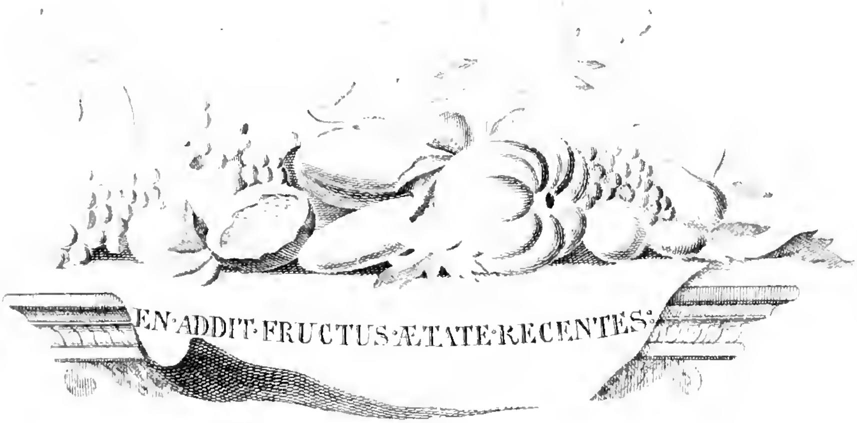
NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. III.

ad Annum MDCCL. et MDCCLI.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLIII.

Imprimatur

Cyrillus Comes de Rasumowsky.

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS III.

* * * * * * * * *

Cum *Academia Scientiarum Imperialis*, Lector candide, *Nouorum Commentariorum Tomum* hunc *tertium* exhibere curauit, nihil eſt, quod reſtat, quam vt breuibus Te moneamus, ſecundum ſtatuta eſſe decretum, claſſes, quibus *Academia* conſtat, Tibi, vt in praecedentibus tomis ſunt diſpoſitae, iterum tradi. *Mathematica* itaque claſſis decem, *Phyſico - Mathematica* quinque, *Phyſica* duas, et *Aſtronomica* quatuor tantum ſiſtit diſſertationes. Praeterea autem pro more ac inſtituto breuis diſſertationum additur conſpectus. Ceterum Tuum, Lector beneuole, erit iudicare. Vale.

MATHEMATICA.

METHODVS AEQVATIONES DIFFERENTIALES ALTIORVM GRADVVM INTEGRANDI VLTERIVS PROMOTA AVCTORE L. EVLERO.

Haec Dissertatio sine dubio insigne continet calculi integralis augmentum; cum in ea tradatur methodus innumerabiles aequationes altiorum graduum ita expedite integrandi, vt per vnam operationem statim aequatio integralis obtineatur, neque opus sit, tot integrationes successiue instituere, quot est gradus aequatio differentialis proposita, cuiusmodi operationes aliae methodi adhuc cognitae requirant. Tradiderat autem Auctor *in VII. Volumine Miscell: Berolinensium* iam specimen huius methodi, vbi docuerat vna operatione integrale huius aequationis inuenire:

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \text{etc.}$$

vbi elementum dx sumtum est constans, litterae autem A, B, C, D etc. coefficientes denotant quoscunque constantes: nunc autem hanc methodum extendit ad hanc formam multo latius patentem:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \text{etc.}$$

vbi littera X denotat quantitatem quamcunque ex variabili x et constantibus vtcunque conflatam. Omnino hic notatu est dignum, quod operatio semper succedat, ad quemcunque etiam gradum differentialium aequatio ascendat, ne gradu quidem infinitesimo excluso, cuius eximia exempla Auctor in sequentibus exhibet. In hac autem Dissertatione primum casum admodum simplicem hac aequatione

quatione $d^3 y = x\,dx^3$ contentum methodo vulgari persequitur, ostendens quam prolixum ac taediosum calculum eius solutio requirat, quippe quo tandem ad aequationem quidem differentialem primi ordinis perducitur, cuius autem integratio grauibus adhuc premitur difficultatibus. Inde tamen non leuibus in subsidium vocatis artificiis elicit integrale quidem, sed tantum particulare, ex quo denique per nouam operationem integrale completum colligit. Tum vero duas praeterea integrationes instituere oportet, antequam solutio ad finem sit perducta. Ex quo facilius iudicium de praestantia nouae methodi ferre licebit, cuius beneficio sine tam multis et molestis ambagibus vna eaque facillima operatione non solum haec specialis aequatio, sed generalis exhibita ita perfecte resoluitur, vt statim aequatio integralis completa reperiatur. Operatio autem illa reducitur ad resolutionem aequationis Algebraicae, cuius forma ita ex proposita aequatione differentiali deriuatur, vt sit

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$$

atque nunc totum negotium in resolutione huius aequationis Algebraicae continetur, quod quidem cum de integratione est quaestio merito pro facillimo habetur. Huius scilicet aequationis cunctae quaerendae sunt radices, earumque quaelibet suppeditat ope regulae simplicissimae portionem integralis quaesiti, ita vt omnibus radicibus hoc modo pertractatis vniuersum integrale completum obtineatur. Difficultate quidem haec methodus impediri videtur iis casibus, quibus illa aequatio Algebraica radices habet vel aequales vel impossibiles; sed et huic incommodo feliciter occurrit Auctor, dum pro his casibus peculiares praebet

praebet regulas, quarum ope tota operatio aeque expedite perfici poteſt.

Si quis quaerat, quemnam vſum huiusmodi ſpeculationes, quae fortaſſe plerisque nimis ſteriles videantur, habere queant, ei audacter reſpondere licet, nullum fere extare Problema Phyſicum, vel ad vitam communem pertinens, cuius ſolutio adaequata non plerumque ad aequationem differentialem altioris cuiusdam ordinis perducatur; ex quo facile intelligere licet, quam parum tales ſpeculationes contemni mereantur.

DE SERIERVM DETERMINATIONE SEV NOVA METHODVS INVENIENDI TERMINOS GENERALES SERIERVM AVCTORE *L. EVLERO.*

Quanti ſit vſus doctrina ſerierum per vniuerſam Analyſin ſubllimiorem, eiusque imprimis applicationem ad problemata praxi accommodata, nemo in hoc ſtudiorum genere vel leuiter verſatus ignorat; vnde quae inueſtigationes circa naturam ſerierum penitius perſcrutandam inſtitui ſolent, minime vſu carere ſunt cenſendae. In hac autem Diſſertatione Auctor non parum mirabilia phaenomena circa ſeries aperit; primum ſcilicet oſtendit, ſeriem nondum pro determinata eſſe habendam, etiamſi omnes eius termini ſint dati, qui nimirum indicibus integris reſpondeant: cum innumerabiles diuerſae ſeries inueniri queant, quibus iidem termini conueniant. Perinde quippe ſerierum ratio eſt comparata atque linearum curuarum, quatenus per data puncta ſunt ducendae, etiamſi enim punctorum numerus ſit infinitus, nemo tamen Geometra ignorat, infinita exhiberi poſſe genera curuarum; quae

quae omnes per eadem puncta transeant. Simili modo quamuis infiniti termini seriei sint dati, inde tamen ipsa series non determinatur, neque vera eius natura intelligitur; tum autem demum naturam seriei cognoscimus, quando non solum omnes terminos, qui indicibus integris conueniunt, sed etiam eos, qui indicibus fractis quibuscunque respondent assignare valemus. Talem autem perfectam cognitionem continet terminus seriei, qui vocari solet generalis, quippe quo generaliter designatur terminus cuicunque indici indefinito respondens; ita vt cognito demum termino generali ipsa seriei natura nobis plene perspecta esse sit censenda. Plerique alii modi, quibus vulgo series describi solent, eodem laborant defectu, vt iis series non perfecte determinentur; veluti si series numerorum ita definiatur, vt primus eius terminus vnitas, quilibet vero sequentium praecedentem vnitate superare dicatur, quis non crederet, seriem numerorum naturalium hoc modo perfecte determinari, ita, vt terminus quisque in genere indici suo aequalis statui queat? Seu vt terminus indici indefinito x respondens, ipse sit $= x$. Nihilo vero minus ab Auctore innumerabiles aliae formae termini generalis proferuntur, qui omnes praescriptis conditionibus aeque satisfaciant. Omnes scilicet hae series in hoc conueniunt, vt primus terminus sit 1, secundus 2, tertius 3, quartus 4, et ita porro, in genere vt quoties index x fuerit numerus integer, terminus respondens ipsi sit aequalis: in eo autem discrepabunt, quod ponendis pro x numeris fractis, termini respondentes inter se diffideant. Auctor porro obseruat eundem determinationis defectum locum habere, quoties quilibet seriei terminus non per indicem solum, sed insuper per terminos quosdam praecedentes definitur: et cum his casibus infiniti termini generales aeque conditionem adimpleant, hoc problema soluendum suscepit, vt proposita tali lege progressionis omnes terminos generales ei satisficientes inueniat. Quod problema ideo pro difficillimo est habendum, quod perducat ad solutionem aequationis differentialis infiniti gradus; commode hic autem vsu venit, vt haec aequatio in illis formis, quarum resolutionem Auctor in superiori Dissertatione docuit, contineatur; hocque adeo argumentum ipsi praeclaram occasionem praebuerit methodi ante traditae, eximium vsum ostendendi. Eius methodi scilicet beneficio plura genera serierum, in quibus quilibet terminus vel per solos terminos antecedentes, vel insuper per indicem definitur, percurrit, earumque terminos generales omnes assignat: ex quo haec methodus merito pro maxime naturali, atque indoli ipsarum quaestionum conformi habetur, quippe qua vera huiusmodi serierum natura perfectissime cognoscitur.

CONSIDERATIO QVARVMDAM SERIERVM QVAE SINGVLARIBVS PROPRIETATIBVS SVNT PRAEDITAE AVCTORE *L. EVLERO*.

In praecedente Dissertatione Auctor iam mentionem fecerat alicuius seriei singularis, cuius terminus primus est 0, decimus 1, centesimus 2, millesimus 3, decies millesimus 4 etc. ita, vt in genere indici, qui potestas quaecumque fuerit denarii, respondeat terminus, ipsi exponenti huius potestatis, siquidem sit numerus integer, aequalis. Cui fundamento cum logarithmi sint superstructi

cti, primo intuitu videri posset, quemuis seriei terminum esse logarithmum sui indicis. Interim tamen ostendit Auctor terminum nonum huius seriei esse 0, 897050585, ideoque logarithmo nouenarii notabiliter minorem; quod insigne est exemplum seriei cum serie logarithmorum infinitos terminos communes habentis, neque tamen cum ea congruentis, cuiusmodi serierum genera in superiore dissertatione fusius est persecutus. Hic autem casum memoratum singularem accuratius euoluit, qui in sequenti forma generaliori continetur, vt indici cuicunque indefinito x conueniat in serie terminus

$$= \frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{a^6-a^{10}} + \text{etc.}$$

quae expressio etsi est in infinitum continuanda, tamen quoties x sumitur aequalis cuipiam potestati rationali ipsius a ea non solum abrumpatur, sed etiam ipsi exponenti ipsius a fiat aequalis: hinc autem casus supra memoratus nascitur, si pro a denarius sumatur. Priorem autem formam generaliorem contemplans animaduertit, si terminus indici x respondet, ponatur $= s$, is vero qui indici $a\,x$ respondet $= t$, fore:

$$1 + s - t = (1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a^2}\right)\left(1-\frac{x}{a^3}\right)\left(1-\frac{x}{a^4}\right) \text{ etc.}$$

vnde liquet, si pro x capiatur potestas quaepiam ipsius a ob vnum factorem certo euanescentem esse $t = 1 + s$. Plura autem alia non contemnenda consectaria hanc formam variis modis transmutando deducit, vnde doctrina serierum non mediocriter amplificari est existimanda: veluti pro quadratura circuli, si ratio diametri ad peripheriam denotetur per $1 : \pi$ hanc satis concinnam consecutus est seriem:

 $\frac{9}{4}\pi +$

$$\tfrac{3}{4}\pi + 8 = \frac{2\cdot4}{5\cdot5} + \frac{2\cdot4\cdot4\cdot6}{5\cdot5\cdot7\cdot7} + \frac{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9} + \text{etc.}$$

Poftea vero ex eadem ferie generali plures alias formas deriuat, in quibus euoluendis multa infignia calculi artificia cernuntur, quae hac occafione percepiffe in aliis inueftigationibus operae pretium videtur.

His errata, a *Clar. Auctore* transmiffa, funt adiicienda.

Pagin.	Linea	loco	lege
4	14	qui variabilis	quia variabilis
9	6	fubftitutione fuppeditat	fubftitutiones fuppeditat
10	9	fuppedituro	fuppeditare
	19	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha\delta\mathfrak{G})^2$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha-\mathfrak{G})^2$
12	23	$\alpha e^{kx\,cof.\,\Phi}$ fin. kz fin. Φ	$\alpha e^{kx\,cof.\,\Phi}$ fin. kx fin. Φ
13	21	quotumque	quotcunque
14	4	$2\mathfrak{C}x + \mathfrak{D}x^2$	$2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2$
	13	$\mathfrak{D}Ax^3 = Av$	$\mathfrak{D}Ax^3 + Av$
17	15	$P = D(z+\alpha)$ etc.	$P = \Delta(z+\alpha)$ etc.
	penult:	$+\frac{\Delta d^n y}{d y^n}$	$+\frac{\Delta d^n y}{d x^n}$
	vltima	$+\frac{\alpha C' d d y}{d x^2}$	$+\frac{\alpha C' d d y}{d x^2}$
19	3	aequatione denuo	aequationem denuo
	11	$D' = \mathfrak{G}D'' = C''$	$D' = \mathfrak{G}D'' + C''$
20	4	per $e^{\gamma x}dx$, fit	per $e^{\gamma x}dx$. Sit
23	15-16	imaginariae	imaginarii
28	5	multiplicato	multiplicati
29	16 feq.	$e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}X\,dx = \begin{matrix} + \\ -\sqrt{-1} \\ +\sqrt{-1} \\ + \text{ etc.} \end{matrix}$	$e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}X\,dx = \begin{cases} + \\ -\sqrt{-1} \\ +\sqrt{-1} \\ + \quad \text{etc.} \end{cases}$

Pagina	Linea	loco	lege
29	16 seq:	$e^{\beta x}\int e^{-\beta x} X\,dx = \begin{matrix}+\\ +\sqrt{-1}\\ -\sqrt{-1}\\ +\end{matrix}$	$e^{\beta x}\int e^{-\beta x} X\,dx = \left\{\begin{matrix}+\\ +\sqrt{-1}\\ -\sqrt{-1}\\ +\end{matrix}\right.$
34	penult:	ad formulam $\mathcal{V}$	ad formulam V
35	12	mula $\mathcal{V}$	mula V
37	5	delinit	definit
38	20	xx et ponatur $- = \frac{1}{4}$	xx, et ponatur $x = \frac{1}{5}$
39	3	fit ſemper	fiat ſemper
40	17	affirmationis	determinationis
42	15	cuius radices $= 1$	cuius radius $= 1$
	20	poſito enim $x = \frac{\pm}{4}$	poſito enim $x = \frac{1}{4}$
44	vltima	$2(1+\frac{z}{n})$ ſin. $\frac{2k\pi}{n} + \frac{zz}{nn}$	$2(1+\frac{z}{n}$ ſin. vers. $\frac{2k\pi}{n} + \frac{zz}{nn}$
48	20	$(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{33\pi\pi})(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{69\pi\pi})$	$(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{36\pi\pi})(1+\frac{z}{n}+\frac{zz}{64\pi\pi})$
50	1	ex hac fonte	ex hoc fonte
51	antep:	$= \frac{1}{934}\pi^4$	$= \frac{1}{93}\pi^4$
	penult:	$= \frac{1}{94} 5 \pi^6$	$= \frac{1}{945}\pi^6$
55	antep:	quamcunque ipſarum	quamcunque parem ipſarum
57	14	$Z = (1 - \frac{z}{n})(1$ etc.	$Z = (1 - \frac{z}{\lambda})(1$ etc.
	19	Hisque terminis infinitas reſolutis	Iisque terminis in ſeries infinitas reſolutis
58	1	ponatur $\frac{dZ}{Zdz} - A +$	ponatur $\frac{dZ}{Zdz} = A +$
	14	$-8\lambda^3 C$	$-8\lambda^3 \mathfrak{C}$
59	antep:	$-\frac{1}{4\eta^3(1-m)}$	$-\frac{1}{4\lambda^3(1-m)}$
62	3	$-\frac{1}{2aa} = -\frac{1}{2(2k+1)^2}$	$-\frac{1}{aa} = -\frac{1}{2(2k+1)^2}$
63	3	numerus integus	numerus integer
64	23	$1 = \alpha e^{-2z} + \beta e^{-2z}$	$1 = \alpha e^{-z} + \beta e^{-2z}$
	vlt:	euolue oportet	euolui oportet
67	4	ſecundum Moioraeum	ſecundum Moiuraeum

Pagina	Linea	loco	lege
68	12	haberi ſole.	haberi ſolet.
	30	inducent,	induant,
70	10	$+ \gamma u^{n-3}\ \delta u^{n-4}$	$+ \gamma u^{n-3} + \delta u^{n-4}$
87	3	obrumpi,	abrumpi
	20	aequatio ſtatuatur	aequalis ſtatuatur
88	16	notabiliter *a l x*	notabiliter a *l x*
89	8	tamen non niſi	tamen non valet, niſi
90	18	poſito $x = a'$	poſito $x = a$
93	20	valores exacto	valores exacte
94	20	cum infinitiſſima ſit	cum infiniteſima ſit
96	9	$C = \frac{a^2}{(1-a)(1-aa^2)}$	$C = \frac{a^2}{(1-a)(1-aa)^2}$
105	vlt:	vt Geometriae	vt Geometrae

DE DIVISORIBVS NVMERORVM INDAGANDIS AVCTORE G. W. KRAFFT.

Hoc problemate Auctor, numerum propoſitum ex certis regulis diuiſores admittere ſimplices, tradere ſtudet; hanc ob cauſam in generales numerorum formulas inquirit, eruitque quomodocunque, quosnam illae admittant diuiſores. Talem numerum generaliſſime expreſſum examinat, et non nulla Theoremata deducit, quorum omnium id, quod in *Actor. Erudit. Lipſ. Supplementis Tom 6 p.* 471. legitur, eſt elegans: ſi numero, ſcilicet, quouis quadrato ſubtrahatur binarius, reſiduum nunquam diuidi poſſe per ternarium. Ex hoc itaque ingenioſum ſoluitur problema: dato numero quocunque ita mutare notam vnicam, vt certum ſit, numerum ita mutatum per omnes tranſpoſitiones poſſibiles non exhibere quadratum. Quum autem ex allatis formulis ad indagandam gandum numeri alicuius dati diuiſorem parum auxilii trahi poteſt: hinc aliam viam, quae aliquando plus ſubſidii ſubminiſtrabit, tentat, quamuis Arithmetica tali formula generali vnica deſtituatur, quae numeros primos omnes ſucceſſiue exhibeat. Tandem omnia exemplis illuſtrat, et, quo modo diuiſorem expiſcari poſſit, inquirit.

DE PARTITIONE NVMERORVM AVCTORE *L. EVLERO.*

Problema de partitione numerorum Auctori quondam a *Cl. Profeſſore Berolinenſi Naudaeo* fuit oblatum, qui pro caſu ſpeciali quaeſiuerat, quot variis modis numerus 50 in ſeptem partes diſpertiri poſſit. Problema hoc primo intuitu ita comparatum videbatur, vt aliter niſi per inductionem reſolui non poſſet, quo fere modo pleraque problemata ad artem combinatoriam pertinentia reſolui ſolent. Qui ſcilicet eius ſolutionem ſuſcipere velit, primo quaeret, quot variis modis quisque in duas partes diſcerpi poſſit, vbi quidem nullam difficultatem offendet, deinde procedet ad diuiſionem in tres partes, quod negotium etiam nunc ſatis commode ſuccedet. In diuiſione in quatuor partes fortaſſe iam haerebit, neque ſtatim perſpiciet, quomodo numerus partitionum cum numero partiendo increſcat, inductione tamen fretus, et hanc progreſſionis legem diuinabit, Quinque partitio ipſi iam maiores creabit moleſtias, ac niſi omni circumſpectione vtatur, verendum eſt, ne inductioni, vtcunque certa ipſi videatur, nimis confidens in errorem inducatur; quod eo magis eſt pertimeſcendum in partitione in plures partes; vti etiam ipſe problematis Auctor fuit ſeductus, et pro caſu

casu proposito in diuisione numeri 50 in septem partes, post taediosissimos calculos enormiter a veritate aberrauit, neque etiam alii insignes Mathematici hac via incedentes ab errore se vindicare valuerunt: qui autem actu omnes partitiones dinumerare voluerit, non solum in immensum laborem se immergit, sed omni etiam attentione adhibita vix cauebit, ne turpiter decipiatur. Cum igitur hoc problema tam insigne specimen contineat, quam parum inductioni vel maxime confirmatae sit fidendum, eo pluris est aestimandum Auctoris studium, quo certa methodo solutionem istius problematis inuestigauit, cum vix vlla alia via praeter inductionem ad eam patere videatur.

Nihil igitur inductioni tribuens Auctor ex certissimis Analyseos principiis eiusmodi formulas hausit, quae pro quocunque numero proposito statim ostendunt, quot variis modis is in tot, quot lubuerit, partes diuidi possit, ita, vt etiam circa maximos numeros nullum dubium superesse queat. Problema autem hic geminum tractat, quorum altero quaeritur, quot modis datus numerus in tot partes inaequales tantum, quot requiruntur, dissecari possit; in altero vero partium aequalitas non excluditur. Ita in exemplo initio memorato inuenit numerum 50 omnino 522 modis in septem partes inter se inaequales distribui posse, aequalitate autem partium non exclusa numerum partitionum omnium esse 8946, qui ergo numerus quaestioni primum propositae satisfacit.

Pluribus aliis modis problema variari potest, dum scilicet singulae partes datae indolis esse iubentur, veluti numeri impares, vel quadrati, vel termini progressionis Geometricae duplae etc. partium numero vel praescripto,

vel

vel ſecus: Auctoris autem methodus aeque patet ad omnia huiusmodi problemata ſoluenda.

Subiungit denique Auctor tabulam ſatis amplam, ex qua reſponſiones ad plerasque huius generis quaeſtiones ſine vllo labore depromere licet; quae multo longius eſt continuata, quam in Auctoris *Introductione in Analyſin*, vbi idem argumentum iam tractauerat, hic autem ſtudioſius expoliuit. Ceterum haec Diſſertatio referta eſt plurimis tam egregiis artificiis, quam nouis et notatu dignis obſeruationibus circa naturam ſerierum, vnde eius vſus multo latius patere videtur: neque vllum eſt dubium, quin ex eodem fonte plurima alia argumenta feliciſſimo cum ſucceſſu expediri queant.

Nunc errata, a *Clar. Auctore* transmiſſa, communicamus.

Pagina	Linea	loco	lege
125	7	Profeſſore Haude	Profeſſore Naude
	14	*partio-*	*partitio-*
126	24	$12=3+3+6$; $11=2+4+5$	$12=3+3+6$; $12=3+4+5$
129	12	factorum, ſiue	ſiue factorum
138	11	numerus 6 ex numeris	numerus n ex numeris
143	4	Si hae ſeries cum illis,	Si hae ſeries cum illis conferantur,
146	antep.	$n^{(2)}=n^{(2)}+(n-2)^{(2)}$	$n^{(2)}=n^{(1)}+(n-2)^{(2)}$
147	2	Seu cum ſeries $\mathfrak{A}$	Seu cum ſeriei $\mathfrak{A}$
	22	$1+1^{(3)}x+2^{(3)}x^2$ etc.	*tota haec linea omittatur*
149	6	fiet manifeſtum:	fiet manifeſta:

Pagina	Linea	loco	lege
152	16	crit $20^{(20)} = 192$	crit $20^{(5)} = 192$
154	8	$+(11-8)^{(4)}+$	$+(n-8)^{(4)}+$
155	20	esse $x^{n(3n\pm 1):2)}$	esse $x^{n(3n\pm 1):2}$
	vlt.	$+(n-40)^{(8)}(n-51)^{(8)}-$	$+(n-40)^{(8)}-(n-51)^{(8)}.$
156	1	locum haberi	locum habere

MEDITATIONES DE QVANTITATIBVS IMAGINARIIS AVCTORE *HENRICO KUHNIO.*

Haec dissertatio talis est valoris, de qua nihil, propter eiusdem modum procedendi, est dicendum; hinc velimus, vt lectores dissertationem ipsam introspiciant.

SOLVTIO PROBLEMATIS GEOMETRICI AVCTORE *L. EVLERO.*

Problema, cuius Auctor hic plures constructiones tradit, ita se habet, vt ex datis tam quantitate, quam positione diametris coniugatis ellipseos, eius axes principales definiri debeant. *Celeb: Prof: Krafft* eiusdem problematis in his *Comment.* iam satis elegantem dedit constructionem, quod igitur minime pro nouo est habendum; verum ita est comparatum, vt calculum prosequendo secundum regulas cognitas plerumque ad constructionem admodum complicatam, et a concinnitate, quae in Geometria potissimum desiderari solet, multum remotam perueniatur. Exhibet igitur Auctor primum huius problematis tres constructiones, quibus calculum, cui illae innituntur, subiungit denique, vero ipse ingenue fatetur, eam constructionem, quae iam in Pappi *collectionibus*, sed sine demonstratione, reperitur, his ob concinnitatem palmam longe praeripere. Demonstrationem

nem ergo huius constructionis Geometricam adornat more veterum, ac sub finem nouam multoque simpliciorem constructionem doceto, quae et illi longe praeferenda videtur.

DE PERTVRBATIONE MOTVS PLANETARVM A FIGVRA EORVM NON SPHAERICA ORIVNDA AVCTORE L. *EVLERO.*

Ante omnia Lectores sunt certiores faciendi, hanc Dissertationem iam ante ad Academiam esse transmissam, quam quaestio de sufficientia Theoriae *Neutonianae* ad omnes motus lunae inaequalitates explicandas iudicio Academiae erat composita. Auctor autem iam palam est professus, se ante hac in ea fuisse opinione, quod Theoria *Neutoni* ad motum Apogei Lunae explicandum minime sufficeret, eiusque tantum semissem propemodum produceret, quam in sententiam plura huius Dissertationis momenta sunt conscripta. Postquam autem *Celeb. Cairaut*, qui ipse ante hac hanc opinionem propugnauerat, solidissimis rationibus contrarium demonstrauisset, Auctor quoque ipsi sine mora est adstipulatus. Tantum autem abest, vt iste error quicquam de pretio huius Dissertationis, si quod habet, detrahat, vt potius eius conclusio veritatem non mediocriter confirmet. Cum enim hic dilucide ostendatur, Lunae figuram oblongatam, quantacunque, quidem admitti potest, nullo modo tantopere motum Apogei accelerare posse, quantum Theoria perperam explicata requirere videbatur, hoc ipsum iam validi argumenti loco esse debet, veritatem ex sola Lunae figura saluari non posse. Namque si contrarium euenisset,

 leuis

leuisque corporis lunaris a figura sphaerica aberratio iam satis notabilem motus Apogei accelerationem producere esset inuenta, merito in ambiguo relinqueremur, vtrum verus Apogei motus potius Theoriae *Neutonianae* felicius euolutae, quam figurae corporis Lunae esset tribuendus? Praesens igitur quaestio, quam Auctor tractandam suscepit etiam post demonstratum Theoriae *Neutonianae* cum veritate consensum maximi est momenti, atque adeo ad eum vberius euincendum omnino est necessaria Cum enim certum sit, si corpus sphaericum iugiter ad punctum fixum attrahatur in ratione reciproca duplicata distantiarum, id ita in elipsi aliaue sectione conica motum iri, vt linea absidum seu positio axis constanter immutata seruetur, plurimum profecto interest nosse, num ista lex non a figura corporis, si non fuerit sphaerica, perturbetur? si scilicet singulae corporis particulae massis suis proportionaliter ad centrum virium sollicitari assumantur. Quemadmodum enim si corpus attractum et globus media directio sollicitationum semper per eius centrum grauitatis transit, ita si corpus a figura globosa recedit, media directio id plerumque praetergreditur, vnde fit, vt corpori tam motus circa centrum grauitatis imprimatur, quam eius motus progressiuus perturbetur. Ostendit autem Auctor hanc perturbationem semper in aphelio seu Apogeo potissimum cerni, quod inde in consequentia promoueatur. Ceterum hoc problema vti et reliqua, quae ad motum Lunae definiendum pertinent, solutu est difficillimum, ac si quis solutionem generalem, pro qua Auctor hic specialem ad Lunam accommodauit, desideraret, ei fortasse etiamnum perfecte satisfieri non posset. Quoniam igitur

igitur hoc tempore Geometrae in talibus problematibus vires praecipue suas exercere solent, hoc problema, de quo ante hac vix esse cogitatum non parum mirandum videtur, omnino dignum videtur, cuius amplior solutio in Astronomiae Theoreticae incrementum sollicite inquiratur. Hinc autem non solum leniores quaedam inaequalitates, quae in motu planetarum obseruantur, originem trahere videntur, sed etiam quae de motu vertiginis adhuc sunt explorata, ante in lucem multo maiorem collocabuntur.

DE MACHINIS IN GENERE AUCTORE *L. EULERO.*

Quam imperfecta adhuc sit Machinarum cognitio Theoretica, et quantum a scopo ii aberrent, qui vulgo se Theoriam Machinarum tradidisse prae se ferunt, Auctor in hac Dissertatione fusius commonstrat; atque defectus huius cognitionis iam dudum in vniuersum animaduersus videtur, cum nemo fere Machinae per solam Theoriam inuentae fidere soleat, nisi ante per experientiam fuerit comprobata. Cuius rei caussam Auctor neutiquam, vt vulgo fieri solet, in frictione aliisue externis circumstantiis neglectis quaerendam esse ostendet, sed potius in eo, quod vulgaris Machinarum cognitio admodum sit manca, neque nomen Theoriae mereatur. Tota enim isthaec falso nominata Theoria solis principiis aequilibrii innititur, atque tum solum in vsum recte vocari posset, quando quodpiam onus ope Machinae in aequilibrio suspensum esset tenendum. Statim autem atque onus moueri, ipsaque Machina in agitatione versari debet, quomodo motus comparatus sit futurus ex solis principiis aequilibrii determinari non poteſt: ſed manifeſto principia et leges motus in ſubſidium vocari debent, ſine quibus nihil certi in hoc negotio definire licet. Maxime autem principia aequilibrii et motus, etiamſi vulgo perperam inter ſe miſceri ſunt ſolita, a ſe inuicem diſcrepent, iam Magnus agnouit *Leibnizius*, dum illa neceſſario vera haec vero tantum contingentes vera eſſe pronunciauit. Cui effato tametſi grauiſſima argumenta aduerſantur, tamen certum eſt ingens inter haec duplicia principia diſcrimen intercedere, quod vel inde perſpicuum eſt, quod principia aequilibrii nunquam fere non fuerint cognita, neque de iis vnquam ſit diſceptatum, cum contra motus principia ante *Galilaeum* penitus ſint ignorata, eorumque diſtincta expoſitio demum *Neutono* ſummo potiſſimum accepta ſit referenda.

Cum igitur nulla Machina non ad motum ſit deſtinata, manifeſtum eſt eſſoetum ſine principiis motus accurate definiri non poſſe; horum autem principiorum applicatio ſine Analyſi ſublimiori inſtitui non poteſt. Doctrinam ergo vulgarem de Machinis, cuius imperfectio defectui principiorum motus atque Analyſis ſublimioris eſt tribuenda, Auctor in hac Diſſertatione perficere annititur; cuiusmodi perfectio cum fruſtra in Matheſi elementari quaeratur, quorum vulgo haec doctrina referri eſt ſolita, neceſſitas Matheſeos ſublimioris hinc maxime ſit perſpicua. Tantum ergo abeſt, vt haec ſcientia magis ſit ſubtilis quam vtilis, quod communiter obiici ſolet, vt ea potius in maxime popularibus inueſtigationibus nullo modo carere queamus. Exemplo, quod Auctor affert, hoc magis illuſtrabitur, caſum perpendit, quo onus 1000 librarum ope ponderis 100 librarum eleuari debet, ad quod quidem

dem axis in peritrochio ſit adhibendus: atque doctrina vulgaris docet, ſi radius maior ad minorem capiatur in ratione 10 ad 1 onus a pondere ſuſtentari in aequilibrio, nondum vero moueri poſſe: vnde quidem intelligimus ad motum producendum radium maiorem plus quam decies minorem ſuperare debere. Motus igitur ſequetur tardus quidem ſi ille radius vndecies longior capiatur, at celerior ſi vndecies vel duodecies: ſimul vero intelligitur, ſi nimis longus veluti centies vel millies longior ſtatuatur, pondus quidem multo celerius eſſe deſcenſurum, oneris autem aſcenſum iterum tardiorem eſſe futurum.

Quam velox autem quouis caſu motus oneris exiſtat, ex vulgaribus Mechanicae principiis minime definire licet, quae cognitio tamen ſi de Machinae effectu iudicare velimus, abſolute eſt neceſſaria: multo minus vide ea Machinae diſpoſitio, in qua ſumma perfectio continetur, quae oneri aſcenſum celerrimum inducit, definiri poteſt. Hanc igitur aliasque ſimiles quaeſtiones Mechanicas Auctor euoluit, atque Analyſi ſublimiori in ſubſidium vocata accurate enucleat.

DE MOTV TAVTOCHRONO PENDVLORVM COMPOSITORVM AVCTORE *L. EVLERO.*

Pendula vulgaria, quibus motus horologiorum temperari ſolet, hoc vitio laborare, quod omnes oſcillationes, ſiue ſint ampliores, ſiue minores, non paribus temporis interuallis abſoluantur, iam pridem eſt notum. Duplex autem huius inaequalitatis ratio deprehenditur; altera in motu circulari eſt poſita, quae figura ad tautochronismum ſeu aequalem oſcillationum durationem minus

nus eſt accommodata, altera vero in reſiſtentia medii, in quo oſcillationes abſoluuntur. Hanc poſteriorem cauſam Auctor hic penitus ſeponendam arbitratur, cum quod perturbatio inde oriunda eſt minima, tum vero imprimis quod ipſe iam primus veram curuam, quae in fluido tautochronismum gignit, inuenit, et quomodo ad praxin ſit accommodanda oſtendit. In hac igitur diſſertatione motum penduli, quaſi in vacuo fieret, contemplatur, et quo pacto is tautochronus reddi queat, accuratius perpendit. Ac primo quidem conſtat, pendula ad duo genera, ſimplicia et compoſita, reuocari ſolere. Pendulum ſimplex vocatur id, cuius tota moles in vnico quaſi puncto eſt collecta, quale quidem nullum effici poteſt, proxime autem huiusmodi pendulum obtinetur, ſi corpus minimum et grauiſſimum de filo tenuiſſimo ſuſpendatur; cum enim moles fili pro nihilo reputari poſſit, corpusque alligatum ſit minimum, tota moles quaſi in puncto collecta ſine ſenſibili errore concipi poteſt. Tale pendulum oſcillationes omnes aequalibus temporibus abſoluere acutiſſimus *Hugenius* primus inuenit, ſi ita ſuſpendatur, vt corpus motum ſuum in cycloide conficiat; quem in finem filum intra duas ſimiles cycloides ſuſpendi oportere oſtendit; verum hic probe eſt notandum, iſtud remedium tantum ad pendula ſimplicia eſſe accommodatum. Pendula autem compoſita vocantur, quorum moles non in puncto collecta, ſed per aliquod volumen expanſa eſt, ad quod quidem genus omnia pendula realia ſunt referenda, cum maſſa mouenda ſemper per filum ſeu virgam, qua ſuſpenditur, et corpus ſeu lentem appenſam ſit diſtributa. Atque idem quidem *Hugenius* regu-

regulam tradit, cuius ope pendulum quoduis compositum ad simplex reuocari, seu pendulum simplex inueniri potest, cuius motus conueniat cum motu compositi; quae reductio inuentione centri oscillationis continetur: pendulum scilicet compositum perinde moueri demonstrauit, ac si tota eius massa in centro oscillationis esset collecta. His igitur duobus inuentis combinandis non difficile videtur pendulum quoduis compositum ad tautochronismum adaptare, ac nemo adhuc dubitasse videtur, quin ista motus oscillatorii aequabilitas obtineatur, si pendulum compositum ita suspendatur, vt eius centrum oscillationis secundum cycloidem incedat. Verum si perpendamus determinationem centri oscillationis a puncto suspensionis pendere, atque in motu intra duas cycloides punctum suspensionis iugiter mutari, id scilicet punctum, circa quod pendulum quouis momento gyratur, facile agnoscemus, in quouis situ penduli obliquo centrum oscillationis mutari, neque idcirco per cycloidem tautochronismum obtineri posse. Cum igitur cyclois penduli tantum simplicis oscillationes isochronai reddat, in hac dissertatio pro quouis pendulo composito curua ad tautochronismum apta inuestigatur, quae pro diuersa corporis oscillantis figura plurimum variari potest. Etiamsi autem inuestigatio huius curuae ad aequationem constructu difficillimam perducat. Auctor tamen eius constructionem satis feliciter ad quemuis casum oblatum accommodat, et quicquid praestari posse videtur, expedit, non spernendis adhibitis calculi molestissimi artificiis.

His errata, a *Clar. Auctore* transmiſſa, addimus.

Pagina	Linea	loco	lege
224	8	tam magnitudine quam longitudine	tam magnitudine quam poſitione
231	26	centrum C tranſire	centrum C circulum tranſire
232	6	altera vt quod	altera quod
235	12	atteruter	alteruter
237	23	poſito ſimitoto $= 1$	poſito ſinu toto $= 1$
238	3	ita vt ſit $y = \Phi + \theta$	ita vt ſit $\eta = \Phi + \theta$
239	penult:	$-2dz^d\Phi$ ſin. $\Phi - z^d\Phi^2$ coſ $\Phi - z^{dd}\Phi$ ſin. Φ	$-2dzd\Phi$ ſin $\Phi - zd\Phi^2$ coſ. $\Phi - zdd\Phi$ ſin Φ
	vlt:	$+2dz^d\Phi$ coſ. $\Phi - z^d\Phi^2$ ſin. $\Phi + z^{dd}\Phi$ coſ Φ	$+2dzd\Phi$ coſ. $\Phi - zd\Phi^2$ ſin. $\Phi + zdd\Phi$ coſ. Φ

NB Per totam hanc diſſertationem character differentiationis d crebro ſupra ſupra lineam inſtar exponentis exprimitur, quem errorem hic ſemel notaſſe ſufficiat.

Pagina	Linea	loco	lege
241	13	diſtuntiarum ſecarum	diſtantiarum ſuarum
	19	ſeu $ddr =$	ſeu $dd\eta =$
243	21	II. $2^dz^l + z^{dd}\Phi =$	II. $2dzd\Phi + zdd\Phi =$
	penult:	nformiter reuoluen-	vniformiter reuoluen-
245	12	l $ddz = z^l\Phi^2$	l. $ddz - zd\Phi^2 =$
246	10	hanc indicet formam:	hanc induet formam:
248	20	negligant.or	negligantur
	vid.	negligentes	inuoluentes
251	14	notus medium ad motum	motus medius ad motum

Pagina	Linea	loco	lege
252	18	$b - 60$,	$b = 60$,
256	27	quaecunque Machina	quacunque Machina
258	6	Cum autem pono ,	Cum autem porro
	12	nullam vnquam viri	nullam vnquam vim
259	22	fore conſtitutum	fore conſtitutam
270	8	iam attingent	iam attigerit
280	6	$= 15625\ tt\ \frac{p-q}{P+Q}$	$= 15625\ tt\ \frac{p-q}{P+Q}$
282	3	tang. $\Phi = v$: vnde ſi $v = 3$	tang. $\Phi = \nu$: vnde ſi $\nu = 3$.

NB. In ſequentibus etiam ſaepius Latina littera v pro Graeco ν ponitur.

Pagina	Linea	loco	lege
286	23	*Huienius*	*Hugenius*
296	8	$= (dt^2 - dt^2 f$	$= C dt^2 - dt^2 f$
	11	ita autem id accepi ponamus	, ita autem id accipi ponamus ,
300	2	$\frac{dz\sqrt{(kk+r)}}{r} = \frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{2x}}$	$\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r} = \frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{2x}}$

PHYSICO - MATHEMATICA.

DE ARGENTO VIVO CALOREM CELERIVS RECIPIENTE ET CELERIVS PERDENDE QVAM MVLTA FLVIDA LEVIORA EXPERIMENTA ET COGITATIONES AVCTORE G. *W. RICHMANN.*

Quas Auctor anno 1750. conuentui exhibuit cogitationes, paucis recenſemus, et Corollaria, Phyſicam experimentalem amplificantia, ex obſeruationibus potiſſi-

d 2 mum

mum exponemus. Auctor nouum in Physicis, vt axioma, facit exemplum: Densiora corpora difficilius calefieri, et difficilius calorem adquisitum perdere, quam rariora; hinc et argentum viuum difficilius calefieri aqua et aliis fluidis, difficiliusque refrigerari. Verum enim vero cum hocce alii partim non absque veri specie tradiderunt, partim cautius rem attigerunt, tamen, quo modo solida diuersa calorem inter se, et cum fluidis, communicent, examinauit, quia ei hac in re parum praestitum esse videbatur, experimentisque XXIII. probauit, ex quibus petet: a) Argentum viuum vel in medio aëre densiori aqueo, vel in niue frigidiori, maiora, quam aqua, spiritus vini ordinarius, petroleum, oleum Terebinthinae, spiritus rectificatissimus et oleum lini, caloris pati decrementa. b) Idem in medio aqueo calidiori maiora, quam petroleum, oleum Terebinthinae et spiritus vini ordinarius, capere incrementa. c) Incrementa et decrementa caloris mercurii et petrolei; decrementa autem caloris olei Terebinthinae, petrolei et mercurii, ferme in aëre esse aequalia. d) Aquae et spiritus vini ordinarii decrementa et incrementa caloris in aëre esse minora, decrementis et incrementis caloris argenti viui et petrolei; olei lini autem decrementa in aëre esse minora decrementis petrolei et mercurii. *Cel. Nolletius* quidem in *lectionum Physicarum tomo IV. anno* 1749. euulgato, idem asserit, experimentisque confirmat; lectores autem ex ratione experimentorum abunde cogituros, Auctorem ea, dum has concinnauit cogitationes, nondum legisse et vidisse. Quo autem diuersitas Thermometrorum valorumque nullum iniiceret dubium, quamquam allata Corollaria ex experi-

experimentis satis patent, tamen hoc experimento XXIV. alia ratione confirmare voluit. Posito igitur, si diuersitas accideret, obseruat, hancce in fluidis, in calore recipiendo et perdendo, forte a magnitudine particularum homogenarum primae compositionis pendere, in corporibus autem heterogeniis rationem atque multitudinem pororum ad materiam aliter sese habere. Vltimo experimentis XXV. vsque XXVII, mercurium maius, quam dicta fluida, decrementum caloris pati, confirmat.

DE RATIONE CALORVM ET RATIONE DENSITATIS RADIORVM DIRECTORVM AD DENSITATEM PER LENTEM REFRACTORVM DEFINIENDA COGITATIONES AVCTORE *G. W. RICHMANN.*

Dum ad hancce recensendo progredimur dissertationem, notamus, vtramque inquisitionem ad perficiendam Philosophiam naturalem aliquid conferre posse; hanc ob caussam Auctor ponit, efficaciam radiorum solarium per vitra caustica augeri, et maiorem obseruari in minori, minorem vero in maiori a foco vitri distantia. Et cum densitates radiorum solarium vitrum causticum penetrantium, et in foco concurrentium, in distantiis a foco sunt diuersis; hinc patet: positis caloribus in ratione densitatum radiorum, inuenire rationem calorum per Thermometra ordinaria, et diuersis expansionibus liquoris Thermometrici numeros, rationi praedictae congruentes, assignare. E contrario efficaciam quidem radiorum solarium, si per aërem his radiis antea calefactum transeat, post vitra caustica minui, obseruationibus ab alio institutis, confirmatam vidit, ei tamen in culpa esse transitus ignis in aërem calefactum largior, quam in alia corpora, non videbatur, sed radii a vaporibus inter vitra caustica et solem haerentibus intercipi videbantur. Quo autem quilibet indicare possit, quantum obseruationibus eiusmodi sit tribuendum; hinc aliam iniit viam, si eiusmodi experimentis calorum veram definiret rationem, ita, vt experimenta repeteret, eaque alia institueret ratione. Si ad obseruationes attendit, patet, radios directos cum radiis refractis commode comparari non posse; si autem liceret comparare: a) Crescente efficacia radiorum directorum, crescere etiam deberet constanter efficacia radiorum refractorum, et contra. b) Eidem gradui a radiis directis producto semper idem gradus a refractis productus respondere deberet, et eidem gradui a radiis refractis producto idem gradus a radiis directis productus. Ex his apparet, quomodo de efficacia caloris in sectione coni radiantis a lente producti indicandum sit; et quomodo ratio densitatis radiorum lente refractorum ad densitatem radiorum directorum definiri debeat. Quo autem Auctor potioribus impedimentis obuiam iret, et diuersas radiorum, in diuersis spatiis collectorum, efficacias comparare valeret, obseruat, non parum forte facere, si duas lentes, similes et aequales, eligeret, et in diuersis a foco distantiis in vtriusque coni radiantis axe Thermometri bulbum collocaret, qua ratione obtineretur: a) Tantum radiorum intercipi ab vna lente, quantum ab altera. b) Tot radios penetrare per vnam lentem, quot penetrant per alteram. c) Per idem tempus in vnius Thermometri bulbum efficaciam suam exercere radios solares, per quod exerunt in alterius Thermometri bulbum. d) Densitates radio-

radiorum esse ferme in ratione inuersa quadratorum distantiarum Thermometrorum a focis, et in eadem ratione efficaciae radiorum refractorum. Tandem, vt constet, quomodo hae obseruationes commode institui possint, non nulla, adpendicis loco, addit momenta.

EMENDATIO LATERNAE MAGICAE AC MICROSCOPII SOLARIS AVCTORE *L. EVLERO.*

Non solum Auctor haec instrumenta dioptrica per se satis nota, ab insignibus, quibus laborant, vitiis purgare conatur, sed etiam nouam plane eorum constructionem docet; quae si successu, vti sperare licet, non careat, maximam vtilitatem allatura videatur.

Vitia autem, quibus haec instrumenta vulgari modo confecta laborant, sequentia potissimum ab Auctore commemorantur. Primo scilicet per Laternam magicam et microscopium solare non omnis generis obiecta repraesentare licet, sed tantum eiusmodi, quae maximam partem sint diaphana: vnde figuras ope Laternae magicae exhibendas super tabulas vitreas coloribus admodum dilutis depictas esse oportet, et Microscopia solaria aliis obiectis repraesentandis non inseruiunt, nisi quae ita sint tenuia, vt lumini liberum transitum permittant, ac pro diaphanis haberi possint. Ob hoc ergo vitium innumera corporum genera ab vsu horum instrumentorum excluduntur.

Secundum vitium in hoc consistit, quod etiam huiusmodi corpora pellucida neutiquam satis distincte per memorata instrumenta exprimi queant. Cum enim obiecta in parte auersa illuminentur, vnde partes eorum depingendae non nisi ob pelluciditatem lumen adipiscuntur, radii libere transmissi simul in tabulam, super qua pictura excipitur,

cipitur, incidentes imaginem non solum perturbant, sed etiam dum tabulam collustrant, ipsam repraesentationem non mediocriter debilitant: notum enim est in hoc negotio omne lumen peregrinum sollicite a tabula arceri, neque vllius aliis radiis lucis accessum concedi debere, nisi qui ad imaginem exprimendam concurrant. Quin etiam isti radii peregrini lucis, ob diuersam, qua pollent, refrangibilitatem imaginem super tabula iridis coloribus circumfundunt, quod incommodum in microscopio solari imprimis cernitur.

Huic duplici incommodo Auctor ita occurrit, vt obiecta non per radios a tergo transmissos, sed a parte antica incidentes collustrare suadeat; hoc enim modo etiam obiecta non diaphana adhiberi poterunt, neque vlla perturbatio a lumine alieno erit pertimescenda. Simili scilicet modo haec repraesentatio perfici debet, quo in vulgaribus cameris obscuris fieri solet; quibus, vti constat, obiecta quaeuis, dummodo sufficienter fuerint illuminata, satis clare ac distincte exprimuntur. Ex quo intelligitur, si etiam ea obiecta, quorum imagines per Laternam magicam vel microscopium solare exhibere velimus, a parte antica satis fuerint illuminata, repraesentationem pari modo succedere debere.

Totum ergo negotium eo redit, vt obiectis repraesentandis satis fortis illuminatio inducatur, neque tamen a luce, quae ad hoc adhibetur, vllus radius directe in tabulam incidere possit: quod quidem non difficulter efficietur, si lux ista illuminans ad latera tubi, per quem fit repraesentatio, constituatur, eique omnis aditus ad tabulam, quae imaginem recipit praecludatur. Tum vero non

non difficile eſt eiusmodi mechanismum adiungere, quo obiecto ſiue a ſole, ſi a lumine plurium lampadum ope ſpeculorum lentiumue conuexarum illuminatio quantumuis magna induci queat.

Aſſumta porro pro cognita obiecti illuminatione Auctor per Theoriam inquirit in ſplendorem ſeu quantitatem luminis, quo ipſa imago per lentem refringentem exprimi debeat: hunceque ſplendorem, cum non admodum fortis obtineri queat, cum lumine, quo ipſum obiectum a Luna plena colluſtraretur, comparat, ſicque lumen, quo imago quouis caſu ſit apparitura a priori definit. Ad omnes autem has repraeſentationes vnicalente conuexa vtitur, quoniam inuerſio imaginis nihil turbare eſt cenſenda, praeter quam quod ipſa obiecta ſitu inuerſo exponere licet.

Pro magnitudine autem obiectorum, quae repraeſentari debent, et ratione multiplicationis in imagine factae quatuor praecipua huiusmodi Machinarum genera conſtituit: quorum primum eſt accommodatum ad obiecta ſex pedum repraeſentanda, ſecundum ad obiecta vnius pedis, tertium duorum digitorum, et quartum duarum linearum, quorum vltimum ratione vſus vicem microſcopii ſolaris ſuſtinere poteſt, priora vero totidem laternas magicas conſuetis multo praeſtantiores referent. In quolibet denique genere Auctor tam magnitudinem quam aperturam lentis maxime idoneae ſollicite determinat, ſimulque ſplendorem imaginis, qui cuilibet multiplicationi conueniat, aſſignat rationem ſcilicet eius ad ſplendorem ipſius obiecti; ita vt nullum dubium ſupereſſe videatur, quin praeceptis Auctoris probe obſeruatis non contemnenda huius generis inſtrumenta tam ad vtilitatem quam delectationem parari queant.

His errata, a *Clar. Auctore* transmissa, mittimus.

Pagina	Linea	loco	lege
363	16	obiecta, repraesentanda	obiecta repraesentanda
364	7	- - - euersa	- - - auersa
365	12	confundantur	confunduntur
	penult.	accepit	accipit
368	4	omni lumen	omne lumen
	penult.	apparitua	apparitura
369	11	a luna plena	a Luna plena.
	14	imagines	imaginis
	16	huic	hinc
	19	$Be = n$, E A	$Be = n$. E A
	20	$Be = na \frac{af}{a-f}$	$Be = na = \frac{af}{a-f}$
371	5	sit cognitus	sit cognitus
	20	feg	feg
372	13	imagines	imaginis
	23	$b = 1$ pollices	$b = 1$ pollici
	27	queri quies	quinquies
375	3	impade	lampades
	5	amo	fumo

ANNOTATIONES CIRCA CONSTRVCTIONEM HOROLOGII MARINI AVCTORE *C. G. KRATZENSTEIN.*

De horologiorum constructione et motu multae nunc instituuntur disquisitiones, ac plena sunt *Anglorum Acta Societatis* de hoc negotio. Nuper *Clar. Koesfeldius* etiam horologium proposuit autobarum, quod in nauigationibus ad obseruationes Astronomicas instituendas, et longitudinem maris inde determinandam, commendat. Hoc itaque

itaque Auctori occaſio eſt data, meditationes ſuas de perficiendo horologio marino conſcribendi. Quum autem clepſydrae mercuriales, nautis alias commendatae, multis laborant imperfectionibus; hinc ſtudio eas recenſet, et firmis demonſtrat argumentis, horologium marinum eiusmodi imperfectionibus laborare non debere, ſi illud in ſuo genere, tanquam perfectum, iudicare velimus. Tandem requiſita talis horologii marini adducit, et concludit, adhibito praeſcripto ſtudio, et obſeruatis indicatis cautelis, tale horologium ſcopo nautarum omnino ſatisfacere poſſe.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE FACTAE TVBINGAE, ANNIS 1747, 1748 ET 1749. AVCTORE *G. W. KRAFFT.*

Exhibuit Auctor hac diſſertatione obſeruationes ſuas *Tubingae* inſtitutas. §. 1. Inſtrumenta, quibus vſus eſt, et reliquas obſeruationum circumſtantias, adducit. §. 2. Obſeruationis altitudinis Barometricae, maxumae et minimae differentiam adfert. §. 3. Obſeruationes tradit Thermometricas, ex quibus adparet, maxumum calorem fuiſſe 87 graduum ſecundum F*ahrenheitianum*. §. 4. 5. et 6. Non nullas auroras boreales, aut earumdem veſtigia ab eo obſeruatas, et partim a *M. Biſchoff* in vicino ibidem pago, *Steinebrunn* dicto, partim a *Clar. Volzio Stuttgardiae* notatas et communicatas, refert. § 7. Lumen zodiacale Caſſinianum annis 1748. et 1749. diſtincte annotat. §. 8. Declinationes acus Magneticae, ſex pollices longae, et §. 9. quasdam in Eclipſi lunae obſeruationes anno 1747. die 25. Febr. temp. matut., omni cura addit. §. 10. Inſtar adpendicis, tonitrua, grandines, primas hirundines et halones adducit.

PHYSICA.

OBSERVATIONES ANATOMICO - PRACTICAE COMMVNICATAE a *JOANNE FREDRICO SCHREIBER*

Auctor fex obferuationes exhibet, quarum contenta paucis retulifse, nobis fatis erit, de cetero lectorem ad ipfam differtationem ablegantes. In *prima* adferitur, ad vitandum, in Chirurgia capitis, futuras cum fractis, futurarum capitis, quot poffunt, varietates notari debere. Hinc vnam valde raram defcribit, et figura data illuftrat. *Secunda* tradit fingularia vifa in cadauere *G. F. Iuncker*, qui olim fuit huius *Academiae membrum honorarium*. *Tertia* delineat enormem fracturam, quae poft obitum in cranio adolefcentis, demum in oculos incurrit, nihilominus per 19 dies, fine malis fignis fuperftitis. *Quarta* fiftit valde ingens aneurisma in pectore, ex cadauere viri. *Quinta* agit de corde villofo nautae. *Vltima* refert de fcroto iuuenis, in quo, praeter duos tefticulos, recte conftitutos, fuit corpus tertium, illis, quoad externa, fimillimum, quafi tertius tefticulus, fed vera hydatis. Auctor illam in medium produxit, ad dubiam reddendam exfiftentiam triorchidum.

OBSERVATIONES GENERALES VNIVERSAM HISTORIAM PISCIVM CONCERNENTES AVCTORE *G. W. STELLERO.*

Quamquam hae obferuationes partim praemittendae erant Auctoris *Ichthyologiae Sibiricae et Camtfchaticae*, quae olim typis imprimetur, partim inferendae *Defcriptionibus* nominatorum hic *pifcium*, nihilominus tamen in *Commentariis* eas, tanquam praenuncias laborum

Cl. Auctoris

Cl. Auctoris cum publico communicandas e re esse iudicatum est: praesertim quod plura sunt in iis et noua, et non vbiuis obuia, et scitu haud indigna, quae prima quaque occasione non communicare cum erudito orbe religioni ducimus. Tractat autem hic Cl. Auctor de generatione piscium, de aetate Truttacei generis, et quae aut obseruata aut obseruanda sunt in examine piscium; de vsu appendicum intestinalium, et de differentiis variorum piscium. Ex quibus obseruationibus facile iudicare poterit lector, quanto studio *Stellerus* noster in veritatem naturae inquisiuit, et quanto damno historiae naturalis in ipso aetatis flore mortuus est; nisi dicamus, diu vixisse, qui multa praestitit.

ASTRONOMICA.

SVMMARIVM OBSERVATIONIS ECLIPSEOS SOLARIS D. 8 IAN. 1750. ST. N. A *CLAR. KRAFFT* TVBINGAE HABITAE, E LITTERIS AD *WINSHEIMIVM* DATIS CVM ACADEMICIS COMMVNICATVM.

Haec obseruatio ab Auctore in epistola, Germanico idiomate conscripta, ad B. *Winsheimium* est data. Instrumenta, vt horologium portatile Anglicanum, tubus terrestris Anglicanus 5 pedum, et quadrans vnius pedis, ad obseruationem adhibita, sunt mediocria, et quia notatu sunt digna, ergo haec obseruatio in lingua Latina, vti scriniis Academicis est inserta, communicatur.

OBSERVATIO ECLIPSIS LVNAE TOTALIS D. 19 IVN. ST. N. 1750. LIPSIAE HABITA AVCTORE G. *HEINSIO*.

Haec obseruatio ab Auctore coelo maxume sereno vsque ad finem Eclipsis est peracta. Telescopio Gregoriano fuit inſtructus ſub eo apparatu, quo hoc obiecta ſecundum diametrum 52 vicibus amplificabat. Macularum emerſiones optime obſeruauit, et terminum vmbrae probe diſtinguere potuit. Momenta appulſuum ad duo horologia comparata in obſeruatis recenſet.

OBSERVATIONVM LIPSIENSIVM ANNO 1748 HABITARVM, CONTINVATIO AVCTORE G. *HEINSIO.*

Auctor cum Academicis varias obſeruationes communicare pergit: hinc primo Eclipſes ſatellitum Iouis exponit; deinde occultationes fixarum a luna tradit; tum obſeruationes de Cometa 1748 addit; poſt de apparitione Veneris non nulla refert; tandemque obſeruationes Meteorologicas an. 1748. inſtitutas, indicat.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE ECLIPSIVM SATELLITVM IOVIS DVRANTE KAMTZATKIENSI IN DIVERSIS SYBIRIAE LOCIS HABITAE A CENTVR. VICARIO *ANDREA KRASILNICOW.*

REFERENTE EX MANDATO ILLVSTRISSIMI ACADEMIAE PRAESIDIS ADIVNCTO *NIC. POPOW.*

Obſeruationes Auctoris non omnes ſunt exactae, quia interdum vnico vſus eſt horologio, et coelum per aliquod dies non fuit ſerenum. Eclipſes ſatellitum Iouis obſeruauit in *Ilginskoy* et *Kiringinskoy Oſtrog*, in pago *Witimsk* et *Oljokminskoy Oſtrog*, in vrbe *Iakuzk* et *Bolſcherezkoy Oſtrog*, in vrbe Portus *Petri* et *Pauli* dicta et portu *Ochozk*, in vrbe *Ieniſeysk* et *Tomsk*, vt et in caſtello *Iamyſchewsk.* Tandem vero differentias meridianorum a *Petroburgo* addit.

INDEX

INDEX COMMENTARIORVM.

Mathematica.

Phyſico-Mathematica.

L. Euleri,

Phyſica.

Aſtronomica.

* * *
* *
*

MATHEMATICA.

METHODVS
AEQVATIONES DIFFERENTIALES ALTIORVM GRADVVM INTEGRANDI VLTERIVS PROMOTA

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Tradidi in volumine ſeptimo Miſcellaneorum Berolinenſium methodum facilem aequationes differentiales cuiusque gradus, in quibus altera variabilis vbique vnicam obtinet dimenſionem, alterius vero tantum differentiale, quod conſtans aſſumitur, occurrit, integrandi, atque adeo aequationem finitam, quae differentialem propoſitam penitus exhauriat, inueniendi. Neque enim, ſi aequatio propoſita differentialis primum gradum ſuperet, pluribus repetitis integrationibus opus erat, ſed vno quaſi ictu cuiuscunque demum fuerit gradus aequatio propoſita, methodus ibi expoſita eandem ſuppeditat aequationem finitam, quae proditura eſſet, ſi ſucceſſiue tot inſtituerentur integrationes, quot gradus differentialia in ea obtinent. Sic ſi aequatio propoſita ſit differentialis quarti gradus, more ſolito ea per vnam integrationem primo ad aequationem differentialem tertii gradus reduci, tum vero denuo integratio ſuſcipi deberet, vt ad gradum ſecundum reuocetur: quo facto adhuc duae ſupereſſent integrategrationes inſtituendae, antequam ad aequationem quantitatibus finitis expreſſam perueniretur. Hanc igitur operationum plerumque difficillimarum multiplicitatem per methodum meam prorſus euito, dum vnica operatione ſtatim veram aequationem integralem elicio.

§. 2. Quantopere autem modum integrandi vulgarem toties repetendum, quoties differentialitas in aequatione ineſt, ſecuti in moleſtiſſimos calculos incidamus, vnico exemplo oſtendiſſe iuuabit. Sit ergo propoſita haec aequatio differentialis tertii gradus $d^3y = ydx^3$, in qua elementum dx conſtans ponitur. Haec aequatio, etſi mea methodo facillime ter integratur, tamen ne quidem modus eam ſemel tantum integrandi perſpicitur. Statim quidem, qui variabilis x ipſa deeſt, apparet eam ad gradum ſecundum deprimi poſſe. Si enim ponatur $dx = pdy$, ob dx conſtans erit $o = pddy + dpdy$ et denuo differentiando $o = pd^3y + 2dpddy + dyddp$. vnde fit $ddy = -\frac{dpdy}{p}$ et $d^3y = -\frac{2dpddy}{p} - \frac{dyddp}{p} = \frac{2dp^2dy}{pp} - \frac{dyddp}{p}$, qui valores in aequatione propoſita $d^3y = ydx^3$ ſubſtituti dabunt:

$$\frac{2dp^2dy}{pp} - \frac{dyddp}{p} = yp^3dy^3 \text{ ſeu } yp^5dy^2 = 2dp^2 - pddp.$$

Quae cum neque dp neque dy ſit conſtans, ſed conſtantiae ratio ex aequatione $ddy = -\frac{dpdy}{p}$ definiatur, per methodos ſolitas vix vlterius tractari poteſt. Transmutari quidem aequatio poteſt in aliam formam, in qua nullum differentiale conſtans inſit. Ponatur $dp = qdy$; erit $ddp = qddy + dqdy$ at $ddy = -\frac{dpdy}{p}$ dabit $ddy = -\frac{qdy^2}{p}$, vnde $ddp = -\frac{qqdy^2}{p} + dqdy$

ſicque

ſicque aequatio inuenta hanc induet formam:

$$yp^5 dy = 2qqdy + qqdy - pdq = 3qqdy - pdq.$$

In qua pro lubitu differentiale conſtans aſſumere licet. Sit dy conſtans, ob $q = \frac{dp}{dy}$ erit $dq = \frac{ddp}{dy}$; habebiturque

$$yp^5 dy^2 = 3dp^2 - pddp.$$

At ſi ponatur $p = \frac{1}{r}$ fiet $ydy^2 = rdr^2 + rrddr$ quae aequatio cum ambae variabiles vbique totidem ſcilicet tres dimenſiones teneant, ope methodi meae in III. Tomo Comment. explicatae tractari poteſt. Ponatur ſcilicet $y = e^{\int zdu}$ et $r = e^{\int zdu} u$ denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, erit $dy = e^{\int zdu} zdu$ et $ddy = 0 = e^{\int zdu}(zddu + dudz + zzdu^2)$. Deinde eſt $dr = e^{\int zdu}(du + zudu)$ et ob $r = uy$ erit $ddr = 2dudy + yddu = e^{\int zdu}(ddu + 2zdu^2)$. Sed $ddu = -\frac{dudz}{z} - zdu^2$ vnde $ddr = e^{\int zdu}(zdu^2 - \frac{dudz}{z})$. Qui valores in aequatione $ydy^2 = rdr^2 + rrddr$ ſubſtituti dabunt:

$$zzdu = u(1 + zu)^2 du + uuzdu - \frac{uudz}{z}$$

quae aequatio etſi eſt differentialis primi gradus, tamen multo difficilius tractatur, quam ipſa aequatio propoſita ſimplicior quidem aliquantum reddi poteſt ponendo $z = tu$, fiet enim. $\frac{dt}{t} = ttu^3 du + 3tudu - ttdu$

Quin potius cum aequatio propoſita ipſa facile conficiatur, inde integratio huius aequationis petenda videtur. Ponatur porro $t = \frac{1}{s}$, atque aequatio inuenta abibit in hanc

$$sds + 3sudu = du(1 - u^3)$$

quae aequatio immediate ex propoſita elicitur, ponendo $dx = \frac{du}{s}$ et $\frac{dy}{y} = \frac{udu}{s}$, fiet enim ob $\frac{du}{s}$ conſtans, $sddu$

 $= dsdu$

$= ds du$ et $\frac{ddy}{y} = \frac{u^2 du^2}{ss} + \frac{du^2}{s}$ et $\frac{d^3 y}{y} = \frac{u^3 du^3}{s^3} + \frac{3 u du^3}{ss} + \frac{du ddu}{s} = \frac{u^3 du^3}{s^3} + \frac{3 u du^3}{ss} + \frac{du^2 ds}{ss}$, qui valores in aequatione $d^3 y = y dx^3$ substituti praebebunt aequationem inuentam.

$$s ds + 3 s u du = du(1 - u^3).$$

§. 3. Totum ergo negotium ad integrationem huius aequationis reuocatur; quam integrabilem esse vel inde patet, quod aequatio differentialis tertii gradus, ex qua est nata, integrationem admittat. Quemadmodum autem hoc opus sit absoluendum in aequatione latius patente, quae per eandem substitutionem ex hac aequatione differentiali tertii gradus oritur,

$$A y dx^3 + B dx^2 dy + C dx ddy + D d^3 y = 0.$$

Prodibit autem ponendo $dx = \frac{du}{s}$ et $\frac{dy}{y} = \frac{u du}{s}$ haec aequatio differentialis primi gradus.

$$D s ds + s du(C + 3 D u) + du(A + Bu + Cuu + Du^3) = 0$$

quam primum obseruo huiusmodi valorem pro $s = \alpha + \beta u + \gamma uu$ admittere. Erit enim $ds = \beta du + 2\gamma u du$. Vnde fit

$$\begin{aligned}
\frac{D s ds}{du} &= D\alpha\beta + 2 D\alpha\gamma u + 2 D\beta\gamma u^2 + 2 D\gamma^2 u^3 \\
&\qquad + D\beta\beta u + D\beta\gamma u^2 \\
s(C + 3 D u) &= C\alpha + C\beta u + C\gamma uu \\
&\qquad + 3 D\alpha u + 3 D\beta u^2 + 3 D\gamma u^3 \\
A + Bu + Cu^2 + Du^3 &= A + Bu + Cu^2 + Du^3.
\end{aligned}$$

Reddantur iam singuli termini homologi $= 0$, fietque primo $1 + 3\gamma + 2\gamma\gamma = 0$. Vnde fit vel $1 + \gamma = 0$ vel $1 + 2\gamma = 0$. Deinde est $3 D\beta(\gamma + 1) + C(\gamma + 1) = 0$, cui aequationi quoque satisfacit $\gamma + 1 = 0$, ergo erit $\gamma = -1$.

Porro

Porro fiet $D\alpha = -B - C\beta - D\beta\beta$. Seu $\alpha = \frac{-B - C\beta - D\beta\beta}{D}$
Substituatur hic valor in aequatione $D\alpha\beta + C\alpha + A = 0$, seu $D^2\alpha\beta + CD\alpha + AD = 0$ eritque

$$\begin{aligned} &-BD\beta - CD\beta^2 - DD\beta^3 = 0 \\ &-BC - CC\beta - CD\beta^2 \\ &+AD \end{aligned}$$

Ad β ergo inueniendum hanc aequationem cubicam resolvere oportet. Sin autem α quaeratur erit.

$$D^2\alpha^3 + BD\alpha^2 + AC\alpha + A^2 = 0$$

Sit $\alpha = \frac{A\omega}{D}$, fiet $A\omega^3 + B\omega^2 + C\omega + D = 0$
Sit ergo ω radix huius aequationis cubicae, fiet

$$\alpha = \frac{A\omega}{D}; \quad \beta = -\frac{D - C\omega}{D\omega} \text{ et } \gamma = -1$$

atque $s = \frac{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}{D\omega}$ Porro fiet

$$x = \int \frac{du}{s} = \int \frac{D\omega\, du}{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2} \text{ atque}$$

$$ly = \int \frac{u\, du}{s} \int \frac{D\omega u\, du}{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}.$$

Quamuis autem laborem has formulas integrandi susciperemus, tamen integrale tantum particulare obtineremus, neque adeo totum negotium etiam nunc esset confectum. Non enim valor ipsius s hic inuentus aequationem exhaurit, quia in eo nulla noua occurrit constans, quae in ipsa aequatione non insit. At vero cognito valore particulari ipsius s, ex eo valor completus sequenti modo eruetur. Ponatur valor iam inuentus $\frac{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}{D\omega} = V$ ac ponatur $s = V + z$; vt sit $ds = dV + dz$, atque prodibit

$$\left.\begin{aligned} &DVdV + DVdz + DzdV + Dzdz \\ &+ CVdu \qquad\qquad + Czdu \\ &+ 3DVudu \qquad\quad + 3Duzdu \\ &+ (A + Bu \qquad\quad + Cuu + Du^3)du \end{aligned}\right\} = 0.$$

Cum

Cum vero ſit per hypotheſin:
$DVdV+Vdu(C+3Du)+du(A+Bu+Cu^2+Du^3)=0$
erit $Dzdz+z(Cdu+3Dudu+DdV)+DVdz=0$
At ob $V=\frac{A\omega}{D}-\frac{u}{\omega}-\frac{Cu}{D}-uu$ erit $dV=-\frac{du}{\omega}-\frac{Cdu}{D}$ $-2udu$ atque $Dzdz+z(\frac{-Ddu}{\omega}+Dudu)+\frac{dz}{\omega}(A\omega^2-(D+C\omega)u-D\omega u^2)=0$ ſeu $zdz+zdu(u-\frac{1}{\omega})+dz(\frac{A\omega}{D}-\frac{(D+C\omega)u}{D\omega}-uu)=0$ quae aequatio niſi bene tractetur, difficulter ad ſeparationem variabilium perducitur. Interim tamen continetur in hac forma generali, quae ſeparationem admittit:

$$zdz+zdu(u+a)=dz(uu+2bu+c).$$

Ad quam ſeparandam pono $dz=pdu$ fietque

$$z=\frac{(uu+2bu+c)p}{p+u+a} \text{ et differentiando:}$$

$$dz=pdu=\frac{(u+a)(uu+2bu+c)dp+pdu(2p(u+b)+uu+2au+2ab-c)}{(p+u+a)^2}$$

ſeu $pdu(pp+2ap-2bp+aa-2ab+c)=(u+a)(uu+2bu+c)dp$ in qua variabiles ſponte a ſe inuicem ſeparantur: erit enim:

$$\frac{dp}{p(pp+2(a-b)p+aa-2ab+c)}=\frac{du}{(u+a)(uu+2bu+c)}$$

Opus autem foret ſumme taedioſum, ſi hanc aequationem integrare, atque exinde integrale aequationis differentialis tertii gradus eruere vellemus.

§. 4. Apparet hinc quanto labore tandem huiusmodi regulas ſequendo integrale aequationis differentialis tertii gradus erui poſſit, vnde vtilitas methodi meae in Vol. VII. Miſc: expoſitae non mediocriter perſpicitur. Eo magis autem eius vtilitas in oculos incurret, ſi loco aequationis differentialis tertii gradus alia, quae ſit quarti altiorisue gradus more vſitato tractetur, tum enim ſubſtitutio-

nes

nes hic adhibitae aequationem differentialem non primi, ſed ſecundi altiorisue gradus praebebit, cuius integrale vix vllis artificiis obtineri poterit. Et quamuis tandem etiam huius aequationis integrale inueniretur, tamen id plerumque tantum foret particulare, et poſt moleſtiſſimas demum ſubſtitutione ſuppeditat, et ipſius aequationis propoſitae integrale, et quidem particulare tantum: cum mea methodus fere ſine vllo labore ſtatim integrale completum praebeat. Quod vt clarius intelligatur vtamur ante tradita ſubſtitutione in hac aequatione differentiali quarti gradus:

$$Aydx^4 + Bdx^3dy + Cdx^2ddy + Ddxd^3y + Ed^4y = 0.$$

in qua dx ponitur conſtans. Sit igitur $dx = \frac{du}{s}$ ſeu $du = sdx$, et $\frac{dy}{y} = \frac{udu}{s} = udx$; erit ob dx conſtans: $\frac{ddy}{y} - \frac{dy^2}{y^2} = dx\,du = sdx^2$; ideoque $\frac{ddy}{y} = u^2dx^2 + sdx^2$. Hinc fiet porro $\frac{d^3y}{y} - \frac{dy\,ddy}{y^2} = 2usdx^3 + dsdx^2$ et $\frac{d^3y}{y} = u^3dx^3 + 3usdx^3 + dsdx^2$: iterumque differentiando prodibit $\frac{d^4y}{y} - \frac{dy\,d^3y}{yy} = 3uusdx^4 + 3udx^3ds + 3ssdx^4 + dx^2dds$, ideoque $\frac{d^4y}{y} = u^4dx^4 + 6uusdx^4 + 4udx^3ds + 3ssdx^4 + dx^2dds$. Quibus valoribus in aequatione hac ſubſtitutis.

$$Adx^2 + \frac{Bdxdy}{y} + \frac{Cddy}{y} + \frac{Dd^3y}{ydx} + \frac{Ed^4y}{yax^2} = 0$$

proueniet haec aequatio:

$$Adx^2 + Budx^2 + Cu^2dx^2 + Csdx^2 + Du^3dx^2 + 3Dusdx^2 + Ddxds + Eu^4dx^2 + 6Euusdx^2 + 4Eudxds + 3Essdx^2 + Edds = 0$$

Cum autem ſit $dx = \frac{du}{s}$ erit

$$du^2(A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4) + sdu^2(C + 3Du + 6Euu) + 3Essdu^2 + sduds(D + 4Eu) + Essdds = 0$$

Apparet quidem huic aequationi satisfieri, si sit $s=0$ et u radix huius aequationis:

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 = 0.$$

Sit ergo α vna ex radicibus huius aequationis, et sumendo $u=\alpha$, erit $\frac{dy}{y}=\alpha dx$ et $y=e^{\alpha x}$, qui valor quoque aequationi differentiali quarti gradus propositae conueniet. Erit autem tantum integrale maxime particulare; etiamsi autem quaternae aequationis $A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4=0$ radices, quae sint α, β, γ, δ, suppeditare queant valorem

$$y = \mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x}$$

qui est integrale completum, tamen hinc non facile patet, qualis futurus sit valor ipsius y, si radicum α, β, γ, δ quaedam fuerint imaginariae vel inter se aequales. Contra vero potius ex valore ipsius y cognito integrale superioris aequationis differentio differentialis inter u et s assignabitur. Erit enim $u=\frac{dy}{ydx}$ et $s=\frac{du}{dx}$; ideoque

$$u = \frac{\mathfrak{A}\alpha e^{\alpha x} + \mathfrak{B}\beta e^{\beta x} + \mathfrak{C}\gamma e^{\gamma x} + \mathfrak{D}\delta e^{\delta x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x}} \quad \text{et}$$

$$s = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha-\beta)^2 e^{(\alpha+\beta)x} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}(\alpha-\gamma)^2 e^{(\alpha+\gamma)x} + \mathfrak{A}\mathfrak{D}(\alpha-\delta)^2 e^{(\alpha+\delta)x} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}(\beta-\gamma)^2 e^{(\beta+\gamma)x} + \text{etc.}}{(\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x})^2}$$

Hinc concluditur fore:

$$s+uu = \frac{\begin{array}{l} +\mathfrak{A}^2\alpha^2 e^{2\alpha x} + \mathfrak{B}^2\beta^2 e^{2\beta x} + \mathfrak{C}^2\gamma^2 e^{2\gamma x} + \mathfrak{D}^2\delta^2 e^{2\delta x} \\ +\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha^2+\beta^2)e^{(\alpha+\beta)x} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}(\alpha^2+\gamma^2)e^{(\alpha+\gamma)x} + \text{etc.} \end{array}}{(\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x})^2}$$

quae fractio deprimi potest, eritque

$s+$

$$s+uu = \frac{\mathfrak{A}\alpha^2 e^{\alpha x}+\mathfrak{B}\beta^2 e^{\beta x}+\mathfrak{C}\gamma^2 e^{\gamma x}+\mathfrak{D}\delta^2 e^{\delta x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x}}$$

Cum iam sit

$$u = \frac{\mathfrak{A}\alpha e^{\alpha x}+\mathfrak{B}\beta e^{\beta x}+\mathfrak{C}\gamma e^{\gamma x}+\mathfrak{D}\delta e^{\delta x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x}}$$

si hinc x, quod autem actu fieri nequit, eliminetur, prodibit aequatio inter s et u. Si quidem ponatur $\mathfrak{C}=0$ et $\mathfrak{D}=0$, prodibit aequatio integralis particularis haec

$$s+uu-(\alpha+\beta)u+\alpha\beta=0.$$

Quare si fuerint α et β duae radices huius aequationis

$$A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4=0.$$

aequationi differentio differentiali inter s et u satisfaciet hic valor $s=-\alpha\beta+(\alpha+\beta)u-uu$. In aequatione autem illa non du sed $\frac{du}{s}$ positum est constans, quae consideratio exuetur ponendo $ds=q\,du$: erit enim $\frac{ds}{qs}$ constans ideoque $qs\,dds=q\,ds^2+s\,ds\,dq$, et $dds=\frac{ds^2}{s}+\frac{ds\,dq}{q}$, statuatur iam du constans, erit $dq=\frac{dds}{du}$ et $\frac{dq}{q}=\frac{dds}{ds}$, unde fit $dds=\frac{ds^2}{s}+dds$. Prodibit ergo haec aequatio:

$$du^2(A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4)+s\,du^2(C+3Du+6Eu^2)$$
$$+3Ess\,du^2+s\,du\,ds(D+4Eu)+Es\,ds^2+Ess\,dds=0$$

in qua differentiale du assumtum est constans. Quodsi iam formulae $A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4$ factor trinomialis sit $L+Mu+Nu^2$ erit integrale particulare

$$L+Mu+Nu^2+Ns=0.$$

§. 5. Quoniam autem hic methodum meam integrandi aequationes differentiales altiorum graduum ulterius

 exten-

extendere constitui, regulam quam loco citato dedi paucis repetam. Patet vero methodus mea ad omnes aequationes in hac forma generali contentas:

$$0 = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} + \frac{E\,d^3y}{dx^3} + \frac{F\,d^4y}{dx^4} + \frac{G\,d^5y}{dx^5} + \text{etc.}$$

Vbi differentiale dx positum est constans. Ad huius aequationis integrale finitis terminis expressum inueniendum ex ea formetur sequens forma Algebraica:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + \text{etc.}$$

cuius quaerantur omnes factores reales tam simplices quam trinomiales, inter quos, si qui fuerint inter se aequales, coniunctim repraesententur. Ex quolibet autem factore nascetur integralis pars, et, si omnes istae partes ex singulis factoribus oriundae in vnam summam coniiciantur, habebitur integrale completum aequationis propositae. Ex sequenti autem tabella partes integralis ex singulis factoribus oriundae desumentur.

Factores	Partes Integralis
$z-k$	αe^{kx}
$(z-k)^2$	$(\alpha+\beta x)e^{kx}$
$(z-k)^3$	$(\alpha+\beta x+\gamma x^2)e^{kx}$
$(z-k)^4$	$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)e^{kx}$
etc.	etc.
$zz-2kz\cos.\Phi+kk$	$\alpha e^{kx\cos.\Phi}\sin.kz\sin.\Phi+\mathfrak{A}e^{kx\cos.\Phi}\cos.kx\sin.\Phi$
$(zz-2kz\cos.\Phi+kk)^2$	$(\alpha+\beta x)e^{kx\cos.\Phi}\sin.kx\sin.\Phi+$ $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x)e^{kx\cos.\Phi}\cos.kx\sin.\Phi$
$(zz-2kz\cos.\Phi+kk)^3$	$(\alpha+\beta x+\gamma x^2)e^{kx\cos.\Phi}\sin.kx\sin.\Phi+$ $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2)e^{kx\cos.\Phi}\cos.kx\sin.\Phi$
$(zz-2kx\cos.\Phi+kk)^4$	$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)e^{kx\cos.\Phi}\sin.kx\sin.\Phi+$ $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3)e^{kx\cos.\Phi}\cos.kx\sin.\Phi$
etc.	etc.

In

In his formulis litterae α, β, γ, δ, etc. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. denotant conſtantes quantitates arbitrarias. Hinc in partibus integralis colligendis cauendum eſt, ne eadem harum litterarum bis ſcribatur, quia alioquin extenſio integralis reſtringeretur. Oportebit ergo has conſtantes continuo nouis litteris indicari, hocque modo in aequationem integralem tot ingredientur conſtantes arbitrariae, quoti gradus fuerit aequatio differentialis propoſita: id quod certum eſt indicium integrale hoc modo inuentum eſſe completum, atque in aequatione differentiali nihil contineri, quod non ſimul in hac aequatione integrali contineatur. Ceterum in eo loco, vbi hanc methodum fuſius expoſui, pluribus eam exemplis illuſtraui, ita vt circa eius applicationem nulla difficultas locum habere queat.

§. 6. Aequatio autem generalior, cuius integrationem hic ſum traditurus, denotante X functionem quamcunque ipſius x ita ſe habet:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc.}$$

in qua iterum differentiale dx conſtans eſt aſſumtum. Hanc igitur aequationem quotumque conſtet terminis, ſeu ad quemcunque ea differentialium gradum aſcendat, ſemper per quantitates finitas integrari poſſe affirmo, perinde atque aequationem ante memoratam, quae tanquam caſus ex hac naſcitur, ſi fuerit functio $X = 0$. Ac primo quidem patet, rem nulli difficultati fore ſubiectam, ſi X fuerit functio rationalis integra ipſius x, ſeu ſi habeat huiusmodi formam:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$$

Quodsi enim functio X ita sit comparata, adhibeatur huiusmodi substitutio:

$$y = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \text{etc.} + v \text{ eritque}$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + \mathfrak{D}x^2 + \text{etc.} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D}x + \text{etc.} + \frac{ddv}{dx^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6\mathfrak{D} + \text{etc.} + \frac{d^3v}{dx^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \text{etc.} + \frac{d^4v}{dx^4}$$

etc.

Ponamus autem esse $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, atque in valore ipsius y omnes termini post $\mathfrak{D}x^3$ euanescentes erunt ponendi. Facta ergo substitutione habebitur:

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 =$$

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}A + \mathfrak{B}Ax + \mathfrak{C}Ax^2 + \mathfrak{D}Ax^3 = Av + \frac{Bdv}{dx} + \frac{Cddv}{dx^2} + \frac{Dd^3v}{dx^3} + \frac{Ed^4v}{dx^4} + \text{etc.}\\ &\mathfrak{B}B + 2\mathfrak{C}Bx + 3\mathfrak{D}Bx^2\\ &2\mathfrak{C}C + 6\mathfrak{D}Cx\\ &6\mathfrak{D}D\end{aligned}$$

Hic iam coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ita definiri poterunt, vt omnes termini, in quibus non inest v eiusue differentialia, euanescant, fiet enim:

$$\mathfrak{D} = \frac{\delta}{A}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\gamma}{A} - \frac{3\mathfrak{D}B}{A} = \frac{\gamma}{A} - \frac{3\delta B}{AA}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\beta}{A} - \frac{2\mathfrak{C}B}{A} - \frac{6\mathfrak{D}C}{A} = \frac{\beta}{A} - \frac{2\gamma B}{A^2} + \frac{6\delta B^2}{A^3} - \frac{6\delta C}{AA}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha}{A} - \frac{\mathfrak{B}B}{A} - \frac{2\mathfrak{C}C}{A} - \frac{6\mathfrak{D}D}{A} = \frac{\alpha}{A} - \frac{\beta B}{A^2} + \frac{2\gamma B^2}{A^3} + \frac{12\delta BC}{A^3} - \frac{6\delta B^3}{A^4} - \frac{2\gamma C}{A^2} - \frac{6\delta D}{A^2}$$

His ergo valoribus pro $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ assumtis erit

$0 =$

$$0 = Av + \frac{B\,dv}{dx} + \frac{C\,ddv}{dx^2} + \frac{D\,d^3v}{dx^3} + \frac{E\,d^4v}{dx^4} + \text{etc.}$$

quae aequatio ope superioris methodi integrabitur.

§. 7. Quo autem facilius aequationis propositae, qualiscunque X fuerit functio ipsius x integrale eruamus, a casibus simplicioribus inchoemus, ac primo quidem sit aequatio tantum differentialis primi gradus,

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx}.$$

quam patet integrabilem reddi posse, si multiplicetur per huiusmodi formam $e^{\alpha x}dx$ denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$. Fiet enim

$$e^{\alpha x}X\,dx = Ae^{\alpha x}y\,dx + Be^{\alpha x}dy.$$

Atque α ita comparatum esse oportet, vt pars posterior sit differentiale cuiuspiam quantitatis finitae: quae ex termino vltimo alia esse nequit nisi $Be^{\alpha x}y$, cuius differentiale cum sit $= Be^{\alpha x}dy + \alpha Be^{\alpha x}y\,dx$ necesse est vt sit $A = \alpha B$ et $\alpha = \frac{A}{B}$. Hoc ergo valore pro α sumto erit

$$\int e^{\alpha x}X\,dx = Be^{\alpha x}y \text{ et } y = \frac{\alpha}{A}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx.$$

§. 8. Sit aequatio proposita differentialis secundi gradus:

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2}.$$

Multiplicetur ea per $e^{\alpha x}dx$ ac definiatur α ita, vt integratio succedat. Habebitur ergo

$$e^{\alpha x}X\,dx = Ae^{\alpha x}y\,dx + Be^{\alpha x}dy + \frac{Ce^{\alpha x}ddy}{dx},$$

cuius integrale sit:

$$\int e^{\alpha x}X\,dx = e^{\alpha x}(A'y + \frac{B'\,dy}{dx})$$

Quo

Quo differentiato habebitur:

$$e^{\alpha x} X dx = e^{\alpha x}\left(\alpha A' y dx + A' dy + \frac{B' ddy}{dx}\right.$$
$$\left. + \alpha B' dy\right)$$

Comparatione ergo facta fiet $B' = C$: $A' = B - \alpha C$ et $A = \alpha B - \alpha^2 C$, debet ergo esse α radix huius aequationis $0 = A - \alpha B + \alpha^2 C$, quae cum habeat duas radices vtramlibet assumere licet; eritque $A' = B - \alpha C$ et $B' = C$. Peruentum est ergo ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$$e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X dx = A' y + \frac{B' dy}{dx}.$$

Ad quam denuo integrandam multiplicetur per $e^{\beta x} dx$ vt habeatur.

$$e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = A' e^{\beta x} y dx + B' e^{\beta x} dy$$

quae vt sit integrabilis, debet esse $\beta = \frac{A'}{B'} = \frac{B - \alpha C}{C}$ seu $\alpha + \beta = \frac{B}{C}$, vnde patet β esse alteram radicem aequationis $0 = A - \alpha B + \alpha^2 C$, eritque integrale:

$$\int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = B' e^{\beta x} y = C e^{\beta x} y.$$

Est vero $\int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x} X dx - \frac{1}{\beta-\alpha}\int e^{\beta x} X dx$

Ergo $Cy = \frac{e^{-\alpha x}}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x} X dx + \frac{e^{-\beta x}}{\alpha-\beta}\int e^{\beta x} X dx.$

In hac aequatione integrali ambae radices α et β aequationis quadraticae $0 = A - Bz + Czz$ aequaliter insunt, et hanc ob rem si istius aequationis radices sint cognitae ex iis statim aequatio integralis formatur. Ista autem aequatio $0 = A - Bz + Czz$ ex ipsa aequatione proposita

$$X = Ay + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2}$$

facilli-

facillime formatur: ſimili ſcilicet modo, quo in caſu $X = 0$ ſumus vſi. Ponatur enim 1 pro y; z pro $\frac{dy}{dx}$; et z^2 pro $\frac{ddy}{dx^2}$, vt prodeat iſta expreſſio $A + Bz + Czz$; cuius factores ſi fuerint $C(z+\alpha)(z+\beta)$; erunt α et β eae ipſae litterae, quae ad aequationem integralem formandam requiruntur.

§. 9. His praemiſſis aditus ad integrationem aequationis integralis non adeo erit difficilis. Sit ergo propoſita haec aequatio:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc.}$$

cuius vltimus terminus ſit $\frac{\Delta d^n y}{dx^n}$. Formetur hinc iſta expreſſio modo ante indicato:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + \Delta z^n = P.$$

quae in factores ſimplices reſoluta ſit:

$$P = D(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta) \text{ etc.}$$

Dico iam ſi aequatio differentialis propoſita per $e^{\alpha x}dx$ multiplicetur eam euadere integrabilem. Erit enim

$$e^{\alpha x}Xdx = e^{\alpha x}dx\left(Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{\Delta d^n y}{dx^n}\right)$$

cuius integrale ponamus eſſe:

$$\int e^{\alpha x}Xdx = e^{\alpha x}\left(A'y + \frac{B'dy}{dx} + \frac{C'ddy}{dx^2} + \frac{D'd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{\Delta d^{n-1}y}{dx^n}\right)$$

Sumto autem differentiali habebitur

$$e^{\alpha x}Xdx = e^{\alpha x}dx\left(\alpha A'y + \frac{A'dy}{dx} + \frac{B'ddy}{dx^2} + \frac{C'd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{\Delta d^n y}{dy^n}\right)$$
$$+ \frac{\alpha B'dy}{dx} + \frac{\alpha C'ddy}{dx^2}$$

 quae

quae si cum proposita conferatur erit:

$$A' = \frac{A}{\alpha};$$
$$B' = \frac{B}{\alpha} - \frac{A}{\alpha^2}$$
$$C' = \frac{C}{\alpha} - \frac{B}{\alpha^2} + \frac{A}{\alpha^3}$$
$$D' = \frac{D}{\alpha} - \frac{C}{\alpha^2} + \frac{B}{\alpha^3} - \frac{A}{\alpha^4}$$

quibus valoribus vsque ad vltimum continuatis, perueniетur ad hanc aequationem:

$$A - B\alpha + C\alpha^2 - D\alpha^3 + E\alpha^4 - \ldots\ldots \pm \Delta\alpha^n = 0$$

cum igitur α sit radix huius aequationis erit $z + \alpha$ factor istius expressionis

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots + \Delta z^n.$$

existente $P = \Delta(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta)$ etc.

§. 10. Prima ergo integratione absoluta erit

$$e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X dx = A'y + \frac{B'dy}{dx} + \frac{C'ddy}{dx^2} + \frac{D'd^3y}{dx^3} + \ldots \frac{\Delta d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$$

Formetur hinc iterum modo ante exposito haec expressio:

$$P' = A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 + \ldots\ldots + \Delta z^{n-1}$$

Cum iam sit:

$$A = \alpha A'$$
$$B = \alpha B' + A'$$
$$C = \alpha C' + B'$$
$$D = \alpha D' + C'$$
etc.

manifestum est fore $P = (\alpha + z)P'$, ideoque $P' = \frac{P}{z+\alpha}$ et

et $P' = \Delta(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta)(z+\varepsilon)$ etc.
Simili ergo modo, quo ſupra vſi ſumus, euincetur hanc aequatione denuo reddi integrabilem, ſi multiplicetur per $e^{\beta x}\,dx$.
Sit igitur aequatio integralis hinc oriunda.

$$\int e^{(\beta-\alpha)x}dx\int e^{\alpha x}X\,dx = e^{\beta x}\left(A''y + \frac{B''dy}{dx} + \frac{C''ddy}{dx^2} + \dots + \frac{\Delta d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$$

fietque comparatione inſtituta

$$A' = \beta A''$$
$$B' = \beta B'' + A''$$
$$C' = \beta C'' + B''$$
$$D' = \beta D'' = C''$$
etc.

Ergo ſi ponatur

$$P'' = A'' + B''z + C''z^2 + D''z^3 + \dots + \Delta z^{n-2}$$

erit $P' = (\beta + z)P''$, et $P'' = \frac{P'}{z+\beta} = \frac{P}{(z+\alpha)(z+\beta)}$ vnde fit $P'' = \Delta(z+\gamma)(z+\delta)(z+\varepsilon)$ etc. ſcilicet hinc duo iam factores $z+\alpha$ et $z+\beta$ ſunt egreſſi. Eſt autem:

$$\int e^{(\beta-\alpha)x}dx\int e^{\alpha x}X\,dx = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x}X\,dx - \frac{1}{\beta-\alpha}\int e^{\beta x}X\,dx$$

vnde aequatio bis integrata reducitur ad hanc formam

$$\frac{e^{-\alpha x}}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x}X\,dx + \frac{e^{-\beta x}}{\alpha-\beta}\int e^{\beta x}X\,dx = A''y + \frac{B''dy}{dx} + \frac{C''ddy}{dx^2} + \frac{D''d^3y}{dx^3} + \dots \frac{\Delta\,d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

§. 11. Cum porro hinc poſito 1 pro y et z pro $\frac{dy}{dx}$ etc. prodeat haec expreſſio,

 $P'' =$

$$P'' = A'' + B''z + C''z^2 + \dots\dots + \Delta z^{n-2}$$

sitque $P'' = \Delta(z+\gamma)(z+\delta)\ z+\varepsilon)$ etc.

manifestum est aequationem vltimo inuentam denuo reddi integrabilem si multiplicetur per $e^{\gamma x}dx$, fit aequatio integralis hinc oriunda haec:

$$\int\frac{e^{(\gamma-\alpha)x}dx}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x}X\,dx + \int\frac{e^{(\gamma-\beta)x}dx}{\alpha-\beta}\int e^{\beta x}X\,dx = e^{\gamma x}\Big(A'''y + \frac{B'''dy}{dx} + \frac{C'''ddy}{dx^2} + \dots\dots + \frac{\Delta d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\Big)$$

fietque ex comparatione terminorum homogeneorum:

$$A'' = \gamma A'''$$
$$B'' = \gamma B''' + A'''$$
$$C'' = \gamma C''' + B'''$$
$$D'' = \gamma D''' + C'''$$
etc.

Quare si ponatur:

$$P''' = A''' + B'''z + C'''z^2 + D'''z^3 + \dots + \Delta z^{n-3}$$

erit $P'' = (\gamma+z)P'''$ et $P''' = \frac{P''}{z+\gamma} = \frac{P}{(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)}$

vnde sequitur fore:

$$P''' = \Delta(z+\delta)(z+\varepsilon)(z+\zeta) \text{ etc.}$$

Cum autem sit generaliter $\int e^{(\mu-\nu)x}dx\int e^{\nu x}X\,dx =$ $\frac{e^{(\mu-\nu)x}}{\mu-\nu}\int e^{\nu x}X\,dx + \frac{1}{\nu-\mu}\int e^{\mu x}X\,dx$, si hinc integralia reducantur reperietur.

$$\frac{e^{-\alpha x}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\int e^{\alpha x}X\,dx + \frac{e^{-\beta x}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}\int e^{\beta x}X\,dx + \frac{e^{-\gamma x}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\int e^{\gamma x}X\,dx$$
$$= A'''y + \frac{B'''dy}{dx} + \frac{C'''ddy}{dx^2} + \frac{D'''d^3y}{dx^3} \dots + \frac{\Delta d^{n-3}y}{dx^{n-3}}.$$

§. 12.

§. 12. Si hoc modo eo vsque progrediamur, quoad nulla amplius differentialia ipsius y supersint, tum ex altera parte aequationis habebitur vnicus terminus $\frac{\Delta d^0 y}{dx^0} = \Delta y$; id quod eueniet, si integratio toties fuerit instituta quot maximus exponens n continet vnitates. Ad hoc ergo vltimum integrale commode exprimendum, cum sit

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + \Delta z^n = \Delta(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)\text{ etc.}$$

formentur ex radicibus α, β, γ, δ, etc. sequentes valores

$$\mathfrak{A} = \Delta(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\varepsilon-\alpha)\text{ etc.}$$
$$\mathfrak{B} = \Delta(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\varepsilon-\beta)\text{ etc.}$$
$$\mathfrak{C} = \Delta(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)(\varepsilon-\gamma)\text{ etc.}$$
$$\mathfrak{D} = \Delta(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)(\varepsilon-\delta)\text{ etc.}$$
$$\mathfrak{E} = \Delta(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)\text{ etc.}$$
etc.

quibus inuentis erit integralis aequatio vltima quaesita:

$$y = \frac{e^{-\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int e^{\alpha x} X\,dx + \frac{e^{-\beta x}}{\mathfrak{B}}\int e^{\beta x} X\,dx + \frac{e^{-\gamma x}}{\mathfrak{C}}\int e^{\gamma x} X\,dx + \text{etc.}$$

quae cum tot contineat terminos, quot gradus fuerit aequatio differentialis proposita.

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{\Delta d^n y}{dx^n}$$

totidem inuoluet constantes arbitrarias, ideoque erit integralis completa.

§. 13. Alio autem modo valores quantitatum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. exprimi possunt, qui plerumque multo commodius negotium conficit. Dico enim fore $\mathfrak{A} = \frac{dP}{dz}$,

 si

si vbique pro z substituatur $-\alpha$, seu si ponatur $z+\alpha = 0$. Cum enim sit

$$P = \Delta(z+\alpha)(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta) \text{ etc.}$$

erit differentiando:

$$\frac{dP}{dz} = \Delta(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta)\text{etc.} + \frac{\Delta(z+\alpha)d.}{dz}(z+\beta)(z+\gamma)(z+\delta)\text{etc.}$$

Si iam ponatur $z = -\alpha$ posterius membrum euanescet, et prius dabit:

$$\frac{dP}{dz} = \Delta(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha) \text{ etc.} = \mathfrak{A}.$$

Cum autem sit $P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + \Delta z^n$ erit:

$$\frac{dP}{dz} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \ldots + n\Delta z^{n-1}$$

ponatur ergo $z = -\alpha$, seu fiat $z+\alpha = 0$, erit

$$\mathfrak{A} = B - 2C\alpha + 3D\alpha^2 - 4E\alpha^3 + \text{etc.} \ldots \pm n\Delta\alpha^{n-1}$$

simili modo reperietur fore

$$\mathfrak{B} = B - 2C\beta + 3D\beta^2 - 4E\beta^3 + \ldots \pm n\Delta\beta^{n-1}$$

$$\mathfrak{C} = B - 2C\gamma + 3D\gamma^2 - 4E\gamma^3 + \ldots \pm n\Delta\gamma^{n-1}$$

etc.

§. 14. Si ergo huiusmodi proponatur aequatio:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc.}$$

quam integrari oporteat, ante omnia ex ea formetur haec expressio Algebraica

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

cuius quaerantur omnes factores simplices, cuiusmodi vnus sit $z+\alpha$, atque quilibet factor dabit partem integralis ita vt omnes partes, quae hoc modo ex singulis factoribus eruuntur, iunctim sumtae exhibeant completum ipsius

ſius y valorem finitum. Scilicet ſi factor ſimplex fuerit inuentur $z + \alpha$, tum quaeratur quantitas $\mathfrak{A}$ vt ſit

$$\mathfrak{A} = B - 2C\alpha + 3D\alpha^2 - 4E\alpha^3 + \text{etc.}$$

qua inuenta erit pars integralis ex hoc factore $z + \alpha$ oriunda haec

$$\frac{e^{-\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{\alpha x} X\, dx.$$

Hinc perſpicitur ſi factor ſimplex formae P fuerit $z - \alpha$; tum fore

$$\mathfrak{A} = B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + \text{etc.}$$

atque integralis partem hinc oriundam eſſe

$$+ \frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{-\alpha x} X\, dx.$$

§. 15. Supereſt autem vt oſtendamus, quomodo iſtae integralis partes ſint comparatae, ſi factorum ſimplicium aliquot fuerint vel inter ſe aequales vel imaginariae. Ex ſuperioribus enim liquet vtroque caſu partes integralis ſingulari modo adornari debere, vt formam finitam et realem obtineant. Sint igitur primo duo factores $z - \alpha$ et $z - \beta$ inter ſe aequales ſeu $\beta = \alpha$, eritque tam $\mathfrak{A} = 0$ quam $\mathfrak{B} = 0$; et vtraque pars integralis euadet infinita, altera quidem affirmatiue altera negatiue, ita vt differentia ſit finita. Ad quam inueniendam ponamus $\beta = \alpha + \omega$, denotante ω quantitatem euaneſcentem. Cum ergo ſit

$$\mathfrak{A} = \Delta(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon) \text{ etc. et}$$

$$\mathfrak{B} = \Delta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\beta - \varepsilon) \text{ etc.}$$

ſumtis

ſumtis litteris α, β, γ, δ, etc. negatiuis, erit,

$$\mathfrak{A} = -\Delta\omega(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon) \text{ etc. et}$$
$$\mathfrak{B} = \Delta\omega(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon) \text{ etc.}$$

Tum vero erit $e^{\beta x} = e^{\alpha x + \omega x} = e^{\alpha x}(1+\omega x)$ et $e^{-\beta x} = e^{-\alpha x}(1-\omega x)$. Hinc pars integralis ex factoribus binis aequalibus $z-\alpha$ et $z-\beta$ oriunda erit

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int e^{-\alpha x} X\,dx + \frac{e^{\alpha x}(1+\omega x)}{\mathfrak{B}}\int e^{-\alpha x}(1-\omega x) X\,dx$$

Ponatur:

$$\mathfrak{A}' = \Delta(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon) \text{ etc.}$$

erit $\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}'\omega$ et $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'\omega$, vnde fiet iſta pars $=$

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'\omega}\left((1+\omega x)\int e^{-\alpha x}(1-\omega x) X\,dx - \int e^{-\alpha x} X\,dx\right) =$$

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'\omega}\left(\omega x\int e^{-\alpha x} X\,dx - \omega\int e^{-\alpha x} X x\,dx\right) =$$

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'}\left(x\int e^{-\alpha x} X\,dx - \int e^{-\alpha x} X x\,dx\right) = \frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'}\int dx\int e^{-\alpha x} X\,dx.$$

quae eſt pars integralis ex factore expreſſionis P quadrato $(z-\alpha)^2$ oriunda.

§. 16. Valor autem ipſius $\mathfrak{A}'$ ſequenti modo commodius exhiberi poterit. Ob $\beta = \alpha$, cum ſit
$P = \Delta(z-\alpha)^2(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon)\text{etc.} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$
ponatur $\Delta(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon)$ etc. $= Q$, ita vt valor ipſius Q praebeat $\mathfrak{A}'$ ſi loco z ponatur α. Erit ergo $P = (z-\alpha)^2 Q$, et differentiando $\frac{dP}{dz} = (z-\alpha)^2\frac{dQ}{dz} + 2(z-\alpha)Q$ atque $\frac{ddP}{dz^2} = (z-\alpha)^2\frac{ddQ}{dz^2} + 4(z-\alpha)\frac{dQ}{dz} + 2Q$; poſito nunc $z = \alpha$ fiet $Q = \frac{ddP}{2dz^2} = \mathfrak{A}'$, orieturque $\mathfrak{A}'$ ſi in $\frac{ddP}{2dz^2}$ ponatur $z = \alpha$. Eſt vero

$\frac{ddP}{2dz^2}$

$$\frac{ddP}{2dz^2} = C + 3Dz + 6Ez^2 + 10Fz^3 + 15Gz^4 + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\mathfrak{A}' = C + 3D\alpha + 6E\alpha^2 + 10F\alpha^3 + 15G\alpha^4 + \text{etc.}$$

Quare si proposita hac aequatione:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc.}$$

expressio hinc formata

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

habeat factorem quadratum $(z-\alpha)^2$, sumatur

$$\mathfrak{A}' = C + 3D\alpha + 6E\alpha^2 + 10F\alpha^3 + 15G\alpha^4 + \text{etc.}$$

eritque pars integralis inde oriunda:

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'}\int dx \int e^{-\alpha x} X\, dx.$$

Sin autem reliqui factores formulae P fuerint cogniti, nempe

$$P = \Delta(z-\alpha)^2(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon) \text{ etc.}$$

erit $\mathfrak{A}' = \Delta(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)$ etc.

§. 17. Ponamus iam tres factores inter se esse aequales, seu sit insuper $\gamma = \alpha$, at ob rationes supra expositas ponamus

$\gamma = \alpha + \omega$, erit $\mathfrak{A}' = -\Delta\omega(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\zeta)$ etc.

et $\mathfrak{C} = \Delta(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)(\gamma-\zeta)$ etc.

seu $\mathfrak{C} = \Delta\omega^2(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\zeta)$ etc.

sit $\mathfrak{A}'' = \Delta(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\zeta)$ etc.

erit $\mathfrak{A}' = -\mathfrak{A}''\omega$ et $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}''\omega^2$. Factisque his substitutionibus tandem reperietur pars integralis ex factore cubico $(z-\alpha)^3$ oriunda haec,

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int dx \int dx \int e^{-\alpha x} X\, dx$$

existente:

$$\mathfrak{A}'' = D + 4E\alpha + 10F\alpha^2 + 20G\alpha^3 + \text{etc.}$$

Facilius autem hoc immediate ex aequalitate trium factorum ostenditur. Sint enim, tres factores quicunque $(z-\alpha)$ $(z-\beta)(z-\gamma)$ ac positos

$$\mathfrak{A} = \Delta(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon) \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{B} = \Delta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\varepsilon) \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{C} = \Delta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon) \text{ etc.}$$

erunt integralis partes hinc oriundae.

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int e^{-\alpha x} X\, dx + \frac{e^{\beta x}}{\mathfrak{B}}\int e^{-\beta x} X\, dx + \frac{e^{\gamma x}}{\mathfrak{C}}\int e^{-\gamma x} X\, dx.$$

Ponatur iam $\beta = \alpha + \omega$ et $\gamma = \alpha + \Phi$, existentibus ω et Φ quantitatibus euanescentibus, ac posito

$$\mathfrak{A}'' = \Delta(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\zeta) \text{ etc.}$$

erit $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''\omega\Phi$; $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}''\omega(\omega-\Phi)$, et $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}''\Phi(\Phi-\omega)$. tum vero erit $e^{\beta x} = e^{\alpha x}(1 + \omega x + \frac{1}{2}\omega^2 x^2)$, $e^{-\beta x} = e^{-\alpha x}$ $(1 - \omega x + \frac{1}{2}\omega^2 x^2)$ et $e^{\gamma x} = e^{\alpha x}(1 + \Phi x + \frac{1}{2}\Phi^2 x^2)$, $e^{-\gamma x} = e^{-\alpha x}$ $(1 - \Phi x + \frac{1}{2}\Phi^2 x^2)$. Quibus substitutis ternae integralis partes abeunt in:

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''\omega\Phi(\omega-\Phi)}\left\{\begin{array}{l}\int e^{-\alpha x} X\, dx(\omega - \Phi + \Phi + \omega\Phi x + \frac{1}{2}\omega^2\Phi x^2 - \omega - \omega\Phi x + \frac{1}{2}\omega\Phi^2 x^2)\\ \int e^{-\alpha x} X x\, dx(-\omega\Phi - \omega\omega\Phi x + \omega\Phi + \omega\Phi\Phi x)\\ \int e^{-\alpha x} X x^2\, dx(\frac{1}{2}\omega\omega\Phi - \frac{1}{2}\omega\Phi\Phi)\end{array}\right.$$

sublatis nunc per diuisionem litteris euanescentibus ω et Φ factor cubicus $(z-\alpha)^3$ dabit hanc integralis partem

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''}\left(\tfrac{1}{2}xx\int e^{-\alpha x}X\,dx-x\int e^{-\alpha x}Xx\,dx+\tfrac{1}{2}\int e^{-\alpha x}Xxx\,dx\right)$$

quae reducitur ad hanc formam ſimpliciorem:

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''}\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx.$$

exiſtente $\mathfrak{A}''=D+4E\alpha+10F\alpha^2+20G\alpha^3+$ etc. ſcilicet valor ipſius $\mathfrak{A}''$ oritur ex formula $\frac{d^3P}{6dz^3}$ poſito $z=\alpha$.

§. 18. Simili modo vlterius procedendo patebit quaternos factores inter ſe aequales ſeu formulae $P=A+Bz+Cz^2+$ etc. factorem $(z-\alpha)^4$ praebiturum fore hanc integralis partem:

$$\frac{e^{\alpha x}\int dx\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx}{E+5F\alpha+15G\alpha^2+35H\alpha^3+\text{etc.}}$$

qui denominator ex formula $\frac{d^4P}{24dz^4}$ naſcitur ponendo $z=\alpha$. Superfluum foret pro pluribus factoribus ſimplicibus inter ſe aequalibus partes integralis, quae ex ipſis conflantur hic exhibere, cum lex, qua hae partes formantur, per ſe ſit manifeſta. Ceterum complicatio plurium ſignorum integralium in his formulis nullam inuoluit difficultatem, cum facillime ad ſimplicia integralia reuocentur. Eſt enim

$$\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx=\frac{x\int e^{-\alpha x}X\,dx-\int e^{-\alpha x}Xx\,dx}{1.}$$

$$\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx=\frac{x^2\int e^{-\alpha x}X\,dx-2x\int e^{-\alpha x}Xx\,dx+\int e^{-\alpha x}Xxx\,dx}{1.\ 2.}$$

$$\int dx\int dx\int dx\int e^{-\alpha x}X\,dx=\frac{x^3\int e^{-\alpha x}X\,dx-3x^2\int e^{-\alpha x}Xx\,dx+3x\int e^{-\alpha x}Xxx\,dx-\int e^{-\alpha x}Xx^3\,dx}{1.\ 2.\ 3.}$$

etc.

§. 19. Expeditis factoribus aequalibus pergo ad factores imaginarios. Sint ergo formulae
$P = \Delta(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon)$ etc. $= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$ etc. bini factores $z-\alpha$ et $z-\beta$ imaginarii, qui hoc non obstante multiplicato praebeant productum reale

$$zz - 2kz \operatorname{cos.} \Phi + kk$$

erit ergo $\alpha = k \operatorname{cos.} \Phi + k\sqrt{-1}.\operatorname{sin.} \Phi$

et $\beta = k \operatorname{cos.} \Phi - k\sqrt{-1}.\operatorname{sin.} \Phi$

harumque litterarum potestates quaecunque ita se habebunt.

$$\alpha^n = k^n \operatorname{cos.} n\Phi + k^n\sqrt{-1}.\operatorname{sin.} n\Phi$$
$$\beta^n = k^n \operatorname{cos.} n\Phi - k^n\sqrt{-1}.\operatorname{sin} n\Phi$$

Iam primo erit:

$$e^{\alpha x} = e^{kx \operatorname{cos.} \Phi}\left(1 + \frac{k\sqrt{-1}}{1}x\operatorname{sin.}\Phi - \frac{kk}{1.2}x^2\operatorname{sin.}\Phi^2 - \frac{k^3\sqrt{-1}}{1.2.3}x^3\operatorname{sin.}\Phi^3 + \frac{k^4}{1.2.3.4}x^4\operatorname{sin.}\Phi^4 - \text{etc}\right.$$

ideoque

$$e^{\alpha x} = e^{kx \operatorname{cos.} \Phi}(\operatorname{cos} kx\operatorname{sin} \Phi + \sqrt{-1}.\operatorname{sin.} kx\operatorname{sin.}\Phi)$$
$$e^{\beta x} = e^{kx \operatorname{cos.} \Phi}(\operatorname{cos.} kx\operatorname{sin.} \Phi - \sqrt{-1}.\operatorname{sin.} kx\operatorname{sin.}\Phi)$$
$$e^{-\alpha x} = e^{-kx \operatorname{cos.} \Phi}(\operatorname{cos.} kx\operatorname{sin.} \Phi - \sqrt{-1}.\operatorname{sin.} kx\operatorname{sin.}\Phi)$$
$$e^{-\beta x} = e^{-kx \operatorname{cos.} \Phi}(\operatorname{cos.} kx\operatorname{sin.} \Phi + \sqrt{-1}.\operatorname{sin.} kx\operatorname{sin.}\Phi)$$

Deinde cum sit:

$$\mathfrak{A} = B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + 5F\alpha^4 + \text{etc. et}$$
$$\mathfrak{B} = B + 2C\beta + 3D\beta^2 + 4E\beta^3 + 5F\beta^4 + \text{etc.}$$

superioribus valoribus pro α et β substitutis habebitur

$$\mathfrak{A} = \begin{array}{l} B + 2Ck\operatorname{cos}\Phi + 3Dk^2\operatorname{cos.}2\Phi + 4Ek^3\operatorname{cos.}3\Phi + \text{etc.} \\ + (2Ck\operatorname{sin.}\Phi + 3Dk^2\operatorname{sin.}2\Phi + 4Ek^3\operatorname{sin.}3\Phi + \text{etc.})\sqrt{-1} \end{array}$$

$$\mathfrak{B} = \begin{array}{l} B + 2Ck\operatorname{cos.}\Phi + 3Dk^2\operatorname{cos.}2\Phi + 4Ek^3\operatorname{cos.}3\Phi + \text{etc.} \\ - (2Ck\operatorname{sin}\Phi + 3Dk^2\operatorname{sin.}2\Phi + 4Ek^3\operatorname{sin.}3\Phi + \text{etc.})\sqrt{-1}. \end{array}$$

§. 20.

§. 20. Cum autem $z-\alpha$ et $z-\beta$ sint factores formulae $P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc. erit

$$A + Bk\cos.\Phi + Ck^2\cos.2\Phi + Dk^3\cos.3\Phi + Ek^4\cos.4\Phi + \text{etc.} = 0$$

et $Bk\sin.\Phi + Ck^2\sin.2\Phi + Dk^3\sin.3\Phi + Ek^4\sin.4\Phi + \text{etc.} = 0$

Ponatur nunc:

$$\mathfrak{M} = B + 2Ck\cos.\Phi + 3Dk^2\cos.2\Phi + 4Ek^3\cos.3\Phi + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{N} = 2Ck\sin.\Phi + 3Dk^2\sin.2\Phi + 4Ek^3\sin.3\Phi + \text{etc.}$$

atque fiet:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}$$

sicque imaginaria a realibus erunt separata. Cum nunc ex ambobus factoribus $z-\alpha$ et $z-\beta$ nascantur istae integralis partes

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}}\int e^{-\alpha x}X\,dx + \frac{e^{\beta x}}{\mathfrak{B}}\int e^{-\beta x}X\,dx$$

hae abibunt in hanc formam:

$$\frac{(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1})e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}X\,dx + (\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1})e^{\beta x}\int e^{-\beta x}X\,dx}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}$$

At est:

$$e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}X\,dx = \begin{cases} +e^{kx\cos.\Phi}\cos.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi \\ -\sqrt{-1}.e^{kx\cos.\Phi}\cos.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin.\Phi \\ +\sqrt{-1}.e^{kx\cos.\Phi}\sin.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi \\ +e^{kx\cos.\Phi}\sin.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin.\Phi \end{cases}$$

$$e^{\beta x}\int e^{-\beta x}X\,dx = \begin{cases} +e^{kx\cos.\Phi}\cos.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi \\ +\sqrt{-1}.e^{kx\cos.\Phi}\cos.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin.\Phi \\ -\sqrt{-1}.e^{kx\cos.\Phi}\sin.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi \\ +e^{kx\cos.\Phi}\sin.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin.\Phi \end{cases}$$

Partes ergo ambae integrales transibunt, imaginariis se mutuo sublatis, in hanc formam,

$$\frac{2\mathfrak{M}e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}(\cos.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi+\sin.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin.\Phi)$$

$$+\frac{2\mathfrak{N}e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}(\sin.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi-\cos.kx\sin.\Phi\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin.\Phi)$$

quae etiam hoc modo exprimi potest:

$$\frac{2e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left\{\begin{matrix}(\mathfrak{M}\cos.kx\sin.\Phi+\mathfrak{N}\sin.kx\sin.\Phi)\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi+\\(\mathfrak{M}\sin.kx\sin.\Phi-\mathfrak{N}\cos.kx\sin.\Phi)\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin.\Phi\end{matrix}\right\}$$

Haec ergo pars integralis oritur ex formulae

$P=A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ etc. factore trinomiali

$zz-2kz\cos.\Phi+kk.$

§. 21. Simili modo si bini huiusmodi factores trinomiales fuerint inter se aequales, seu si formula

$$P=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{etc.}$$

factorem habuerit $(zz-2kz\cos.\Phi+kk)^2$, pars integralis hinc oriunda reperietur ex formulis pro binis factoribus simplicibus aequalibus supra inuentis reperietur. Ponatur nempe

$$\mathfrak{M}'=C+3Dk\cos.\Phi+6Ek^2\cos.2\Phi+10Fk^3\cos.3\Phi+\text{etc.}$$

$$\mathfrak{N}'=\quad 3Dk\sin.\Phi+6Ek^2\sin.2\Phi+10Fk^3\cos.4\Phi+\text{etc.}$$

eritque integralis pars hinc oriunda,

$$\frac{2e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'+\mathfrak{N}\mathfrak{N}'}\left\{\begin{matrix}(\mathfrak{M}'\cos.kx\sin.\Phi+\mathfrak{N}'\sin.kx\sin.\Phi)\int dx\int e^{kx\cos.\Phi}X\,dx\cos.kx\sin.\Phi+\\(\mathfrak{M}'\sin.kx\sin.\Phi-\mathfrak{N}'\cos.kx\sin.\Phi)\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}X\,dx\sin.kx\sin.\Phi\end{matrix}\right\}$$

Sin autem tres factores trinomiales radices imaginarias continentes fuerint inter se aequales, seu si formulae

$P=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+$ etc.

factor fuerit $(zz-2kz\cos.\Phi+kk)^3$ statuatur

$\mathfrak{M}''=$

$$\mathfrak{M}'' = D + 4Ek\cos.\Phi + 10Fk^2\cos.2\Phi + 20Gk^3\cos.3\Phi + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N}'' = \quad 4Ek\sin.\Phi + 10Fk^2\sin.2\Phi + 20Gk^3\sin.3\Phi + \text{etc.}$$

atque pars integralis ex hoc factore oriunda erit

$$\frac{2e^{kx\cos.\Phi}}{\mathfrak{M}''\mathfrak{M}''+\mathfrak{N}''\mathfrak{N}''}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}''\cos.kx\sin.\Phi+\mathfrak{N}''\sin.kx\sin.\Phi)\int dx\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\cos.kx\sin.\Phi+ \\ (\mathfrak{M}''\sin.kx\sin.\Phi-\mathfrak{N}''\cos.kx\sin.\Phi)\int dx\int dx\int e^{-kx\cos.\Phi}Xdx\sin.kx\sin.\Phi\end{array}\right\}$$

Hinc igitur iam lex perſpicitur, ſecundum quam iſtae integralis partes formari debent, ſi maior poteſtas formulae $zz - 2kz\cos.\Phi + kk$ fuerit factor ipſius P: ideoque omnes caſus, qui vnquam occurrere poſſunt hinc conficientur.

§. 22. Ex his ergo ſequenti modo reſolui poterit hoc

Problema.

Inuenire valorem ipſius y in quantitatibus finitis expreſſum, qui ipſi conuenit ex hac aequatione differentiali cuiuscunque gradus:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5}\ \text{etc.}$$

vbi differentiale dx ponitur conſtans, atque X denotat functionem quamcunque ipſius x.

Solutio.

Ex aequatione propoſita formetur ſequens formula Algebraica:

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$$

cuius quaerantur omnes factores reales tam ſimplices, quam trinomiales, quippe qui factorum ſimplicium imaginariorum vices ſuſtinent; et ſi qui horum factorum inter

ſe

ſe fuerint aequales, ii coniunctim repraeſententur. Quo facto pro ſingulis factoribus quaerantur conuenientes integralis partes, atque omnes iſtae partes ex cunctis factoribus oriundae, ſi in vnam ſummam colligantur, dabunt valorem ipſius y quaeſitum, qui erit integrale completum aequationis propoſitae. Sequenti autem modo ex factoribus formulae P integralis partes reperientur.

I. *Si formulae* P *factor ſit* $z-k$

Ponatur $\mathfrak{R} = B + 2Ck + 3Dk^2 + 4Ek^3 + 5Fk^4 +$ etc. eritque integralis pars huic factori $z-k$ reſpondens:

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int e^{-kx} X\,dx.$$

II. *Si formulae* P *factor ſit* $(z-k)^2$

Ponatur $\mathfrak{R} = C + 3Dk + 6Ek^2 + 10Fk^3 + 15Gk^4 +$ etc. eritque integralis pars factori $(z-k)^2$ reſpondens:

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int dx \int e^{-kx} X\,dx.$$

III. *Si formulae* P *factor ſit* $(z-k)^3$

Panatur $\mathfrak{R} = D + 4Ek + 10Fk^2 + 20Gk^3 + 35Hk^4 +$ etc. eritque integralis pars factori $(z-k)^3$ reſpondens:

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int dx \int dx \int e^{-kx} X\,dx.$$

IV. *Si formulae* P *factor ſit* $(z-k)^4$

Ponatur $\mathfrak{R} = E + 5Fk + 15Gk^2 + 35Hk^3 + 70Ik^4 +$ etc. eritque integralis pars factori $(z-k)^4$ reſpondens:

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int dx \int dx \int dx \int e^{-kx} X\,dx.$$

V. *Si*

V. *Si formulae* P *factor ſit* $zz - 2kz\,\mathrm{cof.}\,\Phi + kk$

Ponatur :

$$\mathfrak{M} = B + 2Ck\,\mathrm{cof.}\,\Phi + 3Dk^2\,\mathrm{cof.}\,2\Phi + 4Ek^3\,\mathrm{cof.}\,3\Phi + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N} = 2Ck\,\mathrm{fin.}\,\Phi + 3Dk^2\,\mathrm{fin.}\,2\Phi + 4Ek^3\,\mathrm{fin.}\,3\Phi + \text{etc.}$$

erit pars integralis factori $zz - 2kz\,\mathrm{cof.}\,\Phi + kk$ reſpondens :

$$\frac{2e^{kx\,\mathrm{cof.}\,\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}\,\mathrm{cof.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi + \mathfrak{N}\,\mathrm{fin}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi)\int e^{-kx\,\mathrm{cof.}\,\Phi}X\,dx\,\mathrm{cof.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi + \\ (\mathfrak{M}\,\mathrm{fin.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi - \mathfrak{N}\,\mathrm{cof.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi)\int e^{-kx\,\mathrm{cof.}\,\Phi}X\,dx\,\mathrm{fin.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi\end{array}\right\}$$

VI. *Si formulae* P *factor ſit* $(zz - 2kz\,\mathrm{cof.}\,\Phi + kk)^2$

Ponatur :

$$\mathfrak{M} = C + 3Dk\,\mathrm{cof.}\,\Phi + 6Ek^2\,\mathrm{cof.}\,2\Phi + 10Fk^3\,\mathrm{cof.}\,3\Phi + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N} = 3Dk\,\mathrm{fin.}\,\Phi + 6Ek^2\,\mathrm{fin.}\,2\Phi + 10Fk^3\,\mathrm{fin.}\,3\Phi + \text{etc.}$$

erit pars integralis factori $(zz - 2kz\,\mathrm{cof.}\,\Phi + kk)^2$ reſpondens :

$$\frac{2e^{kx\,\mathrm{cof.}\,\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}\,\mathrm{cof}\,kx\,\mathrm{fin}\,\Phi + \mathfrak{N}\,\mathrm{fin.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi)\int dx\int e^{-kx\,\mathrm{cof.}\,\Phi}X\,dx\,\mathrm{cof.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi + \\ (\mathfrak{M}\,\mathrm{fin.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi - \mathfrak{N}\,\mathrm{cof.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi)\int dx\int e^{-kx\,\mathrm{cof.}\,\Phi}X\,dx\,\mathrm{fin.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi\end{array}\right\}$$

VII. *Si formulae* P *factor ſit* $(zz - 2kz\,\mathrm{cof.}\,\Phi + kk)^3$

Ponatur :

$$\mathfrak{M} = D + 4Ek\,\mathrm{cof.}\,\Phi + 10Fk^2\,\mathrm{cof.}\,2\Phi + 20Gk^3\,\mathrm{cof.}\,3\Phi + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N} = 4Ek\,\mathrm{fin.}\,\Phi + 10Fk^2\,\mathrm{fin.}\,2\Phi + 20Gk^3\,\mathrm{fin.}\,3\Phi + \text{etc.}$$

erit pars integralis factori $(zz - 2kz\,\mathrm{cof.}\,\Phi + kk)^3$ reſpondens :

$$\frac{2e^{kx\,\mathrm{cof.}\,\Phi}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{M}\,\mathrm{cof.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi + \mathfrak{N}\,\mathrm{fin.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi)\int dx\int dx\int e^{-kx\,\mathrm{cof.}\,\Phi}X\,dx\,\mathrm{cof.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi + \\ (\mathfrak{M}\,\mathrm{fin.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi - \mathfrak{N}\,\mathrm{cof.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi)\int dx\int dx\int e^{-kx\,\mathrm{cof.}\,\Phi}X\,dx\,\mathrm{fin.}\,kx\,\mathrm{fin.}\,\Phi\end{array}\right\}$$

etc.

Omnes igitur iſtae partes ſingulis factoribus formulae P reſpondentes in vnam ſummam collectae dabunt valorem ipſius y quaeſitum. Q. E. I.

§. 23. Explicata hac regula, cuius ope omnes aequationes differentiales in forma generali contentae inte-

 grari

grari possint, aliquot exempla adiungam, ex quibus regulae huius vsus facilius perspicietur.

Exempl. I. Proposita sit haec aequatio differentialis secundi gradus.

$$X = y - \frac{ddy}{dx^2}$$

Hinc igitur formula Algebraica P erit $= 1 - zz$ cuius factores sunt $z + 1$ et $z - 1$. et ex formula prima erit $\mathfrak{R} = \frac{dP}{dz} = -2z$. pro factore ergo $z + 1$ ob $k = -1$ erit $\mathfrak{R} = 2$ et pars integralis $= \frac{e^{-x}}{2} \int e^x X dx$. Pro altero factore est $k = 1$ et $\mathfrak{R} = -2$, cui respondet pars integralis $-\frac{e^x}{2} \int e^{-x} X dx$, quibus partibus collectis erit integrale quaesitum.

$$y = \tfrac{1}{2} e^{-x} \int e^x X dx - \tfrac{1}{2} e^x \int e^{-x} X dx.$$

Exempl. 2. Proposita sit haec aequatio:

$$X = y - \frac{3a\,dy}{dx} + \frac{3aa\,ddy}{dx^2} - \frac{a^3 d^3 y}{dx^3}$$

Erit ergo $P = 1 - 3az + 3aazz - a^3 z^3 = (1 - az)^3$. Sumenda ergo est formula tertia, eritque $k = \frac{1}{a}$, et $\mathfrak{R} = \frac{d^3 P}{6 dz^3} = -a^3$, vnde prodit integrale quaesitum

$$y = -\tfrac{1}{a^3} e^{x:a} \int dx \int dx \int e^{-x:a} X dx \text{ seu}$$

$$y = -\tfrac{1}{a^3} e^{x:a} (x \int dx \int e^{-x:a} X dx - \int x dx \int e^{-x:a} X dx) \text{ seu}$$

$$y = -\tfrac{1}{a^3} e^{x:a} (\tfrac{1}{2} xx \int e^{-x:a} X dx - x \int e^{-x:a} X x dx + \tfrac{1}{2} \int e^{-x:a} X xx dx)$$

Exempl. 3. Proposita sit haec aequatio:

$$X = y + \frac{aa\,ddy}{dx^2}$$

Erit ergo $P = 1 + aazz$, quae ad formulam V pertinet. Erit nempe cos. $\Phi = 0$ sin. $\Phi = 1$, et $k = \frac{1}{a}$. Porro ob

A =

$A=1$, $B=0$ et $C=aa$, erit $\mathfrak{M}=0$, et $\mathfrak{N}=2a$, vnde erit integrale:

$$y=\tfrac{1}{a}\sin.\tfrac{x}{a}\int X\,dx\cos.\tfrac{x}{a}-\tfrac{1}{a}\cos.\tfrac{x}{a}\int X\,dx\sin.\tfrac{x}{a}.$$

Exempl. 4. Proposita sit haec aequatio:

$$X=y+\frac{a^3d^3y}{dx^3}$$

Erit ergo $P=1+a^3z^3$, cuius duo sunt factores $1+az$ et $1-az+aazz$, Prior ad formam $z-k$ reductus, dat $k=-\frac{1}{a}$; et ob $A=1$, $B=0$, $C=0$, et $D=a^3$, erit ex formula prima $\mathfrak{K}=3a$, et pars integralis:

$$\frac{1}{3a}e^{-x:a}\int e^{x:a}X\,dx.$$

Alter factor $1-az+aazz$ seu $zz-\frac{z}{a}+\frac{1}{aa}$ cum formula V comparatus, dat $k=\frac{1}{a}$; $\cos\Phi=\frac{1}{2}$ et $\sin\Phi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ atque $\Phi=60°$. Deinde est $\mathfrak{M}=3a\cos.120°=-\frac{3}{2}a$, et $\mathfrak{N}=3a\sin.120°=\frac{3a\sqrt{3}}{2}$, vnde $\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2=9aa$, atque $\frac{2\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}=-\frac{1}{3a}$ et $\frac{2\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}=\frac{\sqrt{3}}{3a}$. Pars integralis ergo hinc oriunda est:

$$\frac{1}{3a}e^{x:2a}\left(-\cos\frac{x\sqrt{3}}{2a}+\sqrt{3}.\sin.\frac{x\sqrt{3}}{2a}\right)\int e^{-x:2a}X\,dx\cos.\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$
$$+\frac{1}{3a}e^{x:2a}\left(-\sin.\frac{x\sqrt{3}}{2a}-\sqrt{3}.\cos.\frac{x\sqrt{3}}{2a}\right)\int e^{-x:2a}X\,dx\sin.\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$

seu
$$-\frac{2}{3a}e^{x:2a}\cos.\left(\frac{x\sqrt{3}}{2a}+60°\right)\int e^{-x:2a}X\,dx\cos.\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$
$$-\frac{2}{3a}e^{x:2a}\sin.\left(\frac{x\sqrt{3}}{2a}+60°\right)\int e^{-x:2a}X\,dx\sin.\frac{x\sqrt{3}}{2a}.$$

Hinc igitur integrale quaesitum erit:

$$y=\frac{1}{3a}e^{-x:a}\int e^{x:a}X\,dx-\frac{2}{3a}e^{x:2a}\cos.\left(\frac{x\sqrt{3}}{2a}+60°\right)\int e^{-x:2a}X\,dx\cos.\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$
$$-\frac{2}{3a}e^{x:2a}\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2a}+60°\right)\int e^{-x:2a}X\,dx\sin.\frac{x\sqrt{3}}{2a}$$

Haec ergo exempla sufficiunt ad regulam pro quouis casu oblato accommodandam.

DE

SERIERVM DETERMINATIONE

SEV

NOVA METHODVS INVENIENDI TERMINOS GENERALES SERIERVM.

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Cum lex progressionis, quam termini cuiusque seriei tenent, in infinitum variare possit, non solum omnes diuersae serierum species, sed etiam ne genera quidem, quantumuis late extendantur, enumerari posse videntur. Hinc duae pluresque series dantur, quae etiamsi tot, quot quis voluerit, habeant terminos communes, tamen inter se discrepent, ac maxime diuersis legibus contineantur. Qui amplissimum serierum campum vel obiter inspexerit, facile intelliget, naturam seriei non determinari, quotcunque etiam eius termini exhibeantur. Sic si quaeratur, qualis sit series, quae ab his incipiat terminis: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15; quaestio maxime est indeterminata; et praeter seriem numerorum imparium naturali ordine procedentium innumerabiles aliae assignari possint series, quae ab iisdem terminis incipiant: neque iste determinationis defectus ad certum terminorum datorum numerum adstringitur, sed quantuscunque is fuerit, infinitis seriebus communis esse potest.

§ 2. Clarius autem hoc perspicietur, si naturam serierum ad Geometriam transferamus. Quaelibet enim series

ſeries per lineam curuam repraeſentari poteſt, cuius applicatae per ipſos ſeriei terminos exprimantur, dum abſciſſae eorum indices, ſeu numeros, qui ordinem cuiusque termini deſignant, referunt. Hoc modo quilibet ſeriei terminus punctum in linea curua delinit, quod datae abſciſſae reſpondet. Quare ſi ſeries requiratur, quae tot, quot libuerit, habeat terminos datos, quaeſtio huc redit, vt quaeratur linea curua, quae per totidem puncta data tranſeat. Perſpicuum autem eſt, quotcunque etiam data fuerint puncta, ſemper innumerabiles lineas curuas aſſignari poſſe, quae per ſingula ſimul tranſeant. Quod cum NEVTONVS *de ſolis curuis parabolicis* oſtendiſſet, ſi non ſolum omnes curuae Algebraicae, ſed etiam tranſcendentes admittantur, dubium eſt nullum, quin numerus curuarum ſatisfacientium inſuper infinities fiat maior.

§. 3. Magis mirum videbitur, ſi dixero, ſeriem nondum determinari, etiamſi innumeri eius termini dentur. Sic ſi hanc ſeriem $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +$ etc. ita definiam, vt dicam, in ea omnes numeros integros naturali ordine contineri, quis non putet hanc ſeriem penitus eſſe determinatam? cum cuiuis ſeriei loco ſuus terminus ſit aſſignatus: in loco enim, qui x vnitatibus ab initio diſtat, erit terminus $=$ ipſi numero x, ſeu terminus, cuius index $= x$, ipſe quoque erit $= x$. Quatenus autem illa ſeries ita vt factum eſt deſcribitur, plus inde non conſtat, niſi indici x, ſi fuerit x, numerus integer, reſpondere terminum $= x$: ſin autem pro indice x aſſumatur numerus fractus, nulla adhuc ratio adeſt, qua euinceretur, terminum iſti indici x reſpondentem eſſe $= x$. Oſtendam autem, ſi pro hac ſerie

 termi-

terminus indici x respondens ponatur $= y$, infinitis modis fieri posse, vt quoties x sit numerus integer, toties semper fiat $y = x$, etiamsi numeris fractis pro x sumendis, valores ipsius y ab x discrepent. Hinc etsi omnes seriei termini, qui indicibus integris respondent, sint determinati, intermedios tamen, qui indices habent fractos infinitis variis modis definire licet, ita vt interpolatio istius seriei maneat indeterminata.

§. 4. Quod, quo clarius perspiciatur, ad arcus circulares est recurrendum: cum enim posita semicircumferentia circuli $= \pi$ cuius radius sit $= 1$; sit sinus arcus $n\,\pi = 0$, quoties n est numerus integer: manifestum est, si ponatur $y = x + P$ sin. $\pi\,x$, denotante P, vel quantitatem constantem, vel functionem quamcunque ipsius x; ac pro x successiue ponantur indices integri $1, 2, 3, 4, 5$, etc: tum valores ipsius y futuros esse $= 1, 2, 3, 4, 5$, etc. perinde ac si esset $P = 0$. Neque tamen termini intermedii, qui indicibus fractis respondent, his ipsis indicibus erunt aequales. Sit enim e. g. $P = x\,x$ et ponatur $- = \frac{1}{2}$; ob sin. $\frac{1}{2}\,\pi = 1$, fiet terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.\ 1 = \frac{3}{4}$. Infinitae autem aliae huiusmodi expressiones excogitari possunt, quae aeque satisfaciant, cuiusmodi sunt: $y = x + P$ sin. $\pi\,x + Q$ sin. $2\,\pi\,x + R$ sin. $3\,\pi\,x + S$ sin. $4\,\pi\,x$ etc. quibus interpolatio multo magis indeterminata redditur.

§. 5. Simile exemplum seriei, quae determinata videri queat, iam ante aliquod tempus exhibui: inueneram enim expressionem, seu functionem ipsius x, quae si loco x potestas quaecunque ipsius 10. ponatur, ipsi exponenti huius potestatis aequalis fiat, siquidem hic exponens sit numerus integer affirmatiuus. Functio scilicet illa ipsius x, quam

quam littera y indicabo, ita erat comparata, vt posito $x=1$, fiat $y=0$; et, si ponatur $x=10^n$, existente n numero integro affirmatiuo, fit semper $y=n$: vnde sequi videbatur, functionem y semper fore logarithmum vulgarem ipsius x. Nihilo vero minus monstraui, si pro x non quaepiam denarii potestas substituatur, valorem ipsius y saepe numero non parum a logarithmo numeri x discrepare. Facta ergo serie, cuius sint

Indices 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, etc. et
termini 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.

ad descriptionem logarithmorum non sufficit, si quis dicat, logarithmos esse terminos medios inferioris seriei, qui indicibus in superiori serie assumtis respondeant.

§. 6. Cum igitur natura seriei non ex aliquot eius terminis, etiamsi eorum numerus sit infinitus, determinetur; propterea quod interpolatio nihilominus maneat indeterminata, infinitisque modis absolui possit; facile perspicitur, quam incertae sint omnes illae interpolandi methodi, quae negotium ex solis terminis integros indices habentibus perficere docent. Neque enim interpolatio pro certa haberi poterit, nisi ipsa seriei natura spectetur, eiusque ratio in operatione habeatur. Perfecte autem natura seriei cognoscitur, si eius terminus generalis, seu formula, quae cuiuis indici x, siue integro, siue fracto, siue etiam surdo, terminum respondentem exhibeat, fuerit cognita. Hoc enim modo non solum omnes seriei termini, qui indicibus integris respondent, determinantur, sed etiam termini, qui indicibus quibuscunque non integris conueniunt, sine ambiguitate definiuntur; sicque interpolationis negotium nulla amplius incertitudine impeditur.

§. 7.

§. 7. Habentur autem praeter terminum generalem innumerabiles alii modi feries formandi: interim tamen omnes ifti modi commode ad tria genera reuocari poffunt. Ad primum genus refero eos ferierum formandarum modos, quibus terminus quisque feriei per folum indicem refpondentem determinatur; quod cum per certas operationes in hunc finem inftituendas efficiatur, formula iftas operationes in genere complectens ipfe erit terminus generalis feriei, quo pacto feriem abfolute ac perfectiffime determinari iam notaui. Ad genus fecundum pertineant ifti feries formandi modi, quibus terminus quiuis feriei per aliquot terminos antecedentes fecundum certam quandam regulam determinatur, qui modus in feriebus imprimis recurrentibus adhiberi folet Quando vero ad terminum quemuis feriei inueniendum non folum terminorum antecedentium ratio eft habenda, fed etiam ipfe index adhiberi debet, hinc tertium genus affirmationis ferierum conftituo.

§. 8. Si quilibet feriei terminus ex folo indice determinatur, tum fiue numerus integer, fiue fractus, pro indice affumatur, terminus refpondens aeque definitur, ficque interpolatio feriei, neque quicquam difficultatis, neque incertitudinis habet. Sin autem, vti in fecundo genere pofuimus, quilibet terminus ex praecedente vel aliquot antecedentibus determinatur, tum primo vel aliquot primoribus terminis pro lubitu affumtis, finguli quidem termini, qui indicibus integris refpondent, inuenientur, terminos vero intermedios, indicibus fractis conuenientes hinc definire non licet; quod idem de tertio genere eft tenendum. Quamquam autem hoc modo in fecundo et tertio

tertio genere non solum omnes termini, qui indicibus integris respondent, assignantur, sed etiam lex praescribitur inter terminum quemuis eiusque antecedentes, quae ad terminos indicum fractorum aeque patet; tamen ne hoc quidem modo series penitus determinatur, sed pro qualibet serie huius generis infiniti termini generales exhiberi possunt, qui dum eosdem terminos pro indicibus integris praebent, tamen pro fractis dissentiunt.

§. 9. Quod cum merito maxime paradoxon videatur, operae pretium erit, hunc determinationis defectum in seriebus, quarum quisque terminus ex antecedentibus definitur, diligentius perpendere. Sumamus ergo casum simplicissimum, seriemque ita definiri concipiamus, vt quilibet terminus aequalis sit antecedenti ipsi. Quodsi iam primus seriei terminus statuatur $= 1$, secundus quoque erit $= 1$, omnesque sequentes, qui indicibus integris respondent, vnitati aequabuntur, nasceturque haec series:

Indic:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	etc.
Term:	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	etc.

atque manifestum est, indici cuicunque integro x respondere terminum $= 1$. Quemadmodum autem termini indicibus fractis respondentes se sint habituri, hinc non definitur: hoc tantum constat, si terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens fuerit $= a$ omnes quoque terminos, qui indicibus $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$ etc. conueniunt, fore $= a$. Omnes enim terminos, quorum indices vnitate, vel aliquot vnitatibus, differunt, per legem praescriptam inter se aequales esse oportet: quia antecedens quisque terminus intelligitur is, cuius index est vnitate minor.

§. 10. Haec igitur ſeries ita definitur, vt, ſi terminis indici x reſpondens ponatur $= y$, ſequens vero terminus indici $x + 1$ reſpondens $= y'$, habeatur $y' = y$; tum vero praeterea aſſumitur, ſi fuerit $x = 1$, fore quoque $y = 1$. Quare ſi pro hac ſerie terminus generalis deſideretur, is eiusmodi functio ipſius x eſſe debet, quae ſit $= y$, vt ſi loco x ponatur $x + 1$ functionis y valor reſultans y' aequalis ſit futurus ipſi y, atque vt facto $x = 1$ fiat $y = 1$. Manifeſtum autem eſt, ſi generatim ponatur $y = 1$, huic conditioni ſatisfieri, hocque caſu non ſolum terminos, qui indicibus integris, ſed etiam eos, qui fractis reſpondeant, vnitati aequales fore At vero his conditionibus infinitis quoque aliis modis ſatisfieri poteſt: ſi enim ponatur $y = 1 + \alpha$ ſin. $2 \pi x$, denotante π ſemicircumferentiam circuli, cuius radices $= 1$, erit $y' = 1 + \alpha$ ſin $2 \pi (x + 1)$; at eſt ſin $2 \pi (x + 1)$ $=$ ſin. $2 \pi x$, ideoque $y' = y$, tum vero poſito $x = 1$ erit $y = 1$. Hoc vero caſu termini intermedii, ſeu qui indicibus fractis reſpondent, non amplius vnitati aequabuntur, poſito enim $x = \frac{1}{4}$ erit $y = 1 + \alpha$.

§. 11. Quoniam hic non ſolum α pro arbitrio aſſumi poteſt, ſed etiam innumerabiles aliae eiusmodi formulae excogitari poſſunt, quae praeſcriptas conditiones adimpleant, cuiusmodi ſunt $y = 1 + \alpha$ ſin. $2 \pi x + \beta$ ſin. $4 \pi x + \gamma$ ſin. $6 \pi x +$ etc. perſpicuum eſt, interpolationem vel huius ſimpliciſſimae ſeriei $1 + 1 + 1 +$ etc. quatenus aliter non definitur, niſi quod quilibet terminus antecedenti aequalis eſſe, primus vero vnitate exprimi dicatur, interpolationem maxime eſſe indeterminatam: cum termini intermedii indices habentes fractos, quibuscunque numeris

meris aequales esse queant. Interim tamen etiamsi innumerabiles termini generales pro hac serie exhiberi queant, tamen ii omnes in lege quadam generali continentur, atque sine diuinatione per analysin inueniri possunt. Methodus scilicet latissime patens tradi potest, cuius ope omnium serierum, quarum termini per antecedentes, siue sine indice, siue cum indice, definiuntur, terminos generales vniuersalissime inueniri licet: quam methodum, cum non solum pleniorem serierum cognitionem suppeditet, sed etiam non contemnenda analyseos augmenta complectatur, hic diligentius euoluere constitui: quem in finem sequentia problemata pertractabo.

Problema.

§. 12. Inuenire terminum generalem seriei, cuius quilibet terminus aequalis sit antecedenti, terminus vero primus $= 1$.

Solutio.

Sit terminus generalis seu is, qui indici x respondet $= y$, ac ponatur terminus sequens, (cuius index $= x + 1$) $= y'$ debebitque esse $y' = y$; ac posito $x = 1$, fieri debet $y = 1$. Cum iam sit y quaepiam functio ipsius x, per naturam calculi differentialis, si loco x ponatur $x + 1$, fiet:

$$y' = y + \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

sumto differentiali dx constante. Quocirca esse debet:

$$0 = \frac{dy}{1.dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Haecque aequatio omnes omnino satisfacientes valores ipsius y continet, dummodo integratio ita temperetur, vt posito $x = 1$ fiat $y = 1$, seu quod eodem redit, vt

 posito

posito $x = 0$ fiat $y = 1$. Quaestio itaque perducta est ad resolutionem istius aequationis differentialis, quae non solum infinito terminorum numero constat, sed etiam omnes differentialium gradus in se complectitur. Quia vero variabilis y vbique plus vna dimensione non habet, et alterius variabilis x non nisi differentiale dx, quod constans est assumtum, occurrit, haec aequatio eo modo tractari potest, quem in *Miscell. Berol. Tomo. VII.* exposui. Formetur igitur ponendo z loco $\frac{dy}{dx}$; z^2 loco $\frac{ddy}{dx^2}$ et generatim z^n loco $\frac{d^n y}{dx^n}$ aequatio Algebraica:

$$0 = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

quae sumto e pro numero cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, transit in hanc formam finitam $0 = e^z - 1$. Huius iam aequationis omnes radices, quarum numerus est infinitus, inuestigari, seu omnes factores formulae $e^z - 1$ assignari oportet. Est vero $e^z = (1 + \frac{z}{n})^n$, posito n numero infinito, qui valor, si substituatur, habebitur haec formula resoluenda $(1 + \frac{z}{n})^n - 1$, cuius quidem vnus factor simplex est $= \frac{z}{n}$ seu z: quem aequatio infinita statim monstrat. Ad reliquos inueniendos in subsidium vocari debet Theorema, quo demonstratur formulae binomiae $a^n - b^n$ factorem esse $aa - 2ab \operatorname{cos.} \frac{2k\pi}{n} + bb$ denotante k numerum quemuis integrum. Praesenti ergo casu est $a = 1 + \frac{z}{n}$ et $b = 1$, vnde formulae propositae $e^z - 1$ omnes factores continentur in hac forma generali.

$$1 + \frac{2z}{n} + \frac{zz}{nn} - 2\left(1 + \frac{z}{n}\right) \operatorname{cos.} \frac{2k\pi}{n} + 1$$

seu $2\left(1 + \frac{z}{n}\right) \operatorname{sin.} \frac{k\pi}{n}{}^2 + \frac{zz}{nn}$: vnde hunc factorem per quan-

quantitatem constantem 2 sin. $\frac{2k\pi}{n}$ diuidendo erit factor generalis $= 1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{2\,nn \,\text{sin}.\, v\, \frac{2k\pi}{n}}$. Cum iam n sit numerus infinitus erit cos. $\frac{2k\pi}{n} = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{nn}$ et sin. $v, \frac{2k\pi}{n} = \frac{2kk\pi\pi}{nn}$: quo valore substituto, erit factor formulae $e^z - 1$ generalis $= 1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{4kk\pi\pi}$, et loco k successiue omnes numeros integros $1, 2, 3, 4$, etc. substituendo orientur omnes omnino factores formulae $e^z - 1$. At primus factor z dat integralis partem constantem, quae sit $= C$: reliqui vero factores, qui ad hanc formam reducuntur

$$4kk\pi\pi + \frac{4kk\pi\pi}{n} z + zz;$$

si cum forma factorum, quos in ante allegata dissertatione euolui, $ff - 2fz \,\text{cos}.\, \Phi + zz$ comparentur, erit $f = 2k\pi$ et cos. $\Phi = -\frac{k\pi}{n}$; et sin. $\Phi = 1$ ob n numerum infinitum, quo casu est cos. $\Phi = 0$. Pars ergo integralis hinc oriunda erit

$\alpha e^{\frac{-2kk\pi\pi}{n}x} \,\text{sin}.\, 2k\pi x + \mathfrak{A} e^{\frac{-2kk\pi\pi}{n}x} \,\text{cos}.\, 2k\pi x$; seu ob $n = \infty$ $\alpha \,\text{sin}.\, 2k\pi x + \mathfrak{A} \,\text{cos}.\, 2k\pi x$. Substitutis ergo pro k successiue omnibus numeris integris $1, 2, 3, 4$, etc. proueniet integrale aequationis inuentae.

$$0 = \frac{1dy}{dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1....4dx^4} + \text{etc.}$$

sequenti forma expressum:

$$y = C + \alpha \,\text{sin}.\, 2\pi x + \mathfrak{A} \,\text{cos}.\, 2\pi x + \mathfrak{E} \,\text{sin}.\, 4\pi x + \mathfrak{B} \,\text{cos}.\, 4\pi x + \gamma \,\text{sin}.\, 6\pi x + \mathfrak{C} \,\text{cos}.\, 6\pi x + \text{etc.}$$

Iam constans C ita definiatur vt posito $x = 0$ fiat $y = 1$ reperieturque terminus generalis seriei propositae:

$$y = 1 + \alpha\,\text{fin.}\,2\pi x + \mathfrak{A}(\text{cof.}\,2\pi x - 1) +$$
$$+ \beta\,\text{fin.}\,4\pi x + \mathfrak{B}(\text{cof.}\,4\pi x - 1) +$$
$$+ \gamma\,\text{fin.}\,6\pi x + \mathfrak{C}(\text{cof.}\,6\pi x - 1) +$$
$$\text{etc.}$$

Quicunque ergo valores loco $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. fubftituantur, femper prodibit formula, quae terminum generalem feriei propofitae exhibet. Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 13. Si terminus primus, cui omnes reliqui, habentes exponentes integros, fint aequales, non debeat effe vnitas, fed quantitas quaecunque, terminus generalis feriei y, feu terminus, qui indici x refpondet, reperitur:

$$y = a + \alpha\,\text{fin.}\,2\pi x + \beta\,\text{fin.}\,4\pi x + \gamma\,\text{fin.}\,6\pi x + \delta\,\text{fin.}\,8\pi x \quad \text{etc.}$$
$$+ \mathfrak{A}\,\text{cof.}\,2\pi x + \mathfrak{B}\,\text{cof.}\,4\pi x + \mathfrak{C}\,\text{cof.}\,6\pi x + \mathfrak{D}\,\text{cof.}\,8\pi x$$

eritque terminus quilibet indicem habens numerum integrum $= a + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} +$ etc.

Coroll. 2.

§ 14. Quia finus et cofinus arcuum $4\pi x$, $6\pi x$, $8\pi x$ etc. per poteftates ipforum fin. $2\pi x$ cof. $2\pi x$ exprimi poffunt; atque viciffim omnes functiones rationales, feu quae ambiguas fignificationes non habent, per huiusmodi feries, qualem pro y inuenimus, exhiberi poffunt: terminum generalem y ita definire poterimus, vt dicamus, y effe functionem quamcunque ipforum fin. $2\pi x$ et cof. $2\pi x$: dummodo non occurrant huiusmodi formulae $\sqrt{(1 + \text{cof.}\,2\pi x)}$, aliaeque fimiles, quae inuoluunt finus vel cofinus angulorum fubmultiplorum ipfius $2\pi x$.

Coroll.

Coroll. 3.

§. 15. His igitur caſibus excluſis, ſi ponamus ſin. $2\pi x = p$ et coſ $2\pi x = q$, erit y aequalis functioni cuicunque ipſarum p et q: vnde iſta aequatio differentialis infinita

$$0 = \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

in genere ita integrabitur, vt ſit y functio quaecunque ipſarum p et q.

Coroll. 4.

§. 16. Sin autem vocemus ſin. $\pi x = r$ et coſ. $\pi x = s$, erit $p = 2rs$ et $q = ss - rr$; et functiones ipſarum p et q erunt functiones parium dimenſionum ipſarum r et s. Quare ex illa aequatione differentiali infinita valor ipſius y in genere aequabitur functioni cuicunque parium dimenſionum ipſarum r et s, vbi notandum ob ſinum totum $= 1$ eſſe $rr + ss = 1$.

Coroll. 5.

§. 17. Ponatur $\frac{x}{a}$ loco x, vt habeatur iſta aequatio

$$0 = \frac{ady}{1dx} + \frac{a^2\,ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{a^3d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{a^4d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

Si iam ponamus ſin. $\frac{\pi x}{a} = r$ et coſ. $\frac{\pi x}{a} = s$, integrale iſtius aequationis ita deſcribetur, vt ſit $y =$ functioni cuicunque parium dimenſionum ipſarum r et s.

Coroll. 6.

§. 18. Gemina ergo formula pro valore huius integralis exhiberi poteſt, quarum altera eſt:

$$y = \frac{A + Br^2 + Crs + Dss + Er^4 + Fr^3s + Gr^2s^2 + Hrs^3 + Is^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta r^2 + \gamma rs + \delta s^2 + \varepsilon r^4 + \zeta r^3s + \eta r^2s^2 + \theta rs^3 + \iota s^4 + \text{etc.}}$$

altera vero forma erit:

$y =$

$$y = \frac{Ar + Bs + Cr^3 + Dr^2s + Ers^2 + Fs^3 + Gr^5 + \text{etc.}}{\alpha r + \beta s + \gamma r^3 + \delta r^2 s + \varepsilon r s^2 + \zeta s^3 + \eta r^5 + \text{etc.}}$$

Coroll. 7.

§. 19. Quicunque ergo huiusmodi valor pro y in aequatione:

$$0 = \frac{a\,dy}{1\,dx} + \frac{a^2\,ddy}{1\cdot 2\,dx^2} + \frac{a^3\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \frac{a^4\,d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4} + \text{etc.}$$

substituatur, aequatio prodibit identica: seu series prouenict infinita, cuius summa erit $= 0$. Pro differentiationibus autem continuis tenendum est esse $\frac{dr}{dx} = \frac{\pi s}{a}$ et $\frac{ds}{dx} = -\frac{\pi r}{a}$ ideoque per substitutionem differentialia dx se mutuo vbique tollent.

Scholion 1.

§. 20. Notari etiam merentur factores, in quos expressio Algebraica infinita: $\frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ + etc. supra est resoluta. Cum enim primus factor simplex sit $= z$, et reliqui trinomiales in hac forma generali contineantur: $1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{4kk\pi\pi}$; si loco k successiue ponantur numeri 1, 2, 3, 4, etc. Ponamus breuitatis gratia:

$$Z = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

eritque per factores infinitos:

$$Z = z\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{16\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{36\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{zz}{64\pi\pi}\right)\text{etc.}$$

quorum factorum, excepto primo, numerus est infinitus atque $= \frac{1}{2}n$. Sit igitur $\frac{1}{2}n = m$ seu $n = 2m$, ac ponatur $z = 2v$ erit $\frac{2v}{1} + \frac{2^2v^2}{1\cdot 2} + \frac{2^3v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2^4v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ + etc.

$$2v\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{16\pi\pi}\right)\text{etc.}$$

ideoque

ideoque ſequens productum infinitorum factorum, quorum numerus eſt $= m$, erit:

$$\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{9\pi\pi}\right)\left(1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{16\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

$$= 1+\frac{2}{1\cdot 2}v+\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}v^2+\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}v^3+\frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^4+\text{ etc.}$$

Quodſi iam illud productum actu euoluatur, quia factorum numerus eſt $= m$, exiſtente m numero infinito, proueniet:

$$1+v+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{vv}{mm}+\frac{vv}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{ etc.}\right)$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}\frac{v^3}{m^3}+\frac{(m-1)v^3}{m\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{ etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

qui termini cum ſerie iam inuenta comparati dabunt

$$1=\frac{2}{1.2};\ \frac{1}{1.2}+\frac{1}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{ etc.}\right)=\frac{4}{1.2.3}$$
$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{ etc.}\right)=\frac{8}{1.2.3.4}$$

Vnde vtrinque habetur:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{ etc.}=\frac{1}{6}\pi\pi$$

quae eſt eadem ſummatio, quam iam ante complures annos primus inveneram; pluribusque demonſtrationibus confirmaueram. Ceterum hinc perſpicuum eſt, etiamſi ſit in his factoribus m numerus infinitus; tamen alterum terminum $\frac{v}{m}$ omitti non licere: cum in euolutione ob replicationem infinitam ex terminis infinite paruis $\frac{v}{m}$ termini finiti exſurgant. Quando autem quilibet factor ſeorſim conſideratur, vt in formatione integralis fecimus, tum ſine errore hos terminos infinite paruos praetermittere licuit.

Scholion 2.

§ 21. Altiores quoque poteſtates terminorum ſeriei

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.}$ ex hac fonte summare licet, eaedemque expressiones prodibunt, quas iam olim erueram. Ne autem calculus nimis fiat prolixus, sequenti modo facile expediri poterit. Ponatur

$$V = 1 + \frac{2v}{1\cdot 2} + \frac{2^2 v^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2^3 v^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2^4 v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{etc.}$$

erit $V = \frac{e^{2v}-1}{2v}$ et $\frac{dV}{Vdv} = \frac{2e^{2v}}{e^{2v}-1} - \frac{1}{v}$; quae reducitur ad hanc formam commodiorem: $\frac{dV}{Vdv} = \frac{2e^{v}}{e^{v}-e^{-v}} - \frac{1}{v}$

$$= \frac{1 + \frac{v}{1} + \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}}{\frac{v}{1} + \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{v^7}{1\cdots 7} + \text{etc.}} - \frac{1}{v}:$$ ita vt

fit $$\frac{dV}{Vdv} - 1 = \frac{1 + \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{v^6}{1\cdot 2\cdots 6} + \text{etc.}}{\frac{v}{1} + \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{v^7}{1\cdot 2\cdots 7} + \text{etc.}} - \frac{1}{v}$$

seu $$\frac{dV}{Vdv} - 1 = \frac{\frac{2v}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{4v^3}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{6v^5}{1\cdot 2\cdots 7} + \frac{8v^7}{1\cdot 2\cdots 9} + \text{etc.}}{1 + \frac{v^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{v^6}{1\cdot 2\cdots 7} + \frac{v^8}{1\cdot 2\cdots 9} + \text{etc.}}$$

Ponatur $\frac{dV}{Vdv} = 1 + \mathfrak{A}v - \mathfrak{B}v^3 + \mathfrak{C}v^5 - \mathfrak{D}v^7 + \mathfrak{E}v^9 - \text{etc.}$

erit $\mathfrak{A} = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}$

$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{4}{1\cdot 2\cdots 5}$

$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{6}{1\cdot 2\cdots 7}$

$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C}}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdots 7} - \frac{8}{1\cdot 2\cdots 9}$

etc.

His valoribus inuentis consideretur altera forma quantitatis V per factores expressa, haec:

$$V = \left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{1\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{v}{m} + \frac{vv}{9\pi\pi}\right) \text{etc.}$$

ex

ex qua per differentiationem elicitur:

$$\frac{dV}{Vdv} = \frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{1\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{1\pi\pi}} + \frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{4\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{4\pi\pi}} + \frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{9\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{9\pi\pi}} + \text{etc.}$$

Generaliter vero eſt

$$\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{\lambda\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\lambda\pi\pi}} = \frac{1}{m} + \left.\begin{matrix}\frac{2}{\lambda\pi\pi}\\ -\frac{1}{mm}\end{matrix}\right\} v - \left.\begin{matrix}\frac{3}{m\lambda\pi\pi}\\ +\frac{1}{m^3}\end{matrix}\right\} v^2 + \left.\begin{matrix}\frac{4}{m^2\lambda\pi\pi}\\ -\frac{1}{m^4}\\ -\frac{2}{\lambda\lambda\pi^4}\end{matrix}\right\} v^3 \text{ etc.}$$

Cum autem ſit m numerus infinitus, ipſique factorum numerus aequalis, excepto primo termino, reliqui per m diuiſi ſine errore praetermitti poterunt, ita vt ſit

$$\frac{\frac{1}{m}+\frac{2v}{\lambda\pi\pi}}{1+\frac{v}{m}+\frac{vv}{\lambda\pi\pi}} = \frac{1}{m} + \frac{2v}{\lambda\pi\pi} - \frac{2v^3}{\lambda^2\pi^4} + \frac{2v^5}{\lambda^3\pi^6} - \frac{2v^7}{\lambda^4\pi^8} + \text{etc.}$$

ſubſtitutis ergo pro λ ſucceſſiue numeris quadratis 1, 4, 9, 16 etc. hisque ſeriebus, quarum numerus eſt m in vnam ſummam coniectis, reperietur:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{Vdv} = 1 &+ \frac{2v}{\pi\pi}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\right)\\ &- \frac{2v^3}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{25^2}+\text{etc.}\right)\\ &+ \frac{2v^5}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{25^3}+\text{etc.}\right)\\ &- \frac{2v^7}{\pi^8}\left(1+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{25^4}+\text{etc.}\right)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Quodſi iam haec ſerie cum prius inuenta comparetur habebitur:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.} &= \frac{1}{2}\mathfrak{A}\pi^2 = \frac{1}{6}\pi^2\\ 1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\text{etc.} &= \frac{1}{2}\mathfrak{B}\pi^4 = \frac{1}{90}\pi^4\\ 1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\text{etc.} &= \frac{1}{2}\mathfrak{C}\pi^6 = \frac{1}{945}\pi^6\\ 1+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{16^4}+\text{etc.} &= \frac{1}{2}\mathfrak{D}\pi^8 = \frac{1}{9450}\pi^8\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Hocque modo summationes a me iam olim exhibitae magis confirmantur, cum non nullis principium, quo tum vsus fueram, lubricum esset visum.

Problema. II.

§. 22. Inuenire terminum generalem seriei, cuius quilibet terminus excedat praecedentem data quantitate, et cuius terminus primus sit datus.

Solutio.

Sit terminus primus $= a$, et excessus cuiusque termini supra praecedentem $= g$, erunt vtique termini indicibus integris respondentes hi:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a, & a+g; & a+2g; & a+3g; & a+4g; & a+5g; & a+6g; \text{ etc.} \end{array}$$

ita vt indici integro x conueniat terminus $y = a + (x-1)g$. At existente x numero quocunque infinitae aliae formulae pro y locum inueniunt. Sit enim y' terminus indici $x+1$ respondens, erit:

$$y' = y + \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Cum iam per hypothesin esse debeat $y' = y + g$, erit

$$g = \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Quamuis huiusmodi aequationum, vbi praeter terminos, qui differentialia ipsius y continent, adest terminus, vel constans, vel functio quaecunque ipsius x, resolutionem ante aliquod tempus tradiderim, tamen expediet per substitutionem $y = + gx + u$ hunc terminum g tollere, erit enim $dy = gdx + du$, $ddy = ddu$, $d^3y = d^3u$, etc. ob dx constans. Fiet ergo

$0 =$

$$0 = \frac{du}{1dx} + \frac{ddu}{1.2dx^2} + \frac{d^3u}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4u}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Quae aequatio cum conueniat cum ea, quam in probleme praecedente inuenimus: si ponamus sin. $\pi x = r$ et cos. $\pi x = s$: erit u functio quaecunque parium dimensionum ipsarum r et s, cuiusmodi §. XVIII exhibuimus; hacque inuenta erit terminus generalis quaesitus $y = A + gx + u$, dummodo constans A ita definiatur, vt posito $x = a$ fiat $y = a$ Q. E. I.

Problema. III.

§ 23. Inuenire terminum generalem seriei, cuius quilibet terminus prodeat, si praecedens per datum numerum m multiplicetur, et cuius terminus primus sit $= a$.

Solutio.

Termini ergo huius seriei, qui indices habent integros, sequentem progressionem Geometricam constituent:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a, & ma; & m^2a; & m^3a; & m^4a; & m^5a; \text{ etc.} \end{array}$$

ita vt indici integro x respondeat terminus am^{x-1}. Sit igitur generatim y terminus indici x, et y' terminus indici $x+1$ conueniens: eritque $y' = my$. At est

$$y' = y + \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.} = my.$$

Ad hanc aequationem resoluendam, ponatur secundum praecepta data 1 pro y; z pro $\frac{dy}{dx}$; z^2 pro $\frac{ddy}{dx^2}$: etc. vt prodeat sequens aequatio Algebraica:

$$m = 1 + \frac{z}{1} + \frac{zz}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

cuius radices singulas inuestigari oportet. Erit autem $m = e^z$, at sit logarithmus hyperbolicus ipsius $m = \lambda$, vt sit $m = e^\lambda$, ideoque $e^\lambda - e^z = 0$. Quia vero sumto n numero infinito est $e^\lambda = (1 + \frac{\lambda}{n})^n$ et $e^z = (1+\frac{z}{n})^n$, habebitur ista aequatio, cuius radices sunt inuestigandae:

$$(1 + \tfrac{\lambda}{n})^n - (1 + \tfrac{z}{n})^n = 0,$$

cuius quidem statim vna radix $z - \lambda = 0$ constat, vnde pars integralis obtinetur $y = \alpha e^{\lambda x} = \alpha m^x$ ob $e^\lambda = m$. Reliquae radices sunt imaginariae et continentur in hoc factore trinomio:

$$(1 + \tfrac{\lambda}{n})^2 - 2(1 + \tfrac{\lambda}{n})(1 + \tfrac{z}{n}) \operatorname{cos.} \tfrac{2k\pi}{n} + (1 + \tfrac{z}{n})^2$$

existente k numero quocunque integro: quae forma transit in hanc:

$$2 + \tfrac{2\lambda}{n} - 2(1 + \tfrac{\lambda}{n}) \operatorname{cos.} \tfrac{2k\pi}{n} + \tfrac{\lambda\lambda}{nn}$$
$$+ \tfrac{2z}{n} - \tfrac{2z}{n}(1 + \tfrac{\lambda}{n}) \operatorname{cos.} \tfrac{2k\pi}{n} + \tfrac{zz}{nn}$$

Verum ob n numerum infinitum est $\operatorname{cos} \frac{2k\pi}{n} = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{nn}$. Multiplicata ergo illa forma per nn, erit factor generalis $= 2n(n + \lambda)(1 - \operatorname{cos.} \frac{2k\pi}{n}) + \lambda\lambda + 2nz(1 - \operatorname{cos.} \frac{2k\pi}{n}) - 2\lambda z \operatorname{cos.} \frac{2k\pi}{n} + zz = \lambda\lambda + 4kk\pi\pi + \frac{4kk\pi\pi z}{n} - 2\lambda z + zz$; neglectis terminis euanescentibus: quo respectu etiam terminus $\frac{4kk\pi\pi z}{n}$ omitti potest, ita vt factor generalis sit:

$$\lambda\lambda + 4kk\pi\pi - 2\lambda z + zz$$

horumque factorum numerus, si pro k successiue numeri 1, 2, 3, 4, etc. substituantur, erit $= \frac{n}{2}$. Haec autem forma cum generali in *dissertatione mea Tom. VII. Miscell.* tradita, $ff - 2fz \operatorname{cos.} \Phi + zz$ dabit $f = V(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)$

et

et cof. $\Phi = \frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)}}$, hincque fin. $\Phi = \frac{2k\pi}{\sqrt{(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)}}$. Vnde nafcitur haec integralis y pars,

$$y = e^{\lambda x}(\alpha \text{ fin. } 2k\pi x + \mathfrak{A} \text{ cof. } 2k\pi x).$$

Subftitutis igitur pro k fucceffiue valoribus, ob $e^\lambda = m$ reperietur:

$$y = m^x \left\{ \begin{array}{l} C + \alpha \text{ fin. } 2\pi x + \beta \text{ fin. } 4\pi x + \gamma \text{ fin. } 6\pi x + \text{ etc.} \\ + \mathfrak{A} \text{ cof. } 2\pi x + \mathfrak{B} \text{ cof. } 4\pi x + \mathfrak{C} \text{ cof. } 6\pi x + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

Quare cum pofito $x = 1$ fieri debeat $y = a$, erit $a = m(C + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.})$ Vnde conftans C definitur. Seu fi pofitis fin. $\pi x = r$ et cof. $\pi x = s$, fit Q functio quaecunque parium dimenfionum ipfarum r et s, erit terminus generalis quaefitus $y = m^x Q$. Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 24. In progreffione ergo Geometrica, quatenus ita tantum defcribitur, vt quisque terminus ad praecedentem rationem conftantem habere dicatur, interpolatio non eft determinata, cum termini intermedii infinitis diverfis modis exprimi, imo quemuis valorem recipere queant.

Coroll. 2.

§. 25. Huius ergo aequationis differentialis infinitae

$$(m-1)y = \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1\cdot 2\, dx^2} + \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3} + \frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\, dx^4} + \text{etc.}$$

integrale completum generaliter exprimi poteft. Pofitis enim fin. $\pi x = r$ et cof. $\pi x = s$, fi Q denotet functionem quamcunque ipfarum r et s erit $y = m^x Q$: ideoque $m^{-x} y$ functioni cuicunque parium dimenfionum ipfarum r et s aequatur.

Coroll.

Coroll. 3.

§. 26. Si pro x fcribatur $\frac{x}{a}$ prodibit haec aequatio: $(m-1)y = \frac{ady}{1\,dx} + \frac{aaddy}{1.2\,dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{a^4 d^4 y}{1.\,.\,.\,4\,dx^4} +$ etc. Ad quam integrandam ponatur fin. $\frac{\pi x}{a} = r$ et cof. $\frac{\pi x}{a} = s$. fignificetque Q functionem quamcunque parium dimenfionum ipfarum r et s, ita vt Q eundem valorem retineat, etiamfi pro r et s fcribantur $-r$ et $-s$. Quo facto, erit $y = m^{x:a} Q$.

Coroll. 4.

§. 27. Et huius problematis folutio reduci poterat ad folutionem problematis primi. Cum enim effe debeat $y' = my$, erit $ly' = ly + lm$. Ponatur $ly = v$, vt fit $ly' = v'$, fiatque $lm = \lambda$, oportebit effe $v' = v + \lambda$, vnde fit ob $v' = v + \frac{dv}{1\,dx} + \frac{ddv}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3 v}{1.2.3\,dx^3} +$ etc.

$\lambda = \frac{dv}{1.dx} + \frac{ddv}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3 v}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4 v}{1.2.3.4\,dx^4} +$ etc.

et pofito $v = u + \lambda x$ habebitur:

$$0 = \frac{du}{1dx} + \frac{ddu}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3 u}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4 u}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

quae eft aequatio, ad quam in primo problemate peruenimus. Quodfi ergo ponatur fin. $\pi x = r$ et cof. $\pi x = s$, atque Q denotet functionem parium dimenfionum ipfarum r et s erit $u = Q$, hincque $v = \lambda x + Q = ly = xlm + Q$. Numeris itaque fumendis habetur $y = m^x e^Q$, vbi cum e^Q fit quoque functio parium dimenfionum ipfarum r et s, fi pro ea fcribatur Q, erit vt ante inuenimus $y = m^x Q$.

Scholion.

§. 28 Quoniam aequationis Algebraicae:

$m = 1 + \frac{z}{1} + \frac{zz}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} +$ etc.

omnes

omnes radices inuenimus, poterimus inde huius expreſſionis infinitae:

$$Z = 1 + \frac{z}{1(1-m)} + \frac{zz}{1.2(1-m)} + \frac{z^3}{1.2.3(1-m)} + \frac{z^4}{1.2.3.4(1-m)} + \text{etc.}$$

omnes factores exhibere. Poſito enim $lm = \lambda$ primus factor ſimplex erit $1 - \frac{z}{\lambda}$: et reliqui factores trinomiales in hac forma generali continebuntur:

$$1 + \frac{4kk\pi\pi z}{n(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)} - \frac{2\lambda z + zz}{\lambda\lambda + 4kk\pi\pi}$$

quae transformatur in hanc:

$$1 + \frac{z}{n} - \frac{\lambda\lambda z}{n(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)} - \frac{2\lambda z + zz}{\lambda\lambda + 4kk\pi\pi)}$$

ſi loco k ſucceſſiue ſubſtituantur numeri 1, 2, 3, 4, etc. et n eſt numerus infinite magnus, cuius ſemiſſis $\frac{n}{2}$ exhibet ipſum factorum numerum. Sit breuitatis gratia $\lambda\lambda + 4kk\pi\pi = \Phi$; eritque

$$Z = \left(1 - \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{n} - \frac{\lambda\lambda z}{n\Phi} - \frac{2\lambda z}{\Phi} + \frac{zz}{\Phi}\right)$$

vbi poſterior factor locum teneat omnium infinitorum, qui ex variatione quantitatis Φ ex eo naſcuntur. Sumtis ergo logarithmis, iisque differentiatis, obtinebitur.

$$\frac{dZ}{Zdz} = \frac{-1}{\lambda - z} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{\lambda\lambda}{n\Phi} - \frac{2\lambda}{\Phi} + \frac{2z}{\Phi}}{1 + \frac{z}{n} - \frac{\lambda\lambda z}{n\Phi} - \frac{2\lambda z}{\Phi} + \frac{zz}{\Phi}}$$

Hisque terminis infinitas reſolutis:

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{Zdz} = & -\frac{1}{\lambda} - \frac{z}{\lambda^2} - \frac{zz}{\lambda^3} - \frac{z^3}{\lambda^4} - \frac{z^4}{\lambda^5} - \frac{z^5}{\lambda^6} - \text{etc.} \\ & + \frac{1}{n} - \frac{4\lambda^2 z}{\Phi^2} - \frac{8\lambda^3 zz}{\Phi^3} - \frac{16\lambda^4 z^3}{\Phi^4} - \frac{32\lambda^5 z^4}{\Phi^5} - \frac{64\lambda^6 z^5}{\Phi^6} \\ & - \frac{\lambda\lambda}{n\Phi} + \frac{2z}{\Phi} + \frac{6\lambda zz}{\Phi\Phi} + \frac{16\lambda^2 z^3}{\Phi^3} + \frac{40\lambda^3 z^4}{\Phi^4} + \frac{96\lambda^4 z^5}{\Phi^5} \text{ etc.} \\ & - \frac{2\lambda}{\Phi} \qquad\qquad - \frac{2z^3}{\Phi^2} - \frac{10\lambda z^4}{\Phi^3} - \frac{36\lambda^2 z^5}{\Phi^4} \\ & \qquad\qquad\qquad + \frac{2z^5}{\Phi^5}\end{aligned}$$

 pona-

ponatur $\frac{dZ}{Zdz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 +$ etc. et cum sit $\Phi = \lambda\lambda + 4kk\pi\pi$, vbi successiue pro k omnes numeri 1, 2, 3, 4, etc. vsque ad $\frac{1}{2}n$ substituti concipiendi sunt: eritque

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\left(\frac{1}{\lambda\lambda+4\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+36\pi\pi} + \text{etc.}\right)$$

Vel si breuitatis gratia statuatur:

$$\frac{1}{\lambda\lambda+4\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+36\pi\pi} + \text{etc.} = \mathfrak{A}$$
$$\frac{1}{(\lambda\lambda+4\pi\pi)^2} + \frac{1}{(\lambda\lambda+16\pi\pi)^2} + \frac{1}{(\lambda\lambda+36\pi\pi)^2} + \text{etc.} = \mathfrak{B}$$
$$\frac{1}{(\lambda\lambda+4\pi\pi)^3} + \frac{1}{(\lambda\lambda+16\pi\pi)^3} + \frac{1}{(\lambda\lambda+36\pi\pi)^3} + \text{etc.} = \mathfrak{C}$$
$$\frac{1}{(\lambda\lambda+4\pi\pi)^4} + \frac{1}{(\lambda\lambda+16\pi\pi)^4} + \frac{1}{(\lambda\lambda+36\pi\pi)^4} + \text{etc.} = \mathfrak{D}$$

etc.

erit:
$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\mathfrak{A}$$
$$B = -\frac{1}{\lambda\lambda} + 2\mathfrak{A} - 4\lambda^2\mathfrak{B}$$
$$C = -\frac{1}{\lambda^3} + 6\lambda\mathfrak{B} - 8\lambda^3 C$$
$$D = -\frac{1}{\lambda^4} - 2\mathfrak{B} + 16\lambda^2\mathfrak{C} - 16\lambda^4\mathfrak{D}$$
$$E = -\frac{1}{\lambda^5} - 10\lambda\mathfrak{C} + 40\lambda^3\mathfrak{D} - 32\lambda^5\mathfrak{E}$$
$$F = -\frac{1}{\lambda^6} + 2\mathfrak{C} - 36\lambda^2\mathfrak{D} + 96\lambda^4\mathfrak{E} - 64\lambda^6\mathfrak{F}$$

etc.

Cum iam sit $Z = 1 + \frac{z}{1(1-m)} + \frac{zz}{1\cdot2(1-m)} + \frac{z^3}{1\cdot2\cdot3(1-m)} +$ etc.

erit $Z = \frac{e^z - m}{1-m} = \frac{e^z - e^\lambda}{1-e^\lambda}$; et $\frac{dZ}{dz} = \frac{e^z}{1-e^\lambda}$; vnde

$$\frac{dz}{Zdz} = \frac{e^z}{e^z - e^\lambda} = \frac{1}{1-e^\lambda e^{-z}} = \frac{1}{1-me^{-z}},$$ hincque

$$\frac{dZ}{Zdz} = \frac{1}{1 - m + mz - \frac{mzz}{1\cdot2} + \frac{mz^3}{1\cdot2\cdot3} - \frac{mz^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \text{etc.}}$$

Iam

Iam ob $\frac{dZ}{Zdz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$ fiet:

$$\begin{aligned}1 = &(1-m)A + (1-m)Bz + (1-m)Cz^2 + (1-m)Dz^3 + (1-m)Ez^4 + \text{etc.}\\ &\quad + mA \quad + mB \quad + mC \quad + mD\\ &\quad\quad\quad - \tfrac{1}{2}mA \quad - \tfrac{1}{2}mB \quad + \tfrac{1}{2}mC\\ &\quad\quad\quad\quad\quad + \tfrac{1}{6}mA \quad + \tfrac{1}{6}mB\\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad - \tfrac{1}{24}mA\end{aligned}$$

vnde sequentes prodibunt determinationes:

$$A = \frac{1}{1-m}$$

$$B = \frac{-mA}{1-m} = \frac{-m}{(1-m)^2}$$

$$C = \frac{-mB + \frac{1}{2}mA}{1-m} = \frac{mm}{(1-m)^3} + \frac{m}{2(1-m)^2}$$

$$D = \frac{-mC + \frac{1}{2}mB - \frac{1}{6}mA}{1-m} = \frac{-m^3}{(1-m)^4} - \frac{mm}{(1-m)^3} - \frac{m}{6(1-m)^2}$$

$$E = \frac{-mD + \frac{1}{2}mC - \frac{1}{6}mB + \frac{1}{24}mA}{1-m} = \frac{m^4}{(1-m)^5} + \frac{3m^3}{2(1-m)^4} + \frac{7mm}{12(1-m)^3} + \frac{m}{24(1-m)^2}$$

Sequentes ergo orientur seriexum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. summationes:

I. $\frac{1}{1-m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - 2\lambda\mathfrak{A}$; seu $\mathfrak{A} = \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{2\lambda\lambda} - \frac{1}{2\lambda(1-m)}$

II. $\frac{-m}{(1-m)^2} = -\frac{1}{\lambda\lambda} + 2\mathfrak{A} - 4\lambda\lambda\mathfrak{B} = \frac{1}{2\lambda} - \frac{2}{\lambda\lambda} - \frac{1}{\lambda(1-m)} - 4\lambda\lambda\mathfrak{B}$

vnde $\mathfrak{B} = \frac{1}{8\lambda^3} - \frac{1}{2\lambda^4} - \frac{1}{4\lambda^3(1-m)} + \frac{m}{4\lambda\lambda(1-m)^2}$

III. $\frac{mm}{(1-m)^3} + \frac{m}{2(1-m)^2} = -\frac{1}{\lambda^3} + 6\lambda\mathfrak{B} - 8\lambda^3\mathfrak{C} = \frac{3}{4\lambda\lambda} - \frac{4}{\lambda^3} - \frac{3}{2\lambda^2(1-m)}$
$+ \frac{m}{2\lambda(1-m)^2} - 8\lambda^3\mathfrak{C}.$

 Ergo

Ergo $\mathfrak{C} = \frac{3}{32\lambda^5} - \frac{1}{2\lambda^6} - \frac{3}{16\lambda^5(1-m)} + \frac{3m}{16\lambda^4(1-m)^2} - \frac{m}{16\lambda^3(1-m)^2} - \frac{mm}{8\lambda^3(1-m)^3}$

Sicque sequentes seriērum propositarum summae $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. inuenientur.

Coroll. 1.

§. 29. Cum igitur sit $m = e^\lambda$ erit:

$$\frac{1}{\lambda\lambda+4\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+16\pi\pi} + \frac{1}{\lambda\lambda+36\pi\pi} + \text{etc.} = \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{2\lambda\lambda} - \frac{1}{2\lambda(1-e^\lambda)}$$

sit $\lambda = \frac{2\pi a}{b}$ erit:

$$\frac{bb}{4(aa+bb)\pi^2} + \frac{bb}{4(aa+4bb)\pi^2} + \frac{bb}{4(aa+9bb)\pi^2} + \text{etc.} = \frac{b}{8\pi a} - \frac{bb}{8\pi\pi aa} - \frac{b}{4\pi a(1-e^{2\pi a:b})}$$

ideoque per $\frac{4\pi\pi}{bb}$ multiplicando habebitur:

$$\frac{1}{aa+bb} + \frac{1}{aa+4bb} + \frac{1}{aa+9bb} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2ab} - \frac{1}{2aa} + \frac{\pi}{ab(e^{2\pi a:b}-1)}$$

quam summam iam alibi ex alio fonte deductam exhibui.

Coroll. 2.

§. 30. Si ergo statuatur $b = 1$, habetur haec summa

$$\frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \frac{1}{aa+9} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2aa} + \frac{\pi}{a(e^{2\pi a}-1)}$$

ac si ponatur praeterea $a = 0$, vt prodeat haec series: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$ huius summa, ob terminos in infinitum excrescentes, ita ex formula deriuabitur: Concipiatur a infinite paruum, erit $e^{2\pi a} = 1 + 2\pi a + 2\pi\pi aa + \frac{4}{3}\pi^3 a^3$

ideoque summa erit $= \frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2aa} + \frac{1}{2aa + 2\pi a^3 + \frac{4}{3}\pi^2 a^4}$

$=$

$$=\frac{\pi a+\pi\pi aa+\frac{2}{3}\pi^3a^3-1-\pi a-\frac{2}{3}\pi^2aa+1}{2aa(1+\pi a+\frac{2}{3}\pi\pi a^2)}=\frac{1}{6}\pi^2,$$ quae vt constat est summa seriei $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc.

Coroll. 3.

§. 31. Si in serie ante inuenta:

$$\frac{1}{aa+bb}+\frac{1}{aa+4bb}+\frac{1}{aa+9bb}+\text{etc.}=\frac{\pi}{2ab}-\frac{1}{2aa}+\frac{\pi}{ab(e^{2\pi a:b}-1)}$$

quantitas a vt variabilis tractetur, et differentiatio instituatur prodibit summa seriei 𝔅, sicque porro per continuam differentiationem ex serie 𝔄 reperientur summae serierum sequentium 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈, etc.

Coroll. 4.

§. 32. Summa huius seriei commodius ita exprimi potest $\frac{1}{aa+bb}+\frac{1}{aa+4bb}+\frac{1}{aa+9bb}+$ etc. $=\frac{-1}{2aa}+$
$$\frac{\pi(e^{2\pi a:b}+1)}{2ab(e^{2\pi a:b}-1)}=\frac{-1}{2aa}+\frac{\pi(e^{\pi a:b}+e^{-\pi a:b})}{2ab(e^{\pi a:b}-e^{-\pi a:b})}.$$ Ex qua forma facile colligitur valor seriei, si b sit numerus imaginarius, sit enim $b=\frac{c}{\sqrt{-1}}$ erit:

$$\frac{1}{aa-cc}+\frac{1}{aa-4cc}+\frac{1}{aa-9cc}+\text{etc.}=\frac{-1}{2aa}+\frac{\pi\left(e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}}+e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}}\right)\sqrt{-1}}{2ac\left(e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}}-e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}}\right)}$$

At est $e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}}+e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}}=2\,\text{cos.}\,\frac{\pi a}{c}$ atque

$$e^{\frac{\pi a\sqrt{-1}}{c}}-e^{\frac{-\pi a\sqrt{-1}}{c}}=2\sqrt{-1}\,.\,\text{sin.}\,\frac{\pi a}{c}$$

vnde fit:

$$\frac{1}{aa-cc}+\frac{1}{aa-4cc}+\frac{1}{aa-9cc}+\text{etc.}=\frac{-1}{2aa}+\frac{\pi\,\text{cos.}\,\pi a:c}{2ac\,\text{sin.}\,\pi a:c}$$

Coroll. 5.

§. 33. Cum ſit cof. $\frac{(2k+1)\pi}{2} = 0$: caſibus, quibus eſt $a = 2k + 1$ et $c = 2$ ſumma ſeriei eſt $= \frac{-1}{2aa} = \frac{-1}{2(2k+1)^2}$ exiſtente k numero quocunque integro: Quare erit:

$$\frac{1}{(2k+1)^2-4} + \frac{1}{(2k+1)^2-16} + \frac{1}{(2k+1)^2-36} + \frac{1}{(2k+1)^2-64} + \text{etc.} = \frac{-1}{2(2k+1)^2}$$

quam ſummationem iam alibi demonſtraui. Si enim ſingulae fractiones in partes reſoluantur, oritur

$$\frac{-1}{2k+1} = \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k-3} + \frac{1}{2k-5} + \frac{1}{2k-7} + \frac{1}{2k-9} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2k+5} + \frac{1}{2k+7} + \frac{1}{2k+9} - \text{etc.}$$

Coroll. 6.

§. 34. Tranſpoſito termino $\frac{-1}{2k+1}$ ad alteram partem biniſque terminis collectis orietur noua ſeries, cuius ſumma $= 0$. Erit ſcilicet ſingulis terminis per $4k$ diuiſis

$$0 = \frac{1}{4kk-1} + \frac{1}{4kk-9} + \frac{1}{4kk-25} + \frac{1}{4kk-49} + \frac{1}{4kk-81} + \text{etc.}$$

cuius veritas in ſingulis caſibus facile elucet.

Problema. IV.

§. 35. Inuenire terminum generalem ſeriei, cuius quilibet terminus oritur, ſi antecedens per datum numerum m multiplicetur, atque ad productum datus numerus c addatur, cuiusque ſeriei terminus primus ſit pariter datus $= a$,

Solutio.

Termini ergo, qui indicibus integris reſpondent, ita ſe habebunt:

1

a;

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a; & ma+c; & m^2a+mc+c; & m^3a+m^2c+mc+c; \text{ etc.} \end{array}$$

vnde si index quicunque x sit numerus integrus, erit terminus conueniens $= m^{x-1}a + \frac{m^{x-1}-1}{m-1}c$: Sin autem x sit numerus non integer, infinitae aliae formulae praeter hanc perinde satisfacient; ad quas inueniendas sit y terminus indici x respondens, et y' sequens seu indici $x+1$ competens: erit $y' = my + c$: vnde fiet:

$$my + c = y + \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

Ponatur $y = v - \frac{c}{m-1}$; eritque:

$$mv = v + \frac{dv}{1dx} + \frac{ddv}{1.2dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$

quae aequatio cum congruat cum ea, quam in problemate praecedente inuenimus; si ponatur sin. $\pi x = r$ et cos. $\pi x = s$ atque Q sumatur pro functione quacunque parium dimensionum ipsarum r et s, erit $v = m^x Q$; ideoque $y = m^x Q - \frac{c}{m-1}$. Ponatur $x = 1$, quo casu fit $r = 0$ et $s = -1$, abeatque Q in C, oportet esse $a = mC - \frac{c}{m-1}$; ideoque erit $C = \frac{a}{m} + \frac{c}{m(m-1)}$. Quare si pro Q sumatur quantitas constans C ipsa, erit $y = m^{x-1}a + \frac{(m^{x-1}-1)c}{m-1}$ pro casu simplicissimo. Atque si P sit functio parium dimensionum ipsarum r et s talis quae euanescat posito $x = 1$, poni poterit $Q = C + P$ eritque termini generalis quaesiti forma latissime patens $y = m^{x-1}a + \frac{(m^{x-1}-1)c}{m-1} + m^x P$. Q. E. I.

Proble-

Problema V.

§. 36. Inuenire terminum generalem ſerierum recurrentium ſecundi ordinis, in quibus quilibet terminus aequatur aggregato binorum terminorum antecedentium per quoscunque numeros multiplicatorum:

Solutio.

Sit terminus indici x reſpondens $= y$;
terminus indici $x-1$ reſpondens $= {}'y$
terminus indici $x-2$ reſpondens $= {}''y$
haecque propoſita ſit lex ſeriei recurrentis, vt ſit:

$$y = \alpha\,{}'y + \beta\,{}''y$$

Quia igitur eſt

$$'y = y - \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1\cdot 2\,dx^2} - \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4} - \text{etc.}$$

$$''y = y - \frac{2dy}{1dx} + \frac{4ddy}{1\cdot 2\,dx^2} - \frac{8d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \frac{16d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4} - \text{etc.}$$

erit his formulis ſubſtitutis:

$$y = \begin{matrix} +\alpha\left(y - \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1\cdot 2\,dx^2} - \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4} - \text{etc.}\right) \\ +\beta\left(y - \frac{2dy}{1dx} + \frac{4ddy}{1\cdot 2\,dx^2} - \frac{8d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \frac{16d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4} - \text{etc.}\right) \end{matrix}$$

Ad quam aequationem reſoluendam ponatur ſecundum praeceptum generale 1 pro y; z pro $\frac{dy}{dx}$; z^2 pro $\frac{ddy}{dx^2}$ etc. fietque

$$1 = \begin{matrix} +\alpha\left(1 - \frac{z}{1} + \frac{zz}{1\cdot 2} - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{etc.}\right) \\ +\beta\left(1 - \frac{2z}{1} + \frac{4z^2}{1\cdot 2} - \frac{8z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{16z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{etc.}\right) \end{matrix}$$

quae aequatio ad hanc formam finitam reducitur, $1 = \alpha e^{-z} + \beta e^{-2z}$: cuius factores inueſtigare oportet. Poſito ergo $e^{+z} = u$ ac reſoluatur haec aequatio $uu = \alpha u + \beta$: cuius vel ambae radices ſunt reales, vel ambae imaginariae, vel denique ambae inter ſe aequales. Hosque tres caſus ſeorſim euolue oportet.

I. Sint

I. Sint igitur primo ambae radices reales et inaequales inter ſe, ſeu ſit $uu - \alpha u - \beta = (u - A)(u - B)$: hincque pro u ponendo e^z habebimus binos factores generales $(e^z - A)$ et $(e^z - B)$. Vidimus autem ſupra formulam $e^z - m$ dediſſe integrale hoc:

$$y = m^x\left(\begin{array}{l} C + \alpha \sin. 2\pi x + \beta \sin. 4\pi x + \gamma \sin. 6\pi x \\ + \mathfrak{A} \cos. 2\pi x + \mathfrak{B} \cos. 4\pi x + \mathfrak{C} \cos. 6\pi x \end{array} + \text{etc.}\right)$$

Ergo ambo factores $e^z - A$ et $e^z - B$ dabunt coniunctim hunc valorem pro termino generali y:

$$y = \begin{array}{l} + A^x\left(\begin{array}{l} C + \alpha \sin. 2\pi x + \beta \sin. 4\pi x + \gamma \sin. 6\pi x + \text{etc} \\ + \mathfrak{A} \cos. 2\pi x + \mathfrak{B} \cos. 4\pi x + \mathfrak{C} \cos. 6\pi x + \text{etc.} \end{array}\right) \\ + B^x\left(\begin{array}{l} C' + \alpha' \sin. 2\pi x + \beta' \sin. 4\pi x + \gamma' \sin. 6\pi x + \text{etc.} \\ + \mathfrak{A}' \cos. 2\pi x + \mathfrak{B}' \cos. 4\pi x + \mathfrak{C}' \cos. 6\pi x + \text{etc.} \end{array}\right) \end{array}$$

Vel ponatur $\sin. \pi x = r$ et $\cos. \pi x = s$, ſintque P et Q functiones quaecunque parium dimenſionum ipſarum r et s, eritque ſi fuerit $uu - \alpha u - \beta = (u - A)(u - B)$, ſeu ſi ſint A et B radices aequationis $uu - \alpha u - \beta = 0$; hoc inquam caſu erit:

$$y = A^x P + B^x Q.$$

II. Si ambae radices fuerint imaginariae, tum quidem eadem formula iam inuenta vſum habere poterit, quoniam quouis caſu imaginaria ſe mutuo deſtruent: interim tamen formula pro y exhiberi poteſt ab imaginariis libera. Hoc enim caſu aequatio $uu - \alpha u - \beta = 0$ eiusmodi induet formam $uu - 2fu \cos. \omega + ff = 0$, cuius radices ſunt $u = f \cos. \omega \pm f\sqrt{-1}. \sin. \omega$, ita vt ſit $A = f \cos. \omega + f\sqrt{-1}. \sin. \omega$ et $B = f \cos. \omega - f\sqrt{-1}. \sin. \omega$. Hinc autem erit $A^x = f^x \cos. \omega x + f^x \sqrt{-1}. \sin. \omega x$, atque

 $B^x =$

$B^x = f^x \cos. \omega x - f^x \sqrt{-1}.\sin. \omega x$. Hi igitur valores, si loco A^x et B^x substituantur, fiet $y = (P + Q)\, f^x \cos. \omega x + (P - Q) \sqrt{-1}. f^x \sin. \omega x$. Quia iam P et Q sunt functiones arbitrariae ipsarum r et s, dummodo dimensiones habeant pares: loco $P + Q$, scribatur P, et loco $(P - Q) \sqrt{-1}$, ponatur Q eritque ex aequatione $uu - \alpha u - \beta = uu - 2 f u \cos. \omega + ff = 0$, terminus generalis quaesitus:

$$y = f^x P \cos. \omega x + f^x Q \sin. \omega x.$$

III. Si ambae aequationis $uu - \alpha u - \beta = 0$ radices A et B fuerint aequales, puta $A = B = m$, aequatio habebitur $(e^z - m)^2 = 0$. Ponatur vt in §. XXIII; $m = e^\lambda$, erit formulae $(e^z - e^\lambda)^2$ primus factor quadratus $= (z - \lambda)^2$: ex quo oritur pars integralis $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)\, e^{\lambda x} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)\, m^x = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)\, A^x$. Reliqui factores omnes erunt pariter quadrati, et continebuntur in hac forma generali:

$$(\lambda\lambda + 4kk\pi\pi - 2\lambda z + zz)^2$$

ex quo oritur secundum praecepta a me tradita pars integralis:

$$A^x (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x) \sin. 2k\pi x + A^x (\mathfrak{C} + \mathfrak{D} x) \cos. 2k\pi x.$$

Quibus colligendis sequitur, si fuerit $uu - \alpha u - \beta = (u - A)^2 = uu - 2Au + AA$, fore terminum generalem quaesitum: $y =$

$$A^x \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} x + (\mathfrak{C} + \mathfrak{D} x) \sin. 2\pi x + (\mathfrak{G} + \mathfrak{H} x) \sin 4\pi x + \text{etc.} \\ \qquad + (\mathfrak{E} + \mathfrak{F} x) \cos. 2\pi x + (\mathfrak{J} + \mathfrak{K} x) \cos. 4\pi x + \text{etc.} \end{array} \right)$$

Ponatur iterum $\sin. \pi x = r$ et $\cos. \pi x = s$, sintque P et Q functiones quaecunque pares ipsarum r et s, atque terminus generalis ita exprimi poterit, vt sit $y = A^x (P + Q x)$. Q. E. I.

Coroll.

Coroll. 1.

§. 37. Si ergo in ſerie recurrente quilibet terminus y ita per binos praecedentes $'y$ et $''y$ determinetur, vt ſit $y = \alpha\, 'y + \beta\, ''y$, ſeu ſi ſecundum Moioraeum fuerit $+ \alpha$, $+ \beta$ ſcala relationis; acſi x fuerit index termini y: erit y functio maxime indeterminata ipſius x: cum innumerabiles formulae exhiberi queant, quae valores ſatisfacientes pro y praebeant.

Coroll. 2.

§. 38. Ad has autem omnes expreſſiones pro y inueniendas, formetur ex ſcala relationis $+ \alpha$, $+ \beta$ haec aequatio $uu - \alpha u - \beta = 0$: ex cuius reſolutione forma termini generalis y ſequenti modo reperietur.

Coroll. 3.

§. 39. Sint aequationis $uu - \alpha u - \beta = 0$ radices A et B, ita vt ſit $A = \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta)}$ et $B = \frac{1}{2}\alpha - \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta)}$, ſumanturque, poſito ſin. $\pi x = r$ et coſ. $\pi x = s$, functiones quaecunque pares ipſarum r et s, quae ſint P et Q, erit $y = A^x P + B^x Q = (\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta)})^x P + (\frac{1}{2}\alpha - \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta)})^x Q$.

Coroll. 4.

§. 40. Sin autem aequationis $uu = \alpha u + \beta$ ambae radices fuerint aequales, illa formula vſu caret, ob $\beta + \frac{1}{4}\alpha\alpha = 0$. Hoc autem caſu, cum vtraque radix futura ſit $\frac{1}{2}\alpha$, ſi ponatur $\frac{1}{2}\alpha = A$, erit terminus generalis $y = A^x (P + Qx)$.

Coroll. 5.

§. 41. Sin autem ſit $\frac{1}{4}\alpha\alpha + \beta$ quantitas negatiua, partes ante inuentae erunt imaginariae. Ad formam ergo realem inueniendam comparetur aequatio $uu - \alpha u - \beta = 0$ cum hac $uu - 2fu\,\mathrm{coſ.}\,\omega, + ff = 0$, erit $f = \sqrt{-\beta}$, et $\alpha = 2\sqrt{-\beta}$, coſ ω, ſeu $\mathrm{coſ.}\,\omega = \frac{\alpha}{2\sqrt{-\beta}}$ et $\mathrm{ſin.}\,\omega = \frac{\sqrt{(-4\beta-\alpha x)}}{2\sqrt{-\beta}} = \sqrt{(1 + \frac{\alpha\alpha}{4\beta})}$, vnde angulus ω inuenietur, ex quo erit $y = f^x(P\,\mathrm{coſ.}\,\omega x + Q\,\mathrm{ſin.}\,\omega x)$

Coroll. 6.

§. 42. Si pro P et Q quantitates conſtantes aſſumantur, prodit eadem termini generalis forma, quae vulgo exhiberi ac pro ſola, quae ſatisfaciat, haberi ſole. Qualibet autem ſerie determinata propoſita, iſtas binas quantitates conſtantes ex duobus terminis primis, qui dati ſumuntur, definiri oportet. In genere autem, cum duae ingrediantur functiones arbitrariae P et Q, quae quoties x eſt numerus integer, eosdem valores conſtantes inducent, patet duos ſeriei terminos indicibus integris reſpondentes, pro lubitu aſſumi poſſe.

Scholion.

§. 43. Methodus haec inueniendi term nos generales ſerierum recurrentium ideo potiſſimum eſt notatu digna, quod non ſolum omnes poſſibiles formas exhibeat, ſed etiam quod a priori procedat, atque ex ſolis principiis analyticis negotium conficiat, cum alii, qui has ſeries tractauerunt, omnes per viam indirectam ad formam illam terminorum generalium ſpecialem peruenerint. Haec enim

enim eſt praecipua proprietas, et quaſi criterium methodi directae, vt non ſolum ex ipſis cuiusque rei principiis eius affectiones eruat, ſed etiam omnes determinationis modos ſimul complectatur. Methodi autem indirectae, etſi ſaepe concinnas et elegantes problematum ſolutiones ſuppeditant, tamen rariſſime naturam quaeſtionis, quae tractatur, exhauriunt. Cuius diſcriminis eximium exemplum in problemate antecedente ſpectatur; luculentius autem in problemate ſequente occurret, vbi in genere omnium ſerierum recurrentium termini generales inueſtigabuntur.

Problema VI.

§. 44. Inuenire terminum generalem ſerierum recurrentium cuiuscunque ordinis, quarum quilibet terminus aequatur aggregato aliquot terminorum antecedentium per numeros quoscunque multiplicatorum.

Solutio.

Sit terminus indici x reſpondens $= y$, termini autem antecedentes, qui indicibus $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, $x - 4$, etc. conueniunt, deſignentur per ${}'y$, ${}''y$, ${}'''y$, ${}^{IV}y$, etc: propoſitaque ſit haec ſeriei lex, vt habeatur vbique:

$$y = \alpha\,{}'y + \beta\,{}''y + \gamma\,{}'''y + \delta\,{}^{IV}y + \text{etc.}$$

Cum iam ſit ex natura differentialium:

$${}'y = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} - \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$
$${}''y = y - \frac{2dy}{1dx} + \frac{2^2ddy}{1.2dx^2} - \frac{2^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$
$${}'''y = y - \frac{3dy}{1dx} + \frac{3^2ddy}{1.2dx^2} - \frac{3^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$

etc.

 Si

Si hi valores ibi ſubſtituantur, prodibit aequatio, in cuius ſingulis terminis vnica variabilis y dimenſio occurrit, alterius vero variabilis x, nonniſi differentiale dx, quod conſtans ponitur, ingreditur. Quare ſi vbique 1 loco y, z loco $\frac{dy}{dx}$, et generatim z^m loco $\frac{d^m y}{dx^m}$ ſubſtituatur, emerget reductione facta haec aequatio:

$$1 = \alpha e^{-z} + \beta e^{-2z} + \gamma e^{-3z} + \delta e^{-4z} + \text{etc.}$$

Fiat nunc $e^z = u$, atque ſublatis fractionibus prodibit huiusmodi aequatio Algebraica:

$$u^n = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \gamma u^{n-3} \delta u^{n-4} + \text{etc.}$$

quae tot erit dimenſionum, quot termini antecedentes ad termini y determinationem requiruntur; ſeu quoti ordinis fuerit ipſa ſeries recurrens. Iam forma termini generalis y ex radicibus huius aequationis, ſeu ex factoribus huius formulae:

$$u^n - \alpha u^{n-1} - \beta u^{n-2} - \gamma u^{n-3} - \delta u^{n-4} - \text{etc.} = U$$

ſimili modo colligetur, quo in ſolutionibus problematum hactenus propoſitorum ſimus vſi: ſcilicet ſi ſit ſin. $\pi x = r$ et coſ. $\pi x = s$, ac P, Q, R, S, T, etc. denotent functiones quaſcunque parium dimenſionum ipſarum r et s. Deinde formulae U inueſtigentur omnes factores reales tam ſimplices quam trinomiales, et, ſi qui eorum fuerint aequales, ii coniunctim per poteſtates exprimantur. Singuli autem factores iſti totidem partes termini generalis y praebebunt, quae partes ope ſequentium regularum formabuntur:

I. Si

I. Si factor sit $u - A$ erit pars integralis
$$y = A^x P$$
II. Si factor sit $(u-A)^2$ erit pars integralis
$$y = A^x(P + Qx)$$
III. Si factor sit $(u-A)^3$ erit pars integralis
$$y = A^x(P + Qx + Rx^2)$$
IV. Si factor sit $(u-A)^4$ erit pars integralis
$$y = A^x(P + Qx + Rxx + Sx^3)$$
etc.

1. Si factor sit $uu - 2Au$ cos. $\omega + AA$ erit
$$y = A^x(P \text{ cos. } \omega x + Q \text{ sin. } \omega x)$$
2. Si factor sit $(uu - 2Au \text{ cos. } \omega + AA)^2$ erit
$$y = A^x(P + Qx) \text{ cos. } \omega x + A^x(R + Sx) \text{ sin. } \omega x$$
3. Si factor sit $(uu - 2Au \text{ cos. } \omega + AA)^3$ erit
$$y = \begin{array}{l} A^x(P + Qx + Rxx) \text{ cos. } \omega x \\ + A^x(S + Tx + Vxx) \text{ sin. } \omega x \end{array}$$
etc.

Quodsi ergo pro singulis formulae U factoribus hinc partes integralis quaerantur, eaeque in vnam summam coniiciantur, habebitur valor completus pro termino generali y quaesito. Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 45. Hoc ergo modo obtinetur integrale completum sequentis aequationis differentialis infinitae:

$y =$

$$\begin{aligned} y = \ & y\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{ etc.}) \\ & - \frac{dy}{1\,dx}\,(\alpha + 2\,\beta + 3\,\gamma + 4\,\delta + \text{ etc.}) \\ & + \frac{ddy}{1.2\,dx^2}\,(\alpha + 2^2\,\beta + 3^2\,\gamma + 4^2\,\delta + \text{ etc.}) \\ & - \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3}\,(\alpha + 2^3\,\beta + 3^3\,\gamma + 4^3\,\delta + \text{ etc.}) \\ & + \frac{d^4y}{1.2.3.4\,dx^4}\,(\alpha + 2^4\,\beta + 3^4\,\gamma + 4^4\,\delta + \text{ etc.}) \\ & \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

seu valor ipsius y exprimetur per functionem ipsius x.

Coroll. 2.

§. 46. Omnis ergo difficultas reducitur ad resolutionem aequationis Algebraicae:

$$u^n = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \gamma u^{n-3} + \delta u^{n-4} + \text{ etc.}$$

Eius enim radicibus seu factoribus inuentis facile est ope regularum ante traditarum valorem ipsius y determinare.

Coroll. 3.

§. 47. Quoniam per integrationem tot quantitates arbitrariae P, Q, R, S, etc. inuehuntur, quot vnitates continet exponens n, seu quot termini antecedentium in determinationem sequentis ingrediuntur: manifestum est totidem terminos pro lubitu assumi posse, ex quibus reliqui omnes, quorum indices sunt integri determinentur. Hoc tamen non obstat, quo minus termini indicum non integrorum maneant maxime indeterminati, vti in praecedentibus problematis iam est notatum.

Problema VII.

§. 48. Si seriei quilibet terminus aequetur quantitati cuipiam constanti c, vna cum aggregato aliquot terminorum

rum antecedentium per datos numeros multiplicatorum, (vt in problemate praecedente): inuenire huius feriei terminum generalem.

Solutio.

Pofito vt ante termino indici indeterminato x refpondente $= y$, fint antecedentes indicibus $x-1$, $x-2$, $x-3$, etc. refpondentes $'y$, $''y$, $'''y$ etc. atque propofita fit haec lex progreffionis

$$y = c + \alpha\, 'y + \beta\, ''y + \gamma\, '''y + \delta\, ^{IV}y + \text{etc.}$$

fubftitutis ergo pro $'y$, $''y$, $'''y$, ^{IV}y, etc. valoribus fupra exhibitis erit:

$$\begin{aligned} y = c &+ y(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}) \\ &- \tfrac{dy}{1 \cdot dx}(\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \text{etc.}) \\ &+ \tfrac{ddy}{1 \cdot 2 dx^2}(\alpha + 2^2\beta + 3^2\gamma + 4^2\delta + \text{etc.}) \\ &- \tfrac{d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3}(\alpha + 2^3\beta + 3^3\gamma + 4^3\delta + \text{etc.}) \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Ponatur iam ad terminum conftantem c ex aequatione tollendum $y = v + g$, fiatque: $g = c + g(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$ ideoque $g = \frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.}}$ Quo facto ob $dy = dv$, $ddy = ddv$ etc. habebitur aequatio haec:

$$\begin{aligned} v = \; & v(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}) \\ &- \tfrac{dv}{1 dx}(\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \text{etc.}) \\ &+ \tfrac{ddv}{1 \cdot 2 dx^2}(\alpha + 2^2\beta + 3^2\gamma + 4^2\delta + \text{etc.}) \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Quae aequatio cum fimilis fit ei, quam in problemate praecedente resoluimus, valor ipsius v per regulas ibi datas inuenietur. Quo inuento habebitur terminus generalis quaesitus

$$y = v + \frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.}}$$

ex quo natura seriei propositae innotescet. Q E I.

Coroll. I.

§. 49. Quantitas igitur constans c, quae ad formulam $\alpha' y + \beta'' y + \gamma''' y$ + etc. accedit, terminum generalem y aliter non afficit, nisi quod ipsi numerum constantem adiiciat. Quaeratur ergo terminus generalis pro serie recurrente pura cuius scala relationis sit: α, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$, etc. ad eumque addatur numerus $\frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-\text{etc.}}$

Coroll. 2.

§. 50. Haec autem quantitas constans adiicienda $\frac{c}{1-\alpha-\beta-\gamma-\text{etc.}}$ euadit infinita ideoque incerta, si denominator euanescit, seu si $1-\alpha-\beta-\gamma-\delta-$ etc. $= 0$. Hoc autem casu aequatio $u^n - \alpha u^{n-1} - \beta u^{n-2} - \gamma u^{n-3}$ - etc. $= 0$ radicem habebit $u - 1 = 0$, vnde nascitur integralis pars $y = P$; quae ne omnes termini fiant infiniti, quantitas P ita debet esse infinita, vt ea cum illa constante infinita praebeat valorem finitum, qui erit $= P + Qx$.

Scholion I.

§. 51. Quod quo clarius appareat, obseruandum est huiusmodi series, quales hic sumus contemplati, semper reduci posse ad series recurrentes puras vno gradu altiores. Si enim sit

$y =$

$$y = c + \alpha\,'y + \beta\,''y + \gamma\,'''y + {}^{\mathrm{IV}}y\,,$$

erit $'y = c + \alpha''y + \beta'''y + \gamma\,{}^{\mathrm{IV}}y + {}^{\mathrm{V}}y\,,$

quarum differentia dat:

$$y = (\alpha + 1)'y + (\beta - \alpha)''y + (\gamma - \beta)'''y + (\delta - \gamma)^{\mathrm{IV}}y - \delta^{\mathrm{V}}y,$$

quae eſt lex pro ſerie recurrente pura: cuius terminus generalis formabitur ex reſolutione huius aequationis:

$$u^{n+1} - (\alpha + 1)u^n - (\beta - \alpha)u^{n-1} - (\gamma - \beta)u^{n-2} - \text{etc.} = 0.$$

Huius autem factor vnus iam conſtat, ſcilicet $u - 1$ cum ſit

$$(u - 1)(u^n - \alpha\,u^{n-1} - \beta\,u^{n-2} - \gamma\,u^{n-3} - \text{etc.}) = 0$$

Factor autem $u - 1$ dat partem integralis $1^x P$ tum ſolum, quando non ſimul factor eſt alterius formae $u^n - \alpha u^{n-1}$ - etc. ſin autem haec quoque factorem habeat $u - 1$ eiusue poteſtatem, iſtius exponens vnitate augeri, indeque debita integralis pars inueſtigari debet. Inuento autem hac ratione termino generali y, is, cum in eo quantitas c non inſit, nimis erit generalis; ad caſum ergo propoſitum reſtringi debebit. Ex valore ſcilicet ipſius y eruantur valores terminorum praecedentium $'y$, $''y$, $'''y$, etc. loco x ponendo $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, etc. vbi notandum eſt, functiones P, Q, R, etc. eosdem valores retinere, nullamque inde mutationem pati. Deinde hi valores ſubſtituantur in aequatione:

$$y = c + \alpha\,'y + \beta\,''y + \gamma\,'''y + \delta\,{}^{\mathrm{IV}}y + \text{etc.}$$

atque hoc pacto vna functionum illarum P, Q, R, etc. determinabitur. Sic ſi propoſita ſit haec ſeriei lex:

$$y = c + 3\,'y - 2\,''y$$

hinc naſcetur aequatio $(u - 1)(u^2 - 3u + 2) = 0$, cuius

K 2 facto-

factores sunt $(u-1)^2(u-2)=0$; ex quibus colligitur terminus generalis:

$$y = P + Qx + 2^x R \text{, erit ergo}$$
$$'y = P + Qx - Q + 2^{x-1} R \text{, et}$$
$$''y = P + Qx - 2Q + 2^{x-2} R,$$

qui substituti hanc dabunt aequalitatem:

$$P + Qx + 4\, 2^{x-2} R = c + P + Qx + Q + 4\, 2^{x-2} R,$$

vnde reperitur $Q = -c$: sicque terminus generalis propositae legi conueniens erit $y = P - cx + 2^x R$, vbi pro P et R functiones quascunque parium dimensionum ipsarum r et s assumi possunt.

Scholion 2.

§. 52. Quoniam igitur methodum vniuersalem tradidimus inueniendi terminos generales serierum, quarum terminus quisque per praecedentes determinatur, siquidem terminorum antecedentium nullae potestates occurrant; eandem hanc methodum accommodemus ad series, quarum quisque terminus, non solum ex praecedentibus, sed etiam ex ipso indice, determinatur; in quo tertium formationis serierum genus constituimus. Quodsi vero terminorum praecedentium quadrata, altioresue potestates in determinationem sequentis ingrediantur, vt si fuerit $y' = yy + ay$, tum quidem aequatio differentialis infinita, qua terminus generalis inuenitur, facile exhibetur, quae hoc casu erit:

$$yy + ay = y + \frac{dy}{1\,dx} + \frac{ddy}{1 \cdot 2\, dx^2} + \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dx^3} + \text{etc.}$$

sed quia artificium nondum constat huiusmodi aequationes resoluendi, tractationem huius generis serierum hic praetermittere cogimur.

Proble-

Problema. VIII.

§. 53. Inuenire terminum generalem feriei, cuius quilibet terminus indici x refpondens, aequatur praecedentis multiplo cuicunque vna cum multiplo ipfius indicis, et quantitate quapiam conftante.

Solutio.

Sit y terminus indici x refpondens, et y' denotet terminum fequentem, fitque haec feriei lex propofita.

$$y' = my + a + bx,$$

ex qua valorem ipfius y definiri oporteat. Si ergo pro y' valorem fuum fubftituamus, habebimus hanc aequationem:

$$a + bx + my = y + \frac{dy}{1dx} + \frac{ddy}{1.2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$

Huiusmodi autem aequationes etfi generaliter refoluere docui, tamen expediet hanc aequationem per fubftitutionem in aliam refoluere, in qua omnes termini vnam ipfius y complectantur dimenfionem. Ponatur ergo

$y = A + Bx + v$, erit $dy = Bdx + dv$; $ddy = ddv$ etc.

fietque:

$$\begin{aligned} a + bx + mv &= A + Bx + v + \frac{dv}{1dx} + \frac{ddv}{1.2dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3dx^3} + \text{etc.} \\ + mA + mBx &\quad + B \end{aligned}$$

Iam fiat $A + B = a + mA$ et $B = b + mB$; reperieturque $B = \frac{-b}{m-1}$; et $A = \frac{-m}{(m-1)^2} - \frac{a}{m-1}$. Reftabit ergo haec aequatio:

$$mv = v + \frac{dv}{1dx} + \frac{ddv}{1.2dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$

quae cum reducatur ad $e^z - m = u - m = 0$: erit:

$v = m^x P$, ideoque terminus generalis quaefitus,

$$y = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a-bx}{m-1} + m^x P.$$

Vnicus casus hic excipitur quo $m=1$, ob denominatorem $m-1$ euanescentem. Cum enim hoc casu habeatur:

$$a+bx=\frac{dy}{1dx}+\frac{ddy}{1\cdot2dx^2}+\frac{d^3y}{1\cdot2\cdot3dx^3}+\text{ etc.}$$

ad terminum bx tollendum huiusmodi valor pro y accipi debet $y=A+Bx+Cxx+v$: vnde fit $\frac{dy}{dx}=B+2Cx+\frac{dv}{dx}$ et $\frac{ddy}{dx^2}=2C+\frac{ddv}{dx^2}$: sicque habebitur:

$$a+bx=B+2Cx+\frac{dv}{1dx}+\frac{ddv}{1\cdot2dx^2}+\frac{d^3v}{1\cdot2\cdot3dx^3}+\text{ etc.}$$
$$+C$$

Fiat ergo $C=\frac{1}{2}b$, et $B=a-\frac{1}{2}b$; eritque $v=P$, et terminus generalis $y=A+(a-\frac{1}{2}b)x+\frac{1}{2}bxx+P$; seu cum A in functione P comprehendi possit, erit: $y=(a-\frac{1}{2}b)x+\frac{1}{2}bxx+P$. Q. E. I.

Scholion.

§. 54. Huiusmodi autem series reuocari possunt ad legem recurrentium simplicium. Cum enim sit

$y'=a+bx+my$	erit
$y''=a+b(x+1)+my'$	vnde subtrahendo
$y''-y'=\quad b+my'-my$	simili modo erit
$y'''-y''=\quad b+my''-my'$	denuoque subtrahendo:
$y'''-2y''+y'=my''-2my'+my$	seu

$y'''=(m+2)y''-(2m+1)y'+my$ siue pro terminis antecedentibus
$y=(m+2)'y-(2m+1)''y+m'''y$.

Hinc ergo secundum §. LI. formabitur aequatio:
$u^3-(m+2)u^2+(2m+1)u-m=0$ quae habet factores:
$(u-1)^2(u-m)=0$. ex quibus oritur terminus generalis:
$y=P+Qx+m^xR$. Iam vt haec forma nimis late patens ad casum propositum $y'=a+bx+my$ accommodetur, ob

$y'=$

$y' = P + Qx + Q + m.m^x R$, fiet
$P + Q + Qx + m.m^x R = a + bx + mP + mQx + m.m^x R$
ideoque $P + Q = a + mP$, et $Q = b + mQ$, vnde inuenitur $Q = \frac{-b}{m-1}$ et $P = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a}{m-1}$, ita vt fit terminus generalis vt ante eft inuentus:

$$y = \frac{-b}{(m-1)^2} - \frac{a-bx}{m-1} + m^x R.$$

Sin autem $m = 1$, ftatim patet aequationis $(u-1)^2(u-m) = 0$, tres factores fore aequales, fierique $(u-1)^3 = 0$, vnde fit terminus generalis $y = P + Qx + Rxx$, et propterea:

$$\begin{aligned} y' = P + Qx + Rxx &= P + Qx + Rxx \\ +Q + 2Rx \qquad &\quad\ \ a + bx \\ +R \qquad\qquad & \end{aligned}$$

Ergo prodit: $R = \frac{1}{2}b$ et $Q = a - \frac{1}{2}b$, ita vt fit terminus generalis $y = P + (a - \frac{1}{2}b)x + \frac{1}{2}bxx$, vt ante. Simili modo apparet, fi lex progreffionis in genere fit:

$$y = X + \alpha' y + \beta'' y + \gamma''' y + \delta^{\text{IV}} y + \text{ etc.}$$

atque X fit functio ipfius x rationalis integra, veluti $X = a + bx + cxx + dx^3 +$ etc. per continuam fubtractionem tandem perueniri ad legem, qua finguli termini per folos antecedentes determinentur; ficque feriem femper fore recurrentem, cuius terminus generalis per praecepta ante data definiri queat. Hic autem terminus nimis late patebit; hancque ob rem quaerendis valoribus terminorum $'y$, $''y$, $'''y$ etc. ad legem propofitam accommodari debebit, quo pacto tot femper functiones P, Q, R, etc. determinabuntur, quot litterae a , b . c , d , etc. fuerint per fubtractionem eliminatae. Cum igitur huiusmodi

modi series nihil amplius habeant difficultatis, alias consideremus, in quibus X non sit functio, vel rationalis, vel integra ipsius x.

Problema. IX.

§. 55. Inuenire terminum generalem seriei, cuius quilibet terminus aequetur praecedenti vna cum functione quacunque ipsius indicis.

Solutio.

Sit terminus indici x respondens $= y$, eiusque antecedens

$$'y = y - \frac{dy}{1\,dx} + \frac{ddy}{1.2\,dx^2} - \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} - \text{etc.}$$

Lex autem progressionis fit $y = {}'y + X$, vnde fiet

$$X = \frac{dy}{1\,dx} - \frac{ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} - \frac{d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

quae aequatio resoluetur ope regularum, quas ante aliquod tempus tradidi. Scilicet ponendo z^n pro $\frac{d^ny}{dx^n}$ formetur haec expressio:

$$Z = z - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} - \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} = 1 - e^{-z}$$

cuius quaerantur omnes factores, qui erunt primo z; reliqui in hac forma generali continentur: $zz + 4kk\pi\pi$. Ex factore $z - 0$ orietur autem haec pars integralis:

$$y = \int X\,dx + \text{etc.}$$

Ex factore autem $zz + 4kk\pi\pi$ si comparetur cum formula $zz - 2kz\,\text{cos}.\,\Phi + kk$, fiet $k = 2k\pi$, et cos. $\Phi = 0$, vnde $\Phi = 90^\circ$, ideoque litterae $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ita determinabuntur ob $A = 0$; $B = 1$, $C = \frac{1}{1.2}$; $D = \frac{1}{1.2.3}$ etc.

$\mathfrak{M} =$

$\mathfrak{M} = 1 - \frac{4k^2\pi^2}{1.2} + \frac{16k^4\pi^4}{1.2.3.4} - \frac{64k^6\pi^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$

$\mathfrak{N} = -\frac{2k\pi}{1} + \frac{8k^3\pi^3}{1.2.3} - \frac{32k^5\pi^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$

ita vt ſit $\mathfrak{M} = \text{coſ.}\, 2k\pi$, et $\mathfrak{N} = -\text{ſin.}\, 2k\pi$. His valoribus inuentis, erit pars integralis ex factore $zz + 4kk\pi\pi$ oriunda:

$$y = 2\begin{cases}(\text{coſ.}\, 2k\pi\, \text{coſ.}\, 2k\pi x - \text{ſin.}\, 2k\pi.\, \text{ſin.}\, 2k\pi x) \int X dx\, \text{coſ.}\, 2k\pi x\\ (\text{coſ.}\, 2k\pi.\, \text{ſin.}\, 2k\pi x + \text{ſin.}\, 2k\pi.\text{coſ.}\, 2k\pi x) \int X dx\, \text{ſin.}\, 2k\pi x\end{cases}$$

at eſt, ſi $2k = 0$, $\text{coſ.}\, 2k\pi = 1$, vnde erit:

$v = 2\, \text{coſ.}\, 2k\pi x \int X dx\, \text{coſ.}\, 2k\pi x + 2\, \text{ſin.}\, 2k\pi x \int X dx\, \text{ſin.}\, 2k\pi x.$

Quod ſi iam omnes hi valores, ex variabilitate numeri k oriundi, in vnam ſummam colligantur, prodibit terminus generalis quaeſitus:

$$y = \int X dx \begin{matrix} +2\text{coſ.}\, 2\pi x \int X dx\, \text{coſ.}\, 2\pi x + 2\text{coſ}\, 4\pi x \int X dx\, \text{coſ.}\, 4\pi x + 2\text{coſ.}\, 6\pi x \int X dx\, \text{coſ.}\, 6\pi x \\ +2\text{ſin.}\, 2\pi x \int X dx\, \text{ſin.}\, 2\pi x + 2\text{ſin.}\, 4\pi x \int X dx\, \text{ſin.}\, 4\pi x + 2\text{ſin.}\, 6\pi x \int X dx\, \text{ſin.}\, 6\pi x \end{matrix}\ \text{etc.}$$

Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 56. Quia eſt $y = {}'y + X$, manifeſtum eſt, y exprimere terminum ſummatorium ſeriei, cuius terminus generalis ſit $= X$. Si enim ſumma omnium terminorum a primo vsque ad hunc X, cuius index eſt $= x$, ponatur $= y$, erit ſumma omnium praeter vltimum $= {}'y$, ideoque $y = {}'y + X$.

Coroll. 2.

§. 57. Expreſſio ergo inuenta y, ſeu terminus generalis ſeriei propoſitae, ſimul eſt terminus ſummatorius ſeriei, cuius terminus generalis eſt $= X$; ſicque nouam adepti ſumus expreſſio-

 nem

nem pro ſumma cuiusque ſeriei, cuius terminus generalis datur; quae autem ob multitudinem integralium infinitam rariſſime vſum aliquem praeſtabit.

Scholion.

§. 58. Si praeter functionem quamcunque indicis x, non ſolum terminus proxime praecedens, ſed plures praecedentium, ad formationem termini ſequentis adhibeantur, ſimili modo peruenietur ad reſolutionem aequationis differentialis infinitae, quae ope *methodi a me propoſitae* tractari poterit. Non ſolum igitur ſeries, quarum lex formationis ad genus pertinet ſecundum, methodo hic expoſita ad calculum reuocari, earumque termini generales inueniri poſſunt, ſed etiam ad genus tertium aeque patet, iſtarumque ſerierum veram indolem clarius ob oculos ponit.

Problema X.

§. 59. Inuenire terminum generalem ſeriei, cuius quilibet terminus aequalis ſit praecedenti per ſuum indicem multiplicato.

Solutio.

Si terminus primus vnitati aequalis ſtatuatur, orietur *Wallisii* ſeries Hypergeometrica haec:

ind:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	etc.
term:	1,	1,	2,	6,	24,	120,	720,	5040,	40320,	

Ponatur terminus indici x, reſpondens $= y$, eiusque ſequens $= y'$, erit $y' = y x$, vnde naſcitur haec aequatio:

$y x =$

$$y\,x = y + \frac{dy}{1\,dx} + \frac{ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$$

pro tali autem aequatione resoluenda regula generalis non constat. At cui negotio haec aequatio in aliam formam transformatur, quam resoluere liceat. Ponatur scilicet $y = e^v$, erit $y' = e^{v'}$, ideoque fiet $e^{v'} = e^v x$, sumtisque logarithmis: $v' = v + l\,x$, quocirca habebitur:

$$lx = \frac{dv}{1\,dx} + \frac{ddv}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4v}{1.2.3.4\,dx^4} + \frac{d^5v}{1.2.3.4.5\,dx^5} + \text{etc.}$$

quae aequatio in praecedente continetur, faciendo $X = lx$, quocirca integrale erit:

$$v = \int dxlx \begin{matrix} +2\,\text{cos}.\,2\pi x\int dxlx.\,\text{cos}.\,2\pi x + 2\,\text{cos}.\,4\pi x\int dxlx.\,\text{cos}.\,4\pi x + \text{etc.} \\ +2\,\text{fin}.\,2\pi x\int dxlx.\,\text{fin}.\,2\pi x + 2\,\text{fin}.\,4\pi x\int dxlx.\,\text{fin}.\,4\pi x + \text{etc.} \end{matrix}$$

Inuento autem valore ipsius v, erit terminus generalis quaesitus $y = e^v$: denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$. Q. E. I.

Scholion.

§. 60. Primum huius expressionis membrum $\int dx\,lx$ est $= x\,l\,x - x$, reliqua vero membra singula per series infinitas integrari poterunt. Est enim:

$$\int dxlx.\,\text{cos}.\,mx = \frac{1}{m}\,\text{fin}.\,mx\left(lx + \frac{1}{m^2x^2} - \frac{1.2.3}{m^4x^4} + \frac{1.2.3.4.5}{m^6x^6} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{m}\,\text{cos}.\,mx\left(\frac{1}{mx} - \frac{1.2}{m^3x^3} + \frac{1.2.3.4}{m^5x^5} - \text{etc.}\right)$$

$$\int dxlx.\,\text{fin}.\,mx = -\frac{1}{m}\,\text{cos}.\,mx\left(lx + \frac{1}{m^2x^2} - \frac{1.2.3}{m^4x^4} + \frac{1.2.3.4.5}{m^6x^6} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{m}\,\text{fin}.\,mx\left(\frac{1}{mx} - \frac{1.2}{m^3x^3} + \frac{1.2.3.4}{m^5x^5} - \text{etc.}\right)$$

Vnde colligitur, fore:

$$\left.\begin{matrix} 2\,\text{cof}.\,mx\int dxlx.\,\text{cof}.\,mx \\ +\,2\,\text{fin}.\,mx\int dxlx.\,\text{fin}.\,mx \end{matrix}\right\} = \frac{2}{mmx}\left(1 - \frac{1.2}{m^2x^2} + \frac{1.2.3.4}{m^4x^4} - \frac{1.2.3.4.5.6}{m^6x^6} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \alpha\,\text{cof}.\,mx + \mathfrak{A}\,\text{fin}.\,mx$$

Substi-

Substitutis iam successiue pro m valoribus 2π, 4π, 6π, etc. cunctisque his expressionibus collectis reperietur:

$$\begin{array}{ll} v = C + x\,lx - x & + \frac{1}{2\pi^2 x}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}\right) \\ \quad \alpha \cos. 2\pi x + \mathfrak{A} \sin. 2\pi x & - \frac{1\cdot 2}{8\pi^4 x^3}\left(1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \text{etc.}\right) \\ \quad \beta \cos. 4\pi x + \mathfrak{B} \sin. 4\pi x & \\ \quad \gamma \cos. 6\pi x + \mathfrak{C} \sin. 6\pi x & + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{32\pi^6 x^5}\left(1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \text{etc.}\right) \\ \qquad \text{etc.} & \qquad \text{etc.} \end{array}$$

Si nunc pro his seriebus potestatum *summae, a me dudum inuentae*, substituantur, habebitur:

$$\begin{aligned} v = C + x\,lx - x + \alpha \cos. 2\pi x + \beta \cos. 4\pi x + \gamma \cos. 6\pi x + \text{etc.} \\ + \mathfrak{A} \sin. 2\pi x + \mathfrak{B} \sin. 4\pi x + \mathfrak{C} \sin. 6\pi x + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2x} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6x^3} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{6x^5} - \frac{1}{7\cdot 8\cdot 9}\cdot\frac{1}{10x^7} + \frac{1}{9\cdot 10\cdot 11}\cdot\frac{5}{6x^9} - \text{etc.}$$

seu si sit P functio parium dimensionum ipsarum $r = \sin. \pi x$, et $s = \cos. \pi x$, erit:

$$v = P + x\,lx - x + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2x} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6x^3} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{6x^5} - \text{etc.}$$

Cum iam posito $x = 1$, fiat $y = 1$, et $v = 0$; debebit hoc casu fieri: $P = 1 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 6} + \frac{3}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} - \text{etc.}$ cuius valorem, alibi ostendi, esse $P = \frac{1}{2}\,l\,2\pi$, huncque valorem habebit, quoties x sit numerus integer quicunque. Hinc ad numeros regrediendo inuenietur terminus generalis quaesitus:

$$y = \frac{x^x}{e^x}\cdot e^{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2x} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6x^3} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{6x^5} - \text{etc.}}\ \sqrt{2\pi} \text{ seu}$$

$$y = \frac{x^x}{e^x}\ e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \text{etc.}}\ \sqrt{2\pi}$$

Vnde

Vnde si x sit numerus valde magnus, erit proxime:

$$y = \frac{x^x}{e^x}\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} + \text{etc.}\right)\sqrt{2\pi}$$

sicque magnitudo cuiusuis termini, ab initio valde remoti, non difficulter proxime assignatur.

CONSIDERATIO QVARVMDAM SERIERVM, QVAE SINGVLARIBVS PROPRIETATIBVS SVNT PRAEDITAE.

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Saepe numero *consideratio serierum*, quae quasi casu se nobis offerunt, non contemnenda suppeditare solet artificia, quibus deinceps in vniuersa serierum doctrina summo cum fructu vti licet. Cum igitur doctrina *de seriebus* sit maximi momenti in Analysi, huiusmodi speculationes omnino dignae sunt habendae, quae omni industria euoluantur. Hunc in finem sequentem seriem offerre constitui, quae, tum ob singulares, quibus praedita deprehenditur proprietate, tum vero propter insignes vsus, quos nobis exhibet, omni attentione digna videtur. Series autem ita se habet:

$$\frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{a^6-a^{10}} + \text{etc.}$$

Lex numeratorum ex sola inspectione est manifesta, formantur enim ex multiplicatione terminorum huius seriei:

$1-x$; $a-x$; a^2-x; a^3-x; a^4-x; a^5-x; a^6-x; etc.

Denominatores omnes duobus constant terminis, qui sunt potestates ipsius a, quarum exponentes sunt numeri trigonales. Hinc terminus ordine n seriei propositae erit:

$$\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)\ \ldots\ldots\ (a^{n-1}-x)}{a^{n(n-1):2} - a^{n(n+1):2}}.$$

§. 2.

§. 2. Primo quidem patet, si quantitas x potestati cuipiam ipsius a aequalis capiatur, tum seriem alicubi ita obrumpi, vt omnes sequentes termini abeant in nihilum. Ponamus ergo in genere s pro summa seriei propositae, vt sit:

$$s = \frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{a^6-a^{10}} + \text{etc.}$$

ac statuatur primo $x = 1$, seu $x = a^0$, eritque ob omnes terminos evanescentes $s = 0$. Sit porro $x = a$, vt solus primus terminus supersit, eritque $s = 1$. Sit $x = a^2$, fietque $s = \frac{1-a^2}{1-a} + \frac{(1-a^2)(a-a^2)}{a-a^3}$ seu $s = 2$. Ponatur $x = a^3$, ac prodibit:

$$s = \frac{1-a^3}{1-a} + \frac{(1-a^3)(a-a^3)}{a-a^3} + \frac{(1-a^3)(a-a^3)(a^2-a^3)}{a^3-a^6}.$$

Horum terminorum primus dat $1 + a + aa$; secundus dat $1 - a^3$, et tertius dat $1 - a - aa + a^3$; quibus collectis fiet $s = 3$.

§. 3. Simili modo si ponatur $x = a^4$, operatione instituta reperietur $s = 4$; et posito $x = a^5$, prodibit $s = 5$. Vnde satis tuto per inductionem concludi posse videtur, quoties x cuicunque potestati ipsius a, cuius exponens sit $= n$, aequatio statuatur, toties hunc ipsum exponentem praebiturum esse valorem ipsius s. At vero haec inductio tantum valet, si n sit numerus integer affirmatiuus. Quod si enim pro quouis numero fracto valeret, tum foret $s =$ logarithmo ipsius x, sumto a pro numero, cuius longarithmus sit $= 1$. Sic si hoc verum esset, posito $a = 10$, summa seriei s semper exprimere deberet logarithmum communem ipsius x, essetque:

$$s = -\frac{(1-x)}{9} - \frac{(1-x)(10-x)}{990} - \frac{(1-x)(10-x)(100-x)}{999000} - \frac{(1-x)(10-x)(100-x)(1000-x)}{9999000000} - \text{etc.} = lx.$$

Ex

Ex ſequentibus autem perſpicuum euadet, hanc aequalitatem non ſubſiſtere, niſi ſit x poteſtas ipſius a, exponentem habens integrum affirmatiuum.

§. 4. Quod autem, poſito $x = a^n$, non ſemper ſit $s = n$, niſi n ſit numerus integer affirmatiuus, ex caſu quo $x = 0$ facile colligitur. Hoc enim caſu, ſi ſuperior inductio ſe ad omnes omnino numeros extenderet, fieri deberet $s = -\infty$, cum $-\infty$ ſit perpetuo longarithmus cyphrae. Verum poſito $x = 0$, fiet:

$$s = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-aa} + \frac{1}{1-a^3} + \frac{1}{1-a^4} + \frac{1}{1-a^5} + \text{etc.}$$

quae ſeries etſi ſummari non poteſt, tamen quilibet facile perſpiciet, eius ſummam eſſe debere finitam, neque propterea logarithmum ipſius $x = 0$ exprimere poſſe. Simili modo, ſi poſito $a = 10$, atque x non poteſtati ipſius 10 aequale ponatur, per ſummationem valor inuenietur, plerumque ſatis notabiliter a $l\,x$ diſcrepans. Sit enim $x = 9$, poſito $a = 10$, eritque:

$$s = \frac{8}{9} + \frac{8\cdot 1}{9\cdot 99} + \frac{8\cdot 1\cdot 91}{9\cdot 99\cdot 999} + \frac{8\cdot 1\cdot 91\cdot 991}{9\cdot 99\cdot 999\cdot 9999} + \frac{8\cdot 1\cdot 91\cdot 991\cdot 9991}{9\cdot 99\cdot 999\cdot 9999\cdot 99999}\ \text{etc.}$$

qui termini ſi in fractionibus decimalibus exprimantur, prodibit:

$$\begin{array}{r} s = 0{,}88888888888888888888 \\ 808080808080808080 \\ 8008008008008008 \\ 80008000800080 \\ 800008000080 \\ 8000008000 \\ 80000008 \\ 800000 \\ 8000 \\ 80 \\ \hline s = 0{,}89705058521067321224 \end{array}$$

qui

qui valor vtique minor est, quam logarithmus novenarii.

§. 5. Series igitur nostra ita est comparata, vt si pro x substituantur potestates ipsius a rationales, summa seriei aequalis fiat exponenti illius potestatis: scilicet

si sit $x = a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8$, etc.
crit $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, etc.

quae etsi est proprietas logarithmorum, tamen non nisi exponentes ipsius a sint numeri integri. Quod si ergo concipiatur linea curua, cuius abscissae sint s, et applicatae $= x$, haec curua logarithmicam in punctis innumeris intersecabit, scilicet quoties abscissa s per numerum integrum exprimitur, toties applicata per intersectionem transibit. Vnde patet, curuam logarithmicam ne per infinita quidem puncta determinari; quod etiam in omnibus aliis lineis curuis vsu venit. Hinc itaque intelligitur, quamlibet seriem, etsi omnes eius termini indicibus integris respondentes dentur, infinitis modis diuersis interpolari posse, quod argumentum alia occasione vberius pertractabo.

§. 6. Quo autem propius ad cognitionem nostrae seriei perueniamus, eam in hanc formam transmutare licet:

$$s = \frac{1}{1-a}(1-x) + \frac{1}{1-a^2}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{1-a^3}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a^2}\right) + \frac{1}{1-a^4}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{aa}\right)\left(1-\frac{x}{a^3}\right) \text{etc.}$$

quae propterea simplicior est praecedente, quod hic numeri trigonales abierint. Ponamus nunc $a\,x$ in locum ipsius x, denotetque t summam seriei hinc resultantis, erit:

$$t = \frac{1}{1-a}(1-ax) + \frac{1}{1-a^2}(1-ax)(1-x) + \frac{1}{1-a^3}(1-ax)(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{1-a^4}(1-ax)(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{aa}\right) + \text{etc.}$$

subtrahatur prior series a posteriore, ac reperietur:

$t - s$

$t-s = x + \frac{x}{a}(1-x) + \frac{x}{aa}(1-x)(1-\frac{x}{a}) + \frac{x}{a^3}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa}) + \text{etc.}$
subtrahatur haec series ab vnitate, et cum residuum sit per $1-x$ diuisibile erit:

$1+s-t = (1-x)(1-\frac{x}{a}-\frac{x}{aa}(1-\frac{x}{a})-\frac{x}{a^3}(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa}) - \text{etc.})$

Hic factor posterior autem porro diuisibilis est per $1-\frac{x}{a}$, vnde fit $1+s-t = (1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa}-\frac{x}{a^3}(1-\frac{x}{aa}) - \text{etc.})$
Hic denuo factor deprehenditur $1-\frac{x}{aa}$, hocque seorsim expresso, factor apparebit $1-\frac{x}{a^3}$, et ita porro, vnde tandem reperitur fore:

$1+s-t = (1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2})(1-\frac{x}{a^3})(1-\frac{x}{a^4})(1-\frac{x}{a^5})$ etc.

§. 7. Hinc igitur patet, quoties x aequalis capiatur cuipiam potestati ipsius a, ob vnum factorem huius expressionis euanescentem fore $1+s-t=0$, seu $t=1+s$. Quare si posito $x=a^n$, denotante n numerum integrum affirmatiuum, fuerit summa seriei propositae $s=n$, posito $x=a^{n+1}$, erit summa seriei $t=s+1=n+1$. Cum igitur sumto $n=0$, seu $x=1$, sit summa seriei $s=0$, erit, posito $x=a^1$, summa seriei $s=1$: hincque porro sequitur, si ponatur $x=a^2$, fore $s=2$, et si $x=a^3$, fore $s=3$. Atque in genere nunc patet, quod ante per solam inductionem eliciuimus, si fiat $x=a^n$, denotante n numerum integrum affirmatiuum, fore perpetuo $s=n$. Sin autem n non sit numerus integer affirmatiuus, atque s designet summam seriei initio propositae, facto $x=a^n$, tum posito $x=a^{n+1}$, summa seriei, quae sit $=t$ non erit $=s+1$, fiet enim:

$t = 1+s-(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})(1-a^{n-3})(1-a^{n-4})$ etc.

His

His ergo casibus valor seriei manifeste recedit a natura logarithmorum.

§. 8. Quemadmodum hic valores ipsius x per a multiplicando ex valore ipsius s elicuimus valorem ipsius t, ita vicissim valores ipsius x per a diuidendo ex valore ipsius t obtinebimus valorem ipsius s; hincque ad valores negatiuos exponentis n descendere poterimus. Scilicet in serie initio proposita, vel ad hanc formam perducta:

$$s = \frac{1}{1-a}(1-x) + \frac{1}{1-a^2}(1-x)(1-\frac{x}{a}) + \frac{1}{1-a^3}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2}) + \text{etc.}$$

pro sequentibus casibus summam seriei ita indicemus:

si $x = 1$ fit $s = A = 0$

$x = \frac{1}{a}$ - - - $s = B$

$x = \frac{1}{a^2}$ - - - $s = C$

$x = \frac{1}{a^3}$ - - - $s = D$

$x = \frac{1}{a^4}$ - - - $s = E$

etc.

Quod si iam ponatur $x = \frac{1}{a}$; fiet $s = B$, et $t = A = 0$, quia t oritur ex s, si loco x scribatur $a\,x$: ex praecedentibus oritur:

$$1 + B = (1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3})(1-\frac{1}{a^4})(1-\frac{1}{a^5}) \text{ etc.}$$

seu $B = -1 + (1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3})(1-\frac{1}{a^4})(1-\frac{1}{a^5})$ etc.

sic si $a = 10$, fiet $B = -0,10998990000998$.

§. 9. Sit $x = \frac{1}{a^2}$, eritque $s = C$, et $t = B$; vnde habebitur;

$$1 + C - B = (1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3}(1-\frac{1}{a^4})(1-\frac{1}{a^5}) \text{ etc.}$$

ad hanc addatur prior $1 + B$, eritque:

$$2 + C = (2-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3})(1-\frac{1}{a^4})(1-\frac{1}{a^5}) \text{ etc.}$$

et

et $C = -2 + (2 - \frac{1}{a})(1 - \frac{1}{a^2})(1 - \frac{1}{a^3})(1 - \frac{1}{a^4})(1 - \frac{1}{a^5})$ etc.
Vel ipsa serie eliminata erit:

$1 + B = (1 - \frac{1}{a})(1 + C - B)$, seu $C - 2B = \frac{1}{a}(1 + C - B)$.

Simili modo si ponatur $x = \frac{1}{a^2}$. erit $s = D$, et $t = C$, vnde fiet:

$1 + D - C = (1 - \frac{1}{a^3})(1 - \frac{1}{a^4})(1 - \frac{1}{a^5})(1 - \frac{1}{a^6})$ etc.

ad quam prior series addita praebebit:

$3 + D = (3 - \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^3})(1 - \frac{1}{a^3})(1 - \frac{1}{a^4})(1 - \frac{1}{a^5})(1 - \frac{1}{a^6})$ etc.

Ac posito $x = \frac{1}{a^4}$ cum fiat:

$1 + E - D = (1 - \frac{1}{a^4})(1 - \frac{1}{a^5})(1 - \frac{1}{a^6})(1 - \frac{1}{a^7})$ etc. erit

$4 + E = (4 - \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{2}{a^5} - \frac{1}{a^6})(1 - \frac{1}{a^4})(1 - \frac{1}{a^5})(1 - \frac{1}{a^6})$ etc.

sicque quousque libuerit, vlterius progredi licet.

§. 10. Potest autem inter ternos valores summae seriei s, pro ternis valoribus ipsius x successiuis, relatio per expressionem finitam exhiberi. Manente enim pro valore x summa $= s$, sit si loco x ponatur $a x$, summa seriei $= t$, et si loco x ponatur $a a x$, sit summa seriei $= u$. Cum igitur inter t et s hanc inuenerimus relationem:

$1 + s - t = (1 - x)(1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{x}{a^2})(1 - \frac{x}{a^3})(1 - \frac{x}{a^4})$ etc.

si hic pro x scribamus $a x$, prodibit relatio similis inter u et t:

$1 + t - u = (1 - a x)(1 - x)(1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{x}{a^2})(1 - \frac{x}{a^3})$ etc.

Hinc ergo erit $1 + t - u = (1 - a x)(1 + s - t)$ siue

$$u = 2t - s + a x(1 + s - t)$$

vel $s = \frac{2t - u + ax(1-t)}{1 - ax}$

Atque

Atque hinc pro ſupra aſſumtis valoribus A, B, C, D, etc. ſequentes prodibunt relationes.

Si $x = \frac{1}{a^2}$; erit $A = 2B - C + \frac{1}{a}(1 + C - B)$

ſeu $C = \frac{1 + (2a-1)B - aA}{a-1} = B + \frac{1 + a(B-A)}{a-1}$

ſi $x = \frac{1}{a^3}$; erit $D = C + \frac{1 + a^2(C-B)}{a^2-1}$

ſi $x = \frac{1}{a^4}$; erit $E = D + \frac{1 + a^3(D-C)}{a^3-1}$

ſi $x = \frac{1}{a^5}$; erit $F = E + \frac{1 + a^4(E-D)}{a^4-1}$

etc.

Hae relationes autem ſequenti modo commodius exprimi poſſunt:

$$C = 2B - A + \frac{1+B-A}{a-1}$$

$$D = 2C - B + \frac{1+C-B}{a^2-1}$$

$$E = 2D - C + \frac{1+D-C}{a^3-1}$$

$$F = 2E - D + \frac{1+E-D}{a^4-1}$$

etc.

Cum ergo ſit $A = 0$, ſi ſolius litterae B valor fuerit repertus:

$B = -1 + (1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a^3})(1-\frac{1}{a^4})$ etc.

hinc omnium ſequentium litterarum C, D, E, F, etc. valores exacto poterunt aſſignari.

§. 11. Cum autem denotante n numerum integrum affirmatiuum, ſi ponatur $x = a^n$, ſit $s = n$, ex noſtra aſſumta ſerie conſequemur hanc ſummabilem.

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \text{etc.}$$

Tum vero hoc caſu, quia eſt $t = n + 1$, erit:

 $1 =$

$1 = a^n + a^{n-1}(1-a^n) + a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1}) + a^{n-3}(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})$ etc.

cuius veritas omnibus terminis ad eandem partem coniectis est manifesta, fiet enim:

$(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})(1-a^{n-3})(1-a^{n-4})$ etc. $= 0$.

Hinc ansam nanciscimur generalius huiusmodi formas contemplandi. Sit enim A, B, C, D, E, F, etc. series quantitatum quarumuis, sitque:

$$(1-A)(1-B)(1-C)(1-D)(1-E) \text{ etc.} = S.$$

Atque hinc obtinebitur:

$1 - A - B(1-A) - C(1-A)(1-B) - D(1-A)(1-B)(1-C) - \text{etc.} = S$;

haec enim formula facillime reducitur ad illam. Hanc ob rem habebimus:

$A + B(1-A) + C(1-A)(1-B) + D(1-A)(1-B)(1-C) + \text{etc.} = S + 1$.

§. 12. Quod si ergo quaepiam harum quantitatum A, B, C, etc. vnitati fiat aequalis, erit $S = 0$, prodibitque series, cuius summa $= 1$. Sumatur verbi gratia haec series:

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \\ \frac{1}{2}; & \frac{2}{3}; & \frac{3}{4}; & \frac{4}{5}; & \frac{5}{6}; & \frac{6}{7}; \text{ etc.} \end{array}$$

quarum fractionum cum infinitissima sit $= 1$, erit $S = 0$, et sequens nascetur series:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{ etc.}$$

cuius quidem veritas facile perspicitur, oritur enim ea hoc modo:

fit $z = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.}$

erit $z - 1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.}$ hincq. per subtr. prodit

$1 =$

$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} +$ etc.

§. 13. Sit $A = \frac{1}{9}$; $B = \frac{1}{25}$; $C = \frac{1}{49}$; $D = \frac{1}{81}$; etc. erit $S = \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{120}{121} \cdot \text{etc.} = \frac{\pi}{4}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter eſt $= 1$. Hinc ergo orietur haec ſeries pro quadratura circuli.

$$\frac{\pi}{4} + 1 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9\cdot 25} + \frac{8\cdot 24}{9\cdot 25\cdot 49} + \frac{8\cdot 24\cdot 48}{9\cdot 25\cdot 49\cdot 81} + \text{etc.}$$

ſeu $\frac{9}{4}\pi + 8 = \frac{2\cdot 4}{5\cdot 5} + \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 5\cdot 7\cdot 7} + \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}{5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9} +$ etc.

Cum ergo huiusmodi producta, quorum valor S exhiberi poteſt, innumerabilia habeantur: ex quolibet hoc modo ſeries infinita, cuius ſumma aſſignari queat, deriuabitur. Ampliſſimus ergo hinc aperitur campus, ſeries ſummabiles, quotquot libuerit, inueniendi.

§. 14. Reuertor autem ad ſeriem initio aſſumtam

$$s = \frac{1}{1-a}(1-x) + \frac{1}{1-a^2}(1-x)(1-\frac{x}{a}) + \frac{1}{1-a^3}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2}) + \text{etc.}$$

quam in aliam formam, in qua termini ſecundum poteſtates ipſius x procedant, transfundere animus eſt. Hoc primo quidem per euolutionem ſingulorum terminorum fieri poſſet, at quia hoc pacto prodituri eſſent ſinguli coefficientes in ſeriebus infinitis, commodiſſime in hunc finem adhibebitur formula ſupra inuenta $u = 2t - s + ax(1 - t + s)$, ſeu $u - 2t + s = ax + ax(s - t)$, vbi ex s naſcitur t, ſi loco x ponatur ax; parique modo ex t fit u, ſi loco x denuo ponatur ax. Quare ſi pro ſerie quaeſita aſſumamus

$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 +$ etc. erit:

$t = A + Bax + Ca^2x^2 + Da^3x^3 + Ea^4x^4 + Fa^5x^5 +$ etc. et

$u = A + Ba^2x + Ca^4x^2 + Da^6x^3 + Ea^8x^4 + Fa^{10}x^5 +$ etc.

Ex

Ex his ergo conficietur:

$$u-2t+s=B(1-a)^2x+C(1-aa)^2x^2+D(1-a^3)^2x^3+E(1-a^4)^2x^4+\text{etc.}$$

$$ax(1+s-t)=ax+Ba(1-a)x^2+Ca(1-aa)x^3+Da(1-a^3)x^4+\text{etc.}$$

Ex quarum ferierum aequalitate concluditur fore:

$$B=\frac{a}{(1-a)^2};\ C=\frac{Ba(1-a)}{(1-aa)^2};\ D=\frac{Ca(1-aa)}{(1-a^3)^2};\ E=\frac{Da(1-a^3)}{(1-a^4)^2};\ \text{etc.}$$

§. 15. Hinc ergo fequentes coefficientium affumtorum valores obtinebuntur:

$$B=\frac{a}{(1-a)^2}$$

$$C=\frac{a^2}{(1-a)(1-aa)^2}$$

$$D=\frac{a^3}{(1-a)(1-aa)(1-a^3)^2}$$

$$E=\frac{a^4}{(1-a)(1-aa)(1-a^3)(1-a^4)^2}$$

$$F=\frac{a^5}{(1-a)(1-aa)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)^2}$$

etc.

Primus autem terminus A hinc non definitur. At quia A praebet valorem ipfius s, fi ponatur $x=0$, perfpicuum eft fore:

$$A=\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-a^3}+\frac{1}{1-a^4}+\frac{1}{1-a^5}+\text{etc.}$$

His ergo valoribus definitis, feries initio propofita:

$$s=\frac{1}{1-a}(1-x)+\frac{1}{1-a^2}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{1-a^3}(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{aa}\right)+\text{etc.}$$

transmutabitur in hanc formam:

$$s=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-a^3}+\frac{1}{1-a^4}+\frac{1}{1-a^5}+\text{etc.}\\ +\frac{ax}{(1-a)^2}+\frac{a^2x^2}{(1-a)(1-aa)^2}+\frac{a^3x^3}{(1-a)(1-aa)(1-a^3)^2}+\frac{a^4x^4}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)^2}+\text{etc}\end{array}\right\}$$

§. 16. Cum igitur pofito $x=a^n$, denotante n numerum integrum affirmatiuum, fiat $s=n$, habebitur haec fummatio:

$n+$

$$n + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \frac{1}{a^5-1} + \text{etc.} =$$
$$\frac{a^{n+1}}{(a-1)^2} - \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(aa-1)^2} + \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} - \frac{a^{4n+4}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)^2} + \text{etc.}$$

Quod si ergo fuerit $n = 0$, erit:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \text{etc.} = \frac{a}{(a-1)^2} - \frac{a^2}{(a-1)(aa-1)^2} + \frac{a^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} + \text{etc.}$$

ac, si ponatur $n = 1$, erit:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \text{etc.} = \frac{a^2}{(a-1)^2} - \frac{a^4}{(a-1)(a^2-1)^2} + \frac{a^6}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} - \text{etc.} - 1$$

Generaliter ergo erit:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \text{etc.} = \frac{a^{n+1}}{(a-1)^2} - \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(a^2-1)^2} + \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} - \text{etc.} - n$$

denotante n numerum integrum quemcunque affirmatiuum.

§. 17. Si loco n ponatur $n-1$, habebitur:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \text{etc.} = \frac{a^n}{(a-1)^2} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)^2} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)^2} - n + 1$$

a qua, si series superior auferatur, proueniet:

$$1 = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \frac{a^{4n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} + \text{etc.}$$

Huius ergo seriei summa semper aequalis est vnitati, quicunque valor ipsi a tribuatur, et quicunque numerus integer affirmatiuus pro n substituatur. Casu autem quo $n = 1$ haec summatio facile perspicitur. Quod enim sit:

$$1 = \frac{a}{a-1} - \frac{a^2}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

sequitur luculenter ex consideratione huius seriei:

$$z = 1 - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{(a-1)(a^2-1)} - \frac{1}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} + \text{etc. vnde fit:}$$
$$1 - z = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{1}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \frac{1}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} + \text{etc.}$$

quae inuicem additae dabunt:

 $1 =$

$$1 = \frac{a}{a-1} - \frac{a^2}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \frac{a^4}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} + \text{etc.}$$

§ 18. Deinde autem veritas istius seriei pro reliquis ipsius n valoribus sequentem in modum ostendi potest. Si fuerit:

$$1 = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

dico fore quoque:

$$1 = \frac{a^{n+1}}{a-1} - \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

Nam cum sit per hypothesin:

$$1 = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc. erit quoque}$$

$$0 = a^n - \frac{a^{2n}}{a-1} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)} - \text{etc.}$$

quae series inuicem additae dabunt:

$$1 = \frac{a^{n+1}}{a-1} - \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

Quare cum haec series:

$$1 = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a^{2n}}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{a^{3n}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} - \text{etc.}$$

vera sit ostensa casu $n = 1$, erit quoque vera casu $n = 2$, hincque porro casibus $n = 3$, $n = 4$, etc. ita vt quicunque numerus integer affirmatiuus pro n substituatur, summa seriei perpetuo futura sit $= 1$.

§ 19. Quoniam seriem initio propositam $s = \frac{1}{1-x}$ $(1-x)$ etc. secundum dimensiones ipsius x hic disposui, ope proprietatis supra demonstratae $u - 2t + s = ax + ax(s-t)$; non incongruum erit eandem transmutationem immediate ex ex ipſa ſerie s deriuare; ſic enim ad ſummationem innumerabilium nouarum ſerierum pertingemus. Oportebit ergo ſingulos ſeriei s terminos per multiplicationem euolvi, quod vt expeditius fieri poſſit, conſiderabo terminum quemcunque: $\frac{1}{(1-a^m)}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2})(1-\frac{x}{a^3})\ldots(1-\frac{x}{a^{m-1}})$

Ponam ergo $P=(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{a^2})(1-\frac{x}{a^3})\ldots(1-\frac{x}{a^{m-1}})$

eritque $lP=l(1-x)+l(1-\frac{x}{a})+l(1-\frac{x}{a^2})+\ldots+l(1-\frac{x}{a^{m-1}})$

et differentiando fiet:

$$\frac{dP}{P}=\frac{-dx}{1-x}-\frac{dx}{a-x}-\frac{dx}{aa-x}-\ldots-\frac{dx}{a^{m-1}-x}. \text{ ſeu}$$

$$\frac{dP}{P}=-dx\left\{\begin{array}{l} 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\text{ etc. infin.}\\ \frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\frac{x^4}{a^5}+\frac{x^5}{a^6}+\text{ etc.}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{x}{a^4}+\frac{x^2}{a^6}+\frac{x^3}{a^8}+\frac{x^4}{a^{10}}+\frac{x^5}{a^{12}}+\text{ etc.}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \frac{1}{a^{m-1}}+\frac{x}{a^{2m-2}}+\frac{x^2}{a^{3m-3}}+\frac{x^3}{a^{4m-4}}+\frac{x^4}{a^{5m-5}}+\frac{x^5}{a^{6m-6}}+\text{ etc} \end{array}\right\}$$

ſingulas nunc ſeries verticales ſummando orietur:

$$dP=-Pdx\left(\frac{a^m-1}{a^m-a^{m-1}}+\frac{a^{2m}-1}{a^{2m}-a^{2m-2}}x+\frac{a^{3m}-1}{a^{3m}-a^{3m-3}}x^2+\frac{a^{4m}-1}{a^{4m}-a^{4m-4}}x^3+\text{ etc.}\right)$$

§ 20. Fingatur nunc pro P haec ſeries:

$P=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+$ etc. eritque:

$\frac{dP}{dx}=\beta+2\gamma x+3\delta x^2+4\varepsilon x^3+5\zeta x^4+$ etc.

 Facta

Facta iam substitutione fiet:

$$\beta + \frac{a^m - 1}{a^m - a^{m-1}}\,\alpha = 0$$

$$2\gamma + \frac{a^m - 1}{a^m - a^{m-1}}\,\beta + \frac{a^{2m} - 1}{a^{2m} - a^{2m-2}}\,\alpha = 0$$

$$3\delta + \frac{a^m - 1}{a^m - a^{m-1}}\,\gamma + \frac{a^{2m} - 1}{a^{2m} - a^{2m-2}}\,\beta + \frac{a^{3m} - 1}{a^{3m} - a^{3m-3}}\,\alpha = 0$$

etc.

atque cum posito $x = 0$, fiat $P = 1$, patet esse $\alpha = 1$.

Erit ergo $\beta = \frac{-a^m + 1}{a^m - a^{m-1}}$ et $2\gamma - \frac{(a^m - 1)^2}{(a^m - a^{m-1})^2} + \frac{a^{2m} - 1}{a^{2m} - a^{2m-2}} = 0$

seu $2\gamma = \frac{a^m - 1}{a^m - a^{m-1}}\left(\frac{a^m - 1}{a^m - a^{m-1}} - \frac{a^m - 1}{a^m + a^{m-1}}\right) = \frac{2a^m(a^{m-1} - 1)(a^m - 1)}{(a^m - a^{m-1})(a^{2m} - a^{2m-2})}$,

ideoque $\gamma = \frac{(a^m - 1)(a^{m-1} - 1)}{(a^m - a^{m-1})(a^m - a^{m-2})}$. Simili modo reliqui coefficientes, verum tamen non sine ingenti labore eruentur, atque tandem satis concinne exprimi deprehendentur.

§. 21. Quo igitur hanc coefficientium determinationem commodius expediam, methodum hic iam aliquoties vsurpatam adhibebo. Scilicet in serie $P = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 +$ etc. loco x pono $\frac{x}{a}$, seriei que resultantis summa sit $= Q$, nempe;

$$Q = \alpha + \frac{\beta x}{a} + \frac{\gamma x^2}{a^2} + \frac{\delta x^3}{a^3} + \frac{\varepsilon x^4}{a^4} + \text{etc.}$$

Cum autem sit $P = (1 - x)(1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{x}{aa}) \ldots (1 - \frac{x}{a^{m-1}})$

erit $Q = (1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{x}{a^2})(1 - \frac{x}{a^3}) \ldots (1 - \frac{x}{a^m})$, ideoque

P(1 −

$P(1-\frac{x}{a^m}) = Q(1-x)$. seu $a^m P - Px - a^m Q + a^m Q x = 0$;

substituantur hic series pro P et Q assumtae, fietque,

$$\left.\begin{array}{l} \alpha a^m + \beta a^m x + \gamma a^m x^2 + \delta a^m x^3 + \text{etc.} \\ \quad - \alpha x \quad - \beta x^2 \quad - \gamma x^3 \quad - \text{etc.} \\ -\alpha a^m - \beta a^{m-1} x - \gamma a^{m-2} x^2 - \delta a^{m-3} x^3 - \text{etc.} \\ \quad + \alpha a^m x + \beta a^{m-1} x^2 + \gamma a^{m-2} x^3 + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Ex comparatione terminorum homogeneorum hinc invenitur:

$$\beta = \frac{-\alpha(a^m-1)}{a^{m-1}(a-1)} \quad ; \quad \delta = \frac{-\gamma(a^{m-2}-1)}{a^{m-3}(a^3-1)}$$

$$\gamma = \frac{-\beta(a^{m-1}-1)}{a^{m-2}(aa-1)} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{-\delta(a^{m-3}-1)}{a^{m-4}(a^4-1)}$$

etc.

§. 22. Cum igitur sit $\alpha = 1$, coefficientes ita se habebunt;

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \frac{-(a^m-1)}{a^{m-1}(a-1)}$$

$$\gamma = \frac{+(a^m-1)(a^{m-1}-1)}{a^{2m-3}(a-1)(aa-1)}$$

$$\delta = \frac{-(a^m-1)(a^{m-1}-1)(a^{m-2}-1)}{a^{3m-6}(a-1)(aa-1)(a^3-1)}$$

$$\varepsilon = \frac{+(a^m-1)(a^{m-1}-1)(a^{m-2}-1)(a^{m-3}-1)}{a^{4m-10}(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)}$$

etc.

N 3 Termi-

Terminus ergo feriei s, quicunque $\frac{1}{1-a^m}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa}) \ldots (1-\frac{x}{a^{m-1}})$ evolutus, dabit hanc progreffionem:

$$\frac{1}{1-a^m} - \frac{1}{a^{m-1}(1-a)}x + \frac{(1-a^{m-1})x^2}{a^{2m-3}(1-a)(1-a^2)} - \frac{(1-a^{m-1})(1-a^{m-2})x^3}{a^{3m-6}(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}.$$

Si igitur fucceffiue pro m numeri 1, 2, 3, 4, etc. fubftituantur, prodibunt fequentes formulae, feu termini feriei s.

$$\text{Primus} = \frac{1}{1-a} - \frac{x}{1-a}$$

$$\text{Secund:} = \frac{1}{1-a^2} - \frac{x}{a(1-a)} + \frac{(1-a)x^2}{a(1-a)(1-a^2)}$$

$$\text{Tert:} = \frac{1}{1-a^3} - \frac{x}{a^2(1-a)} + \frac{(1-a^2)x^2}{a^3(1-a)(1-a^2)} - \frac{(1-a)(1-a^2)x^3}{a^3(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}$$

$$\text{Quart.} = \frac{1}{1-a^4} - \frac{x}{a^3(1-a)} + \frac{(1-a^3)xx}{a^5(1-a)(1-a^2)} - \frac{(1-a^2)(1-a^3)x^3}{a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} + \frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)x^4}{a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}$$

etc.

§. 23. Si ergo omnes ifti termini in vnam fummam colligantur, prodibit congeries infinitarum feriernm, quae fimul fumtae, feriei initio propofitae, erunt aequales. Scilicet cum fit:

$$s = \frac{1}{1-a}(1-x) + \frac{1}{1-a^2}(1-x)(1-\frac{x}{a}) + \frac{1}{1-a^3}(1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa}) + \text{etc. erit:}$$

$$s = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-a^3} + \frac{1}{1-a^4} + \frac{1}{1-a^5} + \text{etc.}$$

$$\frac{-x}{1-a}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \text{etc.}\right)$$

$$\frac{+x^2}{a(1-a)(1-a^2)}\left(\frac{1-a}{1} + \frac{1-a^2}{a^2} + \frac{1-a^3}{a^4} + \frac{1-a^4}{a^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\frac{-x^3}{a^3(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}\left(\frac{(1-a)(1-a^2)}{1} + \frac{(1-a^2)(1-a^3)}{a^3} + \frac{(1-a^3)(1-a^4)}{a^6} + \text{etc.}\right)$$

$$\frac{+x^4}{a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}\left(\frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}{1} + \frac{(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}{a^4} + \text{etc.}\right)$$

etc.

Cum

Cum igitur haec feries congruere debeat cum ante inuenta, ex confenfu fingularum harum ferierum fumma reperientur.

$$1+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{a^2}+\tfrac{1}{a^3}+\tfrac{1}{a^4}+\text{ etc.} = \frac{-a}{1-a}$$

$$\frac{1-a}{1}+\frac{1-a^2}{a^2}+\frac{1-a^3}{a^4}+\frac{1-a^4}{a^6}+\text{ etc.} = \frac{+a^3}{1-aa}$$

$$\frac{(1-a)(1-a^2)}{1}+\frac{(1-a^2)(1-a^3)}{a^3}+\frac{(1-a^3)(1-a^4)}{a^6}+\text{ etc.} = \frac{-a^6}{1-a^3}$$

$$\frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}{1}+\frac{(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}{a^4}+\text{ etc.} = \frac{+a^{10}}{1-a^4}$$

$$\frac{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)}{1}+\frac{(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)}{a^5}+\text{ etc.} = \frac{-a^{15}}{1-a^5}$$

§. 24. Hae feries in fequentes formas transfundi poffunt, ex quibus lex progreffionis clarius perfpicietur:

$$\frac{a}{a-1} = 1+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{a^2}+\tfrac{1}{a^3}+\tfrac{1}{a^4}+\text{ etc.}$$

$$\frac{a^2}{a^2-1} = (1-\tfrac{1}{a})+\tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})+\tfrac{1}{a^2}(1-\tfrac{1}{a^3})+\tfrac{1}{a^3}(1-\tfrac{1}{a^4})+\tfrac{1}{a^4}(1-\tfrac{1}{a^5})+\text{ etc.}$$

$$\frac{a^3}{a^3-1} = (1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a^2})+\tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})+\tfrac{1}{a^2}(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4})+\text{ etc.}$$

$$\frac{a^4}{a^4-1} = (1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})+\tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4})+\text{ etc.}$$

$$\frac{a^5}{a^5-1} = (1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4})+\tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4})(1-\tfrac{1}{a^5})+\text{ etc.}$$

etc.

Vnde colligitur fore generaliter $\dfrac{a^{m+1}}{a^{m+1}-1} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{a^{m+1}}}$

$$= (1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a^2})\ldots(1-\frac{1}{a^m})+\tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{a^2})(1-\tfrac{1}{a^3})\ldots(1-\frac{1}{a^{m+1}}) +$$

$$\tfrac{1}{a^2}(1-\tfrac{1}{a^3})(1-\tfrac{1}{a^4})\ldots(1-\frac{1}{a^{m+2}})+\tfrac{1}{a^3}(1-\tfrac{1}{a^4})(1-\tfrac{1}{a^5})\ldots(1-\frac{1}{a^{m+3}})+\text{etc.}$$

§. 25. Summa huius feriei etiam hoc modo inueftigari poteft. Sit breuitatis gratia $\frac{1}{a}=b$, atque ponatur fumma quaefita:

$z =$

$$z = (1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^m) + b(1-b^2)(1-b^3)\ldots(1-b^{m+1}) + b^2(1-b^3)(1-b^4)\ldots(1-b^{m+2}) + b^3(1-b^4)(1-b^5)\ldots(1-b^{m+3}) + \text{etc.}$$

Multiplicetur vtrinque per $1-b^{m+1}$, atque prodibit:

$$(1-b^{m+1})z = (1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^m)(1-b^{m+1}) + (1-b^2)(1-b^3)\ldots(1-b^{m+1})(b-b^{m+2}) + (1-b^3)(1-b^4)\ldots(1-b^{m+2})(b^2-b^{m+3}) + \text{etc.}$$

At est $b-b^{m+2} = 1-b^{m+2}-(1-b)$; $b^2-b^{m+3} = 1-b^{m+3}-(1-bb)$; $b^3-b^{m+4} = 1-b^{m+4}-(1-b^3)$, etc. qui valores loco vltimorum factorum substituti dabunt:

$$\begin{aligned}(1-b^{m+1})z = {} & (1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^{m+1}) + (1-b^2)(1-b^3)\ldots(1-b^{m+2}) \\ & - (1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^{m+1}) - (1-b^2)(1-b^3)\ldots(1-b^{m+2}) \\ & + (1-b^3)(1-b^4)\ldots(1-b^{m+3}) + (1-b^4)(1-b^5)\ldots(1-b^{m+4}) + \text{etc.} \\ & - (1-b^3)(1-b^4)\ldots(1-b^{m+3}) - \text{etc.}\end{aligned}$$

Cum ergo omnes termini destruantur, solus remanebit vltimus, $(1-b^{m+1})z = (1-b^\infty)(1-b^{\infty+1})\ldots(1-b^{m+\infty})$, vnde patet, si fuerit $b<1$, hoc est $a>1$, vti assumimus, fore $(1-b^{m+1})z = 1$, ideoque $z = \frac{1}{1-b^{m+1}} = \frac{a^{m+1}}{a^{m+1}-1}$, vti inueneramus.

§. 26. Ex iis, quae §. XXI. sunt tradita, facile reperitur series secundum dimensiones ipsius x procedens, quae aequalis sit huic producto infinitorum Factorum.

$$P = (1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a^2}\right)\left(1-\frac{x}{a^3}\right)\left(1-\frac{x}{a^4}\right) \text{ etc.}$$

Posito enim $P = 1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3+\delta x^4-\varepsilon x^5+$ etc. scribatur ax loco x, et valor resultans sit $=Q$, erit:

$$Q = (1-ax)(1-x)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{aa}\right)\left(1-\frac{x}{a^3}\right) \text{ etc.} = P-axP$$

et

et $Q = 1 - \alpha a x + \beta a^2 x^2 - \gamma a^3 x^3 + \delta a^4 x^4 - \varepsilon a^5 x^5 +$ etc.
sed $axP = ax - \alpha a x^2 + \beta a x^3 - \gamma a x^4 + \delta a x^5 -$ etc.
$-P = -1 + \alpha x - \beta x^2 + \gamma x^3 - \delta x^4 + \varepsilon x^5 -$ etc.
vnde fit $\alpha = \frac{a}{a-1}$; $\beta = \frac{\alpha a}{a^2-1}$; $\gamma = \frac{\beta a}{a^3-1}$; $\delta = \frac{\gamma a}{a^4-1}$ etc.
Quam ob rem productum infinitum $P = (1-x)(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{aa})$ etc. resoluetur in hanc seriem infinitam:

$$P = 1 - \frac{ax}{a-1} + \frac{a^2x^2}{(a-1)(a^2-1)} - \frac{a^3x^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} + \frac{a^4x^4}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} \text{ etc.}$$

§. 27. Si igitur istud productum P nihilo aequale ponatur haec aequatio infinita:

$$0 = 1 - \frac{ax}{a-1} + \frac{a^2x^2}{(a-1)(a^2-1)} - \frac{a^3x^3}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} + \text{ etc.}$$

omnes suas radices x habebit reales, eruntque valores ipsius x terminis istius progressionis Geometricae:

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ \text{etc.}$$

vnde si ponatur $x = a^n$, denotante n numerum integrum affirmatiuum quemcunque, erit:

$$0 = 1 - \frac{a^{n+1}}{a-1} + \frac{a^{2n+2}}{(a-1)(a^2-1)} - \frac{a^{3n+3}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} + \text{ etc.}$$

cuius veritas iam supra §. XVIII. est demonstrata.

§. 28. Praecipue autem est notatu digna series, cui supra innumerabiles aliae aequales sunt inuentae (§. XVI.), quae est

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \frac{1}{a^5-1} + \text{ etc.}$$

cuius summa, si $a > 1$, etsi est finita et per approximationes facile assignatur, tamen neque numeris rationalibus, neque irrationalibus exprimi potest. Quo circa ea imprimis digna videtur, vt Geometriae naturam illius quan-

 tita-

titatis transcendentis inuestigent, qua eius summa exprimatur.

§. 29. Monstrabo autem, quem ad modum summa huiusmodi serierum vero proxime expedite inueniri posset, et quidem hanc seriem in aliquanto latiori sensu considerabo. Sit:

$$s = \frac{1}{a-z} + \frac{1}{a^2-z} + \frac{1}{a^3-z} + \frac{1}{a^4-z} + \frac{1}{a^5-z} + \text{etc.}$$

Conuertantur singuli termini in series Geometricas, eritque:

$$s = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} + \text{etc.}$$
$$+ z\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^8} + \frac{1}{a^{10}} + \text{etc.}\right)$$
$$+ z^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^9} + \frac{1}{a^{12}} + \frac{1}{a^{15}} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

quae series denuo summatae dabunt:

$$s = \frac{1}{a-1} + \frac{z}{aa-1} + \frac{zz}{a^3-1} + \frac{z^3}{a^4-1} + \frac{z^4}{a^5-1} + \text{etc.}$$

Quod si ergo fuerit $z = 1$, hae ambae series in eandem recidunt, neque haec transmutatio vllum affert discrimen.

§. 30. Ad seriem hanc summandam ponimus prioris formae iam n terminos actu esse summatos, quorum summa sit $= A$, ita vt sit:

$$A = \frac{1}{a-z} + \frac{1}{a^2-z} + \frac{1}{a^3-z} + \frac{1}{a^4-z} + \ldots\ldots + \frac{1}{a^n-z}$$

Erit ergo tota summa quaesita:

$$s = A + \frac{1}{a^{n+1}-z} + \frac{1}{a^{n+2}-z} + \frac{1}{a^{n+3}-z} + \frac{1}{a^{n+4}-z} + \text{etc.}$$

Iam istae fractiones in series Geometricas euoluantur, eritque:

$s = A.$

$$s = A + \frac{1}{a^{n+1}} + \frac{1}{a^{n+2}} + \frac{1}{a^{n+3}} + \frac{1}{a^{n+4}} + \text{etc.}$$
$$+ z\left(\frac{1}{a^{2n+2}} + \frac{1}{a^{2n+4}} + \frac{1}{a^{2n+6}} + \frac{1}{a^{2n+8}} + \text{etc.}\right)$$
$$+ z^2\left(\frac{1}{a^{3n+3}} + \frac{1}{a^{3n+6}} + \frac{1}{a^{3n+9}} + \frac{1}{a^{3n+12}} + \text{etc.}\right)$$
etc.

quae ſeries denuo ſummatae dabunt:

$$s = A + \frac{1}{a^n(a-1)} + \frac{z}{a^{2n}(aa-1)} + \frac{zz}{a^{3n}(a^3-1)} + \frac{z^3}{a^{4n}(a^4-1)} + \text{etc.}$$

quae eo citius conuergit, quam prima, quo maior fuerit numerus n.

§. 31. Sit: $a = 2$, vt ſit $s = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4-z} + \frac{1}{8-z} + \frac{1}{16-z} + \text{etc.}$ Si igitur fuerit: $A = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4-z} + \frac{1}{8-z} + \ldots + \frac{1}{z^n - z}$

erit: $s = A + \frac{1}{1.2^n} + \frac{z}{3.2^{2n}} + \frac{z^2}{7.2^{3n}} + \frac{z^3}{15.2^{4n}} + \frac{z^4}{31.2^{5n}} + \text{etc.}$

Ponamus autem $z = 1$, ita vt quaeratur ſumma huius ſeriei: $s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{63} + \text{etc.}$

Addantur exempli cauſa quatuor termini initiales actu, vt ſit $n = 4$; erit:

$1 = 1,0000000000000000$
$\frac{1}{3} = 0,3333333333333333$
$\frac{1}{7} = 0,1428571428571142$
$\frac{1}{15} = 0,0666666666666666$

$A = 1,5428571428571141$

Hinc erit $s = A + \frac{1}{16.1} + \frac{1}{16^2.3} + \frac{1}{16^3.7} + \frac{1}{16^4.15} + \text{etc.}$

atque isti termini in fractionibus decimalibus dabunt :

$$0,063838009558149$$

$$A = 1,542857142857142$$

Ergo $s = 1,606695152415291$

§. 32. Ceterum si seriei $s = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} +$ etc. singuli termini in series Geometricas resoluantur, atque potestates similes ipsius a colligantur, reperietur haec forma :

$$s = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^5} + \frac{4}{a^6} + \frac{2}{a^7} + \frac{4}{a^8} + \frac{3}{a^9} + \text{etc.}$$

quae series hanc habet proprietatem, vt cuiusuis fractionis numerator indicet, quot diuisores habeat exponens ipsius a in denominatore. Sic fractionis $\frac{4}{a^6}$ numerator est $= 4$, quia exponens 6 quatuor habet diuisores 1, 2, 3, 6. Vnde si exponens ipsius a in denominatore sit numerus primus, numerator perpetuo erit $= 2$: pro numeris autem non primis erit is binario maior. Hinc facile patet, si $a = 10$ fore :

$$s = 0,122324243426244526264428344628.$$

DE

DE DIVISORIBVS NVMERORVM INDAGANDIS.

AVCTORE
G. W. KRAFFT.

§. 1.

An numerus quis propositus diuisores admittat simplices 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, facilibus regulis quidem cognosci potest: sed si nullum horum recipiat, tum plerumque non nisi magna opera, aut aliquando plane non, talis diuisor detegitur. Ita exempli gratia nemo facile deteget, numerum hunc 11339 compositum esse ex factoribus 17, 23, et 29; et multo difficilius, aut plane non, esse 826277 = 907. 911. Egregios vsus praestant in hoc labore tabulae numerorum primorum, quales dederunt *Schootenius* in *Exercitat. Mathem. lib. V, sect. V, p.* 394; et *Ozanamus* in *Recreations Mathem. Tome I, p.* 47; multo vero magis nos iuuant illae tabulae numerorum naturalium, in quibus singulis horum diuisores sunt adscripti, qualis habetur in *Ioh. Mich. Poetii Arithmetica*, in fine libri, sub titulo *Anatomiae numerorum*, adiecta. Sed dolendum est, haec adiumenta non longius esse extensa quam ad 10000, in quibus adeo iam pro numero allegato 11339 nihil subsidii obtineri potest; deinde in easdem hasce tabulas vltimas aliquot errores irrepserunt; ita 731 non est 17. 37, sed 17. 43; 871 non est primus, sed 13. 67; 1591 non est primus, sed 37. 43; 6773 non est primus, sed 13. 521; 9463, 9929, et 1289, non adsunt, qui tamen primi sunt *Ozanamo* et *Schootenio*; 6497 non adest, = 73. 89.

§. 2. Nihil itaque vtilius in hoc negotio fieri potest, quam vt in generales numerorum formulas inquiramus, eruamusque quomodocunque, quosnam illae admittant diuisores. Talem numerum generalissime expressum examinabo hac vice, tentaturus quae exinde Theoremata possint deduci. Sit is numerus generaliter ita scriptus $a^\alpha + b^\beta$, de quo instituam quaestionem, quibusnam in casibus diuidi is queat per $a^\gamma + b^\delta$, si nempe per a, b, α, β, γ, δ, intelligantur numeri integri, positiui. Instituta diuisio Algebraica hunc tenebit typum:

$a^\gamma + b^\delta) a^\alpha + b^\beta$ Quot: $a^{\alpha-\gamma} - a^{\alpha-2\gamma}b^\delta + a^{\alpha-3\gamma}b^{2\delta} -$ etc.

$$\begin{array}{ll}
 & a^\alpha + a^{\alpha-\gamma}b^\delta \\
\hline
\text{resid. 1.} & -a^{\alpha-\gamma}b^\delta + b^\beta \\
 & -a^{\alpha-\gamma}b^\delta - a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta} \\
\hline
\text{resid. 2.} & +a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta} + b^\beta \\
 & +a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta} + a^{\alpha-3\gamma}b^{3\delta} \\
\hline
\text{resid. 3.} & -a^{\alpha-3\gamma}b^{3\delta} + b^\beta
\end{array}$$

neque necesse est vt vlterius operatio continuetur, cum ex his iam tota lex seriei et residuorum abunde pateat.

§. 3. Sit enim in serie quoti, in infinitum excurrente, numerus termini cuiuslibet $= n$; atque erit terminus is ipse talis, $\pm a^{\alpha-n\gamma}b^{n\delta-\delta}$; idem porro terminus erit positiuus, quoties cunque est n numerus impar; sed erit negatiuus, si n fuerit numerus par. Deinde cuiuslibet termini residuum in diuisione relictum erit huius formae:

+

$\mp a^{\alpha-n\gamma} b^{n\delta} + b^{\beta}$, atque prior quidem huius terminus erit poſitiuus, quoties n erit numerus par, negatiuus autem ſi impar.

§. 4. Vt itaque nunc diuiſio indicata inſtitui poſſit ad quotum finitum obtinendum, requiritur vt reſiduum prodeat nullum; ſtatuatur itaque ab initio hoc reſiduum poſitiuum nullum, atque erit $+a^{\alpha-n\gamma} b^{n\delta} + b^{\beta} = 0$; hoc fieri poterit non aliter, quam ponendo $\alpha - n\gamma = 0$, ex quo fit reſiduum $b^{n\delta} + b^{\beta} = 0$, vel $b^{n\delta-\beta} = -1$; quod fieri nequit; ſi enim vel maxime aſſumamus $n\delta - \beta = 0$, prodibit $+1 = -1$, quod contradictorium eſt; nec alius numerus $n\delta - \beta$ fingi poteſt, ad quem eleuata quantitas b fiat $= -1$. Adeoque ex hoc caſu nihil ſperari poteſt.

§. 5. Sed melius ſuccedet res, ſi ſtatuamus reſiduum prodire cum ſigno negatiuo, quo caſu id erit $-a^{\alpha-n\gamma} b^{n\delta} + b^{\beta}$. Aſſumatur itaque hic $\alpha - n\gamma = 0$, vel $\alpha = n\gamma$, abibit illud in hanc formam, $-b^{n\delta} + b^{\beta}$, quae vt redigatur ad nihilum, fit $n\delta = \beta$, ex quo idem reſiduum fiet $-b^{\beta} + b^{\beta} = 0$. Tum vero progreſſionis termini ſequentem formam induent, vt ſint iſti, $a^{\overline{n-1}.\gamma} - a^{\overline{n-2}.\gamma} b^{\delta} + a^{\overline{n-3}.\gamma} b^{2\delta} - a^{\overline{n-4}.\gamma} b^{3\delta} + a^{\overline{n-5}.\gamma} b^{4\delta}$ - etc., quae ſeries neceſſario potentiam a^{n-4}, a^{n-5} etc. alicubi acquiret $= a^0 = 1$, ſi n per determinatum numerum exprimatur; qui vero idem numerus n ſemper debet eſſe impar, (§. III.) vt nempe reſidui prius membrum fiat negatiuum, et reſiduum ipſum nullum. Vnde ergo iam conficitur, ſubſtitutis pro α et β valoribus inuentis, numerum hunc vniuerſalem $a^{n\gamma} + b^{n\delta}$ ſemper diuidi poſſe per $a^{\gamma} + b^{\delta}$, ſi modo n aſſumatur numerus impar; vel $\frac{a^{n\gamma} + b^{n\delta}}{a^{\gamma} + b^{\delta}}$ hoc caſu ſemper repraeſentare numerum integrum.

§. 6.

§. 6. Tentabimus nunc diuiſionem numeri vniuerſalis $a^{\alpha}-b^{\beta}$ per $a^{\gamma}-b^{\delta}$, in quo inſtituta diuiſio Algebraica iam hunc tenebit typum:

$$a^{\gamma}-b^{\delta})\,a^{\alpha}-b^{\beta}\ \text{Quot}:\ a^{\alpha-\gamma}+a^{\alpha-2\gamma}b^{\delta}+a^{\alpha-3\gamma}b^{2\delta}+\text{etc.}$$

$$a^{\alpha}-a^{\alpha-\gamma}b^{\delta}$$

$$\text{reſid. 1.}\ a^{\alpha-\gamma}b^{\delta}-b^{\beta}$$

$$a^{\alpha-\gamma}b^{\delta}-a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta}$$

$$\text{reſid. 2.}\ a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta}-b^{\beta}$$

$$a^{\alpha-2\gamma}b^{2\delta}-a^{\alpha-3\gamma}b^{3\delta}$$

$$\text{reſid. 3.}\ a^{\alpha-3\gamma}b^{3\delta}-b^{\beta}$$

vbi iterum facile perſpici poteſt, ſi ponatur numerus termini cuiuscunque in quoto n, eſſe eundem terminum $a^{\alpha-n\gamma}b^{\overline{n-1}\cdot\delta}$, et pro eodem eſſe reſiduum $a^{\alpha-n\gamma}b^{n\delta}-b^{\beta}$, neque hic occurrere ſignorum in reſiduo, aut in terminis quoti, varietatem, vti prius factum fuit. Vt ergo reſiduum fiat nihilum, poni debet $\alpha-n\gamma=0$, aut $\alpha=n\gamma$; atque ſic orietur reſiduum tale $b^{n\delta}-b^{\beta}$, quod vt etiam annihiletur, ſtatuendum eſt $n\delta=\beta$, quibus ſubſtitutis clarum eſt, numerum $\frac{a^{n\gamma}-b^{n\delta}}{a^{\gamma}-b^{\delta}}$ ſemper eſſe integrum, ſiue n par ſit numerus, aut vero impar.

§. 7. Hinc iam deduco, eſſe quoque hunc numerum generalem $2^{4m-1}-2^{2m}-1$ ſemper diuiſibilem per 9, atque ita quidem, vt quotus ex diuiſione prodiens ſit numerus triangularis. Quod vt demonſtrem, aſſumam rem ita ſe habere, atque eſſe $\frac{2^{4m-1}-2^{2m}-1}{9}=\frac{x^{2}+x}{2}$, qui generaliter eſt numerus triangularis; ex qua aequatione deducitur,

ducitur, radicem extrahendo, $\frac{2^{2m+1}-2}{3}=x$; vt igitur appareat esse x numerum integrum, qui, siue par sit, siue impar, semper efficit quoque integrum $\frac{x^2+x}{2}$; considerabimus, esse $x=\frac{2^{2m+1}-2}{3}=\frac{2(2^{2m}-1)}{3}=\frac{2(4^m-1)}{4-1}$, qui integer est ex eo, quod continetur sub formula generali modo adducta $\frac{a^{n\gamma}-b^{n\delta}}{a^\gamma-b^\delta}$ per 2 multiplicata, positis $a=4$, $n=m$, $\gamma=1$, $b=1$.

§. 8. Ex Theoremate priori (§. V.) statim consequitur, numerum a^n+1 diuisibilem esse semper per $a+1$, posito n numero impari. Abit enim formula generalis illa in hanc specialiorem, si statuatur $\gamma=1$, $\delta=0$. Pariter ex Theoremate altero (§. VI.) fluit, a^n-1 semper diuidi posse per $a-1$, siue par sit n, aut impar; abit enim iterum formula vniuersalis in hanc particularem, si fuerit $\gamma=1$, $\delta=0$. Quorum vtrumque supposuit *Celeberr. Eulerus* in acutissima Dissertatione, *de Theoremate quodam Fermatiano*, *Commentar. Acad. Imper. Tomo VI. pag.* 103.

§. 9. Si in formula generali altera (§. VI.) $\frac{a^{n\gamma}-b^{n\delta}}{a^\gamma-b^\delta}$ fiant $a=2$, $n\gamma=m$, aut $\gamma=\frac{m}{n}$, $\delta=0$, abibit haec in talem expressionem $\frac{2^m-1}{2^{\frac{m}{n}}-1}$; erit igitur 2^m-1. Diuisibilis per numerum $2^{\frac{m}{n}}-1$, quoties m fuerit numerus compositus, quia pro n assumere licet numerum quemcunque,

 parem

parem aut imparem. Quod si vero m fuerit numerus primus, ut ita nullus n detur, per quem diuidi queat m; tum videtur 2^m-1 nullum admittere diuisorem, et consequenter esse numerus primus; at vero male ita ratiocinamur; nam id solum sequitur, 2^m-1 non admittere diuisorem huius formae $2^{\frac{m}{n}}-1$; haud vero plane nullum, sed forsan alium huius formae $m\alpha+1$. Ita exempli gratia $2^{11}-1$ diuisibilis est per 23; $2^{23}-1$ per 47; $2^{29}-1$ per 1103; $2^{37}-1$ per 223; $2^{43}-1$ per 431; $2^{47}-1$ per 2351; $2^{71}-1$ per 439; $2^{83}-1$ per 167; quos diuisores omnes vide in allegata Dissertatione *Celeberr. Euleri*, excepto solo 2351, quem priuatim mecum communicauit anno demum 1741.

§. 10. Falsa haec persuasio, 2^m-1 esse numerum primum, quoties m talis sit, in errorem praecipue abduxit *Celeb. Michael. Gottl. Hanschium*, qui in *Epistola ad Mathematicos de Theoria Arithmetices nouis a se inuentis aucta*, edita 1739, viginti tales pro numeris primis assumsit, nempe hac tabella comprehensos:

2^2-1	$2^{31}-1$
2^3-1	$2^{37}-1$
2^5-1	$2^{41}-1$
2^7-1	$2^{43}-1$
$2^{11}-1$	$2^{47}-1$
$2^{13}-1$	$2^{53}-1$
$2^{17}-1$	$2^{59}-1$
$2^{19}-1$	$2^{61}-1$
$2^{23}-1$	$2^{67}-1$
$2^{29}-1$	$2^{71}-1$

atque ex illis totidem numeros perfectos elici posse puta-

uit.

nit: Sed vti inter 2^2-1 et $2^{53}-1$ ante iam ſex tales ſunt eliminati: ita de reliquis, $2^{53}-1$ vsque ad $2^{71}-1$, magnus dubitandi campus eſt, quot eorum ſint primi; vnde palam fit, nos hodie nondum de pluribus quam nouem numeris perfectis eſſe certos.

§. 11. Venit hic in mentem Theorema elegans *Illuſtris Goldbachii*, quod legitur in *Actor. Erudit. Lipſ. Supplementis Tomo VI*, *pag.* 471; nempe ſi numero quouis quadrato ſubtrahatur binarius, reſiduum nunquam diuidi poſſe per ternarium. Hoc exinde fit, quia numerorum quadratorum quorumuis, ordine naturali ſuccedentium, notae omnes ſimul additae faciunt has ſummas, 1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 9; redeunte ſemper eadem periodo, ſi fuerit abſoluta; vel quia quadratum quodcunque, diuiſum per 9, relinquit 1, aut 4, aut 7, aut 0; a quarum notarum ſummis ſingulis ſi ſubtrahas 2, remanent reſpectiue -1, 2, 7, 5, 5, 7, 2, -1, 7, vbi nullus ternarius prodit, qui alias indicio eſt, numerum propoſitum per 3 eſſe diuiſibilem. Idem etiam verum eſt, ſi a quadrato ſubtrahas 5, aut 8. Ex his ſolui iam poteſt ingenioſum Problema, quod in *loco modo citato* adiunctum eſt, *dato numero quocunque ita mutare notam vnicam, vt certum ſit, numerum ita mutatum per omnes tranſpoſitiones poſſibiles non exhibere quadratum.* Praxis ſine dubio talis eſſe debet, vt a numero propoſito ſubtrahatur 2, ac deinde reſiduum, mutata quauis nota, excepta vltima quae ad dextram eſt, ita adornetur vt diuidi poſſit per 3, quod multis quidem modis, et facile, fit. In hac vero praxi annotandum eſt *primo*, numerum propoſitum non poſſe eſſe quemcunque, ſed ta-

P 2 lem,

lem, qui ex permutatione notarum in quadratum abire queat; aliter enim per eandem hanc operationem ipsam incidere in quadratum possumus. Veluti si assumamus numerum 1677, qui nulla notarum transpositione quadratus fit, is subtracto 2 fit 1675 non diuisibilis per 3; si igitur ad hoc obtinendum mutarem 5 in 4, aut 7 in 6, emergerent numeri 1674 et 1665, diuisibiles per 3, sed vterque per transpositionem notarum quadratus, scilicet 1764, et 6561. Problema igitur de solo tali numero intelligendum est, qui per transpositionem notarum suarum quadratus fieri posset; hoc est, qui abiectis nouenariis relinquit vel 0, 1, 4, 7. *Secundo* propositi talis numeri debent mutari notae duae; vna subtracto 2, et haec extima quidem ad dextram; altera autem intermedia, vt residuum hoc fiat diuisibile per 3. Nam si assumerem exempli gratia numerum 1489, qui quadratus est his ipsis notis ita scriptis 1849, atque ab illo subtraherem 2, vt fiat 1487, et tum notam vltimam mutarem in 5, vt oriatur multiplum 3, obtinerem sic 1485, qui quadratus fit notis in 5184 transpositis.

§. 12. Sed dolendum est, parum auxilii trahi posse ex praecedentibus formulis ad indagandum numeri alicuius dati diuisorem. Liceat igitur tentare aliam adhuc viam, quae aliquanto plus subsidii nobis subministrabit. Quamuis destituatur Arithmetica tali formula generali vnica, quae numeros primos omnes successiue exhibeat: certum tamen est, omnes illos contineri his duabus; nempe omnis numerus primus est vel $6m+1$, vel $6m+5$. Omnis enim numerus, per 6 diuisus, relinquit vel 0, 1, 2, 3, 4, 5, adeoque omnes numeri in genere conti-

continentur his faciebus $6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$, et $6m+5$; ſed inter hos primi nequeunt eſſe $6m$, $6m+2$, $6m+3$, et $6m+4$; ſupererunt ergo primi ſoli aut $6m+1$, aut $6m+5$; quod eſt Theorema *Leibnitii* in *Journal des Savans*, *Tomo VI*, *p.* 76; quo tamen inductus falſum primum numerum ſtatuit 1007, qui eſt 19×53. Aut eadem ratione demonſtrare potuiſſet, omnes numeros primos eſſe vel $3m+1$, vel $3m+2$; aut vero $2m+1$; quamuis haec propoſitio nequeat inuerti. Multiplicentur ergo duo hi primi, ſi modo tales fuerint, $6m+1$, et $6n+1$, inter ſe mutuo, obtinebitur factum $\overline{6m+1}.\ 6n+6m+1$, quod iam admittet duos indicatos diuiſores, et, ſi numerus aliquis propoſitus dicatur A, eruetur exinde *Regula I.* haec $\frac{A-1-6m}{(6m+1)6}=n$. Multiplicentur porro ſecum $6m+5$, et $6n+5$, orietur $\overline{6m+5}.\ 6n+30m+25=A$, aut vero *Regula II.* $\frac{A-25-30m}{(6m+5)6}=n$. Tertio multiplicentur ſecum $6m+5$, et $6n+1$, obtinebitur $\overline{6m+5}.\ 6n+6m+5=A$, vnde fluit *Regula III.* $\frac{A-5-5m}{(6n+5)6}=n$.

§. 13. Iam vt exemplis aliquot doceam, quomodo hoc aliquali ſubſidio diuiſorem expiſcari poſſimus: ſtatuam, numerum propoſitum eſſe $1219=A$; adhibendo nunc vnam regulam poſt alteram, erit ex I. $\frac{1218-6m}{(6m+1)6}=n$, vbi video, deprimi poſſe hanc fractionem, diuidendo ſupra et infra per 6, vnde prodit $\frac{203-m}{6m+1}=n$, atque ſic indagatio eo recurrit, qualis numerus debeat eſſe m, vt $203-m$ diuidi queat per $6m+1$. Huic fini commode adhibentur ſeries hoc typo adornandae, quod haud

 difficul-

difficulter fit, cum lex progressionis statim in oculos incurrat:

m - - - - -	1	2	3	4	5	6	28
$203 - m$ - -	202	201	200	199	198	197	175
$6m + 1$ - -	7	13	19	25	31	37	169

Facile iam diiudicari, aut tentari, potest, si aliquis numerus superior $203 - m$ occurrat, qui per suum inferiorem sit diuisibilis; extendi autem series debet eousque, donec $203 - m = 6m + 1$, aut hoc casu vltimum m erit 28. Deprehenditur autem hic nullam diuisionem succedere.

§. 14. Igitur accedendum erit ad Regulam II, ex qua hoc casu erit $\frac{1194 - 30m}{(6m+5)6} = n$, aut iterum deprimendo hanc fractionem per 6, quod, quotiescunque fieri potest, maximum affert adiumentum, $\frac{199 - 5m}{6m+5} = n$. Series igitur adornandae erunt hae:

m - - - - -	1	2	3	4	5	6
$5m$ - - - -	5	10	15	20	25	30
$199 - 5m$ - -	194	189	184	179	174	169
$6m + 5$ - -	11	17	23	29	35	41

atque deprehendo diuisionem succedere inter 184 et 23, prodeunte quoto 8, erunt ergo $m = 3$, $n = 8$, et diuisores quaesiti $6m + 5 = 23$, et $6n + 5 = 53$. Quod vero si factum non fuisset, tum adeunda fuisset Regula III; quae si nullum quoque subministraret diuisorem, numerus propositus esset primus.

§. 15. Sit quaerendus diuisor numeri $6631 = A$; erit ex Regula I. $\frac{6630 - 6m}{(6m+1)6} = n$, vel, facta depressione per 6, habebitur $\frac{1105 - m}{6m+1} = n$, vnde series ita constituuntur:

m - -

m - - - - - -	1	2	3	4	5
$1105 - m$ - - -	1104	1103	1102	1101	1100
$6m + 1$ - -	7	13	19	25	31

et video diuifionem perfici poffe fub $m = 3$, ipfius 1102 per 19, prodeunte quoto $58 = n$, ergo diuifor vnus erit $6m + 1 = 19$, atque alter $6n + 1 = 349$.

§. 16. Aliud quid tentaui adhuc in hoc negotio, quod quamuis irritum fuerit, commemorabo tamen, vt alii ne fruftra hinc remedium quaerant. Omnia multipla numeri primi exempli gratia 23, habent fummam notarum comprehenfam in hac periodo, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, vel, quod idem eft, fucceffiue diuifa per 9, hos numeros relinquunt. Sic etiam omnia multipla numeri primi 2011 habent fummam notarum contentam in hac periodo, 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9. Sit itaque examinandus numerus 67813, an is per 2011 fit diuifibilis. Propofito numero addo ter aut quater 2011, et video harum fummarum notas additas fibi producere 7, 2, 6, 1; qui eft ordo talis, qualis in periodo multiplorum 2011 occurrit. Videri itaque poffet ex hoc, numerum propofitum per 2011 effe diuifibilem, quod tamen minime fit. Attendi enim hic debet ad illud, per additionem numeri eiusdem 2011, ad alteram 67813 repetitam, notarum fummas femper ita conformari, ac fi haberetur multiplum ipfius 2011. Sit enim exempli gratia numerus par $2A$, cuius fumma notarum fit 6, adeoque ipfe $9m + 6$; atque, apparet, ipfum hunc numerum raro diuidi poffe per 23. Simulabo tamen, me velle tentare, an dictus numerus $2A$ fit diuifibilis per 23, faciamque hoc fequenti typo:

Summa

Summa notarum	numeri
6	2A
	23
2	2A+23
	23
7	2A+46
	23
3	2A+69
	23
8	2A+92
	23
4	2A+115
	23
9	2A+138

atque video sic prodire periodum illam, quae pro multiplis 23 obtinet, quamuis tale multiplum 2 A semper non sit.

§. 17. persequar itaque Theoremata quaedam huc spectantia, quae vlteriori diuisorum inquisitioni inseruire possunt. Si in formula $\frac{a^{n\gamma}-b^{n\delta}}{a^{\gamma}-b^{\delta}}$ (§. VI.) statuamus $a=2$, $\delta=0$, mutabitur illa in hanc $\frac{2^{n\gamma}-1}{2^{\gamma}-1}$; est itaque binarius ad numerum compositum quemcunque $n\gamma$ eleuatus, et vnitate minutus semper diuisibilis per $2^{\gamma}-1$, vbi indifferens est, siue n sit par, siue impar. Si vero in altera formula (§. V.) $\frac{a^{n\gamma}+b^{n\delta}}{a^{\gamma}+b^{\delta}}$ ponamus $a=2$, $\delta=0$,

mutatur

mutatur illa in hanc $\frac{2^{n\gamma}+1}{2^{\gamma}+1}$, vnde patet, binarium elevatum ad numerum compositum $n\gamma$, et deinde vnitate auctum, diuisibilem esse quidem per $2^{\gamma}+1$, sed requiri vt n sit impar. Si autem in formula $\frac{2^{n\gamma}-1}{2^{\gamma}-1}$ exponens ipsius 2 non sit compositus sed primus numerus, ob allegatam conditionem, diuisio non succedit. Graue igitur est, hoc nos inuento adhuc destitui, vt, posito numero primo p, sciamus quibus in casibus $2^{p}-1$ diuisorem admittat vel non. Interim tamen quoniam, vti ante vidimus, (§. IX.)

$2^{11}-1$	diuisibilis est per	23	$=$	$2.\ 11+1$
$2^{23}-1$	- - - - -	47	$=$	$2.\ 23+1$
$2^{29}-1$	- - - -	1103	$=$	$2.\ 19.\ 29+1$
$2^{37}-1$	- - - -	223	$=$	$2.\ 3.\ 37+1$
$2^{43}-1$	- - - -	431	$=$	$2.\ 5.\ 43+1$
$2^{47}-1$	- - - -	2351	$=$	$2.\ 5^{2}.\ 47+1$
$2^{73}-1$	- - - -	439	$=$	$2.\ 3.\ 73+1$
$2^{83}-1$	- - - -	167	$=$	$2.\ 83+1$

ex analogia concludere licet, numerum $2^{p}-1$, si fuerit diuisibilis, admittere diuisorem huius formae $2.\,q^{m}p+1$, assumto etiam q primo.

§. 18. Porro etiam, quod nescio an hucusque obseruatum fuerit, si p sit primus, erit $2^{p}-2$ semper diuisibilis per p. Veluti exempli gratia $2^{37}-2$ diuisorem recipit 37. Quod vt demonstrem, notum est, ex methodo

Newtoni esse $2^p = \overline{1+1}^p = 1 + p + \frac{p.\overline{p-1}}{1.\ 2} + \frac{p.\overline{p-1}.\overline{p-2}}{1.\ 2.\ 3}$ $+ \frac{p.\overline{p-1}.\overline{p-2}.\overline{p-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$ + etc. in qua ferie, fi p fuerit numerus determinatus, euadet terminus vltimus $=0$, ob numeros naturales omnes, et confequenter etiam primos, fucceffiue $a\ p$ fubtractos; fed hoc pacto terminus penultimus euadet 1, et termini intermedii diuidi quidem poterunt per 2, 2. 3, 2. 3. 4, etc. fed nullus horum diuiforum quadrabit in p, ob hunc primum; ergo in cafu particulari feries acquiret hanc faciem $2\ p = 1 + p + p\alpha + p\beta + p\beta + p\alpha + p + 1 + 0$, ex qua fit $2^p - 2 = p(2 + 2\alpha + 2\beta)$, et confequenter $\frac{2^p - 2}{p} = 2 + 2\alpha + 2\beta$, numero integro, et pari.

§. 19. Memini *Celeberrimum Eulerum* aliquando communicaffe mecum, numerum talem vniuerfalem $a + 1 + \sqrt{2a - m}$ nunquam diuidi poffe per m. Huius demonftratio haec nunc mihi fuccurrit. Ponam effe m diuiforem, et quotum prodentem b, erit fic $a + 1 + \sqrt{2a - m} = bm$. Vt auferatur irrationalitas, fumatur $\sqrt{2a - m} = e$, vnde eft $a = \frac{e^2 + m}{2}$, $a + 1 = \frac{e^2 + m + 2}{2}$, quae fubftituta numerum vniuerfalem propofitum reddunt hunc $\frac{e^2 + m + 2 + 2e}{2}$, vel hunc, in paullo mutatam formam redactum, $e^2 +$

$\frac{e^2+2e+1+m+1}{2} = \frac{\overline{e+1}^2}{2} + \frac{m+1}{2}$. Si itaque numerus propositus diuisibilis esset per m, tum foret $\frac{\overline{e+1}^2}{2m} + \frac{m+1}{2m}$ numerus integer, nempe b. At vero hoc fieri nequit; nam aut e debet esse multiplum ipsius $2m$, aut $e+1$; si illud sit, tum erit $e = 2m\alpha$, $e+1 = 2m\alpha+1$, $\overline{e+1}^2 = 4m^2\alpha^2 + 4m\alpha + 1$, quod per $2m$ diuisum relinquit residuum $\frac{1}{2m}$, sed hoc coniunctum cum $\frac{m+1}{2m}$ reddit $\frac{m+2}{2m}$, quae semper fractio est ob $2m > m+2$, si modo $m > 2$. Si vero $e+1$ sit multiplum ipsius $2m$, vti $e+1 = 2m\alpha$, erit $\overline{e+1}^2 = 4m^2\alpha^2$, adeoque $\frac{\overline{e+1}^2}{2m} = 2m\alpha^2$, sed tunc $\frac{m+1}{2m}$ manebit fractio adiuncta integro $2m\alpha^2$, quia semper $2m > m+1$, si modo $m > 1$. Sequitur autem ex his, $a+1+\sqrt{2a-m}$ esse tamen diuisibile per m, si fuerit $m=2$, et $a = 3, 9, 19, 33$, etc.

§. 20. Ex eadem hac consideratione, quod nempe $\frac{m+1}{2m}$ immo generaliter $\frac{\alpha+1}{\alpha+m}$, semper sit fractus, ob $\alpha+m > \alpha+1$, plurima alia condi possunt Theoremata de numeris per alios non diuisibilibus. Veluti quoniam $\frac{2^p-2}{p}$ semper est integer, posito p primo, consequitur esse $\frac{2^p-2}{p}+\frac{\alpha+1}{\alpha+m}$ semper integrum cum adiuncta fractione, hoc est, si reducatur haec formula, numerus generalis $\overline{\alpha+m}.2^p+\overline{\alpha+1}.p-2\cdot\overline{\alpha+m}$ nunquam diuidi se patitur per $\overline{\alpha+m}.p$, si, praeter primum p, α et m sint numeri qualescunque integri, positiui.

DE PARTITIONE NVMERORVM.

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Problema *de partitione numerorum* primum mihi eſt propoſitum a *Celeb. Profeſſore Haude*; in quo quaerebat, quot variis modis datus numerus integer, (hic enim perpetuo de numeris tantum integris et affirmatiuis eſt ſermo,) poſſit eſſe aggregatum, duorum vel trium vel quatuor, vel in genere quot libuerit numerorum. Siue quod eodem redit, quaeritur, quot variis modis datus numerus vel in duas, vel tres, vel quatuor, vel quot libuerit partes diſpertiri queat, vnde huic Problemati aptiſſime *partitionis numerorum* nomen eſt impoſitum. Bipartitum autem hoc Problema a *Viro Celeb*: proponi ſolet: primo ſcilicet eos tantum partitionis modos poſtulat, quibus ſingulae partes, in quas numerus propoſitus reſoluitur, ſint inter ſe inaequales; tum vero hac inaequalitatis conditione omiſſa omnes omnino partitionis modos requirit, ſiue partes quaepiam inter ſe fuerint aequales, ſiue omnes inaequales. Perſpicuum autem eſt, hoc poſteriori caſu numerum partitionum plerumque multo eſſe maiorem, quam priori, cum non ſolum omnes partitiones, quae caſui priori ſatisfaciunt, ſimul poſteriorem reſoluant, ſed etiam plerumque plures alii accedant, in quibus partes aequales contineantur.

§. 2. Vt vis Problematis huius clarius perſpiciatur, non nullos caſus ſimpliciores, qui actuali partitionum enumeratione facile expediuntur. Si quaeratur, quot variis modis numerus 6. in duas partes reſolui poſſit, ſtatim apparet, hoc tribus modis fieri poſſe, cum ſit:

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$$

ſi quidem partium aequalitas non excludatur. Sin autem partes tantum inaequales deſiderentur, vltima partitio $3 + 3$ eſt omittenda, hocque caſu numerus 6 duobus tantum modis in duas partes inter ſe inaequales diſpertiri poteſt. Quod ſi numerus impar, vti 9 proponatur, in duas partes diſtribuendus, quatuor prodibunt partitiones, quae ſunt:

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$$

vbi cum partes aequales non occurrant, numerus 9 quatuor modis in duas partes diſpertietur, ſiue partes aequales excludantur, ſiue ſecus. Si plures duabus partes deſiderentur, vti ſi quaeratur, quot variis modis numerus 12. in tres partes diſpertiri poſſit, hoc ſequentibus 12. modis fieri poterit:

$$12 = 1 + 1 + 10;\quad 12 = 1 + 2 + 9;\quad 12 = 1 + 3 + 8$$
$$12 = 1 + 4 + 7;\quad 12 = 1 + 5 + 6;\quad 12 = 2 + 2 + 8$$
$$12 = 2 + 3 + 7;\quad 12 = 2 + 4 + 6;\quad 12 = 2 + 5 + 5$$
$$12 = 3 + 2 + 6;\quad 11 = 2 + 4 + 5;\quad 12 = 4 + 4 + 4$$

Sin autem partes aequales excludantur, reſpondendum erit, numerum 12. tantum 7. modis in tres partes diſtribui poſſe.

§. 3. Hinc facile intelligitur, ſi tam numerus diſpertiendus fuerit maior, atque numerus partium, in quas eum reſolui oportet, ternarium quaternariumue ſuperet, nume-

numerum partitionum tam fieri magnum, vt per enumerationem actu instituendam difficillime obtineri queat. Neque etiam in hoc negotio inductioni multum est fidendum, quae, vti periculum facienti facile patebit, plerumque fallit, si ab enumeratione pro casibus simplicioribus facta ad magis compositos conclusiones formare voluerit. Sic ex methodo post explicanda patebit numerum 50 in septem partes non exclusa partium aequalitate dispertiri posse 8946 modis; sin autem partes aequales excludantur, remanebunt tantum 522 partitiones. Numerus porro 42 mille diuersis modis in 20 partes omnino resolui potest. At si quaeratur, quot variis modis numerus 125 in 12 partes, quae sint inter se omnes inaequales distribui possit, reperietur hoc fieri posse 64707 modis.

§. 4. Quemadmodum hic omnes numeri integri partium loca tenere possunt, ita hoc Problema in infinitum variari potest, prout numeri partes constituentes restringuntur. Ita aliud erit Problema, si quaeratur, quot variis modis datus numerus n in p partes, quarum nulla datum numerum m excedat, resolui possit. Partium quoque numerus omitti potest, vti si quaeratur, quot variis modis numerus 6 ex his numeris 1, 2, 3, 4 per additionem produci possit, quod sequentibus 9 modis fieri poterit:

$6=1+1+1+1+1+1$	$6=1+1+1+3$
$6=1+1+1+1+2$	$6=1+1+4$
$6=1+1+2+2$	$6=1+2+3$
$6=2+2+2$	$6=2+4$
	$6=3+3$

Vel

Vel etiam qualitas numerorum praescribi potest, qui partes constituant; vti si partes debeant esse vel numeri impares, vel quadrati, vel tringulares, vel alius cuiusque generis. Sic si quaeratur, quot variis modis datus numerus possit esse summa quatuor quadratorum, quaestio ad hoc genus pertinebit. Iam pridem quoque partitio numerorum omnium in partes, quae sint termini huius progressionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. est considerata, et quilibet numerus obseruatus est vnico tantum modo ex his numeris 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. per additionem componi posse. Cuius quaestionis post *Stifelium* mentionem facit *Scotenius* in suis *Exercitationibus*, vbi ostendit pondera 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. librarum sufficere posse ad merces quotcunque librarum ponderandas. Neque vero ad hoc ostendendum alia methodo praeter inductionem vtitur. Quam ob rem non abs re erit veritatem huius essati rigorose demonstrasse.

§. 5. Quem ad modum ergo haec aliaque similia Problemata resolui oporteat, hic eiusmodi methodum certam ac tutam proponam, vt inductione, cui vulgo ad solutionem istius modi quaestionum plurimum tribui solet, plane non sit opus. Vtor ad hoc sequenti Lemmate potissimo:

Si istud productum $(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)$ *etc. siue factorum numerus sit finitus, siue infinitus, per actualem multiplicationem euoluatur, vt huiusmodi forma prodeat:*

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+ \text{etc.}$$

erit coefficiens secundi termini A *summa quantitatum omnium* a, b, c, d, e, etc. *Coefficiens vero* B *erit summa* *ma productorum ex binis harum quantitatum inaequalium. Coefficiens* C *erit ſumma productorum ex ternis iſtarum quantitatum inaequalibus; et coefficiens* D *erit ſumma productorum ex quaternis harum earumdem quantitatum, et ita porro.* In huiusmodi enim productis eadem quantitas puta a, vel quaeuis alia plus quam ſemel nusquam ineſſe poteſt. Vnde hoc Lemma mihi fundamentum ſuppeditat ad partitiones in partes inaequales.

§. 6. Sin autem aequalitas partium non excludatur, adhibeo hoc Lemma:

Si iſta formula $\frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)}$ *etc. factorum, ſiue denominatorem conſtituentium numerus ſit finitus, ſiue infinitus, poſt euolutionem denominatoris ope multiplicationis factum, per diuiſionem in ſeriem explicetur huius formae:*

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\text{ etc.}$$

tum erit A *quidem vt ante ſumma quantitatum* $a+b+c+d+e+$ etc. *At coefficiens* B *erit ſumma productorum ex binis harum quantitatum, non excluſa repetitione eiusdem quantitatis, erit ſcilicet:*

$$B=aa+ab+bb+ac+bc+cc+ad+bd+cd+dd+ae+\text{etc.}$$

Simili modo coefficiens C *erit ſumma productorum ex ternis harum quantitatum;* a, b, c, d, e, etc. *factoribus aequalibus in quouis producto non excluſis. Atque eadem conditione adiecta erit coefficiens* D *ſumma productorum ex quaternis harum quantitatum, et ita porro.*

Hincque iſtud Lemma viam aperiet ad partitiones, in quibus partium aequalitas non excluditur, abſoluendas.

§. 7. Cum autem in Problemate propoſito non de productis, ſed de ſummis numerorum, quaeſtio inſtituatur,

 loco

loco quantitatum a, b, c, d, e, etc. substituo potestates x^p, x^q, x^r, x^s, x^t, etc. Sic enim in productis ex binis eiusmodi occurrent potestates, quarum exponentes sint summae binarum ex serie p, q, r, s, t, etc. Simili modo producta ex ternis constantibus eiusmodi potestatibus, quarum exponentes sint summae trium numerorum ex eadem serie p, q, r, s, etc. Atque producta ex quaternis erunt potestates, quarum exponentes sint aggregata ex quaternis horum numerorum, et ita porro. Sicque quae ante de productis sunt notata, nunc ad summas transferuntur; et ita quidem, vt, si Lemma prius adhibeatur, summae ex partibus tantum inaequalibus conflentur, sin autem Lemma posterius in vsum vocetur, partium aequalitas non excludatur. Hoc igitur modo ambo Lemmata ad solutionem quaestionum ante memoratarum accommodari debebunt.

§. 8. Aggrediamur ergo hanc primum quaestionem. *Inuenire quot variis modis datus numerus* N *possit dispertiri in* p, *partes, quae sint inter se inaequales*

Quoniam huc omnes numeri integri affirmatiui ad partes constituendas sunt idonei, pro serie superiorum exponentium accipienda est series numerorum naturalium: 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. Formetur ergo secundum Lemma prius haec expressio:

$$s=(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\,1+x^4z)(1+x^5z) \text{ etc.}$$

in infinitum, quae multiplicatione actu instituta euoluatur in hanc seriem:

$$s=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+ \text{ etc.}$$

eritque: $A=x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ etc.

quod

quod eſt aggregatum omnium poteſtatum ipſius x. Deinde quia B eſt ſumma productorum ex binis terminis inaequalibus ſeriei A, erit B ſumma poteſtatum ipſius x omnium, quarum exponentes ſint aggregata duorum numerorum inaequalium: et cum eadem poteſtas ſaepius reſultare poſſit, ea vnciam habebit numericam indicantem, quot ea poteſtas modis ſit productum ex duobus terminis ſeriei A; ſeu quot variis modis eius exponens poſſit eſſe ſumma duorum numerorum inaequalium. Binis autem terminis ſeriei A re ipſa multiplicandis reperietur:

$$B = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + \text{etc.}$$

Cuius ſeriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteſtatis ipſius x adiunctae in duas partes inaequales diſpertiri poſſit. Hac igitur ſerie in infinitum continuata, ope legis poſt eruendae, reſoluitur Problematis propoſiti caſus, quo partitio in duas partes requiritur.

§. 9. Quantitas deinde C, cum contineat omnia producta, quae oriuntur ternis terminis inaequalibus ſeriei A inuicem multiplicandis, conſtabit ex ſerie poteſtatum ipſius x, quarum exponentes ſunt ſummae trium numerorum inter ſe inaequalium. Atque eadem poteſtas toties in iſta ſerie C occurret, quoties eius exponens ex tribus numeris inter ſe inaequalibus per additionem reſultare poterit, repericturque:

$$C = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + 10x^{14} + \text{etc.}$$

Cuius ſeriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteſtatis ipſius x adiunctae in tres partes inaequales diſpertiri poſſit, ſic ex termino $8x^{13}$ colligitur, numerum 13 octo diuerſis modis in tres partes inaequales ſecari poſſe, quae ſunt:

 13 =

$13 = 1 + 2 + 10$	$13 = 2 + 3 + 8$
$13 = 1 + 3 + 9$	$13 = 2 + 4 + 7$
$13 = 1 + 4 + 8$	$13 = 2 + 5 + 6$
$13 = 1 + 5 + 7$	$13 = 3 + 4 + 6$

Iſta igitur ſeries C in infinitum continuata inſeruiet omnibus numeris in tres partes inaequales diſpertiendis.

§. 10. Quantitas porro D, cum contineat omnia producta ex quaternis terminis inaequalibus ſeriei: $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 +$ etc. conſtabit ſerie poteſtatum ipſius x, quarum exponentes ſint aggregata quatuor numerorum inter ſe inaequalium; et in hac ſerie quaelibet poteſtas eiusmodi habebit coefficientem, qui indicat, quot variis modis eius exponens per additionem quatuor numerorum inter ſe inaequalium reſultare poſſit. Reperietur autem:

$$D = x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 9x^{16} + 11x^{17} + \text{ etc.}$$

Haec igitur ſeries in infinitum continuata oſtendet, quot variis modis quisque numerus poſſit eſſe ſumma quatuor numerorum inaequalium. Ex termino quippe $9x^{16}$ cognoſcitur numerum 16 nouem modis in quatuor partes inter ſe inaequales diſtribui poſſe.

§. 11. Si hoc modo vlterius progrediamur, patebit litteram E fore ſeriem poteſtatum ipſius x ita comparatam, vt cuiusuis termini coefficiens indicet, quot variis modis exponens ipſius x in quinque partes inaequales diſſecari poſſit. Erit autem:

$$E = x^{15} + x^{16} + 2x^{17} + 3x^{18} + 5x^{19} + 7x^{20} + 10x^{21} + 13x^{22} + \text{ etc.}$$

Simili modo valor litterae F erit ſeries partitionibus in ſex partes inaequales inſeruiens, et litterae G, H, I, etc. pro

pro partitionibus in partes ſeptem, octo, nouem etc. valebunt, eruntque:

$$F = x^{21} + x^{22} + 2x^{23} + 3x^{24} + 5x^{25} + 7x^{26} + 11x^{27} + 14x^{28} + \text{ etc.}$$
$$G = x^{28} + x^{29} + 2x^{30} + 3x^{31} + 5x^{32} + 7x^{33} + 11x^{34} + 15x^{35} + \text{ etc.}$$
etc.

Vnde perſpicitur primi cuiusque ſeriei termini exponentem eſſe numerum trigonalem numeri partium propoſiti: tum vero tam huius, quam ſecundi termini coefficientem eſſe $= 1$. Cuius quidem ratio facile intelligitur: minimus enim numerus, qui eſt ſumma ſeptem numerorum inter ſe inaequalium, neceſſario eſt $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{1}{2} 7 . 8 =$ numero trigonali ipſius ſeptenarii: hicque numerus pariter ac ſequens vnitate maior plus vno modo in ſeptem partes inaequales diſpertiri nequit.

§. 12. Totum ergo negotium redit ad commodam ſerierum B, C, D, E, F, etc. formationem, ne id ipſum, quod quaeritur, ſcilicet partitionum numerus ad cuiusque ſeriei formationem adhibeatur. Ac primo quidem lex progreſſionum A et B eſt aperta, cum prioris coefficientes ſint omnes vnitates, poſterioris vero termini ſeriei numerorum naturalium geminati: ſequentium vero ſerierum lex minus eſt aperta, et quousque eas hic continuauimus, coefficientes ex ipſis cuiusque exponentis partitionibus conſtituimus. Alio itaque modo valores iſtarum litterarum A, B, C, D, etc. inueſtigari oportet, vnde haec exoritur quaeſtio: Inuenire valores litterarum A, B, C, D, E, etc. ita vt ſumma huius ſeriei:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{ etc.}$$

aequalis fiat isti expressioni:

$s = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)$ etc.

Hunc in finem igitur perpendendus est nexus, qui inter has duas expressiones intercedit, et quem ad modum altera immutari debeat, si in altera mutatio instituatur.

§. 13. Quia vtriusque expressionis idem est valor s, ambae inter se manebunt aequales, si in vtraque loco z scribatur quaecunque alia quantitas. Ponamus igitur in vtraque xz loco z, et valor vtrinque resultans vocetur $= t$, eritque primo:

$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 +$ etc.

tum vero altera expressio transmutabitur in hanc:

$t = (1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)$ etc.

qui posterior ipsius t valor, si cum posteriore valore ipsius s comparetur, quo erat:

$s = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)$ etc.

mox patebit esse $s = (1+xz)t$. Quae relatio cum etiam in alteris valoribus ipsarum s et t locum habere debeat, nobis praebebit hanc aequationem:

$$\begin{array}{rl} s = & 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.} \\ \hline (1+xz)t = & 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + \text{etc.} \\ & \quad + xz + Ax^2z^2 + Bx^3z^3 + Cx^4z^4 + \text{etc.} \end{array}$$

Vnde terminis homogeneis inter se aequandis, fiet:

$$A = \frac{x}{1-x}$$

$$B = \frac{Ax^2}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$C = \frac{Bx^3}{1-x^3} = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$D = \frac{Cx^4}{1-x^4} = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$E = \frac{Dx^5}{1-x^5} = \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

etc.

§. 14.

§. 14. Series ergo, quae ſupra pro litteris A, B, C, D, E, etc. prodire obſeruatae ſunt, oriuntur ex euolutione fractionum, quas hic inuenimus, vnde conſtat, ſeriem A eſſe Geometricam, nempe $A = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 +$ etc. quae, quod quidem eſt planiſſimum, indicat quemque numerum vnico modo ex vno numero integro conſtare. Reliquae vero ſeries B, C, D, E, etc. ſunt recurrentes, quarum ſcala relationis ex cuiusuis fractionis denominatore per multiplicationem euoluto patebit. Ad hoc oſtendendum negligamus tantiſper numeratores, qui ſunt poteſtates ipſius x, quarum exponentes ſunt numeri trigonales, earumque loco ſcribamus vnitatem. Sit igitur.

$$\frac{A}{x} = 1 + \alpha' x + \beta' x^2 + \gamma' x^3 + \delta' x^4 + \varepsilon' x^5 + \ldots + v' x^n = \mathfrak{A}$$

$$\frac{B}{x^3} = 1 + \alpha'' x + \beta'' x^2 + \gamma'' x^3 + \delta'' x^4 + \varepsilon'' x^5 + \ldots + v'' x^n = \mathfrak{B}$$

$$\frac{C}{x^6} = 1 + \alpha''' x + \beta''' x^2 + \gamma''' x^3 + \delta''' x^4 + \varepsilon''' x^5 + \ldots + v''' x^n = \mathfrak{C}$$

$$\frac{D}{x^{10}} = 1 + \alpha^{IV} x + \beta^{IV} x^2 + \gamma^{IV} x^3 + \delta^{IV} x^4 + \varepsilon^{IV} x^5 + \ldots + v^{IV} x^n = \mathfrak{D}$$

$$\frac{E}{x^{15}} = 1 + \alpha^{V} x + \beta^{V} x^2 + \gamma^{V} x^3 + \delta^{V} x^4 + \varepsilon^{V} x^5 + \ldots + v^{V} x^n = \mathfrak{E}$$

$$\frac{F}{x^{21}} = 1 + \alpha^{VI} x + \beta^{VI} x^2 + \gamma^{VI} x^3 + \delta^{VI} x^4 + \varepsilon^{VI} x^5 + \ldots + v^{VI} x^n = \mathfrak{F}$$

etc.

15. Solutio ergo quaeſtionis ad inuentionem ſerierum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. reducitur, quas patet ſingulas eſſe recurrentes. Ac primo quidem ſeries $\mathfrak{A}$, cum ſit $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$, eſt adeo Geometrica, atque $\alpha' = 1$, $\beta' = 1$, $\gamma' = 1$, $\delta' = 1$, etc. quod per ſe eſt perſpicuum. Series autem $\mathfrak{B}$, cum ſit $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{1-x-x^2+x^3}$, erit recurrens, ſcala relationis exiſtente $+1$, $+1$, -1; Vnde erit:

$\alpha'' =$

$$\alpha'' = 1,$$
$$\beta'' = \alpha'' + 1$$
$$\gamma'' = \beta'' + \alpha'' - 1$$
$$\delta'' = \gamma'' + \beta'' - \alpha''$$
$$\varepsilon'' = \delta'' + \gamma'' - \beta''$$
$$\zeta'' = \varepsilon'' + \delta'' - \gamma''$$
etc.

Simili modo ſeries $\mathfrak{C}$ ob $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^5-x^6}$ erit recurrens et ſcalam relationis habebit $+1, +1, 0, -1, -1, +1$. Vnde erit:

$$\alpha''' = 1$$
$$\beta''' = \alpha''' + 1$$
$$\gamma''' = \beta''' + \alpha''' + *$$
$$\delta''' = \gamma''' + \beta''' + * - 1$$
$$\varepsilon''' = \delta''' + \gamma''' + * - \alpha''' - 1$$
$$\zeta''' = \varepsilon''' + \delta''' + * - \beta''' - \alpha''' + 1$$
$$\eta''' = \zeta''' + \varepsilon''' + * - \gamma''' - \beta''' + \alpha'''$$
$$\theta''' = \eta''' + \varepsilon''' + * - \delta''' - \gamma''' + \beta'''$$
etc.

Eodem modo ſeries ſequentes perſpicientur eſſe recurrentes, ſingularumque ſcalae relationis hoc modo aſſignari poterunt. Etſi autem hoc pacto iſtae ſeries non difficulter formari poſſint, tamen iſta ratione relicta mox multo commodiorem modum exhibebo, harum ſerierum quamuis ex praecedente formandi, poſtquam obſeruationem maximi momenti communicauero.

§. 16.

§. 16. Cum sit $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$, patet in ſerie euoluta $\mathfrak{B}$, quamuis poteſtatem ipſius x toties occurrere debere, quoties ea ex poteſtatibus x^1, x^2 per multiplicationem oriri poteſt, ſeu quoties eius exponens ex numeris 1 et 2 per additionem produci poteſt. Ita cum ſit:

$$\mathfrak{B} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \ldots + v''x^n$$

ex termino $3x^4$ intelligitur, numerum 4 tribus modis ex numeris 1 et 2 per additionem oriri poſſe, qui ſunt:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1\ ;\ 4 = 1 + 1 + 2\ ;\ \text{et}\ 4 = 2 + 2.$$

In genere ergo terminum $v''x^n$ conſiderando, coefficiens v'' indicabit, quot modis exponens n ex numeris 1 et 2 per additionem produci poſſit. Cum igitur ſit $B = \mathfrak{B}x^3$, in ſerie B habebitur iſte terminus $v''x^{n+3}$, qui cum indicet, numerum $n+3$ tot variis modis in duas partes inaequales ſecari poſſe, quot vnitates coefficiens v'' in ſe complectatur, manifeſtum eſt, numerum $n+3$ tot modis in duas partes inaequales diſtribui poſſe, quot modis numerus n ex numeris 1 et 2 per additionem produci queat.

§. 17. Deinde cum ſit $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$, patet in hac ſerie $\mathfrak{C}$, quamuis poteſtatem ipſius x toties occurrere debere, quoties ea ex poteſtatibus x^1, x^2, x^3 per multiplicationem oriri queat, ſeu quod idem eſt, quoties eius exponens ex numeris 1, 2, 3 per additionem produci poſſit. Ita cum ſit:

$$\mathfrak{C} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + \ldots + v''x^n$$

ex quouis eius termino $5x^5$ cognoſcetur, exponentem 5 quinque modis ex numeris 1, 2, 3 per additionem produci poſſe, qui ſunt:

 5 = 1

$5 = 1+1+1+1+1$; $5 = 1+1+1+2$; $5 = 1+1+3$;
$5 = 1+2+2$; $5 = 2+3$.

In genere autem terminum $v''' x^n$ considerando, coefficiens v''' indicabit, quot variis modis numerus n ex numeris 1, 2, 3, per additionem oriri queat. Cum igitur sit $C = \mathfrak{C} x^6$, in serie C habebitur iste terminus $v''' x^{n+6}$ quo indicatur, numerum $n+6$ tot modis, quot vnitates continentur in coefficiente v''' in tres partes inaequales dispertiri posse. Vnde consequitur, numerum $n+6$ totidem modis in tres partes inaequales distribui posse, quot modis numerus 6 ex numeris 1, 2, 3, per additionem produci possit.

§. 18. Non opus est, vt hoc ratiocinium longius prosequamur, cum hinc iam abunde perspiciatur, quemuis numerum $n+10$ tot variis modis in quatuor partes inaequales dispertiri posse, quot modis numerus n ex his quatuor numeris 1, 2, 3, 4 per additionem produci possit. Simili modo quilibet numerus $n+15$ tot variis modis in quinque partes inaequales dispertiri poterit, quot modis numerus n ex his quinque numeris 1, 2, 3, 4, 5 per additionem produci potest. Generatim ergo numerus $n + \frac{m(m+1)}{2}$ tot variis modis in m partes inaequales dispertiri poterit, quot variis modis numerus n ex his numeris 1, 2, 3, 4 . . . . . . m per additionem produci potest. Quod si ergo quaeratur, quot variis modis numerus N in m partes inaequales dispertiri possit, responsio reperietur, si casuum numerus inuestigetur, quibus numerus $N - \frac{m(m+1)}{2}$ ex numeris 1, 2, 3, 4 . . . . . m per additionem produci potest.

§. 19. Hoc igitur modo resolutio quaestionis propositae, de partitione cuiusque numeri, in quot libuerit partes.

tes inaequales, reducitur ad ſolutionem alius Problematis iam ſupra commemorati, quo quaeritur, quot variis modis quilibet numerus ex aliquot terminis huius progreſſionis Arithmeticae 1, 2, 3, 4, 5, etc. per additionem produci poſſit. Hacque poſteriore quaeſtione reſoluta ſimul prior reſoluetur. Quod vt clarius explicemus, noua ſigna ad commodiorem expreſſionem adhibeamus. Denotet ergo haec ſcriptio:

$n^{(2)}$ numerum caſuum, quibus numerus n ex duobus numeris 1, 2 per additionem formari poſſit.

$n^{(3)}$ denotet numerum caſuum, quibus numerus n ex his numeris 1, 2, 3 per additionem formari poſſit.

Et $n^{(m)}$ denotet numerum caſuum, quibus numerus n ex his numeris 1, 2, 3, ... m per additionem produci poſſit. Cum igitur valores huiusmodi characterum fuerint definiti, quod deinceps praeſtabimus, Problema propoſitum ita reſoluetur. Si quaeratur ſcilicet, quot variis modis numerus N in m partes inaequales diſpertiri poſſit; numerus caſuum quaeſitus exprimetur hoc charactere $\left(N - \frac{m(m+1)}{1.2}\right)^{(m)}$, quippe quo indicatur, quot variis modis numerus $N - \frac{m(m+1)}{2}$ ex his numeris 1, 2, 3, ... m per additionem produci poſſit.

§. 20. Ad hanc eandem quaeſtionem quoque reducitur ſolutio alterius Problematis a *Celeb. Naudeo* propoſiti, quam ob rem expediet, et hoc Problema ante reſolui, quam ampliorem characterum modo aſſumtorum euolutionem ſuſcipiamus, ſic enim tria Problemata, quae

 inter

inter se maxime videantur diuersa, vna eademque opera resoluemus. Problema autem ita se habet:

Inuenire quot variis modis datus numerus N *possit dispertiri in* p *partes, partium aequalitate non exclusa.*

Quoniam hic partium aequalitas non excluditur, sequentem formam contemplabor, quae huius quaestionis solutionem in se continebit

$$s = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)} \text{ etc.}$$

quae secundum potestates ipsius z euoluta praebeat hanc seriem:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{ etc.}$$

eritque, vt supra §. VI. notauimus, coefficiens A summa omnium terminorum huius seriei x, x^2, x^3, x^4, x^5, etc. seu $A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 +$ etc. quae est eadem series, quam in solutione praecedentis Problematis pro littera A obtinuimus.

§. 21. Deinde vero est B summa productorum ex binis terminis seriei A, quadratis singulorum terminorum non exclusis. Hinc erit B summa omnium potestatum ipsius x, quarum exponentes sint aggregata duorum numerorum, siue aequalium, siue inaequalium: et cum eadem potestas hoc modo saepius resultare possit, ea vnciam habebit numericam indicantem, quot ea potestas modis sit productum ex binis terminis seriei A; seu quot variis modis eius exponens possit esse summa duorum numerorum, tam aequalium, quam inaequalium. Ex hoc fonte reperietur:

$$B = x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + \text{ etc.}$$

cuius

cuius feriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteftatis ipfius x adiunctae in duas partes difpertiri poffit. Hac igitur ferie in infinitum continuata, Problematis propofiti cafus, quo partitio in duas partes requiritur, facile refoluitur.

§. 22. Quantitas porro C, cum contineat omnia producta, quae oriuntur terminis ternis feriei A, fiue inaequalibus fiue aequalibus inuicem multiplicandis, conftabit ex ferie poteftatum ipfius x, quarum exponentes funt fummae trium numerorum integrorum affirmatiuorum. Atque eadem poteftas x^n toties in ferie C occurret, quoties eius exponens n ex tribus numeris, fiue aequalibus, fiue inaequalibus per additionem refultare poteft. Erit autem:

$$C = x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + 10x^{11} + \text{etc.}$$

cuius feriei quilibet coefficiens indicat, quot variis modis exponens poteftatis ipfius x adiunctae in tres partes, fiue aequales, fiue inaequales difpertiri poffit. Sic ex termino $8x^{10}$ colligitur, numerum 10 octo modis diuerfis in tres partes fecari poffe, quae partitiones funt:

$10 = 1 + 1 + 8$	$10 = 2 + 2 + 6$
$10 = 1 + 2 + 7$	$10 = 2 + 3 + 5$
$10 = 1 + 3 + 6$	$10 = 2 + 4 + 4$
$10 = 1 + 4 + 5$	$10 = 3 + 3 + 4$

Ifta igitur feries C in infinitum continuata omnibus numeris in tres partes difpertiendis inferuiet.

§. 23. Simili modo quantitas D, cum contineat omnia producta ex quatuor terminis feriei $A = x + x^2 + x^3 + x^4 +$ etc. eiusdem termini repetitione non exclufa:

clusa: constabit serie potestatum ipsius x, quarum exponentes sint aggregata quatuor numerorum, siue aequalium, siue inaequalium. In hac igitur serie quaelibet potestas ipsius x eiusmodi habebit coefficientem, qui indicet, quot variis modis eius exponens per additionem 4 numerorum resultare possit. Reperietur autem hinc:

$$D = x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 9x^{10} + 11x^{11} + \text{etc.}$$

Haec igitur series in infinitum continuata ostendet, quot variis modis quilibet numerus in quatuor partes dispertiri possit. Sic ex termino $9x^{10}$ concluditur numerum 10 nouem modis in quatuor partes dispertiri posse, quae partitiones sunt:

$10 = 1 + 1 + 1 + 7$	$10 = 1 + 2 + 2 + 5$
$10 = 1 + 1 + 2 + 6$	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$
$10 = 1 + 1 + 3 + 5$	$10 = 1 + 3 + 3 + 3$
$10 = 1 + 1 + 4 + 4$	$10 = 2 + 2 + 2 + 4$

$$10 = 2 + 2 + 3 + 3$$

§. 24. Hoc modo vlterius procedendo patebit, litteram E fore seriem potestatum ipsius x ita comparatam, vt cuiusuis termini coefficiens indicet, quot variis modis exponens ipsius x in quinque partes dispertiri possit. Erit autem:

$$E = x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + 7x^{10} + 10x^{11} + 13x^{12} + \text{etc.}$$

Pari modo valor litterae F erit series partitionibus in sex partes inseruiens, et litterarum G, H, I, etc. valores pro partitionibus in partes septem, octo, nouem, etc. valebunt, erit autem:

F =

$$F = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} + 11x^{12} + 14x^{13} + \text{etc.}$$
$$G = x^7 + x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 11x^{13} + 15x^{14} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Si hae ſeries cum illis, quas in ſolutione ſuperioris Problematis pro iisdem litteris inuenimus, mox patebit totum diſcrimen tantum in poteſtatibus ipſius x conſtare, coefficientesque ſolos vtrinque ſimiliter procedere. Ne autem hic inductioni vllum locum concedamus, iſtam conuenientiam ſequenti demonſtratione euincemus.

§. 25. Conſideremus, vt ſupra duos valores ipſius s, qui ſunt:

$$s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$

$$s = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ \text{etc.}}$$

qui ſi loco z vbique ponatur xz, abeant in t eritque:

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + Ex^5z^5 + \text{etc.}$$

$$t = \frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ \text{etc.}}$$

Vnde ſi poſteriores ipſarum s et t valores inuicem comparentur, mox patet eſſe $s = \frac{t}{1-xz}$ ſeu $t = (1-xz)s$, quae eadem relatio cum quoque inter priores litterarum s et t valores locum tenere debeat, erit:

$$t = 1 + Axz + Bx^2z^2 + Cx^3z^3 + Dx^4z^4 + Ex^5z^5 + \text{etc.} =$$
$$(1-xz)s = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$
$$- xz - Axz^2 - Bxz^3 - Cxz^4 - Dxz^5 - \text{etc.}$$

Vnde per coaequationem terminorum homogeneorum inuenitur:

A =

$$A = \frac{x}{1-x}$$
$$B = \frac{Ax}{1-xx} = \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$
$$C = \frac{Bx}{1-x^3} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$
$$D = \frac{Cx}{1-x^4} = \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$
etc.

§. 26. Ex his formulis intelligitur, iſtas ſeries non ſolum quoque eſſe recurrentes, vti ſuperiores, ſed etiam coefficientium vtrinque eandem eſſe legem: Quare ſi neglectis numeratoribus ponatur: vt ſit

$\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$	$A = \mathfrak{A}x$
$\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$	$B = \mathfrak{B}x^2$
$\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$	$C = \mathfrak{C}x^3$
$\mathfrak{D} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$	$D = \mathfrak{D}x^4$
etc.	etc.

Partitio cuiusque numeri in partes quotumque, ſiue aequales, ſiue inaequales, pendet a formatione ſerierum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. quae, vti ante obſeruauimus, indicant, quot variis modis quiuis numerus ex aliquot terminis initialibus huius ſeriei 1, 2, 3, 4, 5, etc. per additionem produci queat. Sic cum ſit $B = \mathfrak{B}x^2$, quiuis numerus $n+2$ totidem modis in duas partes diſpertiri poteſt, quot modis numerus n ex numeris 1 et 2 per additionem produci poteſt. Simili modo cum ſit $C = \mathfrak{C}x^3$, numerus $n+3$ tot modis in tres partes diſpertietur, quot modis numerus n per additionem ex numeris 1, 2, 3 componi poterit. Atque generaliter numerus $n+m$ tot variis

riis modis in m partes, ſiue aequales, ſiue inaequales diſpertiri poteſt, quot modis numerus n ex numeris 1, 2, 3, ... m per additionem produci poteſt.

§. 27. Pendet ergo et hoc Problema a ſolutione quaeſtionis, qua quaeritur, quot variis modis datus numerus ex aliquot terminis initialibus huius ſeriei 1, 2, 3, 4, etc. per additionem reſultare poſſit. Si igitur vt ſupra haec ſcribendi formula $N^{(m)}$ denotet numerum modorum, quibus numerus N ex numeris 1, 2, 3, ... m per additionem componi poteſt, ſeu quibus numerus N in partes quotcunque diſtribui poſſit, quarum nulla maior ſit numero m; huius modi characteribus et hoc Problema propoſitum reſolui poterit. Scilicet $n^{(m)}$ indicabit, quot variis modis numerus $n+m$ in m partes, ſiue aequales, ſiue inaequales diſpertiri poſſit. Hinc ſi quaeratur, quot modis numerus N in partes m, ſiue aequales, ſiue inaequales diſtribui poſſit, numerum modorum quaeſitum indicabit haec formula $(N-m)^{(m)}$. Si igitur hoc Problema cum praecedente conferatur, perſpicuum erit, numerum $n+m$ totidem modis in m partes, ſiue aequales, ſiue inaequales diſtribui poſſe, quot modis numerus $n+\frac{m(m+1)}{2}$ in m partes inaequales diſpertiri poſſit.

§. 28. Solutio ergo amborum Problematum a *Cel. Naudeo* propoſitorum huc reuocatur, vt definiatur, quot variis modis numerus quicunque n ex his numeris 1, 2, 3 ..... m per additionem produci poſſit; ſeu vt inueſtigetur valor characteris $n^{(m)}$. Quemadmodum ergo hoc nouum Problema ex formulis iam ante inuentis commodiſſime reſolui queat, videamus. Ac primo quidem, ſi

 ſit

ſit $m = 1$, quia quilibet numerus vnico modo ex meris vnitatibus per additionem elici poteſt, erit $n^{(1)} = 1$, quod idem prima formula $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$, ſeu ſeries inde formata: $\mathfrak{A} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 +$ etc. manifeſto indicat.

§. 29. Quoniam ſeries $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ indicat, quot modis quisque numerus ex numeris 1 et 2 per additionem formari poſſit, in hac ſerie poteſtatis x^n coefficiens erit $= n^{(2)}$, haec enim expreſſio aſſumta eſt ad ſignificandum, quot modis numerus n ex numeris 1 et 2 per additionem oriri poſſit. Hinc igitur erit:

$$\mathfrak{B} = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \text{etc.}$$

atque ad ſimilitudinem huius expreſſionis erit:

$$\mathfrak{A} = 1 + 1^{(1)}x + 2^{(1)}x^2 + 3^{(1)}x^3 + 4^{(1)}x^4 + 5^{(1)}x^5 + 6^{(1)}x^6 + \text{etc.}$$

Deinde vero cum ſit $\mathfrak{A} = \frac{1}{1-x}$ et $\mathfrak{B} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ erit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(1 - x^2)$, vnde ſequens inter has ſeries relatio oritur:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{A} & = 1 + 1^{(1)}x + 2^{(1)}x^2 + 3^{(1)}x^3 + 4^{(1)}x^4 + 5^{(1)}x^5 + 6^{(1)}x^6 + \text{etc.} \\
\left.\begin{array}{l} +\mathfrak{B} \\ -\mathfrak{B}x^2 \end{array}\right\} & \begin{array}{l} = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad - x^2 - 1^{(2)}x^3 - 2^{(2)}x^4 - 3^{(2)}x^5 - 4^{(2)}x^6 - \text{etc.} \end{array}
\end{array}$$

Quodſi hinc coaequatio terminorum homogeneorum inſtituatur, erit:

$$\begin{array}{l|l|l}
1^{(2)} = 1^{(1)} & 4^{(2)} = 4^{(1)} + 2^{(2)} & 7^{(2)} = 7^{(1)} + 5^{(2)} \\
2^{(2)} = 2^{(1)} + 1 & 5^{(2)} = 5^{(1)} + 3^{(2)} & 8^{(2)} = 8^{(1)} + 6^{(2)} \\
3^{(2)} = 3^{(1)} + 1^{(2)} & 6^{(2)} = 6^{(1)} + 4^{(2)} & 9^{(2)} = 9^{(1)} + 7^{(2)}
\end{array}$$

§. 30. Generaliter ergo erit $n^{(2)} = n^{(1)} + (n-2)^{(2)}$. Cum igitur ſit $n^{(1)} = 1$, erit $n^{(2)} = 1 + (n-2)^{(2)}$; ſicque coefficientes ſeriei $\mathfrak{B}$ ita determinabuntur, vt quisque

que terminus ultimus aequalis sit antepenultimo unitate aucto. Seu cum series $\mathfrak{A}$ omnes coefficientes sint unitates, ex serie $\mathfrak{A}$ sequenti modo series $\mathfrak{B}$ formabitur:

$$\mathfrak{A} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \text{etc.}$$
$$\qquad\qquad 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4$$
$$\mathfrak{B} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 5x^9 + \text{etc.}$$

Scilicet cum seriei $\mathfrak{B}$ duo termini initiales $1 + x$ constent, subscribantur ii sub terminis tertio et quarto seriei $\mathfrak{A}$, hincque per additionem orientur termini tertius et quartus seriei $\mathfrak{B}$, qui porro terminis quinto et sexto seriei $\mathfrak{A}$ subscripti et additi dabunt terminos quintum et sextum seriei $\mathfrak{B}$, hocque modo series $\mathfrak{B}$, quousque libuerit, facillime continuatur. Patet autem hinc esse $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n \pm \frac{1}{2})$, scilicet si n est numerus impar, erit $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n + 1)$, sin autem n sit numerus par, erit $n^{(2)} = \frac{1}{2}(n + 2)$.

§. 31. Cum porro sit $\mathfrak{C} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ erit $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}(1 - x^3)$, unde cum seriei $\mathfrak{C}$ terminus generalis sit $n^{(3)}x^n$ sequens nascetur relatio inter series $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$:

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{B} & = 1 + 1^{(2)}x + 2^{(2)}x^2 + 3^{(2)}x^3 + 4^{(2)}x^4 + 5^{(2)}x^5 + 6^{(2)}x^6 + \text{etc.} \\
\left.\begin{array}{r} +\mathfrak{C} \\ -\mathfrak{C}x^3 \end{array}\right\} & = \begin{array}{l} 1 + 1^{(3)}x + 2^{(3)}x^2 + 3^{(3)}x^3 + 4^{(3)}x^4 + 5^{(3)}x^5 + 6^{(3)}x^6 + \text{etc.} \\ 1 + 1^{(3)}x + 2^{(3)}x^2 + 3^{(3)}x^3 + 4^{(3)}x^4 + 5^{(3)}x^5 + 6^{(3)}x^6 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -1x^3 - 1^{(3)}x^4 - 2^{(3)}x^5 - 3^{(3)}x^6 - \text{etc.} \end{array}
\end{array}$$

Si iam hic aequatio inter terminos homogeneos instituatur erit:

$$\begin{array}{l|l|l}
1^{(3)} = 1^{(2)} & 4^{(3)} = 4^{(2)} + 1^{(3)} & 7^{(3)} = 7^{(2)} + 4^{(3)} \\
2^{(\ )} = 2^{(2)} & 5^{(3)} = 5^{(2)} + 2^{(3)} & 8^{(3)} = 8^{(2)} + 5^{(3)} \\
3^{(3)} = 3^{(2)} + 1 & 6^{(3)} = 6^{(2)} + 3^{(3)} & 9^{(3)} = 9^{(2)} + 6^{(2)}
\end{array}$$

et generaliter $n^{(3)} = n^{(2)} + (n-3)^{(3)}$

T 2 Series

Series ergo $\mathfrak{C}$ ex ferie $\mathfrak{B}$ fuisque terminis antecedentibus fequenti modo facile formatur. Omittamus autem poteftates ipfius x, quia totum negotium in coefficientibus verfatur:

$$\begin{array}{rl} \mathfrak{B} = & 1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+ \text{etc.} \\ & 1+1+2+3+4+5+7+8+10 \\ \hline \mathfrak{C} = & 1+1+2+3+4+5+7+8+10+12+14+16+ \text{etc.} \end{array}$$

Scilicet feriei $\mathfrak{B}$ fubfcribatur feries $\mathfrak{C}$, initium fub termino quarto faciendo, et pro vti hoc modo feries $\mathfrak{C}$ per additionem oritur, ita quoque fub ferie $\mathfrak{B}$ continuabitur.

§. 32. Quia deinde eft $\mathfrak{D} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$ erit $\mathfrak{C} = (1-x^4)\mathfrak{D}$. Vnde fimili modo, quo hactenus fumus vfi, reperietur:

$1^{(4)} = 1^{(3)}$	$4^{(4)} = 4^{(3)} + 1$	$7^{(4)} = 7^{(3)} + 3^{(4)}$
$2^{(4)} = 2^{(3)}$	$5^{(4)} = 5^{(3)} + 1^{(4)}$	$8^{(4)} = 8^{(3)} + 4^{(4)}$
$3^{(4)} = 3^{(3)}$	$6^{(4)} = 6^{(3)} + 2^{(4)}$	$9^{(4)} = 9^{(3)} + 5^{(4)}$

et generaliter $n^{(4)} = n^{(3)} + (n-4)^{(4)}$

Pari modo vlterius progrediendo colligetur fore:

$$n^{(5)} = n^{(4)} + (n-5)^{(5)}$$
$$n^{(6)} = n^{(5)} + (n-6)^{(6)}$$
$$n^{(7)} = n^{(6)} + (n-7)^{(7)}$$
etc.

Generatim ergo hinc colligetur fore:

$$n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n-m)^{(m)}$$

Vbi notandum eft, fi fuerit $n < m$, tum terminum $(n-m)^{(m)}$ prorfus euanefcere, fin autem fit $n = m$, etiamfi fit $n-m = 0$, tamen terminum $(n-m)^{(m)}$ valere vnitatem. Deinde fi fit $n-m = 1$, quoque erit $(n-m)^{(m)} = 1$.

Erit

Erit ergo perpetuo tam $0^{(m)} = 1$, quam $1^{(m)} = 1$, et $n^{(1)} = 1$.

§. 33. His relationibus inter ſeries $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. notatis eae facillime formantur, et quousque libuerit, continuantur, quae operatio per hic adiunctum ſchematismum fiet manifeſtum:

	1	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}	x^{15}	etc.
$\mathfrak{A} =$	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	etc.
			1 +	1 +	2 +	2 +	3 +	3 +	4 +	4 +	5 +	5 +	6 +	6 +	7 +	7 +	etc.
$\mathfrak{B} =$	1 +	1 +	2 +	2 +	3 +	3 +	4 +	4 +	5 +	5 +	6 +	6 +	7 +	7 +	8 +	8 +	etc.
				1 +	1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	7 +	8 +	10 +	12 +	14 +	16 +	19 +	etc.
$\mathfrak{C} =$	1 +	1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	7 +	8 +	10 +	12 +	14 +	16 +	19 +	21 +	24 +	27 +	etc.
					1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	6 +	9 +	11 +	15 +	18 +	23 +	27 +	etc.
$\mathfrak{D} =$	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	6 +	9 +	11 +	15 +	18 +	23 +	27 +	34 +	39 +	47 +	54 +	etc.
						1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	10 +	13 +	18 +	23 +	30 +	etc.
$\mathfrak{E} =$	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	10 +	13 +	18 +	23 +	30 +	37 +	47 +	57 +	70 +	84 +	etc.
							1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	14 +	20 +	26 +	etc.
$\mathfrak{F} =$	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	14 +	20 +	26 +	35 +	44 +	58 +	71 +	90 +	110 +	etc.
								1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	21 +	etc.
$\mathfrak{G} =$	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	21 +	28 +	38 +	49 +	65 +	82 +	105 +	131 +	etc.
									1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	etc.
$\mathfrak{H} =$	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	29 +	40 +	52 +	70 +	89 +	116 +	146 +	etc.
										1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	etc.
$\mathfrak{I} =$	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	41 +	54 +	73 +	94 +	123 +	157 +	etc.
											1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	etc.
$\mathfrak{K} =$	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	42 +	55 +	75 +	97 +	128 +	164 +	etc.
												1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	etc.
$\mathfrak{L} =$	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	42 +	56 +	76 +	99 +	131 +	169 +	etc.
													1 +	1 +	2 +	3 +	etc.
$\mathfrak{M} =$	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	42 +	56 +	77 +	100 +	133 +	172 +	etc.
														1 +	1 +	2 +	etc.
$\mathfrak{N} =$	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	42 +	56 +	77 +	101 +	134 +	174 +	etc.

§. 34. Hoc modo tabula hic adiuncta per ſolam continuam additionem eſt conſtructa, atque ratio conſtructionis tam eſt perſpicua ex inſpectione, vt ampliori explicatione non egeat. Ope huius tabulae igitur immediate reſoluitur hoc Problema, quo quaeritur, *quot variis modis datus numerus* n *ex his numeris* 1, 2, 3 . . . . . m *per additionem produci poſſit.*

Sic si quaeratur, quot variis modis numerus 10 ex his numeris 1, 2, et 3 per additionem oriri possit, erit $n = 10$ et $m = 3$, atque ex tabula reperitur modorum numerus $= 14$, qui modi sunt:

$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$10 = 1+1+1+2+2+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+2$	$10 = 1+1+2+2+2+2$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+3$	$10 = 1+1+2+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+2+2$	$10 = 1+2+2+2+3$
$10 = 1+1+1+1+1+2+3$	$10 = 1+3+3+3$
$10 = 1+1+1+1+2+2+2$	$10 = 2+2+2+2+2$
$10 = 1+1+1+1+3+3$	$10 = 2+2+3+3$

Si quaeratur, quot variis modis numerus 25 ex his numeris 1, 2, 3, 4, 5 per additionem produci possit, facto $n = 25$ et $m = 5$, reperietur ex tabula numerus modorum $= 377$.

Si quaeratur quot variis modis numerus 50 ex his numeris 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 8, 9, 10 per additionem resultare possit, posito $n = 50$ et $m = 10$, invenitur modorum numerus $= 62740$.

Si vel numerus propositus, vel numerus partium maior sit quam in tabula, tum nihilo minus casuum numerus ex tabula ope formularum supra inventarum colligi poterit. Vti si quaeratur, quot modis numerus 60 ex his numeris 1, 2, 3 . . . . 20 per additionem resultare possit, erit $n = 60$ et $m = 20$, quaeriturque valor formulae $60^{(20)}$. Est vero $60^{(20)} = 60^{(19)} + 40^{(20)}$, at $60^{(19)} = 60^{(18)} + 41^{(19)}$, porroque $60^{(18)} = 60^{(17)} + 42^{(18)}$, et $60^{(17)} = 60^{(16)} + 43^{(17)}$, sicque deinceps. Vnde tandem erit $60^{(20)} = 40^{(20)} + 41^{(19)} + 42^{(18)} + 43^{(17)} + 44^{(16)} + \ldots\ldots + 59^{(1)}$, qui numeri ex tabula collecti dant 791131, totque modis numerus 60 ex numeris 1, 2, 3 . . . . . 20 per additionem elici potest.

§. 35.

§. 35. Ope huius tabulae deinde ambo Problemata *Cel. Naudei* expedite resolui possunt. Ac primo quidem si quaeratur, *quot variis modis datus numerus* N *in* m *partes inter se inaequales dispertiri possit*, *hoc fiet*, *vti supra ostendimus*, *tot modis*, *quot vnitates continentur in hac expressione* $(N - \frac{m(m+1)}{2})^{(m)}$ *quam tabula indicat.*
Vsum igitur huius tabulae aliquot exemplis ostendamus.

I. *Quaeratur*, *quot variis modis numerus* 25 *in quinque partes inaequales dispertiri possit?*
Erit ergo hic $N = 25$ et $m = 5$, vnde $\frac{m(m+1)}{2} = 15$ et responsum continebit formula $10^{(5)}$, quae ex tabula est $= 30$ ita vt partitio 30 modis institui possit:

II. *Quaeratur*, *quot variis modis numerus* 50 *in* 7 *partes inaequales dispertiri possit?*
Hic est $N = 50$, $m = 7$ et $N - \frac{m(m+1)}{2} = 22$, vnde numerus partitionum quaesitus est $= 22^{(7)} = 522$.

III. *Quaeratur*, *quot variis modis numerus* 100 *in* 10 *partes inaequales dispertiri possit?*
Cum sit $N = 100$ et $m = 10$ erit $N - \frac{m(m+1)}{2} = 45$ et numerus partitionum reperietur $45^{(10)} = 33401$.

IV. *Quaeratur*, *quot diuersis modis numerus* 256 *in* 20 *partes inaequales dispertiri possit?*
Ob $N = 256$ et $m = 20$ erit $N - \frac{m(m+1)}{2} = 46$, et numerus partitionum fiet $= 46^{(20)} = 96271$.

V. *Quaratur*, *quot diuersis modis numerus* 270 *in* 20 *partes inaequales dispertiri possit?*
Ob $N = 270$ et $m = 20$ erit $N - \frac{m(m+1)}{2} = 60$, ideo-

ideoque numerus partitionum quaesitus fit $= 60^{(20)}$, cuius valorem ante inuenimus esse $= 791131$. Tot ergo diuersis modis numerus 270 in 20 partes inaequales dispertiri potest.

§. 36. Simili modo ex tabula quoque alterum Problema resoluetur, quo quaerebatur: *quot variis modis numerus* N *in* m *partes aequalitate partium non exclusa dispertiri possit?* Supra enim ostendimus partitionum numerum quaesitum contineri in hac formula $(N - m)^{(m)}$, quem valorem ex tabula depromere licet. Quae solutio quo facilius intelligatur, aliquot exempla adiiciamus.

I. *Quaeratur, quot variis modis numerus 25 in quinque partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?* Hic est $N = 25$ et $m = 5$ vnde $N - m = 20$, et partitionum numerus erit $20^{(20)} = 192$.

II. *Quaeratur, quot variis modis numerus 50 in septem partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?* Ob $N = 50$ et $m = 7$ erit $N - m = 43$; et partitionum numerus quaesitus fiet $43^{(7)} = 8946$.

III. *Quaeratur, quot variis modis numerus 50 in decem partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?* Ob $N = 50$ et $m = 10$ erit $N - m = 40$ et partitionum numerus erit $40^{(10)} = 16928$.

IV. *Quaeratur, quot variis modis numerus 60 in 12 partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?* Cum sit $N = 60$ et $m = 12$ erit $N - m = 48$, et partitionum numerus quaesitus erit $48^{(12)} = 74287$.

V. *Quaeratur, quot variis modis numerus 80 in 20 partes siue aequales siue inaequales dispertiri possit?*

Erit

Erit ergo $N = 80$ et $m = 20$, vnde $N - m = 60$, et partitionum numerus erit: $= 60^{(20)} = 791131$.

§. 37. In feriebus horizontalibus, quas tabula exhibet notatu digna eſt conuenientia inter terminos initiales harum ſerierum, quae eo longius procedit, quo maior fuerit numerus m: ſic ſeries decima quinta quindecim ſuos terminos initiales cum omnibus ſeriebus ſequentibus habet communes. Hinc inueniri poterit ſeries, quae numero m in infinitum aucto reſpondet, quae ergo continebit valores huius formulae $n^{(\infty)}$; quae denotat, quot variis modis numerus n, ex omnibus prorſus numeris integris per additionem produci poſſit. Haec ergo quaeſtio digna videtur, quae diligentius euoluatur. Cum $n^{(\infty)}$ complectatur omnes omnino partitiones numeri n, pro quocunque partium numero ſimul ſumtas: erit $n^{(\infty)}$ aggregatum ex numeris partitionum in 1, 2, 3, 4, . . . vsque ad n partes, ſiue aequales, ſiue inaequales; quia numerus n in plures quam n partes ſecari nequit. Quam ob rem erit:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + (n-4)^{(4)} + (n-5)^{(5)} + \ldots\ldots (n-n)^{(n)}$$

in qua ſerie tam primus terminus $(n-1)^{(1)}$, qui denotat ſectionem in vnam partem, quam vltimus $(n-n)^{(n)}$, qui denotat ſectionem in n partes, eſt vnitas. Hinc igitur ſeries numerorum $n^{(\infty)}$, quae in calce tabulae exhibetur per additionem terminorum ex ſuperioribus ſeriebus inueniri poteſt. Sic erit: $6^{(\infty)} = 5^{(1)} + 4^{(2)} + 3^{(3)} + 2^{(4)} + 1^{(5)} + 0^{(6)} = 1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$, qui numerus in infima tabulae ſerie ſub numero 6 habetur.

§. 38. Poteſt autem haec operatio contrahi ope Lemmatis ſupra inuenti $n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n - m^{(m)}$, vnde fit $n^{(m)} - n^{(m-1)} = (n-m)^{(m)}$.

Cum enim ſit:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + (n-4)^{(4)} + (n-5)^{(5)} + (n-6)^{(6)} + \text{etc.}$$

ſi vbique loco n ſcribatur $n-1$, erit:

$$(n-1)^{(\infty)} = (n-1)^{0} + (n-2)^{(1)} + (n-3)^{(2)} + (n-4)^{(3)} + (n-5)^{(4)} + (n-6)^{(5)} + \text{etc.}$$

vbi ob vniformitatem praefigitur terminus $(n-1)^{0}$, cuius valor eſt $= 0$. Si igitur inferior ſeries a ſuperiori ſubtrahatur, ope Lemmatis prodibit:

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} = (n-2)^{(1)} + (n-4)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (n-8)^{(4)} + (n-10)^{(5)} + (n-12)^{(6)}$$

ſicque terminus quisque $n^{(\infty)}$ ope praecedentis $(n-1)^{(\infty)}$ per additionem duplo pauciorum terminorum quam ante inuenitur. Erit ergo ex. gr. $12^{(\infty)} = 11^{(\infty)} + 10^{(1)} + 8^{(2)} + 6^{(3)} + 4^{(4)} + 2^{(5)} + 0^{(6)}$ ſiue $12^{(\infty)} = 56 + 1 + 5 + 7 + 5 + 2 + 1 = 77$, qui numerus quoque pro valore ipſius $12^{(\infty)}$ in tabula reperitur.

§. 39. Simili modo haec operatio vlterius contrahi poteſt, cum enim ſit:

$$n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} = (n-2)^{(1)} + (n-4)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (n-8)^{(4)} + (n-10)^{(5)} + \text{etc.}$$

ſi loco n ponamus $n-2$ habebimus:

$$(n-2)^{(\infty)} - (n-3)^{(\infty)} = (n-2)^{(0)} + (n-4)^{(1)} + (n-6)^{(2)} + (n-8)^{(3)} + (n-10)^{(4)} + \text{etc.}$$

vbi ob vniformitatem terminum $(n-2)^{(0)} = 0$ praemittimus. Nunc hanc ſeriem a ſuperiore ſubtrahando ope Lemmatis obtinebimus.

$$\left.\begin{array}{l} +n^{(\infty)} - (n-1)^{(\infty)} \\ -(n-2)^{(\infty)} + (n-3)^{(\infty)} \end{array}\right\} = (n-3)^{(1)} + (n-6)^{(2)} + (n-9)^{(3)} + (n-12)^{(4)} + (n-15)^{(5)} + \text{etc.}$$

Haec ergo ſeries ſi dicatur $= P$ erit:

$$n^{(\infty)} = (n-1)^{(\infty)} + (n-2)^{(\infty)} - (n-3)^{(\infty)} + P.$$

In ſerie ergo quaeſita ad definiendum terminum quemuis $n^{(\infty)}$ praeter valorem ipſius P noſſe oportet ternos terminos

nos praecedentes. Hoc modo procedendo tandem quantitas P euanescet, et quilibet terminus istius seriei per solos terminos praecedentes definietur, quae est proprietas serierum recurrentium.

§. 40. Hanc vero seriem re vera esse recurrentem ex eius genesi est manifestum, cum oriatur ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\text{ etc.}}$$

Scala ergo relationis istius seriei habebitur, si iste denominator actu per multiplicationem euoluatur. Instituta autem hac multiplicatione denominator sequenti modo expressus inuenietur.

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-{}^{70}-x^{77}+\text{ etc.}$$

Quae ipsius x potestates qualem teneant legem, ex ipsa formatione vix definiri posse videtur; interim tamen ex inspectione mox patet, alternatim binos terminos esse affirmatiuos et negatiuos. Neque minus exponentes ipsius x certam legem tenere obseruantur, vnde eius terminus generalis colligitur esse $x^{n(3n\pm1):2}$. Scilicet nullae aliae potestates occurrunt nisi quarum exponentes continentur in hac formula $\frac{3nn\pm n}{2}$, et ita quidem vt potestates, quae ex numeris imparibus pro n assumtis oriuntur, habeant signum $-$, quae vero ex numeris paribus formantur, signum $+$.

§. 41. Haec igitur forma nobis suppeditat scalam relationis seriei quaesitae, qua constat fore:

$$n^{(\infty)}=(n-1)^{(\infty)}+(n-2)^{(\infty)}-(n-5)^{(\infty)}-(n-7)^{(\infty)}+(n-12)^{(\infty)}+(n-15)^{(\infty)}$$
$$-(n-22)^{(\infty)}-(n-26)^{(\infty)}+(n-35)^{(\infty)}+(n-40)^{(\infty)}(n-51)^{(\infty)}-(n-57)^{(\infty)}+\text{etc.}$$

 Hanc

Hanc autem legem progreſſionis locum haberi tentanti facile patebit. Sit enim $n = 30$ reperietur fore:

$$30^{(\infty)} = 29^{(\infty)} + 28^{(\infty)} - 25^{(\infty)} - 23^{(\infty)} + 18^{(\infty)} + 15^{(\infty)} - 8^{(\infty)} - 4^{(\infty)}$$

eſt enim his numeris ex tabula deſumtis

$$5604 = 4565 + 3718 - 1958 - 1255 + 385 + 176 - 22 - 5$$

Atque hoc modo iſta ſeries quo vsque libuerit continuari poteſt.

§. 42. Quoniam vero ſeries pro valore $m = 20$ iam eſt formata, ex ea aliquanto facilius ſeries quaeſita pro valore $m = \infty$ erui poterit. Cum enim ſeries $n^{(20)}$ formetur ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1-x^{20})}$$

ſeries vero $n^{(\infty)}$ ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-{}^3)(1-x^4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1-x^{\infty})}$$

manifeſtum eſt ſi haec ſeries multiplicetur per

$(1-x^{21})(1-x^{22})(1-x^{23})(1-x^{24})(1-x^{25})$ etc. ſeu per

$$\begin{aligned}
&1 - x^{21} - x^{22} - x^{23} - x^{24} - x^{25} - x^{26} - x^{27} - \text{etc.}\\
&+ x^{43} + x^{44} + 2x^{45} + 2x^{46} + 3x^{47} + 3x^{48} + 4x^{49} + 4x^{50} + \text{etc.}\\
&- x^{66} - x^{67} - 2x^{68} - 3x^{69} - 4x^{70} - 5x^{71} - 7x^{72} - 8x^{73} - 10x^{74} - \text{etc.}\\
&+ x^{90} + x^{91} + 2x^{92} + 3x^{93} + 5x^{94} + 6x^{95} + 9x^{69} + 11x^{97} + 15x^{98} + \text{etc.}\\
&- x^{115} - x^{116} - 2x^{117} - 3x^{118} - 5x^{119} - 7x^{120} - 10x^{121} - 13x^{122} - 18x^{123} - \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc.

tum prodire debere priorem. Hinc concluditur fore:

$n^{(\infty)}$

$$n^{(20)} = n^{(\infty)} - (n-21)^{(\infty)} - (n-22)^{(\infty)} - (n-23)^{(\infty)} - (n-24)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ (n-43)^{(\infty)} + (n-44)^{(\infty)} + 2(n-45)^{(\infty)} + 2(n-46)^{(\infty)} + 3(n-47)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- (n-66)^{(\infty)} - (n-67)^{(\infty)} - 2(n-68)^{(\infty)} - 3(n-69)^{(\infty)} - 4(n-70)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ (n-90)^{(\infty)} + (n-91)^{(\infty)} + 2(n-92)^{(\infty)} + 3(n-93)^{(\infty)} + 5(n-94)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- (n-115)^{(\infty)} - (n-116)^{(\infty)} - 2(n-117)^{(\infty)} - 3(n-118)^{(\infty)} - 5(n-119)^{(\infty)} - \text{etc}$$
$$\text{etc.}$$

quarum ſerierum coefficientes procedunt ſecundum ſeries ſuperiores pro partitione numerorum in 2, 3, 4, 5, 6, etc. partes inſeruientes.

§. 43. Denotet $\int (n-21)^{(\infty)}$ ſummam omnium terminorum ſeriei $n^{(\infty)}$, quae eſt:

$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 15 + 22 + 30 +$ etc.

vsque ad terminum $(n-21)^{(\infty)}$ incluſiue: ſimilique modo ſit generaliter $\int p^{(\infty)}$ ſumma omnium terminorum eiusdem ſeriei vsque ad terminum $p^{(\infty)}$ incluſiue, quae ſummae cum ſucceſſiue facile formentur, erit

$$n^{(20)} = n^{(\infty)} - \int(n-21)^{(\infty)} + \int(n-43)^{(\infty)} + \int(n-45)^{(\infty)} + \int(n-47)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- \int(n-66)^{(\infty)} - \int(n-68)^{(\infty)} - \int(n-69)^{(\infty)} - \int(n-70)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ \int(n-90)^{(\infty)} + \int(n-92)^{(\infty)} + \int(n-93)^{(\infty)} + 2\int(n-94)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Hincque adeo erit:

$$n^{(\infty)} = n^{(20)} + \int(n-21)^{(\infty)} - \int(n-43)^{(\infty)} - \int(n-45)^{(\infty)} - \int(n-47)^{(\infty)} - \text{etc.}$$
$$+ \int(n-66)^{(\infty)} + \int(n-68)^{(\infty)} + \int(n-69)^{(\infty)} + \int(n-70)^{(\infty)} + \text{etc.}$$
$$- \int(n-90)^{(\infty)} - \int(n-92)^{(\infty)} - \int(n-93)^{(\infty)} - 2\int(n-94)^{(\infty)} - \text{etc.}$$

Huius formulae ope, niſi n ſit numerus valde magnus, ex ſerie pro partitione in 20 partes inſeruiente ipſa ſeries $n^{(\infty)}$ facile conſtituitur, hocque modo ea in tabula constructa exhibetur, cum vbique excessus terminorum $n^{(\infty)}$ supra terminos $n^{(20)}$ sint assignati.

§. 44. Hac igitur serie constructa proposito quocunque numero definiri poterit, quot omnino modis is in partes dispertiri possit. Sic patet numerum 10 omnino 42 modis ex additione resultare posse; atque numerus 59 tot modis, quot indicat iste numerus 831820 per additionem produci poterit. Sin autem numeri maiores proponantur, tum tabula hic exhibita vlterius continuari, vel pro quouis casu numerus desideratus per praecepta hic tradita inuestigari debet. In his autem partitionibus aequalitas partium non excluditur. Vnde nouum oritur Problema, *quo pro quouis numero proposito quaeritur omnium partitionum numerus in partes inter se inaequales*, quod Problema resoluetur ope huius expressionis:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \text{ etc.}$$

His enim factoribus in se inuicem multiplicatis orietur series, in qua quilibet coefficiens ostendet, quot variis modis exponens ipsius x in partes inter se inaequales dispertiri possit.

§. 45. Quod si autem hoc productum actu euoluatur, reperietur haec series:

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+12x^{11}+15x^{12}$$
$$+18x^{13}+22x^{14}+27x^{15}+32x^{16}+38x^{17}+46x^{18}+54x^{19}+64x^{20}+76x^{21}+89x^{22}+\text{etc.}$$

quae cum sit productum ex factoribus infinitis tam simplicem legem seruantibus, omni attentione digna videtur. Ac primo quidem manifestum est coefficientes horum terminorum plerumque esse pares, et eos solum esse impares, qui sint cum eiusmodi ipsius x potestatibus coniuncti, quarum exponentes in hac forma $\frac{3nn\pm n}{2}$ continentur neantur: cuius phaenomeni eadem eſt ratio, atque illius quod circa exponentes eiusdem formae $\frac{3nn \pm n}{2}$ in euolutione producti $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. obſeruauimus. Cum autem ſit:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)+etc. = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ etc.}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ etc.}$$

apparet, ſeriem ante inuentam exprimi hac fractione:

$$\frac{1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+x^{44}+x^{52}-x^{70}-x^{80}+\text{ etc.}}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\text{ etc.}}$$

vnde ea ad modum ſerierum recurrentium formari poterit.

§. 46. Facillime autem ſine dubio haec ſeries conſtruitur ex ipſa eius indole, qua cuiuslibet termini coefficiens indicare debet, quot variis modis exponens ipſius x in partes inaequales diſpertiri poſſit. Sit N coefficiens poteſtatis x^n in iſta ſerie, eritque:

$$N = (n-1)^{(1)} + (n-3)^{(2)} + (n-6)^{(3)} + (n-10)^{(4)} + (n-15)^{(5)} + (n-21)^{(6)} + \text{ etc.}$$

nam $(n-1)^{(1)} = 1$ indicat numerum n vnico modo ex vna parte conſtare: $(n-3)^{(2)}$ oſtendit, quot modis numerus n in duas partes inaequales, $(n-6)^{(3)}$ oſtendit, quot modis numerus n in tres partes inaequales diſtribui poſſit, et ita porro: vnde et haec ſeries ope tabulae datae quousque libuerit continuari poteſt. Ceterum hic notatu dignum eſt, ſi numeri partitionum in partes numero pares negatiue capiantur, hanc expreſſionem reſultantem:

$$(n-1)^{(1)} - (n-3)^{(2)} + (n-6)^{(3)} - (n-10)^{(4)} + (n-15)^{(5)} - (n-21)^{(6)} + \text{ etc.}$$

ſemper eſſe $= 0$, niſi fuerit n numerus in hac forma contentus $\frac{3zz \pm z}{2}$; ſin autem n in hac forma contineatur, tum illius expreſſionis valorem eſſe vel $+1$ vel -1, pro vt z fuerit numerus vel impar vel par.

§. 47.

§. 47. Quemadmodum hactenus omnes numeros integros ad partes constituendas admisimus, ita partium conditione limitanda numerus quaestionum in infinitum augeri posset: cui negotio, cum methodus certa ad huiusmodi quaestiones resoluendas sit tradita, non diutius immorabimur. Sufficiat ex praecedente insignem proprietatem partitionis in partes impares annotasse. Cum sit:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ etc. = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\ etc.}$$

quae formula ex aequatione in §. XLIV. exhibita sponte fluit, hinc sequitur, quemuis numerum totidem modis ex numeris solis imparibus per additionem produci posse, quot modis idem numerus omnino in partes inter se inaequales dispertiri possit. Sic cum numerus 10 decem modis in partes inaequales dispertiri possit, qui modi sunt:

$10 = 10$	$10 = 1 + 2 + 7$
$10 = 1 + 9$	$10 = 1 + 3 + 6$
$10 = 2 + 8$	$10 = 1 + 4 + 5$
$10 = 3 + 7$	$10 = 2 + 3 + 5$
$10 = 4 + 6$	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

idem numerus 10 quoque decem modis ex solis numeris imparibus per additionem produci potest, hoc modo

$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$10 = 1+3+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+1+1+3$	$10 = 1+1+1+1+3+3$
$10 = 1+1+1+1+1+5$	$10 = 1+1+3+5$
$10 = 1+1+1+7$	$10 = 3+7$
$10 = 1+9$	$10 = 5+5$

§. 48. Relictis autem his speculationibus progredior ad inuestigandum, quomodo quisque numerus ex terminis progressionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc.

etc. per additionem formari possit. Ac primo quidem si istae partes inter se debeant esse omnes inaequales, quaestio resoluetur per euolutionem huius expressionis:

$$s=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\text{etc.}$$

Multiplicatione enim actu instituta, cuiusque termini coefficiens indicabit, quot modis exponens potestatis ipsius x adiunctae ex numeris progressionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, etc. per additionem produci possit. Cum igitur quiuis numerus vnico modo sic resolui posse obseruatus sit, ostendendum est in hac serie omnes ipsius x potestates occurrere, omniumque eundem esse coefficientem vnitatem.

§. 49. Vt hoc demonstremus, ponamus esse

$$s=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\zeta x^6+\eta x^7+\theta x^8+\text{etc.}$$

atque ad valores coefficientium α, β, γ, δ, etc. eruendos, ponamus xx loco x, sitque valor pro s hoc modo resultans $=t$, erit:

$$t=(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\text{ etc.}$$

ideoque fiet $s=(1+x)t$. Qua relatione in seriebus considerata ob $t=1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\delta x^8+\varepsilon x^{10}+$ etc. habebitur:

$$(1+x)t=1+x+\alpha x^2+\alpha x^3+\beta x^4+\beta x^5+\gamma x^6+\gamma x^7+\delta x^8+\delta x^9+\text{etc.}$$

quae cum aequalis esse debeat seriei s, comparatio coefficientium dabit:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\alpha=1 & \delta=\beta & \eta=\gamma & \kappa=\varepsilon \\
\beta=\alpha & \varepsilon=\beta & \theta=\delta & \lambda=\varepsilon \quad \text{etc.} \\
\gamma=\alpha & \zeta=\gamma & \iota=\delta & \mu=\zeta
\end{array}$$

 vnde

vnde manifestum est, singulos coefficientes esse vnitati aequales, ac propterea esse:

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x},$$

quod idem per se perspicuum est, cum sit:

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\ \text{etc.} = 1.$$

§. 50. Sin autem quaeratur, quot variis modis quisque numerus ex terminis progressionis Geometricae 1, 2, 4, 8, 16, etc. partium aequalitate non amplius sublata, per additionem produci queat: solutio petenda erit ex euolutione huius fractionis:

$$s = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32})}\ \text{etc.}$$

hac enim in serie euoluta coefficiens cuiusque termini ostendet, quot variis modis exponens potestatis ipsius x adiunctae ex terminis progressionis Geometricae propositae per additionem resultare possit. Ponamus xx loco x, et valor ipsius s abeat in t, erit:

$$t = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})\ \text{etc.}} = (1-x)s,$$

sit igitur:

$$s = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 + \text{etc.}$$

erit:

$$\begin{array}{rllllllllll}
(1-x)s = & 1 + \alpha x & + \beta x^2 & + \gamma x^3 & + \delta x^4 & + \varepsilon x^5 & + \zeta x^6 & + \eta x^7 & + \theta x^8 & + \iota x^9 & \text{etc.} \\
 & - 1 & - \alpha & - \beta & - \gamma & - \delta & - \varepsilon & - \zeta & - \eta & - \theta & \text{etc.} \\
= t = & 1 & + \alpha x^2 & & + \beta x^4 & & + \gamma x^6 & & + \delta x^8 & & \text{etc.}
\end{array}$$

vnde

vnde ex aequalitate terminorum homogeneorum obtinebitur:

$\alpha = 1 \qquad\quad = 1$	$\eta = \zeta \qquad\quad = 6$	$\nu = \mu \qquad\quad = 20$
$\beta = \alpha + \alpha = 2$	$\theta = \eta + \delta = 10$	$\xi = \nu + \eta = 26$
$\gamma = \beta \qquad\quad = 2$	$\iota = \theta + \qquad = 10$	$o = \xi \qquad\quad = 26$
$\delta = \gamma + \beta = 4$	$\kappa = \iota + \varepsilon = 14$	$\pi = o + \theta = 36$
$\varepsilon = \delta \qquad\quad = 4$	$\lambda = \kappa + \qquad = 14$	$\rho = \pi \qquad\quad = 36$
$\zeta = \varepsilon + \gamma = 6$	$\mu = \lambda + \zeta = 20$	$\sigma = \rho + \iota = 46$

etc.

§. 51. Notatu digna eſt haec ſeries, cum quod bini termini ſint vbique aequales, tum quod ea facillime quovsque libuerit continuetur. Vlterius autem continuata ita ſe habebit:

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 4x^5 + 6x^6 + 6x^7 + 10x^8 + 10x^9 + 14x^{10} + 14x^{11} + 20x^{12} + 20x^{13} + 26x^{14} + 26x^{15} + 36x^{16} + 36x^{17} + 46x^{18} + 46x^{19} + 60x^{20} + 60x^{21} + 74x^{22} + 74x^{23} + 94x^{24} + 94x^{25} + 114x^{26} + 114x^{27} + 140x^{28} + 140x^{29} + 166x^{30} + 166x^{31} + 202x^{32} + 202x^{33} + 238x^{34} + 238x^{35} + 284x^{36} + 284x^{37} + \text{etc.}$$

Ex hac ergo ſerie patet numerum verbi gratia 30 centum ſexaginta, et ſex modis ex terminis progreſſionis Geometricae duplae per additionem produci poſſe. Ceterum attendenti facile patebit, legem huius progreſſionis nullo modo per terminum generalem exprimi poſſe cum reuera ſit ſeries recurrens, cuius ſcala relationis in infinitum extendatur. Dabit autem hoc productum infinitum:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-{}^8)(1-x^{16})(1-x^{32}) \text{ etc.}$$

ſi euoluatur ſcalam relationis. Ad quam inueniendam ponatur hoc productum $= p$, quod abeat in q ſi loco x ponatur x^2, eritque: $q = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})$ etc. $= \frac{p}{1-x}$, ſeu $p = (1-x)q$. ſtatuatur ergo:

$$p = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \eta x^7 + \theta x^8 + \iota x^9 + \kappa x^{10} + \text{etc.}$$

eritque:

$$(1-x)q = 1 - x + \alpha x^2 - \alpha x^3 + \beta x^4 - \beta x^5 + \gamma x^6 - \gamma x^7 + \delta x^8 - \delta x^9 + \varepsilon x^{10} - \text{etc.}$$

vnde per coaequationem terminorum ſimilium obtinetur:

$$\begin{array}{lll|lll|lll}
\alpha = -1 & = & -1 & \vartheta = \delta & = & -1 & o = -\eta & = & +1 \\
\beta = \alpha & = & -1 & \iota = -\delta & = & +1 & \pi = \vartheta & = & -1 \\
\gamma = -\alpha & = & +1 & \kappa = \varepsilon & = & +1 & \rho = -\vartheta & = & +1 \\
\delta = \beta & = & -1 & \lambda = -\varepsilon & = & -1 & \sigma = \iota & = & +1 \\
\varepsilon = -\beta & = & +1 & \mu = \zeta & = & +1 & \tau = -\iota & = & -1 \\
\zeta = \gamma & = & +1 & \nu = -\zeta & = & -1 & \upsilon = \kappa & = & +1 \\
\eta = -\gamma & = & -1 & \xi = \eta & = & -1 & \varphi = -\kappa & = & -1
\end{array}$$

etc.

§. 52. Coefficientes ergo feriei p, quae ex euolutione huius producti:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{16})(1-x^{32}) \text{ etc.}$$

nafcitur omnes funt vel $+1$ vel -1, neque tamen legem obtinent folito more affignabilem, erit enim:

$$p = 1 - x^1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - x^7 - x^8 + x^9 + x^{10} - x^{11} + x^{12} - x^{13} - x^{14}$$
$$+ x^{15} - x^{16} + x^{17} + x^{18} - x^{19} + x^{20} - x^{21} - x^{22} + x^{23} + x^{24} - x^{25} - x^{26} + x^{27} - x^{28} + x^{29}$$
$$+ x^{30} - x^{31} - x^{32} + x^{33} + x^{34} - x^{35} + x^{36} - x^{37} - x^{38} + x^{39} + x^{40} - x^{41} - x^{42} + x^{43} - x^{4}$$

vbi notandum eft, quamlibet poteftatem exponentis imparis x^{2n+1} contrarium habere fignum ei, quod habet poteftas x^{2n}, huiusque fignum perpetuo conuenire cum figno poteftatis x^n; vnde cuiusuis poteftatis fignum facile affignabitur. Vti fi quaeratur fignum poteftatis huius x^{1745}, erit refpectu ad fola figna habito:

$$x^{1745} = -x^{1744} = -x^{872} = -x^{436} = -x^{218} = -x^{109} = +x^{108} = +x^{54} = +x^{27} = -x^{26} = -x^{13} = +x^{12} = +x^{6} = +x^{3} = -x^{2} = -x^{1}$$

fignum ergo poteftatis x^{1745} contrarium eft figno poteftatis x^1 quod cum fit $-$ erit id $+$.

Tabula

Tabula indicans, quot variis modis quilibet numerus n ex numeris 1, 2, 3, 4, - - - - m per additionem produci possit, seu exhibens valores formulae $n^{(m)}$.

Num.	Valores numeri n.																					
m.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1 2	1 2	2 3	2 3	3 4	3 4	4 5	4 5	5 6	5 6	6 7	6 7	7 8	7 8	8 9	8 9	9 10	9 10	10 11	10 11	11 12
3	1	1	2	1 3	1 4	2 5	3 7	4 8	5 10	7 12	8 14	10 16	12 19	14 21	16 24	19 27	21 30	24 33	27 37	30 40	33 44	37 48	40 52
4	1	1	2	3	1 5	1 6	2 9	3 11	5 15	6 18	9 23	11 27	15 34	18 39	23 47	27 54	34 64	39 72	47 84	54 94	64 108	72 120	84 136
5	1	1	2	3	5	1 7	1 10	2 13	3 18	5 23	7 30	10 37	13 47	18 57	23 70	30 84	37 101	47 119	57 141	70 164	84 192	101 221	119 255
6	1	1	2	3	5	7	1 11	1 14	2 20	3 26	5 35	7 44	11 58	14 71	20 90	26 110	35 136	44 163	58 199	71 235	90 282	110 331	136 391
7	1	1	2	3	5	7	11	1 15	1 21	2 28	3 38	5 49	7 65	11 82	15 105	21 131	28 164	38 201	49 248	65 300	82 364	105 436	131 522
8	1	1	2	3	5	7	11	15	1 22	1 29	2 40	3 52	5 70	7 89	11 116	15 146	22 186	29 230	40 288	52 352	70 434	89 525	116 638
9	1	1	2	3	5	7	11	15	22	1 30	1 41	2 54	3 73	5 94	7 123	11 157	15 201	22 252	30 318	41 393	54 488	73 598	94 732
10	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	1 42	1 55	2 75	3 97	5 128	7 164	11 212	15 267	22 340	30 423	42 530	55 653	75 807
11	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	1 56	1 76	2 99	3 131	5 169	7 219	11 278	15 355	22 445	30 560	42 695	56 863
12	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	1 77	1 100	2 133	3 172	5 224	7 285	11 366	15 460	22 582	30 725	42 905
13	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	1 101	1 134	2 174	3 227	5 290	7 373	11 471	15 597	22 747	30 935
14	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	1 135	1 175	2 229	3 293	5 378	7 478	11 608	15 762	22 957
15	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	1 176	1 230	2 295	3 381	5 483	7 615	11 773	15 972
16	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	1 231	1 296	2 383	3 486	5 620	7 780	11 983
17	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	1 297	1 384	2 488	3 623	5 785	7 990
18	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	1 385	1 489	2 625	3 788	5 995
19	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	1 490	1 626	2 790	3 998
20	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	1 627	1 791	2 1000
∞	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	1 792	2 1002

m.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17
2	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18
	44	48	52	56	61	65	70	75	80	85	91	96
3	56	61	65	70	75	80	85	91	96	102	108	114
	94	108	120	136	150	169	185	206	225	249	270	297
4	150	169	185	206	225	249	270	297	321	351	378	411
	141	164	192	221	255	291	333	377	427	480	540	603
5	291	333	377	427	480	540	603	674	748	831	918	1014
	163	199	235	282	331	391	454	532	612	709	811	931
6	454	532	612	709	811	931	1057	1206	1360	1540	1729	1945
	164	201	248	300	364	436	522	618	733	860	1009	1175
7	618	733	860	1009	1175	1367	1579	1824	2093	2400	2738	3120
	146	186	230	288	352	434	525	638	764	919	1090	1297
8	764	919	1090	1297	1527	1801	2104	2462	2857	3319	3828	4417
	123	157	201	252	318	393	488	598	732	887	1076	1291
9	887	1076	1291	1549	1845	2194	2592	3060	3589	4206	4904	5705
	97	128	164	212	267	340	423	530	653	807	984	1204
10	984	1204	1455	1761	2112	2534	3015	3590	4242	5013	5888	6912
	76	99	131	169	219	278	355	445	560	695	863	1060
11	1060	1303	1586	1930	2331	2812	3370	4035	4802	5708	6751	7972
	56	77	100	133	172	224	285	366	460	582	725	905
12	1116	1380	1686	2063	2503	3036	3655	4401	5262	6290	7476	8877
	42	56	77	101	134	174	227	290	373	471	597	747
13	1158	1436	1763	2164	2637	3210	3882	4691	5635	6761	8073	9624
	30	42	56	77	101	135	175	229	293	378	478	608
14	1188	1478	1819	2241	2738	3345	4057	4920	5928	7139	8551	10232
	22	30	42	56	77	101	135	176	230	295	381	483
15	1210	1508	1861	2297	2815	3446	4192	5096	6158	7434	8932	10715
	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	296	383
16	1225	1530	1891	2339	2871	3523	4293	5231	6334	7665	9228	11098
	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297
17	1236	1545	1913	2369	2913	3579	4370	5332	6469	7841	9459	11395
	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231
18	1243	1556	1928	2391	2943	3621	4426	5409	6570	7976	9635	11626
	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176
19	1248	1563	1939	2406	2965	3651	4468	5465	6647	8077	9770	11802
	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135
20	1251	1568	1946	2417	2980	3673	4498	5507	6703	8154	9871	11937
	4	7	12	19	30	45	67	97	139	195	272	373
∞	1255	1575	1958	2436	3010	3718	4565	5604	6842	8349	10143	12310

m. 35

m	35	36	37	38	39	40	41	42	43
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	17	18	18	19	19	20	20	21	21
2	18	19	19	20	20	21	21	22	22
	102	108	114	120	127	133	140	147	154
3	120	127	133	140	147	154	161	169	176
	321	351	378	411	441	478	511	551	588
4	441	478	511	551	588	632	672	720	764
	678	748	831	918	1014	1115	1226	1342	1469
5	1115	1226	1342	1469	1602	1747	1898	2062	2233
	1057	1206	1360	1540	1729	1945	2172	2432	2702
6	2172	2412	2702	3009	3331	3692	4070	4494	4935
	1367	1579	1824	2093	2400	2738	3120	3539	4011
7	3539	4011	4526	5102	5731	6430	7190	8033	8946
	1527	1801	2104	2462	2857	3319	3828	4417	5066
8	5066	5812	6630	7564	8588	9749	1108	12450	14012
	1549	1845	2194	2592	3060	3589	4206	4904	5708
9	6615	7657	8824	10156	11648	13338	15224	17354	19720
	1455	1761	2112	2534	3015	3590	4242	5013	5888
10	8070	9418	10936	12690	1466	6928	19466	22367	25608
	1303	1586	1930	2331	2812	3379	4035	4802	5708
11	9373	11004	12866	15021	17475	20298	23501	27169	31316
	1116	1380	1686	2063	2503	3036	3655	4401	5262
12	10489	12384	14552	17084	19978	23334	27156	31570	36578
	935	1158	1436	1763	2164	2637	3210	3882	4691
13	11424	13542	15988	18847	22142	25971	30366	35452	41269
	762	957	1188	1478	1819	2241	2738	3345	4057
14	12186	14499	17176	20325	23961	28212	33104	38797	45326
	615	773	972	1210	1508	1861	2297	2815	3446
15	12801	15272	18148	21535	25469	30073	35401	41612	48772
	486	620	780	983	1225	1530	1891	2339	2871
16	13287	15892	18928	22518	26694	31603	37292	43951	51643
	384	488	623	785	990	1236	1545	1913	2369
17	13671	16380	19551	23303	27684	32839	38837	45464	54012
	297	385	489	625	788	995	1243	1556	1928
18	13968	16765	20040	23928	28472	33834	40080	47420	55940
	231	297	385	490	626	790	998	1248	1563
19	14199	17062	20425	24412	29092	34624	41078	48668	57503
	176	231	297	385	490	627	791	1000	1251
20	14375	17293	20722	24803	29588	35251	41869	49668	58754
	508	684	915	1212	1597	2087	2714	3506	4507
∞	14883	17977	21637	26015	31185	37338	44583	53174	63261

M. 44

m	44	45	46	47	48	49	50	51
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	22	22	23	23	24	24	25	25
	23	23	24	24	25	25	26	26
3	161	169	176	184	192	200	208	217
	185	192	200	208	217	225	234	243
4	632	672	720	764	816	864	920	972
	816	864	920	972	1033	1089	1154	1215
5	1602	1747	1898	2062	2233	2418	2611	2818
	2418	2611	2818	3034	3266	3507	3765	4033
6	3009	3331	3692	4070	4494	4935	5427	5942
	5427	5942	6510	7104	7760	8442	9192	9975
7	4526	5102	5731	6430	7190	8033	8940	9953
	9953	11044	12241	13434	14950	16475	18134	19928
8	5812	6630	7564	8558	9749	11018	12450	14012
	15765	17670	19805	22122	24699	27493	30588	33640
9	6615	7657	8824	10156	11648	13338	15224	17354
	22238	25331	28629	32278	36347	40831	45812	51294
10	6912	8070	9418	10936	12690	14663	16928	19466
	29292	33401	38047	43214	49037	55494	62740	70760
11	6751	7972	9373	11004	12866	15021	17475	20298
	36043	41373	47420	54218	619[illegible]3	70515	80215	91058
12	6292	7176	8577	10489	12354	14552	17084	19978
	42333	48549	56297	647[illegible]7	74257	85[illegible]67	97299	111036
13	5635	6761	8073	9624	11424	13542	15988	18547
	47968	55610	64370	74331	85711	98609	113287	129883
14	4920	5925	7139	8551	10232	12186	14409	17176
	52958	61538	71509	82882	95943	11[illegible]795	12[illegible]6	147059
15	4192	5096	6158	7434	8932	10715	12[illegible]1	15272
	55[illegible]8	66634	77667	90316	1[illegible]4575	121510	140587	162331
16	3523	4293	5231	6334	7665	9228	11098	13287
	60[illegible]	7[illegible]927	82898	96650	112540	130738	151688	175618
17	2913	3579	4370	5332	6469	7811	9459	11395
	63516	7[illegible]6	87268	[illegible]1982	119009	138579	161144	187013
18	[illegible]391	2943	3621	4426	5409	6570	7976	9635
	65[illegible]	[illegible]149	9[illegible]89	106408	124418	145149	169120	196648
19	1939	24[illegible]6	2965	3651	4468	5465	6647	8077
	67546	70555	93554	11[illegible]59	128886	150614	17[illegible]767	20[illegible]725
20	1565	1946	2417	2980	3673	4498	5507	6703
	69414	818[illegible]1	96271	113039	132559	155112	181274	211528
	5701	7333	9257	11715	14714	18413	22952	28515
∞	75175	89134	1[illegible]5555	124754	147273	173525	204226	239943

m. 52

m	52	53	54	55	56	57	58	59
1	1	1	1	1	1	1	1	1
	26	26	27	27	28	28	29	29
2	27	27	28	28	29	29	30	30
	225	234	243	252	261	271	280	290
3	252	261	271	280	290	300	310	320
	1033	1089	1154	1215	1285	1350	1425	1495
4	1285	1350	1425	1495	1575	1650	1735	1815
	3034	3266	3507	3765	4033	4319	4616	4932
5	4319	4616	4932	5260	5608	5969	6351	6747
	6510	7104	7760	8442	9192	9975	10829	11720
6	10829	11720	12692	13702	14800	15944	17180	18467
	11044	12241	13534	14950	16475	18138	19928	21873
7	21873	23961	26226	28652	31275	34082	37108	40340
	15765	17674	19805	22122	24699	27493	30588	33940
8	37638	41635	46031	50774	55974	61575	67696	74280
	19720	22380	25331	28629	32278	36347	40831	45812
9	57358	64015	71362	79403	88252	97922	108527	120092
	22367	25608	29292	33401	38047	43214	49037	55494
10	79725	89623	100654	112804	126299	141136	157564	175586
	23501	27169	31316	36043	41373	47420	54218	61903
11	103226	116792	131970	148847	167672	188556	211782	237489
	23334	27156	31570	36578	42333	48849	56297	64707
12	126560	143948	163540	185425	210005	237405	268079	302196
	22142	25971	30366	35452	41269	47968	55610	64370
13	148702	169919	193906	220877	251274	285373	323689	366566
	20325	23961	28212	33104	38797	45326	52888	61538
14	169027	193880	222118	253981	290071	330699	376577	[illegible]28104
	18148	21535	25469	30073	35401	41612	48772	57080
15	187175	215415	247587	284054	325472	372311	425349	485184
	15892	18928	22518	26694	3160[illegible]	37292	43951	51643
16	203067	234343	270105	310748	357075	[illegible]9603	469300	536827
	13671	16380	19551	23303	27684	32839	38837	45864
17	216738	250723	289656	334051	384759	442442	508137	582691
	11626	13968	16765	20040	23928	28472	33834	40080
18	228364	264691	306421	354091	408687	470914	541971	622771
	9770	11802	14199	17062	20425	24418	29098	34624
19	238134	276493	320620	371153	429112	495332	571069	657395
	8154	9871	11937	14375	17293	20722	24803	29588
20	246288	286364	332557	385528	446405	516054	595872	686983
	35301	43567	53598	65748	80418	98100	119348	144837
∞	281589	329931	386155	451276	526823	614154	715220	831820

MEDITATIONES
DE
QVANTITATIBVS IMAGINARIIS CONSTRVENDIS
ET
RADICIBVS IMAGINARIIS EXHIBENDIS.

AVCTORE
HENRICO KUEHNIO.

§. 1.

Tab. I. In *Commercio Mathematico Petropolitano Anni* 1736, occasione Problematis a *Cel. Eulero* mihi propositi de inueniendo Cubo numeri $-1+\sqrt{-3}$, (quorum vterque est $=8$) cum quantitatibus scilicet imaginariis affecti, praeter genuinam rationis definitionem, dedi quoque veras notiones quantitatum homogenearum, item positiuarum primitiuarum, et praeterea definitiones geneticas quantitatum deriuatiuarum, tam nihilo aequalium, quam priuatiuarum, et positiuarum deriuatiuarum, easque omnes inter se homogeneas, reales, et assignabiles esse ostendi. At vero quantitatum, quas *imaginarias* appellare solemus, definitionem geneticam tum temporis nondum habui, consequenter nec modum ostendere potui, quo quantitates imaginariae essent exhibendae, etsi iam tum temporis, contra doctrinam receptam, affirmaueram, has ipsis non esse impossibiles, sed, aeque vt ceteras quantitates deriuatiuas, omnino reales esse et assignabiles.

§. 2. Ad hunc defectum, quantum possim, supplendum pertinent ea, quae haud pridem de constructione quantitatum imaginariarum meditatus sum. Has ipsas meditationes Iudicio *Illustris Academiae Scientiarum Imperialis* permitto, sperans, me hoc Tentamine occasionem suppe-

suppeditatuum Analystis perspicacioribus, ad doctrinam quantitatum imaginariarum, quae hactenus tantis tenebris inuoluta fuit, et latius et profundius pertractandam.

§. 3. Sint nimirum (*Fig.* 1.) quatuor rectangula α, β, γ, et δ, ad idem punctum P coniugata, quorum omnium latera et areae, ob homogeneitatem conseruandam, aestimanda sint ex lateribus et area rectanguli α, cuius nempe longitudo PQ est positiua ($= + a$), et latitudo PR ($= + b$) itidem positiua, adeoque recti α area $= + a \,.\, + b = + ab$. Iam producantur PQ et PR in q et r, donec sit Pq = PQ $= a$, et Pr = PR $= b$: notum est, rectas deriuatiuas Pq et Pr ita exprimendas esse, vt dicatur Pq = − PQ $= - a$, et Pr = − PR $= - b$. Rectangulum itaque γ, ipsi recto α oppositum, h. e. ipsi α, quoad longitudinem et latitudinem simul, deinceps positum, habebit longitudinem priuatiuam Pq ($= - a$), et latitudinem priuatiuam Pr ($= - b$), eritque area recti γ = Pq . Pr $= - a \,.\, - b = + ab$, vel $= + ba$, vt rectum γ ($= + ba$) ab altero α ($= + ab$) discerni possit. Et hactenus nota sunt omnia. Similiter rectum β, ipsi α, quoad latitudinem solam PR, deinceps positum, habebit longitudinem positiuam PQ ($= + a$), sed latitudinem priuatiuam Pr ($= - b$), eritque adeo area recti $\beta = + a \,.\, - b = - ab$, vel vt latitudo deinceps posita ($= - b$) simul exprimatur $= - ba$. Eodem modo rectum δ, ipsi α, quoad longitudinem solam PQ, deinceps positum, habebit latitudinem positiuam PR ($= + b$), sed longitudinem priuatiuam Pq ($= - a$), eritque adeo area recti $\delta = - ab$, vbi expressio $- ab$ alteri $- ab$ praeferenda videtur, ad latus deinceps positum ($- a$) simul exprimendum.

§. 4. Quod si ergo, ex area □li positiui primitiui $\alpha = + ab$, area □li positiui deriuatiui $+ ba$ exhibenda est, nulla alia re opus est, nisi vt longitudo et latitudo positiua P Q et P R vltra punctum concursus P producatur in q et r, factaque $Pq = PQ$, et $Pr = PR$, construatur □lum γ, cuius area $= Pq . Pr = -a . -b = +ba$. Eodem modo patet, si ex □lo $\alpha (= + ab)$, construendum fuerit □lum cuius area $= -ab$, opus esse, vt longitudo positiua P Q sola vltra eius originem P retrorsum producatur in q, donec sit $Pq = PQ$, construaturque □lum δ, cuius area $= Pq . PR = -a . +b = -ab$. Tandem, si ex □lo $\alpha (= + ab)$, construendum fuerit □lum cuius area $= -ba$, necesse est, vt, latitudine positiua PR sola vltra eius originem P retrorsum producta in r, donec sit $Pr = PR$, construatur □lum β, cuius area $= Pr . PQ = -b . +a = -ba$.

§. 5. Iam ponatur in α, latitudo PR = longitudini P Q, seu $b = a$; quatuor ista □la α, β, γ, δ, abibunt in totidem quadrata α, β, γ et δ ad idem punctum P coniugata, quorum primum α habet longitudinem et latitudinem positiuam, adeoque eius area $= PQ . PR = +a . +a = +a^2$, eiusque latus PQ vel PR (seu, accuratius loquendo, radix areae quadratae) recte exprimitur per $\sqrt{+a^2} = \sqrt{[+a . +a]} = +a$. Secundum □tum β habet latitudinem priuatiuam $Pr = -a$, et longitudinem positiuam $PQ = +a$, adeoque eius area $= Pr . PQ = -a . +a = -a^2$, eiusque latus seu radix, cum nec per solam $PQ (= +a)$, nec per solam $Pr (= -a)$ exprimi possit, sed vtriusque dimensionis simul ratio habenda sit, recte exprimitur per $\sqrt{[Pr . PQ]} = \sqrt{[-PR . PQ]}$

$= \sqrt{}$

$= \sqrt{[-a.+a]}$, seu, breuitatis gratia, per $+\sqrt{-a^2}$. Tertium □tum γ habet longitudinem et latitudinem priuatiuam, adeoque eius area $= Pq.Pr = -a.-a = +a^2$, eiusque latus seu radix Pq vel Pr recte exprimitur per $\sqrt{[-a.-a]}$, seu per $-a$. Quartum denique □tum δ habet longitudinem priuatiuam $Pq = -a$, et latitudinem positiuam $PR = +a$, adeoque eius area $= Pq.PR = -a.+a = -a^2$, latus autem seu radix, cum nec per solam $Pq (= -PQ = -a)$, nec per solam $PR (= +a)$ exprimi possit, vtriusque dimensionis rationem simul habendo, exprimenda erit per $\sqrt{[Pq.PR]} = \sqrt{[-PQ.PR]} = -\sqrt{[-a.+a]}$, seu per $-\sqrt{-a^2}$. Nimirum signo radicali signum $-$ praefigitur, ob □ta β et δ inter se opposita. Atque sic □torum β et δ latera seu radices sunt quantitates imaginariae, et nihilo minus assignabiles. Quadrato enim β aut δ, ipsi □to α deinceps posito, assignato seu constructo, simul latera eorundem assignata sunt.

§. 6. Vnde etiam patet, si calculus deducat ad aequationem $x^2 = -a^2$, seu ad $x^2 + a^2 = 0$, eam aequationem non esse diuisibilem, nec per $x - a = 0$, nec per $x + a = 0$; sed per $x + a\sqrt{-a^2} = 0$, item per $x - \sqrt{-a^2} = 0$. Est enim $\dfrac{x^2 * + a^2 = 0}{x + \sqrt{-a^2} = 0} = x - \sqrt{-a^2} = 0$, et $\dfrac{x^2 * + a^2 = 0}{x - \sqrt{-a^2} = 0} = x + \sqrt{-a^2} = 0$, ita vt □ti β latus, seu, accuratius loquendo, radix diffiniatur per aequationem $x - \sqrt{-a^2} = 0$, seu $x = +\sqrt{-a^2}$, □ti autem δ latus per $x + \sqrt{-a^2} = 0$, seu $x = -\sqrt{-a^2}$, cum aequatio proposita $x^2 * + a^2 = 0$, simul definiat

 □tum

□tum β, et □tum δ. Hicce processus aequationem quadraticam puram resoluendi et construendi plane similis est processui ordinario in casu α et γ, quorum quadratorum vtrumque, seu x^2, cum sit $= + a^2$, aequatio $x^2 * - a^2 = 0$, vtrumque casum simul complectitur, et diuisibilis est tam per $x - a = 0$, quam per $x + a = 0$. Est enim $\frac{x^2 * - a^2 = 0}{x - a = 0} = + a = 0$; idem $\frac{x^2 * - a^2 = 0}{x + a = 0} = x - a = 0$, vbi latus □ti α definitur per aequationem $x - a = 0$, seu $x = + a$, et latus □ti γ per $x + a = 0$, seu $x = - a$: aut similitudo operationis clarius dispalescat, reperietur esse $\frac{x^2 * - a^2 = 0}{x - \sqrt{+ a^2} = 0} = x + \sqrt{+ a^2} = 0$, seu $x + a = 0$, item $\frac{x^2 * - a^2 = 0}{x + \sqrt{+ a^2}} = x - \sqrt{+ a^2} = 0$, seu $x - a = 0$, quarum expressionum illa, $x \mp \sqrt{+ a^2} = 0$, propria atque genuina videtur, altera autem, $x \mp a = 0$, saltem impropria, et non nisi toleranter vera.

§. 7. Quoniam quadratum priuatiuum $= - a^2$, eiusque latus seu radix, siue ponatur $+ \sqrt{- a^2}$, siue $- \sqrt{- a^2}$, haberi solet pro quantitate imaginaria, et (quod idem valere creditur) pro impossibili, adeoque pro non reali, aut inassignabili; operae pretium videtur, vt contrarium
Fig. 2. Geometrice ostendam. Sint nimirum (*Fig.* 2.) quatuor quadrata α, β, γ, δ, ad idem punctum P coniugata, eaque, absolute considerata, inter se aequalia, sed tamen, quoad aream et latera, pro diuerso quadratorum situ, diuersimode exprimenda. Quod attinet aream □ti α, tanquam positiui primitiui considerati, notum est ex *Elementis Geometriae*, eius aream inueniri inferendo:

I.

I. $\left\{ \begin{array}{l} {}^{F}_{P}\square^{G}_{H} : {}^{F}_{P}\square^{I}_{Q} \\ \text{seu } PH : PQ \end{array} \right\} = {}^{R}_{P}\square^{K}_{H} : {}^{R}_{P}\boxed{\alpha}^{S}_{Q}$

e. g. 1 : 3 = 3 □tula PFGH : 9 □tula PFGH, pro area □ti α;
vt adeo sit area $\alpha = +9$, qualium □tulum PFGH, pro mensura omnium quadratorum in P coniugatorum assumtum, est 1.

II. Pro area □ti β ita inferendum:

1) $PF : Fr = {}^{F}_{P}\square^{I}_{Q} : {}^{F}_{r}\square^{I}_{\mathfrak{S}}$

2) $PF : [PF - Fr] = {}^{F}_{P}\square^{I}_{Q} : \left[{}^{F}_{P}\square^{I}_{Q} - {}^{F}_{r}\square^{I}_{\mathfrak{S}}\right]$ seu aream β

h. e. 1 : (1 − 4) = 3 □tula PFGH : [3 □tula − 4 . 3 □tula]

seu $1 : -3 = 3 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H} : -9 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H}$

Est ergo area □ti $\beta = -3 \cdot 3 = -9$, qualium est ${}^{F}_{P}\square^{G}_{H} = +1$.

III. Pro area □ti δ inferendum erit:

1) $PH : Hq = {}^{R}_{P}\square^{K}_{H} : {}^{\int}_{q}\square^{K}_{H}$

2) $PH : [PH - Hq] = {}^{R}_{P}\square^{K}_{H} : \left[{}^{R}_{P}\square^{K}_{H} - {}^{\int}_{q}\square^{K}_{H}\right]$ seu aream δ

h. e. 1 : (1 − 4) = 3 □tula PFGH : (3 □tula − 4 . 3 □tula)

seu $1 : -3 = 3 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H} : -9 \cdot {}^{F}_{P}\square^{G}_{H}$

Est ergo area □ti $\delta = -9$, qualium est ${}^{F}_{P}\square^{G}_{H} = +1$.

IV.

IV. Denique pro area □ti γ ita inferendum:

1) $PQ : PH = {}^{P}_{r}\boxed{\substack{\text{area}\\ \beta}}{}^{Q}_{\mathfrak{S}} : {}^{P}_{r}\square^{H}_{L}$; h. e. $3 : 1 = -9, {}^{F}_{p}\square^{G}_{H} : -\frac{9}{3}$ ſeu $-3\cdot{}^{F}_{p}\square^{G}_{H}$ (*p* n. II

2) $PH : Hq = {}^{P}_{r}\square^{H}_{L} : {}^{q}_{s}\square^{H}_{L}$

adeoque $PH : [PH - Hq] = {}^{P}_{r}\square^{H}_{L} : \left[{}^{P}_{r}\square^{H}_{L} - {}^{q}_{s}\square^{H}_{L}\right]$ ſeu aream γ

h. e. $1 : (1-4) = -3\cdot{}^{F}_{p}\square^{G}_{H} : \left[-3\cdot{}^{F}_{p}\square^{G}_{H} - 4\cdot\left(-3\cdot{}^{F}_{p}\square^{G}_{H}\right)\right]$

ſeu $1 : -3 = -3 : [-3-4\cdot(-3)]$ ſeu $(-3+12=+$

Eſt ergo area □ti $\gamma = +9$, qualium eſt ${}^{F}_{p}\square^{G}_{H} = +1$.

Tandem areis □torum α, β, γ et δ ad idem punctum P coniugatorum inuentis, latus quoque cuiuslibet facile exprimi poteſt, modo notetur, per latus quadrati in hoc negotio perpetuo radicem quadratam areae quadratae intelligendum eſſe. Eſt namque

Latus □ti $\alpha = \sqrt{[PQ.PR]} = +\sqrt{[+3.+3]} = +\sqrt{+9} = +3$.

Latus □ti $\gamma = \sqrt{[Pq.Pr]} = \sqrt{[-PQ.-PR]} = -\sqrt{[-3.-3]} = -\sqrt{+9} = -3$, formulae $\sqrt{[-3.-3]}$ praefigitur ſignum $-$, ad ſitum quadrator γ et α oppoſitum ſignificandum.

Latus □ti $\beta = \sqrt{[PQ.Pr]} = \sqrt{[PQ.-PR]} = +\sqrt{[+3.-3]} = +\sqrt{-9}$.

Latus □ti $\delta = \sqrt{[PR.Pq]} = \sqrt{[PR.-PQ]} = -\sqrt{[+3.-3]} = -\sqrt{-9}$, pro ſ ſcilicet □ti δ, ipſi β oppoſito, ſignificando.

§. 8. Hic ſatis ſpecioſe obiici poteſt, eiusmodi radices $x = \pm\sqrt{-a^2}$, e. g. $= \pm\sqrt{-9}$, eſſe mere imaginarias, impoſſibiles, et inaſſignabiles, propterea quod ex $-a^2$ nullo modo radix quadrata extrahi poſſit: nec enim

enim eam esse $=-a$, nec $=+a$, cum $-a.-a$, item $+a.+a$ det quadratum positiuum $=+a^2$, atque adeo omnia quadrata realia, aut assignabilia, esse positiua. At non difficilis ad ista est responsio. Praeterquam enim quod calculus ex datis possibilibus aut realibus profectus, et axiomatibus indubiis conuenienter tractatus, nullo modo ad impossibilia, ad non realia aut inassignabilia deducere possit, minus recte etiam supponi videtur, omnia quadrata realia esse positiua. Hoc tum demum verum foret, si ad vnum idemque punctum P duo saltem □ta coniugari possent, qualia sunt □ta α et γ, latitudinem scilicet et longitudinem oppositam habentia: constat enim ex §. V. praeter haec duo, etiam duo alia □ta, β et δ, possibilia esse et assignabilia, quae nempe sunt ipsis α et γ, deinceps posita, latitudinis scilicet priuatiuae et longitudinis positiuae, aut contra, longitudinis priuatiuae et latitudinis positiuae. Proinde si construendum fuerit □tum negatiuum, e. g. $=-9$, eiusque radix $=\mp\sqrt{-9}$, primo construendum erit □tum positiuum $\alpha=+9$, cuius radix quadrata $=\sqrt{+9}=+3$. Quo facto, aut huius latitudo positiua PR sola, $=+3$, sumatur in parte opposita, nempe $Pr=-3$, aut longitudo positiua PQ sola, $=+3$, sumatur in parte opposita, nempe $Pq=-3$, et ex positione datis PQ et Pr, aut Pq et PR, compleantur □ta deinceps posita β et δ: erit (per demonstr. in §. VII.) area □ti $\beta=-9$, et area □ti $\delta=-9$, tandemque, si □ti β radix x dicatur $=+\sqrt{-9}$, alterius δ radix x dicenda erit $=-\sqrt{-9}$, cum □ta β et δ aeque inter se opposita sint, vti reliqua duo α et γ, sitque et $+\sqrt{-9}.+\sqrt{-9}=-9$, et simili-

 ter

ter $-\sqrt{-9}.-\sqrt{-9}=-9$. Ceterum eiusmodi quantitas imaginaria $\sqrt{-a^2}$; cum ſit $=\sqrt{[+a.-a]}$, intelligibilis euadit per radicem □ti deinceps poſiti, h. e. per $\sqrt{[+a.+a]}$, vel per $\sqrt{[-a.-a]}$. Vbique enim longitudo $\pm a$ aequalis eſt latitudini $\mp a$, niſi quod illic harum alterutra concipienda ſit poſitione, quae datae opponitur.

§. 9. Hactenus de conſtruendis aequationibus quadraticis puris, ſeu incompletis, per omnes 4 caſus poſſibiles α, β, γ et δ. Reſtat vt nunc dicam de conſtructione aequationis quadraticae completae, ſeu affectae
Fig. 3. $x^2-px+q=0$. Sit nimirum (*Fig.* 3.) duarum quantitatum ſumma $=\mathrm{PL}=\mathrm{PM}=p$, ſemiſumma $=\mathrm{PA}=\mathrm{PE}=\frac{1}{2}p$, ſemidifferentia $=\mathrm{AK}=\mathrm{AR}=\mathrm{EI}=\mathrm{QE}=\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$; erit duarum quantitatum maior, ſeu duarum radicum aequationis

$$\text{mai. } x=\left\{\begin{matrix}\mathrm{PK}=\mathrm{PA}+\mathrm{AK}\\ \mathrm{PI}=\mathrm{PE}+\mathrm{EI}\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}p+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2-q)};\ \text{min } x=\left\{\begin{matrix}\mathrm{PR}=\mathrm{PA}-\mathrm{AR}\\ \mathrm{PQ}=\mathrm{PE}\ \mathrm{QE}\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}p-\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}.$$

Eſt enim in Caſu primo

$$\left.\begin{array}{l} x^2=\frac{1}{4}p^2-q+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\\ -px=-\frac{1}{2}p^2-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\\ +q=\qquad +q\end{array}\right\}=0.$$

Item in Caſu ſecundo

$$\left.\begin{array}{l} x^2=\frac{1}{4}p^2-q-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\\ -px=-\frac{1}{2}p^2\ +p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\\ +q=\ +q\end{array}\right\}=0.$$

Haec igitur aequatio $x^2-px+q=0$, vtrumque caſum, et $x=\mathrm{PK}=\mathrm{PI}$, et $x=\mathrm{PR}=\mathrm{PQ}$, ſimul complectitur, horumque quadratorum x^2 vtrumlibet, ſiue PKTI, ſiue PRVQ, repraeſentat □tum aliquod poſitiuum primitiuum
Fig. 1. 2. α ex *Fig.* 1. et 2.

Fig. 3. §. 10. Iam (*Fig.* 3.) producantur PK et PI in k et i, factisque $\mathrm{P}k=\mathrm{PK}$, $\mathrm{P}a=\mathrm{PA}$, $\mathrm{P}r=\mathrm{PR}$, item $\mathrm{P}i=\mathrm{PI}$, $\mathrm{P}e=\mathrm{PE}$, $\mathrm{P}q=\mathrm{PQ}$, conſtruantur duo diuerſa □ta γ, nempe $\mathrm{P}kti$ et $\mathrm{P}rvq$, quorum illud erit $=\mathrm{P}i.\mathrm{P}k=\mathrm{PI}.-\mathrm{PK}=-x.-x=x^2$, hoc autem $=\mathrm{P}q$.

P r

$Pr = -PQ.-PR = -x.-x = x^2$: erit radicum maior $= -x = Pk = Pi = -PK = -PI = -\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$; radicum autem minor $= -x = Pr = Pq = -PR = -PQ = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ adeoque summa radicum $= -p$, et haec contrario signo affecta $= +p$. Est ergo

In casu primo

$$\left.\begin{array}{l} -x.-x = x^2 = \frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ +p.-x = px = -\frac{1}{2}p^2 \quad - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ \qquad +q = +q \end{array}\right\} = 0.$$

In casu secundo

$$\left.\begin{array}{l} -x.-x = x^2 = \frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ +p.-x = -px = -\frac{1}{2}p^2 + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} \\ \qquad +q = +q \end{array}\right\} = 0.$$

Aequatio igitur $(-x)^2 + p.(-x) + q$, seu $x^2 - px + q = 0$, in □to γ vtrumque casum, et $-x = Pk = Pi$, et $-x = Pr = Pq$, simul complectitur, estque in γ et □tum $Pkti$, et □tum $Prvq$, quadratum positiuum deriuatiuum = areae □ti α.

§. 11. *Vlterius* (*Fig.* 3.) ex PI et Pk, item PQ et Pr positione datis compleatur vtrumque □tum β, nempe kI et rQ. Quoniam area β est ipsi areae α deinceps posita, estque aequatio pro α, $x^2 - px + q = 0$; aequatio pro β reuera erit $-[x^2 - px + q] = 0$, seu $-x^2 + px - q = 0$. Quoniam tamen in calculo aequationum ex more *Harriotti* instituto etiam area β tractari solet vt □tum aliquod $+x^2$, manifestam scilicet quadrati formam habens (nullam, credo, aliam ob rationem, quam quod area quadrata $-x^2$ *Harriotto* impossibilis visa fuerit); in isthac hypothesi aequatio pro β ita inuestiganda videtur. Est namque *area maioris* □*ti* $\beta = PI.Pk = PI.-PK$, h. e. $= [\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}].-[\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]$. Proinde si huius areae quadratae β latus seu radix dicatur x, erit Fig. 3.

$$x^2 = -[\tfrac14 p^2 + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} + \tfrac14 p^2 - q] = -\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}$$

eiusque radix $x = \sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}$

Quare cum sit *area minoris* □ti $\beta = PQ.Pr = PQ.-PR = [\tfrac12 p - \sqrt{(\,..)}].-[\tfrac12 p - \sqrt{(\,..)}]$

erit $x^2 = -[\tfrac14 p^2 - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} + \tfrac14 p^2 - q] = -\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}$

huius radix $x = \sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}$

adeoque summa radicum $= \sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}$, quae si, breuitatis gratia, dicatur π, erit summa radicum contrario signo affecta $= -\pi = -\sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]} - \sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}$.

Hinc aequatio pro □to maiore β

$$\begin{aligned} x^2 &= -\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} \\ -\pi x &= \left[-\sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]} - \sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}\right].\sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]} \\ +q &= +q \end{aligned}$$

hoc est,

$$\begin{aligned} x^2 &= -\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} \\ -\pi x &= -[-\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}] - \sqrt{[(-\tfrac12 p^2 + q)^2 - p^2(\tfrac14 p^2 - q)]} \\ +q &= +q \end{aligned}$$

h. e.

$$\begin{aligned} x^2 &= -\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} \\ -\pi x &= +\tfrac12 p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} \left\{\begin{matrix} -\sqrt{[\tfrac14 p^4 - p^2 q + q^2 - \tfrac14 p^4 + p^2 q]} \\ \text{seu } -q \end{matrix}\right\} \\ +q &= +q \end{aligned}$$

adeoque $x^2 - \pi x + q = -\tfrac12 p^2 + \tfrac12 p^2 = 2q - 2q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} = 0$

Atque sic res eodem redit, ac si, pro area maiore β, loco aequationis définientis $x^2 - \pi x + q = 0$, adhibita fuisset aequatio definiens $-x^2 + px - q = 0$. Est enim

$$\left.\begin{aligned} -x^2 &= -\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} \\ +px &= -p.-x = -p.-[\tfrac12 p + \sqrt{(\,...\,)}] = +\tfrac12 p^2 + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} \\ -q &= \quad = -q \end{aligned}\right\} \text{add.}$$

$$\ldots \quad \tfrac12 p^2 - \tfrac12 p^2 + q - q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} = 0.$$

Similiter pro □to minore β erit

$x^2 =$

$$\begin{aligned}
x^2 &= -\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}\\
-\pi x &= \left[-\sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]} - \sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}\right].\sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}\\
+q &= +q
\end{aligned}$$

---

h. e. $$\begin{aligned}
x^2 &= -\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}\\
-\pi x &= -[-\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}] \left\{\begin{array}{l} -\sqrt{[(-\tfrac12 p^2 + q)^2 - p^2(\tfrac14 p^2 - q)]} \\ \text{seu } -\sqrt{(\tfrac14 p^4 - p^2 q + q^2 - \tfrac14 p^4 + p^2 q)} \\ \text{seu } -q \end{array}\right\}\\
+q &= +q
\end{aligned}$$

---

h. e. $$\left.\begin{aligned}
x^2 &= -\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}\\
-\pi x &= +\tfrac12 p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} - q\\
+q &= \quad +q
\end{aligned}\right\} = 0.$$

Proinde etiam in area minore β res eodem redit, ac si, loco aequationis definientis $x^2 - \pi x + q = 0$, adhiberetur aequatio difiniens $-x^2 + px - q = 0$. Est enim

$$\left.\begin{aligned}
-x^2 &= -\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}\\
+p\text{-}x = -px &= p.-[\tfrac12 p - \sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}] = +\tfrac12 p^2.-p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}\\
-q &= -q
\end{aligned}\right\} = 0$$

§. 12. Denique (*Fig.* 3.) pro □to δ, ipsi □to β opposito, erit □tum maius $\delta = x^2 = Pi.PK = -PI.PK = -[\tfrac12 p + \sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}][\tfrac12 p + \sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]$ Fig. 3.

$$= -[\tfrac12 p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}] = -\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]$$

eius radix $x = -\sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}$

---

item □tum minus $\delta = x^2 = Pq.PR = -PQ.PR = -[\tfrac12 p - \sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}][\tfrac12 p - \sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]$

$$= -[\tfrac12 p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}] = -\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]$$

eius radix $x = -\sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}$

---

adeoque summa radicum, quam breuitatis gratia pono $= \pi$, sed contrario signo affecta $= -\pi = +\sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}$

Est ergo pro □to maiore δ

 $x^2 =$

$$\begin{aligned}
x^2 &= -\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}\\
-\pi x &\begin{cases} = \left[\sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}\right] \cdot -\sqrt{[\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}\\ = -(-\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}] - \sqrt{[(-\tfrac12 p^2 + q)^2 - p^2(\tfrac14 p^2 - p)]}\\ = +\tfrac12 p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} - \sqrt{(\tfrac14 p^4 - p^2 q + q^2 - \tfrac14 p^4 + p^2 q)}\\ = +\tfrac12 p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} - q \end{cases}\\
+q &= \quad +q
\end{aligned}$$

---

adeoque $x^2 - \pi x + q = -\tfrac12 p^2 + \tfrac12 p^2 + 2q - 2q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} = 0$.

In $\square$to autem minore δ erit

$$\begin{aligned}
x^2 &= -\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}\\
-\pi x &\begin{cases} = \left[\sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}\right] \cdot -\sqrt{[\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}]}\\ = -[-\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}] - \sqrt{[\tfrac14 p^4 - p^2 q + q^2 - p^2(\tfrac14 p^2 - q)]}\\ = +\tfrac12 p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} - q \end{cases}\\
+q &= \quad +q
\end{aligned}$$

$x^2 - \pi x + q = \tfrac12 p^2 - \tfrac12 p^2 + 2q - 2q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} = 0$.

Quam ob rem etiam in vtraque area quadrata δ res eodem redit, ac si, loco aequationis definientis $x^2 - \pi x + q = 0$, vteremur aequatione deinceps posita $-[x^2 - px + q] = 0$, seu $-x^2 + px - q = 0$. Est enim

Pro area maiore δ

$$\left.\begin{aligned}
-x^2 &= -\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}\\
+px &= -p \cdot -x = -p \cdot -[\tfrac12 p + \sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}] = +\tfrac12 p^2 + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}\\
-q &= -q
\end{aligned}\right\} = 0$$

Pro area minore δ

$$\left.\begin{aligned}
-x^2 &= -\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}\\
+px &= -p \cdot -x = -p \cdot -[\tfrac12 p - \sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}] = +\tfrac12 p^2 - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}\\
-q &= -q
\end{aligned}\right\} = 0$$

§. 13. Quae in §. IX. X. XI. XII. de aequationibus quadraticis completis per omnes quatuor casus possibiles α, β, γ, δ exhibendis dicta sunt, commode illustrari ri possunt ope schematismi (*Fig.* 4.), vbi diuersae areae partiales ingredientes breuiter dicuntur a, b et d. Nimirum sub α est $\square$tum maius $x^2 = {}^{K}_{P}\square^{T}_{I} = a+4b+4d$; $\frac{1}{2}p\cdot x = {}^{K}_{P}\square^{\mathfrak{F}}_{E} = {}^{A}_{P}\square^{\mathfrak{D}}_{I} = a+3b+2d$; adeoque $px = 2.\,{}^{A}_{P}\square^{\mathfrak{D}}_{I} = 2a+6b+4d$; $\frac{1}{4}p^2 = {}^{A}_{P}\square^{C}_{E} = a+2b+d$; $q = {}^{K}_{P}\square^{\mathfrak{G}}_{Q} = {}^{R}_{P}\square^{\mathfrak{B}}_{I} = a+2b$, et hinc $\frac{1}{4}p^2 - q = (a+2b+d)-(a+2b) = d = {}^{\mathfrak{H}}_{V}\square^{C}_{\mathfrak{A}}$; Contra autem $\square$tum minus $x^2 = {}^{R}_{P}\square^{V}_{Q} = a$; $\frac{1}{2}p\cdot x = {}^{R}_{P}\square^{\mathfrak{A}}_{E} = {}^{A}_{P}\square^{\mathfrak{H}}_{Q} = a+b$, adeoque $px = 2.\,{}^{R}_{P}\square^{\mathfrak{A}}_{E} = 2a+2b$. Fig. 4.

Erit igitur

Pro $\square$to maiore α	Pro $\square$to minore α
$x^2 = {}^{K}_{P}\square^{T}_{I} = a+4b+4d$	$x^2 = {}^{R}_{P}\square^{V}_{Q} = a$
$-px = -2.\,{}^{P}_{A}\square^{\mathfrak{D}}_{I} = -2a-6b-4d$	$-px = -2.\,{}^{R}_{P}\square^{\mathfrak{A}}_{E} = -2a-2b$
$+q = {}^{K}_{P}\square^{\mathfrak{G}}_{Q} = a+2b$	$+q = {}^{K}_{P}\square^{\mathfrak{G}}_{Q} = a+2b$
$0 = 0 = 0$	$0 = 0 = 0$

Eaedem aequationes prodeunt pro vtroque $\square$to γ, ex inspectione Figurae facile eliciendae.

Pro $\square$to maiore β	Pro $\square$to minore β
$-x^2 = {}^{P}_{k}\square^{I}_{H} = -a-4b-4d$	$-x^2 = {}^{P}_{r}\square^{Q}_{O} = -a$
$+px = -(-px) = -2.\,{}^{P}_{a}\square^{I}_{G} = +2a+6b+4d$	$+px = -(-px) = -2.\,{}^{P}_{a}\square^{Q}_{N} = +2a+2b$
$-q = {}^{P}_{r}\square^{I}_{F} = -a-2b$	$-q = {}^{P}_{r}\square^{I}_{F} = -a-2b$
$0 = 0 = 0$	$0 = 0 = 0$

Easdem

Easdem aequationes pro vtroque $\square$to δ prodire ex inspectione Figurae manifestum est.

§. 14. Cum aequationis quadraticae affectae, et radicum respondentium dentur quatuor formae sequentes:

1) $x^2-px+q=0$; $x=+\frac{1}{2}p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$; vel $x-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=0$.
2) $x^2-px-q=0$; $x=+\frac{1}{2}p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$; vel $x-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}=0$.
3) $x^2+px+q=0$; $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$; vel $x+\frac{1}{2}p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=0$.
4) $x^2+px-q=0$; $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$; vel $x+\frac{1}{2}p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}=0$;

patet, pro aequatione generali $x^2 \mp px \mp q = 0$, radicum formam generalem esse $x = \mp \frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 \pm q)}$, seu $x = \gtrsim \frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 \gtrsim q)}$, in qua formula signum $\gtrsim$ ipsi $\frac{1}{2}p$ et q praefixum denotat signum contrarium eius, quo in aequatione nihilo aequali afficiuntur p et q. Et, cum primae et tertiae aequationis, $x^2 \mp px + q = 0$, constructionem Geometricam in §. IX. et X. iam dederim; ad naturam aequationis quadraticae plene intelligendam consultum erit, vt etiam reliquarum duarum aequationum constructiones Geometricas per omnes casus possibiles persequamur.

Tab. II. Fig. 5. §. 15. Pro construenda igitur aequatione secunda $x^2-px-q=0$, sit (*Fig.* 5.) summa duarum quantitatum $PL=PM=p$, semisumma $=PE=EL=PA=AM\frac{1}{2}p$, semidifferentia $=EI=AK=\sqrt{[\frac{1}{4}p^2-(-q)]}=\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$; erit duarum quantitatum seu radicum aequationis maior

$$x=\left\{\begin{matrix}PK=PA+AK\\ PI=PE+EI\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)},$$ adeoque $\square$tum α seu $PKTI=\frac{1}{4}p^2+q+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$. Iam producantur PI et PK retrorsum in i et k, factisque Pi et Pk $=$ PI, item P$\int$ et Pζ, EQ et AR $=$ EI, erit

P i $=$

$\left.\begin{matrix}Pi = fi + Pf = -PE-EI\\ Pk = \zeta k + P\zeta = -PA-AK\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$, adeoque □tum $Pitk =$ $[-\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]^2 = \frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$, et radicum minor x $= \left\{\begin{matrix}PQ = PE-EQ = PE-EI\\ PR = PA-AR = PA-AK\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$, consequenter huius □tum γ seu $PQVR = \frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. Est enim

□tum $mltf$ + □tum $Pfm\zeta$ $= -\frac{1}{2}p. -\frac{1}{2}p + (\frac{1}{4}p^2 + q) = \frac{1}{2}p^2 + q$

et □lum $Rbm\zeta$ + [□lum $QfbV$ + $\left\{\begin{matrix}\text{□tum } Vbmn\\ \text{seu □tum } mltf\end{matrix}\right\}$] $= 2.[-\frac{1}{2}p. -\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}] = p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.

consequenter subtrahendo habebitur $mltf + Pfm\zeta - mltf - Rbm\zeta - QfbV$ $=$ □to $PQVR = \frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$, vt ante. Erit ergo

In casu $x = PI = PK$

$$\left.\begin{array}{lll} x^2 = \frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} = PI.PK & = & \text{□tum } PITK\\ -px = -\frac{1}{2}p^2 \quad - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} = -PL.PK & = & -\text{□lum } PL\varsigma K\\ -q = \quad -q \quad = PQ.PK = -LI.L\varsigma & = & -\text{□lum } LIT\varsigma \end{array}\right\} = 0.$$

Et in casu $x = PQ = PR$ erit

$$\left.\begin{array}{lll} x^2 = \frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} = PQ.PR & = & \text{□tum } PQVR\\ -px = -\frac{1}{2}p^2 \quad + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} = Rk.QV & = & +\text{□lum } RVwk\\ -q = \quad -q \quad = PQ.PK = \text{□lum } PQ\theta K & = & -\text{□lum } PQwk \end{array}\right\} = 0.$$

§ 16, Pro construenda aequatione quarta $x^2 + px - q = 0$, sit (*Fig. 6.*) Fig. 6.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{matrix}Pi = PE + Ei\\ Pk = PA + Ak\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}\\ \left.\begin{matrix}PQ = PE - EQ = PE - Ei\\ PR = PA - AR = PA - Ak\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} \end{array}\right\} \text{summa} = -p = PL$$

adeoque factum $= Pk\ PQ = Pi\ PR = \frac{1}{4}p^2 - (\frac{1}{4}p^2 + q) = -q$

Ergo in casu $x = Pi = Pk$ erit

$$\left.\begin{array}{lll} x^2 = \frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} = Pi.Pk & = & \text{□tum } Pitk\\ +px = -\frac{1}{2}p^2 \quad - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} = -PL.Pk & = & -\text{□lum } PL\varrho k\\ -q = \quad -q \quad = PQ\ Pk = -Li.L\varrho & = & -\text{□lum } Lit\varrho \end{array}\right\} = 0.$$

 Et

Et in caſu $x = PQ = PR$ erit

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = \tfrac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} = PQ.PR \qquad\qquad = \Box\text{tum } PQVR \\ +px = -\tfrac{1}{2}p^2 \quad + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} = -PL.PR = QI.QV = \Box\text{lum } QIGV \\ -q = \quad -q \qquad\qquad\qquad\qquad = Pi.PR = PI.PR = -\Box\text{lum } PIGR \end{array}\right\} = 0$$

§. 17. Nunc conſtruamus aequationis ſecundae $x^2 - px - q = 0$, deinceps poſitam $-[x^2 - px - q] = 0$, ſeu $-x^2 + px + q = 0$, vel $x^2 - \pi x - q = 0$. Eſt namque

Fig. 5. (*Fig.* 5.) $\Box$tum β, ſeu $PIHk = PI.-PK = [\tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]\,-[\tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]$ (§. XV.).

h. e. $x^2 = -[\tfrac{1}{4}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}] = -\tfrac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$

adeoque $x = \sqrt{\Box}$ti $PIHk = \sqrt{[-\tfrac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]}$ et $\Box$tum

oppoſitum δ, ſeu $PQvr = Pr.PQ = -PR.PQ = -[\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]\,[\tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]$ (§. XV.)

h. e. ſecundum $x^2 = -[\tfrac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}] = -\tfrac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$

adeoque ſecunda $x = \sqrt{\Box}$ti $PQvr = -\sqrt{[-\tfrac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]}$ (§. VIII).

Erit ergo ſumma radicum (quam pono $= \pi$), ſed contrario ſigno affecta

$= -\pi = -\sqrt{[-\tfrac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]} + \sqrt{[-\tfrac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]}$,

et factum radicum $= \sqrt{[-\tfrac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]}.{}^{\prime}\sqrt{[-\tfrac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]}$

$$= {}^{\prime}\sqrt{[(-\tfrac{1}{4}p^2 - q)^2 - p^2(\tfrac{1}{4}p^2+q)]}$$
$$= {}^{\prime}\sqrt{[\tfrac{1}{16}p^4 + \tfrac{1}{2}p^2q + q^2 - \tfrac{1}{4}p^4 - p^2q]} = {}^{\prime}\sqrt{q^2}$$
$$= -q\,,$$

Proinde pro $\Box$to β erit

$$\begin{array}{l} x^2 = -\tfrac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} \ldots\ldots = \Box\text{tum } PIHk = -\Box\text{tum } PITK \\ -\pi x = [-\sqrt{[-\tfrac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]} + \sqrt{[-\tfrac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]}]\,\sqrt{[-\tfrac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}]} \\ \quad = -[-\tfrac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}] + \sqrt{q^2} \\ \quad = +\tfrac{1}{4}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)} + q = -\Box\text{tum } PIHk - \Box\text{lum } PI\eta R = +\Box\text{tum } PITK + \Box\text{lum } PIcr. \\ -q = \quad -q \;\ldots\ldots\ldots = \qquad\qquad + \Box\text{lum } PI\eta R = \qquad\qquad -\Box\text{lum } PIcr. \end{array}$$

quorum ſumma vtrobique eſt $= 0$, vti eſſe debebat.

Simili-

Similiter pro □to δ seu PQvr erit

$x^2 = -\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + x)} \ldots\ldots = \Box$tum PQ$vr = -\Box$tum PQVR

$-\pi x = [-\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]} + \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}] \cdot \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$

$= -[-\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}] + \sqrt{q^2}$

$= + \frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)} + q = -\Box$tum PQ$vr - \Box$PI$\eta$R $= + \Box$tum PQVR $+ \Box$PIcr.

$-q = \quad -q \ldots\ldots\ldots \quad = \quad + \Box$PI$\eta$R $= \quad - \Box$PIcr.

quorum summa vtrobique est $= 0$.

§. 18. Tertia aequatio erat $x^2 + px + q = 0$; adeoque eius deinceps posita est $-[x^2 + px + q] = 0$, seu $-x^2 - px - q = 0$, vel $x^2 + \pi x + q = 0$. Ad hanc construendam sit (*Fig.* 3.) sub γ), $\left.\begin{matrix} Pe \\ Pa \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}p$, et $\left.\begin{matrix} ei = eq \\ ak = ar \end{matrix}\right\} = -\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$; Fig. 3.

erit $\left.\begin{matrix} Pi = Pe + ei \\ Pk = Pa + ak \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$

et $\left.\begin{matrix} Pq = Pe - eq \\ Pr = Pa - ar \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$

summa $= -p$; factum $= \frac{1}{4}p^2 - (\frac{1}{4}p^2 - q) = +q$.
$= \Box$P$icr = \Box$PqZk.

hinc □tum maius P$itk = \frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$

□tum minus P$qvr = \frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$

Ergo pro maiore □to δ, seu pro PK$i\tau$ erit

$x^2 = -[\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}] = -\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$

eiusque radix $x = \sqrt{}$ □ti PK$i\tau = -\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$ (§. VIII).

Pro minore □to δ, seu pro PqwR erit

$x^2 = -(\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}) = -\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$

eiusque radix $x = \sqrt{}$ □ti PqwR $= -\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$ (§. VIII).

adeoque summa radicum (quam pono $= -\pi$), sed contrario signo affecta $= +\pi = +\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$

et factum $= -\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} \cdot -\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$

$= +\sqrt{[(-\frac{1}{2}p^2 + q)^2 - p^2(\frac{1}{4}p^2 - q)]} = +\sqrt{[\frac{1}{4}p^4 - p^2 q + q^2 - \frac{1}{4}p^4 + p^2 q]} = +\sqrt{q^2}$

$= +q$,

Ergo pro □to maiore δ erit

$$\begin{array}{llll}
x^2 = -\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} & = \square\text{tum } Pi\tau K & & = -\square\text{tum } Pi'k \\
+\pi x = [\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} + \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}].-\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} & & & \\
\quad = -[-\frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}] \; -\sqrt{q^2} & & & \\
\quad = +\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} & -q = -\square\text{tum } Pi\tau K + \square Pq\zeta K & = +\square\text{tum } Pitk - \square PqZk & \\
+q = & +q = & -\square Pq\zeta K = & +\square PqZk \\
\hline
\end{array}$$

adeoque, deletis, quae se mutuo destruunt, summa vtrobique est $= 0$. Eodem plane modo reperietur, etiam pro □to minore δ esse $x^2 + \pi x + q = 0$. Calculus enim idem est, nisi quod, loco $-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, nunc scribendum sit $+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, et contra, figurae autem calculo respondentes desumendae sint Fig. 3. ex *Figurae* 3. areis minoribus δ et γ.

§. 19. Quarta aequatio erat $x^2 + px - q = 0$, cuius deinceps posita est $-[x^2 + px - q] = 0$, seu $-x^2 - px + q = 0$, vel $x^2 + \pi x - q = 0$. Ad hanc Fig. 6. construendam sit (*Fig.* 6. sub γ et α)

$$\left\{\begin{matrix} Pi = PE + Ei \\ Pk = PA + Ak \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + p)}; \text{ et } \left\{\begin{matrix} PQ = PE - EQ = PE - Ei \\ PR = PA - AR = PA - Ak \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}.$$

hinc sub γ erit □tum maius $Pitk = \frac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$

et sub α □tum minus $PQVR = \frac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$

Ergo pro maiore □to δ seu $Pi\tau K$ erit

$$x^2 = -[\tfrac{1}{2}p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}] = -\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$$

eiusque radix $x = \sqrt{\square\text{ti } Pi\tau K} = -\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$ (§. VIII).

et pro minore □to β seu $PQvr$ erit

$$x^2 = -[\tfrac{1}{2}p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}] = -\tfrac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$$

eiusque radix $x = \sqrt{\square\text{ti } PQvr} = +\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$, (§ VIII.), adeoque summa radicum (quam pono $= -\pi$), sed contrario signo affecta

$$+\pi = +\sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]} - \sqrt{[-\tfrac{1}{2}p^2 - q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]}$$

et factum $= -\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$

$= -\sqrt{[(-\frac{1}{2}p^2 - q)^2 - p^2(\frac{1}{4}p^2 + q)]} = -\sqrt{[\frac{1}{4}p^4 + p^2q + q^2 - \frac{1}{4}p^4 - p^2q]} = -\sqrt{q^2}$

$= -q.$

Hinc

Hinc pro maiore □to δ erit

$$\begin{array}{llll}
x^2 = -\frac{1}{2}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)} & = \square\text{tum } Pi\tau K & = -\square\text{tum } Pitk & \\
+\pi x = [+\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2-q-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]} - \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2-q+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]}] - \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2-q-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]} & & & \\
\quad = -[-\frac{1}{2}p^2-q-q\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]+\sqrt{q^2} & & & \\
\quad = +\frac{1}{2}p^2+p+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}+q & = -\square\text{tum } Pi\tau K - \square PigR & = \square\text{tum } Pitk + \square PIGR & \\
-q = & -q = & +\square PigR = & -\square PIGR
\end{array}$$

quorum summa vtrobique est $= o$.

Similiter pro minore □to β erit

$$\begin{array}{llll}
x^2 = -\frac{1}{2}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)} & = \square\text{tum } PQvr & = -\square\text{tum } PQVR & \\
+\pi x = [+\sqrt{[-\frac{1}{2}p^2-q-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]} - \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2-q+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]}] . \sqrt{[-\frac{1}{2}p^2-q+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]} & & & \\
\quad = -[-\frac{1}{2}p^2-q+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]+\sqrt{q^2} & & & \\
\quad = +\frac{1}{2}p^2+q-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)} \quad +q & = -\square\text{tum } PQvr - \square PI\lambda r & = +\square\text{tum } PQVR + \square PIGR & \\
-q = & -q = & +\square PI\lambda r = & -\square PIGR
\end{array}$$

adeoque, deletis quae se mutuo destruunt, summa vtrobique est $= o$.

§. 20. In §. XVII. construxi aequationis secundae, $x^2-px-q=o$, deinceps positam $x^2-\pi x-q=o$. Res tamen eodem redit, si, loco huius, construatur aequatio $-[x^2-px-q]=o$, seu $-x^2+px+q=o$. Est enim (*Fig.* 5.) □tum maius β, seu $PIHk = -$ □tum α, Fig. 5.

$$\text{h. e. } \left.\begin{array}{lll}
-x^2 = -[\frac{1}{2}p^2+q+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}] = -\frac{1}{2}p^2-q-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)} & = -\square\text{tum } PITK \\
+px = \qquad\qquad = +\frac{1}{2}p^2+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)} & = \square PL\varsigma K \\
+q = \qquad\qquad = +q & = \square LIT\varsigma.
\end{array}\right\} = o$$

Item □tum minus $\delta = -$ □to minori γ.

$$\text{h. e. } \left.\begin{array}{lll}
-x^2 = -\frac{1}{2}p^2-q+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)} & = -\square\text{tum } PQVR \\
+px = +\frac{1}{2}p^2 \quad -p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)} & = -\square PQwk \\
+q = \quad +q & = +\square PQwk
\end{array}\right\} = o$$

Similiter in §. XVIII. construebatur aequationis tertiae $x^2+px+q=o$, deinceps posita $x^2+\pi x+q=o$. Interim res eodem redit, si, loco huius, construeretur aequa-

 tio

tio $-[x^2+px+q]=0$, seu $-x^2-px-q=0$. Est enim
Fig. 3. (Fig 3.) □tum maius $\delta = -$ □tum maius γ,

$$\text{h. e.}\quad \left.\begin{array}{l} -x^2 = -[\tfrac12 p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)}] = -\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} = -\square\text{tum } Pitk \\ -px = 2.Pe.Pk = -p[-\tfrac12 p - \sqrt{(\ldots)}] = +\tfrac12 p^2 + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} = +2.\square PeYk \\ -q = \quad = \quad = \quad -q \quad = -\square PqZk \end{array}\right\} = 0$$

Item cum sit □tum minus $\delta = -$ □tum minus γ;

$$\text{erit}\quad \left.\begin{array}{l} -x^2 = -\tfrac12 p^2 + q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} = \quad -\square\text{tum } Pqvr \\ -px = +\tfrac12 p^2 \quad -p\sqrt{(\tfrac14 p^2 - q)} = 2.Pe.Pr = +2\square Pefr \\ -q = \quad -q \quad = -Pq.Pk = -\square PqZk \end{array}\right\} = 0$$

Similiter in §. XIX. construebatur aequationis quartae $x^2+px-q=0$, deinceps posita $x^2+\pi x-q=0$. Sed res eodem redit, ac si, loco huius, construeretur aequatio
Fig. 6. $-[x^2+px-q]=0$, seu $-x^2-px+q=0$. Est enim (Fig. 6.) □tum maius $\delta = -$ □tum maius $\gamma = -[\tfrac12 p^2+q+p\sqrt{(\tfrac14 p^2+q)}]$

$$\text{h. e.}\quad \begin{array}{l} -x^2 = -\tfrac12 p^2 - q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 + q)} = -\square\text{tum } Pitk \\ -px = +\tfrac12 p^2 \quad + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 + q)} = -p[-\tfrac12 p - \sqrt{(\tfrac14 p^2 + q)}] = \square PL\varrho k = 0. \\ +q = \quad +q \quad = Li.L\varrho \quad = \square Lit\varrho \end{array}$$

Item cum sit □tum minus $\beta = -$ □tum minus α;

$$\text{erit}\quad \left.\begin{array}{l} -x^2 = -[\tfrac12 p^2 + q - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 + q)}] = -\tfrac12 p^2 - q + p\sqrt{(\tfrac14 p^2 + q)} = -\square\text{tum } PQVR \\ -px = -p[-\tfrac12 p + \sqrt{(\tfrac14 p^2 + q)}] = +\tfrac12 p^2 \quad - p\sqrt{(\tfrac14 p^2 + p)} = -\square\ QIGV \\ +q = \quad = \quad +q \quad = +\square\ PIGR \end{array}\right\} = 0.$$

§. 21. Expressiones radicum pro aequationibus deinceps positis, quas in §. XI. XVII. XVIII. et XIX. venatus sum, nimis sunt compositae, et ad additionem earundem actualem, aut subtractionem non accommodatae. Possunt tamen eaedem per simpliciores formulas exprimi, quarum ope, summa, item differentia radicum actu exhiberi potest. Ad id praestandum inseruit sequens

Proble-

Problema.

Datis duabus quantitatibus irrationalibus non communicantibus; inuenire earundem fummam, itemque differentiam. Et contra: data fumma, aut differentia duarum eiusmodi quantitatum irrationalium; inuenire quantitates aggregantes aut fubtrahentes ipfas.

Refolutio.

Sint quantitates datae $\sqrt{m}$ et $\sqrt{n}$. Ponatur $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{v}$; et $\sqrt{m}-\sqrt{n}=\sqrt{y}$: euehendo ad quadratum, fiet $m+n+2\sqrt{mn}=v$; item $m+n-2\sqrt{mn}=y$, confequenter fumma $=\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{[(m+n)+2\sqrt{mn}]}=\sqrt{v}$, et differentia $=\sqrt{m}-\sqrt{n}=\sqrt{[(m+n)-2\sqrt{mn}]}=\sqrt{y}$. *Quod erat primum.* Contra: fit fumma e. g. $=\sqrt{[12+\sqrt{140}]}$, item differentia $=\sqrt{[12-\sqrt{140}]}$; quaeruntur Termini additionis et fubtractionis ipfi. Fiat $\sqrt{[(m+n)+2\sqrt{mn}]}=\sqrt{[12+\sqrt{140}]}$ $=\sqrt{[12+2\sqrt{35}]}$, ponaturque $(m+n)=12$, et $2\sqrt{mn}$ $=2\sqrt{35}$; erit $\frac{m+n}{2}=6$, et $mn=35$,

adeoque $\frac{(m+n)^2}{4}=36$,

fubtrahatur $\frac{4mn}{4}=35$

fiet $\frac{(m-n)^2}{4}=1$, adeoque $\left.\begin{array}{l}\frac{m-n}{2}=1\\ \text{fed } \frac{m+n}{2}=6\end{array}\right\}$ add. fubtr.

habebitur $m=6+1=7$, et $n=6-1=5$, confequenter erit $\sqrt{[12\mp\sqrt{140}]}=\sqrt{m}\mp\sqrt{n}=\sqrt{7}\mp\sqrt{5}$. *Quod erat alterum.*

§. 22. Nunc applicemus ifta ad formulas radicum fimpliciores pro aequationibus deinceps pofitis inueniendas. In §. XI. (*Fig.* 3. β) erat Fig. 3.

Ima

I^{ma} $x = \sqrt{}$ □ti PIH$k = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$, et II^{da} $x = \sqrt{}$ □ti PQO$r = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$. Fiat igitur $\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} = \sqrt{m} - \sqrt{n} = \sqrt{[(m+n) - 2\sqrt{mn}]}$, ponaturque $\frac{m+n}{2} = \frac{-\frac{1}{4}p^2 + q}{2}$, et $-\sqrt{mn} = -\frac{p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}}{2}$;

erit $\frac{(m+n)^2}{4} = \frac{\frac{1}{16}p^4 - \frac{1}{2}p^2 q + q^2}{4}$; et $mn = \frac{p^2(\frac{1}{4}p^2 - q)}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 - p^2 q}{4}$

$\frac{4mn}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 - p^2 q}{4}$ ſubtr.

fiet $\frac{(m-n)^2}{4} = \frac{1}{4}q^2$, adeoque $\frac{m-n}{2} = \frac{1}{2}q$ } add. ſubtr.
ſed $\frac{m+n}{2} = -\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}q$

habebitur $m = -\frac{1}{4}p^2 + q = -(\frac{1}{4}p^2 - q)$; et $n = -\frac{1}{4}p^2$, conſequenter
$\sqrt{m} - \sqrt{n} = +\sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)} - \sqrt{-\frac{1}{4}p^2}$
vel $= -\sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)} + \sqrt{-\frac{1}{4}p^2}$ } $= \mp\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} \pm \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, vbi inferiora valent qro $x = \sqrt{}$ □ti PIHk, ſuperiora autem pro $x = \sqrt{}$ □ti oppoſiti aequales P$i\pi$K (per § VIII). Eſt ergo I^{ma} $x = \sqrt{}$ □ti PIH$k = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} - \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, et II^{da} $x = \sqrt{}$ □ti PQO$r = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]} = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} + \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, quarum radicum ſumma eſt $= +2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} = \frac{2}{2}p\sqrt{-1} = p\sqrt{-1}$, et factum $= -\frac{1}{4}p^2 - [-(\frac{1}{4}p^2 - q)]$ hanc habebit formam $x^2 - 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}\,.\,x - q = 0$, ſeu $x^2 - p\sqrt{-1}\,.\,x - q = 0$.

Fig. 5. Similiter in § XVII. (*Fig.* 5. β et δ) erat I^{ma} $x = \sqrt{}$ □ti PIH$k = \sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$, et II^{da} $x = \sqrt{}$ □ti PQ$\varpi r = -\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]}$. Fiat ergo $\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - q - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}]} = \sqrt{m} - \sqrt{n} = \sqrt{[(m+n) - 2\sqrt{mn}]}$, ponaturque
$\frac{m+n}{2} = \frac{-\frac{1}{4}p^2 - q}{2}$; et $-\sqrt{mn} = \frac{-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}}{2}$;

erit $\frac{(m+n)^2}{4} = \frac{\frac{1}{16}p^4 + \frac{1}{2}p^2 q + q^2}{4}$; et $mn = \frac{p^2(\frac{1}{4}p^2 + q)}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 + p^2 q}{4}$

$\frac{4mn}{4} = \frac{\frac{1}{4}p^4 + p^2 q}{4}$ ſubtr.

fiet $\frac{(m-n)^2}{4} = \frac{1}{4}q^2$, adeoque $\frac{m-n}{2} = \frac{1}{2}q$ } add. ſubtr.
ſed $\frac{m+n}{2} = -\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}q$

habebitur $m = -\frac{1}{4}p^2$; et $n = -\frac{1}{4}p^2 - q = -(\frac{1}{4}p^2 + q)$, conſequenter

$\sqrt{m}$-

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{m}-\sqrt{n}=+\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}-\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}\\ \quad\text{vel}\ =-\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}+\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}\end{array}\right\}=\mp\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}\pm\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)},$$

vbi signa inferiora valent pro $x=\sqrt{\square}$ti PIHk, superiora autem pro $x=\sqrt{\square}$ti oppositi aequalis $Pi\tau K$ (per §. VIII). Est ergo

I^ma^ $x=\sqrt{\square}$ti PIH$k=\sqrt{m}-\sqrt{n}=+\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}-\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$,
I^da^ $x=\sqrt{\square}$ti PQ$vr=\sqrt{m}+\sqrt{n}=+\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}+\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$,

quarum summa $=+2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}=\tfrac{2}{2}p\sqrt{-1}=+p\sqrt{-1}$; et factum $=-\tfrac{1}{4}p^2-[-(\tfrac{1}{4}p^2+q)]=-\tfrac{1}{4}p^2+\tfrac{1}{4}p^2+q=+q$ Consequenter aequatio deinceps posita quaesita hanc habebit formam $x^2-2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}\,.\,x+q=0$, seu $x^2-p\sqrt{-1}\,.\,x+q=0$.

§. 23. Eodem plane modo inueniri possunt radices aequationum, quae sunt (§ XIV) aequationi tertiae $x^2+px+q=0$, et quartae $x^2+px-q=0$, deinceps positae, et ex radicibus inuentis aequationes deinceps positae ipsae formari. Neque tamen isto labore opus est, cum ex calculo in §. XXII. adhibito manifestum sit, totum negotium breuius expediri posse, si in quatuor formis aequationum (§ XIV), loco $\mp p$, scribatur $\mp 2\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}$, et in tertio Termino, loco $\mp q$, scribatur $\pm q$, pro respondente aequatione deinceps posita obtinenda; huiusque radices innotescent, aut aequationem quadraticam methodo ordinaria reducendo, aut radices in §. XIV datas transformando, si, loco $\mp\tfrac{1}{2}p$, scribatur $\mp\sqrt{-\tfrac{1}{4}p^2}$, et in locum $\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}$, vel $\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$, respectiue surrogetur $\pm\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2-q)}$, vel $\pm\sqrt{-(\tfrac{1}{4}p^2+q)}$: quem ad modum apparet ex Tabula subiecta, in qua numeri vulgares 1, 2, 3, 4 indicant aequationes atque radices ordi ordinarias, numeri Romani autem I. II. III. IV deſignant reſpondentes aequationes atque radices deinceps poſitas.

1) $x^2 - px + q = 0$; $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Fig. 3. α et α

I) $x^2 - 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}\,.\,x - q = 0$; $x = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} \pm \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Fig. 3 β et β

2) $x^2 - px - q = 0$; $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. Fig. 5. α et γ

II) $x^2 - 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}\,.\,x + q = 0$; $x = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} \pm \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 + q)}$ Fig. 5. β et δ

3) $x^2 + px + q = 0$; $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Fig. 3. γ et γ

III) $x^2 + 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}\,.\,x - q = 0$; $x = -\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} \mp \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Fig 3. δ et δ

4) $x^2 + px - q = 0$; $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. Fig. 6. γ et α

IV) $x^2 + 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}\,.\,x + q = 0$; $x = -\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} \mp \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. Fig. 6. δ et β

Hinc etiam apparet, data aequatione deinceps poſita, peruenire ad reſpondentem aequationem ordinariam, ſi, loco termini tertii $\pm q$, ponatur $\mp q$, et, loco $\pm 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}$, ponatur $\pm p$; item, illius radicibus datis, inueniri reſpondentes radices ordinarias, pro $\mp\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}$, et $\pm\sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, et $\pm\sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 + q)}$, reſpectiue ſubſtituendo $\mp\frac{1}{2}p$, et $\mp\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, et $\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.

§. 24 Vt autem duorum quadratorum deinceps poſitorum comparatio inter ſe recte inſtitui poſſit, notanda
Fig. 3. ſunt ſequentia. Nimirum (*Fig.* 3. α et β) □tis primitiuis poſitiuis PITK et PQVR reſpondent □ta priuatiua, ſeu illis deinceps poſita PIHk et PQOr. Proinde, quia area □ti deinceps poſiti PIHk magis deficit ab area □torum poſitiuorum PITK aut PQVR, quam deinceps poſitorum alterum PQOr; □tum PIHk minus eſſe cenſendum eſt altero PQOr, illiusque adeo radix minor habenda erit radice huius; etſi res contra habeat, ſi □ta deinceps poſita abſolute inter ſe conſiderentur, ſeu ſine relatione

latione ad aream □ti primitiui positiui (*sub* α). [§. III. VII. n. II. et III.] Vnde etiam mirum non est, quod e. g. in §. XXII. (*Fig.* 3. β) $\sqrt{}$ □ti PIH$k = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} - \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, habeat formam radicis minoris, contra autem $\sqrt{}$ □ti PQO$r = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} + \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, formam radicis maioris; item quod in §. XXII. (*Fig.* 5. β et δ) $\sqrt{}$ □ti PIH$k = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} - \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 + q)}$, radicis minoris formam habeat, sed $\sqrt{}$ □ti PQ$vr = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} + \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 + q)}$, formam radicis maioris. Breuiter: duo eiusmodi □ta ex α (*Fig.* 3.) et duo □ta ex β, secundum congruentiam inter se comparata constituunt proportionem Geometricam. Fig. 3. Fig. 5. Fig. 3.

E. gr. $\left\{\begin{matrix} \square PITK : \square PQVR = \square PIHk : \square PQOr \\ +25 : +9 = -25 : -9 \end{matrix}\right\}$; at eadem □ta secundum quantitatem arearum inter se comparata, faciunt proportionem Arithmeticam.

E. gr. $\left\{\begin{matrix} \square PITK - \square PQVR = \square PQOr - \square PIHk \\ +25 - +9 = -9 - -25 \end{matrix}\right\}$, vbi differentia Terminorum vtriusque rationis est $= -16$.

§. 25. Quomodo autem eiusmodi radices arearum priuatiuarum ex mente mea in calculo tractandae sint, in vnico exemplo adiecto ostendisse sufficit. Nimirum, *ex* §. XXIII. *num* *II*, sit construenda aequatio $x^2 - 2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}.x + q = 0$, et quidem (*Fig* 5. β) pro casu $x = \sqrt{}$ □ti PIH$k = +\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} - \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 + q)}$: Fig. 5.

erit $x^2 = -\frac{1}{4}p^2 - (\frac{1}{4}p^2 + q) - \frac{2}{2}p\sqrt{[-1.-(\frac{1}{4}p^2 + q)]}$

$= -\frac{1}{2}p^2 \quad - q \quad - p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$ . . . . $=$ □ PIHk

$-2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}.x = -2\sqrt{-\frac{1}{4}p^2}[\sqrt{-\frac{1}{4}p^2} - \sqrt{-(\frac{1}{4}p^2 + q)}]$

$= -2\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p\sqrt{[-1.-(\frac{1}{4} + q)]}]}$

$= +\frac{1}{2}p^2 \quad + p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$ . . . . . $=$ PL.PK $=$ PL.$-$P$k = -$□PLΦk

$+ q \quad = \quad + q$ . . . . $= -$PQ.PK $=$ LI.L$\varsigma =$ LI.$-$L$\Phi = -$□LIHΦ

quorum summa vtrobique est $= 0$, et praeterea calculus pariter ac constructio ex asse consentit cum §. XX. num. 1.

§ 26. In omnibus quatuor aequationum quadraticarum formis in § XIV. deſcriptis eſt quadratum ſemiſummae radicum vel $= (+\frac{1}{2}p)^2$, vel $= (-\frac{1}{2}p)^2 = +\frac{1}{4}p^2$, factum autem radicum vel $= +q$, vel $= -q$. Si ponatur $\mp p = 0$; fiet x vel $= \mp \sqrt{-q}$, vel $= \mp \sqrt{+q}$, vel $= \pm \sqrt{-q}$, vel $= \pm \sqrt{+q}$. Si autem ponatur $q = 0$. ſemper radicum vna fiet $= 0$, adeoque euaneſcet, et aequatio quadratica degenerabit in aequationem primae dimenſionis, fietque x vel $= +p$, vel $= -p$: quemadmodum ex inſpectione tabulae in §. XIV. datae ſtatim pateſcit. Sed hiſce caſibus ſimplicibus ſepoſitis, perſequamur ſaltem tres caſus compoſitos diuerſos, qui reſultant, quantitates $+\frac{1}{4}p^2$ et $+q$ inter ſe comparando. Aut enim eſſe poteſt 1) $q = \frac{1}{4}p^2$; aut 2) $q < \frac{1}{4}p^2$, ſed tamen $q > 0$, adeoque $q + m^2 = \frac{1}{4}p^2$, ſeu $q = \frac{1}{4}p^2 - m^2$; aut 3) $q > \frac{1}{4}p^2$, adeoque $q = \frac{1}{4}p^2 + m^2$. Ne quis autem excipiat, rectam datam ($+p$ vel $-p$) in duas partes ita ſecari non poſſe, vt ſit rectangulum ſub partibus (q) maius □to partis dimidiae ($\frac{1}{4}p^2$), adeoque caſum tertium eſſe impoſſibilem; monendum eſt, propoſitionem iſtam ſaltem veram eſſe, ſi ponatur, □tum ſemidifferentiae partium eſſe debere □tum poſitiuum. Quoniam autem, praeter □ta poſitiua, etiam dantur □ta priuatiua, eaque realia et aſſignabilia (§. VII. *ſeqq*); vtique fieri poterit, vt □tum ſemidifferentiae partium ſit □tum priuatiuum, adeoque ſemidifferentia $= \sqrt{}$ □ti priuatiui ſeu (ſtylo hactenus vſitato) quantitas imaginaria. Quo in caſu erit et *factum partium* (q) *maius □to partis dimidiae* ($\frac{1}{4}p^2$), et *ſumma □torum partium minor duplo □to partis dimidiae* ($\frac{1}{4}p^2$): quod vtrumque ſecus accidit

cidit in quantitatibus ordinariis, quando ſcilicet □tum ſemidifferentiae eſt □tum poſitiuum. E. gr. ſit $\frac{1}{2}p = 5$, adeoque $\frac{1}{4}p^2 = 25$, ſit porro □tum ſemidifferentiae $= 9$, adeoque ſemidifferentia ipſa $= \sqrt{9} = 3$; erit pars maior $= 5 + 3 = 8$, et minor $+ 5 - 3 = 2$, adeoque factum $q = 8 \cdot 2 = 16$, et ſumma □torum $= 8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68$, conſequenter, $16 < 25$, ſeu $q < \frac{1}{4}p^2$, et $68 > 2 \cdot 25$, ſeu ſumma □torum $> \frac{2}{4}p^2$, ſeu $34 > 25$, h. e. ſemiſumma □torum $> \frac{1}{4}p^2$. Contra autem in altero caſu ſit, vt ante, $\frac{1}{2}p = 5$, adeoque $\frac{1}{4}p^2 = 25$, ſed □tum ſemidifferentiae $= -9$, adeoque ſemidifferentia ipſa $= \sqrt{-9}$; erit pars maior $= 5 + \sqrt{-9}$, et minor $= 5 - \sqrt{-9}$, adeoque factum $q = (5 + \sqrt{-9})(5 - \sqrt{-9}) = 25 - (-9) = 25 + 9 = 34$, et ſumma □torum $= [5 + \sqrt{-9}]^2 + [5 - \sqrt{-9}]^2 = 25 - 9 + 10\sqrt{-9} + 25 - 9 - 10\sqrt{-9} = 50 - 18 = 32$, conſequenter $34 > 25$, ſeu $q > \frac{1}{4}p^2$, et $32 < 2 \cdot 25$, ſeu ſumma □torum $< \frac{2}{4}p^2$, ſeu $16 < 25$, h. e. ſemiſumma □torum $< \frac{1}{4}p^2$.

§. 27. Proinde *ſi I. ponatur* $q = \frac{1}{4}p^2$; in §. XIV. fiet Fig. 3.

1) $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = 0$; et $x = + \frac{1}{2}p \pm 0$; adeoque (*Fig.* 3 α) puncta Q et I cadunt in E, eritque I^ma^ $x = \frac{1}{2}p = PE = PA$, et II^da^ $x = \frac{1}{2}p = PE = PA$, h. e. aequatio habebit duas radices poſitiuas aequales. Porro fiet

3) $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = 0$; et $x = - \frac{1}{2}p \mp 0$; adeoque (*Fig.* 3. γ) puncta q et i cadunt in e, eritque I^ma^ $x = -\frac{1}{2}p = Pe = Pa$, et II^da^ $x = -\frac{1}{2}p = Pe = Pa$, h. e. aequatio habebit duas radices priuatiuas aequales.

 2)

Fig. 5. 2) fiet $x^2 - px - \frac{1}{4}p^2 = 0$; et $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{\frac{1}{2}p^2}$; adeoque (*Fig.* 5. α *et* γ) erit I^{ma} $x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{2}p^2} = PI = PE + EI = PE + \sqrt{2PE^2}$, seu $PI > 2PE$, h. e. $PI > PL$, et II^{da} $x = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{2}p^2} = PQ = PE - EQ = PE - \sqrt{2PE^2}$, h. e. PQ, absolute spectata erit $< PE$.

Fig. 6. 4) Fiet $x^2 + px - \frac{1}{4}p^2 = 0$; et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{\frac{1}{2}p^2}$, adeoque (*Fig.* 6. γ *et* α) erit I^{ma} $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{2}p^2} = PE + Ei$, seu Pi, absolute spectata, erit $> PL$, et II^{da} $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{2}p^2} = PQ = PE - \sqrt{2PE^2}$, h. e. Q cadit inter P et e, si sumatur $Pe = PE$.

§. 28. *Si II. ponatur* $q < \frac{1}{4}p^2$, adeoque $q = \frac{1}{4}p^2 - m^2$; in § XIV.

1) fiet $x^2 - px + (\frac{1}{4}p^2 - m^2) = 0$; et $x = \frac{1}{2}p$
Fig 3 $\mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + m^2)} = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{m^2}$, adeoque (*Fig.* 3 α) radices PI et PQ cadunt, vti ibidem delineantur, vltra P, cis et vltra punctum E.

3) Fiet $x^2 + px + (\frac{1}{4}p^2 - m^2) = 0$; et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{m^2}$, adeoque (*Fig.* 3. γ) radices Pi et Pq cadunt versus sinistram puncti P, cis et vltra punctum e.

2) Fiet $x^2 - px - (\frac{1}{4}p^2 - m^2) = 0$; et $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{2}p^2 - m^2)}$,
Fig. 5. adeoque (*Fig.* 5. α et γ) radices PI et PQ cadunt, illa vltra L, haec inter P et e, si sumatur $Pe = PE$.

4) Fiet $x^2 + px - (\frac{1}{4}p^2 - m^2) = 0$; et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{2}p^2 - m^2)}$,
Fig. 6. adeoque (*Fig.* 6. α et γ) radices PQ et Pi cadunt, illa inter P et e, si sumatur $Pe = PE$, haec ad sinistram puncti P, vltra L.

§. 29. *Si denique III. ponatur* $q > \frac{1}{4}p^2$, *adeoque* $q = \frac{1}{4}p^2 + m^2$; in §. XIV.

1) Fiet $x^2 - px + (\frac{1}{4}p^2 + m^2) = 0$; et $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 - m^2)} = +\frac{1}{2}p + \sqrt{-m^2}$; atque sic preuenitur ad

duas

duas radices, quarum semidifferentia ($\sqrt{-m^2}$) radicem $\square$ti priuatiui, seu quantitatem imaginariam constituit. Quare, cum (*Fig.* 8. α, β, δ), $+\sqrt{-m^2}$ in area Fig. 8.
β, et $-\sqrt{-m^2}$ in area δ assignanda sit (§. VIII.); erit radicum

$$\text{maior } x = \sqrt{\square\text{ti } PECA} + \sqrt{\square\text{ti } EI\omega\psi} = \sqrt{\square\text{ti } PECA} + \sqrt{\square\text{ti } Pfgh}$$

$$\text{maior } x = \sqrt{\square\text{ti } PECA}\left\{\begin{array}{l} -\sqrt{\square\text{ti } EI\omega\psi} \\ \text{h.e } +\sqrt{\square\text{ti } AKol} \end{array}\right\} = \sqrt{\square\text{ti } PECA}\left\{\begin{array}{l} -\sqrt{\square\text{ti } Pfgh} \\ \text{h.e } +\sqrt{\square\text{ti } Pbca} \end{array}\right\}$$

3) Fiet $x^2 + px + (\frac{1}{4}p^2 + m^2) = 0$; et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 - m^2)} = -\frac{1}{2}p + \sqrt{-m^2}$; atque sic denuo peruenitur ad duas radices, quarum semidifferentia ($\sqrt{-m^2}$) est radix $\square$ti priuatiui, seu quantitas imaginaria. Quare cum Tab. III.
(*Fig.* 9. γ, δ, β), $-\sqrt{-m^2}$ in area δ, et $+\sqrt{}$ Fig 9.
$-m^2$ in area β assignanda sit (§. VIII.); erit radicum

$$\text{I}^{\text{ma}}\, x = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{-m^2} = \sqrt{\square\text{ti } Peca}\left\{\begin{array}{l} +\sqrt{\square\text{ti } ei\omega\psi} \\ \text{seu } \sqrt{\square\text{ti } Pfgh} \end{array}\right\} = -\sqrt{\square\text{ti } PECA} - \sqrt{\square\text{ti } Pdsb}.$$

$$\text{II}^{\text{da}}\, x = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{-m^2} = \sqrt{\square\text{ti } Peca} + \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\square\text{ti } ako'} \\ -\sqrt{\square\text{ti } ei\omega\psi} \\ -\sqrt{\square\text{ti } Pfgl} \end{array}\right\} = -\sqrt{\square\text{ti } PECA} + \sqrt{\square\text{ti } Pdsb}.$$

2) Fiet $x^2 - px - (\frac{1}{4}p^2 + m^2) = 0$, et $x = +\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + m^2)}$, Fig. 5.
adeoque (Fig. 5. α et γ) radices PI et PQ cadunt, vti ibidem delineantur, et quidem tanto magis vltra L et e, quo maior fuerit quantitas m.

4) Fiet $x^2 + px - (\frac{1}{4}p^2 + m^2) = 0$, et $x = -\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + m^2)}$, adeoque (*Fig.* 6. α, γ) radices PQ et Pi cadunt tanto Fig. 6.
magis vltra e et L, quo maior fuerit quantitas m.

§ 30. Ex hac omnium casuum aequationis quadraticae enumeratione et constructione (§. XXVII. XXVIII. XXIX.) mani-

manifeſtum ſit, in ea reſoluenda nunquam perueniri ad quantitates imaginarias, niſi vtraque radix vel poſitiua, vel priuatiua fuerit, vt factum poſſit eſſe $= + q$, et praeterea fuerit $q > \frac{1}{4}p^2$. Inter 24 enim radices poſſibibes diuerſas, quas in §. XXVII. XXVIII. XXIX. exhibui, non niſi 4 radices dantur, quae ſint quantitatibus imaginariis quaſi deformatae. Nec tamen propterea exiſtimandum eſt, radicum imaginariarum in calculo interuentum fore rariſſimum: occurrunt enim frequentius, quam inexpertus quisque opinari poſſit, praeſertim quando de aequationibus cubicis, altioribusque reſoluendis agitur. Satis enim conſtat, aequationem cubicam, imo etiam altiorem quamcunque, reſolui non poſſe, niſi ea ante ad quadraticam reducta fuerit; haec autem frequentiſſime ita comparata eſt, vt eius radix vtraque ſit vel poſitiua, vel priuatiua, et praeterea factum radicum maius ſit quadrato ſemiſummae, quo in caſu ſemidifferentia radicum non poteſt non eſſe quantitas imaginaria (§. XXIX *num* 1. et 3). Vt taceam aequationum quadraticarum ordinariarum deinceps poſitas, quarum radices omnes ex meris quantitatibus imaginariis ſunt conflatae (§ XXIII). Quae cum ita ſint, optandum eſſet, vt, abiecata perſuaſione de quantitatum imaginariarum impoſſibilitate atque inaſſignabilitate, earundem Theoria magis magisque excolatur. Hac in lucem protracta, via, ſi quid mei iudicii eſt, aperta erit ad aequationes altiores exacte reſoluendas, imo etiam radicum ad aequationes cubicas pertinentium conſtructiones genuinae dari poterunt.

§. 31. Haud parum facit ad naturam quantitatum imaginariarum penitius perſpiciendam, ſi duae aequationes

nes quadraticae sequentes $x^2 \pm px + q = 0$, et $x^2 \pm px + Q = 0$, vbi (*per hyp.*) est $Q > q$, distincte euoluantur: quemadmodum apparet ex Tabula subiecta. Nimirum sit

In casu I.		In casu II.
$\mp\frac{1}{2}p$ . . . . $\frac{1}{4}p^2$ . . . . per hyp. sit $+\frac{1}{4}d^2$ . . . $\mp\frac{1}{2}d$ . . . . (et quidem $\frac{1}{2}d < \frac{1}{2}p$.)	Semisumma radicum □tum semisummae □tum semidifferentiae semidifferentia	. . . $\mp\frac{1}{2}p$ . . . . $\frac{1}{4}p^2$ sit $-\frac{1}{4}d^2$ (per hyp.) . . . $\mp\sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$
erit $\mp\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}d$ . . . $\mp\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}d$ . . .	Radix maior — — minor	. . . $\mp\frac{1}{2}p + \sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$ . . . $\mp\frac{1}{2}p - \sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$
$+q = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2$ . . .	Factum = □ semis. − □ semidiff.	. . . $\frac{1}{4}p^2 - (-\frac{1}{4}d^2) = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}d^2 = +Q$
$\frac{1}{4}p^2 \mp \frac{1}{2}pd + \frac{1}{4}d^2$ $\frac{1}{4}p^2 \pm \frac{1}{2}pd + \frac{1}{4}d^2$	□tum maioris, vel min. □tum minoris, vel mai.	. . . $\frac{1}{4}p^2 \mp p\sqrt{-\frac{1}{4}d^2} + (-\frac{1}{4}d^2)$ . . . $\frac{1}{4}p^2 \pm p\sqrt{-\frac{1}{4}d^2} + (-\frac{1}{4}d^2)$
$\frac{2}{4}p^2 \quad + \frac{2}{4}d^2$ $\frac{1}{4}p^2 \quad + \frac{1}{4}d^2$	Summa □torum semisumma □torum = □ semis. + □ semidiff.	. . . $\frac{2}{4}p^2 \quad + 2\,(-\frac{1}{4}d^2)$ . . . $\frac{1}{4}p^2 \quad + 1.(-\frac{1}{4}d^2)$ $= \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2$
$\frac{2}{2}pd = p\,.\,d$ . . . $\frac{1}{2}pd = p\,.\,\frac{1}{2}d$ . .	differentia □torum semidifferentia □torum = Summa . semidifferentia	. . . $2p\sqrt{-\frac{1}{4}d^2} = p\,.\,2\sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$ . . . $p\,.\sqrt{-\frac{1}{4}d^2}$
$q + \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}p^2$ . . . Ergo $q < \frac{1}{4}p^2$, seu factum < □to semis.	□tum semisummae = factum + □ semidiff.	$Q + (-\frac{1}{4}d^2) = Q - \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}p^2$ Ergo $Q > \frac{1}{4}p^2$, seu factum > □to semis.
et, ob $\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}d^2 > \frac{1}{4}p^2$, erit semis. □ □ > □ semis.		et, ob $\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2 < \frac{1}{4}p^2$, erit semis. □ □ < □to semis.

§. 32. Hos duos caſus inter ſe conferenti patebit etiam

1) eſſe factum caſus I $= \text{ſemiſ.} \,\square\square$ caſus II $= \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2$. Et contra

2) eſſe ſemiſummam $\square\square$ caſus I = facto caſus II $= \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}d^2$. Et contra

Hinc ſequens formula generalis F inſeruit et □to ſemiſummae, et ſemiſummae □torum, et facto radicum, et □to ſemidifferentiae in vtroque caſu ſimul repraeſentandis.

$$F \; - - - - - = \tfrac{1}{4}p^2 \mp \tfrac{1}{4}d^2. \quad \text{Nam}$$

Si ponatur $d = 0$; fiet $F = \frac{1}{4}p^2 \mp 0 = \frac{1}{4}p^2 =$ □to ſemiſummae in vtroque caſu.

Si ponatur $p = 0$, valeatque ſignum inferius, fiet $F = 0 + \frac{1}{4}d^2 = + \frac{1}{4}d^2$ = □to ſemidifferentiae caſus I.

Si ponatur $p = 0$, valeatque ſignum ſuperius; fiet $F = 0 - \frac{1}{4}d^2 = - \frac{1}{4}d^2$ = □to ſemidifferentiae Caſus II.

Vtroque autem membro retento,

Si valeat ſignum inferius; fiet $F = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}d^2 =$ ſemiſ. □□ caſus I. = facto caſus II.

Si valeat ſignum ſuperius; fiet $F = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}d^2 =$ facto caſus I. = ſemiſ. □□ caſus II.

§. 33. Nunc progredior ad aequationes cubicas. Harum conſtructio ſupponit notitiam Formularum generalium pro radicibus ex data aequatione cubica extrahendis. Etſi vero Formulae iſtae, ſub titulo *Regularum Cardani*, ſatis notae ſint; iuuat tamen easdem alia methodo, magis naturali et paulo commodiore, in quam ante annos complures incidi, eruere, et additamentis, quae ad reliquas duas radices determinandas pertinent, illuſtrare: praeſertim cum eo ipſo *Regulae Cardani*, quae multis ſuſpectae videri ſolent, valde confirmentur. Nimirum aequationes cubicae, ſecundo Termino ſublato, reducuntur ad hos

qua-

quatuor Casus: I. $v^3 * - pv - q = 0$; II. $v^3 * + pv - q = 0$;
III. $v^3 * - pv + q = 0$; IV. $v^3 * + pv + q = 0$.

In Casu I. fiat $v = y * + mpy^{-1}$; erit

$$\left.\begin{array}{rl} v^3 = & y^3 + 3mpy + 3m^2p^2y^{-1} + m^3p^3y^{-3} \\ -pv = & -\quad py - \quad mp^2y^{-1} \\ -q = & \quad -q \end{array}\right\} = 0.$$

Iam ponatur $3mp - p = 0$; erit $3m - 1 = 0$, et $m = \frac{1}{3}$, adeoque $3m^2p^3 - mp^2 = \frac{3}{9}p^2 - \frac{1}{3}p^2 = 0$. Ex quo fit $\left.\begin{array}{l} y^3 ** + \frac{1}{27}p^3y^{-3} \\ \quad -q \end{array}\right\} = 0$, et, per y^3 multiplicando, $y^6 - qy^3 + \frac{1}{27}p^3 = 0$, quam aequationem quadraticam ad duas simplices reducendo, et ex his radicem cubicam extrahendo, fit $y = [\frac{1}{2}q \mp V(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3}$. Vnde, ob $v = y + \frac{mp}{y}$, prodit $v = [\frac{1}{2}q \mp V(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3} + \frac{\frac{1}{3}p}{[\frac{1}{2}q \mp V(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3}}$. Est autem $\frac{1}{3}p = [\frac{1}{2}q \mp V(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3} \cdot [\frac{1}{2}q \pm V(\frac{1}{4}q^2 - \frac{2}{27}p^3)]^{1:3}$, vti actu multiplicando patet, adeoque $\frac{\frac{1}{3}p}{[\frac{1}{2}q \mp V(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3}} = [\frac{1}{2}q \pm V(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3}$. Ergo, siue signa inferiora, siue superiora valere debere ponas, erit $v = [\frac{1}{2}q + V(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3} + [\frac{1}{2}q^2 - V(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)]^{1:3}$. Quae est ipsa *Regula Cardani* pro Casu I: in qua de signis $+$ et $-$ notandum est, cubum $\frac{1}{27}p^3$ affici eodem, quantitatem autem $\frac{1}{2}q$ contrario signo, respectu signorum, quibus quantitates p et q in aequatione nihilo aequali I. afficiuntur.

§. 34. Quodsi porro in aequationibus propositis I. II. III. IV, loco p et q, respectiue ponatur 3 P et 2 Q; *Regulae Cardani* concinnius exprimi poterunt.

 Fiet

Fiet nempe, attendendo ad Regulam de ſignis modo datam,

in caſu I. $v = [Q + \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3} + [Q - \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3}$

II. $v = [Q + \sqrt{(Q^2 + P^3)}]^{1:3} + [Q - \sqrt{(Q^2 + P^3)}]^{1:3}$

III. $v = [-Q + \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3} + [-Q - \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3}$

IV. $v = [-Q + \sqrt{(Q^2 + P^3)}]^{1:3} + [-Q - \sqrt{(Q^2 + P^3)}]^{1:3}$.

§. 35. Quoniam autem in omnibus his quatuor caſibus aequatio cubica reſpondens habere debet tres radices v; valor quoque pro v in §. XXXIV. inuentus, qui (breuitatis gratia) dicatur A + B, ſeu + 1. (A + B), re vera triplex eſſe debet, vt quamcunque libet trium radicum aequationis repraeſentare poſſit. Quoniam tamen adhuc dum deſideratur methodus extrahendi radicem cubicam ex data quantitate irrationali compoſita (ea enim, quae in *Elementis Algebrae* communiter tradi ſolet; rem, vt erat, inconfectam relinquit), ita vt in hoc difficili negotio multum indulgendum ſit diuinationibus repetitis, et examini ſubiectis; admodum contenti ſumus horum trium valorum vnum ſaltem, quem primum radicem aequationis, ſeu 1) v, dicimus, ex formula determinaſſe, cum, ex hoc cognito, reliqui valores, absque vlla diuinatione, certa methodo, per reſolutionem aequationis quadraticae haberi poſſint. Nimirum ad reliquas duas radices inueniendas fiat factor ſimplex $v - (A + B) = 0$, per quem cum diuiſibilis eſſe debeat aequatio cubica reſpondens, e. g. 1ma $v^3 * - 3Pv - 2Q = 0$, diuiſione actu inſtituta, erit reſiduum diuiſionis $= (A + A)^3 * - 3P(A + B) - 2Q$, h. e. $= v^3 * - 3Pv - 2Q = 0$,

$= 0$, quotus autem dabit hanc aequationem quadraticam $v^2 + (A + B)v - [3P - (A + B)^2] = 0$, qua reducta, prodibit

$2)v = \frac{-(A+B)}{2} + \frac{\sqrt{[12P - 3(A+B)^2]}}{2}$; et $3)v = \frac{-(A+B)}{2} - \frac{\sqrt{[12P - 3(A+B)^2]}}{2}$.

Eſt autem (per caſ. I. in §. XXXIII. $P = \frac{1}{3}p = A.B$; hoc igitur valore, loco P, ſubſtituto, habebitur

$2)v = \frac{-(A-B)}{2} + \frac{\sqrt{-3(A-B)^2}}{2} = \frac{-(A+B)}{2} + \frac{(A-B)\sqrt{-3}}{2} = \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}.A + \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}.B$;

$3)v = \frac{-(A+B)}{2} - \frac{(A-B)\sqrt{-3}}{2} = \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}.A + \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}.B$.

In caſibus II. III. et IV eadem methodo tractatis deuenitur ad easdem plane pro $2)v$ et pro $3)v$ Formulas. Quamuis enim in caſu II et IV. reperiatur $2)v$, vel $3)v = -\frac{(A+B)}{2} \pm \frac{\sqrt{[-12P - 3(A+B)^2]}}{2}$, ita vt nunc, loco $+12P$, habeatur $-12P$; iſta tamen Formularum diuerſitas ſaltem apparens eſt, cum inſpectio formularum ex §. XXXIV. facile doceat, hic non eſſe factum $A.B = +P$, ſed potius $= -P$, conſequenter $-12P = +12A.B$, vt ante.

§. 36. Si in data aequatione cubica reperiatur valor ipſius $(A + B)$, ſeu pro $1)v$, negatiuus; commoditatis gratia conſultum eſt, vt, valore affirmatiuo reſpondente aſſumto, $1)v$ exprimatur per $-1.(A + B)$. Quo facto, erit $2)v = \frac{(+1+\sqrt{-3})}{2}.A + \frac{(+1-\sqrt{-3})}{2}.B$; $3)v = \frac{(+1-\sqrt{-3})}{2}.A + \frac{(+1+\sqrt{-3})}{2}.B$.

§. 37. Ob eam, quam in §. XXXV. commemoraui, difficultatem, haud raro inſuperabilem, extrahendi radicem cubicam ex data quantitate irrationali compoſita, viſum eſt, in vſum ſequentium, hic adiicere non-

nonnullas eiusmodi Formulas speciales, vt, praecisa calculi difficultate atque prolixitate, hinc excerpi possint. Harum autem veritas, actu multiplicando, facile explorari poterit.

$(+1+\sqrt{-3})(\pm 1-\sqrt{-3})=+4$; $(-1\mp\sqrt{-3})^2(-1\pm\sqrt{-3})=-4\mp 4\sqrt{-3}$.

$(-1\mp\sqrt{3})^3=+8=2^3$; $(-1\mp\sqrt{-3})^2=2.(-1\pm\sqrt{-3})$; $(\mp\sqrt{-3})^3=-8=(-2)^3$.

$(1+2\sqrt{-1})(1-2\sqrt{-1})=+5$; $(1-2\sqrt{-1})^2+3(2\sqrt{-1}+1)=+2\sqrt{-1}$.

$(1-2\sqrt{-1})^3=-11+2\sqrt{-1}$; $(-1\pm\sqrt{-1})^2=+2\pm 2\sqrt{1}$; $a^3(1-2\sqrt{-1})^3=-11a^3+2a^3$

$(-1\mp\sqrt{3})^3=-10+6\sqrt{3}$; $(-10+6\sqrt{3})^{1:3}.(-10-6\sqrt{3}^{1:3}=(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})=-8^{1:3}$

$(-10+6\sqrt{3})^{2:3}.(-10-6\sqrt{3})^{1:3}=-2.(-10+6\sqrt{3})^{1:3}=-2.(-1+\sqrt{3})=+2-2\sqrt{3}$.

$(-10-6\sqrt{3})^{2:3}.(-10+6\sqrt{3})^{1:3}=-2.(-10-6\sqrt{3})^{1:3}=-2.(-1-\sqrt{3})=+2+2\sqrt{3}$

$(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{6}\sqrt{-3})^3=3\mp\tfrac{10}{9}\sqrt{-3}$; $(3+\tfrac{10}{9}\sqrt{-3})^{1:3}.(3-\tfrac{10}{9}\sqrt{-3})^{1:3}=(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{6}\sqrt{-3})(\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{6}\sqrt{-3})$.

$=+\tfrac{7}{3}$.

$(-1+\sqrt{-1})^2=-2\sqrt{-1}$; $(1+\sqrt{-1})^2=+2\sqrt{-1}$; $(-1-\sqrt{1})^2=+2\sqrt{-1}$; $(1-\sqrt{-1})^2=-2$

His praemissis, quae ad resolutionem aequationis cubicae pertinent, nunc agamus de constructione radicum eiusmodi aequationis, etsi easdem tantum non semper quantitates imaginariae ingrediantur.

§. 38. Sint quatuor rectangula α, β, γ, δ,
Fig. 10. ad idem punctum P coniugata, et pro basibus *parallelepipedorum* possibilium ad P coniugatorum assumta, sitque praeterea P T altitudo positiua (sursum tendens) $=+c$, et P t altitudo priuatiua (deorsum tendens) $=-c$: orientur octo *parallelepipeda* diuersa ad P coniugata, et quidem quatuor capacitatis positiuae $+abc$, reliqua quatuor autem capacitatis priuatiuae $-abc$. Nimirum erit *parallelepipedum positiuum*

1)

1) $\alpha . PT = (+a . +b) . +c = +abc$; 2) $\gamma . PT = (-a . -b) . +c = +abc$.
3) $\beta . Pt = (+a . -b) . -c = +abc$; 4) $\delta . Pt = (-a . +b) . -c = +abc$.
Similiter erit *parallelepipedum priuatiuum*
1) $\gamma . Pt = (-a . -b) . -c = -abc$; 2) $\alpha . Pt = (+a . +b) . -c = -abc$;
3) $\beta . PT = (+a . -b) . +c = -abc$; 4) $\delta . PT = (-a . +b) . +c = -abc$.

§. 39. Pro *parallelepipedo* igitur positiuo dantur quatuor casus diuersi. Aut enim omnes tres dimensiones sunt positiuae; aut quaecunque binae dimensiones priuatiuae esse possunt, tertia positiua existente. Similiter pro *parallelepipedo* priuatiuo quatuor occurrunt casus diuersi. Aut enim omnes tres dimensiones sunt priuatiuae; aut quaecunque binae dimensiones possunt esse positiuae, tertia priuatiua existente (§. XXXVIII).

§. 40. Iam in area α ponatur $a = b = c$; orientur 8 Cubi ad idem punctum P coniugati, quorum quatuor sunt capacitatis positiuae $+a^3$, reliqui quatuor autem capacitatis priuatiuae $-a^3$ (§. XXXVIII.): quoniam in Cubo $\alpha . PT$, in meros cubulos aequales resoluto, horum cubulorum vnus $= 1 . 1 . 1 = +1$, assumitur pro mensura omnium cuborum ad P coniugatorum. Fig. 10.

§. 41. Proinde si octo illi Cubi coniugati absolute considerantur, erunt et capacitates omnium aequales, et singula singulorum latera inter se aequalia: at vero eosdem ex situ Cubi primitiui $\alpha . PT$ aestimando, nec singula singulorum latera aequalia sunt, nec capacitates omnium aequales erunt, sed eorum quatuor sunt capacitatis positiuae $+a^3$, reliqui quatuor autem priuatiuae capacitatis $-a^3$. Est namque solus Cubus α , PT primitiuus, reliqui autem omnes sunt ex illo deriuatiui. Hi enim omnes sunt

ſunt illi deinceps poſiti, vel quoad vnicam dimenſionem, vel quoad duas, vel denique quoad omnes tres dimenſiones (§. XXXVIII. XXXX): in quo caſu poſtremo, qui prodit, *Cubus*, dicitur illi α, PT *oppoſitus*. Si itaque Cubi longitudo, latitudo et altitudo primitiua reſpectiue dicatur $+L$, $+l$, $+A$, adeoque longitudo, latitudo, et altitudo deinceps poſita reſpectiue exprimatur per $-L$, $-l$, $-A$; tabula ſubiecta vno obtutu oſtendet Cubos primitiuo α. PT deinceps poſitos, et quidem quoad quam, vel quasnam dimenſiones, vna cum eorundem capacitate: vbi ſequens ſignum (′′) [illegible], [illegible], [illegible], appienda eſſe ex linea prima $+l$, $+L$, $+A$.

	Cubi primitiuo diuerſimode deinceps poſiti.		Capacitates
Cubus primitiuus.	α . PT	$+l$, $+L$, $+A$	$+a^3$
	β . PT	$-l$, ′′, ′′	$-a^3$
	γ . PT	$-l$, $-L$, ′′	$+a^3$
	δ . PT	′′, $-L$, ′′	$-a^3$
	α . Pt	′′, ′′, $-A$	$-a^3$
	β . Pt	$-l$, ′′, $-A$	$+a^3$
	γ . Pt	$-l$, $-L$, $-A$	$-a^3$
	δ . Pt	′′l, $-L$, $-A$	$+a^3$

Ex huius Tabulae inſpectione quoque apparet, hic quatuor dari binorum Cuborum ſibi inuicem oppoſitorum copulas ſequentes.

1) α. PT, et γ. Pt; 2) β. PT, et δ. Pt
3) α. Pt, et γ. PT; 4) β. Pt, et δ. PT.

§. 42. Hinc aequatio cubica pura $x^3 = a^3$, ſeu $x^3 * * - a^3 = 0$, ſimul definit 1) Cubum α. PT; 2) Cu-

2) Cubum γ.PT; 3) Cubum β.Pt; 4) Cubum δ.Pt (§. XXXXI), adeoque erit I. $x^3 = +a . +a . +a$; II. $x^3 = -a . -a . +a$; III. $x^3 = +\sqrt{-a^2} . +\sqrt{-a^2} . -a$; IV. $x^3 = -\sqrt{-a^2} . -\sqrt{-a^2} . -a$ (§. XXXVIII. XXXIX. XXXX. 8).

§. 43. Similiter aequatio cubica pura $x^3 = -a^3$, seu $x^3 ** + a^3 = 0$, simul definit 1) Cubum γ.Pt; 2) Cubum α.Pt; 3) Cubum β.PT; 4) Cubum δ.PT (§. XXXXI), ita vt nunc sit 1) $x^3 = -a . -a . -a$; 2) $x^3 = +a . +a . -a$; 3) $x^3 = +\sqrt{-a^2} . +\sqrt{-a^2} . +a$; 4) $x^3 = -\sqrt{-a^2} . -\sqrt{-a^2} . +a$ (§. XXXVIII. XXXIX. XXXX. 8).

§. 44. Quia igitur aequatio cubica pura $x^3 ** \pm a^3 = 0$, quatuor cubos coniugatos, et situ inter se diuersos, aut, si valeat signum superius, his oppositos quatuor (§. XXXXI. XXXXII) simul definit; propterea eadem ipsa nondum satis determinata est ad latera seu radices Cubi primi, aut secundi, aut tertii, aut quarti indicandas, sed aequatio $x^3 ** - a^3 = 0$, saltem indicat, Cubi, cuius capacitas est $= +a^3$, radicem, seu latus x, seu $\sqrt[3]{+a^3}$, aeque esse posse $= \sqrt[3]{(-a . -a . +a)}$, aut $= \sqrt[3]{(+\sqrt{-a^2} . +\sqrt{-a^2} . -a)}$, aut $= \sqrt[3]{(-\sqrt{-a^2} . -\sqrt{-a^2} . -a)}$, quam $= \sqrt[3]{(+a . +a . +a)}$, littera a latus Cubi primitiui α.PT denotante, nec tamen determinat, quinam horum quatuor casuum possibilium valere debeat, sed id saltem docet, quemlibet horum trium cuborum deriuatiuorum, seu deinceps positorum aequalium, e. g. cubum β.Pt, absolute, seu sine relatione ad situm ipsius α.PT, consideratum, transire in Cubum aliquem primitiuum ipsi α.PT aequalem, cum in ista consideratione, et longitudo $+\sqrt{-a^2}$ abeat

 in

in $+a$, et latitudo $+\sqrt{-a^2}$ in $+a$, et altitudo $-a$ in $+a$ (§. XXXXI). Eodem modo, aequatio $x^3 ** + a^3 = 0$, nihil amplius ostendit, nisi quod Cubi, cuius capacitas est $= -a^3$, radix, seu latus x, seu $\sqrt[3]{-a^3}$, aeque esse possit $= \sqrt[3]{(+a.+a.-a)}$, aut $= \sqrt[3]{(+\sqrt{-a^2}.+\sqrt{-a^2}.+a)}$, aut $= \sqrt[3]{(-\sqrt{-a^2}.-\sqrt{-a^2}.+a)}$, quam $= \sqrt[3]{(-a.-a.-a)}$, littera a itidem latus cubi primitiui α.PT designante, et quemlibet horum cuborum deinceps positorum aequalium, e. g. Cubum β.PT, sine relatione ad situm cubi γ.Pt ipsi α.PT oppositi consideratum, transire in Cubum ipsi γ.Pt aequalem, cuius et longitudo, et latitudo et altitudo abeat in $-a$ (§. XXXXI).

§. 45. Etsi vero aequatio generalis $x^3 ** - a^3 = 0$, re vera habeat tres radices, ita vt sit 1) $x = +a = +1.a$; 2) $x = \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2} a$; 3) $x = \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2} a$ (quem ad modum intelligitur, si in §. XXXIV. ponatur $3\,P = 0$; tum enim in casu I. et II. fit 1) $x = A + B = A + 0 = 1.A$, in casu autem III et IV. fit 1) $x = A + B = 0 + B = 1.B$, adeoque in §. XXXV. fit $12\,P = 0$, et hinc, in casu I et II, 2) x vel 3) $x = -\tfrac{1}{2}A \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.A = (\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}).A$, in casu autem III et IV. 2) x vel 3) $x = -\tfrac{1}{2}B \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.B = (\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}).B$); quarum trium radicum haec est conditio, vt sit summa radicum $= 0$, summa productorum ex binis $= 0$, et factum omnium vt $+1$; nihilo minus tamen istae tres radices non valent pro vllo quatuor cuborum positiuorum in §. XXXXII. descriptorum (§. XXXXIV), sed id saltem indicant, si aequationes completae, pro singulis istis quatuor diuersis cubis definiendis diuersae, dentur,

tur, eaedemque ita transformentur, vt Terminus secundus, aeque vti in aequatione generali respondente, deficiat; quacunque libet trium radicum pro prima assumta, tres aequationis transformatae radices hanc inter se relationem tenere, vt $+1$; $\frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}$; $\frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}$, atque adeo, vna radice cognita, reliquas promte inueniri posse. Est autem $\frac{(-1\mp\sqrt{-3})}{2} = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{-1}\,.\sqrt{\frac{3}{4}}$. Quare cum, posito sinu toto $= +1$, et semiperipheria circuli $= \pi$, sit cos. $0\pi =$ cos. $2\pi = +1 =$ cos. 4π, aut in genere $=$ cos. $2k\pi$, littera k quemlibet numerum integrum denotante; cos. $\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$; sin. $\frac{2}{3}\pi = \sqrt{\frac{3}{4}}$; patet, in aequatione cubica pura $x^3 ** - a^3 = 0$, tres eius radices hanc inter se relationem tenere, vt $+1$; $-\frac{1}{2} + \sqrt{-1}\,.\sqrt{\frac{3}{4}}$; $-\frac{1}{2} - \sqrt{-1}\,.\sqrt{\frac{3}{4}}$; hoc est, vt cos. $2k\pi$; cos. $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{-1}$. sin. $\frac{2}{3}\pi$; cos. $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{-1}$. sin. $\frac{2}{3}\pi$; et duarum postremarum factum esse vt $(\text{cos. } \frac{2}{3}\pi)^2 + (\text{sin. } \frac{2}{3}\pi)^2 = +1 = (\text{cos. } 2k\pi)^2$, factum denique omnium trium radicum, $+1\,.\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) = +1$, esse vt cos. $2k\pi$. $(\text{cos. } 2k\pi)^2 = (\text{cos. } 2k\pi)^3$, seu vt cubum sinus totius, cuius basis, $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) = 1$, aequatur quadrato sinus totius. Breuiter: hic Cubus mentitur formam Cubi $\gamma.PT^2$ ex §. XXXXI.

§. 46. Similiter aequatio generalis $x^3 ** + a^3 = 0$, habet quidem suas tres radices, ita vt sit 1) $x = -a = -1.a$; 2) $x = \left(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}\right).a$; 3) $x = \left(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}\right).a$ (§. XXXVI), huius scilicet conditionis, vt sit summa radicum $= 0$, summa factorum ex binis $= 0$, et factum omnium vt -1; hae tamen tres radices non valent pro vllo quatuor cuborum priuatiuorum in §. XXXXIII. descriptorum (§. XXXXIV),

 sed

ſed id ſaltem oſtendunt, ſi habeantur aequationes completae definientes, pro ſingulis iſtis quatuor diuerſis cubis diuerſae; eaedemque ita transformentur, vt Terminus ſecundus, aeque vti in aequatione generali reſpondente, deficiat; quacunque libet trium radicum pro prima aſſumta, tres aequationis transformatae radices eſſe inter ſe, vt -1; $(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}$; $(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}$ (§. XXXVI); atque ſic, vna radice cognita, reliquas, ope huius relationis, expedite formari poſſe. Eſt autem $\frac{+1\mp\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\frac{3}{4}}$. Vnde cum, poſito ſinu toto $= +1$, et ſemiperipheria $= \pi$, ſit coſ. $\pi = -1 =$ coſ. $3\pi =$ coſ. 5π, aut in genere $=$ coſ. $(2k+1)\pi$, littera k quemlibet numerum integrum denotante, et praeterea ſit coſ. $\frac{1}{3}\pi = +\frac{1}{2}$, ſin $\frac{1}{3}\pi = \sqrt{\frac{3}{4}}$; perſpicuum eſt, in aequatione cubica pura $x^3 ** + a^3 = 0$, tres eius radices hanc inter ſe relationem habere, vt -1; $+\frac{1}{2} + \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\frac{3}{4}}$; $+\frac{1}{2} - \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{\frac{3}{4}}$, h. e. vt coſ. $(2k+1)\pi$; coſ. $\frac{1}{3}\pi + \sqrt{-1}\,.$ ſin. $\frac{1}{3}\pi$; coſ. $\frac{1}{3}\pi - \sqrt{-1}\,.$ ſin $\frac{1}{3}\pi$; et duarum poſtremarum factum eſſe vt (coſ. $\frac{1}{3}\pi)^2 +$ (ſin. $\frac{1}{3}\pi)^2$ $= 1 = (-1)^2 = [$coſ. $(2k+1)\pi]^2$, ſeu vt quadratum radicis primae; factum denique ex omnibus tribus radicibus, $-2\,.\,(\frac{+1+\sqrt{-3}}{2})(\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}) = -1$, eſſe vt coſ. $(2k+1)\pi$. $[$coſ. $(2k+1)\pi]^2 = [$coſ. $(2k+1)\pi]^3$, ſeu vt cubum cubo ſinus totius oppoſitum (§. XXXXI), cuius baſis eſt quadratum, prioris baſi quadratae oppoſitum. Vt adeo hic Cubus videatur mentiri formam Cubi α. P t ex §. XXXXI.

§. 47. Quia autem ex aequatione cubica completa Terminus ſecundus tollitur, ſingulas eius tres radices x, h. e. omnes tres Cubi dimenſiones, eadem quantitate

data,

data, nempe ſubtripla ſumma radicum ($\frac{1}{3}m$), in caſu §. XXXXV. minuendo, in caſu §. XXXXVI. augendo; perſpicuum eſt, per modo dictam aequationis cubicae completae transformationem, in aequatione reſultante figuram quantitatis trium dimenſionum [$(x \pm \frac{1}{3}m)^3 = v^3$], de cuius radicibus inueniendis agitur, non mutari, ſed eam manere cubicam, imo etiam differentias radicum in aequatione transformanda et transformata manere easdem. Et, cum in iſto negotio ponendum ſit $v = x \pm \frac{1}{3}m$; patet quoque, valorem cuiuslibet radicis v ad minimum binomii formam habiturum, etſi in aequatione transformanda valor cuiuslibet radicis x monomii formam habere ponatur. Tandem id quoque intelligitur, ſi, ob $v \mp \frac{1}{3}m = x$, ſingulis tribus radicibus diuerſis v inuentis adiiciatur ſubtripla ſumma radicum ($\mp \frac{1}{3}m$), eo ipſo prodire debere ſingulas tres radices x aequationis cubicae completae propoſitae.

§. 48. Iam perſequamur aequationes completas ipſas pro ſingulis quatuor Cubis poſitiuis in §. XXXXII. commemoratis. Cum Cubum α. P T ſolum definiat haec aequatio $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0$; ob rationes in §. XXXXV. et XXXXVI. allatas, ponatur $x = v + a$: fiet $v^3 *** = 0$, ſeu $v = 0$, eritque (per §. XXXV.) 1) $v = +1 \,.\, 0 = 0$; 2) $v = \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2} \,.\, 0 = 0$; 3) $v = \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2} \,.\, 0 = 0$, et hinc, ob $x = v + a$, habetur 1) $x = 0 + a = +a$; 2) $x = 0 + a = +a$; 3) $x = 0 + a = +a$. Habet igitur Cubus primitiuus α. P T tres radices poſitiuas, *etiam quoad formam expreſſionis*, inter ſe aequales.

 Sit

Sit aequatio Cubum $\gamma.PT$ ſolum difiniens $x^3+ax^2-a^2x-a^3=0$: ponendo $x=v-\frac{1}{3}a$, fiet $v^3 * -\frac{4}{3}a^2v-\frac{16}{27}a^3=0$, eritque (per §. XXXIV.) $v=[\frac{8}{27}a^3+\sqrt{(\frac{8^2}{27^2}a^6-\frac{4^3}{9^3})}]^{1:3}+[\frac{8}{27}a^3-\sqrt{(\frac{8^2}{27^2}a^6-\frac{4^3}{9^3})}]^{1:3}$. Eſt autem $\sqrt{(\frac{8^2}{27^2}a^6-\frac{4^3}{9^3}a^6)}=0$. Erit ergo $v=\sqrt[3]{\frac{8}{27}a^3}+\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}a=+1.\frac{4}{3}a$, h. e. 1) $v=A+B=\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}a$; et hinc 2) $v=(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a+(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a=-1.\frac{2}{3}a=-\frac{2}{3}a$; et 3) $v=(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a+(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}).\frac{2}{3}a=-\frac{2}{3}a$ (§. XXXV.), adeoque, ob $x=v-\frac{1}{3}a$, habetur 1) $x=1)v-\frac{1}{3}a=\frac{4}{3}a-\frac{1}{3}a=+a$; 2) $x=2)v-\frac{1}{3}a=-\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}a=-a$; 3) $x=3)v-\frac{1}{3}a=-\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}a=-a$. Proinde in Cubo deriuatiuo $\gamma.PT$ expreſſiones trium radicum $+a$, $-a$, et $-a$, non habent formam radicum aequalium, etſi in eodem abſolute conſiderato omnes tres radices ſeu dimenſiones re vera aequales exiſtant (§. XXXXI).

Pro Cubo $\beta\,Pt$ aequatio definiens eſt $x^3-(2\sqrt{-a^2}-a)x^2-(2a\sqrt{-a^2}+a^2)x-a^3=0$. Faciendo $x=v+\frac{2\sqrt{-a^2}-a}{3}$, fiet $v^3 * -\frac{2a\sqrt{-a^2}}{3}v-\frac{(4a^3-4a^2\sqrt{-a^2})}{27}=0$, et hinc $v=[\frac{2a^3-2a^2\sqrt{-a^2}}{27}+\sqrt{(\frac{(2a^3-a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2}-\frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})}]^{1:3}+[\ldots-\sqrt{(\ldots)}]^{1:3}$ (§. XXXIV). Quare cum ſit $\sqrt{(\frac{(2a^3-2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2}-\frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})}=0$; fiet $v=\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2-2\sqrt{-1})}+\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2-2\sqrt{-1})}$ h. e (per §. XXXVII.) erit 1) $v=\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{-1})+\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{-1})=-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$, $-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}=+1.(-\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2})$; et hinc 2) $v=(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})+(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})=+\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$; et 3) $v=(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})+(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})=+\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$. Vnde, ob $x=v+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a$, fit 1) $x=1)v+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-a$; 2) $x=2)v+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=+\sqrt{-a^2}$; et 3) $x=3)v+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}$

$\sqrt{-a^2}$

$\sqrt{-a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=+\sqrt{-a^2}$. Examen radicis e. g. ſecundae et tertiae facile inſtituitur. Debebit enim eſſe in aequatione definiente $(\sqrt{-a^2})^3-(2\sqrt{-a^2}-a).-a^2-(2a\sqrt{-a^2}+a^2).\sqrt{-a^2}-a^3=0$, h. e. $-a^2\sqrt{-a^2}+2a^2\sqrt{-a^2}-a^3+2a^3-a^2\sqrt{-a^2}-a^3=0$.

Denique Cubus $\delta.Pt$ definitur per hanc aequationem: $x^3+(2\sqrt{-a^2}+a)x^2+(2a\sqrt{-a^2}-a^2)x-a^3=0$. Ponendo $x=v-\frac{(2\sqrt{-a^2}+a)}{3}$, fiet $v^3 * +\frac{2a\sqrt{-a^2}}{3}v-\frac{(4a^3+4a^2\sqrt{-a^2})}{27}=0$ et hinc (§. XXXIV) $v=[\frac{2a^3+2a^2\sqrt{-a^2}}{27}+\sqrt{(\frac{(2a^3+2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2}+\frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})}]^{1:3}+[\ldots-\sqrt{(\ldots)}]^{1:3}$. Quare cum reperiatur pars irrationalis $\mp\sqrt{(\ldots.)}=0$; fiet (per §. XXXVII) $v=\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2+2\sqrt{-1})}+\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2+2\sqrt{-1})}$ $=\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{-1})+\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{-1})$, h. e. erit
$1)v=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}, -\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}=+1.(-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2})$, adeoque
$2)v=(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})+(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})=+\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$;
$3)v=(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})+(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\sqrt{-a^2})=+\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$.
Hinc prodit $1)x=1)v-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-a$;
$2)x=2)v-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-\sqrt{-a^2}$; item
$3)x=3)v-\frac{2}{3}\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-\sqrt{-a^2}$.

§. 49. Eodem modo tractemus aequationes cubicas completas, per quas definiuntur Cubi priuatiuae capacitatis in §. XXXXIII. deſcripti. Nimirum cubum $\gamma.Pt$ definit haec aequatio $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=0$, quae, ponendo $x=v-a$, transformatur in hanc, $v^3 *** =0$, adeoque ob $v=0$, erit $1)v=-1.0=0$; $2)v=(\frac{\pm 1+\sqrt{-3}}{2}).0=0$; $3)v=(\frac{\pm 1-\sqrt{-3}}{2}).0=0$ (§. XXXVI). Vnde, ob $x=v-a$, habetur $1)x=0-a=-a$; item $2)x=-a$; et $3)x=-a$. Habet igitur Cubus $\gamma.Pt$, primitiuo $\alpha.PT$ oppoſitus, tres radices priuatiuas, *etiam quoad formam expreſſionis*, inter ſe aequales.

Pro

Pro Cubo α. P t aequatio definiens est haec: $x^3 - ax^2 - a^2x + a^3 = 0$, quae, ponendo $x = v + \frac{1}{3}a$, transit in hanc: $v^3 * - \frac{4}{3}a^2 v + \frac{16}{27}a^3 = 0$. Vnde fit (§. XXXIV.)

$v = [-\frac{8}{27}a^3 + V(\frac{8^2}{27^2}a^6 - \frac{4^3}{9^3}a^6)]^{1:3} + (\ldots - V(\ldots)]^{1:3} = \sqrt[3]{-\frac{8}{27}a^3} + \sqrt[3]{-\frac{8}{27}a^3}$, h. e. 1) $v = -\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}a = -1.\frac{4}{3}a$; et hinc 2) $v = (\frac{+1+V-3}{2}).\frac{2}{3}a + (\frac{+1-V-3}{2}).\frac{2}{3}a = +\frac{2}{3}a$; et 3) $v = (\frac{+1-V-3}{2}).\frac{2}{3}a + (\frac{+1+V-3}{2}).\frac{2}{3}a = +\frac{2}{3}a$ (§. XXXVI). Vnde, ob $x = v + \frac{1}{3}a$, habetur 1) $x = 1)v + \frac{1}{3}a = -\frac{4}{3}a + \frac{1}{3}a = -a$; 2) $x = 2)v + \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a = +a$; et 3) $x = 3)v + \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a = +a$.

Cubus β. P T definitur per hanc aequationem: $x^3 - (2V - a^2 + a)x^2 + (2aV - a^2 - a^2)x + a^3 = 0$. Haec, ponendo $x = v + \frac{2V - a^2 + a}{3}$, transformatur in sequentem $v^3 * + \frac{2aV - a^2}{3} v + \frac{4a^3 + 4a^2V - a^2}{27} = 0$. Ex qua fit (§. XXXIV) $v = [-\frac{(2a^3 + 2a^2V - a^2)}{27} + V(\frac{(2a^3 + 2a^2V - a^2)^2}{27^2} + \frac{(2aV - a^2)^3}{9^3})]^{1:3} +]- \ldots - V(\ldots)]^{1:3}$. Reperitur autem duorum cuborum particularium pars irrationalis $\mp V(\ldots) = 0$; Erit ergo $v = [\frac{-(2a^3 + 2a^2V - a^2)}{27}]^{1:3} + [-\frac{(2a^3 + 2a^2V - a^2)}{27}]^{1:3}$, adeoque (per §. XXXVII.) erit 1) $v = -\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2 + 2V - 1)} - \frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2 + 2V - 1)} = -\frac{1}{3}a(-1 + V - 1) - \frac{1}{3}a(-1 + V - 1) = +\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}V - a^2 = -1.(-\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}V - a^2)$; et hinc

2) $v = (\frac{+1+V-3}{2})(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}V - a^2) + (\frac{+1-V-3}{2})(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}V - a^2) = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}V - a^2$;
3) $v = (\frac{+1-V-3}{2})(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}V - a^2) + (\frac{+1+V-3}{2})(-\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}V - a^2) = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}V - a^2$. Consequenter, ob $x = v + \frac{2}{3}V - a^2 + \frac{1}{3}a$, habetur 1) $x = 1)v + \frac{2}{3}V - a^2 + \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}V - a^2 + \frac{2}{3}V - a^2 + \frac{1}{3}a = +a$; 2) $x = 2)v + \frac{2}{3}V - a^2 + \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}V - a^2 + \frac{2}{3}V - a^2 + \frac{1}{3}a = +V - a^2$; et 3) $x = 3)v + \frac{2}{3}V - a^2 + \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}V - a^2 + \frac{2}{3}V - a^2 + \frac{1}{3}a = +V - a^2$.

Cubus denique δ. P T ita definitur: $x^3 + (2V - a^2 - a)x^2 - (2aV - a^2 + a^2)x + a^3 = 0$. Haec, ponendo $x = v - \frac{(2V - a^2 - a)}{3}$, transit in hanc: $v^3 * - \frac{2aV - a^2}{3} v + \frac{(4a^3 - 4a^2V - a^2)}{27} = 0$, eritque

eritque $v = [-\frac{(2a^3 - 2a^2\sqrt{-a^2})}{27} + \sqrt{(\frac{(2a^3 - 2a^2\sqrt{-a^2})^2}{27^2} - \frac{(2a\sqrt{-a^2})^3}{9^3})}]^{1:3} + [-\ldots - \sqrt{(\ldots.)}]^{1:3}$, vbi cum reperiatur pars irrationalis $\mp\sqrt{(\ldots)} = 0$; fiet $v = -\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$, $-\frac{1}{3}a\sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$, ſeu $v = -\frac{1}{3}a(-1 - \sqrt{-1})$, $-\frac{1}{2}a(-1 - \sqrt{-1})$ (§. XXXVII) $= \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2}$. Cum itaque ſit 1) $v = -1.(-\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2}$; erit 2) $v = (\frac{+1+\sqrt{-3}}{2})(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + \frac{(+1-\sqrt{-3})}{2}(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$; et 3) $v = \frac{(+1-\sqrt{-3})}{2}(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) + \frac{(+1+\sqrt{-3})}{2}(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}) = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2}$. Vnde, ob $x = v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a$, habetur

1) $x = 1)v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = +a$;
2) $x = 2)v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\sqrt{-a^2}$;
3) $x = 3)v - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{-a^2} - \frac{2}{3}\sqrt{-a^2} + \frac{1}{3}a = -\sqrt{-a^2}$.

§. 50. Quodſi ergo Formulae ex §. XXXXVIII. et XXXXIX. inter ſe conferantur, apparebit, quales eſſe debeant aequationes atque radices pro Cubis inter ſe oppoſitis. Nimirum ſi fuerit 1) $x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3 = 0$; adeoque 1) $x = \mp a$; 2) $x = \mp a$; 3) $x = \mp a$; valentibus ſignis inferioribus, prodit aequatio cum ſuis radicibus pro Cubo α, P T; ſi autem valeant ſigna ſuperiora, habebitur aequatio cum ſuis radicibus pro Cubo oppoſito γ. Pt (§. XXXXI).

Si fuerit 2) $x^3 \pm (2\sqrt{-a^2} + a)x^2 + (2a\sqrt{-a^2} - a^2)x \mp a^3 = 0$, adeoque 1) $x = \mp a$; 2) $x = \mp\sqrt{-a^2}$; 3) $x = \mp\sqrt{-a^2}$: ſi ſigna inferiora valeant, habetur aequatio cum ſuis radicibus pro Cubo β. P T; ſi autem valeant ſigna ſuperiora, pro Cubo oppoſito δ. Pt (§. XXXXI).

Si fuerit 3) $x^3 \pm ax^2 - a^2x \mp a^3 = 0$; adeoque 1) $x = \pm a$; 2) $x = \mp a$; 3) $x = \mp a$; adhibendo ſigno inferiora, prodit aequatio cum ſuis radicibus pro Cubo α. Pt; ſed, ſignis ſuperioribus vtendo, pro Cubo oppoſito γ. PT (§. XXXXI).

Denique 4) Si fuerit $x^3 \pm (2\sqrt{-a^2}-a)x^2-(2a\sqrt{-a^2}+a^2)$ $x \pm a^3 = 0$, adeoque 1) $x = \pm a$; 2) $x = \mp \sqrt{-a^2}$; 3) $x = \mp \sqrt{-a^2}$: valentibus signis inferioribus habetur aequatio cum suis radicibus pro Cubo β. P t; sin autem signa superiora adhibentur, pro Cubo opposito δ. P T (§. XXXXI).

§. 51. Quodsi paullo attentius consideremus octo illos Cubos (§. XXXXII. XXXXIII.) ad idem punctum P coniugatos, et absolute considerando inter se aequales; apparebit, inter eos tantum dari duos, nempe Cubum α. P T et γ. Pt, eius conditionis, vt eorum omnes tres radices, etiam quoad formam expressionis, inter se aequales sint (quo in casu, secundo Termino in aequatione definiente sublato, tota aequatio transformata, v^3 * * * $= 0$, nullescit), reliquos vero 6 Cubos eius conditionis esse, vt duae saltem radices, seu dimensiones, etiam quoad formam expressionis, inter se aequales existant (quo in casu, terminum secundum in aequatione definiente tollendo, in aequatione transformata solus Terminus secundus deficit, et in Formula pro 1) v valor partis irrationalis $\mp \sqrt{(Q^2 \pm P^3)}$ fit $= 0$) (§. XXXXVIII. XXXXIX). Quodsi ergo Cubus deriuatiuus per aequationem definientem propositus, talis fuerit, vt trium radicum, aut dimensionum (re vera aequalium) nulla alteri, quoad formam expressionis, aequalis sit, tum nec esse poterit pars irrationalis $\mp \sqrt{(Q^2 \pm P^3)} = 0$, sed cubus propositus aeque bene ad duos Cubos ex illis octo in §. XXXXII. et XXXXIII. descriptis, reduci poterit, e. g. vel ad Cubum γ. Pt, vel ad Cubum α. Pt, quorum scilicet solae bases inter se oppositae sint. E. gr. sit aequatio biquadratica pura x^4 * * * $-a^4 = 0$, seu $(x^2-a^2)(x^2+a^2) = 0$, cuius

adeo

adeo radices ſunt $+a$; $-a$; $+\sqrt{-a^2}$; $-\sqrt{-a^2}$. Hac aequatione, per factorem ſimplicem $x-a=0$, diuiſa, oritur haec cubica: $x^3+ax^2+a^2x+a^3=0$, cuius forma a formis in §. L. datis diſſidere videtur. Iam ponamus, huius radices (quae ſunt $-a$; $+\sqrt{-a^2}$; $-\sqrt{-a^2}$) ignorari, et demum, methodo ordinaria adhibita, eſſe inueſtigandas. Ponendo igitur $x=v-\frac{1}{3}a$, fiet $v^3 * +\frac{2}{3}a^2v + \frac{20}{27}a^3=0$, et hinc $v=[\frac{-10a^3}{27}+\sqrt{(\frac{10^2}{27^2}a^6+\frac{2^3}{9^3}a^6)}]^{1:3} + [-\ldots-\sqrt{(\ldots)}]^{1:3}=\frac{1}{3}a[-10+6\sqrt{3}]^{1:3}+\frac{1}{3}a[-10-6\sqrt{3}]^{1:3} =\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{3})+\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{3})$ (§. XXXVII) $=-\frac{2}{3}a$. Cum naque ſit 1) $v=A+B=\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{3})+\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{3})$; erit
2) $v=\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{3})(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})+\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{3})(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})=\frac{1}{3}a(1+3\sqrt{-1})=\frac{1}{3}a+\sqrt{-a^2}$;
3) $v=\frac{1}{3}a(-1+\sqrt{3})(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2})+\frac{1}{3}a(-1-\sqrt{3})(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})=\frac{1}{3}a(1-3\sqrt{-1})=\frac{1}{3}a-\sqrt{-a^2}$.
Vnde, ob $x=v-\frac{1}{3}a$, habetur 1) $x=$ 1) $v-\frac{1}{3}a=-\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}a=-a$;
2) $x=$ 2) $v-\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a+\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=+\sqrt{-a^2}$;
3) $x=$ 3) $v-\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a-\sqrt{-a^2}-\frac{1}{3}a=-\sqrt{-a^2}$; atque adeo tres radices inuentae coincidunt cum tribus radicibus aliunde cognitis. Iam vero ex §. VIII. et *Fig* 10. conſtat, Fig. 10. quantitatem imaginariam $+\sqrt{-a^2}$, in area β, alteram autem, $-\sqrt{-a^2}$, in area δ aſſignandam eſſe, ita quidem, vt, pro baſi Cubi aſſignanda, ſi $+\sqrt{-a^2}$ explicetur per latitudinem Pr ex quadrato β ſumtam, $-\sqrt{-a^2}$ explicanda ſit per longitudinem Pq ex □to δ ſumtam; et contra, ſi $+\sqrt{-a^2}$ explicetur per longitudinem PQ ex □to β ſumtam, $-\sqrt{-a^2}$ explicanda ſit per latitudinem PR ex □to δ ſumtam. In priore igitur caſu fiet baſis Cubi = facto $+\sqrt{-a^2}.-\sqrt{-a^2}$ $=$ Pr. Pq = □to γ $=-a.-a=+a^2$; in poſteriore autem caſu = PQ.PR = □toα $=+a.+a=+a^2$. Quare cum tertia (ſeu inuentarum prima) radix $-a$ explican-

 da

da ſit per altitudinem deorſum ſumtam P t; ex his tribus dimenſionibus aſſignatis orietur in priore caſu Cubus γ. $Pt = +a^2 . -a = -a^3$, in poſteriore autem caſu Cubus α. $Pt = +a^2 . -a = -a^3$. Examen radicis ſecundae et tertiae facile inſtituitur. Eſt enim $x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 = (\mp\sqrt{-a^2})^3 + a . -a^2 + a^2 . \mp\sqrt{-a^2} + a^3 = \pm a^2\sqrt{-a^2} - a^3 \mp a^2\sqrt{-a^2} + a^3 = 0$.

§. 52. Tandem conſideremus eiusmodi aequationem cubicam, in qua tres cubi reſpondentes nec quoad formam expreſſionis, nec abſolute conſiderati inter ſe aequales ſunt: manifeſtum eſt, eam continere debere tres radices, et quoad formam expreſſionis, et abſolute conſideratas, inter ſe inaequales, et harum primam valere debere pro ſingulis tribus dimenſionibus Cubi primi, ſecundam pro ſecundi, tertiam pro tertii ſingulis tribus dimenſionibus. E. gr. ſit propoſita aequatio $v^3 * -7v-6=0$, quae cum pertineat ad Caſum I. ex §. XXXIII et XXXIV, comparanda erit cum hac $v^3 * -3Pv - 2Q = 0$. Habetur ergo $P = \frac{7}{3}$; $Q = 3$, eritque 1) $v = [Q + \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3} + [Q - \sqrt{(Q^2 - P^3)}]^{1:3} = [3 + \sqrt{(3^2 - \frac{7^3}{3^3})}]^{1:3} + [3 - \sqrt{(3^2 - \frac{7^3}{3^3})}]^{1:3} = [3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}]^{1:3} + [3 - \frac{10}{9}\sqrt{-3}]^{1:3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}, + \frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{-3}$ (§. XXXVII.) $= +3$; et hinc 2) $v = \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}) + \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{-3}) = -\frac{2}{2} + \frac{4}{6}\sqrt{-3}, -\frac{2}{2} - \frac{4}{6}\sqrt{-3} = -2$; et 3) $v = \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}) + (\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{-3}) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\sqrt{-3}, -\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\sqrt{-3} = -1$. Ex quo apparet, eſſe $3 \mp \frac{10}{9}\sqrt{-3} = (\frac{3}{2} \mp \frac{1}{6}\sqrt{-3})^3 = (-\frac{2}{2} \mp \frac{4}{6}\sqrt{-3})^3 = (\frac{1}{2} \pm \frac{5}{6}\sqrt{-3})^3$: id quod, examine facto, facile comprobatur.

§. 53.

§. 53. Etsi vero in eiusmodi singulis tribus radicibus, quales in §. LII. inuentae sunt, quantitates imaginariae se mutuo destruant, ita vt in praesenti exemplo sit maxima $v = +3$, media $v = -1$, minima $v = -2$, adeoque earum Cubi haud difficulter ita exhiberi possint, vt aequationi propositae (e. g. huic $v^3 * -7v - 6 = 0$) satis fiat; nihilo minus, cum nunc agatur de quantitatum imaginariarum realitate atque assignabilitate ostendenda, res ipsa postulare videtur, vt, saltem in hoc vnico exemplo, aequationem, retentis quantitatibus imaginariis, construamus. Nimirum

1. Factis quatuor quadratis maioribus α, β, γ, δ ad idem punctum P coniugatis, obsolute considerando, aequalibus, quorum latera sint $= PI' = 3$, in recta PI' fiat $PE' = \frac{1}{2}PI' = \frac{3}{2}$, et $Pw = \frac{1}{3}PI' = 1$, ductaque $w\lambda$ ad PI' perpendiculari, super diametro PI describatur semicirculus $P\lambda I'$: erit chorda $P\lambda = Pa = Pb = \sqrt{3}$, et □tum $Pacb = \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$. Fig. 18.

2. Recta Pa in 6 partes aequales secta, fiat $P\mu' = \frac{1}{6}Pa = \frac{1}{6}\sqrt{3}$; item $P\mu'' = \frac{5}{6}Pa = \frac{5}{6}\sqrt{3}$; et $P\mu''' = \frac{4}{6}Pa = \frac{4}{6}\sqrt{3}$.

3. Assumto latere $P\mu' = \frac{1}{6}\sqrt{3}$, fiant quatuor □ta minima α', β', γ', δ', ad P coniugata, absolute considerando, aequalia: erit □tum $\alpha' = \frac{1}{6}\sqrt{3}.\frac{1}{6}\sqrt{3} = \frac{3}{36}$, sed □tum $\beta' = +\frac{1}{6}\sqrt{3}.-\frac{1}{6}\sqrt{3} = -\frac{3}{36}$ (§. VIII.), et $\sqrt{}$ □ti $\beta' = +\frac{1}{6}\sqrt{-3}$, sed $\sqrt{}$ □ti $\delta' = -\sqrt{}$ □ti $\beta' = -\frac{1}{6}\sqrt{-3}$ (§ VIII).

Cum itaque sit I^{ma} $v = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{-3}$, $+\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{-3}$; erit

$$\text{I}^{mi}\, v = \left\{ \begin{matrix} PE' \\ PA \end{matrix} \right\} + \sqrt{\square ti\,\beta'} + \left\{ \begin{matrix} E'I' \\ A'K' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} +\sqrt{\square ti\,\delta'} \\ -\sqrt{\square ti\,\beta'} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} PE' + {}'EI' \\ PA' + {}'AK' \end{matrix} \right\} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2} = \left\{ \begin{matrix} PI' \\ PK' \end{matrix} \right\} = +3,$$

adeoque I^{mi} Cubi basis $= \square to\, PI'T'K' = \square to$ maximo $\alpha = 3^2$, et altitudo PL' sursum tendens $= PI' = 3$, et hinc I^{mus} Cubus $v^3 = \alpha . PL' = 3^2 . 3 = 27$.

4. Assumto latere $P\mu'' = \frac{5}{6}\sqrt{3}$, fiant quatuor $\square ta$ α'', β'', γ'', δ'', ad P coniugata, absolute considerando, aequalia: erit $\square tum$ α'', vel $\gamma'' = \mp \frac{5}{6}\sqrt{3} . \mp \frac{5}{6}\sqrt{3} = \frac{25.3}{36}$, sed $\square tum$ β'', vel $\delta'' = \frac{5}{6}\sqrt{3} . -\frac{5}{6}\sqrt{3} = -\frac{25.3}{36}$, et $\sqrt{\square ti\,\beta''} = +\frac{5}{6}\sqrt{-3}$, sed $\sqrt{\square ti\,\delta''} = -\sqrt{\square ti\,\beta''} = -\frac{5}{6}\sqrt{-3}$. Proinde facta $PE'' = PA'' = {}''EI'' = {}''AK'' = \frac{1}{2}P\varpi = \frac{1}{2}$, cum sit $PE'' = PA'' = {}''EI'' = {}''AK'' = -\frac{1}{2}P\varpi = -\frac{1}{2}$ (§. III.); erit II^{da} $v = -\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\sqrt{-3}$, hoc est,

$$= \left\{ \begin{matrix} PE'' \\ PA'' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} +\sqrt{\square ti\,\delta''} \\ -\sqrt{\square ti\,\beta''} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} E''I'' \\ A''K'' \end{matrix} \right\} + \sqrt{\square ti\,\beta''} = \left\{ \begin{matrix} PI'' \\ PK'' \end{matrix} \right\} = -\tfrac{2}{2},$$

adeoque II^{di} Cubi basis $= \square to\, PI''T''K''$, et altitudo Pl'', deorsum tendens $= PI''$, consequenter II^{dus} Cubus $v^3 = \square PI''T''K'' . Pl'' = (-\frac{2}{2} . -\frac{2}{2}) . -\frac{2}{2} = -\frac{8}{8} = -1$.

5. Denique assumto latere $P\mu''' = \frac{4}{6}\sqrt{3}$, construantur quatuor quadrata α''', β''', γ''', δ''', ad P coniugata, absolute considerando, aequalia, fiatque $PE''' = {}'''EI''' = PA''' = {}'''AK''' = 2\,PE''' = 2 . -\frac{1}{2} = -\frac{2}{2}$; erit $\square tum$ α''', vel $\gamma''' = \mp \frac{4}{6}\sqrt{3} . \mp \frac{4}{6}\sqrt{3} = \frac{16.3}{36}$, sed $\square tum$ β'', vel $\delta''' = \mp \frac{4}{6}\sqrt{3} . \pm \frac{4}{6}\sqrt{3} = -\frac{16.3}{36}$, et $\sqrt{\square ti\,\beta'''} = +\frac{4}{6}\sqrt{-3}$,

$\sqrt{-3}$, sed $\sqrt{\square ti\, \delta'''} = -\sqrt{\square ti\, \beta'''} = -\frac{4}{6}\sqrt{-3}$, adeoque III^tia^ $v = -\frac{2}{3} + \frac{4}{6}\sqrt{-3}$, $-\frac{2}{3} - \frac{4}{6}\sqrt{-3} =$.

$$\left\{\begin{matrix} PE''' \\ PA''' \end{matrix}\right\} + \sqrt{\square ti\beta'''} + \left\{\begin{matrix} E'''I''' \\ A'''K''' \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} +\sqrt{\square ti\delta'''} \\ -\sqrt{\square ti\beta'''} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} PE''' + '''EI''' \\ PA''' + '''AK''' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} PI''' \\ PK''' \end{matrix}\right\} = -\tfrac{4}{2} = -2,$$

adeoque III^tii^ Cubi basis $= \square to\, PI'''T'''K'''$, et altitudo $P\,l'''$ deorsum tendens $= PI'''$, consequenter III^tius^ Cubus $v^3 = \square PI'''\,T'''\,K'''.\ Pl''' = (-\tfrac{4}{2}.\ -\tfrac{4}{2}).\ -\tfrac{4}{2} = -\tfrac{64}{8} = -8.$

SOLVTIO

SOLVTIO PROBLEMATIS GEOMETRICI.

AVCTORE

L. EULERO,

Problema.

Tab. IV Fig. 1. Datis Diametris coniugatis $E e$, $F f$ ellipsis tam magnitudine quam positione, inuenire axes coniugatos tam magnitudine quam longitudine.

Constructio.

Iungatur E F, et ex centro ellipsis C ducatur recta C G ita vt ang: F C G = ang: E C F; tum ducatur F G ita vt ang: C F G = ang: C E F; sicque triangulum C F G simile fiat triangulo C E F. Deinde iuncta e G angulus C e G bisecetur recta e H huicque ex centro C parallela educatur C I, huicque constituatur perpendicularis C K, quibus recta per E alteri diametro F f parallela acta I E K occurrat in punctis I et K. Ex E porro tam in C I quam C K demittantur perpendicula E L et E M, atque in C I capiatur C A media proportionalis inter C L et C I, itemque in C K capiatur C B media proportionalis inter C M et C K, erunt C A et C B semiaxes principales, tam positione quam magnitudine, determinati.

Alia

Alia Conſtructio.

Sint C E et C F ſemidiametri coniugatae, ſtatuatur E D = E C, vt C E D ſit triangulum iſoſceles, et capiantur E G = E H = C F, iungatur C H ipſique parallela ducatur G I rectam E D ſecans in I. Per I agatur C I K = C E, iunctaque E K biſecetur in M, erit recta C M poſitio alterius axis, eique perpendicularis C R poſitio alterius axis coniugati. Ex F demittatur quoque in C M perpendiculum F N, quo producto in L vt ſit N L = F N erunt E K et F L ordinatae ad axem C M, et cum inſuper dentur tangentes in E et F et in L, eſt enim tangens E P parallela C F et tangens L Q parallela C K, hinc vtriusque ſemiaxis quantitas facile determinatur. Erit nempe alter ſemiaxis C A media proportionalis inter C M et C P, et alter C B media proportionalis inter C R et C Q ducta L R ad C Q perpendiculari. Fig. 2.

Alia Conſtructio.

Cum diametri coniugatae in centro ſe ad angulos obliquos inteſecent, quorum alter acutus, alter obtuſus, eligantur binae ſemidiametri coniugatae C E, C F angulum acutum E C F conſtituentur, ſtatuaturque vt ante E D = E C, ac fiat E G = E H = C F, tum ductae, C H per G parallela agatur G I: iunctaque C I angulus E C I biſecetur recta C U, quae aequalis capiatur mediae proportionali inter C E et C I, eritque U alter focus: vnde ſimul alter e regione ſitus habebitur: Datis autem focis et puncto in ellipſi axes principales facile aſſignantur. Fig. 3.

Demonſtratio
harum Conſtructionum.

Fig. 4. Sit $E\,C\,F$ quadrans ellipticus, in quo datae ſunt ſemidiametri coniugatae $CE = e$, $CF = f$, vna cum angulo intercepto $ECF = \theta$. Sit CA alter ſemiaxium principalium cuius tam poſitio quam quantitas quaeritur; Ponatur ergo primum pro eius poſitione inuenienda angulus $ECA = \Phi$, huic angulo aequalis ſtatuatur angulus ACM, vt ſit angulus $ECM = 2\,\Phi$, et quia puncta E et M ab axe CA aequidiſtant, a centro quoque C aequidiſtabunt, eritque propterea $CM = CE = e$. Ducatur MP ipſi CF parallela, eritque angulus $EPM = ECF = \theta$.

Nunc in triangulo CPM praeter latus $CM = e$ habentur omnes anguli nempe: $EPM = \theta$; $PCM = 2\,\Phi$; et $CMP = \theta - 2\,\Phi$; vnde ex Trigonometria erit:

ſin. $EPM : CM =$ ſin. $PCM : PM =$ ſin. $CMP : CP$

ſeu ſin. $\theta : e =$ ſin. $2\,\Phi : PM =$ ſin. $(\theta - 2\,\Phi) : CP$

Hinc itaque obtinetur:

$$PM = \frac{e \text{ ſin. } 2\,\Phi}{\text{ſin. } \theta} \text{ et } CP = \frac{e \text{ ſin. } (\theta - 2\,\Phi)}{\text{ſin. } \theta}$$

Iam ex natura ellipſis eſt

$$PM^2 = \frac{BF^2}{CE^2}(CE^2 - CP^2) \text{ ſiue}$$

$$CE^2 . PM^2 + CF^2 . CP^2 = CE^2 . CF^2$$

vbi ſi valores pro PM et CP ſubſtituantur, orietur

$$\frac{e^4 \text{ ſin. } 2\,\Phi^2}{\text{ſin. } \theta^2} + \frac{eeff \text{ ſin. } (\theta - 2\,\Phi)^2}{\text{ſin. } \theta^2} = eeff$$

quae diuiſa per ee et multiplicata per ſin θ^2, abit in

$$ee \text{ ſin. } 2\,\Phi^2 + ff \text{ ſin. } (\theta - 2\,\Phi)^2 = ff \text{ ſin. } \theta^2.$$

At eſt ſin. $(\theta - 2\,\Phi) =$ ſin. θ coſ. $2\,\Phi$ - coſ. θ ſin. $2\,\Phi$, ideoque ſin.

$\sin.(\theta-2\Phi)^2 = \sin.\theta^2 \cos.2\Phi^2 - 2\sin.\theta \cos.\theta \sin.2\Phi \cos.2\Phi + \cos.\theta^2 \sin.2\Phi^2$

Vnde cum sit $ee \sin.2\Phi^2 = ff(\sin.\theta^2 - \sin.(\theta-2\Phi)^2)$ erit

ob $1 - \cos.2\Phi^2 = \sin.2\Phi^2$:

$\sin\theta^2 - \sin.(\theta-2\Phi)^2 = \sin.\theta^2 \sin.2\Phi^2 + 2\sin.\theta \cos.\theta \sin.2\Phi \cos.2\Phi - \cos.\theta^2 \sin.2\Phi^2$

At est $2\sin.\theta \cos.\theta = \sin.2\theta$ et $\cos.\theta^2 - \sin.\theta^2 = \cos.2\theta$, ergo

$\sin.\theta^2 - \sin.(\theta-2\Phi)^2 = \sin.2\theta \sin.2\Phi \cos.2\Phi - \cos.2\theta \sin.2\Phi^2$

sicque erit

$$ee \sin.2\Phi^2 = ff \sin.2\theta \sin.2\Phi \cos.2\Phi - ff \cos.2\theta \sin.2\Phi^2$$

quae diuisa per $\sin.2\Phi$ dabit

$$ee \sin.2\Phi = ff \sin.2\theta \cos.2\Phi - ff \cos.2\theta \sin.2\Phi$$

ex qua tandem elicitur:

$$\frac{\sin.2\Phi}{\cos.2\Phi} = \text{tang.}\, 2\Phi = \frac{ff \sin.2\theta}{ee + ff \cos.2\theta}$$

Inuento ergo angulo $ECM = 2\Phi$ cuius tangens est $= \frac{ff \sin.2\theta}{ee + ff \cos.2\theta}$; si hic angulus bisecetur recta CA, haec iam erit positio alterius axis principalis, cuius quantitas ita definitur.

Demisso ex E in CA perpendiculo ER, ductaque ad E tangente ET, quae ipsi CF erit parallela, donec ipsi CA productae occurrat in T, ex natura tangentis constat fore CA mediam proportionalem inter CR et CT. Iam ob $CE = e$ et $ECA = \Phi$ erit $ER = e \sin.\Phi$ et $CR = e \cos.\Phi$. Tum ob ang: $CTE = \theta - \Phi$ erit $ET = \frac{e \sin.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)}$ et $CT = \frac{e \sin.\theta}{\sin.(\theta-\Phi)}$.

Hinc itaque erit:

semiaxis $CA = e\sqrt{\frac{\sin.\theta \cos.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi)}}$.

Alter semiaxis ad CA erit normalis, qui si intelligatur linea CB repraesentari, cum sit

 $RE^2 =$

$RE^2 = \frac{CB^2}{CA^2}(CA^2 - CR^2)$, ex natura ellipsis
erit $CB = \frac{CA.RE}{\sqrt{(CA^2 - CR^2)}}$.
Iam est $CA.RE = ee \text{ sin.} \Phi \sqrt{\frac{\text{sin.}\theta \text{ cos.}\Phi}{\text{sin.}(\theta - \Phi)}}$
$\sqrt{(CA^2 - CR^2)} = \sqrt{\left(\frac{ee \text{ sin.}\theta \text{ cos.}\Phi}{\text{sin.}(\theta - \Phi)} - ee \text{ cos.}\Phi^2\right)}$ seu
$\sqrt{(CA^2 - CR^2)} = e\sqrt{\frac{\text{cos.}\Phi}{\text{sin.}(\theta - \Phi)}}\,(\text{sin.}\theta - \text{sin.}(\theta - \Phi)\text{cos.}\Phi)$
Cum autem sit $\theta = \theta - \Phi, + \Phi$ erit
$\text{sin.}\theta = \text{sin.}(\theta - \Phi)\text{cos.}\Phi + \text{cos.}(\theta - \Phi)\text{sin.}\Phi$; ex quo habebitur
$\sqrt{(CA^2 - CR^2)} = e\sqrt{\frac{\text{cos.}(\theta - \Phi)\text{sin.}\Phi \text{ cos.}\Phi}{\text{sin.}(\theta - \Phi)}}$
Ergo prodibit alter semiaxis.
$CB = e \text{ sin.}\Phi \sqrt{\frac{\text{sin.}\theta}{\text{cos.}(\theta - \Phi)\text{sin.}\Phi}} = e\sqrt{\frac{\text{sin.}\theta \text{ sin.}\Phi}{\text{cos.}(\theta - \Phi)}}$.
Idem hic calculus locum habebit, si figura ad alteram semidiametrum datam $CF = f$ accommodetur, tum autem quantitates e et f atque anguli Φ et $\theta - \Phi$ inter se permutari debent; vnde demum orietur.
$CA = f\sqrt{\frac{\text{sin.}\theta \text{ cos.}(\theta - \Phi)}{\text{sin.}\Phi}}$ et $CB = f\sqrt{\frac{\text{sin.}\theta \text{ sin.}(\theta - \Phi)}{\text{cos.}\Phi}}$
si ergo axes coniugatos quaesitos ponamus
alterum $CA = a$, alterum $CB = b$ erit
$a = e\sqrt{\frac{\text{sin.}\theta \text{ cos.}\Phi}{\text{sin.}(\theta - \Phi)}} = f\sqrt{\frac{\text{sin.}\theta \text{ cos.}(\theta - \Phi)}{\text{sin.}\Phi}}$
$b = e\sqrt{\frac{\text{sin.}\theta \text{ sin.}\Phi}{\text{cos.}(\theta - \Phi)}} = f\sqrt{\frac{\text{sin.}\theta \text{ sin.}(\theta - \Phi)}{\text{cos.}\Phi}}$.
Hinc erit primo $ab = ef \text{ sin.}\theta$, qua aequatione continetur aequalitas parallelogrammorum circa diametros coniugatas descriptorum:

Deinde hinc etiam demum angulum Φ determinare poterimus; erit enim
$\frac{ee \text{ sin.}\theta \text{ cos.}\Phi}{\text{sin.}(\theta - \Phi)} = \frac{ff \text{ sin.}\theta \text{ cos.}(\theta - \Phi)}{\text{sin.}\Phi}$
seu $ee \text{ sin.} 2\Phi = ff \text{ sin.} 2(\theta - \Phi) = ff \text{ sin.} 2\theta \text{ cos.} 2\Phi - ff \text{ cos.} 2\theta \text{ sin.} 2\Phi$
vnde

vnde fit vt ante:

$$\frac{\text{fin. } 2\,\Phi}{\text{cof. } 2\,\Phi} = \text{tang. } 2\,\Phi = \frac{ff\,\text{fin. } 2\,\theta}{ee + ff\,\text{cof. } 2\,\theta}.$$

Ex quatuor fuperioribus formulis quoque obtinemus:

$$\frac{\text{fin. } (\theta - \Phi)}{\text{cof. } \Phi} = \frac{ee\,\text{fin. } \theta}{aa} = \frac{bb}{ff\,\text{fin. } \theta} = A$$

$$\frac{\text{cof. } (\theta - \Phi)}{\text{fin. } \Phi} = \frac{aa}{ff\,\text{fin. } \theta} = \frac{ee\,\text{fin. } \theta}{bb} = B$$

vnde fit

$$\text{fin. } \theta - \frac{\text{cof. } \theta\,\text{fin. } \Phi}{\text{cof. } \Phi} = A \text{ et } \frac{\text{cof. } \theta\,\text{cof. } \Phi}{\text{fin. } \Phi} + \text{fin. } \theta = B$$

$$\text{ergo } \frac{\text{cof. } \theta\,\text{fin. } \Phi}{\text{cof. } \Phi} = \text{fin. } \theta - A \text{ et } \frac{\text{cof. } \theta\,\text{cof. } \Phi}{\text{fin. } \theta} = B - \text{fin. } \theta$$

quae aequationes inuicem multiplicatae praebent:

$\text{cof. } \theta^2 = (A+B)\,\text{fin. } \theta - AB - \text{fin. } \theta^2$ feu $1 + AB = (A+B)\,\text{fin. } \theta$.

Cum iam A et B geminos habeant valores, erit

$$AB = \frac{ee}{ff} \text{ et } (A+B)\,\text{fin. } \theta = \frac{bb}{ff} + \frac{aa}{ff}$$

vnde fit $1 + \frac{ee}{ff} = \frac{aa+bb}{ff}$, ideoque hinc ifta nota ellipfeos proprietas refultat: $aa + bb = ee + ff$.

Porro fi alterum focum ponamus in U, erit vti conftat

$$CU = \sqrt{(aa-bb)} = \sqrt[4]{(aa-bb)^2}$$

at $(aa-bb)^2 = (aa+bb)^2 - 4\,aabb$.

Cum igitur fit $aa + bb = ee + ff$ et $ab = ef$ fin. θ erit

$$CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 + 2\,eeff(1 - 2\,\text{fin. } \theta^2)}$$

verum eft $1 - 2\,\text{fin. } \theta^2 = \text{cof. } 2\,\theta$, hincque obtinetur:

$$CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 - 2\,eeff.\,\text{cof. } 2\theta)}$$

His inuentis ratio conftructionum datarum fiet perfpicua:

Pro I. *Conftructione*. Ob $ECF = FCG = \theta$ erit ECG Fig. 1. 2θ; et cum fit $EC(e) : CF(f) = CF(f) : CG$ erit $CG = \frac{ff}{e}$; Porro ducta eG erit tang. $CeG = \frac{CG\,\text{fin. } eCG}{Ce - CG\,\text{cof. } eCG}$

At $Ce = e$; fin. $eCG =$ fin. 2θ et cof. $eCG = -$cof. 2θ, vnde fit tang. $CeG = \frac{ff \text{ fin. } 2\theta}{ee + ff \text{ cof. } 2\theta}$ quae eft expreffio ante pro tang. 2Φ inuenta. Erit ergo $CeG = 2\Phi$, anguloque CeG bifecto per eH erit angulus CeH eique aequalis $ECI = \Phi$. Vnde recta CI erit pofitio alterius axis; eique normalis CK dabit pofitionem alterius. Deinde recta IEK per E ipfi CF parallela ducta eft tangens ellipfis in E, quare fi ex E in vtrumque axem perpendicula EL, EM demittantur, femiaxis CA erit media proportionalis inter CL et CI, itemque femiaxis CB media proportionalis inter CM et CK, plane vti conftructio habet.

Fig. 2. *Pro II. Conftructione.* Ob triangulum CED ifofceles et angulum $ECD = FDC = \theta$ erit ang: $CED = 180° - 2\theta$. Deinde ob $EC = e$, $EG = EH = CF = f$, quia GI ipfi CH eft parallela, erit $EI = \frac{ff}{e}$. Porro eft tangens $ECI = \frac{EI \text{ fin. } CED}{CE - EI \text{ cof. } CED}$ ergo ob fin. $CED =$ fin. 2θ et cof. $CED = -$ cof. 2θ habebitur tangens $ECI = \frac{ff \text{ fin. } 2\theta}{ee + ff \text{ cof. } 2\theta}$, eritque ergo $ECI = 2\Phi$; vnde fumta $CK = CE = e$, bifectaque EK in M, recta CM angulum $ECK = 2\Phi$ bifecabit, ita vt fit $ECM = \Phi$, ideoque $CMAP$ pofitio alterius axis, cuius femiffis quantitas CA vt ante definitur, et determinatio alterius femiaxis CB ex ipfa conftructione eft manifefta.

Fig. 3 *Pro III. Conftructione.* Ex ratione praecedentis conftructionis intelligitur rectam CU angulum ECI bifecantem dare pofitionem axis transuerfi. Cum igitur fit $CE = e$, $EI = \frac{ff}{e}$ et $CEI = 180° - 2\theta$ et erit $CI = \sqrt{(CE^2 + EI^2 - 2\, CE.EI \text{ cof. } CEI)} = \sqrt{(ee + \frac{f^4}{ee} + 2ff \text{ cof. } 2\theta)}$ $= \frac{1}{e}\sqrt{(e^4 + f^4 + 2eeff \text{ cof. } 2\theta)}$.

Hinc

Hinc cum ſit CU media proportionalis inter CE et CI erit $CU = \sqrt{e.\tfrac{1}{e}\sqrt{(e^4 + f^4 + 2eeff \,\mathrm{coſ.}\, 2\theta)}}$

ſeu $CU = \sqrt[4]{(e^4 + f^4 + 2eeff \,\mathrm{coſ.}\, 2\theta)}$.

Ex qua expreſſione manifeſtum eſt fore U alterum ellipſeos focum, vnde ſimul alter focus innoteſcit. Hic tantum certum eſſe oportet, rectam CU eſſe poſitionem axis transuerſi non vero coniugati; ſed in hoc error facile euitatur, ſi perpendamus, axem transuerſum ſemper intra angulum acutum, quem diametri coniugatae conſtituunt, cadere.

Verum vt hae conſtructiones faciles videntur, tamen fateri cogor, conſtructionem, quam *Pappus Alexandrinus* ſine demonſtratione quidem exhibuit, his palmam longe praeripere. Quoniam vero demonſtrationem non addidit, eamque *Commentator eius Commendinus* non ſatis feliciter ſupplere conatus eſt, hic non ſolum conſtructionem *Pappi*, ſed etiam eius rationem coronidis loco ſubiungam.

Sint igitur CE et CF ſemidiametri ellipſis datae, Fig. 5. ac per F agatur ipſi CE parallela indefinita, quae ellipſin in F tanget. Cadant axes principales in rectas CG et CH, atque perſpicuum eſt, ſi puncta G et H eſſent cognita, poſitionem axium principalium inde determinari. Totum negotium ergo huc redit, vt puncta G et H definiantur. Concipiamus per haec puncta quaeſita G et H, atque ellipſis centrum C tranſire, et quoniam angulus GCH rectus eſt iam nouimus huius circuli centrum alicubi in recta GH exiſtere. Praeterea vero ex natura tangentium ellipſis nouimus, quoniam CE et ſemidiameter

ter coniugata ad C F, tangensque in F ab axibus principalibus in G et H ſecatur, eſſe rectangulum F G, F H aequale quadrato ipſius C E. Duas ergo habemus conditiones, quibus circulus quaeſitus per C et ambo deſiderata tangentis puncta G et H tranſiturus determinatur: altera vt quod eius centrum in ipſa hac recta G H ſitum eſſe debet, altera vero quod rectangulum F G, F H quadrato ipſius C E aequale eſſe debet. Tranſeat iſte circulus etiam nunc incognitus per rectae C F productae punctum K. et quia erit $CF.FK = FG.FH$, erit quoque $CF.FK = CE^2$, ideoque F K tertia proportionalis ad C F et C E quarum cum vtraque ſit data, innoteſcet punctum K et circulus quaeſitus tranſire debet per puncta C et K, ita vt eius centrum in rectam G H cadat. Biſecta ergo C K in L, eique in L iuncta normali L I rectam G H in I ſecante erit I centrum circuli quaeſiti, ex quo circulus radio I C vel I K deſcriptus rectam G H in punctis quaeſitis ſecabit; quae eſt *Pappi* conſtructio.

Sequens autem conſtructio ſimplicior videtur quam hactenus allatae, quoniam non ſolum axium principalium poſitionem ſed etiam quantitatem ſponte exhibet, atque omnes operationes, quibus opus eſt, iam in ſe complectitur, ita vt ne mediae quidem proportionalis ſumtione indigeamus.

Noua Conſtructio.

Problematis propoſiti.

Fig. 6. Sint C E, C F ſemidiametri coniugatae propoſitae ad angulum acutum E C F inclinatae, ad quas compleatur paralle-

parallelogrammum CEDF. Tum producatur EC in e, vt fit $Ce = CE$, et ad CF normaliter iungatur $CG = CF$. Iunctis EG et eG producatur EG in H, vt fit $GH = Ge$, et ducta eH bisecetur in I; atque in recta CI capiatur $KL = KI$. Deinde ex centro C circini apertura CI describatur arcus MN rectas FD et ED secans in M et N, atque ad has rectas ex punctis istis perpendiculares constituantur MO et NO se mutuo in O secantes, per quod punctum O ex centro C vsque ad arcum MN ducatur recta COA; erit haec semiaxis transuersus, in eoque punctum O alter ellipseos focus. Denique ad CA normaliter statuatur $CB = CL$, eritque CB semiaxis coniugatus.

Demonstratio.

Ponantur semidiametri coniugatae $CE = e$ et $CF = f$ angulus vero $ECF = \theta$; erit ex constructione $Ce = e$, $CG = f$, et angulus $GCe = 90° - \theta$, ideoque cos. GCe = sin. θ. Porro vocetur semiaxis transuersus $CA = a$, et semiaxis coniugatus $CB = b$; erit per supra inuenta $aa + bb = ee + ff$ et $ab\,ef$ sin. θ. Hinc fiet:

$aa + 2ab + bb = ee + ff + 2ef\,\text{sin.}\,\theta$ et $aa - 2ab + bb = ee + ff - 2ef\,\text{sin.}\,\theta$

ergo $a + b = \sqrt{(ee + ff + 2ef\,\text{sin.}\,\theta)}$ et $a - b = \sqrt{(ee + ff - 2ef\,\text{sin}\,\theta)}$

At ex triangulo ECG ab $CE = e$, $CG = f$ et cos. GCe = sin. θ reperitur $EG = \sqrt{(ee + ff + 2ef\,\text{sin.}\,\theta)}$, ex triangulo vero eCG, vbi est $Ce = e$, $CG = f$ et cos. GCe = sin. θ, fit $Ge = \sqrt{(ee + ff - 2ef\,\text{sin.}\,\theta)}$. Hanc ob rem habebitur:

$$a + b = EG \quad \text{et} \quad a - b = eG$$

ideoque $2a = EG + eG$ et $2b = EG - eG$.

 Cum

Cum iam ſit $GH = eG$, erit $2a = EH$, ac biſecta eH in I, ob C rectae Ee punctum medium, erit CI parallela ipſi EH eiusque ſemiſſis, vnde $a = CI$; et quia $IK = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2}Ge$, et $KL = IK$, erit $CL = CI - 2IK = CI - GH = a - Ge$, ideoque $CL = b$. Aequatur ergo CI ſemiaxi tranſuerſo et CL ſemiaxi coniugato. His inuentis praeterea ex natura ellipſis conſtat, quia ED et FD ſunt ellipſis tangentes, ſi ex altero foco O in has tangentes perpendicula demittantur ON et OM, punctorum M et N a centro C diſtantias ſemiaxi tranſuerſo aequari. Viciſſim ergo ſi puncta M et N ita accipiantur, vt eorum diſtantia a centro C aequalis ſit ſemiaxi tranſuerſo CI, quemadmodum ea quoque in conſtructione ſunt ſumta, atque ex his punctis ad tangentes perpendicula ducantur MO et NO, haec perpendicula ſe inuicem in foco O eſſe interſectura. Reperitur ergo hoc modo alter focus O, qui cum in axe tranſuerſo ſit ſitus, erit recta CA per O ducta ad arcum MN non ſolum axi tranſuerſo aequalis, ſed etiam veram eius poſitionem tenet. Cum igitur ſit CA ſemiaxis tranſuerſus, ſi ad eum normaliter ſtatuatur $CB = CL$, erit quoque CB ſemiaxis coniugatus.

DE PERTVRBATIONE MOTVS PLANETARVM AB EORVM FIGVRA NON SPHAERICA ORIVNDA.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Quamuis cum *Neutono* assumamus dari in systemate planetario eiusmodi centrum virium, ad quod cuncta materiae, ex qua planetae constant, elementa attrahantur in ratione reciproca duplicata distantiarum; hinc tamen non sequitur, singulos planetas circa istud centrum perfectas descripturos esse ellipses, quarum atteruter focus in hoc centro esset situs. Haec enim conclusio, vti ex ipsius *Neutoni* demonstrationibus facile colligitur, locum non habet, nisi corpora planetarum vel sint tam parua, vt instar punctorum spectari queant, vel ita comparata, vt omnium virium, quibus singulae planetae particulae vrgentur, media directio per ipsius centrum grauitatis simul et centrum virium transeat, atque insuper vis aequiualens ipsa, quae ex singulis illis viribus conflatur, sit distantiarum quadratis reciproce proportionalis.

§. 2. Egregie vero etiam *Neutonus* demonstrauit, si corpus planetae sit perfecte sphaericum atque ex materia homogenea constet, tum omnium virium, quibus singulae eius particulae ad centrum virium nitantur, mediam directionem non solum per ipsum planetae centrum ad centrum virium porrigi, sed etiam vim ex omnium coniunctione natam reciproce proportionalem esse quadrato distantiae centri planetae a centro virium. Hoc igitur casu planeta perinde circa centrum virium mouebitur, ac si cuncta eius materia in ipsius centro esset vnita, ideoque eius motus perficietur in sectione conica, cuius alteruter focus in centro virium existat.

§. 3. Quae proprietas, cum tam commode in figuram sphaericam materia vniformiter repletam competat, atque ob hanc causam non adeo multis aliis figuris sit communis, nullum est dubium, quin planeta, qui alia figura diuersa fuerit praeditus, non eandem legem in motu suo sit secuturus. Nisi enim eius corpus hoc modo exposito sit formatum, omnino euenire potest, vt media omnium virium directio vel non per centrum grauitatis planetae transeat, vel non per centrum virium, vel etiam per neutrum. Tum vero etiam saepissime accidit, vt vis omnibus simul sumtis aequiualens non sit quadratis distantiae a centro virium reciproce proportionalis, quarum anomaliarum si vel vna affuerit, motus planetae ab ellipsi seu sectione conica discrepare debebit.

§. 4. Cuiusmodi autem motus perturbatio a defectu idoneae Planetae formae oriri debeat, difficillimum profecto erit generatim determinare, cum fines analyseos nondum sint eousque promoti, vt aequationes, quas leges Mechanicae suppeditant, euoluere atque ad vsum accommodare liceret. Neque huiusmodi inuestigatio cum vlla successus spe suscipi potest, nisi cum constet, illam perturbationem motus tam esse exiguam, vt in calculo instar quantitatis propemodum euanescentis tractari queat. Cum vero et haec tractatio, ob infinitam figurarum, quae plane-

planetis tribui queant, varietatem nimis late pateat, hic ſingularem tantum caſum euoluere conſtitui, ex quo tamen via ad innumeros alios tractandos cognoſci poſſit.

§. 5. Conſiderabo ergo corpus ex duobus globis A et B virga rigida et inertiae experte iunctis compoſitum, quod in plano tabula repraeſentato moueatur circa centrum virium O, ad quod vterque globus ſeorſim ſollicitetur in ratione duplicata reciproca diſtantiarum. Ad motum ergo huius corporis AB hinc oriundum recte inueſtigandum ad eius centrum grauitatis, quod ſit in C reſpici oportet. Repraeſentent ergo litterae A et B maſſas globorum A et B, ſintque diſtantiae $AC = a$, $BC = b$, ab horum globorum centris aeſtimandae, erit ex natura centri grauitatis $Aa = Bb$. Porro vis centri virium O tanta ſit vt in diſtantia f, aequetur grauitati, atque globus A verſus O vrgebitur vi motrice $= \frac{Aff}{OA^2}$, et globus B eodem trahetur ſecundum directionem BO vi $= \frac{Bff}{OB^2}$. Tab. V. Fig. 1.

§. 6. Sumta quadam recta OE pro axe ad quem motus referatur, ſit EC linea curua, quam centrum grauitatis C iam deſcripſerit, ac vocetur diſtantia $OC = z$, et angulus $EOC = \Phi$, erit demiſſo ex C in axem perpendiculo CP, abſciſſa $OP = x = z \operatorname{coſ.} \Phi$ et applicata $PC = y = z \operatorname{ſin.} \Phi$, poſito ſinu toto $= 1$. Hoc autem temporis puncto virga AB eum ſitum teneat, quem figura refert ſitque angulus $OCA = \theta$, quem motus continuatione augeri ponam, ita vt corpus A circa C reſpectu lineae OC arcum DA iam deſcripſerit. At quia haec ipſa linea OC eſt mobilis, motum iſtum angularem ad lineam quandam fixam OE referri conuenit, producatur ergo recta BCA donec huic OE occurrat in R, eritque

 angulus

angulus ERC menſura vera motus angularis, qui angulus ERC, quem ponam $=\eta$ erit $=\Phi+\theta$, qui pergente motu augebitur, ita vt ſit $y=\Phi+\theta$.

§. 7. Vt iam motus centri grauitatis C determinetur ambae vires, quibus globi A et B ad O ſollicitantur, in centrum grauitatis ſunt transferendae, in quo ſimul vtriusque maſſa collecta concipi debet, quae eſt $=A+B$, ſollicitabitur igitur primo punctum C in directione ipſi A O parallela vi motrice $=\frac{Aff}{AO^2}$, vnde naſcitur vis in directione $CO=\frac{Aff.OC}{AO^3}$ et vis in directione $CB=\frac{Aff.AC}{AO^3}$. Simili modo ob attractionem globi B, centrum grauitatis C ſollicitabitur ſecundum directionem ipſi BO parallelam vi $=\frac{Bff}{BO^2}$, vnde oritur vis in directione $CO=\frac{Bff.OC}{BO^3}$ et vis in directione $CA=\frac{Bff.BC}{BO^3}$. His collectis centrum grauitatis C primo vrgebitur ſecundum directionem CO vi motrice $=ff.OC\left(\frac{A}{AO^3}+\frac{B}{BO^3}\right)=ffz\left(\frac{A}{AO^3}+\frac{B}{BO^3}\right)$; deinde vero vi ſecundum directionem $CA=ff\left(\frac{Bb}{BO^3}-\frac{Aa}{AO^3}\right)$ $=Aaff\left(\frac{1}{BO^3}-\frac{1}{AO^3}\right)$ ob $Bb=Aa$.

§. 8. Has autem vires ad directiones conſtantes, axi OE tum parallelas tum normales reuocari oportet: atque ex vi $ffz\left(\frac{A}{AO^3}+\frac{B}{BO^3}\right)$ in directione CO ſollicitante reſultabit ob angulum $EOC=\Phi$;

in directione CP vis $=ffz\ \text{ſin}\ \Phi\left(\frac{A}{AO^3}+\frac{B}{BO^3}\right)$

in directione Co vis $=ffz\ \text{coſ.}\ \Phi\left(\frac{A}{AO^3}+\frac{B}{BO^3}\right)$

Porro ex vi $ff\left(\frac{Bb}{BO^3}-\frac{Aa}{AO^3}\right)$ ſecundum CA vel CR vrgente ob angulum $ERC=\eta=\Phi+\theta$ proueniet

in directione CP vis $=ff\ \text{ſin.}\ \eta\left(\frac{Bb}{BO^3}-\frac{Aa}{AO^3}\right)$

in directione Co vis $=ff\ \text{coſ.}\ \eta\left(\frac{Bb}{BO^3}-\frac{Aa}{AO^3}\right)$

ſicque

ſicque coniunctim habebitur

Vis motrix $CP = \frac{Bff}{BO^3}(b \text{ ſin.} \eta + z \text{ ſin.} \Phi) + \frac{Aff}{AO^3}(z \text{ ſin.} \Phi - a \text{ ſin.} \eta)$

Vis motrix $Co = \frac{Bff}{BO^3}(z \text{ coſ.} \Phi + b \text{ coſ.} \eta) + \frac{Aff}{AO^3}(z \text{ coſ.} \Phi - a \text{ coſ.} \eta)$

§. 9. Maſſa autem ſeu inertia in C mouenda eſt $= A + B$, per quam vtraque vis motrix diuiſa dabit vim acceleratricem ſecundum eandem directionem. Ponamus breuitatis gratia vim acceleratricem ſecundum directionem abſciſſae parallelam $Co = \Phi$, et vim acceleratricem ſecundum directionem applicatae $CP = Q$ erit

$$P = \frac{Aff(z \text{ coſ.} \Phi - a \text{ coſ.} \eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z \text{ coſ.} \Phi + b \text{ coſ.} \eta)}{(A+B)BO^3}$$

$$Q = \frac{Aff(z \text{ ſin.} \Phi - a \text{ ſin.} \eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z \text{ ſin.} \Phi + b \text{ ſin.} \eta)}{(A+B)BO^3}$$

quarum vtraque tendit ad diminutionem coordinatarum x et y.

§. 10. Si igitur elementum temporis exponatur per dt, idque in progreſſu ad differentialia ſecunda conſtans ponatur, erit ſecundum leges motus acceleratio in directione abſciſſae $= \frac{2ddx}{dt^2}$, et acceleratio in directione applicatae $= \frac{2ddy}{dt^2}$; quibus formulis propterea illae vires acceleratrices P et Q negatiue ſumtae aequales ſunt ponendae; vnde prodibunt iſtae aequationes

$$\text{I. } \frac{2ddx}{dt^2} = -P \text{ et II. } \frac{2ddy}{dt^2} = -Q.$$

Cum autem ſit $x = z \text{ coſ.} \Phi$ et $y = z \text{ ſin.} \Phi$ erit

$dx = dz \text{ coſ.} \Phi - zd\Phi \text{ ſin.} \Phi$; $dy = dz \text{ ſin.} \Phi + zd\Phi \text{ coſ.} \Phi$ atque

$$\text{I. } ddx = ddz \text{ coſ} \Phi - 2dzd\Phi \text{ ſin.} \Phi - zd\Phi^2 \text{ coſ.} \Phi - zdd\Phi \text{ ſin.} \Phi = -\frac{Pdt^2}{2}$$

$$\text{II. } ddy = ddz \text{ ſin.} \Phi + 2dzd\Phi \text{ coſ} \Phi - zd\Phi^2 \text{ ſin.} \Phi + zdd\Phi \text{ coſ.} \Phi = -\frac{Qdt^2}{2}$$

§. 11.

§ 11. Vt iſtae aequationes ad vſum propius accommodentur, multiplicetur prima per coſ. Φ, altera per ſin. Φ, erit ob coſ. $\Phi^2 +$ ſin. $\Phi^2 = 1$ eas addendo.

$$ddz - z\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt^2(P\,\mathrm{cos}\,\Phi + \mathrm{sin}.\,\Phi)$$

Deinde prior multiplicetur per − ſin. Φ, et altera per coſ. Φ, erit eas pariter addendo

$$2dz\,d\Phi + z\,dd\Phi = -\tfrac{1}{2}dt^2(Q\,\mathrm{cos}.\,\Phi - P\,\mathrm{sin}.\,\Phi)$$

Supereſt igitur vt pro P et Q valores ante exhibiti ſubſtituantur.

§. 12. Erit autem hos valores ex §. IX. reſtituendo

$$Q\,\mathrm{sin}.\,\Phi + P\,\mathrm{cos}.\,\Phi = \frac{Aff(z - a\,\mathrm{sin}.\,\Phi\,\mathrm{sin}.\,\eta - a\,\mathrm{cos}.\,\Phi\,\mathrm{cos}.\,\eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z + b\,\mathrm{sin}.\,\Phi\,\mathrm{sin}.\,\eta + b\,\mathrm{cos}.\,\Phi\,\mathrm{cos}.\,\eta)}{(A+B)BO^3}$$

ſimilique modo

$$Q\,\mathrm{cos}.\,\Phi - P\,\mathrm{sin}.\,\Phi = \frac{Aff(a\,\mathrm{sin}.\,\Phi\,\mathrm{cos}.\,\eta - a\,\mathrm{cos}.\,\Phi\,\mathrm{sin}.\,\eta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(b\,\mathrm{cos}.\,\Phi\,\mathrm{sin}.\,\eta - b\,\mathrm{sin}.\,\Phi\,\mathrm{cos}.\,\eta)}{(A+B)BO^3}$$

At eſt ſin. Φ ſin. $\eta +$ coſ. Φ coſ. $\eta =$ coſ. $(\eta - \Phi)$ $=$ coſ. θ, ob $\eta = \Phi + \theta$, tum vero ſin Φ coſ. η − coſ. Φ ſin. $\eta =$ ſin. $(\Phi - \eta) = -$ ſin. θ, ſicque angulo η ex computo exeunte, habebitur.

$$Q\,\mathrm{sin}\,\Phi + P\,\mathrm{cos}.\,\Phi = \frac{Aff(z - a\,\mathrm{cos}.\,\theta)}{(A+B)AO^3} + \frac{Bff(z + b\,\mathrm{cos}.\,\theta)}{(A+B)BO^3} \text{ et}$$

$$Q\,\mathrm{cos}.\,\Phi - P\,\mathrm{sin}.\,\Phi = \frac{-Aaff\,\mathrm{sin}.\,\theta}{(A+B)AO^3} + \frac{Bbff\,\mathrm{sin}.\,\theta}{(A+B)BO^3}$$

§. 13. Quodſi iam iſti valores in ſuperioribus aequationibus (§. XI.) ſubſtituantur, orientur ſequentes duae aequationes, quibus motus centri grauitatis C continetur.

I. ddz

I. $ddz - zd\Phi^2 = \frac{-ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{A(z-a\,cof.\,\theta)}{AO^3} + \frac{B(z+b\,cof.\,\theta)}{BO^3}\right)$
II. $2dzd\Phi + zdd\Phi = \frac{ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{Aa\,fin.\,\theta}{AO^3} - \frac{Bb\,fin.\,\theta}{BO^3}\right)$
quae adhuc in ſe continent quatuor indeterminatas z, Φ, θ et t; vnde vna praeterea opus eſt aequatione, vt binae eliminari et aequatio inter duas tantum indeterminatas elici queat.

§. 14. Verum hanc tertiam aequationem nobis ſuppeditabit conſideratio motus rotatorii virgea A B, quae cum axe Q E iam conſtituit angulum $ERC = \eta = \Phi + \theta$, progreſſu temporis augendum. Ad huius accelerationem definiendam noſſe oportet totius corporis gyrantis momentum inertiae, quod oritur, ſi ſingulae eius particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe gyrationis multiplicentur, haecque producta in vnam ſummam colligantur. Sit igitur hoc momentum inertiae $=(A+B)kk$. Deinde ſi momentum virium hunc motum gyratorium accelerantium, ſeu ad angulum η augendum tendentium ponatur $= Rr$, erit tempuſculo dt acceleratio motus rotatorii $\frac{2dd\eta}{dt^2} = \frac{Rr}{(A+B)kk}$ ſeu $dd\eta = \frac{Rrdt^2}{2(A+B)kk}$.

§. 15. Cum autem globus A ad O ſollicitetur vi $= \frac{Aff}{AO^2}$, erit eius momentum reſpectu axis rotationis C $= \frac{Aff}{AO^2}\cdot AC$ ſin. OAR; at eſt ſin. $OAR : OC =$ ſin. $OCA : AO$, ideoque ſin. $OAR = \frac{OC\,fin.\,OCA}{AO} = \frac{z\,fin.\,\theta}{AO}$ ergo hoc momentum erit $= \frac{Aaffz\,fin.\,\theta}{AO^3}$, et ad anguli η diminutionem tendit. Globus autem B ad O trahitur vi $= \frac{Bff}{BO^2}$, eiusque ergo momentum ad C erit $= \frac{Bff}{BO^2}$ BC ſin. $OBC = \frac{Bbffz\,fin.\,\theta}{BO^3}$, et ad angulum η augendum impen-

impenditur, vnde totale momentum, quod posui Rr, erit $= ffz$ sin. $\theta\left(\frac{Bb}{BO^3} - \frac{Aa}{AO^3}\right)$ hincque acceleratio motus rotatorii ita difinietur, vt sit: $dd\eta = \frac{ffzdt^2 \sin.\theta}{2(A+B)kk}\left(\frac{Bb}{BO^3} - \frac{Aa}{AO^3}\right) = dd\Phi + dd\theta$.

§. 16. En igitur tres aequationes, quibus opus est ad motum tam centri grauitatis C, quam motum gyratorium ipsius virgae A B determinandum:

I. $ddz - zd\Phi^2 = \frac{-ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{A(z-a\cos.\theta)}{AO^3} + \frac{B(z+b\cos.\theta)}{BO^3}\right)$

II. $2dzd\Phi + zdd\Phi = \frac{ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{Aa\sin.\theta}{AO^3} - \frac{Bb\sin.\theta}{BO^3}\right)$

III. $dd\Phi + dd\theta = \frac{-ffzdt^2}{2(A+B)k^2}\left(\frac{Aa\sin.\theta}{AO^3} - \frac{Bb\sin.\theta}{BO^3}\right)$

Tota ergo huius duplicis motus determinatio huc est reducta, vt ex istis tribus aequationibus duae indeterminatae eliminentur, et aequatio inter duas tantum variabiles eliciatur, cuius resolutio ad vsum vocari queat.

§ 17. Diuidatur aequatio II per III, ac prodibit sequens formula perquam concinna.

$$\frac{2dzd\Phi + zdd\Phi}{dd\Phi + dd\theta} = -\frac{kk}{z}.$$

seu $2zdzd\Phi + zzdd\Phi + kkdd\eta = 0$ ob $\eta = \Phi + \theta$.

Integratione ergo instituta erit:

$zzd\Phi + kkd\eta = Cdt$ denotante B quantitatem constantem. Exprimit autem $\frac{1}{2}zzd\Phi$ elementum areae E O C, quae si dicatur $= S$, erit $2dS + kkd\eta = Cdt$, et quia celeritas gyratoria exponitur per $\frac{d\eta}{dt}$, erit $\frac{d\eta}{dt} = \frac{C}{kk} - \frac{2dS}{kkdt}$, et denuo integrando: $\eta = D + \frac{Ct}{kk} - \frac{2S}{kk}$.

§. 18. Hinc primo patet, si area EOC a centro grauitatis C circa centrum virium O descripta exacte esset

esset tempori proportionalis, tum etiam motum gyratorium eiusue celeritatem $\frac{d\eta}{dt}$ futuram esse vniformem. Sin autem areae EOC descriptio non sit tempori proportionalis, quod re vera euenire mox ostendetur, tum etiam motus gyratorius virgae AB circa centrum C tantundem ab vniformitate discrepabit. Atque hinc sine dubio circa motum lunae libratorium, quia descriptio arearum circa terram non est tempori proportionalis, praeclara concludere licebit, etiamsi casus, quem hic contemplor, non admodum congruat cum figura lunae. Sed hanc applicationem tam diu differre conueniet, donec reliqua motus phaenomena fuerint euoluta.

§. 19. Cum igitur iam adepti simus hanc aequationem $zz\,d\Phi + kk\,d\eta = C\,dt$: ob $d\eta = d\Phi + d\theta$, hinc eliminare poterimus elementum quantitatis variabilis θ, ope formulae

$$d\theta = \frac{C\,dt - zz\,d\Phi}{kk} - d\Phi$$

ideoque duae tantum nobis supererunt aequationes euoluendae, nempe:

$$\text{I. } ddz - z\,d\Phi^2 = \frac{-ffdt^2}{2(A+B)}\left(\frac{A(z-a\cos.\theta)}{AO^3} + \frac{B(z+b\cos.\theta)}{BO^3}\right)$$

$$\text{II. } 2\,dz\,d\Phi + z\,dd\Phi = \frac{ffdt^2 \sin.\theta}{2(A+B)}\left(\frac{Aa}{AO^3} - \frac{Bb}{BO^3}\right)$$

in quibus etsi angulus θ adhuc inest, tamen sufficit nosse eius differentialis valorem:

$$d\theta = \frac{C\,dt - zz\,d\Phi}{kk} - d\Phi.$$

§. 20. Loco elementi temporis dt introducamus in calculum motum corporis sphaerici circa centrum virium O in circulo cuius radius sit $= hu$, informiter reuoluentis; quod tempusculo dt angulum circa O describat $= d\omega$,

 qui

qui propterea ipsi dt erit proportionalis, eiusque loco in calculum induci poterit. Relatio autem inter $d\omega$ et d elicietur ex aequatione prima ponendo, $z = b$; $d\Phi = d\omega$, $a = b = 0$ et $AO = BO = b$; quo facto erit $-bd\omega = \frac{-ff\,dt^2}{2bb}$, ita vt sit $\frac{dt^2}{2} = \frac{b^3\,d\omega}{ff}$ vnde aquationes nostrae erunt:

$$\text{I. } ddz - zd\Phi^2 = \frac{+b^3 d\omega^2}{A+B}\left(\frac{A(z-a\,\mathrm{cos}.\,\theta)}{AO^3} + \frac{B(z+b\,\mathrm{cos}.\,\theta)}{BO^3}\right)$$

$$\text{II. } 2dzd\Phi + zdd\Phi = \frac{k^3 d\omega^2\,\mathrm{sin}.\,\theta}{A+B}\left(\frac{A\,a}{AO^3} - \frac{B\,b}{BO^3}\right)$$

et mutata constante C erit $d\theta = \frac{gg\,d\omega - zz\,d\Phi}{kk} - d\Phi$.

§. 21. Antequam autem hinc quicquam concludere valeamus, valores analyticos pro distantiis AO et BO in calculum inducere oportet. Quia est autem $CO = z$; $CA = a$; $CB = b$ et ang: $OCR = \theta$, erit ex regulis Trigonometriae.

$$AO = \sqrt{(aa + zz - 2az\,\mathrm{cof}.\,\theta)}$$

$$\text{et } BO = \sqrt{(bb + zz + 2bz\,\mathrm{cof}.\,\theta)}.$$

Neque vero hinc in genere quicquam, quod in vsum conuerti posset, concludere licet, nisi distantias a et b prae distantia $CO = z$ ponamus minimas, qui etiam casus ad vsum Astronomiae maxime videtur accommodatus.

§. 22. Sint igitur distantiae $AC = a$ et $BC = b$ prae $CO = z$ quam minimae, ac per regulam approximationum erit:

$$\frac{1}{AO^3} = (zz - 2az\,\mathrm{cof}.\,\theta + aa)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{z^3} + \frac{3a\,\mathrm{cof}.\,\theta}{z^4} - \frac{3aa(1 - 5\,\mathrm{cof}.\,\theta^2)}{2z^5}$$

$$\frac{1}{BO^3}(zz + 2bz\,\mathrm{cof}.\,\theta + bb)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{z^3} - \frac{3b\,\mathrm{cof}.\,\theta}{z^4} - \frac{3bb(1 - 5\,\mathrm{cof}.\,\theta^2)}{2z^5}$$

Hinc igitur fiet:

$z - a$

$$\frac{z-a\,\mathrm{cof.}\,\theta}{AO^3} = \frac{1}{zz} + \frac{2a\,\mathrm{cof.}\,\theta}{z^3} - \frac{3aa(1-3\,\mathrm{cof.}\,\theta^2)}{2z^4}$$

$$\frac{z+b\,\mathrm{cof.}\,\theta}{BO^3} = \frac{1}{zz} - \frac{2b\,\mathrm{cof.}\,\theta}{z^3} - \frac{3bb(1-3\,\mathrm{cof.}\,\theta^2)}{2z^4}$$

Atque aequationes reſoluendae erunt

$$\text{I. } ddz - zd\Phi^2 = -b^3 d\omega^2 \left(\frac{1}{zz} + \frac{2(Aa-Bb)\,\mathrm{cof.}\,\theta}{(A+B)z^3} - \frac{3(Aaa+Bbb)(1-3\,\mathrm{cof.}\,\theta^2)}{2(A+B)z^4}\right)$$

$$\text{II. } 2dzd\Phi + zdd\Phi = b^3 d\omega^2\,\mathrm{fin.}\,\theta\left(\frac{Aa-Bb}{(A+B)z^3} + \frac{3(Aaa+Bbb)\,\mathrm{cof.}\,\theta}{(A+B)z^4}\right)$$

quibuscum coniungenda eſt formula :

$$d\theta = \frac{ggd\omega - zzd\Phi}{kk} - d\Phi.$$

§. 23. Eſt autem ex natura centri grauitatis $Aa = Bb$, vnde erit $Aaa + Bbb = Bab + Aab$, ideoque $\frac{Aaa+Bbb}{A+B} = ab$, quo notato binae noſtrae aequationes induent has formas,

$$\text{I. } ddz = z^d\Phi^2 = \frac{-b^3 d\omega^2}{zz} + \frac{3abb^3 d\omega^2(1-3\,\mathrm{cof.}\,\theta^2)}{2z^4}$$

$$\text{II. } 2dz^d\Phi + z^{dd}\Phi = \frac{3abb^3 d\omega^2\,\mathrm{fin.}\,\theta\,\mathrm{cof.}\,\theta}{z^4}$$

exiſtente $d\theta = \frac{ggd\omega - zzd\Phi}{kk} - d\Phi$

Ad has reſoluendas notari conuenit, quod ſi eſſet $ab = 0$, motum in ellipſi ſecundum regulas *Kepleri* abſolutum iri, foreque talem, vt ſi diſtantia media ponatur $= b$: excentricitas $= n$, et anomalia excentrica $= v$, futurum ſit:

$z = b(1 + n\,\mathrm{cof.}\,v)$; $d\omega = dv(1 + n\,\mathrm{cof.}\,v)$ atque $d\Phi = \frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\,\mathrm{cof.}\,v}$.

§. 24. Quia autem veri valores aliquantum ab his diſcrepabunt, ponatur:

$$d\omega = \mu dv(1 + n\,\mathrm{cof.}\,v),$$

$$z = b(1 + n\,\mathrm{cof.}\,v + p)$$

et cum iam ſatis prope ſit $d\Phi = \frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\,\mathrm{cof.}\,\Phi}$

 erit

erit $d\theta = \frac{gg\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v)}{kk} - \frac{bb\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v)\sqrt{(1+nn)}}{kk} - \frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\,\text{cof.}\,v}$
vbi primo notandum eſſe kk quantitatem prae bb minimam, ſimulque proxime eſſe $gg = bb\sqrt{(1-nn)}$ niſi motus gyratorius vehementer fuerit velox. Sit igitur $gg - bb\sqrt{(1-nn)} = \alpha kk$, vt ſit proxime $d\theta = \alpha\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v) - \frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\,\text{cof.}\,v}$, qui valor cum θ tantum in terminis minimis occurrat, ad approximandum ſatis eſt exactus.

§. 25. Incipiamus ab aequatione poſteriori, quae hanc indicet formam:

$$\frac{2z\,dz\,d\Phi + zz\,dd\Phi}{d\omega} = \frac{3abb^3\,d\omega\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta}{z^3} = \frac{3abb^3\,d\omega\,\text{ſin.}\,2\theta}{2z^3}$$

et integrando $\frac{zz\,d\Phi}{d\omega} = \frac{3}{2}ab\int\frac{b^3}{z^3}\,d\omega\,\text{ſin.}\,2\theta + Cbb$ at cum ab ſit minimum in hoc termino ſufficit pro z ponere $b(1+n\,\text{cof.}\,v)$, et ob $d\omega = \mu\,dv(1+n\,\text{cof.}\,v)$ erit

$$\frac{zz\,d\Phi}{dv(1+n\,\text{cof.}\,v)} = \frac{3}{2}\mu^2 ab\int\frac{dv\,\text{ſin.}\,2\theta}{(1+n\,\text{cof.}\,v)^2} + Cbb$$

Neque vero hinc vtiles concluſiones deducere valebimus, niſi excentricitatem n valde paruam ſtatuamus, quod quidem pro applicatione ad motus planetarum tuto facere poterimus.

§. 26. Hoc autem caſu cum ſit $\frac{dv\sqrt{(1-nn)}}{1+n\,\text{cof.}\,v} = dv(1-n\,\text{cof.}\,v)$ proxime, erit $d\theta = dv(\alpha - 1 + (\alpha+1)n\,\text{cof.}\,v)$ hincque $dv = \frac{-d\theta}{1-\alpha-(1+\alpha)n\,\text{cof.}\,v} = -d\theta(-\alpha+(1+\alpha)n\,\text{cof.}\,v)$ et proxime $\frac{dv}{(1+n\,\text{cof.}\,v)^2} = -d\theta(1-\alpha-(1-3\alpha)n\,\text{cof.}\,v)$ ſicque erit $\int\frac{dv\,\text{ſin.}\,2\theta}{(1+n\,\text{cof.}\,v)^2} = -(1-\alpha)\int d\theta\,\text{ſin.}\,2\theta + (1-3\alpha)n\int d\theta\,\text{ſin.}\,2\theta\,\text{cof.}\,v$ ſed ſufficiat ſolum primum terminum retinuiſſe vt integratione inſtituta ſit $\int\frac{dv\,\text{ſin.}\,2\theta}{(1+n\,\text{cof.}\,v)^2} = \frac{1}{2}(1-\alpha)\,\text{cof.}\,2\theta$ ideoque habebitur ſatis accurate

$zz\,d\Phi$

$$\frac{zzd\Phi}{dv(1+n\,\mathrm{cos}.v)} = Cbb + \tfrac{3}{4}(1-\alpha)\mu^2 ab\,\mathrm{cos}.\,2\theta$$

vnde erit:

$$d\Phi = \frac{Cbb\,dv(1+n\,\mathrm{cos}.\,v)}{zz} + \frac{\tfrac{3}{4}(1-\alpha)\mu^2 ab\,dv(1+n\,\mathrm{cos}\,v)\,\mathrm{cos}.\,2\theta}{zz}$$

§. 27. Sumtis ergo quadratis et minimis neglectis terminis erit

$$z^4 d\Phi^2 = CCb^4 dv^2(1+n\,\mathrm{cos}.\,v)^2 + \tfrac{3}{2}(1-\alpha)\mu\mu Cabbbdv^2(1+n\,\mathrm{cos}.v)^2\,\mathrm{cos}.\,2\theta$$

Iam vero prima aequatio exuta differentialis constantis $d\omega$ ratione transit in sequentem,

$$z^2 d\frac{dz}{d\omega} - \frac{z^4 d\Phi^2}{d\omega} + b^2 z\,d\omega = \frac{3abb^3 d\omega(1-3\,\mathrm{cos}.\,\theta^2)}{2z}$$

At cum sit $z = b(1+n\,\mathrm{cos}.\,v+p)$ erit $\frac{dz}{b} = -ndv\,\mathrm{fin}.\,v + dp$ et ob $d\omega = \mu\,dv(1+n\,\mathrm{cos}.\,v)$ erit

$$(1+n\,\mathrm{cos}.\,v+p)^2 d\left(\frac{dp-ndv\,\mathrm{fin}.\,v}{\mu dv(1+n\,\mathrm{cos}.v)}\right) - \frac{CCdv(1+n\,\mathrm{cos}.\,v)}{\mu}$$
$$-\tfrac{3}{2}(1-\alpha)\mu\frac{Cab}{bb}dv(1+n\,\mathrm{cos}.\,v)\,\mathrm{cos}.\,2\theta + \mu dv(1+n\,\mathrm{cos}.v)(1+n\,\mathrm{cos}.\,v+p)$$
$$= \frac{3\mu abdv(1+n\,\mathrm{cos}.v)(1-3\,\mathrm{cos}.\,\theta^2)}{2bb(1+n\,\mathrm{cos}.\,v+p)}.$$

§. 28. Ponatur iam differentiale dv constans, eritque

$$d.\frac{dp-ndv\,\mathrm{fin}.\,v}{\mu dv(1+n\,\mathrm{cos}.v)} = \frac{ddp}{\mu dv(1+n\,\mathrm{cos}.\,v)} + \frac{ndp\,\mathrm{fin}.\,v}{\mu(1+n\,\mathrm{cos}.\,v)^2} - \frac{ndv\,\mathrm{cos}.\,v - nndv}{\mu(1+n\,\mathrm{cos}.\,v)^2}$$

et quia est approximando:

$$(1+n\,\mathrm{cos}.\,v+p)^3 = (1+n\,\mathrm{cos}.\,v)^3 + 3(1+n\,\mathrm{cos}.\,v)^2 p,$$

erit substitutione facta, iisque terminis in quibus p plus vna dimensione obtinet neglectis;

$$\frac{ddp}{\mu dv}(1+n\,\mathrm{cos}.v)^2 + \frac{ndp\,\mathrm{fin}.\,v}{\mu}(1+n\,\mathrm{cos}.\,v) - \frac{ndv(\mathrm{cos}.v+n)}{\mu}(1+n\,\mathrm{cos}.\,v)$$
$$-\frac{3npdv(\mathrm{cos}.\,v+n)}{\mu} - \frac{3(1-\alpha)\mu Cabdv(1+n\,\mathrm{cos}.\,v)\,\mathrm{cos}.\,2\theta}{2bb} - \frac{CC}{\mu}dv(1+n\,\mathrm{cos}\,v)$$
$$+\mu$$

$+\mu p dv(1+n\cos. v) - \frac{3\mu abdv(1-3\cos.\theta^2)}{2bb} + \mu dv(1+n\cos. v)^2$
$+ \frac{3\mu abpdv(1-3\cos.\theta^2)}{2bb(1+n\cos. v)} = 0.$

§. 29. Reducatur cof. θ^2 ad cofinum fimplicem ponendo cof. $\theta^2 = \frac{1+\cos. 2\theta}{2}$, erit $1-3\cos.\theta^2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos. 2\theta$, atque aequentur termini, in quibus p non ineft feorfim $= 0$, eritque diuifione per dv peracta:

$$\begin{aligned}
&+\mu + 2\mu n\cos. v + \mu nn\cos. v^2 = 0\\
&-\frac{CC}{\mu} - \frac{CCn}{\mu}\cos. v - \frac{nn}{\mu}\cos. v^2\\
&-\frac{nn}{\mu} - \frac{n}{\mu}\cos. v\\
&\qquad -\frac{n^3}{\mu}\cos. v
\end{aligned}$$

cui aequationi vt fatis fiat, neceffe eft, vt fit:
$\mu = 1$ et $CC = 1-nn$, ita vt fiat:
$d\omega = dv(1+n\cos. v)$ atque

$$d\Phi = \frac{dv(1+n\cos. v)\sqrt{(1-nn)}}{(1+n\cos. v+p)^2} + \frac{\frac{3}{4}(1-\alpha)abdv(1+n\cos. v)\cos. 2\theta}{bb(1+n\cos. v+p)^2}$$

§. 30. Altera vero aequatio, ex qua valorem ipfius p definiri oportet erit:

$$\frac{ddp}{dv}(1+n\cos. v)^2 + ndp\,\text{fin.}\, v(1+n\cos. v) + pdv(1-2n\cos. v-3nn)$$
$$-\frac{3(1-\alpha)abdv(1+n\cos. v)\cos. 2\theta}{2bb}\sqrt{(1-nn)} \frac{-3abpdv(1+3\cos. 2\theta)}{4bb(1+n\cos. v)}$$
$$+\frac{3abdv(1+3\cos. \theta)}{4bb} = 0$$

negligantur primo termini angulum θ negligentes vt et excentricitas n erit

$$\frac{ddp}{dv} + pdv - \frac{3abpdv}{4bb} + \frac{3abdv}{4bb} = 0$$

eritque $p = \frac{-3ab}{4bb-3ab}$, quae eft pars veri valoris ipfius p neque ab excentricitate n neque ab angulo θ pendens.

§. 31.

§. 31. Maneat adhuc excentricitas n euanefcens, eritque

$$\frac{ddp}{dv} + pdv - \frac{3abpdv}{4bb} - \frac{9abpdv\ cof.\ 2\theta}{4bb} - \frac{3(1-\alpha)abdv\ cof.\ 2\theta}{2bb}$$
$$+ \frac{3abdv}{4bb} + \frac{9abdv\ cof.\ 2\theta}{4bb} = 0$$

fit nunc $p = \frac{-3ab}{4bb-3ab} + q$, erit

$$0 = \frac{ddq}{dv} + qdv - \frac{3(1-\alpha)abdv\ cof.\ 2\theta}{2bb} + \frac{9abdv\ cof.\ 2\theta}{4bb}$$

omiffis terminis, qui ob $\frac{ab}{bb}$ prae reliquis funt minimi, atque facile patet, valorem ipfius q effe huiusmodi: $q = \frac{3\beta ab}{4bb}$ cof. $2\,\theta$; nam ob $d\,\theta = -(1-\alpha)\,d\,v$, erit $d\,q = \frac{3(1-\alpha)\beta abdv\ fin.\ 2\theta}{2bb}$ atque $d\,d\,q = \frac{-3(1-\alpha)^2\beta abdv^2\ cof.\ 2\theta}{bb}$, quibus valoribus fubftitutis fiet diuifione per $3\,d\,v$ cof. $2\,\theta$ facta

$$0 = \frac{-(1-\alpha)^2\beta ab}{bb} + \frac{\beta ab}{4bb} - \frac{(1-\alpha)ab}{2bb} + \frac{3ab}{4bb}$$

feu $0 = \beta(1-4(1-\alpha)^2) + 3 - 2(1-\alpha)$ vnde fit

$\beta = \frac{1+2\alpha}{4(1-\alpha)^2-1} = \frac{1+2\alpha}{3-8\alpha+4\alpha\alpha}$. Erit ergo

$$p = \frac{-3ab}{4bb} + \frac{3(1+2\alpha)ab\ cof.\ 2\theta}{4bb(3-8\alpha+4\alpha\alpha)}$$

qui eft verus valor ipfius p, quatenus is non ab excentricitate n pendet: quia autem hic ipfe valor valde eft paruus, eius partes ab excentricitate n pendentes, vtpote multo minores facile negligere licet.

§. 32. Quoniam haec potiffimum ad motum lunae accommodare animus eft, propterea quod lunae corpus ob eius motum libratorium ita formatum videtur, vt notabiliter a figura Sphaerica difcrepet, pofitiones noftras ita definiamus, vt ad lunam pertinere videantur. In luna autem directio virgae A B conftanter propemodum in rectam C O incidit, vnde fit angulus θ fere $= 0$, ideoque statui debet $\alpha = 1$, ob $d\theta = dv(\alpha - 1 + (\alpha + 1)n\,\text{cof.}\,v)$, eritque $p = -\frac{3ab}{4bb} - \frac{5ab}{4bb} = -\frac{3ab}{bb}$ ob cof. $2\,\theta = 1$. Hinc fiet.

$$z = b(1 - \tfrac{3ab}{bb} + n\,\text{cof.}\,v)$$

et $$d\Phi = \frac{dv(1 + n\,\text{cof.}\,v)\sqrt{(1 - nn)}}{(1 - \frac{3ab}{bb} + n\,\text{cof.}\,v)^2}$$

§. 33. Ponatur breuitatis gratia $1 - \frac{ab}{bb} = m$

erit $\frac{1}{(m + n\,\text{cof.}\,v)^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{2n\,\text{cof.}\,v}{m^3} + \frac{3nn\,\text{cof.}\,v^2}{m^4}$

reiectis terminis, in quibus altiores potestates ipsius n occurrant. Multiplicetur per $1 + n\,\text{cof.}\,v$

ac fiet $\frac{1}{m^2} + \frac{n\,\text{cof.}\,v}{mm} - \frac{2nn\,\text{cof.}\,v^2}{m^3}$
$$- \frac{2n\,\text{cof.}\,v}{m^3} + \frac{3nn\,\text{cof.}\,v^2}{m^4}$$

quae insuper per $\sqrt{(1 - nn)} = 1 - \frac{1}{2}nn$ multiplicata

dat $\frac{2 - nn}{2mm} - \frac{n(2 - m)\,\text{cof.}\,v}{m^3} + \frac{nn(3 - 2m)\,\text{cof.}\,v^2}{m^4}$.

At ob cof. $v^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{cof}\,2\,v$ habebitur

$$\frac{2mm - mmnn + 3nn - 2mnn}{2m^4} - \frac{n(2 - m)\,\text{cof.}\,v}{m^3} + \frac{nn(3 - 2m)\,\text{cof.}\,2v}{2m^4}$$

quae per $d\,v$ multiplicata dat valorem ipsius $d\,\Phi$

§. 34. Habebimus ergo hanc aequationem

$$d\,\Phi = \frac{dv}{mm} + \frac{nn(1 - m)(3 + m)dv}{2m^4} - \frac{n(2 - m)dv\,\text{cof.}\,v}{m^3}$$
$$+ \frac{nn(3 - 2m)dv\,\text{cof.}\,2v}{2m^4}$$

cuius integrale est

$$\Phi = C + v\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1 - m)(3 + m)}{2m^4}\right) - \frac{n(2 - m)\,\text{fin.}\,v}{m^3}$$
$$+ \frac{nn(3 - 2m)\,\text{fin.}\,2v}{4m^4}$$

vbi

vbi eſt $m = 1 - \frac{3ab}{bb}$. Denotat autem v anomaliam excentricam, quae ita eſt comparata, vt, ſi anomalia media ponatur $= u$, ſit $u = v + n$ ſin. v.

§. 35. Ponatur in primo termino pro v eius valor $u - n$ ſin. v, erit:

$$\Phi = C + u\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right).$$
$$-\left(\frac{2}{m^3} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right) n \text{ ſin. } v$$
$$+ \frac{nn(3-2m)}{4m^4} \text{ ſin. } 2v$$

vbi duo vltimi termini continent aequationem centri, quae indicat, quantum locus medius a vero diſtet. Primi ergo termini

$$C + u\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right)$$

deſignant locum medium.

§. 36. Erit ergo motus medium ad motum anomaliae mediae, vt

$$u\left(\frac{1}{mm} + \frac{nn(1-m)(3+m)}{2m^4}\right) \text{ ad } u$$

ſed cum non ſolum nn ponatur valde paruum, ſed etiam $1 - m = \frac{3ab}{bb}$, ſit vehementer paruum, alterum terminum negligere licet, ita vt ſit motus medius ad motum anomaliae vti $\frac{1}{mm}$ ad 1, ſeu vt 1 ad mm, quae ratio erit, vt 1 ad $\left(1 - \frac{3ab}{bb}\right)^2$ ſeu vt 1 ad $1 - \frac{6ab}{bb}$. Motus medius autem erit ad motum Aphelii, ſi O ſit ſol, ſeu ad motum Apogaei, ſi O ſit terra, vt 1 ad $\frac{6ab}{bb}$. Sicque Aphelium ſeu Apogaeum in conſequentia promouetur; et quidem interuallo vnius reuolutionis ſecundum motum medium per ang: $= \frac{6ab}{bb} \cdot 360°$.

§. 37. Egregie haec concluſio quadrat in motum lunae, cuius Apogaeum fere duplo celerius progreditur, quam per Theoriam inuenitur. Obſeruationes enim praebent motum lunae medium ad motum anomaliae mediae, vt 1, 0085193 ad I, ita vt motus medius ſit ad motum Apogaei vt 1, 0085193 ad 0, 0085193, hoc eſt, vt 1 ad 0, 0084473. Per Theoriam autem ob actionem ſolis motus lunae medius ad motum Apogaei tantum eſſe deberet vt 1 ad 0, 0041045, vnde exceſſus motus Apogaei veri ſupra Theoreticum eſt ad motum medium vt 0, 0043428 ad 1.

§. 38. Ad modum ergo probabile videtur, hunc motus Apogaei lunae exceſſum inde oriri, quod lunae corpus ſit oblongum, eiusque axis longior perpetuo ad centrum terrae fere directus. Atque hinc etiam ratio figurae iſtius oblongae definiri poterit, cum eſſe debeat $\frac{6ab}{bb} = 0,\ 0043428$. Poſito enim in ſemidiametris terrae $b = 60$, fiet $ab = 2,\ 60568$, et ſi fingamus $a = b$ ſeu $CB = CA$, foret $CA = CB = 1\frac{1}{4}$: hincque prodiret tota diſtantia ſeu longitudo virgae $AB = 2\frac{1}{2}$ ſemid. terrae. Luna ergo, cum non ſit virga duobus globis onuſta, vt eius figura quaſi aequiualeat, multo longior eſſe deberet, ac fortaſſe 3 diametros terrae ſuperare, ita vt eius axis longior plus quam octies excederet breuiorem, quod vix veriſimile videtur.

§. 39. Quodſi ergo huiusmodi figura lunae oblonga non toleranda videatur, etſi fortaſſis minor a figura Sphaerica defectus aliquid ad Apogaei accelerationem conferre poſſit; alia certe vis adeſſe debet inſuper in lunam

agens

agens, quae tanto Apogaei motui producendo par ſit: ſeu ſtatuendum erit, vim terrae, lunam trahentem, non exacte eſſe quadratis diſtantiarum reciproce proportionalem: quod cum ex nonnullis lunae exiguis inaequalitatibus, quae Theoriae repugnant, concludendum videtur, tum etiam inde, quod parallaxis lunae vera integro fere minuto maior deprehenditur, quam ſecundum Theoriam eſſe deberet.

DE MACHINIS IN GENERE

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

Cum disciplinae Mathematicae semper ob certitudinem et perspicuitatem, qua reliquis artibus longe antecellunt, magni sint aestimatae et collaudatae, tum imprimis propter summam vtilitatem, quam ad commune vitae commodum afferre videntur, omni honore, studiisque hominum dignissimae sunt habitae. Quem ad modum enim vix vllum vitae genus Arithmetica carere potest, neque pauca Geometriae cognitionem requirunt, atque Astronomia ad vitam commode instituendam plurima adminicula suppeditat; ita Mechanicae vsus latissime patet, cum pleraeque artes ope Machinarum, quarum inuentio et perfectio Mechanicae debetur, absoluuntur. Quos insignes vsus cum sola Mathesis elementaris, quae iam a longo tempore est inuenta et pertractata, praestare putetur, non leues inde obiectiones contra vtilitatem Matheseos subtilioris, quae hoc imprimis seculo excoli est coepta, opponi solent; quod ab vsu populari abhorreat, nimisque sit ardua, quam vt vllum ex ea commodum in commune bonum redundare possit.

§. 2. Quamquam autem incrementa Astronomiae aliarumque Matheseos partium, quae recentiori Analysi sublimiori dictae accepta sunt referenda, eam ab istis obiectionibus

nibus iam ſatis ſuperque vindicare videntur; tamen ipſa Mechanica vulgaris, quae in Machinis inſtruendis et explicandis verſatur, ſummam Analyſeos non ſolum vtilitatem, ſed etiam neceſſitatem, clariſſime euincit. Quaecunque enim in Mechanica de natura et vſu Machinarum tradi ſolent, tam ſunt imperfecta, et plerumque omni fundamento deſtituta, vt maxime mirandum ſit, communem opinionem de eius eximio vſu tamdiu ſuſtentari potuiſſe: hic autem defectus nulli alii cauſae, niſi ignorationi Analyſeos ſublimioris, adſcribi poteſt, quippe cuius adminiculo demum cognitio Machinarum perfici, atque ad exoptatum vſum in vita communi accommodari queat.

§. 3. Maxime autem vulgarem Mechanicae doctrinam de Machinis eſſe imperfectam, iam pridem non obſcure, qui in Machinis elaborandis ſunt occupati, animaduerterunt. Quantumuis enim nouae cuiuspiam Machinae ſtructura principiis Mechanicae conformis videatur, tamen de eius effectu vix quicquam ante polliceri licet, quam experientiae approbatio acceſſerit: et, quamquam ſaepe ii, qui multum operae ſtudiique in Machinis conſtruendis conſumſerunt, tantam ſagacitatem longo vſu ſint adepti, vt de effectu earum certo pronunciare auſint, antequam experientiam conſuluerint, tamen tantum abeſt, vt hoc ſcientiae ipſorum Theoreticae tribui poſſit, vt potius ſoli experientiae adſcribi debeat. Hinc qui ſolis regulis, quae vulgo in Mechanicae elementis tradi ſolent, imbutus ad Machinarum fabricam ſe accingit, de earum ſucceſſu vel nihil praedicere valebit, vel ſpe concepta ſaepiſſime fruſtrabitur. Ex quibus clariſſime perſpicitur, cognitionem Machinarum vulgarem, qualis in Mechanicae elementis

ex-

exponitur, maxime esse mancam, nihilque minus quam Theoriae nomen mereri.

§. 4. Cum autem ii, qui nihilominus cognitionem Machinarum Theoreticam profitentur, eamque aduersus obiectiones practicorum defendere sustinent, hunc defectum ac perpetuum fere ab experientia dissensum tollere nequeant, omnem culpam in frictionem transferre solent; haecque sola effici, vt Machina alioquin secundum praecepta Mechanicae diligentissime instructa saepe numero sperato effectu excidat. Quamquam autem frictio actionem Machinarum non mediocriter perturbat, tamen immerito omnis culpa in eam transfertur. Cognitio enim Machinarum, quae vulgo ab his hominibus ostentatur, tam est imperfecta, vt etiamsi nulla omnino frictio adesset, tamen nihil quicquam de effectu Machinarum accurate definiri posset. Hunc igitur summum Mechanicae vulgaris defectum hic diligentius expendere, et quem ad modum per solam Analysin sublimiorem tolli possit, vberius explicare constitui; cum vt insignem huius nouae Matheseos partis vtilitatem, quae vulgo in dubium vocari solet, luculenter ob oculos ponam, tum vero imprimis, vt doctrinam ipsam de Machinis pro viribus perfectiorem reddam.

§. 5. Primum igitur vniuersa de Machinis doctrina vulgo principiis aequilibrii superstrui solet: quibus magnitudo ac directio virium determinatur, quae obiecto cuicunque applicatae in aequilibrio consistunt. Hinc proposita quaecunque Machina, in Mechanica vulgari nihil aliud inuestigatur, praeter rationem vis sollicitantis ad onus superandum, quae ad statum aequilibrii requiritur: ita si vis alteri vectis termino, pondus vero alteri sit applica

tum

tum, demonſtratum eſt ad aequilibrium obtinendum, vim ad pondus rationem reciprocam diſtantiarum ab hypomochlio tenere oportere In Machinis autem vtcunque compoſitis ex iisdem principiis proportio inter vires ſollicitantes et onera ſuperanda, qua aequilibrium efficitur, non difficulter definitur; hacque determinatione tota Machinarum tractatio abſolui ſolet. Altum vero vbique deprehenditur ſilentium de motu, qui ſublato ſtatu aequilibrii ſit in ſecuturus, niſi quod generatim notetur, ſi vis ſollicitans maior fuerit, quam effectio aequilibrii exigat, onus promotum iri, ſi quidem vis frictioni ſimul ſuperandae par ſit.

§. 6. Tum vero etiam ex indole et proportione partium Machinae definiri poteſt, ſi potentia ſeu vis, ſiue trahens ſiue pellens, data celeritate progrediatur, quanta celeritate ipſum onus promoueatur. Quam enim rationem inter potentiam et onus ſtatus aequilibrii poſtulat, eadem ratio, ſed inuerſa, inter celeritatem potentiae et oneris intercedit, vndecunque motus ſit profectus. Hinc notus ille Mechanicae canon originem habet, quo promotio oneris eo tardior eſſe affirmatur, quo minor potentia ad aequilibrium requiratur, ſi quidem potentia data celeritate progrediatur. Quae regula, niſi longius, quam par eſt, extendatur in diſpoſitione Machinarum ſaepe eximium habet vſum, ſed nihil prorſus confert ad ipſum motum, qui ſublato ſtatu aequilibrii re uera ſubſequitur, definiendum. Cum igitur omnes Machinae ad motum deſtinentur, nullaque conſtrui ſoleat, quae in ſtatu aequilibrii effectum deſideratum praeſtet; manifeſtum eſt, actionem et effectum Machinarum nullo modo ex memoratis Mechanicae principiis

cipiis explicari ac definiri posse: satis enim constat, ad motum determinandum principia aequilibrii minime sufficere, sed praeterea cognitionem legum motus requiri, quae sine analysi sublimiori neque tradi neque ad vsum applicari possunt.

§. 7. Cum autem pono, si status aequilibrii cuiuspiam Machinae spectatur, relatio inter vim potentiae protrahentem, et vim oneris contrariam, qua Machinam in plagam oppositam mouere conatur, determinetur, manifestum est, plurimas Machinas ne hanc quidem determinationem admittere. Si enim onus ope Machinae horizontaliter sit promouendum, nullam vnquam viri ad Machinam repellendam exercet, quemadmodum euenit, si pondus perpendiculariter eleuari debeat; isto igitur casu vel minima vis, dummodo frictioni superandae sufficiat, onus promouere valebit, maior autem motum celeriorem producet, quam minor, neque idcirco statui aequilibrii vllus locus relinquitur. Hoc idem euenit in horologiis, molendinis, aliisque huius generis Machinis, in quibus nulla cuiusquam ponderis eleuatio intenditur, sed omnis effectus in solo Machinae motu producendo consumitur. De hoc ergo Machinarum genere nihil est, quod in vulgari Mechanica tradi queat, praeter meram ac nudam partium descriptionem et coagmentationem; cum tamen in praxi multo amplior et accuratior cognitio requiratur.

§. 8. Si enim ad certum quemdam effectum producendum Machina proponitur, parum quidem refert nosse, quanta vi ad aequilibrium conseruandum opus sit, si quidem Machina ad id genus pertineat, in quo status aequilibrii datur; sed vel maxime interest nosse, quanta celerita-

celeritate desideratus effectus a qualibet vi Machinae istius ope edatur; vt si forte effectus nimium fuerit lentus, vel scopo non conformis, Machina repudiari possit, antequam per experientiam inepta fuerit deprehensa. Huiusmodi accurata motus a data vi oriundi determinatio etiam maxime necessaria est, si plures Machinae ad eundem finem obtinendum proponuntur, quo ea, quae promtissimum, vel intentioni maxime conuenientem effectum producat, reliquis anteferri queat. Quin etiam Theoriam eousque perfici conueniet, vt proposito quocunque opere absoluendo, inter omnes omnino Machinas, quae ad id exsequendum excogitari queant, ea potissimum assignari possit, quae hoc opus vel breuissimo tempore, vel minimo virium dispendio, vel alio modo, qui maxime idoneus videatur, peragere valeat.

§. 9. Momentum harum quaestionum vnico eoque facili exemplo docuisse sufficiat. Ponamus onus mille librarum verticaliter eleuari debere a vi, quae valeat 100 libras, ad hocque opus nos vti velle axe in peritrochio. Primum quidem perspicuum est, si radiorum alter decies longior assumatur altero, vim cum onere in aequilibrio fore constitutum, nullumque motum sequi. Quo igitur onus eleuetur, necesse est, vt radius maior plus quam decies longior altero statuatur; facile quoque est praeuidere, si is vndecies tantum longior capiatur, lentiorem motum esse insecuturum, quam si duodecies longior caperetur: neque quisquam dubitabit, si maior radius vel tredecies, vel decies quater, vel vltra longior caperetur, motum adhuc celeriorem esse proditurum. Deinde vero pariter non est dubium, quin si maior radius millies, vel decies millies, longior efficeretur altero, motum iterum tardiorem productum iri. Crescet

 ergo

ergo celeritas eleuationis ad certum vsque longitudinis terminum, quem si transgrediatur, iterum decrescat. Merito ergo quaestio instituitur, quoties radium alterum longiorem altero constitui oporteat, vt onus citissime eleuetur.

§ 10. Quantopere autem haec aliaeque huius generis quaestiones, quae ad veram Machinarum Theoriam omnino ita pertinent, vt nisi eae resolui queant, Theoria maxime imperfecta censeri debeat, communis Mechanicae limites transgrediantur, quilibet, qui vel allatum leue exemplum attentius perpenderit, facile agnoscet. Nihil enim prorsus in omnibus libris, qui gloriosum Theoriae Machinarum titulum prae se ferunt, inueniet, quo isti quaestioni vllo modo satisfacere posset. Magis ergo ardua est haec quaestio, et cum vulgaria Mechanicae praecepta huc nihil conferant, ad Mathesin sublimiorem dictam est confugiendum, in qua cum non solum verae motus leges explicentur, sed etiam ad quosuis casus, quibus motus producitur, ope calculi infinitorum accommodentur; ea sola veros nobis aperiet fontes, ex quibus solutionem huiusmodi quaestionum haurire liceat. Quod quo facilius fieri possit, praecipua ante momenta, quae in omnibus Machinis occurrunt, diligenter examinari, et quantum singula ad motum cum promouendum tum impediendum afferant, sedulo determinari conueniet. Hac enim tractatione praemissa non difficulter omnis generis Machinae ad calculum reuocari, earumque effectus accurate definiri poterunt.

§. 11. In omni autem Machina tres res sunt considerandae: primo scilicet vis, quae Machinae motum inducit;

ducit; ſecundo ipſa Machina, ſeu eius ſtructura, partiumque, quibus conſtat coagmentatio; ac tertio onus mouendum; quamquam enim in pluribus Machinis nullum onus occurrit, ſed totus Machinae effectus in ipſius motu conſiſtit, tamen haec diuiſio tripartita non impedit, quo minus etiam huius generis Machinae in tractatione comprehendantur: quippe quae exoriuntur, ſi onus mouendum omittatur, vel euaneſcens aſſumatur. Hae porro tres res duplici modo debent perpendi; vel per ſe, vel ratione motus, quem ſingulae ſuscipiunt. In Machina enim ipſa eius ſtructura probe eſt diſtinguenda a motu, qui ei ſingulisque eius partibus inducitur; propterea quod Machina non ſolum vi in onus transferendae inſeruit, ſed etiam ob motum, quem ipſa accipit, aliquam vis ſollicitantis partem conſumit; hocque ipſo effectum, qui alias produceretur, non parum imminuit.

§. 12. Quod igitur primum ad vires, quibus Machinae impelli ſolent, attinet, earum plurima genera adhibentur, quae omnia enumerare difficile foret; cuiusmodi ſunt pondera, elaſtra, vires humanae et animales, impulſiones aquarum, et venti, ignis, fumus, etc. Circa has autem vires ante omnia attendendum eſt, vtrum indeſinenter agant, an per interualla? an perpetuo aequali vi vrgeant, an modo intendantur, modo remittantur? et quandoque per aliquod interuallum penitus ceſſent. Ad quem caſum referendae ſunt percuſſiones, quarum actio ex regulis colliſionis definiri debet. Quando autem ſine interruptione operantur, earum vera quantitas eſt ſpectanda, quam ſemper per pondus quodpiam exponere licet. Scilicet quacunque vi Machina impellatur, pondus aſſigna-

 ri

ri poterit, quod tantumdem vrgeat et cum menſura ponderum ſit notiſſima loco cuiuslibet vis mente ſubſtituere licebit pondus aequiualens; quod pro natura vis ſollicitantis, vel conſtantis erit quantitatis, vel variabilis. Quin etiam ſi Machina percuſſionibus ad motum incitetur, quouis momento preſſio aequalis ſubſtitui poteſt, ſed plerumque calculus contrahitur, ſi regulae colliſionis in ſubſidium vocentur.

§. 13. Quaecunque autem vis ad Machinam impellendam adhibeatur, ea ſemper cum quadam materia eſt coniuncta, quae ſimul moueri debet; quam inertiam vis ſollicitantis appellabimus. Haec ſi ſolus ſtatus aequilibrii determinatur, omnino non in computum ingreditur, quoniam aequilibrium a ſola quantitate virium impellentium pendet, nihilque intereſt, vtrum inertia adſit an ſecus? ſimulac vero motus generatur, omnis materia, quae motum recipit, attente eſt conſideranda, quippe ad quam mouendam portio quaedam virium impenditur. Quantitas igitur eius materiae, in qua ipſa vis impellens reſidet, ſedulo eſt attendenda, et quantum motum, dum Machina mouetur, ipſa nanciſcatur, definiri debet. Quo plus enim materiae, vel quo maior inertia cum vi ſollicitante fuerit connexa, eo tardior orietur motus. Sic praeter virium varietates ante commemoratas duae res in qualibet vi, qua Machina ad motum concitatur, potiſſimum erant conſiderandae: primo ſcilicet ipſa cuiusque vis quantitas; ac deinde eius inertia: quarum illa per pondus, haec vero per quantitatem materiae, quae pariter ad pondus, reuocari poteſt, menſurari ſolet.

§. 14.

§. 14. In ipſa deinde Machina eius ſtructura, et modus, quo ſingulae partes inter ſe ſunt connexae, perpendi debet: ex quibus, ſi vnius partis vel ſolum puncti motus fuerit cognitus, ſimul omnium reliquarum partium motus innoteſcet. Hinc cum vis ſollicitans Machinae ſit applicata, ſi celeritas ipſius vis fuerit inuenta, ſimul motus ſingularum Machinae partium cognoſcetur. Verum praeterea in motus productione ipſius quantitatis materiae, ex qua Machina componitur, ratio eſt habenda; quam inertiam ipſius Machinae vocabimus. Haec primum ex quantitate materiae ſeu pondere cuiusque partis eſt aeſtimanda; tum vero cum reluctatio inertiae eo magis ſe exerat, quo celerior fuerit motus; ſi diuerſae Machinae partes diuerſis celeritatis gradibus moueantur, haec circumſtantia ſimul in computum eſt ducenda. Scilicet ſi omnes Machinae partes motibus paribus progrediantur, vt nulla adſit motu svarietas, ſufficiet, ipſam materiae quantitatem eiusu epondus noſſe: ſin autem, vt plerumque fit, motus gyratorius circa axem quempiam generetur, tum momentum inertiae reſpectu huius axis computatum, in motus determinationem ingredietur: quae circumſtantia ſaepe actionem Machinarum determinatu difficillimam reddere ſolet.

§. 15. Reſtat ergo onus conſiderandum, quod ope Machinae promoueri debet, niſi forte totus effectus in ſolo Machinae motu conſiſtat. Circa onus autem primo diſpiciendum eſt, vtrum praeditum ſit vi Machinam ſollicitante, vti euenit, ſi pondus eleuari debet, an vero tantum ratione inertiae actioni Machinae reluctetur, velut ſi pondus ſecundum directionem horizontalem ſit protrahendum:

hendum: illam vocabimus oneris vim renitentem, cuius ratio in determinatione ſtatus aequilibrii haberi debet; hanc vero inertiam oneris dicemus, quae in motu demum ſpectanda venit. Ad vim oneris renitentem denique frictio tota, qua tam motus Machinae, quam ipſius oneris impeditur, commode reuocari poteſt. Per experientiam enim conſtat, frictionem eandem exercere effectum, ac ſi maior vis oneris renitens eſſet ſuperanda, quae etſi in quiete Machinae nullam vim inferat, in motu tamen vicem vis motum retardantis ſuſtineat, et quidem conſtantis maneat quantitatis, ſiue motus tardior ſit, ſiue celerior. Quare ſi vnico experimento magnitudo frictionis fuerit explorata, eam tantum vi oneris renitenti addere conueniet, quo pacto calculus Machinarum ob frictionem non amplius perturbabitur.

§. 16. Dum autem motus cuiusque Machinae per calculum determinatur, imprimis neceſſe eſt, vt vires, quibus ſingulae Machinae partes in ſe inuicem agunt, accurate definiantur; quo conſtet, quantam vim cum rotae, tum funes, tum axes, ſuper quibus partes Machinae rotantur, etiam durante motu ſuſtineant. Niſi enim de hoc fuerimus certi, difficile foret partes Machinae vel non nimis imbecilles efficere, vel non nimis robuſtas: quorum prius Machinam prorſus inutilem redderet, ſi quidem vi, quam in actione ſubit, ſuſtinendae par non eſſet. Poſterius vero non parum Machinae officit, ſi enim praeter neceſſitatem nimis robuſta et fortis conſtrueretur, ob maiorem inertiam totus motus retardaretur; huicque incommodo ſola Matheſis ſublimior medelam afferre valet. His igitur, quae ad actiorem Machinarum in genere ſpectant, expoſitis, ſingula Machinarum genera ſecundum hoc inſtitutum pertractabo, ac primo quidem a ſimplicioribus exordiar.

II.

II.
DE PROMOTIONE SIMPLICI.

§. 1.

Promotionem simplicem voco, quando onus, vel immediate a potentia promouetur, siue trahendo siue trudendo, vel ope huiusmodi Machinarum simplicium, quibus actio potentiae neque augetur neque imminuitur: quod fit vel funibus nudis vel trochleis, quae circa axes fixos sint mobiles, innixis. His scilicet casibus onus eadem celeritate promouetur, qua ipsa potentia, seu vis mouens, procedit: ita vt per quantum spatium potentia iam processerit, per tantumdem spatium onus sit protractum. Ab hoc autem casu potissimum exordior, cum quia est simplicissimus, eiusque cognitio ad omnis generis Machinas examinandas summopere necessaria, tum vero, quia hic locus maxime idoneus conceditur de frictione tractandi: quae doctrina nondum satis explicata neque ad actionem Machinarum accommodata videtur; praecipue quando frictio ad axem, circa quem pars Machinae est mobilis transfertur.

§. 2. Ponamus ergo primo onus $a\,b\,c\,d$ super plano horizontali A B promoueri debere, ad hocque adhiberi potentiam, cuius directio pariter sit horizontalis, et quae onus vel trudendo in puncto E propellat, vel trahendo secundum F p protrahat. Transeat autem directio vis siue trudentis P E, siue trahentis F p per oneris centrum grauitatis, ne, etiamsi onus liberum esset, in eo vllus alius motus praeter progressium horizontalem generetur. Quando enim directio vis vrgentis non Tab. V. Fig. 2.

 per

per centrum grauitatis oneris transit, tum ei praeter motum progressiuum rotationem quamdam imprimere conabitur, qui etsi a firmitate plani A B, cui incumbit, impediatur, tamen appressionem oneris ad hoc planum immutat, cuius cognitio saepe numero non parui est momenti. Sin autem ad hanc appressionem non respiciamus, perinde est, vtrum directio vis sollicitantis per oneris centrum grauitatis transeat, nec ne? dummodo corpori re ipsa nullum motum rotatorium inducat.

§. 3. Ponamus praeterea planum A B esse politissimum, vt onus in motu suo nullam frictionem sentiat, quia effectum frictionis deinde seorsim sum contemplaturus. Hic igitur solum onus et potentia vrgens in computum ingredietur. Sit massa oneris $=Q$, quae eius pondere mensuratur, et qua tantum motui reluctatur, quia ob motum horizontalem nullam vim potentiae contrariam seu renisum exerit. Potentiae vero sollicitantis quantitas sit $=p$, inertia autem, seu quantitas materiae, quae cum potentia est coniuncta, cum eaque simul mouetur, sit $=P$; vbi tam P quam p ponderibus metiri licet. Confecerit tam potentia quam onus motu iam viam seu spatium $=z$: et vtrumque habeat celeritatem, quantam graue ex altitudine v libere cadendo adipisci solet. Cum igitur a vi p quouis momento massa seu inertia $P+Q$ accelerari debeat, ex principiis Mechanicis habebimus hanc aequationem $d v \frac{p\,dz}{P+Q}$, quae integrata dat $v=\frac{pz}{P+Q}$.

§. 4. Cum igitur celeritas ipsa sit radici quadratae ex altitudine v proportionalis; si enim v in partibus millesimis pedis Rhenani exprimatur, eius radix quadrata $\sqrt{v}$ per 4 diuisa indicabit, quot pedes Rhenanos corpus hac celeritate vniformiter motum singulis minutis secundis

esset

esset percursurum: onus motu vniformiter accelerato promouebitur, nisi quatenus a resistentia aeris impeditur. Si tempus praeterea, quo iam spatium z absoluit, ponatur $= t$. ob $dt = \frac{dz}{\sqrt{v}}$ erit $dt = \frac{dz\sqrt{(P+Q)}}{\sqrt{pz}}$ et $t = \frac{2\sqrt{z(P+Q)}}{\sqrt{p}}$ $= 2\sqrt{\frac{P+Q}{p}.z}$. Quae formula si per 250 diuidatur, dum spatium z in partibus millesimis pedis Rhenani exprimitur, indicabit numerum minutorum secundorum tempori t conuenientium. Vnde vicissim si tempus t in minutis secundis exprimatur, vt sit $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{P+Q}{p}z}$ erit $z = 15625\, tt.\frac{p}{P+Q}$ part. mill. ped. Rhenani; seu $z = \frac{15625}{1000}.\frac{p}{P+Q}$ ped. Rhen: sicque per quantum spatium onus dato tempore promoueatur, definiri poterit.

§. 5. Cum autem hic casus nusquam locum inueniat, ponamus insuper frictionem accedere, qua fit, vt simul atque onus mouetur, vi propellenti perinde resistat, ac si quadam vi contra vrgeretur: hocque vi resistente ipsa frictio mensurari solet. Prouenit ea vero partim ab asperitate superficierum se in motu fricantium, partim ab appressione earum mutua. Quanquam autem videtur quoque a magnitudine spatii $a b$, quo fit contactus, pendere tamen plurimis experimentis ab *Amontono* institutis euictum est, magnitudinem contactus nihil ad frictionem conferre, sed totam soli appressioni esse proportionalem, si asperitas maneat eadem. Atque in plerisque tabulis ligneis modice laeuigatis inuenit frictionem fere tertiae parti eius vis, qua onus ad tabulam apprimatur, esse aequalem. Hinc si A B esset huiusmodi tabula lignea, quoniam appressio toti ponderi oneris Q aequatur, frictio foret $= \frac{1}{3}$ Q. Maior autem minorue erit, si superficies A B magis minusue aspera fuerit. Quo igitur determinatio latius pateat, frictionem ponamus $= F$, vbi tenendum est, fore $F = \frac{1}{n} Q$, denotante n numerum siue maiorem siue minorem quam 3.

§. 6. Cum igitur frictio F, dum onus mouetur, vi propellenti p sit contraria, ea a vi p subtrahi debebit, onusque perinde mouebitur, ac si sublata frictione propelleretur a vi $= p - F$. Quare confecto spatio z celeritas oneris debita erit altitudini v, ita vt iam sit $v = \frac{(p-F)z}{P+Q}$: atque tempore t minutorum secundorum onus promouebitur per spatium tot pedum Rhen: quot vnitates ista expressio $\frac{156\cdot 5}{1000} \cdot \frac{p-F}{P+Q}$ indicabit. Hic igitur ante omnia aduertendum est, onus de loco non moueri, nisi sit $p > F$, hoc est, nisi vis pellens p fuerit maior quam frictio F: et quamdiu vis vrgens p sit minor, onus in quiete persistere. Hic enim non, vti alias in calculo fieri solet, valorem ipsius v, casu quo $p < F$ negatiuum concludere licet; vt motus in contrariam plagam dirigatur: quoniam frictio, etsi vi pellenti est contraria, tamen hunc effectum non nisi in motu exerit, atque in quiete penitus cessat. Quod notandum est, ne per huiusmodi formulas perperam intellectas in errores seducamur.

§. 7. Hic igitur simplicissimus se nobis offert modus quantitatem frictionis explorandi per experimenta. Corpore enim quocunque $a\,b\,c\,d$ plano horizontali A B imposito, ei in directione horizontali F p ope fili seu funiculi applicentur successiue maiores vires; donec corpus moueri incipiat; quae experimenta commodissime instituentur, si funiculus in p trochleae liberrime mobili imponatur

tur, eique continuo maiora pondera appendantur. Tum enim frictio ei ponderi erit aequalis censenda, a quo corpus primum promoueri inceperit. Hoc autem modo *Amontonus* deprehendit, si asperitas fuerit eadem, frictionem ad pondus corporis perpetuo datam et constantem rationem tenere; neque quantitatem contactus $a\,b$ quicquam ad frictionem conferre. Ab aliis quidem haec regula deinceps in dubium est vocata, qui pariter experientiae innixi eam falsitatis arguere voluerunt. Verum hi ad frictionem, quae in motu gyratorio cernitur, potissimum respexerunt: quae autem hoc casu longe aliter motui resistit, vti infra docebo, ita vt hinc nulla obiectio firma contra regulam *Amontonianam* peti possit. Interim tamen optandum esset, vt haec experimenta cuncta omni adhibita solertia repetantur; atque nunc quidem ope perfectionis Theoriae ab omnibus dubiis liberentur.

§. 8. Ex formula inuenta $v = \frac{(p-F)z}{P+Q}$ apparet, frictione F non obstante, onus motu vniformiter accelerato promotum iri, si quidem resistentia aeris negligatur. Verum in hac formula assumsimus vim vrgentem p perpetuo eandem quantitatem retinere, siue motus fuerit tardior siue celerior; quem ad modum euenit, si promotio ope ponderis descendentis efficiatur, quippe quod perinde trahere pergit, siue demum descendere incipiat, siue iam celeritatem quamcunque acquisiuerit. Sin autem aliae vires adhibeantur, eae plerumque eo minores euadunt, quo celerius iam ipsae mouentur: quod imprimis in viribus hominum et animalium vsu venit, qui quo celerius iam onus promoueant, eo minores vires ad nouam accelerationem procurandam exercere valent. His ergo casibus littera p erit variabilis, atque a celeritate iam acquisita, seu altitudine ei debita v

 pende-

pendebit, cuius variabilitatis ratio proinde in integratione formulae $dv = \frac{(p-F)dz}{P+Q}$ erit habenda, antequam ipse motus definiri queat.

§. 9. Ponamus onus Q ab homine secundum directionem horizontalem A B progrediente trahi, et cum homo omnibus viribus adhibitis certum celeritatis gradum in currendo superare nequeat, manifestum est, si hunc gradum iam attigent, tum nullam amplius vim ad protractionem oneris impendere posse, sed omnes, quibus pollet, vires ad sui ipsius motum continuandum consumi, ex quo euidens est, hominem eo minorem vim in onus exercere posse, quo celerius iam ipse progrediatur. Quanquam autem hanc diminutionem accurate definire non liceat, tamen coniectando formulam a vero parum discrepantem consequemur, si duobus tantum casibus satisfaciamus. Sit igitur g vis maxima, quam homo quiescens ad promotionem oneris impendere valeat: h autem sit altitudo debita celeritati, qua cum si homo progrediatur, nullam amplius vim exercere queat. Debebit ergo p, qua littera vis hominis exprimitur, dum iam celeritate altitudini v debita progreditur, eiusmodi esse functio ipsius v, vt posito $v = 0$ fiat $p = g$; sin autem ponatur $v = h$, vt sit $p = 0$; his autem conditionibus satisfacit formula $p = g - \frac{gv}{h}$.

§. 10. Substituamus ergo hanc formulam $p = g - \frac{gv}{h}$ in aequatione differentiali $dv = \frac{(p-F)dz}{P+Q}$, habebimusque $dz = \frac{h(P+Q)dv}{gh-gv-hF}$; et integrando $z = \frac{h}{g}(P+Q)\, l \frac{h(g-F)}{h(g-F)-gv}$. Perspicuum autem est motum oneris accelerari, quamdiu fuerit $gh - gv - hF > 0$: simul ac vero fiat $v = \frac{h(g-F)}{g}$,

accele

accelerationem cessare, motumque fore vniformem: quem quidem elapso demum tempore infinito assequetur. Verum tamen mox ab initio iam tam prope hunc gradum velocitatis acquiret, vt motus statim appareat vniformis: quod etiam experientia ita confirmat, vt acceleratione initiali penitus neglecta totus motus ex hoc gradu velocitatis aestimari soleat. Onus ergo promouebitur vniformiter celeritate, quae oriatur lapsu ex altitudine $v = \frac{b(g-F)}{g}$: seu ex posita altitudine b in partibus millesimis pedis Rhenani, singulis minutis secundis tot pedes absoluentur, quot vnitates erunt in formula $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{g-F}{g}}, b$.

§. 11. Seu cum b sit altitudo debita celeritati, quam homo libero cursu assequi valeat, $\frac{1}{4} \sqrt{b}$ exprimet spatium in pedibus, quod homo hoc cursu singulis minutis secundis emetiri valeat. Quodsi ergo ponamus hominem summo hoc velocitatis gradu, singulis minutis secundis n pedes absoluere, idem homo onus Q protrahens singulis minutis secundis conficiet spatium $n \sqrt{(1 - \frac{F}{g})}$ pedes. Si duo homines coniunctim trahant, littera n quidem eadem manebit, sed eorum vis, dum quiescunt, erit dupla, sicque celeritas oneris erit $= n \sqrt{(1 - \frac{F}{2g})}$ ped. in minuto secundo. Atque si numerus hominum, qui viribus aequalibus polleant, fuerit $= m$, celeritas oneri impressa erit $= n \sqrt{(1 - \frac{F}{mg})}$ ped. in minuto secundo. Haec eadem sunt tenenda, si onus ab equis aliisue animalibus protrahatur, dummodo pro quouis animalium genere debiti valores pro litteris g et n assumatur.

§. 12. Dum igitur ad hunc summum atque vltimum celeritatis gradum attendimus, quo onus a datis viribus humanis seu animalibus promoueri queat; inertia oneris

oneris Q non amplius in calculum ingreditur, ſed tantum frictionis F ratio eſt habenda; quae igitur quo fuerit minor, eo maiori celeritate onus promouebitur: atque ſi penitus tolli poſſet, tum onus non impediret, quominus homines ea ipſa celeritate progrediantur, ac ſi ab onere eſſent ſoluti. Frictione autem reluctante, iſte celeritatis gradus oneri induci nequit, niſi hominum numerus in infinitum augeatur. Quo autem onus data quadam celeritate protrahatur, numerum hominum m frictioni F proportionalem eſſe oportet; vnde patet, ſi frictio reddatur duplo minor, dimidio tantum hominum numero opus eſſe, et ſi frictio centuplo minor effici poſſet, centeſimam virium partem eidem motui producendo ſufficere. Quae circumſtantia in vectione onerum, plauſtrorum et tormentorum maxime attendi meretur.

§. 13. Quo vſus huius formulae clarius percipiatur, eam exemplis illuſtremus. Si igitur onus ab hominibus promoveatur, pro littera g accipiendum eſt pondus, quod homo pauimento firmo inſiſtens ſuſtinere valet; quando ſcilicet pondus verticaliter ſuſpenſum ope funiculi ſuper trochleam in directionem horizontalem reducti ſecundum hanc directionem trahendo continet. Vis enim hominis menſurari debet pondere, quod tanta vi deorſum tendat, quantam homo ſecundum directionem horizontalem exerit. Difficile autem eſt pro g determinatum valorem aſſignare, cum homo modo fortius modo remiſſius trahat, eiusque vis plurimum a pauimento, cui inſiſtit, pendeat; tum vero etiam actionem non fortiorem aſſumi conuenit, quam vt homo eam per aliquod tempus exerere valeat. His perpenſis pro vi g maius pondus non videtur aſſumi poſſe quam 70 librarum circiter. Deinde ſi homo ab

omni

omni onere ſolutus currit, ſingulis minutis ſecundis fere 6 pedes conficiet. Quam ob rem in exemplis calculo ſubiiciendis aſſumere licebit $g = 70$ libr. et $n = 6$ ped. Frictionem autem oneris Q, niſi imminuatur per ſingularem Machinae ſtructuram, tertiae parti totius ponderis aequalem aſſumamus.

§. 14. Si igitur onus Q ab vno homine horizontaliter promoueri debeat, erit $m = 1$, et $F = \frac{1}{3} Q$, vnde celeritas, qua hoc onus promouebitur, erit $= 6 \surd (1 - \frac{F}{70}) = 6 \surd (1 - \frac{G}{210})$ pedum in minuto ſecundo Si ergo onus G fuerit vel 210 ℔, vel maius prorſus non de loco mouebitur: ſin autem ſit minus, ab vno homine protrahi poterit. Celeritates autem per ſpatia in minuto ſecundo confecta expreſſae erunt. Vt haec tabella indicat.

Pondus oneris in libris	Celeritas in pedibus	Pondus oneris in libris	Celeritas in pedibus
0	6, 00	110	4, 14
10	5, 86	120	3, 93
20	5, 76	130	3, 70
30	5, 55	140	3, 46
40	5, 40	150	3, 21
50	5, 24	160	2, 93
60	5, 07	170	2, 62
70	4, 90	180	2, 27
80	4, 72	190	1, 85
90	4, 54	200	1, 31
100	4, 34	210	0, 00

§. 15. Quanquam haec tabula ad vim vnius hominis eſt accommodata, tamen ex ea quoque inueniri poteſt ceeritas oneris, ſi plures homines ſimul trahant. Cum

 enim

enim eadem prodeat celeritas, ſi pondus oneris ad numerum hominum eandem habeat rationem; manifeſtum eſt, onus 1000 ℔ a 10 hominibus eadem velocitate promotum iri, qua onus 100 ℔ ab vno homine: haec autem celeritas in tabula eſt $4\frac{1}{3}$ pedum in minuto ſecundo. Sic ſi onus 2375 ℔ a 14 hominibus protrahatur, numerum 2375 diuido per 14, et quotum $169\frac{9}{14}$, ſeu 170 proxime quaero in tabella; cui reſpondebit celeritas oneris, quae erit 2, 62 pedum ſingulis minutis ſecundis. Sin autem frictio maior minorue fuerit tertia parte oneris, tum in calculo hoc onus in eadem ratione vel augeatur vel diminuatur; ſicque denuo vera eius celeritas reperietur. Ita ſi onus 1200 ℔, cuius frictio tantum quintae parti 240 ℔ aequetur, ab 8 hominibus protrahatur, loco 1200 aſſumo eius tres quantas 720, quem numerum per 8 diuido, et quotus 90 dabit celeritatem 4, 54 pedum.

§. 16. Hinc porro etiam ſolui poteſt Problema, quo quaeritur, quot hominibus opus ſit ad onus data celeritate promouendum. Sit enim onus $=$ Q librarum, cuius frictio ſiue tertiae ſiue alii parti aequetur, ponatur $=$ F librarum. Celeritas vero, quae poſtulatur, ſit k pedum in minuto ſecundo; ponatur numerus hominum ad hoc praeſtandum requiſitorum $= m$, atque eſſe oportebit $6\sqrt{(1-\frac{F}{70m})} = k$. Fiet ergo $36-\frac{36F}{70m} = kk$, ideoque $m = \frac{18\,F}{35\,(36-kk)}$, ſeu quia in his menſurae accuratae non dantur, proxime ſaltem $m = \frac{\frac{1}{2}F}{36-kk}$. Quod ſi ergo requiratur celeritas, qua 3 pedes ſingulis minutis ſecundis abſoluantur, fiet

$k = 3$,

$k = 3$, et numerus hominum erit $m = \frac{\frac{1}{2}F}{27} = \frac{F}{54}$ seu ex priori formula $m = \frac{2F}{135}$. Ita si onus 1000 ℔, cuius frictio sit 250 ℔ celeritate trium pedum in 1″ sit protrahendum, numerus hominum erit $= \frac{500}{135}$, ideoque quia fractiones reiici oportet, opus erit quinque hominibus.

§. 17. Si loco hominum equis vtendum sit ad onera protrahenda, valores litterarum n et g experientiae conuenienter definiri debebunt; quorum vterque maior erit quam pro hominibus, cum equi non solum longe maioribus viribus valeant, sed etiam celeriorem cursum habeant. Si igitur vis equi quadruplo maior statuatur, quam hominis, erit $g = 280$ ℔, et pro spatio n, quod vno minuto secundo libero cursum conficitur, fere 10 vel 12 pedes assumere licebit. Vnde si oneris frictio sit $= F$ librarum, id ab m equis tanta celeritate protrahetur, vt singulis minutis absoluatur spatium $10 \dot{V} (1 - \frac{F}{280m})$ pedum. Pro bobus autem loco equorum adhibitis, vis fortasse g erit minor, at celeritas n certe multo deficiet, cum boui vix maior celeritas quam homini tribui queat. In hoc autem negotio experientia imprimis erit consulenda, atque pro quouis virium genere litterae n et g per experimenta definiri debebunt: quod facile fiet, si formulae generales cum experimentis conferantur.

§. 18. In hoc ergo praecipuum spectatur discrimen inter vires animales et eas, quae a grauitate petuntur, quod hae continuo aequaliter vrgeant, siue ipsae sint in motu constitutae, etiam nunc quiescant; cum illae eo magis diminuantur, quo celerius iam ipſae mouentur, atque determinantum celeritatis gradum transgredi nequeant. Hic autem ipſe modus, quo animalia vires ſuas exercent, potiſſimum eſt ſpectandus, ſiue agant trahendo, ſiue trudendo, ſiue nitendo, ſiue calcando, ſiue alio denique modo; vnde tam valor vis abſolutae g, qua, dum in quiete perſiſtunt, pollent, plurimum variatur quam maximus celeritatis gradus, quem, cum omnino onus auferatur, omnibus viribus adhibitis adipiſci valent. Multa deinde alia dantur virium genera, veluti venti, aquae fluentis, ignis etc. quae autem ſine accurata plurium Machinarum cognitione definiri nequeunt; quam ob rem donec eousque progredi liceat, haec duo tantum virium genera ab animalibus et grauitate profecta in calculum inducam.

§. 19. Praeter motum autem ipſius oneris, quo cuiusuis Machinae ope promouetur, plurimum intereſt noſſe vires, quas durante motu ſingulae Machinae partes ſuſtinent, atque in ſe inuicem exerunt. In propoſita igitur Machina, quoniam tractio ope funis fieri ſolet, ponamus primo funem Ff eſſe breuiſſimum, vt eius pondus nullius ſit momenti, inueſtigemusque vim, qua iſte funis Ff quouis motus momento extenditur. Poſitis ergo maſſa oneris, vt ſupra $= Q$, frictione $= F$, vi protrahente $= p$, eius inertia $= P$; atque celeritate, quam confecto ſpatio $= z$ iam acquiſiuit, debita altitudini $= v$ ſit hoc momento tenſio funis F$f = t$: quae cum vi ſollicitanti p ſit contraria, ſi ſola inertia huius vis ſpectetur, ea perinde mouebitur, ac ſi protraheretur vi $= p$, retro autem vrgeretur vi $= t$, vnde fiet $dv = \frac{(p-t)dz}{P}$.

Onus

Onus autem, in quod immediate ſola vis t agit, dabit hanc aequationem $d\,v = \frac{(t - F)\,d\,z}{Q}$: ſupra autem inuenimus $d\,v = \frac{(p - F)\,d\,z}{P + Q}$.

§. 20. Ex his ergo aequationibus elicitur tenſio funis $t = F + \frac{Q(p - F)}{P + Q} = \frac{p\,Q + F\,P}{P + Q}$: niſi ergo funis hanc tenſionem ſuſtinere poſſit, quin rumpatur, motus produci non poterit. Apparet autem, ſi vis p ſit vniformis ſeu a pondere petita, funem perpetuo eandem tenſionem ſuſtinere. Sin autem vis p ſit animalis, quae creſcente motu imminuatur: quo caſu motus mox ad vniformitatem reducetur, fietque $p = F$. Hoc ergo caſu tenſio funis $t = \frac{F\,Q + F\,P}{P + Q} = F$ ipſi frictioni aequalis erit: initio autem motus, quo vis p frictionem ſuperare debuit, tenſio funis quoque maior fuerit neceſſe eſt: vnde intelligi poteſt, quanta vi funem praeditum eſſe oporteat, vt ne rumpatur; maximumque rumpendi periculum in ipſum motus initium incidere.

§. 21. Tenſio igitur funis antequam motus ad vniformitatem reducitur, perinde ac velocitas oneris pendet quoque ab inertia vis vrgentis, quam vocauimus $= P$: quae ſi eſſet nulla tenſio foret perpetuo ipſi vi ſollicitanti p aequalis. Sin autem inertia haec P, qua ſi eſſet infinita; prodiret $t = F$, ſicque tenſio ipſi frictioni conſtanter eſſet aequalis. Cum igitur ſub initium vis ſollicitans p maior eſſe debeat frictione F, priori caſu $P = 0$, tenſio continuo decreſcet, quoad motus fiat vniformis: ipſo autem motus initio erat $= p$. Quare ſi inertia vis ſollicitantis neque nulla fuerit neque infinita, tenſio quidem ab initio minor erit quam p, maior tamen quam frictio F; quippe cui tum demum aequalis fiet, cum motus euaferit vniformis. Ceterum in viribus animalium inertia proxime erit ponderi animalis aequalis, fi quidem eorum tota corpora ad parem motum incitari debent. Parum autem intereft noffe, quanta haec inertia exacte fit aeftimanda, cum in motu vniformi, ad quem potiffimum refpi- refpicitur, eius cognitione non fit opus.

§. 22. Si funis Fp, cuius ope onus Q a vi p protrahitur, fuerit tam longus, vt eius inertiae quoque habenda fit ratio, tenfio in fingulis eius punctis non erit aequalis. Maximam quidem inaequalitatem producet incuruatio funis a grauitate oriunda, fed quia haec in Staticis definiri folet, hic tantum ad inaequalitatem ab actione ortam attendam. Inueftigabo ergo tenfionem in quacunque funis particula mn, quam ponam $= t$, fit maffa portionis anterioris $np = M$, et maffa pofterioris $mF = N$; quarum illa ad potentiae inertiam, haec vero ad onus Q referri debebit. Cum igitur maffa $P + M$ protrahatur a vi $p - t$, erit $dv = \frac{(p-t)dz}{P+M}$: maffa autem $Q + N$ a vi $t - F$, erit $dv = \frac{(t-F)dz}{Q+N}$, et coniunctim $dv = \frac{(p-F)dz}{P+Q+M+N}$ exiftente $M + N$ pondere totius funis, quod fit $= L$. Hinc ergo erit $t = F + \frac{(Q+N)(p-F)}{P+Q+L} = \frac{(Q+N)p+(P+M)F}{P+Q+L}$. Atque fi motus fiat vniformis, feu $p = F$, tenfio denuo fiet $t = F$, vnde hoc cafu vbique erit eadem, fin autem $p > F$, tenfio funis a p ad F recedendo continuo decrefcet.

Fig. 3. §. 23. His de motu oneris horizontali expeditis ponamus onus Q verticaliter furfum eleuari debere, ope funis EM, qui trochleae T fit cirsumplicatus, vt vis folici-

licitans ſecundum directionem horizontalem N P trahens concipi queat, ſi quidem fuerit vis animalis: ſin autem grauitate ponderis, vti velimus, in P denuo trochleam ſtatui conueniet, cui funis quoque circumductus deorſum trahatur. Hic autem nullam motus perturbationem ab his trochleis oriundam in calculum introducamus: ſed trochleas tanquam immobiles conſideremus, ſuper quibus funis liberrime ſine frictione hinc inde protrahi queat. Re vera autem motus oneris non mediocriter tam a productione motus in ipſis trochleis, quam a frictione perturbari debet: quem effectum ſingulari capite inueſtigare conſtitui. Hic itaque cum onus nulli corpori incumbat, nulla quoque aderit frictio. Sit igitur maſſa oneris $= Q$, vis motui renitens ſeu eius pondus $= q$, vt ſit $Q = q$; tum vero vis in P vrgens $= p$, eiusque inertia $= P$. Confecerit iam tam onus quam potentia ſpatium $= z$, et ſit vtriusque celeritas debita altitudini $= v$, erit $(P + Q)\, d v = (p - q)\, d z$, ſi quidem ponderis funis eiusque inertiae nulla ratio habeatur.

§. 24. Si igitur vis ſollicitans p fuerit conſtans, vti euenit, ſi onus Q ab alio pondere grauiore deſcendente eleuetur, erit vtique $v = \frac{(p-q)z}{P+Q}$. Neceſſe ergo eſt, vt ſit $p > q$, ſeu vis eleuans maior pondere oneris: ſi enim eſſet $p = q$, onus in aequilibrio ſuſtineretur, ſin autem eſſet $p < q$ onus delaberetur, vimque trahentem p ſecum abriperet. Verum ſi $p > q$ onus eleuabitur motu vniformiter accelerato, eiusque celeritas continuo augebitur, niſi quatenus reſiſtentia aeris obſiſtit. In quo vis ergo ſpatii, per quod onus eleuatur, puncto eius celeritas aſſignari poteſt; vnde ſi tempus dicatur $= t$, erit $d t = \frac{dz}{\sqrt{v}}$

$= \frac{dz}{\sqrt{z}} \sqrt{\frac{P+Q}{p-q}}$, hincque ipſum tempus $t = 2\sqrt{\frac{P+Q}{p-q}}z$: ſeu ſi ſpatium z in ſcrupulis pedis Rhenani exprimatur, tempus t in numero minutorum ſecundorum reperietur $= \frac{1}{125}\sqrt{\frac{P+Q}{p-q}}z$. Vnde viciſſim ſi tempus t in minutis ſecundis exprimatur, erit ſpatium interea abſolutum $= 15625\, tt. \frac{p-q}{P+Q}$ ſcrup. ped. Rhenani.

§. 25. Si vis ſollicitans p ſit humana ſeu animalis, quae in motus initio ſit $= g$, cum autem celeritate altitudini b debita iam progrediatur, penitus euaneſcat, vt ſit, quem ad modum ſupra aſſumſimus, $p = g - \frac{gv}{b}$: habebimus hanc aequationem differentialem $(P+Q)\,dv = (g-q-\frac{gv}{b})\,dz$, ſeu $\frac{g\,dv}{gb-bq-gv} = \frac{g\,dz}{b(P+Q)}$, cuius integrale eſt $\frac{gz}{b(P+Q)} = l\frac{b(g-q)}{gb-bq-gv}$; ſi quidem celeritas oneris in motus initio euaneſcens aſſumatur. Hoc ergo caſu celeritas oneris mox ad vniformitatem reducetur, atque acceleratio ceſſabit, quando fiet $v = \frac{b(g-q)}{g}$. Neceſſe ergo eſt, vt vis abſoluta g ſuperet reniſum oneris q, tum vero haec celeritas conſtans $\sqrt{v}$ more ſolito exhiberi poterit, ita vt ſpatium, quod ſingulis minutis ſecundis abſoluitur, in pedibus exprimatur. Ad huncque vſum tabulae ante traditae accommodari poterunt, cum enim ſupra ob frictionem tantum tertia pars oneris Q reniti ſit aſſumta, hic totum onus reluctari eſt ponendum; ideoque ſi magnitudo oneris in ſuperioribus tabulis exhibita triplo minor aſſumatur, eae tabulae ad vſum praeſentem transferentur. Sic patebit onus 240 tt ab octo hominibus ſingulis minutis ſecundis per altitudinem 4, 54 pedum eleuari, poſtquam quidem motus iam ad vniformitatem fuerit compoſitus.

§. 26. Si onus $a\,b\,c\,d$ ſuper plano inclinato A C ſurſum trahi debeat, ope vis, cuius directio E M ſit ipſi plano A C parallela; ſeu ſi oneri applicatus ſit in E funis, qui trochleae in T fixae circumductus a data vi ſecundum directionem N P protrahatur, ita vt portio funis E M ipſi plano A C maneat parallelus. Ponamus angulum C A B, quem planum inclinatum A C cum horizonte A B facit $= \Phi$, pondus oneris eiusue maſſam $= Q$, atque onus vrgebitur deorſum ſecundum directionem verticalem Q V per eius centrum grauitatis Q tranſeuntem vi $= Q$, quae reſoluatur ſecundum directiones Q R et Q S, quarum illa ſit ad planum inclinatum normalis, haec vero eidem parallela. Poſito ergo ſinu toto $= 1$, erit ob angulum $VQR = BAC = \Phi$, vis $QR = Q\,\text{coſ.}\,\Phi$, et vis $QS = Q\,\text{ſin.}\,\Phi$: quae poſterior tota motui reluctatur. Prior vero vis $Q\,\text{coſ.}\,\Phi$ apprimit onus ad planum inclinatum, vnde naſcitur frictio F, dum onus mouetur; quae ſi trienti vis apprimentis ſit aequalis, erit $F = \frac{1}{3}Q\,\text{coſ.}\,\Phi$. Generatim autem ponamus frictionem $F = \frac{1}{v}Q\,\text{coſ.}\,\Phi$, ita vt dum onus promouetur, tota vis motui renitens ſit $= Q\,\text{ſin.}\,\Phi + \frac{1}{v}Q\,\text{coſ.}\,\Phi$. Fig. 4.

§. 27. Si igitur planum A C eſſet horizontale, ſeu $\Phi = 0$, tota vis oneris motui renitens foret $= \frac{1}{v}Q$, ſeu ſola frictione conſtaret: ſin autem planum A C verticaliter erigatur, vt angulus Φ fiat rectus, frictio euaneſcet, et onus ſolo ſuo pondere motui renitetur. In reliquis autem plani A C inclinationibus tam ob pondus quam ob frictionem onus motui reluctabitur, et dabitur quidem eiusmodi plani inclinatio, ex qua oritur maxima reluctatio, ita vt onus ſuper eo difficilius eleuetur, quam ſi vertica-

 liter

liter eleuari deberet Quae inclinatio inuenietur, si differentiale formulae Q sin. $\Phi + \frac{1}{v}$ cos. Φ ponatur $= 0$, vnde fit tang. $\Phi = v$: vnde si $v = 3$, angulus B A C fiet circiter $= 71^\circ, 34'$, et super huiusmodi plano A C onus omnium difficillime eleuabitur. Vis enim renitens ob tang. $\Phi = 3$, hincque sin. $\Phi = \frac{3}{\sqrt{10}}$ et cos. $\Phi = \frac{1}{\sqrt{10}}$, erit $= \frac{4}{\sqrt{10}} Q$, cum in situ plani verticali sit tantum $= Q$. Dabitur ergo quoque eiusmodi plani inclinatio, in qua onus motui aeque renitetur, ac si verticaliter esset eleuandum, quod euenit, si Q sin. $\Phi + \frac{1}{v} Q$ cos. $\Phi = Q$, hoc est, si sin. $\Phi = 1 - \frac{1}{v}$ cos. Φ, vnde fit cos. $\Phi = \frac{2v}{1+vv}$ et sin. $\Phi = \frac{vv-1}{vv+1}$. Si $v = 3$, erit iste angulus $= 53^\circ, 8'$.

§. 28. Quodsi iam vis ponatur $= p$ eiusque inertia $= P$; celeritas oneri iam debita sit altitudini v, atque dum promotio fit per spatiolum $Pp = dz$, erit per regulas motus $dv = (p - Q \text{ sin. } \Phi - \frac{1}{v} Q \text{ cos. } \Phi)\, dz : (P + Q)$, vnde patet, motum denuo fore vniformiter acceleratum, si quidem vis sollicitans fuerit eiusmodi, vt aequaliter vrgere pergat, siue tardius moueatur siue celerius. Perspicuum est igitur, quo oneri motus imprimatur, necessario vim sollicitantem p superare debere vim renitentem Q sin. $\Phi + \frac{1}{v} Q$ cos. Φ. Sin autem in crescente motu ipsa vis trahens remittatur, vt fit in viribus hominum et animalium; vtendum erit pro p valore supra assignato $g - \frac{gv}{b}$; fietque $dv = (g - \frac{gv}{b} - Q \text{ sin } \Phi - \frac{1}{v} Q \text{ cos } \Phi)\, dz : (P + Q)$. Hoc ergo casu motus ad aequabilitatem conuerget, cuius celeritas definietur hac aequatione $v = b - \frac{bQ}{g}(\text{sin. } \Phi + \frac{1}{v} \text{cos. } \Phi)$. Ceterum hic tam inertiam funis, quam effectum ex trochlea oriundum neglexímus, quippe qui peculiarem inuestigationem requirit.

§. 29.

§. 29. Conſideremus deſcenſum oneris ſuper plano in- Fig. 5.
clinato tam ſpontaneum, quam a vi ſecundum directionem QP ipſi plano CA parallelam vrgente productum. Tranſeat autem huius vis directio QP per ipſum oneris centrum grauitatis Q, et baſis oneris ab, qua plano incumbit, tam ſit larga, vt onus voluendo prolabi nequeat. Sit igitur angulus $A = \Phi$, quem planum CA cum horizonte BA conſtituit, et vocetur maſſa oneris, eiusue pondus $= Q$; cuiusuis directio QV cum ſit verticalis, reſoluatur ſecundum directiones QP, ipſi plano CA parallelam, et QR ad planum perpendicularem, atque ob angulum $VQR = A = \Phi$, erit vis $QP = Q$ ſin. Φ et vis $QR = Q$ coſ. Φ. Illa ergo vis $QP = Q$ ſin. Φ motui non ſolum non reluctatur, ſed etiam ipſam vim protrahentem, ſi quae adeſt, adiuuabit, ad motum accelerandum. Altera vero vis $QR = Q$ coſ. Φ oneri ad planum apprimendo impenditur, ab eaque frictio originem habebit. Scilicet ſi frictio aequetur trienti vis apprimentis, erit hic frictio $= \frac{1}{3} Q$ coſ. Φ. Quo autem inueſtigatio latius pateat, ponamus, frictionem eſſe $= \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ: quae hoc caſu ſola motui renitetur.

§. 30. Sit iam p vis ſollicitans, qua onus praeter vim propriam $QP = Q$ ſin. Φ ſecundum directionem QP protrahatur: haecque vis coniuncta ſit cum inertia $= P$. Tota ergo vis onus promouens erit $= p + Q$ ſin. Φ: et quia ſola frictio motui reluctatur, onus accelerabitur ab exceſſu iſtius vis ſupra frictionem $p + Q$ ſin. $\Phi - \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ. Quo igitur motus oriatur, neceſſe eſt, vt ſit $p + Q$ ſin. $\Phi > \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ, quamdiu enim fuerit $p + Q$ ſin. $\Phi < \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ, onus in quiete perſeuerabit. Quodſi ergo onus a

 nulla

nulla vi externa p ſollicitetur, ſed ſolo ſuo pondere adt motum nitatur, nullus motus ſubſequetur, quamdiu fuerit Q ſin. $\Phi < \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ ſeu tang. $\Phi < \frac{1}{\nu}$; ſtatim vero atque angulus Φ tantum augeatur, vt fiat tang. $\Phi > \frac{1}{\nu}$ onus deſcendet. Ex quo tutiſſimus ac facillimus modus obtinetur quantitatem frictionis explorandi. Onere enim quocunque huiusmodi plano impoſito, eius inclinatio ſeu angulus $A = \Phi$ pedetentim augeatur, donec onus ſuper eo deſcendere incipiat, ſicque innoteſcet anguli Φ magnitudo, cuius tangens ſit $= \frac{1}{\nu}$; hincque porro valor fractionis $\frac{1}{\nu}$, per quam frictio determinatur. Ita ſi iſte eleuationis angulus A deprehendatur $= 18°$, erit $\frac{1}{\nu} = 0,3249$ ſeu proxime $\frac{1}{\nu} = \frac{13}{40}$. Hoc ergo modo pro omnis generis corporibus quantitas frictionis explorari poterit. Atque ſi frictio aequetur tertiae parti vis apprimentis, onus ſuper plano inclinato quieſcere perget, quoad angulus inclinationis B A C non excedat $18°, 26'$.

§. 31. Vt autem ipſum motum oneris definiamus, qui oritur, quando $p + Q$ ſin. $\Phi > \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ, ponamus onus iam confeciſſe ſpatium $= z$, eiusque celeritatem nunc eſſe debitam altitudini $= v$. Quoniam vis accelerans eſt $= p + Q$ ſin. $\Phi - \frac{1}{\nu} Q$ coſ. Φ, et maſſa mouenda $= P + Q$, erit $(P + Q)\, dv = (p + Q \text{ ſin. } \Phi - \frac{1}{\nu} Q \text{ coſ. } \Phi)\, dz$: atque ſi vis p in motu non diminuatur, ſed perpetuo conſtans maneat, erit quoque $(P+Q)v = (p + Q\text{ſin.}\Phi - \frac{1}{\nu}Q\text{coſ.}\Phi)z$, quae aequatio indicat, motum fore vniformiter acceleratum. Sin autem vis p in motu remittatur, ſeu ad genus virium animalium pertineat, vt ſit $p = g - \frac{gv}{h}$, erit $(P + Q)\, dv = (g - \frac{gv}{h} + Q \text{ ſin. } \Phi - \frac{1}{\nu} Q \text{ coſ. } \Phi)\, dz$. Hoc ergo caſu motus ad vniformitatem conuerget, cuius celeri-

celeritas debita ſit altitudini $v = b + \frac{bQ}{g}(\text{ſin.}\,\Phi - \frac{1}{\nu}\text{coſ.}\,\Phi)$, ſi quidem fuerit ſin. $\Phi < \frac{1}{\nu}$ coſ. Φ ſeu tang. $\Phi < \frac{1}{\nu}$. Si enim angulus Φ maior fuerit, vt frictio a ſola grauitate oneris ſuperetur, tum etiamſi nulla vis p adeſſet, motus oneris in infinitum acceleraretur. Atque hoc caſu vis p tamdiu tantum aget, quoad fiat $v = b$; ac deinceps onus a ſola grauitate accelerabitur, niſi forte vis p motui celeriori, a quo ipſa abripiatur, reluctetur; hocque caſu fiat negatiua. Quod ſi eueniat, visque p negatiuum valorem induat, quando $v > b$; tum acceleratio oneris a propria grauitate orta coercebitur, atque motus ad vniformitatem reducetur celeritate debita altitudini $v = b + \frac{bQ}{g}$ (ſin. $\Phi - \frac{1}{\nu}$ coſ. Φ). Hoc ergo caſu prorſus contrarium accidit, atque in praecedente: dum hic vis, quae corpus initio accelerabat, deinceps in vim retardantem abit, atque effectum grauitatis reprimere debet.

DE MOTV TAVTOCHRONO PENDVLORVM COMPOSITORVM.

AVCTORE
L. EULERO.

§. 1.

Etſi Theoria motus pendulorum, quae a Viro ſummo *Hugenio* primum feliciſſime eſt expoſita, Mechanicam ampliſſimis atque vtiliſſimis inuentis locupletauit, tamen iam ſatis conſtat, modum, quo motum pendulorum in horologiis ope cycloidis ad vniformitatem reuocare eſt conatus, in praxi ad ſcopum non prorſus eſſe accommodatum. Quod quidem nullo Theoriae vitio vſu venit, quae firmiſſimis nititur fundamentis, neque ipſi Geometriae ratione certitudinis quicquam cedit: ſed cum pendula, quae ad motum horologiorum moderandum, adhiberi ſolent, multum diſcrepent ab iis, quorum motus ope cycloidis in Theoria ad aequabilitatem reduci docetur; mirum non eſt, Theoriam praxi non perfecte reſpondere, atque in pendulis horologiorum inaequalitatem quamdam relinqui, etiamſi in Theoria perfectus Tautochroniſmus habeatur.

§. 2. Demonſtrauit autem *Huienius*, ſi corpus pendulum ita ſuſpendatur, vt eius motus peragatur in cycloide vulgari baſin horizontalem habente, tum omnes eius oſcillationes, ſiue fuerint ampliores ſiue contractiores, aequalibus temporibus abſolui. Verum tamen conditiones, ſub

ſub quibus iſte tautochronismus locum habet, probe ſunt notandae, ne huic propoſitioni in ſe veriſſimae plus tribuatur, quam demonſtrationis vis euincit. Primum igitur neceſſe eſt, vt motus fiat in medio non reſiſtente, ſeu in ſpatio ab omni materia vacuo: deinde non minus requiritur, vt pendulum ſit ſimplex, ſeu vt tota penduli maſſa in vno quaſi puncto collecta exiſtat: cuiusmodi pendulum ſatis exacte exhibetur, ſi globulus minimus ſimulque grauiſſimus ope fili tenuiſſimi et leuiſſimi, cuius pondus prae grauitate globuli euaneſcat, ſuſpendatur.

§. 3. Niſi igitur tam medii reſiſtentia, in quo motus peragitur, fuerit nulla, quam maſſa ipſius penduli quaſi infinite parua, vti in Theoria aſſumitur, oſcillationes etiamſi in cycloide abſoluantur, tamen non erunt iſochronae. Quare cum in vſu horologiorum neque aeris reſiſtentia tolli queat, neque eiusmodi pendula adhiberi poſſint, quae pro ſimplicibus haberi liceat, ob hanc duplicem cauſam ſatis perſpicuum eſt, hoc caſu eam cycloidis proprietatem, quae tantum pro pendulis ſimplicibus in ſpatio vacuo eſt demonſtrata, locum non amplius inuenire: neque ideo huiusmodi pendulorum oſcillationes fore iſochronas. Hunc etiam defectum ipſa experientia non obſcure indicaſſe videtur, cum artifices vſum cycloidis ad motus horologiorum moderandos nunc fere penitus repudiauerint.

§. 4. Quod quidem ad difficultatem a medii reſiſtentia oriundam attinet, quoniam ea ob aeris raritatem valde eſt parua, ea ſine notabili errore negligi poſſet. Interim tamen Geometrae in ea ſuperanda multo magis elaborauerunt, quam in altera, quae tamen vti mox

ſum

sum ostensurus, motui multo maiorem inaequalitatem inducit. *Neutonus* enim demonstrauit, si medii, in quo pendulum simplex agitatur, resistentia ipsis celeritatibus sit proportionalis, cycloidem non secus atque in spatio vacuo esse satisfacturam. Cum autem resistentia aeris non celeritatum rationem simplicem, sed duplicatam sequatur, hic cycloidis vsus cessat, eiusque loco ad tautochronismum obtinendum aliam curuam substitui oportet, quam ego primus elicui atque in *Comment. Acad. Petrop. Tom.* exposui. Requirit ea autem, perinde ac cyclois *Hugeniana* pendulum simplex, neque pro pendulis compositis vllum vsum praestat.

§. 5. Si igitur motui pendulorum, quibus horologia instrui solent, isochronismum inducere velimus, potissimum ad pendula composita erit respiciendum, quorum massa non in vno quodam puncto collecta, sed per totum penduli volumen, vti re vera est, dispersa concipiatur. Vnde sequens nascitur quaestio, *vt proposito pendulo quocunque composito, ea linea curua determinetur, in qua, si hoc pendulum moueatur, omnes eius oscillationes futurae sint aequidiurnae, seu aequalibus temporibus absoluantur.* Atque in hac inuestigatione mentem facile ab aeris resistentia abstrahere poterimus, tum quod calculus fieret maxime intricatus et insuperabilis, tum vero imprimis quod resistentia tam sit exigua, vt sine sensibili errore negligi queat. A solutione autem huius Problematis tota horologiorum perfectio, quae quidem ex hoc genere expectari potest, pendet.

§. 6. Motum quidem penduli cuiusuis compositi *Hugenius* ad motum penduli simplicis reducere docuit, dum

dum demonſtrauit omne pendulum compoſitum perinde oſcillari, ac ſi tota eius maſſa in certo quodam puncto, quod centrum oſcillationis vocat, eſſet collecta. Hinc pendulum compoſitum pari modo oſcillationes ſuas abſoluet, quo pendulum ſimplex, cuius longitudo aequetur diſtantiae centri oſcillationis ab axe: ſic igitur determinatio motus cuiusque penduli compoſiti ad inuentionem centri oſcillationis perducitur, pro quo negotio *Hugenius* elegantem tradidit regulam, variis paſſim modis demonſtratam. Primum autem animaduertendum eſt, hanc regulam tantum ad corpora rigida et inflexibilia patere, cuiusmodi quidem corpora vulgo ad pendula adhiberi ſolent. Deinde autem porro haec centri oſcillationis inuentio tantum ad motum pendulorum circularem extenditur, quo pendulum circa axem fixum libere gyratur, eiusque ſingula puncta circulos deſcribunt,

§. 7. Cum autem motus penduli circularis ad tautochronismum producendum ſit ineptus, dum ampliores oſcillationes tardius abſoluuntur, quam minores; hic nobis motus penduli in alia quacunque linea curua erit euoluendus. Poteſt vero pendulum ad curuam quamcunque deſcribendam accommodari, ſi loco axis fixi, circa quem vulgo pendulum oſcillatur, linea curua, quae illius curuae deſcribendae ſit euoluta; ſubſtituatur; ſimili modo, quo *Hugenius* docuit, pendulum intra duas cycloides ſuſpendere, vt ab eo cyclois deſcriberetur. In hunc finem ſuperiorem penduli portionem flexibilem eſſe oportet, qua iſti curuae applicatur, vt reliqua portio perpetuo ſecundum tangentem huius curuae extendatur, ſicque nouam curuam ex eius euolutione natam defcribat. Quo motu in genere expedito, eam curuam inuefligari oportebit, ad quam pendulum inftructum omnes ofcillationes aequalibus temporibus abfoluat.

Fig. 6. §. 8. Si igitur pendulum quodcunque in puncto A fit fufpenfum, fit curua A M B eius directrix, quam fuperiori parte flexibili A M ita contactu complectatur, vt pars inferior M G, dum mouetur, ab vltimo contactus puncto M continuo in directum porrigatur. Primum ergo manifeftum eft, hanc tangentem M G per corporis centrum grauitatis G effe tranfituram, eo quod media vis centrifugae directio, qua pendulum praeter grauitatem tenditur, per punctum hoc G tranfit. Deinde cum corpus hoc mouetur, punctum G defcribet curuam G C, cuius euoluta erit ipfa directrix A M B, ita vt ipfius radius caruedinis in puncto G fit recta G M. Sit recta A D, quae curuam in fupremo puncto A tangit, verticalis, ad cuius alteram partem fimilis exiftat curua directrix A M B, in figura non expreffa, hocque pendulum ifta ofcillabitur, vt eius punctum G in curua G C ad alteram partem producta motu reciproco alternatim defcendat et afcendat, ficque ofcillationes perficiat.

§. 9. Confideremus primum huius corporis fitum naturalem, quo eius centrum grauitatis in rectae verticalis A C puncto C verfatur, et in quo fitu pendulum, nifi iam motum habeat perpetuo fit quieturum. In hoc fitu fit punctum D centrum ofcillationis totius penduli, cuius diftantia a puncto A prodit, fi fingulae corporis particulae per quadrata diftantiarum ab axe A multiplicentur, horumque

que productorum omnium summa per factum ex massa corporis in distantiam centri grauitatis ab axe A C diuidatur. Vel si per corporis centrum grauitatis C transfixus concipiatur axis horizontalis ipsi axi A, qui ad planum verticale C A G normalis intelligatur, parallelus, singulaeque corporis particulae in quadrata distantiarum suarum ab hoc axe ducantur, atque horum productorum summa vocetur $= M k k$, denotante M massam seu pondus totius penduli, quam expressionem momentum inertiae corporis respectu istius axis per C ducti appello, erit rectangulum C D, A C $= k k$ seu C D $= \frac{k k}{AC}$. sicque ex quantitate cognita $k k$ centrum oscillationis D determinatur.

§. 10. Cum iam pendulum in alium quemcunque situm AMG peruenerit, vbi curuam directricem AMB in puncto M tangat: hic non amplius circa axem A, sed circa punctum M primo quidem instanti motu angulari feretur. Hinc interuallum inter centrum grauitatis G et centrum oscillationis H non amplius aequale erit interuallo C D in situ naturali, sed ob diminutam penduli longitudinem M G, seu axem motus nunc in M promotum, internallum G H maius erit quam C D; cum enim esset C D $= \frac{k k}{A C}$, ob eandem rationem nunc erit G H $= \frac{k k}{M G}$, seu G H . C D $=$ A C : M G. Quare cum pendulum compositum continuo perinde moueatur, ac si vniuersa eiusmodi in centro oscillationis esset collecta, perspicuum est, ob variabilitatem huius centri H nullum pendulum simplex exhiberi posse, cuius motus cum motu pen-

 duli

duli compositi conueniat, nisi curua directrix A M B prorsus tollatur.

§. 11. Huc accedit, vt dum penduli portio A M curuae directrici A M B applicatur, ea tantisper motus non fiat particeps. Quam ob rem cum quouis momento ea tantum massa, quae cum pendulo mouetur, spectari debeat, ipsa quoque massa eiusque adeo centrum grauitatis erit variabile, hincque porro eiusdem momentum inertiae respectu axis per centrum grauitatis ducti, quod ante vocauimus $= M\,k\,k$ continuo immutabitur, ex quo longe alia centri oscillationis ratio mutabilitatis existet. Vt igitur hanc posteriorem difficultatem remoueamus, superiorem penduli partem flexibilem, qua eius massa, modo aucta, modo minuta, censeri debet, leuissimam inferiorem vero partem E F, quae penduli molem proprie constituit, grauissimam assumamus, vt augmenta illa et decrementa ex portione leuissima orta sine errore pro nihilo reputari queant, simili modo quo resistentiae aeris effectum negligimus.

§. 12. Reiecta igitur massa portionis flexibilis A M tanquam minima, quippe quae re vera, nisi oscillationes admodum amplae efficiantur, valde parua existit, sit reliqua penduli massa $= M$, eius centrum grauitatis G, eiusque momentum inertiae respectu axis horizontalis per G ducti $= M\,k\,k$, quae quantitas ex motu oscillatoris libero definiri potest, dum pendulum remota curua directrice A M B ad oscillationes minimas incitatur, si enim hoc casu centrum oscillationis reperiatur in D, vt sit A D longitudo penduli simplicis isochroni, erit $k\,k = A\,C.\,C\,D.$ existente C corporis centro grauitatis. Vt

Vt igitur praesens penduli situs, quo eius centrum grauitatis in G versatur, symbolis exprimatur, ponatur curvae directricis portio A M $= s$ et tota penduli longitudo A M G $= a$, quae est constans et ipsi A C aequalis, erit distantia M G $= a - s$, quae simul est radius osculi curuae C G in puncto G. Deinde per M ducatur recta verticalis M S, ac vocetur angulus declinationis penduli S M G $= \Phi$.

§. 13. Ponamus pendulum ex situ A C motum ita inchoasse, vt ibi celeritas centri grauitatis C debita fuerit altitudini b, seu ipsa celeritas $= \sqrt{b}$; hinc autem elapso tempore $= t$ peruenisse in situm A M G, vbi centri grauitatis G celeritas sit $= \sqrt{v}$. Iam tempusculo infinite paruo $= dt$ vlterius progrediatur in g, ita vt nunc curua directrix A M B tangatur in puncto m, existente eius elemento M $m = ds$; erit angulus infinite paruus G M $g = d\Phi$, et spatiolum percursum G$g = (a-s)d\Phi$, quod per tempusculum dt diuisum dabit celeritatem centri grauitatis, ita vt sit $\sqrt{v} = \frac{(a-s)d\Phi}{dt}$ et $v = \frac{(a-s)^2 d\Phi^2}{dt^2}$. Cum autem inclinatio penduli ad rectam verticalem M S tempusculo hoc dt crescat angulo $= d\Phi$, motus corporis in G erit duplex, alter progressiuus secundum directionem G g celeritate $= \sqrt{v} = \frac{(a-s)d\Phi}{dt}$, alter gyratorius circa axem per G transeuntem, cuius celeritas angularis $= \frac{d\Phi}{dt}$. Hoc enim duplici motu coniuncto verus penduli motus existet; quippe qui semper considerari potest tanquam compositus ex motu progressiuo centri grauitatis, et ex gyratorio circa axem per centrum grauitatis transeuntem.

 §. 14.

§. 14. Antequam in effectum grauitatis, quo iste duplex motus retardetur, inquiramus, inuestigemus perturbationem motus a vi quacunque sollicitante oriundam. Sollicitetur ergo pendulum in puncto quopiam Z a vi $ZX = P$, cuius directio ZX et ad rectam MZ normalis, quia vires obliquae catenus tantum motum penduli afficiunt, quatenus per resolutionem praebent vim ad directionem MZ normalem. Sit interuallum $GZ = b$ ac primo quidem modus progressiuus perinde afficietur, ac si haec vis $ZX = P$ in ipso centro grauitatis esset applicata; quae ergo motum retardabit. Hinc cum massa corporis sit $= M$, per leges sollicitationis est:

$$\frac{2\,d.(a-s)\,d\Phi}{dt^2} = -\frac{P}{M} \text{ posito } dt \text{ constante.}$$

Deinde cum huius vis P momentum sit respectu motus gyratorii $= Pb$, et momentum inertiae corporis $= Mkk$ erit retardatio motus gyratorii:

$$\frac{2\,dd\Phi}{dt^2} = \frac{-Pb}{Mkk}.$$

§. 15. Hoc modo vterque corporis motus afficeretur, si corpus esset liberum, et ad omnes motus recipiendos aeque comparatum. Cum autem ob suspensionis rationem motus gyratorius perpetuo datam teneat rationem ad motum progressiuum, hinc punctum Z definietur, in quo vim P applicari oporteat, vt vtrique motui conueniens immutatio simul inducatur. Positionem vero huius puncti Z binae ante inuentae formulae sponte indicant: cum enim ex iis haec nascatur analogia:

$$dd\Phi : d(a-s)\,d\Phi = b : kk$$

$$\text{erit } b = \frac{kk\,dd\Phi}{d.(a-s)\,d\Phi} = \frac{kk\,dd\Phi}{(a-s)\,dd\Phi - ds\,d\Phi}.$$

Vnde

Vnde patet punctum hoc Z non incidere in centrum oscillationis H, quod puncto suspensionis M conueniat. Est enim $GH = \frac{kk}{a-s}$; cui quidem aequale foret interuallum $b = GZ$, si foret $ds = 0$, hoc est si punctum suspensionis M non esset variabile. Ob eius igitur variabilitatem interuallum GZ maius erit quam GH.

§. 16. Inuento hoc puncto Z, in quo vis applicata motum ad suspensionis penduli rationem accommodatum gignit, vim istam P ita definiamus, vt sollicitationi grauitatis aequi polleat; vt motum penduli a grauitate oriundum obtineamus. Vis grauitatis autem aequalis est ponderi penduli $= M$, eiusque directio per ipsum centrum grauitatis G deorsum tendit. Repraesentet ergo recta verticalis GV hanc vim, quae sit $= M$; atque nihil aliud supererit, nisi vt vis illius P momentum respectu puncti suspensionis M aequale reddatur momento vis grauitatis. Ob angulum itaque $VGF = \Phi$ erit
$M.MG.\sin.\Phi = P.MZ$ seu $P = \frac{M(a-s)\sin.\Phi}{a-s+b}$; cum autem sit $b = \frac{kkdd\Phi}{(a-s)dd\Phi - dsd\Phi}$ erit

$$a-s+b = \frac{(a-s)^2dd\Phi-(a-s)dsd\Phi+kkdd\Phi}{(a-s)dd\Phi-dsd\Phi}$$

ideoque $P = \frac{M((a-s)^2dd\Phi-(a-s)dsd\Phi)\sin.\Phi}{(c-s)^2dd\Phi-(a-s)dsd\Phi+kkdd\Phi}$,

et $Pb = \frac{Mkk(c-s)dd\Phi\sin.\Phi}{(a-s)^2dd\Phi-(a-s)dsd\Phi+kkdd\Phi}$.

§. 17. Quoniam igitur pro motu penduli supra altera aequatio inuenta est: $\frac{2dd\Phi}{dt^2} = \frac{-Pb}{Mkk}$, si loco Pb valorem modo repertum substituamus, proueniet haec aequatio:

2 d d Φ

$$\frac{2dd\Phi}{dt^2} = \frac{-(a-s)d\Phi \, \text{sin.}\, \Phi}{(a-s)^2 dd\Phi - (a-s)dsd\Phi + kkdd\Phi}$$

quae transformabitur in hanc:

$$2(a-s)^2 dd\Phi - 2(a-s)dsd\Phi + 2kkdd\Phi = -(a-s)dt^2 \, \text{sin.}\, \Phi$$

qua motus penduli a grauitate perturbatus, ideoque ipse motus oscillatorius determinabitur. Quia vero in hac aequatione differentiale dt ponitur constans, ea per $d.\Phi$ multiplicetur, atque integretur, sic prodibit:

$$(a-s)^2 d\Phi^2 + kkd\Phi^2 = (dt^2 - dt^2 \int (a-s)d\Phi \, \text{sin.}\, \Phi$$

vbi quia curua directrix A M B tanquam data assumitur integrale $\int (a-s)d\Phi$ sin. Φ ob relationem inter s et Φ datam exhiberi poterit: ita autem id accepi, ponamus, vt euanescat posito $s = 0$, quo casu etiam sit $\Phi = 0$; eritque

$$dt = \frac{d\Phi \sqrt{(kk + (a-s)^2)}}{\sqrt{(C - \int (a-s)d\Phi \, \text{sin.}\, \Phi)}}.$$

§. 18. Cum sit altitudo celeritati debita $v = \frac{(a-s)^2 d\Phi^2}{dt^2}$ erit nunc $v = \frac{(a-s)^2 (C - \int (a-s)d\Phi \, \text{sin.}\, \Phi)}{kk + (a-s)^2}$; quae expressio ad statum initialem in situ penduli verticali A C D transferatur, vbi sit $s = 0$; et $\int (a-s)d\Phi$ sin $\Phi = 0$. Quare cum hoc statu sit $v = b$, erit $b = \frac{aac}{kk + aa}$, vnde loco constantis c celeritas initialis $\sqrt{b}$ in calculum introduci poterit. Sit D centrum oscillationis penduli in situ verticali, erit ob $AC = a$, $CD = \frac{kk}{a}$ ideoque $AD = \frac{aa + kk}{a}$, quo valore substituto habebitur $b = \frac{AC.c}{AD}$. Quod si porro curuae descriptae C G ponatur abscissa $CQ = x$, ob $Gg = (a-s)d\Phi$, et rectam G M ad curuam C G normalem erit sin. G M S $= \text{sin.}\, \Phi = \frac{dx}{Gg} = \frac{dx}{(a-s)d\Phi}$; ideoque $dx = (a-s)d\Phi$ sin. Φ et et $\int (a-s) d\Phi$ ſin. $\Phi = x = CQ$. Hinc ergo erit $v = \frac{(a-s)^2 (c-x)}{kk+(a-s)^2}$; et ob $MG = a-s$; $GH = \frac{kk}{a-s}$ altitudo celeritati debita v ita exprimetur, vt ſit $v = \frac{MG(c-x)}{MH}$.

§. 19. Conſideremus curuam deſcriptam CG tamquam datam, quoniam ex ea curua directrix AMB definitur et contra; ſitque poſita eius abſciſſa verticali $CQ = x$, arcus iam deſcriptus $CG = z$, et radius oſculi $GM = r$, erit $a-s = r$; et $\frac{dz}{r} = d\Phi$; hinc ergo fit primo altitudo celeritati centri grauitatis in G debita $v = \frac{rr(c-x)}{kk+rr}$, vnde patet, pendulum eo vsque eſſe aſcenſurum, donec fiat $x = c$. Deinde vero elementum temporis dt ita exprimetur, vt ſit:

$$dt = \frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$$

cuius integrale debite ſumtum indicabit tempus, quo pendulum per arcum indefinitum $CG = z$ ad altitudinem indefinitam $CQ = x$ aſcendit. Quodſi ergo in hac expreſſione ponatur $x = c$, habebitur tempus totius aſcenſus, cui cum tempus ſequentis deſcenſus, ob defectum reſiſtentiae aequale ſit, pendulumque ex altera parte per ſimilem curuam incedat, erit tempus vnius oſcillationis $= 2\int \frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$, ſiquidem poſt integrationem ponatur $x = c$.

§. 20. Quando ergo in hac expreſſione, poſtquam factum eſt $x = c$, quantitas c relinquitur, duratio cuiusque oſcillationis ab amplitudine arcus ea deſcripti pendebit, neque propterea omnes oſcillationes ſiue ſint maiores, ſiue minores aequalibus temporibus abſoluentur. Quo igitur omnes oſcillationes fiant iſochronae, expreſſionem inuentam $2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$ ita comparatam esse oportet, vt posito post integrationem $x=c$, quantitas c ex ea penitus discedat, idemque constanter eius integralis valor resultet, quaecunque magnitudo litterae c tribuatur. Ex hac igitur affectione, si conueniens relatio inter z et x definiatur, vt ante memorata proprietas locum inueniat; cognoscetur natura illius curuae C G, secundum quam, si pendulum moueatur, id omnes oscillationes aequalibus temporibus sit peracturum.

§. 21. Quo igitur facilius huius curuae C G, qua cuiusque penduli compositi tautochronismus continetur, naturam inuestigemus, primo pendulum simplex contemplemur, cuius tota massa in puncto G sit collecta. Quoniam ergo corpus extra hoc punctum G nullas habet partes erit, $kk=0$, ac propterea tempus vnius oscillationis erit $=2\int\frac{dz}{\sqrt{(c-x)}}$: cuius valor a c non pendebit, si fuerit $dz=\frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{x}}$; et $z=2\sqrt{fx}$; quae est aequatio pro cycloide. Eius autem radius osculi in imo puncto C, quia sub normali aequatur, erit $=\frac{zdz}{dx}=2f$, qui cum ipsi A C $=a$ aequalis esse debeat, fiet $f=\frac{1}{2}a$; seu f aequabitur semissi penduli simplicis isochroni, quod quidem suas oscillationes minimas perficiat. Hanc autem elegantissimam cycloidis proprietatem *Hugenius* eliciuit, aliique Geometrae deinceps variis demonstrationibus confirmauerunt.

§. 22. Vt ergo formula pro quocunque pendulo composito inuenta $2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$ ad tautochronismum accomcommodetur, necesse est, vt ea induat hanc formam $2\int\frac{dx\sqrt{\frac{1}{2}f}}{\sqrt{(c-x)x}}$, sic enim posito post integrationem $x=c$, littera c ex calculo egredietur, atque singulae oscillationes aequi diurnae erunt oscillationibus minimis penduli simplicis, cuius longitudo sit $=f$. Quodsi vero formula inuenta $2\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r\sqrt{(c-x)}}$ cum hac $2\int\frac{dx\sqrt{\frac{1}{2}f}}{\sqrt{x(c-x)}}$ conferatur, sequens prodibit aequatio:

$\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r}=\frac{dx\sqrt{f}}{\sqrt{2x}}$ seu $\sqrt{2fx}=\int\frac{dz\sqrt{(kk+rr)}}{r}$.

Haec ergo aequatio exprimit naturam curuae C G tautochronae pro quocunque pendulo composito, quam non parum a cycloide discrepare, per se satis est manifestum.

§. 23. Quaeramus huius curuae radium osculi in puncto C, quoniam is esse debet $=AC=a$. Fiet ergo hoc loco $r=a$ ac propterea $\sqrt{2fx}=\frac{z\sqrt{(aa+kk)}}{a}$; vnde erit $zz=\frac{2aafx}{aa+kk}$. Cum igitur in puncto C radius osculi aequalis sit subnormali $\frac{zdz}{dx}=\frac{aaf}{aa+kk}$, necesse est, vt sit $\frac{aaf}{aa+kk}=a$, ideoque $f=a+\frac{kk}{a}$. Aequabitur ergo longitudo penduli simplicis isochroni f longitudini $AD=a+\frac{kk}{a}$: quod quidem per se est perspicuum, cum penduli huius compositi minimae oscillationes, quibus maiores, quaeque sunt isochronae, fiant in arcubus circularibus radio A C descriptis, ac proinde non secus se habeant, ac si tota corporis massa in centro oscillationis D esset collecta: ita vt ipsa longitudo A D exhibeat longitudinem penduli simplicis isochroni.

§. 24. Aequatio autem pro curua tautochrona inventa: $\frac{dz\sqrt{(kk+r)}}{r} = \frac{dx\sqrt{s}}{\sqrt{2x}} = \frac{dx\sqrt{(kk+2a)}}{\sqrt{2ax}}$ constructu est difficillima, neque variabiles vllo modo a se inuicem separare licet. Quamuis enim radius osculi r per binas reliquas variabiles x et z definiri queat, (erit enim, si applicata $QG = y$ ponatur, $r = \frac{-dz^3}{dxddy} = \frac{-dydz^2}{dxddz}$, posito dx constante, vel $r = \frac{dzdy}{ddx}$ posito dz constante, et $dy = \sqrt{(dz^2 - dx^2)}$); tamen hinc aequatio tantopere perturbaretur, vt nihil prorsus ex ea concludi posset. Sin autem ex ea vel x vel z exterminetur in multo maiores tricas delaberemur. Cum igitur pro pendulo simplici constructio curuae tautochronae sit facillima, pro pendulo composito tantis laborat difficultatibus, vt eas nullo etiam nunc pacto superare potuerim.

§. 25. Si quidem loco quantitatum x et z introducatur angulus variabilis Φ, non solum aequatio ad duas variabiles reducetur, sed etiam a differentialibus secundi gradus liberabitur; neque tamen ad separationem variabilium pertingere licet. Cum enim sit $d\Phi = \frac{dz}{r}$, erit $dz = r\,d\Phi$, et $dx = (a - s)\,d\Phi$ sin. $\Phi = rd\Phi$ sin. Φ, hincque $x = \int r\,d\Phi$ sin. Φ. Substituantur hi valores pro dz et dx in aequatione inuenta, prodibitque.

$$\sqrt{(kk+rr)} = \frac{r\,\text{sin.}\,\Phi\sqrt{(kk+aa)}}{\sqrt{2ax}}$$

vnde fit $2ax = \frac{(aa+kk)rr\,\text{sin.}\,\Phi^2}{kk+rr}$: quae differentiata dabit:

$adx =$

$$adx = \frac{(aa+kk)rrd\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{kk+rr} + \frac{(aa+kk)k^2rdr\,\text{fin.}\,\Phi^2}{(kk+ar)^2}$$

Hic fi pro dx valor $rd\Phi$ fin. Φ fubftituatur, orietur

$$ad\Phi = \frac{(aa+kk)rd\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{kk+rr} + \frac{(aa+kk)kkdr\,\text{fin.}\,\Phi}{(kk+rr)^2}.$$

§. 26. Quamquam haec aequatio ad conftructionis rationem aeque parum ac preecedens redigi poteft, tamen aequatio $2ax = \frac{(aa+kk)rr\,\text{fin.}\,\Phi^2}{kk+rr}$ infignem continet proprietatem, qua curua ifta tautochrona C G determinari poteft. Si enim in hac tautochrona C G ducantur radii ofculi C A et G M, ille quidem in puncto imo C, hic vero in puncto quocunque G, atque pro punctis fufpenfionis A et M centra ofcillationis notentur D et H, tum vero infuper ducantur horizontalis G Q et verticalis M S; quoniam erit $AC = a$; $AD = a + \frac{kk}{r}$; $CQ = x$; $MG = r$; $MH = r + \frac{kk}{r}$, et $GS = r$ fin. Φ erit:

$$2\,CQ = \frac{AD.\,GS^2}{MG.\,MH}.$$

Ducatur porro ex S recta S T in G M normalis, erit $2\,CQ = \frac{AD.\,GT}{MH}$ feu $AD : MH = 2\,CQ : GT$, vel $AD : 2\,CQ = MH : GT$. Qua concinna proprietate natura curuae tautochronae C G exponitur.

§. 27. Vt tamen non nullum fructum ex hac aequatione percipiamus, accommodemus eam ad eiusmodi pendula, in quibus quantitas kk fit tam parua, vt prae reliquis quantitatibus, cum quibus comparatur, fere euanefcat. Huiusmodi autem cafus exiftet, fi corpus penduli praecipuum E F fit valde ponderofum fimulque mini-

 mum,

mum, ac praeterea oscillationes ampliores excludantur. Tum enim quo longius sumatur tale pendulum, eo minorem obtinebit valorem quantitas $k\,k$, respectu quantitatum $a\,a$ et $r\,r$. Quod cum euenit, si aequationis inuentae integrale per seriem exprimatur, cuius termini secundum potestates ipsius $k\,k$ progrediantur, sufficiet huius seriei duos vel tres terminos initiales accepisse, cum sequentes ob altiores ipsius $k\,k$ potestates sine errore praetermitti queant.

§. 28. Aequationem ergo quoque differentialem inuentam secundum potestates ipsius $k\,k$ disponamus, quae induet hanc formam:

$$\begin{aligned}
&+ar^4 d\Phi + 2akkrrd\Phi + ak^4 d\Phi \\
&-aar^3 d\Phi \,\text{cos.}\, \Phi - a^2k^2 rd\Phi \,\text{cos.}\, \Phi - k^4 rd\Phi \,\text{cos}\, \Phi = 0 \\
&\qquad -kkr^3 d\Phi \,\text{cos.}\, \Phi - k^4 dr \,\text{sin.}\, \Phi \\
&\qquad -aakkdr \,\text{sin.}\, \Phi
\end{aligned}$$

ex qua, si $k\,k$ euanesceret, foret $r = a \,\text{cos.}\, \Phi$; ponamus ergo ad valorem ipsius r veriorem inueniendum:

$$r = a \,\text{cos.}\, \Phi + k^2 P + k^4 Q + \text{etc. erit}$$

$$dr = -ad\Phi \,\text{sin.}\, \Phi + k^2 dP + k^4 dQ + \text{etc. atque}$$

$$\begin{aligned}
r^2 &= a^2 \,\text{cos.}\, \Phi^2 + 2ak^2 P \,\text{cos.}\, \Phi + 2ak^4 Q \,\text{cos.}\, \Phi + \text{etc.} \\
&\qquad + k^4 PP \\
r^3 &= a^3 \,\text{cos.}\, \Phi^3 + 3a^2k^2 P \,\text{cos.}\, \Phi^2 + 3a^2k^4 Q \,\text{cos.}\, \Phi^2 + \text{etc.} \\
&\qquad + 3ak^4 P^2 \,\text{cos.}\, \Phi \\
r^4 &= a^4 \,\text{cos.}\, \Phi^4 + 4a^3k^2 P \,\text{cos.}\, \Phi^3 + 4a^3k^4 Q \,\text{cos.}\, \Phi^3 + \text{etc.} \\
&\qquad + 6a^2k^4 P^2 \,\text{cos.}\, \Phi^2
\end{aligned}$$

§. 29.

§. 29. Quodſi iam hi valores in aequatione differentiali ſubſtituantur, orietur ſequens aequatio:

$$
\begin{aligned}
&+a^5 d\Phi \cos.\Phi^4 + a^4k^2 P d\Phi \cos.\Phi^5 + a^4k^4 Q d\Phi \cos.\Phi^6 \\
&-a^5 d\Phi \cos.\Phi^4 + a^3k^2 d\Phi \cos.\Phi^2 + 3a^3k^4P^2 d\Phi \cos.\Phi^6 \\
&\qquad -a^3k^2 d\Phi \cos.\Phi^4 + 3a^2k^4 P d\Phi \cos.\Phi \\
&\qquad +a^3k^2 d\Phi \sin.\Phi^2 - 3a^2k^4 P a\Phi \cos.\Phi^3 = 0 \\
&\qquad\qquad - a^2k^4 dP \sin.\Phi \\
&\qquad\qquad + a\,k^4 d\Phi \\
&\qquad\qquad - a\,k^4 d\Phi \cos.\Phi^6 \\
&\qquad\qquad + a\,k^4 d\Phi \sin.\Phi^2
\end{aligned}
$$

Hinc termino ſecundo ad nihilum redacto fiet:

$$aP\cos.\Phi^3 + \cos.\Phi^2 - \cos.\Phi^4 + \sin.\Phi^2 = 0$$

ideoque $P = \frac{-1+\cos.\Phi^4}{a\cos.\Phi^3} = \frac{-1}{a\cos.\Phi^3} + \frac{\cos.\Phi}{a}$: ex quo porro fit $dP = \frac{-3d\Phi\sin.\Phi}{a\cos.\Phi^4} - \frac{d\Phi\sin.\Phi}{a}$

et $P^2 = \frac{1}{aa\cos.\Phi^6} - \frac{2}{aa\cos.\Phi^2} + \frac{\cos.\Phi^2}{aa}$.

§. 30. Tertius porro terminus ad nihilum redactus dat:

$$a^3Q\cos.\Phi^3 + 3a^2P^2\cos.\Phi^2 + 3aP\cos.\Phi - 3aP\cos.\Phi^3 - adP\sin.\Phi : d\Phi + 2\sin\Phi^2 = 0$$

quae aequatio, ſi loco P^2, P, et dP valores modo inventi ſubſtituantur abibit in:

$$a^3Q\cos.\Phi^3 + \frac{3}{\cos.\Phi^4} - 3 - \frac{3}{\cos.\Phi^2} + 3\cos.\Phi^2 + 3\sin.\Phi^2 + \frac{3\sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^4} = 0$$

ſeu ob $\sin.\Phi^2 = 1 - \cos.\Phi^2$ habebitur

$$a^3Q\cos.\Phi^3 + \frac{6}{\cos.\Phi^4} - \frac{6}{\cos.\Phi^2} = 0$$

ideoque $Q = \frac{-6+6\cos.\Phi^2}{a^3\cos.\Phi^7} = \frac{-6\sin.\Phi^2}{a^3\cos.\Phi^7}$.

Quam

Quam ob rem erit proxime:

$$r = a\cos.\Phi - \frac{kk(1 - \cos.\Phi^4)}{a\cos.\Phi^3} - \frac{6k^4\sin.\Phi^2}{a^3\cos.\Phi^7}$$

vnde patet in ſitu penduli verticali, quo eſt $\Phi = 0$, fore $r = a = AC$, vti rei natura poſtulat.

§. 31. Pro curua ergo tautochrona CG, quae conveniat corporibus, in quibus quantitas kk valde eſt parua, nacti ſumus aequationem inter eius radium oſculi $GM = r$, eiusque amplitudinem ſeu angulum $GMS = \Phi$, ex qua aequatione quantitates conſtructioni huius curuae inſeruientes ſequenti modo definientur. Sit arcus curuae $CG = z$; abſciſſa $CQ = x$ et applicata $QG = y$ eritque $dz = rd\Phi$; $dx = rd\Phi\sin.\Phi$ et $dy = rd\Phi\cos.\Phi$. Hinc ergo obtinebitur:

$$z = a\int d\Phi\cos.\Phi - \frac{kk}{a}\int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^3} + \frac{kk}{a}\int d\Phi\cos.\Phi - \frac{6k^4}{a^3}\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^7}$$

$$x = a\int d\Phi\sin.\Phi\cos.\Phi - \frac{kk}{a}\int\frac{d\Phi\sin.\Phi}{\cos.\Phi^3} + \frac{kk}{a}\int d\Phi\sin.\Phi\cos.\Phi - \frac{6k^4}{a^3}\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^3}{\cos.\Phi^7}$$

$$y = a\int d\Phi\cos.\Phi^2 - \frac{kk}{a}\int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^2} + \frac{kk}{a}\int d\Phi\cos.\Phi^2 - \frac{6k^4}{a^3}\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^6}.$$

§. 32. Integralia vero haec ita ſe habent, vt ſit:

$$\int d\Phi\cos.\Phi = \sin.\Phi;\ \int d\Phi\sin.\Phi\cos.\Phi = \tfrac{1}{2}\sin.\Phi^2;\ \int d\Phi\cos.\Phi^2 = \tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{2}\sin.\Phi\cos.\Phi$$

$$\int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^3} = \frac{\sin.\Phi}{2\cos.\Phi^2} + \tfrac{1}{2}l\,\mathrm{tang.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\Phi);\ \int\frac{d\Phi\sin.\Phi}{\cos.\Phi^3} = \frac{1}{2\cos.\Phi^2};\ \int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^2} = \frac{\sin.\Phi}{\cos.\Phi}$$

$$\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^7} = \frac{\sin.\Phi}{6\cos.\Phi^6} - \frac{\sin.\Phi}{24\cos.\Phi^4} - \frac{\sin.\Phi}{16\cos.\Phi^2} - \tfrac{1}{16}l\,\mathrm{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$$

$$\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^3}{\cos.\Phi^7} = \frac{1}{6\cos.\Phi^6} - \frac{1}{4\cos.\Phi^4};\ \int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^6} = \frac{\sin.\Phi}{5\cos.\Phi^5} - \frac{\sin.\Phi}{15\cos.\Phi^3} - \frac{2\sin.\Phi}{15\cos.\Phi}.$$

His ergo valoribus ſubſtitutis habebitur:

$$z = a\sin.\Phi + \frac{kk}{a}\sin.\Phi - \frac{kk\sin.\Phi}{2a\cos.\Phi^2} - \frac{kk}{2a}l\,\mathrm{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$$
$$- \frac{k^4\sin.\Phi}{a^3\cos.\Phi^6} + \frac{k^4\sin.\Phi}{4a^3\cos.\Phi^4} + \frac{3k^4\sin.\Phi}{8a^3\cos.\Phi^2} + \frac{3k^4}{8a^3}l\,\mathrm{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi)$$

$x =$

$$x = \tfrac{1}{2} a \sin.\Phi^2 + \tfrac{kk}{2a} \sin.\Phi^2 + \tfrac{kk}{2a} - \frac{kk}{2a \cos.\Phi^2} - \frac{k^4}{2a^3} - \frac{k^4}{a^3 \cos.\Phi^6} + \frac{3k^4}{2a^3 \cos.\Phi^4}$$

$$y = \tfrac{1}{2} a\Phi + \tfrac{1}{2} a \sin.\Phi \cos.\Phi + \frac{kk}{2a}\Phi + \frac{kk}{2a} \sin.\Phi \cos.\Phi - \frac{kk \sin.\Phi}{a \cos.\Phi}$$
$$- \frac{6k^4 \sin.\Phi}{5a^3 \cos.\Phi^5} + \frac{2k^4 \sin.\Phi}{5a^3 \cos.\Phi^3} + \frac{4k^4 \sin.\Phi}{5a^3 \cos.\Phi}$$

vnde pro quouis angulo Φ coordinatae curuae tautochronae x et y aſſignari, ideoque ipſa curua quaeſita C G conſtrui poterit.

§. 33. Ad vſum autem pendulorum expediet huius curuae euolutam, ſeu ipſam curuam directricem A M B conſtruere; quo igitur hanc curuam A M B, quae pendulo motum tautochronum conciliat, definiamus, poſito eius arcu quocunque A M $= s$, ſit abſciſſa A P $= p$, et applicata P M $= q$; erit $s = a - r$; $dp = ds \cos.\Phi$ et $dq = ds \sin.\Phi$, ideoque $p = \int ds \cos.\Phi$ et $q = \int ds \sin.\Phi$. Ex ſuperioribus ergo habebitur:

$$s = a - a \cos.\Phi - \frac{kk \cos.\Phi}{a} + \frac{kk}{a \cos.\Phi^3} - \frac{6k^4}{a^3 \cos.\Phi^5} + \frac{6k^4}{a^3 \cos.\Phi^7}$$

vnde fit:

$$ds = ad\Phi \sin.\Phi + \frac{kk d\Phi \sin.\Phi}{a} + \frac{3kk d\Phi \sin.\Phi}{a \cos.\Phi^4} - \frac{30k^4 d\Phi \sin.\Phi}{a^3 \cos.\Phi^6} + \frac{42k^4 d\Phi \sin.\Phi}{a^3 \cos.\Phi^8},$$

hincque porro:

$$dp = ad\Phi \sin.\Phi \cos.\Phi + \frac{kk d\Phi \sin.\Phi \cos.\Phi}{a} + \frac{3kk d\Phi \sin.\Phi}{a \cos.\Phi^3} - \frac{30k^4 d\Phi \sin.\Phi}{a^3 \cos.\Phi^5} + \frac{42k^4 d\Phi \sin.\Phi}{a^3 \cos.\Phi^7}$$
$$dq = ad\Phi \sin.\Phi^2 + \frac{kk d\Phi \sin.\Phi^2}{a} - \frac{3kk d\Phi}{a \cos.\Phi^2} + \frac{3kk d\Phi}{a \cos.\Phi^4} + \frac{30k^4 d\Phi}{a^3 \cos.\Phi^4} - \frac{72k^4 d\Phi}{a^3 \cos.\Phi^6} + \frac{42k^4 d\Phi}{a^3 \cos.\Phi^8}$$

§. 34. Quodſi iam hae formulae debite integrentur, primo quidem reperietur abſciſſa

$$p = \tfrac{1}{2} a \sin.\Phi^2 + \frac{kk \sin.\Phi^2}{2a} - \frac{3kk}{2a} + \frac{3kk}{2a \cos.\Phi^2} - \frac{15k^4}{2a^3 \cos.\Phi^4} + \frac{7k^4}{a^3 \cos.\Phi^6} + \frac{k^4}{2a^3}$$

Deinde cum ſit: $\int d\Phi \sin.\Phi^2 = \tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2} \sin.\Phi \cos.\Phi$

$$\int \frac{d\Phi}{\cos.\,\Phi^2} = \frac{\sin.\,\Phi}{\cos.\,\Phi};\ \int \frac{d\Phi}{\cos.\,\Phi^4} = \frac{\sin.\,\Phi}{3\cos.\,\Phi^3} + \frac{2\sin.\,\Phi}{3\cos.\,\Phi};$$

$$\int \frac{d\Phi}{\cos.\,\Phi^6} = \frac{\sin.\,\Phi}{5\cos.\,\Phi^5} + \frac{4\sin.\,\Phi}{15\cos.\,\Phi^3} + \frac{8\sin.\,\Phi}{15\cos.\,\Phi}$$

$$\int \frac{d\Phi}{\cos.\,\Phi^8} = \frac{\sin.\,\Phi}{7\cos.\,\Phi^7} + \frac{6\sin.\,\Phi}{35\cos.\,\Phi^5} + \frac{8\sin.\,\Phi}{35\cos.\,\Phi^3} + \frac{16\sin.\,\Phi}{35\cos.\,\Phi}$$

obtinebitur:

$$q = \tfrac{1}{2}a\Phi - \tfrac{1}{2}a\sin.\,\Phi\cos.\,\Phi + \frac{kk\Phi}{2a} - \frac{kk\sin.\,\Phi\cos.\,\Phi}{2a} - \frac{kk\sin.\,\Phi}{a\cos.\,\Phi} + \frac{kk\sin.\,\Phi}{a\cos.\,\Phi^3}$$
$$+ \frac{k^4\sin.\,\Phi}{a^3\cos.\,\Phi}\left(\tfrac{4}{5} + \frac{2}{5\cos.\,\Phi^2} - \frac{16}{5\cos.\,\Phi^4} + \frac{6}{\cos.\,\Phi^6}\right).$$

Cum igitur ambae coordinatae p et q ex dato angulo Φ qui curuae quoque A M amplitudinem metitur, determinari queant, curua quaesita A M B non difficulter construetur.

PHYSICO

PHYSICO-
MATHEMATICA.

* DE ARGENTO VIVO
CALOREM CELERIVS RECIPIENTE ET CELERIVS PERDENTE QVAM MVLTA FLVIDA LEVIORA EXPERIMENTA ET COGITATIONES.

AVCTORE
G. *W. Richmann.*

Exemplum nouum propono in Phyſicis, ſine experimentis absque periculo nihil facile ſtabiliri poſſe, et nudis ratiociniis experientia non firmatis viam ad errores ſaepius patefieri. Receptum eſt a multis, primi ordinis etiam Philoſophiae naturalis cultoribus, inſtar axiomatis, denſiora corpora difficilius calefieri, et difficilius calorem acquiſitum perdere, quam rariora; et hinc etiam argentum viuum difficilius calefieri aqua et aliis fluidis, difficiliusque refrigerari. Et hoc non absque veri ſpecie factum, cum maiori materiae quantitati difficilius motus ab igne imprimi poſſe videatur, quam minori quantitati materiae. Hinc ſcriptum eſt in P. van *Muſſchenbrockii* Elem. Phyſ. ed. 1734. §. 573: *Quo grauiora et duriora ſunt corpora, eo difficilius igniuntur, veluti ferrum, cuprum, ſaxa, ſed haec quoque diutiſſime ignem retinent. Quo leuiora ſunt corpora, eo citius ignem amittunt: hinc aër ocyus calorem perdit, quam Alcohol, hoc citius aqua,*

 haec

* Traditae ſunt anno 1750. et anno 1752. incidit in manus *Cel. Nolletii* lectionum Phyſ. quartus Tomus anno 1749. euulgatus, vbi idem aſſeritur et experimentis confirmatur: Spero tamen lectorem ex ratione experimentorum abunde cogniturum, me *Cel. Nolletii* IV. Tomum nondum vidiſſe, dum has cogitationes concinnaui.

haec citius Mercurio. Eadem affirmata in Praelectionibus in Physicam Theoreticam *G. W. Krafftii*, §. 367. vbi aqua calorem citius amittere dicitur, quam Mercurius ob minorem densitatem. Neque Mercurius suam insignem mobilitatem per calorem praestantissimis Chymicis prodidit. *Hermannus Boerhave* scribit Tomo I. Chemiae in Capite de igne exp. XXI: *Quo densiora corpora, siue fluida fuerint, siue consistentia, eo pluri tempore egent, vt ab eodem igne aequaliter incalescant .... calescit citissime aër, dein Alcohol, oleum Petrolei limpidissimum postea, tum oleum Terebinthinae, mox aqua pura, dein aqua salsa, lixiuium fortissimum, metalla mercurius aurum.* Idem asseritur Experim. XX. Corrol. 9, ratione refrigerationis. Vt rite indicari possit, quae corpora caloris tenacissima sint, omnes conditiones l. c. Corrol. 17. sequentibus comprehendit: *Quo corpus aliquod constat materia densiore, quo maius existit mole, quo deinde figurae exactius sphaericae, eo etiam idem erit aptius, ignem receptum diutius in se conseruare; id et experientia vbique confirmat. Sed si tunc simul hoc corpus spatio inhaereret omnium rarissimo, aut inani penitus, tum conspirabunt omnes causae Physicae, hactenus notae calori diu conseruando.* Hic notandum, nullam cohaerentiae maioris vel minoris haberi rationem, quae tamen non parum hic concurrere, et diuersitatis haut exigua causa esse videtur. Silentio praeterire liceat quam plurimos alios antiquiores et recentiores, qui idem asseruerunt. Curtius hanc rem attigerunt *G. E. Hamberger* et G. I. *Gravesande*. Hic in Elem. Phys: Math: Tom. II. n. 2400 scribit: *Non ignis aeque facile corpora omnia intrat, quod variis causis, non omnibus notis, tribuendum;* et et n. 2515. *In multis occasionibus non eodem modo in idem corpus agunt corpora aeque calida; neque in corporibus variis, eodem fluido aequaliter vbique calido circumdatis, aequali tempore calor aequalis fit calori ipsius fluidi*; et n. 2516. *difficilius corpora quaedam aliis incalescunt, et quidem ex duplici causa; non enim aeque facile corporum omnium partes agitantur, et in quaedam difficilius ignis, quam in alia, penetrat*; et n. 2517. *Corporum partes diuersae sunt, et in diuersis corporibus non tantum densitate differunt, sed etiam cohaesione, vnde non aeque facile eadem ipsis communicatur agitatio; quare inaequales ignis actiones desiderantur, vt aequales gradus caloris corporibus communicentur et calor non sequitur proportionem quantitatis ignis. Hamberger* in Elem. Phyf. §. 430. edit. 2. fcribit: Ignis in corpus folidum quodcunque penetrat, et deinde n. 4. *Maior ignis copia requiritur ad conciliandum eundem caloris gradum corpori solido, quam aquae et aëri, magis enim resistit corpus solidum motui, ex igne oriundo, quam aqua et aër: ob cohaerentiam partium, et ob partium maiorem copiam solida maiorem ignis copiam retinere, hinc in quiete conseruare valent, quam aqua et aër sub eadem mole; quaecunque igneae particulae vero non mouentur, istae calorem dare nequeunt*; et n. 5. *Corpora solida pro diuersa grauitate specifica diuersam caloris quantitatem ex aëre absorbent, vnde est, quod conclavia, quorum parietes sunt lapidei, difficilius longe calefiant, quam ea, quorum parietes sunt lignei*; n. 6. *Diutius tamen ob easdem causas* n. 4, *calorem quoque seruant solida, quam aqua aër.* Ex his videre eft, *Gravesandium* et *Hambergerum* ad tenacitatem caloris maiorem requirere cohaeren-

cohaerentiam maiorem coniunctam cum densitate maiori. Densitatem certe solam, maiorem vel minorem, non esse conditionem maioris vel minoris tenacitatis caloris, ex sequentibus Experimentis videtur apparere; quae forte ad leges communicationis caloris diuersorum corporum eruendas, aliquid conferre poterunt, in qua materia in Physicis parum mihi praestitum esse videtur; quare etiam imposterum, quomodo solida diuersa calorem communicent inter se et cum fluidis, examinare animus est.

Experim. I.

§. 1. Elegi 1) duo vasa vitrea cylindrica eiusdem diametri, altitudinis et crassitiei, (diameter capacitatis vtriusque erat 2. dig. Lond. et altitudo quinque digitorum), et suspendi ea ita, vt ab aëre temperiei 65 graduum Therm. F. contingerentur. 2) Vni vasorum infudi argentum viuum, (cuius grauitas specifica ad grauitatem spec. aquae erat, vt 13, 57 : 1), vsque ad altitudinem duorum digitorum et 4 linearum, et calefeci illud, alteri aquam calidam ad eandem altitudinem. 3) Immersi vtrique massae Thermometrum mercuriale ad eandem profunditatem, cumque obseruarem, discrepantiam caloris indicari, effeci maiore calore frigidiori massae adplicato, vt discrepantia nulla appareret. 4) Notare incepi, a) tempus decrescentis caloris, b) gradum caloris aquae, et c) decrementum caloris aquae post quoduis temporis interuallum ab initio obseruationis, d) gradum caloris argenti viui, et e) decrementum graduum caloris argenti viui post tempus definitum, vti ex sequenti Tabula videre est.

Post

Post Temp.	grad. cal. aq.	decr.	grad. cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	132	0	131	0
7	122	10	118	13
12	115½	16½	109	22
17	111	21	104	27
22	107	25	99	32
27	103	29	94	37
42	93	39	84	47
47	90	42	81	50
52	88	44	79	52
62	84	48	76	55
72	81	51	73	58
87	78	54	71⅓	59⅔
92	77	55	71	60
97	76	56	70	61

Experim. II.

§. 2. Produxi in vtraque massa, aquea et argenti viui eandem ferme temperiem scil. 78 gr. temperies vero aëris, in quo refrigeratio fiebat, erat 65 gr. et obseruaui:

Post Temp.	cal. aq.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	78	0	78	0
4	77½	½	77¼	¾
12	76½	1½	75½	2½
18	75½	2½	74	4
34	73	5	71½	6½
46	72	6	70	8
70	70	8	68½	9½.

Experim. III.

§. 3. Immerſi vtramque maſſam aquae cum fruſtulis glaciei vsque ad gr. 33. Therm. *Fabr.* frigefactae, cum vtraque haberet temperiem 69 gr. et notaui, vt antea, in temperie aëris 65 gr.

Poſt Temp.	cal. aq.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	69	0	69	0
5	56	13	41	28
10	47	22	35	34
16	42	27	34	35
19½	39	30	33½	35½
24¼	37	32	33¼	35¾
28½	36½	32½	33	36
47½	34⅓	34⅔	33	
62	34	35	33.	

Experim. IV.

§. 4. In temperie aëris 66 gr. ſuſpendi maſſas easdem, et notaui, vti antea:

Poſt Temp.	cal. aq.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	33½	0	33½	0
5	36½	3	38	4½
16	39½	5½	46	12½
37	46	12½	55	21½
54	50½	17	59	25½
65	53	19½	61½	28
75	55	21½	63	29½
105	59	25½	66	32½
122	61	27½	66	32½
134	64½	31	66	32½

Experim.

Experim. V.

§. 5. In niue temperici $33\frac{1}{2}$ gr. locaui ſimul vas cum argento viuo, et aliud ſimile cum ſpiritu vini, cum Thermometris in iis ad eandem profunditatem immerſis: Spiritus vini ſtagnabat ad eandem altitudinem in vaſe, ad quam argentum viuum ſtagnabat. Obſeruaui, vt antea, in temperie aëris 65 gr.

Poſt T.	cal. Sp. V.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	61	0	61	0
5	53	8	47	14
10	48	13	40	21
15	$45\frac{2}{3}$	$15\frac{1}{3}$	37	24
20	44	17	35	26
25	$42\frac{1}{5}$	$18\frac{4}{5}$	34	27
30	41	20	$33\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$
35	40	21	$33\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$
40	39	22	$33\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$
45	38	23	$33\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$
50	37	24	$33\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$
55	$36\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2}$	$33\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$

Experim. VI.

§. 6. Vtrumque vas ex niue extraxi, et mercurium ita calefeci, vt eandem cum Sp. V. haberet temperiem 36 grad. et in temperie aëris 65. grad. obſeruaui vt antea

Poſt Temp.	cal. Sp. V.	incr.	cal ☿rii	incr.
0 min. pr.	36	0	36	0
5	39	3	40	4
17	42	6	46	10

22 - - - -	44 - - -	8 - -	49 - -	13
32 - - - -	47 - - -	11 - -	$52\frac{1}{2}$ - -	$16\frac{1}{2}$
43 - - - -	50 - - -	14 - -	55 - -	19
57 - - - -	52 - - -	16 - -	$56\frac{1}{2}$ - -	$20\frac{1}{2}$
68 - - - -	54 - - -	18 - -	58 - -	22.

Experim. VII.

§ 7. Immerſi aquae calidae ſuperante 150 gr. vas cum Sp. V. et obſeruaui in temperie aëris 65 gr.

Poſt T.	cal. Sp. V.	incr.	Poſt Temp.	cal. Sp. V.	incr.
0 min. pr.	61	0	9	126	65
3	94	33	11	129	68
6	108	47	12	130	69
8	122	61			

Experim. VIII.

§. 8. Spiritum Vini rectificatiſſimum, cuius grauitas ſpecifica ad grauitatem ſpecificam aquae erat vti 861 ad 1000, infudi ad praedictam (§. 1.) altitudinem, et Thermometro immerſo, in temperie aëris 63 graduum obſeruaui, vaſe niui immerſo, cuius temperis 33 gr. erat.

Poſt Temp.	cal. Sp. V. R.	decr.
0 min. pr.	61	0
1	59	2
3	57	4
4	55	6
6	53	8
$8\frac{1}{4}$	51	10
10	49	12
14	46	15

21	- - - - 43	- - - 18
28	- - - - 41	- - - 20
41	- - - - $38\frac{2}{5}$	- - - $22\frac{3}{5}$
46	- - - - $37\frac{2}{5}$	- - - $23\frac{3}{5}$
56	- - - - 36	- - - 25.

Experim. IX.

§. 9. Extraxi vas ex niue, et obſeruari in temperie aëris 63 gr. vt antea

Poſt Temp.	- - cal. Sp. V. R	- - incr.
- - 0 m. p.	- - 36	- - - - 0
- - 4	- - - 37	- - - - 1
- - 10	- - - 40	- - - - 4
- - 33	- - - 50	- - - - 14
- - 46	- - - 53	- - - - 17
- - 90	- - - $58\frac{1}{2}$	- - - - $22\frac{1}{2}$.

Experim. X.

§. 10. Immerſi aquae calidae 150 gr. ſuperanti vas cum Spiritu V. rectificatiſſimo in temperie aëris 63 gr. et notaui

Poſt Temp.	- - cal. Sp. V. R.	- - incr.
- - 0 m. p.	- - 62	- - - - 0
- - 2	- - - 83	- - - - 21
- - 4	- - - 94	- - - - 32
- - 5	- - - 108	- - - - 46
- - 8	- - - 124	- - - - 62
- - 10	- - - 130	- - - - 78.

Experim. XI.

§. 11. Immerſi vas cum Petroleo limpidiſſimo eiusdem voluminis cum argento viuo, et ſimul alterum vas cum argento viuo aquae fruſtulis glaciei ad gr. 33 frigefactae, et obſeruaui in temperie aëris 64 gr.

Poſt Temp.	cal. Petrol.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	57	0	57	0
10	48	9	38	19
15	$43\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$	$34\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$
20	40	17	$33\frac{2}{3}$	$23\frac{1}{3}$
25	38	19	$33\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$
30	37	20	33	24
35	$36\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	33	24
40	36	21	33	24
65	$35\frac{3}{5}$	$21\frac{2}{5}$	33	24
75	$35\frac{4}{5}$	$21\frac{1}{5}$	$33\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$.

Experim. XII.

§. 12. Extraxi ex aqua vtrumque vas, et deterſis parietibus ſuſpendi, vt tantummodo ab aëre temperiei 64 gr. contingeretur, et notaui:

Poſt Temp.	cal. Petrol.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	$35\frac{4}{5}$	0	$33\frac{2}{3}$	0
5	38	$2\frac{1}{5}$	39	$5\frac{1}{3}$
10	$41\frac{4}{5}$	$6\frac{2}{5}$	42	$8\frac{1}{3}$
15	$45\frac{1}{3}$	$10\frac{1}{15}$	45	$11\frac{1}{3}$
20	$47\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{15}$	47	$13\frac{1}{3}$
25	50	$14\frac{1}{5}$	50	$16\frac{1}{3}$.

Experim.

Experim. XIII.

§. 13. Transtuli in medium aëreum frigidius vtramque massam, et obseruaui in temperie aëris $33\frac{1}{2}$ gr.

Post Temp.	cal. Petrol.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	65	0	65	0
26	54	11	$51\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$
65	40	25	40	25
159	33	32	$33\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$.

Experim. XIV.

§. 14. Ex temperie aëris 30 gr. portaui adparatum in temperiem 63 gr. et obseruaui.

Post Temp.	cal. Petrol.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	30	0	30	0
5	$36\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	38	8
18	40	10	42	12
26	$45\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	46	16
70	58	28	57	27.

Experim. XV.

§. 15. Aquae calidae gr. 150 + immersi vasa cum Mercurio et petroleo simul cum temperies vtriusque esset 61 gr. et obseruaui in temperie aëris 64 gr.

Post. Temp.	cal. Petrol.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	61	0	61	0
3	96	35	131	70
6	116	55	144	83
9	$142\frac{1}{2}$	$81\frac{1}{2}$	150	89
12	144	83	147	86.

Experim.

Experim. XVI.

§. 16. Extraxi ſimul ex aqua vas vtrumque, et ſuſpendi in aëre temperiei 62 gr. et obſeruaui.

Poſt Temp.	cal Petrol.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0 min. pr.	145	0	145	0
5	128	17	$127\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$
10	119	26	119	26
15	111	34	111	34
20	104	41	$104\frac{1}{2}$	$40\frac{1}{2}$
25	98	47	99	46
30	$92\frac{1}{3}$	$52\frac{2}{3}$	93	52
40	88	57	86	59
45	85	60	83	62
70	$73\frac{1}{2}$	$71\frac{1}{2}$	72	73
80	$71\frac{1}{2}$	$73\frac{1}{2}$	70	75.

Experim. XVII.

§. 17. Vaſi vni aquam alteri petroleum infudi, ita, vt volumina rurſus eſſent aequalia, et Thermometris ad eandem profunditatem immerſis vtrumque vas immiſi aquae calidae temperie antea eadem vtrique fluido tributa, et obſeruaui in temperie aëris 65 gr.

Poſt Temp.	cal. aq.	incr.	cal. Petr.	incr.
0 min. pr.	79	0	79	0
2	98	19	104	25
6	$101\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	$106\frac{1}{2}$	27
7	102	23	107	28
12	$102\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$	$106\frac{1}{3}$	$27\frac{1}{3}$.

Experim.

Experim. XVIII.

§. 18. Eadem vaſa ſuſpendi in aëre temperiei 68 gr. et obſeruaui

Poſt Temp.	cal. aq.	decr.	cal. Petrol.	decr.
0 min. pr.	102	0	105	0
4	99	3	101	4
10	95	7	95½	9½
15	92	10	91½	13½
21	89½	12½	87½	17½
25	88	14	85½	19½
35	81⅘	20⅕	78½	26
55	77	25	74	31
69	74⅕	27⅘	72	33
90	72	30	70½	34½
110	70½	31½	70	35
120	70	32	69½	35½.

Experim. XIX.

§. 19. Oleum Terebinthinae pari ratione examinaui, et immerſi cum argento viuo aquae calidae, et obſeruaui in temperie aëris 66 gr.

Poſt Temp.	cal. ol. Tereb.	incr.	cal. ☿rii	incr.
0 min. pr.	76	0	74	0
3	84	8	89	15
4	86	10	93	19
5	89½	13½	94	20
9	104	28	110	36.

Experim. XX.

§. 20. Extraxi vafa ex aqua, et fufpendi in aëre 66 gr. et obferuaui vti antea

Poft Temp.	cal. ol. Tereb.	decr.	cal. ☿rii	decr.
0	107	0	$107\frac{3}{5}$	0
5	104	3	102	$5\frac{3}{5}$
14	95	12	$94\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{10}$
19	90	17	90	$17\frac{3}{5}$
28	87	20	87	$20\frac{3}{5}$
36	86	21	84	$23\frac{3}{5}$
45	83	24	82	$25\frac{3}{5}$
50	82	25	$80\frac{2}{5}$	$27\frac{1}{5}$
71	78	29	$76\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{10}$
84	76	31	75	32,6.

Experim. XXI.

§. 21. Apparatum niui cum fale mixtae immerfi, et obferuaui, defcendiffe Thermometra fimul

oleum Tereb.	Mercurius
a gr. 64 ad 56	a gr. 64 ad 45
a gr. 56 ad 45	a gr. 45 ad 34
a gr. 45 ad 31	a gr. 34 ad 22.

Experim. XXII.

§. 22. Oleum lini pariter examinaui in niue temperiei 33 gr. et in temperie aëris 62 gr. obferuaui

Poft Temp.	cal ol. lini	decr.
0 min. pr.	61	0
5	52,4	8,6

10

10	47, 2	13, 8
15	43, 2	17, 8
20	39, 6	21, 4
25	38,	23,
32	37,	24,
35	36, 6	24, 4
40	35, 8	25, 2.

Experim. XXIII.

§. 23. Extraxi ex niue vas, et obſeruaui in temperie aëris 62 gr.

Poſt Temp.	cal. ol. lini	decr.
0 min. pr.	35	0
4	37	2
20	44	9
33	48, 6	13, 6
40	50, 5	15, 5
43	51,	16
54	53, 4	18, 4
64	55	20,
75	56, 2	21, 2.

§. 24. Ex his experimentis videre eſt:

1) Argentum viuum in medio aëre denſiori aqueo vel etiam in niue, frigidiori, maiora decrementa caloris pati, quam a) aqua, Exp. III. b) Spiritus vini ordinarius, Exp. V. c) petroleum, Exp. XI. d) oleum Terebinthinae, Exp. XXI. e) Spir. vin. rectificatiſſimus, Exp. VIII. coll. Exp. V. f) oleum lini, Exp. XXII. coll. Exp. XI. quia ferme aequalia decrementa cum petroleo in medio aqueo patitur.

 2) Idem

2) Idem caloris incrementa maiora capere in medio aqueo calidiori, quam a) petroleum, Exper. XV. b) oleum Terebinthinae, Exp. XIX. c) Spiritus vini ordinarius, Exp. VII. coll. Exper. XV. cumque petroleum maiora incrementa caloris acquirat quam aqua in medio aqueo, Exper. XVII. quod minora in eodem capit, quam argentum viuum, etiam d) argentum viuum maiora incrementa caloris acquirere quam aqua, et tandem maiora quam e) Spiritus vini rectificatissimus, Exper. X. coll. Exper. VII. et Exper. XV.

3) Incrementa et decrementa caloris Mercurii, petrolei et decrementa caloris olei Terebinthinae, petrolei et Mercurii in aëre esse ferme aequalia, Exp. XII. XIII. XIV. XX. paruae enim discrepantiae plurimam partem diuersitati Thermometrorum et vasorum, quae licet exigua admodum fuerit, tamen nonnihil efficere potuit, et diuersitati aliarum circumstantiarum minimarum, quae in eiusmodi experimentis non tolli in totum potest, forte tribuendae sunt. Aliqualem tamen differentiam adesse, et Mercurium motui a calore minus resistere probabiliter quam dicta fluida infra patebit.

4) Aquae vero et Spir. V. ordinarii decrementa et incrementa caloris etiam in aëre esse minora decrementis et incrementis caloris argenti viui, Exp. I, II, VI. consequenter etiam minora decrementis et incrementis Petrolei (coll. n. 3), etiam olei lini decrementa in aëre esse minora decrementis petrolei et consequenter Mercurii, Exp. XXIII. coll. Exp. XX.

§. 25. Haec consectaria licet videantur ex experimentis satis patere, alia ratione tamen confirmare volui,

vt

vt nullum dubium diuerſitas Thermometrorum ſaltim et vaſorum iniicere poſſet. Obſeruaui ſaepius, per ſatis longum temporis interuallum, temperiem in Muſeo eandem, vt Thermometrum nullam mutationem indicaret; hinc finem ſequenti ratione obtinere putaui.

Experim. XXIV.

§. 26. Elegi 1) vas vitreum cylindricum tenuium parietum, et ei infudi ad certam altitudinem fluidum examinandum (altitudo haec erat 11 lin. Lond. Diameter 30 lin. ſuperficies integra fluidi in vaſe ſtagnantis 24″, 80‴ □ et volumen 7″ 870‴ ⊡.)

2) Thermometri bulbo fluido immerſo calefeci vas cum fluido in aqua calida vsque ad gradum 130, hoc facto.

3) Extraxi ex aqua vas, et ſuſpendi, ita, vt ſolum ab aëre 68 graduum contingeretur, et ſuperficies fluidi ſuperior et fundi eſſent parallelae.

4) Cum Mercurius Thermometri haereret circa gradum 128, incepi notare tempus ab initio obſeruationis, et gradum Thermometri vsque dum calor fluidi examinandi decreuiſſet ad gradum centeſimum.

5) Vno fluido examinato ſimili ratione reliqua examinaui in eodem vaſe, eodem Thermometro immerſo, cuius quilibet gradus diuiſus erat in 5 partes; eratque aequalis $\frac{5}{4}$ partibus lin. Lond.

6) Paulo maiorem altitudinem conceſſi argento viuo, quam reliquis fluidis examinandis, cuius rei rationem infra dabo.

Obſeruationes cum Mercurio, oleo Terebinthinae, aqua

aqua, Spiritu vini ord. sequenti tabula comprehendo, vbi prima columna tempora ab initio obseruationis praeterlapsa in minutis primis exhibet, et reliquae columnae fluidorum supra positorum graaus caloris post definitum tempus residuos.

Post T.	cal. ☿rii	cal. ol. Ter.	cal. aq.	cal Sp. V. o.
0, m.p.	128	128	128	128
2′	123	124, 2	124	125
4′	119,4	120	120	121, 5
7′	114	114, 6	115	115, 8
9′	111	111, 6	112	112, 6
14′	104	104, 4	105, 8	105, 6
17′	100,4	100, 4	102, 6	102, 4
17′ $\frac{35}{60}$	100,	100, 28	102,	101, 85
17′ $\frac{50}{60}$	-	100		
18′ $\frac{35}{60}$	-	-	100	
19′ $\frac{10}{60}$	-	-	-	100.

§. 27. Sunt ergo decrementa aequalibus temporibus ab initio obseruationum, vt sequens tabula indicat.

Post Temp.	decr. ☿rii	decr. ol. Ter.	decr. aq.	decr. S. V.
2 min. pr.	5, 0	3, 8	4, 0	3, 0
4	8, 6	8, 0	8, 0	6, 5
7	14, 0	13, 4	13, 0	12, 2
9	17, 0	16, 4	16, 0	15, 4
14	24, 0	23, 6	22, 2	22, 4
17	27, 6	27, 6	25, 4	25, 6
17; $\frac{35'}{60}$	28, 0	27, 72	26,	26, 15

§. 28. Alio tempore sal cinerum Clau. solutum, Spiritum vini rectificatissimum, cuius grauitas specifica ad grauitatem spec. aquae erat vti 801 ad 1000, et oleum lini

lini examinaui in temperie aëris 65, 3 gr. et inueni.

Post. Temp.	Sp. V. R. cal.	Sal. cin. cl. sol.	ol. lini
0 min. pr.	128	128	128.
2	123, 8	123, 8	127, 15
4	119, 8	120, 4	124, 8
7	113, 6	115, 6	120, 2
9	110,	112, 6	117,
14	101, 6	106	109, 6
15	110, 4	105	108
$15\frac{12}{65}$	100		
$19\frac{53}{65}$		100	102
$21\frac{20}{65}$			100.

§. 29. Decrementa caloris hinc aequalibus temporibus ab initio obseruationum praeterlapsis erant, vti sequens tabula indicat:

Post Temp.	decr. cal. S. V. R.	Sal. cin. cl. sol.	ol lini
2 min. pr.	4, 2	4, 2	0, 85
4	8, 2	7, 6	3, 20
7	14, 4	12, 4	7, 80
9	18, 0	15, 4	11, 00
14	26, 4	22, 0	18, 40

Si comparare volumus haec decrementa cum decrementis (§. 27), debemus haec reducere ad statum aëris temperiei 68 gr. quia decrementa temporibus paruis sunt in ratione differentiarum, inter temperiem fluidi et aëris, facilis erit reductio. Mutatur tali ratione tabula praecedens in sequentem.

Post Temp.	cal. decr. S. V. R.	Sal. cin. cl. sol.	ol. lini
2 min. pr.	4, 02	4, 02	0, 81
4,	7, 83	7, 22	2, 67

7,

7,	-	--	--	13, 72	--	11, 78	--	7,07
9,	-	--	--	17, 12	--	14, 63	--	10,11
14,	-	--	--	25, 01	--	20, 85	--	17,11

Haec tabula poteſt comparari cum tabula decrementorum calorum fluidorum tabulae §. 27. et apparet, decrementa initialia Mercurii etiam decrementis initialibus ſpiritus vini rectificatiſſimi, ſalis cinerum clauellatorum ſoluti, et olei lini eſſe maiora, ſal cin. cl. ſolutum tardius quam praedicta fluida, oleum lini vero etiam tardius quam ſal cinerum caluel. ſolutum refrigerari.

§. 30. Si reſpicio ad ea, quae *Tom. I. Nov. Comment.* in inquiſ. in legem decr. caloris §. 22. coll §. 25. dixi, eſſe ſcil. in homogeneis corporibus (poſitis ſuperficiebus integris vti S ad s, voluminibus vti V ad v, differentiis inter temperiem fluidi et aëris vti A ad a, decrementis aut incrementis initialibus vti B ad b) $B : b = \frac{SA}{V} : \frac{sa}{v}$, et decrementa et incrementa poſt tempus n vti $\frac{B(A-B)^{n-1}}{A^{n-1}}$ ad $\frac{b(a-b)^{n-1}}{a^{n-1}}$.

Hoc inde fit, quia in corporibus homogeneis ratio pororum ad materiam conſtantem ſemper eſt eadem, multitudo etiam pororum ad multitudinem particularum ſe paratarum eandem habet rationem. Deinde per ſuperficiem cuiusuis corporis materia aequaliter diſperſa eſt, hinc pendet definita quaedam ad certam quantitatem caloris recipiendam et perdendam proprietas, vt decrementa et incrementa ſint in praedicta ratione, ita, vt, quo minor quantitas materiae mouendae ſit, et quo liberior ad eam acceſſus, vel ex ea exitus, id eſt, quo maior ſuperficies, eo maius ſit incrementum caloris et decrementum.

§. 31. In corporibus heterogeneis:

(a) Ratio pororum ad materiam conſtantem non eſt eadem, neque multitudo pororum in vno corpore aequalis eſt neceſſario multitudini pororum in alio, ſi vel maxime denſitates ſint eaedem, et volumina Geometrica eadem, et inde pendere poteſt infinita varietas, et multae diſcrepantes proprietates, quae efficere valent, vt corpora calori magis vel minus obnoxia reddantur.

(b) Corpora heterogenea, quae denſitate differunt, ſub aequalibus voluminibus Geometricis habent quantitates materiae conſtantis in ratione denſitatum. Si ſuperficies etiam ſunt aequales, ſuperficies materiae conſtantis etiam poſſunt eſſe in ratione denſitatum, hoc caſu materia mouenda actione ignis vnius corporis erit ad materiam mouendam alterius, vt ſuperficies illius ad ſuperficiem huius. Si s et v ſuperficiem et volumen materiae conſtantis indicant, erunt $\frac{s}{v}$ hoc caſu aequales, ſi $\frac{S}{V}$ ſunt aequales.

(c) At poſſunt voluminibus et ſuperficiebus Geometricis aequalibus ſuperficies materiae conſtantis a ratione denſitatum corporum recedere. Poteſt corpus ita excauatum eſſe canaliculis, vt per ſuperficies internarum etiam partium ignis allapſus particulas interiores corporum ad motum concitare poſſit, vel in corpore calido per talem ſuperficiem etiam medium frigidius verſus tendere, et illud afficere, vt ita corpus eo maiorem quantitatem motus ab igne perdere poſſit, quo maior ei per ſuperficiem maiorem libertas motum ſuum cum medio frigidiori communicandi datur, licet ſuperficies Geometrica non differat a ſuperficie alterius, quod eiusmodi proprietate carere poteſt. Si (1) volumen et ſuperficies Geometrica corporum A et B ponatur aequalis, et (2) vtrumque conſtare certo numero particularum perfecte ſphaericarum minimarum homogenearum primae compoſitionis. Sitque (3) numerus particularum in A $= n$, et in B $= m$; ſit (4) denſitas particularum in A $= \delta$, in B $= d$; ſit (5) volumen ſummae particularum omnium in vtroque corpore $= v$; orientur (6) corpora interſtitiis praedita ex ſphaerulis compoſita, in quorum interiora materia ſubtilis ignis penetrare, et particulas commouere, ex iisque iterum liberis viis diſcedere poterit; eritque (7) vnius particulae volumen in A $= \frac{v}{n}$, et vnius particulae volumen in B $= \frac{v}{m}$; hinc (8) ſuperficies particulae in A erit vti $\frac{v^{2:3}}{n^{2:3}}$, et in B vti $\frac{v^{2:3}}{m^{2:3}}$; erit ergo (9) ſuperficies particulae in A ad ſuperficiem particulae in B vti $m^{2:3} : n^{2:3}$, conſeq. (10) ſuperficies omnium particularum in A ad ſuperficiem omnium in B vti $nm^{2:3} : mn^{2:3}$. Cum (11) quantitas materiae mouendae in A ſit ad quantitates materiae mouendae vel calefaciendae in B $= \delta : d$, quia volumina ſunt aequalia, erunt ſuperficierum particularum ſummae diuiſae per quantitates materiae vti $\frac{nm^{2:3}}{\delta} : \frac{mn^{2:3}}{d}$; Si ergo (12) $nm^{2:3}$ reſp. $mn^{2:3}$ maior ponitur, quam δ reſpectu d, erit etiam decrementum vel incrementum caloris, ſi caetera ſint paria in A maius quam in B. Ponatur (13) $\delta : d < f : 1$, et $nm^{2:3} : mn^{2:3} = f : 1$, erit (14) $nm^{2:3} = f\,mn^{2:3}$, hinc (16) $\frac{n}{m} = f^{3}$; hinc erit (15) multitudo particularum in B ad multitudinem particularum in A vti 1 ad f^{3}; et (16) magnitudo vnius particulae in A ad magnitudinem vnius parti-

particulae in B vti 1 ad f^3, diameterque particulae ad diametrum particulae in B $=$ 1 : f. Conſequenter in rariori corpore ſub his conditionibus diameter particulae ſuperare debet diametrum particulae in denſiori magis, quam denſitas denſioris denſitatem rarioris, ſi decrementum et incrementum caloris denſioris corporis maius eſſe debet decremento vel incremento caloris rarioris corporis. Sint denſitates vti 14 ad 1, et f debebit eſſe $>$ 14, conſeq. diameter particulae rarioris corporis plus quam quatuordecies maior eſſe debet diametro particulae denſioris corporis.

(d) Poteſt etiam denſitas ſuperficiei materiae cum ſuperficie externa Geometrica coincidentis denſitatem totius valde ſuperare. Ob diuiſibilitatem materiae inaſſignabilis limitationis non dicam in infinitum progredientem, quantitas materiae parua per volumen finitum ita diſtributum concipi poteſt, vt pori ſint qualibet extenſione dabili minores, datoque volumine materiae conſtantis et volumine integro item multitudine pororum poteſt extenſio pori inueniri. Sit volumen integrum V, volumen materiae v, erit volumen pororum $= V - v$; ſit multitudo pororum $= n$, erit volumen vnius pori $= \frac{V - v}{n}$; ſi porus concipitur cubicus ſex lateribus quadratis conſtantis materiae veſtitus, et V ponitur $=$ 1001''' ⊡; et deinde $n = 1^{IV}$, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, erit extenſio pori millies trillioneſima pars lineae cubicae, et $\left(\frac{V - v}{n}\right)^{1:3}$ ſiue radix cubuli vna decies millioneſma pars lineae. Corpus vero ex talibus cubulis conſtructum habebit denſitatem ſuperficiei maximam, quam habere poteſt, denſitas vero totius erit ad denſitatem maximam poſſibilem, vt volumen conſtantis materiae ad volumen integrum $= 1 . 1001$; hinc denſitas totius corporis erit ad denſitatem ſuperficiei vt 1 ad 1001. Vtrum in natura talia corpora dentur definire non valemus. Facile vero patet, talia corpora, ſi darentur, admodum cohaerentia eſſe debere, et dura, talemque ſtructuram fluidis prorſus non conuenire, quibus ſphaerica magis reſpondet. Ab hac denſitate maxima poteſt denſitas ſuperficiei plus vel minus recedere, quatenus plus vel minus porulis ſuperficies diſtinctus eſt. Hinc ratio ſuperficiei conſtantis materiae ad quantitatem materiae ſuperficie inuolutae infinitae varietati obnoxia eſt. Patet hinc, inanem eſſe laborem ex figura diuerſa particularum, et peculiari ſtructura totius rationem diuerſitatis caloris petere et definire, cum minimae particulae ſint ſupra inveſtigationem noſtram, dum ſenſus noſtros fugiunt.

§. 32. In fluidis, quae probabiliter ſphaericam figuram habent, diuerſitas in calore recipiendo et perdendo forte pendet a magnitudine particularum homogenearum primae compoſitionis; de qua (§. 31, (c)) ſcripſi. Si hoc obtineret, poſitis decrementis initialibus B : b, corporum A et B voluminibus Geometricis aequalibus, et multitudine particularum in corpore A, quod decrementum B patitur ad multitudinem particularum in corpore, B, quod decrementum b patitur, vti $n : m$, et denſitatibus vti $\delta : d$, erit $\frac{nm^{2:3}}{\delta} : \frac{mn^{2:3}}{d} = B : b$ (§. 31), hinc $m : n = d^3 b^3 \delta^3 : B^3$; hinc multitudo particularum in B ad multitudinem particularum in A $= d^3 b^3 : \delta^3 B^3$, et magnitudo

tudo particulae in A ad magnitudinem particulae in $B = d^3 b^3 : \delta^3 B^3$; diameter vero particulae in A ad diametrum particulae in $B = db : \delta B$. i. e. in ratione compoſita denſitatum et decrementorum initialium reciproca. Hinc diameter particulae argenti viui eſſet ad diametrum particulae aqueae $= 1:17$ circiter; quia (§. 27) $B = 5$, $b = 4$, $\delta = 14$, $d = 1$; ad diametrum particulae olei Terebinthinae vti $1:19$ ferme, ad diametrum particulae Spiritus V, vti $1:26$ ferme. Particulam vero aquae minimam homogeneam primae compoſitionis minorem eſſe particulis ſimilibus Spiritus vini et olei Terebinthinae nullum eſt dubium, quia hae ex aqua et aliis conſtitutiuis compoſitae ſunt. Quamcunque tamen rationem habeant particulae et ſuperficies particularum, et qualiscunque ſit $\frac{s}{v}$, B et b, poſitis A et a aequalibus vti (§. 26), experientia definiri poſſunt, et erunt poſt tempus n in ratione $B(a-B)^{n-1}$ ad $b(a-b)^{n-1}$. Ponatur $B > b$, erit $(a-B)^{n-1} < (a-b)^{n-1}$. Hinc poſt aliquod tempus debet eſſe $(a-B)^{n-1} : (a-b)^{n-1} = b : B$, et tunc decrementa debent eſſe aequalia, ſi omnes reliquae conditiones praeter differentias inter temperiem fluidi et aëris manent pares. Poteſt hoc tempus n inueniri ex aequatione, $B(a-B)^{n-1} = b(a-b)^{n-1}$, et erit $n = \frac{lB - lb}{l(a-b) - l(a-B)} + 1$. Ita vero oleum Terebinthinae in 27 minutis primis, et aqua in 24 circiter, idem decrementum cum Mercurio pati deberent, quod ſec: experientiam in 17 ad 19 minutis fit. Spiritus V. poſt 28. min. pr. cum Mercurio eandem temperiem acquirere deberet, quod in 19 min. fit. Spiritus V. et aqua deberent in 34 minutis ad eandem temperiem peruenire,

 quod

quod in 9 ad 14 minutis fit. Aqua et oleum Terebinthinae 31 minuto praeterlapſo vnius temperici eſſe deberent, quod quarto iam minuto contingit. Ratio huius receſſus a lege pendet ab euaporatione ſaltem ex parte; Aqua Spiritus V. oleum Terebinthinae ob euaporationem $\frac{s}{v}$ accipiunt maius, conſeq. etiam $\frac{s}{v}$ maius fit (§. 31 (b)), quam argentum viuum habet, cuius volumen manet conſtans. Quam ob rem Spiritus vini etiam debet plus euaporare in eadem temperie quam aqua, et aqua plus quam oleum Terebinthinae. Diuerſimode etiam expanduntur fluida, hinc ratio magnitudinis particularum minimarum homogenearum primae compoſitionis mutatur (§. 31 (c)). Ex his ſimul patet, reliqua fluida, ſi non paſſa eſſent euaporationem, ſicuti argentum viuum non paſſum eſt, adhuc minus decrementum aequalibus temporibus acquiſiuiſſe. Intelligitur etiam, cur in experimentis altitudinem Mercurio in vaſe conceſſerim maiorem, quam reliquis fluidis (§. 26 (6)), ita $\frac{s}{v}$ in reliquis fluidis maior reddebatur, et hinc decrementum in reliquis fluidis ex hac cauſa debuit fieri maius, quam factum fuiſſet, ſi $\frac{s}{v}$ in reliquis fluidis manſiſſet aequalis $\frac{s}{v}$ in Mercurio. Ergo minora adhuc decrementa paſſa fuiſſent, ac re vera paſſa ſunt, ſi $\frac{s}{v}$ in illis fuiſſet aequalis $\frac{s}{v}$ in Mercurio. Hinc confirmatur, maius decrementum caloris pati Mercurium quam dicta fluida. Vt rem vlterius ſtabilirem, conceſſit mihi primarius pharmacopoeiae praefectus *Modelius* pro ſua erga me amicitia, et ad ſcientias promouendas deſiderio, vt in laboratorio cum maſſa ☿rii 56 libr. ſequentia experimenta inſtituerem.

Experi-

Experim. XXV.

§. 33. Maſſam Mercurii 56 librarum infudi vaſi cupreo, et notaui in margine, ad quam altitudinem argentum ſtagnaret, deinde immerſi Thermometrum, et notaui temperiem. Hoc facto vas igni in furno anemio admouebatur, et ſimul notabatur tempus, obſeruataque eſt maſſa dicta a temperie 44 gr. in caleſcere quinque minutis primis ad gradum 242. Vaſe cupreo frigefacto, loco Mercurii infudi aquam ad praedictam notatam altitudinem, et notaui pariter gradum temperiei aquae, qui erat 44 gr. admouique vas eidem igni notato rurſus tempore, et creuit calor nouem minutis a gr. 44. ad 212.

Experim. XXVI.

§. 34. Maſſam ☿rii 56 libr. calefactam infudi doliolo ligneo corio intus veſtito, et immiſi bulbum Thermometri per foramen in ſuperiori parte corii factum in temperieque aëris 45. gr. obſeruaui ſingulis horis temperiem maſſae, vt ex ſequenti tabula videre licet, vbi appoſitum quinam gradus ſecundum calculum prodeant?

Poſt Temp.	cal. ☿rii obſ.	cal. ☿rii per calc.
0 hora	120	120
1	97,6	97,6 per obſeru. et hyp.
2	81,8	82 3
3	71,0	70,8
4	63,8	63 1
6	54,6	53,9
9	48,4	48.

§. 35. Si decrementum poſt $\frac{1}{n}$ temporis ponitur $a-x$, et a differentia initialis temperiei argenti viui et aëris

aëris, differentiaque inter temperiem eiusdem et aëris post tempus $n = c$, erit per aequationem $\frac{x^n}{a^{n-1}} = c$, $l\,x = \frac{l\,c + (n-1)\,l\,a}{n}$; habemus post horam vel 6. 10 min. pr. per obseruationem (§. 34) $c = 97,6 - 45,0 = 52,6$, et $a = 1200 - 450 = 750$ et $n = 6$; consequenter temperies post 10 min. pr. debet esse 115. 6, et decrementum post idem tempus $= 44$. Ex his elementis calculus appositus est ortus, cuius mira harmonia cum obseruationibus satis demonstrat legis veritatem, et simul ratio facile perspicitur, cur Mercurius se legi exactius conformet quam aqua ex (§. 32). Notandum etiam circa Exper. XXVI. si massa non inuoluta fuisset corio, et crassities parietum dolioli lignei minor fuisset, quod celerius decreuisset temperies probabiliter.

Vt compararem decrementa caloris magnae massae Mercurii cum decrementis caloris magnae massae Aquae, sequens adhuc institui Experimentum.

Experim. XXVII.

§. 36. 1) Elegi vas ligneum coni truncati figuram habens, quod capiebat quatuor libras, et $\frac{1}{8}$ partem aquae, quae idem volumen occupabat, ac argentum viuum Exp. XXVI. quia grauitas spec. eius ad grauitatem specificam aquae inuenta erat, vti 13570 ad 1000. Superficies vero aquae integra erat paulo maior in vase ligneo conico, ac superficies argenti viui in dolio, quae superficiem sphaericam propius accedebat, erat haec ad illam ferme vti 38537 : 41200. Hinc $\frac{s}{v}$ in Mercurio debebat esse minor, quam $\frac{s}{v}$ in aqua. Et hinc decrementa caloris aquae

ex

ex hac cauſa deberent ſub eadem A maiora eſſe, quam decrementa in Mercurio, ſi ergo inueniantur ſaltem aequalia, rurſus patebit etiam ex his Experimentis, decrementa argenti viui eſſe maiora, quam aquae ſub iisdem $\frac{SA}{V}$.

2) Calefeci aquam, et impleui vas, Thermometrumque ei immiſi, poſtea obſeruaui in temperie aëris 34 gr. 1) tempus decreſcentis caloris, 2) temperies poſt notata tempora reſiduas, 3) appoſui ſimul calculum, poſita temperie aëris 34 gr. et 4) calculum, poſita temperie aëris 45. gr. vti Exper. XXVI. erat.

Poſt Temp.	cal. aq. obſ.	calc. ſub. 34. gr. aëris	calc. ſub 45 gr. aëris
0 min. pr.	169,6	- - -	
5	166,0		
75	125,4	126,4	128,3
0 -90	- -	117,5	121,8
105	111,6	111,	115,9
135	101,3	99,5	102,1
1)150	- -	- -	100,6
165	92,3	89,7	96,3
2)210	- -	- -	85,3
225	79	74,4	- -
3)270	- -	65,7	74,3
4)330	- -	56,9	66,1
405	53	53,3	59,1
6)450	- -	49,3	56,1
465	47½	45,1	55,2
600	39,9	39,3	49,9
9)630	- -	38,5	49,2
690	36,3.		

Si ponitur temperies aëris 45 gr. inuenitur decrementum post 5 min. pr. 3, 3 gr. temperies post idem tempus 166, 3 et post 630 min. pr. 49, 2 talique ratione maior temperie Mercurii post idem tempus; decreuit enim calor Mercurii a gr. 120 ad gr. 48, 2, nouem horis, et aqua sub eadem temperie aëris deberet 9 horis a gr. 121 sec: calculum peruenire ad temperiem 49, 2; hinc minus decrementum pati quam Mercurius. Id confirmatur etiam post reliqua tempora, licet (1) euaporatio auxerit $\frac{s}{v}$ aquae, et conseq. decrem. (2) superficies aquae maior fuerit ab initio, et (3) massa aquae magis exposita, quam massa Mercurii corio inuoluti.

Tab. VI. Fig. 1. §. 37. Vt commode Experimenta eiusmodi institui possint, fiat (1) vas cupreum A B C D cuius fundum C B sit planum. (2) Ex vtraque parte in locis A et D sint aptatae columnae A E et D F, quae transuerso parallelepipedo E F coniunctae sint. 3) Parallelepipedum E F sit in distantiis a columnis A E et D F aequalibus excauatum secundum situm verticalem columnis parallelum, vt recipi possint commodae caudae ON et PQ Thermometrorum similium et aequalium IN et LP, et in cauitatibus deprimi et eleuari, cochleisque S et T eas ad cauitatum latera apprimentibus firmari. 4) Vasa vitrea I et L similia et aequalia, tenuium satis parietum, retortis oris praedita recipiantur ab annulis ligneis, qui bacillis *c d*, *a b*, *e f*, *g h* cum tabulis Thermometrorum coniuncti sint, vt vasa I et L eleuatis thermometris eleuari, et depressis Thermometris deprimi possint.

Vasi

Vasi cupreo potest aqua infundi, et totus apparatus furno anemio UWVX imponi, vt ebulliente aqua vasa examinandis fluidis plena illi immergi possint.

Potest etiam apparatus a furno tolli, et in commodo ad obseruandum loco poni, si decrementa caloris obseruanda sunt.

Loco vitreorum vasorum possunt etiam lapidea adhiberi, quae vehementem et subitaneam temperiei mutationem facilius sustinere valent.

Facile patet in idem vas cupreum etiam aquam frigidam infundi, et totum apparatum materiae frigorificae admoueri posse.

Tandem et Experimentum XXV. commode maxime institui potest, Mercurium et aqaam vasi cupreo ABCD infundendo, et ad ignem furni anemii calefaciendo.

DE RATIONE CALORVM ET RATIONE DENSITATIS RADIORVM DIRECTORVM AD DENSITATEM PER LENTEM REFRACTORVM DEFINIENDA COGITATIONES.

AVCTORE
G. W. Richmanni.

§. 1.

Talia nondum adminicula inuenta esse, quibus definiri possit, quoties vnus caloris gradus alium superet, et Thermometra nostra optima Mercurialia indicare, vnum gradum caloris esse maiorem altero, et prodere solum excessus dilatationum argenti viui supra volumen eius in Thermometris contenti sub definita quadam temperie, non vero veram calorum rationem exhibere, notum est. *Vnde Cel. S. Gravesande in Elem. Math. Phys. nouiss. edit.* n. 2423. *scribit. Non satis nota est relatio, quae datur inter mutationem in expansione, et mutationem in calore, vt ex comparatis dilatationibus gradus caloris possint conferri inter se.* Neque, quantum mihi constat, ostensum est, quomodo densitas radiorum per lentem refractorum in quauis distantia a foco, quouis tempore respectu densitatis radiorum directorum difiniri possit. Nemo dubitabit, vtramque inquisitionem ad perficiendam Philosophiam naturalem aliquid conferre posse. Cum ergo quaedam sese mihi de hisce rebus cogitanti obtulere, ea cum Societate communicare apud me constitui.

§. 2.

§. 2. Per vitra caustica radiorum solarium efficaciam augeri et maiorem obseruari in minori, minorem vero in maiori a foco vitri distantia notissimum est. Cumque densitates radiorum solarium vitrum causticum penetrantium, et in foco concurrentium sint in distantiis a foco diuersis, caeteris paribus, ferme in ratione inuersa quadratorum distantiarum a foco, facillimum videri poterit, positis caloribus in ratione densitatum radiorum, inuenire rationem calorum per Thermometra ordinaria et diuersis expansionibus liquoris Thermometrici numeros rationi praedictae congruentes assignare.

§. 3. Facile tamen patet:

1) Non eodem tempore in diuersis a foco distantiis Thermometra in axe coni radiantis locari et obseruationes simultaneas institui posse; vnius enim Thermometri bulbus in axe coni radiantis positus interciperet radios, vt ad alterius foco propinquioris bulbum non peruenirent.

2) Successiuas obseruationes cum vnico Thermometro in diuersis a foco distantiis erroribus occasionem praebere posse, cum radiorum solarium efficacia perpetuo mutetur.

3) Cum ipso vitro et vaporibus multi radii intercipiantur, ita, vt omnes non penetrent, et in foco concurrant, patet, radios naturalis densitatis cum radiis artificialis densitatis non facile comparari posse. Si enim calor Thermometro radiis solis directis exposito indicatus minor est, radii per eandem lentem refracti in eadem distantia a foco expansionem liquoris Thermometrici producunt saepius maiorem, quam si praedictus calor maior est. Hinc *Cel.* S. *Gravesande* in Elem. Math. Phys. nouiss: edit: n. 2523 scribit: „Effectus speculi minuitur, si radii

 dii

„dii folares per aërem his radiis antea calefactum tranf„eant, quod demonftrat, ignem maiori copia in partes „aëreas calidas penetrare, quam in alias„. Ipfam rem, efficaciam nempe radiorum folarium, fi per aërem his radiis antea calefactum tranfeant, poft vitra cauftica minui, confirmatam vidi obferuationibus a *Clariff. Lomonoffovio* inftitutis, quas mecum humaniter communicauit, dum in diuerfis in axe coni radiantis a lente diftantiis Thermometri bulbum ad planum ligneum mobile lenti parallelum tempore aeftiuali et hyemali adplicuit, et gradus Thermometri annotauit, fimulque Thermometrum directis radiis folis oppofuit, et eius gradus pariter annotauit. Non tamen videtur in culpa effe tranfitus ignis in aërem calefactum largior quam in alia corpora, fed intercipi videntur potius radii a vaporibus inter vitra cauftica et folem haerentibus, vt hinc pauci radii vitra penetrent et in focis concurrant.

§. 4. Anfam dedit *Cl. Collega*, vt Experimenta ipfius partim repeterem, partim alia ratione inftituerem, eum tamen folum in finem *, vt quilibet indicare poffit, quantum obferuationibus eiusmodi tribuendum fit, et difficulter radios directos cum radiis poft lentem refractis ita comparari poffe, aliamque viam ineundam mihi effe, fi eiusmodi Experimentis calorum veram rationem definire vellem.

§ 5. *In diftantia* 10 *dig. a foco, et* 30 *digit. a lente* locaui Thermometrum A, ita, vt bulbi Thermometrici medium in coni radiantis axi effet, et Thermometrum aliud B in

---

* Obferuationes has medio menfe Iulii 1750. cum lente plano conuexa inftitutas communicabo

B in ſitu priori parallelo poſui, vt radii directi non refracti in illud eodem modo inciderent, notauique gradus Thermometri vnius et ſimul alterius.

	Gradus Ther. A	gradus Ther. B	differ.
1)	213	96½	116½
2)	221½	97	124½
3)	212	93½	118½
4)	210	93	117
5)	212	93	119
6)	213	94	119
7)	211	94½	116½
8)	214	95	119
9)	216	95	121
10)	215,5	95	120,5
11)	220	95½	124,5
12)	219	94½	124,5
13)	217	94	123
14)	210	93¼	116¼
15)	211	93½	117½
16)	213	94	119
17)	213	94½	118½
18)	212	93½	118½
19)	213	94½	118½
20)	215½	94½	121
21)	219	96	123
22)	222	96½	125½
23)	223	97	126
24)	221	95½	125½
25)	219½	95	124½
26)	221½	94½	127

27)

27)	225	95	130
28)	226½	96	130½
29)	222½	96	126½
30)	222	96	126
31)	220	94	126
32)	221	94	127
33)	223½	94	129½
34)	226	95½	130½
35)	228½	97	131½
36)	229½	97	132½.

§. 6. Cum Thermometrum A aſſeri adplicatum erat, repetii obſeruationes alio tempore, et curaui, vt nulla reflexione radiorum ab aliis corporibus, neque propinquitate corporum craſſiorum calefactorum calor augeretur, et notaui.

	Gradus A	et gradus B	differ.
1)	180	88	92
2)	187	92½	94½
3)	188	100	88
4)	189	99	90
5)	191	99	92
6)	192	100	92
7)	194	100	94
8)	184	97½	86½
9)	182	94½	87½
10)	185	94	97
11)	186	94	92
12)	188	95½	92½
13)	189	97	92
14)	190	97½	92½
15)	190	101	89

16)

16)	192	100	92
17)	194	99	95
18)	195	100	95
19)	193	101½	91½
20)	195	102½	92½
21)	196	103	93
22)	187	102½	84½
23)	190	104	86
24)	194	104	90
25)	196	104	92
26)	196	103	93
27)	198	103	95
28)	198½	102½	96
29)	197	102	95
30)	181	101	80
31)	190	103	87
32)	192	101½	90½.

§. 7. *In distantia* 20 *digit. a foco*, *et* 20 *digit. a lente* Thermometrum asseri adplicatum radiis refractis opposui, et notaui:

Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1) 132	94	38
2) 135	95	40
3) 136	94	42
4) 135	93	42
5) 134	91½	42½
6) 133	92½	40½
7) 133	92	41
8) 133	91	42
9) 133	92	41

10)	- - $132\frac{1}{2}$ - - - - -	92 - - -	$40\frac{1}{2}$
11)	- - $132\frac{1}{2}$ - - - - -	92 - - -	$40\frac{1}{2}$
12)	- - 132 - - - - -	92 - - -	40.

§. 8. Alio tempore Thermometrum A ita posui, vt nulla reflexione radiorum a corporibus vicinis, neque calore eorum, affici potuerit, et notaui *in distantia* 20 *digit. a foco*:

	Gradus A,	et gradus B ante vitr. - -	differ.
1)	- - 110 - -	$97\frac{4}{5}$ - - - -	$12\frac{1}{5}$
2)	- - 114 - -	$97\frac{1}{2}$ - - - -	$16\frac{1}{2}$
3)	- - 114 - -	$96\frac{1}{2}$ - - - -	$17\frac{1}{2}$
4)	- - 114 - -	$96\frac{4}{5}$ - - - -	$17\frac{1}{5}$
5)	- - 115 - -	98 - - - -	17
6)	- 120 - -	99 - - - -	21
7)	- - $117\frac{1}{2}$ - -	$97\frac{1}{2}$ - - - -	20
8)	- - 117 - -	96 - - - -	21
9)	- - $117\frac{1}{2}$ - -	98 - - - -	$19\frac{1}{2}$
10)	- - 118 - -	98 - - - -	20
11)	- - $119\frac{1}{2}$ - -	$99\frac{1}{2}$ - - - -	20
12)	- - $122\frac{1}{2}$ - -	$100\frac{1}{2}$ - - - -	22
13)	- - 123 - -	101 - - - -	22
14)	- - 124 - -	99 - - - -	25
15)	- - 110 - -	94 - - - -	16
16)	- - 122 - -	$99\frac{1}{2}$ - - - -	$22\frac{1}{2}$
17)	- - 121 - -	$100\frac{1}{2}$ - - - -	$20\frac{1}{2}$.

§. 9. Alio adhuc tempore coelo non prorsus sereno et aëre non tranquillo rursus Thermometrum A ita locaui, vt nulla reflexione radiorum a corporibus vicinis, neque calore eorum, affici potuerit, et obseruaui *in dist.* 20 *dig. a foco*:

Gradus

Gradus Ther. A, et	gradus Therm. B ant vitr.	differ.
1) -- $96\frac{3}{4}$	87	$9\frac{3}{4}$
2) -- 96	86	10
3) -- 97	86	11
4) -- 99	86	13
5) -- 100	86	14
6) -- 98	85	13
7) -- 100	86	14
8) -- $101\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{2}$	15
9) -- $101\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{3}$	$15\frac{1}{6}$

§. 10. *In distanti a* 30 *digit. a foco, et* 10 *a lente* Thermometrum A, asseri adplicatum, radiis refractis, exposui et notaui:

Gradus Therm. A et	gradus Therm. B ante vitr.	differ.
1) -- 115, 5	100, 5	15
2) -- 115	97, 3	17, 7
3) -- 115	97	18
4) -- 115	97	18
5) - 115	97	18
6) -- 113	96	17
7) -- 114	96	18
8) -- 114, 5	95, 5	19
9) -- 114	95	19
10) -- 113, 5	95, 5	18
11) -- 114, 5	96, 5	18
12) -- 116, 5	96, 5	20
13) -- 117	96, 5	20, 5
14) -- 116, 5	96, 5	20
15) -- 115, 5	96, 5	19

§. 11. Alio tempore curaui, vt nulla reflexione radiorum ab aliis corporibus, neque propinquitate corporum crassiorum calefactorum calor augeretur, et notaui *in dist. 30 dig. a foco*:

Gradus Therm. A,	et gradus B ante vitr.	differ.
1) --- 109	95	14
2) --- 110	96	14
3) --- 110½	96½	14
4) --- 111	97	14
5) --- 111¼	97	14¼
6) --- 112	97	15
7) --- 114½	99½	15
8) --- 112	96½	15
9) --- 113	97	15
10) --- 113½	98	15½
11) --- 113½	98¼	15¼
12) --- 114	99	15
13) --- 114	98½	15½
14) --- 112	97	15
15) -- 111	96½	14½
16) --- 107	93	14
17) --- 106	93	13
18) --- 107½	94	13½
19) --- 107½	93½	14.

§. 12. Alio tempore coelo non prorsus sereno et aëre non tranquillo repetii *in eadem distantia a foco*, et eadem cautione adhibita obseruationes, et notaui:

Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1) --- 88	85½	2½
2) --- 88	86	2

3)

3)	$88\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{2}$	2
4)	86	85	1
5)	86	85	1
6)	$86\frac{1}{2}$	85	$1\frac{1}{2}$
7)	87	86	1
8)	87	$86\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$.
9)	$87\frac{1}{2}$	$86\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$.

§. 13. Alio tempore coelo non prorſus ſereno et aëre non tranquillo notaui *indiſtanti a 30 digit. a foco*:
Gradus Therm. A, et gradus Therm. B ante vitr. - - differ.

1)	90	$87\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
2)	90	$89\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3)	89	88	1
4)	90	$89\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
5)	92	91	1
6)	91	$91\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
7)	91	89	2
8)	92	$88\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$
9)	87	83	4
10)	88	82	6
11)	$89\frac{1}{2}$	82	$7\frac{1}{2}$
12)	$89\frac{3}{4}$	81	$8\frac{3}{4}$
13)	$84\frac{1}{2}$	$80\frac{1}{2}$	4
14)	$84\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{2}$	1
15)	86	85	1
16)	$87\frac{1}{2}$	87	$\frac{1}{2}$
17)	87	87	0
18)	87	87	0

§. 14. *In distantia 9 digit a lente, et 31 digit. a foco*, coelo non prorsus sereno et tranquillo collocaui Thermometrum, vt antea notaui:

	Gradus A, et	gradus B ante vitr.	differ.
1)	88	87	1
2)	87	87	0
3)	87	87	0
4)	$86\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{2}$	0

In distantia 8 digit. a lente, et 32 a foco:

	Gradus Therm. A, et	gradus Therm. B,	differ.
1)	$86\frac{3}{4}$	$85\frac{3}{4}$	1
2)	86	85	1
3)	85	85	0

In distantia 7 digit. a lente, et 33 a foco.

	Gradus Therm. A, et	gradus Therm. B,	differ.
1)	$85\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	0
2)	85	85	0
3)	$85\frac{1}{2}$	85	$\frac{1}{2}$

In distantia 6 digit. a lente, et 34 dig. a foco:

	Gradus Therm. A, et	gradus Therm. B,	differ.
1)	86	$86\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2)	87	87	0
3)	$87\frac{1}{2}$	88	$-\frac{1}{2}$

§. 15. Alio tempore collocaui Thermometri A bulbum *in distantia 35 dig. a foco, et 5 dig. a lente*, et obseruaui

	Gradus Therm. A, et	gradus Therm. B,	differ.
1)	$105\frac{1}{2}$	95	$10\frac{1}{2}$
2)	102	$93\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$

3)	$102\frac{1}{4}$	$93\frac{1}{2}$	$8\frac{5}{4}$
4)	105	97	8
5)	$106\frac{3}{4}$	$97\frac{1}{4}$	$9\frac{1}{2}$

§. 16. Alio tempore coelo non prorſus ſereno et tranquillo notaui *in diſtantia* 35 *dig. a foco*:

	Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,	differ.
1)	85	86	— 1
2)	83	84	— 1
3)	83	85	— 2
4)	$83\frac{3}{4}$	$84\frac{3}{4}$	— 1
5)	$83\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{4}$	— $\frac{3}{4}$
6)	$84\frac{1}{2}$	86	— $1\frac{1}{2}$
7)	84	$85\frac{1}{2}$	— $1\frac{1}{2}$
8)	83	85	— 2
9)	$83\frac{1}{2}$	82	+ $1\frac{1}{2}$
10)	$83\frac{1}{2}$	83	+ $\frac{1}{2}$
11)	$84\frac{3}{4}$	$84\frac{3}{4}$	0
12)	$84\frac{5}{4}$	$85\frac{1}{2}$	— $\frac{3}{4}$
13)	$84\frac{3}{4}$	86	— $1\frac{1}{4}$
14)	85	$86\frac{1}{2}$	— $1\frac{1}{2}$
15)	85	$86\frac{3}{4}$	— $1\frac{3}{4}$
16)	84	$86\frac{3}{4}$	— $2\frac{3}{4}$
17)	84	86	— 2
18)	$83\frac{1}{2}$	86	— $2\frac{1}{2}$
19)	84	86	— 2
20)	84	$86\frac{1}{2}$	— $2\frac{1}{2}$
21)	84	$86\frac{1}{3}$	— $2\frac{1}{3}$
22)	$84\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{3}$	— $1\frac{5}{6}$
23)	$84\frac{1}{2}$	$87\frac{1}{3}$	— $2\frac{5}{6}$
24)	85	$87\frac{1}{3}$	— $2\frac{1}{3}$

25)

25)	85	88	— 3
26)	85	88	— 3
27)	85	88	— 3
28)	$85\frac{1}{3}$	$88\frac{1}{3}$	— $2\frac{5}{8}$

§. 17. Auxi diſtantiam Thermometri a foco, et collocaui illud *in diſt.* 37 *dig. a foco*, et 3 *digit. a lente*; vt antea, et obſeruaui:

Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,		differ.
1)	82	83	— 1
2)	83	83	- 0
3)	$83\frac{1}{2}$	83	+ $\frac{1}{2}$
4)	83	83	0
5)	84	85	— 1
6)	$84\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	— 1
7)	$84\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{4}$	— 2
8)	85	$86\frac{1}{2}$	— $1\frac{1}{2}$
9)	84	$85\frac{3}{4}$	— $1\frac{3}{4}$
10)	$83\frac{1}{2}$	85	— $1\frac{1}{2}$
11)	$82\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	— 3
12)	82	$84\frac{1}{2}$	— $2\frac{1}{2}$

§. 18. Auxi rurſus diſtantiam a foco et *in diſt.* 38 *dig. a foco*, et 2 *digit. a lente* collocaui Thermometri bulbum in coni radiantis axi, et notaui:

Gradus Therm. A,	et gradus Therm. B,		differ.
1)	84	85	— 1
2)	85	$85\frac{1}{2}$	— $\frac{1}{2}$
3)	85	86	— 1
4)	$84\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{2}$	— 2
5)	84	$86\frac{1}{2}$	— $2\frac{1}{2}$

6)

6)	84	87	-3
7)	$84\frac{1}{2}$	87	$-2\frac{1}{2}$
8)	$84\frac{1}{2}$	84	$+\frac{1}{2}$
9)	$84\frac{1}{2}$	84	$+\frac{1}{2}$
10)	$84\frac{1}{2}$	85	$-\frac{1}{2}$
11)	$84\frac{1}{2}$	85	$-\frac{1}{2}$
12)	$84\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	-1
13)	85	$85\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
14)	85	86	-1
15)	$84\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	-1
16)	$84\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{2}$	0
17)	84	85	-1
18)	84	85	-1
19)	84	$85\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
20)	85	$86\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
21)	86	86	0
22)	$85\frac{1}{2}$	86	$-\frac{1}{2}$
23)	$85\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	0
24)	$85\frac{1}{2}$	86	$-\frac{1}{2}$.

§. 19. Auxi rurſus diſtantiam a foco, et collocaui Thermometri A bulbum *in diſt.* 39 *dig. a foco*, et 1 *digiti a lente* in coni radiantis axe, et obſeruaui:

Gradus Therm.	A, et gradus	Therm. B	differ.
1)	87	$86\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
2)	$87\frac{1}{2}$	$85\frac{3}{4}$	$+1\frac{3}{4}$
3)	$87\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	$+2$
4)	$87\frac{1}{2}$	85	$+2\frac{1}{2}$
5)	88	$85\frac{1}{2}$	$+2\frac{1}{2}$.

§. 20. Thermometrum A tandem collocaui ita in coni radiantis axe, vt contingeret ipſam lentem, et notaui:

	Gradus Therm. A, et	gradus Therm. B	differ.
1)	88	86	+ 2
2)	$89\frac{1}{2}$	86	+ $3\frac{1}{2}$
3)	90	$86\frac{1}{2}$	+ $3\frac{1}{2}$
4)	89	$86\frac{1}{2}$	+ $2\frac{1}{2}$
5)	90	88	+ 2
6)	91	89	+ 2
7)	90	89	+ 1
8)	90	88	+ 2
9)	90	$87\frac{1}{2}$	+ $2\frac{1}{2}$
10)	90	88	+ 2.

§. 21. Si ad has obſeruationes attendimus, ſtatim patet, radios directos cum radiis refractis commode comparari non poſſe. Si enim liceret comparare: 1) Creſcente efficacia radiorum directorum, creſcere etiam deberet conſtanter efficacia radiorum refractorum, et contra. Quaedam obſeruationes ſeſe huic legi accommodant, plures tamen recedunt ab ea. 2) Eidem gradui a radiis directis producto ſemper idem gradus a refractis productus reſpondere deberet, et eidem gradui a radiis refractis producto idem gradus a radiis directis productus: vtrumque fieri nequit; quia calor a radiis ſolaribus in Thermometris productus non aeque velociter decreſcit, ac radiorum ſolarium numerus interpoſitione vaporum minui poteſt.

§. 22. Deberet etiam maior differentia graduum Thermometri a radiis refractis et directis productorum obſeruari, ſi maior gradus Thermometri a radiis directis producitur, et contra. Ponatur enim efficacia radiorum directorum ad efficaciam radiorum refractorum per totum tempus obſeruationum $= a : n\,a$, erit differentia $n\,a - a$.

Ponatur

Ponatur incrementum efficaciae radiorum directorum $= b$, erit $a : n a = a + b : (a + b) n$. Erit hinc efficacia radiorum refractorum $(a + b) n$; Vnde differentia efficaciae radiorum refractorum et directorum $= (a + b) n - (a + b)$. Erunt hinc differentiae vt $a : (a + b)$ i. e. in ratione efficaciarum radiorum directorum. Eſt vero $(a + b) > a$, ergo etiam differentia calorum radiis refractis et directis productorum maior eſſe deberet, ſi maior calor a radiis directis producitur; hinc etiam differentia graduum Thermometrorum in hoc caſu maior eſſe deberet, quod non ſemper obtinet, vt ex obſeruationibus allatis videre licet. Obſeruationes §. 11. tamen reſpondent ſatis praedicto requiſito.

§. 23. Si ponuntur calores in ratione inuerſa quadratorum diſtantiarum a foco, differentiae graduum Thermometri non ſunt in eadem ratione, in qua ſunt differentiae calorum conſtanter. Erit enim ſub hac conditione calor Thermometro A indicatus ad calorem Therm. B indicatum (§. 6.) vt $16 : 1$, et (§. 8.) vt $4 : 1$. Medius omnium graduum A (§. 6.) eſt $190 \frac{19}{32}$, et medius omnium graduum B eiusdem §. $99 \frac{17}{32}$, ergo differentia media $91 \frac{1}{16}$. Medius omnium graduum A (§. 8.) erit $117 \frac{10}{17}$, et omnium graduum B $98 \frac{3}{17}$, et differentia media $19 \frac{7}{17}$. Eſt autem $16 - 1 : 4 - 1 = 15 : 3 = 91 \frac{1}{16} : 18 \frac{1}{5}$, et deberet eſſe ſec. obſeruationes vt $91 \frac{1}{16} : 19 \frac{7}{17}$; parua ergo eſt differentia. Si autem calor diſtantiae 10 digit. a foco confertur cum calore diſtantiae 30 digit. a foco, erit medius graduum A (§. 11.) $= 111$, et medius graduum B (§. 11.) $= 96 \frac{8}{19}$, hinc differentia media $14 \frac{11}{19}$. Erit autem calor Therm. A indicatus ad calorem Therm B indicatum (§. 11.) ſub praedicta conditione vt $16 : 9 = \frac{16}{9} : 1$, et (§. 6.) vt 16 : 1. Est $16 - 1 : \frac{16}{9} - \frac{9}{9} = 15 : \frac{7}{9} = 91\frac{1}{18} : 4\frac{97}{135}$, et deberet esse vt $91\frac{1}{18} : 14\frac{11}{19}$ sec. obseruationes, magna ergo est discrepantia. Est etiam $4 - 1 : \frac{16}{9} - 1 = 3 : \frac{7}{9} = 19\frac{7}{17} : 5\frac{1}{27}$, collatis §. §. 8. et 11. et deberet esse vt $19\frac{7}{17} : 14\frac{11}{19}$ sec. obseruationes (ibid.); magna ergo rursus discrepantia apparet inter suppositionem et obseruationes. Cum ratio differentiarum graduum Thermometri probabiliter non possit recedere multum a ratione differentiarum calorum, patet, descripta ratione, calorum rationem non definiri.

§ 24. Nec mirum est, tantum enim abest, vt in omni distantia post vitrum calor augeatur, vt potius minuatur ob interpositionem vitri et vaporum. Conf. §. 13. obs. 6, et §. 16. obseruationes in distantia quinque digitorum a lente, §. 17. obseruationes in distantia 3 digitorum a lente. Si constaret, vbinam post vitrum radii refracti eandem efficaciam habent, quam radii non refracti eodem tempore, et a quo puncto adpropinquando magis magisque ad focum efficacia radiorum refractorum crescat, posset definiri, quantum efficaciae interpositione vitri et vaporum pereat, et ratio excessuum calorum super calorem in vmbroso aëre exhiberi in diuersis a foco distantiis. An ad hunc vsum lentium aliquis antea attenderit? nescio.

Fig. 2. §. 25 Quodsi enim radii nullum obstaculum offenderent, et omnes a sole venientes per lentem *a b* frangerentur; densitas radiorum in D deberet esse ad densitatem radiorum in A, vt $(ab)^2 : (cd)^2$. At habent in distantia D radii refracti eandem efficaciam, quam radii directi (per hyp.), ergo radii multi intercipi a vitro et vaporibus debent, ita, vt non plus radiorum refractorum in

in planum D incurrat, quam in eandem aream absque lente radiorum directorum incideret. Est hinc densitas radiorum refractorum in distantia A D post vitrum, vitro et vaporibus diminuta aequalis densitati radiorum directorum interpositione vaporum diminutae.

§. 26. Inter D et lentem radii loco D proximi minorem debent habere efficaciam ob minorem densitatem, quam radii directi, quod obseruationes confirmant, vti dictum §. 24. Si efficaciae radiorum accedendo magis magisque ad lentem perpetuo decrescerent, minima tandem esse deberet in contactu cum vitro, nisi calor vitri a radiis solaribus productus maior quam aëris ambientis efficeret, vt gradus Thermometri in parua distantia post lentem maior obseruetur, quam si Thermometrum ab aëre radiis directis calefacto contingitur, conf. §. §. 19. 20. In distantia maiori a lente, vbi calor vitri non pertingit, minor obseruatur Thermometri gradus, quam ille, qui a radiis aërem directe calefacientibus producitur; donec in distantia quadam sit idem cum gradu Thermometri a radiis directis calefacti.

§. 27. Quodsi ergo coelum serenum est, et hinc probabiliter vapores aequaliter dispersi, posset definita distantia D de vaporum copiosiori vel parciori interpositione iudicari. Si excessus caloris radiorum directorum super calorem in vmbra est paruus, tunc multi vapores debent intercipere radios, et numerus radiorum directorum debet esse minor, quam si calor radiorum directorum est idem, vti antea, et excessus istius super calorem in vmbra maior. Numerus radiorum directorum vero, quo est minor, eo minor est distantia D. Sit A F = F et D F = D;

 erit

erit numerus radiorum interceptorum ad numerum radiorum residuorum vti $(ab)^2 - (cd)^2 : cd^2 = F^2 - D^2 : D^2$, i. e. vti differentia inter quadratum distantiae focalis, et quadratum distantiae a foco, vbi radii refracti eandem habent efficaciam, quam directi ad quadratum distantiae a foco, vbi radii refracti aequalem efficaciam habent cum radiis directis, ita numerus radiorum interceptorum ad numerum radiorum residuorum, tam in Thermometrum in axe coni radiantis in distantia D positum, quam in Thermometrum radiis solis directis expositum virtutem exerentium. Numerus radiorum interceptorum etiam est, vti numerus vaporum radios intercipientium, quo minor ergo D est, eo maior erit numerus vaporum, et quo maior illa est, eo minor erit numerus vaporum. Si $D = F$ nihil radiorum intercipi debet. Sint distantiae D vti $d : nd$, et $n > 1$; erit copia vaporum casu isto vti $D = d$, ad copiam vaporum illo casu, quo $D = nd = F^2 - d^2 : F^2 - n^2 d^2$, et $F^2 - d^2 > F^2 - n^2 d^2$. Tali ergo ratione de maiori et minori multitudine vaporum in Atmosphaera coelo sereno indicium ferri posse probabile est, si Machina ita construatur, vt distantia D facile inueniri possit.

§. 28. Si in ipso foco densitas radiorum refractorum est aequalis densitati radiorum directorum, et calor a radiis directis productus non maior quam calor in vmbra, D erit $= 0$, hinc omnes radii intercipientur, et lens non augebit calorem.

§. 29. Ex his satis apparet, quomodo de efficacia caloris in sectione coni radiantis a lente producti indicare debeamus, et quomodo ratio densitatis radiorum lente te refractorum ad densitatem radiorum directorum definiri debeat.

§. 30. Vt potioribus impedimentis obuiam ire, et diuersas radiorum in diuersis spatiis collectorum efficacias comparare valeamus, non parum forte faciet, si duas lentes aequalium distantiarum focalium et earundem amplitudinum et crassitierum ex simili vitro confectas, verbo duas lentes similes et aequales eligamus, et in diuersis a foco distantiis in vtriusque coni radiantis axe Thermometri bulbum collocemus.

§. 31. Hac ratione obtinebitur:

1) Tantum radiorum intercipi ab vna lente, quantum ab altera.

2) Tot radios penetrare per vnam lentem, quot penetrant per alteram.

3) Per idem tempus in vnius Thermometri bulbum efficaciam suam exercere radios solares, per quod exerunt in alterius Thermometri bulbum. Et erunt:

4) densitates radiorum ferme in ratione inuersa quadratorum distantiarum Thermometrorum a focis, et in eadem ratione efficaciae radiorum refractorum. Quodsi ergo gradus Thermometrorum simul obseruentur in diuersis distantiis, ratio calorum horum graduum vera siue potius excessuum calorum super calorem in vmbra innotescet; erunt enim excessus illi in eadem praedicta ratione inuersa quadratorum distantiarum a focis. Hos excessus calorum respectiuos calores nominare licebit.

§. 32. Vt constet, quomodo commode hae obseruationes institui possint, sequentia addo: Tab. VII. Fig. 1.

1)

1) Includantur lentes tabulae quadrangularis ligneae *a b c d* foraminibus A et B, distantia focalis vtriusque lentis ab vna parte planae, ab altera conuexae sit quadraginta digitorum Londinensium, et diameter vtriusque, et amplitudo octo digitorum.

2) Firmetur tabula *a b c d* ad aliam tabulam *c d e f* normaliter, et sit longitudo tabulae *c d e f*, 60 dig. Londinensium, quae ex vtraque parte in 60 partes aequales diuisa sit.

3) Jungatur extremitati *e f*, et firmetur normaliter ad tabulam *e c d f*, tabula lingnea *e f m l* parallela tabulae *a b c d*, et concipiantur perpendiculares ex centris lentium B *r* et A *q* continuatae vsque ad tabulam *e f l m*, et in *q* et *r*, vbi tabulam penetrarent, fiant circuli.

4) Fiant fulcra C D E F, et G H I K, quae pariter in situ cum tabulis descriptis parallelo, et in diuersis a focis lentium distantiis ad tabulam *c d e f* firmari possint.

5) Transeant per iuga C D et I H cochleae, ad quarum extremitates Thermometra exacte respondentia aequalium quantum potest esse, et similium bulborum firmari possint, et ita earum ope Thermometra deprimi et eleuari, vt centra bulborum Thermometricorum a lineis B *r* et A *q* secentur.

6) Insistat tota Machina pedi tali, vt in plano horizontali circumduci, et in plano verticali simul deprimi et eleuari possit. Circa medium nempe tabulae *c d e f* ex vtraque parte procumbant axes cylindrici, qui penetrent foramina cylindrica L et O fulcrorum L M et N O, et illa exacte expleant, ita, vt sola frictione tota Machina descripta in qualibet inclinatione seruetur immobilis, vel

Fig. 1. et Tab. VI. Fig. 3.

si

ſi hoc non ſufficit, firmetur per cuneos per axes cylindricos diametraliter perforatos tranſeuntes.

7) Fulcra L M et N O contineantur tigno M N, cui in medio iunctus ſit cylindrus ligneus P Q. Recipiatur cylindrus ligneus P Q foramine cylindrico cylindri amplioris R S, qui ad menſam robuſtam T V W X firmatus ſit. Tali ratione fulcrum cum Machina verti poterit circa axin P Q, et circa axin L O deprimi et eleuari, ita vt lentes in quolibet ſitu ſolis, ſoli opponi poſſint.

8) Lentes ſoli ita obuertantur, vt radii ſolares circulos luminoſos forment *e f l m*, circulos ibi delineatos tegentes.

9) Deprimantur vel eleuentur Thermometra, ita vt vmbrae bulborum circa centra circulorum luminoſorum in *q* et *r* appareant.

10) Ad obſeruationes cum hac Machina commode inſtituendas tres requiruntur obſeruatores, vnus notat gradus Thermometri W V, alter ſimul Thermometri X Y ſigno accepto, et tertius obſeruat gradus Thermometri in loco vmbroſo. Poteſt etiam quartus obſeruare gradus Thermometri radiis ſolis directis expoſiti. Adhuc aliquis debet vnice ſollicitus eſſe de Machina ſecundum ſolis motum ita dirigenda, vt vmbrae bulborum in centris circulorum luminoſorum in *r* et *q* appareant.

§. 33. Quodſi lentes aequales et ſimiles non obtineri poſſunt, poſt vnam lentem vtrumque Thermometrum tam W V quam X Y in diuerſis a foco diſtantiis ponendum eſt, ita, vt vmbrae bulborum in aequalibus a circuli luminoſi in planum *m l f e* proiecti centro diſtantiis appareant. Et caetera fiant, vt §. 32. monuimus.

§. 34. Si diuturnae cum hac Machina obseruationes sub distantiis Thermometrorum diuersis factae sint, ex diario obseruationum notentur simultaneae obseruationes, et computentur rationes efficaciarum radiorum solarium refractorum, et ea ratio exprimet simul rationem calorum respectiuorum graduum Thermometricorum notatorum. Eadem ratione ex reliquis obseruationibus aliorum graduum calores respectiui, in qua ratione sint, definiri poterit, et tandem Thermometrum genuinum condi, quo calores respectiuos exactius metiri licebit. Si maiora vitra adhibeantur, calor metallorum fusorum definiri poterit, si post vnum vitrum Thermometrum collocetur in distantia conuenienti a foco, post alterum in foco ipso, vel in distantia a foco, vbi incipit fundi, lamina metallica teneatur.

§. 35. Tali Thermometro obtento distantia sectionis coni radiantis, vbi radii refracti eandem densitatem habent, ac radii directi facile inueniri poterit. Obseruetur (1) Thermometro praedicto calor respectiuus radiorum directorum, ponatur is $= a$ 2) calor respectiuus radiorum refractorum in parua distantia a foco, ponatur is $= b$, et distantia respondens $= d$, et distantia inuenienda $= x$, erit $x^2 : d^2 = b : \frac{bd^2}{x^2}$. Hinc erit $x = d \sqrt{b : a}$. Si ergo lens accurate elaborata, distantiae focalis longioris commode fulciatur cum Thermometro, in certa distantia a foco firmato, vt soli ita opponi possit, vt bulbus Thermometri in coni radiantis axi sit, potest ex notato calore per Thermometrum ex distantia nota, et ex calore radiis directis producto, distantia D inueniri, et ex hac distantia et distantia focali numerus, qui comparatus cum numeris ex sequentibus similibus obseruationibus similiter inuentis, det rationem radiorum interceptorum et vaporum radios intercipientium (§. 27.).

EMEN-

EMENDATIO LATERNAE MAGICAE AC MICROSCOPII SOLARIS.

AVCTORE
L. Eulero.

§. 1.

Cum constructio et effectus horum duorum instrumentorum Dioptricorum satis sit cognitus, incommoda et vitia, quibus ea laborant, ante commemorabo, quam eorum emendationem exponam. Primo autem obiecta, quae per vtrumque horum instrumentorum repraesentare volumus, pellucida esse debent, ita vt ab vna parte illuminata etiam ex altera parte splendeant, atque illuminatio quasi per ipsum obiecti corpus penetret. Hinc pro Laterna Magica obiecta, repraesentanda super tabulis vitreis pingi solent, idque coloribus tenuibus ac diaphanis, vt pictura pelluciditati nullum detrimentum afferat. Pro Microscopio autem solari minima obiecta, quorum imago per id in oppositam tabulam albam proiicitur, tam tenuia esse opportet, vt pro diaphanis haberi queant. Vnde non solum hoc incommodum nascitur, quod non omnis genegeneris obiecta per haec instrumenta repraesentari queant, sed etiam, cum perfecta pelluciditas etiam in iis obiectis, quae aptissima videntur, inesse non possit, eius defectus necessario in repraesentatione obscuritatem et confusionem pariet.

§. 2. Deinde obiecta in his instrumentis non in ea parte, quae lenti refringenti est obuersa, sed in altera parte

 te

te auerſa illuminantur, quam ob cauſam quoque ea pellucida eſſe debent. In Laterna enim Magica figurae ſuper vitro depictae a luce pone eas poſita illuminari ſolent, quod lumen etiam a ſpeculo augetur. In Microſcopio autem ſolari obiectum a radiis ſolis ope ſpeculi in id reflexis, et per lentem conuexam magis collectis illuſtratur, idque in ea etiam parte, quae a lente Microſcopica eſt euerſa. Hinc fit, vt ea facies, quae proprie in effigie repraeſentari debet, non niſi ob pelluciditatem illuminetur, et ſi quae partes ſint opacae, eae penitus inconſpicuae maneant, quod quidem vitium iam ante eſt commemoratum. Sed praecipuum incommodum, quod hinc naſcitur, in hoc conſiſtit, quod plurimi radii lucis vel ſolis per obiectum penetrent, atque tabulam albam, effigiei excipiendae deſtinatam illuminent. Conſtat autem, vt effigies in tabula alba clare exprimatur, omne lumen alienum ab hac tabula ſollicite arceri debere: ita vt nulli alii radii, niſi qui ab ipſo obiecto emittuntur, eiusque quaſi formam continent, in tabulam incidant. Ex quo intelligitur, repraeſentationem effigiei in tabula alba ob iſtud lumen alienum a luce vel ſole immediate profectum non mediocriter infringi debere.

§. 3. Denique hi radii alieni tabulam illuminantes ibidem imaginem quandam confuſam lucis vel ſolis exhibebunt, quae quidem in Laternis Magicis lente peculiari ipſi obiecto contigua magis confuſa redditur, vt nulla flammae ſpecies determinata dignoſci queat. Interim tamen vtcumque iſta imago fuerit confuſa, ea ſemper erit imagini verae permixta, eamque corrumpet. Praeterea vero hi radii ob diuerſam refrangibilitatem imaginem di-

uerſis

uerſis coloribus inquinabunt, quod incommodum imprimis in Microſcopio ſolari animaduertitur, per quod ſingulae obiecti partes coloribus iridis circumfuſae apparent, quibus incommodis efficitur, vt in effigie per Microſcopium ſolare repraeſentata nihil fere diſtincte ſpectari queat. Ad quae ingentia impedimenta accedit, quod vulgo non ſolum lentibus nimis magna apertura tribuitur, ſed etiam obiecto nimis magna amplitudo relinquitur, vnde radii ab obiecti extremitatibus in lentem nimis oblique incidunt. Hinc notabilis confuſio per totam effigiem ſuper tabula expreſſam iniicitur, hinc vero partes effigiei extremae vehementer confundantur, vt ſaepe vix agnoſci queant.

§. 4. Quo facilius intelligi poſſit, quibus remediis haec incommoda tolli queant, videamus, quibusnam rebus opus ſit ad claram et diſtinctam cuiusuis obiecti repraeſentationem efficiendam. Sit igitur FEG obiectum, cuius imago per lentem conuexam MM ſuper tabula alba TV diſtincte exhiberi debeat, quae cum ſitu inuerſo appareat, ſit *f e g*. Obiectum hic FEG tanquam ſpatio circulari terminatum conſidero, cuius diameter ſit FG, et centrum E, quo melius eius quantitatis ratio haberi poſſit, ita vt in tabula TV maior imago non ſit repraeſentanda, quam quae ab iſto circulo FEG producitur. Iam de obiecti huius ratione ſequentia ſunt tenenda: primo vt totum corpus habeat ſuperficiem, quae quidem lenti MM obuertitur, proxime planam, ſeu, vt quam minimis eminentiis et cauitatibus ſit praeditum. Deinde autem imprimis requiritur, vt iſta obiecti ſuperficies, vnde lens MM radios accepit, quam maxime ſit illuminata, quae illuminatio obiecto vel radiis ſolis, vel ope lampadum conciliari

Fig. 2.

ciliari solet: atque ad lumen magis augendum etiam specula et lentes conuexae in vsum vocantur.

§. 5. Quod deinde ad lentem MM attinet, primo cauendum est, ne eius ab obiecto distantia EA sit nimis exigua, seu ne angulus FAG, qui a radiis obiecti extremis ad lentem ductis formatur, nimis fiat magnus. Quo maior enim fuerit iste angulus, eo confusius obiecti extremitates in effigie $f\ e\ g$ reddentur. Videtur autem hic angulus FAG 20 gradus non excedere debere, ne confusio inde orta nimis sit sensibilis. Sit huius anguli semissis FAE, foret 10°, et quia axis lentis AE in planitiem obiecti perpendicularis esse, ac per eius centrum E transire debet, distantia EA circiter sextupla prodiret semidiametri obiecti EF, seu $EA = 6\,EF$. Minor scilicet haec distantia non est admittenda, nisi forte confusionem satis sensibilem non euitandam censeamus; at quo maior ea statuatur, eo magis distincta imago in tabula exprimetur. Dummodo autem haec distantia EA non fuerit minor quam $6\,EF$, confusio hinc oriunda vix percipi poterit.

§. 6 Quam conuexa autem debeat esse lens MM, cum ex distantia EA, tum ex magnitudine, qua imaginem $f\ e\ g$ apparere oportet, facile definitur. Inuenta autem hinc distantia focali huius lentis, quae sit $= f$, seu quae radios a sole exceptos ad distantiam $= f$ in focum congreget, quantam aperturam huic lenti tribui conueniat, videndum est. Nam quo maior lenti conceditur apertura, eo maiori confusione imago in $f\ e\ g$ afficitur, quia radii per aperturae oram transmissi, et ii, qui per medium lentis transeunt, non in eadem distantia colliguntur.

Ne

Ne igitur haec confusio nimis fiat sensibilis, si aperturae, quam circularem assumo, semidiameter ponatur $= b$, quantitas $\frac{bb}{f}$ partem digiti quinquagesimam superare vix debet: seu si δ denotet digiti partem quinquagesimam, non esse oportebit $b > V \delta f$: quo autem minor accipiatur apertura, eo magis confusio ab apertura oriunda cauetur. Quodsi vero exiguam confusionem non curemus, quantitas δ ad partem digiti vicesimam imo decimam augeri poterit.

§. 7. Tabula denique T V dealbata, atque ad axem lentis A e normaliter constituta esse debet. Tum vero id imprimis requiritur, vt haec tabula in loco maxime obscuro sit posita, vt in eam nulli alii radii lucis, nisi qui ab obiecto F E G per lentem *M M* transmittantur, incidant. Hinc sollicite omni alienae luci aditus ad tabulam est praecludendus, atque totum spatium inter lentem *M M* et tabulam T V interceptum perfectis tenebris obscurari debet. Quae circumstantia, si probe obseruetur, radii ab obiecto per lentem transmissi effigiem super tabula non solum clare sed etiam distincte exhibebunt. Spectator ergo, qui eam contemplari cupit, in eodem loco obscuro collocatus esse, vel saltem ei apertura eo inspiciendi relinqui debet. Tum vero etiam ipsi commoditas procurari poterit, vt non solum effigiem intueri, sed etiam eam stylo prosequi ac delineare valeat.

§. 8. Loco tabulae albae T V etiam tabula vitrea adhiberi potest, cuius altera superficies politura sit priuata; haec enim superficies albedinem mentietur, atque effigiem obiecti perinde recipiet. Quod si haec superficies extus vertatur, tum a spectatore pone tabulam constituto effigies non solum aspici, sed etiam stylo plumbeo delineari

neari poterit, quo in negotio etiam hoc commodum accedit, quod manu vel ſtylo effigiei expreſſionem non intercipiat, vti euenit, ſi ante tabulam ſit conſtitutus. Interim tamen etiam a parte poſteriori omni lumen, quantum fieri poteſt, arceri debet. Tum vero effigie ſuper tabula vitrea plumbo delineata, eadem charta, ſi parumper humefacta tabulae arcte apprimitur, facile imprimitur Praeterea etiam obſeruandum eſt, ſi locus, vbi imago apparet, minus fuerit idoneus, eam ope ſpeculi in quamuis aliam poſitionem pro lubitu proiici poſſe; ex quo huiusmodi inſtrumenta infinitis modis variari licet.

§. 9. Quo haec planius explicem, ſit obiecti ſemidiameter $EF = EG = e$, eius a lente diſtantia $EA = a$, quam iam vidimus non minorem eſſe debere quam $6e$. Tum ſit lentis MM diſtantia focalis $= f$, et aperturae ſemidiameter $= b$, debebitque eſſe $b < \sqrt{\delta f}$, denotante δ partem digiti vel quinquageſimam vel etiam maiorem; prout confuſio inde oriunda magis minusue fugienda videatur. His poſitis imago poſt lentem exhibebitur ad diſtantiam $Be = \frac{af}{a-f}$, hocque loco tabulam conſtitui oportebit; vnde patet, diſtantiam $EA = a$ neceſſario maiorem eſſe debere quam lentis diſtantiam focalem f. Magnitudo autem imaginis, quae pariter erit circularis, tanta eſt, vt ſit eius ſemidiameter eg ad ſemidiametrum obiecti $EF = e$, vti diſtantia Be ad AE, hinc erit imaginis ſemidiameter $ef = eg = \frac{ef}{a-f}$.

§. 10. Imprimis autem ſplendoris ſeu quantitatis luminis, quo imago ſuper tabula eſt apparitura, ratio eſt habenda, vt iam ante iudicare valeamus, vtrum effigies ad ad contemplandum ſatis futura ſit luminoſa nec ne. Ac ſplendor quidem iſte imaginis, vt alibi demonſtraui, partim a ſplendore iſtius obiecti, partim ab apertura lentis M M, partim vero a diſtantia $Be = \frac{af}{a-f}$ ita pendet, vt ſi obiecti ſplendor ſeu quantitas luminis ponatur $= L$, ob aperturae ſemidiametrum $= b$, ſplendor effigiei ſuper tabula alba depictae futurus ſit $= \frac{bb}{4.Be^2}.L = \frac{bb}{4}\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{a}\right)^2 L$, quae quantitas quidem ſemper erit valde parua, ſed ex *Celeb: Bougueri* experimentis recordandum eſt, ſi L denotet lumen, quo corpora a ſole illuſtrata conſpiciuntur, tum $\frac{1}{250000}$ L eſſe ſplendorem corporum a luna plena illuminatorum, vnde non difficulter ſplendor effigiei cum hoc lumine lunari comparabitur.

§. 11. Si iam requiratur, vt magnitudo imagines datam teneat rationem ad magnitudinem ipſius obiecti, natura lentis ac locus imaginis huic facile definietur. Cum enim ſemidiameter obiecti ſit $= e$, ponamus imaginis ſemidiametrum eſſe debere $= ne$; atque hinc quidem ſtatim patet, fore, $Be = na$, ſeu $Be = n$, E A. Deinde ex aequatione $Be = na\frac{af}{a-f}$, elicitur lentis diſtantia focalis $f = \frac{n}{n+1}a$, cui deinceps conueniens apertura facile aſſignatur. Lumen denique, quo imago ſuper tabula ſplendebit, erit $= \frac{bb}{4nnaa}$ L, poſito obiecti lumine $= L$. Cum autem ſit $bb = \delta f = \frac{n}{n+1}\delta a$, erit hoc lumen imaginis $\frac{\delta}{4n(n+1)a}$ L, vnde patet, lumen hoc eo fore debilius, quo maior fuerit tam ratio multiplicationis $n : 1$ quam diſtantiae E A $= a$.

§. 12. Ex his iam principiis non erit difficile eiusmodi Machinas conſtruere, quae quorumuis obiectorum

 imagi-

imagines in loco obſcuro ſuper tabula alba clare ac diſtincte exhibeant. Ratio autem conſtructionis potiſſimum pendebit a magnitudine obiecti F E G: niſi enim hoc ſatis fuerit paruum, id non ſimul in Camera obſcura incluſum eſſe poterit, cum propter nimis magnum interuallum, quo tam ipſum obiectum, quam imago a lente diſtare debet, tum vero quia tantum obiectum illuminari non poſſet, quin ſimul Camera inde illuminaretur. Minora autem obiecta, quoniam paruo interuallo a lente diſtare debent, ſaepe minus commode extra Cameram obſcuram collocari et illuminari poſſunt; in ipſa igitur Camera obſcura debito loco conſtituta illuminari conuenit, ſed ſpatium in quo cum lente continentur vndequaque tam probe clauſum eſſe debet, vt inde nihil luminis erumpere, ac tabulam albam illuſtrare valeat. Sequentia igitur huiusmodi Machinarum genera pro diuerſa obiectorum magnitudine conſtituere viſum eſt.

GENVS PRIMVM

AD OBIECTA MAGNITVDINIS SEX PEDVM REPRAESENTANDA.

Fig. 3. §. 13. Oporteat ergo primo eiusmodi obiecta repraeſentari, quae in circulo, cuius diameter F G ſit ſex pedum contineri queant. Erit ergo circuli repraeſentandi ſemidiameter $EF = EG = c = 3$ pedum ſeu 36 dig: quod ſpatium aptum erit ad homines, animalia, aliaque maiora obiecta capienda. Maiora enim obiecta veluti aedificia et integras regiones hic non conſidero, quoniam vulgares Camerae obſcurae ad ea repraeſentanda ſatis accommodatae videntur. Diſtantia ſcilicet huiusmodi obiectorum tanta eſſe debet, vt quaſi pro infinita haberi poſſit, atque ad ea repraeſentanda quauis lente vti licebit, dum-

dummodo tabula in focum lentis constituatur. Eo minor autem erit imago, quo minor fuerit lentis distantia focalis, contra vero splendor imaginis eo magis diminuetur, quo distantia focalis maior accipiatur. Cum autem iste Camerarum obscurarum vsus satis sit cognitus, eo fusius exponendo hic supersedeo.

§. 14. Cum igitur sit obiecti semidiameter $e = 3$ pedum, eius a lente distantia E A ad minimum esse debebit 18 pedum, seu $EA = a = 18$ ped. Hinc obiectum F E G extra Cameram obscuram R S T V constitutum esse debet, quod quo sufficienter illuminetur, vel radiis solaribus sit expositum, vel per ingentem luminum vim collustretur; sit igitur quantitas luminis obiecto inducta $= L$. Quoniam igitur obiectum ipsum iam satis est magnum, non conueniet id maiori forma super tabula exprimi, sit ergo imago ipsi obiecto aequalis, seu $n = 1$, vnde lentis M M distantia focalis esse debebit $f = 9$ pedum, seu 108 dig: cui tribuatur apertura semidiametri $b = 1$ dig. Quo facto imago repraesentabitur naturali magnitudine, sed situ inuerso $f\,e\,g$, ad distantiam a lente $Be = 18$ ped. eiusque lumen erit $= \frac{1}{4\cdot 18^2\cdot 12^2} L = \frac{1}{186624} L$.

§. 15. Si igitur obiectum a sole fuerit illustratum, lumen imaginis adhuc maius erit, quam si ipsum obiectum a luna plena illuminatum cerneretur, quoniam illuminatio lunae est ad illuminationem solis, vt 1 ad 250000. Quod si vero hoc lumen nimis debile videatur, vel lenti maior apertura tribui et eius semidiameter b ad $1\frac{1}{2}$ augeri poterit, vnde lumen imaginis duplo fieret maius. Verum si maius lumen desideretur, potius conueniet, imaginem minori forma repraesentari, quae eandem lentem adhibendo non solum clarior, sed etiam distinctior euadet.

§. 16. Ponamus ergo per eandem lentem $M\,M$, cuius distantia focalis $f = 9$ ped. et aperturae semidiameter $b = 1$ dig. obiectum quadruplo minus repraesentari, seu imaginis semidiametrum esse debere $= \frac{1}{2}$ ped. Oportebit ergo esse $B\,e = \frac{1}{2}\,a = \frac{9a}{a-9}$, vnde elicitur iusta obiecti ante lentem distantia $E\,A = a = 27$ ped. atque in Camera obscura post lentem tabula alba constitui debebit ad distantiam $B\,e = 13\frac{1}{2}$ ped. Tum igitur huius imaginis lumen erit $= \frac{bb}{4.Be^2}\,L = \frac{1}{4.162^2}\,L = \frac{1}{104976}\,L$, ideoque fere duplo maius quam casu praecedente. Si adhuc minori imagines magnitudine contenti esse velimus, maiori quoque lumine imago praedita conspiceretur.

§. 17. Maiorem vero etiam splendorem imaginis impetrabimus, si lentem statim ad minorem imaginis formam accommodemus. Maneat ergo distantia $EA = a = 18$ ped. quoniam minor admitti nequit, ne confusio imaginis nimis fiat sensibilis, ac ponatur $e\,f = \frac{1}{2}\,E\,F$ seu $n = \frac{1}{2}$, vt prodeat imaginis post lentem distantia in Camera obscura $B\,e = 9$ ped. eritque lentis ad hoc requisitae distantia focalis $f = 6$ ped. cui adhuc satis commode apertura semidiametri $b = 1$ pollices tribui poterit. Hinc quantitas luminis, quo imago super tabula praedita cernetur, erit $= \frac{1}{4.108^2}\,L = \frac{1}{46656}\,L$; quae ergo plus quam duplo maior erit quam casu praecedente; atque si obiectum fuerit a sole illustratum, imaginis lumen fere queri quies fortius videbitur, quam si obiectum a luna plena illuminatum cerneretur, hocque splendore imago super tabula iam satis clara apparebit.

GENVS

GENVS SECVNDVM

AD OBIECTA MAGNITVDINIS VNIVS PEDIS REPRAESENTANDA.

§. 18. Sit igitur circuli, quo obiectum repraesentandum contineatur, semidiameter $EF = e = \frac{1}{2}$ ped. seu 6 dig: quae magnitudo apta erit ad facies humanas, partes animalium, minora animalia, ac plantas picturasque capienda, atque distantia horum obiectorum a lente tribus pedibus minor esse non poterit. Sit ergo $EA = a = 3$ pedum, quae distantia non impedit, quo minus interdiu obiectum a sole, noctu vero etiam extra Cameram obscuram lampadibus illuminari queat. At si obiectum radiis solis directe exponi non liceat, ope speculorum lumen solare in id reflecti poterit. Noctu vero etiam specula adhiberi conueniet, siue plana siue concaua, quibus radii lampadum maiori vi in obiectum coniiciantur. Lampades autem a latere constitutas esse oportet, ne vlli inde radii directe in lentem incidere queant.

§. 19. Quod si iam semidiameter imaginis $ef = eg$ debeat esse $\frac{1}{2}n$ ped. seu $6n$ dig. fiet distantia $Be = 3n$ pedum vel $36n$ poll. lentis distantia focalis $f = \frac{3n}{n+1}$ ped. ac sumto $\delta = \frac{1}{50}$ dig. semidiameter aperturae erit $b = \sqrt{\frac{16n}{50(n+1)}}$ dig. et quantitas luminis imaginis $= \frac{1}{7200n(n+1)}$ L.

Hinc sequitur, fore, si sit:

	f	b	Be	Quantit. lumin. imagin.
$n = 3$	27 dig	0,73 dig.	108 dig.	$\frac{1}{86400}$ L
$n = 2$	24	0,69	72	$\frac{1}{43200}$ L
$n = 1$	18	0,60	36	$\frac{1}{14400}$ L
$n = \frac{2}{3}$	$14\frac{1}{2}$	0,54	24	$\frac{1}{8000}$ L
$n = \frac{1}{2}$	12	0,49	18	$\frac{1}{5400}$ L.

§. 20. Patet ergo, nisi imago plus quam nouies, casu scilicet $n = 3$, superare debeat ipsum obiectum, hocque fuerit sole illuminatum, splendorem imaginis multo fore fortiorem quam casu praecedente, ita vt lumen a luna plena oriundum longe superet. Sic videmus, si obiectum tantum naturali magnitudine exhiberi debeat, quo casu imago ad distantiam trium pedum post lentem in Camera obscura apparebit, lumen imaginis fore ad lumen obiecti vt 1 ad 14400: quae illuminatio in Camera obscura iam satis splendida apparebit, si quidem obiectum fuerit a sole collustratum. Quod quemadmodum etiam in conclaui, in quod radiis solaribus modo ingressus patet, ope speculi obtineri queat, satis et perspicuum, videamus igitur, quomodo noctu ope lampadum et speculorum satis fortis illuminatio produci queat.

§. 21. Sit igitur F E G obiectum a lampadibus ita
Fig. 4. illuminandum, vt ab iis nulli radii in lentem M M incidere queant. Atque ductis rectis F M et G M secundum eas lens tubo M M N N sit inclusa, quo omnis introitus lucis alienae arceatur, manifestum est, vltra hunc tubum extra rectas N F et N G lampades constitui debere, id quod vtrinque in locis L, *l*, *l*, *l*, pro lubitu fieri poterit; quo plures enim vtrinque lampades accendentur, eo magis obiectum illuminabitur: e re quoque erit tubum N N M M intus nigro colore tingi, ne lumen ab interiori tubi superficie reflexum repraesentationi damnum afferat: et quanquam distantia lentis ab obiecto E A est determinata praesente scilicet casu 3 pedum, tamen conueniet tubi extremitatem fieri ductitiam, vt lens pro lubitu magis minusue ab obiecto remoueri queat.

§. 22.

§ 22. Vt etiam ipſum obiectum in Camera obſcura contineri queat, neque tamen a lampadibus Camera illuminetur, ſpatia lampade continentia vtrinque parietibus vti in Laternis Magicis fieri ſolet, firmiter includi oportebit, vt nonniſi ſuperne fumo exitus concedatur. Hoc modo Machina antrorſum in tubum N M M N deſinens, a parte poſtica duas vtrinque alas habere debebit adiunctas N O P, quae lampadibus locum ſufficientem praebeant. Sic enim obiectum a parte lenti obuerſa F E G ſatis intenſum lumen pro numero ac vi lampadum accenſarum nanciſcetur, et quia nulli alii radii, niſi qui ab ipſo obiecto emittentur, per lentem M M in Cameram obſcuram prorumpere poſſunt, eius imago ſuper tabula alba nullo lumine alieno perturbabitur.

§. 23. Illuminatio etiam ope ſpeculorum, quae vicem plurium lampadum ſuſtineant, mirum in modum augeri poterit. Eductis enim ad axem E A vtrinque ſub angulo circiter ſemirecto rectis E L I, et ad diſtantiam L I vtrinque trium circiter pollicum conſtituantur ſpecula concaua C I D, ne ipſis flamma vicinitas damnum afferat: atque ſi lampades L et L in horum ſpeculorum focis ſint poſitae, ea radios parallele in obiectum reflectent, quibus igitur totum obiectum illuminabitur, ſi ſpecula aeque fuerint ampla atque obiectum, ſin autem ſpecula fuerint minora, eorum diſtantia focalis aliquantum ſuperare debet interuallum L I, quo radii reflexi nonnihil fiant diuergentes, atque totum obiectum expleant. Hoc modo binae vel quaternae lampades ſufficient ad obiectum ſatis intenſo lumine perfundendum.

GENVS

GENVS TERTIVM
AD OBIECTA MAGNITVDINIS DVORVM POLLICVM REPRAESENTANDA.

§. 24. Hoc inſtrumentum ratione magnitudinis obiectorum fere cum Laterna Magica conſueta conueniet; niſi quod hic obiectum in ſuperficie anteriori debet illuminari. Haec magnitudo ergo idonea erit ad partes animalium et plantarum, imo etiam ad exigua animalia integra et plantas, nec non ad picturas capiendas, quae multo maiori forma ſint repraeſentanda. Cum enim ſit $e = 1$ dig. diſtantia E A $= a$ fiet ad minimum 6. poll. praeſtabit autem, quo confuſio magis euitetur, eam aſſumere aliquanto maiorem, ſit igitur $a = 9$ dig. et ſemidiameter effigiei in tabula exprimendae $= n$ dig. erit lentis ad hoc idoneae diſtantia focalis $f = \frac{9n}{n+1}$ dig. ac imago poſt lentem diſtincte apparebit in diſtantia B e $= 9\,n$ dig. Denique ſi lumen obiecti ſit $=$ L, et ſemidiameter aperturae lentis $b = \sqrt{\delta f} = \sqrt{\frac{9n}{50(n+1)}}$ dig. erit lumen imaginis $= \frac{1}{1800\,n(n+1)}$ L.

§. 25 Hinc pro varia multiplicatione quantitatis imaginis ſeu numeri n hae quantitates, quibus quantitas inſtrumenti determinatur, ſequentes obtinebunt valores.

Si

Si	*f*	*b*	*Be*	Lumen imaginis.
$n=1$	$4\frac{1}{2}$ dig.	0, 30 dig.	9 dig.	$\frac{1}{3600}$ L
$n=2$	6 dig.	0, 34	18	$\frac{1}{10800}$ L
$n=3$	$6\frac{3}{4}$	0, 36	27	$\frac{1}{21600}$ L
$n=4$	$7\frac{1}{5}$	0, 38	36	$\frac{1}{36000}$ L
$n=5$	$7\frac{1}{2}$	0, 39	45	$\frac{1}{54000}$ L
$n=6$	$7\frac{5}{7}$	0, 39	54	$\frac{1}{75600}$ L
$n=7$	$7\frac{7}{8}$	0, 40	63	$\frac{1}{100800}$ L

nisi ergo lumen in imagine admodum ingens desideretur, magnitudo obiecti quinquagies fere multiplicari poterit.

§. 26. Quod si ergo obiectum radiis solaribus illuminare liceat, imago adhuc multo erit splendidior, quam obiecti a luna illuminati. Tum autem obiectum F E G extra Cameram obscuram regionem versus, vbi sol existit, prominere, et ope tubi N M M B cum lente MM connexum esse debet, ita vt altera lentis facies B in Cameram obscuram spectet. Huic porro tubo in C, quod punctum adhuc 5 vel 6 pollicibus ab obiecto absit, adiungatur speculum C I D, cuius latitudo duos pollices superet, longitudo vero C D multo sit maior, vt vbicunque fuerit sol in S eius radii a speculo in ipsum obiectum reflecti queant, quem in finem speculum circa C mobile esse oportebit, quo facilius semper soli obuerti queat. Commodissimum erit hunc Mechanismum Cameris obscuris portatilibus applicare, quo saepius, vbicunque sol splendeat, in vsum adhiberi possit. Tab. VIII. Fig. 1.

§. 27. Vt autem huiusmodi repraesentationes semper etiam sole non lucente exhiberi queant in Camera obscura, Machina ad formam Laternae Magicae efformata Fig. 2.

 vti

vti conueniet, in qua obiectum F E G a lampadibus L, l et speculis C I D illuminetur: quae cum multo minor sit, quam supra descripta ob longitudinem E A $=$ 9 poll. et E F $=$ E G $=$ 1 poll. alae N O vtrinque ratione longitudinis multo ampliores esse debebunt. Quoniam hic lampades non solum obiecto erunt viciniores, sed etiam speculis obiecto maioribus vti licebit, ita, vt obiectum totum a radiis conuergentibus illuminari queat, illustratio tanto fortior effici poterit. Optimum esset ad hoc specula parabolica adhibere, quorum distantia foci aliquanto esset minor, quam L I vel l I, quae, quo fuerint maiora, eo fortiorem illuminationem producent. Conueniet quoque vel specula vel lampades mobilitate instrui, quo facilius omnes radii reflexi in obiectum coniugari possint, sicque nullum est dubium, quin obiecto illuminatio admodum vehemens conciliari possit.

GENVS QVARTVM
AD OBIECTA MAGNITVDINIS DVARVM LINEARVM REPRAESENTANDA.

§. 28. Hoc instrumentum locum tenebit Microscopiorum solarium, cum in circulo diametri FG $=$ 2 lin: seu $\frac{1}{6}$ dig. eiusmodi obiecta, quae vulgo per Microscopia considerari solent, commode includuntur. Cum ergo sit E F $=$ E G $= c = \frac{1}{12}$ dig. sumatur interuallum E A $= a =$ 1 dig. ac si effigiei repraesentandae semidiameter $e f = e g$ esse debeat $= n e = \frac{n}{12}$ dig. erit distantia effigiei a lente B $e = n$ dig. Eiusmodi vero tum lente vti conueniet, cuius distantia focalis sit $f = \frac{n}{n+1}$ dig. cui si tribuatur apertura, cuius semidiameter $= b = \sqrt{\frac{n}{5(n+1)}}$, erit lumen effigiei repraesentatae $= \frac{1}{20\,n(n+1)}$ L, designante L lumen

men ipſius obiecti. Quod ſi apertura maior vel minor aſſumatur ſplendor effigiei in eadem ratione augebitur vel diminuetur.

§. 29. Hinc pro varia multiplicatione quantitatis imaginis, ſeu pro variis valoribus numeri *n*, iuſtrumentum ſequentes requiret determinationes.

Si	f	b	B e	Lumen imaginis.
$n=5$	$\frac{5}{6}$ dig.	0, 13 dig.	5 dig.	$\frac{1}{6000}$ L
$n=6$	$\frac{6}{7}$ dig.	0, 13 dig.	6 dig	$\frac{1}{8400}$ L
$n=7$	$\frac{7}{8}$	0, 13	7	$\frac{1}{11200}$ L
$n=8$	$\frac{8}{9}$	0, 13	8	$\frac{1}{14400}$ L
$n=9$	$\frac{9}{10}$	0, 13	9	$\frac{1}{18000}$ L
$n=10$	$\frac{10}{11}$	0, 14	10	$\frac{1}{22000}$ L
$n=12$	$\frac{12}{13}$	0, 14	12	$\frac{1}{31200}$ L
$n=14$	$\frac{14}{15}$	0, 14	14	$\frac{1}{42000}$ L
$n=16$	$\frac{16}{17}$	0, 14	16	$\frac{1}{54400}$ L
$n=18$	$\frac{18}{19}$	0, 14	18	$\frac{1}{68400}$ L
$n=20$	$\frac{20}{21}$	0, 14	20	$\frac{1}{84000}$ L.

§. 30. Si obiectum a ſole illuminari velimus, non Fig. 3. ſolum id, ſed etiam lens M M extra Cameram obſcuram prominere debet, vt ſatis habeatur ſpatii ad radios ſolis excipiendos; lens ergo M M tubulo NOO ſit inſerta, qui modo magis, modo minus extra Cameram obſcuram extrahi poſſit. Tum vt ante ſpeculum C L D ita applicetur, vt eius ope radii ſolares commode obiectum verſus reflecti queant, atque quo illuminatio tanto fiat fortior, lens conuexa C D adhiberi poterit, quae radios reflexos eo propius in obiecto colligat Et quia hoc modo illuminatio multo vehementior effici poteſt, multo maior

 multi-

multiplicatio effigiei exhiberi poterit, quem in finem lentem tantillum propius ad obiectum admoueri oportebit, vt tum imago in multo maiori distantia sit excipienda, quae in eadem ratione euadet maior.

Fig. 4. §. 31. Ope lampadum quoque idem obiectum vehementer illuminari licebit, si Machina ad similitudinem Laternae Magicae duabus alis O O instructae efformetur. Tum enim commode duo specula concaua C L D applicari poterunt, quae radios lampadum L, L in obiectum quasi infocum coniiciant. Ad hoc conueniet, specula in formam ellipticam elaborari, in quorum altero foco lampades collocentur, in altero autem ipsum obiectum existat. Sic enim cum obiectum sit minimum, id, etsi est in foco positum, totum illuminabitur. Poterunt etiam si spatium id permittit duae vtrinque lampades accendi, quo non solum lumen fiat intensius, sed etiam focus reddatur amplior. Ceterum perspicuum est inter haec quatuor instrumentorum genera innumera alia, prout obiectorum ratio id postulat, constitui atque ad vsum accommodari posse.

ANNO-

ANNOTATIONES
CIRCA CONSTRVCTIONEM HOROLOGII MARINI
AVCTORE
C. G. Kratzenſtein.

§. 1.

Propoſitum nuper a *Cl. Koesfeldio* horologium autobarum, quod in nauigationibus ad obſeruationes aſtronomicas inſtituendas, et longitudinem maris inde determinandam commendat, anſam mihi dedit, meditationes meas de perficiendo horologio marino explicandi, et rerum peritis ad examen proponendi. Eo magis operae pretium eſſe duco, huic rei ſtudioſe indulgere, quo plurium hominum ſaluti, commodo et vtilitati eo proſpicitur.

§. 2. Cognitis vulgarium clepſydrarum imperfectionibus *Dudlaeus in arcanis ſuis maris* clepſydras mercuriales nautis commendauit. Tantum vero abeſt, vt eiusmodi cleſpydrae longitudinis determinationi inſeruire poſſint, vt nautae eis confidentes maius potius periculum incurrere, quam euitare, queant; poſſent enim in ſcyllam incidere, cum ſe adhuc longe ab ea diſtare putaſſent. Ad hoc eo euidentius oſtendendum clepſydrarum mercurialium imperfectiones hic recenſebo.

Huc pertinent:

1) Alteratio aëris vitro incluſi propter calorem et frigus, modo plus, modo minus fluxui reſiſtens.

2) Dilatatio et contractio vitri et luminis mercurium transmittentis caloris mutationibus oriunda.

 3) Hu-

3) Humiditates modo plus modo minus mercurio adhaerentes et fluxum retardantes.

4) Acceleratio vel retardatio fluxus per vim centrifugam oscillatione nauis mercurio impressam.

5) Irregularitas fluxus ex diuersa cohaesione ☿rii inter se et cum lateribus vitri pro diuerso caloris frigorisue gradu.

§. 3. Inquiramus iam quatenus hisce imperfectionibus mederi possimus. Quod ad primam attinet, ea per aëris euacuationem commode tollitur. Altera, tertia et quinta per conseruationem clepsydrae in eodem caloris gradu remouetur. Quartam vero; quae maximi momenti est, quantum ego quidem perspicio, ineuitabilem esse indico. Cum enim centrum arcus oscillationis nauis, partim pro diuersa celeritate cursus nauis et velorum dispositione, partim pro vndarum agitatione, admodum variet, parum iuuabit, clepsydram circa illud centrum constituisse.

§. 4. Procul dubio sibi persuasit *Cl. Koesfeldius* circa horologii sui marini constructionem vim centrifugam horologio non posse imprimi, dum illud intra annulos libratorios suspensum situm perpendicularem semper seruat. Cum enim reliquas imperfectiones horologiorum marinorum sollicite euitare studet, de vi centrifuga euitanda ne quidem cogitat. Neque eo respexit, quod, naui ad aequatorem appropinquante, notabilis vis mouentis pars propter imminutam corporum grauitatem pereat, adeoque motus horologii sensibiliter accelerari debeat. Verum quidem est in pendulo longiori eiusmodi vis motricis imminutionem nullam sensibilem motus alterationem producere, sed longe aliter res sese habet in horologiis, vbi rotula

tula libratoria (eine Unruhe) moderatoris vicem gerit; ibi enim experientia teste vna nocte error ex humiditate et frigore accedente oriundus ad 5 minuta prima excrescere potest. Constat adeo, longe maiori cum circumspectione rem esse ineundam, si voti nostri compotes fieri velimus.

§. 5. Considerabimus itaque, quibusnam proprietatibus, horologium marinum gaudere debeat, vt in suo genere perfectum iudicari possit. Requiritur scilicet, vt in tali horologio nulla motus variatio contingere possit.

1. Ex oscillatione et succussione nauis.
2. Ex differentia grauitatis sub diuersis ab aequatore distantiis.
3. Ex penduli elongatione et contractione calore et frigore oriunda.
4. Ex mutatione densitatis et humiditatis aëris.
5. Ex aucta tenacitate olei ad inunctionem adhibiti.
6. Ex variatione vis elasticae sub diuerso caloris gradu, si elater adhibetur.
7. Ex noua intensione vis motricis.

Quoniam oscillatio et succussio nauis non solum oscillationes penduli turbant, sed et grauitatem penduli mutant, cuiuis patet, neque pendulum moderatoris, neque pondus vis motricis vicem in horologio marino sustinere posse. Eorumdem quoque vsum inhibent requisitum II. III et IV. Nullum itaque pro praesenti mechanices perfectione nobis relinquitur refugium, quam vt pro moderatore libratorem, et pro vi motrice elaterem substituamus. Cum enim in libratore non pondus, sed vis eius inertiae moderamen efficiat, quae inuariabilis est, obtinebimus sic requisi-

requiſitum IIdum. Aequaliter deinde per ambitum libratoris diſtributa inertia non patitur, vt aliqua acceleratio oſcillationis ex motu a naue impreſſo contingere poſſit. Ponamus enim libratorem *a c* oſcillare ex *a* verſus *b* et ex *c* verſus *e*; nauem vero ex *b* verſus *a*, euidens eſt partibus libratoris circa *b* motum imprimi verſus *a* adeoque primo intuitu apparet, quaſi inde aliqua retardatio proficiſci debeat. Quoniam vero partibus in *c* ſimul per eamdem nauis oſcillationem ſimilis motus ex *c* verſus *e*, priori ex *b* in *a* contrarius, imprimitur, haec impreſſio alteram tollit, et nulla plane inde oſcillationis variatio vel turbatio contingere poteſt. Ad quartum et quintum requiſitum obtinendum integrum horologium ciſtae ligneae includi poterit, quae circa diſcum horarium vitro craſſiori munita, ceteroquin vndique ferreis ſtannoque obductis lamellis probe ferruminatis veſtita ſit, ita, vt aer ex parte ope antliae manuariae inde extrahi poſſit. Eiusmodi attenuatus aer neque oſcillationi ſenſibiliter reſiſtit, neque humiditates fouet, neque inſpiſſationem olei per euaporationem partis aquoſae admittit. Requiſitum ſextum duplici modo poterit obtineri. Aut enim poteſt horologium per ſubſidia ſatis cognita in vno eodemque caloris gradu ſemper conſeruari; aut, ſi hoc nimis taedioſum videatur, per obſeruationes in anteceſſum determinari, in quantum ſpiralis libratoris intendenda vel remittenda ſit, vt ſub diuerſo caloris gradu oſcillationes ſuas eadem celeritate abſoluat. Hoc cognito per virgae metallicae adplicatae contractionem et dilatationem iſta intenſio et relaxatio ſpiralis automatice absque concurſu obſeruatoris poteſt obtineri. Ad vltimum denique requiſitum obtinendum

Fig. 5.

dum *in II^{do} Nouor. Commentar. Tomo* iam indicaui artificium aliquod, quo adhibito, horologia, elaterem pro vi motrice habentia, motum ſuum ſub intenſione elateris nihilominus continuare poſſint.

§. 6. Ceterum partes horologii marini maxima cum cura debent eſſe elaboratae. Elater ex optimo chalybe ſit fabrefactus, prouide temperatus et plurimis conuolutionibus adornatus. Cochlea curatiſſime cum elatere ſit aequilibrata, et rotae cum axibus et rotulis ex compactiſſimo metallo perfectiſſime, politiſſime et pro magnitudine operis ſubtiliſſime ſint elimatae, id quod praecipue circa dentes rotae vltimae ſerratae obſeruandum eſt. Libratoris brachia, in extremitatibus pondera lenticularia gerentia, tantae longitudinis conficiantur, quantam circumſtantiae permittunt; vt adeo moderator per tantum momentum magis valeat irregularitates rotarum ineuitabiles coercere. Diuiſio rotarum ita ſit facta, vt, rota maxima ſemel circumacta, omnes rotae eumdem poſitum iterum obtineant, quem initio habuerunt; ſic intra illud ſpatium omnes anomaliae ex imperfectione rotarum oriundae ſemel periodum ſuam abſoluunt. Praeterea anomaliae ex cochleae irregularitatibus oriundae ad pendulum aſtronomicum obſeruentur et notentur. Denique et in itinere horologium ſaepius poterit corrigi, cum locus quidam cognitae longitudinis in conſpectum venit. Adhibito tanto ſtudio et obſeruatis modo dictis cautelis, nullum eſt dubium quin tale horologium ſcopo nautarum ſatisfacere poſſit.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE FACTAE TVBINGAE, ANNIS 1747, 1748, ET 1749,

a

Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Barometro, Thermometroque, in eodem adhuc, quem prius indicaui, situ aptissime locatis, emergunt ex quotidianis institutis obseruationibus annorum indicatorum menstruae altitudines maximae et minimae Barometri sequentes, quas, vna cum earundem differentiis, hic appono, intelligendo pedis Londinensis pollices duodecimales, atque eorundem partes centesimas.

Anno,	mense	max.	min.	differ.
1747	Ianuario	29.04	27.88	1.16
	Febr.	28.81	27.90	0.91
	Mar.	29.05	28.03	1.02
	April.	28.90	28.31	0.59
	Maio	28.73	28.20	0.53
	Iun.	28.83	28.28	0.55
	Iul.	28.80	28.38	0.42
	Aug.	28.88	28.50	0.38
	Sept.	28.82	28.16	0.66
	Oct	29.10	28.40	0.70
	Nou.	29.14	28.34	0.80
	Dec.	29.04	27.90	1.14
1748	Ian.	28.98	28.10	0.88
	Febr.	28.85	27.98	0.87

Mart.

Anno,	mense	max.	min.	differ.
1748	Mart.	28.73	28.02	0.71
	Aprili	28 85	28.07	0.78
	Maio	28.80	28.20	0 60
	Iun.	28.80	28.50	0.30
	Iul.	28.90	28.16	0.74
	Aug.	28.89	28.49	0.40
	Sept.	28.95	28.20	0.75
	Oct.	28 98	27.86	1.12
	Nou.	29.24	27.98	1.26
	Dec.	29.06	28.31	0.75
1749	Ian.	28.99	27 64	1.35
	Febr.	29.03	27.74	1.29
	Mart.	28.88	28.20	0.68
	Apr.	28.80	28-22	0.58
	Maio	28.79	28.13	0.66
	Iun.	28.71	27.98	0.73
	Iul.	28.93	28.48	0.45
	Aug	28.83	28.03	0.80
	Sept.	28.78	28.32	0.46
	Oct.	29.00	28.54	0.46
	Nou.	29.30	28.30	1 00
	Dec.	29.20	28.15	1.05

§. 2. Apparet ex his, manere etiam nunc maximam altitudinum Barometri hic obseruatarum 29. 36, quae anno 1746 annotata fuit. Sed earundem minima, quae hucusque erat 27. 65, mutanda nunc est in 27. 64, visam d. 22. Ianuarii 1749, cum, antea iam incipiente, ac per integrum octiduum durante, fortiori modo, modo leniori, S W, intermixta pluuiis leuibus aliqua sereniferenitate ; antecedente autem d. 21. Ianuarii, h 5. p. m. grandine pisorum magnitudine delabente, et grauissima fulguribus tonitrubusque tempestate, incipiente tum fortissimo vento S W. Prioris igitur maximae, et huius nouae iam minimae, differentia est 1. 72, vt adeo media Barometri altitudo apud nos nunc aestimanda sit 28. 50, nulla habita instrumenti, supra Nicri fluuii libellam eleuati, ratione, quae, vti dictum est, proxime 60 pedes adaequat.

§. 3. Ex obseruationibus Thermometri, in aëre vmbroso, Boream versus constituti, sequentem formo tabellam, quae cuiusque mensis exhibet gradum caloris maximum, minimum, atque differentiam vtriusque, ita quidem, vt vbique intelligendi sint gradus Fahrenheitiani, caloris.

Anno	, mense	max.	min.	differ.
1747	Ian.	- - 50	- - 9	- - 59
	Febr.	- - 63	- - 34	- - 29
	Mart.	- - 46	- - 15	- - 31
	Apr.	- - 68	- - 28	- - 40
	Maio	- - 76	- - 44	- - 32
	Iun.	- - 87	- - 56	- - 31
	Iul.	- - 86	- - 52	- - 34
	Aug.	- - 86	- - 48	- - 38
	Sept.	- - 87	- - 48	- - 39
	Oct.	- - 68	- - 36	- - 32
	Nou.	- - 56	- - 23	- - 33
	Dec.	- - 64	- - 25	- - 39

Anno

Anno,	mense	max.	min.	differ.
1748	Ian.	44	8	36
	Febr.	39	22	17
	Mart.	46	6	40
	Apr.	59	31	28
	Maio.	80	46	34
	Iun.	80	55	25
	Iul.	80	54	26
	Aug.	75	53	22
	Sept.	68	40	28
	Oct.	61	32	29
	Nou.	52	16	36
	Dec.	56	29	27
1749	Ian.	52	27	25
	Feb.	47	0	47
	Mart.	55	23	32
	Apr.	66	31	35
	Maio	77	38	39
	Iun.	76	51	25
	Iul.	82	47	35
	Aug.	81	49	32
	Sept.	73	43	30
	Oct.	65	18	47
	Nou.	46	18	28
	Dec.	39	-1	40.

Ex quibus itaque apparet, maximum per hos annos calorem fuiſſe 87 graduum, anni ſcilicet 1747, maximum autem frigus in eodem anno, quippe 9 graduum infra 0. Manet itaque ex meis obſeruationibus annus adhuc ſuperior 1746 calidiſſimus omnium, quippe qui gradus oftendit 94; frigidiffimus autem 1745, qui nimirum depreffit Thermometrum ad gradus 13 infra 0.

§. 4. Ad auroras boreales, aut earundem indicia, refero haec:

1747, Ianuarii 22, hora 10 vefp. videbatur aurora borealis, hinc et inde mota, coelo perfecte fereno; tota fere nocte corufcans.

Febr. 13, hora 8 vefp. lux borea, per medias nubes et pluuias, crebris corufcationibus confpicua videbatur.

Martii 26, hora 9 vefp. inter nubes continuas dubia mihi videbatur talis lux.

Aprilis 8, inter pluuias raras confpiciebatur lux borealis vaga, et irrequieta, hora 8 vefp.

Octobris 23, hora 9 p. m. vifa eft lux borealis magna, radiis latis et albis, furfum afcendentibus, infignis, ac vsque ad Auftrum fere extenfa, in ferenitate multa.

1748, Aprilis 1, hora 9 p. m. confpexi lucem borealem, verfus plagam S W quoque extenfam, integra fere ferenitate.

Iunii 3, veftigia huius lucis quaedam vidi hora 10 p. m.

1749, Septembris 22, hora 8 noct. in ferenitate perfecta, magna apparuit coeli rubedo, quam vulgus pro exorto incendio habuit, fed quae fine dubio ab aurora boreali, fub horizonte noftro latente, profecta fuit.

§. 5.

§. 5. Plures vero annotauit auroras boreales *Clariss. M. Bischoff*, in vicino nobis pago, Steinebrunn, Pastor ecclesiae Meritissimus, loci sui eleuatioris opportunitate vsus, cum hic, Tubingae, has obseruationes montes partim versus septentrionem iacentes, partim etiam fastigia alta tectorum, valde impediant. Is igitur sequentes mecum amice communicauit, debiles modo, modo fortiores. Nimirum anno 1747, Nouembris 23. 24, haec nebula aliquantum erat obducta 27. Decembris 2. 21. 23. 26. 29. 31. Anno 1748, Ianuarii 2. 25. 28. Martii 1, simul cum lumine zodiacali apparens. Aprilis 20. Septembris 27. Octobris 18. Nouembris 17. Anno 1749, Martii 10. Septembris 22, h. 8. p. m. rubrum phoenomenum in plaga septentrionali, quod paullo ante ego etiam a me obseruatum retuli.

§. 6. Alias praeterea quasdam auroras boreales, Stuttgardiae obseruatas, amice itidem communicauit mecum *Clarissimus Volzius*, Gymnasii ibidem Professor. Nempe anno 1748, Febr. 24. Martii 28. 29. Aprilis 27. Decembris 16. 24. Anno 1749, Ianuarii 20. 21. Februarii 2. 16. Martii 10 lux borealis interdum in septentrione albis striis versus Zenith eiaculatis conspicua. Martii 17, lux borealis a N W in N O extensa, instar lucidarum nubium latae striae ad Zenith extendebantur; aliae ad horizontem magis inclinatae erant, caetera totum coelum obscura nocte obuolutum. Martii 18. 21. 23. 31. Aprilis 7 lucis borealis vestigia. Aprilis 9 in borea quinque aut sex striae albicantes ab horizonte versus Zenith emittebantur. Aprilis 14. 16. Maii 3 totum coelum atris nubibus tectum, quarum pleraeque in omnibus

omnibus plagis debili luce, qualis aurorae borealis eſt, infectae videbantur, mox ſequebantur fulgura.

§. 7. Lumen Zodiacale *Caſſinianum* obſeruatum fuit diſtincte anno 1748, Februarii 18 viuidiſſimum, 21. 22, per nubes etiam viſibile. Martii 1. 16. 18. 27. Anno 1749, Aprilis 5, atque multis aliis etiam diebus.

§. 8. Declinationes acus Magneticae, ſex pollices longae, omni cura deprehendi ſequentes, medias inter plures obſeruatas, et ſelectas, omnes occidentem verſus. Anno 1747, 13° 34′; 1748 - - 14° 22′; 1749 - - 14° 45′.

§. 9. In eclipſi Lunae, quae accidit 1747, Februarii 25, temp. mat. ob nubes ingruentes ſequentia modo potui obſeruare. Occultatus nempe fuit *Plato* 4^h 7′½; *Copernicus* 4^h 14′½; mare nubium vmbra fuit tactum 4^h 20′½, temporis veri, in Horologio portatili totati.

§. 10. Reliqua huc referenda ſequentibus abſoluam.

Primo, tonitrua audita fuerunt anno 1747, Maii 31. Iunii 1. 2. 4 5. 6. 19. 25. 28. Iulii 28. Aug. 6. 11. 21. 22. Sept. 8. 9. 23. Dec 5. 1748, Maii 8. 19. Iunii 1. 2. 3. 14. 21 29. 30. Iulii 12 18. 23. 25. Aug. 6 14 17. 27 30. 1749, Ian. 21. Maii 9. 11. 12. 26 27. Iunii 4. 5. Iulii 12 23. 26 29 Aug. 5. 9. 10. 11.

Secundo, grando cecidit, anno 1747, Iun. 5. 1748, Iun. 29 Aug. 14. 1749, Ian. 21. Iulii 15. Aug. 11. Octobr. 22.

Tertio, primas hirundines vidi anno 1747, Aprilis 14. calore 53 graduum. 1748, Apr. 16. caloris 53 grad. 1749, April. 12. caloris 48. grad.

Quarto, Halones conſpecti fuerunt, anno 1747, Martii 21, hora 7 a. m. ſolaris obſeruata fuit portio aliqua. Martii 22, hora 9 p. m. lunaris integer, amplus primum, diametri 40°, ſine coloribus; poſtea multo anguſtior redditus et coloratus. 1748, Ianuarii 12. alius lunaris. 1749, nullus.

PHYSICA

PHYSICA.

OBSERVATIONES ANATOMICO-PRACTICAE COMMVNICATAE A *IOANNE FREDRICO SCHREIBER.*

I.

Ob errores, qui in Chirurgia capitis, huius futuras cum fracturis confundendo, aliquando obuenire possunt, opera danda est, vt futurarum varietates, quot possunt, cognoscantur. Memor eorum, non plane inutile quid fecero, si figuram capitis, adcurate delineatam, communicauero, in quo ossa, quae *triquetra* vocari consueuerunt, elegantius, atque magis regulari ordine formata, opinor, visa sunt numquam.

Lunulam, constitutam a duobus arcubus circularibus, quorum superior et maior per oras posteriores processuum mastoideorum, et verticem suturae, quae Λ Graecorum refert, inferior et minor, per easdem oras et mediam fere altitudinem ossis occipitis transit, implent tria ossa, ad sensum inter se aequalia, quorum duo extrema sunt quadrilatera, et tertium medium est figurae pentagonae regularis, cuius summus angulus cum angulo illius suturae congruit. Tab. IX.

II.

In memoriam atque recordationem Viri, dum viueret, Amicissimi et Honestissimi, elegantiarum litterarum

 Studio-

Studioſiſſimi, et Membri huius Academiae Scientiarum Imperialis Honorarii, *Gottlob Friderici Guilielmi Juncker*, a conſiliis redituum aulicorum AVGVSTAE, quae A: 1746. d. XII. Nouembris, in Ipſius cadauere ſingularia a me viſa ſunt, Ipſi Academiae nunc referam:

Vir ille valde bonus per duos ante obitum annos morbo laborauit, qui tamen ſaepe longa interualla meliori valetudini largitus eſt. Reſpirandi impedimentum, quale in pectore ſenſit, erat ex praecipuis malis. Conſtitutione corporis; vitae genere; nocentium et iuuantium effectis, inter ſe comparatis omnibus; conſtitutum fuit, in Ipſo pati, quod in corpore eſt ſubtiliſſimum, atque omnium maxume mobile: neruos ſcilicet, horumque origines, medullas.

Autumno A. 1746. peſſime ſe habuit: verum verſus finem Octobris omnia in melius mutata ſunt. Nihilominus domi ſe debuit continere; id quod propter varia, et magni momenti negotia, ipſi arduum valde, denique impoſſibile, fuit. Quam ob rem, libero aëri, tempeſtate ſerena, et circum meridiem, ſe committendi, venia Ipſi danda fuit. Enimuero D. VIII. Nouembris, apud amicum bene pranſus, dein amicos plures, ab Ipſius domicilio magno interuallo remotos, vsque ad ſextam veſpertinam, quo tempore gelu iam vrebat, animo, ad hilaritatem, ſi vnquam, maxume compoſito, inuiſit, ſic, vt hora ſeptima pomeridiana demum domum rediret, vbi vsque ad vndecimam praeterea cum familiari iocos, ſeriaque, miſcuit. Poſtridie, quum mane ſe egregie habuiſſet, cum plurimis colloquutus eſſet, atque in expediandis negotiis aliquibus occupatus fuiſſet, poſt horam decimam

decimam ante meridiem, inopinato cadebat adtonitus. Certe, hora tertia post meridiem, Ipsum inueni motu sensuque omni plane destitutum. Atque eiusmodi miseram vitam vixit vsque ad supremam Ipsi horam, quae fuit nocte inter diem decimam et vndecimam illius mensis.

Quae sequuntur, sunt praecipua ex eis, quae in Ipsius cadauere obseruaui:

In Capite.

Suturae sagittalis, vt et coronalis, vix vestigia.

Dura mater validissime adhaesit cranio.

Iuxta longitudinem adcumbentium sibi hemisphaeriorum cerebri, inter piam et arachnoidem, materia albida, gelatinae non adeo dissimilis deprehensa est, quae pressu serum fudit.

Arteriae piae matris, vt et ea, quae sub protuberantia annulari simplex procedit, et hac ipsa ab illius ramis integre rubente, repletissimae fuerunt sanguine. Sed sinus, longitudinalis superior, nec non laterales, fere omnino collapsi. Ad lobum medium sinistrum cerebri, vbi quatuor ante mortem horis manum sponte motam viderant adstantes, omnia sanguine perfusa, et corrupta. Cortex ibi totus ruber: atque medulla hinc inde pluribus punctis rubris interstincta. Rubebat similiter cortex in aliqua portione lobi posterioris sinistri; nec non in lobo anteriore dextro.

Hemisphaeriis cerebri vix ab inuicem reclinatis, corpus callosum mox conspiciebatur, ita, vt eius altitudo solito maior adpareret. An hoc ab arteriis subiectis, sanguine infarcto tumentibus?

In cauitatium superiorum cerebri, quae portionem lymphae hadebant, plexu choroide, materia gelatinosa, priori similis.

In glandula pineali calculus exiguus.

In Pectore.

Pulmo sinister inferius firmiter aderetus erat: et ipsius extremitas alba, duraque, instar cartilaginis.

In auricula anteriore cordis, vbi vena caua inferior se ei inserit, verus fuit polypus, haud tamen valde amplus: aliusque oblongus, in arteria pulmonali.

Aorta, quamdiu in pectore procedit, indurata erat; inque interna eius superficie, vsque ad curuaturam magnam, hinc inde spectabantur excrescentiae, siue villi oblongi, de natura, vt adparebat, gelatinae. Tunica interna infra illum arcum erat incrassata; et, posteaquam ab incumbente musculosa separata esset, in oculos incurrebant tumores exigui, flaui, quos steatomata putaui, orificia arteriarum intercostalium ambientes, et inconsueto modo coarctantes. Haec est valde rara obseruatio, nec infoecunda nouarum propositionum Practicarum.

In Abdomine.

Duo loca in ventriculo rubuerunt.

Lien erat cum diaphragmate concretus, et in eo, vt de sinistro pulmone notatum, obseruabatur plaga alba, dura, cartilaginea.

III.

III.

Adolefcens 20. annorum, media hieme, portans trabem, prolabitur in glaciem adeo infortunato, vt finiftrum capitis latus a trabe percuteretur. Homo illico mentis vfum amittit, fanguine per os et aurem finiftram fluente, cum refpiratione oppreffa et ftrepente, et tuffe vehementi. In vfum adhibitis venae fectionibus ac clyfteribus, et dein deraso capite, duo vel tres tumores adparuerunt, quorum maxumus fupra auriculam finiftram fub ora inferiore offis verticis fedebat. Illo fenfim aperto, in hoc offe fractum fpectabatur, ad futuram fagittalem furfum tendens, nec non alia fractura obliqua verfus os occipitis. Facta funt omnia, quae in vulneribus et fracturis capitis faciunda ars hodie praecipit. Vefperi ingruebant aliqui motus conuulfiui. Poftridie adhuc carebat mentis vfu mifer, fed ronchus ftertorque ceffauerant, manente fpecie fomni profundi. Die quinto, incifione producta, praegrandis fractura confpiciebatur, cum offe temporis angulum efficiens. Die fexto, fecundum methodum Chirurgi *Belloste*, margines fractorum perforabantur. Dein nullum graue fymptoma terruit, praeter tuffem, vsque ad diem fextum et decimum, quo ex improuifo febre corripitur tanta, vt a frigore, calorem praecedente, concuteretur aeger. Rediit eadem febris, eodem tempore, die fequente. Die 18uo omnia in deterius ruebant, fic, vt mifer die nona et decima, conuulfus, ac fingultiens, poft meridiem obiret.

Enormis fractura, in cranio poft obitum vifa, et duabus figuris, expreffa fequentem in modum fe habuit: In

In osse temporis sinistri fractum vsque in meatum auditorium externum progrediebatur.

In osse verticis sinistro fractura duplex. Altera, circum medium ossis temporis sub sutura squamosa enata, adscendebat, et dein, forma arcus, abibat, et finiebat versus suturam lambdiformem. Altera, ex priore oriunda, ex ipsa circumferentia, qua musculus temporalis hic ossi verticis admotus est, per medium os recta surgebat, et desinebat distantia pollicis a sutura sagittali. Hae sunt illae duae fracturae, quas dixi in viuo animaduersas fuisse.

Quae sequuntur, in denudato cranio tantum videri potuerunt. Prior fractura transibat suturam lambdoideam, arcu illo per os occipitis deorsum producto, et in latere sinistro antrorsum ad processum mastoideum procedebat, qua de causa oriebatur portio triangularis, scilicet a fractis et sutura lambdoide. Eratque intropressa. Portio mammillaris sinistra ab osse occipitis omni nexu soluta fuit. Praeterea illa fractura, per transuersum ossis occipitis, itidem arcus figura, vsque ad processum mastoideum dextrum protendebatur, quo loco portio mammillaris os verticis deseruerat libera. Os dextrum verticis itidem fractum erat, quae fractura sub osse verticis in linea recta adscendebat, dein oblique, angulum obtusum formans, retrorsum ferebatur.

Tab. X. et XI. In latere sinistro adhuc duae fissurae fuerunt, sed et insignis fractura, supra fossam iugularem et condylum occipitalem vsque in foramen magnum finiens.

Hippocrates notam perituri ex capitis vulneribus, vbi os quomodocumque fractum, fissum, vel collisum fuerit, adscripsit,

adſcripſit, quod plerumque ſebris inuadat ante diem quartum et decimum, hieme.

IV.

Vir circiter 50. annorum oſtendit in dextro pectoris latere tumorem valde pulſantem, colore cutis, figurae oualis, 12. digitos ab oſſe pectoris vsque ad axillam longum, et 8. digitos latum, in diſtantia trium digitorum a clauicula vsque ad duos pollices infra papillam. Occaſionem ei dederat contuſio, olim ibi loci facta, vnde tumor ſenſim creuit, donec eo vsque adoleuerit. Conquerebatur miſer de oppreſſione pectoris, anxietate circum praecordia, et tuſſe ſicca: arteria interim debiliter, inaequaliter, et aliquando remittendo, pulſabat. Hunc in modum vixit per ſex hebdomadas vsque ad mortem.

Tumor examinatus maxumam partem ſubiacebat muſculo pectorali, et aliquam partem muſculo ſerrato antico, ſiue pectorali paruo. His ablatis, videbatur cruor coagulatus, ater, cum portione puris mixtus: et hoc quoque remoto, foramen, pugnum commode capiens, in oculos incurrit. Erant enim coſtae verae, tertia, quarta, et quinta, cum ſegmentis cartilagineis, carie exeſae. Atque tum nec latuit aneurisma diſruptum, quod erat ſaccus, ab exitu aortae ex pericardio vsque ad originem arteriae ſubclauiae ſiniſtrae extenſus. Saccus hic continebat polypos octo et triginta, omnes veros, lamellarum inſtar, ſibi circumpoſitos. Eorum maxumus ponderabat vncias quindecim, alter vncias ſex et quinque drachmas, ceteri minus: omnes coniunctim aequabant pondus librarum trium, vnciarum vndecim, et duarum drachmarum.

Ille saccus inferius concreuerat, partem cum diaphragmate, et anterius partem cum membrana, succingente costas. Cum eadem vnum corpus constituebat concretione pulmo dexter, aneurismatis volumine, versus posteriora superioraque pressus. Ipsa membrana, costas succingens, hinc inde admodum crassa fuit, sic, vt, vbi cum pulmone coaluerat, crassitiem dimidii digiti habuerit. Pulmo sinister sanus in magna seri quantitate fluctuabat. Denique adparuit leuis inflammatio ad mucronem cordis.

V.

Aestus, ardor, et dolor punctorius in pectore, respiratio anxia, tussis sicca perpetua, infestabant nautam, et quidem vsque in tertiam hebdomadam. Vsu congruorum medicamentorum, calor quarta hebdomade desiit integre, sed pressio in pectore, et difficultas respirandi, e contrario adeo increuerunt, vt saepius in suffocandi periculum incurrerit. Haec mala dein adhuc per sex hebdomadas inconstanti sorte continuarunt, quum se nunc melius, nunc peius haberet aeger. Tandem accessit summum molestiae respirandi incrementum, screatu reiecta alba, viscosa, materia, multo sanguine admixto: sine insigni aegritudinum augmento, in alterutro pectoris latere cubare, impossibile, sed in dorso iacere, tolerabile fuit. Et hunc in modum moriebatur.

Aperto pectore, pulmones versus posteriora et latera compulsi, ac membranae, quae costas succingit, valde adcreti spectabantur: supra diaphragma aliqua portio seri flauescentis fluctuabat: partes pectoris, media, et anteriores laterales, a pericardio, valde extenso, et liuescente, te, replebantur, e quo aperto librae circiter quatuor aquae cruentae effluxerunt. Sed cordis superficies tota circumcirca hirta erat villis magnis, longis, latisque, quasi carnis fungosae tenerae, per quos valde diffusos et superior ventriculus pericardio quam firmissime adhaesit.

Prout villi cordis a sero sanguinis formantur: ita illi cum hydrope pericardii plerumque coniunguntur.

Vide Tabulam XII; vbi corda villosa et latis, magnis, laciniis munita, repraesentantur. Tab. XII. Fig. 1.

VI.

Vir iuuenis, propter tabem, defunctus est. Aliquo ante obitum tempore, conquestus est de dolore in scroto. Instituto examine, scroto inesse deprehendebantur tria corpora, sibi inuicem aequalia et rotunda: vnde homo tribus testiculis donatus credebatur. Aperto dein scroto cadaueris, visum est, praeter duos testiculos, rectissime constitutos, corpus tertium, illis quoad figuram et magnitudinem simillimum, vt homo viuus pro triorchide, si quis vmquam vere fuit, agnosci debuerit. Erat vero tertium, insolitum corpus, inter duos veros testiculos medium, ampulla, aqua repleta, siue hydatis, ab arteriis seminalibus arterias recipiens, et venis seminalibus venas reddens. Praeterea firmiter connectebatur, ope solidae membranae, cum vase deferente testiculi sinistri. Nullum est dubium, telae cellulosae morbosam mutationem originem largitam esse huic praeternaturali corpori, prout hydatidibus omnibus largiri consueuit. Potest ergo haec obseruatio inseruire dubiae reddendae sententiae de *exsistentia trium testiculorum*

lorum in vno corpore humano, si non refellendae. Nam quicumque scriptores de triorchidibus loquuti sunt, ei retulerunt de tribus corporibus, rotundis, et aequalibus, scroto inclusis, tactu deprehensis; sed ne vnicam hactenus licuit legere obseruationem, vbi corpus tertium, praeternaturale, habuit structuram testiculi, et vas deferens proprium, desinens in receptaculum seminale proprium et tertium, vel in alterutrum ex duobus ordinariis, id est, vbi corpus tertium, praeternaturale, habuit essentialia testiculi. Communicauit mecum hanc obseruationem Chirurgus nosocomii marini Petropolitani, qui aegroto adstitit, ipseque ad viuum ab vtraque parte delineauit, quae hic conspiciuntur.
Fig. 2.

OBSER-

*OBSERVATIONES GENERALES VNIVERSAM HISTORIAM PISCIVM CONCERNENTES.

AVCTORE
Georg. Wilhelm. Stellero.

DE GENERATIONE PISCIVM.

Omnes cetacei et cartilaginei, longi et plani, viuum foetum absque ouo, vel ouo inclusum, edentes, intus vterum mares, testes atque parastatas, extus vero organa ad generandum manifeste, et corpora ad coitum apte structa, habent; omnes hinc coeunt, ita, vt foemella supina in dorso iaceat, ac marem superuenientem in elemento aquae instabili pinnis excipiat, ne autem delabatur, appendicibus iuxta pudenda, vel forma lata et supine scabra, vel amplexatione caudarum, vt in cartilagineis latis, impedit.

Omnes spinosi et cartilaginei, ouipari, teretes et angulosi ouaria saltem et vesiculas seminales, neque vlla alia externa ad generandum apta organa, obtinent.

Inter spinosos excipienda est Mustela viuipara *Schoenefeldii* et forte Muraena. Acipenseris autem genus, cum corpus ad congrediendum aptum non obtinuit, licet quaedam species ad cetaceam magnitudinem perueniat, ouiparum est, et organis externis ac intus vtero caret.

Verum enim vero cum omnia in vniuersum animalia, ne minima culice excepta, organa generationis externa habent, ac iisdem manifeste congrediuntur, hinc quaerendum est, quare Deus spinosis piscibus haec non concesserit?

 Resp.

* Kamtschatkae sunt traditae, et nunc, vt opus postumum, publici iuris fiunt. Cum autem indicare nostri officii esse duximus, non nulla perlegendo obscura occurrere loca; hinc speramus, lectores ea, quaequae sunt, in meliorem partem interpretaturos, et ea non auctori, sed amanuensi, vitio esse versuros.

Resp. I. Frustranea essent organa, cum corpora omnium horum piscium, praecipue in elemento aquae, ad congrediendum prorsus sunt inepta.

a) Si enim in vadosis ac sicco congrederentur, cum pulmonibus destituerentur, cum primis aër extra aquam branchiarum structurae ita est aduersus et lethalis, vt, antequam generatio succederet, morirentur; structura autem haec branchiarum ratione finis, elementi piscium et magnitudinis, tanquam sapientissima talis, est necessaria.

b) In aquis etiam ob corporis lubricam et cylindricam structuram coitus est impossibilis.

c) Si instrumenta quaedam stationi aut retentioni necessaria adessent, motus celer impediretur.

d) Si autem quaeritur, quare Deus illorum corpora, ita, nec aliter, vt Raiarum aut Squatorum, struxerit? Tunc respondendum est: Deus voluit, vt non solum maris accolae, sed et dissitae continentis incolae, piscibus, e mari venientibus, fruerentur; et nisi corpora ita leuia, in aquis celeriter, et sine molestia mobilia essent, hic finis non obtineretur, pisces defatigarentur, in via morirentur, nec ad fontes fluuiorum, vel tarde satis, peruenirent, nec obstacula in via obuia superare adeo facile possent. Contrarium videmus in Gottis, piscibus litoralibus, Pleuronectis, ac aliis marinis, nunquam fluuios subeuntibus.

II. Vt numerus spinosorum piscium, organis his carentium, millies maior est, quam reliquorum, organis his donatorum, ita et vsu, sapore, specierum diuersitate reliquos omnes vincunt.

a). Iam vero si organa adessent in tanta corporis paruitate, in maribus vesiculae seminales longe minores, pariter ac ouaria, esse deberent, nec soboles tam copiose foret, quod intentioni diuinae fuit contrarium.

b). Vno

b). Vno actu tot milliades ouorum intus impraegnari non possent.

c). Continuus partus et coitus esset necessarius, quod debilibus, et otio soli viuentibus, et incrementa capientibus, creaturis his noxae et exortio foret.

d). Si continuo congrederentur, nullam custodiendorum ouorum curam impenderent, vel prae libidine impendere possent, ac numerosa oua in vanum abirent, quia in elemento aquae fluxili, et inter tot pisces, et insecta, ouis alienarum specierum insidias struerent: ita vero cum organa desunt, ouaria amplissima sunt, duas partes abdominis occupantia.

Theses.

1. Ouaria maxima sunt in piscibus maximi vsus, vt in Salmonum genere, quo integrae regiones, tanquam vnico victu, sustentantur.

2. Quo maiora oua, et quo magis nutriunt, eo magis nutriunt pisces, vt Salmones.

3. Quo maiora oua, eo citiora incrementa sumunt, pisces hinc numerosiores, e. g. genus Truttaceum.

4. Lactes et oua concreata sunt piscibus, incrementa sumunt vna cum ipso corpore, a trunco descendente arteria aortae, quod in Gadis optime conspicitur.

5. Truttacei grandia habent oua, et foemellae semel tantum in vita pariunt, deinceps, exhausto ouario, pereunt.

6. In reliquis longaeuioribus oua minora sunt, et numquam penitus exhauriuntur, sed subinde accrescunt noua.

7. Cum autem omnia animalia voluptuosa quadam sensatione ad coitum, et per consequens ad speciei suae propagationem, inuitantur, hinc naturae iniuria videtur esse in pisces spinosos, dum non coeunt, consequenter eos nullam quoque capere voluptatem? Sed respondendum est: licet pisces maximum

mum et perlongum ſatis tempus non coeant, tamen durantem voluptatis ſenſum percipiant, quod ſequentibus probo:

a. Mares maiorem longe ſeminis copiam, ac foemellae plura oua, quam reliqui piſces omnes habent. Anadromi huius ſeminis maximam partem, reliqui dimidiam, alii, vt Salmones, fere omnem, effundunt; et Februario capti, e genitura inanes reperiuntur.

b. Tantus eſt ſenſus, vt Salmones omnem rictum reſpuant, et continue per vadoſa loca aſſurgant, quo attritu continuo titillantem genituram excernant, donec ab inedia et voluptate exhauſti, penitus emaciati, pereant.

c. Luſum venereum triplicem obſeruaui:

1. In vadoſis locis obſeruaui, Salmones, mares et foeminas, mutuo ventrium attritu ouorum et ſeminis profluuium promouere.

2. Solitarios attritu ad ſaxa idem agere.

3. Mares Ianuario et Februario fugare foemellas, et Oeſtro percitos, ante ſe agere; e contrario autem foemellas varios Maeandros fugere. Ita et obſeruaui: mares foemellarum caudas dentibus arripere, et eas adeo arcte tenere deſiderio quodam voluptuoſo, vt non tantum caudam cute ſua ſpolient, ſed et ipſos radios prorſus praemordeant.

4. In fluminibus hyeme obſeruatur, eos vnanimiter in locis profundioribus viuere, ita, vt vnus alteri tam arcte apprimatur, quaſi humana induſtria in tot lineas vel ſeries diſpoſiti forent. Procul dubio in profundo maris idem agunt, vel hoc natura admoniti in fluuiis repetunt, quod antea ſub mari agere conſueuerunt. Hinc probabile, cum ſocietatem tam arcte ſeruant, vnius ſpeciei piſces ſub aquis per tam longum interuallum temporis id fieri non poſſe propter calorem, cum ac alia ad tactum ſemper frigida ſunt, ſed propter quandam dulce-

dulcedinem veneream, quam eo mutuo accubitu hauriunt.

5. Pifces, qui fero autumno genituram eiiciunt, hyeme folae foemellae, genitura exhauftae, capiuntur, vere mares et foeminae, vna circa brumam ambo, in profundum maris fe recipiunt, inertia et fomno pinguefcunt, ac mutuo accubitu genituram reparant, autumno inde fe verfus litora, et loca profunda minus, et arenofa recipiunt. Ob eiaculationem feminis et ouorum etiam capiuntur, et, vt in Gottis et Gadis obferuaui, vere pariunt, aeftate autem, et hyeme latent.

6. Dum veficae feminales et ouaria adeo turgent, vt geniturae nihil propter fpatii anguftiam addi poffent, tunc alimentum fuperfluum in carnem retundant, et mufculi reparantur. Hoc reparato, genitura fluere incipit, confiftentiam amittit tenuitate, exitum inteftini ftimulat, ad emiffionem pifces inuitat, et e latebris fuis ad vada prouocat, vt generent, capiantur, ac voluptuofo fenfu fruantur; vlterius autem hinc et tunc temporis propter morem aliorum animalium pifces pinguiffimi boni habitus et fapidiffimi funt.

Stimulare vero femen profluendo fphincterem anni ex eo patet:

a. Quod fphincter intumefcit magis.

b. Quod fermentationis quadam fpecie falinae partes ab oleogineis diuortium faciunt, femen mafculinum et foemininum fluide reddunt, ac laxa euadunt, quo ipfo femen exaltatur fpirituofum, et ad effectum extra corpus producendum idoneum redditur.

c. Ob laxatum vinculum et praefentem efferuefcentiam oua marinorum pifcium noctu lucent inftar Phofphori, id, quod in ficcatis, in aëre non contingit, et fplendor inter ficcandum fingulis noctibus, donec omnimode ceffet, magis imminuitur, ratio, quod spiritus salitus, arinosus, laxatus, sensim exhalat, et siccatione partes collabescunt, condensantur, et arctius ambiuntur.

d Oua et lactes piscium citissime putrescunt, et sulphureum odorem spirant, quod a salibus etiam obseruatur.

e. Oua vt vt solertissime praeparata sale, vel siccata rancida, tamen et aeria euadunt, nec diu asseruari possunt.

f. Stimulare lactes et oua pisces, ex eo patet, quod Salmonum lactes aestate in terris Kamtschaticis, crudae comestae, alui profluuium excitant, coctae laxant; in calidis vero regionibus Salmonum lactes et oua exitiosas dysenterias excitant, vt a Kalmuccis comperi. Hinc et Itaelmani, licet oua Salmonum auidissime comedant cocta, tamen semper vel siccata cruda non audent; lactes vero prorsus non, neque crudas, neque coctas comedunt, quia impotentiam inde prouenturam credunt, quod per consequens verum, dum post validam purgationem alui venus non adeo stimulatur.

Quod *Clar Linnaeus* in Cyprinis obseruauit, hoc ego in Corregonis et Salmonibus obseruaui: foemellas scilicet haurire ore semen maris auidissime. Ego insuper obseruaui, mares deglutire foemellarum oua, tantum autem abest, vt credam, haec amoris mutui testimonium coitus succedaneum esse, vt potius credam, hoc ipso mutuo haustu philtro, semen magis fluidum, et oua laxiora ad elabendum reddi; nullum enim ductum huc dum inuenire potui a gula ad ouaria, nisi truncum arteriae aortae descendentem. Si itaque semen oua foecunda redderet, piscivori pisces pisces integros, cum ipsis testiculis seminalibus, deglutiunt, et sic non tantum impraegnatio citra tempus foret, sed et qualis causa, talis effectus alias piscium species ederet.

Quomo-

Sed quomodo fit concubitus et foecundatio?

Respond. 1. Attritu mutuo ventris vnus alterius genituram elicit.

2. Sperma masculinum irrigando oua foeminina impraegnat.

3. Pinnis ventralibus scrobem excauant, et oua in locis quietis eo deponunt, vt aqua, mediante arena, obruantur, imo saxa Salmones eligunt, et cauernas sub illis efformant.

Mari rostrum in vncum cauatur, ne proprium vel alienum foetum deglutiat.

Mas et foemella vna ad fontes ascendunt, donec exhauriuntur genitura, et in pluribus locis oua deponunt, in quo natura cauit, si in vno loco perirent, tamen in reliquis, in saluo essent.

Vna species post aliam ascendit, ne vna alteram turbet, et in prolificando oua rapiat, vel alieni concubitus fiant.

Si vero plures species vna ascendunt, annui simul tanquam custodes vna ascendunt, plures ibique custodiunt foetum, vbi parentes protulerunt, et Hodegi sunt foetus autumno.

In vadosis fluuiis Salmones dum pariunt, pereunt; in profundis annum superuiuunt, sed non amplius generant, et pariunt semel exhausti.

Aliter se res cum Corregonis, et reliquis piscibus Anadromis habet, qui minuta oua habent.

In hominibus et animalibus maribus semen, et in foemellis oua pariter concreata sunt; successu temporis, corpore satis aucto et nutrito, et haec augentur; his auctis, oritur stimulus; cogitatio et libido congressu animatur;

ouum masculino semine intra corpus, quod in piscibus spinosis extra corpus, contingit; voluptas sentitur ex attritu et emissione seminis, quod et in piscibus obtinet; mutua amicitia in conuersatione stimulante sanguis disponitur ad vberiorem seminis secretionem, futurae excretioni destinatam, quod et per mutuam cohabitationem in piscibus succedit; semine stimulante, vel volitione voluptuosa, organa disponuntur in piscibus; plenitudo vasorum, hoc vt in omnibus animalibus, efficit intumescentia organorum excretoriorum, fermentatio, et seminum peculiaris odor attentionem animalium excitant ratione carentium; hinc quo tempore animal optimi est habitus, ac tempore fit libidinosum, tunc et consequenter congressus pro alimentorum ratione periodi tempore fiunt.

Organa generationis in hunc vsque diem non detecta sunt, et non necessaria; hinc, vt intentioni diuinae contraria, non detegentur.

Propter hunc congressum subeunt:

1. Pisces e mari fluuios citra aliam necessitatem.

2. E lacubus profundis fluuios.

3. E fluuiorum profundioribus locis ad remotissimos fontes, quorsum alias nunquam peruenirent.

4. E latebris in lucem.

5. Hinc quo magis Deus terram piscibus nutrire, et ditare voluit, eo plures eiusmodi pisces, et inter hos magna ouaria, et grandia oua habentia, dedit; hinc et Salmones nullibi, in tota terrarum orbe, frequentiores, quam in Russico Imperio, et frequentior, quo miserius clima, et pauperior terra euadit. In terris Kamtschaticis nullus alius habetur piscis, cum nec panis, nec

nec olus, ibi prouenire, nec iumenta copiosa seruare possunt ob niuis copiam.

Mares Truttacei generis non tantum 1. rostrum acutius, sed et 2. dorsum acuminatius, habent, foeminae autem rotundius et conuexius.

Aetas Truttaceorum.

1. Quo plures lamellae membranae branchiostegae sunt, eo maior fit piscis; si itaque piscis permultus 14. 16. 18. 20. habet, hinc facile colligitur, illum iuuenem esse.

2. Quo crassiora et breuiora prima ossicula pinnarum dorsi sunt, et post annum, eo maior fit piscis, si haec ossicula, non nisi elixata pinna accurate numerari et cerni possunt, signum est, piscem esse iuuenem.

3. Quo plures sunt appendices, et longius infra pylorum extenduntur, eo maior fit piscis, nisi minimus occurrat, ratio, quia tanta copia pro magno corpore alendo structa sunt.

4. Quo maior vertebrarum numerus, eo maior fit piscis; si vero exiguas multas obtineat, signum est, piscem esse infantulum aut iuuenem, ita et in iuuenibus superiores vertebrae leuius, inferiores arctius, cohaerent, et apophyses stabiles facile separantur.

Obseruanda quaedam in examine piscium, et obseruata.

1. An Petromyzi et Syngnathi linea laterali careant, et quare? Forte musculos spirales habent, vel vertebrae costis et apophysibus carent.

2. An Cartilaginei ouipari, vt acipenser, linea laterali careant, quia cum prioribus conueniunt.

3. An Cartilaginei ouipari duplices nares habeant, ob id, quod foramina supra oculos pro auditu habent? si

ſimplices, certiſſimum erit, nares in piſcibus et auditus et olfactus organa eſſe.

4. Scrutandum, quid cum viuaci piſce fiat, ſi illi aqua immittitur, antea calida aqua omnis mucus abſtergitur.

5. Certum eſt, linguas piſcium ſapore praeditas eſſe, ob id, quod vnam eſcam alteri praeferunt, quasdam vero in vniuerſum reſpuunt.

8. Ingenium piſcium non exiguum arguit, quod Salmones in terris Kamtſchaticis inquirant, quonam in loco clauſtra ſint humiliora, vt commodius tranſilire poſſint, et vbi vnus tranſilit, reliqui omnes hunc ſequuntur, ita et ſi tranſilire nequeunt ob clauſtrorum altitudinem, vniculos ſub clauſtris fodere audent, vbi vnum foramen inueniunt, ne vnus quidem piſcis aberrat ab hoc foramine.

Obſeruationes
vſum appendicum inteſtinalium concernentes.

Appendices pylori ſecernunt quidem ſuccum nutritium ex ſanguine, affundunt illum in inteſtinum ad iuuandam et accelerandam concoctionem in corporibus frigidis, ſed et praeterea diuerticula et receptacula chyli ſunt, quo piſces tempore inopiae vitam diu ſuſtentant, hoc probatur ſequentibus argumentis.

1. Multi piſces et pancreas et ſimul appendices habent, ergo appendices non vnice pancreatis vice funguntur, niſi ita eſſet, aut pancreas, aut appendices ſuperfluae eſſent.

2. Piſces, quo grandiores euadunt, et citius augentur, ac diutius famem patiuntur, eo maiores et copioſiores appendices habent; hoc patet ex Anatomia Salmonum, qui per integros

integros 6 menſes corpus vehementiſſimo motu et libidine attenuantes, et absque omni cibo ſunt viuentes. Plura vide in Anatome Corregoni, Biela rybiza ſiue бѣла рыбица Ruthenis. dicti.

Omnes piſces ſpinoſi propter generationem profunda loca deſerunt, et vadoſa quaerunt, hinc eo tempore copioſiſſime capiuntur, vt Cyprini, Braßem dicti, tempore coitus ripas petunt, et alias ſemper in profundis degunt, procul dubio hoc fit ad facilitandam generationem.

Lucii ſeu Eſoces tempore inundationis riuulos petunt, et foemella quandam impraegnationis ſpeciem praebet; mas coitu praeterlabitur citiſſime foemellam, foemella autem, dum mas praeterlabitur, repente in dorſum ſe coniicit, ac in mari ventrem obuertit, quo tempore in Holſatia etiam accenſis facibus noctu manibus capiuntur.

Corregoni a Salmonibus differunt:

1. Paucitate oſſiculorum branchioſtegorum.
2. Paruitate ouorum.
3. Colore ouorum.
4. Carnis colore.
5. Inteſtinis praepinguibus, e quibus facile ingens copia pinguedinis elixatur.

Caro Salmonum inter ſpinoſos piſces maxime omnium nutrit, cibum largitur ſolidum, absque condimentis ſapidiſſimum, ac contra Medicorum ſententiam maxime ſanum, id, quod integrae gentes in terris Kamtſchaticis ſuis exemplis euincunt, qui ſolis Salmonibus viuunt, nec febribus, nec ſcabici, nec conuulſiuis morbis obnoxii ſunt; hinc ſingulariter his piſcibus proſpexit Deus omnibus illis genti-

gentibus, qui pane carent, et ob coeli et terrae inclementiam perpetuo carere debent. Sapore omnes conueniunt prope modum Salmones, elixati iusculum insipidum relinquunt, ac omnem vim nutriendi ab igne et aqua coagulatam in se seruant, venerem magis quam carnes stimulant, praecipue oua idque magis, si exsiccata raucorem contraxerint; perpetuo igitur ieiunantes Itaelmeni lasciuiores sunt, et ad venerem proniores, quam vel maxime carniuora animalia alia. Idem etiam de victu et moribus Astracanensium valet.

In Historia Salmonum, Corregonorum et Osmerorum accuratissime sequentia obseruanda sunt:

1. Longitudo maxillarum.

2. Series dentium et numerus.

3. Figura primae caudae exactissime determinanda.

4. Figura caudae musculosae ante pinnam caudae, num rotunda, num e conuexo plana, ita Keta e conuexo planam, Krasna et Biela ryba teretem et carnosiorem obtinent.

5. Ossiculorum branchiostegorum figura, et numerus in vtroque latere, et in pluribus subiectis.

6. Vertebrarum numerus exactissimus.

7. Num branchiae in parte concaua in omnibus eandem structuram obtinent.

8. Epatis figura.

9. Si fieri potest appendicum numerus, sed hic variat.

10. Pleurae color.

11. Ossiculorum pinnarum numerus.

12. Carnis crudae et coctae qualitas et color.

Inter Salmones ossicula branchiostega continent numero:

18. Tſchawytſcha.

11. et 12. Sioemga.

13. Biela ryba.

12. 13. 14. Krasna ryba, ſaepe 3. in dorſo, et 14. in ſiniſtro latere.

12. et 13. Fluuiatilis Malma, aut 12. ſaepe in dextro, et 11. in ſiniſtro, imo 11. in vtroque latere.

13. Lacuſtris Malma e promontorio Kronoky idem piſcis.

12. Kunſcha Tunguſorum.

14. Kaiko, ſed raro, plerumque in dextro 15. et in ſiniſtro 16.

12. Lax Suecorum. *Artedi ſyn. ſpec.* 22.

10. 12. In Laxunge Elf karlorum *Artedi* deſcripti. *p.* 50.

Pinna dorſi oſſiculorum:

14. Kaiko.

14. Kunſcha.

14. Sioemga.

11. Malma e lacu Kronok.

13. Malma fluuiatilis.

12. Krasna ryba.

14. Gorbuſcha.

Pinna poſt anum:

10. In Malma e Kronok.

10. et 11. In Malma fluuiatili.

15. Kaiko.

11. Kunſcha.

13. Sioemga.

15. 16. 17. Krasna ryba.

16. Gorbuſcha.

Numerus oſſiculorum pinnarum poſt branchialium :

16. Gorbuſcha.

Numerus oſſiculorum pinnarum ventralium :

10. Gorbuſcha.

Vertebrarum numerus :

71. Tſchawytſcha.
61. Sioemga.
66. Malma, et lacuſtris et fluviatilis, conſtantiſſime.
66. Kaiko.
54. Osmerus, Itaelmanis Inniacha.
65. Biela ryba.
60. Waliök, corregonus.
61. Kunſcha.
56. Lax Suecorum, *Artedi.*
60. Forell. *Artedi ſyn.* 51.
67. Krasna ryba.
68. Gorbuſcha.

Inter Salmones ſquamas magnas obtinent :

Salmo, omnium Autorum *Artedi ſpec.* 48.
Tſchawytſcha Kamtſchadalis.
Kaiko vel Keta.
Krasna ryba.
Biela ryba.

Inter Salmones ſquamas minutiſſimas obtinent

Malma Tunguſorum.
Laenok Lenenſium.
Myhkyhs Kamtſchadalis.
Gorbuſcha Kamtſchadalis.
Kunſcha Tunguſorum.

Taimen

Taimen Sibirienſium.

Inter Salmones caudas reſimas obtinent:

Salmo, maculeis cinereis, caudae extremo aequali. *Artedi ſyn.* 23. *The Greg* Anglis, et *Graelax* Suecorum.

Salmo latus, maculis rubris nigrisque, cauda aequali *Artedi ſyn.* 94. *ſpec.* 5. Trutta Salmonata eſt *The Seurf* Anglis, et *Boerteng* Suecis.

Inter Salmones caudas forcipatas obtinent:

Salmo, omnium Autorum *Artedi ſpec.* 48.

Sioemga Kamtſchadalis forte idem.

Tſchawytſcha Kamtſchadalis.

Krasna ryba.

Biela ryba,

Malma.

Kunſcha Tunguſorum.

Kaiko Kamtſchadalis, vel Keta Tunguſis.

Salmo cauda biſurca, maculis ſolum nigris, et ſulco longitudinali in ventre eſt. *Syn.* 25.

Trutta lacuſtris.

Salmo, lineis lateralibus ſurſum recuruis, cauda biſurca. *Artedi ſyn.* 25. Vmbla prior.

Mandibulam ſuperiorem longiorem obtinent clauſo ore:

Sioemga Kamtſchadalis.

Tſchawytſcha.

Kaiko.

Kunſcha.

Salmo, et Blanklak Suecis.

Salmo pedalis, ſiue Saluelin. *Artedi ſyn.* 26.

Gorbuſcha.

Mandibulam inferiorem longiorem obtinent:

Salmo maxilla inferiore paulo longiore, maculis rubris. *Artedi ſpec.* 23. Trutta fluuiatilis eſt auctor Forelli.

Salmo vix pedalis pinnis ventris rubris, maxilla inferiore paulo longiore. *Artedi ſpec.* 52.

Epar indiuiſum obtinent:

Tſchawytſcha.

Kunſcha.

Sioemga.

Lax Suecorum forte idem cum priori.

Epar diuiſum in 2. lacinias:

Kaiko.

Lien indiuiſum obtinent:

Kunſcha forma linguae.

Sioemga velut ſegmentum panis.

Lien diuiſum obtinent in 2. lobos figura ϑ:

Tſchawytſcha.

Kaiko.

Taimen.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

SVMMARIVM
OBSERVATIONIS ECLIPSEOS SOLARIS d. 8. IANVARII 1750. st. n. a *CL. KRAFFTIO* TVBINGAE HABITAE E LITTERIS * AD *WINSHEIMIVM* DATIS CVM ACADEMICIS COMMVNICATVM.

Initium ob tempus nebulosum sole non admodum eleuato obseruari quidem haud potuit, ob subsecutum autem tempus serenum, per totum diem continuans, finis Eclipseos determinatus fuit.

Instrumenta quidem ad obseruationem adhibita fuere mediocria, horologium scil. portatile Anglicanum, tubus terrestris itidem Anglicanus 5. pedum, et quadrans vnius pedis, pro altitudinibus solis capiendis. Hae autem altitudines pro aberratione horologii calculatae, dum intra minutum primum conuenirent, horam 10. cum 52. minutis primis tempore medio pro fine Eclipsis sat accurate dederunt.

Exitus autem disci lunae e disco solis vna cum duabus maculis in sole obseruatis, in adiecto schemate quodammodo adumbratae sunt. Tab. XIII. Fig. 1.

De cetero Barometrum circa initium 28. $\frac{80}{155}$ poll. duod. Angl. monstrans, ad 28. $\frac{76}{150}$ circa meridiem depressum fuit. Variatio autem Thermometri *Fahrenheitiani* intra 20.° 30.° obseruata fuit.

* Ex epistola Germanico idiomate scripta in linguam Latinam transtulit, scriniis Academicis inserendum, *Chr. Nic. de Winsheim.*

OBSER-

OBSERVATIO
ECLIPSIS LVNAE TOTALIS d. 19. IVNII ſt. n. 1750. LIPSIAE HABITA.
a
G. Heinſio.

Initium huius Eclipſis ex calculo contigit, luna nondum orta. Hanc ob cauſam et cum nubes copioſae adſpectum lunae, poſt ortum eius, impedirent, immerſionem lunae in vmbram terrae obſeruare non licuit. Circa hor. 9½ lunam, in nubium hiatu per aliquot tempus conſpicuam, totam deprehendi in vmbra terrae; et verſus hor. 10., luna denuo in conſpectum prodeunte, nucleum vmbroſum figurae irregularis in diſco eius animaduerti ab oriente occidentem verſus diſcum ſucceſſu temporis peruagantem, ita quidem, vt quarta circiter pars diſci meridiem verſus (ſitu erecto) nucleo libera et prae reliqua diſci parte valde lucida cerneretur. Luna deinde per vices ſubiit nubes, quibus tandem hor. 10. 35′. tempore vero liberata pateſcit, emerſionem primam ex vmbra terrae iam factam eſſe, ante duo circiter minuta prima temporis. Coelum poſtea ſerenum obſeruationi vsque ad finem Eclipſis fauit. Inſtructus itaque Teleſcopio *Gregoriano* ſub apparatu, quo iſtud obiecta 52. vicibus amplificat, macularum lunae emerſiones ex vmbra terrae optime obſeruare et terminum vmbrae probe diſtinguere potui, ita vt de momentis appulſuum vmbrae ad maculas admodum certus ſim, ambiguo ſi quid acciderit, vix ad 5. ſecunda temporis aſcendente; id quod in eiusmodi obſeruationibus raro contingere ſolet. Momenta appulſuum ad ad duo horologia comparata, et ex altitudinibus Solis respondentibus diebus 20. et 21. Iunii captis probe correcta, sequentia accipe.

Tempore vero.

10^h.	38'.	38''.	Grimaldus incipit emergere.
	43.	57.	Galileus ex vmbra prodire incipit.
	44.	20.	Galileus totus ex vmbra, quae simul Mare Humorum tangit.
	51.	4.	Aristarchus incipit emergere.
	51.	17.	Medium Aristarchi aestimatum.
	51.	36.	Aristarchus totus. Intelligitur hic macula Aristarchi rotunda, abstrahendo a cuspidibus eius versus ortum excurrentibus.
	55.	40.	Vmbra incipit relinquere Tychonem.
	56.	40.	- - - - Tychonis medium ex aestimio.
	57.	45.	- - - - Tychonem totum.
11^h.	0'.	28''.	Copernicus incipit emergere.
	1.	40.	Medium Copernici aestimatum.
	2.	48.	Copernicus totus.
	8.	54.	Vmbra ad orientale extremum Platonis.
	9.	33.	- - ad medium Platonis ex aestimio.
	10.	15.	- - ad occidentale extremum Platonis. Intelligitur hic nigrum maculae Platonis.
	17.	12.	Manilius ex vmbra prodire incipit.
	17.	44.	Medium Manilii aestimatum.
	18.	18.	Manilius totus.
	21.	5.	Vmbra per medium Menelai transit, et Dionysius totus emergit. Obseruatio aliquantulum dubia.

21.	40.	Menelaus totus ex vmbra.
34.	0.	Medium Procli emergit.
34.	36.	Mare Crisium incipit emergere.
36.	55.	Medium Maris Crisii ex aestimio.
39.	6.	Mare Crisium totum.
40.	16.	Finis Eclipsis. Obseruatio bona et intra 10. secunda temporis certa.
40.	30.	Finis certe factus est.

OBSER-

OBSERVATIONVM LIPSIENSIVM ANNO 1748 HABITARVM CONTINVATIO

AVCTORE

G. Heinsio.

Eclipses Satellitum Iouis.

In obseruationibus Eclipsium Satellitum Iouis sequentibus Telescopio vsus sum consueto Gregoriano sub apparatu, quo istud obiecta secundum Diametrum 52. vicibus amplificat; temporis autem correctio ex altitudinibus Solis respondentibus innotuit.

An. 1738. temp. vero Astron. styl. nou.

August. 21. $12^h. 24'. 38''.$ Emersio Sat. 2. prima, obseruatio exacta Satellite celeriter emergente ad distantiam circiter $\frac{1}{6}$ Diametr. Iouis a proximo eius limbo.

$12^h. 26'. 50''.$ Satelles lumine pleno fulgebat; minimus tamen inter reliquos.

August. 26. $12^h. 0'. 47''.$ Emers. Sat. 1. prima. Sic quidem opinor hoc momento Satellitem ad distantiam circiter $\frac{1}{5}$ Diam. Iouis a proximo eius limbo primum in conspectum venisse; certissime autem id affirmare non possum. Iouem nempe non nisi per nubium hiatus, adspectum eius, per vices concedentes, contemplari licuit, sic quidem vt adspectus eius circa momentum notatum 5. circiter secunda temporis tantum durauerit, atque de facta emerſione me haeſitantem reliquerit. Ceſſauit adſpectus deinceps vsque ad $12^h. 10'. 58''$, quo tempore Satellitem inueni emerſum.

Septembr. 4. $8^h. 24'. 23''$. Emers. Sat. 1 prima, ad diſtantiam $\frac{1}{4}$ Diam. Iouis a proximo eius limbo, obſeruatio exacta.

Septembr. 11. $10^h. 21'. 46''$. Emers. prima Sat. 1. ad diſtantiam $\frac{1}{5}$ Diam. ♃ a proximo eius limbo, obſeruatio exacta.

$10^h. 23'. 46''$. Satelles totus emerſus.

Septembr. 14. $10^h. 28'. 4''$. Emers. prima Sat. 3. ad diſtantiam $\frac{1}{5}$ Diam. ♃ a proximo eius limbo, obſeruatio exacta.

$10^h. 30'. 20''$. Emerſio totalis.

Septembr. 20. $6^h. 49'. 4''$. Emers. prima Sat. 1. obſeruatio exacta, crepuſculo veſpertino licet adhuc ſatis notabili.

$6^h. 50'. 35''$. Satelles lumine pleno videbatur.

Occultationes Fixarum a Luna.

D. 15. Auguſt. poſt hor. 15. temporis Aſtronomici inſtabat tranſitus lunae per Pleiades, quem per tubum Gregorianum ſub apparatu ante memorato tantummodo obſeruare licuit. Vſum ſcilicet Machinae parallacticae inſignis lunae altitudo pro conditione loci obſeruationis irritum reddidit. Vt autem annotata diſtincte exponere poſſem, ſchema adiectum ex elementis*, quae Calendarium Aſtron. Berolinenſe ſuppeditauit, ſitu erecto conſtruxi, Fig. 2. eique

eique ſtellas Pleiadum inſigniores pro earundem differentiis longitudinum et latitudinum, ex obſeruationibus *Caſſini* et *Maraldi* in *Commentar. Acad. Sc. Paris, ad an.* 1708. *p.* 384. *ed. Bat.* notis inſerui. Schematis ſequentes ſunt conditiones: *a* A repraeſentat parallelum Eclipticae per lucidam Pleiadum *a* tranſeuntem; *a* B eiusdem circulum latitudinis; C L ſemitam centri lunae viſam, ad quam parallelae ſunt *c* D, *e* E, *g* F, *b* K, vsque ad occurſum cum peripheria lunae, vel linea cuſpidum M I reſpectiue protractae, poſito lunae centro in C. Stellas iisdem litteris inſigniui, quibus vſus eſt *de la Hire* in *Comment. Acad. Sc. Paris, ad an.* 1693. *p.* 59, iisque reſpondent nomina ſequentia *Riccioli*

a. Alcione ſeu Lucida Pleiadum.	*d.* Merope.	*h.* Pater Atlas.
b. Electra.	*e.* Maia.	*i.* Mater Pleione.
c. Taygeta.	*g.* Celeno.	

Luna ante quatuor circiter horas quadraturam ſecundam celebrauerat, et Immerſiones ſtellarum ad limbum lunae lucidum factae ſunt. His praemiſſis ſequentia noto ex obſeruatione.

Momenta.

An. 1743. d. 15. Aug.
ſt. nou. temp. vero Aſtron.

$15^h. 24'. 25''.$ Stellam *g* (*Celeno*) limbo lunae ita vicinam deprehendi, vt poſt $2\frac{1}{2}$ minut. temporis occultationem futuram eſſe coniicerem. Centrum lunae tunc locum C in ſchemate occupabat, quem, ſumta Diametro lunae $= 31'. 5''.$ altitudini tempore obſeruationis vi calculi conueniente, ope ſemihorarii lunae in ſemita eius viſa $= 12'. 20''$. ex interuallo Immerſionum poſthac obſeruatarum per ſchema eruti, aſſignare licuit.

— 25. 25 Eadem ſtella ad diſtantiam a limbo lunae lucido $= 45''$. circuli maximi ope ſchematis ſimili methodo poſthac deſinitam, ob lumen lunae forte diſparere incepit. Arbitrabar itaque:

$15^h. 27'. 15''$. Occultationem huius ſtellae re vera contigiſſe; et de hoc momento intra 10. vel 15. ſecunda temporis certus ſum.

— 35. 25. Stella *c* (*Taygeta*) a limbo lunae lucido interuallo $= 1\frac{1}{3}$ Diametro Grimaldi G H a borea auſtrum verſus ſumtae ex aeſtimio diſtabat, cui circiter $1'. 37''$. circuli reſpondent.

— 37. 25. Diſtantia eiusdem ſtellae a limbo luna aeſtimata fuit $= \frac{2}{3}$ G H vel $43''$.

— 38. 55. Eadem ſtella ad diſtantiam a limbo lunae circiter $= 24''$. circuli euaneſcere incepit. Iudicabam itaque:

— 39. 15. Occultationem huius ſtellae a limbo lunae re vera accidere debuiſſe; atque de hoc momento intra 10. ſecunda temporis certus ſum. Immerſio facta eſt ad punctum limbi lunaris D ita reſpectu Grimaldi ſitum, vt $\frac{1}{3}$ ipſius G H ſupra D boream

ream versus, $\frac{2}{3}$ ipsius G H infra D existerent.

— 40. 0. Crepusculum matutinum notabiliter iam ingruebat.

Accessit deinceps luna ad stellam *b* (*Electram*), quam vero transeundo austrùm versus a se reliquit. Notaui itaque momentum intra 10. secunda temporis certum:

— 57. 0. Quo stella *b* in lineam cuspidum lunae M I productam incidit in K, aestimando distantiam I K aequalem distantiae centri Albategnii a proximo limbo Waltheri, quae maculae prope lineam cuspidum haerebant. In schemate lunari *Doppelmaieri* haec distantia conficit $\frac{5}{31}$ Diametri lunaris, quae, si vera est, sistit IK $= 5'. 0''$, tantummodo $50''$ maiorem ea, quam schema constructum ex calculo $= 4'. 10''$. suppeditauit.

Cum igitur luna prope quadraturam, ideoque linea cuspidum ad sensum perpendicularis existeret ad parallelum Eclipticae; momento notato centrum lunae eandem habuit longitudinem cum stella *b*; differentia autem latitudinum vtriusque vi praec. foret $= 20'. 33''$. centro lunae a stella boream versus distante.

$16^h. 1'. 5''.$ Diſtantiam ſtellae *e* (*Maiae*) , ad quam luna nunc accedebat , a proximo eius limbo aeſtimaui aequalem Diametro Grimaldi G H.

— 4. 38. Immerſio facta eſt huius ſtellae, quam occultationem optime et ſtellam ad ipſum lunae marginem conſtitutam obſeruare licuit. Internallum horum momentorum Diametrum Grimaldi G H aſſignat $= 1'. 5''$. circuli maximi. Crepuſculum nunc tantum luminis incrementum ceperat , vt ſcriptionibus expediendis absque candelae accenſae vſu ſufficeret. Hoc lumen ingraueſcens obſeruationibus quoque finem impoſuit.

Circa horam 15 , antequam has obſeruationes ſuſcepi , diſcrepantiam luminis ſtellarum Pleiades componentium ſenſuum iudicio notaui. Lucidiſſima erat *a*, quam proxime excipiebat *b* , et hanc deinceps *e* ; minores ipſa *e* videbantur *d* , *b* , *c* , *i* , ad ſenſum inter ſe aequales ; minima tandem inter praecedentes viſa eſt *g*. Hanc lucis diuerſitatem comparando cum diſtantiis , ad quas a limbo lunae lucido ſtellae *e* , *c* , *g* , (ſcilicet ad $0''$, $24''$, $45''$, reſpectiue) ob intenſitatem luminis lunaris diſparuerunt , ea confirmantur , quae de eiusmodi effectu intenſitatis luminis in deſcriptione occultationis Palilicii a luna d. $\frac{21.\ \text{Sept.}}{2.\ \text{Octobr.}}$ 1738. Academiae Imperiali exhibita in medium protuli.

d. 2.

d. 2. Septembr. 1748.

Veſperi luna appropinquabat ad fixam σ Sagittarii 3[tiae] magnitudinis, eamque occultabat. Congreſſus huius obſeruationem ope Machinae parallacticae, iam ante deſcriptae, ſuſcepi, et poſitiones aliquot fixae ad lunam determinaui, prout iſtas figura 3., ſitu erecto delineata, diſtincte ob oculos ponit, $5\ p$ repraeſentat parallelum ad diurnum fixae; $h\ p$ autem, perpendicularis ad $5\ p$, exhibet circulum horarium. Luna poſt quadraturam primam gibboſa phaſi inſtructa limbo ſuo praecedente tangit $p\ h$, limbo autem meridionali rectam $5\ p$, ad quam inclinata eſt linea cuſpidum. Si ergo fixa, verbi cauſa, in 6 ponatur, et 65 ad $h\ p$ parallela agatur; repraeſentabit $5\ p$ differentiam aſcenſionum rectarum limbi lunae praecedentis et fixae, 65 autem differentiam declinationum limbi lunae meridionalis et fixae, facta ſcilicet relatione ad diurnum fixae. Huius relationis re vera rationem habui in definiendis locis fixae per 1, 2, 3, 4, ſecundum ordinem obſeruationum inſignitis; praeterea vero, cum luna in vicinia horizontis in altitudine circiter 11°. exiſteret, ideoque declinationum differentia correctionem aliquam ex diuerſitate refractionum admitteret, hanc quoque attendere ſtategi. His ita comparatis ex obſeruationibus ſequentia definita ſunt momenta. Fig. 3.

Ex obſ. pro momento temporis veri d. 2. Sept.	Differentia aſcens. rectarum limbi ☽. praeced. et fixae in partibus diurni (vel etiam quoad numerum in partibus aequatoris).	Differentia declinationum limbi ☽. meridionalis et fixae in partibus circuli maximi.
1. $7^h. 55'. 49''.$	$0°. 58'. 18''.$	$0°. 24'. 52''.$
2. 8. 11. 2.	51. 5.	23. 25.

3. $8^h. 17'. 40''.$ $0^\circ. 47'. 51''.$ $0^\circ. 22'. 38''.$
4. — $25. 42.$ $43. 41.$ $21. 47.$

Obſeruationem tertiam dubiam aliquantulum reddiderunt nubes tenues ſubinde interuenientes. Denique $8^h. 41'. 0''.$ Immerſio facta eſt ſtellae ad marginem lunae obſcurum. Emerſionis obſeruationem nubes impediuerunt.

De Cometa an. 1748.

Cometam, qui magnitudinis exiguae menſe Maio an. 1748. in boreali coeli regione apparuit, non niſi ſimplici vice et diſſiculter d. 9. Maii deprehendere licuit. Lunae enim poſt tres dies plenilunium celebraturae lumen forte non ſolum, verum etiam nubes tenues ſubinde interuenientes, ſaepiſſime erant impedimento. Tandem hor. 12¼ temporis Aſtron. ſitum Cometae inter fixas oculorum aeſtimio cognoſcere licuit. Recta ſcilicet per γ Cephei
Fig. 4. et Cometam C producta biſecabat interuallum ſtellarum γ et δ Caſſiopeiae, in qua recta Cometa C a γ Cephei tantum diſtabat, vt intercapedo ſtellarum γ et π Cephei aequaretur ⅔ diſtantiae Cometae C et γ Cephei. Signatura ſtellarum eſt *Bayeri* in *Vranometria*. Per tubulum Hollandicum 1½ digit. longum Cometa magnitudine apparente aequalis viſus eſt ſtellae π. Cephei, quae eſt 5^tae^ magnitudinis, pallidioris tamen luminis. Interdum et caudam ſat bene diſcernere licuit ¾ gradus longam, quae a capite Cometae verſus π Cephei ita dirigebatur, vt, ſi producta intelligeretur, hanc orientem verſus ad diſtantiam tamen vix ſenſibilem tranſiret. Circa hor. 13½ Cometam per Tubum *Gregorianum* ſub apparatu, quo ille 52 vicibus obiecta ſecundum Diametrum amplificat, contemplatus

tus ſum. Cometam iſte ſatis lucidum ſiſtebat; nucleus autem tam male terminatus apparuit, vt figuram eius diſcernere non liceret. Nucleum Atmoſphaera ſat lucida circumdabat, lumine tamen continuo decreſcens a nucleo verſus extrema, ita, vt Solem verſus figura ſemicirculari ſatis ſenſibili terminaretur; in regione vero a Sole auerſa cum productione caudae absque termino ſenſibili confunderetur. Partem Atmoſphaerae lucidiſſimam et nucleo proximam acuminatam credidi caudam verſus. Lumen caudae admodum debile et pallidum Tubus iſte docebat, eamque ad 20. minuta prima circiter extenſam difficulter diſtinguere licuit. Diameter Atmoſphaerae ad ſenſum $\frac{1}{8}$ capacitatis Tubi *Gregoriani* occupabat, eaque Diametrum nuclei duodecies in ſe continebat, quantum quidem terminus nuclei incertus aeſtimium hoc conceſſit. Hoc pacto, cum Tubus $19\frac{1}{4}$ minuta prima circuli maximi capere ſolet, Diameter Atmoſphaerae emergit $= 2'. 24''$; Diameter autem nuclei $= 12''$. Fixas non nullas minores in regione Cometae per Tubum Aſtron. 5. ped. animaduerti quidem et ab iisdem diſtantias Cometae ope Micrometri explorare ſategi; aſt conamen omne nubes ſaepiſſime interuenientes et deinceps crepuſculum matutinum ingraueſcens irritum reddiderunt.

Definitio eleuationis poli ex altitudinibus Solis ſolſtitialibus.

Circa ſolſtitium aeſtiuum an. 1748. Quadrante conſueto obſeruaui altitudines limbi ſuperioris Solis meridianas, vt inde altitudo meridiana ſolſtitialis centri Solis erui poſſet. Cum correctiones adhuc prorſus ſint eaedem,

 quas

quas in recensione obseruationum solstitialium an. 1746. adhibui, excepta differentia declinationis Solis a solstitiali declinatione, quam facile supplere licet; altitudines tantum Quadrante captas, et inde deductas altitudines solstitiales notabo. Deprehendi autem:

	Altitudinem meridianam Limbi superioris ⊙ secundum diuisionem Quadrantis, nulla prorsus adhibita correctione.		Solstitialem centri Solis adhibitis memoratis correctionibus deductam.
An. 1748			
Iunii. 18.	62°. 40′. 15″.	non admodum incerta.	62°. 6′. 17″.
19.	— 40. 40.	obs. operosa.	— 5. 46.
20.	62°. 40′. 45″ vel 41. 0.	dubius circa hanc determinationem.	— 5′. 21″ / 36
21.	— 41. 0.	obseru. exacta.	— 5. 31.
22.	— 40. 40 / 45	sat certa.	— 5. 30. / 35.
23.	— 40. 0.	obs. exacta.	— 5. 34.
Iunctis altitudinibus solstitialibus aestiuis an. 1746 - - Iunii. 24.			— 6. 6.
25.			— 5. 46.
emergit media			62°. 5′ 42″.
Circa solstitium brumale an. 1748.			
Decembr. 24.	15°. 50′. 0″.	obseru. exacta.	15°. 8′. 50″.
Si cum hac conferantur altitudines solstitiales hybernae an. 1747.			
d. 20. Decembr.			15. 9. 41.
d. 21. - - - -			- 8. 58.

definitae, cuiusmodi prodire solent,

si

ſi parallaxis Solis ratio habeatur, cuius conſiderationem in recenſione obſeruationum an. 1747. omiſi, ha-

bebitur media - - - - - - -	15°. 9'. 10''.
Hinc cum inter aeſtiuas media ſit -	62. 5. 42.
erit diſtantia Tropicorum - - -	46. 56. 32.
obliquitas Eclipticae - - -	23. 28. 16.
et Eleuatio poli Lipſiae - - -	51. 22. 34.

De apparitione Veneris interdiu.

D. 13. et 14. Octobr. an. 1748. horis antemeridianis Venerem interdiu ad dextram reſpectu Solis nudis oculis conſpexerunt multi, quam inſolitam ſtellae apparitionem inſtar portenti habuit vulgus. Eandem quoque d. 18. Octobr. poſt horam 9. matutinam probe adhuc in vicinia lunae videre mihi licuit. Apparentiam hanc contingere debere docuit *Hallejus* in *Tranſact. Anglic. N.* 349, ſi area partis illuminatae diſci Veneris e terra conſpiciatur maxima, quae conditio prope coniunctionem Veneris cum Sole inferiorem locum habet, dum Venus a Sole vel verſus Orientem vel Occidentem ad 40. gradus circiter elongata cernitur. Hoc quidem pacto, cum Venus ad eundem reſpectu Solis et terrae ſitum interuallo 584. dierum circiter redire ſoleat, eiusdem quoque phaenomeni reditus ad idem interuallum accidere debet. Interim experientia abunde docet, euidentem eiusmodi apparitionem Veneris tam frequentem non eſſe, vt iſta cum periodo memorata conciliari poſſit. Nec coeli inclementia adſpectum phaenomeni forſan impediens hic excuſationi ſemper locum facit, ſiquidem duratio vnius eiusdemque

que apparitionis limitibus nimis arctis circumscripta non est, sed ad 15. pluresque dies extenditur. Aliam igitur, praeter istam *Halleji*, conditionem, attendere necesse erit. Scilicet situs Veneris respectu horizontis in computum quoque trahi debebit. Manente enim Veneris fulgore, quem a Sole recipit ista, eodem, conspectus Veneris interdiu facilior detur necesse est, si ista insignem super horizonte altitudinem habeat, Sole locum depressiorem occupante, ac si Veneri horizonti viciniori debilitatio lucis ex maiori vaporum Atmosphaerae copia accidat. Vt igitur conditionem hanc regulis generalioribus explicare liceat, sequentes hypotheses introducere conueniet. Fingamus, Venerem, quippe ab Ecliptica non multum euagantem, in Ecliptica semper incedere; tempus autem, quo Venus interdiu nudo oculo conspici debeat, restringatur ad momentum ortus vel occasus Solis. His positis conditiones assignare debemus, sub quibus Venus, accedente ad istas hypotheses *Halleji* conditione, maximam super horizonte altitudinem acquirat. Referat H E Z meridianum, Fig. 5. Z Zenith, H A S horizontem, E V S Eclipticam eo in situ, qui pro data poli eleuatione locum habet, Sole ad S in horizonte ad datum diem constituto. Distet nunc Venus in Ecliptica a Sole arcu V S = 40. grad. vi conditionis *Hallejanae*, et per locum Veneris V ductus sit circulus verticalis Z V A; erit V A altitudo Veneris, quae hypothesibus supra dictis et conditioni *Hallejanae* respondet. Haec maxima, manente poli eleuatione, requiritur, si casus maxime idoneus pro apparitione Veneris interdiu existere debeat. Est autem in triangulo S V A ad A rectangulo sin. tot. : sin. S V = sin. V S A : sin. V A;

V A ; vnde, cum arcus S V vi conditionis *Hallejanae* ſit conſtans, ſemper ſcilicet = 40. grad., erit ratio ſin. tot. : ſin. S V ; ideoque et ratio ſin. V S A : ſin. V A conſtans ; quam ob rem arcus V A euadit maximus, ſi angulus V S A, angulus ſcilicet Eclipticae cum horizonte, ſit maximus. Euenit hoc pro regionibus terrae borealibus in plaga coeli orientali, ſi in 0° ♎ ; in occidentali, ſi in 0°. ♈. ſol verſetur. Si ergo circa coniunctionem Veneris cum ſole inferiorem Venus a Sole occidentem verſus diſtet 40. grad. tempore aequinoctii autumnalis, horis antemeridianis conſpectus Veneris facillimus interdiu dabitur ; horis autem pomeridianis, ſi tempore aequinoctii verni Venus a Sole orientem verſus 40. grad. remota ſit. Aſt tam arctis limitibus rem comprehendere non opus eſt, ſiquidem in hoc negotio omnem rigorem attendere ſuperuacaneum eſſet. Sic phaenomeno ſatisfiet horis antemeridianis, modo, ceteris manentibus, Sol a 0°. ♎ hinc vel illinc non vltra ſignum coeleſte circiter diſtet, hoc eſt, locum Eclipticae intra 0°. ♍ et 0°. ♏ ſitum occupet ; horis autem pomeridianis, modo Sol haereat intra 0°. ♓ et 0°. ♉ ; in his enim caſibus angulus Eclipticae cum horizonte parum differt a ſuo maximo. Haec circumſtantia quoque euincit, commodum apparitionis Veneris interdiu tempus ad ortum vel occaſum Solis praeciſe reſtringi non debere, ſed ad vnam duasue horas vel poſt Solis ortum vel ante Solis occaſum poni poſſe, modo Solis locus intra iam memoratos limites reſpectiue contineatur ; ſi quidem tunc in reuolutione Sphaerae coeleſtis Ecliptica reſpectu horizontis per aliquot tempus poſitionem phaenomeno noſtro fauentem conſeruat. Accedit tandem, rigorem

rigorem nimium quoque obſeruandum non eſſe circa elongationem Veneris a Sole = 40. grad., ſed iſtam ſenſu latiori in exceſſu aliquo vel defectu accipi poſſe. His ita comparatis, ſequentes conditiones pro indicando phaenomeno noſtro, facta ad anni dies relatione, praeſcribere licebit: *Venus commode conſpicietur interdiu horis antemeridianis, ſi elongatio Veneris a Sole occidentem verſus circiter = 40. grad. poſt ☌ ♀ ☉ inferiorem incidat in aliquem diem intra 23. Auguſt. et 23. Octobr. circiter ſucceſſu temporis comprehenſum; horis autem pomeridianis, ſi eiusmodi elongatio orientem verſus reſpectu Solis ante ☌ ♀ ☉ infer. die aliquo contingat intra 19. Februar. et 19. April. circiter ſito.* Facile hinc intelligitur, poſt vnam quamque Veneris reſpectu Solis et terrae periodum (584 dierum) phaenomenum noſtrum redire non poſſe, conditionibus iſtis non ſemper occurrentibus; interuallo autem octo annorum, quo Venus ad eundem reſpectu Solis et terrae ſitum in iisdem anni temporibus proxime reſtituitur, phaenomenum noſtrum redire debere. Vt omnia diſtincte oculis ſubiici poſſint, ex Ephemeridibus Manfredii dies circiter notaui, quibus ab an. 1732. vsque ad an. 1750. tum coniunctiones Veneris et Solis inferiores, tum elongationes Veneris a Sole = 40°. ante vel poſt coniunctiones iſtas reſpectiue contigerunt, vnde ſequens emerſit tabula.

Elongatio ♀ris a ☉le = 40° orientem verſus reſpectu Solis horis pomeridianis conſpicua.	Coniunctio inferior Veneris et Solis.	Elongatio ♀ris a ☉le = 40° reſpectu Solis occidentem verſus horis matutinis conſpicua.
Iulii. 16. an. 1732.	- an. 1732. Auguſt. 23. -	• Septembr. 30. an. 1732.
• Febr. 27. - 1734.	- - 1734. April. 3. -	Maji 11. - 1734.
Sept. 28. - 1735.	- - 1735. Nov. 5. -	Decembr. 12. - 1735.
Maji. 6. - 1737.	- - 1737. Iunii. 12. -	Iulii. 20. - 1737.

Dec.

Dec.	14.	- 1738. - -	1739.	Ianuar.	18. -		Febr.	25. -	1739.
Iulii.	14.	- 1740. - -	1740.	Auguſt.	21. -	*	Sept.	29. -	1740.
* Febr.	24.	- 1742. - -	1742.	April.	1. -		Maji.	8. -	1742.
Sept.	26.	- 1743. - -	1743.	Nov.	2. -		Decembr.	9. -	1743.
Maji.	4.	- 1745. - -	1745.	Iunii.	10. -		Iulii.	18. -	1745.
Dec.	12.	- 1746. - -	1747.	Ianuar.	16. -		Febr.	22. -	1747.
Iulii.	12.	- 1748. - -	1748.	Auguſt.	19. -	*	Sept.	25. -	1748.
* Febr.	22.	- 1750. - -	1750.	Mart.	29. -		Maji.	6. -	1750.

Statim haec tabula patefacit, annis 1734, 1742, 1750, criteria compet re, quae apparitioni Veneris horis pomeridianis fauen; annos autem 1732, 1740, 1748, notas continere commodum Veneris adſpectum horis matutinis indicantes; quam ob rem praedictos annos ſtellula (*) reliquis diſtinxi. Caſum poſteriorem confirmat obſeruatio noſtra, quae huic diſquiſitioni anſam dedit, conſpectus ſcilicet Veneris interdiu diebus 13, 14, 18, Octobr. 1748; eique adſtipulatur obſeruatio a me Lipſiae an. 1732, ideoque ante octennium bis elapſum habita, quam in Diario meo conſignatam reperio his verbis: „d. 24. Octobr. (ſcil. an. 1732.) hora 9. „matut. coelo ſereno ſoleque ſplendente Venerem oculis „nudis obſeruaui. D. 25. Octobr. poſt horam ſeptimam „matutinam eandem tam oculis non armatis, quam ar„matis contemplatus ſum. Plebs portentoſam hanc ha„buit ſtellam.„ Hoc pacto reditum huius phaenomeni circa finem Septembris vel menſe Octobri an. 1756. et ſic deinceps ſingulis octenniis praedicere licebit. Coronidis loco monendum eſſe duco, viſus praeſtantiam in hoc negotio attendi quoque debere. Pone enim obſeruatorem inſigni oculorum acie pollentem, pone exercitatum et ad videndam interdiu Venerem praeparatum, lar-

 gior,

gior, accedente maxima coeli ſerenitate, iſtum forſan deprehenſurum eſſe Venerem interdiu in elongatione a Sole circiter $= 40^{\circ}$ circa ☌ ♀ ☉ infer., etiamſi ſitus Eclipticae reſpectu horizontis non prorſus faueat; et quidem eo facilius, quo propius Eclipticae poſitio reſpectu horizontis ad caſum noſtrum appropinquat; cuiusmodi, verbi cauſa, conditio in praecedenti tabula pro apparitione Veneris horis matutinis locum habere potuit menſe Iulio, tum an. 1737, tum an. 1745. Aſt circumſtantia haec diſquiſitionem noſtram non euertit; phaenomeni enim in ſenſus cuiusuis modo euidentiori ſponte incurrentis rationem reddere, et obſeruationibus corroborare allaborauimus.

Obſeruationes Meteorologicae an. 1748.

Thermometrum idem adhibui, quod in precedentium annorum obſeruationibus deſcripſi. Per integrum fere Martium frigus in his terris ſatis notabile regnauit, et Thermometrum d. 7. Mart. poſt hor. 7. matutinam oſtendebat $176\frac{1}{2}$ grad.

Circa finem Iunii vsque ad medium Iulii aeſtum maxime extraordinarium, praeſertim d. 12. et 13. Iulii experti ſumus. D. 13. Iulii horis pomeridianis Thermotrum in loco vmbroſo boream verſus libero aëri expoſitum, leni ſpirante Euro (ſecundum *Vitruuii nomenclaturam*, nobis Süd-Ost-Wind) ſequentes notabat gradus diuiſionis conſuetae

	grad. Therm.		grad. Therm.
hor. 3. 5′,	— $100.\frac{1}{4}$	hor. 4. 1′.	— $100,\frac{1}{4}$
— 30,	— $99.\frac{1}{2}$	— 22.	— $100,\frac{7}{8}$
— 43,	— $99.\frac{5}{6}$	— 45.	— $101,\frac{1}{8}$

Coelum

Coelum, quod horis antemeridianis faciem serenam mentiebatur, et cuius fauore Mercurius in Thermometro Soli libere exposito vsque ad gradum 76. extendebatur, statim post meridiem vaporibus copiosis impraegnatum fuit. Tonitrua quoque non nulla versus hor. 6. pomerid. audita fuerunt. Tantum aestum $99\frac{1}{2}$ grad. Thermom. respondentem neque Petroburgi, neque hic loci vnquam expertus sum. Illum enim, qui an. 1738. d. 14. Iulii st. n. Petropoli per 103. grad. signatus est, gradibus $4\frac{1}{2}$ excedit obseruatus.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE

Eclipſium ſatellitum Iouis durante expeditione Kamtzatkienſi in diuerſis Sybiriae locis habitae a Centur. Vicario *ANDREA KRASILNIKOW.*

Referente ex mandato Illustriſſimi Academiae Praeſidis Adiuncto NIC. POPOW.

Notanda circa has obſeruationes.

Obſeruationes, quae ſequuntur, non prorſus omnes exactae ſunt, ad eas namque inſtituendas obſeruator aliquando vnico tantum horologio vſus eſt, quod non raro ceſſabat in motu ſuo, eo ipſo tempore, quo motu eius ad tempus verum obſeruationis habitae definiendum opus erat; accedit, quod nebuloſae tempeſtates per aliquot dies durantes obſeruatorem de motu eius certum fieri non ſinebant, adeo vt tempus verum obſeruationum in illis caſibus habitarum rite determinari non potuerit. Quibus itaque temporibus hoc factum eſt, in ſequentibus indicatur aſteriſco * in margine poſito. Poſteaquam autem d. obſeruator alterum horologium a Cl. Profeſſore de *la Kroerio* ſibi traditum accepit, de tempore vero obſeruationum a ſe habitarum certior ſemper, quam prius, comparando ſe: motum eorum cum motu Solis, fieri potuit. Caeterum a 29. Martii anni 1736. ad 1*mum* Febr. 1742. idem vſus eſt in obſeruationibus ſuis tubo 14 pedes Anglicanos longo, ab illo autem tempore ad finem vſque expeditionis obſeruauit ſatellites tubo 15. pedes itidem Anglicanos longo.

ECLIPSES

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS OBSERVATAE
In Ilginskoy ostrog.

St: veteri Anno, Menſe	tempore vero dic. hor. min′. min″.	
1736. Mart.	29, 16 14 53	Immerſio 1*mi* obſeruatio bona.
— — Maio	7, 14 44 34	Immerſio 1*mi*. Iupiter ob nebulam tenuem eundem cingentem coloratus apparebat. *In Kiringinskoy ostrog.*
— — Iulio	8, 13 20 5	Immerſio 1*mi*. Iouem circumdabant vapores tenues, ſatellesque in vicinia eiusdem vmbram ingrediebatur, quapropter obſeruatio haec aliqua ex parte dubia eſt.
	10, 11 18 36	Immerſio 2*di*. Coelo tranquillo et ſereno. *In Pago Witimsk.*
— — Auguſto	4, 11 43 4	Emerſio 2*di*. Coelo quidem ſereno, ſed Iupiter male terminatus apparebat, et ſatelles in vicinia eiusdem ex vmbra eggrediebatur,

St: veteri Anno, Mense	tempore vero die. hor. min′. min″.	
		tur, quare obseruatio haec pro dubia reputanda est.
		In Olsokminskoy ostrog.
1736. Sept.	3, 7 52 32	Emersio 1*mi*. Obseruatio bona.
		In Vrbe Jakuzk.
*1737. Nov.	16, 7 13 0	Emersio 1*mi*. Iupiter propter vapores coloratus apparebat.
— — *	26, 8 15 55	Immersio 3*tii*. Dubia ob coelum tenuibus nubibus consperfum.
— — * Dec.	18, 3 38 40	Emersio 1*mi*. Iouem cingebat nebula tenuis crepusculo lucente; quare obseruatio haec dubia est intra aliquot minuta secunda.
1738. Febr.	9, 5 36 46	Emersio 1*mi*. Iupiter propter vapores eundem circumdantes coloratus apparebat, lucente crepusculo, quare obseruatio haec aliquantisper dubia est.
— — Iulio	25, 12 49 9	Immersio 1*mi*. Iupiter male terminatus

St: veteri Anno, Menſe	tempore vero die. hor. min′. min″.	
		tus apparebat, Luna in vicinia eiusdem lucente.
1738. Aug.	6, 14 27 3	Immerſio 2*di*. Coelo ſereno obſeruatio bona.
	31, 11 44 32	Immerſio 2*di*. Obſeruatio bona.
	16 54 0	Immerſio 1*mi*. Hanc obſeruationem lux crepuſculi impediebat, quare eadem aliquantisper dubia eſt.
— — Sept.	7, 14 24 13	Immerſio 2*di*. Obſeruatio bona.
	30, 13 42 48	Immerſio 3*tii*. Coelo quidem ſereno, ſed ſatelles in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur.
		In vrbe Jakuzk.
— — * Oct.	2, 11 42 30	Immerſio 2*di*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, nihilominus tamen obſeruatio dubia propter nimiam viciniam ſatellitis Ioui.
— — *	2, 13 37 24	Immerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, ſed propter nimiam

St: veteri Anno, Mense	Tempore vero die. hor. min'. min''.	
1738. Octb.		nimiam Ioui viciniam satellitis obseruatio haec aliquantisper dubia est.
	13, 6 16 2	Emersio 2*di* Iupiter tenui nebula inuoluebatur, et male terminatus apparebat parum supra horizontem eleuatus.
	6 41 6	Emersio 1*mi*. Coelo quidem sereno, sed propter nimiam Ioui viciniam satellitis aliquantisper dubia.
	27, 10 29 24	Emersio 1*mi* exacta.
	11 32 33	Emersio 2*di*. Itidem exacta.
— - Nov.	5, 6 52 0	Emersio 1*mi*. Coelo sereno et tranquillo.
	12, 8 44 47	Emersio 1*mi*. Coelum quidem serenitatem mentiebatur, sed Iupiter male terminatus apparebat, praeterea accedebat splendor Lunae vicinae, quare obseruatio haec dubia est.

Emersio

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die hor. min′. min″.	
1738. Nov.	14, 6 5 33	Emerſio 1*mi*. Hanc obſeruationem fumus impediebat, quo Iupiter ſaepenumero tegebatur.
	19, 10 37 54	Emerſio 1*mi* exacta.
	26, 12 30 4	Emerſio 1*mi*. Dubia ob tenuem nebulam Iouem cingentem.
	28, 6 58 52	Emerſio 1*mi*. Hanc obſeruationem ventus tubum vacillando impediebat.
— — Dec.	5, 8 50 23	Emerſio 1*mi*. Iupiter non prorſus bene terminatus apparebat.
	14, 5 10 18	Emerſio 1*mi*. Coelo ſereno et tranquillo.
	18, 9 49 43	Immerſio 3*tii*. Coelo denſis vaporibus repleto, Iouecque male terminato apparente, quare obſeruatio haec aliquantiſper dubia eſt.
	21, 7 2 4	Emerſio 1*mi*.

 Coelo

St : veteri Anno Mens.	tempore vero die hor. min'. min''.			
				Coelo sereno et tranquillo.
1739. Ian	6,	5	15	42	Emersio 1*mi*.
				Coelum quidem serenum erat, sed Iupiter propter vapores coloratus apparebat.
	13,	7	9	0	Emersio 1*mi* exacta.
	23,	5	48	3	Immersio 3*tii*.
				Coelo non prorsus sereno et Ioue propter vapores eundem circumdantes male terminato apparente, quare obseruatio haec pro dubia habenda est.
	29,	5	27	23	Emersio 1*mi*.
				Obseruatio bona.
				In Boischerezkoy ostrog.
— — Nov.	12,	16	31	41	Immersio 3*tii*.
				Coelo non prorsus sereno, et Ioue male terminato apparente.
— — Dec.	3,	13	20	5	Immersio 1*mi* exacta, Iupiter tamen non nihil coloratus apparebat.
	6,	16	56	6	Immersio 2*di*.
				Coelo quidem sereno sed

St: veteri Anno, Mense.	tempore vero die hor. min'. min''.	
		ed obseruationem ventus impediebat, et satelles in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur.
1739. Dec.	10, 15 9 14	Immersio 1*mi.* Hanc obseruationem ventus tubum vacillando impediebat, et satelles in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur, quare eadem pro dubia haberi debet.
	11, 8 16 32	Immersio 3*tii.* Coelo sereno et tranquillo, obseruatio bona.
	12, 9 38 3	Immersio 1*mi.* Dubia aliquantisper ob viciniam satellitis Ioui.
	28, 10 2 15	Emersio 1*mi.* Coelum erat tenuissimis nubeculis conspersum, et Iupiter coloratus apparebat.
		In vrbe Portus Petri et Pauli dicta.
1741. Ian.	23, 8 5 36	Immersio 3*tii.* Hanc obseruationem ventus impediebat et

 Iupiter

St : veteri Anno, Menſe	tempore vero die	hor.	min′.	min″.	
					Iupiter ob vapores coloratus apparebat.
1741. Ian.	23,	11	7	22	Emerſio 3*tii*. Iupiter ob vapores coloratus conſpiciebatur.
	25,	13	44	26	Emerſio 2*di* exacta.
	27,	12	9	25	Emerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno ſed ♃ vaporibus erat inuolutus et male terminatus conſpiciebatur, quare obſeruatio haec dubia aliquantiſper eſt.
	29,	6	38	13	Emerſio 1*mi*. Vento tubum multum vacillante.
	30,	12	5	30	Immerſio 3*tii*. Coelum erat vaporibus repletum et Iupiter male terminatus apparebat.
— — Febr.	5,	8	33	26	Emerſio 1*mi* exacta.
	12,	8	20	53	Emerſio 2*di* exacta. Non obſtante tubi vacillatione a vento.
		10	28	49	Emerſio 1*mi*. Ventus tubum non nihil vacillabat.

In

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die hor. min′. min″.	
		In Bolſcherezkoy oſtrog.
1741 *Mart.	23, 9 3 56	Emerſio 1*mi*. Coelo hinc inde tenuibus nubeculis conſperſo.
	10 55 2	Emerſio 2*di*. Coelum erat tenuibus nubeculis cunſperſum et Iupiter male terminatus apparebat, quare obſeruatio haec dubia eſt.
— — Sept.	5, 15 47 16	Immerſio 1*mi*. Iupiter ob vapores male terminatus apparebat.
— — *Octob.	15, 15 27 36	Emerſio 3*tii*. Ob nebulam ſpiſſiuſculam aliquantiſper dubia.
	23, 14 17 23	Immerſio 4*ti*. Iupiter ob vapores coloratus apparebat.
— — Nov.	15, 10 51 33	Immerſio 1*mi*. Iupiter ſupra horizontem parum erat eleuatus et male terminatus conſpiciebatur, quare obſeruatio haec dubia aliquantiſper eſt.
	16, 11 5 11	Immerſio 2*di*. Luna in vicinia. Iouis lucente.
	27, 11 40 3	Immerſio 3*tii* exacta.

 Emerſio

St : veteri Anno. Menſe.	tempore vero die hor	min′.	min″.	
1741. Nov.	27 , 15	10	59	Emerſio 3*tii*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, nihilominus tamen obſeruatio haec ob viciniam ſatellitis Ioui dubia eſt.
— — Dec.	29 , 13	46	42	Immerſio 4*ti*. Obſernationem ventus tubum vacillando impediebat, quare eadem pro dubia reputanda eſt.
	31 , 10	51	58	Immerſio 1*mi* exacta.
1742. Ian.	5 , 18	15	38	Immerſio 1*mi* Iupiter vaporibus erat circumdatus, et male terminatus apparebat, ſatellesque in vicinia Iovis vmbram ingrediebatur, quare obſeruatio haec pro dubia reputabatur.
	7 , 12	43	37	Immerſio 1*mi*. Coelum hinc inde tenuibus nubeculis conſperſum erat, et ſatelles in vicinia Iouis vmbram ingrediebatur. *Ab hinc vſus eſt obſervator tubo 15½ pedes Anglicanos longo.*

Emerſio

St : veteri Anno, Menſe.	Tempore vero die	hor.	min'.	min''.	
1742. Febr.	1,	6	20	49	Emerſio *4ti* exacta.
	10,	5	59	47	Emerſio *1mi* exacta.
	22,	15	23	15	Emerſio *1mi*. Dubia aliquantiſper ob Iouem a vaporibus male terminatum.
— — April.	27,	8	51	33	Emerſio *1mi*. Obſeruatio bona.
					In Portu Ochozk.
— — Nov.	2,	14	45	34	Immerſio *1mi*. Coelo quidem ſereno, ſed ob paruam eleuationem Iouis ſupra horizontem et ſplendorem Lunae obſeruatio haec aliquantiſper dubia eſt.
	9,	16	38	14	Immerſio *1mi*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, ſed ſplendor Lunae obſeruationem non nihil impediebat.
	12,	19	6	38	Immerſio *4ti*. Coelo quidem ſereno, ſed motus valde tardus ſatellitis obſeruationem circa aliquot ſecunda incertam reddidit.
	13,	13	50	43	Immerſio *3tii*. Iupiter parum ſupra horizon-

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die hor. min′. min″.	
		rizontem eleuatus erat, coloratusque apparebat, quare obſeruatio haec dubia aliquantiſper eſt.
1742. Nov.	13, 17 19 37	Emerſio 3*tii*. Coelo ſereno ſed Iupiter interdum male terminatus apparebat.
	29, 17 20 20	Emerſio 4*ti*. Aër erat turbidus, Iupiterque male terminatus conſpiciebatur, et praeterea ventus tubum vacillabat, quare obſeruatio haec non prorſus exacta eſt.
— — Dec.	1, 16 50 22	Immerſio 2*di*. Coelum erat nubibus tenuiſſimis conſperſum, et Iupiter male terminatus apparebat.
	2, 16 37 12	Immerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno, ſed vapores a ſuperficie maris aſcendentes Iouem male terminatum, et obſeruationem dubiam effecerunt.
	8, 19 20 5	Immerſio 2*di*. Eam ventus tubum vacillan-

St: veteri Anno, Menfe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
		cillando impediebat.
1742. Dec.	9, 18 26 11	Immerfio 1*mi*. Coelum tenuibus nubibus hinc inde et in loco etiam ♃ confperfum erat, quare obferuatio haec intra aliquot fecunda dubia eft.
	11, 12 54 46	Immerfio 1*mi*. Iupiter ob vapores a mari afcendentes male terminatus apparebat, quare obferuatio haec aliquantifper dubia eft.
	16, 11 10 53	Emerfio 4*ti*. Coelo quidem fereno, fed Iupiter parum fupra horizontem erat eleuatus, et ob vapores male terminatus apparebat, quare obferuatio haec dubia eft.
	20 17 23	Immerfio 1*mi*. Hanc obferuationem fplendor crepufculi impediebat.
	18, 14 44 59	Immerfio 1*mi*. Iupiter a vaporibus coloratus apparebat.
	25, 16 35 27	Immerfio 1*mi*.

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor.	min′.	min″.	
				Coelo tranquillo et ſereno.
1742. Dec.	26, 13	19	33	Immerſio 3*tii* exacta.
	13	33	49	Immerſio 2*di* exacta.
	16	44	46	Emerſio 3*tii* exacta.
	27, 11	2	55	Immerſio 1*mi*.
				Iupiter a vaporibus male terminatus apparebat parum ſupra horizontem eleuatus, quare obſeruatio haec dubia eſt circa aliquot ſecunda.
1743. Ian.	3, 12	54	5	Immerſio 1*mi*.
				Coelo ſereno, ſed Luna Iouem aliquantiſper illuſtrante.
	10, 14	45	15	Immerſio 1*mi*.
				Dubia non nihil ob Iouem male terminatum.
	17, 16	37	8	Immerſio 1*mi*.
				Ioue male terminato.
	19, 11	5	25	Immerſio 1*mi* exacta.
	20, 10	21	34	Immerſio 2*di* exacta.
	24, 18	29	48	Immerſio 1*mi* exacta.
	26, 12	58	50	Immerſio 1*mi*.
				Coelo tranquillo et ſereno.
—— Febr.	3, 15	27	19	Immerſio 2*di*.
				Coelo ſereno ſed vento tubum non nihil vacillante.

Immer-

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero dic, hor.	min′	min″.	
1743. Febr.	4, 9	21	0	Immerſio 1*mi.* Coelo ſereno.
	7, 12	58	58	Immerſio 3*tii.* Coelo ſereno et tranquillo.
	11, 11	15	43	Immerſio 1*mi.* Coelo ſereno et tranquillo, ſed ſatelles in vicinia ♃ vmbram ingrediebatur.
	20, 9	55	43	Emerſio 1*mi.* Dubia aliquantiſper ob viciniam ſatellitis Ioui.
*	27, 11	51	14	Emerſio 1*mi.* Coelo tenuibus nubeculis conſperſo, et Luna ſplendente, quare obſeruatio haec pro dubia non nihil habenda eſt.
— — April.	7, 10	20	17	Emerſio 1*mi.* Coelo tranquillo et ſereno.
	29, 10	15	54	Emerſio 4*ti* exacta.
	30, 10	36	4	Emerſio 1*mi* exacta.
— — Maio.	7, 12	31	7	Emerſio 1*mi.* Coelo quidem ſereno et tranquillo, ſed Iupiter male terminatus apparebat parum ſupra horizontem eleuatus, quare

Mmm 2

St: veteri Anno, Menfe.	tempore vero die, hor.	min'.	min".	
				re obferuatio haec aliquantifper dubia eft.
				In vrbe Iakuzk.
1743 *Dec.	5, 11	36	57	Immerfio 1*mi*. Coelo quidem fereno, fed in regione Iouis tenuis nebula confpiciebatur.
1744. *Ian.	24, 14	56	26	Immerfio 3*tii*. Coelo fereno, fed Iupiter interdum male terminatus apparebat.
	17	43	44	Immerfio 3*tii*. Iupiter interdum a vaporibus valde coloratus apparebat, adeo vt colores ad fatellitem vsque pertingebant, quare obferuatio haec dubia eft.
- - Febr.	7, 11	18	35	Immerfio 1*mi*. Coelo quidem fereno, fed Iupiter ob vapores non nihil deformis apparebat, quare haec obferuatio pro dubia aliquantifper reputabatur.
	22, 10	31	11	Immerfio 2*di* exacta.
	29, 10	50	51	Immerfio 3*tii* exacta.
	13	6	54	Immerfio 2*di* exacta.
- - Martio.	1, 11	33	0	Immerfio 1*mi* exacta.

Emerfio

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1744 *Mart.	26, 8 32 22	Emerſio 1*mi*. Dubia ob ventum et aërem turbidum.
- - * April.	5, 9 24 11	Emerſio 3*tii*. Coelo quidem ſereno, ſed Iouem cingebat nebula tenuis, quare obſeruatio haec dubia aliquantiſper viſa eſt.
	9, 12 23 58	Emerſio 1*mi*. Coelo tranquillo et ſereno.
	18, 8 49 15	Emerſio 1*mi*. Coelo quidem ſereno et tranquillo, ſed ſplendor crepuſculi obſeruationem dubiam aliquantiſper reddidit.
*	25, 10 44 57	Emerſio 1*mi* exacta.
		In vrbe Ieniſeysk.
- - * Dec.	30, 18 56 13	Immerſio 1*mi*. Fumus ab aedificiis aſcendens hanc obſeruationem dubiam reddidit circa aliquot ſecunda.
1745 * Ian	10, 17 58 14	Immerſio 2*di*. Dubia ob Coelum multis tenuibus nubeculis conſperſum.
	15, 17 5 50	Immerſio 1*mi* exacta.

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1745. Ian.	31, 15 18 55	Immerſio 1*mi* exacta.
– – Febr.	4, 14 57 46	Immerſio 2*di*. Coelo tranquillo et ſereno.
	7, 17 12 7	Immerſio 1*mi*. Coelo quidem ſerenitatem mentiente, ſed in regione Iouis tenuiſſima nebula haerebat, quae et Iouem deformem et obſeruationem dubiam aliquantiſper reddidit.
		In vrbe Tomsk.
*	23, 15 2 17	Immerſio 1*mi*. Coelo ſereno ſed Ioue male terminato, quare obſeruatio haec dubia aliquantulum eſt.
– – * April.	2, 11 13 30	Immerſio 2*di*. Aër turbidus Iouem deformem reddebat, et ſatellitem interdum prorſus ex oculis eripiebat, quare obſeruatio haec dubia eſt.
	5, 14 40 6	Immerſio 3*tii* exacta.
	9, 13 49 8	Immerſio 2*di*. Dubia ob aërem vaporibus a ſuperficie Terrae aſcen-

St: veteri Anno, Mense.	tempore vero die, hor.	min′.	min″.	
				ascendentibus repletum.
1745 April.	10, 15	31	37	Immersio 1*mi*. Dubia ob paruam elevationem Iouis supra horizontem Iouemque ob vapores male terminatum.
	12, 10	2	12	Immersio 1*mi*. Coelo sereno et tranquillo, sed ipsum momentum immersionis ob viciniam satellitis Ioui difficile erat determinatu.
	27, 10	36	36	Emersio 2*di*. Dubia aliquantinsper ob vapores, qui Iouem parum deformem reddiderunt.
	28, 10	29	36	Emersio 1*mi*. Iupiter coloratus apparebat in hac obseruatione.
- - * Maio.	4, 13	6	13	Emersio 2*di* exacta.
	29, 10	2	25	Emersio 2*di* exacta.
				In Castello Iamyschewsk.
- - Iun.	29, 8	36	51	Emersio 1*mi*. Coelo quidem sereno et tranquillo, sed splendor cre-

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′ min″.	
		crepuſculi obſeruationem impediebat, quare eadem pro dubia non nihil habenda eſt.
1745. Iunio.	30, 9 1 30	Emerſio 2*di*. Obſeruatio bona.

Comparatis praemiſſis obſeruationibus Eclipſium 1*mi* ſatellitis Iouis cum ſimilibus obſeruationibus eiusdem Petropoli habitis per vnam tamen vel duas aut etiam tres reuolutiones differentibus, quippe quas eodem tempore ob nimiam diſtantiam locorum Sybiriae a Petroburgo inſtituere non licuit, differentiae meridianorum ſequentium Sybiriae locorum deductae ſunt. Idque modo ſequenti, ſc:

1mo Kiringinskoy oſtrog a Petroburgo.
$5^h\ 10'\ 51''$

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1736. Iulio.	6, 13 40 43	Immerſio 1*mi* Petropoli obſeruata, coelo ſereno, tubo 15 pedes Pariſinos longo.
	1, 18 28 34	Reuolutio 1*mi* ex tabulis.
	8, 8 9 17	Immerſio 1*mi* Petropoli obſeruanda.
	8, 13 20 5	Eadem Immerſio in Kirin-

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min'. min''.	
1736. Iul.		ginskoy oſtrog obſeruata tubo 14 pedes Anglicanos longo dubia aliquantiſper ob aërem turbidum viciniamque ſatellitis Ioui.
	5 10 48	Differentia meridianorum Kiringinskoy oſtrog a Petroburgo, ad quam adiici debent 3'' propter incertitudinem obſeruationis in Kiringinskoy oſtrog habitae, et prodibit differentia meridianorum illorum vera $5^h\ 10'\ 51''$.

2do Vrbis Iakuzk a Petroburgo.
$6^h\ 37'\ 24''$

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min'. min''.	
		Obſeruatio 1ma.
1737. Nov.	14, 6 7 35	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruata tubo catadioptrico, dubia circa 15'' propter aërem turbidum.
	1, 18 28 17	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.

St : veteri Anno, Menfe.	tempore vero die, hor. min′. min″.			
1737. Nov.	16 , 0	35	52	Emerfio 1*mi* Petropoli obferuanda.
	16 , 7	13	0	Eadem emerfio in vrbe Iakuzk tubo 14 pedes obferuata.
	6	37	8.	Differentia meridianorum Petropolin inter et Iakuzkum , ad quam additis 15″ propter incertitudinem emerfionis a nebula factam et infuper 8″ ob differentiam tuborum , prodibit differentia meridianorum vera feu correcta 6^h 37′ 31″.
				Obferuatio 2da.
1738. Iulio.	23 , 11	39	45.	Immerfio 1*mi* Petropoli diuerfis tubis obferuata, ex omnibusque media , obftante aliquantifper obferuationi nebula.
	1 , 18	28	50	Reuolutio fatellitis ex tabulis.
	25 , 6	8	35	Immerfio 1*mi.* Petropoli obferuanda.
	25 , 12	46	9	Eadem Immerfio Iakuzki obferuata.
	6	37	34	Differentia meridianorum.

St: veteri Anno, Mense.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
		rum Petropolitani a Iakuzkensi.
		Obseruatio 3tia.
1738. Dec.	19, 5 56 19	Emersio 1*mi* Petropoli obseruata.
	1, 18 28 5	Reuolutio satellitis ex tabulis.
	21, 0 24 24	Emersio 1*mi* Petropoli obseruanda.
	21, 7 2 4	Eadem emersio Iakuzki obseruata.
	6 37 40	Differentia meridianorum Petropolitani a Iakuzkensi.
		Obseruatio 4ta.
1739. Ian.	11, 6 3 15	Emersio 1*mi* Petropoli obseruata.
	1, 18 28 53	Reuolutio satellitis ex tabulis.
	13, 0 32 8	Emersio 1*mi* Petropoli obseruanda.
	13, 7 9 0	Eadem Emersio Iakuzki obseruata.
	6 36 52	Differentia meridianorum inter Petropolin et Iakuzkum. Si autem media ex omnibus quatuor sumatur, prodibit eadem $6^h\ 37'\ 24''$.

3tio

3tio Portus Petri et Pauli a Petroburgo.
$8^h\ 33'\ 0''$.

St: veteri Anno Menſe.	tempore vero die	hor.	min'.	min''.	
1741. Febr	3,	5	31	35	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruata tubo *Neutoniano* 7 pedes longo.
	5,	7	26	23	Tres reuolutiones ſatellitis, ex tabulis.
-- Ianuario	28,	22	5	12	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruanda.
	29,	6	38	13	Eadem Emerſio in Portu Perri et Pauli obſeruata.
		8	33	1	Differentia meridianorum inter Portum Petri et Pauli atque Petroburgum.
					Obſeruatio 2da.
-- Februario.	3,	5	31	35	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruata
	1,	18	28	54	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	5,	0	0	29	Emerſio 1*mi* Petropoli obſeruanda.
	5,	8	33	26	Eadem Emerſio in Portu Petri et Pauli obſeruata.
		8	32	57	Differentia meridianorum inter Portum Petri et

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1741. Febr.		et Pauli atque Petroburgum. Media ex his differentiis erit 8^h $32'$ $59'$ ſeu rotunde 8^h $33'$ $0''$.

4to Borſcherezkoy oſtrog a Petroburgo.
8^h $27'$ $57''$.

St: veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min′. min″.	
1741. Mart.	23, 9 3 56	Emerſio 1*mi* in Bolſcherezkoy oſtrog obſeruata.
	5, 7 30 51	Tres reuolutiones ſatellitis ex tabulis.
	28, 16 34 47	Emerſio 1*mi* in Bolſcherezkoy oſtrog obſeruanda.
	28, 8 6 50	Eadem emerſio Petropoli obſeruata tubo catadioprico 5 pedes longo.
	8 27 57	Differentia meridianorum Bolſcherezkoy oſtrog inter et Petroburgum.

5to Portus Ochozkensis a Petroburgo.
$7^h\ 31'\ 34''$.

St: veteri Anno, Mense.	tempore vero die, hor.	min'.	min''.	
1743. Ian.	15, 14	37	36	Immersio 1*mi* Petroburgi tubo catadioptrico 5 pedes longo obseruata.
	1, 18	28	3	Reuolutio satellitis ex tabulis.
	17, 9	5	39	Immersio eiusdem Petropoli obseruanda.
	17, 16	37	8	Eadem immersio in Portu Ochozk obseruata.
	7	31	29	Differentia meridianorum Ochozkensis a Petropolitano.
				Obseruatio 2da.
– – Ian.	15, 14	37	36	Immersio 1*mi* Petropoli obseruata.
	3, 12	56	11	Duae Reuolutionis satellitis ex tabulis.
	19, 3	33	47	Immersio eiusdem Petropoli obseruanda.
	19, 11	5	25	Eadem immersio in Portu Ochozkensi obseruata.
	7	31	38	Differentia meridianorum Ochozkensis a Petropolitano. Media autem earum est $7^h\ 31'\ 34''$.

6to

6to Iudomskoy kreſt a Petroburgo.
$7^h\ 18'\ 14''$.

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die,	hor.	min'.	min''.	
					Obſeruatio 1ma.
1743. Aprili.	5	8	32	51	Emerſio 1*mi* Petroburgi tubo catadioptrico 5 pedes longo obſeruata.
	1,	18	29	7	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	7,	3	1	58	Emerſio eiusdem Petropoli obſeruanda.
	7,	10	20	15	Eadem emerſio in Iudomskoy kreſt obſeruata.
		7	18	17	Differentia meridianorum Iudomscenſis a Petroburgenſi.
					Obſeruatio 2da.
— — Aprili.	28,	8	49	12	Emerſio 1*mi* Petropoli eodem tubo catadioptrico obſeruata crepuſcolo nimis lucente.
	1,	18	28	47	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	30,	3	17	59	Emerſio eiusdem Petropoli obſeruanda.
	30,	10	36	4	Eadem Emerſio in Iudomskoy Kreſt obſeruata.
		7	18	5	Differentia meridianorum

rum

St : veteri Anno, Menſe.	tempore vero die, hor. min'. min''.	
1743. April.		rum Iudomscenſis a Petrobargenſi, ſubtractis autem ab obſeruatione poſteriori Petropoli habita ob nimium ſplendorem crepuſculi 5''. Media differentia meridianorum illorum ex vtraque deducetur 7^h 18' 14''.

7mo Vrbis Tomsk a Petroburgo.
3^h 38' 38''.

St : veteri Anno, Menſe	tempore vero die, hor. min' min''.	
1745. April.	26 , 12 22 20	Emerſio *1mi* Petropoli tubo catadioptrico 5 pedes longo obſeruata, dubia aliquantiſper ob nimiam ſatellitis viciniam Ioui.
	1 , 18 28 38	Reuolutio ſatellitis ex tabulis.
	28 , 6 50 58	Emerſio eiusdem Petropoli obſeruanda.
	28 , 10 29 36	Eadem emerſio in vrbe Tomsk obſeruata.

Differen-

St: veteri Anno, Mense.	tempore vero die. hor	min'.	min'	
1745. Aprili.	3	38	38	Differentia meridianorum Tomscensis a Petroburgensi, additis autem ad obseruationem Petropoli habitam 5'' ob nimiam viciniam satellitis Ioui prodibit differentia meridianorum ad veram propius accedens 3^h 38' 33''.

FINIS.

Fig. 2

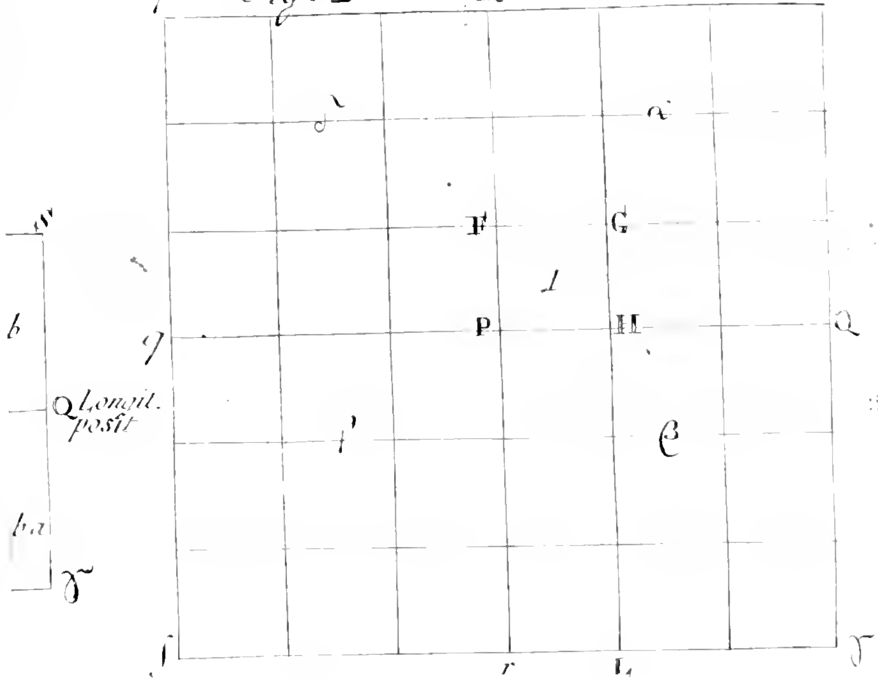


Fig. 4

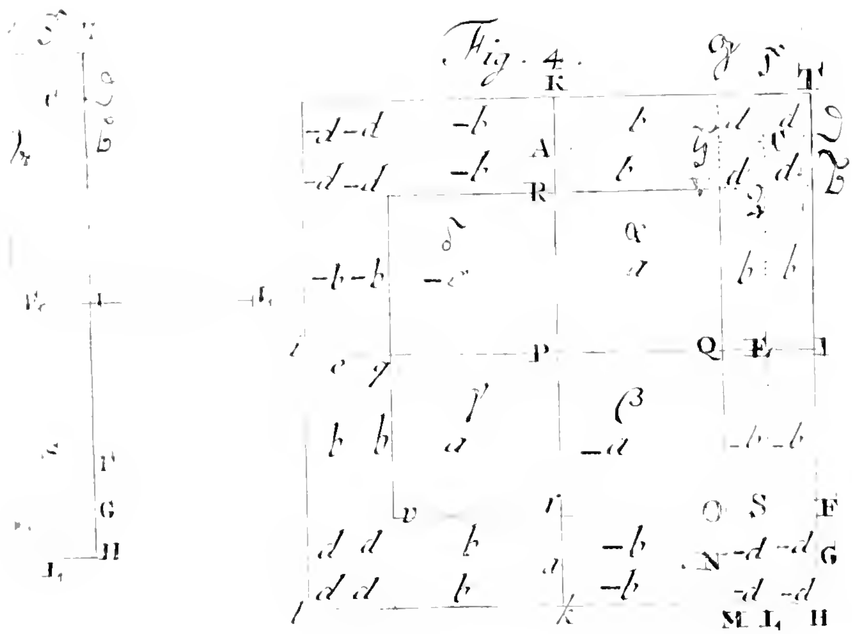


Fig. 1.

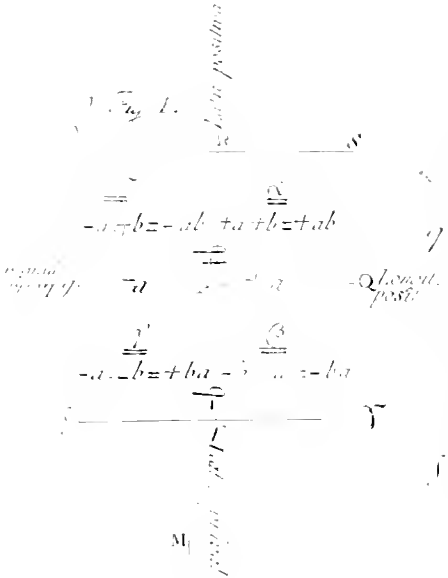


Fig. 2

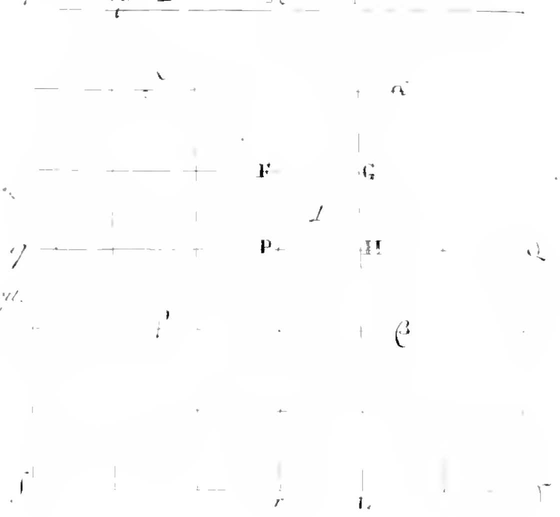


Fig. 3.

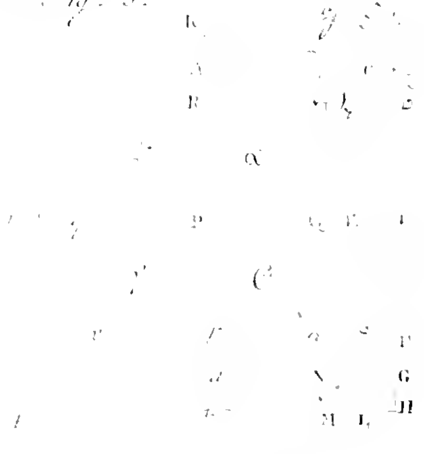
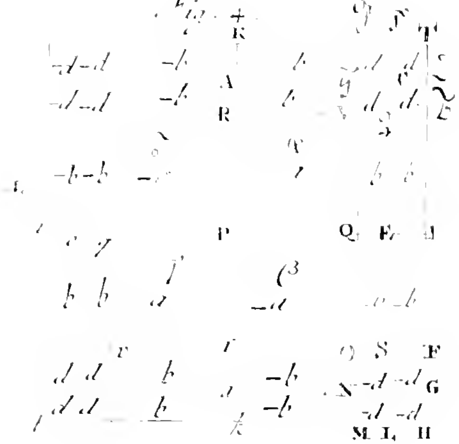


Fig. 4.



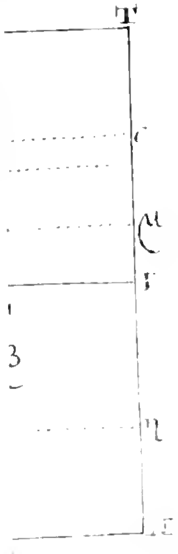
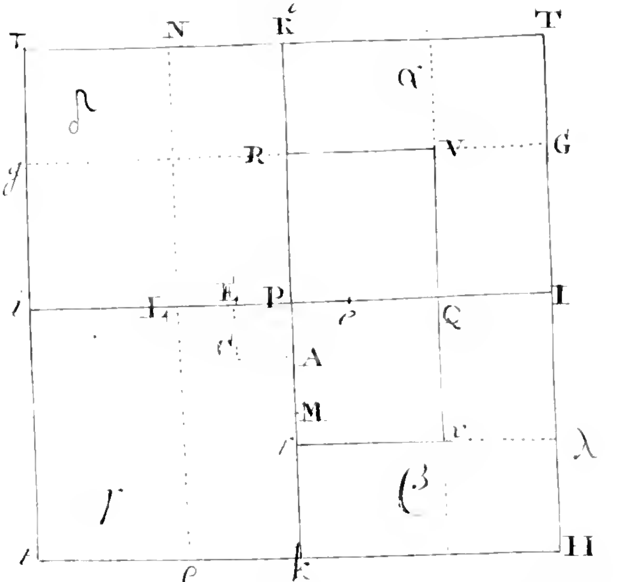

T
C
3
η

Fig. 5.


N
K
T
α
δ
g
R
V
G
E
P
L
Q
I
A
M
λ
β
γ
k
H

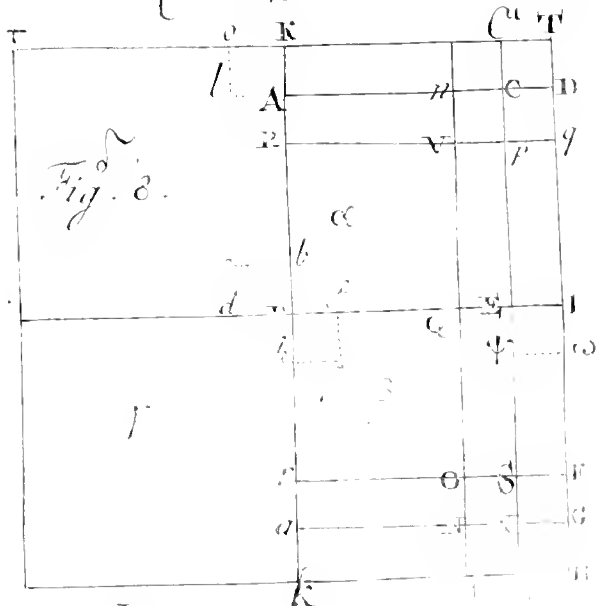

K
T
A
n
C
D
R
V
q
α
b
d
Q
I
ψ
ω
γ
θ
F
a
G
k
H

Fig. 8.

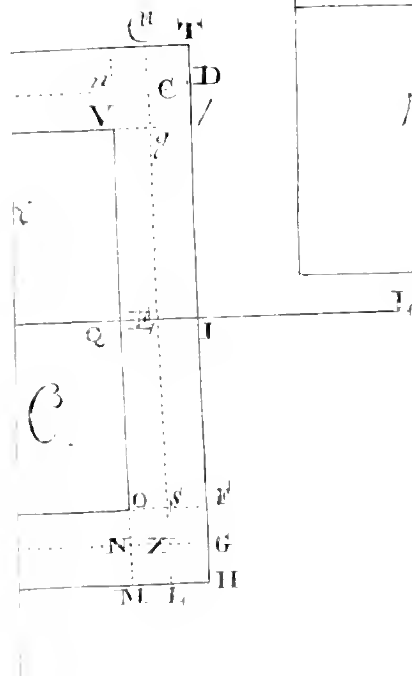

T
D
n
C
V
q
Q
I
L
β
O
F
N
Z
G
M
L
H

Fig. 5.

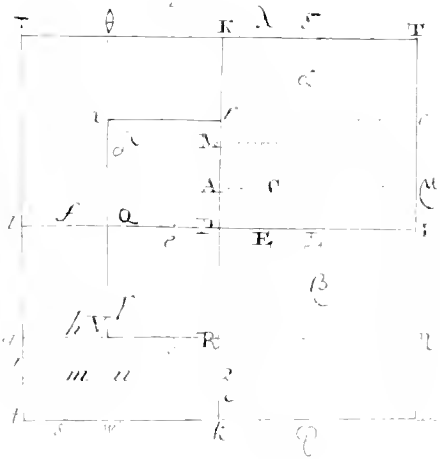


Fig. 6.

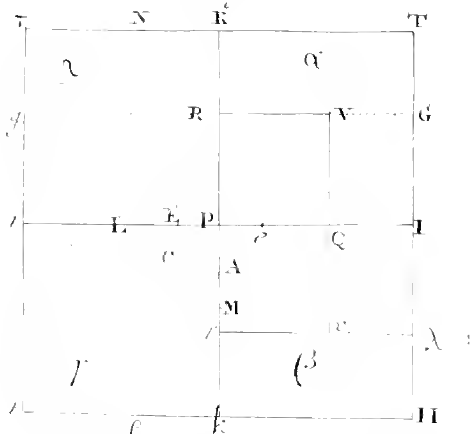


Fig. 8.

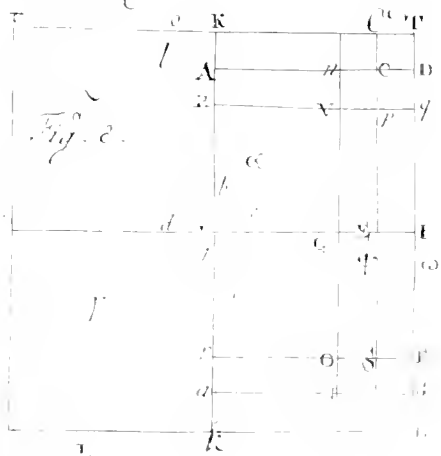
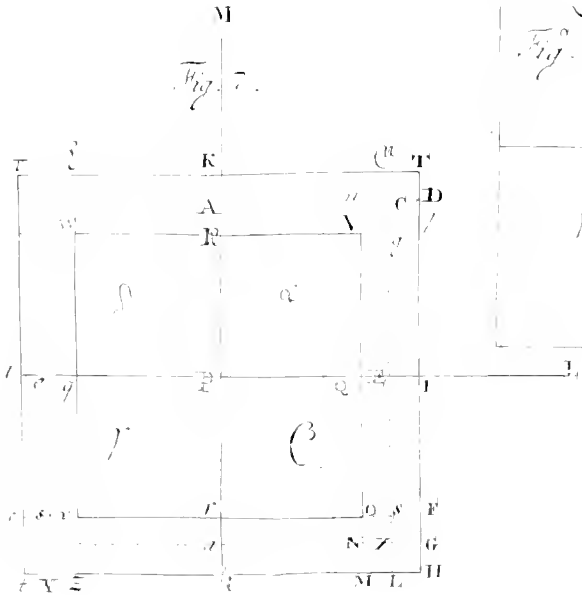


Fig. 7.



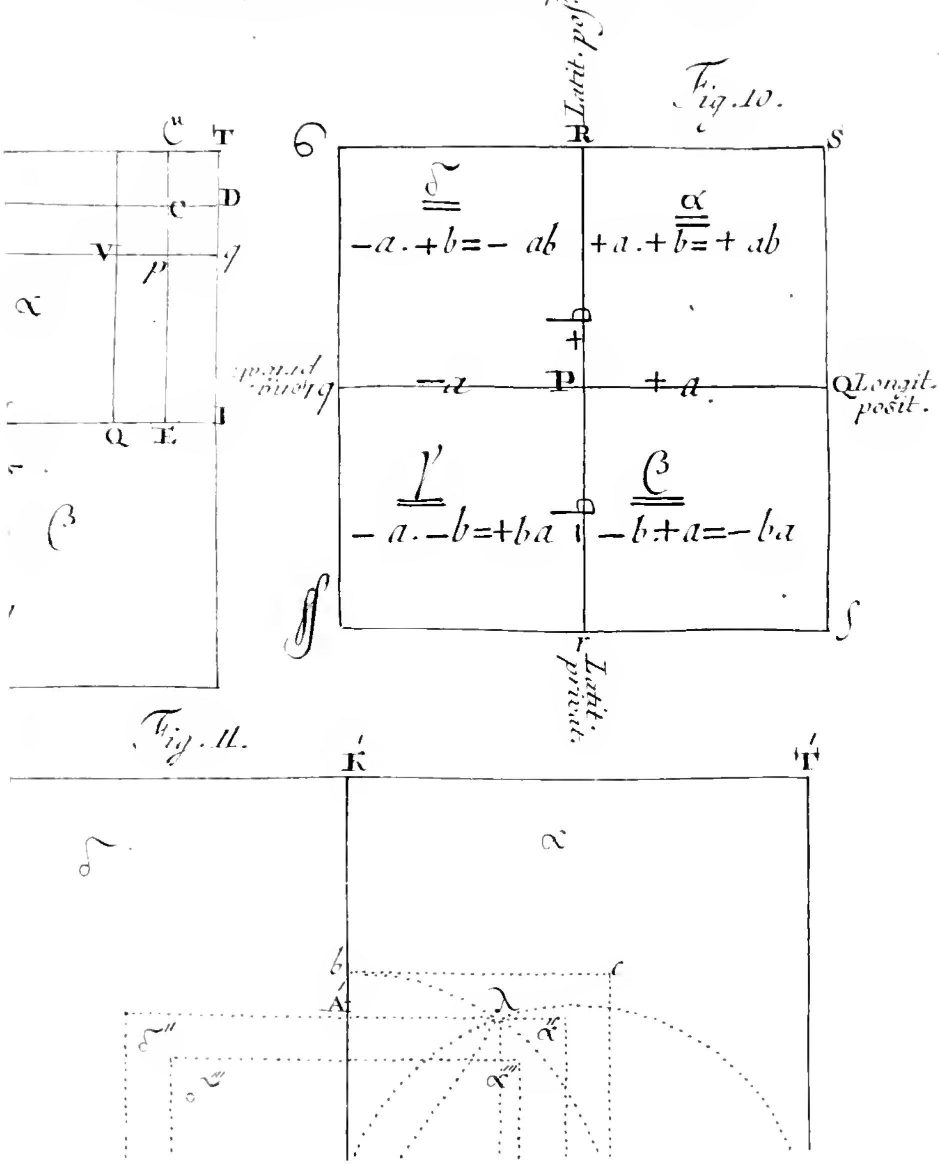


Fig. 10.
Latit. posit.
Latit. privat.
Longit. posit.
Longit. privat.
$-a.+b=-ab$
$+a.+b=+ab$
$-a.-b=+ba$
$-b+a=-ba$
$-a$
$+a$
Fig. 11.

Fig. 9.

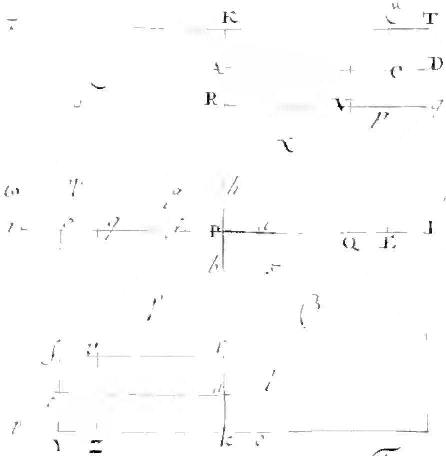


Fig. 10.

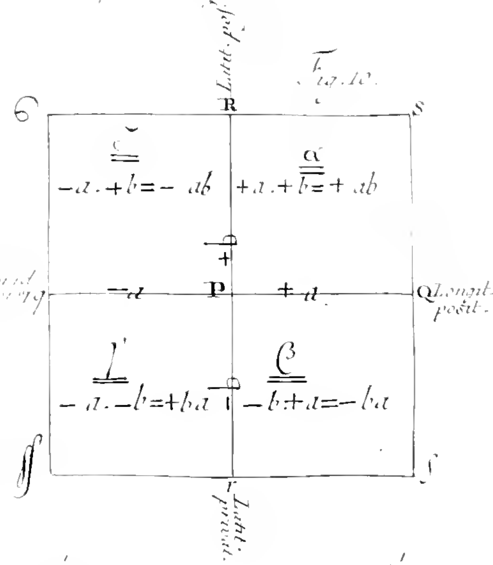
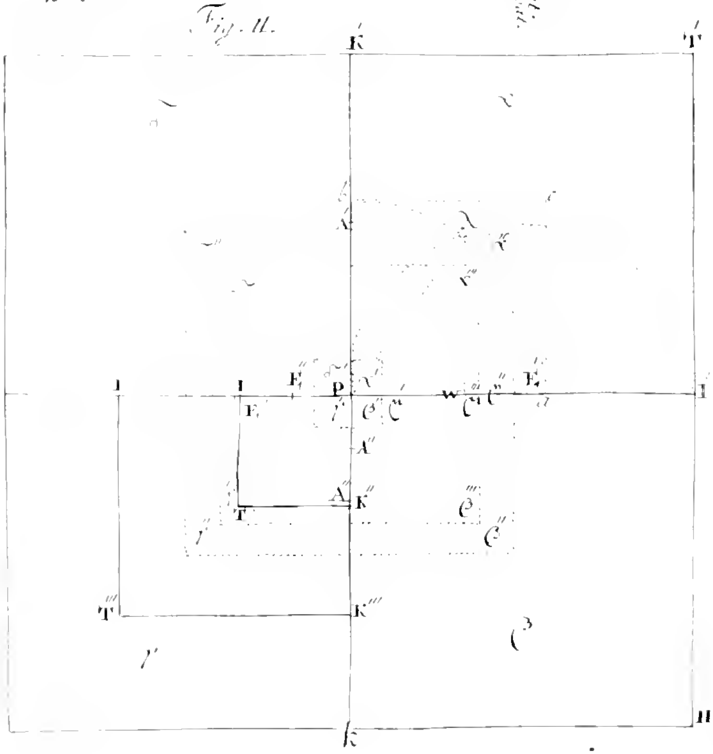


Fig. 11.



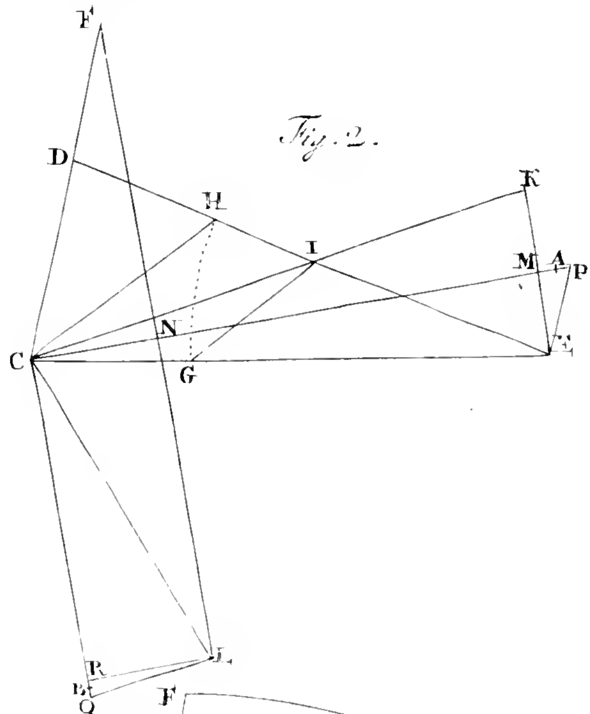
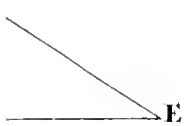


Fig. 2.



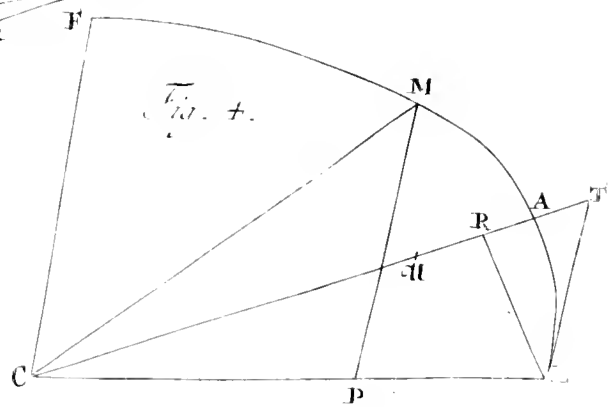


Fig. 4.

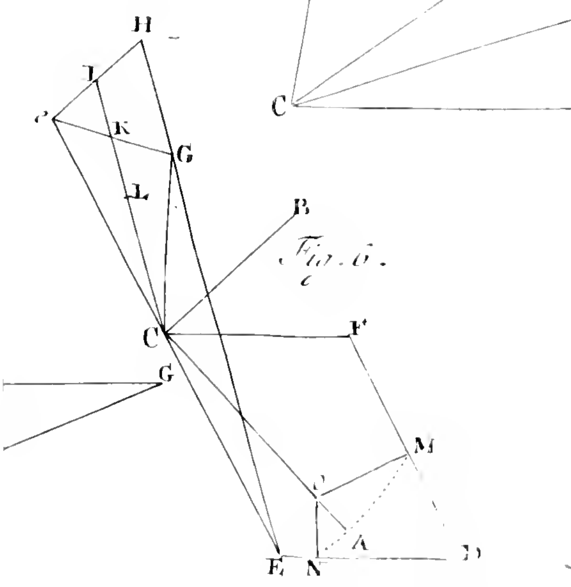


Fig. 6.

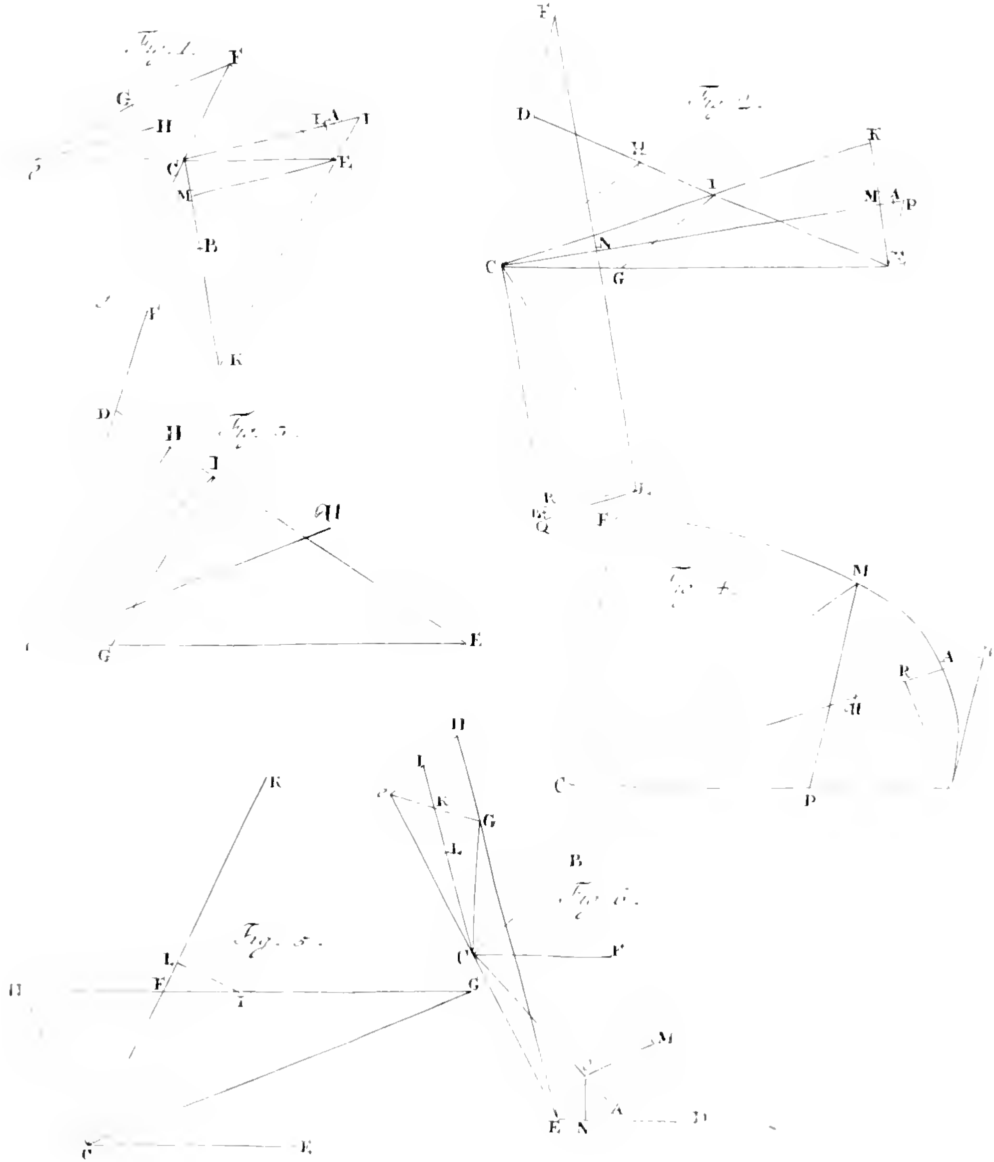


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

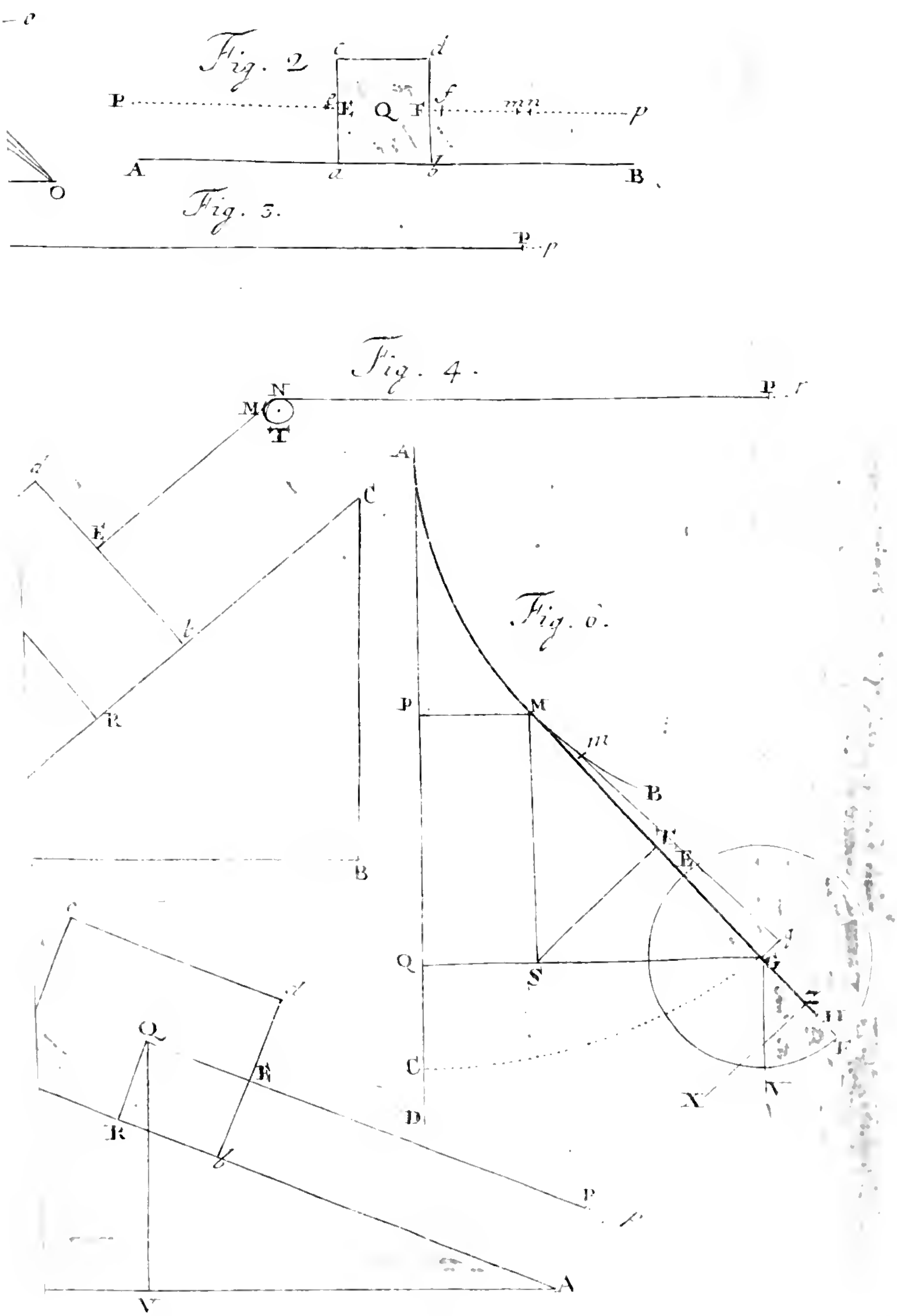


Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 6

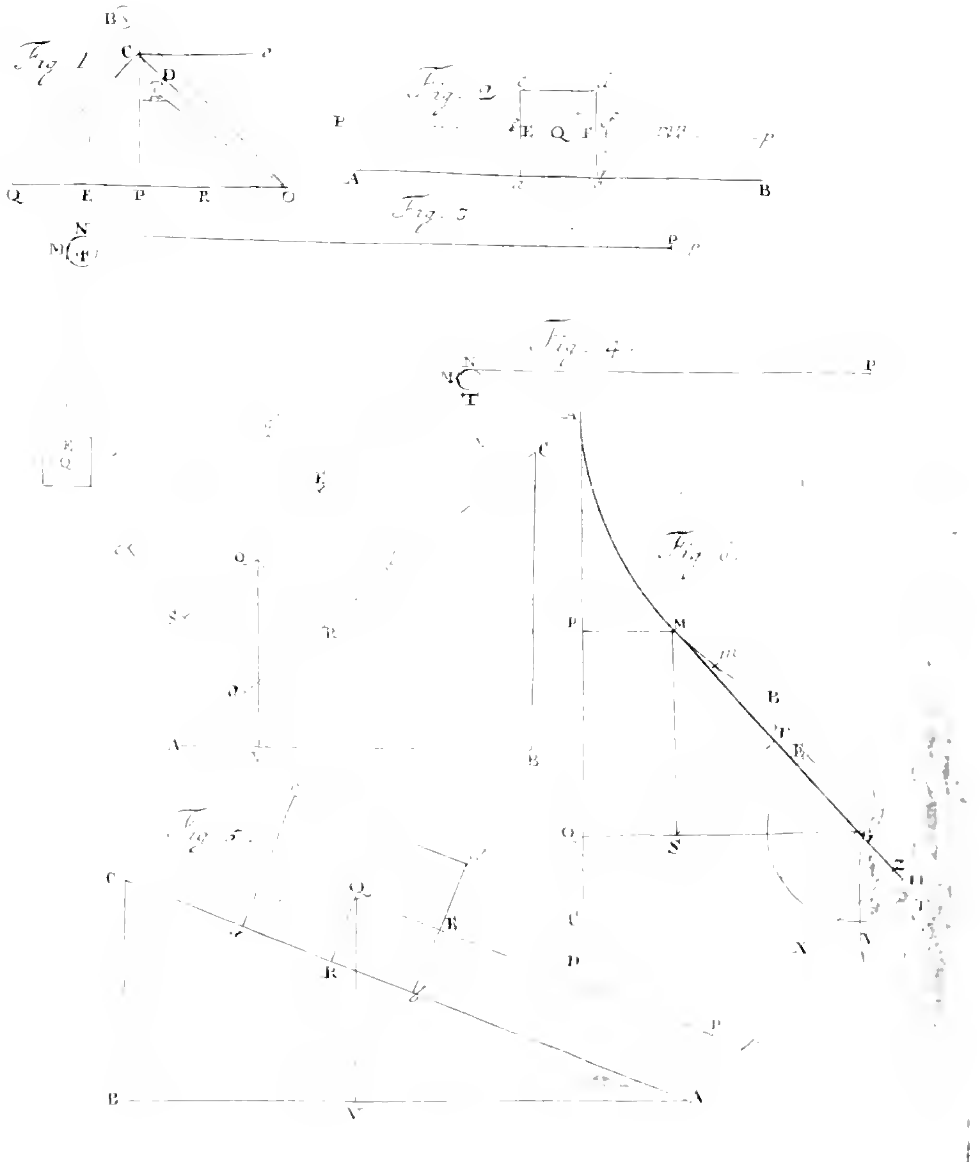
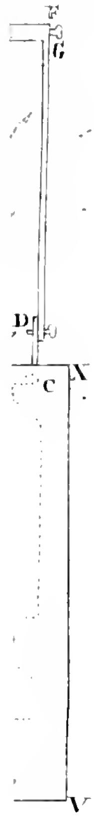


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6



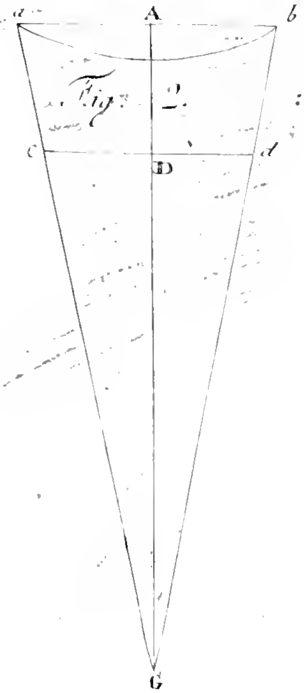


Fig. 2.

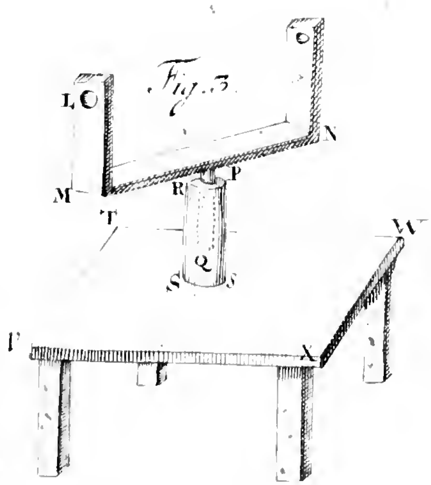


Fig. 3.

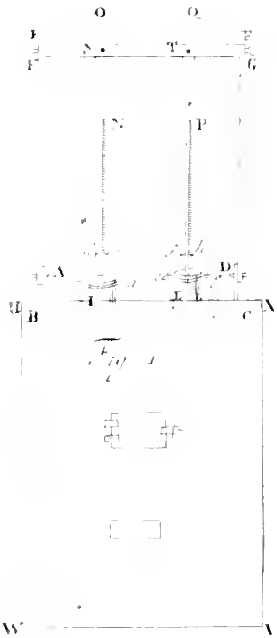


Fig. 1

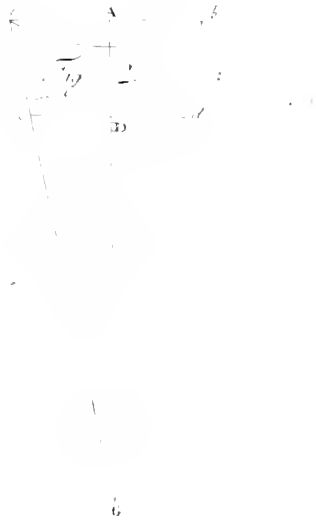


Fig. 2

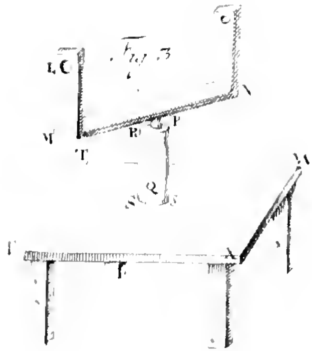


Fig. 3

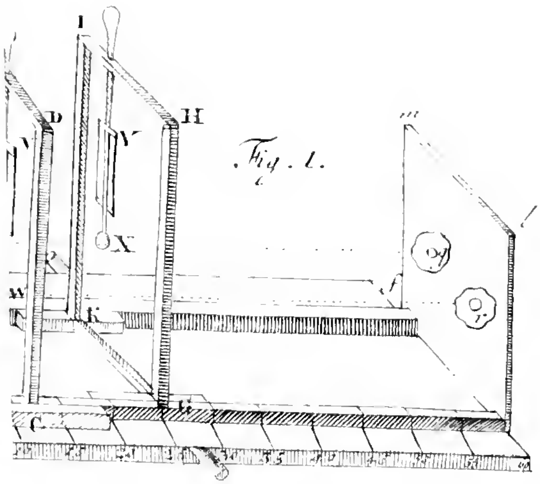


Fig. 1.

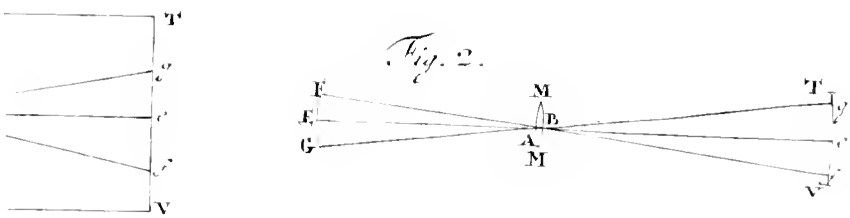


Fig. 2.

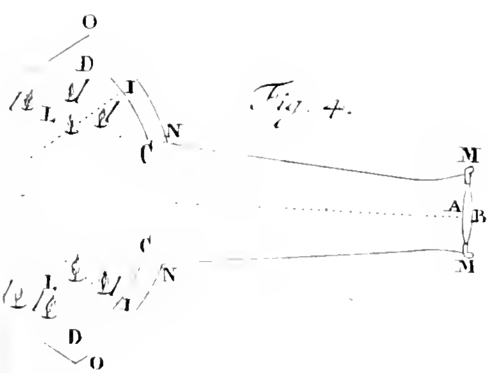


Fig. 4.

Fig. 1.

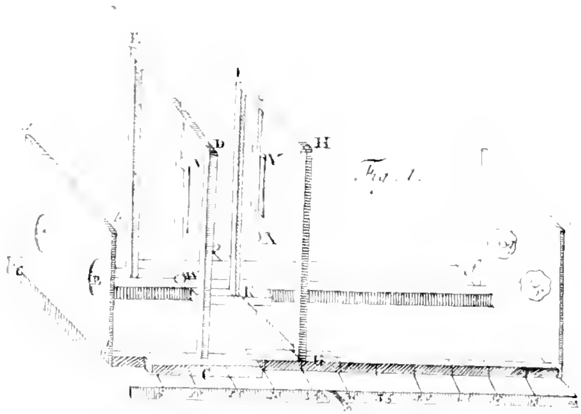


Fig. 3.

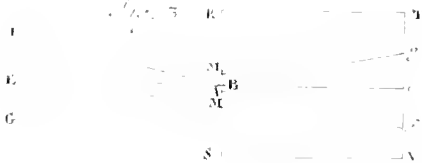


Fig. 2.

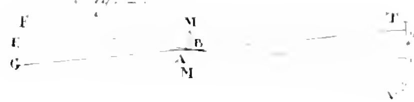
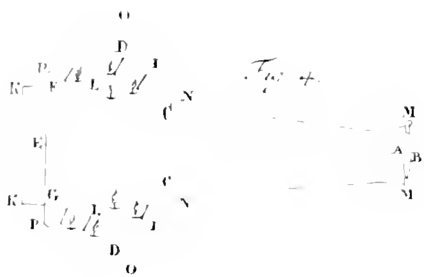


Fig. 4.



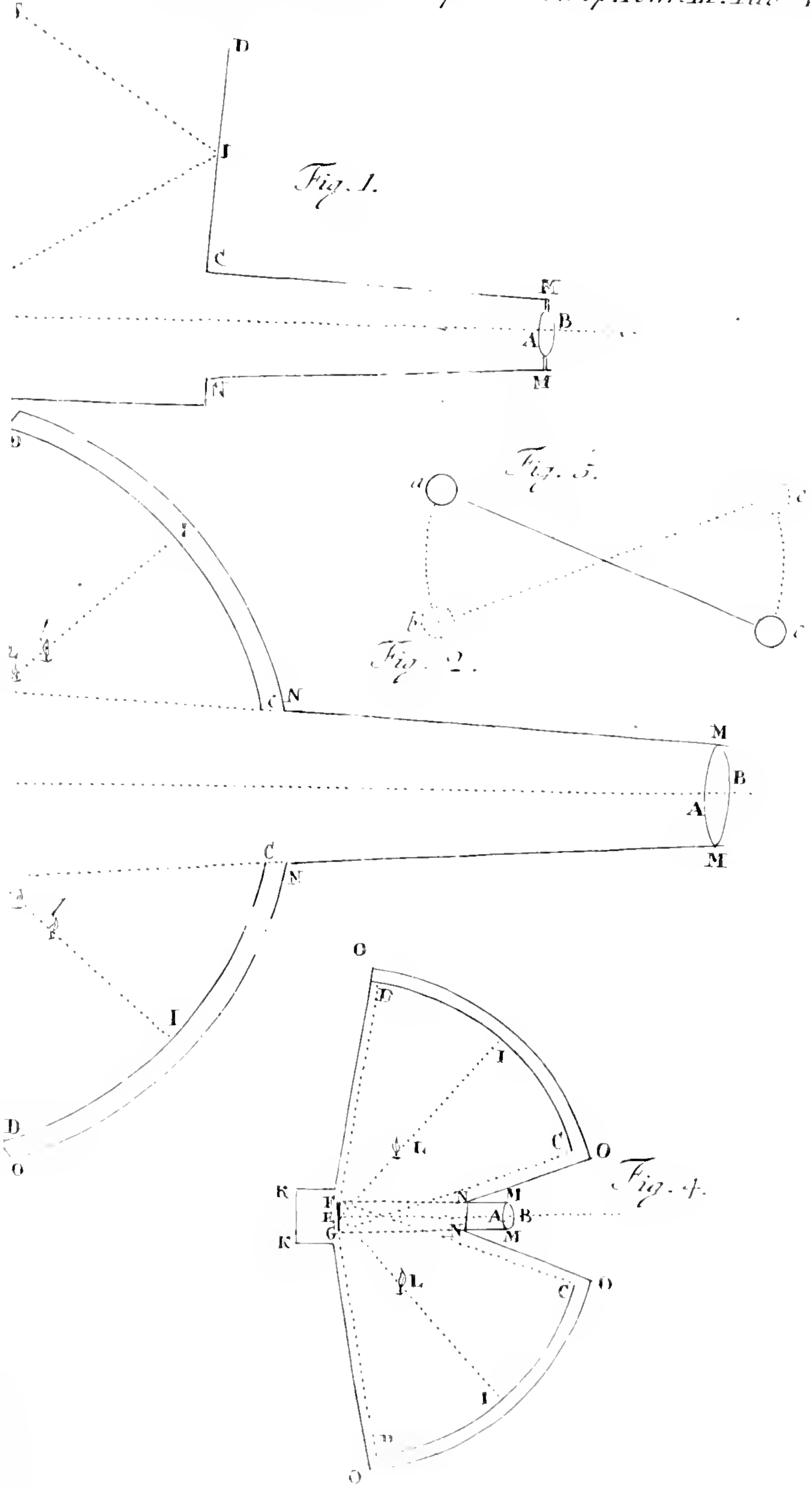


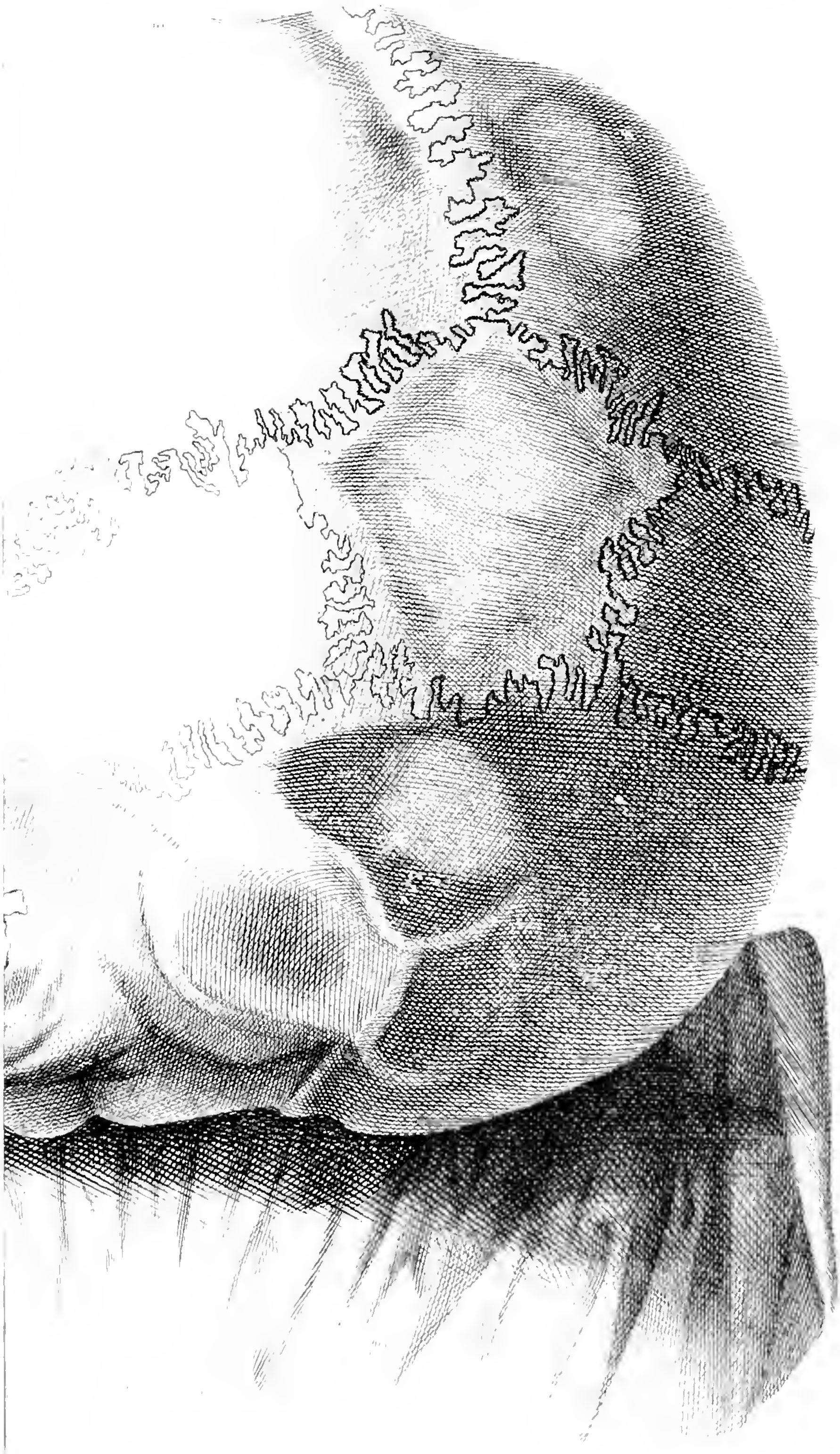
Fig. 1.

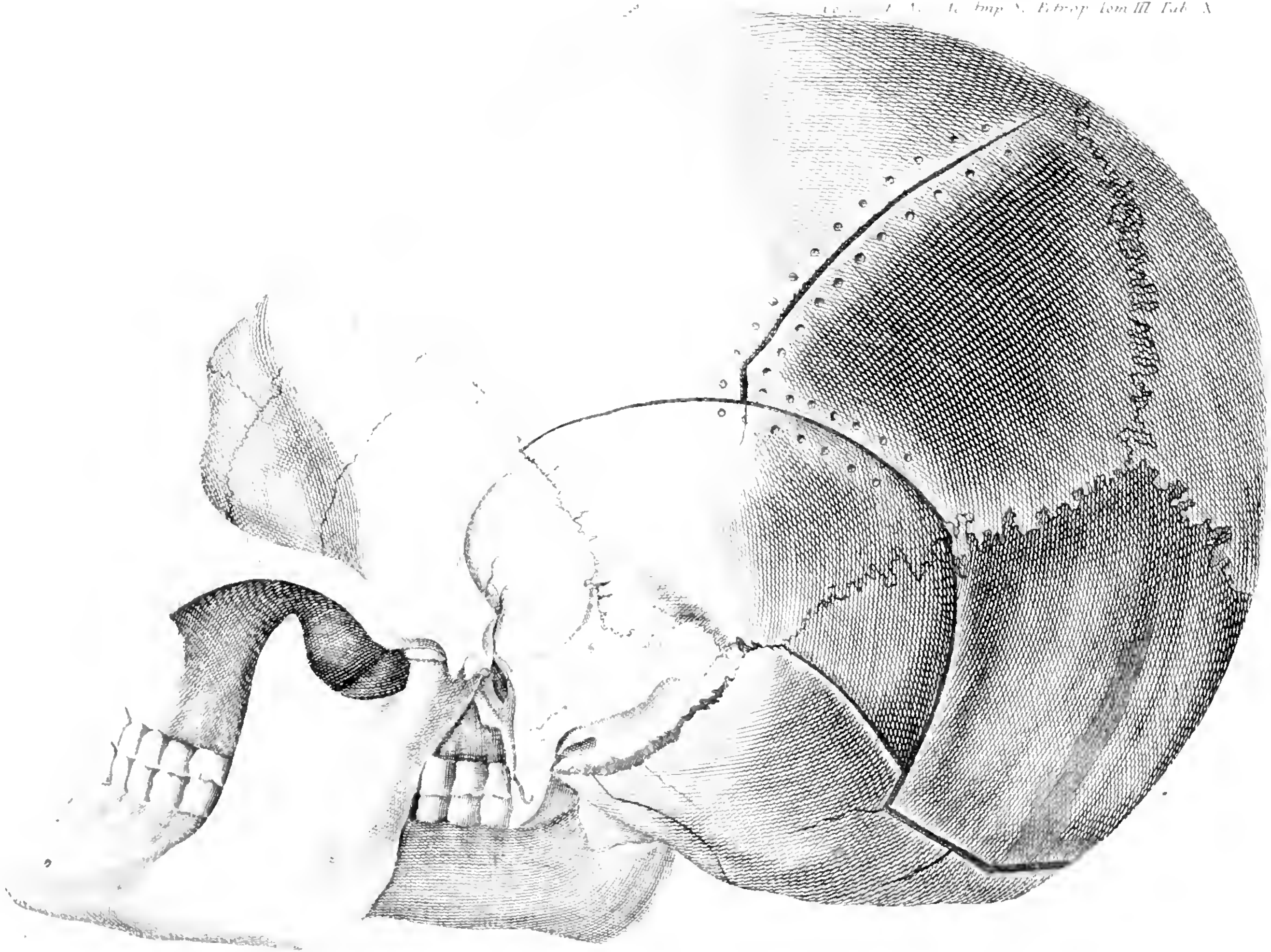
Fig. 2.

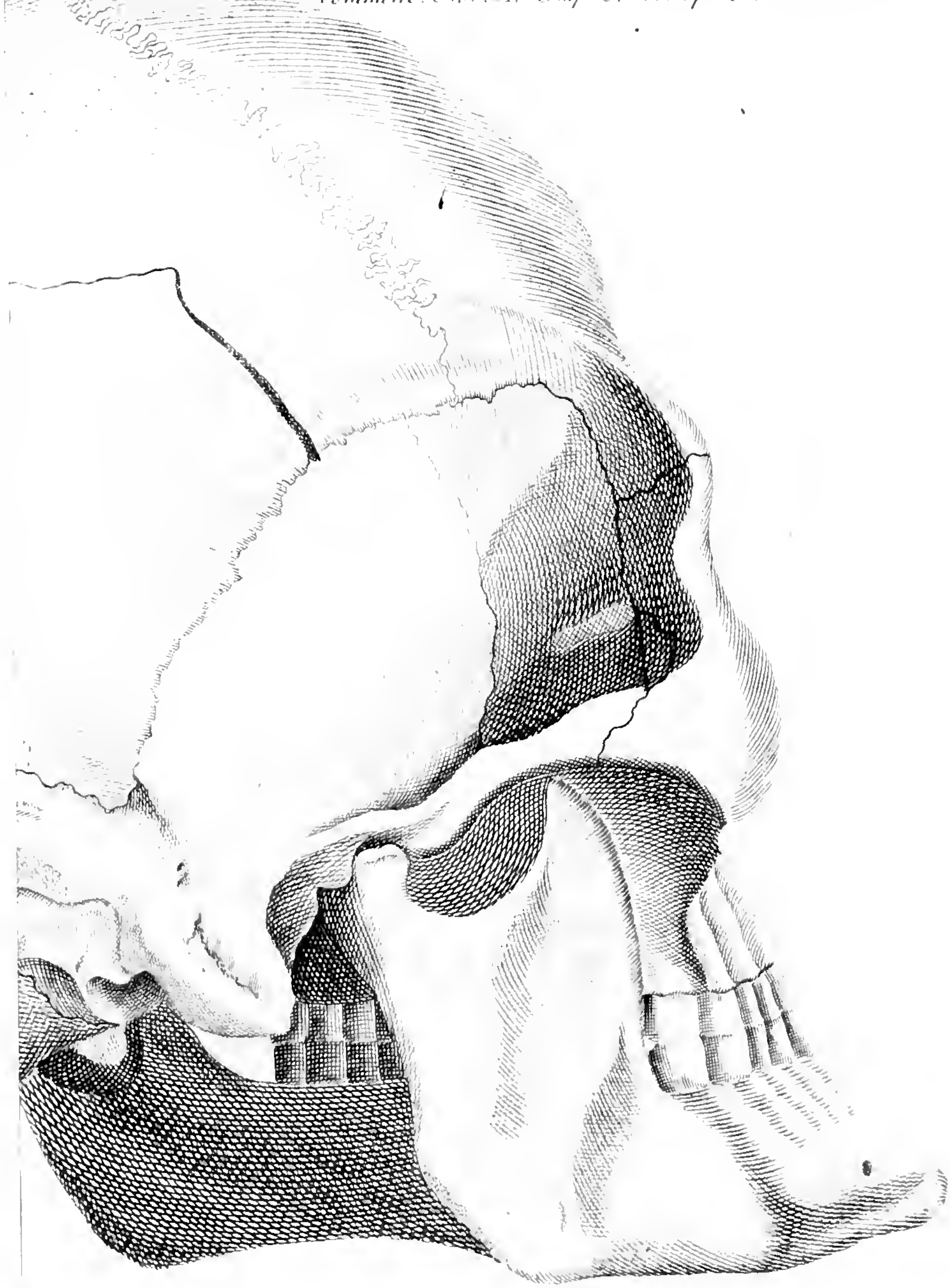
Fig. 3.

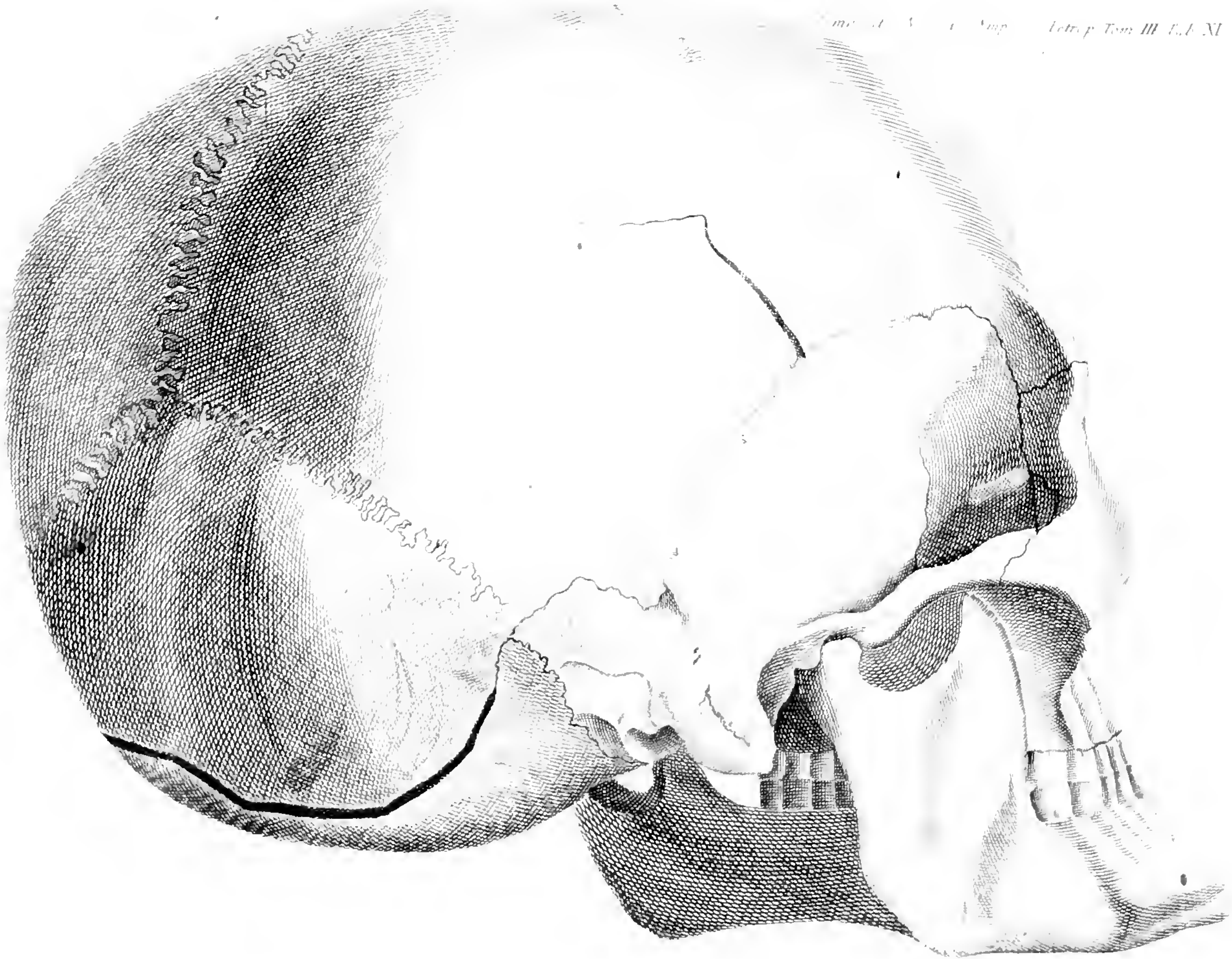
Fig. 4.

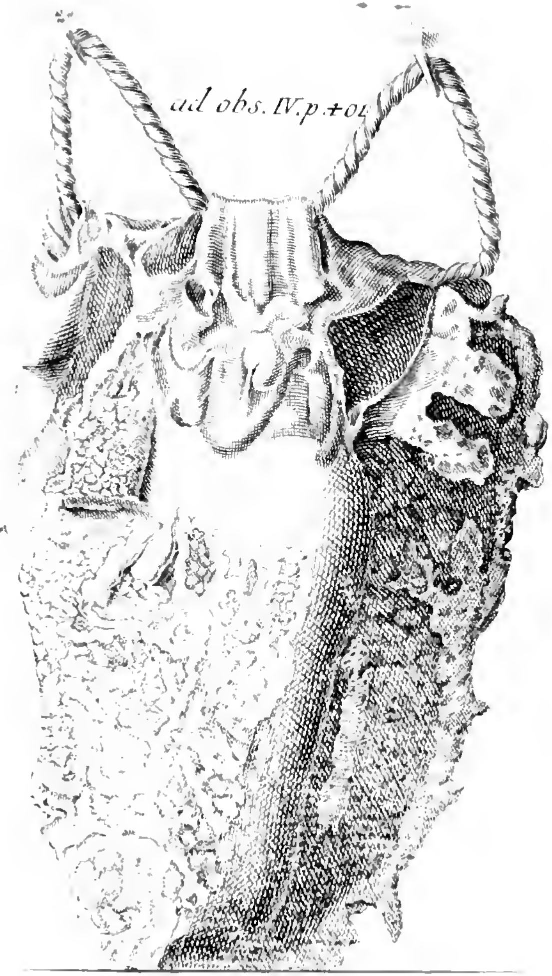

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.










ad obs. IV. p. 404


E

A Testiculus sinistri lateris
B P[illegible] testiculus hydatis
C Arteria spermatica.
D Arteria spermatica in parte testiculum intrans.
E Venae spermaticae.
F Venae ad spermaticas a pendulo testiculo tendentes
G Vas deferens
H Vasa venosa et arteriosa a pendulo testiculo
I Chorda [illegible] testiculo ad vas deferens producta
[illegible] unam [illegible]

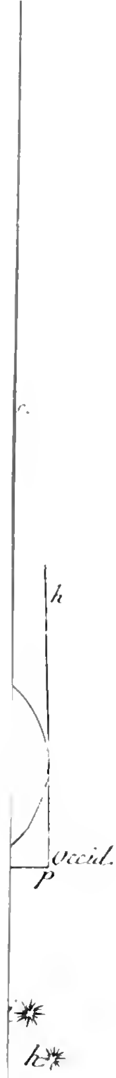


Fig. 2.

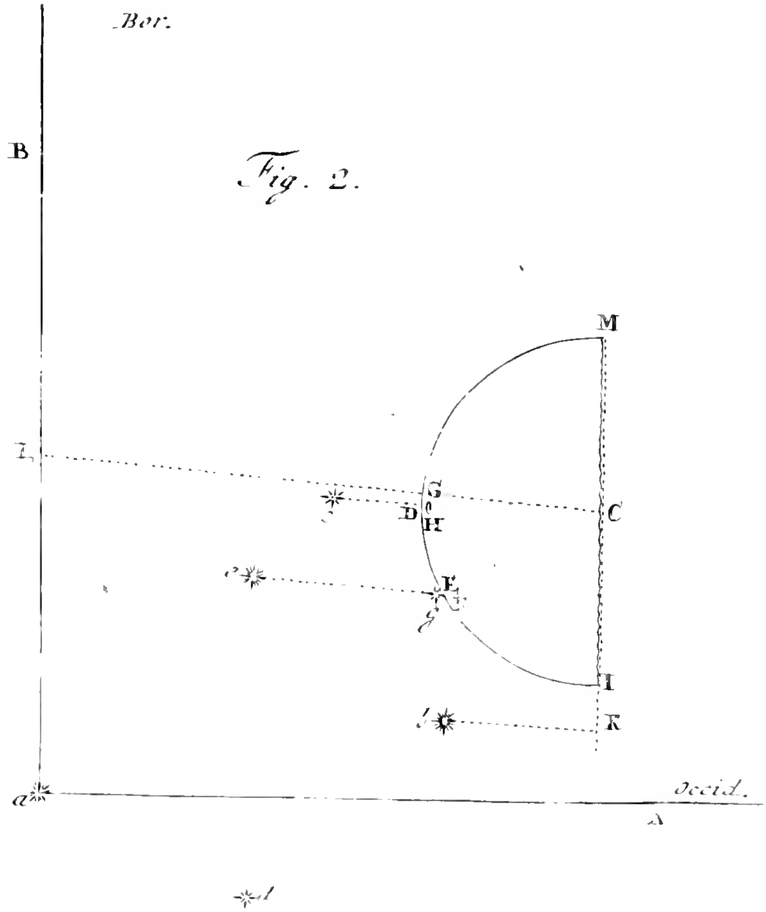
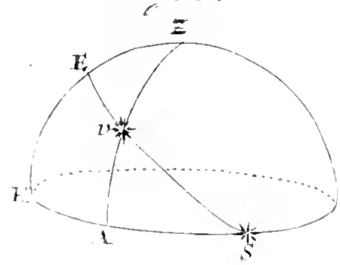


Fig. 3.



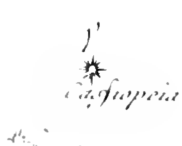


Fig. 1.

Fig. 3

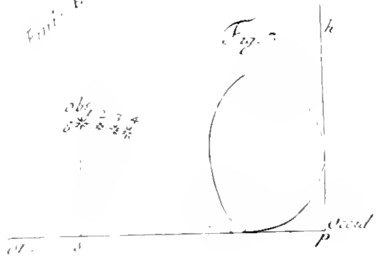
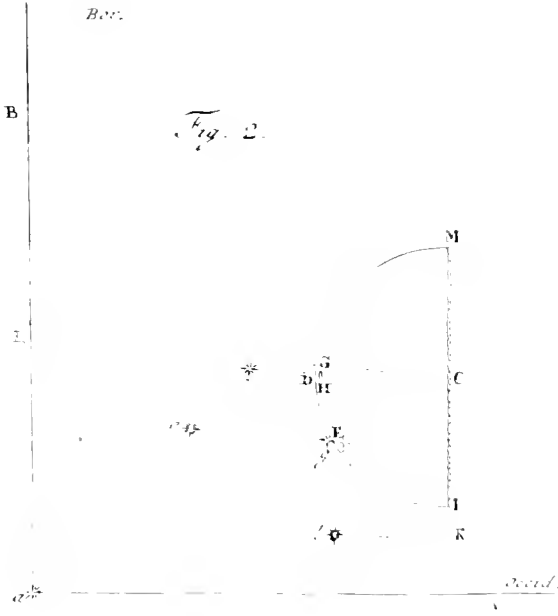


Fig. 2.



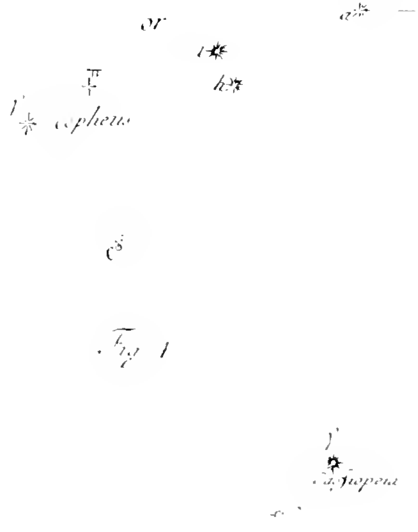


Fig. 4

Fig. 5