, eſſe DL, LM, aut y et x, conſtantes, dum BF, BE, u et t, incrementum infinite paruum aſſumunt; hinc aequatio modo inuenta differentietur poſitis x et y, conſtantibus, atque orietur $x\,du = y\,dt - \frac{2at\,dt}{b}$, aut, ob $du = - \frac{a\,dt}{b}$ (A); erit facta ſubſtitutione, $t = \frac{ax + by}{2a}$; et $u = a - \frac{ax + by}{2b}$ (A). Vnde haec iterum ſubrogando in (B), habebitur haec aequatio: $ax - \frac{ax^2 + bxy}{2b} = \frac{axy + by^2}{2a} - \frac{a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2}{4ab}$; quae aequatio reducitur ad hanc, $\overline{ax + by}^2 = 4a^2bx$, quae eadem quoque eſt cum Hiriana, atque ſecundum regulas ordinarias Locorum Geo- Tab. IV.
metricorum eſt ad Parabolam Apollonianam; quam ſequenti modo conſtruit *de la Hire*: Ducatur AD, et Fig. 5.
biſecetur in O, erit ducta BO diameter Parabolae; huic BO ſit normalis BP; et t ad hanc normalis AP; fiat AN $=$ AP, erit N focus Parabolae, et ducta RN, normalis itidem ad BP, erit axis curuae; qua RN biſecta in ſ, habebitur in ſ vertex eiusdem. Haec itaque curua parabolica, quamuis pluribus placeat architectis, reiicitur a *de la Hirio*, ex ea iuſta cauſſa, quod duplex fracturae ſpecies, apud ſ in vertice Parabolae et in D tranſitu vtriusque parabolae ingrata viſui futura eſt, qualem inflexionem viſibilem Galli vocant *un parret*, quaſi poplitem, aut poplitis flexuram; vnde his parabolicis fornicibus praeferendi ſunt elliptici, qui tali poplite viſum non laedunt.

 §. XIX.

§. XIX. Ceterum ex hac noſtra ſoluendi methodo praecedens problema, illud *de la Hirii* aſſertum, modo memoratum (§. XVIII.), ſtatim pateſcit. Inuenimus enim $t = \frac{ax + by}{2a}$, hoc eſt $2at = ax + by$; ſi igitur in aequatione curuae inuenta hic valor ipſius ax
Tab. IV. $+ by$ ſubſtituatur: emergit $4a^2t^2 = 4a^2bx$, aut $t^2 = bx$,
Fig. 4. vel $b : t = t : x$, hoc eſt BA : BE = BE : BN; vnde BA, BE, BN, ſunt in proportione Geometrica continua; et ſimiliter quoque BD, BF, BL.

§. XX. Quoniam ergo ducta AD, et biſecta ea
Fig. 5. in O, recta BO eſt diameter parabolae, ob tangentes DB, AB, in eodem puncto B concurrentes; *per converſam propoſ.* 30, *lib.* II. *Conicor. Apollonii*; hinc ex conſtructione Hiriana (§. XVIII.) aequatio ad axem huius parabolae ita eruitur. Ducatur ad axem TN perpendicularis AQ, et alia arbitraria VM, ſintque SM $= x$, MV $= y$, AD $= \sqrt{(a^2 + b^2)} = m$; atque erit, *per Trigonometriae planae regulas* ſin.D $= \frac{b}{m}$, coſ.D $= \frac{a}{m}$, hinc ſin.2D $= \frac{2ab}{m^2}$, coſ.2D $= \frac{a^2 - b^2}{m^2}$, poſito ſinu toto $= 1$. Erit etiam ex conſtructione ſinus totus (1) : AB $(b) =$ ſin.PBA $(\frac{b}{m})$: PA $(\frac{b^2}{m}) =$ AN = TN; ſunt enim triangula BCD, BOA, TNA, aequicrura, ob tres lineas aequales OA, OB, OD, quia ex O per angulum rectum B ſemicirculus deſcribi poteſt, et RN parallelam ipſi BO. Iam in triangulo rectangulo AQN eſt ſinus totus (1) : AN $(\frac{b^2}{m}) =$ ſinus N $(\frac{2ab}{m^2})$: AQ $(\frac{2ab^3}{m^3})$; eſt enim angulus N = BOA = 2D; porro eſt ſinus totus (1) : AN $(\frac{b^2}{m}) =$ coſ.N $(\frac{a^2 - b^2}{m^2})$: QN $\frac{(a^2 - b^2)b^2}{m^3}$,

hinc

hinc $TQ = TN - QN = \frac{b^2}{m} - \frac{\overline{aa - bb} \,.\, b^2}{m^3} = \frac{2b^4}{m^3}$. Sed eſt, ob tangentem AT, ſubtangens TQ, hinc $TS = SQ = \frac{1}{2} TQ = \frac{b^4}{m^3}$, et ex natura parabolae fluit $AQ^2 \left(\frac{4a^2b^6}{m^6}\right) : MV^2 (y^2) = SQ \left(\frac{b^4}{m^3}\right) : SM (x)$; vnde extremis et mediis in ſe multiplicatis, fit $\frac{4a^2b^2}{m^3} x = y^2$, vnde patet, eſſe parametrum ad axem $= \frac{4a^2b^2}{m^3} = 4SN$; et $SN = SQ + QN = \frac{a^2b^2}{m^3}$, vti paullo ante etiam inuentum eſt. Eſt denique in triangulo rectangulo TQA, ſin. ATQ $\left(\frac{a}{m}\right) : AQ \left(\frac{2ab^3}{m^3}\right) =$ ſin. tot. (1) : AT $\left(\frac{2b^3}{m^2}\right)$, hinc $BT = b - \frac{2b^3}{m^2} = b\left(\frac{a^2 - b^2}{m^2}\right)$; atque in triangulo BRT, habebitur haec analogia, ſin. tot. (1) : BT $\left(\frac{b \,.\, \overline{aa - bb}}{m^2}\right)$ ſin. T $\left(\frac{a}{m}\right)$: BR $\left(\frac{ab \,.\, \overline{aa - bb}}{m^3}\right)$, quae eſt diſtantia axeos RN *a* diametro prius ducta BO. Aequatio autem ad diametrum BO facile habetur, ducta quauis EF parallela ad AD; eſt enim, ob DB, tangentem, BO ſubtangens, $= 2CO$, adeoque $CO = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{4}AO = \frac{1}{4}m$; vnde, ex natura parabolae, $AO^2 \left(\frac{1}{4}m^2\right) : EG^2 = CO \left(\frac{1}{4}m\right) : CG$, aut vero $m \,.\, CG = EG^2$; vnde patet, parametrum ad hanc diametrum pertinentem eſſe $m = AD$. TAB. IV. Fig. 6.

§. XXI. Maxime autem in hoc negotio confugerunt ad arcus circulares Architecti, eo modo inter ſe combinandos, vt figuram ellipticam, oculo gratam referrent, poplite deſtitutam. Aptiſſimum quidem eſt, fornici tibuere formam circularem; quam in tres ſpecies diſtinxerunt. Si arcus contineat perfectum ſemicirculum; dicitur *ſemicircularis fornix*; *un arc en plein cintre.* Si minus contineat quam ſemicirculum, vocatur *arcus depreſſus*, *un arc ſurbaiſſé*;

 ſi

ſi vero plus contineat quam ſemicirculum, eſt *arcus exaltatus*, *un arc ſurhauſſé*. Arcus igitur Semicircularis nullo deprauatur poplite, neque in puluinari, neque circa thalam, adeoque venuſtiſſimus omnium eſt. Cum vero quandoque ſuadeant circumſtantiae, immo etiam venuſtas quibusdam poſtulare videatur, vt adhibeantur arcus depreſſi: hi certe ſine viſibili poplite in vtroque puluinari exſtrui nequeunt. Commode hic adhiberentur arcus ſemielliptici, qui nullos progignunt poplites: ſed cum hi difficilis ſint deſcriptionis, conuerterunt ſe artifices ad deſcribendos arcus ſemiellipticis ſimiles: ſed ex aliquot arcubus circularibus compoſitos; quos *ouales* dicunt, *arcs à anſe de panier*; eosque variis modis concinnare docet *Serlio* et alii; quorum eſt commodiſſimus,
TAB. IV. deſcriptus a *Blondelo Cours d'Architecture*, *lib.* IV,
Fig. 7. *cap.* 6, ſequens: ſit latitudo fornicis A B, biſecetur illa in C, et hinc et inde capiantur aquales arbitrariae CD, C E, et ſuper D E erigatur pro lubitu triangulum aequicrurum D F E, ductis rectis F D G, F E H; tum centris D ac E, radiis D A, E B, deſcribantur arcus circulares A G, B H; centro denique F arcus circularis G H; habebitur ita arcus, elliptici ſimilis, ſed re vera ex arcubus circularibus compoſitus, at omni poplite deſtitutus.

§. XXII. Tradita autem haec methodus non eo extenſa eſt vſque, vt etiam altitudinem datam aliquam C I arcus requirat, ſed ſolam latitudinem datam A B; pro qua quidem hac reſtrictione ſolutionem etiam affert *Blondel*, *l.* c. ſed ſine demonſtratione, et operoſam

non

non nihil. Hinc ſequenti conſilio hoc problema aggres ſus ſum. Sint fornicis ſemilatitudo A C, altitudo C B datae. Quoniam itaque poples euitandus eſt in puluinari apud A, arcus circularis A K centrum ſuum alicubi habere debet in recta A C, veluti in I. Vt poples abſit in K, debent duo arculi contigui ibidem infinite parui habere communem tangentem; cum autem tangens puncti K in reſpectu ad arcum K A ſit perpendicularis radio I K: talis etiam debet eſſe tangens ſimilis in reſpectu ad arcum K B, hoc eſt, arcus K B centrum ſuum habere debet in recta K I M protenſa; vt effugiamus poplitem in B cum altera arcus medietate: requiritur centrum arcus K B quoque in recta B C protenſa; centrum ergo arcus *K* B nusquam eſſe poteſt, niſi in interſectione rectarum K I, B C, productarum, hoc eſt in M; requiritur itaque, vt ſit M K = M B. Neceſſe porro deinde eſt, vt duo radii I K et M K non nimium inter ſe differant longitudine; alias aſpectus enormiter laeditur, quod facili delineatione concipi poteſt. Quamuis enim arculi contigui etiam in hac circumſtantia habeant communem tangentem: tamen curuitates vtriusque arcus A K et K B, cuius curuitatis indices ſunt radii I K et M K, ſubito et multum immutantur, ſi radii multum differant longitudine; quae ipſa ſubita mutatio animum ſpectatoris laedere magnopere ſolet. Similes porro regulae adhiberi debent pro euitando poplite in illis membris architectonicis omnibus, quae ex duobus circuli arcubus componuntur, qualia ſunt *cymatium Lesbium*, *trochilus*, *ſimae*; immo etiam alia, veluti *torus*, et *apophygis*, in quibus effici

Tab. IV. Fig. 8.

debet

debet, vt ne arcus unus cum lineis rectis ingratam reddat inclinationem.

Tab. IV. §. XXIII. His itaque praesuppositis sint $CA = a$,
Fig. 8. $CB = b$, et differentia horum semiaxium $CA - CB = a - b = m$, qua describatur ex C quadrans circuli DE, et postea assumatur quaelibet $DI = x$, et $EM = y$; atque erit $MB = b + m + y$, $AI = KI = a - m - x$ $CI = m + x$, $CM = m + y$, adeoque $MI = \sqrt{(\overline{m+x}^2 + \overline{m+y}^2)}$, et hinc ob $MK = MB$, erit etiam $\sqrt{(\overline{m+x}^2 + \overline{m+y}^2)} : + a - m - x = b + m + y$, aut vero $\sqrt{(\overline{m+x}^2 + \overline{m+y}^2)} = m + x + y$; vnde producitur $2xy - m^2 = 0$, aut vero $y = \frac{m^2}{2x}$; quae facili constructione obtinetur, quaerendo nempe, arbitrarie assumta, x, ad $2x$ et m tertiam continue proportionalem, quae deinde dabit centrum quaesitum M.

§. XXIV. Cum itaque hoc problema sit indeterminatum: eius aequatio localis est $xy - \frac{1}{2}m^2 = 0$, quae
Fig. 9. est ad Hyperbolam inter asymptotos. Axe igitur transverso $AB = 2m$ construatur Hyperbola aequilatera HAKOBM, eius ducantur asymptoti CG, CI, CN, CL, orthogonales, tum capsa quauis $CE = x$, erit normalis ad asymptotum hanc ducta $EF = y$. Ducta enim normali DA ad eandem asymptotum in verticem hyperbolae A, erit ex huius natura $CE \times EF = CD \times DA$; nec non $CD = DA$; ergo $CD = DA = \frac{m}{\sqrt{2}}$; consequenter $xy = \frac{m^2}{2}$, aut $xy - \frac{m^2}{2} = 0$.

§. XXV.

§. XXV. Conſiderandi autem hic occurrunt varii caſus, prouti x ſit poſitiua aut negatiua, hoc eſt in latus CG, vel in oppoſitum CL cadat; ac etiam prouti eadem haec x alias atque alias teneat magnitudines. Sit ergo *Primo*, x poſitiua quaecunque DI; inuenietur ex Hyperbola deſcripta, pro hac differentia ſemiaxium CA-CB, ſiue m, conueniens y etiam poſitiua $=$ EM; ducatur itaque recta MIK, et centro I radio IA deſcribatur arcus circuli AK; centro autem M, radio MK arcus KB, qui per punctum datum B tranſibit, et fornicem oualem AKB abſoluet ſine omni poplite. Tab. IV. Fig. 10.

§. XXVI. *Secundo*, ſit x negatiua $=$ DI; ſed minor quam $\frac{1}{2}m$ inuenietur ex Hyperbola, applicata hac x in partem oppoſitam CL, conueniens y etiam negatiua, hoc eſt ab E ſurſum ponenda EM. Ducta nunc IMK, deſcribendus erit centro I, radio IA, arcus AK, et deinde centro M, radio MK, arcus KB, qui per datum punctum B tranſibit quidem, ſine poplite in K, ſed fornici conſtruendo inutilis. Tab. V. Fig. 1.

§. XXVII. *Tertio*, ſit x negatiua, ſed $=\frac{1}{2}m=$ DI, inuenietur correſpondens $-y$ ex Hyperbola $=-m$, $=$ EM; hinc centro I, radio IA deſcribendus erit arcus ALK, deinde centro M, quod coincidit cum C, radio CK, arcus KB, iterum retrorſum ducendus, qui per datum punctum B rurſus quidem tranſibit, ſed fornici conſtituendo eſt ineptus. Fig. 2.

§. XXVIII. *Quarto*, ſi fuerit $x = -m$; erit ex aequatione locali, ſubſtituto hoc valore, $-my - \frac{1}{2}m^2 = 0$, aut vero $-m(y + \frac{1}{2}m) = 0$; quae aequatio ſupponit $-m = 0$, et $y + \frac{1}{2}m = 0$, ſiue $y = -\frac{1}{2}m = -\frac{1}{2}0$; hic adeoque caſus ſupponit ſemiaxes inter ſe aequales; in alio autem caſu ſolutionem problematis efficit impoſſibilem.

Tab. V. Fig. 3. §. XXIX. *Quinto*, ſi fuerit x negatiua, ſed maior quam m, veluti DI; erit y adhuc negatiua $=$ EM; et ducta IMK, deſcribendus erit centro I, radio IA, arcus deorſum vergens AK; deinde centro M, radio MK, arcus KLB ſurſum vergens, qui attinget quidem punctum datum B, ſed rurſus fornicem non efficiet, adeoque noſtro inſtituto non erit accommodatus. *Sexto* denique ſi fuerit $x = 0$, correſpondens y cadet in aſymptotum ipſam, requiret adeoque magnitudinem infinitam; vnde et hic caſus eſt impoſſibilis; quod ita etiam oſtenditur: requiritur vt ſit AI + IM = BC + CM; ſed ſi $x = 0$, eſt AI = AD = BC; ergo erit hoc caſu BC + IM = BC + CM, aut IM = CM, hoc eſt quaelibet hypothenuſa aequalis ſuae catheto; quod eſt abſurdum. (*Elem. Euclidis lib. I. prop.* 18.). Patet igitur ex his omnibus, nullum caſum valere in noſtro negotio alium, niſi eum ſolum, qui aſſumit x poſitiuam.

Tab. IV. Fig. 10.

§. XXX. In eodem hoc, quod modo pertractauimus, problemate prolixam admodum operam conſumſit *Pitotus* in *Commentariis Acad. Scient. Pariſinae ad annum* 1726, *p.* 209; ſed, quod fateri debemus, non adeo felici ſucceſſu. Recenſet, ac prolixe demonſtrat, hanc con-

conſtructionem. Sit fornicis latitudo AB, altitudo ON; Tab. V. Fig. 4. fiat BY $=$ ON, OZ $= \frac{1}{2}$ OY; ſupra ZY deſcripto ſemicirculo ducatur ZT, cui aequalis reddatur ZD; iam ſuper DE $= 2$ DO erigatur triangulum aequilaterum DCE, eritque D et E centrum arcus AL et BM, intra AB, et CL, CM, ducendi; C vero erit centrum arcus LNM. Sit pro hoc conſtructionis modo OD $= x$, OA $= a$, ON $= b$, ac $a - b = m$; eritque DE $=$ DC $= 2x$; OC $= x\sqrt{3}$; AD $=$ LD $= a - x$; nec non, ob CL $=$ CN, habebitur $2x + a - x = x\sqrt{3} + b$, vnde deducitur $x = \frac{m}{\sqrt{3} - 1}$, aut, ſi commodius videatur hoc vti valore, $x = \frac{m(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = m\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$, qui expeditius ita poteſt conſtrui. Fiant OR, OQ, OP, aequales ſingulae Fig. 5. $\frac{1}{2}m$, et ſuper PR erigatur triangulum aequilaterum PSR, erit SQ $= x$. Habebitur enim ſic OS $= \sqrt{(m^2 - \frac{1}{4}m^2)} = \frac{m\sqrt{3}}{2}$, et conſequenter SQ $= \frac{m\sqrt{3}}{2} + \frac{m}{2} = \frac{m(\sqrt{3}+1)}{2}$. Haec autem conſtructio arcus, valde a *Pitoto* depraedicata, cum ſine neceſſitate ſupponit triangulum D E C aequilaterum, quod *Blondellus* multo melius aequicrurum aſſumit (§. XXI.), id incommodi ſecum fert, vt in arcubus valde depreſſis circa L et M ingrati poplites oriantur, quia tum radii LD, LC, nimium inter ſe differunt longitudine, quod ſupra ſolicite euitandum eſſe vidimus (§. XXII.). Eſt enim in hac ſolutione differentia radiorum DC $= 2x = \frac{2m}{\sqrt{3}-1} = \frac{200m}{73} = 2\frac{37}{50}m$, aut fere aequalis $3m$; quo maior itaque adeſt differentia ſemiaxium m, eo maior etiam aderit differentia radiorum DC.

 §. XXXI.

§. XXXI. Cum igitur ex regula *Pitoti* differentia radiorum conſtans ſit, neque minimum quod admittat: videamus, qualis optio in noſtra regula ſit inſtituenda, vt differentia radiorum, pro quibuslibet ſemiaxibus datis, fiat minima, ac inde efficiatur arcus omnium poſſibilium aſpectui gratiſſimus. Eſt autem (§. XXIII.) differentia radiorum $MI = \sqrt{(m^2 + 2mx + x^2 + m^2 + 2my + y^2)} = \sqrt{(2m^2 + 2mx + x^2 + 2my + y^2)}$, et $y = \frac{m^2}{2x}$. Vt igitur MI fiat omnium poſſibilium minima, erit ipſius differentiale $\frac{m\,dx + x\,dx + m\,dy + y\,dy = 0}{\sqrt{(2m^2 + 2mx + x^2 + 2my + y^2)}}$, aut vero $m\,dx + x\,dx + m\,dy + y\,dy = 0$. Eſt autem ſimul $dy = -\frac{m^2\,dx}{2x^2}$, et $y\,dy = -\frac{m^4\,dx}{4x^3}$; quibus ſubrogatis oritur x, quae differentiam radiorum MI minimam reddit, elicienda ex hac aequatione, $x^4 + mx^3 - \frac{1}{2}m^3x - \frac{1}{4}m^4 = 0$.

Tab. IV. Fig. 8.

§. XXXII. Huius aequationis incognita x ita eruitur. Conſtruatur Porabola DAM, cuius parameter $= m$, differentiae ſemiaxium fornicis; in hac capiatur $DE = \frac{11m}{16}$, et ad hanc perpendicularis $EC = \frac{3m}{16}$; centro hoc C, et radio $CM = \frac{m\sqrt{165}}{16}$, deſcribatur circulus, ſecans parabolam in m et M; tum capiatur $DG = \frac{m}{16}$, eritque ſic, ex natura parabolae, $GA = \frac{m}{4}$; ex A ducatur AP, parallela axi parabolae, et ad hanc AP demittantur ex M et m perpendiculares MP, mp, erunt hae aequales, et PM, aut pm, $= x$. Ponatur enim $AP = y$; atque erit $GE = DE - DG = \frac{5m}{8}$; demiſſa perpendiculari CH ad FP, erit $PH = GA - EC = \frac{m}{16}$; hinc ex natura para-

Tab. V. Fig. 6.

parabolae, $mx\,DF = FM^2$, aut $m(y + \frac{m}{16}) = (x + \frac{m}{4})^2$; vnde prodit $y = \frac{x^2}{m} + \frac{x}{2}$. Sed ex natura circuli est $CH^2 + HM^2 = CM^2$, aut vero $(y - \frac{5m}{8})^2 + (x + \frac{m}{16})^2 = \frac{165\,m^2}{16^2}$; vnde deducitur $y = \frac{5m}{8} \pm \sqrt{(\frac{164\,m^2}{16^2} - x^2 - \frac{mx}{8})}$. Ex his itaque duobus valoribus ipsius y aequatis nanciscimur hanc aequationem, $\frac{x^2}{m} + \frac{x}{2} - \frac{5m}{8} = \pm \sqrt{(\frac{164\,m^2}{16^2} - x^2 - \frac{mx}{8})}$, et quadratis membris, deletisque sese tollentibus, redit haec aequatio, $x^4 + mx^3 - \frac{1}{2}m^3x - \frac{1}{4}m^4 = 0$, quae erat construenda. Atque prodit quidem sic x quam proxime aequalis $\frac{11\frac{1}{3}m}{16}$ siue 0, 70833 m; et consequenter $y = \frac{12\,m}{17}$, siue 0, 70588 m. Eo igitur iam negotium hoc deduximus, vt, de quo nemo huc vsque cogitauit, fornicem delineare possimus, ex duobus circuli arcubus constantem, de quo demonstrare liceat, illum omnium possibilium, pro datis semiaxibus, esse venustissimum, minimumque poplitis habere. Capiatur Tab. IV. enim modo loco x, $DI = 0, 70833\,m$, et loco y, Fig. 8. $EM = 0, 70588\,m$, ducatur MIK, et describantur arcus AK, KB, centris I et M, vti supra modo dictum fuit (§. XXII.). Cum autem DI sic inuenta ipsam EM 0, 00245 partibus modo superet: in praxi tuto assumi potest, pro differentia radiorum minima reddenda DI et EM esse aequales; aut $x = y = \frac{m^2}{2x}$, quod efficit $x = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}m\sqrt{2}$; captis igitur CD et CE, vti ante aequalibus, $= m$, ducatur hypothenusa ED, et bisecetur in N, erit $EN = DI = EM$, pro differentia radiorum MI efficienda minima. Sed quoniam semper

 debet

debet esse DILDA, $\lessdot a-m \lessdot b$, necesse est, vt in hac praxi sit D I, aut hoc casu DN, $\lessdot b$, aut D E $\lessdot 2b$.

Tab. V. Fig. 7. §. XXXIII. Fastigia turrium arcuata rotunda sequenti modo eleganter delineari possunt, pro quauis ratione altitudinis ad latitudinem. Sit enim haec AB, et super hanc triangulum aequicrurum quoduis ACB; latera AC, BC, secentur in tres partes aequales, per quas ducantur parallelae KL, DE, OI, bisecetur CE in H, et ex H erigatur perpendicularis HI, secans OC in I, erit CI radius communis, quo arcus duci debent. Nam ducta recta per E, quae sit IEK, erit I centrum arcus CE et K centrum arcus EG. In triangulis nempe ICH, et IEH, praeter rectos ad H, est HC = HE, et HI communis; ergo haec triangula aequalia, et IC = IE, quare arcus CE transibit per C et E, neque vnquam arcus oppositus CD, centro O, vbi CO = CI, describendus, hunc priorem intersecabit, ob vtriusque angulum in C rectum. Sed porro in triangulis CIE, GKE, est EG = EC, *per construct.* ICE = KGE, ob parallelas CI et KG; et anguli apud E verticales etiam aequales; vnde etiam haec triangula sunt aequalia, et, ob IC = IE; erit quoque KE = KG; vnde centro K radio communi descriptus arcus transibit per G; et quoniam centra I et K sunt in eadem recta IEK, arcus CE et EG; facient apud E vterque angulum rectum, adeoque poplitem non efficient. Capiatur denique GM = radio communi CI, et pari ratione demonstrabitur, futuram esse GM = BM, hoc est M esse centrum arcus GB; centra K et

K et M eſſe in eadem linea recta, et hinc poplitem apud G euitari; ſed apud B poples dabitur, qui in eiusmodi tectis non eſt effugiendus. Arcus deinde ex altera parte deſcribantur radio eodem communi, centris O, L, N, ſimiliter cum prioribus poſitis. Hinc nullam rationem ſufficientem perſpicio, quare *Ioh. Wilhelmus in Architectura ciuili*, 1668 *edita* pro radiis arcuum CE et BG generaliter aſſumat $\frac{7}{22}$ BC, pro radio autem arcus EG $\frac{4}{11}$ BC; ex hac enim menſura conſtanti radiorum fit, vt in his faſtigiis, paullo altioribus quam latis, arcus CD et CE ſeſe interſecent, adeoque conſtructionem inutilem reddant.

§. XXXIV. Haec itaque arcuum circularium combinatio poplites excludens, huc vsque pertractata optime ſuccedit, cum pilae ſunt verticaliter erectae, et aequales, vt recta ipſarum ſummitates iungens fiat horizontalis; ſed cum pilae ſunt inaequales, neque verticales, ſed quomodocunque inclinatae inter ſe, hoc eſt, cum fornices conſtitui debent obliqui, *arcs rampants*, tum nihil plane agi poſſe eiusmodi arcuum circularium compoſitione, annotauit *Blondel*, *Cours d'Architecture*, P. IV, *lib.* VI, *cap.* 9 *p.* 424, neceſſariasque, et vſus indiſpenſabilis eſſe hic indicauit ſectiones conicas, ita ducendas, vt illae tangant duas rectas datas in datis punctis, et tertiam in puncto quocunque. Sed eraſſe in hoc Virum ſagaciſſimum videbimus infra (§. XXXVII.). Conſtruendos vero ſaepius eſſe eiusmodi fornices obliquos, praecipue in ſcalis, aliisque occaſionibus, ibidem oſtenditur.

§. XXXV.

TAB. V. Fig. 8. §. XXXV. Sit igitur fornix ellipticus AHB efficiendus ſuper pilas, *piedroits*, PA, QB, quomodocunque inclinatas, et horizonti PQ oblique inſiſtentes; ſitque linea obliquitatis, *la ligne de la rampe*, AB, hinc et inde continuata, in μ et I; et linea determinans altitudinem fornicis EF, continuata etiam in I, vbi ſecet lineam obliquitatis; totum negotium iam eo reducitur, vt deſcribatur ellipſis, quae triangulum GEF concluſum, ex pilarum, et lineae altitudinem determinantis, productione, tangat in duobus punctis datis A et B, et tertio H vbicunque. Biſecetur ergo data recta AB in Z, et ex G ducatur recta $GZ\Phi$, atque haec erit, ob tangentes GA, GB, diameter ellipſeos; AB ordinatim applicata, per *Apollonii prop.* 30, *lib.* II. Sit itaque in hac centrum eiusdem Y, et ducantur AH, BH, cum EY, FY, eruntque ob tangentes EA, EH; FB, FH; rectae EY, FY, diametri, et ad has reſpectiue ordinatim applicatae AH, BH, biſectae in V, et X. Demittantur ex centro perpendiculares in latera trianguli $Y\lambda$, et Yr; ducantur praeterea rectae $E\mu$, $F\eta$, diametro $G\Phi$ parallelae; nec non rectae AY, HY, BY; atque ob aequalia triangula AGZ, BGZ, nec non ob aequalia AYZ, BYZ, hoc eſt, ob aequalia triangula GAY, GBY, erit iam $AG \times Y\lambda = BG \times Yr$; aut vero $BG : AG = Y\lambda : Yr$. (A). Deinde ob ſimilia triangula $E\mu A$, GZA; et $F\eta B$, GZB; habebitur $E\mu : AE = GZ : AG$, nec non $BF : F\eta = BG : GZ$; ex quibus proportionibus inter ſe multiplicatis oritur haec $E\mu \times BF : F\eta \times AE = BG : AG$, aut vero talis

$E\mu$;

$E\mu : F\eta = AE \times BG : BF \times AG$, vel pro ratione $BG : AG$ subſtituendo aequalem $Y\lambda : Yr$, (A) emergit haec proportio $E\mu : F\eta : = AE \times Y\lambda : BF \times Yr$. (B) Eſt autem $EH : HF = EYH : FYH$; eſt porro $EI : FI = E\mu : F\eta = AE \times Y\lambda : BF \times Yr$, per (B) $= AEY : BYF$. Sunt deinde, ob biſectam AH in V, triangula AEY, et EYH aequalia; et pariter, ob biſectam BH in X, triangula BYF et FYH aequalia; ergo ratio $AEY : BYF$ eadem eſt cum ratione $EYH : FYH$; hinc etiam rationes $EI : FI$, et $EH : HF$ erunt aequales, hoc eſt, $EI : FI = EH : HF$; aut, quod in idem recidit, recta EI diuiſa eſt harmonice in punctis H et F; ſiue tres rectae EI, HI, FI, ſunt harmonice proportionales, vt nempe ſit $EI - HI : HI - FI = EI : FI$. Vnde, ſi inter datas EI et FI quaeratur media proportionalis harmonice HI, determinabit illa punctum H, in quo ellipſis tertium trianguli latus EF tangit; ducta deinde BH, et biſecta in X, determinabitur per rectam FXY centrum ellipſeos Y; et quoniam ob tangentem GA, et ordinatim applicatam AB, eſt $YZ : Y\alpha = Y\alpha : YG$; vti *ex conicis* patet: erit *Semidiameter* ellipſeos $Y\alpha = Y\beta = \sqrt{(YZ \times YG)}$; et conſequenter ſemidiameter coniugata huic priori $Y\delta = \frac{ZA \sqrt{GY}}{\sqrt{GZ}}$. Idem hoc problema copioſe ſoluit et prolixe *Blondel in Memoires de l'Academie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699*, *tomo* v. in peculiari tractatu, cui titulus eſt *Apollonius Gallus Tactionum.* Si vero aliquando ellipſis haec inuenta abeat in circulum, ſub caſibus ſpecialibus, egit de hoc *Boſſe*, *in Ouvrages d'Architecture.*

§. XXXVI. Vt aequationem algebraicam ex hac praemiſſa conſtructione eruamus vtilem ad varios problematis caſus excutiendos, ponantur, ducta M N parallela ad ZA, adeoque ordinatim applicata ad diametrum $G\beta$, $\beta M = x$, $MN = y$, ſemidiameter $\beta Y = m$, $ZA = a$, $\beta Z = b$; et hinc $\alpha Z = 2m - b$. Erit ſic ex natura ellipſeos $ZA^2 (a^2) : MN^2 (y^2) = \alpha Z \times Z\beta (\overline{2m-b} \cdot b) : \alpha M \times M\beta (\overline{2m-x} \cdot x)$, quae reducitur ad hanc aequationem $y^2 + \frac{a^2 x^2}{2mb - b^2} - \frac{2 a^2 m x}{2mb - b^2} = 0$. Ex qua nunc facile perſpicitur, eam generaliter eſſe ad *Ellipſin*, cuius diameter $\alpha\beta$, et ordinatim applicata ZA, antea determinatae; in caſibus vero particularibus eandem eſſe ad *Circulum*, ſi fuerit $a^2 = 2mb - b^2$; ad *Hyperbolam*, ſi exiſtat $b > 2m$; ad *Parabolam* autem, ſi contingat eſſe $m = \infty$, vbi nempe $\frac{a^2}{2mb - b^2}$ euaneſcit, et prodit $y^2 - \frac{a^2 x}{b} = 0$, vbi ſcilicet pilae fornicis PA, QB, ſunt parallelae. Inueniri igitur haud difficili conſtructione hac ratione poteſt diameter Ellipſeos $\alpha\beta$, atque huius coniugata $\delta Y \pi$, ducendo nempe parallelam $\delta\pi$ ipſi AB, per centrum Y; quomodo autem ex his diametris coniugatis datis deinde porro reperiri debeant axes methodo omnium commodiſſima, et noua, docui in horum ipſorum *Nouorum Commentariorum Academiae Scientiarum Imperialis tomo* I. *pag.* 127, quanquam etiam ex ſolis diametris duabus coniugatis datis Ellipſis commode deſcribi poſſit per puncta infinita, ſecundum methodum *Hoſpitalii*, *ſection. conicor. prop.* 13, *p.* 43.

§. XXXVII. Diximus ſupra, *Blondellum* neceſſarias exiſtimaſſe ſectiones conicas in conſtruendis fornicibus ſupra

pra pilas inclinatas et inaequales (§. XXXIV.): verba eius haec ſunt in *Cours d'Architecture P. IV, lib. VI. cap. 9.* Il y a eû divers architectes, qui ont eſſayé „ de trouver des manières d'en tracer le trait par des „ portions de cercle ſur divers centres: mais comme „ leur pratiques ſont fauſſes, faiſſant jarret en divers „ lieux, & principalement ſur les lignes des piedroits, „ outre que les centres des cercles dont ils ſe ſervent ne „ ſont le plus ſouvent trouvéz que par hazard & en „ tatonnant; je n'ai pas crû devoir y faire aucune re- „ flexion, & j'ai jugé, que ces arcs, pour être juſtes „ & corrects, devoient être l'une des ſections coniques. „ Reiicit igitur hic vir ſolertiſſimus arcus circulares, et ſectiones conicas in Architecturam ciuilem recipit, contra huius praecepta, neceſſitate, vti putat, adductus, quia in hoc caſu arcus circulares poplites euitare nequeant, nec ratio Geometrica conſtet, cuius ope tales arcus circulares debeant deſcribi. Sed errat in hac re vir alias ſubtiliſſimus; tradam enim methodum formandi fornices ſupra pilas quomodocunque inclinatas, et inaequales, ex arcubus duobus circularibus, qui et nuſquam poplitem vllum faciant, ſed et ratione Geometrica determinantur; qua ipſa non parum vtilitatis ad ſcientiam aedificandi attuliſſe mihi videor.

§. XXXVIII. Sint in hunc finem duae pilae inclinatae et inaequales P A, Q B, ad vtramque erigantur perpendiculares A F, B E, decuſſantes ſe in D; capiatur D C differentia harum perpendicularium, et biſecetur in G; erecta perpendicularis G I ſecans B E in I, dabit TAB. V. Fig. 9.

 in

in I centrum ducendi arcus circularis H B, atque in C centrum erit describendi arcus alterius circularis A H; Constat ita de constructionis huius ratione Geometrica perfecta; deinde arcus A H perfecte coincidet cum pila A P, quoniam et ad A P, et ad A H, perpendicularis est radius A C, quod simili modo de arcu H B probatur. Ductus est igitur, quod *Blondellus* fieri posse negauit, super pilas quascunque arcus circularis duplex, Geometrice et omni poplite carens.

§. XXXIX. Solutio problematis Algebraica haec esse potest. Sint $DC = x$, $DI = y$, et, demissa perpendiculari BK, $DA = a$, $BK = b$, $DK = c$, $BD = e$; atque erit, ob triangula similia BKD, IGD, $BD(e) : DI(y) = BK(b) : IG\left(\frac{by}{e}\right)$; et pariter $BD(e) : DI(y) = DK(c) : DG\left(\frac{cy}{e}\right)$; vnde $GC = x - \frac{cy}{e}$, et $CI = \surd\left(\frac{b^2y^2}{e^2} + x^2 - \frac{2cxy}{e} + \frac{c^2y^2}{e^2}\right) = \surd\left(\frac{b^2+c^2}{e^2}y^2 + x^2 - \frac{2cxy}{e}\right) = \surd\left(y^2 + x^2 - \frac{2cxy}{e}\right)$, ob $b^2 + c^2 = e^2$. Exinde debet esse $CA = x + a = CH = CI + IB = \surd\left(y^2 + x^2 - \frac{2cxy}{e}\right) + e - y$; aut vero, ponendo $m = e - a$, debet esse $\surd\left(y^2 + x^2 - \frac{2cxy}{e}\right) = x + y - m$; vnde prodit

$$y = \frac{\frac{1}{2}m^2e - emx}{em - e + c \cdot x};$$

ex quo patet, infinitas solutiones admittere hoc problema, vti superius (§. XXIII.); quarum vnicam dabo, assumendo nempe, vti modo ante feci, $x = DC = m$; hinc fit ergo $y = \frac{\frac{1}{2}me}{c}$; est autem per constructionem traditam, ob triangula similia DKB

et

et DGI, $DK(e):DB(e)=DG(\tfrac{1}{2}m):DI(\frac{\frac{1}{2}me}{e})=y$.
Manifestum est porro, locum Geometricum problematis huius indeterminati esse iterum Hyperbolam intra asymptotos, cuius vero tradendae constructioni, aut determinandae differentiae radiorum IC minimae, non immorabor. Ad hoc solum erit attendendum in praxi, vt, si punctum D cadat extra pilam PA, et sic AD fiat negatiua; tum capiatur $m=e+a$.

§. XL. Cum autem praecedens haec constructio et solutio non adeo commode applicari possint ad illum casum, quo duae pilae sunt verticales, sed inaequales: destinabimus hinc sequentem aliam soluendi modum. Sint pilae verticales, sed inaequales, PA, QB, supra quas ducendus est fornix circularis compositus; ad PA ducatur perpendicularis AD, et sit centrum arcus AF in D, ipsa vero $AD=x$, et praeterea differentia altitudinum $GB=a$, $AG=b$, $BC=y$, ita vt in perpendiculari BC ad BG in C haereat centrum alterius arcus FB. Erit ita $AE=b-y$, $ED=x-AE=x-b+y$, adeoque $\sqrt{(ED^2+EC^2)}+CB=DF=DA$, hoc est, $\sqrt{(x^2-2bx+b^2+2xy-2by+a^2+y^2)}+y=x$, ex quo efficitur $y=\frac{2bx-a^2-b^2}{+x-2b}$; atque iterum elucet, problema hoc infinitis modis posse resolui, prout haec nempe x, aut alia, assumitur; sed breuitatis caussa assumamus $x=b=AG$, atque erit sic $y=\frac{b^2-a^2}{2b}$, aut $2y=b-\frac{a^2}{b}$; hinc pro hoc casu facillima sequens emergit constructio: ex vna pila ducatur perpendicularis AG ad ipsam; ex altera B huic parallela BC; capiatur $AD=GB$, eri- Tab. VI. Fig. 1. Fig. 2.

 gatur

gatur perpendicularis DF, et huic fiat aequalis AH, erit $HG = b - \frac{a^2}{b} = 2y$; ſin igitur HG biſecetur in E, et erigatur perpendicularis EI ſecans ſuperiorem BC in I, dabitur in I centrum arcus CKB et in G centrum arcus ACK; quae omnia vlteriori demonſtratione non egent.

TAB. VI. Fig. 3. §. XLI. Nihil attinet dicere de arcubus Gothicis Gallice, *arcs à tiers point*, in quibus centro A, radio AB, deſcribitur arcus BC, eodem deinde radio, centro B, arcus AC, vt ita triangulum rectilineum ABC ſit aequilaterum. Quamuis enim iudice *Blondello* in *Cours d'Architecture p.* 419, tales arcus omnium ſint fortiſſimi ad geſtanda onera, minimumque impulſionis (*pouſſée*) faciant in ſuas pilas, vnde ſine dubio in aedificiis Gothicis antiquis, templis, portis, feneſtris, ex hac cauſſa perpetuo fuerunt in vſu; tamen eodem arbitro grauiſſimo, exulare debent hi arcus ex omnibus aedificiis ſecundum regulas probae et elegantis Architecturae exſtruendis, quae nempe nuſquam tolerant poplitem adeo inſignem et inuenuſtum, qualem hi arcus in ſummitate ſua prae ſe ferunt, eoque oculos intelligentis ſpectatoris mirum in modum laedunt.

§. XLII. In tectis rectilineis etiam multa occurrunt, quae mathematicam admittunt cognitionem. Cantherii tectorum, (*les chevrons*) ab impoſitis tegulis premuntur; adeoque propius ab his ad fracturam adiguntur, quam ſi liberi ab hoc integumento, neceſſario tamen, Fig. 4. eſſent. Quaeritur itaque, an tectum altius BA, magis prematur ab impoſito ſibi onere tegularum, quam vero tectum

tectum depressius B C; posita vtriusque tecti semilatitudine B D eadem? Quod, vt examinemus, ponamus tecti A B pondus esse $= p$, collectum in centro grauitatis E, hoc est in medio ipsius A B, hoc pondus sit expositum per E F verticalem; resoluta hac in E G, perpendicularem ad A B, et G F eidem parallelam, dabit ex similitudine triangulorum $EG = \frac{p.BD.}{AB}$, $=$ pressioni, quam tectum hoc altius A B sustinet. In tecto depressiori B C, cuius pondus $HI = \pi$, similiter reperietur pressio $HK = \frac{\pi.BD}{CB}$, quae duae pressiones igitur inter se erunt $= p.\ CB : \pi.\ AB$; sed ob tecta supposita homogenea erit $p : \pi = AB : CB$, aut erit $p.\ CB = \pi.\ AB$; ergo pressiones, quas tectum aut altius, aut depressius, recipiunt a materia homogenea, sunt inter se aequales; posita latitudine tecti in vtraque altitudine eadem. Quod primus reperit *Coupletus*, in *Memoires de l'Acad.* 1731. *p.* 69. Certum igitur est, super eadem basi erecto siue altiori, siue depressiori tecto, vtrumque aequaliter premi ab onere sibi imposito: interim tamen altius tectum erit debilius; quoniam in eo pressio eadem agit in brachium longius $AE = \frac{1}{2} AB$, adeoque exinde maius acquirit momentum mechanicum, ex ratione vectis facile perspiciendum.

§ .XLIII. Si praeterea examinare velimus, vtrum tectum altius, aut depressius, habeat plus impulsionis, *poussée*; considerabimus cantherium ab onere suo trahi iuxta longitudinem suam quantitate G F; capiatur huic G F $=$ B L, et resoluatur in verticalem B M, et horizontalem

lem B N; abſorbebitur illa in pilam tecto ſuppoſitam; Sed B N conabitur pilam eandem extus trahere et protrudere; erit itaque B N menſura legitima impulſionis. Eſt autem $BL = GF = \frac{p + AD}{AB}$; atque hinc in triangulo B N L erit ſinus totus (1) : $BL \left(\frac{p+AD}{AB}\right) =$ ſin. $BLN \left(\frac{BD}{AB}\right) : BN \left(\frac{p + AD + BD}{AB^2}\right)$; ſed ob $p : \pi = AB : CB$, aut $\frac{p}{AB} = \frac{\pi}{CB}$, erit $\frac{p}{AB}$ conſtans, qualis etiam ſupponitur eſſe B D; habetur ergo impulſio tecti proportionalis huic quantitati $\frac{AD}{AB}$, ſiue ſinui anguli ABD; cum itaque in tecto altiori ſinus hic ſit maior quam in depreſſiori: euidens eſt, illius propulſionem eſſe maiorem. Neſcio igitur, qua cauſſa inductus ſtatuerit *Coupletus in Memoires de l'Acad.* 1731. *p.* 69. *ſeqq.* tecta, quo ſint altiora, eo eſſe ſolidiora; ob liberiorem defluxum pluuiarum, difficiliorem ſubleuationem tegularum a vento forti efficiendam, quae certe vera ſunt; ſed cum addit altiora tecta habere minorem impulſionem horizontalem, id non perſpicio.

§. XLIV. Elegans et vtilis eſt quaeſtio de tectis, *Marſardicis* dictis, ita conſtruendis, vt quantum fieri poteſt, illa ipſa ſe teneant in aequilibrio, neque alicubi, ſine neceſſitate praegrauent. Huius problematis ſolutio-
TAB. VI. nem reperi ſequentem. Sit tale tectum conſtruendum
Fig. 5. ſuper ſemilatitudine D C, ac altitudine D A; iungantur A et C linea recta, quae biſecetur in M, et ex M erigatur perpendicularis M B, cuius determinatio deſideratur, vt deinde rectae duae aequales A B, B C illuc ductae tectum *Marſardicum* conſtituant, et ſeſe mutuo teneant

teneant in aequilibrio. Igitur erit triangulum A B C aequicrurum. Sit nunc trabis A B pondus $= p$, collectum in centro grauitatis ipsius E, et expositum per rectam libere assumtam verticalem E F $= p$; resoluatur haec E F in vires collaterales E H et E G, quarum haec sit horizontalis, altera in directione ipsius trabis A B. Patet, illam horizontalem destrui a trabe, ex altera tecti parte similiter posita; hanc vero E H idem efficere, ac si trabs A B traheretur in suo extremo B vi $=$ E H $=$ B I, recta A B continuata. Resoluatur haec B I iterum in collaterales B K et B L, illam normalem ad B C, et hanc in directione ipsius B C, redundabit haec in hypomochlium C; illa vero B K conabitur trabem B C vertere circa C extrorsum momento B K $\times$ B C. Iam vero trabs B C, vi ponderis sui in centro grauitatis N, collecti, deorsum nititur verticaliter vi N P $=$ E F $= p$, ob aequalitatem harum trabium; quae N P resoluatur in N O et N Q, quarum illa sit normalis ad B C, haec in directione B C. Redundabit N Q iterum in hypomochlium C; vnde hoc par esse debet sustinendis viribus B L $+$ N Q; sed N O conabitur trabem B C introrsum vertere circa C, momento N O $\times$ N C $= \frac{1}{2}$ N O $\times$ B C. Vt igitur hae duae trabes A B, et B C sese teneant in mutuo aequilibrio: debet esse $\frac{1}{2}$ N O $\times$ B C $=$ B K $\times$ B C; ex quo fit N O $= 2$ B K. Sint igitur anguli D A C sinus m, cosinus n; anguli M A B $=$ M C B sinus x, cosinus y; erit sinus F H E (cos. D A B, $ny - mx$): E F (p) $=$ sin. tot. (1): E H ($\frac{p}{ny-mx}$) $=$ B I. Porro est, sin. tot. (1) : B I ($\frac{p}{ny-mx}$) $=$ sin. B I K (ſin. L B I, ſin. 2 M A B, $2\,xy$) : B K $\left(\frac{2\,p\,x\,y}{ny-mx}\right)$. Eſt denique etiam ſin. tot. (1) : N G (p) $=$ ſin. O P N (ſin. P N Q, coſ. D C N, $my-nx$) : N O ($p\,.\,\overline{my-nx}$); ergo erit $p(my-nx) = \frac{4\,p\,x\,y}{n\,y\,-\,m\,x}$; quae reducitur ad hanc ſequentem $m\,n\,(x^2+y^2) - x\,y\,(m^2+n^2) = 4\,x\,y$; ſunt vero $x^2+y^2=1$, et pariter $m^2+n^2=1$; ergo obtinebitur $m\,n = 5\,x\,y$; aut vero $\frac{2\,m\,n}{5} = 2\,x\,y =$ ſin. 2 M A B. Sed eſt pariter $2\,m\,n =$ ſin. 2 D A C; ergo reſultat $\frac{1}{5}$ ſin. 2 D A C $=$ ſin. 2 M A B. Accipiatur ergo ſinus anguli dati 2 D A C, hic diuidatur per 5; dabit quotus ſinum 2 M A B; vnde problema erit conſtructum. Idem hoc problema ſoluit quoque *Coupletus in Memoires de l'Academie des Sciences de Paris*, 1731 *p.* 69. ſed iudicent aequi et intelligentes huius rei aeſtimatores, vter noſtrum verum tetigerit? Si iam porro quaerantur valores ipſarum B L et N Q: harum ſumma trahet trabem B C, in C, ſecundum directionem B C. Haec ſumma reſoluatur in vires collaterales horizontalem et verticalem; atque erit illa propulſio, quam pilae domus ab hoc tecto impoſito patiuntur, et cui proinde reſiſtere debent; quae propulſio iterum in *loco citato* diuerſa ab hac aeſtimatione menſuratur.

DE

DE VIRTVTE MAGNETICA ABSQVE MAGNETE COMMVNICATA EXPERIMENTA.

AVCTORE

G. W. RICHMAN.

Acceptis a Viro plurimum Reuerendo *Dumaresque*, Anglicanae Ecclefiae Paftore, quibusdam ex Anglia ad ipfum miffis fcriptis, in quibus methodus virtutem magneticam absque magnete communicandi defcripta erat, et lamellis chalybeis in hunc finem paratis, quibus tamen virtus magnetica nondum communicata erat, decantata in Anglia experimenta imitari tentaui. Et quia, quae requirebantur ad experimenta haec rite inftituenda, omnia ad manus non erant, et nonnulla ab autore *Michel* Anglo, qui methodum praefcripfit, minus diftincte propofita, fubftitui alia, de quibus cogitaui, idem praeftitura effe, et mutaui methodum aliqua ex parte ad finem eundem obtinendum, fequentiaque pericula feci.

EXPERIM. I.

Ope veru AB, prope **A** fuspenfi, lamellam *a b* ex chalybe molli, politam, longitudinis trium digit. Lond. latitudinis duarum et dimidiae lineae et craffitiei vnius quartae circiter partis lineae, ponderis 69 granorum, inter parallelepipeda ferrea DE et FG, (quorum quodlibet erat 50 libr. Ruff. longitudinis 23. digit. Lond. circiter, latitudinis 6 digit. ferme et craffitiei paulo plus quam digiti) lineae meridianae magneticae ferme pa- TAB. VI. Fig. 6.

 rallela

rallela parallelepipedis paruis ferreis *c* et *d* impositam, strinxi a septentrionali plaga australem plagam versus, versus quam plagam veru respiciebat extremitate A. Et tandem veru et lamella virtutem directricem tali tritu acceperunt, quam acus magnetica prodidit. Extremitas *b* illa, quae boream versus respexerat, polus borealis lamellae fiebat, altera polus australis. Aliquot centenis tamen ductibus opus erat, antequam lamella acquireret dictam virtutem. Virtute directrice acquisita, paucis ductibus additis, e. g. 50 ad 60 additis, lamina obtinuit virtutem 7 ad 8 drachmas ferri sustentandi virtute sua magnetica acquisita, et idem pondus etiam veru A B trahebat, quod ante tritum nullam aliud ferrum attrahendi virtutem prodiderat.

Ioh. Michel in tractatu de *Artificialibus Magnetibus* loco parallelepipedi F G, extremitati boreali adplicati, simile parallelepipedum triginta libr. Lond. adhibuit, longit. quatuor pedum Lond. extremitate boreali parallelepipedi paululum infra horizontalem depressa, extremitati australi adplicuit parallelepipedum 18 libr. Lond. longit. quatuor pedum et 6 digitorum.

Instrumentum istud, cui ego veru substitui, *Michelo* fuit baculus ferreus, quo in Anglia vtuntur ad carbones in caminis agitandos et cuius pondus libram Lond. paululum superabat. Virtus magnetica, quam *Michel* chalybeae lamellae tribuit tritu per baculum praedictum ferreum, minor tamen erat ea, quam ego ipsi tribui per veru, lamella enim eius ponderis 80 granorum sustentabat tantum 4 drachmas post acquisitam tritu per baculum ferreum magneticam virtutem, cum mea lamella 69 granorum, 7 ad 8 drachmas ferri traheret.

EX-

EXPERIM. II.

Laminae talis abſque magnete magnetica virtute imbutae virtus attrahendi ferrum debilitabatur

I. Vehementi et ſaepius repetita proiectione in pavimentum, vel lapſu vehementi, ita vt tandem pauca tantum grana ferri attrahere valeret, virtus directrix tamen non periit.

II. Inflexionibus in multis locis factis, virtus directrix tamen non prorſus periit.

III. Candefactione in igne, qua virtus directrix etiam periit, ſemel tamen obſeruaui ſenſibilem virtutem directricem poſt candefactionem reſiduam, licet lamina in directione ad acum magneticam normali frigeſceret.

IV. Malleatione, qua virtus directrix tamen difficulter tollebatur.

V. Contrariis ductibus ſitu lamellae inuerſo per veru factis.

Hinc videre eſt, virtutem magneticam lamellarum absque magnete magnetica virtute imbutarum eadem ratione debilitari ac lamellarum magnete magnetica virtute imbutarum.

EXPERIM. III.

Si lamella, cuius virtus magnetica debilitata erat inſigniter vel vehementi lapſu vel inflexione, ope veru, vti dictum Exp. I. quater tantum ſtringebatur, reſtituebatur tota virtus attrahendi ferrum, quam antea habebat.

EXPERIM. IV.

Iis lamellis, quae candefactione in igne virtutem magneticam perdiderunt, difficilius tribuebatur et restituebatur magnetica virtus, quam politis non candefactis.

EXPERIM. V.

Cum contrariis ductibus situ lamellae inter parallelepipeda inuerso virtutem ipsi directricem adimere volebam ope veru, obseruaui ad tollendam magneticam virtutem requiri multo maiorem numerum ductuum, quam ad eam tribuendam. Quatuor enim sufficiebant ad tribuendam, si semel lamella magneticam virtutem acceperat (Exp. III.) et inflexione, lapsu vel contrariis ductibus perdiderat, dum centum non sufficiebant ad virtutem adimendam.

EXPERIM. VI.

Tab. VI. Fig. 6. Si loco ferreorum fulcimentorum *c* et *d* lignea fulcimenta adhibui, virtus tanta nullo modo tam paruo tempore lamellae potuit tribui, quanta si fulcimenta ferrea adhibita sunt.

Michel nullam mentionem facit fulcimentorum ferreorum *c* et *d*, vt probabile sit, ipsum ista non adhibuisse.

EXPERIM. VII.

Si quatuor lamellis *a b c d* dicta ratione Exp. I.
Fig. 7. magnetica virtute imbutis, aliam *e f*, quae nondum virtutem acceperat, inter ferrea parallelepipeda E D et F G super fulcimenta ferrea locabam et priores *a b c d* amplioribus

plioribus lateribus ſibi impoſitis ita coniungebam, vt duo boreales poli *a b* ex vno latere et duo auſtrales *c d* ex altero terminarentur, in eodem ferme plano, interpoſitoque ab altera extremitate fruſto ligni K, lamellas verticales *a b c d* horizontali *e f* ita imponerem, vt poli boreales verticalium lamellarum *g h* reſpicerent polum auſtralem ſubiacentis *e f* et poli auſtrales verticalium nim. *l m* polum borealem ſubiacentis *e f*, duceremque lamellas *a b c d* antro et retro ſaepius.

a) Horizontalis *e f* accipiebat (1) virtutem magneticam, quam antea non habebat, (2) virtutem maiorem, quam verticales acceperant ope veru.

b) Verticalium tamen virtus tali ratione debilitata eſt.

Michel contrarium afferit in tractatu laudato ſcil. creſcere tali permutatione lamellarum virtutem perpetuo vsque ad definitum gradum. Vel igitur ille non obſeruauit decrementum virtutis lamellarum verticalium, vel ego imitatus experimentum peccaui in aliqua circumſtantia.

EXPERIM. IX.

Debilitata lamellarum virtute, vt vix ſcrupulum ferri attraherent, iungebam *a b c d e f*, ita vt lamellae *f* extrèmitas *g* lineam circiter promineret, haec extremitas *g* trahebat ſtatim 7 drachmas, et prout laminae prominentis virtus minor erat et pondus ferri attrahendum maius, eo minor pars prominere debebat. Si omnes lamellae in eodem plano deſinebant, parum admodum trahebant.

EXPERIM. X.

Si lamellae virtutem inſignem habebant, vt ſeptem drach-

drachmas ferri ſuſtentarent, vnitis ita vt poli boreales deſinerent in eodem plano, et ferro iis admoto, attrahebant et ſuſtentabant quidem coniunctim ferrum, cuiuslibet tamen lamellae virtus inſigniter debilitabatur.

VI. Ergo debilitatur magnetica virtus lamellarum, ſi lamellae vnitis viribus ferrum trahunt. Confer Exper. II.

EXPERIM. XI.

Si parallelepipedum ex indurato chalybe politum longit. 6 ferme digitorum Lond. lat. dimidii digiti et craſſitiei 0. 166 dig. ſimili ratione inter parallelepipeda
TAB. VI. DE et FG locatum, vti lamellae ex chalybe molli
Fig. 6. Exp. I. ſtringebatur cum laminis ex chalybe molli virtute magnetica imbutis, ſimili ratione vti experimento
Fig. 7. VII. indicatum, tandem virtutem magneticam acquirebant, vt pondus octo drachmarum ferri attraherent nimirum non maius pondus, quam quod lamellae ipſae et veru trahebant. Laboraui multis modis, vt maiorem virtutem parallelepipedo communicarem, ſed fruſtra hucusque.

INQVI-

INQVISITIO IN DECREMENTA ET INCREMENTA CALORIS SOLIDORVM IN AËRE

AVCTORE

G. W. RICHMANN.

Maiorem et minorem corporum virtutem calorem retinendi consideraturus sum, quae sedulo distinguenda est a capacitate eorum maiori vel minori caloris: ea enim ipsa corpora, quae maioris caloris capacia sunt, minorem saepius virtutem calorem retinendi produnt, vti de mercurio constat, si cum aqua et aliis fluidis crassioribus confertur. Vltimam proprietatem, dum Physici nonnulli in corporibus offenderent, cum illa etiam priorem connexam esse asseruerunt. Obtinet hinc in multis scriptis Physicis propositio, corpora eo tardius definitum calorem assumere, quo densiora sunt, et eo tardius rursus calorem istum perdere. Alii simul respiciunt cohaerentiam, et credunt, cohaerentiam simul sumtam cum densitate efficere maiorem vel minorem virtutem calorem retinendi, et motui ex calore resistendi. De argento vivo ostendi, illud, licet fluidum sit densissimum, nihilo minus motui ex calore obedientissimum esse inter fluida crassiora. Solida nunc sub examen voco, et edoceor, idem obtinere, neque mobilitatem maiorem a calore (1) densitati minori, neque (2) cohaerentiae minori, neque (3) vtrique simul, neque (4) duritiei minori, neque tandem (5) omnibus simul, esse adscribendam. E re etenim vtique esse, et ad incrementum scientiae facere videtur, in proprietates corporum ita inquirere, vt definire valeamus, quid fieri debeat, ne ex propositionibus precario adsumtis errores in totum systema immaturo concludendi studio serpant et illud perturbent. Proprietatibus etiam accurate definitis legitimis consectariis veritates plures alias maiori cum certitudine eruere poterimus. Nunc apparatum et experimenta, quae hunc in finem institui, sine ambagibus describam.

TAB. VII. Fig. 1. 3. §. 1. Metallis sub examen vocatis, illis primo definitam temperiem conciliare constitui, et ea postea definitae temperiei aeris exponere, vt decrementa caloris conferre possem. Hinc fieri curaui (1) Globos A ex variis metallis cauitatibus cylindricis *a b*, recipiendis bulbis Thermometrorum *c d* aptis praeditos et ansis *e* et *f*, ex quibus globi suspendi possent. Diametri globorum erant 4 digit. Lond. et cauitatum cylindricarum diametri vnius digiti et profunditates etiam vnius digiti. (2) Afferruminari curaui tubulos *g b c b* ex lamella aurichalcea tenui, vt profunditates cauitatum fierent duorum digitorum. (3) Thermometra confecta sunt exacte harmonica bulborum exiguorum, vt hydrostatice examinata non maius volumen occuparent ac 20 circiter grana medica aquae.

EXPERIM. I.

Fig. 1. §. 2. Globo metallico A in aqua, in vase BCD, in furnulo collocato, ebulliente suspenso ex funibus *f k*, *e l*, aquae in vase BC immersi bulbum Thermometri *m n*, vt cognoscerem, vtrum ad 212 gradum argentum viuum adscenderet, siue ad summum ebullitionis aquae gradum.

gradum. Infuſa cauitati quolibet experimento eadem copia aquae et immerſo bulbo Thermometri *c d* notaui temperiem aquae in cauitate metallorum contentae. Ita obſeruaui, licet aqua ambiens vehementer ebulliret, vt mercurius gradum 212 Therm. F attingeret, mercurium Thermometri *c d* ad hunc gradum nulla ratione potuiſſe perduci, ebullitione interdum per horae ſpatium continuata. Subſtitit mercurius 6 ad 10 gradus infra 212 gr., et dum decreſcebat aquae ambientis temperies, ſimul mercurius in Thermometro *c d* deſcendebat. In ferreo globo temperies aquae ambientis erat conſtanter 212. gr. per dimidiam horam, et Thermometrum oſtendebat conſtanter 205 gr. Cum temperiem aquae ambientis decreſcere ſinebam

ad gr.	198	Thermometrum *c d* oſtendebat gr.	193
- - -	196	- - - - - -	190 $\frac{4}{10}$
- - -	187	- - - - - -	183 $\frac{2}{10}$
- - -	179	- - - - - -	174 $\frac{4}{10}$
- - -	163	- - - - - -	159 $\frac{6}{10}$
- - -	149	- - - - - -	147 $\frac{2}{10}$

In cupreo globo, cum temperies aquae globum ambientis decreſcebat

ad gr.	199	Thermometrum *c d* oſtendebat gr.	190
- - -	197	- - - - - -	189
- - -	186	- - - - - -	177
- - -	174	- - - - - -	167
- - -	173 $\frac{1}{2}$	- - - - - -	165
	Therm. *m n*		Therm. *c d*
ad gr.	159 $\frac{8}{10}$	- - - - - -	154
- - -	132 $\frac{8}{10}$	- - - - - -	130
- - -	123 $\frac{6}{10}$	- - - - - -	122

 Stan-

Stannum, plumbum, aurichalcum similiter examinaui et similia obseruaui, et semper discrimen inter calorem aquae ambientis et calorem aquae in cauitate metallorum contentae initio, vbi calor aquae ambientis erat vicinus gr. 212, obseruabatur. Differentia haec in metallis diuersis erat diuersa, diuersitatis tamen huius rationem habere non potui, quia globos aquae ebullienti simul immittere et Thermometra simul obseruare non potui. Huic enim rei apparatus meus non sufficiebat.

§. 3. Videtur exinde patere, metalla in aqua ebulliente, quae calorem celerius communicat cum aëre frigidiori superficiem contingenti, quam cum quibuslibet corporibus calidis, quibus contigua est, minorem temperiem habere ac aqua ipsa ambiens. Hoc phaenomenon similitudinem habet cum phaenomeno isto, quod G. E. Hamberger *describit in Elementis suis Phys.* §. 611. *Ed. alt.* dum scribit. *Peculiare quoque est phaenomenon, quod fundus aheni, in quo aqua ebullit, si ahenum subito ab igne auferatur, tamdiu nullum sensibilem caloris gradum possideat, quamdiu aqua ebullit; eo momento vero, quo ebullitio aquae cessat, insignem acquirat calorem.*

§. 4. Subnasci poterit circa Exp. I. cogitatio: 1) Aquam ipsam nunquam forte caloris 212 gr. capacem esse, sed Thermometrum a superfluis ex aqua adscendentibus particulis igneis affici ita, vt argentum viuum, quod maioris caloris capax est, ac aqua, adscendere possit ad gr 212.

2) Affici quidem metalla etiam ab istis particulis igneis adſcendentibus et nancisci maiorem calorem, quam aqua capax eſſet, non tamen poſſe communicare iſtum calorem aquae in cauitate contentae, quae iſtius caloris non capax eſſet, hinc neque Thermometrum poſſe affici, vt mercurius adſcendat ad gr. 212.

Videtur quidem (1) igneas particulas etiam ex metallo per aquam in cauitate contentam adſcendentes afficere debere Thermometrum et eleuare mercurium ad gr. 212; (2) mercurium Thermometri *m n*, quia continuo a particulis igneis ſuperfluis, quibus retinendis aqua non capax eſſet, afficeretur, adſcendere debere ad maiorem adhuc gradum, quam 212. ſi ratio praedicta obtineret. Vt tamen experimento nouo rationem phaenomeni explorarem, an valida eſſet, loco aquae, oleum oliuarum adhibui et cauitati metallorum infudi, quod perinde ac mercurius multo maioris caloris capax eſt, ac aqua, et phaenomenon idem obſeruaui, nimirum durante ebullitione adſcendit mercurius in Thermometro ab 205 gr. ad 206, et rurſus deſcendit ad eundem gradum, et hic adſcenſus et deſcenſus una quarta parte horae ſaepius obſeruatus eſt.

§. 5. Poſſet etiam disparitas attribui lamellae aurichalceae ex aqua prominenti, quae cum metallo connexa maiorem efficeret metalli ſuperficiem, et ita decrementum caloris progigneret, quod a calore aquae non reſarciri poſſet. Vt explorarem, an haec ratio obtineret, paruum Thermometrum fieri curaui, in quo terminus caloris aquae ebullientis notatus erat et infra hunc ter- TAB. VII. Fig. 2.

 minum

minum digitus Londinensis diuisus in 20 partes in scala lignea, et una talis pars erat quinque graduum. Tale Thermometrum aquae in cauitate metalli contentae immersi et ope suberis, per quod Thermometrum penetrabat, cauitatem cylindricam clausi contra aquae ambientis ingressum, vt nimirum submerso globo metallico et cylindrico tubulo, aquae omnis aditus in cauitatem metalli prohiberetur. Ne vero etiam vapores in cauitate metalli retenti calorem excitarent maiorem, veluti in machina Papiniana, per tubulum vitreum *op* per suber transmissum iis exitum concessi. His praeparatis immersi globum metalli, et phaenomenon idem obseruaui, substitit nimirum mercurius in Thermometro plus quam dimidiam lineam i. e. plus quam quinque gradus infra terminum ebullitionis, licet aqua per horae spatium in continua ebullitione esset. Aqua etiam ipsa in phiala ebullienti aquae immersa non ebullit, sed ad minorem gradum incalescit, vt hinc concludere sit, aquam ebullientem, dum calorem communicat celerrime cum aëre contiguo frigidiori, cum phiala aeque ferme calida eum non communicare posse, bulbum Thermometri tamen ob volumen paruum et mobilitatem mercurii a calore ad gr. 212 ebullientis aquae perduci posse.

EXPERIM. II.

§. 6. Globis A ex aqua ebulliente simul extra-
TAB. VII. ctis et suspensis in temperie aeris per Therm. *m n* no-
Fig. 3. tata, notaui tempora decrementi caloris et gradus temperiei, quos Thermometra *c d* aquae in cauitatibus globorum stagnanti immersa prodebant. In prima columna sequentis Tabellae exstant tempora, vnitas quinque

que minuta prima valet. In ſecunda columna ſiſtuntur gradus caloris cupri reſidui. In tertia ſunt gradus ferri reſidui et in quarta gradus ſtanni reſidui. In quinta aëris, refrigerantis temperies notatur. Notandum tamen eſt circa hoc experimentum, adhibitos fuiſſe globos, qui non exactiſſime fuerunt eorundem voluminum. Volumina cupri, ferri et ſtanni poſt examina hydroſtatica enim ſe habebant; vti 8757, 9124, 8834.

Tempora	II♀	III♂	IV♃	V. aeris Temper.
0	180	180	180	65 gr.
2	174	172	161	63
4	160	159	142	—
$7\frac{2}{5}$	143	142	120	—
8	140	139	116	—
10	133	132	107	—
12	124	124	$98\frac{1}{2}$	$60\frac{1}{2}$
14	118	118	92	60
16	113.5	112.5	88.5	—
18	107.5	107.5	83.5	—
20	104	103	80	—
28	89.5	90	71	—
30	88	88	70	59.5
32	84.2	85	68.5	60
36	82	81.5	66.5	—
$37\frac{1}{5}$	80	80	66	—
40	79.5	78.3	65	—
44	75.5	76	64	—
52	72.2	72	63	—
64	68	68	62	—
80	65	64.5	61.5	—

§. 7.

§. 7. Stannum ergo a gr. 142 ad 80, 80 min. pr: ferrum ab 142 ad 80, 151 min. pr. et cuprum ab 142 ad 80 eodem tempore peruenit, ac ferrum.

Corol. 1. Cum volumen cupri sit minus quam volumen stanni (§. praeced.) et nihilo minus decrementum caloris cupri tardius fiat, quam decrementum caloris stanni, tardius adhuc idem decrementum caloris pati debet cuprum, si cum stanno idem volumen habet.

Corol. 2. Cum volumen cupri fuerit minus volumine ferri (§. praec.) et decrementa aequalia caloris vtrumque metallum passum sit, cuprum minora decrementa eodem tempore pati debet quam ferrum, si cum ferro habet idem volumen.

Corol. 3. Cum stannum ob minus resp. ferri volumen maius decrementum caloris passum esse dici possit quam ferrum, nondum ex his obseruationibus concludere licebit, stannum citius frigescere, quam ferrum.

EXPERIM. XI.

§. 8. Detecta disparitate globorum metallicorum omnes exactissime aequales fieri curaui et eadem ratione examinaui cuprum, ferrum, plumbum.

Temp.		II ♀		III ♂		IV ♄		V temper. aër.
0	circiter	194	circ.	194	circ.	194		57
$1\frac{2}{5}$	-	174	-	172.4	-	148	-	—
$1\frac{3}{5}$	-	$172\frac{4}{18}$	-	171.2	-	146	-	—
$3\frac{2}{5}$	-	162	-	159.8	-	129	-	—
$3\frac{4}{5}$	-	160	-	158	-	127	-	—

Temp.	II ♀	III ♂	IV ♄	V. temper. aer.
3 $\frac{4}{5}$	circiter 160	circ. 158	circ. 127 -	—
10	- 131	- 129.2	- 92 -	—
13	- 121	- 119	- 83 -	—
16 $\frac{2}{5}$	- 112	- 109.4	- 77 -	—
20 $\frac{4}{5}$	- 103	- 100	- 71 -	—
21 $\frac{3}{5}$	- 101	- 98.6	- 70 -	60
22	- 100	- 98	- 70 -	—
25	- 94	- 91.4	- 67 -	—
28	- 90	- 87.8	- 66 -	—
37	- 82	- 78.8	- 62 -	—
46	- 76	- 71.6	- 61 -	62
51	- 74	- 70	- 60 -	—
85	- 63	- 60	- 59 -	—

§. 9. Cuprum ergo ab 142.4 gr. ad 100. centum et duobus minutis primis, ferrum 97 min. pr. peruenit. Plumbum ab 129 gr. ad 70 quadraginta et uno min. primo, ferrum ab 129 ad 70 gr. ducentis et quinque minutis primis acceſſit.

Coroll. 1. Cuprum hinc et ferrum minora decrementa caloris patiuntur eodem tempore quam plumbum.

Coroll. 2. Ferrum paulo maiora decrementa caloris patitur, quam cuprum eodem tempore.

EXPERIM. IV.

§. 10. Aurichalcum cum cupro examinans erat:

 Tem-

Tempore	Aurich. calor.	Cupri calor.	Aeris calor
0	$189\frac{1}{2}$ circ.	$189\frac{1}{2}$ circ.	63
2	175	174	—
3	169	169	61
$3\frac{1}{2}$	164	164	—
5	156	156	—
8	142.5	142.5	—
12	129	129	—
15	119	118	—
22	105	104	—
54	75	74	—

§. 11. *Coroll.* 1. Cuprum ergo et aurichalcum exactiſſime aequalia decremenra caloris aequalibus temporibus patiuntur in eadem temperie aeris.

Coroll. 2. Aurichalcum ergo tardius, quam plumbum, ſtannum et ferrum frigeſcit. (Exper. II. Coroll. 1. 2. Exper. III. Coroll. 1. 2.) Quod aurichalcum tardius frigeſcat, quam ferrum ex ſequentibus etiam obſeruationibus patebit, et hinc rurſus liquet, ferrum etiam pati maiora decrementa caloris quam cuprum, quod cum aurichalco aequalia patitur (per §. 10.), confirmaturque Coroll. 2. §. 9.

EXPERIM. V.

§. 12. Aurichalcum cum ferro examinans erat:

Tempore.	Calor Aurich.	Ferri Calor.	Aeris calor
0	195 circ.	195 circ.	64
$8\frac{1}{2}$	147	139	—

Tem-

Tempore.	Calor Aurich.	Ferri calor.	Aeris calor.
$10\frac{4}{5}$	139	131	—
$11\frac{4}{5}$	136	126. 5	—
$14\frac{4}{5}$	127	118. 4	—
$16\frac{2}{5}$	122	114	—
$19\frac{2}{5}$	114. 5	106. 7	—
$22\frac{2}{5}$	108	100. 4	—
$22\frac{3}{5}$	$107\frac{3}{4}$	100.	—
27	101	93. 2	—
$27\frac{2}{5}$	100	92. 6	—
30	97	88. 7	—
$34\frac{3}{5}$	91. 5	84. 2	—
$37\frac{3}{5}$	88	80. 6	—
$39\frac{1}{5}$	86. 5	79. 5	—
$42\frac{1}{5}$	84. 5	77	—
$45\frac{1}{5}$	82. 2	75. 2	—
$46\frac{4}{5}$	81	73	—
$49\frac{4}{5}$	79	72. 5	—
$52\frac{4}{5}$	77. 5	71. 6	—
$57\frac{2}{5}$	75	69. 8	—
72	70	66. 8	—

§. 13. *Coroll.* Aurichalcum ergo 83 min. pr. ab 139 ad gr. 100. et ferrum ab 139 ad gr. 100, 69 minutis primis accessit. Celerius ergo frigescit ferrum quam aurichalcum, conseq. celerius quam cuprum (§. 11. Coroll. 1).

EXPERIM. VI.

§. 14. Stannum et plumbum examinans primo cum globis non exacte aequalibus experimentum institui, erat enim globus plumbeus paulo maior, et inueni decrementa ferme aequalia, globo plumbeo vero aequali reddito globo ſtanneo et omnibus reliquis inueni

Temp.	Stanni calorem.	Plumbi cal.	Aeris cal.
0	circiter 180	circ. 180	64.
1 1/5	173	162	—
1 2/5	171	158	—
1 3/5	169	155	—
1 4/5	166	151	—
2	164	148	—
2 1/5	162	145.5	—
2 2/5	160	142	—
2 3/5	159	140	—
3	154	135	—
4	146	124	—
5	239	116	—
8	124	100	—
9	119	97	—
10	114	93	—
13 1/5	103	83	—
14 2/5	100	81	—
16 3/5	95	77.5	—
67 4/5	65	62	—

§. 15. Plumbi calor ergo ab 162 ad 100 triginta quatuor minutis primis et ſtanni ab 162 ad 100 in eadem temperie aeris 61 min. prim. decreuit.

Coroll. 1. Patitur ergo plumbum maiora decrementa caloris, quam ſtannum.

Coroll.

Coroll. 2. Cum ferri calor ab 139 ad 100 sexaginta nouem min. pr. decrescat (Exper. V) in temperie aeris 64 gr: et stannum idem decrementum in eadem temperie quadraginta septem minutis primis patiatur (per Exper. praeced.), ferrum etiam tardius frigescit, quam stannum.

§. 16. *Coroll.* 3. Aurichalcum ergo et cuprum maximam, postea ferrum, deinde stannum, et tandem plumbum virtutem minimam retinendi calorem habet inter examinata haec corpora.

§. 17. Ex his obseruationibus rationem decrementorum caloris praedictorum metallorum sub certa temperie aeris erui posse accurate, promittere haud possum, quia uno Thermometro post alterum obseruato tempus praeterlapsum est, vt hinc qualibet obseruatione dimidii gradus errorem forte non euitauerim et vel in excessu vel defectu peccauerim. Accedit, Thermometra fuisse angustioris scalae et difficultatem accurate obseruandi auxisse. Constitutionem denique aeris ratione siccitatis et tranquillitatis forte fuisse diuerso tempore diuersam. Juuat tamen adposuisse, quodcunque ex obseruationibus deduci potuit sequenti tabula. Decrementorum caloris initialium propterea rationem non habui, quia initio obseruationum Thermometrorum velocitas nimis prohibuit, quo minus tempus, quo mercurius eodem tempore in Thermometris stagnabat, notari potuerit, et sic ipsum initium incertum sit.

In tabulae sequentis Columna prima exstat corpus examinatum: in secunda Experimentum, ex quo erutum eſt decrementum caloris: in tertia, gradus caloris, à quo mercurius Thermometri deſcendere incepit: in quarta differentia inter temperiem metalli et aeris refrigerantis: in quinta gradus, quos quinque minutis primis mercurius abſoluit in temperie aeris, quae obtinebat: in ſexta gradus, quos mercurius abſoluere debuiſſet ſub differentia 119.5 gradus inter temperiem metalli et aeris eodem tempore quinque minutorum primorum. Praecedit omnes columnas columna, quae numerum caſuum adductorum exhibet.

I	II	III	IV	V	VI
1. ♀	Exp.III.	174.0	117.0	6.0 $\mp$	6. 1 $\mp$
2. ♀	Exp.III.	100.0	40.0	2.0 $\mp$	6. 0 $\mp$
3. ♂	Exp.III.	172.4	115.4	6.3 $\mp$	6. 5 $\mp$
4. ♂	Exp.III.	98.0	38.0	2.2 $\mp$	6. 9 $\mp$
5. ♄	Exp.III.	148.0	91.0	9.5 $\mp$	12. 4 $\mp$
6. ♄	Exp.III.	70.0	10.0	1.0 $\mp$	11.95 $\mp$
7. ♃	Exp.VI.	173.0	109.0	11.0 $\mp$	12. 0 $\mp$
8. ♄	Exp.VI.	162.0	98.0	16.5 $\mp$	18. 0 $\mp$
9. Aurich.	Exp. IV.	175.0	112.0	6.0 $\mp$	6. 29 $\mp$
10. ♂	Exp. V.	139.0	75.0	4.0 $\mp$	6. 37 $\mp$
11. ♃	Exp. V.	103.0	39.0	2.5 $\mp$	7. 60 $\mp$
12. ♃	Exp. V.	119.0	55.0	5.0 $\mp$	10. 8 $\mp$
13) Aurich.	Exp. V.	81.0	17.0	0.66 $\mp$	4. 68 $\mp$

Si ſecundum legem decrementi caloris ex aequatione $\frac{(a-x)^n}{a^{n-1}} = c$, (vbi ponitur a differentia inter temperiem corporis et aeris initialem et n tempus refrigerii, c vero differentia inter temperiem corporis et aeris poſt tempus n) deducitur formula ad decrementum x, quod

corpus

corpus quinque minutis primis patitur, eruendum, habetur $l(a-x) = \frac{lc + (n-1)la}{n}$. Secundum hanc formulam inveni, (Exper: III. ſumta pro cupro $a = 117$ et $c = 46$ et $n = 19\frac{2}{5}$, pro ferro $a = 115.4$ et $c = 36$ $n = 19\frac{2}{5}$, pro plumbo $a = 910$, $c = 14$ et $n = 19\frac{2}{5}$) decrementa caloris quinque minutis primis ſub eadem differentia inter temperiem corporum et aeris ſcil. ſub diff. 119. 5 gr.

pro	cupro	ferro	et plumbo
vti	6. 20	6. 55	11. 75

Similiter Experimento V collato cum Experimento VI. (ſumta pro aurichalco Exper. V. $a = 83.0$, $c = 43.75$ et $n = 13\frac{4}{5}$ et ſumta pro ſtanno $a = 109.0$, $c = 36.0$ et $n = 13\frac{1}{5}$) inueni decrementa caloris quinque minutis primis ſub eadem differentia inter temperiem corporis et aeris.

pro	aurichalco	ſtanno
vti - - -	6. 20 - - -	8. 57

hinc pro cupro, aurichalco, ferro, ſtanno et plumbo vti 6. 20, 6. 20, 6. 55, 8.57, 11.75. Hanc rationem tamen accuratam eſſe aſſerere non audeo.

§. 18. Cum ergo, rationem veram decrementorum caloris examinatorum metallorum accurate praedicta ratione erui poſſe, non crediderim, et ex antecedentibus tantum ſequatur aurichalcum et cuprum minimum et deinde ferrum, poſtea ſtannum et tandem plumbum maximum decre-

decrementum caloris pati ſub iisdem circumſtantiis, non vero quantum vnius metalli decrementum caloris decrementum caloris alterius metalli ſuperet, vt exactius compararem virtutes retinendi calorem horum metallorum Thermometro ſcalae amplioris adhibito, in qua gradus quilibet diuiſus erat in quinque ſatis diſtinctas partes, (pars enim vna aequabat $\frac{1}{3}$ lin. Lond.) omnia metalla examinare conſtitui continuo vnum poſt alterum et tempus accuratiſſime ſecundum minuta ſecunda obſeruare, quo quodlibet metallum decrementum caloris pateretur in temperie certa aeris.

EXPERIM. VII.

§. 19. Aurichalcum examinans in temperie aeris 60 gr. et vnius dimidii gradus erat temperies

Tempore			
0 - - -	180. gr.	poſt 4 min. pr. -	175. 2 gr.
poſt 1 min. pr.	778. 8.	— — 5 - -	173. 8 gr.
— 2 - - -	177. 6.		
— 3 - - -	176. 4.		

EXPERIM. VIII.

§. 20. Cuprum examinans in temperie aeris 57.5 gr. erat temperies

poſt tempus		poſt tempus	
- - 0 min. pr.	180. 6	- - 6 min. pr. - -	173. 1gr.
- - 1 - -	179. 4	- - 7 - - - -	171. 8.

poſt

post tempus		post tempus	
2	178. 2	8	170 8
3	177.	9	169.6
4	175. 6	10	168. 2
5	174. 4		

Corol. Ab 177 gr. ad 170 $\frac{4}{5}$ per 6 $\frac{1}{5}$ gradus, differentia inter temperiem corporis et aëris initiali existente vti in praecedente experimento, decreuit cupri calor quinque minutis primis.

EXPERIM. IX.

§. 21. Ferrum examinans in temperie aëris 57. 5 gr. erat

tempore	temperies	tempore	temperies
0 - -	180 erat	6 min. pr.	171.7
1 min.pr.	178.6	7 - -	170.4
2 - -	177.2	8 - -	169.2
3 - -	175.8	Ergo $7\frac{1}{7}$ - -	170.$\frac{8}{35}$
Ergo $2\frac{1}{7}$ min.	177	erat 9 - -	167.8
4 - -	174.4	10 - -	166.6
5 - -	173		

Corol. Ferrum hinc a gr. 177 ad gr. 170 $\frac{8}{35}$ per 6. $\frac{4}{5}$ gradus, differentia inter temperiem corporis et aëris initialem existente vti in praecedentibus experimentis VIII. IX, peruenit quinque min. pr.

EXPERIM. X.

§. 22. Stannum examinans in temperie 60 $\frac{1}{2}$ gr. erat

tempore	temperies	tempore	temperies
0 - - -	180.	8 - - -	167. 8
1 - - -	177. 8	9 - - -	165. 4
2 - - -	175. 6	10 - - -	163.
3 - - -	173. 6	11 - - -	160. 8
4 - - -	171. 8	12 - - -	158. 4
5 - - -	169. 6,		

Corol. Peruenit ergo ſtannum a gr. 180 ad gr. 169 $\frac{3}{5}$ per 10 $\frac{2}{5}$ gradus, eadem exiſtente differentia initiali inter temperiem corporis et aëris ac in praecedentibus experimentis, quinque minutis primis.

E X P E R I M. XI.

§. 23. Plumbum examinans in temperie aeris 60 et vnius dimidii gradus erat

tempore	temperies	tempore	temperies.
0 - - -	180.	7 - - -	159.
1 - - -	176. 8	8 - - -	156. 4
2 - - -	173.	9 - - -	153. 8
3 - - -	170.	10 - - -	151. 2
4 - - -	167.	12 - - -	146. 6.
5 - - -	164. 4.		

Corol. Peruenit plumbum a gr. 180 ad 164. 4, eadem exiſtente differentia initiali inter temperiem plumbi et aëris, vti in praecedentibus experimentis, per 15. 6 gr. quinque minutis primis.

§. 24.

§. 24. Fuerunt ergo decrementa caloris quinque minutis primis, differentia inter temperiem corporum initialem et aëris existente 119. 5 gr. Thermometro F indicata,

Aurichalci,	Cupri,	Ferri,	Stanni,	Plumbi.
vti 6. 2 gr -	6.2 gr.	6.8 gr. -	10. 4 gr.	15.6 gr-
S. vti 10 -	10 -	11 -	17 -	25 ferme.

§. 25. Si confero haec cum tabula ex obseruationibus deducta (§ 17); paruo errore qualibet obseruatione admisso, qui vnum gradum facile superare potuit, inprimis iis casibus, vbi velocitas Thermometri adhuc fuit magna, casu 5, 7, 8, nulla adest repugnantia. Vt hoc euidenter pateat in sequenti Tabula, in prima columna sisto numerum casuum Tab. §. 17. in secunda columna errorem in obseruando addendum vel subtrahendum suppositum; in tertia columna decrementum caloris ante correctionem sub differentia inter temperiem metalli et aëris 119. 5 gr. in quarta decrementum caloris post correctionem, sub differentia eadem:

I.	II.	III.	IV.
(1.) ♀ - -	+ 0. 1 - -	6.1. - - -	6.2.
(2.) ♀ - -	+ 0.067 - -	6.0. - - -	6.2.
(3.) ♂ - -	+ 0. 29 - -	6.5. - - -	6.8.
(4.) ♂ - -	− 0. 31 - -	6.9. - - -	6.8.
(5.) ♄ - -	− 2. 4 - -	12.4 - - -	15.6
(6.) ♄ - -	+ 0. 3 - -	11.95 - -	15. 6
(7.) ♃ - -	− 1. 37 - -	12 - - -	10. 4

I.		II.	III.	IV.
(8.)	♄	−2. 2	18	15. 6
(9.)	Aurich.	−0. 9	6.29	6. 2
(10.)	♂	+0. 27	6.37	6. 8
(11.)	♃	+0. 9	7.66	10. 4
(12.)	♃	−0. 22	10. 8	10. 4
(13.)	Aurich.	+0. 22	4.68	62

§. 26. Nunc ſuperſedere poſſem labori inquirendi in incrementa caloris ſolidorum in aere conſtantis temperiei, quia, vbi de decremento et incremento caloris fluidorum tractaui, oſtendi, incrementa caloris pariter ſe habere, quam decrementa; vt tamen in hac re nihil omittatur, inſtitui etiam experimenta ſequentia.

EXPERIM. XII.

§. 27. Aurichalceum globum ſuſpendi foras in temperie aeris aliquot graduum infra gr. 32 aquae gelaſcentis, ſpirituque vini cauitati cylindricae infuſo, Thermometrum immerſi ſpiritui vini et exſpectaui, donec globus temperiem aeris acquireret. Deinde portaui globum in muſeum et in temperie aeris 62 graduum ſuſpendi et peruenit a gradu 32 calor globi

			temper. aëris
poſt	3 min. prim. ad gr.	33	62
-	5 - - - ad gr.	$33\frac{1}{2}$	—
-	6 - - - - -	34	—
-	10 - - - - -	$35\frac{1}{2}$	—
-	15 - - - - -	37	—

poſt

					temper. aëris
post 23	min. prim. ad gr.	39 ½	-	-	62
- 99	- - - - -	51	-	-	—
- 101	- - - - -	51.2	-	-	—
- 110	- - - - -	51.8	-	-	—
- 114	- - - - -	51.9	-	-	—
- 120	- - - - -	52	-	-	—
- 125	- - - - -	52.2	-	-	—
- 131	- - - - -	52.6	-	-	—
- 136	- - - - -	52.7	-	-	—
- 143	- - - - -	53	-	-	—
- 166	- - - - -	54	-	-	—
- 189	- - - - -	55	-	-	—
- 240	- - - - -	57.3	-	-	—

Aurichalcum ergo initiali differentia inter temperiem eius et aeris existente 30 grad. a gr. 32 ad gr. 51 incrementum caloris 19 graduum obtinuit, in aere eiusdem ferme temperiei 99 minutis primis.

EXPERIM XIII.

§. 28. Cuprum simili ratione examinaui, quod in temperie aeris 60 ½ gr. peruenit a gr. 28.6.

		Temp.aër.			Temp.aër.
post 2 min.pr. ad gr.	30	60 ½	post 8 min.pr. ad gr.	32	60 ½
3 - - -	30.5	—	9 - -	32.3	—
6 - - -	31.5	—	15 - -	34.2	—

			Temp. aëris				Temp. aëris
post 23	-	36.4 -	60.5	post 89	-	48.6 -	61.5
28	-	38 -	—	- 97	-	49. -	62
33	-	39.2 -	—	- 117	-	50.6 -	61.5
38	-	40.5 -	—	- 147	-	52.1 -	—
43	-	41.5 -	—	- 157	-	52.8 -	—
48	-	42.4 -	—	- 167	-	53.6 -	—
53	-	43.4 -	61	- 187	-	54.6 -	—
68	-	45.7 -	—	- 197	-	54.8 -	—
73	-	46.4 -	—	- 202	-	55 -	—
78	-	47 -	61				

Cuprum ergo initiali temperie existente 30 ½ gr. in temperie aëris 60 ½ gr. quae parum postea creuit et incrementa caloris cupri hinc auxit, incrementum caloris 19 graduum 94 min. primis obtinuit.

E X P E R I M. XIV.

§. 29. Ferrum in temperie aëris 61 gr. peruenit a gradu 25. 2.

				Temp. aër.					Temp. aër.
post 5 min. pr.	ad gr.		27. 7.	61.	post 20	ad	gr. 34. 5		61
10	-	-	30.4	—	25	-	-	36.1	—
12	-	-	31.0	—	30	-	-	37.8	—
15	-	-	32.6	—	35	-	-	39.2	—

post

					Temp.aër.					Temp.aër.
post 40 min. pr. ad gr.			40.5.		$61\frac{1}{2}$	post 80 min. pr. ad gr.			48.0	62
45	-	-	41.7		—	85	-	-	48.5	—
50	-	-	43.0		—	90	-	-	49.1	—
55	-	-	43.9		—	95	-	-	49.6	—
60	-	-	44.9		—	98	-	-	50	—
65	-	-	45.7		—	100	-	-	50.2	—
70	-	-	46.5		—	105	-	-	50.5	—
75	-	-	47.2.		62					

Ferrum igitur in temperie aeris 61 gr. a gradu 31, initiali differentia inter temperiem corporis et aëris existente 30 gr. ad gradum 50 per 19 gradus incaluit 86 min. prim. acceleratum tamen parum est incrementum caloris temperie aëris crescente.

EXPERIM. XV.

§. 30 Stannum in temperie aeris 61. gr. a gradu 31. peruenit initiali differentia inter temperiem stanni et aeris existente 30. gr.

								Temp.aër.
Post 5 min. pr. ad gr.				34.7	-	-	-	61
- - 9	-	-	-	26.4	-	-	-	—
- - 16	-	-	-	40.0	-	-	-	—
- - 24	-	-	-	43.3	-	-	-	—
- - 29	-	-	-	45.	-	-	-	61.5
- - 35	-	-	-	46.7	-	-	-	—
- - 45	-	-	-	48.8	-	-	-	—
- - 49	-	-	-	49.4	-	-	-	62

Post

								Temp.aer.
post	52	min.	pr.	ad	gr.	50	- -	61
-	55	-	-	-	-	50.4	- -	—
-	60	-	-	-	-	51	- -	—
-	70	-	-	-	-	52	- -	61.5
-	80	-	-	-	-	52.6	- -	—
-	90	-	-	-	-	53.1	- -	62
-	100	-	-	-	-	53.8	- -	—
-	125	-	-	-	-	55.6	- -	—

Stannum ergo initiali temperie existente 31. gr. in temperie aeris 61 gr. quae vero deinde aucta est et incrementum caloris stanni accelerauit, 52 min.prim. a gr. 31 ad 50 per 19 gradus accessit.

E X P E R I M. XVI.

§. 31. Plumbum in temperie aeris 58 gr. peruenit a gradu 28

			Temp.aër.				Temp.aër.
Post 5 min. pr. ad gr.		31.8	58	Post 39 min. pr. ad gr.		46.6	59
- 10	- -	346.	—	- 42	- -	47.2	—
- 15	- -	37.2	—	- 46	- -	48.1	—
- 20	- -	39.8	59	- 48	- -	48.4	—
- 24	- -	41.6	—	- 58	- -	49.6	—
- 28	- -	43.2	—	- 68	- -	50.8	—

Plumbum ergo initiali temperie aeris existente 58 gr. à gr. 28 ad gr. 47 per 19 gr. quadraginta duobus minutis primis accessit accelerato parum incremento caloris per temperiem aeris auctam.

§. 32.

§. 32. Vt perſpiciamus, vtrum haec conſpirent cum iis, quae de decrementis calorum oſtendi, ſecundum legem decrementi et incrementi caloris fluidorum has obſeruationes cum antecedentibus conferre iuuabit. Debent ſecundum hanc legem decrementa et incrementa caloris in aequalibus temporibus paruis eſſe in ratione compoſita incrementorum vel decrementorum initialium et differentiarum inter temperies reſiduas et temperiem aeris. Vel, ſi ſecundum inquiſitionem in legem incrementi et decrementi caloris, differentia inter temperiem corporis et aëris ponatur a, decrementum vel incrementum caloris tempore paruo (1) ſub hac differentia b, erit decrementum vel incrementum poſt tempus $n = \frac{b(a-b)^n}{a^{n-1}}$. Et pro alio metallo erit poſt tempus $m = \frac{B(a-B)^m}{a^{m-1}}$. Erunt ita decrementa et incrementa pro metallis diuerſis, vti $\frac{b(a-b)^n}{a^{n-1}} : \frac{B(-B)^m}{a^{m-1}}$ in genere. Re vera, ſecundum legem decrementi et incrementi caloris, debent eſſe decrementa et incrementa caloris, vti $\frac{b(a-b)^n}{a^n} : \frac{B(a-B)^m}{a^m}$, at ratio $\frac{(a-b)^n}{a^n} : \frac{(a-B)^m}{a^m}$ non differt a ratione $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ ad $\frac{(a-B)^m}{a^{m-1}}$. Cum nunc $b:B$ denotent decrementa vel incrementa ſub aequalibus circumſtantiis, ſumamus ea ex Tabula §. 24. Ratio $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} : \frac{(a-B)^m}{a^{m-1}}$ vero exhibetur in Experimentis XII. XIII. XIV. XV. XVI. vbi differentiae inter temperiem corporis et aëris his formulis expreſſae poſſunt haberi.

Si Aurichalcum cum cupro confertur, eſt $b = B = 6.2$ gr. Sumatur $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ pro aurichalco $62-32$ et $\frac{(a-b)^m}{a^{m-1}}$ pro cupro $60.5 - 28.6 = 31.9$, erit ergo decrementum vel incrementum caloris aurichalci, ad decrementum vel incrementum caloris cupri 5 min. pr. $= 300 : 319. = 1\frac{2}{3}$. gr. : $1\frac{23}{30}$. ſecundum obſeruationes eſt $= 1\frac{2}{3} : 2.4$, differentia inter obſeruationes et calculum eſt 0.64. gr.

Si aurichalcum cum ferro confertur, eſt $b : B = 6.2 : 6.8$. Sumatur $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ pro aurichalco, vt ante, $\frac{(a-B)^m}{a^{m-1}}$ pro ferro $61.0 - 25.2$. Eſt igitur incrementum caloris pro aurichalco ad incrementum caloris pro ferro quinque min. primis $= 1\frac{2}{3} : 2.18$. per obſeruationes eſt, vti $1\frac{2}{3}$ ad 2.5. differentia ergo inter calculum et obſeruationes eſt 0.32 gr.

Si aurichalcum cum ſtanno confertur, et pro aurichalco ponuntur omnia, vt ante, pro ſtanno vero $B = 10.4$, et $\frac{(a-B)^m}{a^{m-1}} = 30.0$, erit incrementum caloris aurichalci ad incrementum caloris ſtanni, vti $1\frac{2}{3} : 3.79$. et per obſeruationes eſt, vti $1\frac{2}{3} : 3.7$. differentia inter obſeruationes et calculum eſt 0.91. gr.

Si

Si aurichalcum tandem cum plumbo confertur et pro aurichalco ponuntur omnia, vti ante, et pro plumbo differentia inter temperiem plumbi et aëris, vti pro aurichalco 30.0, pro plumbo $B = 15.6$. erit hinc incrementum caloris aurichalci ad incrementum caloris plumbi, vti $1\frac{2}{3}$ ad 4.16, per obſeruationes eſt, vti $1\frac{2}{3}$: 3. 8. differentia hinc eſt 0. 36. gr.

Summam conuenientiam inter obſeruationes et calculum non videmus, quia ſtatus aëris non ſemper fuit idem. Aer ſiccus et tranquillus aliter calefacere debet corpora, ac humidus et agitatus.

§. 33. Collatis praemiſſis obſeruationibus omnibus luculenter patet, decrementa et incrementa caloris:

1.) Non ſequi rationem inuerſam denſitatum.

a) Plumbum inter examinata metalla denſiſſimum decrementa maiora paſſum eſt, quam reliqua.

b) Cuprum et aurichalcum aequalia exacte decrementa, et incrementa etiam ferme aequalia paſſa ſunt, aequalibus temporibus, licet denſitate differant.

c) Ferrum a cupro et aurichalco multo magis denſitate diſcrepat, quam a ſtanno, et nihilo ſecius decrementa et incrementa caloris ferri recedunt magis a decrementis et incrementis caloris ſtanni, quam a decrementis et incrementis caloris cupri et aurichalci, quibus tantum non aequalia obſeruantur.

2.) Non ſequi rationem inuerſam cohaerentiarum abſolutarum, quae ſecundum(*) P. van Muſchenbroek ſunt pro cupro, aurichalco, ferro, ſtanno, plumbo, vti 29925, 36000, 45000, 4900, 2925; decrementa et incrementa caloris vero ſunt, vti

62, 62, 68, 104, 156.

(*) vid. diſſertationes Phyſ. Exper.

3.) Neque rationem compositam, ex praedictis; deberent enim decrementa et incrementa tali ratione esse pro cupro, aurichalco, ferro, stanno, plumbo, vti $\frac{1}{2602475}$, $\frac{1}{2880000}$, $\frac{1}{3420000}$, $\frac{1}{3577000}$, $\frac{1}{328775}$.
et sunt re vera,
vti $\frac{1}{2662475}$, $\frac{1}{2602475}$, $\frac{1}{2365886}$, $\frac{1}{1530867}$, $\frac{1}{131490}$.

a) Ergo decrementum et incrementum caloris aurichalci minus inuenitur decremento et incremento caloris cupri, cum per obseruationes aequalitas inter decrementa et incrementa caloris in vtroque metallo adsit.

b) Decrementum et incrementum caloris cupri et aurichalci maius inuenitur decremento et incremento caloris ferri contra obseruationes.

c) Decrementum et incrementum caloris stanni quadruplo maius inuenitur decremento et incremento caloris per obseruationes.

d) Decrementum et incrementum caloris plumbi $2\frac{1}{2}$ vicibus minus inuenitur decremento et incremento per obseruationes.

e) Comparatis duorum quorumcunque metallorum incrementis et decrementis caloris per calculum, cum decrementis et incrementis caloris per obseruationes discrepantia insignis apparet.

4.) Non sequi rationem inuersam duritierum; ferrum enim maiorem duritiem habet, quam cuprum et aurichalcum, et nihilo secius maiora decrementa et incrementa caloris patitur, quam cuprum et aurichalcum.

5)

5) Neque tandem sequi rationem compositam, ex omnibus recensitis rationibus. Quodsi enim secundum Muschenbroek (cit. loco) ponantur durities:
pro cupro, aurichalco, ferro, stanno, plumbo,
vti 11278, 39000, 80575, 4550, 2304,
erunt decrementa et incrementa caloris per calculum, pro cupro, aurichalco, ferro, stanno, plumbo, ferme
vti $\frac{1}{312}$, $\frac{1}{11232}$, $\frac{1}{27581}$, $\frac{1}{161}$, $\frac{1}{75}$, et sunt per obseruationes,
vti $\frac{1}{312}$, $\frac{1}{312}$, $\frac{1}{283}$, $\frac{1}{155}$, $\frac{1}{124}$.

a) Ergo cupri decrementum et incrementum caloris 36ies maius inuenitur, quam aurichalci, et 88ies maius, quam ferri.

b) Stanni decrementum et incrementum caloris invenitur duplo ferme maius, quam cupri, et 70ies fere maius, quam aurichalci, et 171ies maius, quam ferri.

c) Plumbum quadruplo maius decrementum et incrementum caloris pati deberet, quam cuprum, et 150ies ferme maius, quam aurichalcum, et 376ies maius, quam ferrum, et 2 $\frac{11}{75}$ vicibus maius, quam stannum. Haec omnia repugnant valde obseruationibus, vnde apparet, nondum rationem virtutis maioris retinendi calorem ex hisce dari posse, propositionesque in scriptis non nullis physicis precario assumtas esse, quibus asseritur, vel densitatem maiorem, vel cohaerentiam maiorem, vel vtramque simul, vel duritiem maiorem, vel omnes has proprietates simul, efficere virtutem retinendi calorem maiorem. Hoc adhuc magis patebit ex dissertatione, in qua comparationem instituam

 inter

inter decrementa et incrementa caloris ſolidorum et fluidorum, quam proxime exhibebo, contentus, ſi phaenomenis accurate definitis, cauſis veris inueniendis occaſionem dedero.

TENTAMEN SOLVTIONEM IN DIVERSA TEMPERIE AD MENSVRAM REDVCENDI.

AVCTORE

G. W. RICHMANN.

§. 1.

Inter tentamina rationem calorum graduum Thermometri definiendi, effectum ſolutionis contemplari cum circumſpectione conſtitui, vt experirer, an inde aliquid concludere liceret? Videbantur enim corpora homogeneae materiae, aequalia et ſimilia in ſoluente quodam conſtantis quantitatis, diuerſae tamen temperiei pati debere ſolutione decrementa ponderum in ratione celeritatum particularum ſoluentis a calore agitatarum.

§. 2. Hunc in finem fieri curaui ex ſale gemmae cubulos, quantum fieri potuit, exactos. Fruſta ſalis, ex quibus cubuli confecti erant, videbantur ſatis homogenea. Pondus vnius cubuli in bilance accuratiſſima, quae additis poſt aequilibrium $\frac{1}{40}$ partibus grani mobilis erat, ponderatum, erat 163. gran. et alterius $195\frac{1}{2}$ granorum. Cubi maioris latus erat 0,56 dig. Lond. circiter

et

et minoris 0.51 + dig. L. Grauitate ſpecifica cubulorum in ſpiritu vini rectificato et ſale ſaturato, vt nihil ſalis ſolueret temperiei *62.* grad. Therm. F cum cura examinata et cum grauitate ſpecifica aquae eiusdem temperiei comparata, inueni grauitatem ſpecificam vtriusque cubuli ad grauitatem ſpecificam aquae, vti 209:100.

EXPERIM. I.

§. 3. His praeparatis, in vas amplum decem libras aquae infudi et aquam ad temperiem 42. graduum reduxi. Deinde cubulum minorem argento viuo, in vitreo vaſe contento, immerſi et orificium vaſis bene clauſi, totumque vas aquae temperiei 42. graduum immiſi, vt argentum viuum et cubulus acquirerent temperiem quadraginta duorum graduum. Poſt dimidiae horae ſpatium cubulum ſeta equina bene ligatum ex argento viuo extraxi, confeſtimque ex bilance hydroſtatica ſuſpendi, cuius lanci alteri 163 grana impoſita erant et lanci, ex qua cubulus pendebat, $78\frac{1}{2}$ grana, quod decrementum cubulus ex grauitate ſua ſpecifica in aqua pati debebat, immiſique aquae temperiei 42. grad. in vaſe amplo ſtagnanti notato ſimul tempore. Addidi adhuc ponderi $78\frac{1}{2}$ grana in lance, ex qua cubulus pendebat impoſito $13\frac{1}{2}$ grana, et poſt ſex min. pr. aequilibrium ſublatum reſtitutum eſt: dein rurſus addidi pondus 10. granorum et aequilibrium ſublatum poſt 5. m. pr. reſtitutum. Ita continuaui, donec cubulus, ex aqua extractus, pondus 53. granorum haberet, et hinc decrementum 110 granorum paſſus eſſet. Erat pondus lanci, ex qua cubulus pendebat, impoſitum, vt aequilibrium obtineret inter vtramque lancem

poſt

post 6	m.	pr.	92	gran.	post 20	m.	pr.	122	gran.
- 11	-	-	102	—	- 26	-	-	132	—
- 15	-	-	112	—					

§ 4. Per leges hydrostaticas palam est, nominato decremento ponderis cubuli initiali in aqua ob grauitatem specificam d, pondere ipso a, summaque ponderum lanci impositorum ad aequilibrium inter pondera in vtraque lance obtinendum b, decrementoque, quod cubulus patitur solutione x, esse debere $b = \frac{(a-x)d}{a} + x$, et hinc $x = \frac{(b-d)a}{a-d}$. Inueni ergo decrementa ponderis solutione facta:

post 6	min.	pr.	decrem.	pond.	26.	gran.
- 11	-	-	-	-	45.3	—
- 15	-	-	-	-	64.4	—
- 20	-	-	-	-	83 -	—
- 26	-	-	-	-	103 $\frac{1}{3}$	—

§ 5. Vt comparatio commodius institui possit, apposuisse tabulam iuuat, in qua decrementa, tempore simplo, duplo, triplo, etc. sistuntur, et decrementa singulis quinque minutis primis. Quia temperies soluentis non mutatur et superficies cubuli mutationes solum subit et volumen, solutio deberet quidem naturaliter decrescere, vti superficies decrescit, in paruis tamen temporum interuallis, vbi superficies cubuli non valde mutatur, solutio sine metu aequabilis supponi potest, eritque hinc:

post

post 5 min. prim. solut. 21 $\frac{2}{3}$ gran.

- 10	-	-	-	41.4	— ergo	5	min.	pr.	-	19$\frac{22}{30}$
- 15	-	-	-	64.4	— ergo	5	min.	pr.	-	23 -
- 20	-	.	-	83 -	— ergo	5	min.	pr.	-	18.6
- 25	-	-	-	99$\frac{2}{3}$	— ergo	5	min.	pr.	-	16.$\frac{2}{3}$

§. 6. Summa decrementorum ponderis solutione generatorum fuit per §. 4. 103$\frac{1}{3}$ gran. 26. min. pr. quae residuo ponderato inuenta est 110. gr. § 3.

Sex $\frac{2}{3}$ ergo solum granis recedit decrementum obseruatum a decremento computato integro solutionis tempore, quae discrepantia oriri potuit a mutata grauitate specifica salis inter solutionem, cum propter cauitates quasdam non fuit perfectissime in omnibus portiunculis homogeneum. Pyramis enim initio accurata abiit tandem in deformem, parte superiori ab vno latere profundius soluta, quam a reliquis lateribus, vnde grauitas specifica aucta ob cauitatem quandam destructam, siue potius apertam, quam occupauit aqua. Quia enim $b < a$, fiet, posita d minori, hinc grauitate specifica salis maiori, $\frac{(b-d)a}{a-d}$ maior, quam antea.

§. 7. *Schol.* Figura pyramidalis, solutione orta, videtur ostendere, soluens inferiorem cubi partem tangens saturatius esse soluente superiorem cubi partem contingente, deorsum enim particulae omnes resolutae initio tendunt; hinc lentius solui cubi inferiores partes, quam superiores. Cur inclinata pyramidis latera et latus supremum laeuia fuerint, inferior vero cauitatibus inaequalis reddita sit, ratio absque dubio fuit aer incarceratus sale, qui particulis salis abrasis liber et sese expandens, ſuperioraque verſus ſecedere nitens a ſale impeditus cavitates effecit, quae effici haud potuerunt ab aëre ex ſuperiori parte et lateribus inclinatis libere aſcendente.

EXPERIM. II.

§. 8. In temperie aquae 84. gr. Therm. F. eiusdem quantitatis in eodem vaſe cubum alterum, ſimiliter in argento viuo ad temperiem 84. grad. redactum, examinaui. Similiter nempe ſuſpendi cubulum ex bilance et aquae immiſi, notato tempore, et $93\frac{1}{2}$ granis lanci, ex qua cubulus pendebat antea impoſitis, quod decrementum ex grauitate ſpecifica pati debuit in aqua, alteri vero lanci $195\frac{1}{2}$ granis. Addidi dein pondus $17\frac{1}{2}$ granorum $93\frac{1}{2}$ granis lanci, ex qua cubulus pendebat, impoſitis, atque aequilibrium poſt $3\frac{1}{2}$ min pr. reſtitutum eſt: addidi rurſus 20 grana et ita continuaui. Decrementum ponderis cubuli interuallo 26 min. pr. fuit $174\frac{1}{2}$ gran. reſiduum, cum ponderatum fuit, 21 granorum. Cubulus rurſus abibat in pyramidem truncatam ſuperficiei praeter baſin laeuis. Baſis, vt in primo experimento, cauitatibus inaequalis et pyramis tandem deformis reddita eſt. In ſequenti tabula ſiſto pondera lanci, ex qua cubulus pendebat, impoſita, et tempus, quo aequilibrium dictis ponderibus reſtitutum

pondera	tempus	pondera	tempus
111 grana	poſt $3\frac{1}{2}$ m. pr.	171 grana	$18\frac{3}{4}$
131	8	181	22
151	13	189	26

§. 9.

§. 9. Decrementa ſecundum §. 4. computata ergo ſunt, vti ſequens tabula exhibet:

poſt $3\frac{1}{2}$ min. pr. ſolutio	33.5	gran.	poſt $18\frac{3}{4}$	-	148.5 gr.
- 8 - - -	71.8	—	- 22	-	167.7 —
- 13 - - -	110	- —	- 26	-	183 —

Solutio ergo 26 m. pr. computata recedit ab obſeruata (§. 8.) $8\frac{1}{2}$ granis ob grauitatem ſpecificam ſalis inter ſolutionem minutam, quia enim $b < a$, fiet, poſita d maiori, hinc grauitate ſpecifica ſalis minori, $\frac{(b-d)a}{a-d}$ minor, quam antea.

§. 10. Vt comparare poſſimus obſeruationes Experimenti II. cum obſeruationibus Exper. I, debemus ſolum ſolutionem interuallo iſto temporis contemplari, quo ſal Experim. II. habuit idem pondus cum ſale Experim. I. et cuius initio et fine cubuli aequales habuiſſent ſuperficies, ſi grauitas ſpecifica non mutata fuiſſet inter ſolutionem. Cum minoribus temporibus ſuperficies non mutetur valde ſolutione, ponatur Experim. II. ſuperficies cubuli initio per $3\frac{1}{2}$ min. pr. conſtans et ſolutiones erunt, vti tempora. Erit hinc 33.5 ad $32.5 = 3\frac{1}{2}$ min. pr. ad $3\frac{23}{60}$ m. pr. Poſt 3 min. pr. et 23 min. ſ. cubulus accepit pondus 163 gran. quod cubulus Experim. I initio habuit. Ab hoc tempore decrementum 103 gran. poſt $13\frac{5}{12}$ min. prima in temperie 84. grad. factum eſt. In primo Experimento idem decrementum 26. min. pr. ſub temperie 42 graduum generatum eſt. Tempora igitur ſolutionum aequalium ſub temperiebus 42. et 84 graduum fuerunt, vti 2 : 1. Tredecim nempe min. pr. cubus Exper. II. ferme idem paſſus eſt decrementum pon-

 deris

deris, quod cubus Exper I. 26. min pr. Si ergo grauitas ſpecifica cubulorum conſtans manſiſſet, figura cubuli Experim. II. interuallo tredecim minut. pr. ſimiliter et aequaliter mutata fuiſſet ac figura cubuli Experim. I. interuallo 26. min pr. Solutio tali ratione fuiſſet conſtanter aequalis in temporibus minoribus dictam rationem habentibus. Hoc vero non obtinuit exactiſſime propter grauitatem ſpecificam forte diſpariter mutatam durante ſolutione et ob homogeneitatem cubulorum minus perfectam. Quinque enim min. pr. quidem cubulus Exp. II. decrementum 41. 4 gran. paſſus eſt, et cubulus Exp. I. idem decrem. 41. 4 gran decem minutis primis: ſequentibus tamen quinque minutis pr. cubulus Exper. II. decrementum 37. 6 gr. et cubulus Exper. I. reſpondentibus 10. min pr. 41.6 gran. paſſus eſt. Reſiduis tribus minutis cubulus Exper. II 22. granorum iacturam fecit, cubulus Experimenti I. vero 6. min. pr. reſpondentibus 20 $\frac{1}{3}$ gran.

§. 11. Diſcrepantia, §. praecedente indicata, non eſt tanta, vt non aſſerere liceat, ſolutiones ſub temperiebus 42. et 84. graduum Therm. F. ſub ſimilibus caeterum circumſtantiis et aequalibus temporibus fuiſſe, vt 1. ad 2. et conſequenter in ratione graduum Thermometri F. ſupra o. Quid ſi idem obtineret in ſolutionibus ſub reliquis gradibus Thermometri? Nonne ita gradus Thermometri F. exprimerent celeritates ſolutionum, quae quidem maiores ſunt, ſi calores ſunt maiores, nondum tamen forte calores ipſos menſurare poterunt. Interim diuiſionis Thermometri F. praeſtantia prae reliquorum

Ther-

Thermometrorum diuiſionibus ex hisce elucet, qua neque Delilianum, neque Reaumuri, gaudet. Nam

42	gr.	Therm.	F.	reſpondent	$141\frac{1}{3}$	Del.
84	-	-	-	-	$106\frac{2}{3}$	Del.
42	-	-	-	-	$4\frac{4}{9}$	Reaum.
84	-	-	-	-	$23\frac{1}{9}$	Reaum.

Mirandum abſque conſilio, Thermometrum Fahrenheitianum ita conſtructum eſſe.

TENTAMEN RATIONEM CALORVM RESPECTIVORVM LENTIBVS ET THERMOMETRIS DEFINIENDI.

AVCTORE

G. W. RICHMANN.

§. 1.

In cogitationibus meis (*) de ratione calorum et ratione denſitatis radiorum directorum ad denſitatem per lentem refractorum oſtendi, qua ratione in relatiuorum calorum rationem inquirendum ſit. Abſolutos enim calores comparare, et, in qua ratione ſint, definire, aeque ſupra noſtras vires poſitum eſt, ac motum abſolutum a motu relatiuo diſcernere.

(*) Nou. Comm. Tom. III. p. 340. ſeq.

§. 2. Calor absque dubio consistit in certo motu certarum particularum corporearum, et quo pernicior est iste motus, eo maior debet esse calor. Quodsi ergo innotesceret, quae celeritas particularum requiratur, vt definitus calor generetur, absolutus calor definiri posset. Hoc tamen exspectare non licet. Hinc quomodo relatiui calores siue excessus caloris super constantem calorem ex excessibus dilatationis argenti viui super dilatationem ab eodem constanti calore aliquo modo definiri possint, inquiram.

§. 3. Rationem excessuum dilatationis super dilatationem a certo calore, a ratione excessuum caloris super eundem calorem, excessus dilatationis producentium differre non est dubium. Quodsi enim mercurius certo gradu iam dilatatus est, minor vis et minor calor sine dubio requiritur ad aequalem dilatationem efficiendam, vi, qua particulae ad vnionem sollicitantur, quam Philosophi vim attrahentem nominare amant, dilatatione minuta. Debentque esse excessus dilatationis super dilatationem a certo calore in ratione excessuum caloris super calorem istum certum et inuersa virium particulas argenti viui in Thermometris ad vnionem cogentium. Quodsi hinc excessus dilatationis accuratissime innotescerent, et excessus caloris respondentes, a quibus excessus dilatationis pendent, pariter accuratissime constarent, non solum vires, particulas argenti viui ad vnionem cogentes sub diuerso temperiei gradu, definiri possent; sed etiam comparatis excessibus dilatationis cum excessibus caloris lex erui, secundum quam ex excessibus

dila-

dilatationis argenti viui ſuper dilatationem a calore conſtanti datis, exceſſus caloris reſpondentes ſuper eundem calorem inueniri poſſent.

§. 4. Vt haec ita repraeſententur, vt vnico obtutu pateſcant, liceat breuiſſimis formulis dicta comprehendere. Ponantur exceſſus dilatationis $D : d$, vires ad vnionem particulas cogentes, quae reſpondent $A : a$, exceſſus caloris reſpondentes $C : c$. Erit $D : d = \frac{C}{A} : \frac{c}{a}$; hinc $A : a = d\,C : D\,c$ et $C : c = A\,D : a\,d$.

§. 5. Fingamus, duo Thermometra perfecte harmonica nullo affici calore et abſolute frigida eſſe, exponique radiis ſolaribus, quorum efficaciae ſint conſtanter in ratione data, calores, quos tempuſculo paruo radii in mercurio producent, erunt in eadem ratione data, et ita creſcet ſenſim calor Thermometrorum, donec oriantur calores, qui non augeri poſſunt vlterius efficacia radiorum ſolarium. Cum enim incrementa ſingula calorum ſint in ratione data, ſummae incrementorum in eadem ratione erunt, et calores in Thermometris producti erunt proportionales efficaciis radiorum ſolarium. Pone aequaliter, ſed relatiue frigida eſſe Thermometra, vt in umbra collocata eſſe ſolent, et exponi radiis ſolaribus, quarum efficaciae ſint in ratione data, eadem argumentatione patet, exceſſus caloris in Thermometris productos ſuper calorem, quem initio habuerunt, ſiue relatiuos calores eſſe debere in ratione efficaciarum radiorum ſolarium, quibus Thermometra afficiuntur.

§. 6. Efficacias radiorum per lentes refractorum in distantiis datis a foco esse in ratione densitatum radiorum et has densitates in ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco ponere licebit. Easdem efficacias radiorum per lentem refractorum esse, vt excessus caloris super calorem in vmbra, facile patet. Quodsi enim consideratur, solos radios solis per lentem refractos afficere Thermometra, non directos, liquet, si radii refracti et directi non afficiant Thermometra, illa tantummodo affici debere illo calore, qui aëri vmbroso communicatus est, et si lentes accedunt et augent calorem, calores lentibus productos esse excessus caloris super calorem in vmbra. Erunt ergo hi excessus calorum pariter in ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco.

§. 7. In hoc tentamine ergo ita processi, vt ope machinae, in cogitationibus de ratione calorum etc. descriptae, 1) per Thermometra harmonica post lentes soli obiectas, in diuersis distantiis a foco posita, excessus dilatationis mercurii super dilatationem mercurii a calore in vmbra definiuerim; et 2) per distantias Thermometrorum a foco lentium excessus caloris super calorem in vmbra; et vt 3) ex comparatione excessuum dilatationis argenti viui super dilatationem a calore in vmbra legem eruere tentauerim, secundum quam, excessibus dilatationis argenti viui super dilatationem a calore constanti datis, excessus caloris respondentes definiri possint.

§. 8. Antequam vero rem aggrediebar, expediebat prius apparatum, quem ad experimenta instituenda com-

comparare licuit, examinare; vtrum nimirum lentes requisitas proprietates haberent, aequaliter nempe interciperent et colligerent radios? Hunc in finem Thermometra aeque velocia A et B in aequalibus a foco distantiis locaui in axe coni radiantis et obseruaui praeter omnem spem, semper Thermometrum post lentem vnam maiorem ostendisse calorem, quam post lentem alteram. Apparebat ergo, lentem vnam plures radios intercepisse, quam alteram, quod, vel a diuersa pelluciditate, vel inaequalitate distantiarum focalium, vel ab vtraque caussa simul pendere potuit.

§. 9. Re vera distantiae focales lentium discrepabant, quod apparebat post examen cum solertia institutum, licet artifex omnem solertiam adhibuisse fassus esset, cui iniunxeram, vt si in patina unam lentem poliisset per vnum atque alterum momentum, alteram lentem per idem interuallum temporis poliret in eadem patina, et deinde primam rursus etc. sperans, alterna tali et aequaliter facta politura lentes exacte easdem distantias focales nacturas esse. Euentus spei minus respondit, vel ob artificis minorem solertiam, vel ob rei difficultatem, quod vltimum tamen credere nolim. Cum distantiae focales discrepabant et hinc etiam crassities lentium, non mirandum erat, lentes diuersimode intercepisse radios, vt in distantiis a foco inaequalibus efficaciam diuersam producere debuerint.

§. 10. Thermometra ipsa aeque velocia obseruaui post multa examina; hinc ex diuersitate Thermometrorum

 nulla

nulla metuenda erat discrepantia, quae certe a diversitate Thermometrorum oriri potuisset caeteris omnibus paribus. Quodsi enim bulbi Thermometrorum ita calefacti sint, vt excessus caloris super calorem in vmbra sint in ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco, vel ratione densitatum radiorum in dictis distantiis, et ob maiorem vel minorem interpositionem vaporum mutatio oriatur, densitates radiorum quidem mutari debent, seruent tamen semper necesse est rationem inuersam quadratorum distantiarum a foco. Erunt ergo incrementa vel decrementa calorum initialia in eadem ratione, et etiam in eadem ratione omnia sequentia. Si enim similes rationes similibus augentur vel minuuntur; rationes non mutantur, et hoc tamdiu continuari debet, donec mercurius in Thermometris quiescat. Quies haec vero solum obtineri potest, si bulbi Thermometrorum sint aequales et similes, vel superficies in ratione voluminum. Quodsi vero contrarium obtinet, incrementa et decrementa erunt in ratione composita directa differentiarum inter efficacias radiorum solarium sibi succedentes, i. e. in ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco et directa superficierum bulborum Thermometricorum et inuersa voluminum eorumdem. Hinc fieri potest, vt mercurius in vno Thermometro citius ad quietem perducatur, quam in altero, et hinc gradus non respondentes notentur, quod tamen a nobis non fieri potuit, quia Thermometra aeque velocia adhibuimus.

§. 11. Vt appareret, vtrum post eandem lentem aequaliter distribuerentur radii per sectiones coni radiantis ad axin nor-

normales, vnum Thermometrum in axe coni radiantis et alterum in certa distantia ab axe, vtrumque vero in aequali distantia a foco locaui, et vidi discrepantiam quamdam, caloremque prope axin esse minorem, quam in distantia ab axi, quod etiam obtinere debuit ob maiorem crassitiem lentis in medio, quam prope peripheriam, vbi minus radiorum intercipi debet. Discrimen tamen istud non fuit alicuius momenti, nempe non superabat tres ad quatuor gradus secundum scalam F. vt hinc, radios aequaliter distributos fuisse, sine sensibili errore adsumere licuerit, inprimis respectu radiorum, qui in eadem distantia ab axe coni radiantis et eadem distantia a foco in Thermometra incidebant, vbi semper Thermometra eundem ferme gradum ostendebant per saepius repetitas obseruationes.

§. 12. Cum per §. 8. et 9. lentes in machina nostra non haberent requisitas proprietates, vel lentes erant aequales reddendae et similes, vel vtrumque Thermometrum erat ponendum post vnam eamdemque lentem ita, vt vmbrae Thermometrorum in aequalibus a circuli luminosi in planum vltimum machinae proiecti centro distantiis sitae essent. Primum tam cito expectare non licebat, hinc alterum modum elegi. Vt tamen appareat, quantum discrepauerint obseruationes duabus lentibus captae ab obseruationibus vna lente institutis, et quomodo excessus dilatationis mercurii supra constantem gradum Thermometri in vmbra positi ab inuersa ratione quadratorum distantiarum a foco vtroque casu recesserint, obseruationes duabus lentibus institutas sequentibus

 com-

communicabo. Iuuat enim interdum erronea et imperfecta experimenta adducere, vt cum perfectioribus comparari possint, et tali ratione criteria perfectiorum melius elucescant. Mensibus Aprilis, Iunii et Iulii anni 1752. obseruationes has institui:

EXPERIM. 1.

Nou. Comm. Tom. III. Tab. VII. Fig. 1.

§. 13. 1) Machinam opposui radiis solaribus ita, vt circuli luminosi in vltima tabula apparerent, et peripheriis in illa descriptis continerentur.

2) Thermometrum A in distantia 12 digitorum Lond. a foco locaui et alterum harmonicum B in distantia 24 digitorum, vtrumque vero ita, vt vmbrae bulborum in centris circulorum luminosorum apparerent.

3) Thermometrum tertium harmonicum C in vmbra suspendi ita, vt non a radiis solaribus directis nec reflexis affici potuerit. His factis et Thermometris per aliquod temporis interuallum calefactis notaui gradum Thermometri A, ad quem mercurius adscendit, et pariter gradus reliquorum Thermometrorum vnius post alterum tam celeriter, quam fieri potuit. Obseruationes sequenti tabula exhibeo. In vltima columna exhibetur ratio excessuum dilatationis argenti viui supra dilatationem a calore in vmbra, excessu minori dilatationis vnitate expressa.

1.)

1) Num. obs.		2) Therm. A.		3) Therm. B.		4) Therm. C.		5) Excess. Dilat.
1)	-	120	-	90	-	80	-	$4 : 1$
2)	-	111	-	87	-	79	-	$4 : 1$
3)	-	120	-	90	-	80	-	$4 : 1$
4)	-	121	-	91	-	83	-	$4\frac{3}{4} : 1$
5)	-	122	-	92	-	83	-	$4\frac{1}{3} : 1$
6)	-	122	-	91	-	84	-	$5\frac{3}{7} : 1$
7)	-	121	-	90	-	83	-	$5\frac{3}{7} : 1$
8)	-	107	-	84.5	-	77	-	$4 : 1$
9)	-	108	-	85	-	77	-	$3\frac{7}{8} : 1$
10)	-	108	-	84	-	76	-	$4 : 1$
11)	-	106	-	82	-	75.5	-	$4\frac{7}{13} : 1$
12)	-	109	-	83	-	74.5	-	$4\frac{1}{17} : 1$
13)	-	102	-	80	-	74	-	$4\frac{2}{3} : 1$
14)	-	106	-	82	-	74.5	-	$4\frac{1}{3} : 1$
15)	-	105	-	80.5	-	74	-	$4\frac{10}{13} : 1$
16)	-	98	-	80	-	73	-	$3\frac{4}{7} : 1$
17)	-	102	-	80	-	73	-	$4\frac{1}{7} : 1$
18)	-	110	-	82	-	73	-	$4\frac{1}{9} : 1$
19)	-	107	-	83	-	73.5	-	$3\frac{10}{19} : 1$
20)	-	106	-	83	-	73.5	-	$3\frac{8}{19} : 1$
21)	-	102	-	80	-	73.5	-	$4\frac{5}{13} : 1$
22)	-	104	-	80	-	73	-	$4\frac{3}{7} : 1$
23)	-	103	-	80	-	72	-	$3\frac{7}{8} : 1$
24)	-	103	-	80	-	72	-	$3\frac{7}{8} : 1$
25)	-	104	-	82	-	72	-	$3\frac{1}{3} : 1$
26)	-	104	-	80	-	72	-	$4 : 1$
27)	-	103	-	80	-	72	-	$3\frac{7}{8} : 1$
28)	-	97	-	77	-	71	-	$4\frac{1}{3} : 1$
29)	-	95	-	75	-	70.5	-	$5\frac{4}{9} : 1$

1)Num obs.		2)Therm.A.		3)Therm.B.		4)Therm.C.		5)Excess. Dilat.
30)	-	96	-	79	-	71	-	$3\frac{1}{8} : 1$
31)	-	100	-	80	-	71	-	$3\frac{2}{9} : 1$
32)	-	98	-	78	-	70.5	-	$3\frac{2}{3} : 1$
33)	-	100	-	78	-	70.5	-	$3\frac{14}{15} : 1$
34)	-	98	-	77	-	70	-	$4 : 1$
35)	-	97	-	77	-	70	-	$3\frac{6}{7} : 1$
36)	-	97	-	77	-	69	-	$3\frac{1}{2} : 1$
		Sum. 3812.		S. 2960.		S. 2680.5.		
		med. $105\frac{8}{9}$.		$82\frac{2}{9}$.		$74\frac{4}{9}$.		$4\frac{3}{70} : 1$

In iisdem distantiis obseruationes similes captae, Studioso vno Thermometrum A, et Studioso altero simul Thermometrum B, et me ipso Thermometrum C obseruante.

(37	-	138	-	95.5	-	80
(38	-	137	-	95	-	80
(39	-	134	-	95	-	80
(40	-	135	-	94	-	80
(41	-	131	-	93	-	80
(42	-	132	-	94	-	80
(43	-	140	-	94.5	-	80
(44	-	138	-	95	-	80
(45	-	129	-	96	-	80
(46	-	137	-	96.5	-	80
(47	-	135	-	96.5	-	80
(48	-	137	-	97	-	80.4
(49	-	133	-	96.5	-	80.4
(50	-	132	-	96	-	81

51)

51)	-	134	-	96.5	-	81
52)	-	137	-	96	-	81
53)	-	138	-	97	-	81
54)	-	139	-	97.5	-	81
55)	-	138	-	97	-	81
56)	-	136	-	95	-	81
57)	-	137	-	96.5	-	81
		S. 6669		4970		4368
		med. 117		$87 \frac{11}{57}$		76.6. - $3 \frac{140}{1004}$: 1

EXPERIM. II.

§. 14. Vnus Studiosorum obseruauit in distantia 8 digitorum a foco Thermometrum A, alter in distantia 24 digitorum a foco simul Thermometrum B, et ipse attendi ad Thermometrum C in vmbra.

1)Num.obs.		2)Therm.A.		3)Therm.B.		4)Therm.C.		5)Excess. Dilat.
1)	-	212	-	93.5	-	78	-	$8 \frac{100}{155}$: 1
2)	-	217	-	94	-	78	-	$8 \frac{11}{16}$: 1
3)	-	220	-	94.5	-	78	-	$8 \frac{110}{155}$: 1
4)	-	221	-	94.5	-	78	-	$8 \frac{110}{165}$: 1
5)	-	222	-	95	-	78	-	$8 \frac{8}{17}$: 1
6)	-	214	-	96	-	78	-	$7 \frac{10}{18}$: 1
7)	-	219	-	95	-	78	-	$8 \frac{5}{17}$: 1
8)	-	222	-	94.5	-	78	-	$8 \frac{120}{165}$: 1
9)	-	217	-	94	-	78	-	$8 \frac{138}{156}$: 1
10)	-	216	-	93.5	-	78	-	$9 \frac{17}{151}$: 1
11)	-	213	-	93	-	78	-	$9 \frac{32}{146}$: 1
12)	-	208	-	93.5	-	78	-	$8 \frac{88}{151}$: 1

13)

13)	- 207	- 94	- 78.8	- $8\frac{66}{152}$: 1
14)	- 204	- 94.5	- 79	- $8\frac{10}{155}$: 1
15)	- 203	- 94.5	- 79	- 8 : 1
16)	- 206	- 94.5	- 79	- $8\frac{30}{155}$: 1
17)	- 219	- 94.5	- 79	- $9\frac{5}{155}$: 1
18)	- 222	- 94.5	- 79	- $9\frac{85}{155}$: 1
19)	- 223	- 96	- 79	- $8\frac{8}{17}$: 1
20)	- 217	- 96.5	- 79	- $7\frac{151}{175}$: 1
Sum.	4302	1890.5	1569	
med.	215.1	94.5	78.47	$8\frac{839}{1003}$: 1

EXPERIM. III.

§. 15. Vnus Studioſorum obſeruabat Thermometrum A in diſtantia 6 digitorum a foco, et alter ſimul Thermometrum B in diſtantia 24 digitorum a foco, ipſe attendi ad Thermometrum C in vmbra.

1)Num.obſ.	2)Therm.A.	3)Therm.B.	4)Therm. C.	5)Exceſſ. Dilat.
1)	- 302	- 91	- 76	- $15\frac{1}{5}$: 1
2)	- 297	- 91	- 76	- $14\frac{11}{15}$: 1
3)	- 282	- 90	- 76	- $14\frac{10}{14}$: 1
4)	- 292	- 89	- 76	- $16\frac{8}{13}$: 1
5)	- 297	- 90	- 76	- $15\frac{11}{14}$: 1
6)	- 292	- 91	- 76	- $14\frac{6}{15}$: 1
7)	- 302	- 89.5	- 76	- $16\frac{20}{31}$: 1
8)	312	- 91.5	- 76	- $15\frac{7}{31}$: 1
9)	- 307	- 92	- 76	- $14\frac{7}{16}$: 1
10)	- 302	- 93	- 77	- $14\frac{1}{16}$: 1
11)	- 312	- 94	- 77	- $13\frac{14}{17}$: 1

12)

1) Num. obſ.	2) Therm. A	3) Therm. B	4) Therm. C	5) Exceſſ. Dilat
12)	- 317	- 95.5 -	77	13 : 1
13)	- 332	- 96	77	$13 \frac{8}{19}$: 1
14)	- 328	- 94	77	$14 \frac{13}{17}$: 1
15)	- 322	- 93.5	77	$14 \frac{14}{16}$: 1
16)	- 317	- 92.5	77	$15 \frac{15}{21}$: 1
17)	- 313	- 92 -	77	$15 \frac{11}{15}$: 1
18)	- 320	- 92 -	77	$16 \frac{3}{15}$: 1
19)	- 342	- 94.5 -	77	$15 \frac{1}{7}$: 1
	S. 5888	S. 1752	S. 1454	
	med. $309 \frac{17}{19}$	$92 \frac{4}{19}$	$76 \frac{10}{19}$	$14 \frac{1485}{1500}$: 1

§. 16. Ex his obſeruationibus videre eſt:

1) Exceſſus dilatationis mercurii ſuper dilatationem eius a calore in vmbra non prorſus abludere a ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum a foco; et

2) Exceſſum dilatationis a calore maiori eſſe ad exceſſum dilatationis a calore minori:

   1) modo exacte in ratione quadrati diſtantiae a foco, vbi dilatatio minor producitur, ad quadratum diſtantiae a foco, vbi dilatatio maior producitur, vid. Exp. 1. obſ. 1. 2. 3. 8. 26. Exp. II. obſer. 10. 16. Exp. III. obſ. 5. 17.

   2) modo exceſſum dilatationis a maiori calore eſſe minorem, quam ſecundum praedictam rationem eſſe deberet,

   3) modo maiorem.

3) Quo minor eſt calor, eo minus exceſſus dilatationis ad rationem inuerſam qnadratorum diſtantiarum accedere, et quo minor eſt calor, eo propius

excessus dilatationis ad rationem inuersam quadratorum distantiarum appropinquare.

§. 17. Possemus facile ostendere, paruos errores in obseruatione commissos posse efficere, vt recedant excessus dilatationis a ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco, cum quinque gradus in Thermometris nostris A et B non excedant 1 $\frac{3}{4}$ lin. Lond, si experimenta cum lentibus nostris instituta principiorum loco ponere liceret. Ipsa conuenientia rationis excessuum dilatationis cum ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco non minus, quam quod excessus dilatationis a maiori calore saepissime minor obseruetur, quam secundum rationem inuersam quadratorum distantiarum esse deberet, exhibet certum criterium, non veros excessus calorum pro dilatationibus obseruatis assumtos fuisse, cum ratio suadeat, excessum dilatationis mercurii a maiori calore maiorem esse debere, quam praedicta ratio excessuum caloris assumtorum supra calorem in vmbra, vel inuersa quadratorum distantiarum a foco requirit.

§. 18. Ex experimentis et obseruationibus allatis nihil certi colligere licere ex sequentibus adhuc distinctius patebit.

Exp. I. Sunt excessus dilatationis medii supra dilatationem in vmbra vti - -	1	ad	3.797
excessus caloris respondentes assumti	1	ad	4.
hinc vires attrahentes mercurii respondentes per §. 4. - -	3.797	ad	4.

Exp.

Exp. II. Sunt iidem excessus dilatationis vti 1 ad 8.523 excessus caloris respondentes assumti, vti 1 ad 9. hinc vires attrahentes mercurii respondentes vti - - 8.523 ad 9.

Exp. III. Sunt excessus dilatationis iidem 1 ad 14.947 excessus caloris respondentes assumti 1 ad 1600; hinc vires attrahentes respondentes 14.947 ad 16 vt omnia complectar, sunt

pro excessibus caloris assumtis	1	4	9	16
excessus dilatationis respondentes	1	3,797	8,523	14,947
et vires attrahentes respondentes	14,945	15,744	15,781	16,000.

Pro dilatatione ergo minima vis attrahens minima et pro dilatatione maxima vis attrahens maxima inuenitur. Pro dilatatione 3.797 deberet esse vis attrahens minor, quam pro 1 et inuenitur maior; pro dilatatione 8.523 deberet esse vis attrahens minor, quam pro dilatationibus 1 et 3.797 et inuenitur maior, haec omnia valde repugnant et ostendunt excessus caloris assumtos non respondere dilatationibus obseruatis.

§. 19. Propter imperfectionem hanc videre volui, an obseruationes cum vna lente institutae magis cum iis, quae ratio suadet, conspirent et criterium prodant, excessus caloris veris magis adpropinquantes assumtos esse.

EXPERIM. IV.

§. 20. Post lentem istam, quae in camera obscura distinctius repraesentabat obiecta in distantia 12 digitorum a foco, posui Thermometrum A in distantia 24 digitorum Thermometrum B, vtrumque vero ita, vt lentibus soli obuersis vmbrae bulborum a centro circuli luminosi tabulae vltimae machinae aequaliter distarent et in eadem peripheria circuli terminascantur, obseruauique consueto more Thermometra A. B. C.

1) Num. obs.	2) Therm. A	3) Therm. B	4) Therm. C	5) Excess. Dilat.
1)	- 106	- 77.5	- 70	- 4.80 : 1
2)	- 104	- 77	- 70	- 4.85 : 1
3)	- 101	- 77.5	- 70	- 4.13 : 1
4)	- 99	- 77	- 70	- 4.14 : 1
5)	- 99	- 77	- 70	- 4.14 : 1
6)	- 99.5	- 77.5	- 70	- 3.93 : 1
7)	- 99	- 77.5	- 70	- 3.87 : 1
8)	- 97	- 77	- 70	- 3.86 : 1
9)	- 95	- 76	- 70	- 4.16 : 1
10)	- 95	- 76	- 70	- 4.16 : 1

In sequentibus obseruationibus vnus Studiosorum obseruabat Thermometrum A, alter obseruabat Thermometrum B, ipse attendi ad Thermometrum C.

11)	- 104	- 74	- 66 ½	- 5 : 1
12)	- 109	- 75	- 66 ½	- 4.47 : 1
13)	- 109	- 76	- 66 ½	- 4.47 : 1
14)	- 105	- 75	- 67	- 4.75 : 1
15)	- 103	- 74	- 66 ½	- 4.86 : 1
16)	- 105	- 74	- 66 ½	- 5.13 : 1
17)	- 111	- 76	- 66 ½	- 4.68 : 1
18)	- 105	- 75	- 66 ½	- 4.53 : 1

19)

19)	- 106	- 75	- 66 ½ -	4.65 : 1
20)	- 109	- 76	- 67.5 -	4.88 : 1
21)	- 111	- 77	- 67.5 -	4.58 : 1
22)	- 114	- 78	- 67.5 -	4.42 : 1
23)	- 111	- 77	- 67.5 -	4.58 : 1
24)	- 111	- 77	- 67.5 -	4.58 : 1
25)	- 109	- 76	- 68.5 -	5.40 : 1
26)	- 109	- 76	- 68.5 -	5.40 : 1
27)	- 107	- 77	- 68 -	4.33 : 1
28)	- 106	- 76	- 68 -	4.75 : 1
29)	- 99	- 73	- 68 -	6.20 : 1
30)	- 102.5	- 74	- 67.5 -	5.38 : 1
31)	- 102	- 75	- 66.5 -	4.17 : 1
32)	- 101	- 74	- 66.5 -	4.60 : 1
33)	- 107	- 77	- 66.5 -	3.86 : 1
34)	- 110	- 78	- 67.5 -	4.05 : 1
35)	- 109	- 77	- 67.5 -	4.36 : 1
36)	- 107	- 77	- 67.5 -	4.15 : 1
37)	- 110	- 78	- 68.5 -	4.36 : 1
38)	- 112	- 79	- 68.5 -	4.14 : 1
39)	- 108	- 79	- 69.5 -	4.05 : 1
40)	- 109	- 80	- 70.5 -	4.05 : 1
41)	- 111	- 80.5	- 71.5 -	4.39 : 1
42)	- 110	- 81	- 72.5 -	4.41 : 1
	S. 34360	32175	2868	
	med. 105.60	- 76.60	- 68.28.	4.485 : 1

EXPERIM. V.

§. 21. Post eandem lentem in distantia 8 dig. a foco Thermometrum A et 24 dig. a foco Thermometrum

trum B locaui et Thermometrum C in vmbra suspendi, obseruauique successiue Thermometra.

1)Num.obs.	2)Therm.A	3)Therm.B	4)Therm.C	5)Excess. Dilat.
1)	152	81	72	8.89 : 1
2)	152	81	72	8.89 : 1
3)	147	80.5	72	8.82 : 1
4)	137	78	71	9.43 : 1
5)	133	77 $\frac{1}{3}$	71.5	10.54 : 1
6)	128	76	71	11.40 : 1
7)	131	76.5	71	10.91 : 1
8)	131	77	71	10. : 1
9)	132	77	71	10.16 : 1
10)	132	77	71	10.16 : 1

In sequentibus obseruationibus vnus Studiosorum obseruauit Thermometrum A, alter Thermometrum B, ipse attendi ad Thermometrum C.

11)	138	67	59	9.87 : 1
12)	137	67	59	9.75 : 1
13)	142	67	59	10.37 : 1
14)	140	67	59	10.12 : 1
15)	141	67	60	11.57 : 1
16)	132	67	60	10.28 : 1
17)	146	67	60	12.28 : 1
18)	147	68.5	60	10.23 : 1
19)	148	68,5	60	10.35 : 1
20)	145	68.5	60	10. : 1
21)	150	68.5	60	10.59 : 1

22)

22)	-	138	-	68.5	-	60	-	9.17 : 1
23)	-	146	-	68.5	-	60	-	10.11 : 1
24)	-	148	-	68.5	-	60	-	10.35 : 1
25)	-	136	-	67.5	-	60	-	10.13 : 1
26)	-	142	-	67.5	-	60	-	10.56 : 1
27)	-	137	-	67.5	-	60	-	10.62 : 1
28)	-	140	-	67.5	-	60	-	10.66 : 1
29)	-	143	-	67.5	-	60	-	11.06 : 1
30)	-	150	-	68.5	-	60	-	10.59 : 1
31)	-	145	-	68.5	-	60	-	10. : 1
32)	-	142	-	68.5	-	60	-	9.64 : 1
33)	-	133	-	67.5	-	60	-	9.73 : 1
34)	-	128	-	65.5	-	60	-	12.36 : 1
35)	-	130	-	66.5	-	59	-	9.46 : 1
36)	-	142	-	67.5	-	59	-	9.76 : 1
		S. 5041		2539		2268		10.25 : 1
		med. 140.02		7052		63.00		

EXPERIM. VI.

§. 22. Post eandem lentem in distantia 6 digitorum a foco Thermometrum A et 24. digitorum Thermometrum B locaui, Thermometro C in vmbroso loco suspenso et obseruaui, vti antea.

1)Num.obs.		2)Therm. A.		3)Therm.B.		4)Therm.C		5)Excess. Dilat.
1)	-	257	-	82	-	72	-	18.5 : 1
2)	-	263	-	82	-	71.5	-	18.24 : 2
3)	-	270	-	83	-	72	-	18 : 1
4)	-	253	-	82	-	72	-	18.1 : 1

1) Num.obſ.	2(Therm.A.	3)Therm.B.	4)Therm.C.	5)Exceſſ.Dilat.
5)	- 250	- 81	-- 72	- 19.78 : 1
6)	- 241	- 80.5	-- 71	- 17.89 : 1
7)	- 240	- 80.75	-- 71	- 17.33 : 1
8)	- 242	- 81	-- 71.5	- 18 : 1
9)	- 237	- 81	- 71.5	- 17.42 : 1
10)	- 234	- 81	- 72	- 18 : 1

In ſequentibus Studioſi obſeruarunt A et B, ipſe obſervaui Thermometrum C.

11)	- 192	- 67	- 59	- 16.63 : 1
12)	- 201	- 67	- 59.5	- 18.87 : 1
13)	- 207	- 67	- 59.5	- 19.66 : 1
14)	- 199	- 67	- 59	- 17.50 : 1
15)	- 202	- 67	- 59	- 17.78 : 1
16)	- 199	- 67	- 59	- 17.50 : 1
17)	- 204	- 67	- 59	- 18.13 : 1
18)	- 207	- 67	- 58.5	- 17.47 : 1
19)	- 198	- 67	- 58.5	- 16.41 : 1
20)	- 200	- 67	- 58.5	- 16.65 : 1
21)	- 204	- 67	- 58.5	- 17.12 : 1
22)	- 202	- 67	- 58.5	- 16.88 : 1
23)	- 206	- 67	- 59	- 18.37 : 1
24)	- 213	- 67	- 59	- 19.25 : 1
25)	- 211	- 67	- 59	- 19. : 1
26)	- 213	- 67	- 59	- 19.25 : 1
27)	- 197	- 67	- 59	- 17.25 : 1
28)	- 197	- 67	- 59	- 17.25 : 1
29)	- 198	- 66	- 59	- 19.86 : 1

30)

30)	- 202	- 66	- 59	- 20.43 : 1
31)	- 211	- 66	- 59	- 21.71 : 1
32)	- 205	- 66	- 59	- 20.86 : 1
33)	- 183	- 66	- 59	- 17.71 : 1
34)	- 218	- 67	- 59	- 19.88 : 1
35)	- 211	- 67	- 59	- 19 : 1
	7567	2484.25	2190.	
med.	216.2	70.98	62.57	18.28 : 1

§. 23. Videmus ergo ex obſeruationibus cum vna lente inſtitutis

1.) Semper ferme a calore maiori maiores exceſſus dilatationis prodire, quam ſecundum rationem inverſam quadratorum diſtantiarum a foco prodire deberent.

2.) Eo magis recedere dilatationes a lege, quo magis creſcunt calores. Haec rationi valde conformia ſunt et prorſus contraria iis, quae § 16. ex obſervationibus cum duabus lentibus captis deducta ſunt.

§. 24. Vt diſtinctius omnia pateant, obſeruationes in compendium mittam.

Exp. IV. Sunt exceſſus dilatationis medii ſupra dilatationem in vmbra vti - - - 1 : 4. 485.
Exceſſus caloris reſpondentes aſſumti vti 1 : 4.
hinc vires attrahentes mercurii reſp. 4.485:4.000.

Exp. V. ſunt iidem exceſſus dilat. 1 : 10.25.
exceſſus caloris reſpondentes vti 1 : 9.
hinc vires attrahentes reſpond. vti 10.25 : 9.00

Exp. VI. Sunt iidem exceſſ. dilat. vti						1	:	18. 27.
exceſſus caloris reſp. vti						1	:	16.
hinc vires attrahentes vti								18.27:16.00.
Vt omnia complectar, ſunt								
pro exceſſibus caloris	1	-	4	-	9	-		16.
exceſſus dilatationis	4	-	4.485	-	10.25	-		18. 27.
et vires attrahentes vti	18. 27	-	16. 34	-	16.04	-		16.00.

§. 25. Pro dilatatione ergo minima vis attrahens maxima et pro dilatatione maxima vis attrahens minima invenitur; pro dilatatione 4. 485 inuenitur vis attrahens maior, quam pro dilatatione 1. et pro dilatatione 10.25 inuenitur vis attrahens minor, quam pro dilatatione 4.485. haec omnia rationi conuenientiſſima ſunt.

Eſt porro inter vires attrahentes particularum dilatatarum ab exceſſibus caloris, qui ſunt vti 1 ad 4, differentia vti 0.193.; inter vires attrahentes particularum dilatatarum ab exceſſibus caloris, qui ſunt vti 4 ad 9, eſt differentia 0.30. inter vires attrahentes particularum dilatatarum ab exceſſibus caloris, qui ſunt 9 ad 16, eſt differentia vti 0,04. Sit differentia inter vires attrahentes particularum dilatatarum ab exceſſibus caloris, qui ſunt vti 4 ad 16=0.34. Eſt ergo differentia praedicta inter exceſſum caloris 1 et 4 ferme ſextuplo maior, quam inter exceſſum caloris 4 et 16. Hoc rurſus rationi valde conforme eſt, et vires attrahentes in maioribus dilatationibus tandem euaneſcere debent.

§. 26. Imo exceſſus dilatationis viſi ſunt ſecundum certam legem creſcere; Oritur ferme in quolibet

caſu

casu excessus dilatationis calore maiori productus, si $\frac{1}{7}$ pars excessus simplicis dilatationis addatur integrae simplici dilatationi et per numerum excessum caloris maiorem exprimentem multiplicetur.

Ita 4. 485 est ferme $= \frac{8000}{7}. 4 =$ 4. 57.
et 10. 25 est ferme $= \frac{8000}{7}. 9 =$ 10. 28.
et 18. 27 est ferme $= \frac{8000}{7}. 16 =$ 18. 000.

§. 27. Legem tamen nondum inuentam iudico, secundum quam ex dilatationibus mercurii quilibet calores relatiui definiri possint, et vires argentum viuum diversimode calidum ad vnionem sollicitantes inueniantur. Obseruationes hae paucae huic rei sufficere non videntur, multiplicentur obseruationes necesse est, et pro aliis distantiis a foco adhuc simili ratione inueniantur dilatationes, vt lex tandem erui possit.

§. 28. Iis, quae §. 26. continentur rem nondum absolui, facile patet; fingamus enim hac nostra inquisitione rem esse ad finem perductam, et definiendam esse rationem caloris gradus a Therm. ad gradum b, erunt excess. dilatationum vti a ad $b = 1$ ad $\frac{b}{a}$. Erit ergo per §. 26 $\frac{b}{a} = (1 + \frac{1}{7})x$; si x maiorem caloris excessum exprimere ponatur, qui producit excessum dilatationis 1, erit $x = \frac{7b}{8a}$. Erunt ergo relatiui calores pro 1 et $\frac{b}{a}$. vti $1 : \frac{7b}{8a} = 8a : 7b$. Erunt ergo vires attrahentes pro a et b, vti $7ab : 8ba = 7 : 8$ (§. 4.). i. e. in constanti ratione, quod est absurdum.

§. 29. In obſeruationibus adductis vires mercurium ad vnionem ſollicitantes forte non multum receſſerunt ab hac ratione. Receſſerunt tamen re vera per §. 24. Ponamus etiam ſimplici dilatationi primo Experimento addendam quantitatem x, 2do y et 3tio z, erit

Exp. I. $(1.00 + x)4 = 4.845$
et hinc $x = 0.12.$

Exp. II. $(1.00 + y)9 = 10.25$
hinc $y = 0.1389.$

Exp. III. $(1.00 + z)16 = 18.27$
hinc $z = 0.1418.$

Primo experimento ergo minor, quam octaua pars ſimplici exceſſui dilatationis eſt addenda, nimirum $\frac{1}{8\frac{1}{3}}$, et ſecundo maior, quam vna octaua pars, nimirum $\frac{1}{8\frac{1}{7}}$ pars, et tertio maior, quam $\frac{1}{7\frac{1}{5}}$, ſcil. $\frac{1}{7}$ pars.

§. 30. Quo magis ergo maior exceſſus caloris ſimplicem exceſſum caloris ſuperat, eo maior pars ſimplicis exceſſus dilatationis ſimplici exceſſui dilatationis eſt addenda, vt ſumma oriatur, quae per exceſſum caloris maiorem multiplicata det dilatationem maiorem, calore minore multiplicatam. Hoc rurſus criterium ſuppeditat exceſſus caloris propinquos veris pro dilatationibus argenti viui definitis aſſumtos fuiſſe. Si Deus viuere ſinat, ex pluribus impoſterum obſeruationibus aptioribus et ſcalae maioris thermometris experimenta repetiturus et continuaturus, pro exceſſibus caloris, qui in alia ratione ſunt exceſſus dilatationis reſpondentes, eruere laborabo.

DE

DE INDICE ELECTRICITATIS
ET DE EIVS VSV IN DEFINIENDIS ARTIFICIALIS ET NATVRALIS ELECTRICITATIS PHAENOMENIS

DISSERTATIO

G. *W.* RICHMANNI.

Officium meum in leges naturae inquirendi effecit, vt octo ab hinc annis in electricitatis phaenomena inquirere, inter alios labores Academicos, inceperim. Cum perfectum electrometrum, siue instrumentum, quo virtus electrica definitur, ad electricitatis doctrinam perficiendam absque omni dubio multum faciat; initio statim cogitaui de commoda ratione definiendi virtutis electricae intensionem. Mihi tamen nondum ita felici esse licuit, vt electrometrum perfectum nactus fuerim, nescio vtrum alii? Relatum mihi quidem est, quendam le Roy in Gallia et d'Arcy adiunctum Mechanices, corpus aquae innatans, per communicationem electrificatum in vase vitreo, et vicino alio corpore deriuatiuae electricitatis attractum et eleuatum, adhibuisse ad electricitatem mensurandam, spatio adscensus gradum electricitatis notante, vtque scala redderetur amplior, corporis electrificati extremitatem acutam ita luce illuminare docuisse, vt vmbra acutae extremitatis proiiceretur in tabulam distantem, in qua scala, pro electricitatis gradu mensurando, delineata erat. Deinde Fräncklin primus electricitatis per acuta corpora ex atmoſphaera, fulminea materia grauida, prouocandae auctor, machinulam ex rotulis compoſitam leuiſſimis, ex charta craſſiori, inſtar molendini alati, electricitate ad motum concitauit, ad materiae electricae motum oſtendendum. Haec forte machina, celeritate circumvolutionis indicis cuiusdam, vim electricitatis menſurare poterit. Nihil tamen de imperfectione et perfectione harum machinarum mihi dicere licet, cum eas nondum adhibere et ne accuratas quidem earum deſcriptiones videre licuerit. Eo ergo ſolum indice electricitatis vſus ſum, qui in Commentariorum Tomo XIV. a me deſcriptus eſt, et quem poſtea emendaui. Mentionem quidem etiam feci, ex percuſſionum campanulae, electricitate factarum, frequentia iudicium ferri poſſe de virtutis electricae intenſione; campanula tali tamen non vſus ſum, ad phaenomena electrica definienda, ſed ſolo filo lineo, ad regulam pendulo, de quo nunc quaedam phaenomena electricitatis tam artificalis, quam naturalis, quatenus indice praedicto definita ſunt, exponere, phaenomenaque electricitatis explicare conſtitui.

Indicem electricitatis voco tale inſtrumentum, cuius ope electricitas cuiuslibet corporis, in diuerſis circumſtantiis, cognoſci poteſt ita, vt appareat, vtrum nunc ſit maior, quam alias? et quod inſeruit legibus electricitatis commode definiendis. Probabile eſt in vna regione maiorem electricitatem excitari poſſe, quam in altera. Cel. Muſchenbrockio non imitari licuit in Belgio quaedam experimenta electrica, nec mihi hic Petropoli, quae in Germania, Gallia, Italia capta ſunt feliciſſime. De magno autem experimentatore Muſchenbrockio perſuaſus

ſuaſus ſum, ipſum ſatis aſſuetum eſſe experimentis cum cura et circumſpectione inſtituendis, et occaſionem etiam habuiſſe, machinam idoneam et perfectiſſimam electricam ſibi comparandi. Neque dubitandum eſt, electricitatem naturalem, in atmoſphaera ſponte generatam, in vna regione maiorem eſſe, quam in alia: e re igitur vtique erit, inſtrumentum aliquod adhibere, quod diſcrimen eiusmodi prodit.

Vtrum meus index aliqualem vtilitatem habeat? ex ſequentibus iudicandum eſt. Ex Tomo XIV. Commentariorum perſpicitur, illum nihil aliud eſſe, niſi filum lineum AB $1\frac{1}{2}$ pedis Lond. et dimidii grani medici prope regulam latam verticalem AC, adplicatum et ex ſuprema regulae parte ad latus anguſtius pendulum, ſub quo quadrans ligneus DEFGH paulo maioris radii, quam longitudo fili eſt, ita locatur, vt punctum ſuſpenſionis fili ſit centrum quadrantis et planum quadrantis cum ſectione regulae verticali, eaque ampliori, ſit in eodem plano. Si talis regula cum maſſa electrificata eſt connexa, ipſa electrificata repellit filum electrificatum, quod etiam quadrante ligneo non electrificato attrahitur. Tali ratione, quo magis recedit filum a regula, eo maior electricitas excitata ſit neceſſe eſt. TAB. VIII. Fig. 1.

Cauendum etiam eſt, ne pinguedo et cera regulae metallicae adhaereat, quae efficit, vt filum a regula electrificata in eo puncto, vbi cera adhaeret, non repellatur, ſed potius retineatur quam tenaciſſime, indicio certiſſimo, materiae electricae agitationem in hoc puncto non ſolum impediri, ſed etiam ceram aliam electrici-

cita-

citatem obtinere, quae loco repulſionis filum attrahit. Quodſi vero electricitas fortior excitetur ita, vt vis repellens reliquarum partium regulae vim attrahentem cerae ſuperet, tandem filum a regula recedit. Imo vaſculum vitreum, quo regula excipitur, pariter retinet filum, ſi ab eo contingitur, vt non niſi electricitate fortius excitata filum a vaſculo vitreo ſeparetur.

In praedicto indice fili receſſus a regula maior, quam antea, filo manente eiusdem longitudinis et ponderis et maſſa electrificata eadem, indicat, vti dictum, maiorem electricitatem, quam antea excitatam fuiſſe; variique indices ſibi ſimiles et aequales, quorum fila ſunt eiusdem longitudinis et ponderis, in diuerſis locis ad eandem maſſam electrificatam adplicati, oſtendunt eundem gradum. Quodſi maſſae vni electrificatae index adplicatus prodit certum gradum, ſimilisque index, aeque longo et aeque graui filo inſtructus, alteri maſſae electrificatae, et poſt electrificationem a priori ſeparatae, iunctus, eundem oſtendit gradum, maſſae electrificatae ſeſe mutuo contingentes nullam ſcintillam exhibent, et vterque index etiam poſt contactum eundem reſpicit gradum, indicio certo aequaliter electrificatas eſſe. Adplicatas tandem indicibus aeque longorum et grauium filorum maſſis diuerſis electrificatis et poſt electrificationem ſeparatis, debilitataque vnius maſſae electricitate quomodocunque, ita vt filum minorem gradum oſtendat, quam filum alterius indicis, maſſae dum ſeſe contingunt, ſcintillam exhibent electricam, et poſt contactum maſſarum index vterque oſtendit eundem gradum. Quodſi haec conſiderentur, patebit, indicem talem idoneum

neum esse instrumentum, cognoscendi cuiusque massae electrificatae gradum electricitatis vel maiorem vel minorem. Obseruandum tamen est, semper eiusdem longitudinis et ponderis filum adhibendum esse. Aliter electricitatis virtus male definitur, et nulla comparatio institui poterit, vnumque filum hunc, et alterum alium, gradum ostendere poterit, virtute electrica eadem cum vtraque massa communicata. Rationem rei non difficile intelligere est: Materiam electricam circa corpus motu quodam agitatam ad certam distantiam cingere debere corpus necesse est, et in minori distantia a superficie corporis maioris efficaciae esse, consequenter crescente distantia certa lege et nobis nondum cognita, decrescere virtutem. Quodsi ergo filum eiusdem longitudinis et ponderis a superficie vnius corporis remoueatur ad eandem distantiam, ad quam remouetur ab alio corpore, indicium erit certum, materiam electricam agitatam in aequalibus his distantiis efficaciae aequalis esse, et in aliis distantiis minoribus aequalibus aequaliter pariter se habere, virtutemque electricam in vtroque corpore esse aequalem. Quodsi vero filum a superficie vnius corporis electrificati remoueatur ad distantiam maiorem, quam filum eiusdem longitudinis et ponderis a superficie alterius corporis electrificati, indicium similiter certum erit, efficaciam materiae electricae agitatae in corpore priori in distantia minori et aequali distantiae, ad quam filum a superficie alterius corporis remouetur, maiorem esse, hinc etiam eius virtutem electricam maiorem esse debere.

Fac nunc requisitum boni indicis nihil aliud esse, quam vt ostendat maiorem vel minorem electricitatis gradum, nil desiderari videtur amplius. Sed nemo forte negabit vsum indicis ampliorem reddi, si (1) index, adplicatus corpori electrificato non efficit, vt electricitas excitata cito pereat, vt nempe lex decrementi electricitatis et constitutio materiae electricae agitatae detegi tandem possit, et si (2) cuilibet massae commode possit adplicari ad electricitatis gradum examinandum, quod interdum valde necessarium. Neutrum requisitum in indice descripto inuenitur, electricitas enim excitata valde diminuitur ob arcum ligneum angulis solidis regulae vicinum, quibus forti electricitate excitata in tenebris conus coeruleus electricus cum susurro ex scintilla electrica, in angulis solidis regulae sponte orta, generatus adhaeret: remedium tamen inueniri poterit, vti ex sequentibus adparebit.

Notissimum est phaenomenon electricum, quod modo descripsi, et attente consideranti videtur esse reuera eiaculatio continua radiorum diuergentium ex corpusculis lucidis constantium, qui quidem ex angulis solidis corporum, quae deriuatiuae electricitatis capacia sunt, electrificatorum, oriuntur; inprimis aliis corporibus deriuatiuae electricitatis infinitis non electrificatis ita admotis, vt anguli solidi adpropinquatorum non respiciant angulos solidos electrificatorum corporum. Quodsi vero anguli solidi acuti corporum sibi obuertantur, in distantia 5 vel 6 digitorum ex angulo solido vtriusque, electrificati nimirum et non electrificati, conus multo minor, quam praedictus, cum sibilo erumpit, debiliorique electricitate excitata, lumen extinguitur.

Hic filum sermonis, quod mihi sequendum proposui, parumper relinquam, illuc mox reuersurus; inprimis

inprimis cum dicenda, ad quaedam, quae sub finem addere animus est, melius intelligenda, facere videantur. Quaeritur, cur lumen conicum in angulis solidis acutis potius et prominentibus corporum partibus oriatur? cur non in superficie plana et curua? cur non in angulis planis? cur ex acuto corpore electrificato, obtuso corpore infinito opposito, erumpat conus magnus electricus, acuto vero obuerso multo minor? Certe quae a nonnullis allata sunt obscuritatem redolent, neque ego nunc rem ita explanare in promtu habeo, vt nihil desiderari possit, sat contentus, si occasionem iis, qui ingenio praestant, dedero aliqualem, rem rite explicandi, conditiones, sub quibus phaenomenon oritur, definiendo.

Verum quidem est, cingi debere corpora electrica, ad certam distantiam, materia quadam subtili agitata: nihil dicam de iis phaenomenis, quae talis materia in ipsis intimis recessibus et porulis corporum, omni sagacitati sese subducens, efficere potest, et ponere fortasse licebit, materiam electricam agitatam occupare spatium circa corpus electrificatum tale, vt extendatur a quolibet puncto superficiei ad aequalem distantiam. Quodsi ergo corpora figuris differunt, et magnitudine etiam, volumina materiae electricae agitatae valde discrepabunt. Nonne etiam discrepantibus his voluminibus actiones corporum electrificatorum, sub eodem electricitatis gradu, discrepabunt? Hoc ex sequentibus experimentis cum magna veri specie concludi posse credidi. Massam ferream superficiei 10″ □torum prismaticam impositam vitro adplicui ad massam electrificatam et oriebatur scintilla massa electrificata tacta. Deinde tubum ferreum aequalis maſſae cum maſſa priſmatica, ſed cuius ſuperficies erat 130 digitorum □torum eodem modo adplicui ad eandem maſſam, cuius electricitas diminuta erat adplicatione priſmatis et maior oriebatur concrepatio et ſcintilla, et maior etiam indicis mutatio. Etiam per maſſam aurichalceam ponderis $\frac{3}{4}$ librae et ſuperficiei 700″□, magis concrepantem ſcintillam elicui ex maſſa minus electrificata, quam per maſſam aurichalceam duarum librarum, et ſuperficiei 50″□ ex maſſa magis electrificata eadem. Certe ſcintilla poſteriori caſu efficacior non erat, quam priori caſu.

Ampliſſimus ſeſe hic offert campus, quo ſtereometriae amatores ſeſe exercere poſſunt. In priſmatibus omnibus rectis, conſequenter etiam infinitangulari ſiue cylindro et etiam ſphaera, facile volumen materiae electricae excitatae definiri poteſt, radio actiuitatis cognito. Eſt enim iſtud in priſmate recto ſumma (1) *ex parallelepipedo*, cuius baſis integra ſuperficies priſmatis, altitudo vero aequalis radio actiuitatis corporis electrificati, (2) *ex prismate*, cuius baſis quarta pars circuli, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati et altitudo duplum perimetri baſeos prismatis, atque (3) ex *cylindro* cuius baſis circulus, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati, et altitudo aequalis altitudini priſmatis, et (4) ex *ſphaera*, cuius radius aequalis radio actiuitatis corporis electrificati. In cubo in ſpecie eſt volumen materiae electricae agitatae ſumma 1) ex *parallelepipedo*, cuius baſis ſextuplum quadratum lateris, et altitudo aequalis radio actiuitatis corporis electrificati. 2) Ex *cylindro*, cuius baſeos radius, aequalis

lis radio actiuitatis corporis electrificati, et altitudo triplum latus cubi; et tandem. 3) Ex *sphaera* radii aequalis radio actiuitatis cubi electrificati. Vltima pars summae, nimirum sphaera, inprimis venit consideranda.

Ad angulos solidos prismatum continentur sectores sphaerae, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati, tribus planis, in quibus sectoribus materia electrica agitata continetur, et summa omnium talium sectorum in prismate est aequalis sphaerae integrae, eiusdem radii. In prismate triangulari recto, est hinc volumen materiae electricae, vni angulo solido adhaerentis, sexta pars praedictae sphaerae, in prismate quadrangulari octaua pars eiusdem, in prismate quinquangulari $\frac{1}{10}$ pars etc. consequenter in prismate infinitangulari siue cylindro infinitesima pars.

Considerari meretur, eo maius esse volumen materiae electricae agitatae, angulo solido inclusum, quo acutior est angulus baseos prismatis, lateribus baseos inclusus, eo minus vero esse praedictum volumen, quo obtusior est angulus praedictus, si radius actiuitatis ponitur idem. Quodsi nunc ponatur materiam electricam agitatam a corporibus eo difficilius separari, quo in pluribus punctis materia haec corpus contingit, et eo facilius, quo in paucioribus punctis hoc fit, adhaesionem nempe hanc si iusto maior est, impedire, quominus materia agitata a corporibus separetur, et in aliam similem materiam extra corpus incurrat, vt collisione lux oriatur, si vero minor est, separationem et collisionem praedictam non impediri, et hinc lucem per satis notabile interuallum exhiberi, non difficulter videtur concipi posse, cur lux continua generetur, si corpus non electrificatum ad corporis electrificati angulum adpropinquet. Materia enim electrica corporis non electrificati quiescens, in locum materiae agitatae et a corpore electrificato expulsae secedere debere videtur, hinc tritus oriri et lux: praesertim si angulo solido corporis electrificati obiiciatur corpus obtusum non electrificatum, quo casu separatio materiae facilis, et accessus nouae materiae largus esse videtur.

In superficiebus corporum planis materia electrica agitata adhaeret in pluribus punctis corpori, ita, vt non separetur facile: haec fortasse est ratio, cur hoc casu lumen, praedictum, continuum, non oriatur in eiusmodi superficiebus. In omnibus angulis planis materia electrica, quae vni puncto adhaeret, est ita parua, vt prisma infinite paruae altitudinis constituat, cuius basis est sector circuli, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati, hinc probabiliter ob paucitatem materiae, talis angulus, lumini praedicto praebendo, par non est. In superficie incuruata cylindri, qui instar prismatis infinitangularis, considerari potest, latera baseos faciunt angulum planum, hinc idem, quod in praecedente casu fieri debet. In angulis solidis prismatum, si adhaeret materia electrica agitata angulis baseos prismatis obtusis valde, volumen materiae electricae agitatae debet esse paruum, hinc per supradicta lumen praedictum non oritur, quod experientiae est. In angulis solidis prismatum acutis aliter se res habet, vt ibi lumen praedictum exhibeatur experientia teste. Quia angulus solidus electricae materiae in cylindris est infinite paruus, propterea

pterea in angulis solidis cylindri non licet sperare lumen praedictum continuum, quod experientia satis notum est. In pyramidibus, quo acutior est angulus solidus pyramidis, eo obtusior est angulus solidus materiae electricae, vertici pyramidis adhaerentis, et eo maius est volumen materiae electricae ibi agitatae; hinc experientia teste, ex eiusmodi angulis e. g. extremitate siue cuspide gladii electrificati, et extremitatibus foliorum, plantarum electrificatarum, hoc lumen exit. Quodsi guttulae aqueae parallelepipedo horizontali electrificato incumbunt, et admovetur corpus non electrificatum, guttulae eleuantur et figuram conicam induunt, verticibus sursum spectantibus, debet ergo per modo dicta lumen praedictum in verticibus exhiberi, quod experientia comprobatur.

Nolim tamen dicere nullo gradu electricitatis excitato non nisi in angulis solidis corporum et partibus procumbentibus lumen praedictum oriri. Ea electricitate, quam ego producere potui, lumen conicum in his tantum exhibere licuit, in aliis non item. Electricitas vero mea, quam Petropoli producere potui, filum indicis descripti vltra 50 gradum hyeme nunquam et aestate vix ad gradum quadragesimum eleuauit. Forte, si eleuari posset multo magis filum, etiam lumen in aliis partibus corporum exhiberetur et totum corpus lumine circumdaretur; quod a Cel. *Bosio* obseruatum in eius Commentariis legimus, vbi ei hoc phaenomenon beatificationis nomine insignire collibitum est. Neque audeo dicere ex acutissimo angulo solido lumen conicum maximum oriri, quia ei obtusissimus angulus solidus, electricam materiam agitatam continens, obiicitur, et quia volu-

men

men huius materiae ferme aequale est dimidiae sphaerae, radii, aequalis radio actiuitatis corporis electrificati. Prismatis enim quadrangularis angulus solidus mihi visus est maius lumen praebuisse, quam acutissimus pes circini. Fortasse ex maiori angulo solido etiam largius materia electrica, vel materiam electricam ex parte constituens, erumpit et resarcit decrementum electricitatis magis in hoc loco, quam materia ex angulo solido minori eiaculata, adestque forte hic quaedam compositio rationum ex ratione magnitudinum angulorum solidorum corporis electrificati et angulorum solidorum, qui materiam electricam agitatam continent; vbi ex principiis arithmeticis patet, factum oriri maximum, si factores sint aequales, summa manente eadem, quod in dicto casu obtinet.

Consideratio luminis conici electrici forte nos iusto diutius a proposito nostro persequendo detinuit, ad quod nos nunc rursus accingimus.

Dixi cum lumine praedicto decrementum electricitatis eximium coniunctum esse, quod edoctus sum, dum tempus, quo descendebat filum indicis electrificati, per certum arcum, annotarem, deinde extremitatem regulae vasculo vitreo exciperem et interuallum inter vasculum et regulam limatura martis vel rasura alius metalli explerem, denuoque excitata electricitate, vt filum eundem gradum ostenderet, quem initio in primo casu, tempus, quo electricitas decrescebat per eundem arcum obseruarem. Tempus enim vltimo casu semper multo maius erat, quam primo, certo indicio electricitatem priori casu decreuisse citius, quam altero. Priori casu etiam filum nunqnam ad tantam altitudinem eleuare potui

ac

ac altero casu. Iuuat hic monuisse, non necessarium esse limaturae martis, vel rasurae alius metalli vsum. Quodsi enim regula fundum vasis vitrei tangit, idem fit; quin absque contactu fundi decrementum electricitatis minuitur. Auro etiam obduci potest interior vasculi superficies et regula demitti, donec aurum tangat. Ex dictis simul satis intelligitur, qua ratione index emendandus sit, ne electricitas cito decrescat.

Obseruatio decrementi electricitatis, ob angulum solidum corporis electrificati corpori non electrificato vicinum, occasionem dat variis cautelis in experimentis electricis adhibendis, ad quas in vsu indicis cum industria attendendum est, si phaenomena comparare volumus.

1.) Cum cura cauendum, ne in massa electrificata anguli solidi praesertim acuti occurrant, lumina conica exhibentes in tenebris: hinc extremitates filorum metallicorum, lucem hanc eiaculantes, cera obturaui; quare effeci, vt lux in extremitatibus euanesceret. In catena ferrea adhibita hinc et inde lux illa adparebat in tenebris, et cum catenam examinarem, in locis illis procumbentes lamellas acutas offendebam, quibus abrasis lux cessabat et decrementum electricitatis minuebatur. Dum circinum massae electrificandae imponebam, ita vt pedes ex vtraque parte prominerent, vix electricitas excitabatur ea, vt ad gradum quadragesimum filum indicis motu, certa lege retardato, eleuaretur, et a gradu 40 ad 35 cessante tritu vitri electrificatorii 86 minutis secundis descendebat, remoto vero circino et electricitate denuo excitata promte filum, motu, certa lege retardato, ad 50 gradum aſcendebat, et a gradu 40 ad 35 centum minutis ſecundis peruenit.

2) Nonſolum electricitas decreſcit cito ob acuta corpora maſſae electrificatae adplicata, ſed etiam ſi corpora deriuatiuae electricitatis capacia, inprimis infinitae connexionis cum aliis ſimilibus et obtuſa, vicina ſint angulis ſolidis corporum electrificatorum, vel acutis extremitatibus maſſae electrificatae, et hoc quidem caſu citius etiam electricitas decreſcit. Quodſi enim circini pedi admouetur manus in diſtantia 5 vel 6 digitorum, maſſa ad gradum e. g. 40 electrificata, filum admodum celeri motu regulam verſus deſcendere incipit.

3) Poſſunt duo diuerſa corpora aequalia et ſimilia aequaliter electrificata in eodem medio inaequaliter virtutem electricam perdere, vnum citius, alterum tardius; ſi nimirum vnum verſus corpus reſpiciant admodum acuta corpora, deriuatiuae electricitatis, infinita, in diſtantia 6 et plurimum digitorum, alterum verſus vero non ſimiliter. Ad hoc maxime attendendum eſt, et omni cura cauendum, ne maſſae electrificandae corpora acuta, deriuatiuae electricitatis, infinita, vicina ſint. Quodſi enim pes circini teneatur in diſtantia 6 digitorum a maſſa ad gradum e. g. quadrageſimum electrificata, filum indicis continuo et celeriter deſcendere incipit. Quodſi vero caput circini, vel aliud quodcunque corpus obtuſum maſſam electrificatam verſus dirigatur, tardior fili acceſſus ad regulam obſeruabitur, licet corpus obtuſum propinquius admoveatur, quam acutum admotum erat. Eadem res curioſo ſpectaculo confirmatur, ſi ſuberis fruſtum ex filo ſerico ſuſpendatur prope maſſam electrificatam. Notum eſt, illud repelli debere

debere, attractione praecedente. Hoc facto, teneatur in diſtantia quinque vel ſex digitorum a ſubere circini pes, et accedet ſtatim ad maſſam electrificatam ſuber, euidenti indicio, illud electricitatis iacturam paſſum eſſe, et adhaerebit maſſae electrificatae ſimiliter: ponatur dein digitus inter pedem circini et fruſtum ſuberis, digitusque adpropinquetur ſuberi, et accedet ſuber ad digitum, nempe corpus electrificatum ad non electrificatum. Hoc repetitis vicibus fieri poteſt.

4.) In medio ſicciſſimo, quantum poteſt, experimenta electrica ſunt inſtituenda: humidum aerem electricitati officere ab omnibus ferme notatum eſt, neque dubito genuinam rationem, cur fiat, allatam fuiſſe, licet mihi non innotuit, ſi quis fuerit. Si medium eſt humidum, humiditates a maſſa electrificata attrahuntur, et non facile ſeparantur, nec repelluntur ob cohaeſionem. Quatenus tamen humiditates maſſae electrificatae adhaerent, nullum decrementum electricitatis oritur, niſi guttulae illapſae aqueae, admotis aliis corporibus obtuſis infinitis, conicam figuram nanciscantur, et conos lucidos emittant. Decrementum iſtud oritur potius ob fulcimenta humectata, quae electrificata per communicationem eodem attrahunt humiditates, ac corpora deriuatiuae electricitatis electrificata. Iſta humectatio eo promtius fit, quo electricitas efficacior excitatur, et haec eſt ratio, cur electricitas in frigido conclaui ſpectatoribus multis praeſentibus initio ſat valida ſit, mox tamen decreſcat et interdum ceſſet. Humiditates enim ex ſpectatoribus praeſentibus per tranſpirationem inſenſibilem emiſſae attrahuntur a fulcimentis corporum electrificatis, quae mutantur in corpora deriuatiuae electricitatis infinita.

Confirmatum fuit hoc egregie experimento, cui occaſionem dedit Collega honoratiſſimus Vir Ampliſſimus Lomonoſſow, dum tres portiones vitri, in puluerem diuerſae ſubtilitatis triti, ſumſi eum in finem, vt examinarem, vtrum puluеres triti mutarentur in corpora deriuatiuae electricitatis? an ſuam indolem etiam triti retinerent? Examinaui rem, et vidi corpora iis ſuffulta electrificari nullo modo potuiſſe, ne vero humiditates forte adhaerentes in culpa eſſent, in fornace calefeci valde, et repetito experimento obſeruaui, pulueres hos indolem ſuam retinuiſſe, et originariae electricitatis manſiſſe. Continuata tamen electrificatione, puluis ſubtilior breuiori tempore in corpus deriuatiuae electricitatis mutabatur, quam puluis craſſior, indicio probabili, puluerem ſubtiliorem ob ſuperficiem maiorem plus humiditatis eodem tempore attrahere, quam puluerem craſſiorem. Ne vero aliquis obiiceret, calorem in culpa eſſe, non humorum abſentiam, cur vitrum in puluerem tritum originariae electricitatis ſit, et frigidum forte perpetuo deriuatiuam electricitatem habere, ſequenti ratione rem extra omnem dubitationis aleam poſui. Vitri puluerem in phiala vitrea calefeci, et obturaui bene ſubere collum: ſuberem perforaui binis in locis, per foramina transmiſi tubulos vitreos: per tubulos vitreos traieci fila metallica, donec contingerent puluerem vitri in duobus diuerſis locis. Alteram extremitatem vnius fili metallici cum maſſa electrificata coniunxi, alteram alterius fili mettallici extremitatem ligaui cum corpore infinito deriuatiuae electricitatis, et electrificaui maſſam, calida etiam phiala et puluere, et poſtea phiala et puluere frigidis: electricitas

vtro-

vtroque caſu inſignis excitabatur, quod non fieri potuiſſet, ſi puluis frigefactus deriuatiuae electricitatis euaſiſſet. Quo tardius ergo electricitas lagenae Muſchenbrockianae decreſcit, caeteris paribus, eo ſiccius debet eſſe medium, quo lagena circumdata eſt.

5) Diminuitur electricitas inſigniter, regula vel filo metallico lagenae praedictae Muſchenbrockianae adplicato ad maſſam electrificatam, et lagena in corporibus originariae electricitatis poſita; conſeruatur vero, ſi imponitur corporibus deriuatiuae electricitatis valde capacibus infinitis: filum indicis enim multo celerius deſcendit priori caſu, quam poſteriori. Quodſi lagena fundo eius vaſe metallico armato ponatur in fulcimento ſicco vitreo et regula lagenae maſſam electrificatam contingente, gradus electricitatis obſeruetur, et deinde tangatur vas, fundum lagenae cingens, continuo electricitas per multos gradus augetur. An hic ex corporibus deriuatiuae electricitatis infinitis materia electrica noua per parietes lagenae electricitate affectos accedat, et decrementum materiae electricae corporis electrificati compenſet? an vitri craſſities impediat acceſſum huius materiae? an potius motus in lagena praedicta productus vel potius in particulis eius minimis conſeruetur, ſi lagena in metallo collocetur, et citius retardetur, ſi in vitro ponatur, vel alio corpore originariae electricitatis? dicere non audeo. In ſequentibus electricitatem, adplicata lagena Muſchenbrockiana productam, vocabo compoſitam, et ſine ea ſimplicem. In electricitate ſimplici perpetuo obtinet, corpus electrificandum eſſe ſuffulciendum corpore originariae electricitatis, ſi electricitatem ſuam per notabile tempus

ſine motu et tritu vitri electrificatorii conſeruare debeat. Infinitum ſiue non ſuffultum corpus per breuisſimum ſolum momentum temporis electrificatur. Quodſi enim maſſa vehementer electrificata eſt, et ceruix, e. g. hominis, non ſuffulti corporibus originariae electricitatis, et percutientis ferrea virga maſſam electrificatam, tangitur leuiter ab alio corpore, deriuatiuae electricitatis, infinito, ictum quendam tangens ſentit, et inter digitum et ceruicem lumen in tenebris cernere licet, indicio ſatis certo, electricitatem communicatam eſſe cum corpore, quod percuſſerat maſſam electrificatam. In electricitate compoſita, ſi metallum, cum lagenae fundo armato filo metallico iunctum, ſcintillis electricis percutitur, et metallum iſtud vel filum tangitur, tremor ſentitur et concuſſio, licet metallum corpus infinitae connexionis ſit cum aliis deriuatiuae electricitatis corporibus. Et filum metallicum, dum metallum prouocat ſcintillam ex corpore electrificato, ipſum reddit ſcintillam, ſi tangatur.

Decreſcit ergo electricitas maſſae finitae

1) Ob angulos ſolidos maſſae electrificatae.
2) Ob corpora deriuatiuae electricitatis alia infinita inprimis acuta vicina.
3) Ob humiditates ad fulcimenta attractas.
4) Ob lagenam Muſchenbrockianam in corporibus originariae electricitatis poſitam et regulam eius ad maſſam electrificatam adplicatam.

Quaeri hic poteſt: an non etiam ab inaequalitate ſuperficiei, maſſarum, denſitatum et conſtitutiuarum partium corporum electrificatorum decrementi electricitatis diuerſitas ori-

oriatur ? Ad has quaestiones tamen ob penuriam experimentorum respondere nondum licet. Decrescente vero electricitate minuitur volumen materiae electricae agitatae, dum filum indicis descendit, donec corpus iam nulla materia electrica agitata cingatur amplius, tempusque descensus fili per spatia diuersa definiet forte tandem legem decrementi electricitatis, si modo curua, quam filum facit, et ex curua ratio efficacitatis materiae electricae in diuersis a superficie corporis distantiis definiri possit. Neque difficile est intellectu, hac ratione cognita, indicem mutari in perfectum electrometrum.

Dixi ad perfectionem indicis facere, vt electricitas, eo adplicato ad corpus, quantum potest, conseruetur, et ostendi, quomodo hoc, adhibito indice descripto, obtineatur. Nec silentio praetereundum credo alterum indicis requisitum, vti nimirum commode tolli possit a corporibus electrificatis, et quibuscunque aliis electrificatis adplicari ad gradum electricitatis cognoscendum. Hoc requisito caret, vti facile patet, index descriptus, non tamen ita, vt nullum rei remedium afferri possit. Paucis nunc exponam, qua ratione huic incommodo obviam iri possit.

Lagenula parua vitrea ABC, colli angustioris et cylindrica, tenuium parietum, cum limatura martis, rasura cuiuslibet metalli, vel globulis plumbeis minimis ad dimidiam altitudinem impleatur, deinde regula metallica KN immittatur in lagenulam, donec fundum tangat, ita vt circumdata sit limatura martis, et obtineat verticalem situm, atque in collo lagenae bene firmetur TAB. VIII. Fig. 2.

subere,

subere, ne vacillet. Ad extremitatem partis regulae prominentis ex lagena, quae 12 digitorum sit, ligetur filum tenuissimum KM, certi ponderis, e. g. dimidii grani medici, quod tantum non tangat collum lagenulae. Lagenula immitatur vasi metallico FGBC tenui, arctissime lagenulam contingenti. Vasis metallici altitudo non superet dimidiam altitudinem lagenulae. Cum vase metallico connexa sit ansa GCDE, sustinens arcum circuli ligneum HEI, in 170 gradus diuisum, ita locatum, vt (1) centrum arcus coincidat cum puncto regulae, vbi filum est ligatum, (2) regula continuata supremam arcus extremitatem stringat, et (3) fili linei extremitas inferior lineam vnam ab arcu distet. Vt regula metallica adplicari possit quibuscunque corporibus electrificatis, firmetur ad extremitatem lamella metallica incuruata LK. Quodsi hoc instrumentum prehensa ansa ad massam electrificatam adplicetur, lamella incuruata massam tangente, regula electrificabitur, et ob paruam regulae massam, electricitas massae maioris electrificatae vix inde electricitatis decrementum patietur, filum a regula repelletur, et gradus arcus circuli, quem versus dirigitur, gradum electricitatis notabit. Remoueatur instrumentum et tangatur digito regula ex lagenula prominens, vix aliquid electricitatis residuum erit: adplicetur alii massae electrificatae examinandae, quae electricitatem maiorem vel minorem habet, quam prior massa habebat, et filum regulae respiciet alium gradum maiorem vel minorem. Hoc indice mihi nondum quidem vti licuit, attamen minime dubito, illum in multis occasionibus in experimentis electricis commode adhiberi posse; praesertim cum lagena Muschenbrockiana

ele-

electricitatem per aliquot horas conferuet. Quaecunque ergo phaenomena definire licuit, ea definita funt indice priori.

Propero nunc ad alteram dissertationis partem, in qua phaenomena praecipua, quae indice descripto aliqua ex parte definiui, recensere constitui. Docuit me index descriptus

1.) Corpus tritu excitans electricitatem diuersum esse debere et separatum a corpore recipiente electricitatem, si notabilis electricitas est producenda. Quodsi enim ex vna parte vitri electrificatorii homo in resina stans, corpus recipiens electricitatem ex altera parte vitri recte suffultum tangit, siue machina et homo rotam agitans in resina stent, siue non, vix paucorum graduum electricitas in massa electrificanda produci potest, si simplex electricitas excitatur, et si composita electricitas est impertienda massae, nulla electricitas tritu vitri electrificatorii producitur. Aliter se res habet, si corpus recipiens electricitatem ab eo, quod excitat electricitatem, separatum est, et ab hoc non contingitur. Sic enim filum indicis cito eleuatur et scintilla vehemens oritur, si corpora sese mutuo tangunt, neque tali tactu omnis electricitas cessat, sed tantum debilitatur: plurium graduum electricitas residua obseruatur, quae sensim decrescit. Hoc fit siue machina et homo rotam agitans in resina stent, quo casu tamen electricitas difficilius excitatur, siue minus. Vehementia scintillae hic non augetur cum differentia electricitatum, vti alias, sed potius maior esse videtur, si summa electricitatum est maior. An ergo hoc casu particulae electricae materiae magis ad corpora originariae electricitatis accedere debere facile intelligitur. Hinc etiam cognosci potest ex indice, quae vitra sint optima ad electricitatem producendam. Quodsi enim electricitas excitatur in massa quadam, et notetur tempus, quo a gradu certo ad gradum alium filum indicis descendit, et dein electricitate denuo excitata, et vitro examinando sicco ad massam electrificatam adplicato, ita, vt ex vna parte massa electrificata, ex altera parte massa non electrificata infinita vitrum contingat examinandum; si notetur rursus tempus, quo ab eodem gradu, quo in priori casu, ad eundem gradum accedit filum indicis, inueniaturque tempus prius aequale esse posteriori, vitrum deprehendetur ad electricitatem producendam idoneum; quodsi vero maius obseruetur temporis spatium, saltem non ita bonae notae erit ac vitrum, quo excitata est electricitas. Hinc Celeb. *Ialabert* detexit, vitra electricitati tritu producendae inepta per communicationem electrificata dare lumen fulgentius, quam ea, quae electricitati tritu producendae aptissima sunt. Facile etiam patet, ea vitra maximo cum successu fulcimentis corporum electrificandorum inseruire, quae per communicationem difficulter et parum electrificantur.

6.) Supra iam monui, indicem ostendere, cum differentia electricitatum vehementiam scintillae augeri, si nempe homogeneae electricitatis sint corpora; aliter enim satis vehementem scintillam produci monui, si nulla electricitatum differentia prodatur indicibus, nempe si excitans electricitatem in resina stet, et non connexum sit cum recipiente electricitatem. Cum differentia electricitatum vehementiam scintillae augeri, sequenti ratione experiri

experiri licet. Electrificetur massa electricitate composita, et insistat aliquis resinae, tangatque massam electrificatam, scintilla vehemens orietur, et homo ipse electrificabitur, filo parum ad regulam accedente. Remoueat manum idem homo, et rursus adplicet, nulla mutatio indicis neque scintilla obseruabitur, quia corpora aequali gradu electrificata concurrunt. Quo facto, excitetur massae electricitas rursus, donec filum ostendat priorem gradum, et dem homo resinae insistens et minori electricitate praeditus, quam massa electrificata, tangat massam electrificatam, scintilla erit debilior, quam primo casu, vbi homo non electrificatus massam electrificatam tangebat et homo electricitatem maiorem nanciscetur, quam priori casu habebat. Excitetur tertio electricitas massae, donec idem gradus, qui initio erat, filo notetur, et idem homo resinae insistens, minori gradu electricitatis praeditus, tangat massam electrificatam, aliquanto minor scintilla orietur, quam praecedentibus casibus, et homo maiorem rursus electricitatem habebit, quam antea, differentiaque electricitatum inter electricitatem massae initio excitatam et hominis minor minorque euadet; hoc continuari potest, donec differentia electricitatum fiat aequalis nihilo, quo casu nulla scintilla oritur. Tali ergo ratione satis patet cum differentia electricitatum scintillae vehementiam decrescere. Vltimae enim scintillae ita paruae et debiles sunt, vt non nisi in tenebris attente consideranti appareant.

7.) Simplici electricitate fluida inflammabilia non nisi calefacta accendere potui; composita vero electricitate, si filum ostendebat gradum trigesimum, spiritum vini

re-lagenae, in resina sustentatae, et vibrationes electricas exercentis, materiae subtilis particulae contrario motu agitantur? et hinc, quando sese contingunt, colliduntur aequalibus ferme celeritatibus, directionibus directe oppositis, et ita vehementem concussionem cum totali ferme electricitatis exstinctione producunt?

Tab. VIII. Fig. 3. 3.) Edoctus sum indice, alternatim ex vno corpore quasi extrudi posse electricitatem in aliud corpus. Quodsi enim ex vtraque parte lagenae Muchenbroeckianae A B C, cuius fundi externa superficies vase metallico B C D E armata est, in vitreo plano F G H I positae massae recte ex corporibus originariae electricitatis suspensae K L et M N adsint, indicibus similibus et aequalibus O Q X R ac S V U W, et vna massa tangat regulam Z A lagenae Muschenbroeckianae, et altera vas metallicum D E B C lagenam cingens, excitata in vna massa electricitate tritu vitri electrificatorii, eadem excitatur etiam in altera, quod indices produnt. Quo facto, si tangatur massa K L a vitro electrificatorio immediate electrificata, perit eius electricitas, et filum O P sese regulae adplicat, et per momentum etiam filum indicis alterius S T se adplicat regulae suae, mox tamen restituitur electricitas in massa vltima M N, quod repulsio fili ostendit. Quodsi nunc rursus haec massa tangatur, filum indicis sese adplicat regulae, et massa ex altera parte lagenae electricitatem nanciscitur, quod filum repulsum ostendit. Hoc sine motu machinae, si electricitas est vehemens, alternatim vel decies fit sine totali electricitatis extinctione. An hic infinitum corpus tollit motum particulis vitri, vel particulis electricae materiae,

particulis

particulis vitri adhaerentis, impressum ab vna parte superficiei lagenae, et facit, vt ex altera tantum parte superficiei fiat? An reuera conceditur materiae cuidam transitus ex infinito corpore in corpus finitum per lagenae parietes electricitate affectos?

4.) Obseruaui, massae maioris electricitatem durare diutius, quam massae minoris, si eodem filo metallico cum vitro electrificatorio iungantur: diuersis enim temporibus filum ad regulam reuertitur. Tempora vero haec nulla ratione obseruata sunt in ratione massarum. Deinde cognoui, massae maiori electrificatae certam massam saepius adplicari posse, antequam tota electricitas exstinguatur, quam minori massae eodem gradu electrificatae, summam tamen massarum, quae maioris massae electricitatem tollit, non esse multo maiorem, quam summam massarum, quae minoris massae electricitatem auffert, consequenter summas has prorsus non esse in ratione massarum electrificatarum. An ergo, ob volumen materiae electricae agitatae in maiori massa maius, electricitatis decrementum tardius fit? hoc tum demum inquirere animus est, quando corpora magnae superficiei adhibere licebit eiusmodi, quorum volumina materiae electricae agitatae facile definiri poterunt.

5.) Cognoui hoc indice, commode inueniri posse, quae corpora deriuatiuae electricitatis capacia sint gradu vel maiori, vel minori; si adplicatis iis ad massam electrificatam et per corpora deriuatiuae electricitatis infinita suffultis, tempora accessus fili ad regulam notentur: quo enim minus est hoc tempus, eo magis ea ad corpora deriuatiuae electricitatis, et quo maius est tempus, eo corpori excitanti electricitatem adhaerentes contrarium et directe oppositum motum nanciscuntur ei, quem particulae electricae materiae corporis recipientis electricitatem habent, vt actio mutuo occursu particularum fiat vehemens et scintilla concrepans efficax. Idem confirmatur, si lagenae vitreae, cylindricae, tenuissimorum parietum, qualem Fig. 2. exhibet, siccissimae ab homine resina suffulto, vel non suffulto, siccissima manu leuissimo ductu demulceantur quasi. Virgae enim ferreae, ad quarum extremitates fila linea sunt ligata, lagenis exceptae, electrificantur ita, vt fila ab iis repellantur, et scintillae ex iis concrepantes eliciantur.

TAB. VIII. Fig. 2.

Obtulit se mihi tamen phaenomenon, quod modo dictis repugnare videtur. Particulae argenti viui sicci, per vitrei infundibuli pariter sicci paruum foraminulum in lagenam vitream siccam tenuium parietum illapsae, et etiam a fundo vel ipso argento viuo reflexae in parietes lagenae impingentes, producunt collisione ad vitrum electricitatem, quae deriuatur in argentum viuum in fundo lagenae collectum et in regulam ferream, remoto infundibulo ope funiculi serici, in argentum viuum per orificium lagenae immersam: filum enim lineum ex regula pendens repellitur, tactaque regula scintillae concrepantes oriuntur. Quodsi vero res bene consideretur, guttulae argenti viui impingentes in parietes vitreos minime contingunt argentum viuum in fundo lagenae stagnans; hinc momento collisionis particulae argenti viui, excitantes electricitatem, a particulis argenti viui, quae recipiunt electricitatem, separatae sunt. Simul intelligitur in atmosphaera allapsu et collisione par-

particularum deriuatiuae electricitatis ad particulas originariae electricitatis, has electrificari, et electricitatem ab iisdem cum aliis deriuatiuae electricitatis, ad eas attractis, communicari posse. Minime enim dubitandum, originariae et deriuatiuae electricitatis corpuscula in atmosphaera interdum magna copia et ita adesse, vt electricitas produci possit, cum reuera in ea electricitas cum massis rite suffultis communicetur, vti ex sequentibus videbimus.

2.) Deprehendi regula lagenae Muchenbroeckianae indice instructa et electrificata imaque parte lagenae vase metallico armata, si aliquis in resina stans lagenam manu sustentet, et deinde ad regulam alteram manum adplicet, vehementem oriri scintillam et concussionem in vtroque brachio, fere nullam tamen electricitatem post concussionem in regula et in homine obseruari. Filum enim prope regulam ferme ignauum pendet. Phaenomenon detexit *Franclinus*, naturalis electricitatis inuentor, absque indice adhibito, et totalem electricitatis post concussionem exstinctionem fieri asseruit, quod ego non obseruaui, sed perpetuo in regula sensibilem electricitatem inueni, manu a regula remota, et lagena armata in corporibus deriuatiuae electricitatis posita. *Franclinus* hic statuit negatiuam electricitatem et positiuam, superficiem lagenae e. g. externam negatiua electricitate et internam positiua electricitate gaudere, et si virtutes tales contrariae aequales concurrant, electricatatem fieri nihilo aequalem. Difficillimus mihi tamen videtur conceptus electricitatis negatiuae, nisi statuatur, vti in mechanicis, motum materiae electricae, contraria directione factum, esse motum negatiuum. An ergo ex vtraque parte rectificatum et Petroleum temperiei 75 graduum Therm. Far. vnica ſcintilla accendere licuit; vaſe nimirum metallico, cui infuſus erat liquor accendendus, iuncto cum fundo lagenae armato per filum metallicum, et corporis electrificati accendentis electricitate a ſuperficie liquoris duas lineas diſtante. Poterunt hinc particulae inflammabiles in atmoſphaera telluris natantes, ſcintillis electricis, ſi quae in illa generentur, accendi.

8.) Vapores aqueos ſubtiliſſimos non deriuare electricitatem ſenſibiliter, ſequenti ratione expertus ſum: Vapores aqueos ex Aeolipila emiſſos in maſſam electrificatam direxi, Aeolipila cum aliis deriuatiuae electricitatis corporibus, non ſuffultis corporibus originariae electricitatis, connexa, et fili directio non mutabatur ſenſibiliter. Neque vapores ex Aeolipila electrificata emiſſi electricitatem cum aliis in reſina poſitis ſenſibiliter communicarunt. Limatura martis mixta cum maſſa aequalis ponderis ex cera et reſina facta, et maſſa hinc formata cylindriformi, adplicata ad maſſam electrificatam manu, filum indicis non vidi notabiliter deſcendere; vnde iudicaui, corpora deriuatiuae electricitatis, niſi ſint contigua, non tollere electricitatem maſſae electrificatae ſenſibiliter; vnde nec vapores ſubtiliſſimi in aere hoc efficere poterunt. Intelligi ergo poteſt, cur corpora deriuatiuae electricitatis, originariae electricitatis corporibus ſuffulta in atmoſphaera, vaporibus grauida, electrificari poſſint.

9.) Inter plura corpora vna ſerie ſeſe excipientia ſucceſſiue interuallo temporis breuiſſimo ſcintillas concrepantes plures generari, ſequenti experimento edoctus ſum: Impreſſi maſſae ex cera cum reſina mixta

clauu-

clauulos cum capitulis aurichalceis in distantiis a se mutuo minimis e. g. vnius quartae partis lineae, arbitraria serie, literam quandam vel aliam figuram repraesentante dispositos, et cum altero extremorum clauulorum ligaui filum metallicum tenuissimum cum fundo lagenae armato iunctum, cum altero vero filum metallicum simile cum massa electrificata connexum. Electricitate deinde excitata tanta, vt filum quadragesimum gradum ostenderet, iucundo spectaculo inter quemlibet clauulum scintilla cum concrepatione exhibebatur. Dum enim clauuli omnes sibi mutuo vicini electrificantur praeter vltimum, qui corpus deriuatiuae electricitatis infinitae connexionis est, inter clauulum hunc vltimum et ei vicinum debet oriri scintilla; ita vero clauuli vltimo proximi electricitas perit: oriri ergo debet inter hunc et ipsi vicinum noua scintilla, et rursus noua inter hunc et sequentem, etc. donec omnes scintillae vsque ad clauulum vltimum generentur. Absoluitur vero hic successiuus scintillarum ortus breuissimo temporis spatio; hinc non mirum est, vt figura ex punctis lucidis ea serie se excipientibus, qua clauuli dispositi sunt, constans, repraesentetur. Quodsi continua lux desideretur: aliud quodcunque corpus deriuatiuae electricitatis infinitum clauulo adplicetur filo metallico, a fundo lagenae Muschenbrockianae ducto, remoto. Serpentinum fulminis ductum simili ratione variis nubibus electrificatis concurrentibus generari concipi poterit, Index ostendit

10.) Vacuum ab aere spatium in tenebris lumine electrico facile impleri, quod sequenti ratione obseruari poterit. Tubum Torricellianum phosphorescentem tabulae ligneae adplicatum, quae ex ſerico funiculo ſuſpenſa erat, electricitate compoſita electrificaui, argento viuo cum maſſa electrificata, per filum ferreum, per lumen inferius tubi ſurſum hians mercurio immerſum, iuncto, ita vt filum ferreum ibi, vbi ingrediebatur tubum, lineam a tabula lignea diſtaret. Dum electricitas excitabatur, continua in vacuo tubi fulgura et mutum lumen abſque omni mercurii oſcillatione oriebantur in tenebris, ceſſanteque vitri electrificatorii motu, tacta tabula, quae inter tangendum lumen praebebat, aliquoties adhuc provocabantur. Quodſi vero non tangebatur tabula, interdum ſponte vel centies oriebantur fulgura in vacuo, interuallo temporis inter duo fulgura interdum centum minuta ſecunda ſuperante. Quin tacta maſſa compoſite electrificata, et indice gradum nullum oſtendente, lumen interdum in vacuo tubi ſiſtitur, indicio certo, nondum electricitatem maſſae prorſus exſtinctam, ſed reſiduam eſſe, quae vacuo tubi Torricelliani illuminando ſufficiat. Simplici electricitate fulgura in vacuo pariter producuntur, ſponte tamen finito vitri electrificatorii motu rarius apparent. Nonne etiam fulgura in rariori aeris regione abſque inſequenti Tonitru debili electricitate oriri poterunt? nonne item aurorae boreales? Index docuit porro

11.) Electricitatem catenae Longit. 66 pedum Lond. et ponderis 9 librarum hyeme decreuiſſe a gradu 45. ad gradum 0 quatuor horis, aeſtate vero electricitatem celerius exſtingui. Speraui etiam, me aliquam legem decrementi electricitatis ope huius indicis ſtabilire poſſe. Hunc in finem obſeruaui tempora deſcenſus fili maſſae ele-

electrificatae certo gradu et gradus descensus. Initio videbar mihi obseruare egregiam harmoniam, ast postea repetito saepius experimento minime. Hoc solum animaduerti, filum motu, certa lege retardato, accedere ad regulam. Docuit index

12.) Massam quandam cum acuta extremitate rite suffultam in vicinitate corporis a globo electrificatorio immediate electrificati, ita, vt acuta extremitas corpus electrificatum versus dirigatur, et ab eo plures digitos distet, electrificari. Sensim sensimque enim filum indicis tali massae adplicati ascendit. Quodsi tollitur electricitas corporis immediate a globo electrificati, etiam sensim massae cum acuta extremitate electricitas languescit. Phaenomenon hocce et varia praecedentia ducunt nos ad naturalem electricitatem considerandam, quae phaenomenis allatis perpensis, quomodo generetur, non difficulter intelligitur.

Electricitas haec naturalis nouissime detecta nostra contemplatione dignissima est. Oriri videtur in atmosphaera collisione particularum deriuatiuae electricitatis in corpuscula originariae electricitatis, quae hac ratione electrificata cum aliis deriuatiuae electricitatis corpusculis, nubes multitudine constituentibus, electricitatem communicant. Philadelphiae in America praedictus *Francklinus* sagacissimus inexpectati phaenomeni proditor fuit, et nunc de rei veritate obseruationibus passim in Europa euulgatis prorsus non dubitare licet, quilibetque, qui ferrum acutum ex serico funiculo suspendere valet, vel vitro et resina fulcire, de illa conuinci poterit. Suspicatus quidem erat iam anno 1735 Cl. *Gray*, qui inter primos et praecipuos Phaenomenorum electricitatis inuestigatores locum habet, lumen et ignem electricum naturam fulminis et tonitru habere, et Cel. Vinckler Lipsiensis tractatum edidit anno 1746, in quo idem demonstrare laborauit. Imo obseruationes quaedam remotissimis ab hinc temporibus sagacitatem naturalis scientiae cultorum praecesserunt. *Iulius Caesar* de bello Africano Cap 47. describit tempestatem quandam, *nimbum cum saxea grandine subito esse exortum, et pilorum cacumina arsisse* referens. Verisimile admodum videtur, atmosphaeram electrificatam cum cacuminibus pilorum communicasse electricitatem, vt iis lumen conicum caeruleum continuum adhaeserit, quare ardere visa sunt. Huc etiam pertinere videtur locus *Liuii* Lib. XXII. Cap. 1. vbi dicitur, in Sicilia militibus aliquot spicula, et in Sardinia in muro circumeunti vigilias, equiti scipionem, quem manu tenuerat, arsisse. Principem locum, qui huc pertinet legimus in *Senecae* Naturalium quaestionum L. 1. vbi scribitur: *In tempestate magna apparent quasi stellae velo insidentes, adiuuari se tunc periclitantes existimant Castoris et Pollucis numine.* Deinde: *Gylippo Syracusas petenti visa est stella super ipsam lanceam constitisse. In Romanorum castris visa sunt ardere pila ignibus scilicet in illa delapsis, quae saepe fulminum modo animalia ferire solent et arbusta, et si minore vi mittuntur defluunt tantum et insidunt, non feriunt nec vulnerant.* Hic ignis forte concrepans electricus ab igne continuo cum susurro discernitur, illle enim percutit et vulnerat, hic nullo modo.

Si-

Similis obseruationis nostris temporibus mentio facta est in nouis publicis: nimirum Academiae Parisinae relatum esse, crucem turri templi Plauzatensis in Gallia impositam ferream, cuius finis repraesentant flores lilii extremitatibus acutissimis, tempestate densissimis nubibus et frequentia fulminum terribili conspicuam esse ita, vt iuxta quamuis extremitatem lux appareat, traditioneque bene longa 27 annorum constare, rarissime fulmine damnum afferri vrbi et locis vicinis, si prope crucem lumen praedictum appareat. Idem ergo, quod remotissimis temporibus obseruatum est, etiam recentissimis confirmatum videmus. Simili etiam confidentia praediti esse videntur ciues Plauzatenses, ac nautae remotissimis temporibus, erant, qui, dum in tempestate lumina velis insidentia obseruabant, adiutos se existimarunt. Nullum est dubium, si obseruatio ciuium Plauzatensium haec est vera, crucem turris Plauzatensis ab atmosphaera electrificatam corporibus originariae electricitatis suffultam esse.

Non minus afferri huc meretur illud, quod Cel. *Muschenbrockius* Exp. 106. in Diss. de magnete scribit; nimirum aliquoties annotatum esse, fulmen prope Versorium delatum huius directionem prorsus immutasse, ita vt polus septentrionalis euaserit australis. Anno 1736 die 24 Iulii Vltraiecti Batauorum obseruatum erat declinationem auctam fuisse 10. minutis, et a Cel. *Kraftio* Tubingae an. 1745 die 31. Aug. obseruatio notata confirmata, dum declinatio acus inter tonitrua et fulmina 15 min. diminuta fuit. Quantum mihi constat, scientiae naturalis amatoribus tunc temporis defuit ſagacitas perſpiciendi, vel potius nondum auſi ſunt aſſerere, eiusmodi variationem acus magneticae electricitati in atmoſphaera productae deberi, quod mihi quidem nunc veriſimillimum eſt. Acus enim magnetica ordinarie fulcitur theca lignea ſicca, et lignum ſiccum inter corpora originariae electricitatis, ſaltem inter corpora deriuatiuae electricitatis minori gradu capacia, locum habet. Dum ergo inter fulmina, obſeruator declinationis acus ſe adpropinquare debet acui, fulmine electrificatae, attrahere debet acus extremitatem viciniorem; hinc acus directionem naturalem deſerere debet, niſi obſeruator exacte in plano iſto ſtet, in quo acus naturaliter quiescit. Hic boni publici cauſa ſubiungere liceat, quomodo effici posſit, vt acus magneticae directio in naui, inter fulmina et tonitrua vel electricitate naturali, non turbetur. Filum metallicum quodlibet praeter ferreum connectatur cum ſtylo acuminato, qui ſuſtentat capitellum aurichalceum acus, et ducatur ita, vt altera extremitas fili metallici contingat aquam. Tali ratione acus mutatur in corpus deriuatiuae electicitatis capax infinitae connexionis cum aliis ſimilibus, et electrificari haud poteſt ita, vt electricitas per notabile tempus conſeruetur, conſequenter nec directionem ſuam relinquere poterit, corpore non electrificato alio accedente.

Electricitas haec naturalis certe ita comparata eſt, vt non mirandum eſſet, ſi nonnulli attoniti magis et ancipites inſolitum hoc phaenomenon comtemplarentur, quam vt de circumſtantiis phaenomeni definiendis ſolliciti eſſent. Poſſet enim alios horror quidam naturalis, alios metus ab educatione generatus, ab alteriori inquiſitione

deter-

deterrere. Hinc illae quaeſtiones oriuntur: vtrum obſeruationes eiusmodi abſque periculo inſtitui poſſint? et annon a corporibus materia fulminea electrificatis tremendus fulminis effectus produci, et periculum imprudentiſſima arte adduci poſſit? Iſte horror et metus, ſi auferri poteſt, certe non aliter fiet, niſi vt oſtendatur, obſeruationes eiusmodi abſque periculo inſtitui poſſe, et remedium afferri, ſi periculum adſit. Hoc vero, ſi remedio res non careat, efficere nemo poterit, niſi qui multis antea obſeruationibus et experientiis edoctus fuerit, cur et quibus ſub circumſtantiis fulmen periculoſum euadat. Patet ergo dari his nouiſſimis temporibus etiam Phyſicis occaſionem, qua fortitudinem quandam oſtendant, et in re ancipiti audaciam. Hinc cum mei officii ſit in res naturales, quantum in me eſt, inquirere, nihil me ab obſeruationibus eiusmodi abduxit; hinc nullam occaſionem omiſi, qua electricitatis naturalis phaenomena non ſolum obſeruare, ſed etiam aliquatenus definire liceret. Iam anno ſuperiori expertus eram ſine indice idoneo, effectum electricitatis naturalis. Hoc anno vero omnia praeparaui, vt ſub determinatis circumſtantiis phaenomena contemplari poſſem.

Elegi catenas duas ferreas longitudine 66 ped. Lond. et ponderis 9 librarum. Vtriusque catenae extremitatem alteram ex fune ferico ad altitudinem 40 circiter pedum Lond. ſuper ſuperficiem fluuii Neuae ſuſpendi, et omnia ita inſtruxi, ne pluuia humectarentur funes ferici, et vti catenas commode dimittere et eleuare poſſem: alteram extremitatem debita cautione in conclaue, vbi obſeruationes inſtituere volebam, duxi, et fune ferico cum clauo

parieti

parieti infixo iunxi. Catenae vtrique adplicui indicem aequalem. Vnius catenae extremitati virgam ferream cum acuta extremitate coniunxi, obſeruauique

1) Electricitatem maiorem communicatam cum catena, cui virga cum acuta extremitate erat coniuncta, quam cum altera. Catena abſque virga acuta propter domicilium, ſuper cuius tegmine ex palo ſuſpenſa erat, in variis aedificii partibus ad funiculos ſericos alligata erat, vt hinc et inde anguli orirentur. Ne ergo obiici poſſet, non obtuſam extremitatem in culpa eſſe, ſed directionis multiplicem mutationem, cur hoc caſu electricitas debilior orta ſit, quam eo, cum catenae ſuperioris extremitas cum virga ferrea acutae extremitatis coniuncta erat, alia occaſione virgam cum acuta extremitate a catena, cui adplicata erat, remoui, et cum altera coniunxi, cuius extremitas antea obtuſa erat. Euentus autem obſeruationis erat idem, qui ante, et rurſus catena cum obtuſa extremitate electricitatem debiliorem naneiscebatur. Suborta eſt ſuſpicio noua, nimirum differentiam altitudinum paruam in culpa eſſe poſſe, cur diſcrimen praedictum adſit; hinc catenam cum virga acuta de induſtria ad paulo minorem altitudinem dimiſi, et nihilominus electricitas huius catenae maior obſeruabatur, quam alterius. Acutum corpus citius electrificari, quam obtuſum ex artificialis electricitatis phaenomenis ſatis intelligitur. Quodſi enim corpus acutum recte ſuſſultum volumini materiae electricae agitatae corporis arte electrificati immerſum eſt, et cum acuta extremitate corpus electrificatum verſus dirigitur, electricitas corporis electrificati decreſcit, et corpus acutum propinquum electrificatur.

Quodſi

Quodſi cum obtuſo corpore idem fit, electricitas corporis electrificati tardius decreſcit, et corpus obtuſum difficilius electrificatur. Hinc non dubitandum, virgam ferream acutam recte ſuffultam corporibus originariae electricitatis et atmoſphaerae electrificatae expoſitam immerſam eſſe volumini materiae electricae agitatae, quae nubem electrificatam virgae vicinam cingit.

2) Obſeruaui catenae electricitatem non augeri ob eius longitudinem. Adhibui 130 pedum Lond. catenam; electricitas tamen non erat maior, quam catenae 66 pedum.

3) Vidi, electricitatem naturalem manere interdum integram per quartam ferme horae partem, licet ſaepius interea temporis tangeretur catena; et Vir Ampliſſimus Lomonoſow obſeruauit ſine omni tonitru et fulmine electricitatem inſignem communicatam eſſe cum ferro recte ſuffulto.

4) Dum tonaret, electricitatem productam vidi diminui et interdum ceſſare, ita, vt filum indicis regulae adhaereret. Hoc etiam Berolini a Cel. Ludolffo obſeruatum eſt praecedenti anno, et quidem electricitatem proxime ante fulmen fuiſſe maximam et fulmine producto diminutam, interdumque prorſus exſtinctam. Obſeruaui

5) cum ipſo fulmine et tonitru electricitatem catenae ortam eſſe, et poſt fulmen et tonitru ſubito minutam: dum hoc fieret ſimul notaui, decreſcere electricitatem catenae creſcente numero minutorum ſecundorum inter fulmen et tonitru. Cum enim numerus minutorum ſecundorum erat 6, filum reſpiciebat 30. gradum, cum

erat 9, filum notabat 25. gradum, cum erat 11. filum prope 20. gradum erat, et cum tandem erat 14, filum haerebat circa 10. gradum.

6) Electricitatem cum ipſo fulmine et tonitru productam poſt fulmen et tonitru auctam eſſe.

7) Inter fulmina ſplendidiſſima absque tonitru, quae ſpatio duarum horarum ſat frequenter ſeſe excipiebant, nullam electricitatem cum catena communicatam eſſe, et filum indicis iners regulae adpenſum manſiſſe. Simulac vero tonare incipiebat, eo ipſo momento filum indicis ad gr. 25 eleuari, et deinde ſenſim rurſus deſcendere.

8) Maximum gradum, ad quem naturalis electricitas filum indicis eleuauit, fuiſſe 30 graduum.

Poteſt ergo 1) absque omni tonitru et fulmine catena electrificari, et electricitas haec per multa minuta eadem virtute manere. Poteſt 2) cum ipſo fulmine et tonitru electricitas catenae minui vel ceſſare, et proxime ante fulmen maxima eſſe. Poteſt 3) cum fulmine et tonitru electricitas catenae oriri, et deinde vel per multa minuta in eadem virtute perſiſtere, vel fulmine facto ſubito rurſus diminui, vel ceſſare. Tandem 4) non videtur repugnare inter fulmina et tonitrua ſaepius nullam electricitatem produci. (*)

Ponas enim catenam nondum eſſe electrificatam, poteſt 1) virga ferrea cum acuta extremitate nubis electri-

(*) Poſt diſſertationem hanc Academiae traditam contigit mihi electricitatem naturalem die 11 Iulii obſeruare; et ſuſpicionem notatam ipſa experientia confirmatam videre. Dum enim inter fulmen et tonitru 8 min. ſec. numerarem, filum indicis reſpiciebat gradum 25, dum numerarem 24 min. ſec. debilis valde electricitas erat, et dum 40 min. ſec. numerarem, electricitas nulla obſeruabatur.

electrificatae volumini materiae electricae agitatae immersa esse; quo casu necesse est, vt virga ferrea absque omni fulmine et tonitru electrificetur, si nimirum nulla nubes maiori vel minori gradu electrificata ad nubem illam accedit, cuius volumini materiae electricae agitatae virga ferrea immersa est, quo facto scintilla concrepans et inflammabilibus materiis praesentibus inflammatio, et interdum etiam tonitru obseruari deberet. Ita enim artificiali electricitate electrificatur virga ferrea, si recte suffulta est et sphaerae actiuitatis corporis electrificati immersa, sine omni scintilla concrepante praecedente: neque mirandum est hoc casu filum indicis per insigne temporis interuallum ostendere eundem gradum.

Potest 2) eadem virga ferrea extra sphaeram actiuitatis nubis electrificatae existere; quo casu nullam electricitatem filum indicabit. Ponatur autem

3) adpropinquatione diuersarum nubium inaequaliter electrificatarum oriri scintillam concrepantem, et inde fulmen et tonitru, potest hinc subito augeri radius sphaerae actiuitatis nubis, vti virga ferrea eius sphaerae actiuitatis immergatur, et ita subito potest electricitas oriri. Hoc posito si medium est siccum et originariae electricitatis, quod catena electrificanda contingit, potest electricitas per aliquod temporis spatium in eadem intensione persistere. Quodsi vero medium est humidum, et ita adpropinquat ad indolem corporum deriuatiuae electricitatis, possunt fulcimenta catenae facile humectari, et ita tota catena breui in corpus deriuatiuae electricitatis infinitum mutari; vnde non mirum, si electricitas catenae subito decrescit. Potest vero etiam radius

ſphaerae actiuitatis minui, ſi nimirum ad nubem certo gradu electrificatam virgae viciniorem altera minoris electricitatis accedit; ita enim ſphaera actiuitatis contrahi debet. Tantum ergo abeſt, vt virga tali ratione electrificetur, vt potius magis recedat a virga cauſa electricitatis.

4) Tandem poteſt fortaſſe ſcintilla electrica in atmoſphaera fulmen et tonitru generare, et ſphaera actiuitatis nubis electrificatae tamen virgam non contingere, quo caſu inter fulmina et tonitrua nulla electricitas obſeruari poterit. An hoc interdum eueniat, aſſerere nondum audeo.(*)

(*) Poſt obſeruationes d. 11. Iulii aſſerere audeo: dum 40. min. ſec. inter fulmen et tonitru numerarem, et electricitas nulla obſeruaretur, nubes electrificata tantum diſtare debuit a catena, vt radius eius actiuitatis ad catenam non pertingeret.

PHYSICA

PHYSICA.

V v 3

ABRAHAMI KAAU BOERHAAVE

DISSERTATIO
DE
COHAESIONE SOLIDORVM
IN CORPORE ANIMALI.

Dum viuimus, partes corporis noſtri ſunt in ſtatu ſemper violento, contractae quippe firmae extendi debent, extenſae vero ſunt iterum contrahendae; vnde illis contentae fluidae comprimuntur et relaxantur alternatim. Firmat hoc cordis ſyſtole et diaſtole, vaſorum omnium oſcillatio perpetua, motus deinde humorum atque horum, prius permiſtorum, ſeparatio ſubtilis. Habet haec viciſſitudo rationem, momentanea in partibus, reſpectu actionum, ad propriam ſtructuram. Hinc minima vascula, dum extenduntur a ſubtiliſſimo fluido, determinata vi impulſo, renituntur, ratione inuerſa diſtendentis, per virtutem ſibi, vti in maioribus, appropriatam. Quo ergo momento vis extendens minuitur, augetur contractilis, et illud, quod vaſa dilatat, haec reprimendo pellunt et propellunt, iterum momento ſubſequenti extendenda per fluidum, vi emboli cordis impulſum. Actio haec a principio motus, per vitam, durat alternatim, et, ratione aetatis, valida; vt, quantum ſit, corpus vix maneat oculi

oculi nictu plane in ſtatu eodem. Hoc ita ſpeculatus Hippocrates, ideo actuoſum circulo ſimile, in quo idem principium et finis eſt vnus (*a*), pronunciauit conſtare continentibus, contentis, et eo, quod in haec facit impetum (*b*). Sunt ſolida, fluida, eorumque motus in ſe inuicem. Et certe qui, praeter haec tria memorata, quaerit in illo quartum, laborabit fruſtra: Eſt etenim determinata ſolidorum cohaerentia, cum oſcillatione definita, cauſa vitae ſola, eſt eadem ratio vnica ſanitatis non modo, ſed certi cuique proprii temperamenti et longaeuitatis: dum quippe debito tono et iuſto ordine agit in humores, haud alia poteſt in ſingulis operari, quam vt ſint ſuo quaeque loco praeſentia talia liquida, quae in certum vſum a Creatore praefinita, neceſſaria, eaque ſana ſecreta, in ſolida reagunt. Natura etenim a nemine edocta efficit omnia, quae conueniunt, abſque vlla diſciplina (*c*).

Ita interim minorum partium, quae iunctae maiores compoſitas conſtituunt, elementa prima cohaerent in fluidis aeque, ac in firmis, vt ad certam diſtantiam recedere, et ad ſe inuicem accedere iterum, valeant. Eſt haec in variis conditio diuerſa, vt patet comparanti in oculo expanſam nerui optici ſubſtantiam medullarem, pulpoſam nempe retinam, cum aortae initio, vbi corde egreditur, cuius tamen illa, ſicuti reliqui nerui, continuatio eſt et finis. Eſt eadem res in fluidis euidens ex ſpeculatione ſanguinis, qui in maximis vaſis et corde permiſcetur, atque contemplatione laticis illius, qui, ex eo ſecretus tenuiſſimus, de corpore exhalat.

Prima

(*a*) De locis in Homine, in principio. (*b*) Epidem. Lib. vi. Sect. 8.
(*c*) Hippocrates de alimento.

Prima interim elementa, quae partes ſolidorum et fluidorum omnium minima conſtituunt, videntur, quousque ſenſus percipiunt, plane immutabilia, ſimpliciſſima, adeoque in hominibus non modo, in cunctis animalibus et plantis, ſed in omnibus forſitan ſemel creatis, prorſus eadem. Corporum omnium generatio, incrementum, horum in partibus ſolutio, et in toto cohaeſionis deſtructio, eorumque in alia tranſitus, denique rerum Vniverſi per ſex mille et vltra annos, immutata et conſtans, ſed toties renouata, facies hoc firmant argumentum. Ex vnoquoque vegetabili, ex omnis animalis quacunque corporis parte, combuſtis, collapſi cineres, lege artis vexati, vt ab omni omnino adhaerente alieno liberentur, dant meram Terram, Chemiſtis Virginem dictam, nullo ſenſuum inter ſe, vel ab alia, diſtinguendam. Haec nec aqua ſoluitur, nec fluit ad ignem, ſed fixa perſtat prorſus et immutabilis: id norunt Docimaſtae, qui absque notabili vlla omnino differentia. ex vtraque cupellas, ad aurum et argentum explorandum, conficiunt, ſummam ignis torturam perferentes. Haec ſingulis plantis, omnibus animalibus, cuique homini, omnibus forſan creatis corporibus, denique et horum partibus diuerſis, fulcrum dat et rei ſtabile principium. Quae ergo in ſtructura, fabrica, et actione ſolidorum, tanta obſeruatur, diuerſitas pendet vnice ab alia elementorum ſimpliciſſimorum adunatione. Quo etenim in corpore animali vel vegetabili partes ſunt firmiores, eo plus ſolidi exhibent ſub eodem volumine. Os vnius librae, combuſtum, dat longe maiorem copiam purae Terrae, quam muſculus eiusdem ponderis. Molle

 cere-

cerebrum, tantae in homine molis, a membranis liberum, fere totum diffluit. Quo ponderosius et dure magis compactum lignum est, eo plus cinerum exhibet sub forma cum leuiori simili. Quo ergo partes sunt in corpore magis stabiles, eo propius sibi iuncta habent elementa prima, ita tamen, vt vnum alterum directe non tangat, ne rigiditas perfecta oriatur, sed remota ad certam distantiam, quam implet molle vinculum interpositum, quod Gluten vocamus, in ipsis siccissimis partibus aquosum vel oleosum deprehendendum, licet non statim sensibus occurrat. Ossa, cornua, vngulae, dentes, pili, sericum, animalium, a longo tempore exsiccata; pudibundae herbae aridi stipites per annos seruati, dant in destillatione copiam aquae, copiam olei, cuius vtriusque adeo in adunandis siccissimis et subtilissimis particulis vis est stupenda: hisce orbata pristinam formam quidem retinent, sed libero aëri exposita diutius, vel igne aperto combusta, collabuntur in cineres albos, qui meram terram descriptam suppeditant. Et latet eadem in fluidis mira adeo, vt animalium limpidissimi et tenues, ignis vi de humoribus expressi, spiritus alcalini, terram gerant elementalem, eorumque et vegetantium olea, saepius de puro vitro repetita destillatione cohobata, eandem in fundo deponant, facta ipsa volatilia (*a*).

Interim

(*a*) H. Boerhaave El. Chem. Part. 1. pag. 637. et Boyleus de Mutabil. Princip. Interim an omnis illa terra, quae purissima, post tot destillationes, colligitur, primo permista haeserit in oleis stillatitiis et animalium spiritibus alcalinis, dubito. Nonne potius aliqua pars ex puluere aëris accedit, dum toties vasa et excipula mutantur? Conferantur ea, quae scripsit H. Boerhaave de aqua pluuia, coelo delapsa et cautissime recepta, destillata deinde. Loc. citat. pag. 627 et seq.

Interim prima haec ſolidorum elementa, aeque ac gluten, quod illa iungit intermedium, prius haeſerunt in liquidis, cum illis mota fuerunt, tandemque ex iisdem ſubtiliſſimis ſunt ſecreta. Id incremento patet. Ex dactyli ſemine foecundae terrae commiſſo, per ſenſim allabens hauſtumque pabulum extenſo, ſurculus, ex ſurculo annoſa producitur quercus. Homo adultus athleticus fuit vix viſibile ſtamen, quod, niſi a liquido, cui innatat, ſuſtentetur, in mucum informem collabitur. Stamen hoc vtero materno conceptum, de momento in momentum increſcit, vt poſt nouem menſes foetus naſcatur, duodecim et plurium quandoque librarum. Ex ouo, a gallo foecundato, ex ſimili principio, vix ſemigrani ponderis, intra viginti et vnum dies, pullus procedit, oſſibus et ſolidis partibus firmus. Fit tale continuum augmentum, dum atomus ſenſim alteri, iam ſecretae et cohaerenti, apponitur, illique per intermedium, eodemque apparatu elaboratum, gluten adnectitur. Liquidum autem ſecernenda vehens, a corpore matris prius praeparatum, datur foetui, atque per eiusdem corpusculi vascula, omnem non modo ſenſum, ſed omnem conceptum humanum, ſubtilitate ſua ſuperantia, vlterius perficitur ante ſecretionem. Fit idem in pullo, dum, dato tempore, albumen per incubatum attenuatum, intra corpusculum in ſolida et fluida conſumitur. Idem in inſectorum ouis, vnde minimae erucae prodeunt, exilitate ſtupendae, obtinet. Pergit eadem actio poſt natiuitatem, peregrina ingeſta commutans in naturam propriam, per incrementum ad ſtatum, et ab hoc per decrementum ad mortem, apponendo nutriens, augens, inſtaurans, irrorans, dum in locum illorum, quae omni momento per vim vitae et humorum impetum abraſa vehuntur eliminanturque, noua ſecreta reponit.

Varietas interim, quae in diuerſis corporibus, et partibus eiusdem aliis, aliaque aetate in iisdem, tam notabilis obſeruatur, non ipſa dependet ab his ſecretis ſolidis, quae in omni videntur corpore prorſus eadem: ſed eſt gluten coniungens, quod laxiori, vel ſtrictiori, vinculo elementa prima adunans, in infantia mollitiem, in ſtatu robur, in ſenio rigiditatem, facit. Quo etenim hoc tenuius et magis extenſile partes conſtituentibus elementis interponitur, eo facilius haec a ſe inuicem recedunt, ſuperata, ratione extenſionis, vi vitae adunante, oriturque mollities maior, flexibilitas, laxitas et debilitas, in compoſitis. Quo idem facile compingendum, craſſius, tenacius, et magis plaſticum eſt, eo robur, rigiditas, et elaſticitas, notabiliora ſunt. Hinc partes molles et tenaces facile, prius extenſae, contrahuntur, oſſa duriora vix elongantur aut flectuntur ſine diſſolutione. Differentia haec euidentiſſima eſt inter musculi eiusdem partem carnoſam et tendineam, quarum ſunt fibrae non modo numero eaedem, ſed et aliis continuae.

Videtur autem gluten hoc (vti poſtea apparebit clarius) in omnibus idem, ſed in diuerſis partibus, et in iisdem alia aetate, per variam ſolidorum oſcillationem, et ab aucta ſenſim reſiſtentia eorumdem, diuerſimode compactum. In infantia tenue, firmius in iuuentute, in ſtatu corporis magis validum, tenax in ſenio, ex ſubtili allabente liquido conficitur ope partium, quae firmae reagunt, ſeparatae prius ex ſimili fluido, ſimilique

glutine

glutine iunctae. Hisce interpositum illud retinet indolem, quam in maximis, et per decrescentiam variam inde in minimis, quae sub sensus nostros cadunt, plasticam notamus, glutinosam, mucosam, ductilem, saponaceam, oleoso-aquosam, hinc mora et motu compingendam, adeoque in piceam quodammodo naturam mutabilem: sicuti hoc in reliquis oleis obtinet, siue pressa fuerint ex vegetabilibus, siue destillata ex iisdem, vel animalium humoribus. In plantis, quae tantam cum corpore animali analogiam habent, res euidentissima est. Sol quippe, calore et motu, in his olea limpidissima, spiritu rectore subtilissimo suaue-olentia ita inspissat, vt in terebinthinam transeant, quae, aestu magis excocta, mutatur in resinam: vnde Bohnius(*a*) aliique putauerunt, hanc ex oleo condensato componi, rursumque eandem liquefactam oleum constituere. Phaenomena porro, quae obseruantur, dum vltimum vinculum in parte quacunque animalis vel vegetantis destruitur, reliquis, quae interposita prius eandem retinent et constituunt, coctione prius ablatis, dicta vlterius firmant. Dum quippe in aëre libero illa comburitur, primo nigrescit, tumque ex illa exsurgit simul fumus ater, deinde piceus, foetens magis et densior, quo flamma ipsi propior est, quae, vno ictu prosiliens, foetorem minuit et fumum tollit, solo tamen in apice eiusdem superstite fumulo, qui chartam suprapositam atra, pingui, inflammabili fuligine inquinat, claro documento, quod flamma sit fumus accensus, fuligo vero fumi pars non accensa, auolans de flamma, quae consumendo pabulum phlogiston

 sensim

(*a*) Differt. Chemic. pag. 29. 319. 326.

ſenſim minor fit, et tandem extincta quiescit. Tum pars combuſta albeſcit, quodque ſupereſt adhuc de nigro, ſcintillae corruſcantes, lambendo fauillas, et circumambulando conſumunt, dum illa priſtinam formam retinet et figuram, ad minimum tamen attactum collapſa in cineres albos, inodoros, fere inſipidos, qui ſalini, aquoſi, vel oleoſi, nihil exhibent, aſt calcis quaſi exuſtae leuiſſimum ſaporem imprimunt aquae incocti, atque exſiccati terram ſuppeditant virginem, iam ſupra notatam in omnibus eandem. Fumus interim et flamma, dum de corpore combuſtili exhalant, ſecum rapiunt aeque materiam terreſtrem ignis actione aperta in aëre libero volatilem factam, quam ſpiritum, aquam, oleum et ſal. Docet id fuliginis analyſis(*a*). Blandiſſimos interim oleoſo-aquoſos in corpore animali humores, motu et calore ita condenſandos, tandemque in ſolida mutabiles, horum contemplatio docet, et euidentiſſimum eſt ex conſideratione Lactis, quod in ſe habet materiem omnium partium firmarum et fluidarum, quae corpus humanum, ſucceſſiue ab ortu ad interitum, conſtituunt; adeo quidem, vt eo nutriatur non modo Infans, ſed increſcat et ſuſtineatur omne animal galactophorum, per pro-

(*a*) H. Boerhaave Elem. Chem. Part. 2. Proceſſ LXXXVIII. Sed eadem, quae mox notaui de terra in humoribus animalium poſt repetitas deſtillationes deprehendenda, hic etiam locum habent. Flamma etenim, dum adſcendit, et Fumus dum aterrimus voluitur ad ſupremum elati camini cacumen, multum inuoluit de puluere aëreo, illum tranſiens. Dumque Fuligo affigitur lateribus camini, rapit flocculenta ex aëre, et ſuſtinet, iisdem affixa, particulas terreſtres volitantes, a quibus ante deſtillationem non prius depuratur.

proprium corpus confecto, mas sit vel foemina, virgo aeque et sterilis, nunquam puerpera (*a*), quam mater nutrix. Hoc recens mulctum, blandissimum, in calore hominis sani breui acescit, et, sponte sua, ipsum quiescens, partem pinguiorem, cremorem dictum, reiicit sursum, qui subactus condensatur in butyrum rancescens. Certo caloris gradu idem exhalando format in superficie sua pelliculam, toties renanscentem solidam, dum aufertur: cui non illepide Veteres renascentem in corpore humano cuticulam comparant. Si vero eidem lacti coagulum, de succo ventriculi ruminantium paratum, aut acidum quodcunque, commiscetur, tum abit in vnam, aequabilem, scissilem, massam, quae in serum secedit et colostrum, quod vltimum summa vi intra densum linteum compressum, caseum format pinguem et blandum, qui tractu temporis acerrimus fit et alcalescens. Si vero prius a cremore suo, sursum reiecto, lac priuatur, atque defloratum eadem deinde ratione tractatur, tum caseum dat, qui scissilis, aetate, cornu instar, durescit, atque igni admotus, perfecte ac illud lentescit, vstulatur, et cum simili foetore comburitur. Sic ex liquidissima et blanda adeo lactis materie, vt oculo instillata nullum dolorem imprimat, contra eundem leniat, fit coagulo et motu durum, solidum, aetate acre adeo, vt linguam, os, et fauces, inflammet. Vti hoc in mulcto extra corpus obtinet, idem fere fit in viui corporis humani vasis mammae galactophoris, quoties ibi-

(*a*) H. Boerhaave Elem. Chem. Part. 2. Pag. 297. No. 9. et Institut. Medic. §. 690. Ad quem vide compilationem Auctorum affirmantium in notis Halleri.

ibidem lac a cauſa qualicunque coagulatur, abeuns cum ſtillicidio ſeri tenuioris per papillam, vel et eiusdem reſorptione per venas inbibentes, in craſſamentum, ex quo durities naſcitur et tumor; vnde inflammatio, ſuppuratio, vel ſcirrhus oritur et cancer, quod, vlceratum et apertum, virus fundit horrende adeo corrodens, vt omnia, quae attingit, exedat. Notamus inſuper, tenuisſimos corporis noſtri humores, ex vltimis arteriolarum, forſitan et neruorum, oſculis ſecretos, dum ſtagnant quocunque loco in cryptis, inſpiſſari ſenſim calore ipſius corporis, et breui fieri glutinoſos et gelatinoſos, tandemque ſoliдеſcere. Narium mucus, oculorum externus et palpebrarum humor, aurium cerumen, adeo ſubtiliter ſecreta, craſſeſcunt non modo, ſed in lemas coriaceas ductiles concreſcunt. Calculi ſolidi naſcuntur vbique in corpore, appoſitione particularum, quae ſenſim ex humoribus, prius de ſero et lympha ſanguinis ſeparatis, ſecernuntur.

Conſtat ergo, fluida in corpore animali per motum et calorem, reſorptu et difflatu tenuiſſimi laticis, fieri ſolida, ſiue externum aërem attingant, ſiue ab eodem occulta arceantur, idque fieri naturaliter et citius, quo ſunt ſubtiliora ſecreta de prius commiſtis. Secundo patet; prius ita ſecreta ipſa inorganica, partes organicas componere, vt iterum de tenuiſſimis humoribus ſibi ſimillima ſolida ſecernant, et ſecretis prius apponant. Docet hoc nutritio et incrementum, vnde roboris et rigiditatis cauſa patula eſt. Affirmatur inſuper incubatu oui, eiusque ſeri analyſi chemica.

Obſeruamus autem, quod firma quaecunque, organica, quousque in illa ſenſus penetrant, conflentur

fibris

Fibris. Firmas voco in corpore animali partes organicas, quae ex vltimis solidis, ratione modo dicta secretis, glutine intermedio connexis, cum debita flexibilitate constituuntur, quaeque, postea iunctae, caua continentia efficiunt coërcentia, τὰ ἔχοντα Hippocratica. Ex elementis terrestribus, antea notatis, iuxta longitudinis directionem glutine adunatis, fit Fibra simplicissima, consideranda vti linea geometrica latitudinis expers. Eiusmodi fibrae plures, iuxta se inuicem molliter iunctae, faciunt Membranam simplissimam, quae conuoluta, vt linea ordine vltima, concurrens cum prima, eidem iungatur per longitudinem, efficit Canalem minimum, ex quo cum similibus agglutinato Membrana, et ex hac, eadem ratione conuoluta et concreta, Vas secundi ordinis exsurgit.

Est in maioribus, quae partes inter se molliter ita connectit, vt accedere, recedere, et supra se inuicem lubricae moueri possint, Tela Cellulosa. Est eadem, quae in minoribus sensim subtilior, subtilissima deprehenditur in istis, quas sensus nostri minimas dissolubiles notant, partibus; vnde eandem in vltimis obtineri, concludimus; quoniam ex minimis maiores, et ex his maximae partes, illis simillimae, vbique in corpore, constant, simili ratione actuosae. Sententiam hanc firmat ortus huius telae, qualem descripsi (*a*), suspicatus, fieri hanc ex gelatinoso et plastico humore agitato, quae placuit et aliis recipitur (*b*): cumque illud, quod continetur huius telae cellulis, omnium minimis per sensus

 nostros

(*a*) Nouor. Comment. Petropol. Tom. I. pag. 372. (*b*) Haller Prim. Lin. Physiolog. §. xv.

noſtros, artis adminiculis adiutos, perceptis, ratione partium nectendarum extenuatum, apparet ſimillimum illi, quod copia in maioribus et maximis aggregatur, motu magis valido condenſatum, non adeo vana eſt concluſio, quod hiſce ſimillimum, aſt longe iterum ſubtilius, continuo, ſed debiliori et appropriato, motu elaboratum ſimpliciſſimas omnium fibrillas, imo et harum elementa ad ſe inuicem retineat, quo partes, nobis nulla diſſolutione diſtinguendae, ſenſim decreſcunt. Certe notamus, quod omnia minima, aeque ac maxima, absque vlla confuſione, diſtincta ordinantur ita, vt nusquam in corpore, alteri impedimento ſint. Fibra, quae noſtris ſenſibus apparet minima diſſoluenda, deprehenditur cum ſimili ſocia iungi iuxta longitudinem ſolam, interventu celluloſae dictae telae tenuiſſimae. Hoc accuratiſſima ſpecilla attento demonſtrant. Sed vltima haec diſſoluta nobis fibrilla, capillo humano decies et vltra tenuior, iterum conſtat fibrillis longe ſubtilioribus, non facile arte diſſoluendis, ſed, ope acuti microſcopii, viſus acie diſtinguendis, inprimis quando, vel leniter dilacerando, vel ſiccitate obiecti, diſſiliunt, criſpantur; et ita in arcum ſolutae flectuntur: tum quippe in his, ac in maioribus compoſitis, eadem apparet coniunctionis directio longitudinalis: ſuntque inſuper leuiter hirtae. Vnde concludere auſim, quod minimae omnium non diſſolubiles, quae memoratas vltimas, non diſſolutas, iterum conſtituunt, ſeſe habeant eadem ratione directionis, ſimili vinculo retinente coniunctae. Interim in oſſium ſtructura (quod obiter moneo) aliquid mihi obſcuri manet, cum pro certo definire non poſſum vllo

artificio

artificio, vel ope acutissimi specilli, vtrum fibrae, quae iunctae membranas osseas componunt, nectantur cum vicinis interuentu lamellarum, quae distinctae et peculiares sunt, an vero fibrae ipsae, in longitudine ex diuersis interruptis adunatae, retundantur inflexae, sicque stratum osseum superius cum supposito agglutinantes, interstitia cellulosa forment; etsi hoc, quam illud, potius apparere videatur. Affirmo tamen, et in diuersimode praeparatis animalium variae aetatis ossibus demonstrare possum, quod lamellulae, quae transuersae in cranio tabulas iungunt, et ita inter has diploen vulgo dictam constituunt, vti et illae, quae in oblongis ossium extremis fibras a se inuicem distantes nectunt, et cum his spongiositatem latam efficiunt, nunquam easdem perreptent; sed quod inflexae vtroque suo extremo nectente cum lateribus oppositis fibrarum longitudinalium confluant, atque ita cellulas distinctas, singulares, fornicatas, faciant. In cartilaginibus res est obscurior: videtur tamen eadem esse in illis, quae postea, dum partes constituentes magis indurantur, in os transeunt. In mollibus vero partibus, vti musculi sunt et membranae, in strato eiusdem superficiei, vnicam modo, vt antea monui, iuxta solam longitudinem semper obseruo directionem, magis minusue compactam, rectam vel inflexam; nec vnquam vidi, fibram cum simili, funis instar, contorqueri, aut ab hac diuersa directione decussari; neque notare vsquam potui, quod fibrae neruosae vel carneae, obliquae aut transuersae, ambiant longitudinales, vel ita easdem interrepant, vt cum his intertextae reticulum forment, etsi per trigiuta fere annos, a prima nempe iuuentute, partes animalium inquirendo incumbens, nullam fere neglexerim occaſionem indagandi muſculorum imprimis fabricam, ardua hac in re incitatus, oſtenſo fructu laborum laetiſſimo, ab iſtis Viris, quos ſummos in arte dedit bonum fortunatum Praeceptores. Horum memor monitorum cum dudum autopſia edoctus forem, deſiderari in muſculis decantatas fibrillas transuerſas, iam ante viginti annos explicui, quid ſit illud, quod errorem imponit (*a*). Deinde, toties repetita indagine certior de ſtructura, expoſui actionem muſculorum ſimpliciſſimam (*b*). Iam vero tot experimentis de nouo in diuerſis animalibus inſtitutis, aliorumque mecum conſenſu (*c*) iterum firmior, aio, eſſe non modo fibrarum in vno eodemque muſculi et membranae ſtrato decurſum vnum, ſimpliciſſimum, parallelum; ſed dari nihil, quod has vltimas ſolubiles et viſibiles cum ſimilibus directe iungit, niſi, iuxta longitudinem ſolam, telam celluloſam, quae euadit ſubtilior, et ſubtilius elaboratum, caeterum ſimillimum, continet humidum, quo ſenſim fiunt fibrae tenuiores. Secundo: arteriae et venae, diuiſae in minores minoresque ramulos, perreptant in omni puncto ſtrata fibrarum, pauciores in parte tendinea, quam carnea, notandae. Inter ſe rami et ramuli arteriarum per anaſtomoſes innumeras iterum confluunt et retia formant. Idem in venis obtinet. Deinde arteriae cum venis iunguntur per innumeras inſertiones, dum omnium minimae viden-

(*a*) Perſpirat. Hippocr. dict. §. 780. (*b*) Impetum Fac. Hippocr. dict. §. 294. (*c*) Haller. Not. c. in Comment. ad Inſtit. Boerhaavii §. 396.

videntur in ipſas fibras muſculoſas implantari. Tertio: nerui accedunt diſtributi in ramulos tenaces, qui cito oculum optime armatum prae ſubtilitate fugiunt, vnde horum indagatio obſcurior et difficilior eſt, nec anaſtomoſin inter ramulos notandam praebet, ſed coniunctionem in faſciculos maiores, et diſſolutionem in minores. Quarto: omnia haec vaſa viſibilia laxe inuoluuntur tela celluloſa et huius ope fibris adhaerent, intra illam fulcita. Haec vti vidi, ſaepius aliis exhibui, lubens demonſtro in muſculis, muſculorum faſciculis, et horum fibrillis diſſoluendis, per adhibitam et toties repetitam, in variis animalibus, diuerſam encheireſin. Scilicet ad hoc opus impleui quandoquidem in parte ſolas arterias, in alia ſolas venas, materie, quae liquefacta in minima vaſcula penetrat, et frigefacta deinde in illis conſiſtit colorata. Repleui in eodem obiecto arterias et venas diſtincte per ſimilem materiem, ſed diuerſimode coloratam, vnde tamen in minimis fere ſemper quaedam confuſio oritur, quoniam vix caueri poteſt, vt materies in oppoſita vaſa non tranſeat. Adegi denique materiam per arterias ita, vt venas ex his intret, et contra. Partes iam ita praeparatas exſiccaui, alias maceraui aqua raro renouata, vt leuis putrefactio laxet, non penitus ſoluat aut deſtruat, cohaeſionem; alias leniter ſale, alias ſale prius, deinde fumo, alias denique alcohole induraui, vt fibrae ſicciores, et pro examine fierent fortiores. Similia praeſtiti, non impletis prius in parte vaſis, deinde in tenuiſſima, quae potui, filamenta diſcerptas fibrillas optimis microſcopiis perluſtraui, ſed nec in his, nec in recentiſſimis, ſine vlla praeuia praeparatione, deprehendere potui vsquam aliud, niſi memorata de fibrarum cohaesione iuxta longitudinis directionem solam. In proprie dicti musculi parte carnea et tendinea vti hoc est euidens, distinctius idem et pulchrius apparet in illis membranis ex fibris conflatis, quae sunt veri musculi caui, qualis in arteria, vena, oesophago, ventriculo, intestinis, vesica vrinaria, vesica fellis, est tunica dicta musculosa. Est quidem eadem in tenui membrana cognitio; obscurior tamen propter eiusdem pelluciditatem, quam obseruo in fibris musculosis maiorem, quo magis subtiles et tenuiores dissoluuntur vlterius, idque in maximis aeque, quam minoribus animalibus. Dissecui bis Petropoli Elephantem, partesque diuersimode praeparatae seruantur eo aspectu iucundiores, quo sunt magnitudine notabiliores, vtpote in quibus nudo oculo apparent, quae in minoribus animalibus per microscopia distinguuntur, tam ad reptatum vltimorum vasculorum, quae per coloratam materiem iniectam rigescunt, quam ad fabricam telae cellulosae subtilissime solutam, sed inprimis ad fibrarum muscularium decursum, quas arte mea vltimas dissolubiles, nec crassiores, nec magis opacas, compertus sum, quam quae in hominibus, et diuersae magnitudinis animalibus, inter se sunt simillimae. Vnde didici, robur in musculis non pendere a crassitie vniuscuiusque et singularis fibrae, sed a multitudine illarum, dum plures simul iunctae ex fasciculis adunatis crassioribus, torosiores musculos constituunt, in actione synchronae, adiuuante forsitan longitudine in directione partis mouendae, ex pluribus elementis conflata. Sed et in hoc animali lamella tenuissima demta de osse, et microscopio examinata, fibras visu

vltimas

vltimas diſtinguendas exhibuit, quam in alio animali haud craſſiores, ita quidem vt hic iterum copia robur efficiat. Quae in muſculis et oſſibus, eadem apparent in membranis, dummodo ab omni alieno adhaerente liberentur. Peritonaeum in elephante tenue eſt, ac in homine. Et ſeruo ex eodem animali omenti portionem in liquore ſpirituoſo ſuſpenſam, amoeniſſima ſubtilitate pellucidam, aliamque exſiccatam, quae ex tenuiſſimo quaſi ſerico eleganter contexta apparet. Sunt in eadem bellua nerui validiſſimi et craſſiſſimi (*a*): aſt arte et patientia diſſoluti in fibrillas, plures quidem et longiores, non vero, quam in alio animali, robuſtiores eaſdem exhibent. Omnia haec affirmauit nuperrima perluſtratio viſcerum omnium, quae in Teſtudine maritima maxima maſculina artificio ſupra memorato tractaui, robuſtiora, lacertisque muſculoſis validiora, quam in vllo animalium, quorum copiam, diuerſam adeo, diſſecui, hucusque compertus fui. Nec mirum! Propria ſua energia agere ſola debent in contenta, intra duas vix mobiles teſtas tuto depoſita, adeoque deſtituuntur ope muſculorum abdominalium, pectoris, et reſpirationi inſeruientium, qua caeterum plurima animalia gaudent. Inquirendae ergo in his fibroſae fabricae opportunitas eſt pulcherrima, quae, in aliis toties reperta et ſupra memorata, fidelior confirmauit.

Cadit ergo tota, aliisque diuerſa adeo explicata, doctrina, tam variis hypotheſibus ſuperba, de actione muſculorum, fibris horum obliquis vel transuerſis, longi-

(*a*) Vid. Tabul. I. Deſcriptionis noſtrae Infantis monſtroſ; manu dextra retentam nerui quinti paris portionem.

longitudinales comprimentibus, superstructa, ob illarum absentiam. Addunt quidem in arte celebres Viri, patere easdem neruosas ex demonstratione anatomica, sed qualis illa foret, non percipio. Demonstrationem Anatomicam puto Mathematicae similem, qua mens per sensus corporeos rem demonstratam ita percipit, vt nulla de veritate eius et existentia, vti definitur, supersit dubitatio. Per talem si exhibentur fibrae in musculis et membranis, funis instar inter se intortae, vel neruosae, quae longitudinales carneas obliquae vel transuersae ambiunt, aut easdem decussant, denique si elucidantur similes inter has ita decurrere, vt intertextae reticulum forment, labores meos tot annorum in his frustraneos perditosque ipse pronunciabo, et lubens candidusque mutabo sententiam, quam simplicissimam exposui, simplici quidem, sed ideo in vltimis obscurae, partium structurae maxime congruam, adeoque veritati proximam (*a*). Sit modo talis demonstratio in ipsa corporis humani, vel cuiuscunque animalis, recenti vel arte praeparato musculo aut membrana, non vero in nitide delineata figura, prout illa per fingendi libertatem in museo concipitur. Et, quaeso? quid fiet de fibris ita fictis transversis, si adessent, quoties musculi crassities notabile augetur, vt fit breui saepe temporis spatio in homine, ex macilento subito obeso, et in animali intra paucos menses, vel intra aliquot dies, vti in auibus obtinet, saginato? Tum nihil ex superaddito elongatur, sed tela cellulosa magis impletur pingui copiosiore et largius secreto.

(*a*) Impet. Fac. Hippocrat. dict. §. 286.

ſecreto. Quatenus ergo fibras longitudinales ambiens, iisdem intertexta has coniungit, plus diſtenditur, atque ita easdem a ſe inuicem remouet, et faſciculos muſculares a faſciculis magis abducit. Ergo, quae forent obliquae vel transuerſae longitudinales has interreptantes, fibrae extendendae ſunt, et tamen, vti prius, aeque promte actuoſae. Sed ſupponuntur eſſe neruoſae, ideo hoc illarum actioni contrarium eſt. Neruus quippe praeter modum vel minime, inprimis ſubito, extenſus excitat dolorem, quo ipſe minor eſt, maiorem: vti patet in podagra, atque ibi, vbi agit, vel ab obiectis afficitur, prius liberandus eſt ab illa membrana, qua, vti theca, inuolutus inter partes deſertur ad locum deſtinatum, vel maxime ab origine in corpore diſtantem. Erit itaque mollior et nimis pulpoſus, quam vt maiori repletione ſpirituum tumens, fibras musculoſas cauas quidem, ſed a contento proprio fluido diſtentas et reſiſtentes, vbi has interreptat, comprimeret, adeoque vim ſemet ipſo maiorem exerceret. Neque ibi, vbi neruus muſculum intrat, tunicas ſuas, quantum ego deprehendere poſſum ſubtili indagine, deponit; quousque etenim in minores ramulos, reſpectu trunci, ad angulos internos ſatis acutos illum diſperſum, et muſculum perreptantem, proſequor, longe tenacior eſt, quam ibi, vbi in initio ex medulla oblongata vel ſpinali oritur, antequam vaginulam a dura matre datam, iam piae matris inuolucro velatus, ingreditur. Vnde ſuspicor, tum demum fibrillas neruoſas thecula depoſita egredi, quando ſingulis fibris cauis muſculoſis ſingulares inſeruntur, ad actionem diſtinctam, ſine vlla confuſione, in omnibus exercendam. Erit ita

 vna

vnaquaeque fibra muſcularis organum ad motum diſtinctum, ſolitarium actione, cum reliquis in eodem muſculo ſynchrona, conſpirans (*a*). Haec cylindrica apparet, creditur caua, gaudetque ſua arteriola (*b*), quae nondum vnica et ſimplex, ſed in minores ramos diſperſa, videtur, quorum demum ſubtiliſſimi in omni fibrillae ſuperficiei puncto rorem oſculis apertis inter minima conſtituentia effundunt, pro nutrimento, lenitate, incremento, flexibilitate. His reſpondent venularum ramuli vltimi (*c*), in penultimos, ex his in maiores, inde in trunculum coëuntes. Nec forſan ſolitaria eſt fibrilla neruea, quae fibram in muſculo diſtinctam facit moueri, potius inſeruntur plures eodem momento actuoſae. Nonne hoc firmat longitudo fibrae in musculis diuerſa, diuerſa in animalibus, dum ſubtilitas huius, et diſſoluti nerui teneritudo, in omnibus interim notatur eadem? Nutritio certe fibrae musculoſae in omni puncto, partium minimarum hanc conſtituentium cohaeſio per vltimum elaboratum vinculum, ſenſus vbique aequalis, actio denique ſubtilis, argumento pondus addunt. Ita in his praeſens ſemper eſt ſpiritus ſubtiliſſimus, replens neruorum tenuiſſima et ſimul di-

(*a*) §. 197 Impetum facient: Hippocrati dict: explicui, qua ratione omnium neruorum fibrillae minimae ſine vlla coniunctione, vel vllo commercio, diſtinctae ſolitariae decurrunt, iunctae, vel potius leuiter colligatae inter ſe, per membranam tenuiſſimam celluloſam intra thecam datam a dura matre. Qua porro ratione, a ſe inuicem ſecedunt fibrillae hae, non proprie in ramos diſperſae, vti in theca inuoluente obtinet: et quomodo ſine conſenſu agant.

(*b*) Ibid: §. 265.

(*c*) Ibid: §. 267. 268.

distinctissima fila caua aequabiliter ab origine ad mouenda; a causa minima incitandus, quae videtur, vix definienda, laticis incomprehensibilis tantilla copia aucta. Praesens est humor arteriosus, cuius partes minimae seruant fibram musculosam, et hanc constituentia minima fila, apta et idonea, vt a spiritu neruoso promtissime moueri queant. Haec patent per experimenta zootomica (*a*) Vterque vero hic humor subtilis, ab actione et nutritione superfluus, reducitur ad cor.

Ex his omnibus patet, quod quoties agit musculus, id est, longitudine minuta, in latitudinem extenditur, toties fibrae eiusdem accedunt ex cylindrica ad figuram sphaericam, siue vno tractu cauae, seu potius per interstitia in vesiculas communicantes diuisae, exporriguntur. Simplicissimae ergo, quae illas constituunt, fibrillae mutantur ratione cohaesionis propriae, et ratione cohaesionis cum aliis similibus. Iuxta longitudinem quippe iunctae recedunt a se inuicem, inprimis in media vesiculae parte, vbi extensio maxima est. Deinde cum latera fibrae muscularis simul supponuntur elongari, dum magis haec impletur, atomi, quae fibras simplices constituunt, magis ab altera remouentur, et quod has intermedium iungit, ductile gluten plus extenditur. Desinente vero hac actione, musculus iterum elongatur restitutione fibrarum, adeoque atomi ad se inuicem accedunt et gluten iterum magis compingunt. Sic fibra musculosa non modo capacitate minuitur, sed simul accurtatur, dum musculus extenditur. Haec autem contractionis insita vis est conamen illud, quo minimae rem constituentes particulae tentant ad se in-

(*a*) Ibit: §. 287.

inuicem, prius remotae, iterum accedere per mutuum, vix explicandum, amorem, quem Vim dicunt Attrahentem: cuius caufa licet lateat, phaenomena tamen illius in folidis et in fluidis, vti extra nos, in nobis facile obferuantur.

Fibra ergo quaecunque fimpliciffima, adeoque quae ex his adunatis componitur, eft in mufculo et membrana robuftiffima, quando contracta eft, et manet femper in eodem ftatu, nifi accedat caufa, quae extendit, priorem fuperans. Hoc patet morte, et reactione in antagonifta deleta. Dum vero extenditur, fit debilior, fed tum demum vires dictas contractiles reddit manifeftas, vti a quiete in corporibus nulla, omnis a motu, pendet mutatio. Magnes fi nunquam magneti vel ferro adeo propinquus fuiffet, vt ab eodem tractus idem attrahat, vires admirandas fuas nunquam patefeciffet. Sunt tamen, qui contrarium dicunt, et vires tum crefcere autumant in fibra, quando haec elongatur, et, quod miror! pro exemplo adducitur differentia inter fibram tenfam et flaccide pendulam. In diuerfo hoc oppofito ftatu dicti abfurditas fponte patet, fiue experimento vti velint, fiue bono ratiocinio ex partium cohaefione. Fibra, vel filum de quacunque materia fubtili, elongata et tenfa, ictu percuffa fcindente acuto, facillime, difficilius pendula et flaccida, foluitur. Contracta eadem habet partes conftituentes proxime fibi adunatas, quo breuior eft, adeoque in corpore animali, iam toties memoratum, intermedium gluten inter illas compreffum. Dum vero elongatur, partes minimae conftituentes magis et magis a fe inuicem remouentur, et quod has

in-

intercedit, ductile gluten extenditur cum iisdem. Ergo in vltimo casu robur et cohaesionis virtus diminuitur ratione, qua puncta contactuum in partibus minimis minuuntur. (Impetrabo facile veniam pro verbo, vbi sermo de atomis, in quibus ratio aliquam concedet figuram, gluten saltim intermedium de natura fluidi partes habet iterum constituentes non homogeneas.) Interim infeliciter Illi errant, qui diuersitatem inter flaccidam et tensam fibram referunt ad corpus animale, dum viuit, in quo certe nulla fibra sana pendula et flaccida est: cum in eodem omnes partes firmae, etiam contractissimae, insuper nituntur in adunationem maiorem, quam impedit illa continuitas, qua pars parti cohaeret et eandem tendit; hac etenim soluta, cutis et membranae hiant in vulnere; arteria vero, vena, neruus, tendo, caro, discissa sese abscondunt, regressa intra partes molles, vix vi adhibita iterum adducendis extremis. Omnis ergo differentia, quae obseruatur in viuentis corporis fibra, est inter eandem tensam et extensam sanam; flaccida quippe et pendula, nec agit, nec promte reagit, etiam prius extensa. Chorda segmenti peripheriae circuli extrema iungens in arcu elastico, si flaccida extenditur, nullam vim exercet, sibi iterum relicta: sed prius tensa, si deinde extensa remittitur, telum sibi impositum proiicit, semet ipsam restituendo, dum partes constituentes, prius remotae magis, propius iterum ad se inuicem accedunt. Fit autem hoc vi tanto maiori, quo magis tensa chorda, plus extenditur, et citius remittitur. Qui post mortem obseruatur in corporis partibus, habitus nihil contrarium docet. In cadauere recens suffocato, vel aquis submerso, omnia quidem adſunt ſolida et fluida, quae momento antea aderant in viuo, ſed vitalis iſta virtus, qua in ſe inuicem agunt, periit; hinc et tenſio et toroſitas in internis aeque, quam in externis, inprimis euacuatis ſimul, quae ſuſtinent, contentis, abeſt: patet in arteriis, venis, et firmis partibus continentibus, quae in contenta, vt in continua mollia quidem, ſed elaſtica, fuerant actuoſae. Exemplo ſit veſica ratione copioſae vrinae plus minusue extenſa, et in viuo plane vacua contracta tamen et carnoſa. Haec ſi in cadauere preſſu externo a lotio euacuatur, lintei inſtar flaccida iacet, deſtructo in fibris elatere, quo ſemet contrahunt. Ligata in cane vrethra potu ſaturato, ſi viuus inciditur, veſica plena dura, dum acu non nimis tenui perforatur, eiusdem fibrae ſeſe circa lotium extendens aequabiliter contrahunt, atque illud per vulnuſculum non reſiſtens ad altitudinem notabilem, quaſi per ſiphonem, expellunt ad integram fere euacuationem contractae. Interim ſunt ſemper, dum agunt, extenſae, et quidem, quo plenior veſica eſt, quae etiam contracta non tum flacceſcit. In explicanda vrinae euacuatione phyſiologicis lectionibus ſolebat hoc experimentum recitare magnus Boerhaauius, quod non ſemel repetendo me docuit, quo citius, inciſis continentibus abdominalibus, pertunditur veſica, eo ſaltum vrinae eſſe fortiorem, dum contrarium obtinet in animali ſemimortuo. Sciunt porro Venatores ex fera exenterata, viuida viſcera carnea moueri, ſi vero ex ſemimortuo animalis abdomine eximuntur, membranacea pelluceſcunt et extenſa pallida iacent.

Sim-

Simplex autem fibra non agit ſolitaria, hoc iam patuit in illis, quae compoſitae musculum conſtituunt, ſed aetate firmatur ad actionem magis validam per propriam, et cum fibris ſimilibus cohaeſionem arctiorem. Prior obtinet, dum mucoſa in incremento, per augmentum atomorum et harum adunationem propiorem, glutine plus inter easdem condenſato, tenacior fit. Altera vero, dum vaſcula minima ex ſimpliciſſima membrana convoluta in fibram compoſitam, per θλίψιν, vel cum contento liquido, abolita cauitate, concreſcunt. Sic roboratur, dum increſcit, corpus. Abſolute ergo impoſſibile eſt, certam dare cohaeſionis definitionem in eiusdem corporis partibus diuerſis non modo, ſed et alia aetate in iisdem. Oſſium lineamenta in primo formato embrione diffluunt mucoſa, non ſuſtentata aequali liquore. Fiunt deinde membranacea, cartilaginea, et oſſeſcunt in foetu iam in vtero: in iunioribus eadem ſuccoſa, demum in decrepitis eburnea euadunt. Dentes adamantina duritie ſplendentes, fuere mucus, membrana tenuiſſima vaſculoſa, rudimenta cohaerentia media in gelatina natantia. Vidi in ſene poſt centeſimum annum mortuo, quae in iuuentute ex meris fere vaſculis conſtare per iniectiones anatomicas apparet, aortam, vbi corde egreditur, et primo diuiditur, plane corneam, rigidam, et immobilem. Vidi in eodem Nauta emerito, ſinum durae matris longitudinalem et proceſſum, qui falciformis hemiſpheria cerebri diſtinguit, granulis innumeris oſſeis, quaſi tot punctis, vnde oſſificatio incipit, repletum, et erat ſinuum concurſus, quem torcular Herophili dicunt, plane oſſeus. Idem vti in animalibus, obtinet in foſſilibus et in vege-

vegetabilibus. Surculus fit arbos, augmento et robore partium, quae conſtituunt, magis adactarum. Fluitque in venis metallum immaturum ſub nomine Gur metallici. Haeret autem, vti in initio monui, omnis haec, et ſucceſſiua in partibus et in toto, differentia non in ſolidis ipſis conſtituentibus, ſed in glutine iungente, plus minusue elaborato et compacto. Farina frumenti volatilis cum aqua commiſta in pultem, motu deinde ſubacta, condenſatur in maſſam, ex qua certo ignis gradu panis coquitur. Puluis viarum, vento mobilis, ſpargitur per auras; imbre vero madefactus et ſubactus idem vertitur in limum cohaeretque ductilis, inprimis ſi vel ipſe pinguior, vel mucoſior eſt pluuia: inde formatus globulus mollis, ardore clibani, torretur in lapideam duritiem. Ex oleo et puluere cretae impalpabili miſtis materies conflatur tenax et ductilis, qua iunguntur vitra ligno, quaeque, ſenſim ſiccata et ſolida facta, aërem arcet et aquam. Notiſſima haec ex innumeris adduco exempla, vt pateat, dum in corpore humano praeſto ſunt partes minimae terreſtres, humor has connectens aquoſo-oleoſus, motus continuus, et calor appropriatus, vt ex mucoſo principio, in ſingulis et in omnibus, ratione partium, cuncta firmentur, increſcant, tandemque per ipſum calorem et motum continuum rigeſcant ita, vt ſit ineuitabilis fati ſenilis neceſſitas, quam ſint vana illorum promiſſa, qui, ſpe longioris aeui, paucis elixirii aut eſſentiae guttulis credulos fallunt ipſi decepti; dum per integram corporis maſſam, vi penetrabili, cuncta concreta diſſoluere, nouaque apta infundere, iisdem conantur: adeoque a morbo quocunque, caeteris inſanabili medicamentis, liberatum

corpus

corpus producere ad longaeuitatem; imo vero in ſingulis peculiaria, et in aliis plane partibus peragere oppoſita vno eodemque auxilio. Tutior, ſi quid agendum, ars Medeae, fabulis implicita, per ſomenta et tepida balnea, rigido et exſucco decrepiti Aeſonis corpori reddit priscum iuuentutis floridae ſpecimen. Hoc docet, certo nixa fundamento, cura toties Sapientibus adhibita in vaſorum et viscerum morbis atque artuum contracturis, a nimis praeter naturam indurata et rigida fibra dependentibus. Sed et in partibus animalibus analogis extenſis mira eſt proprietas et conditio ſingularis ſemet ipſas contrahendi, adeoque primordia conſtituentia ſolida ad ſe inuicem adigendi, atque ductile extenſumque gluten iterum compingendi. In ventriculo et inteſtinis, quotidie diuerſimode extenſis et contractis, motus periſtalticus viget et perennat. Vterus a tantilla mole in ingentem eandem tempore grauiditatis excreſcens, breui poſt partum dierum interuallo ad priſtinum ſtatum redit. Haec res mira, vti admiranda reuera eſt, extollitur! ſed non video, quod minus ſtupenda ſit, cutis, pinguedinis, muſculorum abdominalium, horumque aponeuroſium, ſed inprimis tenuiſſimi peritonaei, ſingulorum prius extenſorum, valida et repetita contractio in foeminis toties parturientibus. Certe ſi cutis et muſculi in alia plaga corporis, ſi membranae peritonaeo ſimilis fibrae conſtituentes ita elongarentur et a ſe inuicem abducerentur, vix reſtituerentur vnquam, ſed manerent potius paralyticae. Interim miramur magis, quod vis haec peculiaris contrahens extenſa, tanto validior in corpore faeminino obtineat, quam in maſculino, cum tamen longe

 mollius

mollius ſit et textura laxius. Hanc puto maximam eſſe rationem, ob quam quotidie obſeruamus in praxi Mulieres longe diutius et longe commodius perferre aſciten, quam Viros, quoniam partes abdomen inferius ambientes ex propria et connata natura ad validam extenſionem et contractionem ſunt praediſpoſitae, licet huc etiam multum faciat latus peluis ambitus, nimium extenſas et extendentes aquas melius ſuſtinens. Patet et mira, ſed diuerſa in aliis, contrahendi proprietas in exſectis partibus ſimilibus irritatis, vti euidens eſt in corde et aliis muſculis quorumdam animalium.

Sicuti vero fibra naturaliter contracta, in maiorem adhuc nititur partium adunationem, (quod iam antea memoraui) ita eadem extenſa elongatur etiam vlterius, quoties et ratione, qua vis extendens augetur, tumque eo magis renitens vires contractiles plus reddit conſpicuas, quae reagunt in cauſam extendentem, quo haec fortior eſt. Aucta hoc explicat humorum circulatio, vnde vaſorum extenſio et contractio citiſſime mutatur et ſimul validiſſime: quod ſit a cauſa minima, et toties leuiſſima obſeruata, ſiue mentem prius, ſiue directe corpus afficiat; in quo, ſaniſſimo etiam declarato, vix idem omni diei hora cordis et arteriarum pulſus deprehenditur: quare inter Medicos multi dubitant, an perfecta ſanitas ſit definienda (*a*).

Quoties vero cauſa haec extendens aucta, vel per propriam virtutem, vel per imminutam reſiſtentiam in fibra ipſa, eandem plus elongare pergit, adeoque partes minimas conſtituentes magis a ſe inuicem remouet, tan-

(*a*) Galenus de ſanitate tuenda Lib. VI. Cap. 5.

tandem omnem in illa vim contractilem ſuperat et deſtruit. Agit quippe mutua inter partes virtus attrahens ad certam modo diſtantiam, in minori interuallo fortior, in maiori debilior, deſinens in iisdem, extra ſuae virtutis limites extenſis. Oriuntur tunc in partibus compoſitis omnes illi morbi vaſorum et viſcerum, per gradus ad paralyſin et continui ſolutionem vsque, qui a laxa et nimis debili fibra, quam vt naturaliter contrahatur, dependent.

Cum ergo vltima conſtituentia ſolida terreſtria, alia vocula aliis denominata, ſignificatione eadem (*a*) ipſa ſimpliciſſima et vnica, in quocunque animali, vt omni vegetanti, explorata ita inter ſe conueniunt, ıu vel attentiſſima indagatio nullam inter illa differentiam deprehendat; cumque cohaeſio vltima in vtroque non ſoluitur, niſi per viuum ignem in aura aperta, aut per aëris, aquae, et temporis, diuturnam actionem, an etiam vinculum vltimum in hoc, quam in illo, eſt perfecte idem aquoſo-oleoſum gluten? Praeter deſtructionis eandem in cohaeſione memoratam rationem, nonne hoc firmat ipſorum elementorum ſumma ſoliditas, ſimplicitas, adamantina durities, immutabilitas, adeoque in omnibus figura omnino et prorſus eadem, et talis quidem, quae ſolummodo iungitur per ſimplex vinculum ita, vt per ignis et frigoris actionem alternam remota et adducta principia in compoſitis corporibus rarefactionem et condenſationem efficiant; quae praeter illum, quem ex impulſu liquidi notauimus in compoſitis, motum continuum excitant. Certe quidem cum deprehenderant

 dudum

(*a*) Muſchenbrock Inſtitut. Phyſic. §. 43.

dudum attenti Physici, calore dilatari, rarescere, debilitari quaecunque corpora solida; frigore vero condensari, compingi, et roborari eadem in tribus regnis, simul notarunt seduli, omnem hanc mutationem non pendere in primis elementis ipsis, at vero in iis, quae ex his conflantur, particulis. An ita sunt prima composita corporum principia, in vegetantibus et in animalibus, etiam prorsus eadem, tam materie, quam cohaesione? An diuersitas in compositis maioribus dependet a molecularum, inter se similium, appositione et adunatione alia, vt inde varia componantur vascula, vasa, et continentia, per quorum diuersam intorsionis figuram, atque inde natam aliam oscillationis energiam, ex vno eodemque sanguine in animali, ex vno eodemque succo hausto de tellure in planta, adeo discrepantes secernuntur humores, prout hi alio directionis angulo in illorum parietes incidunt et repelluntur, atque ita diuersimode mixti alia iterum ratione separantur. An et inde diuersi characteris in speciem distinctio? Haec quidem videtur incomparabilis Ruischii sententia, cum per totam vitam, eamque longaeuam, attentissimus et dexterrimus in extricandis corporis humani labyrinthis, tandem deprehenderat; quod in omni eiusdem parte, per artem suam dissoluta et visibilia facta vasa minima, alio decursu procederent aliaque intorsione aperirentur.

Similitudo attente notata, siue ortum respiciamus, incrementum, nutrimentum, aut nutritorum secretionem et exhalationem, inter animantia et vegetantia, vti exposita elucidat, ita inprimis eadem affirmat vnius in alterius corpus metempsychosis, ne quidem plane in

elementa

elementa prima ſoluti prius. De tellure hauſto ſucco aluntur ſtirpes, ſtirpibus paſcuntur animalia, aut aliorum animalium partibus, quae prius comederant vegetabilia. Piſces maiores minores deuorant, ipſi minimos, qui iterum inſecta, et haec nutriuntur vegetabili tenuiſſimo.

Torua Leaena Lupum ſequitur, Lupus ipſe Capellam,
Florentem Cytiſum ſequitur laſciua Capella. (*a*)

Vaſtiſſima animalia, elephas, camelus, bos ſaginatus, equus generoſiſſimus, herbis conſtant comeſtis et aqua pura, in ſuum mutatis corpus. Homo vero vegetabilia comedit, varias animalium carnes, piſces et inſecta, his ſemet ſuſtinet, quorum omnium principium eſt de terra hauſtum pabulum vnicum et aqua iterum. Contra quae ex his aſſumtis prius conuerſa in corpus mutans exhalant de homine, de reliquis animalibus, per inſenſibilem perſpirationem et ſudorem, quae per ſaliuam, vrinam, aluum, depurationem, excernuntur, illa omnia breui tempore diſparent euaneſcentia in aëra. Imo vero ingentia belluarum corpora in deſertis mortua, hominum poſt belli conflictus relicta in campis cadauera, non longa ita mora, per coeli et tempeſtatum aſperitates, aëris viciſſitudines, ſolis ardorem et teporem, reſoluta prius in tabem, diffluunt putrefacta; et illa, quae ſub terra ſepeliuntur, ibidem vertuntur in tenuiſſimam mephitim, quae volatilis facta per eiusdem poros tranſit. Tandem oſſa relicta albicantia, iisdem iniuriis calcinata, collabuntur in cineres vento difflandos. Hac ratione ingentia corpora animalium diſſoluta ſepeliuntur tota in aëre, citius ſi combu-

(*a*) Virgilius Bucol. eclog. II, verſu 62.

comburuntur. Sed ita diſperſa et oberrantia in vaſta atmoſphaera horum meteora iterum redduntur telluris gremio, quoties cum rore, pruina, nebula, pluuia, imbre, decidunt, atque ſalina, oleoſa, ſaponacea aquae mixta, eidemque intime nupta, ſub forma lixiuii ſubtiliſſima ſabuleta penetrant, et in ſubterraneis his locis, per alternam ignis et aëris oſcillationem, cum ſuo vehiculo commota a bibulis plantarum radicum oſculis recipiuntur, nouum his, nouum animalibus, iterum reddituræ alimentum. Sic permutantur quotidie partes animalium in materiem vegetabilem. Sic ex plantis aſſumtis, omni momento aluntur animalium corpora, iisdemque conſtituuntur aſſimilatis in ſuam formam, aëri et terrae iterum reddendam. Vtque de terra oriuntur in aërem omnia, ita ex eodem relabuntur cuncta in illam, iterum proditura circulo continuo. Vt ergo omnium rerum vnum chaos terra, ita alterum aër eſt.

Quae interim de corporibus rapiuntur in vita particulae, neque quae poſt mortem ſeparantur, ſiue igne, ſiue putrefactione illa diſſoluuntur, ſunt ſemper ſolutae in, omnia conſtituentia, minima elementa; contrarium docet virtus harum molecularum odorifera late diſperſa, et quidem in aliis diuerſa animalibus, vti in carnibus tabidis et piſce putrefacto eſt euidens diſtinctio. Neque, relapſa in terram, ſemper in principia diſſiliunt, vti ex combinatione cum aqua patuit; multo minus id fiet, dum vegetabilibus recepta, per affabre horum factam compagem in propriam naturam elaborantur.

Hinc tandem concludere auſim: quod Elementa omnium prima, in omnibus corporibus animalium et vege-

vegetabilium, ſimpliciſſima, terreſtria, immutabilia ſint prorſus eadem. Et, quod haec prima in ambobus iungit, Gluten ſit eiusdem omnino naturae, neque vltimum tamen elaboratum, ſimpliciſſimum, ſed ex aqua ſaltem et oleo compoſitum, forſan et ex alio adhuc principio ſaponaceum: hinc ductile eſt et quodammodo figura mutatur. Eſt demum in vtrisque ratio cohaeſionis plane eadem. Sunt ergo omnium prima compoſita principia, aeque quam ſimplicia, in his eadem. Sic ex plane ſimillimis componuntur principiis et in eadem reſoluuntur animalium et vegetabilium corpora, vt facile ad eandem poſſent referri claſſem, licet character ſit valde diuerſus. Ideo diſtinctio neceſſaria eſt ob naſcituram caeterum confuſionem.

Sic ex elementis paucis innumerabiles nouorum corporum ſeries oriuntur. Sic ex compoſitorum ſeparatione, atque deinde commixtione iterum cum aliis adunatis vel cum primis compoſitis principiis, infinita naſcuntur corpora, quae alia appoſitione, varia figura et ſuperficie, diuerſiſſimas agendi virtutes et operandi poteſtates adquirunt, etiam remanente materia prorſus eadem.

Tandem: an quae inter vegetabilia et animalia, eadem inter haec et regnum minerale obtinet metempſychoſis? Certiſſimum eſt, quod vti illorum, ita foſſilium, et inter haec metallorum, particulae deferantur per atmoſphaeram (*a*); vnde ſaepe noxius fit aër, quandoque et venenatus, inprimis circa fodinas. Particulae hae ſimili ratione, qua vegetantium et ani-

(*a*) Boerhaave Elem. Chem. Tom. 1. pag. 490.

animalium, deciduae redduntur telluris gremio (*a*). Interim non ſemper ad matricem ſuam redeunt, reliquis corporibus intactis. Mercurius igne ſimplici eleuatur, et per auram diſperſus particulis inuiſibilibus corpus humanum intrat, hoc in ptyaliſmum incitat, dumque rapitur, de metallis obuiis aliquid aufert (*b*). Vegetabilium autem et quorumdam animalium exuſti cineres dant Ferrum verum conſpicuum. Scribit Ioachimus Beckker (*c*), ſeſe ex argilla vulgari cum oleo terebinthinae ſubacta globulos formae ſclopetariorum confeciſſe, et, poſt oleum Philoſophicum inde deſtillatione ablatum, reſiduum in pollen impalpabile triuiſſe, ex quo per magnetem admotum ſpiculas extraxit. Geofroy (*d*) ex nigra faece lucida olei vitrioli et terebenthinae mixti et deſtillati eadem inuenit, quae ex ſuis mox memoratus Bekkerus: affirmat deinde, quod loco argillae captis cineribus diuerſis plantarum, nullos horum inuenerit, qui non dederunt magneti adhaerentia granula, quae verum ferrum eſſe inde apparent, quod ſpeculo cauſtico expoſita, perfecte patiuntur et dant omnia illa phaenomena, quae exhibet de minera ſua ſeparatum ferrum; quod adeſt in exuſtis etiam millepedum et caſtorei cineribus (*e*). Quis autem definiet, dato ſemel corpore, quod aurum, argentum, reliquaque metalla ita attrahit, vti magnes ferrum, an non ſimilia horum ſpicula elicerentur de corporibus combuſtis? quod dum non affirmo, etiam negare non auderem

Nec

(*a*) Ibid. pag. 494.
(*b*) Ibid. pag. 492.
(*c*) In Phyſica ſubterranea.
(*d*) Memoires de l'Acad. de Scienc. 1704. pag. 285. 286.
(*e*) Ibid. 1706. pag. 529.

Nec vllius momenti obiectio est, generari, quod extrahitur de cineribus, demum ferrum tum, quando corpora comburuntur: agimus etenim de particulis constituentibus, adeoque ferri praesentia, post ignis violentiam, probat, dari in memoratis corporibus materiem, vnde metallum hoc conflatur, siue id fiat per ignem in combustione, siue ante illam, per causam quamcunque aliam.

Difficillius forsitan erit, exhibere in fossilibus animalium et vegetantium particulas. Notamus interim, terram, quam sales natiui, sulphura, semimetalla, et metalla viliora, dant, si rite depuratur, esse omni dote iterum eandem cum illa, quae ex vegetabilibus separatur et ex animalibus, nec vlla nota ab hac distinguitur. In perfectissimis autem metallis haec non deprehenditur, quae eius loco pro basi agnoscunt Argentum viuum fixatum per sulphur. Sulphur autem in omnibus corporibus, hominum fuerint vel ratione carentium animantium, stirpium vel fossilium, palam declarant Chemicorum Principes idem (*a*): vtpote quae materia luminis in corpora quaecunque penetrat, semper principium actiuum mouetur, moratur in horum poris, molem et pondus auget, figuras mutat, principia diuersa miscet, et hac ratione noua corpora facit. Vti deinde in animalibus et vegetabilibus gluten aufertur, dum comburuntur, vel alia ratione in principia dissoluuntur, ita auolat de metallis sulphur hoc oleosum, quoties illa foco speculi caustici exposita vitrificantur, tumque omni vin-

(*a*) De hac re videndae sunt obseruationes, quas dedere Ingens Hombergius, Geoffroy, et Le Meryus Iunior, in Actis Societatis Regiae Parisinae passim.

vinculo liberum in vaſtiſſima atmoſphaera non magis eſt ſulphur metallicum, quam animale vel vegetabile, ſed principium commune, aptum ad corpora quaecunque ingredienda, liganda, conſtituenda. Hinc metalla ſulphure ſuo orbata, hoc iterum recipiunt ex vegetabili. Si etenim materies prius per ſpeculum cauſticum vitrificata in cupella, deinde poſita ſupra carbonem funditur iterum per vitrum vrens, tunc ilico induit priſtinam formam et recipit indolem metallicam. Inde fit, quod metalla carboni impoſita, ſi foco ſpeculi cauſtici exponuntur, nunquam vitreſcant, ſed diſſiliant in parua fragmenta, ſemper adhuc metallica; carbo etenim de ſuo ſulphure vegetabili reddit, loco eius, quod ignis abſtulerat. Eſt ergo ſulphur metallicum; oleoſum nempe, opacans, colorans, et malleabile reddens, idem, quod vegetabile; et eſt hoc idem, quod animale ſub nomine glutinis.

Vt ergo omnium corporum baſis eſt terra ſimpliciſſima, elementalis, formam dans, et rei cuiuscunque principia caetera ſibi, deinde et inter ſe, vniens, nimis per ſe volatilia a diſſipatione retinens, praeſtans facultatem alieni aſſimilandi in cuiuscunque nutriti corporis naturam, adeoque et poteſtatem ſeminalem procreandi ſibi ſimilia efficiens, quae pereunt omnia, fabrica a terra praecipue pendente deſtructa, ita in Metallis et quibusdam Foſſilibus ſimilia praeſtat Argentum viuum. Hinc Hermeticorum antiquiſſimi, qui et optimi ſunt, palam affirmant, ex Mercurio ſincero ſolo per Sulphur puriſſimum fixato naſci Aurum et Argentum; ex eodem vero minus defoecato et argento viuo magis aliena labe in-

inquinato minus ſimplicia et viliora metalla in matrice ſua condenſari.

Ergo videntur omnia fore in rerum vniuerſo creato volatilia, mixta in chaos, ſi abeſſet Terra et Argentum viuum. Neque haec darent rerum principiis formam, niſi fixentur illorum elementa per materiem fluidam interpoſitam, quae ſuperficies et aſperitates laeuigat ita, vt cohaereant. Hanc materiem vnam eſſe, et eandem in vegetabilibus et animalibus, vti ſunt ſimpliciſſima, adeoque eadem principia conſtituentia ipſa, euincere conatus fui. Eſt forſitan et videtur eadem, quae in foſſibilibus ſub Sulphuris nomine venit cum illa ſubſtantia, quam Gluten diximus in reliquis. Inde transmigratio ex vno corpore in alterum non adeo obſcura eſt.

Ergo Foſſilia cum vegetantibus et animantibus conveniunt, ratione materiei fixantis, conueniunt in quibusdam ratione materiei fixatae. Differunt ratione alterius, terreſtris nempe principii vel mercurialis: magis quidem, quam reliqua mineralia, metalla; et inter haec, maxime perfectiſſima.

An ergo Ars, quae in tam multis Naturam perbelle ſequitur, aliquid valet perficere transponendo prima principia, iamque ex his compoſitas primas moleculas, vt naſcantur ex vno corpore diuerſa?

Notamus quidem, per inoculationem miteſcere in vegetantibus aſperitatem, nunquam tamen, vt priſtina indoles deleatur: nec poterit feliciſſima agricultura de ſemine aniſi producere foeniculi plantam. Omnes artifices ſimul intenti, non facient vnicam guttulam chyli, lactis, ſanguinis, ſeri, lymphae, bilis, vrinae, quae

 cor-

corpora animalium conficiunt ex ingestis diuersis, quorum omnium principium vegetans est, idque per affabre factam campagem et structuram singulis peculiarem ad destinata perficienda creatam, et quidem cum virtute seminali prolifera, similem producente prolem. Haec est mira a Deo data finitis infinitatis species; et haec admiranda distinctio generum et specierum, ex iisdem plane principiis, in vegetantibus et animalibus, alia modo horum appositione, connexione, et inde resultante actione in compositis, diuersa obtinet.

An fossilia, et inprimis metalla tamen, cum sint corpora magis simplicia, quam plantae et animantia, ideo ex vna in aliam speciem minori cum labore transferri poterunt? Torsit haec res ita acutissima omni aeuo ingenia, spe tanta retinuit mortalia pectora auri sacra fames, vt, a remotissimis temporibus in hanc horam, inuenti fuerint semper, qui omnem operam in hoc soli impenderunt, et quidem inter Philosophos sapientissimi. Ego, qui ab hisce quam maxime disto, palam tamen aio, ex consideratione illorum, quae recitaui, errare omnes, qui ex re non metallica metallum arte conficere student; errare et illos, qui perfectissima metalla tentant producere, nisi ex argento viuo. Forsitan et ipsi errant, qui nimiam, et omnem, in illo operam intendunt. Mercurius enim, quocunque locorum idem, nunquam ex venis educitur purus, sed semper inquinatus labe difficillime ab illo separabili, quia ab origine ipsi concreta intimis eius recessibus inhaeret, impediens et obtundens penetrabilitatem, maculans puritatem, simplicitatem cogens in connubium compositi: depuratus autem ab hac

hac labe foret purus, ſincerus, tumque adeo ſimplex, vt vbique in ſua diffuſione prorſus ſit idem, et immutabilis omnino. Haec admirabilis certiſſime res! eſt Alchemiſtis ideo quaerenda omni labore, omni pretio eſt redimenda, vtpote quae cruda metalla maturat, vilia in aurum et argentum perficit, reliqua corpora in radicale humidum diſſoluit, ipſa prorſus immutata. Ideo maximus Hermeticorum labor ſemper in eo fuit, vt, exurendo maculam, infectum hoc tollerent de mercurio; ex vitro ergo puriſſimo toties per vim ignis in excipulum purum pellebant, donec totus in puluerem rubrum ſcintillantem redactus erat. Hunc puluerem iterum ex vitris vrgebant, donec de mortuo reſuſcitabant mercurium viuum, quem habuerunt pro depuratiſſimo. Sed falluntur. Reſuſcitatus etenim eadem, qua prius, ignis actione cogitur iterum in pollinem rutilum, quod fieri poſſe cum ſuo mercurio, plane negant in arte Magiſtri, quia ſemel defoecatus, ab igne deinceps non mutatur. Legantur, quae circa hanc rem de mercurio quingentis et vndecim vicibus per ſe deſtillato, ſcripſit in Actis Philoſophorum in Brittannia Hermannus Boerhaavius. Qui et alia methodo deinde defoecationem ab impuro tentauit, miſcendo argentum viuum cum corporibus puriſſimis, natura illi ſimillimis, ex quibus iterum ope ignis millies et vltra abſtulit. Promittunt namque in arte Principes, eo modo mercurium, relicta faece in corpore fixo, depuratum penitus et viuum adſcendere. Sed in his multa docentur vana, errantibus ſalutaria, ſi ſapere volunt alieno periculo cauti.

Si ergo in ſolo deſoecando mercurio tanti ſunt fruſtra adhibiti labores, quid de eodem condenſando cogitabimus? cum ſi pondus index maſſae corporeae, adeoque potentiam fere creantem requirat (*a*). Sed de hiſce commode magis agetur, quando et haec, et reliqua Boerhaauiana poſthuma edam, nactus otium.

(*a*) H. Boerhaave Elem. Chem. part. I. pag. 41. 2.

MVS AQVATICVS EXOTICVS

CLVS. AVCTAR.

Raii Syn. Quadrup. p. 217.

Ruff. ВЫХУХОЛЬ

AVCTORE IO. GEORG. GMELIN.

Tres huius generis mures a piſcatoribus Caſanienſibus obtinens, e re eſſe duxi, deſcriptionem eorum adornare, eamque cum Raii et Sarrazini deſcriptionibus conferre.

Omnes maſculi coloris per totum dorſum et capitis ſuperiorem partem ex cinereo nigricantis, in ventre ex cinereo albentis. Odorem ſpirant Moſchi vehementem, quem difficulter, attamen ſine deliquio ſuſtuli. Conqueſti ſunt de capitis doloribus, qui mecum in hypocauſto erant, quos et ego, leues tamen, ſenſi. Cum ſola magnitudine, et parum quidem differant, maximum tantum deſcribam.

Tota longitudo eſt 1 ped. Rhen. 2 $\frac{96}{100}$ poll. Cauda 6 $\frac{1}{10}$ poll. aequat. Caput pro mole corporis ſatis paruum, in roſtrum ſuillo analogum, vltra $\frac{3}{4}$ poll. longum, in extremitate vltra $\frac{1}{4}$ poll. latum, deſinit. Rictus latera villis, ſeu potius ſetis, albentibus, circum circa ornantur. Dentes ſunt, vt in reliquis huius generis. Auriculas, licet omnem diligentiam adhibuerim, inuenire non potui. Retro oculos vero in diſtantia $\frac{64}{100}$ poll. loco, in quo auriculae alias adhaerere ſolent, rima in cute apparet, 4 lin. longa et 1 lata, quae ad meatum audi-

auditorium ducit, et ita occultata eſt, vt non niſi pilis abſciſſis, vel vſtis, conſpici facile poſſit.

Tam in capite, quam in corpore, duplex pilorum genus obſeruatur. Primum longiuſculum eſt, molle et rarum, ac ſupra alterum eminet, quod coloris magis diluti et moliſſimum, breue ac copioſum eſt.

Pedes anteriores cum vnguiculis non vltra pollicem longi ſunt, vsque ad digitos pilis raris hirtis obſiti. Vtrinque ad oras ſeries pilorum hirtorum, non vltra $\frac{2}{10}$ poll. longorum, albentium, iubae equinae inſtar pendent. Digiti 5 nudi per membranas cohaerentes, quorum ſinguli quatuor articulis componuntur, et in vnguem perparum aduncum, tenuem, $\frac{1}{4}$ poll. circiter longum, deſinunt. Pedes poſteriores ab ortu ſuo rotundiuſculi, anguſti, non vltra $\frac{3}{10}$ poll. lati, pilis ibidem raris obſiti, ſenſim et ſenſim nudi euadunt, et ex rotunditate latam ſuperficiem acquirunt. In extremitate $\frac{9}{10}$ poll. lati ſunt, imo ad 1 $\frac{34}{100}$ poll. extendi poſſunt, craſſitie vero ibidem vix $\frac{1}{10}$ poll. aequat. Ad oram externam ſeries pilorum hirtorum $\frac{2}{10}$ poll. longorum pendet. Pars prona pedum nigricat, et cutis ibidem teſſelata eſt, ſquamoſae analoga. Pars ſupina verſus extremitatem colorem nigrum, albo parum dilutum, obtinet, qui carneus fere eſt in reliquo pede. Abit in quinque digitos, per membranas latiores cohaerentes, et in extremitate vnguiculis acutis, magis aduncis, albentibus, inſtructos.

In pube penis loratus eſt, pilis albicantibus, breuibus, obſitus $\frac{35}{100}$ poll. longus, obtuſo et quaſi abſciſſo fine terminatus. Anus medio inter caudam et penem loco ſitus, et ab vtroque $\frac{3}{10}$ poll. diſtans, ori-

orificio rotundo, cuius diameter $\frac{1}{10}$ poll. eſt, in cute hiat. Foramen ſingulare pro vrinae fluxu, licet diligenter perquiſiuerim, reperire non potui.

Cauda ſuperius ex cinereo ferrei coloris eſt, inferius, inprimis in principio, carnei. Rotundiuscula ab initio et craſſa, ibidemque circulo pilorum obſcure fuſcorum $\frac{3}{10}$ poll. longorum, pinguium, cincta, tenuis et lata ſenſim euadit, et in tenuem apicem deſinit. In medio maximam latitudinem habet. Partis latae orae ſcindentes fere ſunt, et vtrumque latus in medio per totam longitudinem in aciem quandam eleuatur, inſtar ancipitis gladii, cuius figuram tota caudae lata et tenuis pars refert. Latera partis latae non horizontalem, vt in caſtore, ſed verticalem ſitum habent. Tota cauda ſquamoſa eſt. Squamae aqua tepida facile ſecedentes, figurae oualis ſunt, ab initio caudae maiores, et pro diſtantia ab ea minores, longiori parte transuerſim ſita. Dimidia tantum pars eminet, reliqua ab alterius ſquamae dimidia parte tegitur. Series ſquamarum ita ſibi ſuccedunt, vt ſingulae ſequentis ſeriei ſpatio medio inter duas praecedentes reſpondeant. Sub ſingulis ſquamis 2 vel 3 ſetae prodeunt, $\frac{3}{10}$ poll. longae, ex luteo albicantes, quibus itaque tota cauda hirta eſt. Cauda eſt pars huius muris, quae omnium maxime moſchum redolet.

Internarum partium conformatio ita ſe habet:

Pulmonum quatuor maiores lobi, et aliquot minores.

Hepar latum, tenue, figurae trapezoidis, in quinque lobos maiores et aliquot minores ſectum.

Veſiculam felleam, licet omni cura in hiſce tribus muribus, quos diſſecui, inquiſiuerim, reperire non potui.

Ventriculus figura dimidiam fere lunam repraeſentat, cornubus ſurſum ſpectantibus. Dextrum latus altius eſt ſiniſtro, et ſupra locum, vbi oeſophagus ingreditur, ad $\frac{1}{2}$ poll. eleuatum, cum ſiniſtrum vix $\frac{1}{4}$ poll. eleuatum ſit. Contenta frigore conglaciata erant, iis vero aqua diſſolutis, plura minima corpuſcula, vermiformia, carnis colore praedita, innatare vidi.

Inteſtina coeca nulla. Tota inteſtinorum longitudo 12 prope poll. aequat. Foeces inteſtinorum, inprimis recti, reſinam fere ſuper igne liquefactam, referunt, nec notabili foetore nares feriunt.

Renes $\frac{25}{100}$ poll. longi, $\frac{1}{2}$ poll. lati, figura humanis ſimiles, vtrinque in vreterem deſinunt, qui recta fere linea in veſicam vsque extenditur. Superius ſupra ſpinam vtrinque adiacet ren ſuccenturiatus, ex albo luteſcens, lentem maiorem figura et magnitudine referens.

Penis vsque ad (*c*) extra corpus prominens, intra corpus craſſior euadit, (*e*) et verſus dextrum latus incuruatur, deſinitque, vti videtur, in bina corpora, ex oblongo globoſa, (*ff*) quae pro teſtibus habeo. Vtrinque ad iſtos teſtes duo alia, pariter ex oblongo globoſa corpora, maiora, (*gg*) paulo inferius locantur, quorum vtrumque in tenuem appendiculam (*i*) terminatur, cuius finis infra teſtes ad penem eſt. Subſtantia tam horum corporum, quam appendicularum, glanduloſa eſt; in corporibus cauitas perexigua obſeruatur, nullo liquore imbuta. Flatum in eam inmitens, non niſi ſemel accidit, vt ductum verſus renes excurrentem, diſtenderem,

Tab. VIII. Fig. 1.

cuius

cuius inſertionem aſſequi non potui. Haberem haecce corpora pro folliculis, moſchi odorem continentibus, ſi vel liquorem tali odore paeditum in iis deprehendiſſem, aut ſi odorem moſchi reliquis partibus fortiorem de ſe ſparſiſſent. Sed neutrum obſeruare licuit. Pluribus et magis exactis circa haec et vaſa ſpermatica obſeruationibus inſtituendis, tempeſtas nubila, breues dies, et locus obſcurus, quo diſſectiones faciendae erant, obſtiterunt.

Raii mus exoticus, et loco natali, et deſcriptione, noſtro reſpondet. Tantum proportio pedum longe alia in Raii deſcriptione explicatur, quam in noſtro deprehendi; Forte, quia Raiana deſcriptio ex pelle facta, vel ex Cluſio deſumpta fuit, de cuius deſcriptione Raius eandem ſuſpicionem mouet.

In Commentar. Ac. Sc. Paris. 1725 Sarrazinus murem, Moſchum redolentem, Americae incolam, deſcribit, a quo noſter omnino differt. 1.) Odorem non tam grauem noſter ſpirat, qui Anatomicum duabus vicibus in deliquium coniiciat; remedio enim vſtionis pilorum, quod Sarrazini cerebro tantopere conduxit, licet haud vſus ſim, erectus tamen manſi. 2.) Auriculis Americanus gaudet, noſter nullis. 3.) Oculi Americano magni ſunt, noſtro parui. 4.) In noſtro foramen, vrinae excretioni ſingulariter deſtinatum, quod in Americano obſeruatur, deeſt. 5.) Teſticuli et folliculi muris Americani non niſi oeſtri venerei tempore magnitudinem talem acquirunt, quae facile ſub ſenſus cadit, noſtri tempore, quo nulla oeſtri ſuſpicio eſt, magnitudinem fere maiorem obtinent. 6.) Quod certo de folliculis Americani muris aſſeritur, quod principia odoris Moſchi

 continеant

contineant, de folliculis nostri muris nondum asserere ausim. 7.) Calamo aromatico Casanienses mures non vescuntur: Quapropter nec causa odoris Moschi, quem spargunt, esse potest. 8.) Pedes anteriores Americani muris more aliorum huius generis animalium conformati sunt, nostri per membranas, breues licet, cohaerent Male vero Clusium erroris argui existimo, qui pedes posteriores membranis munitos esse scribit. Haec expressio significat: pedes posteriores membranis cohaerere. Et forte pedibus posterioribus membranas adnatas esse, idem est. Certe figura pedum, quam Sarrazinus fieri curauit, pedibus Casaniensis muris ex asse respondet.

RVPICAPRA
CORNVBVS ARIETINIS.
Ruſſ. СТЕПНОЙ БАРАНЪ.
Chalmucc. ARGALI.

Auct. IO. GEO. GMELIN.

TAB. VIII Fig. 2. Ceruum capite, collo, pedibus, pilis et agilitate corporis refert. Masculus, quem descripsi, trimulus erat. Altitudo 1 $\frac{1}{2}$ vln. Ruſſ. longitudo ab exortu cornuum ad caudam vsque 1 $\frac{3}{4}$ vlnarum. Cornua ex albo lutescentia, aetate magis prouectis nigrescentia, supra oculos ante aures prodeuntia, ad dimidium fere admodum rugosa,

rugoſa, reliquam partem non niſi leuiſſimis rugis conſpicua, retro in circulum fere flectuntur, ita tamen, vt extremitas paululum ſupra et extra vertatur. Aures, quas animal plerumque erectas gerit, mediocriter latae, acuto apice terminantur. Pedes vngulis bifidis inſtructi, anteriores $\frac{5}{4}$ vlnae longi, poſteriores longiores. Anterioribus, recta linea extenſis, animal ſemper ſtare ſolet, poſterioribus, non niſi incuruatis, in plano horizontali incedit; curuaturam vero pro ratione plani, cui inſtat, dirigere videtur, ita, vt praecipitia conſcendendo eos in rectum fere extendat, quae opportunitas ob loca praerupta, quae inhabitare ſolet, a natura ipſi conceſſa eſt. Cauda breuis ceruinae inſtar. Sub collo paleare dependet. Color capitis et totius corporis gryſeus ad fuſcum vergens erat. Per medium dorſum, in natibus et pedum interna parte, vt et in ventre, luteſcens color, ad ruffum aliqualiter inclinans, obtinebat, ita tamen, vt in ventre pallidior eſſet. Hic color hybernae veſti conuenit: Pilos nempe non diu mutauerat; Veſtis autem aeſtiua vndique e luteo ruffeſcens eſt. Ferus erat, nec vel decem homines ad eum coercendum apti videbantur; cornubus enim peſſime ferit, viribus maximis pollens. Maximi ceruum iuniorem aequant; Cornua vero adultis in tantam molem excreſcunt, vt, menſura ſecundum curuaturam ſumpta, duas vlnas longitudine aequent, et 30. libras pendant.

Foemina masculo ſemper minor eſt, cum quo de caetero ipſi toto corporis habitu exacte conuenit. Cornua vero fert hirci inſtar, rectiora, nec multum rugoſa, paruae molis, tenuia, quae nec aetate molem multo maiorem acquirunt. Quam figura ſiſtit, bimula TAB. VIII. Fig. 3.

 erat,

erat, vt plurimum ruffeſcens, hinc inde cineraſcens. Veſtem nimirum aeſtiuam demum mutare incepit. Alias color ipſi cum maſculo communis eſt.

Circa Vſt-Kameno-gorenſe fortalitium in Sibiria, et montes, qui eius loci montibus connexi ſunt, magis tamen eos, qui ad Chalmuccos pergunt, verſantur, montium inprimis ad Buchturma fl. ſitorum amantiſſimae. Quadraginta leucas infra Vſt-Kameno-gorenſe fortalitium in littore Irtis orientali, quod Krasnoi-Iar vocant, terra ſalſa eſt; Eo ſaepiſſime et lubenter migrant, ſalis lambendi cauſſa. Curſu ſunt velociſſimo. Victus e graminibus. Autumno coeunt, vere pariunt, foetum vnum, quandoque et gemellos, edentes

Erat eo tempore, cum in fortalitio Vſt-Kameno-gorenſi verſarer, maſculus ibidem bimulus huius animantium generis, qui morbo diu conflictatus, vitam miſerrimam egit. Hunc a Locumtenente, qui fortalitio praeeſt, ad ſectionem petii et obtinui. Parum quidem me iſta ſectione profeciſſe profiteor, quia temporis ratio, quam propoſitum nobis iter habere iubebat, effecit, vt feſtinanter admodum adminiſtrari debuerit. Vt de vita animalis adhuc proficerem, in venam iugularem externam amplam inciſionem feci, atque in ipſam Thermometrum immiſi, in quo ſatis diu ibi retento, mercurius ad 80 gradum caloris Therm. Delisliani eleuatus fuit.

In deſcriptione externarum partium nihil eſt, quod morer, cum iam deſcripto, niſi paruitate, in omnibus reſpondeat. Diſtantia inter penem et teſticulos 7 poll. erat.

Ventriculus totam fere cauitatem abdominis occupat. E quatuor vero conſtat ventriculis, quorum maxi-

maximus is eſt, de quo iam dixi, et in quem oeſophagus inſeritur. Membranoſus eſt et columnulis plurimis muſculoſis farctus. Hunc proxime ſequitur alter, multo minor, qui a priori membrana interna in altum eleuata diſtinguitur. Eius ſuperficies plurimis cellulis ſexangularibus obſita eſt. Tertius pariter minor, interne rubens, plicis plurimis conſtat, quae numeroſiſſimis papillulis denſe ſtipatae ſunt. Quartus duobus iam dictis aliquantum anguſtior, ſed longior, interne laeuis et rugoſus eſt. Inteſtina tenuia 55 pedes, craſſa tertiam tenuium partem longa. Colum plus ſepties reflectitur. Ad inſertionem ilei in coecum valuula eſt, valuulae coli in homine analoga. Coecum vero, vltra pedem longum, in proceſſum abit vermiformem, amplitudine quoduis tenue inteſtinum ſuperantem, non vltra 2. poll. longum. Hepar duobus primariis lobis maioribus conſtat, quorum tamen dexter, cui veſicula fellea, tres pollices longa, cylindroidea, ſelle virideſcenti repleta, adhaeret, maior eſt. Praeter hos alius eſt, triangularis, oblongus, cauae accretus, et lobulus Spigelii ſatis inſignis. Splen 8 poll. longus, in medio, vbi latiſſimus eſt, 4 poll. latus, ventriculo arcte adhaeret. Renes humanis ſimiles, 3 poll. longi, duos lati. Vreteres vrachum ſuperſcandentes poſteaque rurſus infra eum flexi, recta fere linea ad veſicam pergunt, inde vero oblique non procul a collo veſicae inſeruntur. Renes ſuccenturiati ouales fere, verſus internum latus auricula quaſi, triangularis figurae, ad venam cauam arcte adhaerente, donati. Cauitatem in ſe habent, quae flatu diſtendi poteſt. Penis, digitum mediocrem craſſus, anfractuoſo admodum itinere verſus

pubem

pubem pergit, et, ſi in rectum extenditur, ad duos pedes facile longus eſt. Extra corpus vero dimidium circiter pollicem prominet. Praeter ligamentum ſuspenſorium duo adhuc erant, ex oſſibus pubis prodeuntia, et paulo ante musculos erectores ſupra glandulam quandam oblongam, maximam, tres circiter pollices a collo veſicae diſtantem, terminata. Ad collum veſicae duae proſtatae, ſatis ſenſibiliter diſtinctae. Vas deferens in veſiculas partim ſeminales, quae glanduloſo cuidam corpori magis comparari poſſunt, partim in ipſam vrethram ad radicem eius abit. Cor dimidium pedem longum. Auriculae ad oras pulchre laciniatae. Pulmonum duo praecipue lobi, quorum ſiniſter dextro maior eſt. Vterque ſuperius quatuor lobulos adhaerentes habet, ſiniſtri vero lateris maiores ſunt. In vno lobulorum ſiniſtri lateris veſicula transparens fuit, $1\frac{1}{2}$ poll. longa, et 3 poll. lata, non niſi aëre diſtenta. Vomicae plures, pus non fundentes, pulmones hinc inde occupabant.

DE-

DESCRIPTIO ANIMALIS MOSCHIFERI, KABARGA DICTI.

Auctore IO. GEO. GMELIN.

Inter praecipuos labores, Krasnoiarii suscipiendos, hunc mihi praescripsi, vt, quae ibi de Animali Moschifero comperire possem, diligenter annotarem, cum inter cognita et descripta adhuc animalia pauca sint, quorum descriptiones emendatione tanta egere videantur, ac hoc ipsum animal. Ita vero votis meis fortuna fauit, vt tria huius generis animalia, duo mascula, vnum foemininum, ope Praefecti huius loci ad disquisitiones meas obtinuerim, e quibus descriptionem ita adornabo, vt quae vtrique sexui communia, quae propria obseruauerim, probe inter se distinguam, parum occupatus in refellendis aliorum erroribus, qui descriptione fideli et ad viuum facta sponte collabuntur.

Delineationem animalis nullam fieri curaui, quia ea, quam Isbrand Ides dedit, meliorem ab exemplis mortuis desumi posse non speraui. Caeterum is in Isbrandi figura praecipuus defectus est, quod venter nimis prominet, et animal sine pilis repraesentatur. Refert hoc animal forma externa capreolum, intellige auriculis longis, collo breui, pedum longitudine, et cauda, vel nulla, vel vix conspicua. Capreolo vero statura inferius

 est.

eſt. Illud enim, quod Grewius et ex eo Raius deſcribit, e maximis eſt, nullo eorum, quae apud me habui, ad talem magnitudinem accedente. Intellexi vero a venatoribus parum iis maiora reperiri. Dimenſiones hae ſunt:

	Ped.	Poll.
Longitudo ab extremo roſtro ad finem oſſis ſacri	3	3
- - - capitis ab extremo roſtro ad medium vſque interſtitium inter et retro vtramque aurem - - - - -		7 ½
- - - colli ab eodem interſtitio ad finem vſque vertebrarum colli. - - -		7
- - - Auricularum a radice ad ſummum vſque		4
Frontis latitudo - - - - - - -		fere 3
Diſtantia extremi roſtri a medio inter oculos interſtitio - - - - - -		3
- - - internorum oculi canthorum inter ſe		2 ½
- - - auricularum ab externis oculorum canthis		2
Longitudo pedum anteriorum ab initio armorum ad extremum vſque pedem - -	1	3
Longitudo pedum poſteriorum ab initio femoris ad extremum vſque pedem - -	1	9

Eandem fere proportionem in hiſce tribus, quae luſtraui, animalibus deprehendi, niſi in capite, quod in foemella breuius erat, roſtroque magis obtuſo gaudebat. E quo colligitur, auriculas et caput nimis breuia, collum vero nimis longum a Grewio deſcribi, cuius cauſa fortaſſis in eo latet, quod deſcriptio Grewiana e pelle ſuſta ſit.

Pes

Pes vterque profunde fiſſus in quatuor vngulas, duas anteriores $1\frac{1}{2}$ poll. longas, in baſi $\frac{1}{4}$ poll. latas, et totidem poſteriores, pollice aliquantum longiores, in baſi vero latiores quadrante pollicis, et vel in mortuo animali conſpici poteſt, illud viuum, quando in ſolo horizontali incedit, vngulis etiam poſterioribus neceſſario inſiſtere.

De cauda, quid ſtatuam, hæreo. In duobus maſculis, in quibus ſollicite in eam inquiſiui, nihil eiusmodi obuenit, pilis vero circa anum diductis teretiuſculum quoddam corpus in conſpectum prodiit, $1\frac{2}{8}$ poll. ultra anum eminens, baſi ſua $\frac{5}{4}$ poll. latum, atque in cuſpidem deſinens, oſſi ſacro adnatum, carne tantum et cute, nullis vero pilis tectum, rubri coloris. Cum in primo huius generis animali hoc viderem, credidi, caudam forte auulſam fuiſſe, altero vero eodem modo ſe habente, non dubitaui, quin haec conſtitutio naturalis ſit, temere mutilationem partis cuiusdam a diuerſis venatoribus in eodem loco eodemque modo factam ſupponi exiſtimans; ſancte inſuper vterque venator affirmauit, animalia omnino integra fuiſſe apportata. Sed ecce nouum ſcrupulum! Luſtraui foemellam, inque ea idem quidem corpus, ſed pilis tectum, inueni. Rem igitur in ſuſpenſo relinquo, in eam pronus ſententiam, oſſa coccygis maris pilis nuda, foeminarum piloſa eſſe.

Quod ad colorem animalis, is in dorſo et collo vtplurimum fuſcus eſt, cinerei mixtura aliquantulum alteratus. Tibiae et pedes intenſe fuſco colore gaudent. Sub maxilla inferiori ad mentum vsque, vt et inferius ad auriculas et in interna femorum parte color gryſeus obtinet. Gulam linea fuſca, alba vtrinque faſcia cincta, per totam ſuam longitudinem exornat, eademque fuſca linea ſuperius in duas partes diuiditur, mentum album vndique cingens. Pectoris et ventris ſupremi colore fuſco cinereus eſt, pubis vero et partium, anum et pubem interiacentium, cinereus eſt ſine fuſci mixtura.

Pilis hoc animal tegitur copioſiſſimis et longiſſimis. Pili capitis et crurum vltra dimidium pollicem, dorſi et ventris $2\frac{1}{2}$ poll. pubis vero ad 4 poll. longi ſunt. Omnes in genere pili vltra tres quartas partes a radice candidiſſimi ſunt, inde fuſco colore tincti, extremo apice vel candentes, vel luteſcentes. Licet pili craſſi ſint, nec ſetae porcinae craſſitie multum cedant, et pilos capreoli dicti ſuperent, mollioris tamen et tenuioris ſtructurae ſunt, atque per totam longitudinem a radice vsque ad apicem per breuia interualla criſpantur, aut, vt Grewii verbis vtar, flexu reflexuque quodam vndante criſpi ſunt, vti ceruino generi familiare eſt. Ad quoduis latus inferioris maxillae ſingularem ceſpitem pilorum craſſorum, breuium et rigidorum, deſcribit Grewius, cui ſimilem inuenire non potui in vllo horum animalium. In vno maſculo in ipſo mento quinque vel ſex pilos per totum albos, reliquis pilis multum eminentes, atque in angulo maxillae inferioris, qui vltra 2 poll. ab angulo oris diſtabat, vtrinque pilum ſingularem, reliquis 2 poll. eminentem, per totam ſuam longitudinem atrum vel atro fuſcum, extremo apice, qui albus erat, excepto, conſpexi. In alio pariter maſculo nec hos nec a Grewio deſcriptos pilos vidi. Eminebant vero vtrinque infra canthum oculi inferiorem duo pili longiſſimi, fuſci, atque ſupra vnamquamque orbitam ſuperiorem oculi in medio

vnus

vinus insuper paulo breuior pilus exiit. In foemina rursus aliis in locis singulares eiusmodi pili erant. Vtrinque ad rictus latera albi, et circa nasum hinc inde fusci pili, reliquis paulo longiores, eminebant. Adeoque concludo, haec in omnibus variare indiuiduis, imo existimo, talia nec in aliis animalium generibus deesse, cum vero nimis curatam inspectionem requirant, non obseruata esse.

Vtriusque sexus animal in inferiori maxilla octo dentibus incisoribus, quorum duo extremi satis parui sunt, et sex vtrinque molaribus, in superiori nullis incisoribus, sex vero vtrinque molaribus munitur. Hunc numerum in omnibus constantem inueni, existimo vero, Grewii fallaciam ex eo ortum trahere, quia molares dentes ita arcte sibi inuicem opponuntur, vt distinguere eos, nisi praeuia coctione, difficile sit.

Masculinus sexus a foeminino insignibus notis differt. 1) Totius corporis mole maiori. 2. Rostro magis acuto. 3. Duobus dentibus exertis, e superiori maxilla, situ aprinis dentibus simili, egredientibus, substantia ebur referentibus, clauso ore vnum circiter pollicem extra os prominentibus, retrorsum incuruis, in basi vltra quadrantem pollicis latis et in cuspidem terminatis, non teretibus sed falciformibus. 4. Ventre eo in loco, vbi penis esse solet, dimidium circiter pedem infra cartilaginem ensiformem, prominente. Referebat vero illa prominentia tumorem, ouo gallinaceo magnitudine parum cedentem, pilis vndique hirtum, qui anterius in corpus quoddam, balano penis simile, miniacei fere coloris, pilisque albis centrum versus eiusdem corporis directis,

 ibidem

ibidemque conuergentibus, veſtitum deſinebat. Pilis illis diductis duo in illo corpore oſtia apparent, vnum ſuperius, oblongum et maius, area depili cinctum, alterum inferius rotundum et minoris diametri, cuius orae circum circa pilis longiſſimis rigidis et erectis muniuntur. Vtrumque horum foraminum ſetam admittit, quarum ea, quae ſuperiori foramini intruſa fuit, in ipſo tumore deſinere viſa eſt. Imo preſſo tumore per illud foramen fuſca quaedam et pinguis materia exiit, moſchum redolens. 5. Teſticulis, qui ultra 1 poll. ſub nominato tumore et 2 poll. et $\frac{3}{4}$ poll. ſupra anum, ſcroto exterius eleganter rubente, pilisque albis raris et criſpis obſito, includuntur, et reliquo ventre eminent. Denique extremitas coccygis pilis nuda notam diſtinctionis in mare exhibet.

In foemella duas papillas obſeruaui, quae licet cute quadrantem fere poll. eminerent, ita tamen inter pilos deliteſcebant, vt, niſi hos novacula caute abſcidiſſem, papillae iſtae me forte adhuc laterent. Sunt vero tenuiſſimae, nec culmo craſſiores, a cartilagine Xyphoidea decem fere, a vulua $3\frac{5}{8}$ poll. diſtantes. Vulua plus octaua pollicis diametro continet. Sub vulua immediate anus eſt, cui appendicula oſſis coccygis, vti dixi piloſa, imminet.

Vmbilici veſtigium in neutro ſexu externe apparuit.

Caro huius animalis huius loci incolis in eſcam cedit. Maſculi caro moſchi leuem odorem ſpirat, foeminae vero omni odore expers eſt. Quae in Martinii Atlante Sinico de moſchi e carne huius animalis praeparatione exſtant, tam vana commenta ſunt, vt de iis ſilere ſatius ſit.

Pro-

Progredior ad earum partium descriptionem, quae non nisi facta dissectione conspici poterant. Separata cute abdominis vmbilici vestigium vidi quinque pollices infra cartilaginem Xyphoideam, adeoque vmbilicum quinque pollicibus altius tumore illo situm. Cutis huius animalis tenuissima est, nec pilis firmum fulcrum praebet; vix enim tacti defluunt. In suspenso tamen relinquo, an constitutio haec naturalis sit, aut an potius a diuturna congelatione horum animalium et regelatione inducta.

Musculi abdominis nihil peculiare habebant. Oblique descendens a 5 - 11 costis quinque processibus digitatis atque a costis spuriis oriebatur. Rectus quatuor habebat inscriptiones tendineas, quibus etiam transuersus ornatus erat. Sub musculo oblique ascendente vtrinque ad eum locum, vbi funiculus vasorum spermaticorum abdomen egreditur, musculus carneo principio oritur, non vltra quadrantem poll. latus, qui postea turgidior factus vtrinque tumorem versus illum, externe in abdomine conspicuum, ascendit, quem fibris sparsis vndique cingit. Excipiendae tamen sunt fibrae inferiorem versus partem tumoris progredientes, quae cum superioribus non coniunguntur, sed recta balanum versus procurrunt, et circa inferius eius orificium terminantur sub alio quodam musculoso corpore, balanum vndique cingente, quod cum serie illa fibrarum a tumore eum in locum extensarum ita cohaeret, vt sine laceratione separari nequeat. Haec dispositio efficit, vt tumore constricto succus aliquis exprimatur per foramen superius, in balano situm, impedit vero, ne eodem tempore per inferius

foramen

foramen aliquid effluere poſſit, illud enim neceſſario conſtringitur.

Tumor, de quo hactenus ſermonem feci, folliculus eſt moſchum continens, cuius adeo ſitus plane alius eſt, ac qui adhuc traditus fuit; omnes enim ſcriptores, quos hac de re conſului, Miſſionariis Danicis, in ora Coromandelina verſantibus, exceptis, qui pro teſticulis habent, vno affirmant ore, folliculum moſchiferum vmbilici quandam excreſcentiam eſſe, vel tumorem, plane vt olim de Tajacu, ſiue Apro Mexicano moſchifero, viri eruditi diu ſenſerunt, quorum vero errores D. Tyſon ſolide excuſſit. Sed vel ex hoc exemplo patet, conſuetum eſſe plebi, omne illud pro vmbilico vendere, quod in aliquo inferiorum partium, vel ventris, vel dorſi, protuberat, quando id nec peni nec teſticulis comparari poteſt, quo minus vitio illis nimio verti poterit, qui huius animalis folliculum in ventre ſitum, pro vmbilico habent. Indicaui ſupra, quo in loco rudimenta vmbilici conſpexerim, ex quo ſatis evidens eſt, folliculum diſtinctum plane corpus ab vmbilico eſſe.

Vt ſitum folliculi eiusque nexum cum aliis partibus diſtinctius notem, licet in ſequentibus vberius id expoſiturus ſim, hoc loco tantum moneo, eum poſterius, et ſiniſtra ſui parte, cum vrethra connecti. Qualem cum pene habeat connexionem, adhuc dicere nequeo, quia eius ne veſtigium quidem adhuc vidi; tantum abeſt, vt penis folliculi corpus tranſeat, prout recens quidam ſcriptor contra vulgarem ſententiam aſſerere auſus eſt. Videtur certe natura, cum ſexui maſculino in hoc genere animalium tot inſignes notas conceſſerit, quibus

a foemia foeminino facillime distingui potest, nobilissimam partem, qua essentialis sexus differentia sita est, caute celasse, superfluorum non amans.

Separata cute huius folliculi et musculo supra descripto, membrana apparet, membranae internae ventriculi gallinae siccati consistentia respondens, adeoque firma et attactu duriuscula, coloris amethystini et pro vario radiorum solarium reflexu hinc inde aurei, qua incisa cauitas interna apparet, materiam illam a ℥iß ad ℥iiß continens, quae moschus dicitur. Erat vero illa materies fusci coloris, eique multi breues pili vel paleae immiscebantur. Consistentia erat Electuarii non plane siccati, nec enim fluida erat, nec plane solida. Attactu erat pinguis, illudque pingue presso folliculo e superiori balani foramine exit. Moscho e folliculo exempto facies interior folliculi apparet, quae membranis plurimis, a membrana interna folliculi in altum surgentibus vndique scatet, prouti illud in fig. I. Litt. A apparet in qua folliculus cum vrethra adhuc cohaerens et apertus, optime ad viuum expressus sistitur. (a) tenue lignum est, quod per superius balani ostium (α) in folliculum vsque facillime et sine vlla vi immisi. Plura non habeo, quae de hoc folliculo dicam; Non vidi glandulas illas, quas Lucas Schroekius ad meatus moschiferi orificium se obseruasse statuit. Adhibui microscopia eaque bona, vt glandulas discernerem, probabile etiam est adesse, sed visum meum fugerunt. Vasa sanguifera vidisse mihi videor, nec tamen distincte, multo minus igitur, vbi origines moschi sint, percepi.

TAB. IX. Fig. 1.

Aperto abdomine ventriculus totam fere eius cauitatem implere videbatur. Eius vero dispositio plane talis est, vti in Rupicapra superius descripta, imo vt Fig. 3. in omnibus ruminantibus. (A) est venter magnus, et (a) oesophagus, illum ingrediens. (B) reticulum seu alter ventriculus. (C) omasus seu tertius ventriculus. (D) Abomasus seu quartus ventriculus in intestinum duodenum (b) terminatus. Primus ventriculus omnium maximus est, et aperto abdomine nondumque diductis partibus solus conspicuus. Tres quasi appendiculas caecas appensas habet, quarum vna (c) longissima est, et reliquae huius ventriculi parti ad dextram sita. Secundus omnium supremum locum obtinet, atque in sinistra abdominis parte situs est. Tertius secundo inferiorem situm obtinet, primus hos ordine sequitur, quartus omnium infimum locum obtinet. Omnes hi ventriculi materia viridi, instar pultis spissa, repleti erant.

Intestinorum pauca pars, nec nisi ea, quae in infimo ventre sita est, et coli quaedam pars, in sinistro hypochondrio eminens conspicitur, quando abdominis viscera in situ suo naturali relinquuntur. Intestinum duodenum plus vlna longum, in fine suo pancreaticum et choledochum ductus, diuersis orificiis, sibi inuicem proximis, hiantes recipit. Ieiuni atque ilei nullam potui differentiam animaduertere, ideoque eorum fines singulatim exponere nequeo. Vtrumque faecibus erat repletum, vtrumque striis longitudinalibus albis $\frac{1}{12}$ poll. latis, in tota superficie breuibusque interuallis vndequaque cinctum. Adeo vtriusque intestini idem habitus fuit. Liuescebat vtrumque a corruptione, quo

factum

factum eſt, vt ſtriae illae albae, quas pro ductibus pinguedinoſis habeo, liueſcentem ſuperficiem tegentes, inteſtino vtrique faciem plane peregrinam induerint. Ilei in coecnm inſertio nihil peculiare habebat. Aliquid valuulae analogum aderat, vti in homine. Coecum ratione habita ad coecum humanum, ſatis exiguum erat. Proceſſus vero vermiformis vltra ½ pedem longus. Horum nexus et configuratio fig. 4. ſiſtitur. (A) coecum, (*a*) ileum, (*bbb*) proceſſum vermiformem, (*cc*) coli initium exhibent. Colum, proceſſus vermiformis et rectum eandem faciem habebant, ac ieiunum et ileum, idque in omnibus illis tribus animalibus, quae inſpexi. Inteſtina tenuia a pyloro ad inſertionem vsque ilei duodecim vlnas craſſa, ſex vlnas longitudine aequabant. Continebant vbiuis excrementa, pilularum in formam conglobata.

In arteriarum et venarum meſaraicarum diſtributione nihil ſingulare animaduerti.

Hepar in dextro hypochondrio ſitum, paruae molis, ſi comparetur cum hepate aliorum animalium, in duos tantum lobos diuiditur, quorum dexter ſiniſtro dimidia parte minor eſt. Ligamentorum et vaſorum ſanguineorum eadem diſpoſitio, ac vulgariter eſſe ſolet. Veſiculam felleam in primo, quod diſſecui, animali indagans nullam inueni, nec eo tempore negligentiae in inquirendo me accuſaueram, imo bene cum manſuetudine animalis, quam varii Autores tantopere praedicant, conuenire exiſtimaui. Verum in duobus reliquis aderat veſicula fellea, quam quidem diu non videre potui, licet locum, vbi ſita erat, ſaepius antea manibus contrectauerim et

 oculis

oculis meis vſurpauerim. Veſicula enim in vtroque (et puto etiam in tertio) horum animalium plane collapſa, albentis cuiusdam membranae ſpeciem exhibebat, diametro pollicem maioris digiti non multum ſuperans, fellis vero ne guttam quidem continens.

Splen in ſiniſtro hypochondrio ſitus maioris molis erat, ac eſſe ſolet. Longitudine enim 4½ poll. latitudine ſuperius 2, inferius 3 poll. aequabat. Coloris erat e liuido rubeſcentis, ſubſtantiae pulmonum fere.

Renes (BB) humanis erant ſimiles, dexter vero
Fig. 1. et 2. ſitum altiorem ſiniſtro obtinebat. Arteriae (*bb*) et venae (*cc*) emulgentes, vtrinque aortae (D) et cauae (E) connectuntur, atque intra renes ſe ſurripiunt, vti figura exprimit, qua in diſtributione non ſine ratione factum eſſe exiſtimo, quod vena emulgens dextri lateris arteriam emulgentem eiusdem lateris, et emulgens ſiniſtra aortam ſuperaſcendant. Vreteres (*dd*) recta, nec notabiliter inflexi, in medio fere fundi veſicae (*c*) implantatur.

Omentum ventriculum tanquam in marſupio continebat, et parum habebat pinguedinis, quin pellucidum fere vbique erat.

Pancreas 4½ poll. longum 1 fere latum, conglomeratae glandulae faciem obtinebat, ductus vero pancreaticus tenuiſſimus erat.

Aortae et cauae ſitus in abdomine non multum abludebat ab eo, qualis in homine eſt. In Kabinga foe-
Fig. 2. mina differentiam inueni, quae accidentalis ſit, an ſexui particularis, determinare non audeo Aorta enim (D) ſub vena caua (E) perpetuo deliteſcit, nec prodit, antequam

tequam in iliacas (FF) diuidatur, quarum dextra cauam mox superascendit.

Cor 4 fere poll. longum, in basi 2 ½ poll. latum est. Vasorum et auricularum dispositio, vti in oue et huius generis animalibus.

Pulmo dexter in quatuor lobos diuisus, sinister in duos. Hisce interiacet vnus in medio thorace. Trachea tota quanta in omnibus spuma repleta erat.

Thymus in sinistro magis latere situs, Carotidem vndique arcte amplectitur, inferius bifidus, vtroque tenui ramo ad carotidem sito, superius eo in loco, vbi carotis in externam et internam diuiditur, a sinistro maxillae inferioris angulo, quem arcte amplectitur, figuram lunatam obtinet, cornubus sursum flexis. Cartilagini thyroideae aut potius musculis hyothyroideis glandula incumbit thyroidea, vnum poll. longa, superius angustior, inferius latior; Eius substantia inter glandulam et pinguedinem ambigit. Versus sinistram cartilaginis thyroideae profunde se insinuat, ibidemque cum thymo arctissime cohaeret et confunditur.

In quarto annulo asperae arteriae posterius musculus quidam carneo sed tenui nec ¼ poll. crassitie excendente principio ortus, oblique *antrorsum* flectitur, eandemque in decursu retinens crassitiem in primo tracheae annulo ad latus sinistrum fine admodum crasso et protuberante sedem figit, in loco insertionis a musculo sterno-thyroideo tectus.

Musculos oculorum sequentes obseruaui: 1. anterius situs, teres, tenuioris calami scriptorii crassitie, in medio orbitae in peculiari foramine ossis quarti maxillae superioris

 rioris

rioris, quod processum, antrum Hyghmori condentem, constituit, originem sumens, carneus, oblique corneam versus ascendit, et anterius ad marginem eius carnoso fine inseritur. Praeter hunc musculum octo adhuc sunt, e fundo orbitae enati, quorum quinque priores globum oculi vndique cingunt, atque in tunicam albugineam desinunt, tres reliqui sub illis locantur, neruum opticum circum circa cingentes, et in fundo bulbi terminati. Eorum, qui bulbum oculi cingunt, tres anterius siti, quorum anterior trochlearis est, et tendinem in corneam vsque mittit. Trochlea quam tendo huius musculi transit, parallelogrammum refert, in breuiori latere vtrinque in lunulae formam excissum. Duo vero posterius locantur, nec tendines suos tam alte mittunt, vti trochlearis.

In partibus genitalibus, quicquid discernere potui figurae adiectae, optime ad viuum expressae, monstrant. Masculinae partes mihi videntur tam peculiares, vt ad omnem eorum apparatum evoluendum multa mihi opera opus esse videatur, nec, fateor, mei in secando exigui profectus huic eleganti naturae artificio penitius euoluendo pares fuerunt. Diu quaesiui, donec ipsum penis corpus reperi, adeo solicite reconditum est. Vrethrae hiatum, (β) vti supra dixi, in balano, tumori accreto, ante sectionem administratam, facillime vidi, setam etiam per
Fig. 1. eum ad (*e*) vsque intrudere potui. Vidi etiam vesicam vrinariam, (C) quin ex illa spiritum ad locum (*f*) vsque facillima opera immittere potui. Vltra vero designata loca nec flatus, nec seta, transibant. Lotium, quo vesica plena erat, Moschum redolens, vltra locum eundem (*f*), licet summam vim adhibuerim, adigere non valui.

valui. Ipſum canalem a (β) ad (*g*) vsque pro vrethra quidem habebam, ſed reſiſtentia inter (*e*) et (*f*) inſuperabilis erat. Satis diſtincte de caetero cerni poterat, corpus, a (β) ad (*e*) et a (*g*) ad (*f*) extenſum, canalem tantum eſſe, nec enim quicquam aliud diſcernere poteram. Quid denique viderim, exponam. Aperui vrethram ad (*i*), continuando ſectionem verſus veſicam, donec ad locum reſiſtentiae (*e*) peruenerim. Canalis ibi non ita peruius erat, ac ante, ſed corpori (*ef*) obſcure rubenti, circulis concentricis vndique cincto atque in tenuiſſimum filum (*e*K) in vrethram hians deſinenti, vndique adhaerebat. Corpus hoc corporibus conſtat cavernoſis, ſepto inter ſe diſtinctis, atque in extremitate (*fl*) quae prope veſicam vrinariam eſt, tubere quodam inſigne, quod capiti gallinaginis aliorum animalium reſpondet, et apertum cauitate intus donatur, in qua nullum vidi liquorem, erat vero membrana, qua cauitas cincta eſt, inſtar cribri innumeris poris pertuſa. Satis puto iam cauſae eſſe, vt corpus (*ef*) penem eſſe pronunciem. Veſiculae ſeminales (*bb*) ad tuber (*fl*) poſterius ſitae erant, nullum vero ductum in illud productum diſcernere valui, licet, quin ſit, non dubitem. Id interim euidentiſſimum eſt, corpus (*Kf*) ſiue penem in oeſtro venereo ita explicari, vt et foramine vrethrae (β) prodeat. Cui enim alias vſui inſeruiret? Imo nihil eſt, quod tranſitui remoram iniiciat. Arteriae ſpermaticae (*mm*) vtrinque ex aorta progrediuntur, in vno horum animalium praeter conſuetam arteriam alia adhuc (*n*) ex hypogaſtrica ſiniſtri lateris procedebat. Venarum ſpermaticarum (*oo*) vtraque in venam cauam abibat,

nec,

nec vllam connexionem cum emulgente finiftra vidi. Vas deferens (*ppp*) vtrinque ex epididymide (*qq*) fui lateris ortum, progreffum habuit folennem, atque in veficulis feminalibus (*hh*) terminabatur. Corpus Highmori (*rr*) infigne glandulae fere conglomeratae fpecie.

Quam occulte natura in organis virilibus huius animalis fabricandis proceffit, tam libere et aperte in fabrica partium alterius fexus fe geffit. Vagina vteri, Fig. 2. anterius collo veficae (*i*) connexa, 1 ½ poll. longa, nullis rugis confpicua, neque clitoride neque nymphis munita, in vterum (A) tenuem, membranaceum definit, in cuius orificio interno nullas valuulas difcernere potui, adeo vt tanquam continuus cum vagina canalis, eo in loco tantum aliquantifper dilatatus, confiderari mereatur. Pofterius in collum anguftum (*e*) abit, qui in duos ramos fiue cornua (*ff*) curuatur, quorum vtrumque fefe coarctando et varios gyros efformando ad ouarium (*gg*) fui lateris, quod pifum magnitudine non excedit, pergit, et tubulo anguftiffimo, in extremitate peruio, terminatur. Adeo tranfitus vbique peruius erat, vt quaecunque in figura delineata funt, adhuc recenfita, omnia per vuluam tubulo inflari potuerint. In vagina dimidii circiter pollicis a vulua diftantia, duae erant lacunae, quarum altera oblique in collum (*i*) veficae (C) terminabatur, altera fub interna vaginae membrana pollicem circiter verfus vterum decurrit, atque prope eius orificium internum, feu, vt aptius dicam, in eius collo corpori cuidam glandulofo confunditur, ibidemque terminatur. Vterus quoad fitum ab aliorum animantium vteris non differt, veficam (C) quae ad latus reclinata, in in figura sistitur et intestinum rectum (G) interiacens, ligamentisque consuetis firmatur. In vasorum spermaticorum distributione nihil singulare occurrit. Arteria spermatica dextri lateris, sinistra multo inferius sita, ex aorta (D) progrediebatur, atque mox cauam (E) superscandens, eminentiam quandam eius, (*b*) quae in ipso illo loco est, vbi vena spermatica (o) sinistri lateris ingreditur, fere tangit, mox funiculo vasorum spermaticorum inuoluta. Spermatica vena sinistri lateris id peculiare habet, vt sub aorta progrediendo in parte posteriori cauae implantetur.

Quae de sceleto dici adhuc merentur, quia e sceleto Petropolin misso quauis occasione exacta descriptio fieri potest, specialius recensere supersedeo. Clauiculae nullae. Sex vertebrae colli, quatuordecim dorsi et sex lumborum. Ossa pubis omnino peculiaria sunt et anterius per cartilaginem iunguntur, e tribus cruribus conflatam, vno longiori, duos pollices longo et vtrumque os pubis interiacente, atque duobus, ab hoc longiori vtrinque ad oras ossis pubis productis. Spatium nimirum illud, quo ossa pubis iunguntur, non vti in homine, aliquot lineas tantum, sed duos pollices longitudine comprehendit; adeo solicite natura partes genitales custodiuit, vt quod foemininis partibus valuularum vel aliarum artificiosarum machinarum apparatu decederet, per solidas hasce partes compensaretur. Valuulae forte, ad vteri humani orificium internum sitae, datae tantum sunt, vt aërem arceant. In hoc animali ossium pubis singulari structura eidem rei cautum est. In pedibus anterioribus calcaneum longitudine tam humerum, quam vlnam et radium ſuperabat. Digiti quatuor, quorum mediis vngulae anteriores, extremis poſteriores affiguntur, duabus ſinguli phalangis conſtant. Inter oſſa pedum poſteriorum tibia omnium longiſſima eſt, os femoris et calcaneum ordine ſequuntur. Oſſa humeri, cubiti et calcaneum anteriorum ſimul ſumpta 18 poll. Oſſa femoris, tibiae et calcaneum pedum poſteriorum 21. poll. longa erant.

Degit hoc animal in meridionalibus Ieniſeae, fluuii, ad lacum Baikal, ad Argunum fl. et fluuiis in Argunum labentibus, atque in pinetis montoſis commoratur, raro exinde, niſi veris tempore, prodiens. Inceſſu gaudet Capreae Plinii analogo. Hominum conſortium admodum fugit, ſolitudinis amantiſſimum. Quando venatores illud proſequuntur, in ſummis rupibus ſibi aſilum quaerit, quo nec venatoribus nec canibus facile ire licet. Idem animal in confiniis ſinicis regnum Tangut verſus copioſe verſari dicitur. Moſchus vero animalium Sinenſium et Tanguticorum multo praeſtantior odore et decuplo fere pretioſior eſt

OBSER

OBSERVATIONES
QVAEDAM
NIDOS ET OVA AVIVM
CONCERNENTES.

AVCTORE GEO. WILH. STELLER.

Commodum illud, quod ad dignoſcenda auium genera et ſpecies ex nidorum ouorumque obſeruatione ſedula in Ornithologiam redundaturum crediderunt quidam, nimis longe petitum, incertum et omnino nullum eſt; namque modus generandi, ipſaque oua, in piſcibus et auibus, tantum lucis non afferunt, quantum fructus in plantis continuo affixis, nec ſeparabilibus plantarum cognitioni.

Neque vnius generis aues nidos, vno eodemque loco, forma, materia et modo ſtruunt. Aquilae et in rupibus et ſuper arbores nidificant. Hirundines aeque in fiſſuris littorum nidos collocant, eosque e gramine et limo haud ſemper compingunt, verum ex alia quoque materia eos interdum conſtruere ſolent pro diuerſitate locorum, quam circumſtantiae loci et temporis ſuppeditant. Deinde et nihil certi ob eam cauſam inde petitur, quod diuerſorum generum aues vno eodemque loco vniformes nidos ex vniformi materia fingant; quae vero interdum ſingularia ſunt, vni ſaltim ſpeciei ſingularia ſunt, vt nidus edulis Hirundinis Sinenſis, Bontii dictae, nidi penſiles e ſalicum quarundam pappis diuerſorum generum auibus communes, vt Galbulae et Salicariae.

 Ouorum

Ouorum forma, color, magnitudo, numerus, fubftantia interna, plura promittere videntur illi, qui oua auium fingula per tranfennam adfpicit; verum mihi vnius auis oua quamplurima inter fe collata fecundum haec attributa omnia valde et nimium differre obferuata funt, vt deinceps in hiftoria ouorum Lommiae et Graculi palmipedis apparebit.

Forma infuper ouorum eadem pluribus diuerforum generum et fpecierum auibus communis eft, color itidem faepe in vnius fpeciei auium ouis vel remiffior, vel intenfior, imo plane alius et diuerfiffimus, vt Lommiarum et Graculorum exemplo clarum erit. De magnitudine idem valet. Numerus et magnitudo pro aetate, climate et foecunditate auis plurimum variat, quod non tantum ex domefticarum, fed et fylueftrium, obferuatione clarum. Interna fubftantia optimum quidem dat difcrimen, fed limites nulli dantur in defcribendis his differentiis. Inuenimus faepe nidos, praefertim cum auicula, aut ante nos nidum reliquit, aut dum auolat, obferuatoris oculo nullam obferuandi moram concedit; certiores autem effemus, qualis effet auicula, fi eam ipfam, quam fi centies nidum et oua, infpexiffemus.

Spectat igitur nidorum et ouorum obferuatio fedula magis ad hiftoriam vnius cuiusque indiuidui feparatim, quam ad fcientiam, feu regulas, methodi. Propterea autem, vt exuuiae auium ipfarum, ita et oua, non indigna fubiecta funt, quae fimul cum auibus in Gazophylaciis naturae exhibeantur, ac miraculofis fuis formis, coloribus, quantitatibus relatiuis, creatorem, vt aiunt, ab quo ad mala mirandum ac venerandum oftendant.

Quan-

Quantum ad magnitudinem ouorum relatiuam omnium auium in genere obferuaui fequentia:

1.) Oua terreftrium auium magnitudine femper proportionata effe ipfi magnitudini auis.

2.) Terreftrium auium oua aquaticarum auium ouis minora effe.

3.) Marinarum, cliuos maritimos, infulas defertas, incolentium auium oua maxima effe, et pro refpectiua auis magnitudine folitam magnitudinem excedentia. Aues vulgo, fed perperam, ab Auctoribus dicuntur Arcticae, cum et fub latitudine 48 graduum mihi copiofe inuentae fint, dummodo loca fint maritima inculta, afpera et deferta. Ob ingenitam ftupiditatem illis Deus haec loca affignavit. Si in cultis effent, breui ob ftupiditatem et ftoliditatem genus deficeret, vt et propter numerum pauciorem ouorum et tempus ponendi femel tantum in anno iis conceffum. Pauciora autem oua fieri debuerunt, quia maiora mole neceffaria erant, ne calor cito exfpiraret, cum per vices faltim illis incubent.

Quantum ad numerum ouorum:

4.) Aues terreftres, domefticae, quod oua non tantum pullis, fed etiam hominum vfui deftinata funt, ponunt plura et quouis tempore.

5.) Aues aquarum dulcium comparate pauciora, quod ipfae tantum in cibum veniant, aut cafu faltem oua.

6.) Aues marinae ftolidae maxima, fed pauciffima, oua ponunt, quod vero numerofiffimae fint, loca deferta et inacceffa, longaeuitas quoque vitae harum auium efficiunt.

Quantum ad colorem :

7. 1. Albus color domeſticis auibus, earumque inimicis rapacibus, vt et auiculis omnium minimis, Regulo, Aſilo, Guainumbi etc. familiaris.

8. 2.) Varius reliquis, ſed conſtans, quauis aetate, quouis loco.

9. 3.) Varius, ſed inconſtantiſſimus, color marinis ſtolidis.

Quantum ad formam auium marinarum ſtolidarum, oua ſolito longiora et acutiora ſunt

Oua Lommiae ad ſcalam Anglicanam dimenſiones habuerunt ſequentes :

		Vnc.	lin.
1.	Longitudo axis - - -	3	2
	Diametralis latitudo maxima -	2	1
	Diametralis latitudo tres vncias a vertice latiori. - - -	1	5

Tab. X. Fig. 1. et 2. Ouum virore viridis aeris intenſe tinctum erat, maculis fuſcis, veluti literis Turcicis, inſcriptum, ad verticem latiorem magis, ad acutiorem minus, et formam magis pyri, quam oui, obtinet.

		Vnc.	lin.
2.	Longitudo axis - - -	3	2
	Diametralis latitudo maxima -	2	
	Diametralis latitudo tres vncias a vertice latiori - - -	1	1.

Fig. 3. Ouum virore viridis aeris valde diluto tinctum, et lituris confuſiſſimis ſpadiceis confertis et confluentibus

fluentibus in vertice latiore quaquauersum vltra vnciam conspurcatum erat. Similes, sed rariores, et minus conferti linearum ductus in medio cernebantur. Vertex acutior ad vnam vnciam his lituris carebat. Longius multo priori, sed angustius erat.

3. Cum 2 do easdem obtinebat dimensiones, et priori simile erat circa verticem latiorem, coronam ostendebat fuscam, maculosam, maculae autem in vnam confluebant, reliqua superficies raris fuscis punctis insignita erat, vertex acutior albus. Fig. 4.

4. Praecedentibus forma, virore et magnitudine par, circa verticem latiorem maculis albis pictum, quarum orae quaquauersum fuscae erant, adeoque insulas referebant, quales in mappis Geographicis pingi solent, reliqua superficies insulis minutis et punctis varia. Vertex acutior immaculatus candidus. Fig. 5.

		Vnc.	Lin.
5.	Longitudo axis - - -	3	3.
	Diametralis latitudo maxima -	2	1.
	Diametralis latitudo 3 vncias a vertice latiore - - - -		9.

Latius, verum breuius, erat tertio, et maculas pene easdem habebat.

6. Longitudo axis - - - 3. 8.

Maculis confluentibus nigris circa latiorem verticem, hinc inde insulis et maculis pictum erat varie.

7. Totum erat pallide viride, absque vlla macula, figura priori simile, vt alius auis ouum indicares. Fig. 6.

8 Erat pallide viride, maculis maiusculis nigris, veluti digitorum impressorum vestigiis, varium.

9. Lon.

		Vnc.	Lin.
9.	Longitudo axis - - -	3	3.
	Diametralis latitudo maxima -	1	9.
	Diametralis latitudo 3. vncias a vertice latiore - - - -		8.

Tab. XI. Fig. 7. Ouum hoc colore erat album, et obſcure admodum, hinc inde viridiuſculas exiguas maculas oſtendebat

10.	Longitudo axis - - -	3	5.
	Diametralis latitudo maxima -	1	9.

Longius et anguſtius, ac reliqua omnia, erat, colore album, et hinc inde ſubpurpureas pauciſſimas lituras et maculas obſcure oſtendebat.

11. Dimenſiones obtinuit, quas ſub No. 5. recenſui.

Candidum erat, et ex ferrugineo nigricantibus maculis et lituris, confluentibus circa verticem latiorem, varium, imo in ſummo vertice lineae cruciatim diſponebantur, reliqua ſuperficies omnis crebris minutis punctulis, ac raris maiusculis maculis, varie picta erat.

12.	Longitudo axis - - -	3	6.
	Diametralis latitudo maxima -	1	8 $\frac{1}{2}$.

Sordide album erat, maculis ferrugineis maioribus circa verticem latiorem maioribus, in medio mediocribus, circa verticem acutiorem pictum; ceterum longius et anguſtius reliquis omnibus erat.

Poſſideo praeter recenſita haec XII oua adhuc plura, forma, magnitudine, colore, maculis adeo varia, vt varietates omnes recenſere ſuperuacaneum ducam, cum hae ipſae e recenſitis duodecim ſatis ſuperque demonſtratae ſint.

Auis

Auis coruo non maior, adeoque ouum pro magnitudine auis maximum; nidum nullum ſtruit, ſed oua praeruptis nudis extantibus ſaxis, vix palmum ſaepe latis, imponit, nec ea, auolans et aduolans, quod maxime mirum, e rupibus in mare deiicit, imo cum pertica loco mouere tentarem, vix obtinui, ob id, quod ouorum vertici conuexo respondentem concauum quaerant lapidem, in quo, veluti in theca, recondita iacent. Oua ſaepe per horam relinquunt, in mari natantes, et victum quaerentes. Oua per varietatem colorum et magnitudinem id praeterea habent, vt ſapidiſſima ſint omnium quantum memini; vitellus crocei coloris. Oua inueni a fine Maii vsque ad vltimos dies Iulii, quod maxime mirum mihi videtur. Singulae aues ſingula ponunt oua; timidiores et paululum callidiores ſunt reliquis marinis. Natant ſaepe in mari dormiturientes, et dum proxime aduentantis cymbae ſtrepitum audiunt, ac homines in propinquo vident, adeo exhorreſcunt, vt neque ſubmergere ſe, neque auolare poſſint, ſed iucundo ſpectaculo vndas pedibus radunt, ac ridicule alis verberant, tandem ancipiti fortuna deceptae perticis occiduntur ac raro euadunt.

Ouum mergi tridactyli nigri, roſtro nigro; pedibus rubris.

Ouum auis Columbae Groenlandicae.

- - The Greenland Dove or See - Turt

- - The Dove Raii et Will. p. 245

Ouum Turturis Baſſae, ab inſula quadam Scotiae, Baſſa, et ad Inſulas Faroos the Puffinet dicti - - - -	ex mente Raii

Ouum auis, Itaelmenis Cajour, Kurillis Pynan dictae. Nidificat ad mare in rupibus praeruptis, ob pilas et saxa inaccessis, nidum nullum struunt, sed oua ponunt singulae aues vnicum Iunio mense intra cauernas et fissuras rupium, imo ipsae, veluti mures, sub saxis delitescunt.

Oua magnitudine et forma Gallinaceis similia, quamuis auis Columba non sit maior; colore nihil omnino differunt, nisi quod vnum maioribus et rarioribus, alterum minoribus et crebrioribus maculis, varium sit; oua alba sunt, alia purius, alia sordidius, maculisque ferrugineis, punctis cinereis consperfa. Horum 14 habui, et sequentes obseruaui mensuras:

			Vnc.	lin.
Tab. XI. Fig. 8.	1.	Longitudo axis - - - -	2	5
	2.	- - - - - - -	2	6
	3.	- - - - - - -	2	4
Fig. 9.	1.	Diameter maxima - - -	1	6 $\frac{1}{2}$
	2.	- - - - - - -	1	8
	3.	- - - - - - -	1	6 $\frac{1}{2}$
	1.	Diameter 2 vncias a vertice latiori	1	2
	2.	- - - - - - -	1	3
	3.	- - - - - - -	1	1 $\frac{1}{2}$

Ouum anseris feri, maximi, Raii et Will. Ornith. 274. Parit circa medium Iunii. Oua quinque, magna, sordide alba, quasi albor fumo conspurcatus esset. Nidum struunt in locis gramineis circa ripas fluuiorum, vel in locis arenosis ad fluuios, e gramine sicco et stipulis, ac plumas mittunt, vt mollius decumbant oua, et calorem diutius retineant, quod Rutheni vocant: Periia Wypuſchtſchaiet (перья выпущаетъ), haeque plumae e nidis auium collectae omnium molliſſimae ſunt.

In genere notandum, cygnos, anſeres et anates vna ratione nidum ſtruere, ſimilia loca eligere, materiamque pro nidis ſtruendis ſimilem.

	Vnc.	lin.	
Longitudo axis - - -	3	6	Fig. 10.
Diameter maxima 2 vncias a latiore vertice - - -	2	3	
Latitudo diametralis 3 vncias a vertice latiore ad verticem acutiorem -	1	7	

Ouum anatis Fuligulae primae Gesn. et Aldr. Nidus forma, loco, materia, cum reliquis anatinis conſentit.

Oua ponunt circa Iunii initium valde multa, glabra et veluti polita; colore marmori, an Hildeſiano? ſimilia ſunt, ex albo leuiſſime ad cinereum inclinantia, ſeu ex opaco albentia.

Dimenſiones obtinuerunt ſequentes:

	Vnc.	lin.	
1. Longitudo axis - - - -	2	$5\frac{1}{2}$	Fig. 11.
2. - - - - - -	2	$4\frac{1}{3}$	
3. - - - - - -	2	$3\frac{3}{4}$	Fig. 12.
1. Diameter maxima - - -	1	$7\frac{3}{4}$	
2. - - - - - -	1	$6\frac{5}{8}$	
3. - - - - - -	1	$6\frac{3}{4}$	
1. Diametralis latitudo 2 vncias a vertice latiore	1	$5\frac{5}{4}$	
2. - - - - -	1	$3\frac{1}{3}$	
3. - - - - -	1	$2\frac{1}{7}$	

Nota:

Nota: obſeruaui generatim de ouis auium, ea bifariam differre, alia craſſiora eſſe, maioremque obtinere latitudinem diametralem, altero vertice minus acuto, e quibus maſculos excludi puto; alia autem ambitu anguſtiora; ita et 10. 12. vnius anatis oua ad duas formas duasque dimenſiones vt plurimum reduci poſſunt, quod experimento quodam a curioſo, res domeſticas curante, extra dubium ponendnm foret.

Oua anatis nigrae, ventre fuſco, capite pulcherrimis coloribus picto.

Kamennaia vtka (Каменная утка) Ruthenis.

Nyking Itaelmenis.

Nidum ſtruit in elatis litoribus, ad fontes fluuiorum, circa finem Iunii menſis, altum ſcilicet gramen pedibus conculcat, ibique ſolito anatibus more e tabido gramine et plumis nidum format, mares autem, poſtquam comitarunt foemellas, denuo mare et oſtia fluminum repetunt, oua ponunt 6, ingentia, glabra, alba, anſerum domeſticarum ouis ſimilia.

Dimenſiones obtinuerunt ſequentes:

			Vnc.	lin.
Fig. 13.	1.	Longitudo axis - - -	2	7
	2.	- - - - -	2	6 ½
	3.	- - - - -	2	3 ½
Fig. 14.	1.	Diameter maxima - - -	1	9
	2.	- - - - -	1	8½
	3.	- - - - -	1	8.

Oua anatis, roſtro gibboſo, nigro, rubro, et luteo, Maſcherelli apud Aldrouandum.

Foe-

Foemina mihi anas nigra, fascia alarum candida, pedum digitis aenei coloris.

Turpan (Турпанъ) Russorum

Oua ponit circa medium Iunii, et, quamuis marinae anates circa mare per plurimam anni partem versentur, mediterranea tamen loca, 1000 stadia et amplius a mari remota, petunt, ibidemque, vt et in maritimis circa lacus nidos condunt, pro more anatum; quamprimum nidum struxerunt, mares relictis foeminis auolant, hae vero, pullis ad volandum educatis, mares sequuntur cum progenie. Oua habent VIII. ad X. alba, glabra, polita.

		Vnc.	lin.	
1.	Longitudo axis - - -	2	6	Tab. XII.
	Latitudo diametralis - - -	1	8	Fig. 15.

Plura de lasciuia harum auium, natura, et modo capiendi annotaui in historia ipsius huius anatis.

Oua anatis arcticae cirratae.

Mitschagatka Itaelmenis.

Nidificant in fissuris rupium, imo rostro nidum sibi intra et sub saxis marinis excauant, et pauco gramine nidum insternunt, vehementer mordent dum ouis spoliantur. Ouum ponunt singulae aues vnicum circa initium Iunii mensis.

		Vnc.	lin.	
1.	Longitudo axis - - - -	3	1	Fig. 16.
2.	- - - - - - -	3	2	
1.	Diametralis latitudo - - -	1	$9\frac{1}{4}$	
2.	- - - - - - -	2	$\frac{1}{4}$	

Oua candida, immaculata ſunt, pro auis mole grandia ſatis, àd alterum verticem ſolito acutiora. Vitellus ouorum crocei coloris, valde ſapidus.

Oua anatis arcticae				Vnc.	lin.
Fig. 17. Longitudo axis	-	-	-	2	9
Diameter maxima	-	-	-	2	1
Diametralis latitudo 2 vncias a vertice latiore	-	-	-	1	8.

Oua pro auis mole grandia, candida, immaculata ſunt, ambitu craſſa, non ſubito ad ſenſum verſus verticem acutiorem latitudine decreſcentia. Putamen craſſius, ac in reliquis, vitellus croceus; oua elixa ſapidiſſima; numero quaeuis auis vnum ponit in cauernis praeruptorum locorum, ſub ſaxis nidum ſibi more anatis cirratae arcticae excauans, ſpoliantium manus roſtro valide ferit.

Oua ponit circa 20. Die 8. Iunii in quorundam nidis iam inueni pullos.

Oua Graculi palmipedis.

Hae aues inter omnes aues marinas oua ponunt 1.) Admodum mature circa 24. Maii vsque ad 20. Iunii. 2.) Oua ipſa numero plura multum inter ſe differunt. 3.) Eadem pro magnitudine relatiua adeo differunt, vt limites prorſus excedant. 4.) Colore multum differunt, quaedam candidiſſima, quaedam ex albo ſubuiridia, alia ex albo et viridi ſubcaerulea ſunt. 5.) Forma, alia anguſta, oblonga, alia gallinaceis ſimilia, alia a vertice lato craſſiori alterum verſus ſubito ambitu decreſcunt, et acuta euadunt.

Ouum

Ouum Graculi palmipedis, candida in femoribus macula carentis, 28. Iunii 1743 e nido exemi.

		Vnc.	lin.
Longitudo axis	- - -	2	3
Diameter maxima 1. vncias 3 lin. a latiore vertice	- -	1	4
Diametralis latitudo 2 vncias a vertice latiore circa verticem acutiorem.	-		9.

Ouum ipsum candidum erat, materia tartarea incrustatum, haecque crusta hinc et inde rugosa erat.

Ouum Graculi palmipedis, candida in femoribus macula.

		Vnc.	lin.	
Longitudo axis	- - -	2	3	Fig. 18.
Diameter maxima	- - -	1	5	
Diametralis latitudo 2 vnc. a vertice latiore		1	$\frac{1}{2}$	

Ouum, Gallinaceo ouo forma et magnitudine par, ex albo parum in subcaeruleum vergebat.

Eiusdem auis ouum habui $\frac{1}{4}$ minus priori

		Vnc.	lin.	
Longitudo axis	- - - -	1	5	
Diameter maxima	- - - -	1	1 $\frac{1}{2}$	Fig. 19.
Diametralis latitudo 1 vnc. a vertice latiore		1	$\frac{1}{2}$	

Ouum ex albo subcaeruleum, columbino par magnitudine, crusta alba vndique obductum, crassum et versus verticem acutiorem subito ambitu decrescens.

Oua haec comeduntur quidem, verum insipida, ac nullius pretii sunt, vitellus pallide luteus, aquosus, ac vix diutina coctione coagulari possunt, ne diffluant,

hinc

hinc vitellus ob confiſtentiam muco narium ab Itaelmenis comparatur.

Nidum nullum ſtruunt, ſed oua ſaxis, in praeruptis locis, imponunt, ac ſtipulas quasdam confuſe ſubſternunt, vel locis gramineis in vertice pilarum marinarum ſtantes excludunt. Ob pedum ſitum pone aequilibrium cadentem corpus inclinant ſaxis. Vidi etiam iacentes et incumbentes ouis in plano pilarum marinarum, ſed raro; ob ſtupiditatem et difficultatem ſeſe mouendi oua ſaepe e nido deiiciunt et incaute perdunt.

Ouum anatis caudacutae Haueldae Islandis.

		Vnc.	lin.
Fig. 20.	Longitudo axis - - -	2	1
	Diameter maxima - - -	1	5

Nidificat in locis gramineis non procul a maris littore nidumque eadem forma ac ratione, vt reliquae anates, ſtruit; oua ponit magnitudine ouis gallinaceis non maiora, nec forma ab illis aliena, craſſiuscula, colore alba, ſordide in cinereum leuiter vergentia, nitide glabra et veluti polita.

Ouum Colymbi caudati ſtellati.

		Vnc.	lin.		Vnc.	lin.
Fig. 21.	Longitudo axis - -	2	8	aliud	2	7
	Diametralis latitudo - -	2	$7\frac{3}{4}$		1	7

Nidum ſtruit circa lacus, non procul a mari, vel in inſulis lacuum, ex aquis emergentibus, gramen ſolummodo incubatu deprimendo, ibidemque oua deponit duo, putamine duro obtecta, anſerinis mole non multum inferiora, exacte oualia, extus fuſca ac nigris punctis raris vndique conſperſa. Vitellus luteſcit.

Ouum

Ouum Picae marinae Gallorum.

	Vnc.	lin.	
Longitudo axis. - - - -	2	$1\frac{1}{2}$	Fig. 22.
Diametralis latitudo - - - -	1	6	

Nidum struit in fluuiorum insulis, vt et in saxis circa mare, negligenter eum in finem stipulas quasdam saltim colligit, imo nudae terrae et arenae saepe imponit, oua ponens duo breuiora sed Gallinaceis ambitu crassiora, coloris ex albo subcinerei, seu arenacei, qualis in marmore Hildesiano, vndique vero nigris maculis et punctis dense positis variegata. Oua reperi die 2. Iunii 1743.

Ouum Lari in insulis Kurillicis Iacut dicti

	primum		secundum		tertium		
	Vnc.	lin.	Vnc.	lin.	Vnc.	lin.	
Longitudo axis - -	2	3	2	5	2	2	Tab. XIII.
Diametralis latitudo -	1	7	3	$6\frac{1}{2}$	1	7	Fig. 23.

Nidum struit in saxis praeruptis iuxta mare, vt et in pilis et petris marinis, e congestis straminibus et gramine ac paucis plumis intermixtis. Oua ponit communiter tria, forma, magnitudine et colore differentia. Fig. 24.

N. 1. Cum leuissimo virore album, ac maculis et punctis vmbriae colore aequaliter vndique disseminatis varium, forma vero longius ac crassius reliquis.

N. 2. Forma longius et angustius priori, sordide album, maculis fuscis crebrioribus circa verticem latiorem, rarioribus circa acutiorem, varium, maculis cinereis hinc inde intermixtis.

N. 3. Forma breuius reliquis, crassius ambitu ac rotundius, alter vertex subito acutior euadit, color

 idem,

idem, qualis in n° 2.; latior vero axis lituris, veluti Turcicis literis, inſcribitur; in reliqua oui parte maculae rariores aderant.

Ouum Lari, ſupine ex albo cinereo et baetico varii, prone albi, pedibus flauentibus.

	Vnc.	lin.	Vnc.	lin.
Longitudo axis - - -	2	$\frac{1}{2}$ aliud	2	
Diametralis latitudo - - -	1	5	1	$4\frac{1}{2}$

Oua duo ponit; in inſulis fluuiorum nidum ſtruit negligenter, ſtipulis confuſe ſuper arenam imo nudam ſaepius terram diſpoſitis.

Oua haec gallinaceis minora, breuiora, et verſus alterum verticem ſolito gallinaceis acutiora et ſubito decreſcentia; colore ex albo cinerea, ac maculis fuſcis vndique aequaliter varia.

Ouum Mergi marini in terris Kamtſchaticis Starik dicti.

		Vnc.	lin.	Vnc.	lin.
Fig. 25.	Longitudo axis - -	2	5	2	7
Fig. 26.	Diametralis latitudo -	1	5	1	6

Singulae aues ſingula ponunt oua circa initium ad 10. diem Iunii; nidum nullum ſtruunt, ſed oua ſaxis rupium extantibus, circa mare, imponunt, vel in inſulis deſertis, absque vlla cura terrae. Oua pro auis magnitudine, quippe quae Querquedulam vix aequat, ſatis magna ſunt, gallinaceis maiora, oblonga, anguſta; colore valde differunt, alia ſordide alba, et punctis rarioribus fuſcis, alia ex albo in rufum colorem inclinant, et punctis ſpadiceis varia ſunt, alia ex albo arenacei coloris ſunt, ac punctulis ſpadiceis et cinereis variegantur.

Ouum

Ouum An Lari cinerei maximi Raii et Willughbeii ?

	Vnc.	lin.
Longitudo axis - - - -	3	-
Diametralis latitudo maxima - -	2	1

Oua habui quatuor, quae mihi ſimul ex vno nido allata fuere; mihi vero res nihilominus ſuſpecta videbatur, licet omnia oua magnitudine et forma conſentiebant, colore tamen plus diſcrepabant, ac mihi antea in Larorum familia obſeruatum. Primum ex albo ſubcoeruleum erat, maculis maiusculis fuſcis circa verticem latiorem pictum, reliqua ex albo cinerea erant maculis fuſcis picta. Magnitudine anſerina oua aequabant, reperta ſunt in inſula, ſaxis minutis conſtante, paucis ſaltem ſtipulis ſubſtratis. Fig. 27. Fig. 28.

Ouum Lari cuiusdam ſpeciei.

	Vnc.	lin.
Longitudo axis - - - -	3	1
Diametralis latitudo - - - -	1	9

Fig. 29.

Putamen oui valde craſſum erat et validum, verſus acutiorem verticem ſubito peripheria decreſcens, in ſuperficie ſcabrum, ex albo ſubflauum; vertex latior fere totus fuſcus erat, ob maculas in vnum confluentes, acutior vero maculis rarioribus ſeiunctis diſtinguebatur.

Ouum Motacillae vulgaris.

	lin.
Longitudo axis - - - -	8 $\frac{1}{4}$
Diametralis latitudo - - -	6 $\frac{1}{4}$

Ouum inſtar viridis aeris viret, absque vllis maculis. Nidum ſtruit, ex gramine ſicco, hemisphaericum. Oua ponit plurima ad 5. vel 6.

Oua Hirundinis subtus castanei caloris.

	lin.
Longitudo axis - - - - -	7
Diametralis latitudo maxima - -	5

Nidum struit hemisphaericum, ex luto, intermixtis stipulis, eumque parietibus sub tectis affigit. Oua habuit quinque circa med. Iun. candida et spadiceis punctulis vndique aequaliter variegata.

Oua Cincli, the Stint.

	lin.
Longitudo axis - - - -	7
Diametralis latitudo - - -	6

Nidum struit hemisphaericum planum, e sicco gramine, in gramineis collibus, circa mare, oua ponit quatuor cinerea, punctulis fuscis aequaliter variegata circa 5 diem Iunii.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE ANNORVM MDCCXLIV. — — MDCCXLVII.

cum animaduerſionibus et conſectariis.

Auctore *IOSEPHO ADAMO BRAVNIO.*

Obſeruationes meteorologicae, potiſſimum barometricae et thermometricae, hic Petroburgi ab Academia iam MDCCXXVI fieri coeperunt, et habentur ab hoc anno ad finem vsque MDCCXXXVII Tomo IX. Commentariorum veterum Academiae, ſcilicet ab anno 1726 vsque in finem 1736 p. 316 et 344, anni autem 1737 p. 358, a Kraftio V. C. comparatae et communicatae. Tomo XI. exſtant obſeruationes annorum 1738 et 1739 p. 241 et 254. Tomo XIII. deprehenduntur obſeruationes annorum 1740 et 1741 p. 339 et 374. Denique Tomo XIV. vltimo veterum Commentariorum inueniuntur obſeruationes annorum 1742 et 1743 p. 240 et 247. Obſeruationes a me domi factae, quas in poſterum communicabimus, incipiunt ab anno 1751, et perpetuae ad hoc vsque tempus ſunt. Vt igitur hae obſeruationes meteorologicae ſerie haud interrupta, quantum fieri potuit, in Commentariis Academiae haberentur, ſupplere ſtuduimus obſeruationes annorum 1744 et ſequentium vsque ad finem 1750, potiſſimum ex iis, quae in Obſeruatorio Aſtronomico ſunt factae. Solus annus 1748 eſt, cuius obſeruationes meteorologicae deficiunt, quo vel nullae factae, vel certe non inueniuntur. Vt igitur ordinem annorum obſeruemus, incipiemus ab anno 1744 et ad ſequentes, vsque ad tempus praeſens procedemus. Factae ſunt hae obſeruationes eodem fere modo, quo illae, quae iam in Commentariis exſtant, ſcilicet ad barometricas obſeruationes quod attinet, notatae ſunt altitudines maximae et minimae mercurii in tubo torricelliano cuiuslibet menſis per totum annum cum differentiis. Numeri ante punctum pollices pedis regii Pariſini hic denotant, numeri autem poſt punctum, partes centeſimas eiusdem pollicis. Obſeruationes autem, quae in Commentariis iam ſunt publicatae, ſecundum pedem Londinenſem eiusque pollices et horum partes centeſimas confectas conſtat. Simili modo quoque quolibet menſe totius anni enotauimus maximum et minimum caloris gradum ſecundum thermometrum Delislianum, vbi, quod ſatis iam conſtat, cyphra gradum caloris aquae ebullientis, numerus autem 150 gradum aquae in glaciem abeuntis, ſiue quod eodem redit, niuis vel glaciei, quae incipit regelari, vel aquae ſub glacie, idem enim ſemper conſtantiſſimus gradus a nobis eſt obſeruatus. Quia, quod iam monuimus, obſeruationes ab anno 1744 ad finem 1750 in ſpecula aſtronomica factae ſunt, notandum eſt, eam ſupra planum maris Baltici 51 pedes pariſinos fuiſſe euectam. En ipſas obſeruationes anni 1744.

Anni MDCCXLIV. ſtili noui Obſeruationes barometricae.

Menſis.	Dies.		Altitudo barometri maxima		minima				Differentia
Ianuar.	14	-	28. 56	-	27. 27	Die	5	-	1. 29
Februar.	8	-	28. 89	-	27. 57	-	26	-	1. 32
Martii	26	-	28. 30	-	26. 90	-	12	-	1. 40
Aprilis	22	-	28. 10	-	27. 20	-	14	-	1. 90

Maii

Menſis.	Die.	Maxima.	Minima.	Die.	Differentia.
Maii	10	- 28. 10	- 27. 28	- 5	- 1. 82
Iunii	7	- 28. 15	- 27. 15	- 15	- 1. 00
Iulii	23	- 28. 20	- 27. 57	- 1	- 0. 63
Auguſti	23	- 28. 14	- 27. 12	- 28	- 1. 02
Sept.	30	- 28. 37	- 27. 43	- 2	- 0. 94
Oct.	3	- 28. 49	- 27. 38	- 17	- 1. 11
Nou.	7	- 28. 13	- 27. 10	- 25	- 1. 03
Dec.	25	- 28. 17	- 27. 10	- 21	- 1. 07

Comparatis his obſeruationibus adparet, maximam per totum annum altitudinem barometricam fuiſſe 28. 89, minimam autem 26. 90. Contigit maxima die 8 menſis Februarii, coelo ſereno, vento non ſenſibili, qui diebus antecedentibus et ſequentibus fuit N O debilis, dies antecedens, et qui ſequuti fuerunt aliquot, fuerunt ſereni, quibus frigoris gradus inter 169 et 174 ſubſiſtebat. Minima altitudo accidit Martii 12 coelo nubilo, vento SO mediocri. Dies duo antecedentes et ſequentes fuerunt quoque nubili, vento SW mediocri flante, thermometrum autem mane 149, meridie 147 et veſperi 149 monſtrabat. Fuit igitur variatio barometrica maxima hoc anno fere duorum pollicum ſiue proprie 1. 99. Secundum obſeruationes ante habitas, quae in Commentariis leguntur, ſpatium variationum barometricarum maximum hic adhuc fuit 2. 77 menſurae Londinenſis, adeoque ſecundum menſuram Pariſinam 2. 60, ſiue proprie 2. 59$\frac{11}{16}$. Nam maxima altitudo, quae adhuc hic eſt obſeruata, eſt 30. 95 pollicum Londinenſium, adeoque 29. 01 $\frac{2}{16}$ pollicum Pariſinorum. Notata haec fuit 1737 vide Commentariorum tomum IX. p. 359, et minima

eſt

est 28: 18 pollicum Lond. adeoque Paris. 26. 41 $\frac{1}{4}$, quae visa est 1729 Octobris 12 circa meridiem vid. p. 323 Tomi IX. Comment. Quum igitur spatium variationum barometricarum anni 1744 minus deprehendatur illo, quod antea inuentum est: manet etiamnum illud 2.60 maximum, et maxima quoque altitudo hic loci obseruata illa 29. 01, vti 26. 41 minima quoque manet. Porro et hic obseruatur lex et confirmatur, in antecedentibus obseruationibus barometricis et alibi iam detecta: variationes menstruas barometricas primis et vltimis anni mensibus esse maiores, mediis autem minores.

Sequuntur obseruationes thermometricae huius anni 1744, vbi calor minimus et maximus per omnes totius anni menses cum differentiis notatus est.

Mensis.	Dies.	Hor.	Calor min.	Calor max.	Dies.	Hor.	Differentia
Ianuar.	1.	12 mer.	182	152$\frac{1}{2}$	26.	12	30
Febr.	13.	7a.m.	180$\frac{1}{2}$	150	25.	10p.m.	30$\frac{1}{2}$
Mart.	7.	7a.m.	180$\frac{1}{2}$	147	12.	mer.	33$\frac{1}{2}$
April.	1.	6$\frac{1}{2}$a.m.	162	124	26.	6p.m.	38
Maii	4.	6 a.m.	152	117	12.	mer.	35
Iunii	15.	6 a.m.	142	116	22.	mer.	26
Iulii	21.	7 a.m.	133	106	11.	5p.m.	27
Aug.	23 et 30,	6a.m.	136	119	19.	5p.m.	17
Sept.	30.	6a.m.	144	118	27.	5p.m.	26
Oct.	12.	6a.m.	158	136	1.	mer.	22
Nou.	28.	12 mer.	164	140$\frac{1}{2}$	5.	mer.	23$\frac{1}{2}$
Dec.	29.	8a.m.	176$\frac{1}{2}$	145$\frac{1}{2}$	2.	mer.	31

Ex hisce obseruationibus patet minimum calorem, seu maximum frigus fuisse 182, et maximum calorem, 106, adeoque

adeoque differentiam annuam ſiue maximam 76. graduum. Frigus maximum contigit Ianuarii 1 coelo nubilo, vento W exiguo, barometro 27. 55. adſcendente. Maximus autem calor accidit Iulii 11. h. 5. p. m. coelo ſereno, praecedentibus quoque et ſequentibus aliquot diebus ſerenis vento SO forti. Barometrum altitudinem habebat 27. 91 et adſcendebat. Conſpicitur praeterea, variationes caloris primis anni menſibus fuiſſe maiores, quam mediis et vltimis, excepto Decembri.

Frigus maximum, quod hic Petroburgi adhuc eſt obſeruatum, eſt 200. quod 1733 et 1739. contigit. Quum igitur hoc ſuperet gradum 182, hoc anno 1744 obſeruatum, manet idem gradus adhuc maximus, qui Petroburgi ſit notatus. Maximus caloris gradus, qui hic eſt obſervatus, adhuc fuit 104. qui ſaepius eſt obſeruatus, et maximus manſit vsque ad 1756. quo anno, vt ex ſequentibus patebit, maiores ſunt obſeruati. Quum igitur et caloris gradus huius anni 1744 ſcil. 106. minor illo deprehendatur; ad hunc vsque annum 104. maximus ille caloris gradus manet, vti et differentia maxima, ſeu variatio thermometrica maxima 96. gr. perſtat. Fuit igitur huius anni hiems neque admodum frigida, nec aeſtas admodum calida. Dies nubili menſe Ianuario fuerunt 22, Februario 14. Martio 13. Apr. 5. Maio 10. Iunio 13. Iulio 6. Auguſto 12. Sept. 15. Oct. 14. Nou. 23. Decembri omnes dies fuerunt nubili, excepto 29. Primo Maii nix cecidit h.6. a.m. et p.m. Die 7 p.m. procella orta eſt cum tonitru et pluuia. Iunii 27. vehemens ventus cum pluuia, Iulii 19. p. m. magna fulmina cum tonitru, vento W non magno, barometro meridie 28. 0 6 et thermometro 114. monſtrante. Auguſto 28. p. m. ventus vehemens NO cum exundatione aquarum fluminis, qui ad mediam vsque noctem continuauit, et aquae tunc ſubſidere coeperunt, barometro 27. 20. thermometro 131. monſtrantibus, quum barometrum die antecedenti fuerit 27. 37. et ſequenti 27. 42. meridie. Septembri 20. veſperi ventus vehementiſſimus extitit W, qui mane die ſequenti 21 NW factus, eadem vehementia flauit cum magna exundatione fluminis Neuae; barometrum meridie erat 27. 62. die precedenti 27. 72. et ſequenti 27. 66. durante tempeſtate aliquot lineas barometrum cecidit. Thermometrum erat 130. Oct. 4 ventus vehementior W. et die 10, 11 et 12 venti vehementiores O et S fuerunt. Nouembri magnus ventus W. die 19. et 20 cum inundatione aquarum, barometro 27. 23, et die anteced. 27. 65, ſeq. autem 27. 77 monſtrante. Decembris 20, 21 et 27 potiſſimum ex occidente venti vehementiores flauerunt: Glacies fluuii Neuae Apr. 6 a.m. frangi et h. 3 p.m. abire coepit. Nouembris 26 glacies natauit in Neua, et ſeq. 27, circa h. 5. a. m. fluminis glacies ſtetit. Ad hunc vsque annum ab anno 1718. Martii dies 22dus fuit terminus quo citiſſime et 26 Apr. quo tardiſſime fluuius Neua a glacie eſt liberatus; contra Oct. 24 quo citiſſime et Nouembris 30, quo tardiſſime flumen Neua glacie obductum fuit ſed ſtili veteris. Prima congelatio facta eſt nocte diei 29 ad 30 Sept. et ſequenti 1 et 2 Oct. continuauit.

Annus MDCCXLV.

Anni 1745 ſt. n. obſeruationes ſunt, quae ſequuntur. Primum barometricae ita ſe habent:

Baro-

BAROMETRI

Menfis.	Dies.	Altitudo Maxima.	Minima.		Differentia
Ianuar.	24	- 28. 55	- 27. 06	d. 31	- 1. 49
Febr.	28	- 28. 45	- 27. 20	- 1 et 2	- 1. 25
Mart.	12	- 28. 35	- 27. 23	- 7	- 1. 12
Apr.	29	- 28. 30	- 27. 24	- 17	- 1. 06
Maii	3	- 28. 85	- 27. 62	- 30	- 1. 23
Iunii	16	- 28. 23	- 27. 82	- 1	- 0. 41
Iulii	3	- 28. 45	- 27. 42	- 18	- 1. 03
Aug.	18	- 28. 21	- 27. 29	- 30	- 0. 92
Sept.	26	- 28. 49	- 27. 61	- 2	- 0. 88
Octobr.	22	- 28. 19	- 27. 47	- 26	- 0. 72
Nou.	15	- 28. 52	- 27. 20	- 28	- 1. 32
Decem.	18	- 28. 57	- 27. 72	- 11	- 0. 85

Hae obferuationes igitur monftrant, maximam barometri altitudinem hoc anno fuiffe 28 . 85 , et minimam 27. 06 adeoque differentiam , et variationem maximam annuam 1. 79. Obferuata fuit altitudo maxima Maii tertio meridie , coelo nubilo , vento SW. mediocri ; die antecedenti fuit 28. 04 et fequenti 27. 73. Dies aliquot antecedentes fuerunt fereni , et fere fine vento fenfibili , fequentes vero nubili , vento potiffimum S et SW. debili flante. Minima altitudo contigit Ianuarii 31. coelo nubilo , vento S exiguo. Die antecedenti erat 27. 25 , et fequenti 27. 20, dum praecedentes dies multi fuerunt nubili , flante potiffimum vento W debili , et S W mediocri ; fuere et fequentes nubili , vento vario , excepto proxime fequente 1 Febr. qui fuit ferenus.

Quum et maxima barometri altitudo, hoc anno obſeruata, ſit minor ea, quae in antecedentibus obſeruationibus eſt notata, ſcil. 29. 01. et minima huius anni maior 26. 41 in antec. minima adnotata: ſpatium variationum barometri in antecedentibus ſtabilitum, manet inuariatum ſcilicet 2. 60, vti et altitudo media 27. 71 perſtat.

Ex variationibus menſtruis inter ſe comparatis porro patet, legem ſuis exceptionibus eſſe obnoxiam, quod ſcilicet variationes barometri menſtruae primis et vltimis menſibus anni maiores, mediis autem, ſint minores. Nam licet variationes primorum anni menſium manifeſto ſint maiores mediis, tamen vltimorum menſium maiores non omnes deprehenduntur, vti vtplurimum obſeruari ſolet alias.

Variationes caloris, A. 1745 thermometro obſeruatae, ſunt ſequentes.

		Frigus max.		Calor max.	Diff.
Ian.	18. h 8 a.m.	177	-	147½ d. 11. h 8 a.m.	29½
Febr.	3. 7½ a.m.	191	-	149 - 8. mer. -	42
Mart.	5. 6 a.m.	183	-	144 - 8. 6 p.m.	39
April.	2. 6 a.m.	169	-	138 - 30. 6 p.m.	31
Maii	1. 5 a.m.	147	-	117 - 29. 4 p.m.	30
Iun.	2. 6 a.m.	131½	-	109½ mer. et h. 5 p.m.	22
Iulii	20. 5 a.m.	131½	-	115½ d. 6 et 8 h. 5 p.m.	16½
Aug.	29. 5½ a.m.	141	-	112 - 7. 4 p.m.	29
Sept.	17. 6 a.m.	147½	-	127½ - 5. 6 p.m.	20
Oct.	28 et 31. 6 a.m.	158	-	131 - 13. 5 p.m.	27
Nou.	9. 7 a.m.	171	-	145 - 20. mer.	26
Dec.	28. 8 a.m.	174½	-	148½ - 31. 8 p.m.	26

Ex his obſeruationibus clarum eſt, maximum frigus hoc anno fuiſſe 191, et maximum calorem 109½ adeoque

adeoque variationem thermometricam 81½ graduum. Spatium igitur variationum thermometricarum in antecedentibus inuentum 96 graduum manet adhuc maximum. Variationes thermometricae primis anni menſibus ſunt maiores mediis et vltimis excepto Auguſto, qui cum Ianuario conuenit. Quae praeterea hoc anno memorabiliora videntur, huc fere redeunt.

Menſe Ianuario omnes dies fuerunt nubili, exceptis duobus 18 et 22. vento W debili flante. Venti vehementiores hoc menſe fuerunt d. 9. S, 10 W et 11 W, quum dies antecedens et ſequens ſine vento fuerint, barometro a 27. 97 ad 27. 30 deſcendente, quum iam diebus aliquot ante deſcendiſſet, thermometro a 168 ad 151 variante. Per totum menſem ventus W potiſſimum ſpirauit.

Menſe Februario ſex dies fuerunt ſereni 1, 17, 25, 26, 27, 28. ceteri omnes nubili. Semel ventus vehemens fuit die 18. NO, praecedente et ſubſequente tranquillitate ſine vento. Die antecedenti barometrum erat 27. 89. et ſequenti 27. 38. 27. 50 ipſo die fuit, et frigus 169.

Martius habuit dies 13 ſerenos, ceteros nubilos. Venti fortiores fuerunt d. 7. NO. coelo ſereno, barometro 27. 23, et therm. 172. Die praecedenti fuit 26. 64 et ſeq. 27. 60; dies antecedens ſine vento, ſequens cum S. debili. Porro d. 12. coelo ſereno, barometro 28. 35 ventus O vehementior fuit, dies praecedens ſine vento, et ſequens cum vento debili. Barometrum die antec. 28. 15, et ſeq. 28. 13 erat altitudinis. Denique die 26 ventus W fortior, coelo nubilo, barometro 27. 78 quod die antec. fuit 28. 16 et ſeq. 27. 72; thermometro autem 160.

Menſe Aprili dies 13 fuerunt ſereni, reliqui nubili.

 Venti

Venti vehementiores fuerunt die 5. et 6. W. praecedente WNW mediocri, ſubſequente W mediocri, niue et porro vento vix ſenſibili. Barometrum die 5 erat altitudine 28 04. d. 6. 27. 57. praecedenti 28. 07. et ſubſequenti 27. 41. Thermometrum inter 150. et 147 tantum variabatur. Porro die 25. et 26 ventus vehementiſſimus O fuit, qui d. 27. N factus ſatis adhuc vehemens fuit, dies 25 nubilus, duo ſequentes ſereni. Barometrum d. 25 erat 28. 00. d. 26, 28. 25. d. 27. 28. 40. ſequenti 28. 28. die ventum praecedente 27. 93, thermometrum inter 147 et 149 ſubſiſtebat.

Primum tonitru fuit d. 10. h. 7. p.m. cum pluuia et fulminibus, circa h. 10. a. m. iam tonitru fuit auditum debile. Die 20. circa h. 8. et 9. a. m. glacies Neuae frangi coepit, et circa h. 3. p. m. omnis glacies abierat.

Menſe Maio dies fuerunt ſereni 15. Venti vehementiores fuerunt d. 14 et 15 NO. coelo ſereno, praecedente W. mediocri, et ſubſequente O. leni; barometrum erat d. 14, 28. 36. d. 15, 28. 42. die antec. 28. 29 et ſubſequenti 28. 33, et rurſus deſcendere aliquot diebus ſeq. pergebat, therm. inter 135 et 128 variabili. Porro d. 29 et 30 V. SSW et S vehemens, antecedente vento NW leni, et ſubſequente V. 00, barometrum d. 29, 27. 75 et 30, 27. 62, die praeced. 27. 82 et ſeq. 27. 73.

Menſe Iunio tres tantum dies fuerunt nubili, ceteri ſereni. Venti vehementiores fuerunt d. 4. coelo ſereno, praecedente V. 00 et ſequente NO. debili. Barometrum erat 28. 08, die anteced. 28. 06. et ſubſeq. 28. 08, deinde deſcendit. Porro d. 28, 29, 30 ventus ab

initio

initio W, dein NW vehementior fuit, praecedente NW mediocri, et ſequente N mediocri. Barometrum d. 28 erat 27. 96. d. 29, 27. 98. d. 30, 28. 04 die antec. 28 12 et ſequenti 1 Iulii 28. 10, vbi vehemens adhuc fuit, dein per aliquot dies adſcendere barometrum pergebat; vento debili potiſſimum W. Thermometrum inter 121 et 124 variabat.

Menſe Iulio fuerunt dies nubili 5, et mixti 6. Venti vehementiores d. 8, 9 et 11 W, die 14, 15 SW, die 24, 25 NW. Die 8 erat barometrum 27. 88 et 9. 27. 71. in antecedenti obſeruatione 27. 91 et ſequenti 27. 75, coelo mixto. Dies ſequens 10 erat ſine vento, quem rurſus ſequebatur d. 11 ventus W fortis. d. 14 et 15 SW et W vehemens, die 24 et 25 NW. ſequente W debili et tranquillitate, barometro d. 24, 27. 89 et 25, 27. 91. thermometro 120 et 121 monſtrantibus.

Menſe Auguſto dies fuerunt nubili 6, et 5 mixti. Venti vehementiores d. 7, 22, 24. Die 7 coelo ſereno ventus SO vehemens fuit, praecedente mediocri SO, et ſequente NW mediocri, et dein V 0 0; barometrum erat 27. 81; die antec. 27. 98 et ſeq. 27. 93 et adſcendere perrexit, thermometro 113 oſtendente. Die 22 ventus vehemens W. die antec. V. 00 et ſeq. SW mediocri, thermometro 116, coelo mixto, barometro 27. 61. die antec. 27. 92 et ſeq. 27. 93 dein rurſus adſcendere coepit. d. 24 V. NW coelo ſereno, thermometro 124 et barometro 27. 40 indicantibus.

Menſe Septembri dies fuerunt ſereni 11 et 2 mixti. Venti vehementiores d. 5. et 6. NO praecedente W mediocri et ſequente debili NO. dies 5 ſerenus et 6 nubilus fuit, praecedentibus et ſequentibus diebus nubilis; baro-

barometro 27. 70. d. 5, et 6, 27. 80. die antec. 27. 92 et ſeq. 28 16, thermometro 129 et 137 indicantibus.

Menſe Octobri dies ſereni 9. Venti vehementes d. 3, 4, 17, 23, 24, 27, 31. Primus d. 3. et 4. erat NO, ſecundus d. 17 erat W, tertius 23 et 24. NW, quartus 27 NO, et quintus die 31 SO, vt plurimum tranquillitas antecedebat et ſequebatur, vel antecedebat minimum, vel ſequebatur tum. Die 8. prima congelatio exigua et nix. Nocte diei 15 ad 16 exundatio Neuae, vento vehementi W. Fortior congelatio demum nocte inter 26 et 27 vento NO contigit.

Menſe Nouembri fuerunt dies ſereni 9. Venti fortiores fuerunt d. 1. 25, 29. Primus eſt continuatio menſis antec. d. 31. Die 25 ventus erat W, quem praecedebat et ſequebatur ventus admodum lenis N et O, barometro 27. 64. die antec. 27. 30 et ſeq. 27. 74. tertius d. 29 erat W. barometro 27. 25, die antec. 27. 20 et ſeq. 27. 55. Die 1 veſperi glacies natans in Neua eſt obſervata, quae continuauit ad 7, quo circa h. 6. p. m. ſtetit.

Menſe Decembri ſex dies fuerunt ſereni. Ventus vehemens tantum vltimo die contigit, qui ex occidente ſpirabat, barometro 27. 82 die antec. 27. 81 et ſeq. 28. 00. Ventus W lenis antecedebat, et ſequebatur, thermometrum monſtrabat 149.

Dies igitur ſereni per totum annum fuerunt 149. Ceterum facile intelligitur, non omnes inter illos fuiſſe integros ſerenos, ſed a potiori hic quoque fieri denominationem. Venti vehementiores per totum annum fuerunt per 42 dies. Frequentiſſime autem, per antece-

antecedentia, contigerunt mensibus Octobri et Iulio. Nam quolibet horum mense per septem dies venti fuerunt vehementiores. Mense autem Februario et Decembri paucissimi, quolibet enim horum mense vnicus tantum vehementior ventus flauit. Nullus autem mensis sine vento vehementiori fuit. Ceterum huius anni hiems inter gelidiores numerari non meretur. Nam licet mense Februario frigus ad 186 peruenerit, quin mense Martio gradum 183 obtinuerit: duratio tamen huius frigoris tantum exigua fuit, ex qua omnino hiemis frigus iudicandum est, non vero ex vno alteroque die licet gelidissimo, id quod de vehementia caloris diiudicanda valere quoque debere, facile intelligitur.

Anni 1746. st. n. sequentes obseruationes meteorologicas enotauimus: Sequuntur, vt supra, primum Obseruationes Barometricae.

Mensis.	Dies.		Maxima Altitudo.		Minima.	Die.		Differentia
Ian.	12 et 27.	-	28. 36	-	27. 40.	20	-	96
Febr.	16.	-	28. 24	-	27. 15.	24	-	1. 09
Mart.	22.	-	28. 38	-	26. 90.	3	-	1. 48
April.	10 et 23.	-	28. 14	-	27. 30.	10	-	0. 84
Maii	7.	-	28. 47	-	27. 68.	11	-	0. 89
Iunii	7 et 19.	-	27. 92	-	27. 46.	1	-	0. 46
Iulii	7.	-	28. 18	-	27. 78.	24	-	0. 40
Aug.	14 et 19.	-	27. 88	-	27. 32.	11	-	0. 48
Sept.	5.	-	28. 37	-	27. 22.	24	-	1. 15
Octobr.	24.	-	28. 48	-	27. 10.	26	-	1. 38
Nou.	10.	-	28. 58	-	27. 43.	17	-	1. 15
Dec.	13.	-	28. 20	-	27. 28.	22	-	0. 92

Ex comparatione harum obſeruationum manifeſtum eſt, hoc anno maximam mercurii altitudinem fuiſſe 28. 58, Minimam autem 26. 90 adeoque variationem annuam 1. 68. Maxima altitudo eſt obſeruata Nouembr. 10. meridie, dum precedenti die fuit 28. 16 et ſequenti itidem 28. 58, coelo nubilo, ſine vento, vti quoque aliquot paecedentes dies ſine vento fuerunt. Minima accidit Martii 3. die praecedenti 27. 12 et ſeq. 27. 12, coelo nubilo, vti quoque duo praecedentes fuerunt nubili, V. NO exiguo flante, quum proxime praecedens ſine vento et ſequens cum leniſſimo W fuerunt. Hinc ſpatium variationum barometricarum quum ſit 1. 68, adeoque minus illo, quod in antecedentibus eſt inuentum, deprehendatur: maximum illud manet, vti quoque maxima altitudo et minima manent in praecedentibus inuentae. Variationes menſtruas primis et vltimis menſibus anni maiores, mediis minores et hic eſſe, ex comparatione differentiarum adparet.

Obſeruationes thermometricae 1746 ſt. n. factae, ſequenti ſe habent modo.

Menſis.	D.	H.		Frigus max.		Calor. max.	D. H.		Diff.
Ian.	23.	8. a.m.	--	172	--	146.	24 mer.	-	25
Febr.	28.	6.½ a.m.	--	179	-	144.	6. m.	-	35
Martii	9.	12. p.m.	--	179	-	149.	27. et 28.	-	30
Apr.	1.	6. a.m.	-	161	--	136.	24. 6 p.m.		26
Maii	6.	5. a.m.	--	158	-	124.	16. m. et 7½ pm.		35
Iun.	1.	5. a.m.	--	142	--	109.	18. mer.	-	33
Iul.	3.	5. a.m.	--	130	--	111½.	23. m.	-	18½
Aug.	25.	5. a.m.	--	136	-	111.	4. m.	-	25
Sept.	26.	6. a.m.	--	143	-	120.	15. m.	-	23

Oct.

Menſis.	D.	H.	Frig. max.	Calor max.	Differ.
Oct.	30.	7. a.m.	- 158	- 131½. 9. mer.	- 27
Nou.	20.	7. a.m.	- - 176	- 143½. 8.et9mer.	33
Dec.	1.	6. a.m.	- 164	- - 144. 13 mer.	- 20

Secundum has obſeruationes maximum frigus fuit 179, quod incidit in Febr. 28 et Mart. 9, calor autem maximus 109, qui obſeruatus eſt Iunii 18 vnde adparet hiemem ſatis mitem, et aeſtatem non admodum calidam fuiſſe.

Menſe Ianuario dies fuerunt ſereni 7. Ventus vehementior fuit d. 17. NO coelo nubilo, therm. 149, barometro 27. 61, die autem antecedenti fuit 27. 79 et ſeq. 27. 98. Praecedebat hunc ventum ventus W lenis, et ſequebatur quoque ventus W debilis.

Menſe Februario dies ſereni 13. Venti vehementiores fuerunt d, 1, 7, 20, 24. Primus fuit W ſequente O exiguo, ſecundus SW praecedente S debili et ſequente W mediocri, tertius W non admodum vehemens, quartus O ſequente vento non ſenſibili.

Menſe Martio dies fuerunt ſereni 20. Venti vehementiores d. 1. NW ſequente vento 00. die 5. SO, ſequente aere tranquillo, et praecedente W admodum debili, d. 10 NO.

Menſe Aprili dies ſereni 14 fuerunt. Venti vehementiores d. 28. et 29. NO, praecedente NO debili, et ſequente N leni. Nocte inter 24. et 25. glacies fluminis rumpi coepit, et die 25. mane h. 8. flumen a glacie liberum fuit.

Menſe Maio dies ſereni 21 erant, venti vehementes die 3 NO, d. 15. NW, d. 18. et 19. NO, d. 22. W, d. 25 NO.

Menſe Iunio fuerunt 18 dies ſereni, et duo mixti. Venti vehementiores d. 2, 3 NO. adſcendente barometro a 27. 69 ad 27. 78. die praecedenti fuit 27. 46 V oo thermometro inter 126 et 128. ſubſiſtente. Porro d. 6. NW. d. 13 O. die 21. O. d. 31. NW.

Menſe Iulio dies ſereni 14, mixti 6 numerati ſunt. Venti vehementiores d. 15. NW, et 17. W, d. 24. NO.

Auguſtus habuit dies ſerenos 13, mixtos 7. Ventus vehemens d 7 ex occidente ſpirans, barometro 27. 62, praecedenti die 27. 63 et ſequenti 27. 82, thermometro 119, praecedentibus diebus inter 111 et 121 ſubſiſtebat.

Septembri dies ſereni 17, mixti 3. Venti vehementes d. 20, 22, 24, 29, reliquis diebus ventus, vel nullus, vel admodum lenis.

Menſe Octobri dies ſereni 9 mixti 3 fuerunt. Ventus vehemens d. 5. NO, d. 14. SW, d. 18. NW, d. 21. NW, d. 29. NW. Nocte inter diem ſextum et ſeptimum prima congelatio fortis erat, et glacies duarum linearum craſſitie deprehenſa, et d. 17. p. m. prima nix, ſoluta mox cum magna pluuia ſequenti, thermometro 144 notante.

Menſe Nouembri dies ſereni 8. Venti vehementiores d. 2. N, d. 18. O. Die 19 veſperi glacie Neua fluuius eſt obductus.

Menſe Decembri dies ſereni 2. d. 4 et 31. Nullus ventus vehemens hoc menſe, omnibus enim diebus ventus, vel debilis, vel nullus, eſt obſeruatus.

Annus

Annus 1747. *St. V.*

Quae nunc sequuntur obseruationes, omnes secundum stilum veterem sunt notatae, quum antecedentes, quod monuimus, ex stilo nouo fuerint consignatae. Ad barometri altitudines quod attinet, sequentes maximae et minimae sunt obseruatae.

Barometri altitudo

		Maxima.		Minima.		Differentia
Ian.	16.	28. 35	-	27. 48.	5.	- 0.87
Febr.	28.	28. 25	-	27. 30.	23.	- 0.95
Mart.	13.	28. 34	-	27. 15.	6.	- 1.19
Apr.	16.	28. 24	-	27. 15.	29.	- 1.09
Maii.	17.	27. 80	-	26. 98.	12.	- 0.82
Iunii.	16.	27. 56	-	26. 69.	21.	- 0.87
Iulii.	17.	27. 70	-	26. 79.	8.	- 0.91

Reliquae obseruationes huius anni barometricae deficiunt. Ex comparatione obseruationum horum septem mensium patet, maximam barometri altitudinem fuisse 28. 35, et minimam 26. 69, adeoque maximam variationem 1. 66. Maxima obseruata est Ian. 16, coelo sereno, vento W mediocri, thermometro 155 meridie monstrante. Minima obseruata est Iunii 21. mer. coelo nubilo, thermometro 125, vento SW mediocri. Dies praecedentes fuerunt nubili et pluuii, proxime sequens serenus, vento W facto. Quia altitudo maxima 28, 35 minor est 29, 01, et minima 26.69, maior 26. 41, adeo quoque differentia 1. 66 minor

2. 60, omnia manent inuariata respectu altitudinum maximae et minimae, adeo quoque ratione spatii variationum barometricarum; ceterum variationes menstruae primis anni mensibus maiores, quoque hic deprehenduntur mediis, excepto Ianuario.

Variationes caloris his septem mensibus ex sequentibus obseruationibus thermometricis cognosci possunt.

Mensis.	Die.	Calor	Minimus.		Maximus.	Die.		Diff.
Ian.	22.	8. a m.	188	-	148.	29 mer.	-	40
Febr.	15.	6. a.m.	192	-	146.	9. mer.	-	46
Mart.	6.	6. a.m.	168 ½	-	142½	22. mer.	-	26
Apr.	13.	6. a.m.	157	-	132.	22. mer.	-	25
Maii.	1.	6. a.m.	148	-	111.	25. mer.	-	37
Iunii.	23.	6. a.m.	137 ½	-	106.	5. mer.	-	31½
Iul.	24.	6. a.m.	135	-	111½.	8. 2. p.m.	-	23½

Si comparentur hae obseruationes, conspicitur, frigus maximum fuisse 192, et maximum calorem 106. Frigus maximum incidit in Februarii decimum quintum h. 6 ante meridiem, coelo sereno, flante nullo vento, meridie erat 184, die antecedenti 185 et sequenti 182, barometro 27. 92 meridie monstrante. Hic gradus frigoris licet sit magnus, tamen minor est illo, qui 1733 et 1739 est obseruatus scil. 200, qui igitur adhuc maximus manet. Gradus maximus caloris notatus est Iunii quinto meridie, coelo subnubilo, vento SW mediocri, ante meridiem erat nebulosum. Barometrum erat 26. 97. Quum et maior caloris gradus hoc gradu 106 sit in antecedentibus obseruatus scil.

104

1724: manet adhuc hic gradus caloris maximus Petroburgi obseruatus, et spatium variationum thermometricarum idem, quod supra est determinatum, scilicet 96. Reliqua notatu digniora haec fere sunt.

Mense Ianuario 7 dies fuere sereni, duo mixti. Nullus ventus vehementior per integrum mensem fuit, octo dies sine omni vento sensibili fuerunt, et per quinque tantum dies ventus fuit mediocris.

Mense Februario dies sereni 8, et reliqui nubili; vbi scilicet coelum ex parte nubilum, ex parte serenum fuit. Neque hoc mense ventus vllus vehementior est obseruatus. Octo quoque dies sine vento fuerunt, et sex dies ventum mediocrem habuerunt.

Mense Martio 15 dies fuerunt sereni. D. 8. nebula spissa, quam sequebatur serenitas. Die 26. h. 10½ p. m. conspectum est phoenomenum NW versus. Coelum fuit ad horizontem nebulosum, radii autem albicantes lucidi ad Zenith vsque extensi, continuo in parte superiore in apices conicos abeuntes; qui post tres horas euanuerunt, sequebantur dies sereni aliquot, qui etiam praecedebant. Barometrum erat h 6. p.m. 28. 25 in descensu, qui in sequentibus continuabat, thermometrum 159, ventus NO mediocris, quem NO vehementior antecedebat, et O debilis sequebatur. Venti vehementiores fuerunt d. 4. 5. W, d. 21. O, d. 25 NO, d. 29 O.

Mense Aprili 13 dies fuerunt sereni. Ventus vehementior d. 14, coelo sereno, SW, quem sequebatur W oo. d. 18. NO, coelo sereno, d. 28. W coelo nubilo, pluuio et niuoso. D. 29. SO.

Mense

Menſe Maio ventus vehementior d. 7. W, coelo ſereno, et ad horizontem ſubnubilo. d. 18. ex oriente d. 21. N.O et 22. O. d. 28. O. d. 30. et 31. W coelo vt plurimum ſereno, excepto d 18. Ceterum dies 20 fuere ſereni, et nullum tonitru.

Menſe Iunio venti vehementiores d. 11. et 12. coelo nubilo, V.W, d. 15. N, coelo hinc inde ſereno. d. 17, 18 W, coelo ſereno. d. 23. et 24.W. Dies 14 ſereni hoc menſe fuerunt. Die 6. h. 5. p. m. ad h. 6. tonuit, coelum meridie erat ſerenum, barometro 27.06, et thermometro 111. Ventus SW, qui hora 5, durante tempeſtate mutatus in SO mediocrem, finita autem tempeſtate h. 6. rurſus W 2 factus eſt, et barometrum, quod durante tempeſtate 26. 90 erat, adſcendit ad 26. 94, et adſcendere perrexit.

Menſe Iulio venti vehementiores d. 1. et 2.W, d. 8. O. d. 11. NO, d. 14. W, d. 16. O, d. 23. et 24. N, d 27. et 28.W. Die 21. Iulii copioſe pluere coepit h. 2 $\frac{1}{2}$ p. m. et thermometrum ſubitam mutationem obtinuit, h. 2. enim erat 116$\frac{1}{2}$, incipiente vero et durante pluuia ad 123$\frac{1}{2}$ deſcendit, barometro 27.30, vento W.1. Iris quoque tenuiſſimi coloris viridis et rubri adparuit h 3, quae durauit $\frac{1}{4}$ horae. Ceterum dies nubili et pluuii hoc menſe frequentiores fuerunt, quum dies ſereni tantum 6 ſint numerati.

Monuimus iam ſupra obſeruationes anni 1748 deeſſe, progrediendum igitur nunc nobis eſſet ad annum 1749 et annos ſequentes, ne autem nimium longi hic ſimus, ſequentes obſeruationes alteri praelectioni reſeruare placet.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

METHODVS INVESTIGANDI
PARALLAXIN LVNAE ET PLANETARVM ECLIPSIBVS STELLARVM FIXARVM A LVNA ET PLANETIS INNIXA.

Auct. *A. N.* GRISCHOW.

Quanti terrae ſatellitis theoriam ad maximum perfectionis faſtigium perducere et Geographiae perficiendae et rei nauticae excolendae interſit, quis vigilantiam Aſtronomorum, magnosque Geometrarum conatus perſpecta habens non ſentit? Quantis vero arduum hocce opus prematur difficultatibus, ob elementa, ad theoriam lunarem in apricum producendam requiſita, haud perfecte cognita, perſpicuum eſt cuiuis conſideranti difficultates, quibus ipſae nodoſae ac intricatae praedicta elementa determinandi methodi ſunt ſubiectae.

Aſtronomi longa multarum obſeruationum ſerie 18 circiter annorum, Geometrae autem mechanicis legibus Lunae theoriam compeſcere conantur. Vterque vero modus praecipue nititur cognitione perfecta excentricitatis orbitae Lunaris, Apogaei et Nodorum locorum, inclinationis orbitae Lunae ad eclipticam, loci et motus Lunae medii, et parallaxeos horizontalis. Methodos autem ſi conſideremus, quibus Aſtronomi ad iſta elementa determinanda plerumque vtuntur, haud difficulter apparet, nullum fere horum elementorum exinde accurate definiri poſſe. Praeſertim vero modi, Apogaei locum et parallaxin Lunae inueſtigandi, vſitatiores, tam lubrici videntur, vt vix ſperare liceat, fore vt, niſi ſingulari

 adhi-

adhibita in obſeruationibus ipſis diligentia, iſta elementa perfecte pateſcant.

In maxime incognitis lunaris theoriae elementis habenda eſt, vt opinor, parallaxis Lunae horizontalis, quae tamen, vtpote praecipuum elementorum, prae reliquis ex obſeruationibus maxima diligentia inſtitutis definiri deberet. Quia enim locus Lunae verus inter fixas, ſiue e centro telluris ſpectatus, non niſi data parallaxi aſſignari poteſt, manifeſtum eſt, reliqua lunaris orbitae elementa ſupra memorata parallaxi inniti. Inde factum eſt, vt Aſtronomorum bona magnaque pars parallaxi parum fidentes, Apogaei et Nodorum loca determinandi cauſa eclipſes lunares adhibere ſoleant. Quam accurate vero eiusmodi eclipſium obſeruationes inſtituere liceat, vel quantum obſeruationes in diuerſis locis, aut a diuerſis obſeruatoribus habitae, a ſe inuicem diſcrepent, ipſa experientia edocti, explorate iudicium ferre poſſumus de elementis orbitae lunaris ex eclipſibus lunaribus deductis.

Perſpecto igitur ampliſſimo parallaxeos Lunae in tabulis lunaribus accurate condendis vſu, haud inutilis erit opera, methodis, praedictam parallaxin vel accuratius, vel facilius, vel tandem ſaepius obſeruandi, inueniendis, impenſa. Veterum quidem Aſtronomorum in methodis parallaxin corporum coeleſtium, praeſertim vero Lunae et Solis, explorandi, inueniendis ſagacitatem requirere non poſſumus, cum illi varias hunc in finem ingenioſe excogitauerint methodos, quas vero praxis Aſtronomica, praeſertim illis temporibus vſitata, haud contemnendis arguit difficultatibus, ita vt iſtae methodi ne parallaxi Lunae quidem debita exactitudine detegendae inſeruire videantur

deantur. Tales sunt methodi ab Hipparcho et Aristarcho Samio pro inuenienda parallaxi Solis, a Ptolemaeo, Tychone Brahe, Dano, aliisque pro parallaxi Lunae determinanda adinuentae et adhibitae.

Neque minus egregii sunt modi aliquot huc spectantes a Celeberrimo Astronomo Anglo Halleio propositi, quorum praxis vero in hunc vsque diem ob latitudinem Lunae maximam inconstantem, aliaque incommoda ex positione locorum terrestrium praxi Astronomica florentium nascentia, ex sententia successisse non videtur.

Nec incognita est methodus Planetarum parallaxes determinandi omnium simplicissima, duos postulans obseruatores correspondentes, in duobus locis terrestribus sub eodem circiter meridiano satis longe dissitis locatos, instrumentisque munitos differentiis altitudinum meridianarum Planetae et stellae alicuius fixae, parallelo Planetae proximae, quam accuratissime obseruandis accommodatis. Comparatis enim parallelorum Lunae et fixae differentiis in vtroque loco obseruatis, facili negotio parallaxis distantiae locorum debita, et hinc ipsa parallaxis horizontalis innotescit Ad maiorem autem exactitudinem obtinendam requiruntur duo loca in diuersis terrae, respectu aequatoris, hemisphaeriis sita. Hancce quidem methodum parallaxeos Lunae determinandae gratia Illust. Baro de Krosick primus adhibere est conatus; successus autem, huius incepti votis minime respondens, Astronomiae parum vtilitatis attulit. Idcirco, perspecta vtilitate huiusce modi, Cl. Abbas de la Caille e grege Astronomorum Gallorum, omnibus rebus rite perpensis, iussus est iter in promontorium Bonae Spei suſcipere feliciori cum ſucceſſu procul dubio rediturus. Nobilis ſane ille conatus totius orbis terrarum Aſtronomorum et ſideralis ſcientiae cultorum oculos in noſtrum ſatellitem conuertit, nullusque dubito, quin maxima theoria lunaris inde ſit captura incrementa, praeſertim ſi Aſtronomorum in borealioribus Europae erit lunae obſeruandae inuigilantium diligentia, coelique fauor conſpirarent, neque temporis anguſtiae impedimento forent.

Neque tamen putandum eſſe exiſtimo, omnes difficultates, quae in accurate determinanda parallaxeos lunaris quantitate occurrunt, hoc inſtituto ſuperatum iri, neque, abſoluto calculo, nodoſum hocce negotium vlteriori indagine indigere. Terra toties dimenſa, quis dubitet, quin ad maiorem certitudinem obtinendam, rurſum certis in locis menſuranda ſit? Quis igitur dubitabit, quin parallaxeos Lunae quantitas, aeque ac planetarum, diuerſis tutiſſimisque methodis magis magisque ſit ſtabilienda? Eiusmodi vero methodis annumerandus eſt modus inueſtigandi Lunae parallaxin binis obſeruatis Solis eclipſibus, altera in Nodo Lunae aſcendente, altera autem in Nodo deſcendente celebratis innixus. Denique autem haud minus digna et expedita, huc vſque vero neglecta, videtur methodus, quam hic proponam, obſeruatis eclipſibus fixarum a Luna nixa. Cum enim eiusmodi eclipſes ſatis ſint frequentes, ſimulque momentaneae, neotericorum nonnulli fauente ſucceſſu illas longitudinibus terreſtribus accuratius definiendis adhibuerunt. Quid igitur obſtat, cur non aeque feliciter, data locorum differentia meridianorum, parallaxeos lunaris quantitati ſaepius et in diuerſis lunaris orbitae punctis inueſtigandae inſeruire poſſint? Faten-

Fatendum quidem eſt, vt quantitas parallaxis hac methodo eruenda certior euadat, vtendum eſſe obſeruationibus in locis terreſtribus longe diſſitis inſtitutis. Cum vero noſtris temporibus Sideralis ſcientiae dignitas atque vſus floreſcat quotidie magis, nullus dubito, quin obſeruationes ad hocce propoſitum aptas ſiderum ſcrutatores largiri poſſint. Quin etiam in vaſtiſſimo Ruſſico Imperio conſtituti duo obſeruatores correſpondentes viam ſibi ad parallaxin Lunae hac methodo determinandam patefacere valent. Oram enim ſi comparaueris terrae Camtſchatkae orientaliorem cum obſeruatorii Imperialis ſitu, inuenies Meridianorum differentiam 125 gradus ſuperantem, adeoque ad ſcopum ſufficienti cum exactitudine attingendum ſatis idoneam. Requiritur tantum diligens obſeruator horologio oſcillatorio Aſtronomico, tubo et quadrante munitus, in terra Camtſchatka obſeruandis ſiderum eclipſibus inuigilans. Id quod eo facilius feliciusque effici poteſt, quod eiusmodi obſeruatori inſtrumentorum ſupellectile ſatis modica, et Geographiae Ruthenici Imperii perficiendae ſimul inſeruiente, opus eſt.

Methodum itaque propoſitam explicaturo ſtatim duo diuerſi occurrunt proceſſus; alter ſoli obſeruato vel immerſionis vel emerſionis momento ſtellae alicuius fixae innititur; alter vero magis intricatus immerſionis aeque ac emerſionis momenta poſtulat. De priori igitur proceſſu exponendo primum agam, alterum exemplo illuſtrandum in aliam occaſionem relinquens. Intento vero animo priorem indagans proceſſum, ſequentia ad problema hocce exſoluendum requiri data reperio.

1.) Differentia meridianorum locorum in tellure, vbi obſeruationes peractae ſint, maxima quidem, quantum fieri poteſt, diligentia, ex obſeruationibus eclipſium ſatellitum Iouis determinanda. Conſtat quidem inter Aſtronomos longitudinum terreſtrium differentias ex praedictis ſatellitum Iouis obſeruationibus non ſatis tute deduci poſſe. Nihilominus tamen nullum dubium relinquitur, quin Meridianorum differentiae ex obſeruatis ſatellitum Iouis in quadrato Solis verſantis eclipſibus ſaepius repetitis, immerſionum praecipue momentis adhibitis, reliquisque et coeli et inſtrumentorum circumſtantiis haud neglectis, vel ex appulſibus vmbrae telluris ad lunaris corporis maculas ad 15'' minimum definiri queant.

2.) Differentia altitudinum centri Lunae et ſtellae, huc vſque in obſeruationibus occultationum plerumque neglecta, cum altitudine ſtellae tempore immerſionis vel emerſionis per quadrantem micrometro inſtructum obſeruandae; licet abſoluta ſtellae altitudo haud neceſſario, vt ex ſequentibus patebit, ad calculum requiratur. Ad veram deinde altitudinum differentiam indagandam, refractionum differentiam differentiae altitudinum debitam attendendum eſt.

3.) Diameter Lunae apparens horizontalis, a verticali propter refractionum differentiam diuerſa, micrometri exquiſitiſſimi ope, habita dilatationis luminis ratione, tempore eclipſeos obſeruanda.

4.) Diſtantia ſtellae a nonageſimo eclipticae, vna cum altitudine nonageſimi gradus ad obſeruationis momentum, more conſueto, ſiue potius ex obſeruato ſtellae fixae,

fixae, cuius ascensio recta accuratissime datur, per meridianum transitu, ad Poli eleuationem datam determinanda.

5. Locus stellae eclipsin passae apparens, tam secundum longitudinem, quam secundum latitudinem, ex dato loco vero, adhibitis et aberrationis et mutationis axis telluris correctionibus, inuestigandus.

6. Motus Lunae verus horarius in longitudinem, ex optimis lunaribus tabulis desumendus, supputando locum Lunae verum ad obseruationis momentum loco occidentaliori conueniens, et deinde ad horam proxime insequentem. Proinde exactior hoc modo prodibit motus Lunae verus quaesitus, cum parallaxis momentum obseruationis in locis occidentalioribus semper anteuertat momento obseruationis in locis orientalioribus habitae.

Hisce ita adornatis expositisque, ipsum aggrediemur calculum, exhibendo in sequenti problemate formulas eruendae, et differentiae latitudinum stellae centrique Lunae tempore obseruationis, et distantiae pro eodem temporis momento Lunae a coniunctione visa inseruientes:

PROBLEMA.

Dato momento immersionis stellae fixae, cuius locus apparens ad diem eclipseos reductus accuratissime datur; datisque ad idem momentum differentia altitudinum stellae et centri Lunae, diametro Lunae apparenti, nonagesimo eclipticae gradu eiusdemque altitudine, inuenire differentiam latitudinum stellae et centri Lunae, nec non distantiam Lunae in ecliptica a coniunctione visa.

 SOLV

SOLVTIO.

Tab. XIV. Fig. 1. In schemate repraesentet E C L eclipticam, cuius Polus alter P; Z designet zenith, C gradum eclipticae ab oriente puncto nonagesimum, et Z P nonagesimi gradus altitudinem. Sit porro ipso immersionis momento centrum Lunae in M, et stella in S. Ductis arcubus A S horizonti, et N S eclipticae parallelis, A M denotabit altitudinum differentiam stellae et centri Lunae, M N differentiam latitudinum, et angulus M P S distantiam Lunae a coniunctione visa cum stella ipso immersionis momento.

Vocetur altitudo nonagesimi eclipticae gradus Z P - - a
Distantia stellae a nonagesimo per angulum ZPS definita - - v
Differentia altitudinum stellae et centri Lunae A M - - δ
Semidiameter Lunae apparens M S - - - - α
Latitudo stellae apparens, cuius complementum S P - - l

Dantur igitur in triangulo sphaerico Z P S latera Z P, P S, et angulus Z P S, hinc erit

$$\text{cotang. } ZSP = \frac{\text{cos. } l - \text{cos. } v \,.\, \text{sin. } l \,.\, \text{tang. } a}{\text{sin. } v \,.\, \text{tang. } a} = \text{cotang. } ASN$$

adeoque

$$\text{sin. } ASN = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{cos. } l - \text{cos. } v \,.\, \text{sin. } l \,.\, \text{tang. } a}{\text{sin. } v \,.\, \text{tang. } a}\right)^2}}$$

et

$$\text{cosin. } ASN = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{sin. } v \,.\, \text{tang. } a}{\text{cos. } l - \text{cos. } v \,.\, \text{sin. } l \,.\, \text{tang. } a}\right)^2}}$$

Porro erit in triangulo rectangulo A M S pro rectilineo habendo sin. $ASM = \frac{\delta}{\alpha}$; cumque angulus MSN sit $= ASM + ASN$, erit

cosin.

$$\text{cosin. } MSN = \frac{\sqrt{\alpha^2-\delta^2}}{\alpha\sqrt{1+\left(\frac{\text{sin. } v \text{ tang. } a}{\text{cos. } l. - \text{cos. } v. \text{ tang. } a. \text{sin. } l.}\right)^2}}$$

$$- \frac{\delta}{\alpha\sqrt{1+\left(\frac{\text{cos. } l. - \text{cos. } v \text{ tang. } a. \text{sin. } l.}{\text{sin. } v. \text{ tang. } a.}\right)^2}}$$

$$\text{et sin. } MSN = \frac{\sqrt{\alpha^2-\delta^2}}{\alpha\sqrt{1+\left(\frac{\text{cos. } l - \text{cos. } v. \text{ tang. } a. \text{ sin. } l}{\text{sin. } v \text{ tang. } a}\right)^2}}$$

$$+ \frac{\delta}{\alpha\sqrt{1+\left(\frac{\text{sin. } v \text{ tang. } a.}{\text{cos. } l. - \text{cos. } v. \text{ tang. } a. \text{ sin. } l.}\right)^2}}$$

Quibus inuentis prodibit diftantia centri Lunae a coniunctione vifa in ecliptica pro tempore immerfionis quaefita, fiue angulus

$$MPS = \frac{\sqrt{\alpha^2-\delta^2}}{\text{cos. } l. \sqrt{1+\left(\frac{\text{sin. } v. \text{ tang. } a.}{\text{cos. } l. - \text{cos. } v. \text{ tang. } a. \text{ sin. } l.}\right)^2}}$$

$$- \frac{\delta}{\text{cos. } l. \sqrt{1+\left(\frac{\text{cos. } l. - \text{cos. } v. \text{ tang. } a. \text{ sin. } l.}{\text{sin. } v. \text{ tang. } a}\right)^2}}$$

$$\text{vel } MPS = \frac{(\text{cos. } l - \text{cos. } v. \text{ tang. } a. \text{ sin. } l)\sqrt{\alpha^2-\delta^2} - \text{sin. } v. \text{ tang. } a. \delta.}{\text{cos. } l. \sqrt{(\text{cos. } l - \text{cos. } v. \text{ tang. } a. \text{ sin. } l)^2 + (\text{sin. } v. \text{ tang. } a)^2}}$$

Simili modo differentia latitudinum centri Lunae et ftellae, vel recta MN ad idem temporis momentum, erit

$$= \frac{\sqrt{\alpha^2-\delta^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\text{cos. } l - \text{cos. } v. \text{ tang. } a. \text{ sin. } l}{\text{sin. } v. \text{ tang. } a}\right)^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{1+\left(\frac{\text{sin. } v. \text{ tang. } a}{\text{cos. } l - \text{cos. } v. \text{ tang. } a. \text{ sin. } l}\right)^2}}$$

$$\text{vel } MN = \frac{\text{sin. } v. \text{ tang. } a \sqrt{\alpha^2-\delta^2} + (\text{cos. } l - \text{cos. } v. \text{ tang. } a. \text{ sin. } l)\delta.}{\sqrt{(\text{cos. } l - \text{cos. } v. \text{ tang. } a. \text{ sin. } l)^2 + (\text{sin. } v. \text{ tang. } a)^2}}$$

 Pofitis

Pofitis tempore obferuationis altitudinibus centri Lunae et ftellae aequalibus, erit

$$\text{angulus } MPS = \frac{\alpha}{\text{cof.}\, l \sqrt{1 + \left(\frac{\text{fin.}\, v \cdot \text{tang.}\, a}{\text{cof.}\, l - \text{cof.}\, v . \text{tang.}\, a . \text{fin.}\, l}\right)^2}}$$

$$\text{et } MN = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{cof.}\, l - \text{cof.}\, v . \text{tang.}\, a . \text{fin.}\, l}{\text{fin.}\, v . \text{tang.}\, a}\right)^2}}$$

Hinc datis α et δ fiue femidiametro Lunae apparenti et differentia altitudinum in minutis fecundis, formulae praecedentes quaefitam quoque in minutis fecundis exhibebunt, et differentiam latitudinum et diftantiam centri Lunae a coniunctione vifa in ecliptica, quo tandem modo nullo fere negotio locus Lunae vifus ad tempus obferuationis pro vtroque loco eclipfi obferuandae deftinato affignari poterit.

Cum hoc in negotio nil difficilius fit determinatu, quam altitudinum Lunae et ftellae differentia ipfo immerfionis vel emerfionis momento quam accuratiffime obferuanda, operae pretium erit, vt ifta differentia ante immerfionem, vel poft emerfionem, crebro capiatur. Adfcripto enim fingulis obferuationibus tempore penduli, fatis accurate, fi dentur tres aliquae aut quatuor differentiae obferuatae, definiri poterit differentia altitudinum tempori immerfionis vel emerfionis competens. Nam variatio altitudinum mutua femper erit exilis, eoque minor, quo maior fiderum a meridiano elongatio, manente eadem azimuthorum differentia, ita vt a motu Lunae proprio abftrahendo, incrementum, fiue decrementum, altitudinis

altitudinis Lunae, ſit ad incrementum, ſiue decrementum, altitudinis ſtellae, paruo temporis interuallo reſpondens, in ratione directa ſinus azimuthi Lunae ad ſinum azimuthi ſtellae: vnde lucide apparet, altitudinum variationem mutuam, eo temporis momento, quo ſidera in eodem verticali obſeruantur, eſſe omnium minimam. Ad quod probandum ſit in Z Zenith, in P Polus aequatoris, et in S Stella aliqua fixa: Ponatur eleuatio aequatoris ZP $= a$; diſtantia ſtellae a Polo SP $= p$; angulus ad Polum ZPS $= x$; azimuthus SZP $= y$; et diſtantia ſtellae a vertice ZS $= z$; eritque coſ. $z =$ coſ. x. ſin a. ſin: $p. +$ coſ. a: coſ. p., hinc differentiando ſin. $z . dz = $ ſin. a ſin. p: ſin: $x. dx$, vel $dZ = \frac{\text{ſin. } a. \text{ ſin. } p. \text{ ſin. } x. \ dx.}{\text{ſin. } z.}$ Cum vero ſin. $Z = \frac{\text{ſin. } x. \text{ ſin. } p.}{\text{ſin. } y.}$; obtinebitur incrementum, vel decrementum altitudinis ſtellae dz paruo temporis interuallo per dx expreſſo reſpondens $=$ ſin. a. ſin. $y. dx$, ex qua formula ſupra allata facile fluunt. Tab. XIV. Fig. 2.

Quod iam ad variationem differentiae altitudinum Lunae et ſtellae ex motu Lunae proprio oriundam attinet, illa facili negotio ſequentium aequationum ope aſſignari poterit. Vocato enim incremento aſcenſionis rectae Lunae dato tempuſculo reſpondente dx, erit variatio altitudinum competens, ſiue $dz =$ ſin. a ſin. $y. dx$, quae tricies circiter ſumta aequatur abſoluto incremento, vel decremento, altitudinis ſtellae eidem tempuſculo conueniens. Ponatur ſimili modo mutatio declinationis Lunae paruo temporis interuallo debita $= dp$, eritque variatio differentiae altitudinum a mutata declinatione Lunae proficiſcens $= \frac{d\,p}{ſin.\,p.} \sqrt{(ſin.\,p)^2 - ſin.\,y.\,ſin.\,a)^2}$.

Adhibuimus quidem in calculo praecedenti differentiam altitudinum, vtpote arculum quadrantis mobilis micrometro virgaque gubernatrice (*verge de conduite*) inſtructi ope obſeruatu facillimum. Dubitare tamen non poſſumus, quin praedictorum elementorum inueſtigatio facilius ſub manus ſuccederet, ſi obſeruatores ſectore Grahami, vel potius tubo micrometro munito machinaeque parallacticae impoſito armati obſeruandae declinationum differentiae tempore immerſionis, ſiue emerſionis, incumberent. Quocunque vero modo res peragitur, ſufficit, vt ad tempus obſeruationis diſtantia centri Lunae a coniunctione viſa in ecliptica nec non differentia latitudinum Lunae et ſtellae quam diligentiſſime determinentur. Hiſce enim elementis, tanquam baſi, ſequens parallaxeos horizontalis inueſtigatio in ſequenti problemate, calculo duce, explicanda innititur.

PROBLEMA.

Datis immerſionis ſtellae poſt Lunam e binis terreſtribus locis longe diſſitis, poſitione datis, obſeruatae momentis, nonageſimo gradu eclipticae eiusque altitudine vna cum loco Lunae viſo reſpectu ſtellae occultatae ex obſeruationibus ad praedicta momenta deducto, et motu Lunae vero horario in longitudinem, determinare eius parallaxin horizontalem.

SOLV-

SOLVTIO.

Inuenta modo in problemate antecedente expoſito, diſtantia centri Lunae a coniunctione viſa, cognitaque eodem modo determinata differentia latitudinum ſtellae centrique Lunae, nullo negotio locus Lunae viſus ad datum obſeruationis tempus pro vtroque loco innoteſcit. Ponatur igitur breuitatis cauſa

Momentum immerſionis e loco orientaliori obſeruatum $= \mathrm{I}$
e loco occidentaliori - $= i$
Differentia Meridianorum locorum - - $= \mathrm{D}$
Diſtantia centri Lunae a coniunctione viſa tempore
immerſionis pro loco orientaliori - - $= \mathrm{Q}$
pro loco occidentaliori - $= q$
Diſtantia viſa centri Lunae a nonageſimo eclipticae
in loco orientaliori - - - - $= \mathrm{R}$
in loco occidentaliori - - - - $= r$
Altitudo nonageſimi ad locum oriental: ſupput. $= \mathrm{A}$
ad locum occidentaliorem $= a$
Latitudo Lunae viſa momento immerſionis
in loco orientaliori - $= \mathrm{P}$
in loco occidentaliori - $= p$
Motus Lunae horarius verus in longitudinem $= m$
Parallaxis Lunae horizontalis - - - $= x$

Hisce ita praeparatis parallaxis Lunae longitudinis tempore immerſionis e loco orientaliori obſeruatae conveniens erit $= x \,.\, \frac{\text{ſin. R . ſin. A}}{\text{coſ. P}}$. item parallaxis longitudinis pro loco occidentaliori $= x \,.\, \frac{\text{ſin. } r \text{ . ſin. } a}{\text{coſ. } p}$. Quibus datis prodibit momentum coniunctionis verae Lunae cum ſtella ſequente ratione:

Diſtan-

Distante Luna tempore immersionis a nonagesimo eclipticae ortum versus.

$$\text{Tempus Conj. verae} \begin{cases} \text{pro loco oriental.} = I + \frac{3600}{m}\left(Q + \frac{x.\text{sin.R.sin.A}}{\text{cos.P}}\right)\text{sec.} \\ \text{pro loco occidental.} = i + \frac{3600}{m}\left(q + \frac{x.\text{sin.r.sin.a}}{\text{cos.p}}\right)\text{sec.} \end{cases}$$

Distante Luna a nonagesimo occasum versus.

$$\text{Tempus Conj. verae} \begin{cases} \text{pro loco oriental.} = I + \frac{3600}{m}\left(Q - \frac{x.\text{sin.R.sin.A}}{\text{cos.P}}\right)\text{sec.} \\ \text{pro loco occidental.} = i + \frac{3600}{m}\left(q - \frac{x.\text{sin.r.sin.a}}{\text{cos.p}}\right)\text{sec.} \end{cases}$$

Ex hisce formulis sequentes eliciuntur expressiones differentiam Meridianorum datam exhibentes:

Distante Luna in vtroque loco a nonagesimo ortum versus.

$$D = I - i + \frac{3600}{m}\left[Q - q + x\left(\frac{\text{sin.R.sin.A}}{\text{cos.P}} - \frac{\text{sin.r.sin.a}}{\text{cos.p}}\right)\right]\text{sec.}$$

Distante Luna in vtroque loco a nonagesimo occasum versus.

$$D = I - i + \frac{3600}{m}\left[Q - q - x\left(\frac{\text{sin.R.sin.A}}{\text{cos.P}} - \frac{\text{sin.r.sin.a}}{\text{cos.p}}\right)\right]\text{sec.}$$

Distante Luna a nonagesimo in loco orientaliori ortum versus, in loco occidentaliori occasum versus.

$$D = I - i + \frac{3600}{m}\left[Q - q + x\left(\frac{\text{sin.R.sin.A}}{\text{cos.P}} + \frac{\text{sin.r.sin.a}}{\text{cos.p}}\right)\right]\text{sec.}$$

Distante Luna a nonagesimo in loco orientaliori occasum versus, in loco vero occidentaliori ortum versus.

$$D = I - i + \frac{3600}{m}\left[Q - q - x\left(\frac{\text{sin.R.sin.A}}{\text{cos.P}} + \frac{\text{sin.r.sin.a}}{\text{cos.p}}\right)\right]\text{sec.}$$

Facili iam negotio aequationes sequentes pro parallaxi Lunae horizontali quaesita deducuntur, nempe:

In casu primo.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}\left(D - (I - i)\right) + q - Q}{\frac{\text{sin.R.sin.A}}{\text{cos.P}} - \frac{\text{sin.r.sin.a}}{\text{cos.p}}}$$

In

In secundo

$$x = \frac{\frac{m}{3600}(D-(I-i))+q-Q}{\frac{\sin. r. \sin. a}{\cos. p} - \frac{\sin. R \sin. A}{\cos. P}}$$

In tertio.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}(D-(I-i))+q-Q}{\frac{\sin. R \sin. A}{\cos. P} + \frac{\sin. r. \sin. a}{\cos. p}}$$

In quarto.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}(I-i-D)+Q-q}{\frac{\sin. R \sin. A}{\cos. P} + \frac{\sin. r. \sin. a}{\cos. p}}$$

Immersionis momentum licet obseruatu sit facilius, quam emersionis tempus, quippe quod maiorem attentionem requirens plerumque incertius, propter oculos obseruando defatigatos, euadat, dubitandum non existimaui, quin hic paucis subnecterem formulas parallaxi horizontali ex obseruata emersione stellae eruendae inseruientes.

Retentis igitur iisdem datarum quantitatum designationibus sequentes obtinebimus valores ipsius x:

In casu primo.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}[D-(I-i)]+Q-q}{\frac{\sin. R. \sin. A}{\cos. P} - \frac{\sin. r. \sin. a}{\cos. p}}$$

In secundo.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}[D-(I-i)]+Q-q}{\frac{\sin. r. \sin. a}{\cos. p} - \frac{\sin. R. \sin. A}{\cos. P}}$$

In tertio.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}[D-(I-i)]+Q-q}{\frac{\sin. R \cdot \sin. A}{\cos. P} + \frac{\sin. r \cdot \sin. a}{\cos. p}}$$

In quarto.

$$x = \frac{\frac{m}{3600}(I-i-D)+q-Q}{\frac{\sin. R \cdot \sin. A}{\cos. P} + \frac{\sin. r \cdot \sin. a}{\cos. p}}.$$

In ſupra exhibitis pro inuenienda parallaxi Lunae horizontali formulis ſemper iſtam parallaxin ſuppoſuimus per tempus inter obſeruationes elapſum conſtantem; Cum vero differentiam nunquam non ſatis notabilem intercedere neceſſe ſit, leuis ex formulis praecedentibus inuentae parallaxi Lunae horizontali adhibenda erit correctio, ſiue incremento, ſiue decremento parallaxis horizontalis interea temporis acquiſito conueniens. Adeo quidem haec correctio exilis eſt, praeſertim verſante Luna prope Apogaeum vel Perigaeum, vt eam iure negligere poſſimus; verum vt leuioris huius correctionis rationem habere poſſimus, cum Luna in diſtantia a terra media verſatur, ponamus parallaxin Lunae horizontalem tempore obſeruationis in loco orientaliori $= x$, in loco autem occidentaliori $= x \mp z$, ita vt z deſignet incrementum vel decrementum parallaxeos horizontalis tempori inter obſeruationes elapſo debitum. Quo facto invenimus praedictam correctionem parallaxeos horizontalis

$$= \frac{z}{\frac{\cos. p \cdot \sin. R \cdot \sin. A}{\cos. P \cdot \sin. r \sin. a} \pm 1}.$$

quo valore demto quantitati parallaxeos horizontalis ex formulis ſupra inuentis determinatae, vel ad eandem addito,

dito, prodibit parallaxis Lunae horizontalis momento eclipſeos in loco orientaliori obſeruato reſpondens, atque haud dificulter patebit, vtrum quantitas iſta addenda ſit, an ſubducenda. Tabulae enim Aſtronomicae accurate ſatis ſuppeditant incrementum, vel decrementum parallaxeos horizontalis pro tempore inter binas obſeruationes quaeſitum, et ex poſitione Lunae, reſpectu eclipticae nonageſimi gradus, de vnitatis valore ſiue affirmatiuo, ſiue negatiuo iudicandum eſt. Si enim Luna in vtroque loco tempore obſeruationis a nonageſimo ſiue ortum ſiue occaſum verſus diſtans viſa fuerit, vnitas ſubducenda, e contra vero addenda eſt, verſante Luna in diuerſis eclipticae reſpectu nonageſimi quadrantibus.

Supereſt vt pauca addam de delectu et obſeruationum et locorum terreſtrium huiusmodi obſeruationibus inſtituendis deſtinandorum, obſeruando. Conſiderandi ſcilicet hic veniunt caſus, quibus leuis error ſiue in meridianorum differentiam, ſiue in obſeruationes ipſas, ratione temporis, admiſſus, maiorem minoremue in parallaxeos calculum trahat errorem. Hunc in finem ponamus errorem, ſiue in meridianorum differentia, ſiue in ipſis obſeruationibus $= dz$, et errorem in parallaxi horizontali hinc pendentem $= dx$, prouenietque

$$dx = \frac{m\,dz}{3600\left(\frac{\text{ſin. R . ſin. A}}{\text{coſ. P}} + \frac{\text{ſin. r. ſin. a}}{\text{coſ. p}}\right)}$$

Quae formula declarat errorem in parallaxi horizontali maioris vel minoris eſſe momenti, pro minori maioriue valore terminorum $\frac{\text{ſin. R. ſin. A}}{\text{coſ. P}}$ et $\frac{\text{ſin. r. ſin. a}}{\text{coſ. p}}$ rationem indicantium parallaxium longitudinis obſeruationum temporibus reſpondentium. Vnde ſequitur

1. Errorem augeri adhibita horum terminorum differentia, id quod ſemper accidit quandocunque Luna tempore eclipſeos in vtroque loco in eandem plagam a nonageſimo eclipticae diſtat. Error tamen minor euadit haerente luna prope nonageſimum.

2. Error minus erit notabilis cum Luna in diuerſis eclipticae quadrantibus reſpectu nonageſimi obſeruata fuerit, quo caſu termini praedicti in vnam ſummam ſunt colligendi, quae conditio reliquis, ad errores maxima qua fieri poteſt cura euitandos, longe praeferenda eſt, eoque magis, quo longius Luna a nonageſimo diſtiterit.

Ex hiſce concludimus, obſeruatores in determinandam hac methodo parallaxin incumbentes conſtitutos eſſe oportere in locis ſecundum longitudinem longe diſſitis, quo errores ſiue in differentia meridianorum, ſiue in obſeruationibus ipſis ineuitabiles, minime Aſtronomos de vera parallaxeos Lunae quantitate inuenienda detineat. Liquet vero ſimul, errorem in determinanda parallaxi Lunae horizontali in partibus aequatoris, quibuscunque in locis terreſtribus, et ſub quibusuis conditionibus methodo noſtrae maxime fauentibus obſeruationes inſtitutae fuerint, minimum aequare errorem admiſſum ſiue in obſeruationem ipſam, ſiue in meridianorum differentiam, in minutis ſecundis temporis diuiſum per 4.

Cum autem eiusmodi conditiones ſint oppido rarae et forte nunquam poſſibiles, Aſtronomis ſaltem enitendum eſt, vt obſeruationes correſpondentes, quas methodus haec poſtulat, in locis terreſtribus inſtituantur, quarum poſitio ita ſit comparata, vt terminorum $\frac{\text{ſin. R. ſin. A}}{\text{coſ. P}}$ et $\frac{\text{ſin. r. ſin. a}}{\text{coſ. p}}$ ſiue ſumma, ſiue differentia obtineant valorem

vel

vel vnitate maiorem, vel parum minorem. Si ex. gr. vt initio huius dissertationis proposuimus, bini obseruatores alter Petropoli, alter in terra Camtschatka in vico Bolscherezkoi eandem stellae cuiusdam fixae a Luna eclipsin iuxta praecepta supra tradita obseruarent, leui negotio ex formulis nostris inueniemus errorem, siue in differentia meridianorum, siue in ipsa obseruatione fore ad errorem inde natum in parallaxi Lunae horizontali vt 3. ad 1. circiter, hoc est, si in differentiam meridianorum irrepserit error triginta minutorum secundorum temporis, error exinde oriundus in parallaxi Lunae horizontali aequabitur 10. tantum minutis secundis aequatoris.

Supponamus iterum, Parallaxin Lunae ex Petropoli et Londini obseruata fixae a Luna eclipsi esse deducendam, reperiemus errorem in parallaxi horizontali Lunae errori in meridianorum differentiam admisso, ferme aequalem h. e. error 15 min. sec. temporis, siue in differentia meridianorum praedictorum locorum, siue in obseruatione eclipseos, producere valet errorem 15 min. sec. aequatoris in parallaxi horizontali nostri satellitis.

Hinc vicissim facile intelligere possumus, quantus certitudinis gradus in determinanda meridianorum differentia ab eclipsibus fixarum a Luna sit expectandus. Patet enim, hanc methodum esse omnium certitudine praestantissimam, quando de locis in tellure vicinis agitur. De locis autem positione determinandis longe dissitis si sermo est, haud aeque feliciter res succedit. Si e. g. in differentiam meridianorum Petropolin inter et vicum Bolscherezkoi hac methodo inquirendum esset, in parallaxi autem Lunae horizontali ex tabulis lunaribus desumta deprehenderetur error 30″ (saepe maius adhuc inter parallaxin Lunae certis ex tabulis desumtam et veram esse discrimen haud dubito) ex praecedenti ratione colligimus differentiam meridianorum errore triplo circiter maiori siue 1′. 30″. temp. affectam, quin magis erroneam, quam ex eclipsibus satellitum Iouis.

Ex hisce demum considerationibus colligimus, haud infructuosum futurum, neque parum vtilitatis parallaxi nostri satellitis accuratius rimandae esse allaturum, methodo, quam proponimus, innixum Astronomorum laborem. Maximam quidem adhibendam esse prudentiam ex praecedentibus ratiociniis non intelligere non possumus; cum vero aeuo nostro obseruatoria exquisitissimis instrumentis, horologiisque coelo consonis exactissime sint exornata, vel exornari queant, quin haec omnia ad voluntatem nostram fluere possint, nemini vel dubitare licet.

Antequam dissertationi huic finem imponam, pauca de vtilitate huius methodi ad parallaxin planetarum definiendam afferre haud inconsultum videtur. Intelligimus enim facile ex supra dictis, planetarum parallaxin, hactenus minus perfecte cognitam, aeque accurate ac lunarem, hoc modo inuestigari posse, si obseruationes occultationum fixarum a planetis in diuersis telluris habitationibus habitae Astronomis suppeterent.

Leui quidem attentione patet, occultationes fixarum a planetis multo esse rariores, quam eclipses fixarum a Luna, ex quibus non nisi 12. ad summum circiter spatio annuo, intra quod Luna 13 orbitam 100. circiter stellas nudo oculo conspicuas complectentem percurrit, Astronomorum oculos non fugiunt. Sed planetae Mars

Mars et Venus ambo definiendae nostri systematis solaris amplitudini inseruientes eclipsium fixarum a planetis difficultatem compensare videntur, cum saepius ad nebulosam cancri et ad pleiades appellant. Maxima vero difficultas, in obseruandis fixarum a planetis occultationibus obuia, versatur in vero siue immersionis, siue emersionis momento obseruando, praesertim si stella fuerit inferioris honoris. Hanc ob causam huiusmodi eclipses praestantissimis tubis micrometris munitis obseruare decet.

Triplici equidem modo in calculo parallaxium planetarum eclipsibus fixarum innixo errari posse manifestum est. 1°.) Considerandus est error in momento eclipseos. 2.) error in differentia meridianorum, et 3.) error in distantia centri planetae a coniunctione visa cum stella tempore immersionis, siue emersionis. Primo loco nominatus error eo prouenit, quod fixarum a planetis occultationes non aeque sint momentaneae ac earum eclipses a Luna. Propter radiorum luminis dilatationem enim, diametrum planetae amplificantem, stella per interuallum temporis eo longius, quo planetae motus e terra visus tardior, planetae margini inhaerere videtur, paulatimque, si stella fuerit parua, euanescens a planeta, vbi radii luminis circulum aberrationis constituentes sunt fulgentissimi, non amplius, vel ante verum immersionis post planetae corpus momentum, discerni potest.

Ponamus motum planetae horarium in longitudinem in minutis secundis expressum $= m$, et exiguam distantiam, qua stella a margine corporis planetae abesse posset, tempore, quo oculo armato sese iam, propter amplificatam diametrum, subduxerit $= \delta$. Proinde error in mo-

momentum eclipſeos admiſſus erit $= \frac{3600}{m}\delta$. Ad errorem iam in parallaxin planetae horizontalem irrepturum definiendum, ſubſtituatur in formula ſupra inuenta

$$dx = \frac{m\,dz}{3600\left(\frac{\text{ſin. R ſin. A}}{\text{coſ. P}} + \frac{\text{ſin. }v\text{ ſin. }a}{\text{coſ. }p}\right)}$$

ipſius dz valor inuentus $\frac{3600\,\delta}{m}$; prodibitque error in parallaxi horizontali quaeſitus $= \frac{\delta}{\frac{\text{ſin. R ſin. A}}{\text{coſ. P}} + \frac{\text{ſin. }v\text{ ſin. }a}{\text{coſ. }p}}$ ex quo apparet, errorem hunc ſemper eſſe eiusdem valoris, quaecunque fuerit planetae velocitas; ita vt δ hic pro quantitate conſtanti valde parua, nullumque in parallaxi planetae determinanda errorem productura, ſi ambo obſeruatores eadem quantitate, inque eandem partem errauerint, haberi poſſit.

Errorem iam ſi conſideremus, in quem erronea meridianorum differentia inducere valet, patet, illum fore eo maiorem, quo planeta fuerit rapidior, poſita ratione parallaxium longitudinis, tempore obſeruationum, ſiue quantitate $\frac{\text{ſin. R ſin. A}}{\text{coſ. P}} + \frac{\text{ſin. }r\text{ ſin. }a}{\text{coſ. }p}$ conſtante. Ex praecedentibus autem cognouimus, errorem in momentum eclipſeos admiſſum nullo modo a velocitate planetae pendere, vnde methodum colligimus, planetae parallaxin accuratiſſime determinandi, eclipſi ſtellae fixae e binis in tellure locis obſeruata, dum planeta a tellure viſus ſimul prope ſtationem ſuam haeret, innixum. In ſtella Martis ſcilicet circa tempus, quo achronice oritur, vbi ſimul eius parallaxis eſt maxima. Talis forte eclipſis continget circa d. 11. Dec. ſt. v. 1753, cum planeta Mars, in ipſa ſtatione verſans ad directionem, cum

ſtella

ſtella δ arietis adeo arcte coniungitur, vt eius a praedicta ſtella boream verſus diſtantia futura ſit valde exigua, vel forſan nulla. In Venere haec obtinent, cum inter elongationem a Sole, vbi maxime ſplendet, et coniunctionem inferiorem cum Sole intermedia verſatur. Ponamus e. gr. motum horum planetarum alterutrius diurnum, die quo ſtellam fixam occultat, $= 6'$, vel eius motum horarium in longitudinem $= 15''$, occultatio vero obſeruata ſit e duobus in tellure locis longe diſſitis, v. g. Petropoli et in vico Bolſcherezkoi in terra Camtſchatka, ita vt $\frac{\text{ſin. R ſin. A}}{\text{coſ. p}} + \frac{\text{ſin. r ſin. a}}{\text{coſ. P}} = 1.5$ quam proxime. Iam ſi in differentia Meridianorum praedictorum locorum ſupponatur error integri minuti primi temporis, manifeſtum eſt, errorem hinc pendentem in Parallaxi planetae horizontali ad $\frac{1''}{6}$ tantum aſſurgere, adeo vt non obſtante errore 15 min. prim. in differentia longitudinum locorum planetae parallaxis caeteris paribus ad partem ſui 180 definiri queat.

In maximam autem difficultatem incurrere videtur ſumma cum diligentia tempore immerſionis determinanda planetae a coniunctione viſa cum ſtella in ecliptica diſtantia, quae duplicem ob cauſam erronea euadere poteſt, partim ob errorem in differentia, ſiue altitudinum, ſiue declinationum planetae et ſtellae, partim ob ſummam difficultatem àccurate obſeruandi planetarum diametros apparentes. Aſtronomi exquiſitiſſimis inſtrumentis variisque modis de diametris planetarum determinandis adnixi rem iam conſummatam exploratamque eſſe vix fatentur. Cum vero ad calculum parallaxeos horizontalis inſtituendum differentia potius differentiarum quam abſoluta planetae a coniunctione visa distantia in vtroque loci obseruata requiratur, huiusmodi errores sane leuioris momenti sunt censendi, praesertim si, adhibito tubo Gregoriano micrometro instructo machinaeque parallacticae imposito, obseruatorum cura in mensuranda ipso immersionis momento declinationum stellae et planetae differentia euigilaret.

OBSERVATIO
INSOLITI LVMINIS AVSTRALIS PETROPOLI HABITA

Auct. A. N. GRISCHOW.

Singulas aurorae borealis obseruationes, cum in nostris oris septentrionalibus hocce lumen polare noctes saepissime illustret, Physicorum disquisitioni submittere parum vtilitatis et erroneis huius meteori hypothesibus discutiendis, et verae theoriae detegendae afferre videtur. Singulares tamen et notatu dignissimas huius luminis apparitiones cum naturae cultoribus communicare vel maxime necessarium, saepe numero autem neglectum esse patet. In huiusmodi apparitionibus merito annumeratur meteorum, quod per aliquot dies in horizonte australi quasi immobile obseruaui, eoque magis, quod eius locus, tempestatis mutationes subsecutae, et reliquae circumstantiae ad diligentiorem coeli boreali lumine illustrati contemplationem obseruatores excitare valent.

D. 6. Nou. st. v. 1751 circa h. 9. p. m. mihi coelum stellatum speculanti insolitum quoddam visum est lumen rutilans duos circiter gradus longum in ipso horizonte

zonte auſtrali extenſum, in ſeram vsque noctem in eodem loco, nulla obſeruata figurae variatione, ſubſiſtens. Meteoron hocce valde mirans, ſuſpicatus ſum, ſplendorem hunc proficiſci a ſtella primae magnitudinis Fomahant horizonti Petroburgico proxima, deinde vero vesperi iſtam ſtellam a loco huius luminis ſatis longe eſſe remotam obſeruaui.

D. 7. Nou. Cum crepuſculo, ſtellis primae et ſecundae magnitudinis iam eminentibus, coeloque eximie vndique ſereno lumen hocce auſtrale iterum ſub eadem figura conſpexi 10 circiter gradibus a priſtino loco in ipſo vero horizonte orientem verſus diſtans, in vno eodemque loco permanens ad h. 9. p. m. vsque, quo nempe tempore maſſa rutilans ſpatio horae octantis nubecula turbida cingebatur, ſubitoque radiationes fulgurationum haud abſimiles ex ipſa maſſa rutilante ſurgentes ſeſe vndantes per totum coelum diffundebant. Paulo poſt coelum vndique nubibus e nubecula lumen auſtrale cingente ſurgentibus magis ac magis turbidis inuoluebatur, nullo per hoſce dies aurorae borealis animaduerſo veſtigio.

Hocce notatu digniſſimum lumen auſtrale haud inepte probandis mutationibus tempeſtatum lumen boreale ſubſequentibus inſeruire videtur, cum ventus biduo continenti ex NNW ſpirans ipſo, quo lumen auſtrale reſolutum, radios emittebat, momento ex eadem plaga auſtrali flare caepit, tempeſtatisque mutatio ſatis notabilis niuisque ſolutio inſequebatur.

 Ad

Ad circumſtantias huius meteori tempeſtatisque mutationes magis dilucidandas adiungere conſultum viſum eſt meteorologicarum obſeruationum triduum.

Dies et horae	Barom. menſurae Parif.	therm. De l'Isle.	Directio et vis venti	Directio nubium.	Coeli facies.
VI. Nou.					
$7\frac{1}{2}$ a. m.	27. 34	$153\frac{1}{2}$	NW. NWZN. f. 2	NWZN f. 2	Coelum fere vndique grate ſerenum
1. p. m.	27. $41\frac{1}{2}$	$153\frac{1}{4}$	NW. f. 2.	NW. f. 2	Nubes turbidae multum diſſociatae.
10. p. m.	27. 70	$156\frac{1}{2}$	NNW. f. 2.	- -	Fere vndique coelum turbidum ſtellis emicantibus.
VII. Nou.					
$7\frac{1}{2}$ a. m.	27. 90	$161\frac{1}{2}$	NNW. plg. 1	NNW. 1	Spiſſae nubeculae albidae, reliquum coelum eximie ſerenum.
12. m.	27. 99	156	NNW. plg. 1	NNW. plg 1	
4. p. m.	28. 11	157	N. plg. 1	- -	Fere vndique coelum grate ſerenum
$10\frac{1}{2}$ p. m.	28. 15	$161\frac{1}{2}$	Inde ab h. $9\frac{1}{4}$ venti auſtr. vis. f. 2	5. f. 2.	Coelum vndique obnubilatum.
VIII. Nou.					
9. a. m.	28. 17	$159\frac{1}{2}$	SW. f. 2.	- -	Nubes ſubturbidae, paſſim diſſociatae. Circa Solis ortum coelum rubens
1. p. m.	28. 09	$158\frac{1}{2}$	SW. f. 2.		Nix larga vsque ad h. 6. p. m.
9. p. m.	27. 84	-	SW. f. 2.	- -	Inde ab h. 8. p. m. ad h. 10. nubes multum diſſociatae, deinde coelum vndique turbidum.
$10\frac{1}{2}$ p. m.	27. $81\frac{1}{2}$	$146\frac{1}{2}$	SW. f. 3 niſi 3	- -	

OBSERVATIONES LIPSIAE HABITAE an. 1749. ſtil. nou. a G. HEINSIO.

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS.

Die 16 Septembr. quo Iupiter oppoſitionem cum Sole paulo poſt meridiem celebrabat, eclipſes Satellitum Iouis primi et ſecundi obſeruare licuit; quae quidem obſeruationes, quamuis vſui geographico rigore ſummo reſpondere nequeant, theoriae tamen Satellitum inſeruire videntur, cum loca iſtorum et geocentrica et heliocentrica ſimul reſpiciant. Scilicet tempore oppoſitionis Solis et Iouis vmbra Iouis ab eius diſco tecta immediatam immerſionis vel emerſionis obſeruationem non concedit; ſed appulſus tantum diſculi Satellitis ad Iouis marginem annotare tunc licet, ad quos exactiori modo diſcernendos Tubum Gregorianum ita inſtruxi, vt iſte obiecta ſecundum diametrum 97. vicibus amplificaret. Hoc apparatu et Satellites et faſciae Iouis, caelo optime fauente, nitide conſpici potuerunt. Praeter faſcias *m*, *n*, verſus borealem et meridionalem Iouis marginem conſpicuas duae maiores *ab*, *cd*, ad ſenſum inter ſe parallelae, diſcum Iouis ita traiiciebant, vt extremitas tum borealis *ab*, tum auſtralis *cd*, a centro diſci diſtaret $\frac{1}{6}$ diametri Iouis, et vnaquaeque dimidio huius interualli centrum verſus lata eſſet; quantum quidem sensuum iudicio constitit. Figura situ erecto hor. 8. 23′. delineata est, et fasciae *ab*, *cd*, successu temporis per omnes obseruationes sequentes situm hunc secundum apparentiam conseruarunt. His praemissis

Tempore vero

8^h. 18′. 8″. Satelles primus ad marginem Iouis orientalem prope extremitatem fasciae *ab* inferiorem instar tuberculi in conspectum venire incipiebat. Intra pauca temporis secunda hic certus sum.

18. 28. Egressum Satellitis certe fieri optime conuincebar.

20. 3. Emersio totalis accidit, qua scilicet Satelles instar disculi margine suo occidentali limbum Iouis orientalem tangebat ad 1. in figura. Satelles secundus, qui ad Immersionem appropinquabat, tunc circiter ad 2. positus erat.

Tab. XIV. Fig. 3.

46. 24. In accessu Satellitis 2di ad Iouem interuallum inter limbum disculi Satellitis orientalem et marginem Iouis occidentalem aequale diametro Satellitis 2di aestimaui.

56. 40. Certe credebam, Satellitem 2dum margine suo orientali nunc tangere limbum Iouis occidentalem ad *i* in figura. In hoc aestimio intra minutum temporis certus sum.

9. 0. 40. Dimidium disculi Satellitis a limbo Iouis tectum iudicaui.

6. 0. Satelles secundus vltima vice instar tuberculi

culi admodum exigui ad limbum Iouis occidentalem videri potuit; statim post e conspectu ereptus est.

$11^h. 44'. 10''.$ Satelles 2dus instar tuberculi ad orientalem Iouis limbum prorumpere primum cernitur.

46. 10. Dimidium disculi Satellitis emerserat.

48. 20. Disculum Satellitis margine suo occidentali in contactum cum Iouis margine ad *e* peruenire credebam.

49. 20. Contactus certe celebratus erat. Emersio igitur multo citius absoluta fuit, quam Immersio. Inclinata erat semita Satellitis *ie* ad fasciam *ab* orientem versus.

Correctionem temporis altitudines Solis respondentes praebuerunt, pariter ac in obseruatione sequente.

Die 10. *Nouembr.*

Tempore vero

$5^h. 18'. 50''.$ Contigit Emersio prima Satellitis 1mi ex vmbra Iouis. Licet coelum videretur vaporosum et crepusculum adhuc duraret; tempore emersionis tamen Iupiter cum Satellitibus et fasciis optime conspici potuit. Obseruatio facta est ope Telescopii Gregoriani sub apparatu, quo istud obiecta secundum diametrum 52 vicibus auget.

Die 24. *Decembr.*

Eodem Telescopii apparatu, quo d. 10. Nouembr. vsus eram, eclipsin Satellitis tertii Iouis animaduertere licuit.

licuit. Immersionis obseruationem quidem nubes subinde interuenientes turbarunt. Sic enim

Tempore vero

$4^h. 28'. 45''$. Satelles 3tius sensibiliter lumine decrescere videbatur, reliquis Satellitibus probe conspicuis, donec

29. 6. Satelles lumine valde diminutus vna cum Ioue a nube e conspectu eriperetur, qui non nisi

30. 21. Iterum concedebatur, et per 4. vel 5. secunda temporis tantum durabat. Satellitem tunc immersum deprehendi, licet istum semel vel bis lumine admodum debili, quasi in instanti Immersionis totalis, adhuc coruscare crederem, incertus tamen. Interim pro certo habeo immersionem totalem accidisse inter $4^h. 29'. 6''$. et $4^h. 30. 21''$; et a vero non multum aberrabis, si eam ponas ad $4^h. 30'. 10''$.

31. 7. Iupiter nubibus denuo liberatus distincte docebat Satellitem 3. euanuisse

$7^h. 13'. 21''$. Contigit Emersio prima Sat. 3. ad distantiam a proximo Iouis limbo $= 1\frac{5}{8}$ diam. ♃ ad sensum. Obseruatio est exacta, coelo admodum sereno.

16. 20. Lumine pleno Satelles effulgebat.

Modum, quo temporis correctio instituta hic fuit, descriptum inuenies in sequente Eclipsis lunaris recensione.

OBSER-

OBSERVATIO ECLIPSIS LVNAE PARTIALIS

d. 23. *Decembr.* 1749.

Tempus in hac obſeruatione ad duo horologia oſcillatoria comparaui, quorum ſtatum reſpectu temporis ſiderei ex altitudinibus Capellae iisdem, diebus 23. et 25. Decembr. captis, optime cognoui. Inde etiam innotuit ſtatus eorundem reſpectu temporis veri ſolaris, et calculus variis eiusmodi altitudinibus ſuperſtructus meridiem verum d. 23. Decembr. conſenſu egregio in dictis horologiis patefecit.

Tempore vero

$7^h. 32'. 0''.$ Penumbra ad marginem Lunae medio loco inter Phocilidem et Schillerum diluta ſe oſtendebat. Obſeruatio facta eſt Tubo aſtron. 6. ped.

38. 30. Penumbra manifeſta in dicto loco per Tubum eundem.

40. 17. Initium Eclipſis fieri creditur. Obſeruationem hanc, prout et omnes ſequentes, niſi expreſſe aliud moneatur, peregi ope Teleſcopii Gregoriani ſub eo apparatu quo iſtud obiecta ſecundum diametrum 52 vicibus auget. In hac obſeruatione intra 20 ſecunda temporis certus ſum. Forſan initium paulo citius momento notato contigit, puta $7^h. 40'. 7''.$ Stellula quaedam videbatur in vicinia marginis obſcu-

rati Lunae, intensitate luminis circiter aequipollens Satellitibus Iouis, prout hi per tubum iam memoratum conspici solent. Haec stellula appropinquabat ad punctum peripheriae lunaris, quod (quantum iudicio ad maculas lunares comparato constitit) a puncto limbi lunaris centro Schickardi normaliter respondente circiter 17. vel 18. gradus peripheriae lunaris distabat versus regionem Tychonis. In hoc loco etiam stellula

7.^{h} 47′. 9″. ab obscurato quidem, ast adhuc luce debili donato, Lunae margine occultabatur. Stellula, antequam disparebat, disculo suo, cuius diametrum circiter = 2″. aestimabam, tota intra marginem Lunae conspiciebatur, et statim post disparitio in instanti contigit. Indicium inde petere licet, marginem Lunae, eclipsi quamuis affectum, ex luce spuria tamen adhuc augmentum aliquod capere.

54. 17. Vmbra tangit Tychonem.

55. 22. Vmbra per medium Tychonis.

56. 27. Tycho totus in vmbra.

Vmbra hic bene terminata apparuit.

8. 11. 30. Vmbra lente accedit ad Bullialdum.

12. 27. Vmbra certe tangit Bullialdum.

14. 17. Totus Bullialdus in vmbra.

31. 48. Totus Fracastorius in vmbra.

38. 0. Vmbra nunc diluta cernitur coloris subrutili.

8^h. 44′. 10″. Vmbra appellit ad St. Theophilum.

46.

46′. 26″.		Vmbra per medium St. Theophili.
47. 36.		Totus St. Theophilus in vmbra. Obſeruationes huius maculae, vmbra nunc male terminata, paulo incertae ſunt.
49. 36.		Vmbra ad Goclenium.
51. 36.		- - - per medium Goclenii
53. 36.		- - - totum Goclenium inuoluit. Meliori paulo ſucceſſu peractae ſunt obſeruationes iam enumeratae.
9^{h}.	26. 30.	Tycho incipit emergere. Obſeruatio dubia.
	27. 18.	Medium Tychonis emergit. Obſeruatio bona.
	28. 28.	Tycho totus emerſus. Nubes nunc coelum occupabant.
	57. 30.	Lunam in hiatu nubium conſtitutam per teleſcopium terreſtre 3. ped contemplans, finem eclipſis poſt 2. vel 3. minuta prima temporis inſtare indicabam. Ipſam autem finis obſeruationem nubes denuo ſuperuenientes impediuerunt. Ninxit poſtea.

Obſeruationes Meteorologicae.

In thermometro mercuriali conſueto notaui frigus maximum d. 11. Ianuar. hor. 9. matutina 176$\frac{1}{2}$ grad. calorem autem maximum d. 9. Auguſt. hor. 4. poſt merid. 104$\frac{3}{8}$. grad.

D. 22. *Septembr.* circa hor. 8. veſpertinam aurora borealis ingens conſpicua erat. Praeſertim autem radii (vel potius radiorum plurium congeries) colorem rutilum prae ſe ferentes, tum Borolybicum, tum Graecum verſus, vsque ad Zenith fere extendi videbantur. Eandem auroram Romae quoque viſam fuiſſe ex nouis publicis poſtea conſtitit.

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLIS

An. 1750. d. 8. Ianuar. ſt. n. temp. ciuil. horis antemeridianis Lipſiae habita

a

G. HEINSIO.

Coelum quidem diebus 7. et 8. Ianuarii obſeruationibus tum pro correctione temporis, ad duo horologia oſcillatoria numerati, tum ipſius Eclipſis optime fauit; circumſtantiae tamen nonnullae limites quosdam ipſis circumſcripſerunt. Sic tempus verum ex altitudinibus Solis reſpondentibus rigore ſufficienti cognoſcere vicinia Solis ad horizontem, accedente ſitu obſeruatorii mei non ſatis idoneo, non permiſit. Quamobrem ad explorandum horologiorum ſtatum altitudines Capellae quadrante conſueto diebus 7. et 8. Ianuar. captas adhibui, et ex reſpondentibus eundem reſpectu temporis ſiderei optime cognoui, egregio conſenſu cum iis obſeruationibus, quas in ſcopum ſimilem diebus 23. et 25. Decembri an. 1749. inſtitueram, ſiquidem dicta horologia interuallo temporis a 23. Decembr. vsque ad 8. Ianuar. non interrupto ordine motum conſeruauerant. Sic quoque altitudines Capellae diebus 7. et 8. Ianuar. captae, ſubducto calculo, ſtatum horologiorum reſpectu temporis veri ſolaris conſenſu exoptato patefecerunt, ita vt de temporis dimenſione exacta nullus ſupereſſet ſcrupulus.

Quod Eclipſin ipſam attinet, ſitus obſeruatorii adſpectum Solis non niſi hor. 9. 21′. conceſſit, quo momento Eclipſis iam multum proceſſerat. Ab eo tempore

vsque

vsque ad finem Eclipsis Solem optime deinceps contemplari licuit. Maculae insignes in Sole erant conspicuae, ad quas appulsus Lunae annotare satagebam, quem in finem quoque positionem macularum in disco Solis et respectu diurni, ope Machinae parallacticae, Tom. I. Nou. Commentar. p. 483. descriptae, durante adhuc Eclipsi obseruabam, quam schema situ erecto exhibet. Macula *a* prae ceteris maxima erat et nigerrima, halone ingenti cincta, ad quam sursum in aliqua distantia macularum minorum catena excurrebat. Hanc catenam vna cum halone in computum non traho, quotiescunque in sequentibus maculam *a* nomino, sed nucleum tantum eius nigerrimum subintelligo. Nucleus iste per tubos minores integer quidem, ast per Telescopium Gregorianum ex aliquot partibus interuallo exiguo lucido a se inuicem seiunctis compositus videbatur; has tamen partes coniunctim sumtas pro nucleo maculae *a* in sequentibus habeo, dum appulsus Lunae ad maculam *a* noto. Maculae *b* et *d*, licet ad magnitudinem ipsius *a* non assurgebant, prae reliquis tamen distinctae et nigerrimae apparebant. TAB. XIV. Fig. 4.

His ita expositis appulsus Lunae ad maculas sequentes animaduertere licuit.

Temp. vero ante meridiem	
$9^h. 22'. 24''$.	Peripheria Lunae maculam *a* tangebat, obseruatio facta est ope Tubi astronomici 5. ped.; copia enim Telescopii Gregoriani nondum dabatur.
— 23. 15.	Peripheria Lunae per medium maculae *a*.

9^h	23′.	56″.	Vel aliquot ſecunda ſerius, macula *a* tecta. Terminus ſcilicet phaſeos figuram vndulantem tunc referebat, ob vapores in aëre volitantes. Vtraque obſeruatio per eundum Tubum 5 ped. peracta eſt.
			Sequentibus obſeruationibus inſeruiit Teleſcopium Gregorianum, ſub apparatu, quo iſtud obiecta ſecundum diametrum 52. vicibus amplificat.
10.	0.	38.	Medium maculae *a* emergit.
10.	0.	58.	Integer nucleus maculae *a* emergit.
—	10.	24.	Maculam *d* tangit peripheria Lunae.
—	11.	5.	Per medium maculae *d* tranſit peripheria Lunae.
—	11.	33.	Tota macula *d* immerſa. Obſeruatio haec paululum dubia eſt.
—	51.	42.	Medium maculae *d* emergit.
—	52.	17.	Macula *d* tota emergit.
11.	12.	32.	Finis Eclipſis maxime propinquus.
—	12.	36.	Finis nunc certe contingit.

Intercapedines harum obſeruationum locum faciebant determinationi poſitionis macularum in diſco Solis et reſpectu diurni, ope Machinae parallacticae, ſic quidem, vt poſt immerſionem maculae *a* poſitio maculae *d* ab Eclipſi liberae definiretur, quam ad hor. 9. 45′. refero. Emerſa macula *a* cum reliquis adiacentibus, poſitiones macularum *a*, *b*, *f*, obſeruatae ſunt, quas ad hor. 10. 35′. alligo. Obſeruationes macularum omnium excepta macula *f*, reiteratis vicibus, conſenſu optimo, ſunt inſtitutae, ex duabus autem maculis ad *f* notatis per *f* intelligo inferiorem. Re-

Repraesentent ps portionem diurni limbi superioris Solis (situ scilicet erecto,) circulus $\pi\sigma$ Solis discum, π limbum Solis praecedentem, σ sequentem. Rectae πp, σs, perpendiculares ad ps, tangant discum in π, σ, vt ps diametrum Solis apparentem exhibeat, cuius quantitatem in partibus temporis solaris ex mora transitus disci Solis per horarium exprimere licet $= 2'.\ 21\tfrac{1}{4}''$, obseruationibus consentientibus. Intelligantur per maculas b, a, f, d, rectae $b\beta$, $a\alpha$, $f\Phi$, $d\delta$, parallelae ad πp. His factis, in iisdem temporis partibus

pro mac. b inueni $p\beta = 0'.\ 31''$, $b\beta = 1'.\ 32''$.
- - - a - - - $p\alpha = 0.\ 41\tfrac{1}{4}'$, $a\alpha = 1.\ 19\tfrac{1}{2}$.
- - - f - - - $p\Phi = 0.\ 55\tfrac{1}{4}$, $f\Phi = 1.\ 23$.
- - - d - - - $s\delta = 0.\ 17$, $d\delta = 1.\ 1$.

Obseruatae sunt etiam positiones macularum a et d horis antemeridianis die 7. Ianuar. eaeque ad hor. 11. 32'. adstrictae, ita definitae, vt

pro mac. a esset $p\alpha = 0'.\ 54\tfrac{3}{4}''$, $a\alpha = 1'.\ 19''$.
- - - d - - $s\delta = 0.\ 9\tfrac{1}{2}$, $d\delta = 1.\ 1$.

Cum motus macularum istarum in disco Solis hoc modo pro dato tempore constaret; assignare quoque licuit earum positionem ad id tempus, quo vnaquaeque macula obscurationem maximam passa est. Contigit haec pro macula a die 8. Ianuar. hor. 9. 42'; pro macula d hor. 10. 31'. proxime, ad quae ergo respectiue tempora

pro mac. a statuere licebit $p\alpha = 0'.\ 41\tfrac{3}{4}''$, $a\alpha = 1'.\ 19\tfrac{1}{2}''$.
- - - d - - - - $s\delta = 0.\ 16\tfrac{3}{4}$, $d\delta = 1.\ 1$.

Hanc maculae a vel d positionem durante eius Eclipsi, ob exiguum temporis interuallum, constantem sumsi,

ſumſi, vt ope iſtius concluſiones nonnullae poſſent formari.

Obſeruatio Eclipſis noſtrae calculum multum anticipauit. Sic in Calendario Lipſienſi ponitur Finis Eclipſis Lipſiae hor. 11. 29′. 34″; et in Ephemeridibus *Manfredii* hor. 11. 31′, cum obſeruatio hor. 11. 12′. 36″. finem factum eſſe doceat. Vt igitur quaedam calculi elementa pro circumſtantiis obſeruationis noſtrae corrigere liceret; elementa in Calendario Lipſienſi ex Tabulis *Caſſini* ad proiectionem Eclipſis efficiendam propoſita ita adhibui, vt poſitionem ſemitae viſae centri Lunae reſpectu diſci Solis immoti et meridiani ſeu circuli horarii proxime obtinerem, diuiſione ſemitae iſtius ratione temporis ex obſeruatione finis eclipſis quodammodo iam correcta. Sumſi nempe

Parallaxin Lunae horiz.	=	0°.	59′.	44″.
Latit. Lunae bor. in ☌	=	0.	41.	53.
Inclinat. viae viſae centri penumbrae ad circulum latitud.	=	84.	21.	45.
Angulum Eclipticae cum meridiano	=	82.	21.	—
Horarium Lunae a Sole verum	=	0.	33.	5.
Semidiametrum penumbrae	=	0.	32.	31.
Semidiam. Solis (conſentientem cum mora eius per circ. horarium)	=	0.	16.	20.
Semidiam. Lunae horiz.	=	0.	16.	11.
- - - - - in altit. quam Sol circiter habuit tempore Eclipſis	=	0.	16.	13.
Declinationem Solis auſtral.	=	22.	15.	20.
Eleuat. Aequator. Lipſ.	=	38.	38.	—

Facile

Facile autem perſpexi, ſemitam viſam centri Lunae reſpectu diſci Solis immoti et circuli horarii methodo conſueta ex his elementis conſtructam de durationibus occultationum macularum *a* et *d* obſeruationibus, non aſſentire, ſed durationes iſtas iuſto minores prodere; quamobrem ſemitam iſtam curuilineam motu ſibi parallelo propius admoui ad centrum diſci ſolaris, donec conſenſus daretur inter durationes occultationum macularum, quas obſeruationes docebant, cum iis, quas ſchema ſic correctum ſuppeditabat, habita variabilis quantitatis motus ſemihorarii Lunae in hac ſemita ratione. Sic tandem, omnibus bene inter ſe conſentientibus, ſequentes formare licuit concluſiones. Inueni ſcilicet

Diſtantiam viſam centrorum ☉ et ☽ minimam	$= 15'.\ 0''$. circ. max.
Quantitatem partis diam. Solis obſcuratae in o. ſc ratione maxima	$= 17.\ 33.$ — —
et inde Quantitatem Eclipſis	$= 6$. digit. $26\frac{4}{5}$. min.
Tempus obſcurationis maximae viſae	$= 9^h.\ 58'.\ 45''$. t. ver.

Translato deinceps hoc ſchemate particulari ſic correcto ad ſchema generale, quod proiectionem telluris exhibere ſolet, deprehendi

Latitudinem centri Lunae veram ſeu ex centro terrae viſam tempore ☌ ☉ ☽ verae ſeu Nouilunii veri eſſe debere	$= 0°.\ 43'.\ 15''$. bor.

et Tempus Nouilunii veri ſeu ex centro terrae viſi in Ecliptica

ex Immerſione medii mac. *a*	=	$10^h. 16'. 12''$. t. vero
Emerſ. med. mac. *a*	=	16. 36.
Immerſ. med. mac. *d*	=	16. 21.
Emerſ. med. mac. *d*	=	16. 20.
obſeruato fine Eclipſis	=	17. 6.
vnde Medium	=	$10^h. 16'. 31''$.

RESIDVVM OBSERVATIONVM
Lipſiae an. 1750. ſt. nou. habitarum.

Cum obſeruationes Eclipſis Lunae totalis d. 19. Iunii an. 1750. inclytae Academiae iam exhibitae, reſpondentes nonnullas obtinuerim, expedit earum comparationem cum noſtra inſtituere, vt quorundam Meridianorum a Lipſienſi diſtantia inde innoteſcat. Eandem ſcilicet Eclipſin obſeruarunt Veronae *Io. Franciſcus Seguierius*, Tubo catadioptrico, Caſſellis *Griſchowius* nunc in Academia Imperiali Profeſſor Aſtronomiae, Berolini *Kieſius*, Göttingae *Segnerus* Teleſcopio Gregoriano. En obſeruationum comparationem:

	Lipſiae	Veron.	Diff. Merid. Lipſ. et Veron.
Grimaldus incipit emergere	$10^h. 38'. 38''$	$10^h. 33'. 34''$	$0^h. 5'. 4''$
Tycho - - - - -	55. 40.	49. 38.	6. 2.
Tycho totus emerſus -	57. 45.	52. 18.	5. 27.
Copernicus incipit emergere	11. 0. 28.	55. 23.	5. 5.
Manilius - - -	17. 12.	11. 12. 24.	4. 48.
Mare Criſium - - -	34. 36.	29. 10.	5. 26.
Finis Eclipſis - - -	40. 16.	36. 40.	3. 36.
			Med. $0^h. 5'. 4''$

Veronae

Verona occidentalior eſt quam Lipſia.

Tycho totus emerſit Caſſellis $10^h. 48'. 26''$, et finis ibi contigit $11^h. 29'. 16''$. Ex priori obſeruatione eruitur Meridianorum Lipſienſis et Caſſelenſis differentia $= 9'. 19''$; ex poſteriori $= 11'. 0''$. vnde media $= 10'. 10''$. qua Caſſilium occidentalius eſt quam Lipſia.

Finis Berolini accidit $11^h. 46' 0''$. quare diſtantia meridiani Berolinenſis a Lipſienſi verſus orientem $= 5'. 44''$. Per medium Tychonis vmbra in emerſione tranſiit Lipſiae $10^h. 56'. 40''$. Göttingae $10^h. 47'. 48''$. Diſtat igitur meridianus Göttingenſis a Lipſienſi in occidentem $8'. 52''$.

D. 12 Auguſt.

Occultatio θ Serpentarii a Luna

Fixam hanc 4tae vel 3tiae magnitud. Luna tranſeundo ad diſtantiam aliquot minutorum a ſuo centro boream verſus relinquebat (ſitu erecto). Copioſae nubes coelum occupabant, vt Lunam non niſi per interualla in hiatibus nubium conſtitutam contemplari liceret. Inde factum eſt, vt obſeruatio ingreſſus ad marginem Lunae obſcurum in irritum ceciderit; feliciter autem Luna in conſpectum prodierit, cum iam ſtella, facto egreſſu ad limbum Lunae lucidum, ſua diametro ab hoc limbo diſtaret. Aeſtimaui inde emerſionem ipſam contingere debuisse 8.^{h} 55.$'$ 53.$''$ temp. veri, et persuasum habeo, in hoc aestimio errorem 3 vel 4 secundorum temporis locum habere non posse. Hor. 8 56$'$ 25$''$ distantiam stellae a proximo Lunae limbo diametro maculae lunaris Manilii, et 8^h. 57$'$. 53$''$. diametro Copernici aequalem iudicabam. Obseruatio peracta est Telescopio Gregoriano sub apparatu, quo istud obiectum secundum diametrum 52. vicibus auget; correctio autem temporis ex altitudinibus Solis respondentibus diebus proxime sequentibus suscepta.

Obseruationes variae

Frigus maximum hoc anno incidit in d. 4. Februar; quo hora 8. matut. Thermometrum, Tomo I. Nouor. Commentar. p. 469 descriptum, in aëre libero 166.$\frac{2}{3}$ grad. indicabat.

Versus finem mensis Iulii ingentem experti sumus aestum per plures dies a 20. Iulii scilicet vsque ad initium Augusti durantem. Thermometrum memoratum aëri libero in loco vmbroso versus boream expositum singulis diebus calorem maximum patefecit:

			Lipsiae post merid.	grad.		Berolini post merid. inter hor. 3. et 4.
Iulii	22.	-	hor. 4.	103 $\frac{1}{8}$	-	106 $\frac{6}{10}$
	25.	-	3 $\frac{3}{4}$.	106 $\frac{5}{8}$	-	109 $\frac{2}{10}$
	27.	-	4.	103 $\frac{1}{4}$	-	106 $\frac{2}{10}$

28.

	28.	-	4	$103\frac{5}{8}$	-	$107\frac{0}{10}$
	31.	-	$1\frac{1}{4}$	$107\frac{3}{8}$	-	
Aug.	1.	-	$4\frac{1}{2}$	$105\frac{1}{2}$	-	-

Obſeruationes Berolinenſes debentur Cel. *Grifchowi* thermometro ſcalae ſimilis cum meo inſtitutae.

Viſae quoque ſunt Aurorae boreales.

d. 3. Februar. ſtatim poſt hor. 6. veſpertinam ingens eiusmodi aurora comparebat, ſiquidem tum Arcta-pelioten tum Borolybicum verſus ingentes materiae tractus inſtar nubium flammei coloris conſpicui erant, qui ſucceſſiue radiorum vel columnarum formas induentes vltra Zenith excurrebant, ab hoc tamen auſtrum verſus declinabant. Inclinati ſcilicet erant radii verſus horizontem iique etiam, quoad longitudinem, non continui (vt alias fieri ſolet) ſed interrupti cernebantur. Poſt horam nubes rutilae diſparebant; coelum autem, quod antea colorem cinereum, adſpectum tamen ſtellarum non impedientem, prae ſe ferebat, ſerenam faciem nunc nanciſcebatur, interea dum ingens claritas ad horizontem boreum in conſpectum prodibat. Aurora haec, teſtibus nouellis publicis, Romae quoque viſa eſt.

d 26 Iulii veſperi poſt hor. 10. coelo ſereno, cum aeſtus ingens in atmoſphera adhuc regnaret, columnae aurorae borealis apparebant.

d. 22. Septembr. vesperi hora 11. ingens aurora borealis conspicua erat, columnis et tractibus materiae coloratae distincta.

Declinationem acus magneticae, cuius longitudo erat 2. digit. 3. lin. mensurae Parisiensis, diebus 17. et 20. Augusti reiteratis vicibus exploraui, eamque 13. grad. occidentem versus deprehendi.

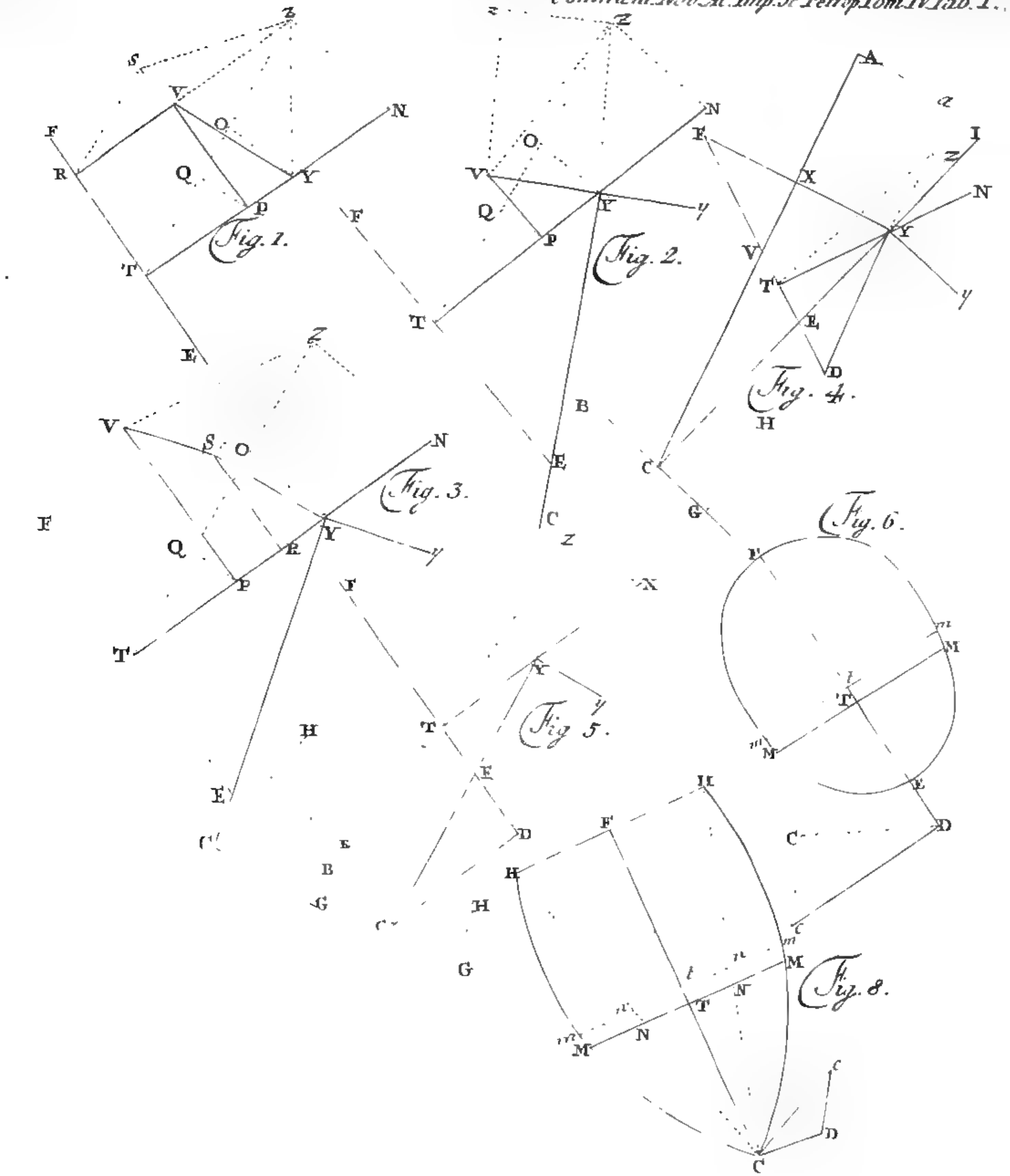


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 8.

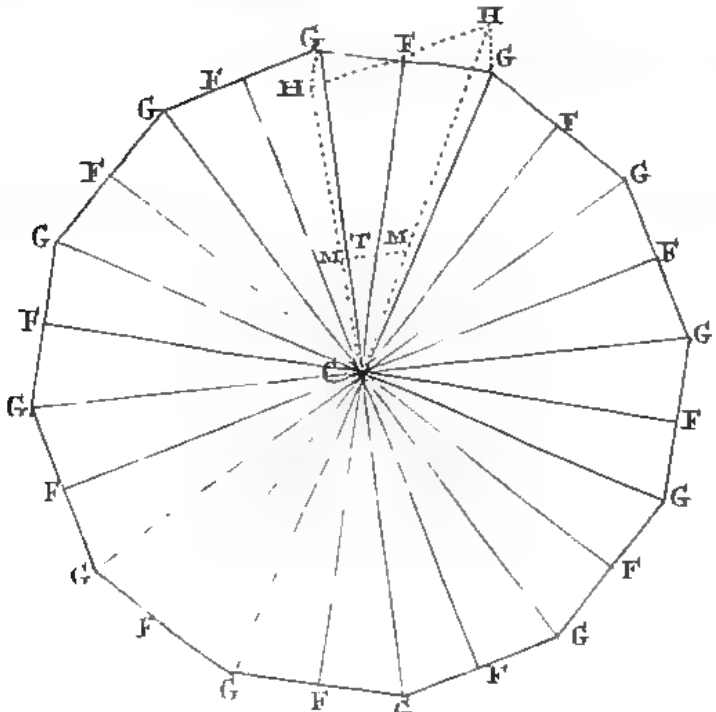


Fig. 1.

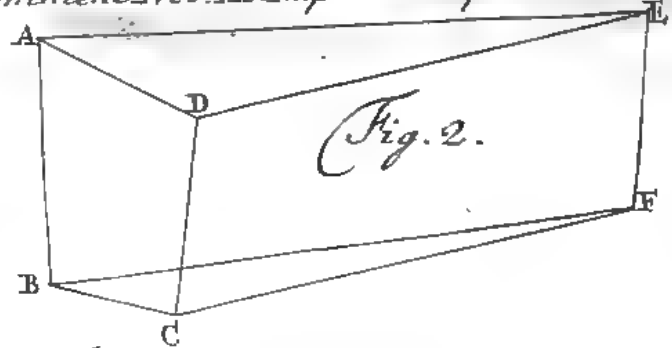


Fig. 2.

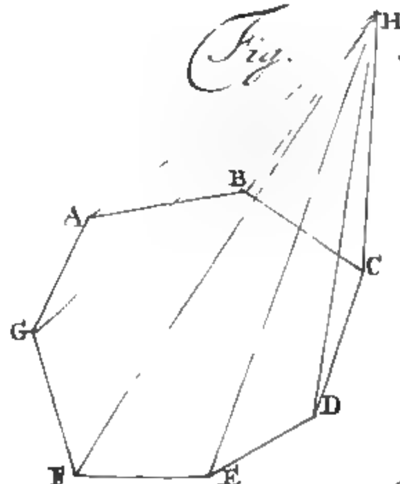


Fig. 3.

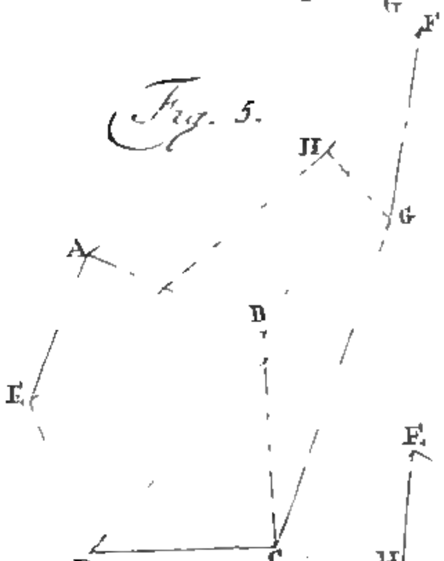


Fig. 5.

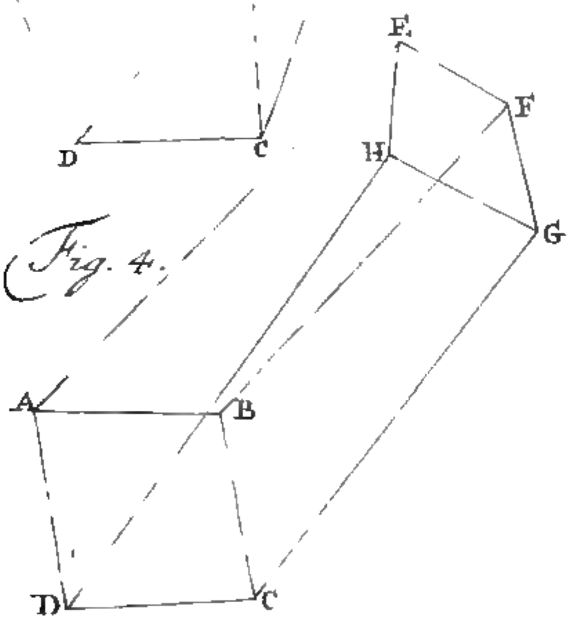


Fig. 4.

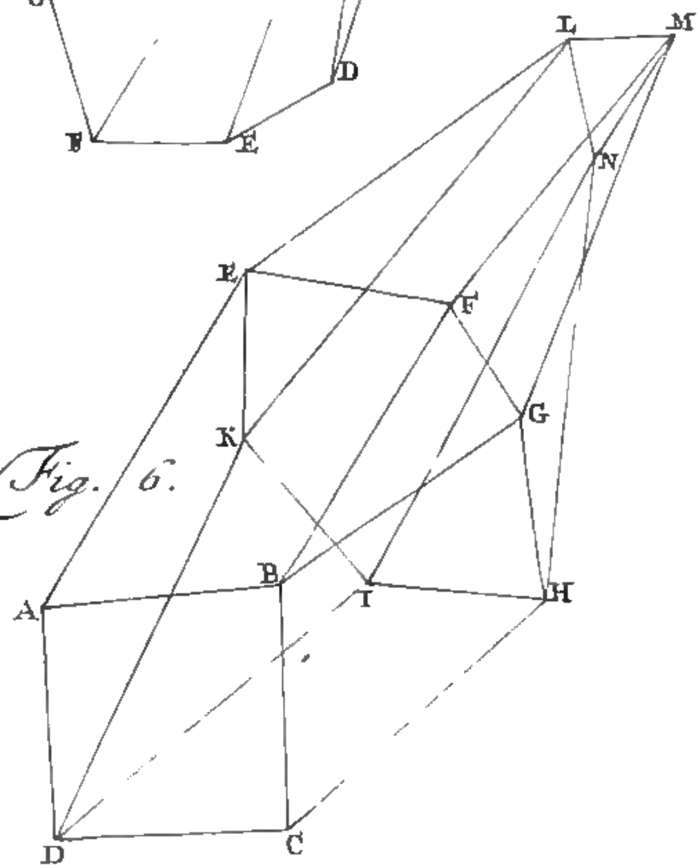


Fig. 6.

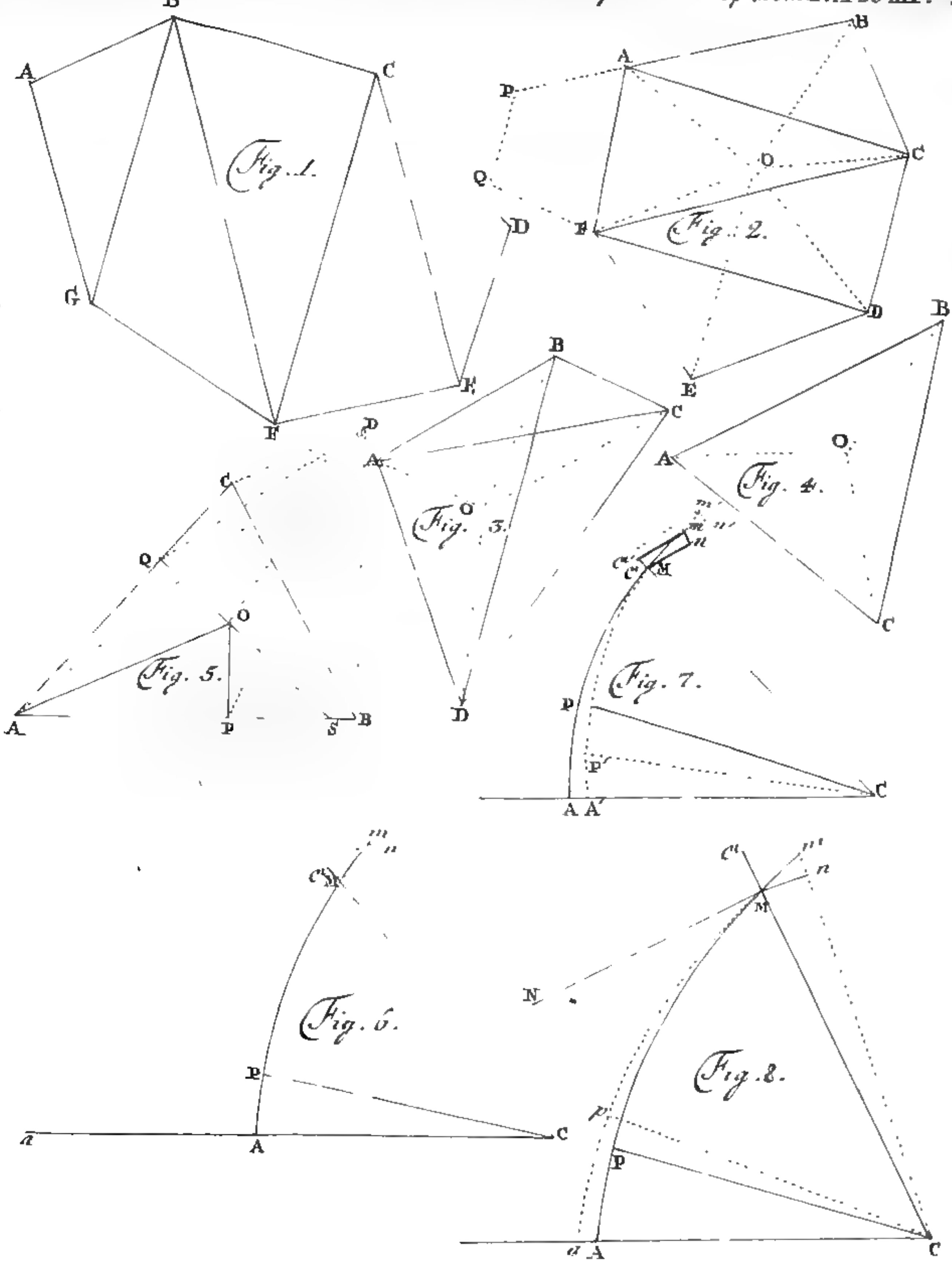


Fig. 1.
A B C D E F G
Fig. 2.
A B C D E F O P Q
Fig. 3.
A B C D O
Fig. 4.
A B C O
Fig. 5.
A C O P Q S B
Fig. 6.
a A C P M m n
Fig. 7.
A A′ C P P′ M m n
Fig. 8.
a A C P p M N m n

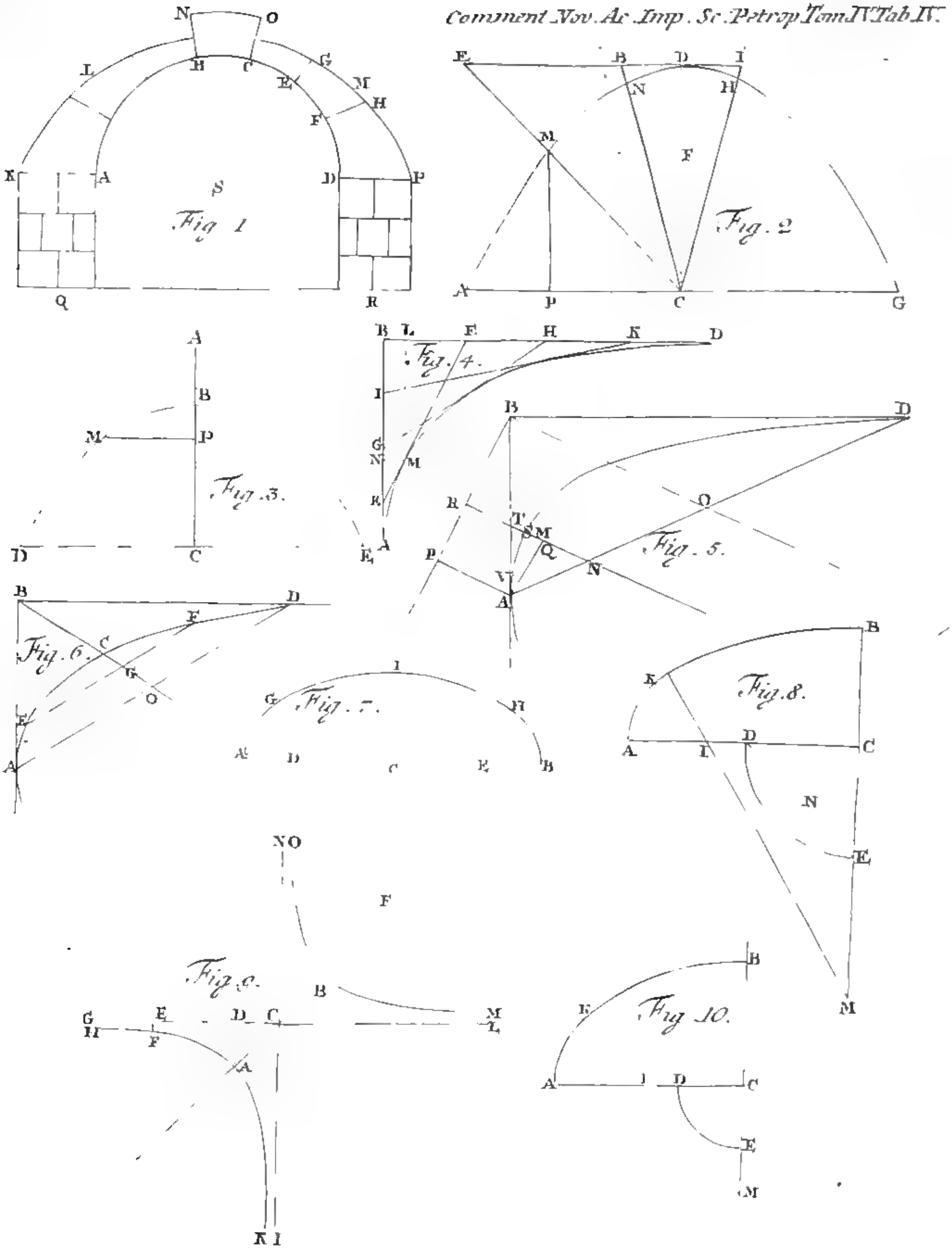


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

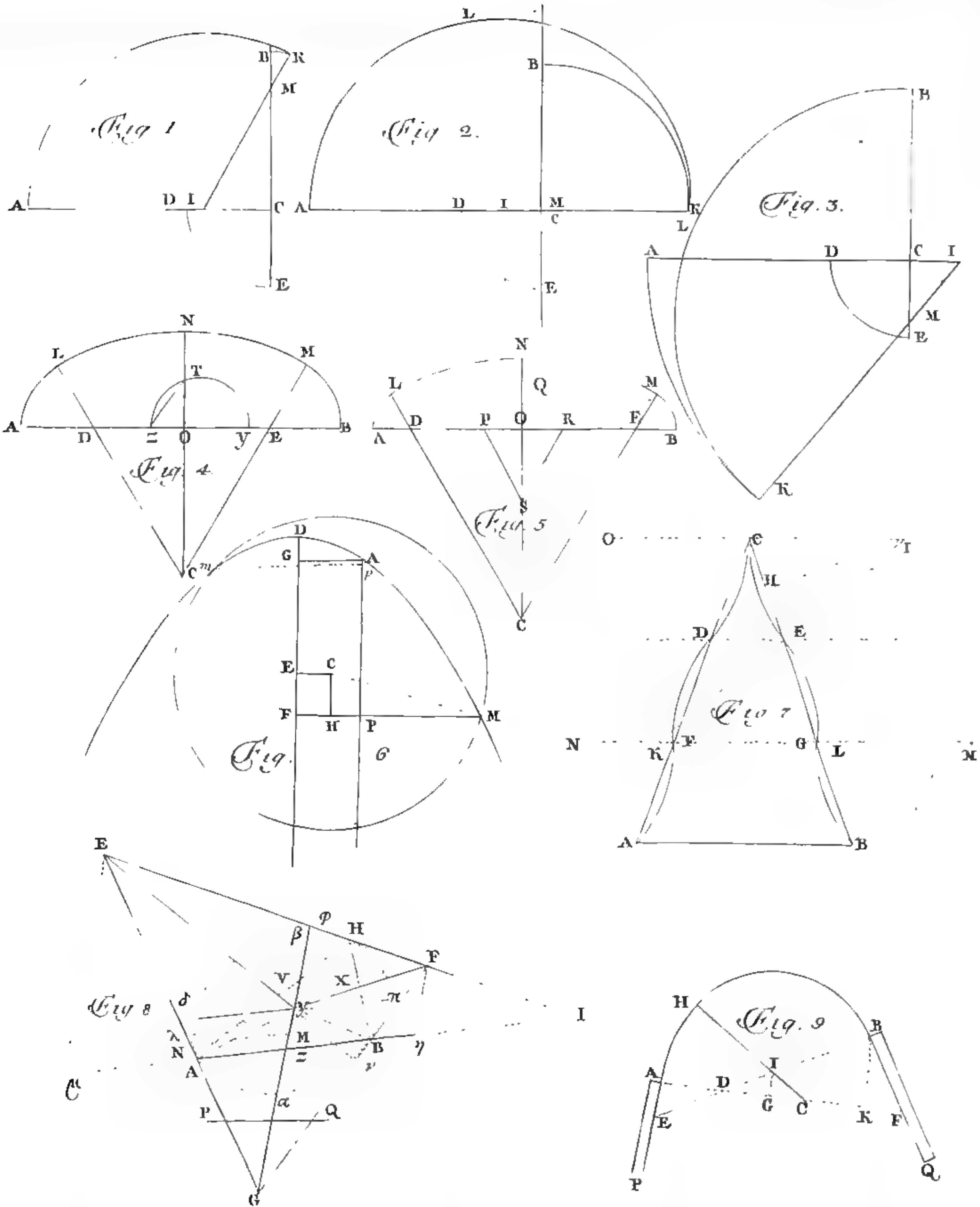


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9

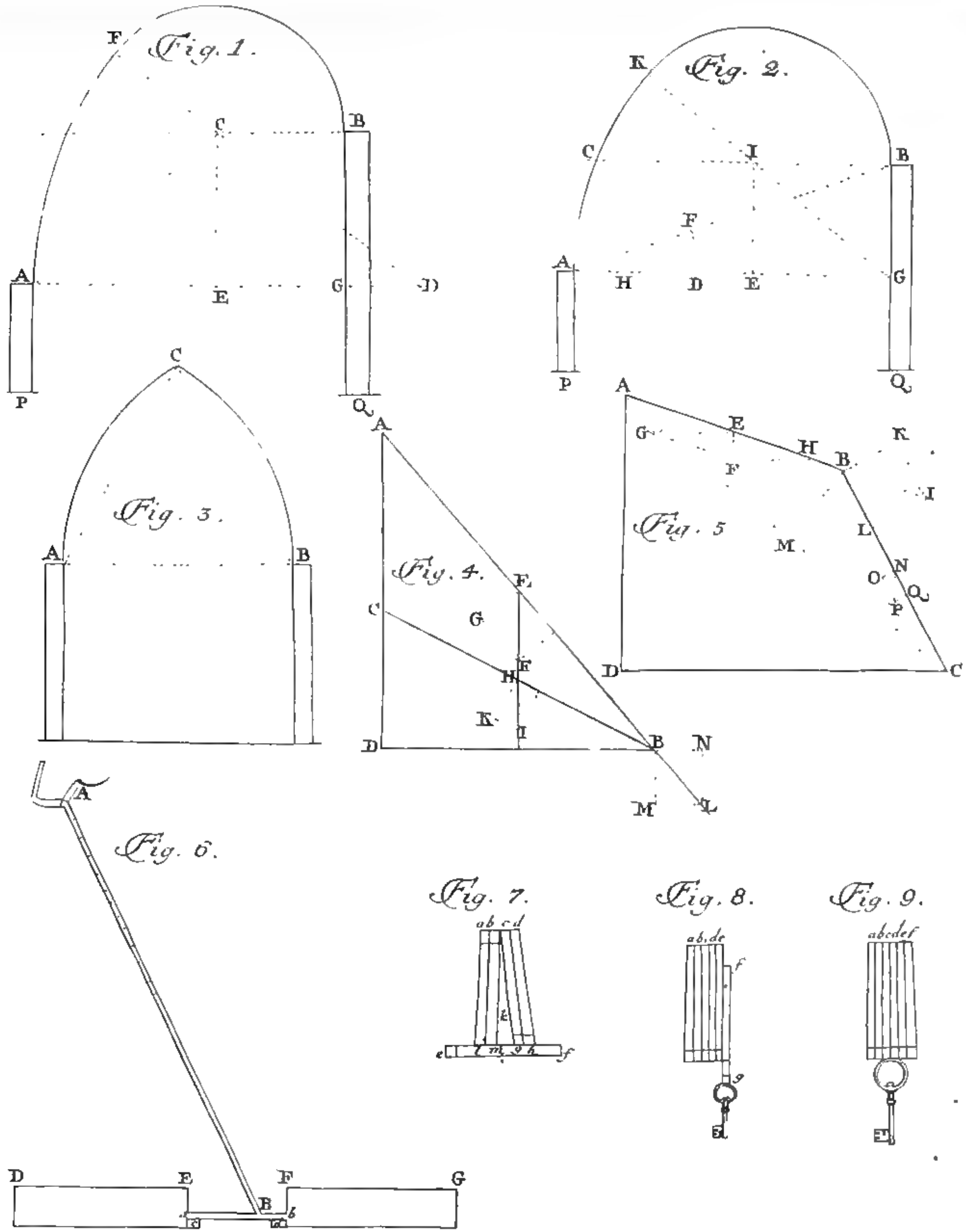


Fig. 1.
F
C
B
A
E
G
D
P
Q
Fig. 2.
K
I
C
B
F
A
H
D
E
G
P
Q
Fig. 3.
C
A
B
Fig. 4.
A
E
C
G
F
H
K
I
D
B
N
M
L
Fig. 5.
A
E
K
G
H
B
F
I
L
M
N
O
Q
P
D
C
Fig. 6.
A
D
E
F
G
B
a
b
Fig. 7.
ab cd
k
e
l m g h
f
Fig. 8.
ab, de
f
g
Fig. 9.
abcdef

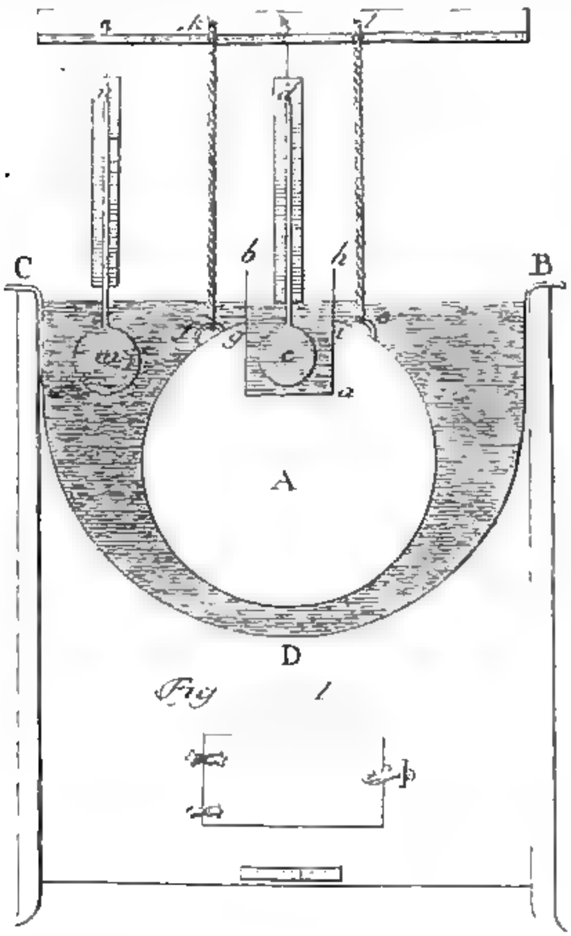


Fig 1

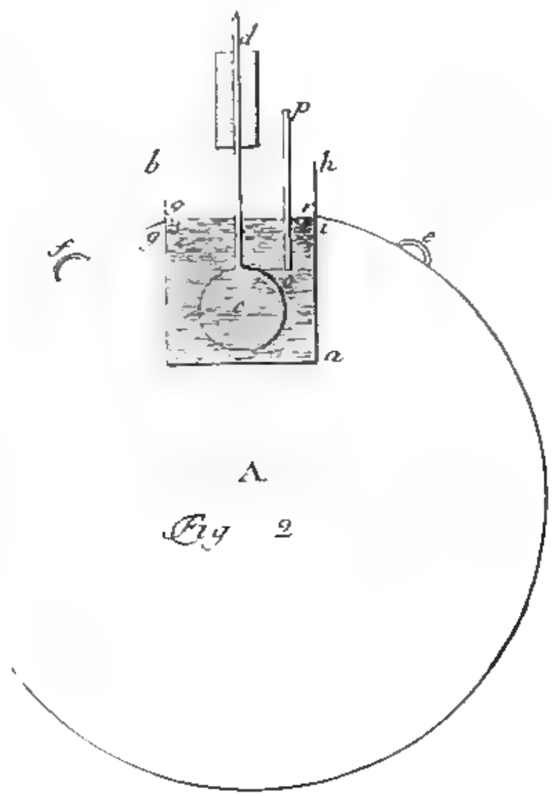


Fig 2

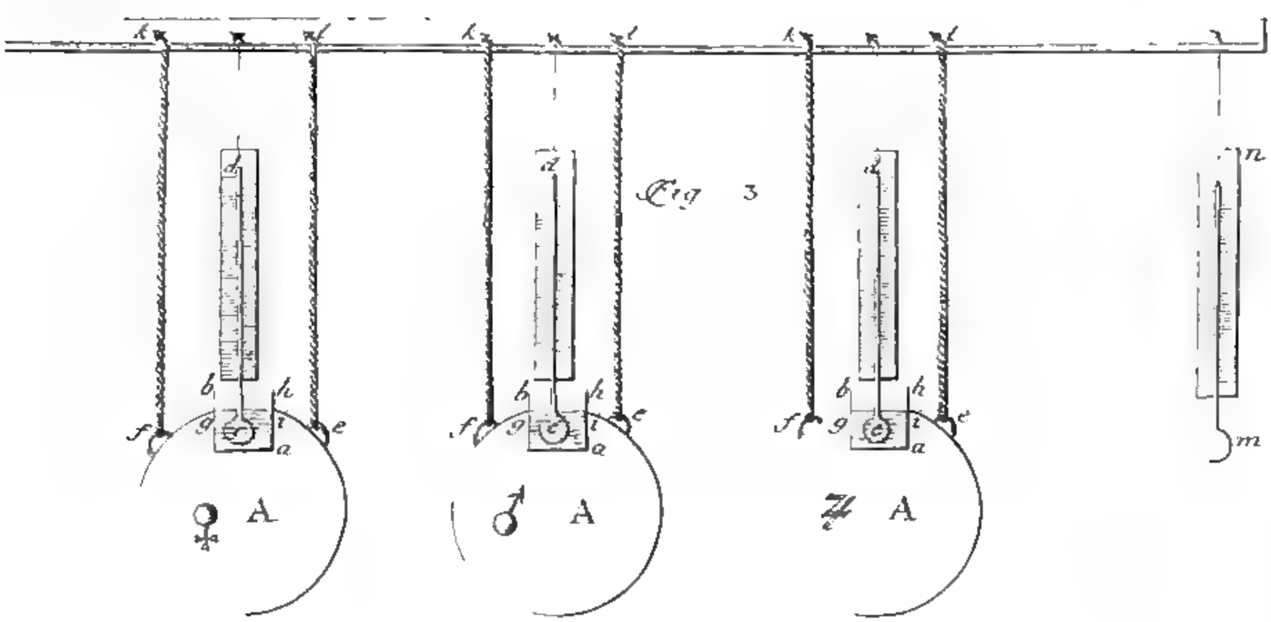


Fig 3

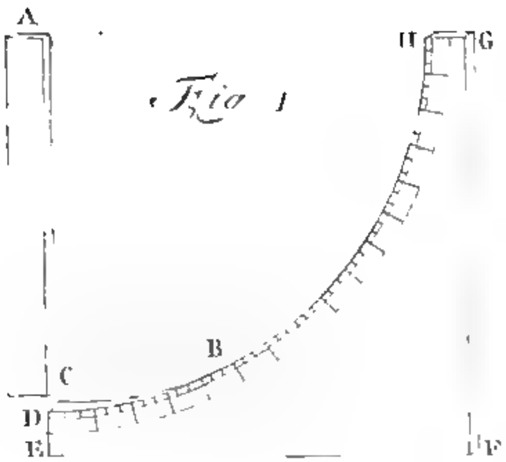


Fig I

Fig. II

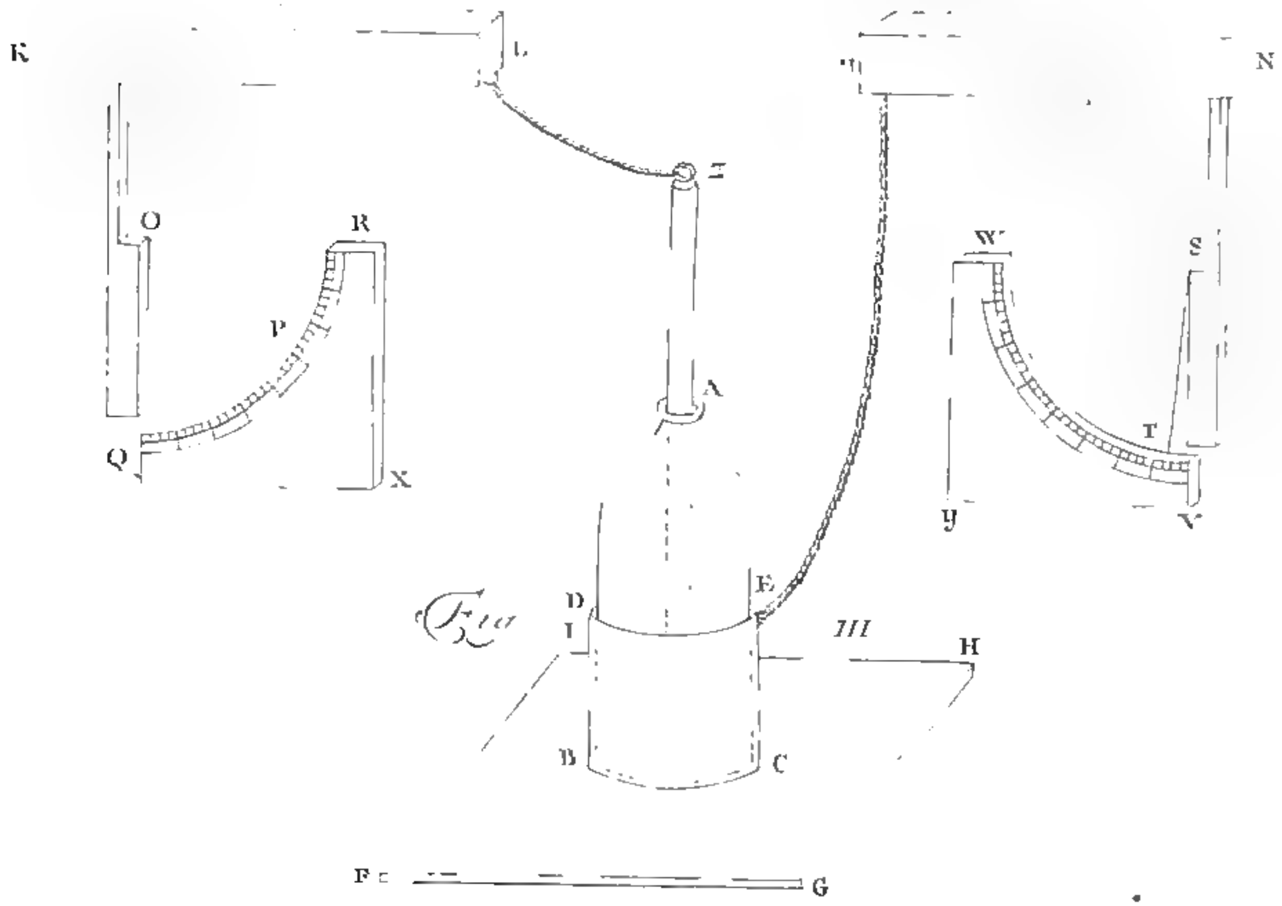


Fig III

Fig. 1

Ad murem aquaticum exoticum, moschum redolentem.

a Cauda amputata

b Pes posterior dextri lateris amputatus.

c Locus, ubi penis corpus ingreditur.

d Anus

e Locus, quo penis notabiliter turgescit & incurvatur

ff Testiculi.

gg Folliculi

h Vesica urinaria.

i Appendicula folliculi sinistri lateris.

Rupicapra cornubus arietinis

Fig. 2

Mas

Fig. 3

Foemina

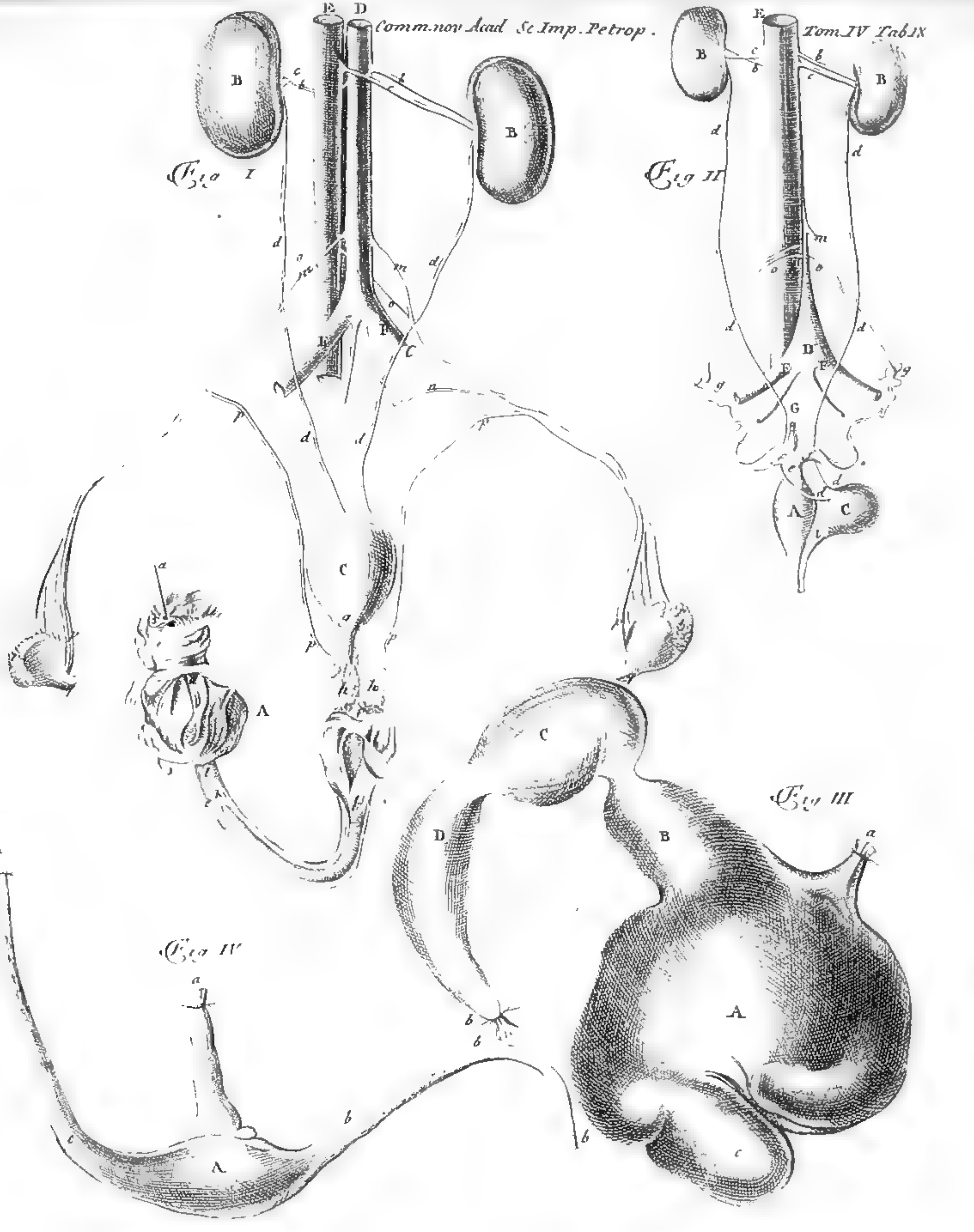


Fig I
Fig II
Fig III
Fig IV

Fig. 1.

Fig. 2.

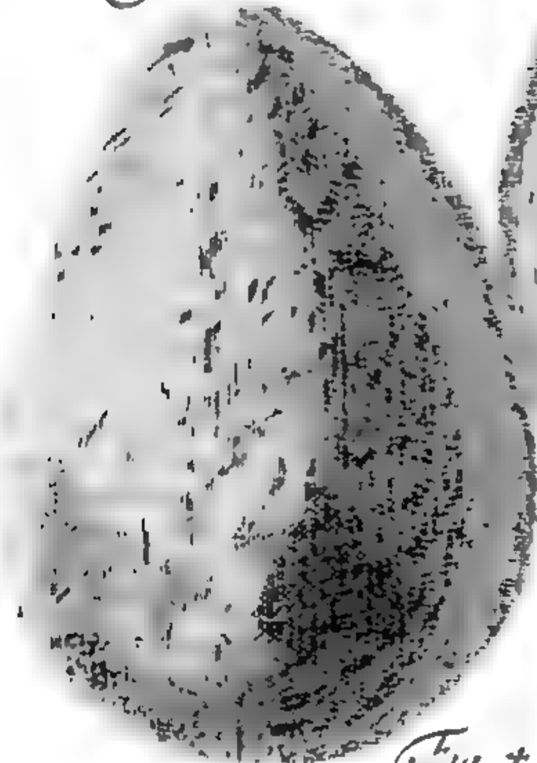


Fig. 3.

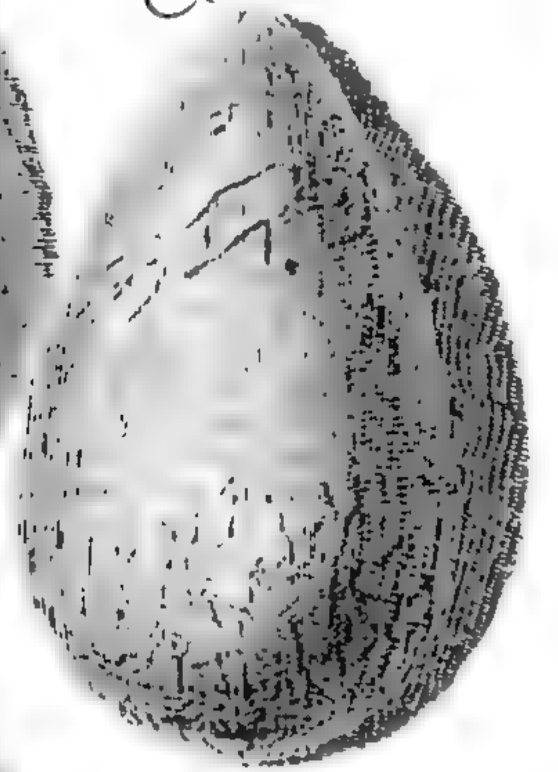


Fig. 4.

Fig. 5.

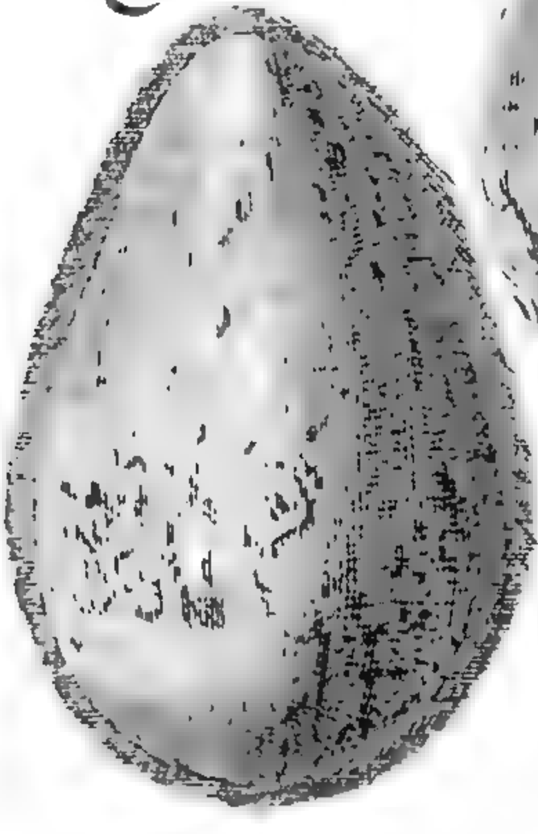


Fig. 6.

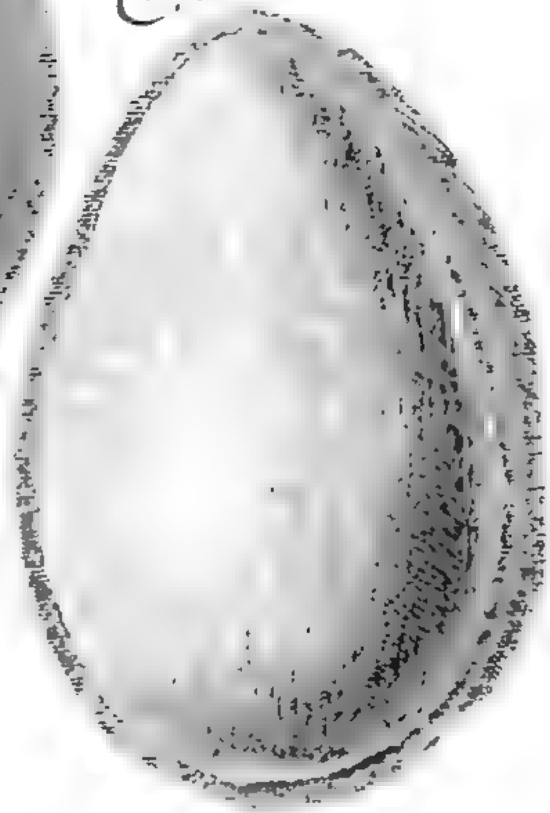


Fig 7.

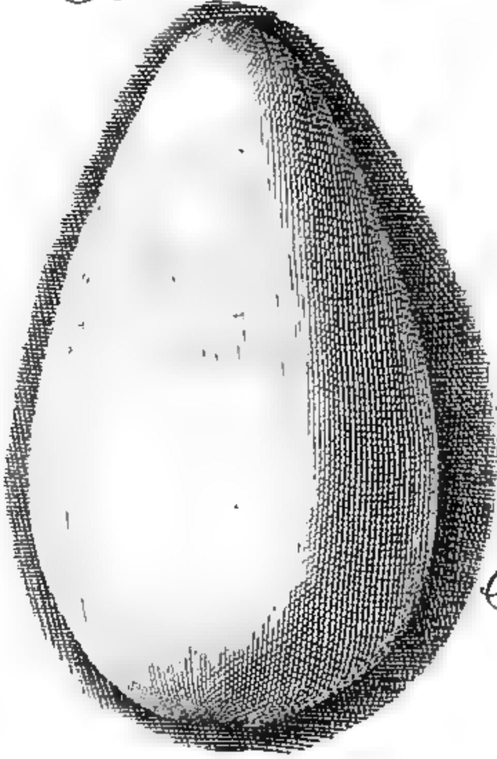


Fig. 8.

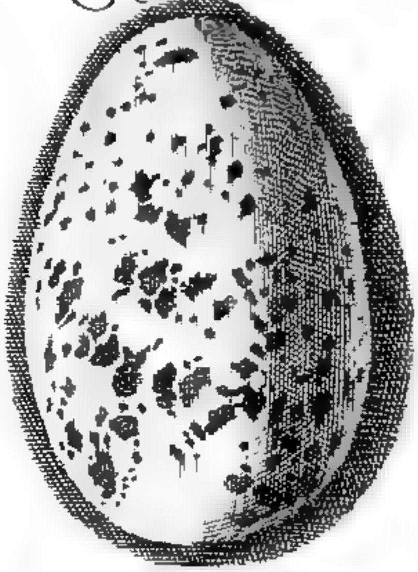


Fig 9

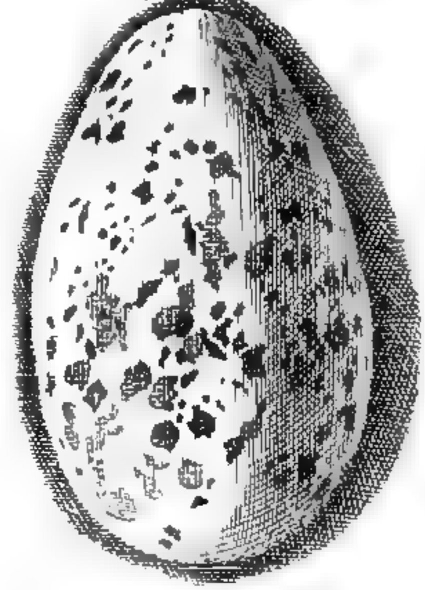


Fig. 11.

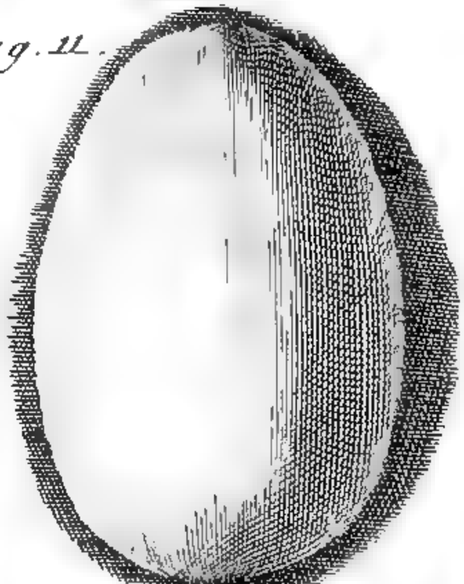


Fig 12

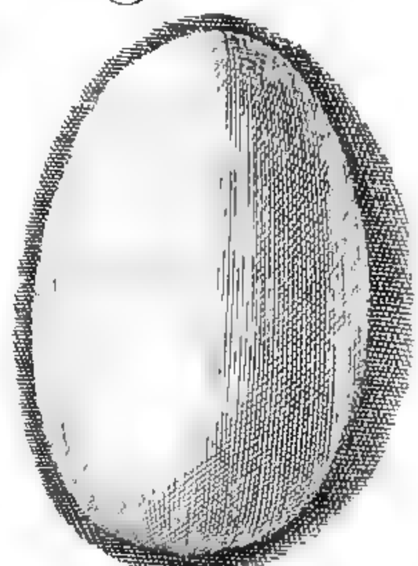


Fig 10

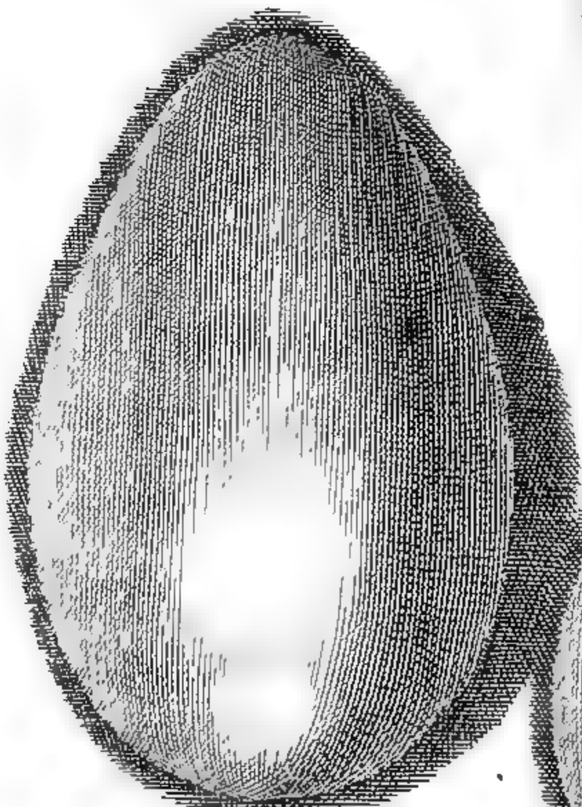


Fig. 13

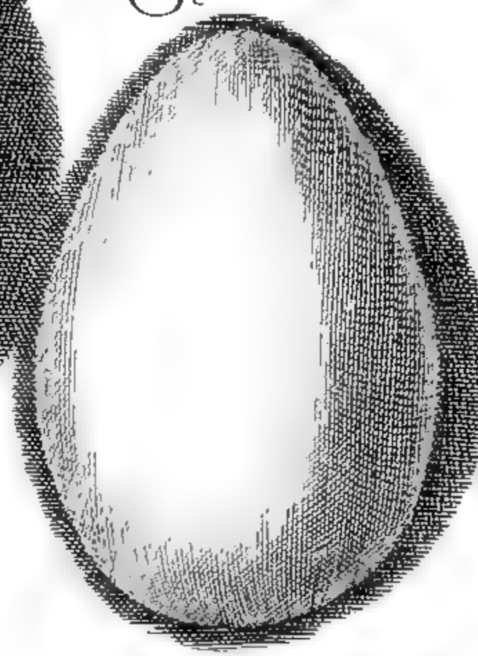


Fig. 14.

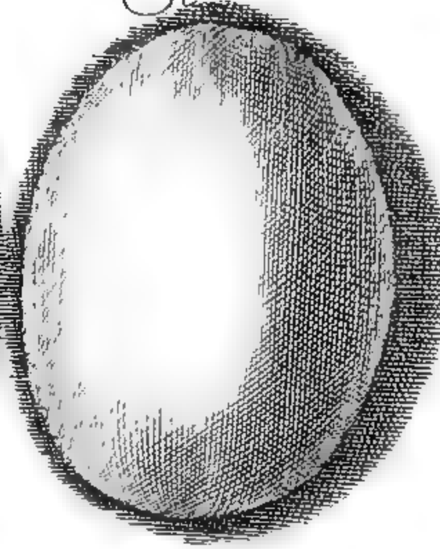


Fig. 15.

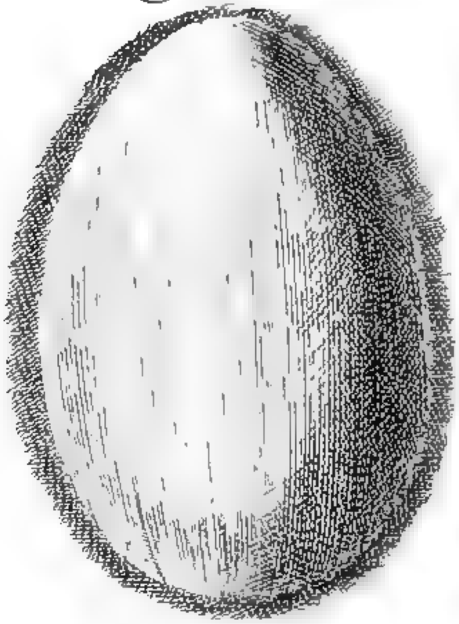


Fig. 16.

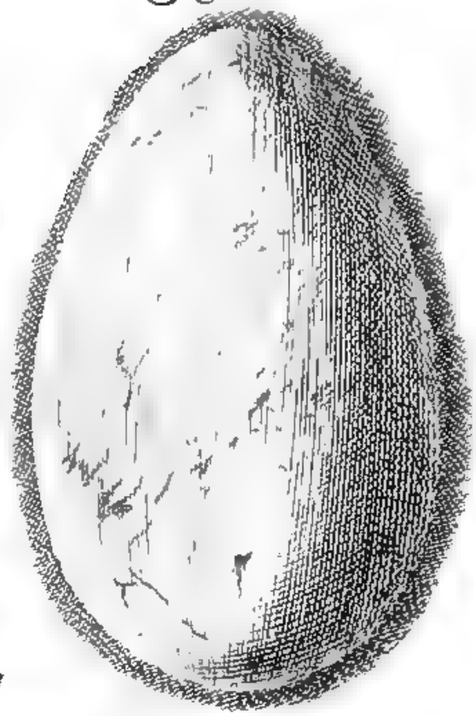


Fig. 17

Fig 18

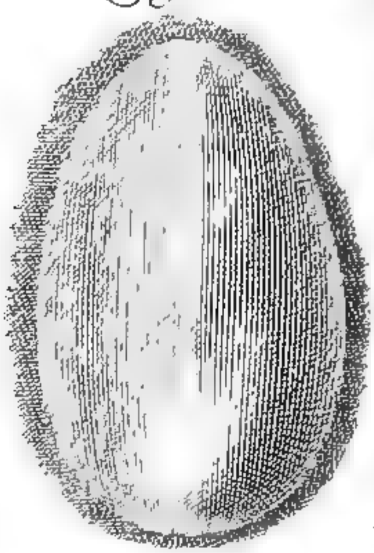


Fig 19.

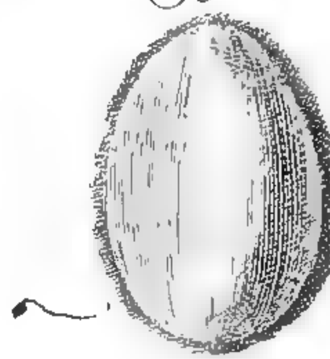


Fig 20

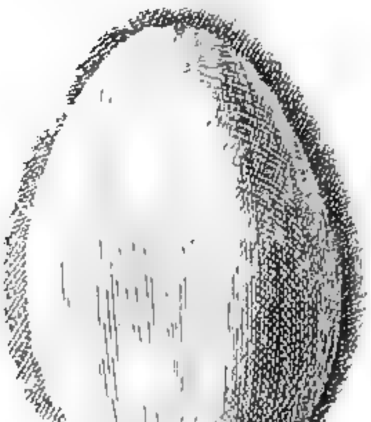


Fig 21.

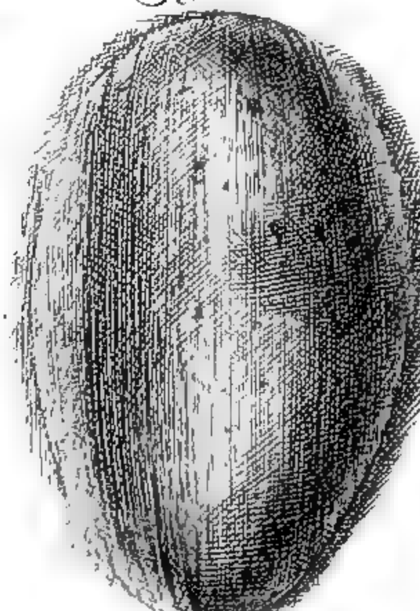


Fig 22

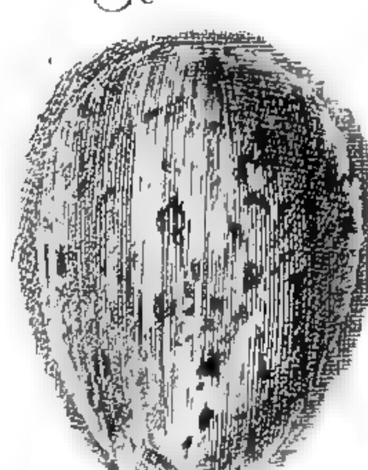


Fig: 23.

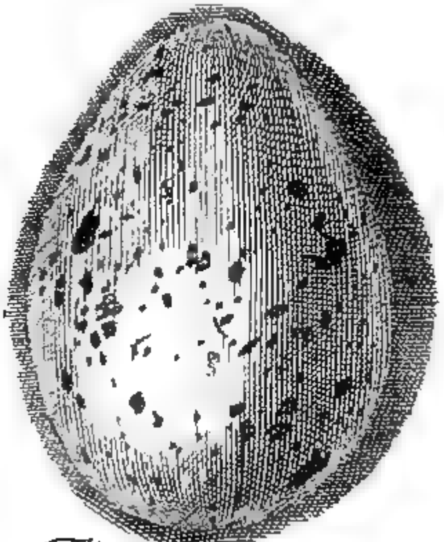


Fig: 24.

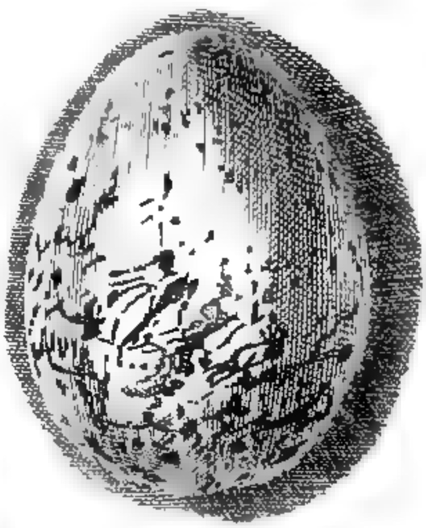


Fig: 27.

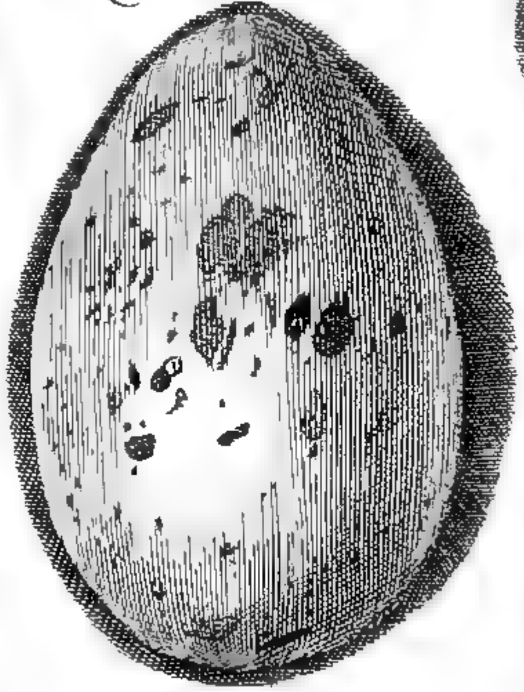


Fig: 25.

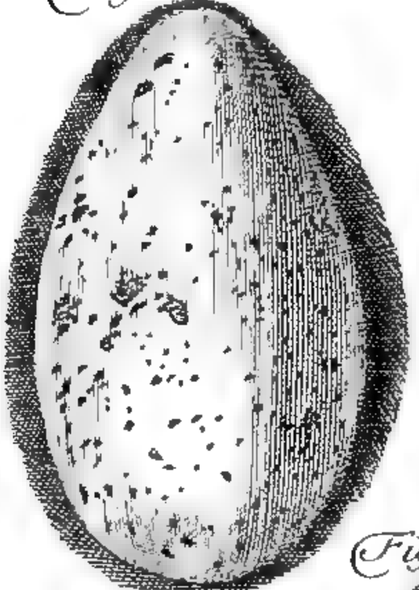


Fig: 26.

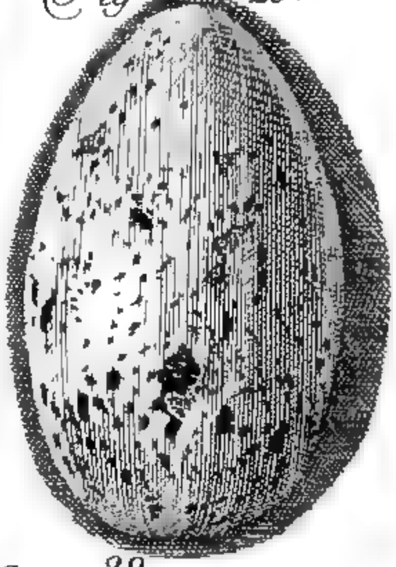


Fig 28.

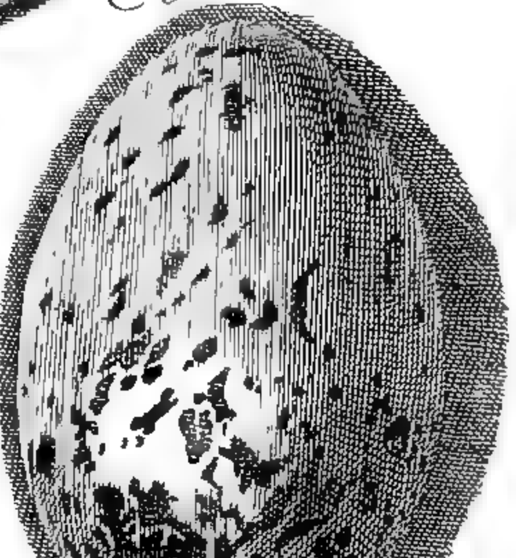
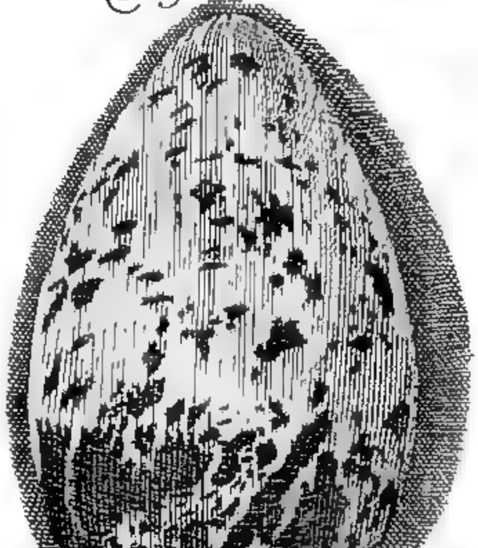


Fig. 29.



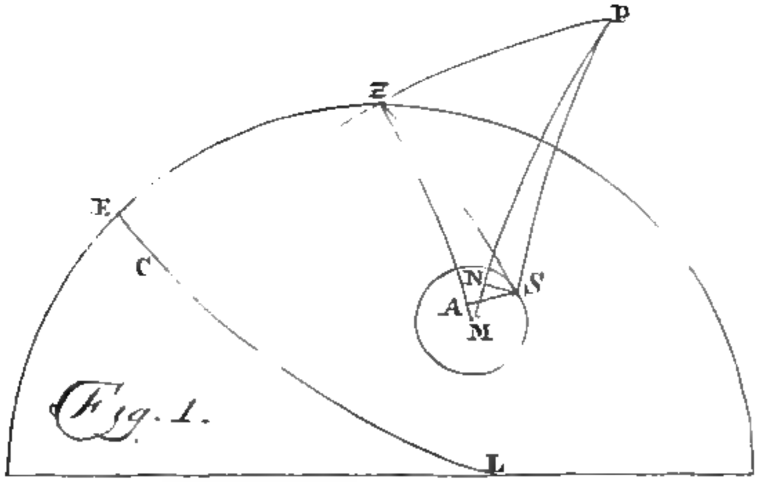


Fig. 1.

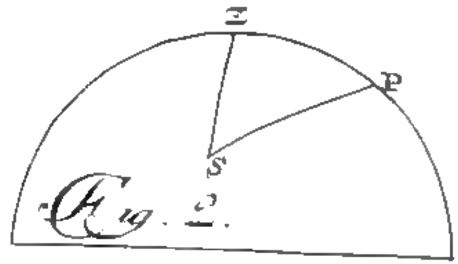
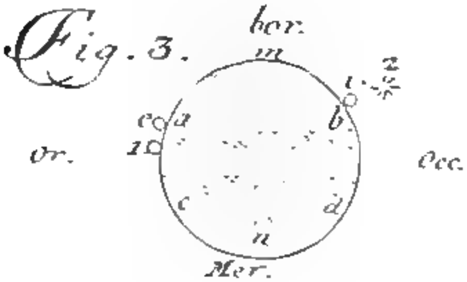


Fig. 2.

Fig. 3.



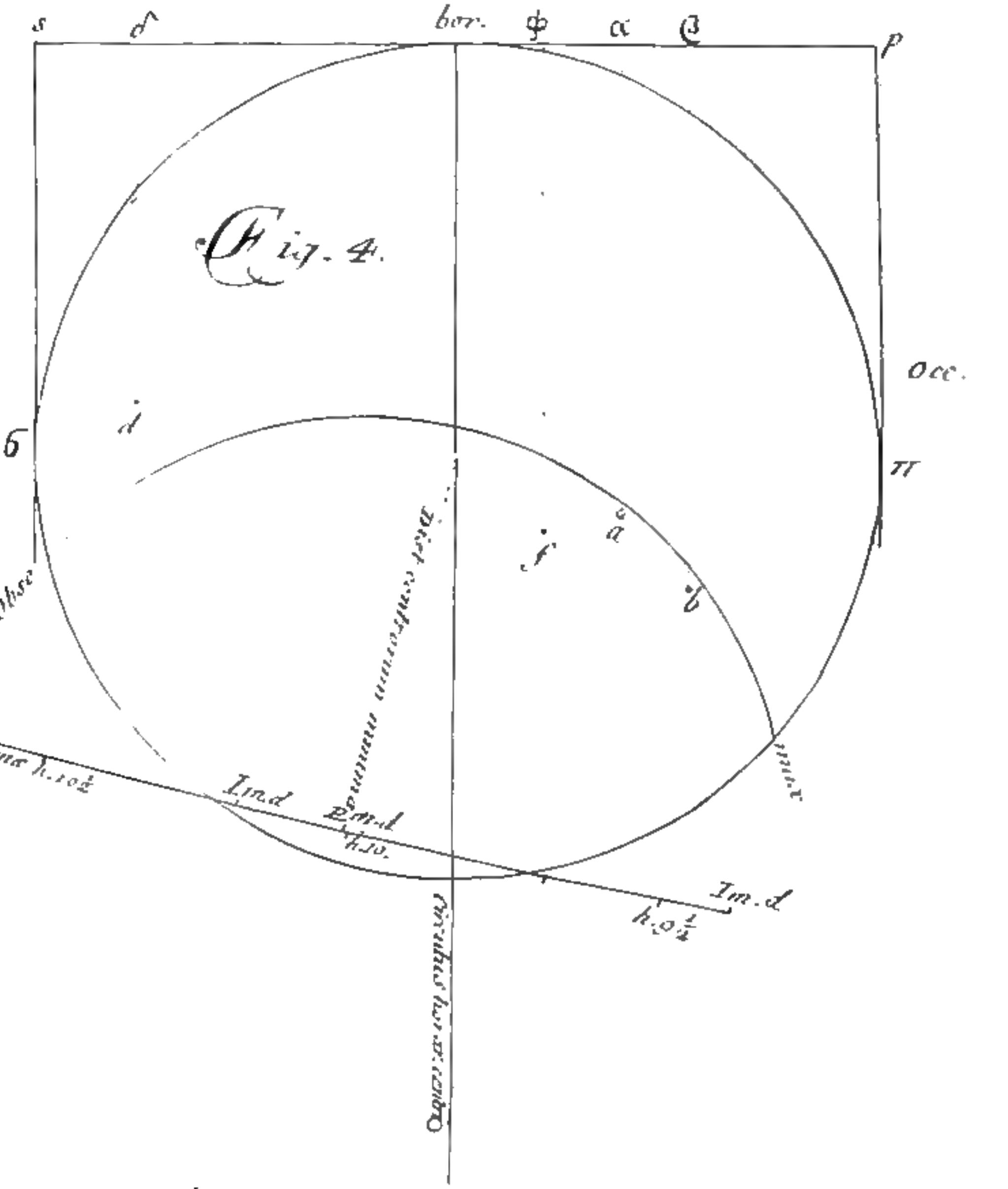


Fig. 4.