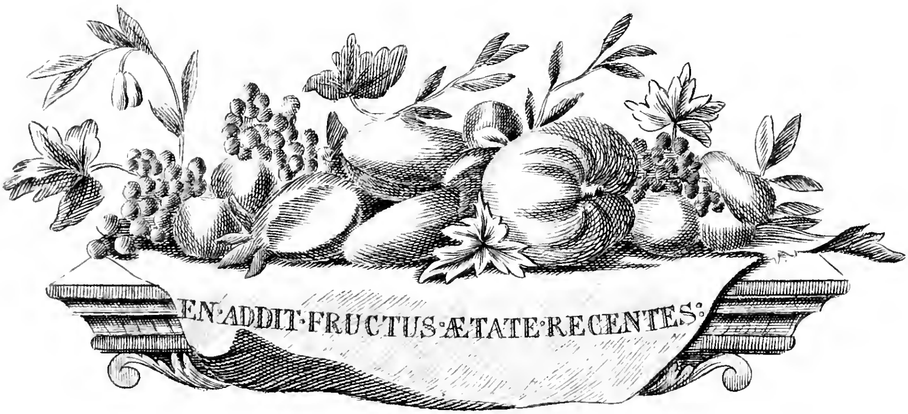
FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XV.

pro Anno MDCCLXX.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARUM

MDCCLXXI.

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XV.

MATHEMATICA.

I.

De Menſura ſortis ad fortuitam rerum naturaliter contingentium ſucceſſionem adplicata.

Auctore Dan. Bernoulli pag. 5. 3

Qui probabilitatis calculum ſummo dudum cum acumine excoluit, Illuſtr. Auctor nouum profundiſſimarum hoc de argumento meditationum ſuarum ſiſtit ſpecimen. In tabulis natalitiis magno numero congeſtis non poteſt non digna attentione videri proportio illa, quae in numeris natorum vtriusque ſexus cernitur. Maſculam prolem ſequiori praeualere, obſeruationes abunde docent; id vero vtrum mero caſu, an ex peculiari quadam ipſius naturae ad generandum ſexum maſculinum procliuitate eueniat, quaeſtio eſt altioris indaginis et tanti Geometrae ſtudio digniſſima. Problema hoc intricatiſſimum, quod eo tendit, vt ex ingenti caſuum fortuitorum numero ſortis ipſius modificationes et leges ac regulae illae, ipſi adeo ſorti praeſcriptae, eruantur, Ill. Auctor iam in alia diſſertatione praecedenti Commentariorum Tomo inſerta tractare aggreſſus eſt; binas ſcilicet fingit hypotheſes, in quarum vna natura ad generandum ſexum vtrumque aeque procliuis eſſe, in altera vero maſculino magis fauere ſtatuitur; ex quibus binis vtra ſit vera naturae lex, Ill. Auctor ita inquirit, vt pro vtraque leges probabilitatis computet et cum tabulis anthropologicis conferat atque ita ex calculi cum obſeruationibus conſenſu de hypotheſeos veriſimilitudine iudicet. Poſito igitur partuum annuorum numero $= 2\,\mathrm{N}$ quaeritur probabilitas, vt multitudo puellorum ſit $= m$, adeoque ea puellarum $= 2\,\mathrm{N} - m$: hanc itaque quaeſtionem Ill. Auctor primo pro priori hypotheſi, qua natura vtrique ſexui aequaliter fauere ſtatuitur, in priori ſua diſſertatione reſoluit; et probabilitatis quaeſitae valorem ita inuenit generaliter expreſſum:

$$\frac{2\,\mathrm{N}.\,(2\,\mathrm{N}-1)(2\,\mathrm{N}-2)\ldots(2\,\mathrm{N}-m+1)}{1.\quad 2.\quad 3\;\ldots\ldots\ldots\; m}\cdot\frac{1}{2^{2\,\mathrm{N}}}$$

ex cuius formulae ad varios caſus adplicatione complures elegantes et reconditas concluſiones deriuauit.

Expedito itaque problemate pro priori hypotheſi; Ill. Auctor eandem quaeſtionem in praeſenti diſſertatione etiam pro poſteriori hypotheſi reſoluit, ſtatuendo ſcilicet, naturam maſculae proli magis fauere, vere, quam alteri, idque in ratione conſtanti $a:b$; qua quidem noua conditione fieri non potuit, quin argumentum euaderet longe intricatius. Primum itaque ex combinationum theoria Ill. Auctor probabilitatis quaeſitae valorem ita definiri inuenit, vt ad formulam modo allegatam inſuper accederet factor $\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2N}$, qui quaſi indicem conſtituit differentiae inter probabilitates pro vno eodemque caſu in vtraque hypotheſi computatas. Ante omnia igitur cardo rei in eo verſabatur, vt ex ſufficienti obſeruationum numero valor rationis $\frac{a}{b}$ determinaretur; quae quidem proportio eo innoteſcit exactius, quo plures conferuntur obſeruationes et quo maior eſt in ſingulis ſumma partuum; cum vero diuerſimodae deductiones ex iſtis obſeruationibus formari queant; Ill. Auctor eum modum, quo ſtatuitur eſſe a ad b, vti ſumma puerorum natorum ad ſummam filiarum natarum, ceteris cenſuit praeferendum. Quo igitur conſtituto, ex tabulis Londinenſibus concluditur $\frac{a}{b} = 1,055$; hocque valore Ill. Auctor tanquam veriſimillimo vtitur, omnesque quae in iſta hypotheſi de propoſito problemate quaeſtiones formari poſſunt, reſoluit et concluſiones ex ipſa theoria deductas cum obſeruationibus comparat; vbi quoque tanta cernitur naturae in ipſis ſuis variationibus regularitas et tantus theoriae cum obſeruationibus conſenſus, vt Ill. Auctor aliquot tabulas, conſenſum turbaturas, pro erroneis declarare tuto potuerit erroresque facto examine actu deprehenderit. Neque

tamen

tamen hic conſenſus de limitibus aberrationum arctioribus eſt intelligendus, cum Ill. Auctor oſtenderit obſeruationes etiam ducentorum annorum, Londini inſtituendas, etiamſi fuerint accuratiſſimae, nondum tamen ſufficere ad tollendam haeſitationem 0,006 in definienda ratione $\frac{a}{b}$, quam legem naturalem in generando vtroque ſexu adpellari conuenit.

Nouum igitur grauiſſimi huius argumenti euolutio ſiſtit ſpecimen, quanto cum acumine inſignis hic Geometra etiam iſtas naturae leges perſcrutetur, quas ea euentuum prorſus fortuitorum ſpecie inuoluiſſe videtur.

II.

Solutio Problematis, quo duo quaeruntur numeri, quorum productum, tam ſumma, quam differentia eorum ſiue auctum ſiue minutum, fiat quadratum.

Auctore L. Eulero pag. 29.

Problema, quod Ill. Auctor in hac diſſertatione euoluit, ad analyſin Diophanteam pertinet, ſeque non ſua ſolum elegantia, ſed et eo commendat, quod ad eius ſolutionem ſingularia requirantur calculi artificia. Quanquam perſpecta problematis natur tura pateat, id innumerabiles solutiones admittere; tamen Ill. Auctor post plura demum tentamina binos numeros problemati idoneos inuenire potuit, idque methodo indirecta, quae ad inuentionem plurium eiusmodi numerorum nihil praestaret subsidii. Idem tamen argumentum cum Ill. Auctor postea iterum meditationi suae subiiceret; casu fortuito et singulari in solutionem generalem incidit; quam igitur in praesenti dissertatione euoluit vberius, et artificia exponit, quorum ope, superatis problematis difficultatibus, ad istam solutionem peruenit. Problema in eo consistit, vt satisfiat his quatuor aequationibus

$$\text{I. } AB+A+B=0. \quad \text{II. } AB+A-B=0$$
$$\text{III. } AB-A+B=0. \quad \text{IV. } AB-A-B=0.$$

Haud ita difficulter statim iudicari potest, istos numeros integros esse non posse; vnde posito $A=\frac{z}{x}$ et $B=\frac{z}{y}$ et admissa signi ambiguitate aequationes quatuor adimplendae his duabus formulis repraesentari possunt:

$$\frac{z}{xy}(z+y\mp x)=\square \quad \text{et} \quad \frac{z}{xy}(z-y\mp x)=\square$$

in quibus vt factor posterior euadat quadratus, facile efficitur, ponendo

$$z=\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{2} \quad \text{et} \quad y=\frac{(pp-ss)(qq-rr)}{2};$$

praecipua vero difficultas in eo versatur, vt pro p, q, r, s eiusmodi assumantur valores, quibus et alter ille factor communis $\frac{z}{xy}$ quadratum reddatur.

 Quod-

Quodſi igitur modo memorati ipſorum x et y valores in hoc factore ſubſtituantur, formula, quae quadrata eſt efficienda, inde reſultans

$$2pqrs(pp-ss)(qq-rr)(pp+ss)(qq+rr)=\square$$

non quatuor ſolum quantitates diuerſas continet, ſed ſingulae etiam illae quantitates ad quintam vsque dimenſionem aſſurgunt; ex quo facile liquet, problematis huius ſolutionem longe tranſcendere communia illa artificia, quae pro reſolutione eiusmodi quaeſtionum in Analyſeos Diophanteae inſtitutionibus tradi ſunt ſolita. Ad ſuperandam hanc difficultatem Ill. Auctor eo vtitur artificio, vt aliquot ingenioſis poſitionibus factoribus denominatoris fractionis memoratae $\frac{z}{xy}$ tot, quot fieri poteſt, communes diviſores concilientur; quorum multiplicatio cum factores efficiat quadraticos, iis omiſſis quaeſtio ad formulam multo ſimpliciorem $\frac{5mm-6mn+2nn}{2n(2m+n)}$ quadratam efficiendam reuocatur, cui adeo ſtatim ac vnicus caſus idoneus innotuit innumerabilibus modis ſatisfieri poteſt; cum ſcilicet tam numerator, quam denominator quadratum eſſe debeat, eorum quoque productum tale ſit neceſſe eſt; ex hac vero multiplicatione formula reſultat, quae generaliter ita repraeſentari poteſt

$$\alpha\alpha z^4-2\beta.z^3+\gamma.z^2-2\delta z+\varepsilon\varepsilon=\square$$

cuius quidem aequationis reſolutionem et quatuor ipſius z idoneos valores etiam per conſuetas methodos inuenire licet; quemadmodum vero infinite multae

multae ſolutiones erui queant, Ill. Auctor hic vberius exponit. Sub finem diſſertationis, quanquam problema iam fuerit reſolutum, aliae ſuperadduntur transformationes formulae reſoluendae; indeque caſus complures ſpeciales actu euoluuntur, inter quos bini ſequentes in numeris non nimis magnis notatu iprimis digni videntur

$$A = \frac{10133}{648} \text{ et } B = \frac{4205}{3872}.$$

III.

Obſeruationes circa radices aequationum.

Auct. L. Euler pag. 51.

In hac diſſertatione Ill. Auctor argumentum pertractat, quod ideo attentione ſua dignum iudicauit, quia id compluribus ſpeculationibus doctrinam ſerierum noua luce illuſtrantibus occaſionem praebere poteſt. Propoſita aequatione algebraica cuiusuis gradus rationali, quae generaliter ita repraeſentari poteſt,

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} \text{ etc.}$$

nota eſt Geometris elegans illa lex, qua ſummae omnium radicum, ſummaeque dignitatum omnium radicum exprimuntur; ita, vt ſi $\int. x^n$ denotet ſummam omnium radicum ad dignitatem n eleuatarum ſit, poſito $n = 1; 2; 3.$ etc.

$$\int. x = A; \int. x^2 = A\int. x + 2B = A^2 + 2B$$

$$\int. x^3 = A; \int. x^2 + B.\int x + 3C = A^3 + 3AB + 3C$$

vbi igitur ſummae ſequentes per praecedentes et litteras A, B, C etc. coniunctim vel, illis eliminatis, per ſolas has determinantur.

Ad explorandam legem, qua iſtae formulae progrediuntur, duo potiſſimum ſunt conſideranda: primum ſcilicet modus, quo litterae A, B, C etc. inter ſe combinantur; deinde vero vnciae illae numericae, quibus ſinguli termini afficiuntur, in quarum potiſſimum indole perſpicienda praecipua difficultas cernitur. In prima igitur diſſertationis parte Ill. Auctor id negotii ſuſcepit, vt formam erueret generalem, quae exprimat $\int x^n$ ſiue ſummam ſingularum radicum ad poteſtatem n eleuatarum. Quam vero cum eſſet adeptus, ſtatim id obſeruauit, inventam ſeriem in infinitum excurrentem non repraeſentare valorem ipſius $\int x^n$, niſi ſub his binis conditionibus, primo vt exponens n ſit numerus integer poſitiuus, deinde vero vt ex iſta ſerie omnes termini reiiciantur, in quibus littera A exponentem negatiuum eſſet adeptura. Noua vero hinc eaque momenti non exigui quaeſtio oritur, quiſnam ſcilicet ſit valor iſtius ſeriei, ſi binarum illarum conditionum ratio non habeatur, adeoque ſi n denotet numerum quemcunque et terminorum ſeriem inuentam conſtituentium nullus excludatur. Reſolutio huius quaeſtionis theorema ſubminiſtrauit elegantiſſimum et vſus habiturum ampliſſimos, iſtam ſcilicet memoratam ſeriem, ſi ad binas illas conditiones non attendatur, non ſummam omnium radicum ad poteſtatem

ſtatem *n* eleuatarum, ſed poteſtatem ipſam *n* radicis maximae exprimere; ita, vt ope huius theorematis propoſitae aequationis cuiuscunque:

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} \text{ etc.}$$

radicem maximam non ſolum ipſam, ſed eius etiam poteſtatem quamcunque immo et logarithmum hyperbolicum per ſeries infinitas commode exhibere liceat.

IV.

Problema Algebraicum ob affectiones prorſus ſingulares memorabile.

Auctore L. Eulero pag. 75.

Problema, quod in hac diſſertatione reſoluitur, cum quadratis magicis multum habet affinitatis, ſed ob affectiones prorſus ſingulares longe magis eſt memorabile. Inueniendae nimirum ſunt nouem quantitates A, B, C, D etc. quae ſint eius indolis, vt in quadratum hoc modo diſpoſitae

A, B, C
D, E, F
G, H, I

duodecim his conditionibus ſatisfaciant:

$$1^\circ.\ A^2+D^2+G^2=1. \quad 4^\circ.\ AB+DE+GH=0$$
$$2^\circ.\ B^2+E^2+H^2=1. \quad 5^\circ.\ AC+DF+GI=0$$
$$3^\circ.\ C^2+F^2+I^2=1. \quad 6^\circ.\ BC+EF+HI=0.$$
$$7^\circ.\ A^2+B^2+C^2=1. \quad 10^\circ.\ AD+BE+CF=0$$
$$8^\circ.\ D^2+E^2+F^2=1. \quad 11^\circ.\ AG+BH+CI=0$$
$$9^\circ.\ G^2+H^2+I^2=1. \quad 12^\circ.\ DG+EH+FI=0.$$

Prima obſeruatio, quam Ill. Auctor de hoc problemate adfert, in eo conſiſtit, vt id ad claſſem problematum indeterminatorum referat; id quod eo magis paradoxum videri omnino debet, cum numerus conditionum adimplendarum ſuperet numerum quantitatum incognitatum; vnde problema potius pro plusquam determinato habendum foret; verum natura problematis penitus perſpecta, demonſtrari poteſt, adimpletis 6 prioribus conditionibus, ſex poſterioribus neceſſario ſatisfieri adeoque tres illarum quantitatum arbitrio noſtro relinqui. Haec vero ipſa elegans adfectio, qua problematis euolutio multo redditur ſimplicior, tantum abeſt, vt ſit obuia, vt potius Ill. Auctor eam ſub forma inſignis theorematis proponat, quod demonſtratu difficillimum cenſeri debeat. Praeterea ipſum problema non pro inani luſu ingenii eſt habendum; ſed in doctrina de natura ſuperficierum ampliſſimi vſus eſt; quem poſtquam oſtendiſſet Ill. Auctor, primo completam theorematis modo memorati demonſtrationem tradit; deinde vero problematis ſolutionem ex theoria angulorum petitam ſiſtit; quae quidem

dem in se est elegantissima, sed eo defectu laborat, vt ex ea vix quicquam subsidii pro resoluendis aliis huius generis quaestionibus magis complicatis repeti queat. Hanc ob rem Ill. Auctor solutionem generalem inuestigare adgreditur eamque non modo ad casum propositum nouem quantitatum, sed ad complicatiores quoque, quos 16, 25, etc. quantitates incognitae ingrediuntur, adcommodat, immo et ostendit, quomodo ad 12 priores conditiones nouem aliae adiici potuissent, quae vero itidem re ipsa in sex prioribus necessario inuoluuntur. Coronidis loco Ill. Auctor problematis solutionem ex methodo Diophantea petitam in numeris rationalibus pro casu 9 numerorum subiungit; ad casum vero 16 numerorum ista methodus difficulter accommodatur; alio tamen modo eoque prorsus singulari Ill. Auctor et pro hoc casu solutionem latissime patentem nactus est; in quam tamen cum non nisi diuinando inciderit, si quis methodum directam ad talem solutionem manuducentem inuestigauerit, is non Algebrae solum communi, sed methodo etiam Diophanteae insignia incrementa attulisse foret censendus.

V.

V.

Solutio Problematis Algebraici de investigatione numerorum continue proportionalium, quorum datur summa a et summa quadratorum b.

Auctore And. Ioh. Lexell. pag. 107.

Apud varios Auctores, qui elementa Algebrae exposuerunt, huiusmodi occurrere solent problemata; inuenire quatuor vel quinque terminos progressionis geometricae, ex datis eorum summa et summa quadratorum, generalem autem solutionem problematis, quo quotcunque quaeruntur numeri continue proportionales, datis eorum summa et summa quadratorum, alicubi allatam esse non constat. Quamuis vero ipsum problema in se satis sterile sit, eius solutio tamen ob plura artificia Analytica in ea adhibita attentionem omnino mereri videtur. Ex natura quidem quaestionis propositae liquet, pro problemate soluendo duas proponi aequationes, binas incognitas inuoluentes, adeoque in eo elaborandum esse, vt per harum aequationum combinationem, vna harum incognitarum eliminetur, adeoque sic perueniatur ad aequationem, quae non nisi vnicam incognitam inuoluat. Hoc autem certe minus feliciter succedet, si eas incognitas, quas aequationes primitiuae suppeditant, in calculo retinere quis velit, tentan-

tentandum igitur eſt, an non ſubſtitutione quadam facili eiusmodi introduci queat quantitas, quae ad ſimpliciſſimam perducat aequationem finalem? Oſtendit autem Cl: huius diſſertationis auctor, ſi ſumma omnium terminorum dicatur a, ſumma quadratorum b, deinde vero primus terminus x^m et vltimus y^m, pro $a+\frac{b}{a}-x^m-y^m$ ſubſtitui poſſe u, et tum quidem calculo abſoluto, u ſemper per aequationes facillimas exprimi, ſi enim numerus terminorum fuerit par, tum gradus aequationis incognitam u inuoluentis exprimetur per numerum dimidium eius quo numerus terminorum deſignatur; ſin vero termini progreſſionis geometricae numero impari occurrant, mulctandus is eſt vnitate, tumque reſidui dimidium capiendo habebitur gradus aequationis per quam incognita u determinatur. Sic ſi notum ſit terminorum numerum eſſe 8, u per aequationem biquadraticam exprimetur, ſimili autem ratione, ſi numerus terminorum ad 9 aſſurgat, aequatio inueniendae u inſeruiens adhuc erit biquadratica, aequationes autem pro u maxime diuerſae ſunt indolis, prouti numerus terminorum eſt vel par vel impar. Inuenta denique quantitate u, progreſſionis Geometricae termini omnes innoteſcunt, quum ſcilicet ſit $u=a+\frac{b}{a}-x^m-y^m$, atque praeterea $y^m-x^m=2\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-e^2)}$, poſito nimirum $2e=a-\frac{b}{a}$.

VI.

De Criteriis integrabilitatis formularum differentialium.

Auctore And. Ioh. Lexell pag. 127.

In calculo integrali res ſane maximi eſt momenti, ea cognoſcere criteria, ex quibus dijudicari poſſit vtrum formula quaedam differentialis integrationem admittat, nec ne? Quemadmodum enim formularum integrabilium integralia facile inueniuntur; ita pro formulis integrabilitatis caractere deſtitutis, talium criteriorum ope facile deteguntur multiplicatores, in quos hae formulae duci debent, vt euadant integrabiles. Quamquam vero varia huiusmodi criteria a Geometris iamdudum ſint inuenta, ſingula tamen eo laborarunt defectu, quod nimis eſſent particularia, inſigne igitur Theorema ab Ill. *Eulero* in Tomo III. *Calculi Integralis* allatum, quo exponitur criterium integrabilitatis pro formula quacunque differentiali binas variabiles x et y et huius differentialia quaecunque continente, eo maiori in pretio habendum eſt, quod omnino generaliſſimum ſit, atque vnica conditione indicet, vtrum formula propoſita differentialis integrationem admittat vel ſecus? Hoc autem Theorema, licet iam demum anno praeterito in nunquam ſatis laudato opere *Calculi Integralis* euulgatum fuit, tamen ad minimum

ante

ante 16 annos ab Illuſtris. eius Auctore inuentum fuiſſe certiſſime nobis habemus perſpectum. Quum vero interea Illuſtr. *Eulerus* hoc Theorema cum inſigni quodam Galliae Mathematico communicaſſet, probabile omnino eſt, Illuſtr. Marchionem de *Condorcet* per eum in cognitionem huius Theorematis perueniſſe. Ex Hiſtoria enim Illuſtriſſimae Academ. Scient. Pariſinae pro annis 1764 et 1765 accepimus, modo laudatum Marchionem primum demonſtrationem huius Theorematis cum Illuſtr. Acad. Pariſina communicaſſe, tum vero conſcripto Tractatu de *Calculo Integrali* doctrinam de criteriis integrabilitatis omnino fuſius explicaſſe. Idem vero inſigne Theorema occaſionem quoque ſubminiſtrauit Cl. huius diſſertationis Auctori, inquirendi in criteria formularum differentialium. Quum enim demonſtratio Theorematis modo laudati ab Illuſtr. *Eulero* ex ſolis doctrinae variationis principiis ſit adornata, operae omnino pretium fuit examinare, an non demonſtratio quaedam magis directa, id eſt ex ſolis calculi differentialis principiis eruta, inueniri poſſet. Hunc igitur in finem primum neceſſe erat, eiusmodi veritates calculi differentialis antea cognitas et demonſtratas fundamenti loco ſubſternere, quae huic vſui aptae eſſe poſſent, facile autem perſpicere licuit, omne de criteriis integrabilitatis iudicium peti poſſe, ex notis proprietatibus formularum integrabilium, quae in Inſtit. Calcul. Differ. Illuſtr. *Euleri* P. 1 § 234 et ſeqqu: nec non apud alios de calculo integrali Auctores occurrunt. Cum vero Cl. Auctor diſſertationis prae-

 ſentis

ſentis antequam Theorema *Eulerianum* ſibi proponeret demonſtrandum, inueniſſet eius demonſtrationem multum ſubleuari, ſi primum huius Theorematis conuerſum demonſtraretur, allata igitur Theorematis conuerſi demonſtratione, demonſtrationem Theorematis directi ipſi ſubiunxit. Qua vero ratione in his demonſtrationibus adornandis verſatus ſit, et quae ex iisdem deduxit conſectaria, id ex ipſa diſſertatione melius addiſci poteſt, quam heic recenſione exponi. Inuento itaque ſic criterio integrabilitatis pro formula $V\,dx$, vbi V functionem quandam variabiles x et y, nec non huius differentialia quaecunque inuoluentem indigitat; progreditur Cl. Auctor ad formulas differentiales complicatiores, quae alias formulas integrales iam inuoluunt, vti $dx\int V\,dx$, $dx\int dx\int V\,dx$ etc. nec non $\int V\,dx\int V'\,dx$, oſtendit autem quomodo pro ſingulis huiusmodi formulis criteria integrabilitatis aſſignari queant. Porro quoniam hucusque ſuppoſitum fuit, quantitatem V non continere niſi binas quantitates x, y cum differentialibus quibuscunque ipſius y, neceſſum omnino erat diſquirere, qualia oriantur criteria integrabilitatis, ſi quantitas V inuolueret non ſolum quascunque quantitates x, y, z, v etc., ſed etiam differentialia quaecunque ipſorum y, z, v, poſito nimirum dx conſtante. Regula autem generalis quae pro his criteriis aſſignandis valet, ita exprimi poterit: „in formula $V\,dx$ quaeuis variabilium y, z, v etc. „ſeorſim pro variabili ſpectetur, reliquis pro con„ſtantibus habitis, et quaerantur quaenam criteria in„tegrabilitatis, pro ſingulis expreſſionibus formulae

„$V\,dx$

„$V\,dx$ oriantur, haec criteria collectim ſumta praebebunt caracterem, ex quo diiudicandum ſit vtrum „formula $V\,dx$ in qua omnes y, z, v etc. ſimul vt „variabiles tractantur integrabilis ſit nec ne? Deinde quum in Analyſi nuper conſiderari coeperint formulae integrales duplicatae, Cl. Auctor earum quoque criteria integrabilitatis examinare e re eſſe duxit. Notum autem eſt formulas integrales duplicatas huiusmodi ſignandi ratione $\int\int V\,dx\,dy$ exprimi, cuius expreſſionis ſenſus eſt, primum capi debere integrale ipſius $V\,dx$ poſita ſola x variabili, deinde vero integrale ipſius $dy\int V\,dx$, poſita ſola y variabili. Quamquam vero pro huiusmodi formulis caracter integrabilitatis non amplius vnica conditione exprimi queat, commode tamen fit, vt omnes hae conditiones vnica aequatione comprehendi queant, ea tantum conditione obſeruata quod non ſolum tota expreſſio euaneſcat, ſed etiam omnes eius termini, qui in iisdem lineis vel horizontalibus vel diagonalibus diſpoſiti ſunt. Hoc autem negotium etiam generaliſſime perficere licet, ſi ſcilicet V praeter x et y, inuoluat alias quascunque quantitates z, u, v etc. cum earum differentialibus, regula enim tum obſeruanda plane ſimilis erit ei, quam modo attulimus. Denique ne quid ad vniverſalitatem huius doctrinae deſideraretur, Cl. Auctor criteria integrabilitatis formularum quoque triplicatarum vt $\int\int\int V\,dx\,dy\,dz$ expoſuit, vbi iterum quamvis numerus criteriorum integrabilitatis inſignis ſit, omnia tamen vnica aequatione ſatis concinna comprehendi poſſunt.

Quum de Illuſtr. Marchionis de *Condorcet* Libro aliter nobis non conſtet, niſi ex modo memorata Hiſtoria Acad. Pariſinae, ignotum omnino nobis eſt in quo diſquiſitiones noſtri Auctoris, cum illis Illuſtr. Marchionis conuenire queant, hoc tamen ex iſta recenſione didicimus nihil ab Illuſt. *Comite* de criteriis integrabilitatis formularum duplicatarum, triplicatarum vel altiorum allatum fuiſſe, vnde ſi haec diſſertatio nihil aliud noui contineret, ſaltem eo nomine commendari mereretur, quod modus inueniendi criteria integrabilitatis formularum duplicatarum triplicatarum, quin et altiorum ab Auctore noſtro ſit indigitatus. Circa diſſertationem autem hanc id imprimis deſiderari videtur quod Cl. Auctor ſuam Theoriam exemplis illuſtrare intermiſerit, quem tamen defectum alia fortaſſis occaſione ſupplebit.

VII.

De curua rectificabili in ſuperficie Sphaerica.

Auctore L. Eulero pag. 195.

Cum ſeculo praeterito Geometrae in magno ſic dicto Problemate Florentino reſoluendo occupati eſſent, etiam ex affinitate materiae problema ab ipſis fuit agitatum, de curuis rectificabilibus in ſuperficie

perficie ſphaerica deſcribendis, cui tamen quaeſito ſatisfacientem non niſi vnicam lineam curuam inuenire valuerunt. Haec vero circumſtantia tanto magis notatu digna eſt, quod quum ipſa quaeſtio ad analyſin infinitorum indeterminatam pertineat, infinitas ſolutiones admittere videatur, vnde et operae pretium fuit ſolutionem inuentam examinare, vtrum ſcilicet ex ea aliae ſolutiones deriuari poſſint, an vero euidenti ratione probari poſſit, non niſi vnicam hanc ſolutionem poſſibilem eſſe? Hoc autem inſtitutum ita proſecutus eſt illuſtriſſimus huius diſſertationis Auctor, vt poſtquam ex principiis mere analyticis ſolutionem ſatisfacientem deduxerit, tum quoque oſtendat, quomodo ea ex conſiderationibus Geometricis principiis ſcilicet Trigometriae Sphaericae in vſum vocatis, inueniri queat. Hunc in finem primo curuam quaeſitam tamquam datam ſpectando, eius quaerit euolutam, ope elegantiſſimae formulae pro radio oſculi cuiuscunque puncti curuae quaeſitae; tum vero ordine retrogrado, curuam euolutam conſiderans, ſimplicem omnino et concinnam inuenit formulam, pro elemento curuae quaeſitae, per data curuae euolutae definiendo. Si enim curuae euolutae arcus quicunque dicatur s et radius oſculi ipſi reſpondens r, habebitur pro elemento curuae per euolutionem ortae, haec expreſſio $\frac{ds \,Sin.\, s}{Tang.\, r}$, quam igitur vt ſolutioni ſatisfiat, integrabilem eſſe oportet. Iam vero euidens eſt, problematis propoſiti ſolutionem ab eo pendere, vt inueniatur curua algebraica in ſuperficie ſphae-

ſphaerica , cuius quicunque arcus arcui alicui circuli maximi ſit aequalis , tum vero vt pro ea curua haec formula $\frac{d\,s\,Sin.\,s}{Tang.\,r}$ abſolute ſit integrabilis , id eſt vt eius integrale per aliquem Sinum , Coſinum vel Tangentem exprimi queat. Facile autem patet his conditionibus ſatisfieri , ſi curua euoluta ſtatuatur circulus minor , cuius radius ad radium Sphaerae rationem teneat rationalem , quorum circulorum quum infinita detur multitudo , videri poſſet infinitas quoque problematis ſolutiones hinc deriuari , quum tamen hae omnes eadem comprehendantur formula , ad vnicam ſolutionem omnes referri poſſunt. Difficillimum autem eſt diiudicare, an praeter circulos minores , aliae quoque deſcribi queant curuae geometricae , proprietatibus ſupra requiſitis gaudentes. Hoc ſaltem facile demonſtrari poteſt , quod omiſſa vltima conditioue , qua ſcilicet requiritur , vt $\frac{d\,s\,Sin.\,s}{Tang.\,r}$ ſit integrabile , infinitae omnino dentur curuae geometricae quarum rectificatio , per arcus circuli maximi exhiberi queat. Si enim curua quaecunque Geometrica in ſuperficie Sphaerica deſcripta proponatur , certo conſtat eius euolutam quoque fore Geometricam et inſuper hac proprietate gaudere , vt ſingulae eius portiones per arcus circulorum maximorum exprimantur , vbi tamen id memorabile eſt , quod adhuc perſpicere non liceat quomodo inuentio eiusmodi curuarum ex principiis mere analyticis inueniri queat , quod ſi praeſtare liceret , maximi ſane eſſet vſus in hac Analyſeos parte vlterius excolenda.

PHYSICO-

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

SECTIO TERTIA.

De motu fluidorum lineari potissimum aquae.

Auctore L. Eulero pag. 219.

In hac tertia Sectione Illustr. Auctor fluidorum et speciatim aquae eiusmodi considerat motum, quo vena fluidi secundum certam mouetur directionem et omnes eius particulae per quamcunque sectionem ad directionem motus perpendicularem eadem feruntur celeritate, cuius igitur motus generalia principia in Capite I. huius Sectionis explicantur. Quamuis autem huiusmodi motus consideratio, tum imprimis locum obtineat, cum motus fluidorum per tubos angustissimos definiendus sit, quippe quum eo casu directio fluidi cum ipsa directione tubi manifesto conueniat, atque particularum fluidi celeritas non possit esse multum discrepans; nihilo minus tamen etiam in tubis satis amplis, motus fluidi per principia motus linearis, saltem sine sensibili errore definiri potest, vnde et effluxus aquae ex vasis etiam amplissimis per foramen factus ex his principiis definitus cum experientia omnino egregie conſentit. Tractatio autem motus linearis multiplicem includit varietatem, habito tum reſpectu ad ipſam figuram tuborum, cum ad ſtatum fluidi per ipſos translati, quum enim ipſi tubi poſſint eſſe vel recti vel curui, hi vero demum plurimum inter ſe differre prouti eorum directrices vel in idem planum incidunt vel ſecus, motus principia pro diuerſa hac figurae ratione ſeorſim definienda ſunt. Deinde conſideratio motus linearis aliquam ſubit variationem, prouti fluidum vel continuo motu ferri ſupponitur vel etiam foramine facto alicubi effluere concipitur. Et denique principia motus diuerſa inuenientur prouti tubi vel in quiete vel mobiles concipiuntur. Hoc igitur capite generalia principia motus linearis per tubos ſiue rectos ſiue curuos cuiuscunque generis ſtabiliuntur. Dum vero ad ſpecialem magis explicationem motus linearis progreditur Illuſtr. Auctor, in genere obſeruat ſuae tractationis diuiſionem ex triplici imprimis fonte deriuari potuiſſe, vel ſcilicet ex ipſa diuerſitate fluidorum, quatenus eorum denſitas conſtans aut variabilis eſt, vel quatenus fluida conſiderantur aut elaſtica, aut non elaſtica, vel denique quatenus tubi conſiderantur aut aeque ampli, aut diuerſae amplitudinis, et quum amplitudinis variatio heic omnino maximi ſit momenti, hinc imprimis diuiſionem operis deriuandam eſſe ratus eſt Illuſtr. Auctor, vnde Capite quoque II^{do}. motum primo aquae per tubos aequaliter amplos explicauit. Sequentes vero caſus motus linearis hic impri-

imprimis conſiderantur, 1°. ſi aqua ſola grauitate animata per tubum curuum continuo fluat. 2°. Si aqua praeter grauitatem, ad vtrumque tubi terminum certis viribus vrgeri concipiatur. 3°. Si aqua in altero termino effluat, in altero vero prematur a vi quacunque. 4to. Si aqua in altero termino effluat, in altero adfluat data vi propulſa. Circa vltimum hunc caſum omnino attentione dignum eſt, ſi vis propellens fuerit conſtans et aequalis datae cuidam magnitudini, celeritatem fluidi fore conſtantem, ſin autem vis illa data hac magnitudine aliquanto ſit maior, celeritatem fluidi continuo augeri, quod quum omnino paradoxum et experientiae contrarium ſit, inde concludere licet, vires ad aquam propellendam adhibitas non eius eſſe indolis, vt eadem intenſitate agant, quacunque celeritate aqua propellitur. Hoc enim pro certo et indubitato tenendum eſt, omnes vires quae ab hominibus, animalibus, aquae fluxu vel vento proficiſcuntur, ita ſe habere, vt aucta celeritate obiecti cui applicantur, debilitentur, atque adeo hac celeritate ad certum gradum increſcente plane euaneſcant. In omni igitur machinarum motu, non tam ad abſolutam quantitatem vis adhibitae, quam potius ad intenſitatem actionis eſt reſpiciendum, quae actio definitur per productum ex vi in celeritatem. Quum itaque hoc productum duplici caſu euaneſcere poſſit primum ſi celeritas $= 0$, tum vero ſi celeritas tanta vt vis euaneſcat, liquet omnino datae cuicunque vi, maximam reſpondere actionem, quae obti-

 netur

netur dum productum ex vi in celeritatem fit maximum. Caput III. huius sectionis, motui aquae in tubis inaequaliter amplis definiendo destinatum est, problemata autem huius capitis, quum plane similia sunt iis, quae ex Cap. II^{do} attulimus iis vlterius heic recensendis non immoramur, notasse tantum sufficiat ex Probl. 55. omnia ea deduci, quae hucusque de effluxu aquae ex vasis cuiuscunque figurae, afferri sunt solita, quae tamen ita comparata sunt, vt in plerisque casibus cum experientia conciliari nequeant, idque imprimis quum solutio tantum valeat pro tubis angustissimis. In Capite Quarto eleuatio aquae ope antliarum exponitur, quum enim haec operatio in vita communi insignem habeat vsum, eam accuratius explicare, omnino maximi momenti erat. Heic vero non solum motus antliarum simplicium consideratur, sed etiam docetur, quomodo binarum antliarum, vnius aquam haurientis, alterius eam proiicientis, et eadem vi agitatarum motus definiri debeat. Vltimum denique caput motum per tubos diuerso caloris gradu infectos pertractat, quum enim is sit caloris effectus vt volumina corporum expandat, adeoque ipsorum densitatem imminuat, intelligitur in fluidis diuerso caloris gradu praeditis, densitatem particularum fluidi variabilem esse, hincque aequilibrium turbari, qualis autem hinc oriatur fluidi motus, id ipsum est quod Illustr. Auctor heic fuse explicat.

II.

II.

Examen Phyſico - Mechanicum de motu mixto qui laminis elaſticis a percuſſione ſimul imprimitur.

Auctore Dan. Bernoulli pag. 361.

Notum eſt a percuſſione in laminis varios produci poſſe motus inter ſe diuerſos et quorum vnusquisque peculiari ſua lege definiatur, ſcilicet aut motum progreſſiuum cum rotatorio circa centrum grauitatis coniunctum, aut motum itidem progreſſiuum, cui motus vibratorius accedit. Quum itaque ſic duplex effectus ab eadem producatur cauſſa, vtile omnino erit noſſe, quaenam proportio hos effectus intercedat, in genere enim tenendum eſt motum progreſſiuum tanto debiliorem fore, quanto maior percuſſionis pars impenditur ſiue in motum rotatorium, ſeu vibatrorium producendum, hanc igitur quaeſtionem accuratius exponere praeſenti diſſertatione, Illuſtr. eius Auctor ſibi propoſuit. Quod igitur priorem huius quaeſtionis partem attinet, demonſtratur punctum in quo percuſſio fit, eſſe centrum oſcillationis virgae ex centro rotationis ſuſpenſae et viciſſim centrum hoc rotationis cum ipſo centro oſcillationis virgae ex puncto percuſſionis ſuſpenſae coincidere, tum vero quoque motum rotatorium puncti percuſſi ad motum progreſſiuum

 centri

centri grauitatis virgae in conſtanti eſſe ratione, quae non mutabitur, ſiue fortius ſeu debilius virga percuſſa fuerit. Quemadmodum nunc in laminis inflexibilibus duplex produci poteſt motus, progreſſiuus centri grauitatis et rotatorius, ita in laminis elaſticis praeter motum progreſſiuum motus quoque vibratorius produci ſolet, cuius contemplatio eo maioris eſt vſus, quod leges motuum a percuſſione in corporibus elaſticis productorum communiter ſupponant, omnem effectum in variatione motus progreſſiui conſiſtere. Vt vero nunc proportio inter vtrumque motum definiri poſſit, ſequentem hypotheſin Illuſtr. Auctor fundamenti loco ſuppoſuit; curuam laminae ex vibratione inductam, talem fore vt permutatio vi viua minima pro eadem translatione puncti percuſſi abſoluatur. Hoc vero ſuppoſito demonſtratur punctum percuſſionis fore ipſum centrum oſcillationis curuae iſtius, vnde iam facile proportio inter celeritatem motus progreſſiui et vibratorii determinatur. Maioris igitur facilitatis gratia ſupponere licebit curuam iſtam ſimplicem eſſe parabolam, tumque erit velocitas centri grauitatis, ad velocitatem initialem puncti percuſſi vt 4 : 5, quamuis ſcilicet haec curuatura a vera aliquantum differat, tamen proportiones celeritatum inde deductae, non adeo multum a veris diſcrepabunt. Vt demum maior huic Theoriae fiducia conciliaretur experimentis quibusdam eam illuſtrare Cel. Auctori placuit, normam ſcilicet adhibens tripedalem ex ligno duro, flexili et elaſtico conſtructam, Latit.

10.

10 lin., craſſit. vero $\frac{1}{3}$ lin. eam tabulae horizontali politae impoſuit, in eiusque modo ſuperficiem latam, modo ſuperficiem gracilem percuſſiones fecit ſecundum directionem per centrum grauitatis virgae normalem, tumque ſequentia notauit phaenomena I. Si laminae a tergo vtrique extremitati duo globuli leuiuſculi adponerentur, et laminae ſuperficies lata antrorſum percuteretur, contigit, vt vterque globulus retrorſum, ipſa vero norma antrorſum impetum facerent. II. Idem euenit ſi globuli ab extremitate remouerentur ad diſtantiam duorum, trium vel quatuor pollicum, quin etiam etſi globuli laminae non eſſent contigui, ſed tantillo interuallo remoti. IV. Globulis ad diſtantiam $4\frac{3}{4}$ pollic. ab extremitate remotis, nulla amplius contigit repercuſſio, denique facta etiam percuſſione lateris normae gracilis, ſimilis repercuſſio obſeruata eſt in globulis prope extremitates virgae collocatis.

III.

Genuina principia doctrinae de ſtatu aequilibrii et motu corporum, tam perfecte flexibilium, quam elaſticorum.

Auctore L. Eulero. pag. 381.

Doctrina de figura corporum ſiue flexibilium ſeu elaſticorum, quatenus hucusque a Geometris eſt tractata, non latius extenditur, quam ad fila ſimplicia, quorum figura quam a viribus quibuscunque induunt, eſt explorata, quin etiam hae figurae ad curuas in eodem plano ſitas omnino ſunt reſtringendae. Completam autem Theoriam, pro figura ſiue ſuperficierum ſiue corporum flexibilium, tradere res ſane videtur eſſe tanto difficilior, quo certius conſtat adhuc ne vera quidem principia huius Theoriae eſſe ſtabilita, neque hic Illuſt. *Eulero* propoſitum fuit, eiusmodi laborem ſuſcipere, ſed potius eo anniti, vt huiusmodi principia generalia euolueret ex quibus vniuerſa doctrina de aequilibrio et motu filorum flexibilium et elaſticorum explicari poſſit. Pleraeque enim ſolutiones problematum ad hanc doctrinam pertinentium, a principiis vel particularibus vel ſaltem minus perſpicuis hucusque ſunt deductae, quare eo magis neceſſum fuit genuina principia huius doctri-

doctrinae exponere. Primum igitur problema generale cuius solutionem heic adfert Illust. Auctor ita exprimitur: *Si filum siue perfecte flexile siue elasticum et in singulis punctis a viribus quibuscunque sollicitatum ad statum aequilibrii fuerit perductum, pro singulis eius elementis, statum siue tensionis siue inflexionis inuestigare.* Tradita vero solutione huius problematis eius applicatio fit, ad quatuor casus speciales, filorum scilicet flexibilium, vniformiter elasticorum, inaequaliter elasticorum vel denique eiusmodi filorum elasticorum quae in statu suo naturali datam habent curuaturam. Deinde vt melius intelligantur praecepta generaliter tradita, applicatio quoque facta est ad problemata particularia, scilicet ad solutiones problematum de inueniendis curuis catenaria, velaria et elastica, quarum quidem priores inter se conueniunt, vti iam dudum est obseruatum. Alterum problema generale heic pertractatum sequens est: *Si filum siue perfecte flexile siue elasticum atque in singulis punctis a viribus quibuscunque sollicitatum vtcunque moueatur, principia exponere ex quibus hunc motum definire liceat, supposito quod totus motus semper in eodem plano absoluatur.* Huius autem problematis solutio eo magis ardua censenda est, quod pleraeque quantitates variabiles eam ingredientes, vt functiones duarum variabilium spectari debeant. At commode tamen fit, vt solutio huius problematis ad eam prioris reduci queat. Paucissima omnino sunt problemata, quorum solutio ad huiusmodi motum reducitur, inter ea vero praeprimis memorabile videtur, id de motu oscillatorio cordarum vibrantium de quo vti conſtat in tot diverſas abierunt ſententias ſummi noſtri ſeculi Mathematici. Deinde ad huiusmodi problemata pertinent quoque ea, quae ab Auctoribus de inflexionibus minimis laminarum elaſticarum ſunt tradita, quales igitur aequationes pro vtroque Problemate ſoluendo ex principiis generalibus deducantur, expoſitum quoque heic eſt.

IV.

De Ictu glandium, contra Tabulam exploſarum.

Auctore L. Eulero. pag. 414.

In doctrina de percuſſione corporum eiusmodi ſaepe occurrunt phaenomena, quae primo intuitu haud parum paradoxa et rationi contraria videntur, attentius autem examinata cum legibus naturae optime conſentire deprehenduntur. Horum in numero ſequens omnino memorabile eſt, ſi ianua aperta lapide percutiatur, motu in ipſa generato clauditur, ſin vero ſclopetum contra eam explodatur, immota perſiſtit, glande exploſa eam penitus penenetrante. Huius igitur phaenomeni rationem expoſiturus Illuſtr. huius diſſertationis Auctor, ictum glandium contra tabulam exploſarum accuratius exponere conſtituit, vbi quidem duos caſus a ſe inuicem diſtinguendos ſeorſim conſiderat, primum quo tabula immo-

immobilis concipitur, alterum quo super plano horizontali libere eſt mobilis. Quod vero primum attinet caſum, ſi celeritas glandis ante ictum deſignetur per c, altitudo ex qua graue vno min: ſec: libere cadit per g, reſiſtentia tabulae per R et maſſa glandis per M, tumque ſtatuatur $\int \frac{R\,dx}{M} = f$, poſito $x = a$ toti ſcilicet craſſitici tabulae; obſeruat Illuſtr. Auctor glandem penitus per tabulam penetrare ſi fuerit $c > 2\sqrt{gf}$, ſin autem ſit $c < 2\sqrt{gf}$ glandem per tabulam perrumpere non poſſe. Pro caſu ſecundo, ſi retentis reliquis denominationibus, maſſa tabulae exprimatur per N, oſtenditur glandem per tabulam penitus perumpere ſi fuerit $cc > 4gf\frac{M+N}{N}$, quae conditio in eam pro primo caſu manifeſto abit poſito $N = \infty$. Hinc itaque intelligitur eo maiori glandis celeritate opus eſſe vt perumpat, quo leuior ipſa eſt tabula deinde et hinc quoque perſpicitur celeritatem tabulae poſt ictum eo fore minorem, quo maior fuerit celeritas glandis ante ictum, quod vti iam ſupra monuimus primo intuitu omnino abſonum videri potuiſſet. Vlterius quo ſolutiones allatas Illuſt. Auctor magis illuſtraret, eas ad notiones communes, conſeruationis ſcilicet quantitatis motus et virium viuarum reuocare Ipſi placuit, vbi quidem obſeruat vires viuas non penitus conſeruari, ſed aliquam diminutionem pati, tantam ſcilicet, quantam tabulae perforatio requirit. Quum autem in prioribus ſolutionibus reſiſtentia tabulae, tamquam vnice pendens a quantitate x, profunditate ſcilicet penetrationis ſit conſiderata, eiusmodi autem ſaepe occurrere poſſint caſus vbi haec reſiſtentia, non tantum variabilem x, ſed aliam quoque veluti celeritatem implicet, neceſſum fuit oſtendere, quomodo ſolutiones pro huiusmodi caſibus adornandae ſint. Si enim tabula fluidi proprietate concipiatur praedita, tum nullum omnino eſt dubium, quin reſiſtentia non a variabili x pendeat ſed quadrato celeritatis ſit proportionalis, quoniam igitur tabulae non ſolum motus imprimendus eſt, ſed etiam eius particulae a ſe inuicem divellendae, euidens eſt reſiſtentiam duplicis generis heic conſiderari debere, adeoque totam reſiſtentiam ex duabus partibus componi, quarum prior functioni ipſius x ſit proportionalis, altera vero ipſo quadrato celeritatis.

PHYSICA

PHYSICA

I.

Rariorum Auium Expoſitio.

Auctore Sam. Gottl. Gmelin p. 439.

Varias hic aues Clar. Auctor deſcribit, iconibusque illuſtrat, quas in itinere ſuo per Ruſſicum Imperium facto, inter multa alia naturae producta hactenus obſeruauit. Non quidem omnes nouae prorſus et incognitae ſpecies ſunt, ſed deſiderantur tamen maximam partem accuratiores earum deſcriptiones, et in ſpecie icones, quae rarius apud Auctores inveniuntur. Vtrumque igitur a Clar. Auctore in hac Diſſertatione ſuppeditatur, qui ſecundum partes minutiſſimas non modo et colorum varietates ſingulas has aues verbis depingit, ſed ſingularum quoque partium, vt ſolet, dimenſiones laborioſe adiungit. Gregem ducunt Accipitres quidam: *Accipiter Macrourus*, circa vrbem Woronez, deinde ad omnem Tanain fluuium copioſe obſeruatus, cuius femina a mare adeo diſcrepat, vt pro diuerſa ſpecie facile haberi poſſit. Porro *Accipiter ferox* Aſtrachaniae frequens, *Accipiter Korſchun*, *Aquila Mogilnik* et *Noctua minor* in deſertis ad Tanain reperti. Sequuntur duae ex Gallinarum familia, *Perdix rufa* ſcilicet et *Phaſianus colchicus*, quarum deſcriptiones ab Auctoribus traditae hic emendantur et supplentur. Posthaec Ardeae quaedam, ea, cui *Kwakwae* nomen indidit Auctor, porro *castanea*, *ferruginea* et *niuea*, proponuntur, quae omnes ad Tanais littora primo vere et aestate copiose obseruantur, autumno vero, vnde venerant, ad mare nigrum redeunt. Has nondum descriptas exstare Clar. Auctor putat. *Numenius igneus* et *viridis*, qui sequuntur, in specie prior, miris, quibus ornantur, coloribus, e viridi passim, passimque ex rubro, violaceo, aureis, se commendant. Prior auis, dum per aerem volitat, radiis solaribus illustrata, tota aurea resplendet, vnde nomen sortita. Posterior magis viride tenet. Vtraque ad Tanais littora degit, piscibus insectisque victitat, gregatim volat, in altis locis nidificat. Denique Anseres nonnulli, *Anas erytrocephala* nempe, *Anas Kogolka* et *Onocrotalus* Lin. e quibus hic posterior, qui ad mare caspium et nigrum habitat praecipue notabilis est, et tandem, post maximam, minores quaedam aues proponuntur, quibus etiam Ardea adiungitur, cuius speciem dubiam Clar. Auctor reliquit.

II.
Descriptiones Auium.
Auctore I. Lepechin pag. 485.

Paruas quidem maximam partem, sed egregias specie et nouas auiculus, quas itidem in suo itinere

itinere obſeruauit, Clar. Auctor in hac Diſſertatione proponit. Prima earum *Emberiza* eſt *ſuperne rufa, ſubtus flaua, faſcia pectorali transuerſa ferruginea.* Obſeruatur pulchra haec emberizarum ſpecies circa Catharinopolin, vbi pineta imprimis inhabitare conſpicitur. Alia eiusdem generis ſpecies, non minus colorum varietate notabilis, eſt, quae definitur: *Emberiza capite diuerſimode faſciato, corpore ſupra rufeſcente, pectore atque imo abdomine canis.* Haec in iisdem cum priori regionibus inuenta fuit. Deinde motacillae ſpecies ſequitur, cui quidem cum Rubetra luccouenſi Briſſonii magna ſimilitudo eſt, ſed praeterquam, quod mas huius motacillae pectore gaudeat crocco, cuius nullam Briſſonius mentionem fecit, collare quoque illud album et interruptum, quo haec motacillae ſpecies donatur, ſatis eam ab auicula Briſſoniana, vt et a reliquis motacillarum ſpeciebus diſtinguere videtur. Quapropter eadem definitur: *Superne nigricans, torque albo interrupto pectore atque abdomine ſuperiore croceis.* Habitat in Betuletis et in locis paludoſis. Denique Strix proponitur minoris formae, quae Strigi paſſerinae etiam magnitudine multum cedit, ideoque definitur: *Strix capite aurito, e gente ſua minima, corpore toto gryſeo, fuſco, ferrugineo, alboque vario.* Circa Catharinopolin hanc ſpeciem Cl. Auctor inuenit. His tandem piſcis adiungitur. *Cyprinus corpore oliuaceo, maculis fuſcis diſtincto, ima corporis parte cinnabarina, pinna ani radiis ſeptem*, itidem Catharinopoli obſeruatus.

III.

III.

Deſcriptio Cyprini Rutili, quem Halawel Ruſſi vocant, hiſtorico-anatomica; pag. 494. nec non

IV.

Deſcriptio Piſcis, e Coregonorum Genere, ruſſice Sig vocati, hiſtorico-anatomica pag. 504.

Auctore I. T. Koelreuter.

Piſces duos Clar. Auctor in his Diſſertationibus ſiſtit Naturae curioſis, quos olim Petropoli examinauerat, quorumque nunc deſcriptionem ad Commentaria noſtra augenda Academiae transmiſit. Eorum prior *Cyprinus* eſt, *pinna ani radiis duodecim, rubicunda* (*Rutilus*) LINN. Poſterior autem, e *Coregonorum* genere in ſecunda Diſſertatione deſcriptus, ille eſt, quem LINNAEVS (Syſt. Nat. Ed. 10. p. 310.). Salmonem Lauaretum vocat. Vtriusque huius piſcis poſtquam externam corporis figuram, habitum, colores, parteſque externas, ad characterem conſtituendum neceſſarias, verbis concinne delineauit, interiores quoque partes ſecundum ſitum, figuram et connexionem inter ſe ſimili ratione Clar. Auctor

Auctor describit, et denique dimensiones quoque partium externarum adiungit. In posteriori Lien ex tribus lobis, plane distinctis, et nonnisi vasorum sanguineorum ope coniunctis, vel, si mauis, ex tribus lienibus compositus fuit. Notabilis autem est primo *Lerneae* quaedam species, hucusque incognita, quae pinnis Cyprini Rutili praesertim pectoralibus frequenter adhaerere inuenta est, cuiusque ideo iconem secundum magnitudinem naturalem factam Clar. Auctor addit. Deinde vermium plane nouum genus, cui Acanthocephalorum nomen imposuit Auctor, quod primum in Lauareto, deinde etiam in Cyprino Rutilo detexit. Insident hi vermes plerumque tunicis interioribus intestinorum horum piscium, praecipue duodeni et inferioris partis ventriculi, vbi adeo capite suo sese insinuant, vt difficulter, et saepe nonnisi cum iactura capitis extrahi possint; alii tamen libere etiam muco innatantes deprehensi sunt. Sedecim eorum in Cyprino Rutilo, ad octoginta vsque in Lauareto inuenit. Plenior horum vermium historia in Dissertatione priori exhibetur, cui etiam delineatio eorundem adiuncta est.

V.

De Leone. Obſeruationes anatomicae.

Auctore C. F. Wolff pag. 517.

In inquirenda ſtructura corporis leonis eum ſibi ſcopum propoſuit Clar. Auctor, vt, quae huic animali ſingularia et propria eſſent, quaeque ad intelligendas magnas eiusdem vires, ceterasque, quibus praeditum eſt, naturae dotes, conferre poſſent, notaret, cetera, quae vel communia plerisque animalibus et homini forent, vel nihil prorſus in functionibus efficere poſſent, conſiderate omitteret. Viſcera ideo non modo, ſed praecipue quoque muſculos extremitatum anteriorum et nernos ſcrutatus eſt, ſingularumque partium ſtructuram cum ſtructura hominis et felis comparauit. In hac quidem diſſertatione nonniſi muſculi et nerui traduntur. Reliqua, inter quae praecipue obſeruationes quaedam de corde et plenior deſcriptio valuularum veſiculae felleae eminent, ad alium Tomum transferentur.

De muſculis, qui ordine pertractantur, generatim notabile eſt, eorum plerosque craſſitie non modo et robore inſignes eſſe, (quod ſuſpicari quidem facile potuiſſes) ſed ita quoque fere omnes inveniri applicatos ſuis oſſibus, vt inde etiam ma-

gnum

gnum virium suarum augmentum nanciscantur. Sic pectoralis maior, qui in homine prope hypotrochlion ossi humeri inseritur, ibique spatium duorum vix pollicum occupat, ad extremitatem inferiorem huius ossis vsque plane decurrit suis fibris in leone, totumque os humeri secundum longitudinem tenet, vnde insigne virium augmentum huic musculo resultare, facile intelligitur. Alii vt alter flexorum cubiti ad angulum longe maiorem, quam in homine, ossibus suis inseruntur; ali aliis adminiculis ad vires augendas in modo insertionis gaudent, vti in dissertatione ipsa de singulis musculis sub rubrica *de vsu eorundem* legi potest. Adeoque non modo validitati musculorum sed etiam singulari fabricae rationi leo suas vires debet. Sed alia est in hac re Auctoris obseruatio, quae palmam priori forte praeripit. Nullum in leone exemplum structurae inuenitur, qua scilicet vires musculorum augerentur, quae non simul detrimento esset vel varietati vel plenitudini et perfectioni motuum inde pendentium. Vti igitur solis viribus inde, iisque adeo sollicite et adeo constanter prospectum esse videmus in hoc animali, vt etiam cum iactura aliorum motuum, et cum ipsorum, quibus vires augentur, imminuta magnitudine hoc factum sit; ita contra in homine solam motuum varietatem eorumque plenitudinem et perfectionem omnibus modis et cum maximo etiam dispendio virium, si aliter fieri non potuit, cultam atque curatam esse cognoscimus. Exempla legas in pectorali musculo, pag. 519. seq. in erectore cervicis pag. 523 seq. in flexore cubiti pectorali pag. 526. seq denique in eiusdem deltoideo flexore, pag. 529. seq.

Duo autem musculi respectu magnitudinis inter omnes in toto corpore leonis eminent, *erector magnus ceruicis*, qui proprius leoni musculus est, et *anconeus magnus*. His musculis in dilacerandis animalibus leo praecipue vtitur, dum anconei ope praedam ferit solumque versus deprimit, pag. 531. erectoris autem auxilio partem praedae, dentibus prehensam, sursum ducit pag. 524. Erector magnus ceruicis, vtrinque ad collum situs, quartam fere eius partem sua crassitie solus vtrinque efficit. Anconeus magnus ob enormem crassitiem, qua gaudet, figuram plane insolitam, cubicam quasi, induit, vt aeque fere ac longus et latus est, crassus quoque euadat vastissimus hic musculus. De neruis hoc modo generatim notamus, eos praeter opinionem tenuiores esse inuentos proportione animalis quam hominis nerui sunt aeque ac felis. Clar. Auctor inexspectatum hoc phaenomenon explicat, dum ostendit, animae quidem ad determinandos motus, quos vult in musculis excitari, minime vero musculis ad efficiendos hos motus, neruos inseruire. Inde enim sequitur, iis tantum animalibus maiori copia neruorum pro musculis opus esse, in quibus, velut in homine, maior motuum varietas et maior dexteritas in motibus dirigendis obtinet; iis, quibus minor in motibus varietas est, vti leoni, quamuis cum magna vi hi motus exerceantur, mino-

minorem neruorum copiam sufficere. Videtur autem hoc proprium et verum neruorum motoriorum officium in physiologia minus cognitum fuisse.

VI.

Nouae Plantarum Species.

Auctore Erico Laxmanno pag. 553.

Pemptadem plantarum sibiricarum ab ipso Cl. Auctore lectarum haec continet Dissertatio Prima earum est noua Veronicae species spica terminali, foliis linearibus dentato pinnatis, quam ob structuram foliorum *pinnatam* nominauit et cum Illustr. a Linne communicauit. Syst. nat. Tom. II. pag. 57. Mantissa pag. 24. Secunda est noua spiraeae species foliis lanceolatis, integerrimis, glabris, ad basin angustatis, sessilibus, floribus racemosis, racemis simplicibus, caule fruticoso, Cl. Auctori, ob locum natalem, Altaienses puta Alpes, *altaiensis*. Tertia est Dracocephalum foliis radicalibus cordatis, crematis, petiolatis, caulinis orbiculatis, subserratis, sessilibus floribus verticillatis, bracteis laciniatis, oblongis, *altoiense* etiam a loco natali sic dictum. Quarta est Robinia *spinosissima* foliis iunioris plantae sparsis, abrupte pinnatis, stipulatis, petiolo persistente, lignoso inque spinam acutissimam exeunte; adultae vero plantae foliis quaternatis, subpetiolatis, fasciculatis, floribus

bus ex fasciculis sessilibus; sibiriae transbaicalensis incola. Hunc fruticem, si beat. *Gmelinum*, *Stellerum* et *Ammanum* excipias nemo botanicorum oculis vidit: omnes autem cum *Ammano* Descr. stirp. ruth. pag. 205. pro Robinia pygmaea, quae tamen diversa est species, habuerunt. Quinta est Trifolium *dauricum*, foliis ternatis, foliolis oualibus, integerrimis, venosis, caule erecto, floribus capitatis, capitulis axillaribus et pedunculatis et sessilibus ex singula ala. Ipsae autem Descriptiones quas methodo Linneana tradidit in ipsis Commentariis melius leguntur.

ASTRO-

ASTRONOMICA

I.

Obſeruationes non nullae Anno 1767 et 1768 in obſeruatorio Petropoli inſtitutae.

Auctore Stephano Rumovski pag. 565

Referuntur hic non nullae obſeruationes ſuper Eclipſes Satellitum Iouis et vna obſeruatio Tranſitus Lunae per Pleyades, quae non aliud ſunt, quam continuatio earum, quae leguntur in Tomo XII. Comment. Inſerendae igitur illae forent ſequenti Tomo Commentariorum; Verum abſentia Auctoris factum eſt, quod illae ibi non compareant et quod huic demum Tomo ſiat reſeruatae.

II.

Obſeruationes Aſtronomicae annis 1769 et 1770. inſtitutae vna cum determinationibus geographicis aliquot locorum Imperii Ruſſici inde deductis.

Auctore W. L. Krafft pag. 571.

In hac diſſertatione continuata ſiſtitur expoſitio obſeruationum aſtronomicarum, quas Cl. Auctor, dum in itinere per imperium ruſſicum verſaretur, compluribus in locis inſtituit. Geographia ruſſica quanquam Aſtronomorum Academicorum laboribus iam eſt inſigniter promota; erant tamen principalia quaedam loca, quorum adcurata poſitio geographica adhuc deſiderabatur. Factum hinc eſt, vt Aſtronomis ad Venerem in Sole obſeruandam ablegatis etiam id negotii daretur, vt obſeruationibus aſtronomicis pro ſcopo geographico inſtituendis inuigilarent. Eiusmodi igitur obſeruationum ſuarum aliquot Cl. Auctor in hac diſſertatione non recenſet ſolum, ſed ad calculum quoque reuocat aſtronomicum et determinationes geographicas inde deriuat, quarum hic ſuccinctum exhibuiſſe conſpectum iuuat.

I. *Oppidum Vfa* ſitum eſt

ſub latit. boreali 54°. 42'. 45''

et

et ſub longit. geographica verſus
orientem a Lutetiis Pariſiorum $3^h. 34'. 14''$.

Ibi obſeruata eſt
occultatio ſtellae τ Tauri ſub Luna 1769. Aug.
nou. ſtil. 24. d. $15^h. 50'. 44''$ Temp. ver.

In eodem loco etiam Cometae iſtius inſignis anno 1769 conſpicui obſeruatio a Cl. Auctore inſtituta eſt, quae hic exponitur et cum theoria eius ab Aſtronomis ſtabilita comparatur.

II. *Oppidum Siſran* ſitum eſt
ſub latit. bor. $53°. 9'. 53''$
et a merid. Pariſino verſus orientem diſtat interuallo temporis $3^h. 4'. 19''$.

Ibi obſeruatus eſt
Tranſitus Lunae ad ſtellam ζ Tauri 1770. d. 1.
Apr. n. ſt.

Immerſio II. Satellitis Iouis
1770. 29 Martii $14^h. 15'. 9''$. Temp. vero.

Obſeruationem hanc Cl. Auctor cum ſua correſpondente, in oppido Tſcherkaski inſtituta, comparat, indeque errorem inſignem mapparum geographicarum etiam optimarum in poſitione littoris orientalis Maeotidis commiſſum corrigit; cuius veram poſitionem dudum Geographis crucem fixiſſe conſtat.

III. Kiouium ſitum eſt
ſub latit. bor. $50°. 30'$
et ſub long. geogr. a Lutetiis Pariſiorum verſus
orientem $1^h. 55'. 10''$.

Ibi obſeruata eſt

Emerſio I. Satellitis Iouis.

1770. d. 14. Aug. n. ſt. $7^h. 49'. 9''$ Temp. vero.

Sub finem diſſertationis ſuae Cl. Auctor ſubiungit obſeruationes miſcellaneas declinationis acus magneticae, Halonis circa Lunam memorabilis, Aurorarum borealium, et Luminis Caſſiniani.

III.

Determinatio Longitudinis Geographicae plurimorum locorum, in quibus Eclipſis Solis Anno 1769. obſeruata fuit.

Auctore A. I. Lexell. pag. 588.

IV.

Longitudo obſeruatorii Petropolitani, ex obſeruatione Eclipſis Solis A. 1769. determinata.

Auctore A. I. Lexell. pag. 645.

Prior harum diſſertationum expoſitionem tradit nouae Methodi, ex obſeruationibus Eclipſium Solis

Solis longitudines locorum definiendi, vna cum eiusdem applicatione ad obſeruationes, quae variis in locis ſuper Eclipſi Solis A. 1769 inſtitutae fuerunt. Quum enim Cl. huius diſſertationis Auctor, dum harum obſeruationum computum inire ſibi propoſuiſſet, atque eum in finem Methodum ſic dictam Nonageſimi adhibere conſtituiſſet; eam inſignibus defectibus laborare et ad calculum ineundum operoſiſſimam eſſe inueniſſet, de eo cogitare coepit, qua ratione haec Methodus ita emendari poſſet, vt non ſolum exactior eſſet, ſed etiam pro calculo nſtituendo facilior. Enim vero quum principale vitium, quo vulgaris Methodus Nonageſimi afficitur, in ipſis formulis pro Parallaxibus tam Latitudinis quam Longitudinis lateat, quippe quae formulae has parallaxes non niſi per approximationes ſuppeditant, et inſuper dum figurae Telluris Sphaeroidicae ratio habenda eſt, correctiones quasdam requirunt; in eo praecipue elaborandum fuit, vt pro his parallaxibus formulae ſimplices et concinnae traderentur. Hunc in finem Cl. Auctor conducere exiſtimauit, ſi diſtantiae aſtrorum non quidem a zenith apparenti, quemadmodum communiter fit computentur, ſed ab alio quodam coeli puncto fixo, illud ſcilicet, quod cum loco obſeruationis ipſoque telluris centro in directum iacet, quod punctum zenith verum appellare licuerit. Deinde quemadmodum in Methodo vulgari Nonageſimi punctum Nonageſimi in Ecliptica definitur, quadrante circuli per Polum eclipticae et zenith apparens tranſeunte, ita in noua hac Methodo, quadrans per

 Polum

Polum Eclipticae et zenith verum transiens definit in Ecliptica punctum, quod licet minus proprie heic punctum Nonagesimi a Cl Auctore nominatum fuit. Huius igitur Puncti Longitudine et altitudine definita, simplicibus maxime formulis Parallaxes Longitudinis et Latitudinis determinari possunt.

Vlterius etiam hoc in vulgaribus Methodis, Longitudines locorum ex eclipsibus Solis computandi merito desideratur, quod correctiones Elementorum Astronomicorum, Longitudinis et Latitudinis Lunae modo plane peruerso definiri soleant, omissis omnino correctiunculis, quibus Parallaxis Lunae et diametri Solis atque Lunae indigere possunt. Cl. vero Auctor noster, non solum formulas tradit concinnas, quibus effectus harum correctionum ad tempus coniunctionis Solis et Lunae immutandum exprimitur, sed etiam modum exponit quo ex binis expressionibus pro tempore coniunctionis, ex obseruato initio et fine Eclipsis deductis, aequatio inueniatur has correctiones tamquam incognitas inuoluens, atque adeo ostendit si tres huiusmodi aequationes habeantur, correctiones has tam exacte definiri posse, quam per ipsos errores obseruationum fieri licet.

Pro casu quidem praesenti Eclipsis Solis Anno 1769, vndecim omnino huiusmodi aequationes, ex totidem obseruationibus initii et finis Eclipsis in iisdem locis institutis deductae sunt, quae omnes excepta vnica ex obseruationibus Wardhusii factis deducta

ducta egregie inter se conueniunt, quum tamen ita comparatae sint, vt nulla spes esse queat, quaesitas correctiones ex ipsis cum summa praecisione erui posse, hinc quia Parallaxis Lunae iam satis exacte definita esse videtur, existimauit Cl. Auctor eius correctionem tuto assmi posse $-3''$, quae scilicet accommodata est hypothesi, quam pro figura telluris in suis calculis adhibuit. Tum vero reliquae correctiones Latitudinis scilicet Lunae et diametrorum, facilius determinantur, et prior quidem sine errore $4''$ aut $5''$ definiri poterit, posterior vero ob errores obseruationum multo magis dubia erit, vnde hae correctiones tutissime definientur, dum ipsis eiusmodi concilientur valores, quibus adhibitis errores obseruationum fiunt quam minimi. Hoc vero facto inuenit Cl. Auctor correctionem Latitudinis esse $-22''$ et summae semidametrorum Solis et Lunae $-3''$, quarum correctionum prior omnino vltra $5''$ erronea esse nequit, de posteriori autem vix quicquam certi affirmari potest. His autem valoribus correctionum adhibitis, ex momentis coniunctionum Solis et Lunae veris, sequentium locorum incognitorum Longitudines a Lutetia Parisiorum deductae sunt:

		in temp.	
	Caua	$0^h.38'.43''$	Occid.
Promont.	Lezard.	0. 30. 11	. . .
	Hafnia	0. 41. 0	Orient.
	Lunda	0. 43. 25	. . .
	Gryphiswaldia	0. 45. 34	. . .

Pello	$1^h.26'.56''$	Orient.
Caianeburg	1. 41. 41	. . .
Wardhus	1. 55. 6	. . .
Kola	2. 2. 42	. . .
Vmba	2. 7. 30	. . .
Ponoi	2. 35. 11	. . .
Gurief	3. 18. 37	. . .
Orenburg	3. 31. 5	. . .
Iakutsk	8. 29. 34	. . .

In posteriori harum dissertationum determinatio verae Longitudinis obseruatorii Petropolitani, deducta est ex obseruationibus, quas Celeb. Prof. *Mayer* super partes lucidas disci Solis durante Eclipsi A. 1769 instituit. Selectae autem hunc in vsum sunt, eae praecipue mensurae partium lucidarum, pro quibus distantiae apparentes centrorum Solis et Lunae cum ecliptica aequales constituerunt angulos ante et post coniunctionom apparentem horum Astrorum. Expressiones enim quae pro temporibus coniunctionis veris, ex huiusmodi obseruationibus deducuntur, ita comparatae sunt, vt si ex ipsis sumatur medium, illud ad veritatem quam proxime accedere debet, correctionibus scilicet ex erroribus Tabularum oriundis pro binis obseruationibus se mutuo destruentibus. Septem autem paria talium obseruationum pro Petropoli praebuerunt tempus coniunctionis d. 3. Iun. 1769 $22^h.22'.47''$, quod cum tempore coniunctionis Gre-

Grenouicensi $20^h. 21'. 32''$ comparatum, praebet Longitudinem obseruatorii Petropolitani a Grenouicensi $2^h. 1'. 15''$ adeoque a Parisino $1^h. 51'. 59''$. Hoc autem exemplo euidenter comprobatur, ex obseruationibus Eclipsium Solis exactas omnino deduci posse determinationes pro Longitudinibus locorum, atque dubia quae ad infringendam certitudinem harum determinationum a nonnullis etiam magni nominis Astronomis adferuntur nullius esse momenti.

V.

Expositio obseruationum Astronomicarum A. 1770 in vrbe Zaricin institutarum.

a Petro Inochodsow. pag. 655.

Obseruationum in Zaricin institutarum eae heic adferuntur, quibus Latitudo et Longitudo Geographica huius loci determinatur. Et quod Latitudinem quidem attinet, ea ex altitudinibus meridianis Solis conclusa est $48°. 42'. 25''$, ex altitudinibus vero plurium fixarum, vti Reguli, Arcturi, α Coronae Borealis, ε et ζ Bootis $48°. 42'. 14''$, vnde medio sumto $48°. 42'. 20''$ sine sensibili errore assumi poterit. Pro Longitudine definienda variae factae sunt obseruationes Eclipsium Satellitum Iouis, quarum

momenta

momenta partim cum Tab. Cel. *Wargentin* partim etiam cum aliis obſeruationibus correſpondentibus comparata, praebuerunt Longitudinem vrbis Zaricin a Meridiano Pariſino in tempore $2^h. 48'. 30''$ ſeu in Grad. $42°. 7'. 30''$. Declinatio acus magneticae pro hoc loco inuenta fuit 5° verſus Occidentem.

VI.

Epitome Obſeruationum Meteorologicarum Petropoli A. 1770. inſtitutarum.

Auctore Ioan. Albert. Euler p. 676.

Obſeruationum Meteorologicarum pro A. 1770. inſtitutarum ſummarium a Celeb. *I. A. Eulero* in hac diſſertatione traditur, iuxta Methodum quam in obſeruationibus A. 1769. inſtituendis ſequutus fuit, et cuius rationem in Tomo praecedenti horum Commentariorum fuſius expoſuit. Maxima altitudo Barometri obſeruata eſt d. 20. Nov. ſcilicet 28, 63 poll. minima die 27. Dec. 26, 76 pollic. Altitudo media per totum annum inuenta eſt 27, 92 et altitudo frequentiſſima 27, 97. Thermometri altitudo maxima obſeruata fuit d. 11. Aug. 103°. ſecundum Therm. Deslil. minima autem d. 6. Martii 186°, adeo vt differentia inter maximam et minimam

mam ſit 83°. Dies quibus Thermometrum infra punctum congelationis deſcendit 138 numerabantur, atque 261 quibus calor vltra 150° thermometri increſceret. Malaciae numeratae ſunt 13, ventus leniores 110, fortes 175 et procelloſi 67, quorum praecipui menſibus Ianuario, Martio et Decembri graſſarunt. Status coeli ſerenus fuit per 87 dies, nebuloſus diebus 51, pluuioſus 137, diebus 77 ninxit, et 3 grando cecidit. Aurorae boreales per totum annum viſibiles fuere 12.

INDEX.

DISSERTATIONVM.

Mathematica.

Phyſico-Mathematica.

D. Ber-

Physica.

Astronomica.

W. L. Krafft, Obſeruationes Aſtronomicae Annis 1769 et 1770. inſtitutae pag. 571.

A. I. Lexell, Determinatio Longitudinis geographicae plurimorum locorum, in quibus Eclipſis Solis A. 1769. obſeruata fuit p. 588.

Eiusdem, Longitudo obſeruatorii Petropolitani, ex obſeruatione Eclipſis Solis A. 1769. determinata pag. 645.

P. Inochodſow, Expoſitio obſeruationum Aſtronomicarum A. 1770. in vrbe Zaricin inſtitutarum pag. 655.

I. A. Euler, Epitome Obſeruationum Meteorologicarum, Petropoli A. 1770. Vet. St. inſtitutarum pag. 676.

MATHEMATICA.

CONTINVATIO ARGVMENTI DE MENSVRA SORTIS AD FORTVITAM SVCCESSIONEM RERVM NATVRALITER CONTINGENTIVM APPLICATA.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

In prioribus noſtris de iſto argumento commentationibus hypotheſin examinauimus adeo veriſimilem primo intuitu, vt falſitas eius poſt innumera demum experimenta in ſuſpicionem venire coeperit; aequam intelligo naturae procliuitatem ad vtrumque formandum ſexum. Nunc vero experti omnes vno fatentur ore, naturam ſexui maſculino magis fauere quam alteri aut ſaltem huc vſque magis fauiſſe. Id vero an caeca ſorte an ductu legis naturalis contigit? Equidem prius poſſibile eſt, alterum vero longe veriſimillimum atque

 proba-

probabilissimum; negligamus verba atque rem ipsam ponderemus. Sic operae pretium erit vt singulorum qui euenire possunt, casuum probabilitatem inquiramus pro hac altera hypothesi, quod natura in formanda prole mascula foecundior sit, quam in altera idque in ratione quacunque data sed constanter eadem quam vocabo a ad b. Nouam quaestionem, priori infinities ampliorem, praeter expectationem eleganti satisque simplici formula circumscriptam offendi, quam nunc exponam.

§. 2. Sit iterum, sicuti in paragrapho secundo dissertationis praecedentis, numerus partuum annuorum $= 2\,\mathrm{N}$ atque, vt rem sermone mathematico indicemus, ponamus pro quouis partu sexum hoc modo definiri, vt in vrna repositae sint schedulae partim nigrae pro sexu masculo partim albae pro sexu sequiore definiendo; fuerit numerus schedularum nigrarum $= a$, schedularum albarum $= b$: tum cuiusuis partus sexum schedula extracta indicet mox in vrnam reponenda; quod si hoc modo sexus pro $2\,\mathrm{N}$ partubus determinetur quaeritur quanta sit probabilitas vt numerus puellorum fiat praecise $= m$ atque adeo numerus puellarum $= 2\,\mathrm{N} - m$. Dabit nunc theoria combinationum, si modo omnia disposite fuerint ordinata, sequentem formulam generaliorem, quae verum quaesitae probabilitatis valorem sistit:

$$\frac{2\mathrm{N}.(2\mathrm{N}-1).(2\mathrm{N}-2)\,(2\mathrm{N}-3)\ldots\ldots(2\mathrm{N}-m+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\ldots\ldots\ldots\ldots m.\,2^{2\mathrm{N}}}\times\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\times\left(\frac{2\,b}{a+b}\right)^{2\mathrm{N}}.$$

§. 3. Miratus ſum ſimplicitatem modi, quo theoria haec generalior complectitur alteram a nobis praemiſſam pro aequiualentia vtriusque ſexus: poſito enim $a = b$ protinus perſpicitur fieri $(\frac{a}{b})^m \times (\frac{2b}{a+b})^{2N} = 1$ atque adeo formulam prodire plane eandem, quam paragrapho ſecundo primae diſſertationis expoſuimus. At ſi paruula intercedat inaequalitas inter a et b, inſignis ſtatim inde oritur differentia inter probabilitates ad vtramque hypotheſin computatas, quotiescunque pro N numeri aſſumuntur maiores; ſcilicet ſunt ambae probabilitates pro iisdem numeris m et N vt vnitas ad numerum $(\frac{a}{b})^m \times (\frac{2b}{a+b})^{2N}$, quae ratio plerumque a ratione aequalitatis admodum recedit pro magnitudine numeri m atque haec proprietas criterium nobis ſuppeditat haud ſpernendum in dignoſcenda lege naturae, ſi tabulae natalitiae, pro pluribus annis praeſto ſint. En huius rei exemplum.

Fuerit numerus omnium natorum $= 20000$ ſiue $N = 10000$ ſitque ſermo de ſpeciali caſu, quo iſta natorum ſumma ab vtroque ſexu in duas dirimitur partes perfecte inter ſe aequales: habebimus $m = 10000$; ponatur $\frac{a}{b} = 1.055$, qui valor obſeruationibus non male reſpondet: ſic fiet $(\frac{a}{b})^m \times (\frac{2b}{a+b})^{2N}$ $= (\frac{1055}{1000})^{10000} \times (\frac{2000}{2055})^{20000} = \frac{1}{1296}$: Igitur probabilitas, quae pro hocce casu militat vtcunque paruula sit, erit millies ducenties nonagies sexies maior si fuerit $\frac{a}{b} = 1$ quam si sit $\frac{a}{b} = 1.055$; vidimus autem in praecedente nostra dissertatione paragrapho septimo probabilitatem pro prima positione esse $= \frac{1}{177}$; erit ergo probabilitas pro altera positione $= \frac{1}{177} \times \frac{1}{1296}$ siue $= \frac{1}{229392}$. Huic paruulae probabilitati si omnes addamus, quibus numerus m infra numerum N deprimitur, quamuis id fieri possit decem millibus modis prius quam numerus m plane euanescat, tamen summa omnium harum probabilitatum pro decem mille casibus non sit vigesies maior quam est probabilitas pro solo casu, quo ponitur $m = N$: vnde deducitur, si quaestio fuerit quanta sit probabilitas vt Londini plures intra annum nascantur puellae quam pueruli aut saltem numero aequali, hanc probabilitatem minorem esse quam $\frac{1}{11469}$; verosimile autem est, vt id semel contingat in quouis decursu 12000 annorum propemodum. Tabula passim extat, qua ab anno 1664 vsque ad annum 1758 numerus quotannis indicatur tam filiolarum quam puellorum Londini in Ecclesia Episcopali baptizatorum, qua videre est nunquam intra 95 annos contigisse vt numerus puellarum aequalis esset, nedum maior, numero puellorum, etiamsi numerus omnium baptismatum annuorum notabiliter minor esset quam 20000 atque adeo id multo facilius contingere potuisset: anno 1703 puellae maxime ad aequalitatem cum puerulis accesserunt; baptizatae nempe fuerunt 7683 puellae atque 7765 pueru-

pueruli: paruum equidem hic fuit discrimen at superatu longe difficillimum.

§. 4. Formula in fine paragraphi secundi exposita naturam argumenti nostri egregie explicat. In hypothesi prima, qua ponitur $a = b$, decrescit probabilitas a medio versus extremitatem alteram; in hypothesi secunda, qua ponitur $a > b$, primo increscit ad certum terminum vltra quem decrescit; prope medium, vbi $m = N$, probabilitas in prima hypothesi admodum excedit probabilitatem in hypothesi alteta; quia vero in priori decrescit in altera increscit, locus erit vbi probabilitas eadem sit pro vtraque hypothesi, locus alius vbi probabilitas, in hypothesi altera, sit dupla, tripla, quadrupla &c. hosce nunc locos siue valores m definiam: requiritur autem, vt factor $(\frac{a}{b})^m \times (\frac{2b}{a+b})^{2N}$ ponatur successiue aequalis 1, 2, 3, 4 &c. indeque determinetur numerus m. Incipiamus a prima aequatione atque inueniemus

$$m = \frac{2N(\log. \overline{a+b} - \log. 2b)}{\log. a - \log. b}.$$

Vocemus hunc primum valorem A et sic habebimus successiue

$$m = A$$

$$m = A + \frac{\log. 2}{\log. a - \log. b}$$

$$m = A + \frac{\log. 3}{\log. a - \log. b}$$

$$m = A + \frac{\log. 4}{\log. a - \log. b}.$$

Sic

Sic generaliter erit $m = A + \frac{\log. \Phi}{\log. a - \log. b}$ si desideretur vt ambae probabilitates se habeant vt $1 : \Phi$. Descendamus ad exempla numerica.

§. 5. Sit porro $N = 10000$ atque $\frac{a}{b} = \frac{1055}{1000}$; habebitur $A = 10134$ atque generaliter $m = 10134 + \frac{\log. \Phi}{\log. 1.055}$ siue, adhibitis logarithmis communibus, $m = 10134 + 43 \log. \Phi$ vnde si proponatur successiue:

$\Phi = 1$ habebitur $m = 10134$
$\Phi = 2$ . . . $m = 10147$
$\Phi = 3$ . . . $m = 10154$
$\Phi = 4$ . . . $m = 10160$
$\Phi = 5$ . . . $m = 10164$
$\Phi = 10$ . . . $m = 10177$.

Apparet hinc quam enormiter increscat ratio quae intercedit inter probabilitates pro ambabus positionibus $\frac{a}{b} = 1$ et $\frac{a}{b} = 1.055$. Intelligitur simul quod quoties numerus puerorum natorum quadraginta tribus auctus ponitur toties ratio inter ambas probabilitates analogas decupletur.

§. 6. Relatio inter Φ et m ad logarithmicam pertinet sic vt operatione simplicissima numerus m indicari possit, pro quo ratio Φ datum obtineat valorem. Sit, verbi gratia, pro numeris in praecedente paragrapho assumtis, numerus puellorum m indicandus, qui decies millies millenis millibus vicibus facilius eueniat, posito $\frac{a}{b} = 1.055$ quam posito $\frac{a}{b} = 1$. In hoc exemplo fit $\Phi = 10000000000$

et

et log. $\Phi = 10$ ergo (§. 5.) $m = 10134 + 430 = 10564$ quis non miretur incredibilem fere probabilitatum differentiam pro casu, quo numerus puellorum medietatem, paruo numero 564 inter 20000, transgreditur. Quod si igitur rarissimo casu contigerit vt inter 20000 natos numerati fuerint 10564 pueruli atque adeo 9436 puellae, quis harum rerum intelligens statuet naturam ad vtrumque formandum sexum esse prorsus aequaliter procliuem? Id saltem certum est, huiuscemodi casum 1000000000 vicibus probabiliorem fieri, si fuerit $\frac{a}{b} = 1.055$, quamuis et tunc quidem vix inter possibiles reponi mereatur, quandoquidem solius casus istius probabilitas tantum est $= \frac{1}{1416050}$. Si porro ita augeatur minima ista probabilitas, vt comprehendat omnes casus, quibus numerus puellorum transgreditur numerum 10564, vix inde fiet decies maior, quantum absque instituto calculo iudicare possum; sic omnis probabilitas fiet tantum $= \frac{1}{141600}$, qua neglecta affirmare licebit nunquam futurum vt numerus puellorum natorum ad 10564 ex 20000 natis ascendat, etiamsi sexui masculino sua tribuatur praerogatiua, quam valor $\frac{a}{b} = 1.055$ indicat.

§. 7. Vidimus modo, quam parum verisimile sit, vt pro 20000 natis numerus puerorum vnquam ad 10564 ascendat puellarumque adeo ad 9436 deprimatur sicque differentia inter vtrumque sexum ad 1128 euagetur, etiamsi natura sexui masculino prae altero faueat in ratione 1055 ad 1000. Huius itaque rei curiosus tabulam consului Londinensem supra citatam, quam recenset Cl. *Süsmilch* in parte secunda egregii operis sui, cui in fine adiectae sunt plurimae huiuscemodi tabulae: inquisiui annos: vbi numerus puellorum maxime superaret puellas; memorabiles mihi visi sunt annus 1676, quo nati dicuntur aut potius baptizati 6552 pueruli et 5847 filiolae, dein a. 1698, quo 8426 masculi et 7626 filiolae; denique a. 1717, quo indicantur 9630 masculi et 8845 alterius sexus. Demonstraui autem differentias inte vtrumque sexum mutandas esse in ratione subduplicata numerorum 2 N vt eadem retineatur probabilitas: hac igitur adhibita correctione inueni nullum esse ex tribus annis allegatis, qui maiori attentione dignus sit, quam si pro 20000 natis excessus puerorum supra puellas fuerit propemodum 900, qui excessus multum adhuc deficit ab 1128.

Attamen non reticebo annum 1749 prae omnibus caeteris longe maxime rarum, quo scilicet baptizati dicuntur 7288 pueruli ac tantum 6172 filiolae: habemus hic excessum puerorum = 1116, dum summa natorum saltem fuit = 13460: ergo praefatus excessus 1116 augendus erit in ratione subduplicata numerorum 13460 ad 20000, qua facta reductione praefatus excessus mutatur in 1361: iam vero excessus iste notabiliter superat excessum 1128, quem non sine ratione supposuimus in longissima serie plurium millium annorum vix semel euenturum; igitur mihi persuadeo errorem irrepsisse

in

in alterutrum numerum 6172 et 7288; multo nimirum facilius eſt, vt in tabulas tot numeris refertas atque ſaepiſſime exſcriptas aliquando error irrepat quam vt inaequalitas portentoſa locum inveniat; puto autem loco 6172 filiolarum ſcribendum fuiſſe 6972; hac nempe facta vnius numeri mutatione relatio inter vtrumque ſexum fit maxime probabilis, quae fuerat tantum non impoſſibilis. Errorem ſuſpicatus numerum examinaui, qui indicat ſummam filiolarum baptizatarum intra decennium ab anno 1741 ad finem anni 1750; in tabula pro ſumma ponitur 70322, quae adhibita mea correctione perfecte ipſi rei conuenit: ergo error vel a ſcriptore vel a typographo fuit commiſſus, nec dubito quin annales Londinenſes conjecturam meam ſint confirmaturi.

Liceat verbum addere de tabula baptismali, quam idem auctor pag. 13. affert pro metropoli Auſtriaca; ſola ipſius inſpectio mihi ſtomachum mouit; nil continet, nec vereor dicere, niſi mera figmenta, vagante calamo conſcripta, quam praeſtigioſa ſit haec tabula, absque calculis noſtris vix intelligitur nec miror, quod Cl. *Süsmilch* eam dignatus ſit egregio ſuo operi inſerere, relata retulit fidem vnicuique liberam faciens.

§. 8. Ex praemiſſis intelligitur, quod ſumto numero $m > \frac{2N(\log.\overline{a+b} - \log.2b)}{\log.a - \log.b}$ probabilitas, in hypotheſi $a > b$, admodum ſuperet probabilitatem pro hypothesi $a = b$; contrarium obtinet quando sumitur $m < \frac{2N(\log. \overline{a+b} - \log. 2b)}{\log. a - \log. b}$. Scilicet, retenta significatione litterae Φ, erit tunc ratio inter vtramque probabilitatem expressa per $\frac{1}{\Phi}$ et cum sit $\log. \frac{1}{\Phi} = -\log. \Phi$, habebitur (§. 4.) $m = A - \frac{\log. \Phi}{\log. a - \log. b}$; atque, pro exemplo $m = 10000$, fiet (§. 5.) $m = 10134 - 43 \log. \Phi$, vbi nunc Φ designat, quoties probabilitas, in hypothesi $a > b$, superetur a probabilitate pro hypothesi $a = b$. Ponatur iterum $\Phi = 10000000000$ atque fiet $m = 10134 - 430$ siue $m = 9704$.

Hanc rem sic intellige. Quaeratur, pro hypothesi $a = b$, probabilitas vt sit numerus puerorum $= 9704$ et inuenietur ista probabilitas propemodum $= \frac{1}{177 \times 8000}$ siue $= \frac{1}{1416000}$; si minimae huius fractiunculae sumatur $\frac{1}{10000000000}$, habebitur pro hypothesi $a = 1.055\, b$ probabilitas vt sit numerus puerorum $= 9704$. Vix animo huiusmodi paruitas concipitur; Denique si in summam colligantur omnes et singulae probabilitates vt numerus puerorum infra 9704 deprimatur atque ponatur ab hac summatione probabilitatem fieri decies maiorem, fiet probabilitas vnita $= \frac{1}{141600000000000}$, qua neglecta affirmare licet, fieri non posse vt numerus puerorum limites 10564 atque 9704 transgrediatur, si fuerit $a = 1.055\, b$ nec numerus puellarum limites 9436 ac 10296.

§. 9. Nunc aliam aggredior quaestionem, quisnam sit numerus m prolis annuae masculae prae omnibus caeteris maxima probabilitate donatus? Equidem, pro hypothesi $a = b$, in primo schediasmate

assumsi

aſſumſi absque demonſtratione, quia tunc res per ſe clara eſt, faciendum eſſe $m = N$. At cum inaequalitas ſuppponitur inter a et b, quaeſtio praeſens aliam induit faciem. Recurremus ad formulam in fine paragraphi ſecundi expoſitam, quae pro quouis numero m probabilitatem ſuam exprimit, nempe

$$\frac{2N.(2N-1).(2N-2).(2N-3)\ldots\ldots(2N-m+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\ldots\ldots\ldots m+2^{2N}}\times\left(\frac{a}{b}\right)^m\times\left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2N}.$$

In iſta formula valor quidem factoris indefiniti decreſcere incipit ſtatim ac numerus m ponitur $> N$; verum enim vero alter factor variabilis $(\frac{a}{b})^m$ cum continue creſcere pergat, apparet locum eſſe poſſe, vbi productum ex ambobus factoribus ſit maximum; hinc aliqua veluti excentricitas. Locum vero ipſum maximae probabilitatis ex eo definire licebit, quod pro duobus indicibus proximis m et $m+1$ eadem eſſe debeat probabilitas. Poſito autem $\frac{2N.(2N-1).(2N-2)\ldots\ldots(2N-m+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots\ldots\ldots m} = S$ fit probabilitas pro indice $m = S\times(\frac{a}{b})^m\times(\frac{b}{a+b})^{2N}$ pariterque pro indice $m+1$ oritur probabilitas $= \frac{2N-m}{m+1} \times S\times(\frac{a}{b})^{m+1}\times(\frac{b}{a+b})^{2N}$. Facta igitur aequatione inter ambas probabilitates, reperitur $\frac{2N-m}{m+1}\times\frac{a}{b} = 1$ ſiue $m = \frac{2Na+b}{a+b}$, quia vero terminus $2Na$ veluti incomparabiliter maior eſt quam b, poterit ſimpliciter poni $m = \frac{2Na}{a+b}$ atque numerus puellarum siue $2N - m = \frac{2Nb}{a+b}$ sic vt ambo numeri sint in ipsa ratione a ad b, quod ipsum formulas nostras egregie confirmat.

§. 10. Sic igitur in exemplo nostro, quo posuimus $2N = 20000$, maxima probabilitas incidit in numerum $m = 10268$; vltra citraque hunc locum probabilitas decrescit, ab initio quidem lentissime, deinde citius, mox enormiter. Notabimus hic in transitu quod punctum illud, de quo §. §. 4 et 5 diximus, vbi eadem fit probabilitas pro vtraque hypothesi, sit in medio positum inter ambo puncta maximae probabilitatis pro vtraque hypothesi; est scilicet pro hoc puncto $m = 10134$, qui numerus medius est inter 10000 et 10268 atque haec proprietas generaliter locum habet, si parua sit differentia inter a et b.

§. 11. Maxime conducit praefatum locum, qui facit $m = \frac{2Na}{a+b}$ et pro quo maxima oritur probabilitas, considerare tanquam punctum fixum omnesque calculos ita ponere vt distantia ab hoc puncto tanquam a centro virium examinetur: quae enim dicta sunt nondum satis computum subleuant: igitur opera danda est vt pro quouis indice dato m probabilitas formula aliqua definita determinetur, saltem quam proxime quandoquidem id omni rigore fieri nequit. Hanc viam iniui in primo schediasmate nec certe sine successu; qua de re videatur primo paragraphus quintus; deinde decimus octauus.

§. 12.

§. 12. Ponatur, breuitatis gratia, $\frac{2Na}{a+b} = M$, ſic vt M denotet numerum puerorum maxima probabilitate donatum atque ponatur index $m = M + \mu$, vbi μ notabit exceſſum indicis ſupra numerum maximae probabilitati reſpondentem: ponatur praeterea probabilitas, pro indice $M + \mu = \pi$, cuius verum valorem iam ſupra paragrapho ſecundo atque nono indicauimus at formula indefinita, pro magnis numeris incomputabili, expreſſum. Animus fert inquirere rurſus, annon iſti formulae indefinitae alia ſubſtitui poſſit proxime vera et definita: conſiderabimus quantitates μ et π tanquam coordinatas variabiles. Patet autem ex ipſa formula indefinita fore probabilitatem, pro indice proximo $M + \mu + 1$, $= \frac{2N - m}{m + 1} \times \frac{a}{b} \times \pi$ ſiue $\frac{2N - M - \mu}{M + \mu + 1} \times \frac{a}{b} \times \pi$, quae ſi ſubtrahatur a probabilitate praecedente π erit differentia vtriusque probabilitatis $= \pi - \frac{2N - M - \mu}{M + \mu + 1} \times \frac{a}{b} \times \pi$. Iam vero iterum ſupponam hanc differentiam eſſe ad differentiam duorum indicum proximorum, id eſt, ad vnitatem, ſicuti $-d\pi$ ad $d\mu$, quod vtique absque vllo ſenſibili errore ſupponi poteſt ob proximitatem amborum indicum; haec autem ſuppoſitio ſequentem ſubminiſtrat aequationem $-\frac{d\pi}{\pi} = \left(1 - \frac{2N - M - \mu}{M + \mu + 1} \times \frac{a}{b}\right) d\mu$. In iſta aequatione pro quantitate M reſtituam eius valorem $\frac{2Na}{a+b}$, vt tanto melius quantitates, quae in fine calculi negligi poſſint, ab inuicem dignoſci queant; facta iſta reſtitutione fit $-\frac{d\pi}{\pi} = \left(1 - \frac{2Na:(a+b) - \mu a:b}{2Na:(a+b) + \mu + 1}\right) d\mu$ vel $-\frac{d\pi}{\pi} = \frac{\mu + 1 + \mu a:b}{2Na:(a+b) + \mu + 1} d\mu$ autdenique $-\frac{d\pi}{\pi} = \frac{\mu + 1 + \mu a:b}{M + \mu + 1} d\mu$.

§. 13.

§. 13. Praemissa aequatio ita est integranda vt posito $\mu = 0$ fiat $\pi = Q$, vbi per Q intelligo probabilitatem maximam, quae locum habet pro indice M aut $\frac{2Na}{a+b}$: Sic prodit

$$\log. \frac{Q}{\pi} = \frac{a+b}{b}\mu - \frac{a+b}{b}(M+1)\log. \frac{M+\mu+1}{M+1} + \log. \frac{M+\mu+1}{M+1}.$$

Quia vero haec aequatio inseruire tantum debet supputandis exemplis, in quibus numerus μ multo minor est numero M, quandoquidem in caeteris probabilitas fere euanescit nec meretur vt eius ratio habeatur, e re erit in penultimo termino quantitatem $\log. \frac{M+\mu+1}{M+1}$ in seriem conuertere; in hac serie sufficiet tres primos considerasse terminos atque sic ponere

$$\log. \frac{M+\mu+1}{M+1} = \frac{\mu}{M+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{M+1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{M+1}\right)^3:$$ hoc modo aequatio sic poni poterit

$$\log. \frac{Q}{\pi} = \frac{a+b}{b}\left(\frac{\mu\mu}{2(M+1)} - \frac{\mu^3}{3(M+1)^2}\right) + \log. \frac{M+\mu+1}{M+1}$$

vel posito c pro numero cuius logarithmus hyperbolicus vnitas est

$$\frac{Q}{\pi} = \frac{M+\mu+1}{M+1} c^{\frac{a+b}{b}\left[\frac{\mu\mu}{2(M+1)} - \frac{\mu^3}{3(M+1)^2}\right]}$$ siue

$$\frac{\pi}{Q} = \frac{M+1}{M+\mu+1} c^{-\frac{a+b}{b}\left[\frac{2(M+1)}{\mu\mu} - \frac{\mu^3}{3(M+1)^2}\right]}.$$

Quod si nos magis a scrupulositate relaxare velimus, licebit simplici vti formula,

$$\frac{\pi}{Q} = c^{-\frac{a+b}{2b}\times\frac{\mu\mu}{M}}.$$

Haec

Haec vero vltima formula perfecte eadem eſt cum ea, quam exhibui in primo ſchediasmate §. 18. et quam paragrapho ſequente paruula tabella confirmaui: poſito namque $a=b$, fit ſimul $M=N$ atque ſic ſimpliciter oritur $\frac{\pi}{Q}=\frac{1}{c^{\frac{\mu\mu}{N}}}$

§. 14. Praemiſſa aequatio tanto erit accuratior, quanto minor ſupponitur differentia inter a et b et quanto ſimul minor eſt numerus μ, quod vtrumque inſtituto noſtro ſatis conuenit: igitur operae pretium erit hanc aequationem vlteriori examini ſubiicere.

Reſtituatur pro litera M valor ipſius paragrapho duodecimo indicatus, nempe $\frac{2Na}{a+b}$: ſic erit exponens $\frac{a+b}{2b}\times\frac{\mu\mu}{M}=\frac{(a+b)^2}{4ab}\times\frac{\mu\mu}{N}$: ponatur $b=1$ et $a=1+\alpha$, vbi α ponitur vnitate multo minor; habebitur $\frac{(a+b)^2}{4ab}=\frac{4+4\alpha+\alpha\alpha}{4+4\alpha}=1+\frac{\alpha\alpha}{4+4\alpha}$: hic manifeſte negligi poteſt terminus vnitati adiectus atque adeo poni $\frac{(a+b)^2}{4ab}=1$, quo facto fit exponens $\frac{a+b}{2b}\times\frac{\mu\mu}{M}=\frac{\mu\mu}{N}$ et ſic poteſt ſimpliciter poni

$$\frac{\pi}{Q}=c^{\frac{-\mu\mu}{N}} \text{ ſiue } =\frac{1}{c^{\frac{\mu\mu}{N}}}.$$

Sic igitur, pro omni valore $\frac{a}{b}$, probabilitas conſtanter eodem modo exprimitur, modo, loco diſtantiae termini a medio, intelligatur per μ diſtantia a termino maxima probabilitate donato, quae profecto proprietas omnem meretur attentionem.

 §. 15.

§. 15. Sed et ipſa probabilitas termini, quae maxima eſt, variante ratione $\frac{a}{b}$, proxime eadem manet pro eodem numero μ eodemque numero N, haecque altera proprietas non minus notatu digna eſt atque totum noſtrum argumentum egregie illuſtrat. Id vero ſic demonſtro. Sit in hypotheſi $a = b$, maxima probabilitas $= q$, qualis eſt cum ſumitur $m = \mathrm{N}$; deinde, pro eodem numero N, ponatur aliquantilla inaequalitas inter a et b atque pro iſta altera hypotheſi dicatur maxima probabilitas $= \mathrm{Q}$; haec autem §. 9. incidit in indicem $\frac{2\mathrm{N}a}{a+b}$: ſumatur differentia inter ambos indices N et $\frac{2\mathrm{N}a}{a+b}$, quae erit $= \frac{a-b}{a+b}\mathrm{N}$. Sic erit (pro hypotheſi $a = b$) probabilitas termini, cuius index indicatur per $\frac{2\mathrm{N}a}{a+b}$ $= q : c^{(\frac{a-b}{a+b})^2 \mathrm{N}}$, quia ſcilicet pro μ ponendum eſt $\frac{a-b}{a+b}\mathrm{N}$; haec vero vltima probabilitas, ſi multiplicetur per $(\frac{a}{b})^m \times (\frac{2b}{a+b})^{2\mathrm{N}}$ dabit, vi paragraphi ſecundi, probabilitatem Q pro eodem indice $\frac{2\mathrm{N}a}{a+b}$, qui maxima probabilitate in altera hypotheſi donatus erit. Sic itaque habebitur

$$\mathrm{Q} = \frac{q}{c^{(\frac{a-b}{a+b})^2 \mathrm{N}}} \times (\frac{a}{b})^m \times (\frac{2b}{a+b})^{2\mathrm{N}}$$

vbi ſupponitur $m = \mathrm{N} + \mu$ ſiue pro hoc negotio $m = \frac{2\mathrm{N}a}{a+b}$, hacque facta ſubſtitutione fit

$$\mathrm{Q} = \frac{q}{c^{(\frac{a-b}{a+b})^2 \mathrm{N}}} \times (\frac{a}{b})^{2\mathrm{N}a:(a+b)} \times (\frac{2b}{a+b})^{2\mathrm{N}}.$$

Nunc

Nunc demonſtrabo, quod ſi a et b parum inter ſe differant, cenſeri poſſit factor

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2Na:(a+b)} \times \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{2N} = c^{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 N}$$

ſic vt poſſit aſſumi $Q = q$: hunc in finem ponatur rurſus $b = 1$ et $a = 1 + \alpha$ intelligendo per α parvulam fractionem; ſic fiet $\frac{2Na}{a+b} = \frac{2+2\alpha}{2+\alpha} N = (1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha\alpha + \frac{1}{8}\alpha^3) N$: ergo, ſumtis logarithmis hyperbolicis, praefata aequalitas demonſtranda abit in hanc alteram:

$$(1 + \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{4}\alpha\alpha + \tfrac{1}{8}\alpha^3) N \log.\frac{a}{b} + 2N \log.\frac{2b}{a+b} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 N.$$

Quod ſi nunc porro pro a et b ſubſtituantur valores $1 + \alpha$ et 1 atque quantitates $\log.\frac{a}{b}$; $\log.\frac{2b}{a+b}$ et $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$ in ſeries conuertantur, neglectis terminis in quibus α dimenſionem tertiam tranſcendit, prodibit $\log.\frac{a}{b}$, ſiue $\log.(1+\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$; deinde $\log.\frac{2b}{a+b} = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{8}\alpha\alpha - \frac{1}{24}\alpha^3$; denique $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{1}{4}\alpha\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha^3$; his autem ſubſtitutis terminis, ſi multiplicationes actu inſtituantur neglectis porro terminis, in quibus α tertiam dimenſionem tranſcendit, aequatio obtinetur perfecte identica. Ergo absque vlla haeſitatione poteſt cenſeri $Q = q$.

Sic argumentum noſtrum, quod prima fronte videbatur valde tenebricoſum, ſubita luce elucescit; totum enim negotium in eo poſitum eſt, vt pro quouis valore $\frac{a}{b}$ index μ numeretur a termino maxima probabilitate donato, ſiue vt pro μ accipiatur

tur exceſſus puellorum ſupra numerum $\frac{2Na}{a+b}$: hoc facto erunt variationes probabilitatum in omni exemplo proxime eaedem pro iisdem numeris μ ſiue affirmatiue ſiue negatiue ſumtis. Sed et ipſae probabilitates, vbi maximae ſunt, in omni exemplo, ſine vllo ſcrupulo, eaedem cenſeri poſſunt, modo inter a et b differentia non admodum magna accipiatur. Sic quoque ratio apparet proprietatis illius, cuius mentionem fecimus §. 10. in fine.

§. 16. Ex praemiſſis patet, quemadmodum probabilitates poſſint quam proxime determinari pro quouis natorum numero, pro quolibet puellorum numero et pro qualibet ratione inter a et b. En totum proceſſum! Quaeratur primo maxima probabilitas pro hypotheſi $a = b$, quae vi paragraphi ſeptimi prioris ſchediasmatis $= \frac{1,12826}{\sqrt{(4N+1)}}$ atque haec probabilitas proxime eadem manebit, cum maxima eſt, pro omni alia ratione inter a et b: imo poterit ſimplicius poni probabilitas maxima $= \frac{0,56413}{\sqrt{N}}$: Deinde ſumatur numerus $\frac{2Na}{a+b}$, qui indicat numerum puellorum maxima probabilitate gaudentem, quo facto detur qualiscunque alius puellorum numerus expreſſus formula $\frac{2Na}{a+b} + \mu$; dico fore probabilitatem proxime $= \frac{0,56413}{\sqrt{N}} \times \frac{1}{c^{\mu\mu:N}}$. Nec puto hanc rem commodius ſimulque accuratius confici poſſe, cum magnus eſt numerus N. Si paruulus fuerit iſte numerus, totum negotium omni rigore abſoluetur ope formulae in fine paragraphi ſecundi expreſſae.

ſae. Si denique mediocris, viderit analyſta, vtram alteri formulam praeferre velit.

§. 17. Integrum proceſſum ſingulari exemplo illuſtrabo ex tabulis *Süſmilchianis* ſelecto, quamuis paulo minus idoneo ob enormitatem numeri noſtri μ: ſcilicet Cel. *Süſmilch* in parte ſecunda operis ſui, cui in fine plurimae adiectae ſunt tabulae, pag. 13. tab. IV. refert exemplum pro metropoli Auſtriaca ad annum 1728, quod natae fuerint 3102 filiolae ac 2020 puelli; hic igitur $N = \frac{3102 + 2020}{2} = 2561$ atque poſito rurſus $\frac{a}{b} = 1.055$ fit $\frac{2 N a}{a + b} = 2651$: vnde $\mu = 2020 - 2651 = - 631$; ergo pro ipſiſſimo hoc caſu ſpeciali probabilitas eſt $= \frac{0.56413}{\sqrt{2561}} \times \frac{1}{e^{155}}$; iſta vero fractiuncula minor eſt, quam vnitas applicata ad vnitatem ſexaginta nouem *nullionibus* praefixam, cuiusmodi paruitas omnem eludit conceptum imo ſi omnes addamus probabilitates, quibus numerus puellorum infra 2021 deſcendere poneretur, vix inde triplicabitur praefata probabilitas: igitur ſi quaeſtio fuerit quanta ſit probabilitas vt inter 5122 natos numerus puellorum infra 2021 deprimatur, dico numerum maiorem quam eſt ternarius ſexaginta octo *nullionibus* praefixus, certari poſſe contra vnum non fore vt hoc contingat: an Viennae contigerit et an tot repetitis vicibus aliud ſimile portentum contigerit, prouti citata tabula refert, iudicent alii. Nec praetexatur fieri poſſe, vt Viennae facilius et frequentius filiolae procreentur ac puelli; in eadem enim tabella ad annum 1724 refertur, puellas ba-

 ptiza-

ptizatas fuiſſe tantum 1422 puerulos autem 3005, quae enormis inaequalitas alteri contraria, ſi rurſus calculo ſubiiciatur, ab omnibus pro *moraliter impoſſibili* habebitur. Tantae profecto irregularitates nec legi naturali nec ſorti vllo modo adſcribi poſſunt.

§. 18. At ſi integer natorum numerus ſit perexiguus, tunc caſus qui apparent maxime extraordinarii, multo minus ſunt improbabiles quam praeſumi poſſit: exemplum allegabo, quod mihi certum eſt. Nempe anno 1763 in paruo Ditionis Baſileenſis oppido, cui nomen *Liechſtahl* eſt, nati ſunt 20 filioli atque 37 puellae. Huiusmodi natorum partitio, vbi numerus puellarum fere duplus eſt puerulorum, equidem non poteſt non eſſe valde rara, at ob natorum paucitatem nihil habet, quod cum praefatis exemplis vllo modo comparari poſſit: Ecce calculum numericum.

Habemus ſcilicet $2N = 57$ atque adeo (ſtante porro $\frac{a}{b} = \frac{1055}{1000}$) $\frac{2Na}{a+b} = 29,26$: igitur $\mu = 20 - 29.26 = -9,26$ atque $\frac{\mu\mu}{N} = 3,01$; hinc $c^{\mu\mu:N} = 20,08$ ergo probabilitas quaeſita $= \frac{0,56413}{20,08\sqrt{28,5}} = \frac{1}{190.}$, quae quidem valet pro ipſo caſu, qualis fuit. Igitur pro 57 natis probabile eſt vt intra 190 annos ipſiſſimus ille caſus, qualis contigit, ſemel contingat. Quia vero a ſola puerorum paucitate notabilis fuit, merito adiiciendae ſunt probabilitates ſingulorum caſuum, vbi numerus puellorum magis adhuc ſit depreſſus et tunc ſumma omnium harum probabilitatum aſcendit propemodum ad $\frac{1}{70}$; adeoque ſi numerus

rus omnium obferuationum annuarum fuerit 70, probabile fuit vt femel contingeret id ipfum quod contigit, nempe vt de 57 natis proles mafcula infra 21 deprimeretur: caeterum reductionem probabilitatis $\frac{1}{195}$ ad $\frac{1}{70}$ obiter feci; fateor etiam calculos numericos, ob paruitatem numeri N et magnitudinem relatiuam numeri μ, non omni quidem gaudere accuratione; attamen paruulos effe errores, qui facile negligi poffint, contendo.

§. 19. Intelligimus nunc porro, quod numerando numeros μ ab numero, in quem maxima probabilitas cadit, eadem fit probabilitas pro eodem numero μ, quaecunque intercedat ratio inter a et b, modo haec ratio parum ab aequalitate recedat, intelligimus, inquam, quod et fumma probabilitatum pro eodem terminorum numero μ debeat effe eadem in primo autem fchediasmate, tabulam dedi cuius ope determinaui limites intra quos, vt numerus puerorum fubfiftat, aequa fit certatio; iam dico eosdes limites affumi poffe pro ratione qualicunque parum inaequali inter a et b modo fiat vt maxima probabilitas incidat in medium horum limitum. Vidimus autem in fine paragraphi duodecimi pro hypothefi $a = b$ atque $2\,N = 20000$, quod hi limites fint $9952\frac{3}{4}$ et $10047\frac{1}{4}$, qui aequidiftant a numero 10000, vterque nimirum numero $47\frac{1}{4}$; iam igitur dico quod mutata ratione a ad b eaque pofita $= \frac{1055}{1000}$, manente eodem natorum numero, fimilis conditio incidet in limites $9952\frac{3}{4} + 268$ et $10047\frac{1}{4} + 268$ fiue siue in limites $10220\frac{3}{4}$ et $10315\frac{1}{4}$ aequidistantes a termino 10268 maxima probabilitate donato, (§ 10.) vbi communis distantia iterum est $47\frac{1}{4}$. Ergo rursus aeque probabile est vt numerus puellorum hosce limites transgrediatur vel non transgrediatur. Miratus sum tantam horum terminorum angustiam.

Sed et porro in praecedente schediasmate monui paragrapho decimo tertio, distantias limitum diminui proxime in ratione subduplicata numerorum, qui omnium natorum summam indicant. Sic pro 5000 natis aequa erit certatio proxime, fore vt numerus puellorum non maior sit quam 2500 $+67+24$ siue 2591 nec minor quam $2500+67-24$ siue 2543 qui limites simpliciter indicantur 2567 ± 24.

Si in Gallia tota proles annua ponatur 600000 erit proles mascula media $= 308040$ et aequa propemodum erit sponsio, excessum aut defectum prolis masculae numeratae non fore maiorem quam 260, si, cum statu medio conferatur, posito nimirum $\frac{a}{b} = 1{,}055$.

§. 20. Hasce de limitibus aeque probabilibus disquisitiones vtiles fore sperabam, vt tutius et accuratius ferri posset iudicium de vera lege naturali siue de vera proportione inter numeros *a* et *b*: an vbiuis terrarum? an omni tempore sibi constat? an omnes variationes. quae reliquae sunt. sorti sunt adscribendae? an ipsa lex naturalis aliquam patitur variationem? De his adhuc dum haesito: nimis parvula

vula videtur differentia inter a et b nimiumque efficaciae sortis inuoluta quam vt maximo obseruationum numero accurate determinari possit: aliquando ipsi numeri, qui exacte obseruari potuissent, non sunt omni suspicione certiores. Ratio $a:b$, quam legi naturali adscribo, non potest vtique aliter quam ex magno obseruationum numero deduci; plures autem, deductiones huiusmodi concipi possunt; modus simplicissimus, quo assumitur esse a ad b, vt summa puellorum natorum ad summam filiolarum natarum, mihi adhuc caeteris videtur praeferendus. Attamen non spernenda puto criteria, quae in limitibus aequa probabilitate ditatis posita sunt; hac de re paulo disertius dicam.

§. 21. Quo maior est summa natorum, eo tutior est ad rationem $a:b$ determinandam; Per integros 95 annos Londini nati sunt 737629 filioli atque 698958 puellae; vnde optime statuitur $\frac{a}{b} = \frac{737629}{698958} = 1.055$ (apud *Süsmilchium* paruulo errore ponitur 1.054 vid. pag. 21). Ab hoc valore medio obseruationes aliquando notabiliter recedunt, etiamsi integra decennia accipiantur: decennium 1721 ... 1730 exhibet 89217 puellas et 92813 filiolos sicque $\frac{a}{b} = 1.040$, qui valor inter omnia decennia minimus est; maximus fit pro septennio 1664 ... 1670, quo nati sunt 37283 puellae et 40306 masculi; vnde $\frac{a}{b} = 1.081$ ex summatione praefati decennii atque septennii emergit $\frac{a}{b} = 1.054$, qui valor cum hypothesi communi satis conuenit. Decennium 1681 . . . 1690 maiorem indicat aberrationem; ponitur enim $\frac{a}{b} = 1.097$; at error fuit commiſſus et ponendum erat 1.056 loco 1.091. huiusmodi errores ſe ipſos produnt; ſimul autem aliorum commiſſorum errorum, qui nullo modo diuinari poſſunt, metum faciunt. Attamen ponamus verum valorem $\frac{a}{b} = 1.055$ fueritque pro decennnio 1721 . . . 1730, $2N = 182031$ (loco numeri 92813 ſummam prolis maſculae indicantis ponendus erat numerus 92814); ſic prodit numerus $\frac{2Na}{a+b} = 93451$, qui maxima probabilitate gaudet pro numero prolis maſculae indicando; ſorte autem euenit vt numerus iſte tantum eſſet 92814: igitur aberratio ſorti debita hic fuit $= 637$ pro integra generatione 182031: ponamus nunc generationem multo maiorem adhuc, veluti 4000000; vidimus autem paſſim aberrationes pro eodem gradu probabilitatis eſſe in ratione ſubduplicata generationum; erit igitur nunc aberratio aeque probabilis $= 637 \times \sqrt{\frac{4000000}{182031}} = 2986$: ſed eſt porro nunc $\frac{2Na}{a+b} = 2053528$, qui numerus indicat valorem prolis maſculae maxime probabilem, poſito $\frac{a}{b} = 1.055$ atque tunc oritur numerus omnium filiolarum 1946472; ſubtrahamus errorem 2986 ſorti debitum a numero puellorum eundemque addamus numero filiolarum, habebimus numeros 2050542 et 1949458, pro vtroque ſexu, qui eadem facilitate contingere poſſunt pro generatione 4000000 atque numeri 92814 et 89217 contigerunt pro generatione 182031: eſt autem 1949458 : 2050542 = 1000:

$= 1000 : 1052$: Igitur ſi vel certa ſit poſitio $\frac{a}{b}$ $= 1.055$, poterit tamen contingere vt vel in generatione 4000000 infantum indicetur $\frac{a}{b} = 1.052$: poteſt porro error a ſorte oriundus eadem facilitate contingere in exceſſu tuncque fieret ratio $\frac{a}{b} = 1.058$. Ergo obſeruationes ducentorum annorum Londini inſtituendae, etiamſi fuerint accuratiſſimae, nondum ſufficient ad tollendam haeſitationem 0.006 in ſtabilienda lege naturali ſiue ratione $\frac{a}{b}$. Euagationes multo maiores eſſe poſſunt in generationibus longe minoribus, quod tabulae confirmant.

§. 22. Vnicum ſuperaddam de limitibus mediis vel aeque probabilibus aberrationum ſorti debitarum; ſit ſcilicet rurſus numerus $\frac{2Na}{a+b} \pm \mu$, vbi $\frac{2Na}{a+b}$ exprimit numerum puellorum ſecundum legem naturae et μ aberrationem; vidimus fore pro $2N = 20000$, $\mu = 47\frac{1}{4}$ et pro quocunque alio valore $\mu = 47\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2N}{20000}} = 0,4725\sqrt{N}$; igitur aeque probabile erit vt ſit μ maior vel minor quam $0,4725\sqrt{N}$ atque pro pluribus annis euentus fortuiti huic legi non male reſpondere debent, ſic vt toties proxime vnum contingat quam alterum, nec paruulae inaequalitates valoris $\frac{a}{b}$ hanc proprietatem euertant. Conſului itaque in tabula Londinenſi decennium 1721 - - - - 1730 atque poſito calculo ſucceſſum habui fere ſupra expectationem. En tabellam Londinenſem calculis meis munitam, vbi columna quinta ſupponit $\frac{a}{b} = 1.055$ vel $\frac{2Na}{a+b} = \frac{1055}{2055} \times 2N$;

columna autem ſeptima ſupponit $\frac{a}{b} = 1.040$ atque adeo $\frac{2Na}{a+b} = \frac{1040}{2040} \times 2N$:

anni	puellae	puelli	ſuma 2 N	$\frac{1055}{2055}\times 2N$	aberratio μ	$\frac{1040}{2040}\times 2N$	aberratio μ
1721	8940	9430	18370	9431	+ 1 NB.	9365	− 65
1722	9014	9325	18339	9414	+ 89	9349	+ 24 NB.
1723	9392	9811	19203	9858	+ 47 NB.	9790	− 21 NB.
1724	9468	9902	19370	9944	+ 42 NB.	9875	− 27 NB.
1725	9198	9661	18759	9630	− 31 NB.	9563	− 98
1726	9203	9605	18808	9655	+ 50	9588	− 17 NB.
1727	9011	9241	18252	9370	+ 129	9305	+ 64
1728	8155	8497	16652	8548	+ 51	8489	− 8 NB.
1729	8324	8736	17060	8758	+ 22 NB.	8697	− 39 NB.
1730	8512	3606	17118	8788	+ 182	8727	+ 121.

Paruula haec tabella integram theoriam noſtram, tam puram quam appropinquatam, egregie confirmat. In columna ſexta aberratio 47 ſigno NB. notata eſt, etiamſi limites definitos tantillum transgrediatur; in columna ſexta ſigna affirmatiua, in columna octaua ſigna negatiua praeualent, cum tamen aberratio ad vtramque partem aequali facilitate oriri poſſit: id ipſum extraordinariae, quae forte contigit, tribuo ſortis energiae: His vero diutius non immorabor contentus methodo expoſita, qua ſimul plura alia argumenta affinia cum ſucceſſu tractari poterunt.

SOLVTIO

SOLVTIO PROBLEMATIS,

QVO DVO QVAERVNTVR NVMERI, QVORVM PRODVCTVM TAM SVMMA, QVAM DIFFERENTIA EORVM, SIVE AVCTVM SIVE MINVTVM FIAT QVADRATVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Problema hoc mihi ante complures annos Berolini a Centurione quodam Prussico erat propositum, quod se, Lipsiae ab amico accepisse aiebat; neque vero se neque istum amicum solutionem vllo modo inuenire potuisse. Quaerebat igitur ex me vtrum hoc Problema possibile iudicarem nec ne? Statim quidem hoc problema mihi ob elegantiam mirifice placebat et quum facile summam solutionis difficultatem perspexissem, id omnino dignum iudicaui in quo vires meas exercerem. Tandem vero post plura tentamina solutionem sum adeptus, quae ita se habebat: Positis duobus numeris quaesitis A et B, inueni $A = \frac{13 \cdot 29^2}{8 \cdot 9^2} = \frac{10933}{648}$ et $B = \frac{5 \cdot 29^2}{32 \cdot 11^2} = \frac{4205}{3872}$.

2. Via autem qua ad hanc ſolutionem perveni, ita erat comparata, vt nullo modo mihi liceret, alias ſolutiones inde eruere; etiamſi nullus dubitandi locus relinqueretur, quin hoc problema innumerabiles admitteret ſolutiones. Nuper autem cum in hoc idem argumentum incidiſſem, caſu prorſus fortuito methodus mihi ſe obtulit, infinitas ſolutiones huius Problematis eliciendi. Quod quum caſui prorſus ſingulari ſit acceptum referendum, quaeſtio haec omnino digna mihi eſt viſa, quam accuratius perſcrutarer. Quare primo quidem ſolutionem generalem proponam, deinde vero artificium illud, quod mihi infinitas ſolutiones ſuppeditauit, vberius euoluam.

Solutio Problematis generalis.

3. Si literae A et B denotent ambos numeros quaeſitos, neceſſe eſt, vt ſequentes quatuor formulae quadrata efficiantur:

$$\text{I. } AB+A+B=\square;\quad \text{II. } AB+A-B=\square;$$
$$\text{III. } AB-A+B=\square;\quad \text{IV. } AB-A-B=\square.$$

Quum autem ſtatim pateat, hos numeros integros eſſe non poſſe, ob rationes mox perſpiciendas, eos ita expreſſos aſſumo, vt ſit $A=\frac{z}{x}$ et $B=\frac{z}{y}$, ita vt quatuor ſequentes formulae ad quadrata reducendae habeantur:

$$\text{I. } \tfrac{z}{xy}(z+y+x)=\square;\quad \text{II. } \tfrac{z}{xy}(z+y-x)=\square;$$
$$\text{III. } \tfrac{z}{xy}(z-y+x)=\square;\quad \text{IV. } \tfrac{z}{xy}(z-y-x)=\square.$$

4. Quod

4. Quod ſi ergo factor communis fuerit quadratum, quatuor ſequentes formulas quadrata effici oportet, quas quidem per ambiguitatem ſignorum ita duabus formulis comprehendere licet:

I et II. $z+y\pm x=\square$; III et IV. $z-y\pm x=\square$

Quare quum in genere ſit $aa+bb\pm 2ab=\square$ ſimilique modo $cc+dd\pm 2cd=\square$; ſtatuamus vt ſequitur:

$$z+y=aa+bb;\ x=2ab$$
$$z-y=cc+dd;\ x=2cd$$

Vt autem fiat $2ab=2cd$, ſtatuatur vtrumque $=2pqrs=x$, ſumaturque $a=pq$; $b=rs$; $c=pr$; et $d=qs$ eritque

$z+y=aa+bc=ppqq+rrss$ et

$z-y=cc+dd=pprr+qqss$ vnde colligitur $z=\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{2}$ et $y=\frac{(pp-ss)(qq-rr)}{2}$ tum vero erit

I. $z+y+x=(a+b)^2=(pq+rs)^2$

II. $z+y-x=(a-b)^2=(pq-rs)^2$

III. $z-y+x=(c+d)^2=(pr+qs)^2$

IV. $z-y-x=(c-d)^2=(pr-qs)^2$

5. Supereſt igitur, vt etiam factor communis $\frac{z}{xy}$ quadratum reddatur, qui euolutus praebet hanc formulam:

$$\frac{z}{xy}=\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{2pqrs(pp-ss)(qq-rr)}$$

at vero in hoc efficiendo ſumma conſiſtit difficultas; quodſi enim numerator in denominatorem ducatur, vt haec formula quadratum fieri debeat:

$$2pqrs(pp-ss)(qq-rr)(pp+ss)(qq+rr)=\square$$

ſingulae litterae ad quinque dimenſiones aſſurgunt, cuiusmodi quaeſtiones in Analyſi Diophantea adhuc non ſunt tractari ſolitae; ceterum iam olim poſt plura tentamina reperi huic conditioni ſatisfieri, ſumendo $p=13$, $s=11$, $q=16$, et $r=11$, vti periculum facienti mox patebit.

6. Quodſi autem quocunque modo huiusmodi valores idonei pro literis $p; q; r; s$ fuerint inuenti, ſolutio problematis inde ita adſtruitur:

Poſita formula $\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{2pqrs(pp-ss)(qq-rr)}=\frac{M^2}{N^2}$, primo ambo numeri quaeſiti, ita erunt expreſſi

$$A=\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{4pqrs} \quad \text{et} \quad B=\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{(pp-ss)(qq-rr)}$$

tum vero conditionibus problematis ita ſatisfiet vt ſit,

$$\text{I.} \quad \sqrt{(AB+A+B)}=\frac{M}{N}(pq+rs)$$

$$\text{II.} \quad \sqrt{(AB+A-B)}=\frac{M}{N}(pq-rs)$$

$$\text{III.} \quad \sqrt{(AB-A+B)}=\frac{M}{N}(pr+qs)$$

$$\text{IV.} \quad \sqrt{(AB-A-B)}=\frac{M}{N}(pr-qs).$$

Singularis Euolutio noſtrae formulae, quae ad quadratum eſt reuocanda.

7. Quum omnis opera in hac formula reducenda fruſtra conſumatur, quamdiu in ea tot diuerſae

ſae quantitates occurrunt, earumque ſingulae ad tot dimenſiones aſſurgunt, ante omnia elaborandum eſt, vt diuerſis factoribus denominatoris communes diuiſores concilientur; hunc in finem vſus ſum ſequentibus poſitionibus:

$p+s=\alpha\beta$; $p-s=\varepsilon\zeta$; $q+r=\alpha\gamma$; et $q-r=\varepsilon\eta$, ita vt fiat $p=\frac{\alpha\beta+\varepsilon\zeta}{2}$; $s=\frac{\alpha\beta-\varepsilon\zeta}{2}$; $q=\frac{\alpha\gamma+\varepsilon\eta}{2}$ et $r=\frac{\alpha\gamma-\varepsilon\eta}{2}$; tum vero noſtra conditio principalis poſtulat, vt ſit:

$$\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{2pqrs.\beta\gamma\zeta\eta.\alpha^2\varepsilon^2}=\frac{M^2}{N^2}\text{ ſiue}$$

$$\frac{(pp+ss)(qq+rr)}{2pqrs.\beta\gamma\zeta\eta}=\frac{M^2}{N^2}.\alpha^2\varepsilon^2.$$

8. Secundo conſtituatur ratio inter litteras r et s, quae ſit vt $f:g$, eritque $f:g::\alpha\gamma-\varepsilon\eta:\alpha\beta-\varepsilon\zeta$ ſiue $g(\alpha\gamma-\varepsilon\eta)=f(\alpha\beta-\varepsilon\zeta)$, vnde colligitur $\alpha(f\beta-g\gamma)=\varepsilon(f\zeta-g\eta)$, quocirca ponamus:

$\alpha=f\zeta-g\eta$; $\varepsilon=f\beta-g\gamma$; tum vero habebitur

$$p=\frac{2f\beta\zeta-g\beta\eta-g\gamma\zeta}{2};\ q=\frac{f\beta\eta+f\zeta\gamma-2g\gamma\eta}{2}$$

$$r=\frac{f(\gamma\zeta-\beta\eta)}{2}\text{ et }s=\frac{g(\gamma\zeta-\beta\eta)}{2}.$$

9. Vt adhuc plures factores in denominatore communes reddamus; faciamus inſuper $q=h\beta\zeta$ vnde haec aequatio emergit:

$2h\beta\zeta=f\beta\eta+f\zeta\gamma-2g\gamma\eta$ ſiue $\beta(2h\zeta-f\eta)=\gamma(f\zeta-2g\eta)$ quam ob rem ponamus $\beta=f\zeta-2g\eta$ et $\gamma=2h\zeta-f\eta$. Ex his autem valoribus porro colligimus:

$\alpha=f\zeta-g\eta$; $\varepsilon=(ff-2gh)\zeta-fg\eta$;

$$p+s=(f\zeta-g\eta)(f\zeta-2g\eta)=ff\zeta\zeta-3fg\zeta\eta+2gg\eta\eta$$
$$p-s=\zeta((ff-2gh)\zeta-fg\eta)=(ff-2gh)\zeta\zeta-fg\zeta\eta$$
$$q+r=(f\zeta-g\eta)(2h\zeta-f\eta)=2fh\zeta\zeta-(ff+2hg)\zeta\eta+fg\eta\eta$$
$$q-r=\eta((ff-2gh)\zeta-fg\eta)=(ff-2hg)\zeta\eta-fg\eta\eta$$

hincque porro:

$$p=(ff-gh)\zeta\zeta-2fg\zeta\eta+gg\eta\eta$$
$$s=gh\zeta\zeta-fg\zeta\eta+gg\eta\eta=g(h\zeta\zeta-f\zeta\eta+g\eta\eta)$$
$$q=fh\zeta\zeta-2gh\zeta\eta=h\zeta(f\zeta-2g\eta)$$
$$r=fh\zeta\zeta-ff\zeta\eta+fg\eta\eta=f(h\zeta\zeta-f\zeta\eta+g\eta\eta).$$

10. Denique hos valores ita determinemus, vt numerus p diuisor euadat formulae $qq+rr$, iam vero inuenitur:

$$qq+rr=ffgg\eta^4-2f^3g\zeta^4\eta^3\zeta+(f^4+2ffgh+4gghh)\eta\eta\zeta\zeta$$
$$-2fh(ff+2gh)\eta\zeta^3+2ffhh\zeta^4$$

quare quum sit $p=gg\eta\eta-2fg\eta\zeta+(ff-gh)\zeta\zeta$, vt p fiat factor illius formulae, statuatur alter factor $ff\eta\eta+t\zeta\eta+u\zeta\zeta$ eritque productum:

$$\begin{array}{lllll} ffgg\eta^4 & -2f^3g\eta^3\zeta & +(f^4-ffgh)\eta\eta\zeta\zeta & +t(ff-gh)\eta\zeta^3 & +u(ff-gh)\zeta^4 \\ & +tgg & -2tfg & -2ufg & \\ & & +ugg & & \end{array}$$

vbi primi termini iam congruunt, secundi vero dant $t=0$, tertii $3ffgh+4gghh=ugg$, vnde $u=\frac{3ffh}{g}+4hh$; quarti porro praebent $u=\frac{h(ff+2gh)}{g}$; quinti vero tandem dant $u=\frac{2ffhh}{ff-gh}$. Necesse igitur est, vt hi tres valores ipsius u inter se congruant, primus vero cum secundo collatus dat $3ffh$
$+4g$

$+4ghh = hff + 2ghh$, ſeu $2ffh + 2ghh = 0$, ideoque $ff + gh = 0$; at ſecundus tertio aequatus dat $f^4 - ffgh - 2gghh = 0$, ſiue $(ff + gh)(ff - 2gh) = 0$, vtrique ergo conditioni ſatisfit vno eodemque valore $h = -\frac{ff}{g}$.

11. Quoniam igitur inuenimus $h = -\frac{ff}{g}$ reliqui valores ſequenti modo exprimentur:

$$p = 2ff\zeta\zeta - 2fg\zeta\eta + gg\eta\eta$$
$$q = -\tfrac{ff}{g}.\zeta(f\zeta - 2g\eta) = 2ff\zeta\eta - \tfrac{f^3}{g}.\zeta\zeta$$
$$r = -\tfrac{f^3}{g}.\zeta\zeta - ff\zeta\eta + fg\eta\eta$$
$$s = -ff\zeta\zeta - fg\zeta\eta + gg\eta\eta$$

vbi notatu dignum euenit, vt in valoribus p et s producta $f\zeta$ et $g\eta$, tamquam ſimplices quantitates occurrant, quod quidem in litteris q et r non accidit. Verum quia totum negotium, tantum in ratione q ad r verſatur, hi ambo valores multiplicentur per $-\frac{g}{f}$, vt ſit $q = ff\zeta\zeta - 2fg\zeta\eta$ et $r = ff\zeta\zeta + fg\zeta\eta - gg\eta\eta$; hanc ob rem vt formulas noſtras in compendium redigamus atque adeo ad duas quantitates reuocemus, ſtatuamus $f\zeta = m$ et $g\eta = n$, quo facto noſtrae quatuor literae ita ſe habebunt:

$$p = 2mm - 2mn + nn;\quad q = mm - 2mn = m(m - 2n)$$
$$s = -mm - mn + nn;\quad r = mm + mn - nn.$$

12. Quoniam vero res eodem redit ſiue quaepiam litera poſitiue, ſiue negatiue accipiatur, ponamus

$p = 2$

$$p = 2mm - 2mn + nn;\quad q = mm - 2mn = m(m-2n)$$
$$s = r = mm + mn - nn;$$ vnde fit
$$p + s = 3mm - mn = m(3m - n)$$
$$p - s = mm - 3mn + 2nn = (m-n)(m-2n)$$
$$q + r = 2mm - mn - nn = (m-n)(2m+n)$$
$$q - r = -3mn + nn = -n(3m-n).$$

Hic ſignum negationis in valore $q-r$, nihil plane turbat, tantum enim opus eſt litteras q et r inter ſe permutari, ita vt ſit

$$p = 2mm - 2mn + nn;\quad q = mm + mn - nn$$
$$s = mm + mn - nn;\quad r = mm - 2mn = m(m-2n)$$

vnde fit

$$p + s = 3mm - mn = m(3m-n)$$
$$p - s = mm - 3mn + 2nn = (m-n)(m-2n)$$
$$q + r = 2mm - mn - nn = (2m+n)(m-n)$$
$$q - r = 3mn - nn \qquad = n(3m-n)$$

quibus valoribus in ſequenti calculo vtemur.

13. His conſtitutis valoribus, pro numeratore noſtrae fractionis habebimus:

$$pp + ss = 5m^4 - 6m^3 n + 7mmnn - 6mn^3 + 2n^4,$$ ſeu
$$pp + ss = (mm+nn)(5mm - 6mn + 2nn)$$ et
$$qq + rr = 2m^4 - 2m^3 n + 3mmnn - 2mn^3 + n^4,$$ ſiue
$$qq + rr = (mm+nn)(2mm - 2mn + nn)$$

vnde fractio noſtra ad quadratum reducenda erit:

$$\frac{MM}{NN} = \frac{(5mm - 6mn + 2nn).(mm+nn)^2}{2n(2m+n).m^2.(m-n)^2(m-2n)^2(3m-n)^2(mm+mn+nn)^2}$$

hinc-

hincque colligimus:

$$\frac{M}{N} = \frac{mm+nn}{m(m-n)(m-2n)(3m-n)(mm+mn-nn)} \cdot \sqrt{\frac{5mm-6mn+2nn}{2n(2m+n)}};$$

totum ergo negotium huc eſt reductum, vt formula $\frac{5mm-6mn+2nn}{2n(2m+n)}$ quadratum efficiatur, id quod infinitis modis praeſtari poſſe manifeſtum eſt, ſtatim atque vnicus caſus innotuerit.

14. Quo haec forma tractabilior reddatur, ponamus $2m-n=l$, vt ſit $n=2m-l$ et formula ad quadratum reducenda erit: $\frac{mm-2ml+2ll}{(4m-2l)(4m-l)}$, vbi productum ex numeratore in denominatorem euolutum quippe quod etiam quadratum eſſe debet, perducit ad hanc conditionem $16m^4 - 44m^3l + 58mmll - 28ml^3 + 4l^4 = \square$ cuius quum ambo termini extremi iam ſint quadrati per methodos ſatis cognitas facile eſt innumerabiles ſolutiones inueſtigare; quem in finem ponamus $\frac{m}{l}=z$ vt habeamus hanc formulam $16.z^4 - 44.z^3 + 58zz - 28.z + 4 = \square$; quae ponendo $z=y-2$; tranſit in hanc:

$16y^4 - 172y^3 + 706yy - 1300y + 900 = \square$ vbi iterum ambo extremi termini ſunt quadrata.

15. Ad hoc negotium expediendum, praeſtabit reſolutionem noſtrae aequationis ſiue prioris, ſiue poſterioris in genere docere. Sit igitur propoſita haec aequatio generalis:

$$\alpha\alpha z^4 - 2\beta z^3 + \gamma zz - 2\delta z + \varepsilon\varepsilon = \square;$$

 atque

atque pro idoneis valoribus ipſius z ſequentes quatuor formulae per methodos conſuetas reperiuntur.

$$\text{I.}\quad z = \frac{2\alpha(\beta\varepsilon - \alpha\delta)}{2\alpha^3\varepsilon + \beta\beta - \alpha\alpha\gamma}$$

$$\text{II.}\quad z = \frac{2\alpha\varepsilon^3 + \delta\delta - \gamma\varepsilon\varepsilon}{2\varepsilon(\alpha\delta - \beta\varepsilon)}$$

$$\text{III.}\quad z = \frac{(2\alpha^3\varepsilon + \alpha\alpha\gamma - \beta\beta)(2\alpha^3\varepsilon - \alpha\alpha\gamma + \beta\beta)}{4\alpha\alpha(2\alpha^4\delta - \alpha\alpha\beta\gamma + \beta^3)}$$

$$\text{IV.}\quad z = \frac{4\varepsilon\varepsilon(2\beta\varepsilon^4 - \gamma\delta\varepsilon\varepsilon + \delta^3)}{(2\alpha\varepsilon^3 + \gamma\varepsilon\varepsilon - \delta\delta)(2\alpha\varepsilon^3 - \gamma\varepsilon\varepsilon + \delta\delta)}$$

vbi quum litterae α et ε pro lubitu tam poſitiue quam negatiue accipi queant, binae priores formulae geminos valores ſuppeditant.

16. Quemadmodum autem innumerabiles huius aequationis ſolutiones inueniri oporteat, ſequenti modo calculus inſtituatur. Sit f valor quicunque per praecedentes formulas inuentus, ita vt noſtra expreſſio $\alpha\alpha z^4 - 2\beta z^3 + \gamma zz - 2\delta z + \varepsilon\varepsilon$, poſito $z = f$ fiat quadratum, ſitque propterea

$$\alpha\alpha f^4 - 2\beta f^3 + \gamma ff - 2\delta f + \varepsilon\varepsilon = gg\,;$$

nunc igitur ponatur $z = x + f$ et noſtra aequatio induet hanc formam:

$$\begin{array}{llll} \alpha\alpha x^4 + 4\alpha\alpha x^3 & + 6\alpha\alpha ff & + 4\alpha\alpha f^3 & + gg = \square \\ - 2\beta & - 6\beta f \;\; xx & - 6\beta ff\; x & \\ & + \gamma & + 2\gamma f & \\ & & - 2\delta & \end{array}$$

quae aequatio breuitatis gratia ita repraeſentetur:

$$a a x^4 - 2 b x^3 + c x x - 2 d x + e e = \square$$

ita vt ſit $aa = \alpha\alpha$; $b = \beta - 2\alpha\alpha$; $c = \gamma - 6\beta f + 6\alpha\alpha ff$, $d = \delta - \gamma f + 3\beta ff - 2\alpha\alpha f^3$; ac denique

nique $ee = gg$, vbi fumi poteft $a = \pm \alpha$ et $e = \pm g$. Tum vero quatuor noui valores pro z inueniuntur fequentes:

I. $z = f + \frac{2a(be - ad)}{2a^3 e + bb - aac}$.

II. $z = f + \frac{2ae^3 + dd - cee}{2e(ad - be)}$

III. $z = f + \frac{(2a^3 e + aac - bb)(2a^3 e - aac + bb)}{4aa(2a^3 d - aabc + b^3)}$

IV. $z = f + \frac{4ee(2be^3 - cdee + d^3)}{(2ae^3 + cee - dd)(2ae^3 - cee + dd)}$

quoniam igitur quemcunque valorem pro z hoc modo inuentum affumere licet, hinc numerus folutionum in infinitum augeri poterit.

17. Poftquam autem pro z valor quicunque idoneus fuerit inuentus, qui fit $z = \frac{h}{k}$, ob $z = \frac{m}{l} = \frac{m}{2m - n}$, habebimus $m = h$ et $n = 2h - k$, ex quibus duobus numeris m et n reliquae quantitates fequenti modo determinantur:

$$p = 2mm - 2mn + nn;\quad q = mm + mn - nn$$

$$s = mm + mn - nn;\quad r = mm - 2mn = m(m - 2n),$$

vbi notaffe iuuabit effe:

$$pp + ss = (mm + nn)(5mm - 6mn + 2nn) \text{ et}$$

$$qq + rr = (mm + nn)(2mm - 2mn + nn) = (mm + nn)p,$$

atque hinc denique ambo noftri numeri quaefiti erunt

$$A = \frac{(mm + nn)^2 (5mm - 6mn + 2nn)}{4m(m - 2n)(mm + mn - nn)^2} \text{ et}$$

$$B = \frac{(mm + nn)^2 (5mm - 6mn + 2nn)(2mm - 2mn + nn)}{(3m - n)^2 (m - n)^2 mn(m - 2n)(2m + n)}$$

18. Vt autem etiam innotefcat, quemadmodum huiusmodi valores inuenti fatisfaciant, ex binis numeris idoneis

idoneis m et n prodeat formula radicalis $\sqrt{\frac{5mm-6mn+2nn}{2n(2m+n)}} = \frac{\mu}{\nu}$, vnde colligitur $\frac{M}{N} = \frac{(mm+nn)\mu}{\nu m(m-n)(m-2n)(3m-n)(mm+mn-nn)}$, tum vero quoniam ſupra litteras q et r permutavimus, quaternae formulae propoſitae, ſequenti modo ad quadrata reducentur

$$\text{I. } \sqrt{(AB+A+B)} = \frac{M}{N}(pr+qs) = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{(mm+nn)^2}{m(m-2n)(mm+mn-nn)}$$

$$\text{II. } \sqrt{(AB+A-B)} = \frac{M}{N}(pr-qs) = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{(mm+nn)(m^4-8m^3n+6mmnn-n^4)}{m(m-n)(m-2n)(3m-n)(mm+mn-nn)}$$

$$\text{III. } \sqrt{(AB-A+B)} = \frac{M}{N}(pq+rs) = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{(mm+nn)}{(m-n)(m-2n)}$$

$$\text{IV. } \sqrt{(AB-A-B)} = \frac{M}{N}(pq-rs) = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{(mm+nn)}{m(3m-n)}.$$

Aliae transformationes formulae reſoluendae.

19. Quum tota quaeſtio huc ſit perducta, vt iſta formula (13) $\frac{5mm-6mn+2nn}{2n(2m+n)}$, ſiue $\frac{(2m-n)^2+(m-n)^2}{2n(2m+n)}$ ad quadratum reuocetur, ponamus $2m-n=t$ et $m-n=u$, ita vt ſit $m=t-u$ et $n=t-2u$, hincque $2m+n=3t-4u$ atque nunc quadratum eſſe debeat $\frac{tt+uu}{(2t-4u)(3t-4u)} = \square$, ſiue $\frac{tt+uu}{(4u-2t)(4u-3t)} = \square$ circa quam formulam obſeruo, numeratorem cum denominatore alios factores communes habere non poſſe praeter 2 et 5. Hinc igitur ſequitur numeratorem $tt+uu$ vel ipſum quadratum eſſe debere vel duplum, vel quintuplum vel decuplum quadratum. Vnde quatuor caſus reſultant, quos ſingulos ſequenti modo euoluamus.

20. Denotent litterae a et b binos cathetos trianguli rectanguli numerici cuius, hypothenuſa ſit $=c$, ita vt ſit $aa+bb=cc$, nunc igitur pro primo

primo caſu faciamus $tt + uu = cc$, quod fit ſumendo $t = a$ et $u = b$, atque hoc caſu neceſſe eſt, vt fiat

$$(4b - 2a)(4b - 3a) = \square$$

Pro II^do^ Caſu faciamus $tt + uu = 2cc$, quod fit ſumendo $t = a - b$ et $u = a + b$, atque nunc neceſſe eſt vt ſit $(a + 3b)(a + 7b) = \square$.

Pro III^tio.^ Caſu faciamus $tt + uu = 5cc$, quod fit ſumendo $t = a + 2b$ et $u = 2a - b$; tum enim ob $4u - 2t = 4a - 8b$ et $4u - 3t = 5a - 10b$, formula ad quadratum reducenda erit $(6a - 8b)(a - 2b) = \square$, hoc eſt $(4b - 2a)(4b - 3a) = \square$, quae cum Caſu I^mo^ perfecte congruit.

Pro Caſu denique IV^to^, faciamus $tt + uu = 10.cc$, quod fit ſumendo $t = 3a + b$ et $u = a - 3b$, tum enim ob $4u - 2t = -14b - 2a$, et $4u - 3t = -5a - 15b$, formula ad quadratum reducenda erit $(3b + a)(7b + a) = \square$, prorſus vti in caſu ſecundo. Verum hic notandum eſt, caſum tertium et quartum adhuc alio modo expediri poſſe. Si enim pro tertio ponamus $t = a + 2b$ et $u = b - 2a$, ob $4u - 2t = -10.a$ et $4u - 3t = -2b - 11.a$ formula ad quadratum reducenda erit $2a(11a + 2b) = \square$.

Pro Caſu quarto autem, ſi ponamus $t = 3a + b$ et $u = 3b - a$, ob $4u - 2t = 10b - 10a$ et $4u - 3t = 9b - 13.a$, formula ad quadratum reducenda eſt $(a - b)(13a - 9b) = \square$. Verum plerumque quoties his duobus caſibus ſatisfieri poteſt toties numeri

 t et

t et u communi factore 5 praediti reperiuntur, ideoque ad nouas solutiones non perducunt.

21. His igitur duobus casibus postremis relictis, circa quatuor praecedentes omnino memoratu dignum est, quod primus et tertius, tum vero etiam secundus et quartus ad eandem formulam perduxerit, quare pro primo et tertio, si numeri a et b ita fuerint comparati, vt formula $(4b-2a)(4b-3a)$ fiat quadratum, tum duplici modo inde idonei valores pro t et u obtinentur; priori enim modo habebimus $t=a$ et $u=b$, altero vero modo $t=a+2b$ et $u=2a-b$. Simili modo pro casibus secundo et quarto, si fuerit formula $(3b+a)(7b+a)$ quadratum, tum etiam duo casus oriuntur, alter $t=a-b$ et $u=a+b$, alter vero $t=3a+b$ et $u=a-3b$. Operae igitur pretium erit has geminas resolutiones accuratius exponere.

I. *Si fuerit* $(4b-2a)(4b-3a)=\square$, *existente* $aa+bb=cc$.

22. Hinc igitur primo statim deducimus fractionem supra (18) introductam $\frac{\mu}{\nu}=\frac{cc}{(4b-2a)(4b-3a)}$; deinde pro priori resolutione habebimus

$$t=a;\ m=a-b$$
$$u=b;\ n=a-2b$$
$$p=aa-2ab+2bb;\ r=(a-b)(3b-a)$$
$$q=aa-ab-bb;\ s=aa-ab-bb$$
$$\frac{p}{s}=\frac{aa-2ab+2bb}{aa-ab-bb};\ \frac{q}{r}=\frac{aa-ab-bb}{(a-b)(3b-a)}$$
$$mm+nn=2aa-6ab-5bb$$

pro

pro altera vero ſolutione

$$t = a + 2b;\ m = 3b - a;$$
$$u = 2a - b;\ n = 4b - 3a;$$
$$p = 5(aa - 2ab + 2bb);\ r = -5(a - b)(3b - a)$$
$$q = -5(aa - ab - bb);\ s = -5(aa - ab - bb)$$
$$\frac{p}{s} = \frac{aa - 2ab + 2bb}{aa - ab - bb};\ \frac{q}{r} = \frac{aa - ab - bb}{(a - b)(3b - a)}$$

vnde manifeſtum eſt has duas ſolutiones a ſe inuicem non differre.

23. Speciales autem ſolutiones, quae ex hac formula primo intuitu deriuantur ſunt ſequentes

a	b	m	n	$\frac{p}{s}$	$\frac{q}{r}$
0	1	-1	-2	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$
4	3	1	-2	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}$
12	5	7	2	$\frac{74}{59}$	$\frac{59}{21}$

quarum binae priores ſcopo noſtro non conueniunt, tertia vero idoneam praebet ſolutionem atque adeo ab illa, quam olim iam inueni diuerſam; quum enim ſit $pp + ss = 8957 = 53 \cdot 169$ et $qq + rr = 3922 = 53 \cdot 74$ erunt ambo quaeſiti numeri

$$A = \frac{16 \cdot 53^2 \cdot 74}{4 \cdot 74 \cdot 59^2 \cdot 21} = \frac{16 \cdot 53^2}{4 \cdot 21 \cdot 59^2}$$
$$B = \frac{169 \cdot 74 \cdot 53^2}{2 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19^2} = \frac{169 \cdot 37 \cdot 53^2}{16 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19^2}.$$

24. Conſideremus autem attentius hanc formulam: $(4b - 2a)(4b - 3a) = \square$ et quia numeri a et b, ſunt catheti trianguli rectanguli, atque euidens eſt, pro a ſumi debere parem pro b vero imparem, ſtatuamus $a = 2de$ et $b = dd - ee$, vt ſit hy-

pothenuſa

pothenuſa $c = dd + ee$, tum vero erit $4b - 2a = 4(dd - de - ee)$ et $4b - 3a = 4dd - 6de - 4ee$, quorum productum quum quadratum eſſe debeat, neceſſe eſt, vt vtriusque quadrans fiat quadratum, hoc eſt

$$\text{I}^\circ.\quad dd - de - ee = \square$$

$$\text{II}^\circ.\quad dd - \tfrac{3}{2}de - ee = \square,$$

vbi quum numerorum d et e alter debeat eſſe par, alter impar, etiam poſterior numeris integris conſtat. Quod autem ad priorem attinet, quum ſit $dd - de - ee = (d - \frac{1}{2}e)^2 - 5\frac{e^2}{2}$, ponamus $d - \frac{1}{2}e = rr + 5ss$ et $\frac{1}{2}e = 2rs$, tum enim fiet $dd - de - ee = (rr - 5ss)^2$; at vero habebimus $e = 4rs$ et $d = rr + 2rs + 5ss$ hincque $dd - ee = r^4 + 4r^3s - 2rrss + 20rs^3 + 25.s^4$ et $de = 4r^3s + 8rrss + 20rs^3$, vnde altera conditio poſtulat: $r^4 - 2r^3s - 14rrss - 10rs^3 + 25s^4 = \square$.

25. Statuamus hic $\frac{r}{s} = z$, vt habeamus hanc cormulam $z^4 - 2z^3 - 14zz - 10z + 25 = \square$, quae fum formula ſupra data (15) comparata praebet: $\alpha = \pm 1$; $\beta = 1$; $\gamma = -14$; $\delta = 5$; $\varepsilon = \pm 5$, vnde pro z quatuor ſequentes expreſſiones elicimus

$$\text{I}^\circ.\quad z = \frac{2\alpha(\varepsilon - 5.\alpha)}{2\alpha^3\varepsilon + 1 + 14} = \frac{2\alpha(\varepsilon - 5\alpha)}{2\alpha^3\varepsilon + 15} = \frac{2(\alpha\varepsilon - 5)}{2\alpha\varepsilon + 15}$$

hinc vel $z = 0$; vel $z = -4$

$$\text{II.}\quad z = \frac{50.\alpha\varepsilon + 375}{2(5\alpha\varepsilon - 25)} = \frac{10.\alpha\varepsilon + 75}{2(\alpha\varepsilon - 5)} \text{ hincque}$$

vel $z = \infty$; vel $z = -\frac{5}{4}$

$$\text{III}^\circ.\quad z = \frac{(2\alpha\varepsilon - 14 - 1)(2\alpha\varepsilon + 14 + 1)}{4(10 + 14 + 1)} = -\frac{125}{100} = -\frac{5}{4}.$$

IV°.

$$\text{IV}^\circ.\; z = \frac{100(1250 + 70.25 + 5.25)}{(50.\alpha\varepsilon - 15.25)(50.\alpha\varepsilon + 15.25)}$$
$$= \frac{4.25^2\,125}{25^2(2\alpha\varepsilon + 15)(2\alpha\varepsilon - 15)} = -4.$$

Ex valore $z = -4$ oriuntur valores $r = 4$; $s = -1$; $d = 13$; $e = -16$ hincque $a = 416$ et $b = 87$, vnde oritur $\frac{p}{s} = \frac{23362}{23859}$, et $\frac{q}{r} = \frac{25850}{15199}$; at ex valore $z = -\frac{5}{4}$, habemus $r = 5$; $s = -4$; $d = 65$; $e = -80$, qui per quinarium ad terminos minores reducti praebent vt ante, $d = 13$ et $e = -16$, vbi notasse iuuabit ex his valoribus a et b praegrandes numeros pro p, q, r, s esse prodituros.

26. At circa binas illas formulas notasse iuuabit, vtramque etiam quadrato negatiuo aequari posse, verum tum solutio eadem exsurgit, nisi quod valores pro a et b fiant negatiui. Ceterum hic notari conuenit, vltimae aequationi etiam valorem $z = -3$ satisfacere; etiamsi eum non per methodum consuetam detexerimus, inde autem fit $r = 3$ et $s = -1$; hincque porro $d = 2$ et $e = -3$; vnde fit $a = -12$ et $b = -5$, quem casum iam supra euoluimus.

II. *Si fuerit* $(3b + a)(7b + a) = \square$.

27. Hic statim apparet sumi debere $a = dd - ee$ et $b = 2de$, vt fiat $c = dd + ee$ tum ergo sequentes duae formulae quadrata esse debent $dd + 6de - ee = \square$ et $dd + 14de - ee = \square$. Quum prior sit $= (d + 3e)^2 - 10ee$; si ponamus $\zeta\eta = 10$, ac statuamus $d + 3e = \zeta rr + \eta ss$ et $e = 2rs$ fiet illa formula

 $= (\zeta\zeta$

$= (\zeta\zeta rr - \eta ss)^2$, tum autem erit $d = \zeta rr - 6rs + \eta ss$ et $e = 2rs$; hinc ergo pro altera formula, quae eſt $(d+7e)^2 - 50.ee$, erit $d+7e = \zeta rr + 8rs + \eta ss$ ideoque haec formula abit in $\zeta\zeta r^4 + 16\zeta r^3 s - 116 rrss + 16\eta rs^3 + \eta\eta s^4 = \square$, vnde per methodum ſupra indicatam infinitae ſolutiones inueniri poſſunt; vbi notaſſe iuuabit eſſe vel $\zeta = 1$ et $\eta = 10$, vel $\zeta = 2$ et $\eta = 5$.

28. Quum autem idonei valores pro a et b fuerint inuenti, duplici modo inde litterae t et u definiri poterunt. Priore modo fit $t = a - b$ et $u = a + b$, hinc $m = t - u = -2b$ et $n = -a - 3b$, ideoque $p = mm + (m-n)^2 = aa + 2ab + 5bb$; $q = s = mm + n(m-n) = -aa - 4ab + bb$ et $r = m(m-2n) = -4b(a+2b)$ ita vt ſit

$$\frac{p}{s} = \frac{aa + 2ab + 5bb}{aa + 4ab - bb}; \quad \text{et } \frac{q}{r} = \frac{aa + 4ab - bb}{4b(a+2b)}.$$

Poſteriore vero modo fit $t = 3a + b$ et $u = a - 3b$, vnde $m = 2a + 4b$ et $n = a + 7b$, hincque porro ob $m - n = a - 3b$, fit $p = 5(aa + 2ab + 5bb)$

$$q = s = 5(aa + 4ab - bb) \quad \text{et} \quad r = 5.4b(a+2b)$$

ſicque patet hunc poſteriorem caſum ad priorem redire.

29. Simpliciores autem ſolutiones, quas facili negotio diuinando elicere licet ſunt ſequentes:

a	b	m	n	$\frac{p}{s}$	$\frac{q}{r}$
1	0	−0	−1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{0}$
−3	4	−8	−9	$\frac{13}{11}$	$\frac{11}{16}$
−35	12	−24	−1	$\frac{1105}{599}$	$\frac{599}{528}$.

Hic

Hic ſecundus caſus praebet illam ipſam ſolutionem, quam iam olim dederam. His autem duabus formulis pertractatis adiungamus inſuper binas poſtremas ſupra (20) inuentas.

III. *Si fuerit* $2a(11a + 2b) = \square$.

30. Caſus ſimpliciores, qui ſtatim ſe offerunt ſunt:

a	b	m	n	$\frac{p}{s}$	$\frac{q}{r}$
0	1	1, 1	0, 0	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}$
4	3	15, 3	20, 4	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$
16	-63	$-15, -3$	80, 16	$\frac{74}{59}$	$\frac{50}{21}$

vbi ex datis a et b, fit $t = a + 2b$ et $u = b - 2a$ hincque, vt ante $m = t - u = 3a + b$ et $n = t - 2u = 5a$. Hae ſolutiones autem iam in ſuperioribus continentur.

IV. *Si fuerit* $(a - b)(13a - 9b) = \square$.

31. Inuentis idoneis valoribus pro a et b, erit $t = 3a + b$ et $u = 3b - a$, hinc $m = 4a - 2b = 2(2a - b)$ et $n = 5(a - b)$, atque ob $m - n = 3b - a$, atque $m - 2n = 2(4b - 3a)$ habebimus $\frac{p}{s} = \frac{17aa - 22ab + 13bb}{11aa + 4ab - 11bb}$ et $\frac{q}{r} = \frac{11aa + 4ab - 11bb}{4(6aa - 11ab + 4bb)}$. Solutiones autem ſimpliciores hinc oriundae ſunt

a	b	m	n	$\frac{p}{s}$	$\frac{q}{r}$
0	1	-2	-5	$\frac{13}{11}$	$\frac{11}{16}$
4	$+3$	10, 2	5, 1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{6}$

vbi

vbi memoratu dignum euenit, quod statim primum tentamen quo $a = 0$ et $b = 1$, praebeat solutionem iam dudum inuentam.

32. Quod si pro vlteriore huius formulae euolutione ponamus $a = 2de$ et $b = dd - ee$, fiet $a - b = ee + 2de - dd$ siue mutandis signis, vt $(b - a)(9b - 13a) = \square$, erit $b - a = dd - 2de - ee$ et $9b - 13a = 9dd - 26.de - 9ee$, reddamus nunc priorem quadratum, quae quum sit $(d - e)^2 - 2ee$, statuamus $d - e = rr + 2ss$ et $e = 2rs$, tum enim fiet $dd - 2de - ee = (rr - 2ss)^2$, tum vero alter factor ob $dd - ee = r^4 + 4r^3s + 8rrss + 8rs^3 + 4s^4$, erit $9r^4 - 16r^3s - 68rrss - 32rs^3 + 36.s^4$, vbi casus primo intuitu se offerentes sunt $1°$. $r = 1$, $s = 0$, $2°$. $r = 0$, $s = 1$, 3^{tio}. $r = 1$ et $s = -1$, 4^{to}. $r = 2$ et $s = -1$; 5^{to}. $r = 1$ et $s = 2$.

33. Pro horum casuum primo habemus $d = 1$ et $e = 0$; hinc $a = 0$ et $b = 1$, qui iam occurrit, pro secundo habemus $d = 2$ et $e = 0$, hinc $a = 0$ et $b = 1$, qui a praecedente non differt. At pro tertio habemus $d = 1$ et $e = -2$, hinc $a = -4$ et $b = -3$, qui supra iam est tractatus, pro quarto habemus $d = 2$ et $e = -4$ siue $d = 1$ et $e = -2$, vnde fit $a = -4$ et $b = -3$ vt praecedens, pro quinto denique habemus $d = 13$ et $e = 4$, hinc $a = 104$ et $b = 153$, ex quibus numeri praegrandes pro quaesitis A et B resultant, quibus non immoramur.

34. Imprimis autem quoque notatu dignus eſt caſus, quo inuenimus $\frac{p}{s} = \frac{2}{1}$ et $\frac{q}{r} = \frac{1}{3}$, ſiue $\frac{q}{r} = \frac{3}{1}$, vnde deducuntur numeri quaeſiti $A = \frac{25}{12}$ et $B = \frac{2}{12}$ ita vt ambo numeri quaeſiti hoc caſu fiant aequales, quod quidem ſcopo problematis minus conuenit. Si enim numeri aequales deſiderentur ob eorum differentiam euaneſcentem quaeſtio huc rediret, vt inueniatur numerus A, ita vt tam $AA + 2A$, quam $AA - 2A$ fiat quadratum, quod quidem eſt facillimum, ſtatuatur enim $AA = \frac{aa+bb}{nn}$ et $2A = \frac{2ab}{nn}$, fiet vtique $\sqrt{(AA + 2A)} = \frac{a+b}{n}$ et $\sqrt{(AA - 2A)} = \frac{a-b}{n}$; verum nunc requiritur vt $aa + bb$ ſit quadratum, quem in finem ponamus, $a = pp - qq$ et $b = 2pq$, vt fiat $A = \frac{pp+qq}{n}$, eſt vero etiam $A = \frac{2pq(pp-qq)}{nn}$ vnde fit $n(pp+qq) = 2pq(pp-qq)$ et $n = \frac{2pq(pp-qq)}{pp+qq}$, ita vt numerus quaeſitus in genere ſit $A = \frac{(pp+qq)^2}{2pq(pp-qq)}$, tales ergo numeri ſunt ſequentes: $A = \frac{25}{12}$; 2°. $A = \frac{169}{60}$; 3°. $A = \frac{289}{120}$; 4°. $A = \frac{625}{168}$ etc.

35. Pro ſolutionibus autem ad quaeſtionem propoſitam accommodatis, duae in numeris non nimis magnis notatu dignae videntur, quarum prior eſt ea ipſa, quam iam dudum inueni, qua erat $A = \frac{13 \cdot 29^2}{8 \cdot 9^2}$ et $B = \frac{5 \cdot 29^2}{32 \cdot 11^2}$, ſiue $A = \frac{10933}{648}$ et $B = \frac{4205}{3872}$

vnde $\sqrt{(AB + A + B)} = \frac{7 \cdot 29 \cdot 37}{16 \cdot 9 \cdot 11}$

$$\sqrt{(AB + A + B)} = \frac{29^2}{16 \cdot 3 \cdot 11}$$

$$\sqrt{(AB - A + B)} = \frac{29^2}{16 \cdot 9}$$

$$\sqrt{(AB - A - B)} = \frac{29}{48}.$$

Pro altera vero ſolutione orta ex valoribus:

$\frac{p}{s} = \frac{74}{59}$ et $\frac{q}{r} = \frac{59}{21}$ obtinemus:

$A = \frac{13^2 . 53^2}{4 . 21 . 59^2}$ et $B = \frac{13^2 . 37 . 53^2}{16 . 3 . 5^2 . 7 . 19^2}$

vnde $\sqrt{(AB + A + B)} = \frac{13 . 53}{8 . 3 . 7}$

$\sqrt{(AB + A - B)} = \frac{13 . 53^2}{8 . 3 . 5 . 7 . 19}$

$\sqrt{(AB - A + B)} = \frac{13 . 53^2}{8 . 3 . 7 . 59}$

$\sqrt{(AB - A - B)} = \frac{13 . 41 . 47 . 53}{8 . 3 . 5 . 7 . 19 . 59}$.

OBSER-

OBSERVATIONES
CIRCA RADICES AEQVATIONVM.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Si habeatur aequatio algebraica cuiusuis gradus ad rationalitatem perducta:

$$x^m = A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} + D x^{m-4} + E x^{m-5} + \text{etc.}$$

quam etiam hac forma exhibere licet

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \text{etc.}$$

ac ponatur

$\int x =$ summae omnium radicum
$\int x^2 =$ summae quadratorum earundem radicum
$\int x^3 =$ summae cuborum
$\int x^4 =$ summae biquadratorum
et ita porro;

notum est has summas ita a se inuicem et a litteris A, B, C, D, E etc. pendere vt sit:

$$\int x = A$$
$$\int x^2 = A \int x + 2B$$
$$\int x^3 = A \int x^2 + B \int x + 3C$$
$$\int x^4 = A \int x^3 + B \int x^2 + C \int x + 4D$$
$$\int x^5 = A \int x^4 + B \int x^3 + C \int x^2 + D \int x + 5E$$
etc.

II.

II.

Ex hac ergo progreſſionis lege ſingulae hae ſummae poteſtatum ita ſe habebunt euolutae:

$$\int x = A$$

$$\int x^2 = A^2 + 2B$$

$$\int x^3 = A^3 + 3AB + 3C$$

$$\int x^4 = A^4 + 4A^2B + 4AC + 4D \\ + 2B^2$$

$$\int x^5 = A^5 + 5A^3B + 5A^2C + 5AD + 5E \\ + 5AB^2 + 5BC$$

$$\int x^6 = A^6 + 6A^4B + 6A^3C + 6A^2D + 6AE + 6F \\ + 9A^2B^2 + 12ABC + 6BD \\ + 2B^3 + 3CC$$

$$\int x^7 = A^7 + 7A^5B + 7A^4C + 7A^3D + 7A^2E + 7AF + 7G \\ + 14A^3B^2 + 21A^2BC + 14ABD + 7BE \\ + 7AB^3 + 7AC^2 + 7CD \\ + 7B^2C$$

vlterius has formas non continuandas eſſe arbitror, cum harum contemplatio ſufficiat, ad legem qua ſingulae formantur explorandam.

III.

Vt ordinem quo in his formis ſingulae litterae A, B, C, D, E etc. inter ſe componuntur, facilius perſpiciamus, litterae A tribuamus vnam dimenſionem, litterae B duas, litterae C tres, litterae

rae D quatuor et ita porro, atque manifeſtum eſt in qualibet forma nonniſi eiusmodi occurrere terminos in quibus dimenſionum numerus ſit exponenti poteſtatum radicum, quarum ſumma exhibetur, aequalis. Ita in forma $\int x^7$ ſinguli termini continent ſeptem dimenſiones, atque adeo omnes termini per mutuam combinationem ſeptem dimenſiones adimplentes in ea reperiuntur, quod etiam de omnibus formis eſt tenendum. Imprimis autem obſeruari conuenit, alias litterarum A, B, C, D etc. poteſtates in has formas non ingredi, niſi quarum exponentes ſint numeri integri et poſitiui, vnde pro quauis poteſtate ſummatoria omnes termini eam conſtituentes ex litterarum A, B, C, D etc. combinatione aſſignantur, quorum quidem numerus ſemper eſt finitus etiamſi ipſa aequatio propoſita in infinitum excurrat.

IV.

Cum igitur pro quauis poteſtate ipſi termini, quatenus ex litteris A, B, C, D etc. conflantur, nullam inuoluant difficultatem, totum negotium ad vncias numericas quibus ſinguli termini ſunt affecti, reducitur. Ad indolem autem harum vnciarum explorandam, ſepoſita prima littera A terminos ſecundum reliquas litteras B, C, D, E etc. ita in ordines diſponi conueniet, vt in primo harum litterarum nulla, in ſecundo ordine ſingulae tantum, in tertio vero binae, in quarto ternae et ita porro reperiantur, hoc modo:

$$\int x = A$$

$$\int x^2 = A^2 + 2B$$

$$\int x^3 = A^3 + 3AB + 3C$$

$$\int x^4 = A^4 + 4A^2B + 2BB + 4AC + 4D$$

$$\int x^5 = A^5 + 5A^3B + 5ABB + 5A^2C + 5BC + 5A^2D + 5E$$

$$\int x^6 = A^6 + 6A^4B + 9A^2BB + 2B^3 + 6A^3C + 12ABC + 6A^2D + 6BD + 6AE + 3CC + 6F$$

$$\int x^7 = A^7 + 7A^5B + 14A^3BB + 7AB^3 + 7A^4C + 21A^2BC + 7B^2C + 7A^3D + 14ABD + 7A^2E + 7ACC + 7AF + 7BE + 7G + 7CD$$

$$
\begin{array}{lllll}
\int x^8 = A^8 + 8A^6B & + 20A^4BB & + 16A^2B^3 & + 2B^4 \\
 + 8A^5C & + 32A^3BC & + 24AB^2C & \\
 + 8A^4D & + 24A^2BD & + 8B^2D & \\
 + 8A^3E & + 12A^2CC & + 8BC^2 & \\
 + 8A^2F & + 16ABE & & \\
 + 8AG & + 16ACD & & \\
 + 8H & + 8BF & & \\
 & + 8CE & & \\
 & + 4DD. & &
\end{array}
$$

V.

In cuiusque formae ordine primo et fecundo nulla plane occurrit difficultas, nullumque eft dubium, quin pro forma $\int x^n$ fit primus terminus A^n, fecundus vero ordo ex his conftet terminis

$$n A^{n-2} B + n A^{n-3} C + n A^{n-4} D + n A^{n-5} E + \text{etc.}$$

fequentium vero ordinum ratio minus eft manifefta. Hanc autem circumftantiam perpendentes, quod exponens n in omnes quoque fequentes vncias tanquam factor ingrediatur: deinde etiam quod quaelibet litterarum B, C, D, E etc. combinationes, fimul permutationum numerum inuoluant, prouti in polynomii poteftatibus occurrunt; fi in fingulis terminis hos binos factores feorfim exhibeamus leui adhibita attentione deprehendemus, in genere has formas ita expreffum iri.

Ordo

Ordo I. *Ordo II.* *Ordo III.*

$$\begin{aligned}
\int x^n = A^n &+ n A^{n-2} B + \tfrac{n(n-3)}{1.\,2} A^{n-4} BB \\
&+ n A^{n-3} C + \tfrac{n(n-4)}{1.\,2} A^{n-5}\, 2BC \\
&+ n A^{n-4} D + \tfrac{n(n-5)}{1.\,2} A^{n-6} (2BD + CC) \\
&+ n A^{n-5} E + \tfrac{n(n-6)}{1.\,2} A^{n-7} (2BE + 2CD) \\
&+ n A^{n-6} F + \tfrac{n(n-7)}{1.\,2} A^{n-8} (2BF + 2CE + DD) \\
&+ n A^{n-7} G + \tfrac{n(n-8)}{1.\,2} A^{n-9} (2BG + 2CF + 2DE) \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Ordo IV.

$$\begin{aligned}
&+ \tfrac{n(n-4)(n-5)}{1.\,2.\,3} A^{n-6} B^3 \\
&+ \tfrac{n(n-5)(n-6)}{1.\,2.\,3.} A^{n-7}\, 3B^2C \\
&+ \tfrac{n(n-6)(n-7)}{1.\,2.\,3} A^{n-8} (3B^2D + 3BC^2) \\
&+ \tfrac{n(n-7)(n-8)}{1.\,2.\,3} A^{n-9} (3B^2E + 6BCD + C^3) \\
&+ \tfrac{n(n-8)(n-9)}{1.\,2.\,3} A^{n-10} (3B^2F + 6BCE + 3BDD + 3CCD \\
&\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Ordo V.

$$\begin{aligned}
&+ \tfrac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\,2.\,3.\,4} A^{n-8} B^4 \\
&+ \tfrac{n(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\,2.\,3.\,4} A^{n-9}\, 4B^3C \\
&+ \tfrac{n(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\,2.\,3.\,4} A^{n-10} (4B^3D + 6B^2C^2) \\
&+ \tfrac{n(n-8)(n-9)(n-10)}{1.\,2.\,3.\,4} A^{n-11} (4B^3E + 12B^2CD + 4BC^3) \\
&+ \tfrac{n(n-9)(n-10)(n-11)}{1.\,2.\,3.\,4} A^{n-12} (4B^3F + 12B^2CE + 6B^2D^2 \\
&\qquad\qquad + 12BC^2D + C^4) \\
&\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Ordo

Ordo VI.

$$+\frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}A^{n-10}B^5$$

$$+\frac{n(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}A^{n-11}\,5B^4C$$

$$+\frac{n(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}A^{n-12}(5B^4D+10B^3C^2)$$

$$+\frac{n(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}A^{n-13}(5B^4E+20B^3CD+10B^3C^3)$$

$$+\frac{n(n-10)(n-11)(n-12)(n-13)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}A^{n-14}(5B^4F+20B^3CE+10B^3D^2$$
$$+30B^2C^2D+5BC^4)$$

etc.

VI.

Hinc ordinem quemcunque in genere euoluere licebit, fit enim index ordinis $\lambda+1$ ftatuanturque membra huius ordinis;

$$+\frac{n(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)\ldots(n-2\lambda+1)}{1.\;2.\;3.\;4\;\ldots\ldots\;\lambda}A^{n-2\lambda}.\,O$$

$$+\frac{n(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)(n-\lambda-4)\ldots(n-2\lambda)}{1.\;2.\;3.\;4\;\ldots\ldots\;\lambda}A^{n-2\lambda-1}.\,P$$

$$+\frac{n(n-\lambda-3)(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)\ldots(n-2\lambda-1)}{1.\;2.\;3.\;4\;\ldots\ldots\;\lambda}A^{n-2\lambda-2}.\,Q$$

$$+\frac{n(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)(n-\lambda-6)\ldots(n-2\lambda-2)}{1.\;2.\;3.\;4\;\ldots\ldots\;\lambda}A^{n-2\lambda-3}.\,R$$

etc.

atque valores litterarum O, P, Q, R etc. ita fe habebunt, vt fit

$$O+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\text{etc.}=(B+Cz+Dz^2+Ez^3\text{ etc.})^\lambda$$

 vnde

vnde euolutione facta colligimus:

$$O = B^{\lambda}$$
$$P = \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{OC}{B}$$
$$Q = \frac{2\lambda}{2} \cdot \frac{OD}{B} + \frac{\lambda - 1}{2} \cdot \frac{PC}{B}$$
$$R = \frac{3\lambda}{3} \cdot \frac{OE}{B} + \frac{2\lambda - 1}{3} \cdot \frac{PD}{B} + \frac{\lambda - 2}{3} \cdot \frac{QC}{B}$$
$$S = \frac{4\lambda}{4} \cdot \frac{OF}{B} + \frac{3\lambda - 1}{4} \cdot \frac{PE}{B} + \frac{2\lambda - 2}{4} \cdot \frac{QD}{B} + \frac{\lambda - 3}{4} \cdot \frac{RC}{B}$$
$$T = \frac{5\lambda}{5} \cdot \frac{OG}{B} + \frac{4\lambda - 1}{5} \cdot \frac{PF}{B} + \frac{3\lambda - 2}{5} \cdot \frac{QE}{B} + \frac{2\lambda - 3}{5} \cdot \frac{RD}{B} + \frac{\lambda - 4}{5} \cdot \frac{SC}{B}$$

siue valoribus iam inuentis substituendis

$$O = B^{\lambda}$$
$$P = \lambda B^{\lambda - 1} C$$
$$Q = \lambda B^{\lambda - 1} D + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{1 \cdot 2} B^{\lambda - 2} C^2$$
$$R = \lambda B^{\lambda - 1} E + \frac{2\lambda(\lambda - 1)}{1 \cdot 2} B^{\lambda - 2} CD + \frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B^{\lambda - 3} C^3$$
$$S = \lambda B^{\lambda - 1} F + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{1 \cdot 2} B^{\lambda - 2}(2CE + DD) + \frac{3\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B^{\lambda - 3} C^2 D$$
$$+ \frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B^{\lambda - 4} C^4$$

etc.

VII.

De hac autem forma generali probe est tenendum, ea summam singularum radicum ad dignitatem n eleuatarum neutiquam exprimi, nisi primo exponens n sit numerus integer positiuus, tum vero ex forma generali quae in infinitum excurrit, omnes termini excludantur in quibus littera A exponentem negatiuum esset adeptura. Hinc quaestio oritur maximi momenti, quinam futurus sit valor huius formae genera-

generalis, ſi omnes termini in infinitum retineantur? idque ſiue exponens n fuerit ſiue poſitiuus, ſiue negatiuus, ſiue integer ſiue fractus? Hanc igitur quaeſtionem quoniam inde ſpeculationes maxime notatu dignae et in doctrina ſerierum nouam quandam lucem accendentes oriuntur, hic accuratius euoluendam ſuſcepi. Oſtendam autem hac forma generali non ſummam poteſtatum exponentis n, quae ex ſingulis radicibus formantur, ſed potius poteſtatem ſimilem vnius duntaxat radicis eiusque maximae exprimi.

VIII.

Quo hanc inueſtigationem ſimpliciorem reddam a caſu huius aequationis $1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{xx}$ inchoabo, ita vt litterae C, D, E etc. omnes euaneſcant: pro hoc ergo caſu forma noſtra generalis, in cuius valorem inquirimus, erit

$$A^n + nA^{n-2}B + \frac{n(n-3)}{1.\,2}A^{n-4}B^2 + \frac{n(n-4)(n-5)}{1.\,2.\,3}A^{n-6}B^3 + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\,2.\,3.\,4}A^{n-8}B^4 + \text{etc.}$$

Ponamus primo $n = 1$, et ſit valor ſeriei $= s$ vt ſit

$$s = A + \frac{B}{A^1} - \frac{2}{2}.\frac{B^2}{A^3} + \frac{3.\,4}{2.\,3}.\frac{B^3}{A^5} - \frac{4.\,5.\,6}{2.\,3.\,4}.\frac{B^4}{A^7} + \text{etc.}$$

quae reuocatur ad hanc formam;

$$s = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}.\frac{2B}{A} - \frac{1.\,1}{2.\,4}.\frac{8B^2}{A^3} + \frac{1.\,1.\,3}{2.\,4.\,6}.\frac{32B^3}{A^5} - \text{etc.}$$

cuius ſeriei ſumma manifeſto eſt

$$s = \tfrac{1}{2}A + \sqrt{(\tfrac{1}{4}AA + B)}$$

quae eſt aequationis propoſitae radix maior. Tum vero iam conſtat illius ſeriei generalis valorem eſſe $= (\frac{1}{2}A + \sqrt{(\frac{1}{4}AA + B)})^n$: ex quo nullum amplius

 ſupereſt

ſupereſt dubium, quin illa forma generalis poteſtatem exponentis n vnius tantum radicis aequationis, eiusque maioris exprimat, hoc ſaltem caſu.

IX.

In genere autem eadem concluſio hoc modo confici poterit. Denotet $s^{(n)}$ totam illam expreſſionem generalem §. V. exhibitam et in infinitum extenſam, ſintque $s^{(n-1)}$, $s^{(n-2)}$, $s^{(n-3)}$ etc. eiusdem valores, ſi loco n ſcribatur $n-1$, $n-2$, $n-3$ etc. atque ex geneſi illius expreſſionis intelligitur fore

$$s^{(n)} = A s^{(n-1)} + B s^{(n-2)} + C s^{(n-3)} + D s^{(n-4)} + \text{etc.}$$

verum ex ipſa aequatione propoſita eſt quoque

$$x^m = A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} + D x^{m-4} + \text{etc.}$$

vnde ſi hae duae aequationes ſequenti modo repraeſententur:

$$1 = \frac{A s^{(n-1)}}{s^{(n)}} + \frac{B s^{(n-2)}}{s^{(n)}} + \frac{C s^{(n-3)}}{s^{(n)}} + \frac{D s^{(n-4)}}{s^{(n)}} + \text{etc. et}$$

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \text{etc.}$$

quoniam hoc valet pro omnibus numeris n, ſequitur fore:

$$s^{(n)} = x s^{(n-1)} = x^2 s^{(n-2)} = x^3 s^{(n-3)} = x^4 s^{(n-4)} \text{ etc.}$$

Cum igitur poſito $n = 0$, ſit $s^{(0)} = A^0 = 1$, erit pro n ſcribendo ſucceſſiue numeros 1, 2, 3, 4 etc.

$$s^{(1)} = x;\quad s^{(2)} = x^2;\quad s^{(3)} = x^3;\quad s^{(4)} = x^4;$$

Quare

Quare euictum eſt in genere fore $s^{(n)} = x^n$; hic autem pro x ſumi debere aequationis propoſitae radicem maximam, inde patet, quod ſumto exponente n infinito, quo caſu formae noſtrae pars integra ab vniuerſa non eſt cenſenda discrepare, ſumma poteſtatum infiniteſimarum ad poteſtatem infiniteſimam radicis maximae ſolam reducitur.

X.

En ergo theorema notatu digniſſimum, vſumque habiturum ampliſſimum, quod propoſita aequatione quacunque huius formae:

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \text{etc.}$$

cuius radix maxima ſit $x = m$, expreſſionis ſupra §. V. exhibitae et in infinitum continuatae valor ſit m^n. Quare ſi ſumatur $n = 1$, eadem expreſſio ipſam radicem maximam exprimet; vbi imprimis omni attentione dignum occurrit, quod omnes poteſtates eiusdem radicis per ſimiles expreſſiones infinitas exprimantur; quin etiam ponendo $n = 0$ ob $\frac{m^0 - A^0}{0} = l\frac{m}{A}$, logarithmus hyperbolicus maximae radicis m hoc modo exprimetur:

$$\begin{aligned} lm = lA &+ \frac{B}{A^2} - \frac{3\,B^2}{2\,A^4} && + \frac{4.\,5.\,B^3}{2.\,3\,A^6} \\ &+ \frac{C}{A^3} - \frac{4.\,2\,BC}{2\,A^5} && + \frac{5.\,6.\,3\,B^2C}{2.\,3\,A^7} \\ &+ \frac{D}{A^4} - \frac{5(2\,BD + CC)}{2\,A^6} && + \frac{6.\,7\,(3\,B^2D + 3\,BC^2)}{2.\,3\,A^8} \\ &+ \frac{E}{A^5} - \frac{6(2\,BE + 2\,CD)}{2\,A^7} && + \frac{7.\,8\,(3\,B^2E + 6\,BCD + C^3)}{2.\,3\,A^9} \\ &\qquad\quad \text{etc.} && \qquad\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

 XI.

XI.

Quoniam ergo hinc cuiusque aequationis radicem maximam non solum ipsam, sed etiam eius quamcunque potestatem per series infinitas commode exprimere licet, hinc primum pulcherrimam illam seriem, quam sagacissimi ingenii vir *Lambertus* in Actorum Helueticorum volumine IV. pro resolutione aequationum ex tribus tantum terminis constantium tradidit, deducere licet. Quemadmodum enim supra aequatio haec $1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$ dederat

$$x^n = A^n + nA^{n-2}B + \frac{n(n-3)}{1.\ 2}A^{n-4}B^2 + \frac{n(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-6}B^3 + \text{etc.};$$

ita haec aequatio $1 = \frac{A}{x} + \frac{C}{x^3}$ dabit

$$x^n = A^n + nA^{n-3}C + \frac{n(n-5)}{1.\ 2}A^{n-6}C^2 + \frac{n(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-9}C^3 + \text{etc.}$$

haecque aequatio $1 = \frac{A}{x} + \frac{D}{x^4}$

$$x^n = A^n + nA^{n-4}D + \frac{n(n-7)}{1.\ 2}A^{n-8}D^2 + \frac{n(n-10)(n-11)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-12}D^3 + \text{etc.}$$

ita concludimus pro hac aequatione $1 = \frac{A}{x} + \frac{M}{x^m}$ fore

$$x^n = A^n + nA^{n-m}M + \frac{n(n-2m+1)}{1.\ 2}A^{n-2m}M^2 + \frac{n(n-3m+2)(n-3m+1)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-3m}M^3 + \text{etc.}$$

Statuamus nunc $x = y^\lambda$ et $x^m = y^\mu$, tum vero pro M scribamus B et $\frac{n}{\lambda}$ loco n, atque ob $m = \frac{\mu}{\lambda}$ pro resolutione huius aequationis generalis $1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$ habebimus:

$$y^n = A^{\frac{n}{\lambda}} + \frac{n}{\lambda} A^{\frac{n-\mu}{\lambda}} B + \frac{n(n+\lambda-2\mu)}{1 \cdot 2\, \lambda^2} A^{\frac{n-2\mu}{\lambda}} B^2 + \frac{n(n+2\lambda-3\mu)(n+\lambda-3\mu)}{1 \cdot 2 \cdot 3\, \lambda^3} A^{\frac{n-3\mu}{\lambda}} B^3$$

$$+ \frac{n(n+3\lambda-4\mu)(n+2\lambda-4\mu)(n+\lambda-4\mu)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, \lambda^4} A^{\frac{n-4\mu}{\lambda}} B^4 + \text{etc.}$$

XII.

Si igitur aequationis $1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$ radix ipſa deſideretur y, poni oportet $n = 1$, ac fiet:

$$y = A^{\frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} A^{\frac{1-\mu}{\lambda}} B + \frac{1+\lambda-2\mu}{2\, \lambda^2} A^{\frac{1-2\mu}{\lambda}} B^2 + \frac{(1+2\lambda-3\mu)(1+\lambda-3\mu)}{2 \cdot 3\, \lambda^3} A^{\frac{1-3\mu}{\lambda}} B^3$$

$$+ \frac{(1+3\lambda-4\mu)(1+2\lambda-4\mu)(1+\lambda-4\mu)}{2 \cdot 3 \cdot 4\, \lambda^4} A^{\frac{1-4\mu}{\lambda}} B^4 + \text{etc.}$$

quae eſt ipſa ſeries *Lamberti* loco allegato exhibita eoque magis notatu digna videtur, quod coefficientium lex ſatis quidem eſt regularis, verumtamen ita comparata, vt ſi ſeries ipſa proponatur, nulla pateat via eius ſummam inueſtigandi; quod eo magis eſt mirum, quod nihilominus huius ſeriei ſumma non ſolum conſtat, ſed adeo algebraice exhiberi poteſt, cum ſit vna radicum huius aequationis $1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$, eaque maxima. Deinde vero huius ſeriei proprietas maximi ſine dubio eſt momenti, quod omnes eius poteſtates ſimilibus ſeriebus exprimantur.

XIII.

Indolem harum ſingularium ſerierum e re erit in aliquot exemplis perſpexiſſe. Sumamus ergo $\lambda = 3$

et $\mu = 2$ vt habeamus hanc aequationem cubicam $y^3 = A + By$, cuius propterea vna radicum erit:

$$y = A^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3} \cdot A^{-\frac{1}{3}} B + 0 A^{-1} B^2 - \tfrac{2.1}{2.3} A^{-\frac{5}{3}} \left(\tfrac{B}{3}\right)^3 + \tfrac{4.1.2}{2.3.4} A^{-\frac{7}{3}} \left(\tfrac{B}{3}\right)^4$$

$$- \tfrac{6}{2} \cdot - \tfrac{3}{3} \cdot \tfrac{0}{4} \tfrac{3}{5} A^{-3} \left(\tfrac{B}{3}\right)^5 - \tfrac{8}{2} \cdot - \tfrac{5}{3} \cdot - \tfrac{2}{4} \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{4}{6} A^{-\frac{11}{3}} \left(\tfrac{B}{3}\right)^6 \text{ etc.}$$

quae expressio quo clarior reddatur sumamus $A = a^3$ et $B = 3b$ vt prodeat huius aequationis $y^3 = 3by + a^3$ radix

$$y = a + \frac{b}{a} + \frac{4.1.2}{2.3.4} \cdot \frac{b^4}{a^7} + \frac{10.7.4.1.2.5}{2.3.4.5.6.7} \cdot \frac{b^7}{a^{13}} + \frac{16.13.10.7.4.1.2.5.8.}{2.3.4.5.6.7.8.9.10} \cdot \frac{b^{10}}{a^{19}} \text{ etc.}$$

$$- \frac{2.1}{2.3} \cdot \frac{b^3}{a^5} - \frac{8.5.2.1.4.}{2.3.4.5.6} \cdot \frac{b^6}{a^{11}} - \frac{14.11.8.5.2.1.4.7}{2.3.4.5.6.7.8.9} \cdot \frac{b^9}{a^{17}} - \frac{20.17.14.11.8.5.2.1.4.7.10}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12} \cdot \frac{b^{12}}{a^{23}} - \text{etc.}$$

quae ita concinnius repraesentatur;

$$y = a + \frac{b}{a} + \frac{1}{3} \cdot \frac{b^4}{a^7} + \frac{1}{3} \frac{7.10}{6.7} \cdot \frac{b^7}{a^{13}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7.10}{6.7} \cdot \frac{13.16}{9.10} \cdot \frac{b^{10}}{a^{19}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7.10}{6.7} \cdot \frac{13.16}{9.10} \cdot \frac{19.22}{12.13} \cdot \frac{b^{13}}{a^{25}} \cdot$$

$$- \frac{1}{3} \cdot \frac{b^3}{a^5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{5.9}{5.6} \cdot \frac{b^5}{a^{11}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{5.8}{5.6} \cdot \frac{11.14}{8.9} \cdot \frac{b^9}{a^{17}} - \frac{1}{3} \frac{5.8}{5.6} \cdot \frac{11.14}{8.9} \cdot \frac{17.20}{11.12} \cdot \frac{b^{12}}{a^{23}} \text{ etc.}$$

XIV.

Hae series accuratiorem euolutionem merentur, ponamus ergo pro priore

$$s = x + \tfrac{1}{3} x^4 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{7.10}{6.7} x^7 + \ldots\ldots M x^{3n+1} + N x^{3n+4} + \text{etc.}$$

et cum esse debeat $\frac{N}{M} = \frac{6n+1}{3n+3} \cdot \frac{6n+4}{3n+4}$ haec conditio adimpletur hac aequatione differentiali secundi gradus

$$dds = 4x^3 dds + 6xxdxds - 2xsdx^2$$

quae commode per $2xds - sdx$ multiplicata integrabilis euadit; reperitur enim integrando:

$$xds^2 - sdxds + Cdx^2 = 4x^4 ds^2 - 4x^3 sdxds + xxssdx^2$$

vbi cum sumto x infinite paruo fiat $s = x$ et $\frac{ds}{dx} = 1$ euidens est capi debere $C = 0$ ita vt sit

(*xds*

$(xds-sdx)ds = 4x^3(xds-sdx)ds + xxssdx^2 = xx(2xds-sdx)^2$ seu $\frac{ds^2}{ssdx^2} = \frac{ds}{xsdx} + \frac{x}{1-4x^3}$, vnde radicem extrahendo fit

$$\frac{ds}{sdx} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{1}{1-4x^3}} \text{ ita vt habeamus:}$$

$$ls = \tfrac{1}{2}lx + \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-4x^3)}} = \tfrac{1}{2}lx + \tfrac{1}{3}l\frac{2x\sqrt{x}}{1+\sqrt{(1-4x^3)}}.$$

Hinc ergo erit $s = x\sqrt[3]{\frac{2}{1+\sqrt{(1-4x^3)}}}$.

XV.

Ponamus ergo $\frac{b}{aa} = x$, vt habeamus

$$\frac{y}{a} = 1 + x + \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{1}{3}.\tfrac{7.10}{6.7}x^7 + \tfrac{1}{3}.\tfrac{7.10}{6.7}.\tfrac{13.16}{9.10}.x^{10} + \text{etc.}$$
$$- \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}.\tfrac{5.8}{5.6}x^6 - \tfrac{1}{3}.\tfrac{5.8}{5.6}.\tfrac{11}{8}.\tfrac{14}{9}x^9 - \text{etc.}$$

seu

$$\frac{y}{a} = s + 1 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}.\tfrac{5.8}{5.6}x^6 - \tfrac{1}{3}.\tfrac{5.8}{5.6}.\tfrac{11.14}{8.9}x^9 - \text{etc.}$$

Ponamus summam seriei $1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}.\frac{5.8}{5.6}.x^6 - \text{etc.} = t$ ac reperiemus vt ante, quoniam lex progressionis est eadem:

$$ddt = 4x^3ddt + 6xxdxdt - 2xtdx^2$$

cuius integrale propterea est quoque

$$xdt^2 - tdxdt = 4x^4dt^2 - 4x^3tdxdt + xxttdx^2$$

quia enim sumto x infinite paruo fit $t = 1$ et $\frac{dt}{dx} = 0$ constans addenda etiam euanescit. Porro ergo integrando adipiscimur:

$$t = x\sqrt[3]{\frac{2}{1-\sqrt{(1-4x^3)}}} \text{ fietque } t = 1 \text{ si } x = 0.$$

Quocirca pro radice aequationis $y^3 = 3by + a^3$ habebimus:

$$\frac{y}{a} = s + t = x\sqrt[3]{\frac{2}{1+\sqrt{(1-4x^3)}}} + x\sqrt[3]{\frac{2}{1-\sqrt{(1-4x^3)}}} = \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{(1-4x^3)}}{2}}$$
$$+ \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{(1-4x^3)}}{2}}$$

existente $x = \frac{b}{aa}$, ideoque

$$y = \sqrt[3]{\frac{a^3 - \sqrt{(a^6 - 4b^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{a^3 + \sqrt{(a^6 - 4b^3)}}{2}}$$

quam eandem expressionem regula Cardani suppeditat.

XVI.

Euoluamus aliud exemplum aequationis cubicae, ponendo $\lambda = 1$ et $\mu = 3$, vt sit $y^3 = Ayy + B$ ac posito $\frac{B}{A^3} = x$, nostra forma dat

$$\frac{y}{A} = 1 + x - \tfrac{4}{2}x^2 + \tfrac{6.7}{2.3}x^3 - \tfrac{8.9.10}{2.3.4}x^4 + \tfrac{10.11.12.13}{2.3.4.5}x^5 - \text{etc.}$$

quae ad hanc legem reducitur continuitatis

$$\frac{y}{A} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3} + x - \tfrac{4}{2}x^2 + \tfrac{6.7}{2.3}x^3 \ldots \pm Mx^n \mp Nx^{n+1}$$

vt sit $N = \frac{3(3n-1)(3n+1)}{(2n+1)(2n+2)} M = \frac{27nn-3}{4nn+6n+2} M.$

Ponamus $\frac{y}{A} - \frac{1}{3} = s$, et relatio inter s et x exprimetur per hanc aequationem differentialem secundi gradus:

$$4xxdds + 2xdxds + 27x^3dds + 27x^2dxds - 3xsdx^2 = 0$$

quae per $\frac{2ds}{x}$ multiplicata et integrata praebet:

$4xds^2 + 27xxds^2 - 3ssdx^2 = Cdx^2$ vnde colligitur

$$\frac{ds}{\sqrt{(C+3ss)}} = \frac{dx}{\sqrt{(4x+27xx)}}$$

cuius

cuius integratio dat

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\, l(s\sqrt{3}+\sqrt{(C+3ss)}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\, l\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}+3x\sqrt{3}+\sqrt{(4x+27xx)}\right)$$

vnde porro elicitur haec aequatio algebraica:

$$s = A\left(1+\frac{27x}{2}+3\sqrt{\left(3x+\frac{81xx}{4}\right)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$+B\left(1+\frac{27}{2}x-3\sqrt{\left(3x+\frac{81xx}{4}\right)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

quae euoluta vtique praebet

$$s^3 = 3ABs+(A^3+B^3)\left(1+\frac{27x}{2}\right)+3(A^3-B^3)\sqrt{\left(3x+\frac{81xx}{4}\right)}$$

aequatio autem assumta inter s et x erat

$$s^3 = \frac{1}{3}s+\frac{2}{27}+x$$

quae in integrali illo completo continetur sumendo

$$A = B = \frac{1}{3}.$$

XVII.

Euolutio haec elegantissima aequationum tribus tantum terminis constantium $1 = \frac{A}{y^\lambda}+\frac{B}{y^\mu}$ eo maiorem attentionem meretur, quod nulla via patet directa, ex serie inuenta in genere valorem summae y inuestigandi, etiamsi tandem haec summa maxime concinna aequatione algebraica exhiberi possit. Quod enim casus hic pro aequationibus quadraticis et cubicis expedire licuit, successus huic circumstantiae soli acceptus est referendus, quod harum aequationum resolutio est in potestate; vnde non immerito suspicari licet, si methodus detegeretur huiusmodi series summandi inde eximia subsidia ad resolutio-

 nem

nem aequationum cuiuscunque gradus esse redundatura. Simili autem modo euolutio aequationum quaternis terminis constantium exhiberi potest latissime patens, quae autem ita est comparata, vt singuli termini continuo plura membra contineant, quorum tamen ordo satis est perspicuus.

XVIII.

Si enim in genere haec fuerit proposita aequatio quatuor constans terminis:

$$1 = \frac{A}{y^{\lambda}} + \frac{B}{y^{\mu}} + \frac{C}{y^{\nu}}$$

atque ponamus $y^n = P + Q + R + S + T$ etc. hae partes P, Q, R, S, T etc. sequenti modo determinantur:

$$P = A^{\frac{n}{\lambda}}$$

$$Q = \frac{n}{\lambda} A^{\frac{n-\mu}{\lambda}} B + \frac{n}{\lambda} A^{\frac{n-\nu}{\lambda}} C$$

$$R = \begin{cases} + \frac{n(n+\lambda-2\mu)}{1.\,2\lambda^2} A^{\frac{n-2\mu}{\lambda}} BB \\ + \frac{2n(n+\lambda-\mu-\nu)}{1.\,2\lambda^2} A^{\frac{n-\mu-\nu}{\lambda}} BC \\ + \frac{n(n+\lambda-2\nu)}{1.\,2\lambda^2} A^{\frac{n-2\nu}{\lambda}} CC \end{cases}$$

+

$$S = \begin{cases} + \dfrac{n(n+\lambda-3\mu)(n+2\lambda-3\mu)}{1.\,2.\,3\,\lambda^3} A^{\frac{n-3\mu}{\lambda}} B^3 \\[2ex] + \dfrac{3n(n+\lambda-2\mu-\nu)(n+2\lambda-2\mu-\nu)}{1.\,2.\,3\,\lambda^3} A^{\frac{n-2\mu-\nu}{\lambda}} B^2 C \\[2ex] + \dfrac{3n(n+\lambda-\mu-2\nu)(n+2\lambda-\mu-2\nu)}{1.\,2.\,3\,\lambda^3} A^{\frac{n-\mu-2\nu}{\lambda}} B C^2 \\[2ex] + \dfrac{n(n+\lambda-3\nu)(n+2\lambda-3\nu)}{1.\,2.\,3\,\lambda^3} A^{\frac{n-3\nu}{\lambda}} C^3 \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} + \dfrac{n(n+\lambda-4\mu)(n+2\lambda-4\mu)(n+3\lambda-4\mu)}{1.\,2.\,3.\,4\,\lambda^4} A^{\frac{n-4\mu}{\lambda}} B^4 \\[2ex] + \dfrac{4n(n+\lambda-3\mu-\nu)(n+2\lambda-3\mu-\nu)(n+3\lambda-3\mu-\nu)}{1.\,2.\,3.\,4\,\lambda^4} A^{\frac{n-3\mu-\nu}{\lambda}} B^3 C \\[2ex] + \dfrac{6n(n+\lambda-2\mu-2\nu)(n+2\lambda-2\mu-2\nu)(n+3\lambda-2\mu-2\nu)}{1.\,2.\,3.\,4\,\lambda^4} A^{\frac{n-2\mu-2\nu}{\lambda}} B^2 C^2 \\[2ex] + \dfrac{4n(n+\lambda-\mu-3\nu)(n+2\lambda-\mu-3\nu)(n+3\lambda-\mu-3\nu)}{1.\,2.\,3.\,4\,\lambda^4} A^{\frac{n-\mu-3\nu}{\lambda}} B C^3 \\[2ex] + \dfrac{n(n+\lambda-4\nu)(n+2\lambda-4\nu)(n+3\lambda-4\nu)}{1.\,2.\,3.\,4\,\lambda^4} A^{\frac{n-4\nu}{\lambda}} C^4. \end{cases}$$

XIX.

Hinc iam quotcunque aequatio contineat terminos

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu} + \frac{C}{y^\nu} + \frac{D}{y^\xi} + \text{etc.}$$

in genere valor poteſtatis indefinitae y^n aſſignari poterit, aequabitur enim ſeriei ex infinito terminorum numero conflatae, qui ex omnibus quantitatum B, C, D etc. combinationibus naſcuntur. Sufficiet igitur in genere terminum huic combinationi $B^\beta C^\gamma D^\delta$ etc.

etc. respondentem definiuisse, vbi pro β, γ, δ etc. sucessiue omnes numeri integri positiui a cyphra 0, 1, 2, 3 etc. in infinitum substitui sunt intelligendi. Ad hunc autem terminum inueniendum primo indagari debet numerus combinationum formae $B^{\beta}C^{\gamma}D^{\delta}$ etc. quem statuamus $=N$ et posita exponentium summa $\beta+\gamma+\delta+$ etc. $=p$ notum est fore

$$N=\frac{1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots p}{1.2\ldots\beta.\ 1.2\ldots\gamma.\ 1.2\ldots\delta \text{ etc.}}$$

deinde ponamus breuitatis gratia $\beta\mu+\gamma\nu+\delta\xi+$ etc. $=q$ atque terminus quaesitus formae $B^{\beta}C^{\gamma}D^{\delta}$ etc. conveniens erit

$$N.\frac{n}{\lambda}.\frac{n+\lambda-q}{2\lambda}.\frac{n+2\lambda-q}{3\lambda}.\frac{n+3\lambda-q}{4\lambda}\ldots\frac{n+(p-1)\lambda-q}{p\lambda}A^{\frac{n-q}{\lambda}}B^{\beta}C^{\gamma}D^{\delta} \text{ etc.}$$

Omnes ergo hi termini iunctim sumti verum valorem potestatis y^n determinabunt.

XX.

Euolutio aequationis $1=\frac{A}{y}+By^3$.

Vt exemplum aequationis biquadraticae proferam, hanc aequationem, quae istam formam dat $By^4=y-A$ euoluendam suscipio. Cum igitur sit $\lambda=1$ et $\mu=-3$ hanc adipiscimur seriem,

$$y=A+A^4B+\tfrac{8}{2}A^7B^2+\tfrac{11.12}{2.3}A^{10}B^3+\tfrac{14.15.16}{2.3.4}A^{13}B^4 + \tfrac{17.18.19.20}{2.3.4.5}A^{16}B^5 \text{ etc.}$$

In hac serie quilibet terminus ita pendet a praecedente, vt quisque terminus per praecedentem divisus praebeat quotum huius formae $4\frac{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}{n(3n-1)(3n+1)}A^3B$, ex quo summatio huius seriei perducitur ad aequationem

tionem differentialem tertii gradus, quae facto $A = \frac{3}{4}u$ et $B = \frac{1}{4}$ vt aequatio propoſita ſit $y^4 = 4y - 3u$ ita ſe habebit

$$32(1-u^3)d^3y - 144uududdy - 86udu^2dy + 5ydu^3 = 0$$

ſumto ſcilicet elemento du conſtante. Quemadmodum autem illa aequatio in hac contineatur, non perſpicitur.

XXI.

Obſeruo autem hanc aequationem integrabilem reddi ſi multiplicetur per y, ſinguli enim termini quatenus fieri poteſt integrati praebent vt ſequitur:

$$\int y\,d^3y = y\,ddy - \tfrac{1}{2}dy^2 \quad [\text{per } 32]$$

$$\int u^3yd^3y = u^3yddy - \tfrac{1}{2}u^3dy^2 - 3uuydudy + 3uy^2du^2 + \tfrac{9}{2}\int uududy^2 - 3\int yydu^3 \quad [\text{per } -32]$$

$$\int uuyduddy = uuydudy - uyydu^2 - \int uududy^2 + \int yydu^3 \quad [\text{per } -144]$$

$$\int udu^2ydy = \tfrac{1}{2}uy^2du^2 - \tfrac{1}{2}\int yydu^3 \quad [\text{per } -86]$$

$$\int yydu^3 = \int yydu^3 \quad [\text{per } 5]$$

vnde naſcitur haec forma integrata

$$16(1-u^3)(2yddy - dy^2) - 48uuydudy + 5uy^2du^2 = Cdu^2$$

quae ponendo $y = zz$, ob $yy = z^4$, $ydy = 2z^3dz$ et $yddy + dy^2 = yddy + 4zzdz^2 = 2z^3ddz + 6zzdz^2$ ideoque

$$2yddy = 4z^3ddz + 4zzdz^2 \text{ ſeu } 2yddy - dy^2 = 4z^3ddz$$

induit hanc formam:

$$64(1-u^3)z^3ddz - 96uuz^3dudz + 5uz^4du^2 = Cdu^2$$

$$\text{vel } 64(1-u^3)ddz - 96uududz + 5uzdu^2 = \frac{Cdu^2}{z^3}$$

quae

quae ergo hanc aequationem integralem $z^8 = 3zz - 3u$ in se complectitur; idque casu quo constans $C = -9$, propterea quod est $y = \frac{3}{4}u + \frac{3^4}{4^5}u^4 + \frac{3^7}{4^9}u^7 + \text{etc.}$ ideoque sumto u infinite paruo $z = \frac{1}{2}\sqrt{3u}$.

XXII.

Cum nulla via pateat, hanc aequationem differentialem secundi gradus vlterius reducendi, operae pretium erit inuestigare, quomodo et quatenus ea cum aequatione finita $z^8 = 4zz - 3u$ conueniat. In hunc finem repraesentemus aequationem differentialem hac forma:

$$Lz^3 ddz + Mz^3 dudz + Nz^4 du^2 = Cdu^2$$

vt sit $L = 64(1 - u^3)$; $M = -96uu$; et $N = 5u$

at aequatio finita differentiata dat

$$8z^7 dz = 8zdz - 3du \quad \text{seu} \quad 8dz(u - zz) = zdu$$

vnde fit porro differentiando:

$$8ddz(u - zz) = 16zdz^2 - 7dudz = \frac{9z^3 - 7uz}{8(u - zz)^2}du^2.$$

Cum ergo sit

$$\frac{dz}{du} = \frac{z}{8(u - zz)} \quad \text{et} \quad \frac{ddz}{du^2} = \frac{9z^3 - 7uz}{64(u - zz)^3}$$

prodibit facta substitutione haec aequatio

$$\frac{(1 - u^3)z^4(9zz - 7u)}{(u - zz)^3} - \frac{12uuz^4}{u - zz} + 5uz^4 = C \quad \text{seu}$$

$$(1 - u^3)z^4(9zz - 7u) - (7uu + 5uzz)z^4(u - zz)^2 + C(u - zz)^3 = 0$$

quae euoluta et ope aequationis $z^8 = 4zz - 3u$ ad potestates ipsius z octaua minores depressa perducit ad hanc:

$(9 + C)$

$$(9+C)z^6 - 3(9+C)uz^4 + 3(9+C)uuzz - (9+C)u^3 = 0$$

cui valor $C = -9$ manifesto satisfacit.

XXIII.

Plus autem hinc concludere non licet, quam aequationem hanc $z^8 = 4zz - 3u$ contineri in hac aequatione differentio-differentiali:

$$64(1-u^3)z^3ddz - 96uuz^3dudz + 5uz^4du^2 = Cdu^2$$

casu quo $C = -9$, interim tamen ne hoc quidem casu integrale completum exhibere licet, in quod praeterea duae quantitates constantes ingrediantur. Multo minus autem in genere quicunque valor ipsi C tribuatur, integrationem sperare poterimus cum ne casu quidem $C = 0$, methodis cognitis integrationem admittat. Ex quo intelligimus si aequationes algebraicae, quarum radices hic ad series infinitas perduximus, tertium gradum superent, serierum inde natarum summas nullius methodi adhuc cognitae ope inuestigari posse.

XXIV.

Coronidis loco adiungam problema inuersum, quo proposita huiusmodi aequatione cubica $y^3 + py + q = 0$, inuestigari oporteat aequationem differentialem secundi ordinis huius formae $ddy + Qdy + Ry = 0$, in qua illa contineatur: quae inuestigatio semper succedit; differentiatione enim bis instituta, indeque hic loco dy et ddy valoribus substitutis, vt termini prodeant solam quantitatem y eiusque potestates continentes, quas ope aequationis $y^3 + py + q = 0$ infra tertiam deprimere licebit: quo facto seorsim ad nihilum redigantur partes cum ab y liberae, tum vero ipſam y eiusque quadratum yy continentes, vbi commode eueniet, vt ſimul ac binis conditionibus fuerit ſatisfactum, tertia ſponte adimpleatur. Hoc autem modo calculum inſtituendo reperietur.

$$Q = \frac{18ppqddp^2 - 2(8p^3 - 27qq)dpdq - 54pqdq^2}{(3qdp - 2pdq)(4p^3 + 27qq)} + \frac{2pddq - 3qddp}{3qdp - 2pdq}$$

$$R = \frac{6p(dq^3 + pdp^2dq - qdp^3)}{(3qdp - 2pdq)(4p^3 + 27qq)} + \frac{dqddp - dpddq}{3qdp - 2pdq}$$

Haec autem aequatio per $\frac{4p^3 + 27qq}{(3qdp - 2pdq)^2}(2pdy - ydp)$ multiplicata integrabilis redditur, indeque porro pro y aequatio cubica latius patens quam propoſita elicietur.

XXV.

Aequatio differentialis ſecundi gradus magis fit concinna ſi ponatur $qq = \frac{4p^3x}{27}$, fiet enim

$$ddy - dy\left(\frac{ddx}{dx} + \frac{dp}{p} - \frac{dx}{2x} - \frac{dx}{2(1+x)}\right) + y\left(\frac{dpddx}{2pdx} - \frac{ddp}{2p} + \frac{3dp^2}{4pp} - \frac{dpdx}{4px} - \frac{dpdx}{4p(1+x)} - \frac{-dx^2}{36x(1+x)}\right) = 0$$

quae per $\frac{x(1+x)}{ppdx^2}(2pdy - ydp)$ multiplicata et integrata praebet

$$\frac{x(1+x)}{pdx^2}\left(dy - \frac{ydp}{2p}\right)^2 = \frac{C}{18} + \frac{yy}{18p}$$

et ponendo $y = z\surd p$ hinc reperitur

$$\frac{3dz\surd 2}{\surd(C + zz)} = \frac{dx}{\surd x(1+x)}$$

quae denuo integrata dat:

$$\left(z + \surd(C + zz)\right)^3 = D\left(\tfrac{1}{2} + x + \surd x(1+x)\right)$$

unde tandem eruitur:

$$z = \frac{y}{\surd p} = A\left(\tfrac{1}{2} + x + \surd x(1+x)\right)^{\frac{1}{3}} + B\left(\tfrac{1}{2} + x - \surd x(1+x)\right)^{\frac{1}{3}}$$

ac cubo ſumendo

$$z^3 = \tfrac{3}{4}ABz + (A^3 + B^3)\left(\tfrac{1}{2} + x\right) + (A^3 - B^3)\surd x(1+x)$$

PRO-

PROBLEMA ALGEBRAICVM OB AFFECTIONES PRORSVS SINGVLARES MEMORABILE.

Auctore

L. EVLERO.

Problema, cuius affectiones hic contemplandas suscipio, ita se habet:

Inuenire nouem numeros ita in quadratum disponendos, vt satisfiat duodecim sequentibus conditionibus:	A, B, C D, E, F G, H, I

1°. $AA + DD + GG = 1$; 4°. $AB + DE + GH = 0$
2° $BB + EE + HH = 1$; 5°. $AC + DF + GI = 0$
3°. $CC + FF + II = 1$; 6°. $BC + EF + HI = 0$

7°. $AA + BB + CC = 1$; 10°. $AD + BE + CF = 0$
8°. $DD + EE + FF = 1$; 11°. $AG + BH + CI = 0$
9°. $GG + HH + II = 1$; 12°. $DG + EH + FI = 0$.

Circa hoc problema sequentia obseruo.

I. Cum numerus conditionum implendarum superet numerum quantitatum determinandarum, problema hoc plusquam determinatum videtur. Vtcunque enim conditiones praescriptae perpendantur, nulla alia relatio, qua aliquae in reliquis iam contineantur, in iis deprehenditur, nisi quod summa conditionum 7°. 8°. 9° conueniat cum summa conditionum 1°. 2°. 3°; vnde vnica harum duodecim conditionum in reliquis iam contineri videtur; qua remota tamen adhuc vndecim conditiones relinquuntur, quae binario numerum quantitatum incognitarum excedunt. Hic equidem tantum de eiusmodi relatione loquor, quae has conditiones consideranti occurrit, reuera enim aliquot necessariae relationes inter eas intercedunt, quae autem vix ante animaduertuntur, quam problema perfecte fuerit solutum.

II. Deinde obseruo hoc problema non solum non esse plusquam determinatum, sed adeo esse indeterminatum, ita vt nouem numerorum quaesitorum tres pro lubitu accipere liceat, nihiloque minus omnibus conditionibus praescriptis satisfieri queat. Dummodo enim sex prioribus conditionibus fuerit satisfactum, reliquae sex sponte implentur atque omnino fieri non potest, vt sex prioribus satisfiat quin simul omnibus satisfiat. Quocirca problema propositum eiusdem prorsus indolis maneret etiamsi sex posteriores conditiones plane omitterentur; ac tum ei insigne Theorema istud adiungi posset.

Quodsi nouem numeri A, B, C, D, E, F, G, H, I *ita fuerint comparati, vt 6 prioribus conditionibus satisfaciant tum etiam necessario sex posterioribus satisfaciant.*

Quod Theorema pro difficillimo demonstratu venditare non dubito, neque video quomodo demonstramonſtratio adornari queat, niſi ſolutio problematis fuerit explorata.

III. Neque vero hoc problema pro otioſa ſpeculatione ſeu mero luſu ingenii eſt habendum, ſed potius in doctrina de ſuperficierum natura eſt maximi momenti. Cum enim natura ſuperficiei per aequationem inter ternas coordinatas tribus axibus inter ſe normalibus parallelas exprimi ſoleat, talis aequatio mutandis axibus in infinitum variari poteſt, etiamſi axium communis interſectio in eodem puncto ſtatuatur. Quoniam igitur eadem ſuperficies infinitis aequationibus diuerſis inter ternas coordinatas definiri poteſt, plurimum intereſt earum characterem communem noſſe, qui in eo conſiſtit, vt ſi coordinatae ternis quibusdam axibus datis parallelae ſint x, y, z; quae autem aliis quibuscunque axibus conſtituuntur parallelae, fuerint X, Y, Z eorum relatio mutua ſemper huiusmodi formulis contineatur:

$$X = Ax + By + Cz;\quad Y = Dx + Ey + Fz;\quad Z = Gx + Hy + Iz$$

qui nouem coefficientes ita comparati ſint neceſſe eſt, vt inde fiat: $XX + YY + ZZ = xx + yy + zz$, quandoquidem his formulis quadratum interualli quo ſuperficiei punctum ab initio coordinatarum diſtat, exprimitur. Quod fieri nequit, niſi hae ſex aequationes habeant locum:

$$AA + DD + GG = 1,\quad BB + EE + HH = 1,\quad CC + FF + II = 1$$
$$AB + DE + GH = 0,\quad AC + DF + GI = 0,\quad BC + EF + HI = 0$$

 quae

quae ſunt ipſae ſex priores conditiones noſtri problematis.

IV. Quocunque autem modo hoc problema ſecundum Algebrae praecepta tentetur, ob tantum incognitarum numerum ſemper ad calculos vehementer intricatos peruenitur, ex quibus neutiquam ſolutionem commodam expectare liceat. Theoriam quidem angulorum in ſubſidium vocando, haud difficulter ſolutio ſatis concinna obtinetur, verum haec methodus vix ad alias huius generis quaeſtiones magis complicatas traduci poterit: veluti ſi circa 16, 25, 36 etc. numeros, pariter in quadratum diſponendos ſimilis quaeſtio inſtituatur, vt ſumma quadratorum per ſingulas columnas tam verticales quam horizontales ſumtorum vnitati aequetur, ſimul vero ſummae productorum ſecundum binas columnas itidem tam verticales quam horizontales ad nihilum redigantur Methodum ergo etiam ad has quaeſtiones patentem, quae vtique in Analyſi maximi momenti eſt putanda deinceps ſum expoſiturus, poſtquam demonſtrationem Theorematis §. 11. memorati, atque ſolutionem problematis initio propoſiti ope ſinuum et coſinuum tradidero.

Demonſtratio Theorematis §. 11. propoſiti.

V. Aſſumo ergo nouem numeros noſtros A, B, C, D, E, F, G, H, I ita eſſe comparatos vt ſit

1°.

$$1^\circ.\ AA+DD+GG=1;\quad 4^\circ.\ AB+DE+GH=0$$
$$2^\circ.\ BB+EE+HH=1;\quad 5^\circ.\ AC+DF+GI=0$$
$$3^\circ.\ CC+FF+II=1;\quad 6^\circ.\ BC+EF+HI=0$$

quarum tres posteriores ita repraesento:

$$4^\circ.\ AB=-DE-GH;\quad 5^\circ.\ AC=-DF-GI;$$
$$6^\circ.\ BC=-EF-HI$$

vnde concludo fore:

$$\frac{4^\circ.\ 5^\circ}{6^\circ.}\ \ldots\ \frac{AABC}{BC}=AA=-\frac{(DE+GH)(DF+GI)}{EF+HI}$$

qui valor ipsius AA in prima aequatione positus dat:

$$-(DE+GH)(DF+GI)+(EF+HI)(DD+GG)$$
$$=EF+HI$$

factaque euolutione:

$$-DEGI-DFGH+DDHI+EFGG=EF+HI$$

cuius aequationis primum membrum manifesto in hos factores resoluitur:

$$(DH-EG)(DI-FG)=EF+HI.$$

VI. Cum igitur sit $EF+HI=-BC$, erit

$$BC=(EG-DH)(DI-FG)$$

similique modo colligetur fore

$$AC=(FH-EI)(EG-DH)\ \text{et}$$
$$AB=(DI-FG)(FH-EI)$$

quarum duarum posteriorum productum per primam diuisum praebet

$$AA=(FH-EI)^2\ \text{hincque}\ A=\pm(FH=EI)$$

quia autem singulos numeros tam negatiue quam positiue capere licet, ambiguitas signi nullam variationem

tionem inferre eſt cenſenda, vnde ſumto ſuperiori habebimus:

$$A=FH-EI;\ B=DI-FG;\ C=EG-DH.$$

Cum autem ex rei natura columnas verticales inter ſe permutare liceat, hinc per analogiam concludimus fore

$$D=BI-CH;\ E=CG-AI;\ F=AH-BG$$
$$G=CE-BF;\ H=AF-CD;\ I=BD-AE.$$

VII. En ergo nouem nouas determinationes, quae in ſex conditionibus praeſcriptis neceſſario inuoluuntur, et quas inſuper ad 12 conditiones initio propoſitas adiicere potuiſſemus. Verum hae ipſae nouem determinationes, quas ſequenti modo indicabo:

$13°.\ A=FH-EI;$ $16°.\ D=BI-CH;$ $19°.\ G=CE-BF;$
$14°.\ B=DI-FG;$ $17°.\ E=CG-AI;$ $20°.\ H=AF-CD;$
$15°.\ C=EG-DH;$ $18°.\ F=AH-BG;$ $21°.\ I=BD-AE;$

facile ad conditiones ſex poſteriores initio propoſitas deducunt.

Nam formulae 13°. per D, 14°. per E et 15°. per F multiplicatae et in vnam ſummam collectae dant:

$$AD+BE+CF=\begin{matrix}+DFH+DEI+EFG\\-DEI-EFG-DFH\end{matrix}=0$$

quae eſt ipſa conditio 10° initio propoſita, ſimilique modo 13°. G + 14°. H + 15°. I dabit conditionem

nem 11°. et 16° G + 17°. H + 18°. I conditionem 12°. ita vt ſit:

$$10°.\ AD+BE+CF=0,\quad 11°.\ AG+BH+CI=0;\quad 12°.\ DG+EH+FI=0.$$

VIII. Denique ſi in formula nro. 13°. valores literarum E et F ex formulis 17° et 18°. ſubſtituantur, emergit haec aequatio:

$$A=AHH-BGH-CGI+AII=A(HH+II)-G(BH+CI)$$

at ex aequatione 11°. eſt $BH+CI=-AG$, vnde colligitur:

$$A=A(GG+HH+II),$$ ideoque vel $A=0$ vel $$GG+HH+II=1.$$

Cum autem ſimili modo ex formulis 14°. 15°. 16°. 17° et 18° eliciantur aequationes:

$$B=B(GG+HH+II);\quad D=D(GG+HH+II)$$
$$C=C(GG+HH+II);\quad E=E(GG+HH+II)$$
$$\text{et } F=F(GG+HH+II)$$

neque litterae A, B, C, D, E, F omnes ſimul euaneſcant, neceſſe eſt ſit $GG+HH+II=1$ quae eſt conditio 9°. hocque modo oſtenditur eſſe:

$$7°.\ AA+BB+CC=1;\quad 8°.\ DD+EE+FF=1;\quad 9°.\ GG+HH+II=1$$

quae eſt demonſtratio completa theorematis propoſiti.

Solutio Problematis initio propoſiti.

IX. Statuamus $A=\cos.\zeta$, et cum conditiones 1° et 7°. praebeant:

$$DD+GG=\text{fin.}\,\zeta^2 \text{ et } BB+CC=\text{fin.}\,\zeta^2$$

his ingenere fatisfaciemus ponendo:

$B=\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta$; $C=\text{fin.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\eta$; $D=\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\theta$;
$G=\text{fin.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\theta$.

Confiderentur iam conditiones 17° et 21°. quae factis his fubftitutionibus induent has formas:

17°. $E=\text{fin.}\,\zeta^2\text{fin.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta-I\,\text{cof.}\,\zeta$, feu $E+I\,\text{cof.}\,\zeta=\text{fin.}\,\zeta^2\text{fin.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta$

21°. $I=\text{fin.}\,\zeta^2\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta-E\,\text{cof.}\,\zeta$ feu $I+E\,\text{cof}\,\zeta=\text{fin.}\,\zeta^2\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta$.

Hinc $17°-21°.\text{cof.}\,\zeta$ et $21°-17°.\text{cof.}\,\zeta$ dant:

$$E(1-\text{cof.}\,\zeta^2)=\text{fin.}\,\zeta^2(\text{fin.}\,\eta\,\text{fin}\,\theta-\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta)$$
$$I(1-\text{cof.}\,\zeta^2)=\text{fin.}\,\zeta^2(\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta-\text{cof.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta)$$

vnde colligitur:

$E=\text{fin.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta-\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta$ et $I=\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta$
$-\text{cof.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta$.

X. Simili modo conditiones 18° et 20° modo ante demonftratae, factis fubftitutionibus fuppeditant has aequationes:

18°. $F=H\,\text{cof.}\,\zeta-\text{fin.}\,\zeta^2\text{cof.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta$ feu $F-H\,\text{cof.}\,\zeta=-\text{fin.}\,\zeta^2\text{cof.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta$

20°. $H=F\,\text{cof.}\,\zeta-\text{fin.}\,\zeta^2\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta$ feu $H-F\,\text{cof.}\,\zeta=-\text{fin}\,\zeta^2\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta$

vnde formae $18°+20°.\text{cof.}\,\zeta$ et $20°+18°.\text{cof.}\,\zeta$ producunt

$$F(1-\text{cof.}\,\zeta^2)=-\text{fin.}\,\zeta^2(\text{cof.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta+\text{cof.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta)$$
$$H(1-\text{cof.}\,\zeta^2)=-\text{fin.}\,\zeta^2(\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta+\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta)$$

vnde ob $1-\text{cof.}\,\zeta^2=\text{fin.}\,\zeta^2$ elicitur

$F=-\text{cof.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta-\text{cof.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta$; et $H=-\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta$
$-\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta$

ficque

ſicque nouem numeri conditionibus praeſcriptis ſatisfacientes ita ſunt definiti, vt tres anguli ζ, η, θ arbitrio noſtro relinquantur, in quo criterium ſolutionis completae cernitur.

XI. Solutio ergo completa noſtri problematis ita ſe habet, vt nouem numeri quaeſiti ſequentes ſortiantur valores:

$A = \text{coſ.}\zeta$	$B = \text{ſin.}\zeta\,\text{coſ.}\eta$	$C = \text{ſin.}\zeta\,\text{ſin.}\eta$
$D = \text{ſin.}\zeta\,\text{coſ.}\theta$	$E = \text{ſin.}\eta\,\text{ſin.}\theta - \text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\eta\,\text{coſ.}\theta$	$F = -\text{coſ.}\eta\,\text{ſin.}\theta - \text{coſ.}\zeta\,\text{ſin.}\eta\,\text{coſ.}\theta$
$G = \text{ſin.}\zeta\,\text{ſin.}\theta$	$H = -\text{ſin.}\eta\,\text{coſ.}\theta - \text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\eta\,\text{ſin.}\theta$	$I = +\text{coſ.}\eta\,\text{coſ.}\theta - \text{coſ.}\zeta\,\text{ſin.}\eta\,\text{ſin.}\theta$

quibus valoribus non ſolum ſex conditiones priores, quibus problema determinatur, ſed etiam ſex poſteriores, atque adeo etiam nouem nouae §. VII. exhibitae, adimplentur. Haecque ſolutio iſtum praeſtat vſum, vt inde facili negotio ſolutiones in numeris rationalibus, quotcunque libuerit, reperire liceat, tres ſcilicet angulos ζ, η, θ ita capi opus eſt, vt eorum tam ſinus quam coſinus rationaliter exprimantur. Hinc ſolutio ſatis ſimplex prodibit ſumendo

$\text{coſ.}\zeta = \frac{3}{5}$; $\text{ſin.}\zeta = \frac{4}{5}$; $\text{coſ.}\eta = \frac{3}{5}$; $\text{ſin.}\eta = \frac{4}{5}$; $\text{coſ.}\theta = \frac{5}{13}$; $\text{ſin.}\theta = \frac{12}{13}$.

Methodus Generalis huiusmodi problemata reſoluendi.

XII. Methodus generalis, quam hic ſum traditurus, ex principio ſupra §. III. memorato eſt petita, vbi oſtendi problema propoſitum eo redire,

 vt

vt ex ternis variabilibus x, y, z aliae tres X, Y, Z per huiusmodi formulas $\alpha x + \beta y + \gamma z$ ita determinentur, vt fiat $X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2$, haecque determinatio maxime ſit generalis; tum enim coefficientes trium harum formularum $\alpha x + \beta y + \gamma z$ pro nouis variabilibus X, Y, Z reſultantium, erunt ipſi illi nouem numeri, qui in problemate deſiderantur. Hic igitur duae conditi one probe ſunt perpendendae, quarum altera eſt, vt valores ipſarum X, Y, Z ſimpliciter per huiusmodi formulas $\alpha x + \beta y + \gamma z$ exprimantur, altera vero vt tum fiat $X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Niſi enim illa conditio adeſſet, quaeſtio foret per methodum Diophanteam ſolutu facilis, dum tantum trium quadratorum ſumma in tria alia quadrata reſolui deberet, id quod nihil habet difficultatis.

XIII. Quoniam vero rem eo deducere animus eſt, vt methodus ad quaeſtiones continuo magis complicatas extendi queat, a caſu ſimpliciſſimo exordiar, quo propoſitis tantum duabus variabilibus x et y, ex iis aliae duae X et Y per huiusmodi formulas $\alpha x + \beta y$ definiri debeant vt fiat $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$. Hunc in finem poſito

$$X = \alpha x + \beta y \quad \text{et} \quad Y = \gamma x + \delta y$$

neceſſe eſt, fiat:

$$\alpha\alpha + \gamma\gamma = 1; \quad \beta\beta + \delta\delta = 1; \quad \alpha\beta + \gamma\delta = 0.$$

Statuamus ergo $\alpha = \text{coſ.}\,\zeta$ et $\beta = \text{coſ.}\,\eta$, vt habeatur $\gamma = \text{ſin.}\,\zeta$ et $\delta = \text{ſin.}\,\eta$, ſicque duabus prioribus

bus conditionibus satisfiat: tum vero tertia dabit $\cos.\zeta \cos.\eta + \sin.\zeta \sin.\eta = \cos.(\zeta - \eta) = 0$, ex quo erit $\zeta - \eta = 90^\circ$, ideoque $\eta = \zeta - 90^\circ$, ac propterea $\cos.\eta = \sin.\zeta$ et $\sin.\eta = -\cos.\zeta$. Vnde patet si capiatur:

$$X = x\cos.\zeta + y\sin.\zeta \text{ et } Y = x\sin.\zeta - y\cos.\zeta$$

fore $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$.

XIV. Hoc lemmate praemisso ex propositis tribus variabilibus x, y, z primo alias tres x', y', z' ita definio vt sit

$$x' = x\cos.\zeta + y\sin.\zeta; \quad y' = x\sin.\zeta - y\cos.\zeta; \quad \text{et } z' = z$$

hoc enim modo certo erit

$$x'x' + y'y' + z'z' = xx + yy + zz.$$

Deinde ex his simili modo alias tres x'', y'', z'' deduco, vt sit

$$x'' = x'; \quad y'' = y'\cos.\eta + z'\sin.\eta; \quad z'' = y'\sin.\eta - z'\cos.\eta$$

atque hinc tandem quaesitas X, Y, Z, ita definio:

$$X = z''\cos.\theta + x''\sin.\theta; \quad Y = y''; \quad Z = z''\sin.\theta - x''\cos.\theta$$

sic enim vtique fiet:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x''x'' + y''y'' + z''z'' = x'x' + y'y' + z'z' = xx + yy + zz.$$

XV. Ex hac autem triplici positione sequitur fore:

$$x'' = x\cos.\zeta + y\sin.\zeta; \; y'' = x\sin.\zeta\cos.\eta - y\cos.\zeta\cos.\eta + z\sin.\eta; \; z'' = x\sin.\zeta\sin.\eta - y\cos.\zeta\sin.\eta - z\cos.\eta$$

tum vero

$$X = x(\text{sin.}\,\zeta\,\text{sin.}\,\eta\,\text{cos.}\,\theta + \text{cos.}\,\zeta\,\text{sin.}\,\theta) - y(\text{cos.}\,\zeta\,\text{sin.}\,\eta\,\text{cos.}\,\theta - \text{sin.}\,\zeta\,\text{sin.}\,\theta) - z\,\text{cos.}\,\eta\,\text{cos.}\,\theta$$

$$Y = x\,\text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\eta - y\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\eta + z\,\text{sin.}\,\eta$$

$$Z = x(\text{sin.}\,\zeta\,\text{sin.}\,\eta\,\text{sin.}\,\theta - \text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\theta) - y(\text{cos.}\,\zeta\,\text{sin.}\,\eta\,\text{sin.}\,\theta + \text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\theta) - z\,\text{cos.}\,\eta\,\text{sin.}\,\theta$$

quae formulae cum ante inuentis conueniunt.

XVI. Hanc ſolutionem eſſe generalem vel inde patet, quod ea complectatur tres angulos arbitrarios ζ, η, θ, qui per tres transformationes quas inſtituimus, ſunt introducti. Vis enim huius methodi in hoc conſiſtit, vt quauis transformatione duae tantum quantitates varientur, dum ſcilicet in earum locum duae aliae vna cum angulo arbitrario introducuntur, tertia manente immutata. Hinc duae operationes iam quidem ſolutionem problematis ſuppeditant, ſed nondum completam, ob defectum vnius quantitatis arbitrariae. Quamobrem tot transformationes inſtitui oportet donec tot huiusmodi quantitates arbitrariae fuerint ingreſſae quot ad maximam ſolutionis extenſionem requiruntur. Supra autem iam obſeruaui, cum quaeſtio circa nouem numeros verſetur ac tantum ſex conditiones praeſcribantur, tres eorum manere indeterminatos, quemadmodum etiam in ſolutione hic data ob angulos ζ, η, θ arbitrio noſtro relictos, tres numeri A, B, D pro lubitu accipi poſſunt.

XVII. Hinc autem dubium nafci poffet, quod cum qualibet transformatione nouus angulus introducatur, aucto transformationum numero noftri problematis folutio multo adhuc generalior obtineri poffet. Verum tamen qui huius rei periculum facere voluerit, mox animaduertet, nouum angulum introductum cum aliquo praecedentium in vnum coalefcere ita vt quotcunquae transformationes fufcipiantur, numerus angulorum vere arbitrariorum non vltra ternarium augeri queat. Adiiciamus enim infuper hanc transformationem ponendo:

$X' = X$; $Y' = Y \operatorname{cof.} \lambda - Z \operatorname{fin.} \lambda$; et $Z' = Y \operatorname{fin.} \lambda + Z \operatorname{cof.} \lambda$

fietque

$$X' = x(\operatorname{fin.} \zeta \operatorname{fin.} \eta \operatorname{cof.} \theta + \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{fin.} \theta) + y(\operatorname{fin.} \zeta \operatorname{fin.} \theta - \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{cof.} \eta \operatorname{cof.} \theta) - z \operatorname{cof.} \eta \operatorname{cof.} \theta$$

$$\begin{aligned} Y' = {} & x(\operatorname{fin.}\zeta \operatorname{cof.}\eta \operatorname{cof.}\lambda - \operatorname{fin.}\zeta \operatorname{fin.}\eta \operatorname{fin.}\theta \operatorname{fin.}\lambda + \operatorname{cof.}\zeta \operatorname{cof.}\theta \operatorname{fin.}\lambda) \\ & - y(\operatorname{cof.}\zeta \operatorname{cof.}\eta \operatorname{cof.}\lambda - \operatorname{cof.}\zeta \operatorname{fin.}\eta \operatorname{fin.}\theta \operatorname{fin.}\lambda - \operatorname{fin.}\zeta \operatorname{cof.}\theta \operatorname{fin.}\lambda) \\ & + z(\operatorname{fin.}\eta \operatorname{cof.}\lambda + \operatorname{cof.}\eta \operatorname{fin.}\theta \operatorname{fin.}\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z' = {} & x(\operatorname{fin.}\zeta \operatorname{cof.}\eta \operatorname{fin.}\lambda + \operatorname{fin.}\zeta \operatorname{fin.}\eta \operatorname{fin.}\theta \operatorname{cof.}\lambda - \operatorname{cof.}\zeta \operatorname{cof.}\theta \operatorname{cof.}\lambda) \\ & - y(\operatorname{cof.}\zeta \operatorname{cof.}\eta \operatorname{fin.}\lambda + \operatorname{cof.}\zeta \operatorname{fin.}\eta \operatorname{fin.}\theta \operatorname{cof.}\lambda + \operatorname{fin.}\zeta \operatorname{cof.}\theta \operatorname{cof.}\lambda) \\ & + z(\operatorname{fin.}\eta \operatorname{fin.}\lambda - \operatorname{cof.}\eta \operatorname{fin.}\theta \operatorname{cof.}\lambda) \end{aligned}$$

vbi etfi quatuor anguli adfunt ζ, η, θ et λ, tamen inde non plures tribus coefficientes pro lubitu affignare licet: quod quidem non facile perfpicitur, et nonnifi per plures ambages oftendi poffe videtur: cum tamen ex rei natura res fit prorfus manifefta.

XVIII. Etiamfi maxime arduum videatur has quatuor quantitates indeterminatas ad tres revocare

vocare haecque inuestigatio omnino singulares calculi euolutiones postulet, tamen ratio in eo sita haud difficulter deprehenditur, quod bis inter easdem quantitates cognomines y et z transformatio sit instituta. Scilicet in secunda quantitates y', z' in y'', z'' ope anguli η et in quarta quantitates cognomines Y et Z ope anguli λ in Y' et Z' sunt transformatae. Quae duae transformationes si immediate se exciperent ponendo exempli gratia

primum $y' = y \operatorname{cos.} \zeta + z \operatorname{sin.} \zeta$; $z' = y \operatorname{sin.} \zeta - z \operatorname{cos.} \zeta$

tum vero $y'' = y' \operatorname{cos.} \eta + z' \operatorname{sin.} \eta$; $z'' = y' \operatorname{sin.} \eta - z' \operatorname{cos.} \eta$

coniunctim prodiret:

$$y'' = y \operatorname{cos.} (\zeta - \eta) + z \operatorname{sin.} (\zeta - \eta) \text{ et}$$
$$z'' = -y \operatorname{sin.} (\zeta - \eta) + z \operatorname{cos.} (\zeta - \eta)$$

sicque duplex illa transformatio manifesto vnicae ope anguli $\zeta - \eta$ factae aequiualeret. Quod etiam euenire est intelligendum, etiamsi huiusmodi binae transformationes inter quantitates cognomines non immediate se excipiant.

XIX. Hinc cum quaelibet transformatio inter duas tantum quantitates variabiles instituatur, hanc regulam stabiliri conuenit, vt hae transformationes semper inter binas variabiles diuersi nominis suscipiantur; quo pacto numerus transformationum ita determinatur, vt plures forent inutiles. Ita cum in nostro problemate tres habeantur quantitates variabiles litteris x, y, z indicatae, plures quam tres transformationes locum habere nequeunt, dum vna inter

x et

x et y, alia inter x et z, et tertia inter y et z inſtituitur hoc modo

$$\begin{array}{l|l|l} x' = x\,\mathrm{cof.}\zeta + y\,\mathrm{fin.}\zeta & x'' = x'\,\mathrm{cof.}\eta + z'\,\mathrm{fin.}\eta & x''' = x'' \\ y' = x\,\mathrm{fin.}\zeta - y\,\mathrm{cof.}\zeta & y'' = y' & y''' = y''\,\mathrm{cof.}\theta + z''\,\mathrm{fin.}\theta \\ z' = z & z'' = x'\,\mathrm{fin.}\eta - z'\,\mathrm{cof.}\eta & z''' = y''\,\mathrm{fin.}\theta - z''\,\mathrm{cof.}\theta \end{array}$$

vbi in prima quantitas nominis z, in ſecunda nominis y, in tertia vero nominis x inuariata relinquitur.

XX. Hanc regulam obſeruantes methodum hanc per iſtiusmodi transformationes procedentem facile ad eiusmodi problemata accommodare poterimus, quibus plures quam tres quantitates variabiles proponuntur, quas ſimili modo in alias totidem transformari oporteat, vt quadratorum ſumma maneat eadem. Pluribus ſcilicet transformationibus inter binas tantum inſtituendis opus erit, vbi tantum erit cauendum, ne inter binas cognomines bis transformatio inſtituatur. Quo obſeruato, ſolutio non ante erit completa, quam inter omnes binas diuerſi nominis tales transformationes fuerint abſolutae cuiusmodi diuerſae combinationes habebuntur ſex, ſi quatuor propoſitae ſint quantitates, decem vero ſi quinque et ita porro. Cuiusmodi problemata aliquot cum ſolutionibus hic ſubiungam.

Problema.

Quatuor quantitates v, x, y, z ita in alias per huiusmodi formulas $\alpha v + \beta x + \gamma y + \delta z$ transformare, vt ſumma quadratorum maneat eadem vel ponendo.

$$V = Av + Bx + Cy + Dz\,;\quad Y = Iv + Kx + Ly + Mz$$
$$X = Ev + Fx + Gy + Hz\,;\quad Z = Nv + Ox + Py + Qz$$

hos ſedecim coefficientes ita definire vt fiat

$$VV + XX + YY + ZZ = vv + xx + yy + zz$$

quem in finem ſequentibus 10 conditionibus ſatisfieri oportet:

$1^\circ.\ AA + EE + II + NN = 1\,;\quad 5^\circ.\ AB + EF + IK + NO = 0$

$2^\circ.\ BB + FF + KK + OO = 1\,;\quad 6^\circ.\ AC + EG + IL + NP = 0$

$3^\circ.\ CC + GG + LL + PP = 1\,;\quad 7^\circ.\ AD + EH + IM + NQ = 0$

$4^\circ.\ DD + HH + MM + QQ = 1\,;\quad 8^\circ.\ BC + FG + KL + OP = 0$

$9^\circ.\ BD + FH + KM + OQ = 0$

$10^\circ.\ CD + GH + LM + PQ = 0.$

XXI. Cum hic ſedecim numeri ex 10 conditionibus inueniendi proponantur, euidens eſt eorum ſex arbitrio noſtro relinqui, ſeu quod eodem redit ſolutionem completam ſex quantitates arbitrarias complecti debere. Methodum autem ante expoſitam ſequentes reuera ſolutionem ſex transformationibus abſolui deprehendimus, quae ita repraeſentari poſſunt:

I.	II.	III.
$x^{I} = x\,\text{coſ.}\,\alpha + y\,\text{ſin.}\,\alpha$	$x^{II} = x^{I}\,\text{coſ}\,\beta + z^{I}\,\text{ſin}\,\beta$	$x^{III} = x^{II}\,\text{coſ.}\gamma + v^{II}\,\text{ſin.}\gamma$
$y^{I} = x\,\text{ſin.}\,\alpha - y\,\text{coſ.}\,\alpha$	$y^{II} = y^{I}$	$y^{III} = y^{II}$
$z^{I} = z$	$z^{II} = x^{I}\,\text{ſin.}\,\beta - z^{I}\,\text{coſ.}\,\beta$	$z^{III} = z^{II}$
$v^{I} = v$	$v^{II} = v^{I}$	$v^{III} = x^{II}\,\text{ſin.}\,\gamma - v^{II}\,\text{coſ.}\,\gamma$

IV.

IV.	V.	VI.
$x^{IV}=x^{III}$	$x^{V}=x^{IV}$	$x^{VI}=x^{V} \quad === X$
$y^{IV}=y^{III}\cos.\delta+z^{III}\sin.\delta$	$y^{V}=y^{IV}\cos.\varepsilon+v^{IV}\sin.\varepsilon$	$y^{VI}=y^{V} \quad === Y$
$z^{IV}=y^{III}\sin.\delta-z^{III}\cos.\delta$	$z^{V}=z^{IV}$	$z^{VI}=z^{V}\cos.\zeta+v^{V}\sin.\zeta=Z$
$v^{IV}=v^{III}$	$v^{V}=y^{IV}\sin.\varepsilon-v^{IV}\cos.\varepsilon$	$v^{VI}=z^{V}\sin.\zeta-v^{V}\cos.\zeta=V$

in quas formulas reuera ſex anguli arbitrarii ingrediuntur vt ſolutionis completae indoles poſtulat.

XXII. Iam perſpicuum eſt ope harum reductionum nouas quantitates X, Y, Z, V ita per primum aſſumtas x, y, z, v expreſſum iri, vt fiat $X = Ax + By + Cz + Dv$, ſimiliterque etiam reliquae vnde facta euolutione coefficientes ipſarum x, y, z, v in quatuor formis pro X, Y, Z, V oriundis ipſos eos ſedecim numeros praebebunt, qui requiruntur, pro ſolutione problematis propoſiti. Quae cum per ſe ſint manifeſta, non opus eſſe arbitror ſingulos valores harum ſedecim litterarum euoluere. Ceterum cum in harum ſex transformationum prima binae litterae x et y in ſecunda x et z in tertia x et v, in quarta y et z in quinta y et v et in ſexta z et v ſint transformatae, quae ſunt omnes combinationes poſſibiles; in hoc ipſo etiam continetur criterium ſolutionis completae.

XXIII. Quoniam autem hic occurrunt quatuor quantitates x, y, z, v in ſingulis operationibus duae transformationes binarum inſtitui poſſunt, quo pacto euolutio valorem quaeſitorum non mediocriter ſubleuatur, vti iterum cauendum ne inter easdem binas litteras plus vna transformatione ſuſcipiatur. Sic autem totum negotium tribus operationibus abſolui poterit hoc modo.

I.	II.	III.
$x' = x\cos.\alpha + y\sin.\alpha$	$x'' = x'\cos.\gamma + z'\sin\gamma$	$x''' = x''\cos.\varepsilon + v''\sin.\varepsilon = X$
$y' = x\sin.\alpha - y\cos.\alpha$	$y'' = y'\cos.\delta + v'\sin.\delta$	$y''' = y''\cos.\zeta + z''\sin.\zeta = Y$
$z' = z\sin.\beta + v\sin\beta$	$z'' = x'\sin.\gamma - z'\cos.\gamma$	$z''' = y''\sin.\zeta - z''\cos.\zeta = Z$
$v' = z\sin.\beta - v\cos.\beta$	$v'' = y'\sin.\delta - v'\cos.\delta$	$v''' = x''\sin.\varepsilon - v''\cos\varepsilon = V.$

Harum formularum euolutio pro ſedecim numeris quaeſitis ſequentes praebet valores:

$$A = \left\{\begin{array}{l} +\cos.\alpha\cos.\gamma\cos.\varepsilon \\ +\sin.\alpha\sin.\delta\sin.\varepsilon \end{array}\right\}; \quad B = \left\{\begin{array}{l} +\sin.\alpha\cos.\gamma\cos.\varepsilon \\ -\cos\alpha\sin.\delta\sin.\varepsilon \end{array}\right\};$$

$$C = \left\{\begin{array}{l} +\cos\beta\sin.\gamma\cos.\varepsilon \\ -\sin.\beta\cos.\delta\sin\varepsilon \end{array}\right\}; \quad D = \left\{\begin{array}{l} +\sin.\beta\sin.\gamma\cos.\varepsilon \\ +\cos.\beta\cos.\delta\sin.\varepsilon \end{array}\right\}$$

$$E = \left\{\begin{array}{l} +\sin.\alpha\cos.\delta\cos.\zeta \\ +\cos.\alpha\sin.\gamma\sin.\zeta \end{array}\right\}; \quad F = \left\{\begin{array}{l} -\cos.\alpha\cos.\delta\cos\zeta \\ +\sin.\alpha\sin.\gamma\sin.\zeta \end{array}\right\};$$

$$G = \left\{\begin{array}{l} +\sin\beta\sin.\delta\cos.\zeta \\ -\cos.\beta\cos.\gamma\sin.\zeta \end{array}\right\}; \quad H = \left\{\begin{array}{l} -\cos.\beta\sin\delta\cos.\zeta \\ -\sin.\beta\cos.\gamma\sin.\zeta \end{array}\right\}$$

$$I = \left\{\begin{array}{l} +\sin.\alpha\cos.\delta\sin.\zeta \\ -\cos\alpha\sin.\gamma\cos.\zeta \end{array}\right\}; \quad K = \left\{\begin{array}{l} -\cos.\alpha\cos.\delta\sin.\zeta \\ -\sin.\alpha\sin.\gamma\cos.\zeta \end{array}\right\};$$

$$L = \left\{\begin{array}{l} +\sin.\beta\sin.\delta\sin.\zeta \\ +\cos.\beta\cos.\gamma\cos\zeta \end{array}\right\}; \quad M = \left\{\begin{array}{l} -\cos.\beta\sin.\delta\sin.\zeta \\ +\sin.\beta\cos.\gamma\cos.\zeta \end{array}\right\}$$

$$N = \left\{\begin{array}{l} +\cos.\alpha\cos.\gamma\sin.\varepsilon \\ -\sin.\alpha\sin.\delta\cos\varepsilon \end{array}\right\}; \quad O = \left\{\begin{array}{l} +\sin\alpha\cos.\gamma\sin\varepsilon \\ +\cos\alpha\sin.\delta\cos.\varepsilon \end{array}\right\};$$

$$P = \left\{\begin{array}{l} +\cos.\beta\sin.\gamma\sin.\varepsilon \\ +\sin.\beta\cos.\delta\cos.\varepsilon \end{array}\right\}; \quad Q = \left\{\begin{array}{l} +\sin\beta\sin.\gamma\sin.\varepsilon \\ -\cos.\beta\cos.\delta\cos.\varepsilon \end{array}\right\}.$$

XXIV.

XXIV. Circa hos autem ſedecim valores, quibus decem conditiones in problemate allatae implentur, hanc inſignem proprietatem locum habere obſeruo, vt iisdem quoque ſequentibus decem conditionibus ſatisfiat:

11°. $AA+BB+CC+DD=1$;	15°. $AE+BF+CG+DH=0$
12°. $EE+FF+GG+HH=1$;	16°. $AI+BK+CL+DM=0$
14°. $II+KK+LL+MM=1$;	17°. $AN+BO+CP+DQ=0$
14°. $NN+OO+PP+QQ=1$;	18°. $EI+FK+GL+HM=0$
	19°. $EN+FO+GP+HQ=0$
	20°. $IN+KO+LP+MQ=0$.

Quod eſt Theorema prorſus memorabile ac ſimile ei, quod initio circa nouem tantum numeros demonſtraui. Eo autem modo, quo ibi demonſtrationem adornaui, hic quidem ob litterarum multitudinem vti non licebit; ſed quoniam ad hos valores generales ſucceſſiue peruenire docui, demonſtratio ita conuenientiſſime conficietur, vt ſi haec proprietas in valoribus quibusque antecedentibus, locum habuerit, eadem quoque in ſequentibus per transformationem inde deriuatis locum habere oſtendatur.

XXV. Conſideremus igitur valores quoscunque intermedios qui per quatuor primitiuas quantitates x, y, z, v ita definiantur, vt ſit

$$x^{(n)}=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}z+\mathfrak{D}v;\quad y^{(n)}=\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}y+\mathfrak{G}z+\mathfrak{H}v$$
$$z^{(n)}=\mathfrak{I}x+\mathfrak{K}y+\mathfrak{L}z+\mathfrak{M}v;\quad v^{(n)}=\mathfrak{N}x+\mathfrak{O}y+\mathfrak{P}z+\mathfrak{Q}v$$

vbi coefficientes ita ſint comparati, vt ſupra memoratis conditionibus ſatisfaciant; ſcilicet vt ſit:

$$\mathfrak{AA}+\mathfrak{BB}+\mathfrak{CC}+\mathfrak{DD}=1;\quad \mathfrak{AE}+\mathfrak{BF}+\mathfrak{CG}+\mathfrak{DH}=0$$
$$\mathfrak{EE}+\mathfrak{FF}+\mathfrak{GG}+\mathfrak{HH}=1;\quad \mathfrak{AI}+\mathfrak{BK}+\mathfrak{CL}+\mathfrak{DM}=0$$
$$\mathfrak{II}+\mathfrak{KK}+\mathfrak{LL}+\mathfrak{MM}=1;\quad \mathfrak{AN}+\mathfrak{BO}+\mathfrak{CP}+\mathfrak{DQ}=0$$
$$\mathfrak{NN}+\mathfrak{OO}+\mathfrak{PP}+\mathfrak{QQ}=1;\quad \mathfrak{EI}+\mathfrak{FK}+\mathfrak{GL}+\mathfrak{HM}=0$$
$$\mathfrak{EN}+\mathfrak{FO}+\mathfrak{GP}+\mathfrak{HQ}=0$$
$$\mathfrak{IN}+\mathfrak{KO}+\mathfrak{LP}+\mathfrak{MQ}=0$$

quae conditiones vtique in prima poſitione locum habent, vbi eſt $x^{(n)}=x$, $y^{(n)}=y$, $z^{(n)}=z$, $v^{(n)}=v$; ſiquidem tum habetur:

$$\mathfrak{A}=1;\quad \mathfrak{E}=0;\quad \mathfrak{I}=0;\quad \mathfrak{N}=0$$
$$\mathfrak{B}=0;\quad \mathfrak{F}=1;\quad \mathfrak{K}=0;\quad \mathfrak{O}=0$$
$$\mathfrak{C}=0;\quad \mathfrak{G}=0;\quad \mathfrak{L}=1;\quad \mathfrak{P}=0$$
$$\mathfrak{D}=0;\quad \mathfrak{H}=0;\quad \mathfrak{M}=0;\quad \mathfrak{Q}=1.$$

XXVI. Ponamus ex illis valoribus per tranformationem ſequentes ita deriuari

vt poſito	prodeant hi valores deriuati
$x^{(n+1)}=x^{(n)}\operatorname{coſ}.\theta+y^{(n)}\operatorname{ſin}.\theta$	$x^{(n+1)}=\mathfrak{A}'x+\mathfrak{B}'y+\mathfrak{C}'z+\mathfrak{D}'v$
$y^{(n+1)}=x^{(n)}\operatorname{ſin}.\theta-y^{(n)}\operatorname{coſ}.\theta$	$y^{(n+1)}=\mathfrak{E}'x+\mathfrak{F}'y+\mathfrak{G}'z+\mathfrak{H}'v$
$z^{(n+1)}=z^{(n)}$	$z^{(n+1)}=\mathfrak{I}'x+\mathfrak{K}'y+\mathfrak{L}'z+\mathfrak{M}'v$
$v^{(n+1)}=v^{(n)}$	$v^{(n+1)}=\mathfrak{N}'x+\mathfrak{O}'y+\mathfrak{P}'z+\mathfrak{Q}'v$

eritque:

$$\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}\operatorname{coſ}.\theta+\mathfrak{E}\operatorname{ſin}.\theta;\quad \mathfrak{E}'=\mathfrak{A}\operatorname{ſin}.\theta-\mathfrak{E}\operatorname{coſ}.\theta;\quad \mathfrak{I}'=\mathfrak{I};\quad \mathfrak{N}'=\mathfrak{N}$$
$$\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}\operatorname{coſ}.\theta+\mathfrak{F}\operatorname{ſin}.\theta;\quad \mathfrak{F}'=\mathfrak{B}\operatorname{ſin}.\theta-\mathfrak{F}\operatorname{coſ}.\theta;\quad \mathfrak{K}'=\mathfrak{K};\quad \mathfrak{O}'=\mathfrak{O}$$
$$\mathfrak{C}'=\mathfrak{C}\operatorname{coſ}.\theta+\mathfrak{G}\operatorname{ſin}.\theta;\quad \mathfrak{G}'=\mathfrak{C}\operatorname{ſin}.\theta-\mathfrak{G}\operatorname{coſ}.\theta;\quad \mathfrak{L}'=\mathfrak{L};\quad \mathfrak{P}'=\mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{D}'=\mathfrak{D}\operatorname{coſ}.\theta+\mathfrak{H}\operatorname{ſin}.\theta;\quad \mathfrak{H}'=\mathfrak{D}\operatorname{ſin}.\theta-\mathfrak{H}\operatorname{ſin}.\theta;\quad \mathfrak{M}'=\mathfrak{M};\quad \mathfrak{Q}'=\mathfrak{Q}.$$

Vnde

Vnde quidem hae conditiones iam ſponte implentur:

$$\mathfrak{J}'\mathfrak{J}'+\mathfrak{K}'\mathfrak{K}'+\mathfrak{L}'\mathfrak{L}'+\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'=1;\quad \mathfrak{J}'\mathfrak{N}'+\mathfrak{K}'\mathfrak{O}'+\mathfrak{L}'\mathfrak{P}'+\mathfrak{M}'\mathfrak{Q}'=0$$
$$\mathfrak{N}'\mathfrak{N}'+\mathfrak{O}'\mathfrak{O}'+\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'+\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}'=1.$$

XXVII. Reliquis vero etiam conditionibus ſatisfieri facile oſtenditur; erit enim:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'+\mathfrak{C}'\mathfrak{C}'+\mathfrak{D}'\mathfrak{D}'=\left.\begin{array}{l}+(\mathfrak{A}\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\mathfrak{C}\mathfrak{C}+\mathfrak{D}\mathfrak{D})\operatorname{cof.}\theta^2\\ +(\mathfrak{E}\mathfrak{E}+\mathfrak{F}\mathfrak{F}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}+\mathfrak{H}\mathfrak{H})\operatorname{fin.}\theta^2\\ +2(\mathfrak{A}\mathfrak{E}+\mathfrak{B}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\mathfrak{G}+\mathfrak{D}\mathfrak{H})\operatorname{fin.}\theta\operatorname{cof.}\theta\end{array}\right\}$$
$$=\left.\begin{array}{l}+1.\operatorname{cof.}\theta^2\\ +1.\operatorname{fin.}\theta^2\\ +0.\operatorname{fin.}\theta\operatorname{cof.}\theta\end{array}\right\}=1$$

quod ſimili modo de ſumma quadratorum ſecundae columnae $\mathfrak{E}'\mathfrak{E}'+\mathfrak{F}'\mathfrak{F}'+\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'+\mathfrak{H}'\mathfrak{H}'$ oſtenditur. Deinde etiam res manifeſta eſt circa ſummam productorum:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{J}'+\mathfrak{B}'\mathfrak{K}'+\mathfrak{C}'\mathfrak{L}'+\mathfrak{D}'\mathfrak{M}'=\left.\begin{array}{l}-(\mathfrak{A}\mathfrak{J}+\mathfrak{B}\mathfrak{K}+\mathfrak{C}\mathfrak{L}+\mathfrak{D}\mathfrak{M})\operatorname{cof.}\theta\\ +(\mathfrak{E}\mathfrak{J}+\mathfrak{F}\mathfrak{K}+\mathfrak{G}\mathfrak{L}+\mathfrak{H}\mathfrak{M})\operatorname{fin.}\theta\end{array}\right\}=0$$

pariterque etiam circa has ſummas:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{N}'+\mathfrak{B}'\mathfrak{O}'+\mathfrak{C}'\mathfrak{P}'+\mathfrak{D}'\mathfrak{Q}'=0;\quad \mathfrak{E}'\mathfrak{J}'+\mathfrak{F}'\mathfrak{K}'+\mathfrak{G}'\mathfrak{L}'+\mathfrak{H}'\mathfrak{M}'=0$$
$$\text{et}\quad \mathfrak{E}'\mathfrak{N}'+\mathfrak{F}'\mathfrak{O}'+\mathfrak{G}'\mathfrak{P}'+\mathfrak{H}'\mathfrak{Q}'=0$$

vnde tantum relinquitur haec:

$\mathfrak{A}'\mathfrak{E}'$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}'\mathfrak{E}'+\mathfrak{B}'\mathfrak{F}'+\mathfrak{C}'\mathfrak{G}'+\mathfrak{D}'\mathfrak{H}' = &\left.\begin{aligned}&+(\mathfrak{A}\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\mathfrak{C}\mathfrak{C}+\mathfrak{D}\mathfrak{D})\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta\\ &-(\mathfrak{E}\mathfrak{E}+\mathfrak{F}\mathfrak{F}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}+\mathfrak{H}\mathfrak{H})\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta\\ &+(\mathfrak{A}\mathfrak{E}+\mathfrak{B}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\mathfrak{G}+\mathfrak{D}\mathfrak{H})\,\text{fin.}\,\theta^2\\ &-(\mathfrak{A}\mathfrak{E}+\mathfrak{B}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\mathfrak{G}+\mathfrak{D}\mathfrak{H})\,\text{cof.}\,\theta^2\end{aligned}\right\}\\ = &\left.\begin{aligned}&+\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta\\ &-\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta\\ &+0\,\text{fin.}\,\theta^2\\ &-0\,\text{cof.}\,\theta^2\end{aligned}\right\} = 0\end{aligned}$$

XXVIII. Cum igitur harum decem conditionum veritas in pofitione prima, vti iam oftendi, fit manifefta, etiam in pofitione fecunda per transformationem binarum inde deducta quoque fubfiftet, hincque etiam in omnibus fequentibus pofitionibus fimili modo ex praecedentibus deductis. Quocirca etiam folutio generalis fex transformationibus vti in §. 21. abfoluta ita erit comparata, vt non folum decem conditionibus in problemate praefcriptis, fed etiam alteris illis decem §. 24. commemoratis fatisfaciat: hocque ita vt decem prioribus conditionibus fatisfieri nequeat, quin fimul decem pofterioribus fatisfiat. Atque hinc iam facile colligitur eandem proprietatem etiam in problematibus, vbi fimilis quaeftio circa 25. 36 pluresque numeros inftituitur, femper locum habere debere. Progredior igitur ad fequens.

Problema.

Inuenire 25 numeros A, B, C, D etc. ita in formam quadrati difponendos:

vt

vt ſummae quadratorum ex ſingulis columnis tam verticalibus quam horizontalibus deſumtorum

$$\begin{array}{ccccc} A, & B, & C, & D, & E \\ F, & G, & H, & I, & K \\ L, & M, & N, & O, & P \\ Q, & R, & S, & T, & U \\ V, & W, & X, & Y, & Z \end{array}$$

vnitati aequentur, ſummae productorum autem ex binis columnis ſiue verticalibus ſiue horizontalibus formatorum euaneſcant.

XXIX. Ex praecedentibus intelligitur hoc problema eo reduci, vt ſumtis iſtis 25 numeris pro coefficientibus, quinque variabiles u, v, x, y z per huiusmodi formulas in alias transformentur:

$$U = Au + Bv + Cx + Dy + Ez$$
$$V = Fu + Gv + Hx + Iy + Kz$$
$$X = Lu + Mv + Nx + Oy + Pz$$
$$Y = Qu + Rv + Sx + Ty + Uz$$
$$Z = Vu + Wv + Xx + Yy + Zz$$

vt fiat:

$$UU + VV + XX + YY + ZZ = uu + vv + xx + yy + zz.$$

Quod ergo problema, cum quinque quantitates 10 combinationes diuerſas binarum admittant, per decem transformationes ſucceſſiue in binis inſtituendas, reſoluetur, hoc modo:

I.	II.	III.
$u^{I}=u\cos.\alpha+v\sin.\alpha$	$u^{II}=u^{I}\cos.\beta+x^{I}\sin.\beta$	$u^{III}=u^{II}\cos.\gamma+y^{II}\sin.\gamma$
$v^{I}=u\sin.\alpha-v\cos.\alpha$	$v^{II}=v^{I}$	$v^{III}=v^{II}$
$x^{I}=x$	$x^{II}=u^{I}\sin.\beta-x^{I}\cos.\beta$	$x^{III}=x^{II}$
$y^{I}=y$	$y^{II}=y^{I}$	$y^{III}=u^{II}\sin.\gamma-y^{II}\cos.\gamma$
$z^{I}=z$	$z^{II}=z^{I}$	$z^{III}=z^{II}$
IV.	**V.**	**VI.**
$u^{IV}=u^{III}\cos.\delta+z^{III}\sin.\delta$	$u^{V}=u^{IV}$	$u^{VI}=u^{V}$
$v^{IV}=v^{III}$	$v^{V}=v^{IV}\cos.\varepsilon+x^{IV}\sin.\varepsilon$	$v^{VI}=v^{V}\cos.\zeta+y^{V}\sin.\zeta$
$x^{IV}=x^{III}$	$x^{V}=v^{IV}\sin.\varepsilon-x^{IV}\cos.\varepsilon$	$x^{VI}=x^{V}$
$y^{IV}=y^{III}$	$y^{V}=y^{IV}$	$y^{VI}=v^{V}\sin.\zeta-y^{V}\cos.\zeta$
$z^{IV}=u^{III}\sin.\delta-z^{III}\cos.\delta$	$z^{V}=z^{IV}$	$z^{VI}=z^{V}$
VII.	**VIII.**	**X.**
$u^{VII}=u^{VI}$	$u^{VIII}=u^{VII}$	$u^{IX}=u^{VIII}$
$v^{VII}=v^{VI}\cos.\eta+z^{VI}\sin.\eta$	$v^{VIII}=v^{VII}$	$v^{IX}=v^{VIII}$
$x^{VII}=x^{VI}$	$x^{VIII}=x^{VII}\cos.\theta+y^{VII}\sin.\theta$	$x^{IX}=x^{VIII}\cos.\kappa+z^{VIII}\sin.\kappa$
$y^{VII}=y^{VI}$	$y^{VIII}=x^{VII}\sin.\theta-y^{VII}\cos.\theta$	$y^{IX}=y^{VIII}$
$z^{VII}=v^{VI}\sin.\eta-z^{VI}\cos.\eta$	$z^{VIII}=z^{VII}$	$z^{IX}=z^{VIII}\sin.\kappa-z^{VIII}\cos.\kappa$

X.

$$u^{X}=u^{IX} \quad ==== \quad U$$
$$v^{X}=v^{IX} \quad ==== \quad V$$
$$x^{X}=x^{IX} \quad ==== \quad X$$
$$y^{X}=y^{IX}\cos.\lambda+z^{IX}\sin.\lambda=Y$$
$$z^{X}=z^{IX}\sin.\lambda-z^{IX}\cos.\lambda=Z.$$

XXX. His ergo operationibus decem anguli arbitrarii introducuntur, in quo character ſolutionis completae ſeu generalis conſiſtit. Cum enim conditiones ex columnis verticalibus petitae problemati ſoluendo ſufficiant, indeque alterae conditiones ad colum-

columnas horizontales ſpectantes ſponte impleantur; quadratorum ſummae praebent 5, producta vero ex binis 10 aequationes; ita vt omnino 15 conditionibus ſit ſatisfaciendum; quare cum 25 numeri inueſtigandi proponantur, ex iis decem adhuc manebunt indeterminati, in quo etiam ſolutio hic data egregie conſentit, dum plures quam 10 transformationes, quae quidem circa binas quantitates diuerſas inſtituantur, locum habere nequeunt.

XXXI. Quo illarum formularum euolutio facilior reddatur, qualibet operatione duae transformationes coniungi poſſunt, prorſus vt in ſolutione praecedentis problematis eſt factum. Has autem coniunctiones ita capi conuenit, vt quantitas ſolitaria nullam mutationem patiens in omnibus ſit diuerſa: id quod euenit ſi binae praecedentium transformationum hoc modo coniungantur:

$$(\mathrm{I.\ VIII}),\ (\mathrm{II,VII}),\ (\mathrm{III,IX}),\ (\mathrm{IV,VI}),(\mathrm{V,X})$$

vnde ſequentes quinque transformationes oriuntur:

I.	II.	III.
$u^{\mathrm{I}}=u\,\mathrm{cof.}\,\alpha+v\,\mathrm{fin.}\,\alpha$	$u^{\mathrm{II}}=u^{\mathrm{I}}\mathrm{cof.}\,\gamma+x^{\mathrm{I}}\mathrm{fin.}\,\gamma$	$u^{\mathrm{III}}=u^{\mathrm{II}}\mathrm{cof.}\,\varepsilon+y^{\mathrm{II}}\,\mathrm{fin.}\,\varepsilon$
$v^{\mathrm{I}}=u\,\mathrm{fin}\,\alpha-v\,\mathrm{cof.}\,\alpha$	$v^{\mathrm{II}}=v^{\mathrm{I}}\mathrm{cof.}\,\delta+z^{\mathrm{I}}\,\mathrm{fin.}\,\delta$	$v^{\mathrm{III}}=v^{\mathrm{II}}$
$x^{\mathrm{I}}=x\,\mathrm{cof}\,\beta+y\,\mathrm{fin.}\,\beta$	$x^{\mathrm{II}}=u^{\mathrm{I}}\mathrm{fin.}\,\gamma-x^{\mathrm{I}}\mathrm{cof.}\,\gamma$	$x^{\mathrm{III}}=x^{\mathrm{II}}\mathrm{cof}\,\zeta+z^{\mathrm{II}}\mathrm{fin.}\,\zeta$
$y^{\mathrm{I}}=x\,\mathrm{fin}\,\beta-y\,\mathrm{cof.}\,\beta$	$y^{\mathrm{II}}=y^{\mathrm{I}}$	$y^{\mathrm{III}}=u^{\mathrm{II}}\mathrm{fin.}\,\varepsilon-y^{\mathrm{II}}\mathrm{cof.}\,\varepsilon$
$z^{\mathrm{I}}=z$	$z^{\mathrm{II}}=v^{\mathrm{I}}\mathrm{fin.}\,\delta-z^{\mathrm{I}}\,\mathrm{cof}\,\delta$	$z^{\mathrm{III}}=x^{\mathrm{II}}\mathrm{fin.}\,\zeta-z^{\mathrm{II}}\mathrm{cof}\,\zeta$

IV.	V.
$u^{IV} = u^{III} \cos.\eta + z^{III} \sin.\eta$	$u^{V} = u^{IV}$
$v^{IV} = v^{III} \cos.\theta + y^{III} \sin.\theta$	$v^{V} = v^{IV} \cos.\varkappa + x^{IV} \sin.\varkappa$
$x^{IV} = x^{III}$	$x^{V} = v^{IV} \sin.\varkappa - z^{IV} \cos.\varkappa$
$y^{IV} = v^{III} \sin.\theta - y^{III} \cos.\theta$	$y^{V} = y^{IV} \cos.\lambda + z^{IV} \sin.\lambda$
$z^{IV} = u^{III} \sin.\eta - z^{III} \cos.\eta$	$z^{V} = y^{IV} \sin.\lambda - z^{IV} \cos.\lambda$

XXXII. Simili modo problemata huius generis circa 36 pluresque numeros, quorum quidem multitudo eſt numerus quadratus reſolui poſſunt; vbi pro calculo contrahendo non ſolum duas, ſed etiam tres ac deinceps plures transformationes in vna operatione complecti licebit; Atque hic perpetuo pulcerrimus conſenſus inter ſolutionem generalem ex omnibus combinationibus eliciendam ac rei naturam deprehendetur. Poſito enim in genere quantitatum quaeſitarum numero $= nn$, quadratorum ſummae vnitati aequandae praebent n conditiones, productorum autem ex binis nihilo aequandae $\frac{nn-n}{2}$, ſicque coniunctim $\frac{nn+n}{2}$ conditiones, quo numero a numero quaeſitorum nn ablato, reſtat $\frac{nn-n}{2}$, ac propterea totidem ex quaeſitis manebunt indeterminati, ſeu ſolutio generalis totidem quantitates arbitrarias complecti debet, ſecundum regulam autem ſupra expoſitam in hunc finem $\frac{nn-n}{2}$ transformationibus eſt vtendum, quibus ergo praeciſe tot anguli arbitrarii in calculum introducuntur.

Proble-

Problematis initio propoſiti ſolutio generalis in numeris rationalibus.

XXXIII. Coronidis loco ſolutionem problematis noſtri e methodo Diophantea petitam, ſubiungam, quae ſequenti modo ſatis concinne exhiberi poteſt.

Sumantur pro lubitu quatuor numeri p, q, r, s ac poſita quadratorum eorum ſumma $pp+qq+rr+ss=u$ nouem numeri quaeſiti ita determinati reperiuntur:

$$A=\frac{pp+qq-rr-ss}{u};\quad B=\frac{2qr+2ps}{u};\quad C=\frac{2qs-2pr}{u}$$

$$D=\frac{2qr-2ps}{u};\quad E=\frac{pp-qq+rr-ss}{u};\quad F=\frac{2pq+2rs}{u}$$

$$G=\frac{2qs+2pr}{u};\quad H=\frac{2rs-2pq}{u};\quad I=\frac{pp-qq-rr+ss}{u}.$$

Hinc ſimpliciſſimi numeri, qui quidem inter ſe omnes ſint inaequales, colliguntur ſequentes in quadratum diſpoſiti:

$+\frac{47}{57}$	$+\frac{28}{57}$	$-\frac{16}{57}$
$+\frac{4}{57}$	$+\frac{23}{57}$	$+\frac{52}{57}$
$+\frac{32}{57}$	$-\frac{44}{57}$	$+\frac{17}{57}$

hic eſt
$p=6$
$q=4$
$r=2$
$s=1$

$+\frac{53}{63}$	$+\frac{26}{63}$	$-\frac{22}{63}$
$-\frac{2}{63}$	$+\frac{43}{63}$	$+\frac{46}{63}$
$+\frac{34}{63}$	$-\frac{38}{63}$	$+\frac{37}{63}$

vbi eſt
$p=7$,
$q=3$,
$r=2$,
$s=1$

En adhuc alia fere aeque ſimplicia exempla

$+\frac{53}{71}$	$-\frac{42}{71}$	$+\frac{26}{71}$
$-\frac{18}{71}$	$+\frac{19}{71}$	$+\frac{66}{71}$
$+\frac{46}{71}$	$+\frac{54}{71}$	$-\frac{3}{71}$

$+\frac{86}{99}$	$+\frac{38}{99}$	$-\frac{31}{99}$
$-\frac{14}{99}$	$+\frac{79}{99}$	$+\frac{58}{99}$
$+\frac{47}{99}$	$-\frac{46}{99}$	$+\frac{74}{99}$

Pro caſu ſedecim numerorum.

XXXIV. Si pro caſu ſedecim numerorum ſimili modo in quadratum diſponendorum ſolutio in rationalibus deſideraretur, vnde facile numeros non nimis magnos reperire liceat; methodus ſupra data ad hunc finem difficulter accommodatur. Alio autem modo prorſus ſingulari ſequentem ſolutionem latiſſime patentem ſum nactus, vbi ſumtis pro lubitu octo numeris a, b, c, d, p, q, r, s, ſedecim numeri in quadratum diſpoſiti ita ſe habent

$+ap+bq+cr+ds$	$+aq-bp+cs-dr$	$+ar-bs-cp+dq$	$+as+br-cq-dp$
$+aq-bp-cs+dr$	$-ap-bq+cr-ds$	$-as-br-cq-dp$	$+ar-bs+cp-dq$
$+ar+bs-cp-dq$	$+as-br-cq+dp$	$-ap+bq-cr+ds$	$-aq-bp-cs-dr$
$+as-br+cq-dp$	$-ar-bs-cp-dq$	$+aq+bp-cs-dr$	$-ap+bq+cr-ds$

vbi ſumma quadratorum in ſingulis columnis ſiue horizontalibus ſiue verticalibus prodit vbique eadem $=(aa+bb+cc+dd)(pp+qq+rr+ss)$. Quare vt hae ſummae vnitati aequentur, hanc expreſſionem quadratum reddi, per eiusque radicem ſingulos numeros diuidi oportet. Tum vero hi ſedecim numeri etiam hac gaudent proprietate, vt ſumma productorum ex binis columnis ſiue horizontalibus ſiue verticalibus ſumtorum vbique euaneſcat.

XXXV. Hinc ergo facile plurima exempla in numeris ſatis exiguis deduci poſſunt, inter quae ſequens ideo notatu dignum videtur, quod omnes numeri ſint inter ſe inaequales

+37	+4	+1	+12
−6	+33	−18	+9
+11	+8	−7	−36
−2	+19	+34	−3

	quadrata				
	1369	16	1	144	1530
	36	1089	324	81	1530
	121	64	49	1296	1530
	4	361	1156	9	1530
ſummae	1530	1530	1530	1530	ſummae

ac de productis binorum res eſt manifeſta:

cum ſit $-6.37+4.33-1.18+9.12=0$

$$+4.37-6.33+8.11-2.19=0.$$

etc.

Generales autem formas inſpicienti facile patebit, per eas omnes illas 20 conditiones §. §. 20 et 24 allatas perfecte impleri, ſiquidem ſummae quaternorum quadratorum ad vnitatem reuocentur.

XXXVI. Solutio haec eo maiorem attentionem meretur quod ad eam nulla certa methodo, ſed potius quaſi diuinando ſum perductus: et quoniam ea adeo octo numeros arbitrarios implicat, qui quidem facta reductione ad vnitatem, ad ſeptem rediguntur, vix dubitare licet, quin iſta ſolutio ſit vniverſalis et omnes prorſus ſolutiones poſſibiles in ſe complectatur. Si quis ergo viam directam ad hanc ſolutionem manuducentem inueſtigauerit, inſignia certe ſubſidia Analyſi attuliſſe erit cenſendus. Vtrum autem ſimiles ſolutiones pro amplioribus quadratis, quae numeris 25, 36 et maioribus conſtant, expectare liceat, vix affirmare auſim. Non ſolum

autem

autem hinc Algebra communis ſed etiam Methodus Diophantea maxima incrementa adeptura videtur.

Problema curioſum.

Inuenire ſedecim numeros ita in quadratum diſponendos, vt non ſolum ſummae quadratorum per columnas tam horizontales quam verticales ſumtorum ſed etiam eae quae per diagonales ſumuntur, ſcilicet $A^2+F^2+L^2+Q^2$ et $D^2+G^2+K^2+N^2$ ſint omnes inter ſe aequales, ac praeterea producta binorum ita ſumtorum, vt ſupra eſt praeceptum, euaneſcant, ſcilicet

A	B	C	D
E	F	G	H
I	K	L	M
N	O	P	Q

$AE+BF+CG+DH=o$ | $AB+EF+IK+NO=o$
$AI+BK+CL+DM=o$ | $AC+EG+IL+NP=o$
$AN+BO+CP+DQ=o$ | $AD+EH+IM+NQ=o$
$EI+FK+GL+HM=o$ | $BC+FG+KL+OP=o$
$EH+FO+GP+HQ=o$ | $BD+FH+KM+OQ=o$
$IH+KO+LP+MQ=o$ | $CD+GH+LM+PQ=o$.

Solutio.

Hic ergo proponuntur 22 conditiones, quibus ſatisfieri oportet; omiſſis autem duabus ad diagonales ſpectantibus, ſequens forma generalis reliquas omnes adimplet,

$+ap+bq+cr+ds$	$+ar-bs-cp+dq$	$-as-br+cq+dp$	$+aq-bp+cs-dr$
$-aq+dp+cs-dr$	$+as+br+cq+dp$	$+ar-bs+cp-dq$	$+ap+bq-cr-ds$
$+ar+bs-cp-dq$	$-ap+bq-cr+ds$	$+aq+bp+cs+dr$	$+as-br-cq+dp$
$-as+br-cq+ep$	$-aq-bp+cs+dr$	$-ap+bq+cr-ds$	$+ar+bs+cp+dq$

vbi

vbi ſumma quaternorum quadratorum ex columnis tam horizontalibus quam verticalibus ſumtorum eſt

$$(aa+bb+cc+dd)(pp+qq+rr+ss)$$

cui vt etiam ſummae quadratorum per diagonales ſumtorum aequentur, ſequentes binas aequationes confici oportet:

$$+abpq+abrs+acpr+acqs+adps+adqr+bcqr+bcps+bdqs+bdpr+cdrs+cdpq=0$$

$$-abpq-abrs+acpr+acqs-adps-adqr-bcqr-bcps+bdqs+bdpr-cdrs-cdpq=0$$

ex quibus deducuntur hae duae:

$$(ac+bd)(pr+qs)=0$$
$$(ab+cd)(pq+rs)+(ad+bc)(ps+qr)=0.$$

Vnde hae duae determinationes eliciuntur:

I. $pr+qs=0$ et II. $\frac{a}{c}=\frac{-d(pq+rs)-b(ps+qr)}{b(pq+rs)+d(ps+qr)}$

ita vt adhuc ſex litterae arbitrio noſtro relinquantur.

Euoluamus exemplum ſumendo $p=6$, $q=3$, $r=1$, $s=-2$ vnde cum fiat $\frac{a}{c}=\frac{-16d+9b}{16b-9d}$, ſit $d=0$, $b=1$, $a=9$, $c=16$ et quadratum omnibus conditionibus ſatisfaciens erit

+73	−85	+65	−11
−53	+31	+107	+41
−89	−67	+1	−67
−29	−65	−35	+103

vbi ſummae quaternorum quadratorum ſecundum columnas tam horizontales quam verticales, itidemque ſecundum diagonales ſumtorum, prodeunt = 16900 ex quo ſi hi numeri diuiderentur per 130, hae ſummae omnes ad vnitatem redigerentur.

Si quem hic offendant numeri 65 et 67 bis occurrentes, adiungam aliud huiusmodi quadratum minoribus adeo numeris expreſſum.

+68	−29	+41	−37
−17	+31	+79	+32
+59	+28	−2	+61
−11	−77	+8	+49

vbi quaternorum quadratorum ſumma eſt 8515.

Notetur denique in his quadratis etiam quadrata tam numerorum angularium, quam mediorum eandem ſummam producere.

SOLVTIO

SOLVTIO PROBLEMATIS ALGEBRAICI,

DE INVESTIGATIONE NVMERORVM CONTINVE PROPORTIONALIVM, QVORVM DATVR SVMMA *a*, ET SVMMA QVADRATORVM *b*.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Occurrunt in *Elementis Algebrae Saunderſonii*, ſolutiones duorum problematum a *Moivreo* allatae: de inueniendis quatuor aut quinque terminis progreſſionis geometricae, ex datis eorum ſumma et ſumma quadratorum. Has quam primum videre contigit, in mentem mihi venit, generaliter ſolui poſſe problema, quo quaeruntur numeri quotcunque continue proportionales, datis eorundem ſumma et ſumma quadratorum; in qua opinione deinceps quam maxime confirmatus fui exinde, quod in *Mac-laurini Algebra*, ſolutionis quoddam ſpecimen, pro illo tantum caſu, quo numerus terminorum eſt impar, traditam eſſe inueni. Quae itaque ad hanc quaeſtionem explicandam meditatus ſum, ea hoc loco exponere conſtitui, idque non tam propter vtilitatem ex hoc problemate redundantem, quae ſane exigua eſt; quam egregia iſta calculi ſubſidia, quae ad eius ſolutionem requiruntur.

2. Sit $m+1$ numerus terminorum continue proportionalium, dicatur vero primus progreſſionis terminus x^m et vltimus y^m, quam ob rem liquet, totam progreſſionem ſequenti ratione exponi poſſe:

$$x^m + x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 + \ldots + x^2y^{m-2} + xy^{m-1} + y^m = a$$

ex quo itaque deducitur:

$$x^{2m} + x^{2m-2}y^2 + x^{2m-4}y^4 + \ldots + x^4y^{2m-4} + x^2y^{2m-2} + y^{2m} = b,$$

multiplicata igitur priori harum aequationum per $x-y$ et poſteriori per $xx-yy$, eruitur inde $a(x-y) = x^{m+1} - y^{m+1}$ nec non $b(xx-yy) = x^{2m+2} - y^{2m+2}$, vnde diuidendo $b(xx-yy)$ per $a(x-y)$, fiet $\frac{b(x+y)}{a} = x^{m+1} + y^{m+1}$, ex quo deinceps colligitur $2x^{m+1} = \frac{b(x+y)}{a} + a(x-y)$ et $2y^{m+1} = \frac{b(x+y)}{a} + a(y-x)$, quod ſi igitur ponantur $a + \frac{b}{a} = 2d$ et $a - \frac{b}{a} = 2e$, erit $x^{m+1} = dx - ey$ et $y^{m+1} = dy - ex$, vel $y = \frac{x(d-x^m)}{e}$ et $x = \frac{y(d-y^m)}{e}$. Sit iam $d - x^m = z$, vnde $y = \frac{xz}{e}$ et $y^m = \frac{x^m z^m}{e^m}$, erit proinde $ex = y(d-y^m) = \frac{xz}{e}\left(\frac{d - x^m z^m}{e^m}\right)$ ideoque $e^{m+2} = z(de^m - x^m z^m)$, vel in locum ipſius x^m ſubſtituendo $d-z$, fiet: $z^{m+2} - dz(z^m - e^m) - e^{m+2} = 0$. Haec vero aequatio, etiam hac ratione inueniri poteſt:

poteſt: quandoquidem ſit $y = \frac{xz}{e}$ et $x^m = d - z$, fiet $(d-z)(1 + \frac{z}{e} + \frac{z^2}{e^2} + \dots + \frac{z^{m-1}}{e^{m-1}} + \frac{z^m}{e^m}) = a = d + e$, adeoque per proprietatem progreſſionis geometricae $\frac{(d+e)e^m - (d-z)z^m}{e^m} : e + z :: e : z$, ſeu $z^{m+2} - dz(z^m - e^m) - e^{m+2} = 0$.

3. Peruenimus quidem ſic ad aequationem, quam non niſi vnica quantitas incognita z ingreditur, adeoque ſi ipſius valor hinc per datas et conſtantes quantitates elici poteſt, patet problema eſſe ſolutum; circa allatam tamen hanc aequationem obſeruandum eſt, quod eadem in ſimpliciores mutari poſſit. Sit enim 1^{mo} m numerus par vel $= 2n$, eritque ideo $z^{2n+2} - dz(z^{2n} - e^{2n}) - e^{2n+2} = 0$, quam aequationem per $ee - zz$ diuiſibilem eſſe patet, et diuiſione inſtituta habemus:

$$z^{2n} + e^2 z^{2n-2} + e^4 z^{2n-4} + \dots + z^4 e^{2n-4} + z^2 e^{2n-2} + e^{2n} = dz(z^{2n-2} + z^{2n-4}e^2 + z^{2n-6}e^4 + \dots + z^2 e^{2n-4} + e^{2n-2}). \quad (A)$$

2^{do} Si m fuerit numerus impar, ponatur $m + 1 = 2n$, ideoque eo in caſu: $e^{2n+1} - z^{2n+1} - dz(e^{2n-1} - z^{2n-1}) = 0$, ex quo diuidendo per $e - z$ reperitur eſſe:

$$z^{2n} + z^{2n-1}e + z^{2n-2}e^2 + \dots + z^2 e^{2n-2} + z e^{2n-1} + e^{2n} = dz(z^{2n-2} + z^{2n-3}e + z^{2n-4}e^2 + \dots + z e^{2n-3} + e^{2n-2}). \quad (B)$$

Si igitur ex aequatione (A) quaeratur valor ipſius z, inſeruiet idem determinandis quantitatibus continue proportionalibus, quorum numerus eſt impar, aequatio vero (B) dabit quaeſitos valores, quoties numerus terminorum eſt par. Et in aequatione (A) quidem, z euehitur ad dignitatem $2n = m$, adeoque haec aequatio eſt gradus $2n$, quo numerus terminorum continue proportionalium, vnitate mulctatus exprimitur; verum in aequatione (B), ſumma dignitas ipſius z eſt $= 2n = m + 1$, ſeu aequalis numero terminorum.

4. Etſi allatae aequationes (A) et (B), videntur eſſe ſui generis ſimpliciſſimae, quarum ope quantitatem incognitam z inueuire licet; nouam tamen in computum introducendo quantitatem incognitam, fit, vt hae aequationes transformari queant in alias, quae ordinis ſunt n, ſemiſſis nimirum illius, ad quem (A) vel (B) pertinent. Etenim quum $(d - x^m)(d - y^m) = e^2$ conf. §. 2, fiet ponendo $d - y^m = v$, $vz = e^2$, adeoque cum in aequatione (A) pro e^2, e^4, e^6 etc. ſubſtituuntur valores ipſis aequales zv, $z^2 v^2$, $z^3 v^3$ etc. omnesque termini per z^n diuiduntur, orietur:

(C)

$$z^n + z^{n-1} v + z^{n-2} v^2 + \ldots + z v^{n-1} + v^n = d(z^{n-1} + z^{n-2} v + z^{n-3} v^2 + \ldots + z v^{n-2} + v^{n-1}).$$

Haec vero ipſa aequatio facile eruitur, ex iſta $e^{2n+2} - z^{2n+2} = dz(e^{2n} - z^{2n})$, quippe quae pro e^2 ſubſtituendo vz, mutatur in hanc: $v^{n+1} z^{n+1} - z^{2n+2} = dz(v^n z^n - z^{2n})$ vel $v^{n+1} - z^{n+1} = d(v^n - z^n)$, ex quo

quo diuidendo per $v-z$, prodit aequatio (C). Quod vero ad aequationem (B) attinet, obſeruamus illam ſic exprimi poſſe:

$$z^{2n}+e^{2n}=(d-e)(z^{2n-1}+z^{2n-2}e+z^{2n-3}e^2+\ldots\ldots+z^2e^{2n-3}+ze^{2n-2}),$$

ſi igitur heic in locum ipſorum e^2, e^4, e^6 ſubſtituantur vz, v^2z^2, v^3z^3 etc. omnesque termini per z^n diuidantur, emerget

$$z^n+v^n=(d-e)(z^{n-1}+(e+v)z^{n-2}+(ev+v^2)z^{n-3}+\ldots\ldots+ev^{n-2}+v^{n-1})$$

vnde deducitur:

$$(D)$$

$$z^n+z^{n-1}v+z^{n-2}v^2+\ldots\ldots+z^2v^{n-2}+zv^{n-1}+v^n=(d-e)(z^{n-1}+z^{n-2}v+z^{n-3}v^2+\ldots\ldots+zv^{n-2}+v^{n-1})+de(z^{n-2}+z^{n-3}v+z^{n-4}v^2+\ldots\ldots+zv^{n-3}+v^{n-2}).$$

Huius autem aequationis inueſtigatio ſequenti quoque ratione inſtitui poteſt, quia nimirum hoc in caſu $e^{2n+1}-z^{2n+1}=dz(e^{2n-1}-z^{2n-1})$ vel $e^{2n+2}-ez^{2n+1}=dz(e^{2n}-ez^{2n-1})$, ſubſtituendo igitur vz pro e^2, et diuidendo totam aequationem emergentem per z^{n+1}, fiet, $v^{n+1}-ez^n=dv^n-dez^{n-1}$ quum vero ſimili ratione eliciatur $z^{n+1}-ev^n=dz^n-dev^{n-1}$, ſubtrahendo hanc a priori, prodibit $v^{n+1}-z^{n+1}=(d-e)(v^n-z^n)+de(v^{n-1}-z^{n-1})$ et diuiſa denique hac per $v-z$, emerget aequatio ſupra allata (D).

5. Iam vt aequatio inuenta (C) transformari poſſit, aſſumatur $z+v=u$ et ponatur prius aequationis illius membrum, nimirum $z^n+z^{n-1}v+z^{n-2}v^2+\ldots\ldots+z^2v^{n-2}+zv^{n-1}+v^n=u^n+Ae^2u^{n-2}+Be^4u^{n-4}+$ etc., poſterius vero $d(z^{n-1}+z^{n-2}v+z^{n-3}v^2+\ldots\ldots+zv^n$

$+zv^{n-2}+v^{n-1})=d(u^{n-1}+\alpha e^2u^{n-3}+\beta e^4u^{n-5}+\gamma e^6u^{n-7}$ + etc.), vnde fiet $u^n+Ae^2u^{n-2}+Be^4u^{n-4}+Ce^6u^{n-6}+$ etc. $=d(u^{n-1}+\alpha e^2u^{n-3}+\beta e^4u^{n-5}+\gamma e^6u^{n-7}+$ etc.), cuius aequationis indoles et natura erit manifesta, modo valores coefficientium A, B, C etc. nec non α, β, γ etc. rite determinentur. Hunc in finem, ponantur euolui $(z+v)^n$, $(z+v)^{n-2}$ etc. et pro e^2, e^4, e^6 adhibeantur zv, z^2v^2, z^3v^3 etc., quo facto orietur

$$\begin{aligned}
&z^n+nz^{n-1}v+\tfrac{n.(n-1)}{1.2}z^{n-2}v^2+\tfrac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}z^{n-3}v^3+\tfrac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}z^{n-4}v^4+\text{etc.}\\
&+Az^{n-1}v+(n-2).Az^{n-2}v^2+\tfrac{(n-2).(n-3)}{1.2}Az^{n-3}v^3+\tfrac{(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3}Az^{n-4}v^4+\text{etc.}\\
&+\quad Bz^{n-2}v^2+(n-4).Bz^{n-3}v^3+\tfrac{(n-4).(n-5)}{1.2}Bz^{n-4}v^4+\text{etc.}\\
&+\quad Cz^{n-3}v^3+(n-6).Cz^{n-4}v^4+\text{etc.}\\
&+\quad Dz^{n-4}v^4+\text{etc.}\\
&=z^n+z^{n-1}v+z^{n-2}v^2+z^{n-3}v^3+\ldots+z^2v^{n-2}+zv^{n-1}+v^n.
\end{aligned}$$

Comparando nunc singulos inter se terminos, in quibus z et v ad eandem euehuntur dignitatem, inuenimus: $A=-(n-1)$;

$B=1-\frac{n.(n-1)}{1.2}-(n-2).A=\frac{(n-3).(n-2)}{1.2}$; $C=1-\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}-\frac{(n-2).(n-3)A}{1.2}-(n-4)B=-\frac{(n-5).(n-4).(n-3)}{1.2.3}$,

simili ratione definiuntur

$D=\frac{(n-7).(n-6).(n-5).(n-4)}{1.2.3.4}$; $E=-\frac{(n-9).(n-8).(n-7).(n-6).(n-5)}{1.2.3.4.5}$

nec non reliqui coefficientes. Ipsorum autem α, β, γ etc. indoles eodem prorsus modo indagatur, adeo vt sit

$\alpha=-(n-2)$; $\beta=\frac{(n-4).(n-3)}{1.2}$,

$\gamma=-\frac{(n-6).(n-5).(n-4)}{1.2.3}$; $\delta=\frac{(n-8).(n-7).(n-6).(n-5)}{1.2.3.4}$.

His

His igitur coefficientium aeſtimationibus, in aequatione (E) ſubſtitutis, ſequens denique habebitur aequatio:

$$u^n-(n-1).e^2 u^{n-2}+\frac{(n-3).(n-2)}{1.\,2}e^4 u^{n-4}-\frac{(n-5).(n-4).(n-3)}{1.\,2.\,3}e^6 u^{n-6}+\text{etc.}$$

(G)

$$=d\,(u^{n-1}-(n-2).\,e^2 u^{n-3}+\frac{(n-4).(n-3)}{1.\,2}e^4 u^{n-5}-\frac{(n-6).(n-5).(n-4)}{1.\,2.\,3}e^6 u^{n-7}+\text{etc.})$$

6. Legem ſecundum quam, coefficientes aequationis allatae progrediuntur, qui conſiderauerit, inueniet coefficientem K quantitatis $e^{2r}\,u^{n-2r}$, dum $2\,r < n$, hac ratione exprimi poſſe

$$K=\pm\frac{(n+1-2r).(n+2-2r)\ldots\ldots(n-r)}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots r},$$

vbi obſeruandum venit, ſignum $+$ obtinere, ſi r ſit numerus par, ſignum vero $-$, ſi idem ſit impar. Vt proinde inueniatur coefficiens vltimi terminorum, ad prius aequationis membrum pertinentium, praeprimis notandum eſt, an n ſit numerus par, vtrum vero impar. In priori caſu ponatur $n=2r$, atque tum fiet $K\pm\frac{1.\,2.\,3\ldots r}{1.\,2.\,3\ldots r}=\pm 1$, at in poſteriori, ſit $n=2r+1$ vel $n-1=2r$, adeoque erit

$$K=\pm\frac{2.\,3\ldots\ldots r.\,r+1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots r}=\pm(r+1).$$

Eadem quoque ratione coefficiens I quantitatis $d e^{2s} u^{n-1-2s}$, quoties $2\,s$ non excedit $n-1$, inuenitur eſſe $=\pm\frac{(n-2s).(n+1-2s)\ldots\ldots(n-1-s)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots s}$ afficietur autem I ſigno affirmatiuo, ſi s ſit numerus par, negatiuo vero, ſi ponatur impar. Hinc iterum diiudicabitur, quinam ſit coefficiens vltimi termini ad poſterius

 aequa-

aequationis membrum pertinentis. Scilicet posito n numero pari atque $= 2s + 2$ erit

$$I = \pm \frac{2.\,3.\,4\ldots\ldots s.\,s+1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots s} = \pm (s+1),$$

verum si n sit numerus impar et $= 2s + 1$ erit

$$I = \pm \frac{1.\,2.\,3\ldots\ldots s}{1.\,2.\,3\ldots\ldots s} = \pm 1$$

Quum itaque posito $n = 2r$, sit idem $= 2s + 2$, erit $r = s + 1$ et quia in altero casu $n = 2r + 1 = 2s + 1$, fiet quoque $r = s$. In casu igitur priori erit is aequationis terminus, quem quantitas incognita u non ingreditur $\pm e^n$, in posteriori vero $\pm d e^{n-1}$, et de signorum variabilitate obseruandum est, quod signa affirmatiua obtineant, si numeri n vel $n - 1$ fuerint multipli quaternarii, negatiua autem si binarii tantum. Ex his perspicitur denique, quod si numerus terminorum continue proportionalium fuerit 3 vel 11, 19, 27 etc. fore aequationis terminum constantem d vel $d e^4$, $d e^8$, $d e^{12}$ etc. sin vero ille numerus pertineat ad hanc seriem arithmeticam 5, 13, 21, 29 etc. erit quantitas ista constans $-e^2$ vel $-e^6 - e^{10} - e^{14}$ etc., assumto iterum numero terminorum 7 vel 15, 23, 31 etc. fiet commemorata quantitas constans $-d e^2, -d e^6 - d e^{10}$ etc., denique si numerus terminorum sit ex hac progressione arithmetica 9, 17, 25, 33 etc. orientur quantitatis constantis valores, e^4, e^8, e^{12} etc.

7. Inuento per aequationem (G) valore ipsius u, quantitates z et v facili negotio determinantur, quum enim $z + v = u$ et $zv = e^2$, cognito u; z et v quae-

quaeruntur, ope notiſſimi problematis, de inueniendis duabus quantitatibus, quarum datur ſumma et productum. Erit nimirum $u-z=v$ et $uz-z^2=e^2$, ex quo fit $z=\frac{1}{2}u\pm\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-e^2)}$, vbi ſimul obſeruandum, quod ſi fuerit $z=\frac{1}{2}u+\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-e^2)}$, fore $v=\frac{1}{2}u-\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-e^2)}$ et viciſſim. Hinc quoniam $z=d-x^m$ erit $x^m=d-\frac{1}{2}u\mp\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-e^2)}$ nec non $y^m=d-v=d-\frac{1}{2}u\pm\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-e^2)}$. Inuentis autem primo vel vltimo progreſſionis termino, reliqui facile innoteſcunt, nam $x^m : x^{m-1}y :: x : y :: e : z$ ideoque $x^{m-1}y=\frac{z\,x^m}{e}=\frac{z.(d-z)}{e}$, quomodo autem ex primo et ſecundo termino, reliqui determinentur per ſe patet.

8. Si iam aequationem (D) examini ſubiiciamus, inuenimus ſtatui poſſe:

1^{mo}. $z^n+z^{n-1}v+z^{n-2}v^2+\ldots+zv^{n-1}+v^n=(z+v)^n$
$+Ae^2.(z+v)^{n-2}+Be^4.(z+v)^{n-4}+Ce^6.(z+v)^{n-6}+$ etc.

2^{do}. $(d-e)(z^{n-1}+z^{n-2}v+z^{n-3}v^2+\ldots+zv^{n-2}+v^{n-1})$
$=(d-e)((z+v)^{n-1}+\alpha e^2.(z+v)^{n-3}+\beta e^4.(z+v)^{n-5}$
$+\gamma e^6.(z+v)^{n-7}+$ etc.) et

3^{io}. $de(z^{n-2}+z^{n-3}v+z^{n-4}v^2+\ldots+zv^{n-3}+v^{n-2})$
$=de((z+v)^{n-2}+Pe^2.(z+v)^{n-4}+Qe^4.(z+v)^{n-6}$
$+Re^6.(z+v)^{n-8}+$ etc.),

vnde poſito vt antea $z+v=u$, prodit

$$u^n+\begin{matrix}+Ae^2\\-de\end{matrix}\,u^{n-2}+\begin{matrix}+Be^4\\-Pde^3\end{matrix}\,u^{n-4}+\begin{matrix}+Ce^6\\-Qde^5\end{matrix}\,u^{n-6}+\text{etc.}=(d-e)(u^{n-1} \tag{F}$$
$+\alpha e^2u^{n-3}+\beta e^4u^{n-5}+\gamma e^6u^{n-7}+$ etc.), haec vero

 aequatio

aequatio facile cognoscetur inuentis valoribus coefficientium A, B, C, α, β, γ, P, Q, R etc. quorum determinatio secundum methodum supra praescriptam ita perficitur, vt sit

$$A = -(n-1),\ B = \frac{(n-3).(n-2)}{1.2};\ C = -\frac{(n-5).(n-4).(n-3)}{1.2.3},$$
$$D = \frac{(n-7).(n-6).(n-5).(n-4)}{1.2.3.4},\ \text{etc. } P = -(n-3),\ Q = \frac{(n-5).(n-4)}{1.2},$$
$$R = -\frac{(n-7).(n-6).(n-5)}{1.2.3}\ \text{etc.; nec non } \alpha = -(n-2),\ \beta = \frac{(n-4).(n-3)}{1.2},$$
$$\gamma = -\frac{(n-6).(n-5).(n-4)}{1.2.3};\ \delta = \frac{(n-8).(n-7).(n-6).(n-5)}{1.2.3.4}\ \text{etc.}$$

surrogatis itaque in aequatione (F) his coefficientium valoribus elicitur denique:

$$u^n - ((n-1).e+d)eu^{n-2} + \left(\frac{(n-2).e+2d}{1.2}\right)(n-3)e^3u^{n-4}$$
$$(H) \qquad -\left(\frac{(n-3).e+3d}{1.2.3}\right)(n-5)(n-4)e^5u^{n-6} + \text{etc.}$$
$$= (d-e)\Big(u^{n-1} - (n-2).e^2u^{n-3} + \frac{(n-4).(n-3)}{1.2}e^4u^{n-5}$$
$$-\frac{(n-6).(n-5).(n-4)}{1.2.3}e^6u^{n-7} + \text{etc.}\Big)$$

9. Serie coefficientium considerata, perspicitur, quod posito $2r < n$ sit coefficiens quantitatis cuiusuis

$$e^{2r-1}u^{n-2r} = \pm\frac{((n-r).e+rd).(n+1-2r)(n+2-2r)\ldots(n-r-1)}{1.2.3.4\ldots\ldots r},$$

vbi simul liquet, signum + locum obtinere, si r sit numerus par, sin vero impar, signum coefficientis erit negatiuum. Pro eo igitur casu, quo $n = 2r$ erit vltimi termini ad prius aequationis membrum pertinentis coefficiens

$$K = \pm\frac{(re+rd)(1.2.3\ldots\ldots r-1)}{1.2.3\ldots\ldots r} = \pm(e+d),$$

quoties autem n impar, ideoque $2r+1 = n$, habetur

$$K = \pm\frac{((r+1)e+rd)(2\,3\ldots\ldots r)}{1.2.3\ldots\ldots r} = \pm((r+1)e+rd)$$

Si

Si autem I designet coefficientem quantitatis $(d-e).e^{2s}u^{n-1-2s}$ atque sit $2s \lesssim n-1$, erit

$$I = \pm \frac{(n-2s).(n+1-2s)\ldots\ldots(n-1-s)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots s},$$

prout vero s fuerit numerus par vel impar, I signo $+$ vel $-$ afficietur. Terminus itaque vltimus posterioris membri aequationis, pro eo casu, quo n numerus par, ponendo $n = 2s+2$, habetur $= \pm \frac{2.\,3.\,4\ldots\ldots s+1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots s} = \pm(s+1)$, sed si n numerus impar et $= 2s+1$ fit

$$I = \pm \frac{1.\,2.\,3\ldots\ldots s}{1.\,2.\,3\ldots\ldots s} = \pm 1.$$

Hinc proinde si n sit numerus par, erit aequationis propositae terminus is, quem quantitas incognita u non ingreditur $\pm(e+d)e^{n-1}$, sin vero impar erit ille terminus $= \pm(d-e).e^{n-1}$. Denique et ex his colligitur, quod prout numeri terminorum continue proportionalium, assumantur ex quatuor hisce progressionibus arithmeticis:

4, 12, 20, 28, 36 etc.
6, 14, 22, 30, 38 etc.
8, 16, 24, 32, 40 etc.
10, 18, 26, 34, 42 etc.

terminos aequationis constantes, fore ex quatuor his progressionibus geometricis

$$-(e+d).e \quad -(e+d).e^5 \quad -(e+d).e^9 \quad -(e+d).e^{13} \quad -(e+d).e^{17} \text{ etc.}$$
$$-(d-e).e^2 \quad -(d-e).e^6 \quad -(d-e).e^{10} \quad -(d-e).e^{14} \quad -(d-e).e^{18} \text{ etc.}$$
$$(d+e).e^3 \quad (d+e).e^7 \quad (d+e).e^{11} \quad (d+e).e^{15} \quad (d+e).e^{19} \text{ etc.}$$
$$(d-e).e^4 \quad (d-e).e^8 \quad (d-e).e^{12} \quad (d-e).e^{16} \quad (d-e).e^{20} \text{ etc.}$$

10. Quae ad art. 7. de aequatione (G) monuimus, eadem ad aequationem praesentem (H) atque inde eruendos valores ipsorum z et v, nec non x^m et y^m rite adplicari possunt, erit nimirum $z = \frac{1}{2}u \pm \sqrt{(\frac{1}{4}u^2 - e^2)}$ et $x^m = d - \frac{1}{2}u \mp \sqrt{(\frac{1}{4}u^2 - e^2)}$ quorum valorum vterque adhiberi potest, et vnus primum progressionis terminum, alter vero vltimum dabit. Quomodo autem u ex aequationibus (G) et (H) per quantitates constantes exprimatur, ex doctrina de resolutione aequationum innotescit, ad nostrum itaque institutum non amplius aliud pertinet, quam vt exemplis quibusdam, adplicationem solutionis nostrae ostendamus. Sit igitur 1^{mo} numerus terminorum continue proportionalium 3, seu $x^2 + xy + y^2 = a$, eritque $m = 2$ et $n = 1$, atque in aequatione (G), 1 pro n substituendo, fit $u = d$, et quum $u = v + z = 2d - x^2 - y^2$ erit $x^2 + y^2 = d$, proinde $xy = a - d = e$, vnde cognito medio progressionis termino, extremi facile indagantur. Fit enim $xy = e = \frac{x^2(d - x^2)}{e}$, ideoque $x^2 = \frac{d \pm \sqrt{(d^2 - 4e^2)}}{2}$ quarum aestimationum, si vna pro x^2 assumatur, reliqua dabit valorem ipsius y^2. Ponamus 2^{do} numerum terminorum proportionalium esse 4, hincque $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = a$, quum igitur $m = 3 = 2n - 1$, fiet $n = 2$, vnde si in aequatione (H) pro n substituatur 2, emerget $u^2 - (d + e)e = (d - e)u$ nec non $u = \frac{d - e}{2} \pm \sqrt{(\frac{(d + e)^2}{4} + e^2)}$. Quum itaque u duplicem hinc nanciscatur valorem, dispiciendum est, quinam eorum pro singulis aequationis propositae casibus valeat. Dum igitur quaeruntur

runtur termini progreſſionis geometricae reales, obſeruandum eſt, quod ſi tam a quam b ſint numeri rationales poſitiui, fiet $u = \frac{d-e}{2} + V\left(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2\right)$; ſin vero manente b numero poſitiuo, fiat a negatiuus, erit $u = \frac{d-e}{2} - V\left(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2\right)$. Eſt enim $z = \frac{u}{2} \pm V\left(\frac{u^2}{4} - e^2\right)$, qui igitur valor ne fiat imaginarius, neceſſum eſt, vt ſit $u^2 > 4e^2$. Quoniam vero $u^2 = \frac{d^2+e^2}{2} + e^2 \pm (d-e)V\left(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2\right)$ fiet $4e^2 < \frac{d^2+e^2}{2} + e^2 \pm (d-e)V\left(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2\right)$ et $e^2 < \frac{(d-e)}{2}\left(\frac{d+e}{2} \pm V\left(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2\right)\right)$ vel $e^2 < \frac{b}{2a}\left(\frac{a}{2} \pm V\left(\frac{a^2}{4} + e^2\right)\right)$.

Iam ſi vterque ipſorum b et a ſit numerus poſitiuus, ob $\frac{b}{2a}$ poſitiuum, quoque alter factor $\frac{a}{2} \pm V\left(\frac{a^2}{4} + e^2\right)$ eſſe debet poſitiuus et eſt quidem $\frac{a}{2} + V\left(\frac{a^2}{4} + e^2\right)$ poſitiuus, ſed $\frac{a}{2} - V\left(\frac{a^2}{4} + e^2\right)$ eſt negatiuus, nam multiplicato hoc numero per priorem, fit productum $-e^2$, proinde hoc in caſu erit $u = \frac{d-e}{2} + V\left(\frac{(d+e)^2}{4} + e^2\right) = \frac{b}{2a} + V\left(\frac{a^2}{4} + e^2\right)$.

Iterum poſito, quod valor ipſius a ſit numerus negatiuus, manente b poſitiuo, erit $\frac{b}{2a}$ negatiuus, ideoque alter factor $\frac{a}{2} \pm V\left(\frac{a^2}{4} + e^2\right)$ negatiuum quoque habebit valorem, proinde retinere debemus $\frac{a}{2} - V\left(\frac{a^2}{4} + e^2\right)$, qui numerus eſt negatiuus, cum alter $\frac{a}{2} + V\left(\frac{a^2}{4} + e^2\right)$, ſit poſitiuus. vtriusque enim productum eſt $-e^2$, ex quo liquet pro hoc caſu fore $u = \frac{b}{2a} - V\left(\frac{a^2}{4} + e^2\right)$. Ceterum in vtroque quidem caſu, valores ipſius u heic reiectos retinere poſſupossemus, qui vero ex illis oriuntur progressionis termini, fient imaginarii. Quomodo autem ex inventa hac quantitate u, omnes progressionis terminos inuenire liceat, in §. 7. iam ostensum est. Sit denique numerus terminorum 5 et $x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + xy^3 + y^4 = a$, quum vero $m = 2n = 4$ fit $n = 2$, hinc ope aequationis (G) habetur $uu - ee = du$, vnde fit $u = \frac{d}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} d^2 + e^2)}$, vbi similia obseruanda, circa valores ipsius u, ac ista, quae pro numero terminorum quaternario iam monuimus.

11. Quo vero magis perspicua fiant, quae iam exposita sunt, exemplis quibusdam ea illustrabimus. Sint itaque summa quatuor terminorum proportionalium 30 et summa quadratorum 340, estque $d = 20 + \frac{2}{3}$, $e = 9 + \frac{1}{3}$ et $u = \frac{b}{2a} - \sqrt{(\frac{a^2}{4} + e^2)}$ $= \frac{17}{3} + \sqrt{\frac{2809}{9}} = 23 + \frac{1}{3}$, z vero erit $= \frac{u}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} u^2 - e^2)}$ et $v = \frac{u}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} u^2 - e^2)}$, vnde $z = \frac{35}{3} + \sqrt{\frac{441}{9}} = 18 + \frac{2}{3}$, $v = 4 + \frac{2}{3}$, nec non $x^3 = d - z = 2$, $y^3 = d - v = 16$, et propter $x^2 y : x^3 :: z : e :: 2 : 1$ fit $x^2 y = 4$ ideoque $xy^2 = 8$, omnes igitur termini quaesiti erunt 2, 4, 8, 16. Sit iam summa quatuor terminorum $= -20$ summa vero quadratorum 820, erit $d = -\frac{61}{2}$, $e = \frac{21}{2}$ et $u = \frac{41}{2} - \sqrt{\frac{841}{4}} = -35$, hinc vero fit $z = -\frac{35}{2} + \sqrt{\frac{784}{4}} = -\frac{7}{2}$ et $v = -\frac{63}{2}$ ideoque $x^3 = d - z = -27$, $y^3 = d - v = 1$, et quoniam $x^2 y : x^3 :: z : e :: -1 : 3$, fit $x^2 y = 9$, hinc $xy^2 = -3$, vnde omnes termini proportionales erunt $1, -3, +9, -27$. Sit numerus terminorum 5, eorundem summa 62 et quadratorum aggregatum 1364, erit itaque $d = 42$, $e = 20$

$e = 20$ et $u = \frac{d}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + e^2)} = 21 + \sqrt{841} = 50$, proinde $z = \frac{1}{2}u + \sqrt{(\frac{1}{4}u^2 - e^2)} = 25 + \sqrt{225} = 40$ $v = 10$, vnde prodit $x^4 = d - z = 2$ adeoque $x^3 y = \frac{z.\,x^4}{e} = 2\,x^4 = 4$ omnes igitur progreſſionis termini erunt 2, 4, 8, 16, 32. Si iam ponatur numerus terminorum 5, eorum vero ſumma -122 et ſumma quadratorum 29524 erit $d = -182$, $e = 60$ et $u = \frac{d}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + e^2)} = -91 - \sqrt{11881} = -200$, hincque $z = \frac{1}{2}u + \sqrt{(\frac{1}{4}u^2 - e^2)} = -20$ et $v = -180$, quam ob rem fiet $x^4 = d - z = -162$ et quoniam $x^3 y = \frac{z.\,x^4}{e}$ oritur $x^3 y = 54$, $x^2 y^2 = -18$, $x y^3 = 6$ et denique $y^4 = -2$.

12. Ne autem quis exiſtimet, huius problematis ſolutionem, omni plane vſu deſtitui, oſtendam illam adhiberi poſſe, circa inuentionem radicum huius aequationis $x^{m+1} - 1 = 0$, vbi eum ſolummodo caſum conſiderabo, quo $m + 1$ eſt numerus impar, nam data pro hoc caſu reſolutione, non difficile erit inueſtigare illos factores pro caſu, quo $m + 1$ eſt numerus par. Quum vero conſtet allatam aequationem, vnicum habere factorem realem $x - 1$, facta diuiſione per eundem orietur:

$$x^m + x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

iam ſi omnium terminorum ſumantur quadrata, oſtendam eorum quoque ſummam fore 0, dicatur vero eadem ſumma tantiſper Φ, eritque

$$x^{2m} + x^{2m-2} + x^{2m-4} + \ldots + x^4 + x^2 + 1 = \Phi,$$

in qua aequatione, propter m numerum parem, necessum est occurrere terminos $x^m, x^{m-2}, x^{m-4} \ldots x^4, x^2, 1$, si igitur ab hac aequatione subtrahatur superior fiet: $x^{2m} + x^{2m-2} + x^{2m-4} + \ldots\ldots + x^{m+2} - x^{m-1} - x^{m-3} - \ldots\ldots - x^3 - x = \Phi$, seu $x^{2m-1} + x^{2m-3} + \ldots\ldots + x^{m+1} - x^{m-2} - x^{m-4} - \ldots\ldots - x^2 - 1 = \frac{\Phi}{x}$, cui si addatur valor ipsius Φ prius inuentus, emerget: $x^{2m} + x^{2m-1} + x^{2m-2} + \ldots\ldots x^{m+2} + x^{m+1} - x^{m-1} - x^{m-2} - x^{m-3} - \ldots\ldots - x^2 - x - 1 = \Phi \frac{(1+x)}{x}$, quae aequatio ob $x^m = -(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x^2 + x + 1)$ transformatur in hanc $x^m(x^m + x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x^2 + x + 1) = \Phi \frac{(1+x)}{x} = 0$, quod sane fieri nequit, nisi simul sit $\Phi = 0$. Iam itaque quaestio eo reducitur vt inueniatur progressio geometrica, in qua omnium terminorum summa $= -1$, et itidem eorum quadratorum summa $= -1$, cuius quaestionis resolutio, quum sit m numerus par, dabitur per aequationem nostram (G) et quoniam hoc in casu, sit $a = -1$, $b = -1$ fit $2d = a + \frac{b}{a} = 0$ et $e = \frac{a}{2} - \frac{b}{2a} = -1$, vnde aequatio illa (G) transformatur in hanc:

$$u^n - (n-1)u^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}u^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}u^{n-6} + \text{etc.} = 0,$$

nam alterum aequationis membrum ob $d = 0$ euanescit. Inuento itaque u per hanc aequationem, facile quoque dabitur x, est enim

$$x = y^m = -\frac{u}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}u^2 - 1)}$$

conf. §. 7, ex quo liquet, quod quum pro u ex aequatione allata, prodeant n valores, numerum valorum ipsius x fore $2n = m$, hocque igitur negotio, omnes

omnes plane factores aequationis, $x^{m+1}-1=0$ inueniri. Ceterum obseruandum est, quod sufficiat vnicum valorem ipsius x eruisse, si enim hic valor sit α, reliqui erunt α^2, α^3, $\alpha^4 \ldots \alpha^m$, α^{m+1}.

13. Si in aequatione proxime allata, pro u substituatur $2\,\text{cos}.\,z$ mutabitur eadem in hanc:

$$2^n(\text{cos}.\,z)^n-(n-1)2^{n-2}(\text{cos}.\,z)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2}2^{n-4}(\text{cos}.\,z)^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\,2.\,3}2^{n-6}(\text{cos}.\,z)^{n-6}+\text{etc.}=0,$$

quum itaque sit $\text{sin}.\,(n+1)z=$

$$\text{sin}.\,z(2^n(\text{cos}.\,z)^n-(n-1)2^{n-2}(\text{cos}.\,z)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2}2^{n-4}(\text{cos}.\,z)^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\,2.\,3}2^{n-6}(\text{cos}.\,z)^{n-6}+\text{etc.})$$

si ponatur $(n+1)z=\varpi$, denotante ϖ semiperipheriam circuli, cuius radius $=1$, fiet $\text{sin}.\,(n+1)z = \text{sin}.\,\varpi=0$, vnde apparet hanc aequationem:

$$2^n(\text{cos}.\,z)^n-(n-1)2^{n-2}(\text{cos}.\,z)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2}2^{n-4}(\text{cos}.\,z)^{n-4}-\text{etc.}=0,$$

inseruire perficiendae diuisioni anguli recti, cuius etiam ope notum est, factores huius aequationis $x^{m+1}-1=0$ inuestigari.

14. Hinc vero perducimur ad egregiam transformationem aequationum nostrarum (G) et (H), si nimirum omnes earum termini supponantur diuisi per e^n et loco $\frac{u}{e}$ substituatur $2\,\text{cos}.\,z$, prodibit quidem ex aequatione (G):

$$2^n(\text{cos}.\,z)^n-(n-1)2^{n-2}(\text{cos}.\,z)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2}2^{n-4}(\text{cos}.\,z)^{n-4} -\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\,2.\,3}2^{n-6}(\text{cos}.\,z)^{n-6}+\text{etc.}$$

$$=\frac{d}{e}\left(2^{n-1}(\text{cof.}\,z)^{n-1}-(n-2)2^{n-3}(\text{cof.}\,z)^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.\,2}2^{n-5}(\text{cof.}\,z)^{n-5}\right.$$
$$\left.-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\,2.\,3}2^{n-7}(\text{cof.}\,z)^{n-7}+\text{et.}\right)$$

adeoque multiplicato vtroque membro per fin. z, erit prius $=\text{fin.}(n+1)z$, pofterius vero $=\frac{d}{e}\text{fin.}\,nz$, vnde aequatio noftra (G) in hanc tranfit $e.\,\text{fin.}\,(n+1)z = d\,\text{fin.}\,nz$, pofito quod $2\,\text{cof.}\,z=\frac{u}{e}$. Similiter autem ex aequatione (H), fequens orietur aequatio:

$$2^{n}(\text{cof.}\,z)^{n}-(n-1)2^{n-2}(\text{cof.}\,z)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2}2^{n-4}(\text{cof.}\,z)^{n-4}$$
$$-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\,2.\,3}2^{n-6}(\text{cof.}\,z)^{n-6}+\text{etc.}$$
$$=\frac{(d-e)}{e}\left(2^{n-1}(\text{cof.}\,z)^{n-1}-(n-2)2^{n-3}(\text{cof.}\,z)^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.\,2}2^{n-5}\right.$$
$$\left.(\text{cof.}\,z)^{n-5}-\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{d}{e}\left(2^{n-2}(\text{cof.}\,z)^{n-2}-(n-3)2^{n-4}(\text{cof.}\,z)^{n-4}+\frac{(n-4)(n-5)}{1.\,2}2^{n-6}\right.$$
$$\left.(\text{cof.}\,z)^{n-6}-\text{etc.}\right),$$

qua deinceps multiplicata per fin. z, prouenit haec aequalitas:

$$e.\,\text{fin.}\,(n+1)z=(d-e)\,\text{fin.}\,nz+d.\,\text{fin.}\,(n-1)z$$

in quam itaque (H) transformatur ponendo $u=2e\,\text{cof.}\,z$, vnde etiam ob

$$\text{fin.}\,(n+1)z=2\,\text{fin.}\,nz.\,\text{cof.}\,z-\text{fin.}\,(n-1)z,$$

deducitur $(u+e-d)\,\text{fin.}\,nz=(d+e)\,\text{fin.}\,(n-1)z$.

15. Denique et obferuari meretur, quod problematis allati folutio, cum vfu adhiberi poffit, ad alias de progreffionibus geometricis quaeftiones folven-

vendas, quemadmodum si quaerantur termini progressionis geometricae, quorum numerus est impar, data summa horum terminorum alternorum. Erit enim per conditionem problematis:

$$x^m + x^{m-2}y^2 + x^{m-4}y^4 + \ldots + x^2y^{m-2} + y^m = d \text{ atque}$$

$$x^{m-1}y + x^{m-3}y^3 + \ldots + x^3y^{m-3} + xy^{m-1} = e,$$

addantur iam inuicem hae aequationes eritque:

$$x^m + x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 + x^{m-3}y^3 + \ldots + x^2y^{m-2} + xy^{m-1} + y^m = d + e$$

seu $\frac{x^{m+1} - y^{m+1}}{x - y} = d + e$, si vero a priori subtrahatur posterior fit:

$$x^m - x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 - x^{m-3}y^3 + \ldots + x^2y^{m-2} - xy^{m-1} + y^m = \frac{x^{m+1} + y^{m+1}}{x + y} = d - e,$$

multiplicentur nouae hae aequationes, quo facto prodit $\frac{x^{2m+2} - y^{2m+2}}{x^2 - y^2} = dd - ee$ vel etiam:

$$x^{2m} + x^{2m-2}y^2 + x^{2m-4}y^4 + \ldots + x^2y^{m-2} + y^{2m} = dd - ee,$$

adeoque quaestionis propositae solutio, iam reducitur ad inuentionem terminorum progressionis geometricae ex datis eorum summa et summa quadratorum. Hoc vero ipsum et sequenti ratione ostendi potest, ducatur e in $\frac{x}{y}$, eritque

$$\frac{ex}{y} = x^m + x^{m-2}y^2 + x^{m-4}y^4 + \ldots + x^2y^{m-2},$$

 vnde

vnde habetur $y^m = d - \frac{x}{y}$, similiter multiplicetur e per $\frac{y}{x}$, fietque

$$\frac{e y}{x} = x^{m-2} y^2 + x^{m-4} y^4 + \ldots + x^2 y^{m-2} + y^m,$$

ideoque $x^m = d - \frac{e y}{x}$, vnde demum $y^{m+1} = d y - e x$ et $x^{m+1} = d x - e y$, quarum vtraque in §. 2 occurrit. Hinc vero simul singularis quaedam proprietas progressionis geometricae, impari terminorum numero gaudentis elucet, quod nimirum si sumantur quadrata, ex summis terminorum alternorum $d d$ et $e e$, horum quadratorum differentia, aequalis sit summae quadratorum ex singulis terminis.

DE

DE CRITERIIS INTEGRABILITATIS FORMVLARVM DIFFERENTIALIVM.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Criteria ex quibus dignosci potest, vtrum formula quaedam differentialis integrationem admittat, nec ne? eo magis digna sunt, quae omni accuratione enodentur; quo certius constat, ipsam integralium inuestigationem ex cognitione huiusmodi criteriorum multum pendere. Si enim formula quaecunque differentialis, iis instructa sit proprietatibus, quae ad integrabilitatem ipsius requiruntur; facillimum omnino est, verum eius integrale assignare; sin vero iisdem destituatur, tum praescriptae hae conditiones integrabilitatis inseruire saltem poterunt, ad inuestigandam quantitatem, per quam formula ista multiplicari debet, vt fiat integrabilis. Inter criteria vero integrabilitatis imprimis eminet illud, quod Illustr. EVLERVS in Tractatu de *Doctrina variationum* immortali suo operi *Institut. Calculi integralis* annexo, insigni hoc Theoremate complexus est:

Si

Si positis $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$ etc. vbi dx *pro constante habetur*, V *fuerit eiusmodi functio ipsarum* x, y, p, q, r etc. *vt posito*

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr \text{ etc. fuerit}$$
$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \text{ etc.} = 0,$$

formula differentialis $V\,dx$ *per se erit integrabilis.*

Theorematis huius demonstrationem Vir Illustr. loco citato ex principiis doctrinae variationum deduxit; suspicatus tamen, eam ex ipsis principiis calculi differentialis adstrui posse, quum doctrina variationum ab hoc argumento, haud parum aliena videatur. Elegantia igitur commemorati huius Theorematis non minus, quam ipsa argumenti dignitate allectus, in talem demonstrationem, quae solius calculi differentialis principiis inniteretur, inquirere operae pretium duxi: ea autem feliciter obtenta, via mihi patuit ad plures alias elegantes proprietates formularum differentialium integrationem admittentium, quin etiam hae disquisitiones ansam mihi praebuerunt, criteria integrabilitatis formularum differentialium duplicatarum, triplicatarum vel quacunque alia ratione complicatarum determinandi. Haec igitur omnia dum praesenti Dissertatione breuiter exponere constitui, me rem Geometris non penitus ingratam fecisse confido.

2. Antequam vero ad propositi Theorematis demonstrationem progrediar, necessum duxi fundamenti

menti loco ipſi ſubſternere inſignem iſtam proprietatem formularum differentialium integrabilium, quam Illuſtr. EVLERVS in *Inſtitut. Calculi Differentialis* Part. I. Cap. VII. §. 234. et ſeqq. tradidit, et quae proprietas ita enunciari poteſt:

Si Z *ſit functio quaecunque plurium variabilium* x, y, p, q, r etc., *et ex eius differentiatione oriatur*

$$dZ = \mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq + \varrho\, dr \text{ etc.}$$

ſemper eſſe debebit:

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right);\ \left(\frac{d\nu}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) \text{ etc. } \left(\frac{d\pi}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) \text{ etc.}$$

vel in genere, ſi ex terminis quibus d Z *aequatur, ſumantur pro lubitu bini* ϱ d r *et* τ d t, *erit* $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dr}\right)$.

Inſignis haec proprietas generaliter locum habet, ſiue quantitates x, y, p, q etc. fuerint finitae a ſe inuicem non pendentes, ſeu quaedam earum vt p, q, r differentialia ipſius y primi, ſecundi et altiorum graduum inuoluant, quemadmodum ſi fuerit, $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$ etc. poſito differentiali dx conſtante. Quum enim ſupponatur formulam differentialem:

$$dZ = \mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq + \text{etc.}$$

generaliter eſſe integrabilem, hoc eſt nulla ſuppoſita certa relatione inter x et y, facile intelligitur, quantitates p, q, r etc. tamquam prorſus independentes, ab x et y tractari poſſe. Inde vero quoque perſpicitur, omnes huiusmodi expressiones $\left(\frac{dx}{dy}\right)$; $\left(\frac{dx}{dp}\right)$; $\left(\frac{dx}{dq}\right)$ etc. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$; $\left(\frac{dy}{dp}\right)$ etc. $\left(\frac{dp}{dx}\right)$; $\left(\frac{dp}{dy}\right)$; $\left(\frac{dp}{dq}\right)$ etc. nihilo aequales habendas esse, id quod ex ipsa significatione huiusmodi expressionum euidenter patet. Haec scilicet expressio $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ significat differentiale ipsius p quod prodit, si sola quantitas x pro variabili habeatur; quum vero sit $p = \frac{dy}{dx}$, nequaquam statui poterit x, aut y quantitatem p ingredi, nisi aliqua relatio inter x et y supponatur, consequenter differentiale ipsius p posita x variabili erit $= 0$.

3. Nunc vero e re quoque erit, vt ostendamus propositionis modo allatae conuersam veritati consentire; hoc est: *si proponatur formula quaedam differentialis*

$$dZ = \mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq + \text{etc.}$$

quae his gaudeat proprietatibus, vt sit

$\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right)$; $\left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dx}\right)$; etc. $\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right)$; $\left(\frac{d\nu}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)$ etc. $\left(\frac{d\pi}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dp}\right)$ etc.

eam formulam semper esse integrabilem. Quo magis autem breuitati consulamus, consideremus heic tantum formulam differentialem sequentem

$$\mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq$$

de qua ostendemus, quod ea reapse sit integrabilis, modo requisita iam allata ipsi competant; erit autem demonstratio nostra ita comparata, vt quiuis facile perspicere queat, eam ad alias quasuis for-

mulas

mulas differentiales applicari posse. Sumatur igitur primi termini μdv integrale, quod prodit, si sola quantitas x vt variabilis spectetur, sitque integrale inde oriundum $= Y$, dein huius quantitatis Y sumatur differentiale absolutum, quod prodit, si omnes quantitates x, y, p, q etc. quae Y ingrediuntur, vt variabiles tractentur et ponamus esse:

$$dY = \mu' dx + \nu' dy + \pi' dp + \varkappa' dq$$

pro qua formula, quum per differentiationem ex Y deducta sit, etiam hae conditiones locum habebunt:

$\left(\frac{d\mu'}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu'}{dx}\right)$; $\left(\frac{d\mu'}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dx}\right)$; $\left(\frac{d\mu'}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa'}{dx}\right)$; $\left(\frac{d\nu'}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dy}\right)$; $\left(\frac{d\nu'}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa'}{dy}\right)$; $\left(\frac{d\pi'}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa'}{dp}\right)$.

Porro quum $\mu' dx$, sit illud ipsius Y differentiale, quod prodit ex sola variabilitate ipsius x, patet esse $\mu' = \mu$, vnde sequentes iam deducuntur aequationes.

$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right) = \left(\frac{d\nu'}{dx}\right); \left(\frac{d\pi}{dx}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dx}\right); \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) = \left(\frac{d\varkappa'}{dx}\right).$$

Hinc vero colligitur, esse $\nu = \nu' + \nu''$ supposito quod ν'', sit eiusmodi quantitas, quae x non inuoluit, reliquas autem variabiles y, p, q inuoluere poterit, simili ratione erunt $\pi = \pi' + \pi''$ et $\varkappa = \varkappa' + \varkappa''$, suppositis semper π'' et $\varkappa''$ eiusmodi quantitatibus, quae y, p et q inuoluunt, non vero x. Introductis iam pro ν', π' et $\varkappa'$ ipsorum valoribus, habebimus

$$dY = \mu dx + \nu dy + \pi dp + \varkappa dq$$
$$- \nu'' dy - \pi'' dp - \varkappa'' dq.$$

Deinde euidens quoque est, fore

$$\left(\frac{d\nu''}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi''}{dy}\right); \left(\frac{d\nu''}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa''}{dy}\right) \text{ et } \left(\frac{d\pi''}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa''}{dp}\right).$$

 Quum

Quum itaque ſit dY integrabile, liquet formulam

$$\mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq$$

eſſe integrabilem, ſi integrabilis fuerit

$$\nu''\, dy + \pi''\, dp + \varkappa''\, dq.$$

Ponamus integrale ipſius $\nu''\, dy$ quod prodit, ſi habeantur quantitates p et q pro conſtantibus, eſſe Y', et capiendo eius differentiale poſitis omnibus y, p, q variabilibus, oriatur

$dY' = \nu'''dy + \pi'''dp + \varkappa'''dq$; habebimus $\nu''' = \nu''$, nec non

$$\left(\frac{d\,\nu'''}{d\,p}\right) = \left(\frac{d\,\pi'''}{d\,y}\right);\ \left(\frac{d\,\nu'''}{d\,q}\right) = \left(\frac{d\,\varkappa'''}{d\,y}\right) \text{ et } \left(\frac{d\,\pi'''}{d\,q}\right) = \left(\frac{d\,\varkappa'''}{d\,p}\right).$$

Inde autem hae elicientur aequationes

$$\left(\frac{d\,\pi''}{dy}\right) = \left(\frac{d\,\pi'''}{d\,y}\right) \text{ et } \left(\frac{d\,\varkappa''}{d\,y}\right) = \left(\frac{d\,\varkappa'''}{d\,y}\right),$$

ex quibus iam concludi poteſt eſſe:

$$\pi'' = \pi''' + \pi'''' \text{ et } \varkappa'' = \varkappa''' + \varkappa'''',$$

ſi π'''' et $\varkappa''''$ eiusmodi ſint quantitates, quas neque x, nec y ingreditur. Subſtitutis autem valoribus inventis pro π''' et $\varkappa'''$, habebimus

$$dY' = \nu''dy + \pi''d\,p + \varkappa''dq$$
$$\qquad - \pi^{IV}dp - \varkappa^{IV}dq$$

vbi notandum eſt eſſe $\left(\frac{d\,\pi''''}{d\,q}\right) = \left(\frac{d\,\varkappa''''}{d\,p}\right)$.

Liquet vero hinc integrabilitatem formulae

$$\nu''\, dy + \pi''\, dp + \varkappa''\, dq$$

ab eo pendere, vt integrabilis ſit formula

$$\pi''''\, dp + \varkappa''''\, dq.$$

Sit

Sit igitur integrale ipsius $\pi'''' dp$ considerata q vt constante $= Y''$, et differentiale absolutum huius $Y'' = \pi^{V} dp + \varkappa^{V} dq$, inueniemus $\pi'''' = \pi^{V}$ atque $\left(\frac{d\varkappa''''}{dp}\right) = \left(\frac{d\varkappa''''}{dp}\right)$, vnde habebimus $\varkappa'''' = \varkappa^{V} + \varkappa^{VI}$, posito quod $\varkappa^{VI}$, sit quantitas solam variabilem q inuolvens, tum autem quoque fiet

$$dY'' = \pi^{IV} dp + \varkappa^{IV} dq - \varkappa^{VI} dq \text{ seu } dY'' + \varkappa^{VI} dq = \pi^{IV} dp + \varkappa^{IV} dq.$$

At vero quum sit tam dY'' quam $\varkappa^{VI} dq$ integrabile, erit quoque formula $\pi^{IV} dp + \varkappa^{IV} dp$ integrabilis, quin et adeo

$\mu dx + \nu dy + \pi dp + \varkappa dq$ quippe quae erit

$= dY + dY' + dY'' + \varkappa^{VI} dq,$

vbi quum singula membra dY; dY'; dY'' et $\varkappa^{VI} dq$ integrationem admittant, nullum est dubium quin eorum summa

$$= \mu dx + \nu dy + \pi dp + \varkappa dq$$

integrabilis sit, ipso integrali existente

$$Y + Y' + Y'' + \int \varkappa^{VI} dq.$$

4. Ad Theorema igitur laudatum iam propius accedens, considerabo primum eius conuersum, quod ita verbis exprimi potest:

Si positis $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$ etc. V *fuerit eiusmodi functio ipsarum* x, y, p, q etc. *vt formula* Vdx *fiat integrabilis, tum posito*

$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr +$ etc. $U du$, erit

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} \dots \pm \frac{d^m U}{dx^m} = 0.$$

Quum iam dV aequetur formulae differentiali, quae per hypothesin integrabilis est, per omnem autem integrationem formulae differentiales ad gradum proxime inferiorem deprimantur; necessum est, vt formula differentialis $V dx$ huiusmodi habeat formam:

$$V dx = \mu\, dx + \nu\, dy + \pi\, dp + \varkappa\, dq + \dots + \tau\, dt,$$

posito nimirum $dt = u dx$, hinc autem deducitur

$$V = \mu + \nu p + \pi q + \varkappa r \dots + \tau u \text{ atque}$$

$$dV = d\mu + p\, d\nu + q\, d\pi + r\, d\varkappa + \dots u\, d\tau + \nu\, dp + \pi\, dq + \varkappa\, dr \dots + \tau\, du.$$

Quum vero supposuerimus

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + \dots + U du$$

sequentes hinc elicientur, ipsarum M, N, P, Q etc. valores:

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) + \text{etc.}$$

$$N = \left(\frac{d\mu}{dy}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) + \text{etc.}$$

$$P = \left(\frac{d\mu}{dp}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) + \text{etc.} + \nu$$

$$Q = \left(\frac{d\mu}{dq}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dq}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dq}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dq}\right) + \text{etc.} + \pi$$

etc.

Iam quum formula $V dx$ supposita sit integrabilis, necessum est, vt sequentes conditiones locum habeant:

$\left(\frac{d\mu}{dy}\right)$

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right)=\left(\frac{d\nu}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dp}\right)=\left(\frac{d\pi}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dq}\right)=\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right)=\left(\frac{d\pi}{dy}\right);\ \left(\frac{d\nu}{dq}\right)=\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) \text{ etc. } \left(\frac{d\pi}{dq}\right)=\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) \text{ etc.}$$

Harum vero aequalitatum ope, valores quantitatum M, N, P, Q etc. in ſequentes transformantur :

$$M=\left(\frac{d\mu}{dx}\right)+p\left(\frac{d\mu}{dy}\right)+q\left(\frac{d\mu}{dp}\right)+r\left(\frac{d\mu}{dq}\right) \text{ etc.}$$

$$N=\left(\frac{d\nu}{dx}\right)+p\left(\frac{d\nu}{dy}\right)+q\left(\frac{d\nu}{dp}\right)+r\left(\frac{d\nu}{dq}\right) \text{ etc.}$$

$$P=\left(\frac{d\pi}{dx}\right)+p\left(\frac{d\pi}{dy}\right)+q\left(\frac{d\pi}{dp}\right)+q\left(\frac{d\pi}{dq}\right) \text{ etc.}+\nu$$

$$Q=\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right)+p\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)+q\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right)+r\left(\frac{d\varkappa}{dq}\right)+\text{etc.}+\pi$$

etc.

vnde deducitur :

$$M\,dx=dx\left(\frac{d\mu}{dx}\right)+dy\left(\frac{d\mu}{dy}\right)+dp\left(\frac{d\mu}{dp}\right)+dq\left(\frac{d\mu}{dq}\right) \text{ etc.}$$

$$N\,dx=dx\left(\frac{d\nu}{dx}\right)+dy\left(\frac{d\nu}{dy}\right)+dp\left(\frac{d\nu}{dp}\right)+dq\left(\frac{d\nu}{dq}\right) \text{ etc.}$$

$$(P-\nu)\,dx=dx\left(\frac{d\pi}{dx}\right)+dy\left(\frac{d\pi}{dy}\right)+dp\left(\frac{d\pi}{dq}\right)+dq\left(\frac{d\pi}{dq}\right) \text{ etc.}$$

$$(Q-\pi)\,dx=dx\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right)+dy\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)+dp\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right)+dq\left(\frac{d\varkappa}{dq}\right) \text{ etc.}$$

Sumtis igitur integralibus conſequimur :

$$\mu=\int M\,dx;\ \nu=\int N\,dx;\ \pi=\int(P-\nu)\,dx=\int P\,dx-\int dx\int N\,dx$$

$$\varkappa=\int(Q-\pi)\,dx=\int Q\,dx-\int dx\int P\,dx+\int dx\int dx\int N\,dx$$

$$\varrho=\int R\,dx-\int dx\int Q\,dx+\int dx\int dx\int P\,dx-\int dx\int dx\int dx\int N\,dx \text{ etc.}$$

Si itaque iam compendii cauſſa, integrale $\int dx\int N\,dx$, indigitetur per $\int^{(2)} N\,dx$; $\int dx\int dx\int N\,dx$ per $\int^{(3)} N\,dx$ et in genere huiusmodi integrale, quod poſt m integrationes oritur per $\int^{(m)} N\,dx$, fiet

$$V\,dx = \mu\,dx + \nu\,dy + \pi\,dp + \varkappa\,dq + \ldots + \tau\,dt$$
$$= dx\int M\,dx + dy\int N\,dx + dp\left(\int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx\right)$$
$$+ dq\left(\int Q\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int^{(3)} N\,dx\right)$$
$$\ldots + dt\left(\int T\,dx \ldots \mp \int^{(m-2)} Q\,dx \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m)} N\,dx\right)$$

vbi signa superiora valebunt, si numerus terminorum ex quibus dV componitur fuerit par $= m+2$, contra vero si impar.

5. Quum vero iam hinc prodeat:

$$V = \int M\,dx + p\int N\,dx + q\left(\int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx\right) + r\left(\int Q\,dx - \int^{(2)} P\,dx\right.$$
$$\left. + \int^{(3)} N\,dx\right)$$
$$\ldots + u\left(\int T\,dx \ldots \mp \int^{(m-2)} Q\,dx \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m)} N\,dx\right)$$

perpendamus esse

$$N\,dy \mp du\int^{(m)} N\,dx = pN\,dx + dp\int N\,dx - dp\int N\,dx - dq\int dx\int N\,dx$$
$$+ dq\int dx\int N\,dx + dr\int dx\int dx\int N\,dx \ldots$$
$$\mp dt\int^{(m-1)} N\,dx \mp du\int^{(m)} N\,dx,$$

ideoque ob $dp = q\,dx$; $dq = r\,dx$ etc.

$$N\,dy \mp du\int^{(m)} N\,dx = d.\,p\int N\,dx - d.\,q\int^{(2)} N\,dx$$
$$+ d.\,r\int^{(3)} N\,dx \ldots \mp d.\,u\int^{(m)} N\,dx.$$

Similiter inueniemus

$$P\,dp \pm du\int^{(m-1)} P\,dx = d.\,q\int P\,dx - d.\,r\int^{(2)} P\,dx + d.\,s\int^{(3)} P\,dx \ldots$$
$$\pm d.\,u\int^{(m-1)} P\,dx$$

nec non

$$Q\,dq \mp du\int^{(m-2)} Q\,dx = d.\,r\int Q\,dx - d.\,s\int^{(2)} Q\,dx + \ldots$$
$$\mp d.\,u\int^{(m-2)} Q\,dx.$$

His igitur valoribus in aequatione valorem ipsius V exprimente introductis, obtinebimus:

dV

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \ldots\ldots + T\,dt$$
$$\mp du\left(\int^{(m)} N\,dx - \int^{(m-1)} P\,dx + \int^{(m-2)} Q\,dx \ldots \mp \int T\,dx\right).$$

Quum vero per hypothesin sit

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \ldots\ldots + T\,dt + U\,du$$

habebimus hos valores inter se comparando

$$U = \mp \int^{(m)} N\,dx \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m-2)} Q\,dx \ldots + \int T\,dx \text{ seu}$$
$$\int^{(m)} N\,dx - \int^{(m-1)} P\,dx + \int^{(m-2)} Q\,dx \ldots \mp \int T\,dx \pm U = 0$$

vnde differentiando et diuidendo per dx, prodit

$$\int^{(m-1)} N\,dx - \int^{(m-2)} P\,dx + \int^{(m-3)} Q\,dx \ldots \mp T \pm \frac{dU}{dx} = 0$$

atque post m repetitas differentiationes et diuisiones per dx

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots \mp \frac{d^{m-1}T}{dx^{m-1}} \pm \frac{d^mU}{dx^m} = 0.$$

6. Nunc vero facile perspicitur, quomodo haec demonstratio in maius compendium redigi potuisset. Considerantes enim valores coefficientium $\mu, \nu, \pi, \varkappa$ etc. inuenimus eos hac lege procedere, vt sit

$$\pi = \int (P - \nu)\,dx; \quad \varkappa = \int (Q - \pi)\,dx; \quad \varrho = \int (R - \varkappa)\,dx \text{ etc.};$$

vnde terminus ipsum τ insequens, quem nominemus υ hac aequatione exprimetur $\upsilon = \int (U - \tau)\,dx$; quum vero obseruatum sit $\tau\,dt$ esse in expressione $V\,dx$ vltimum terminum, erit $\upsilon = 0$, vnde deducitur $U - \tau = 0$, substituto igitur loco τ valore ipsius aequatio supra allata emerget. Denique et obseruari meretur, hanc aequationem $U - \tau = 0$, exinde deduci quod sit:

$$U - \tau = \left(\frac{d\mu}{du}\right) + p\left(\frac{d\nu}{du}\right) + q\left(\frac{d\pi}{du}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{du}\right) \text{ etc.}$$

nam ob $v = 0$, erit

$$\left(\frac{d\mu}{du}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{d\nu}{du}\right) = \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0; \quad \left(\frac{d\pi}{du}\right) = \left(\frac{dv}{dp}\right) = 0 \text{ etc.}$$

7. Progrediamur nunc ad demonstrationem insignis istius Theorematis, quo statuitur formulam $V\,dx$ fore integrabilem, si posito

$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \ldots + U\,du$ fuerit

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} \ldots \pm \frac{d^m U}{dx^m} = 0.$$

Et primum quidem ex aequatione proposita, ope integrationum deducitur

$$U = \mp \int^{(m)} N\,dx \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m-2)} Q\,dx \ldots + T\,dx$$

hoc autem valore ipsius U substituto in aequatione

$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp \ldots + U\,du$, orietur

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \ldots + T\,dt$$
$$\mp du\left(\int^{(m)} N\,dx - \int^{(m-1)} P\,dx + \int^{(m-2)} Q\,dx \ldots \mp \int T\,dx\right)$$

Hinc vero per transformationes in § 5 allatas obtinetur

$$V\,dx = dx\int M\,dx + dy\int N\,dx + dp\left(\int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx\right)$$
$$+ dq\left(\int Q\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int^{(3)} N\,dx\right) \ldots$$
$$+ dt\left(\int T\,dx \ldots \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m)} N\,dx\right).$$

Si iam vt antea supponamus

$V\,dx = \mu\,dx + \nu\,dy + \pi\,dp + \varkappa\,dq \ldots + \tau\,dt$, habebimus

$\mu = \int M\,dx$; $\nu = \int N\,dx$; $\pi = \int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx = \int (P - \nu)\,dx$

$\varkappa = \int Q\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int^{(3)} N\,dx = \int (Q - \pi)\,dx$ etc.

Porro

Porro vero erit

$$V = \mu + \nu p + \pi q + \varkappa r \ldots + \tau u \text{ atque}$$

$$dV = d\mu + p\,d\nu + q\,d\pi + r\,d\varkappa + \ldots + u\,d\tau$$
$$+ \nu\,dp + \pi\,dp + \varkappa\,dr \ldots\ldots + \tau\,du$$

vnde vt ſupra ſequentes eliciuntur valores ipſarum M, N, P etc.

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) \ldots + u\left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$

$$N = \left(\frac{d\mu}{dy}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) \ldots + u\left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$

$$P = \left(\frac{d\mu}{dp}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) \ldots + u\left(\frac{d\tau}{dp}\right) + \nu$$

$$Q = \left(\frac{d\mu}{dq}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dq}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dq}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dq}\right) \ldots + u\left(\frac{d\tau}{dq}\right) + \pi$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$U = \qquad\qquad\qquad\qquad + \tau$$

8. Vt vero iam liqueat, vtrum formula $V\,dx$ ſit integrabilis nec ne? diſpiciendum eſt, an ſequentibus conditionibus ad eius integrabilitatem neceſſariis ſatisfiat:

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) \ldots \left(\frac{d\mu}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right);\ \left(\frac{d\nu}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) \ldots\ldots \left(\frac{d\nu}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dp}\right);\ \ldots\ldots \left(\frac{d\pi}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dp}\right) \text{ etc.}$$

Hunc in finem obſeruetur eſſe

$$\mu = \int M\,dx = \int dx\left(\frac{d\mu}{dx}\right) + \int dy\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + \int dp\left(\frac{d\pi}{dx}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$

$$\nu = \int N\,dx = \int dx\left(\frac{d\mu}{dy}\right) + \int dy\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + \int dp\left(\frac{d\pi}{dy}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$

$$\pi = \int (P-\nu)\,dx = \int dx\left(\frac{d\mu}{dp}\right) + \int dy\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + \int dp\left(\frac{d\pi}{dp}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{d\tau}{dp}\right)$$

$$\varkappa = \int (Q-\pi)\,dx = \int dx\left(\frac{d\mu}{dq}\right) + \int dy\left(\frac{d\nu}{dq}\right) + \int dp\left(\frac{d\pi}{dq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{d\tau}{dq}\right)$$

etc.

hinc autem obtinemus:

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdy}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdy}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdy}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdy}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdy}\right)$$

$$\left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdp}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdp}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdp}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdp}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdp}\right)$$

$$\left(\frac{d\mu}{dq}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdq}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdq}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdq}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdq}\right)$$

etc.

$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdy}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdy}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdy}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdy}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdy}\right)$$

$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dydp}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dydp}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dydp}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dydp}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dydp}\right)$$

$$\left(\frac{d\nu}{dq}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dydq}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dydq}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dydq}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dydq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dydq}\right)$$

etc.

$$\left(\frac{d\pi}{dx}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdp}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdp}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdp}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdp}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdp}\right)$$

$$\left(\frac{d\pi}{dy}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dydp}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dydp}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dydp}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dydp}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dydp}\right)$$

$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dpdq}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dpdq}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dpdq}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dpdq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dpdq}\right)$$

etc.

$$\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dxdq}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dxdq}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dxdq}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dxdq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dxdq}\right)$$

$$\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dydq}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dydq}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dydq}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dydq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dydq}\right)$$

$$\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dd\mu}{dpdq}\right) + \int dy\left(\frac{dd\nu}{dpdq}\right) + \int dp\left(\frac{dd\pi}{dpdq}\right) + \int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dpdq}\right) \ldots + \int dt\left(\frac{dd\tau}{dpdq}\right)$$

etc.

Hae

Hae aequationes inter ſe comparatae manifeſto oſtendunt, requiſita integrabilitatis ſupra memorata formulae noſtrae $V dx$ competere, adeo vt iam quidem absque vlla haeſitatione, hanc formulam integrabilem eſſe, pronunciare liceat.

9. Ex hiſce Theorematibus varia nunc deduci poſſunt Corollaria quam maxime notatu digna, quorum potiora heic recenſuiſſe haud pigebit:

I°) Cum ex aequatione propoſita

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots = 0,$$

tum ex valore ipſius

$$V dx = dx \int M dx + dy . \int N dx + dp (\int P dx - \int^{(2)} N dx) + \text{ etc.}$$

patet, ad integrabilitatem formulae $V dx$ neceſſario requiri, non ſolum vt formulae $M dx$ et $N dx$ ſint integrabiles; ſed etiam vt omnes quoque ſequentes formulae:

$$dx(P - \int N dx); \quad dx(Q - \int P dx + \int^{(2)} N dx);$$
$$dx(R - \int Q dx + \int^{(2)} P dx - \int^{(3)} N dx) \text{ etc.}$$

integrationem admittant.

II°) Viciſſim autem euidens eſt, ſi formula principalis $V dx$ fuerit integrabilis, omnes quoque has formulas:

$$M dx;\ N dx;\ dx(P - \int N dx);\ dx(Q - \int P dx + \int^{(2)} N dx) \text{ etc.}$$

ita comparatas eſſe, vt integralia ipſis competant

III°) Ex valoribus ipſarum M, N, P § 8 allatis liquet eſſe

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right);\ \left(\frac{dM}{dp}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right);\ \left(\frac{dM}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) \text{ etc.}$$
$$\left(\frac{dN}{dp}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right);\ \left(\frac{dN}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right) \text{ etc. etc.}$$

quae conditiones necessario impleri debent, vt formula

$$M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \text{etc.} = dV$$

fiat integrabilis

IV°) Eaedem formulae § 8 ostendunt esse

$$\left(\frac{d.\int M\,dx}{dp}\right) = \int dx \left(\frac{dM}{dp}\right) - \int dx \left(\frac{d\nu}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d.\int M\,dx}{dq}\right) = \int dx \left(\frac{dM}{dq}\right) - \int dx \left(\frac{d\pi}{dx}\right)$$

etc.

similique ratione

$$\left(\frac{d.\int N\,dx}{dp}\right) = \int dx \left(\frac{dN}{dp}\right) - \int dx \left(\frac{d\nu}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d.\int N\,dx}{dq}\right) = \int dx \left(\frac{dN}{dq}\right) - \int dx \left(\frac{d\pi}{dy}\right) \text{ etc.}$$

quae proprietates etiamsi primo intuitu, a vulgo traditis differentiationis praeceptis discrepare videantur; re tamen accuratius pensitata, veritati optime consentire deprehenduntur.

V°) Denique et hoc loco obseruari meretur, constantium per integrationes inuectarum, nullam a nobis factam esse mentionem, quum ipsa signa integrationis indigitent, huiusmodi quantitates constantes introducendas esse.

10. Quum sit

$$\int dx \int N\,dx = x\int N\,dx - \int N\,x\,dx\,;$$

$$\int^{(3)} N\,dx = \int x\,dx \int N\,dx - \int dx \int N\,x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 \int N\,dx - x\int N\,x\,dx + \tfrac{1}{2}\int N\,x^2\,dx$$

et in genere

$\int^{(m)} N$

$$\int^{(m)} N\,dx = \frac{x^{m-1}\int N\,dx - (m-1)x^{m-2}\int N\,x\,dx + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2}x^{m-3}\int N\,x^2\,dx}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ m-1}$$
$$\ldots \pm \frac{\int N\,x^{m-1}\,dx}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ m-1},$$

formularum

$$\int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx;\quad \int Q\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int^{(3)} N\,dx \text{ etc.}$$

sequentes hinc deduci poterunt transformationes. Formula

$$\int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx \text{ erit } = \int P\,dx - x\int N\,dx + \int N\,x\,dx,$$

quum igitur iam constet $x\int N\,dx$ verum esse integrale, sequitur quoque formulam

$$dx\,(P + N\,x)$$

integrabilem esse. Porro quum integrabilis sit haec formula

$$Q\,dx - \int P\,dx + \int^{(2)} N\,dx,$$

cuius integrale ita repraesentari potest:

$$\int Q\,dx - x\int P\,dx + \tfrac{1}{2}x^2\int N\,dx$$
$$+ \int P\,x\,dx - x\int N\,x\,dx + \tfrac{1}{1.\,2}\int N\,x^2\,dx$$

inde quoque deducitur integrabilem esse sequentem formulam:

$$dx\,(Q + P\,x + \tfrac{1}{2}N\,x^2).$$

Simili ratione demonstrari potest integrabilem esse debere formulam:

$dx\,(R + Q\,x + \frac{1}{1.\,2}P\,x^2 + \frac{1}{1.\,2.\,3}N\,x^3)$ atque adeo hanc:

dx

$$dx(T+Sx\ldots+\frac{1}{1.2.3.m-3}.Qx^{m-3}+\frac{1}{1.2.3.m-2}Px^{m-2}$$
$$+\frac{1}{1.2..m-1}Nx^{m-1}).$$

11. Consideremus iam huiusmodi formulam differentialem $dx\int V\,dx$, posito quod sit

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dy \ldots + U\,du$$

et inquiramus, quibus requisitis haec formula differentialis instructa esse debeat, vt de ea affirmari possit, quod integrabilis sit. Primum itaque si ponamus $\int V\,dx = V'$, liquet ad integrabilitatem formulae $V'dx$ requiri, vt formula $\int V\,dx$ verum sit integrale, quod iam obtinebitur, si sequenti satisfiat conditioni

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots \pm \frac{d^mU}{dx^m} = 0.$$

Quum vero hoc criterium tantum declaret formulam Vdx esse integrabilem seu V' verum esse integrale, ad integrabilitatem formulae $V'dx$ diiudicandam, aliud insuper requiretur criterium sequenti ratione facile detegendum. Statuamus esse

$$dV' = M'dx + N'dy + P'dp \ldots + T'dt$$

tum autem criterium integrabilitatis formulae $V'dx$, hac continebitur aequatione

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} \ldots \mp \frac{d^{m-1}T'}{dx^{m-1}} = 0.$$

At

At in §. 5. iam inuenimus formulam $V\,dx$, quae aequalis est ipsi $d\,V'$, ita repraesentari posse:

$$dV' = V\,dx = dx\int M\,dx + dy\int N\,dx + dp\left(\int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx\right)\ldots + dt\left(\int T\,dx \ldots \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m)} N\,dx\right)$$

hunc igitur valorem ipsius $d\,V'$, cum assumto comparando, inuenimus:

$$M' = \int M\,dx;\quad N' = \int N\,dx;\quad P' = \int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx\ldots$$
$$T' = \int T\,dx \ldots \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m)} N\,dx,$$

qui valores ipsarum M', N', P' etc. in aequatione criterium integrabilitatis exprimente introducti, dant

$$m\int N\,dx - (m-1)P + (m-2)\frac{dQ}{dx} - (m-3)\frac{ddR}{dx^2}\ldots \mp \frac{d^{m-2}T}{dx^{m-2}} = 0.$$

At prius criterium integrabilitatis per $m\,dx$ multiplicando, et integrando fiet

$$m\int N\,dx - mP + m\frac{dQ}{dx} - m\frac{ddR}{dx^2}\ldots \mp m\frac{d^{m-2}T}{dx^{m-2}} \pm m\frac{d^{m-1}U}{dx^{m-1}} = 0$$

subtrahendo igitur hanc aequationem ab illa orietur

$$P' - 2.\frac{dQ}{dx} + 3.\frac{ddR}{dx^2}\ldots \pm (m-1)\frac{d^{m-2}T}{dx^{m-2}} \mp m\frac{d^{m-1}U}{dx^{m-1}} = 0,$$

in qua aequatione singuli coefficientes numerici, secundum ordinem numerorum naturalium progrediuntur. Requiſita igitur integrabilitatis formulae $dx\int V\,dx$, ſequentibus duabus aequationibus continentur:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots \pm \frac{d^m U}{dx^m} = 0$$

$$P - \frac{2dQ}{dx} + \frac{3ddR}{dx^2} - \frac{4d^3S}{dx^3} \ldots \mp m\frac{d^{m-1}U}{dx^{m-1}} = 0$$

poſito nimirum

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \ldots + U\,du.$$

12. Quum formula differentialis $V'\,dx$ integrabilis eſſe nequeat, niſi formulae $M'\,dx$ et $N'dx$ integrationem admittant, liquet hinc non ſolum formulas $M\,dx$ et $N\,dx$, ſed etiam $dx\int M\,dx$; $dx\int N\,dx$ integrabiles eſſe debere. Porro ex poſteriori integrabilitatis criterio patet $\int P\,dx$ verum quoque eſſe integrale, quum fiat:

$$\int P\,dx - 2Q + \frac{3\,dR}{dx} \ldots \mp m\frac{d^{m-2}U}{dx^{m-2}} = 0.$$

Deinde quum per prius integrabilitatis requiſitum, formula $dx(2Q - 2\int P\,dx + 2\int^{(2)} N\,dx)$ integrabilis ſit, ex poſteriori autem intelligatur formulam $dx(\int P\,dx - 2Q)$ integrationem admittere; addendo iſtas formulas, obtinebimus hanc $dx(2\int^{(2)} N\,dx - \int P\,dx)$, quam igitur quoque integrabilem eſſe oportet. Vlterius ob integrabilitatem formularum:

$dx(3R - 2\int Q\,dx + \int^{(2)} P\,dx)$ et $3\,dx(R - \int Q\,dx + \int^{(2)} P\,dx - \int^{(3)} N\,dx)$

patet

patet formulam

$$dx(3\int^{(3)} N\,dx - 2\int^{(2)} P\,dx + \int Q\,dx)$$

integrabilem esse. In genere autem si statuatur

$$M' = \int M\,dx;\quad N' = \int N\,dx;\quad P' = \int (P - N')\,dx;\quad Q' = \int (Q - P')\,dx \text{ etc.}$$

tum vero quoque

$$M'' = \int M'\,dx;\quad N'' = \int N'\,dx;\quad P'' = \int (P' - N'')\,dx;\quad Q'' = \int (Q' - P'')\,dx \text{ etc.}$$

liquet, pro integrabilitate formulae $dx\int V\,dx$ requiri, vt omnes hae quantitates M', N', P' etc. M'', N'', P'' etc. vera sint integralia.

13. Proposita nunc sit formula differentialis $dx\int dx\int V\,dx$, pro qua inuestiganda sint criteria, ex quibus de eius integrabilitate iudicare liceat, vbi quidem statim patet, hanc formulam integrationem non admittere, nisi formulae $V\,dx$ et $dx\int V\,dx$ integrabiles sint. Posito igitur vt antea:

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp \ldots + U\,du$$

bina criteria integrabilitatis huius formulae mox innotescunt, sequentibus aequationibus comprehensa:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^m U}{dx^m} = 0$$

$$P - \frac{2\,dQ}{dx} + \frac{3\,ddR}{dx^2} \ldots \mp \frac{m\,d^{m-1} U}{dx^{m-1}} = 0.$$

Quomodo vero tertium inuestigari debeat, ex iis quae antea docuimus liquet. Statuamus scilicet $\int dx\int dx\int V\,dx = \int V''\,dx$ et ponamus

$$dV'' = M''dx + N''dy + P''dp \ldots + S''ds$$

nec non

$$dV' = M'dx + N'dy + P'dp \ldots + T'dt$$

et inueniemus

$$M' = \int M\,dx;\quad N' = \int N\,dx;\quad P' = \int (P - N')\,dx;$$
$$Q' = \int (Q - P')\,dx \text{ etc.}$$

$$M'' = \int M'\,dx;\quad N'' = \int N'\,dx;\quad P'' = \int (P' - N'')\,dx;$$
$$Q'' = \int (Q' - P'')\,dx \text{ etc.}$$

vnde fiet

$$M'' = \int^{(2)} M dx;\quad N'' = \int^{(2)} N dx;\quad P'' = \int^{(2)} P dx - 2\int^{(3)} N dx,$$
$$Q'' = \int^{(2)} Q dx - 2\int^{(3)} P\,dx + 3\int^{(4)} N\,dx \text{ etc.}$$

Quum igitur pro integrabilitate formulae $dx\int dx\int V\,dx$ requiratur, vt sit

$$N'' - \frac{d\,P''}{d\,x} + \frac{d\,d\,Q''}{d\,x^2} \ldots \pm \frac{d^{m-2}S''}{d\,x^{m-2}} = 0$$

substitutis in hac aequatione pro N'', P'', Q'' etc. valoribus ipsarum, orietur ista aequatio:

$$\frac{m(m-1)}{1.\;2}\int^{(2)} N\,dx - \frac{(m-1)(m-2)}{1.\;2}\int P\,dx + \frac{(m-2)(m-3)}{1.\;2}Q$$
$$-\frac{(m-3)(m-4)}{1.\;2}\frac{dR}{d\,x} \ldots \pm \frac{d^{m-4}S}{d\,x^{m-4}} = 0$$

a qua aequatione subtrahatur sequens:

$$\frac{m(m-1)}{1.\;2}\Big(\int^{(2)} N\,dx - \int P\,dx + Q - \frac{dR}{d\,x} \ldots \pm \frac{d^{m-4}S}{d\,x^{m-4}}$$
$$\mp \frac{d^{m-3}T}{d\,x^{m-3}} \pm \frac{d^{m-2}U}{dx^{m-2}}\Big) = 0$$

resi-

residuum praebebit hanc aequationem:

$$(m-1)\int P dx-(2m-3)Q+(3m-6)\frac{dR}{dx}\ldots+\frac{(m+1)(m-2)}{1.\ 2}\frac{d^{m-4}S}{dx^{m-4}}$$

$$\pm\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{d^{m-3}T}{dx^{m-3}}\mp\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{d^{m-2}U}{dx^{m-2}}=0.$$

Deinde si hinc subtrahatur

$$(m-1)(\int P dx-2Q+\frac{3dR}{dx}\ldots\mp\frac{m d^{m-1}U}{dx^{m-1}})=0$$

emerget noua haec aequatio:

$$Q-\frac{3dR}{dx}+\frac{6.ddS}{dx^2}\ldots\pm\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{d^{m-2}U}{dx^{m-2}}=0.$$

Criteria igitur integrabilitatis formulae $\int dx\int dx\int V dx$, his tribus aequationibus continentur:

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}\ldots\pm\frac{d^mU}{dx^m}=0$$

$$P-\frac{2dQ}{dx}+\frac{3ddR}{dx^2}-\frac{4d^3S}{dx^3}\ldots\mp\frac{m d^{m-1}U}{dx^{m-1}}=0$$

$$Q-\frac{3dR}{dx}+\frac{6.ddS}{dx^2}-\frac{10\ d^3T}{dx^3}\ldots\pm\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{d^{m-2}U}{dx^{m-2}}=0$$

vbi euidens est, in tertia harum aequationum coefficientes numericos esse numeros trigonales. Si iam formulae differentiales proponerentur, quae plura adhuc integralia inuoluerent, sine vlla difficultate, singula earum criteria integrabilitatis assignari poterunt, quemadmodum si integrabilis esse debeat talis formula $dx\int^{(3)} V dx$, tum enim posito

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp \ldots + U\,du$$

praeter modo allata criteria, etiam sequens locum habebit:

$$R - \frac{4\,dS}{dx} + \frac{10.\,ddT}{dx^2} \ldots \mp \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\;2.\;3}\,\frac{d^{m-3}U}{dx^{m-3}} = 0$$

vbi coefficientes numerici sunt numeri pyramidales primi.

14. Consideremus nunc formulam differentialem $V\,dx \int V'\,dx$, in qua vtraque littera V, V' functionem quantitatum x, y, p, q etc. designat et ponatur

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \text{ etc.}$$

tum vero

$$dV' = M'dx + N'dy + P'dp + Q'dq \text{ etc.},$$

et quaeramus, quaenam praescribi debeant conditiones vt huiusmodi formula differentialis integrabilis fiat. Harum vero conditionum vna statim exinde deducitur, quod formulae nostrae integrale competere nequeat, nisi $\int V'dx$ verum sit integrale, quae igitur conditio sequenti repraesentabitur aequatione:

$$N' - \frac{d\,P'}{d\,x} + \frac{d\,dQ'}{d\,x^2} - \frac{d^3\,R'}{d\,x^3} \ldots = 0.$$

Ad alteram conditionem inueniendam, statuamus esse

$$d.\; V \int V'dx = \mu\,dx + \nu\,dy + \pi\,dp + \varkappa\,dq + \text{etc.}$$

atque tunc pro integrabilitate formulae $V\,dx \int V'dx$ debebit esse

$$\nu - \frac{d\,\pi}{d\,x} + \frac{d\,d\,\varkappa}{d\,x^2} - \frac{d^3\,\rho}{d\,x^3} + \ldots = 0.$$

Tota

Tota igitur inueſtigatio huius conditionis eo redit, vt valores litterarum ν, π, $\varkappa$ etc. determinentur, quem in finem notetur eſſe.

$$V'dx = dx\int M'dx + dy\int N'dx + dp(\int P'dx - \int^{(2)} N'dx)$$
$$+ dq(\int Q'dx - \int^{(2)} P'dx + \int^{(3)} N'dx) + \text{etc.}$$

tum $d.V\int V'dx = dV.\int V'dx + VV'dx$,

ex quo ſequentes deducimus aequationes:

$$\mu = M\int V'dx + V\int M'dx;\quad \nu = N\int V'dx + V\int N'dx$$
$$\pi = P\int V'dx + V(\int P'dx - \int^{(2)} N'dx)$$
$$\varkappa = Q\int V'dx + V(\int Q'dx - \int^{(2)} P'dx + \int^{(3)} N'dx)$$
$$\varrho = R\int V'dx + V(\int R'dx - \int^{(2)} Q'dx + \int^{(3)} P'dx - \int^{(4)} N'dx)$$
etc.

Hinc autem colligitur:

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{dP}{dx}\int V'dx + V'P + V(P' - \int N'dx) + \frac{dV}{dx}(\int P'dx - \int^{(2)} N'dx)$$
$$\frac{dd\varkappa}{dx^2} = \frac{ddQ}{dx^2}\int V'dx + 2V'\frac{dQ}{dx} + Q\frac{dV'}{dx} + V(\frac{dQ'}{dx} - P' + \int N'dx)$$
$$+ \frac{2dV}{dx}(Q' - \int P'dx + \int^{(2)} N'dx) + \frac{ddV}{dx^2}(\int Q'dx$$
$$- \int^{(2)} P'dx + \int^{(3)} N'dx)$$
$$\frac{d^3\varrho}{dx^3} = \frac{d^3R}{dx^3}\int V'dx + 3V'.\frac{ddR}{dx^2} + 3\frac{dV'dR}{dx^2} + R\frac{ddV'}{dx^2}$$
$$+ V(\frac{ddR'}{dx^2} - \frac{dQ'}{dx} + P' - \int N'dx) + 3\frac{dV}{dx}(\frac{dR'}{dx} - Q'$$
$$+ \int P'dx - \int^{(2)} N'dx)$$
$$+ \frac{3ddV}{dx^2}(R' - \int Q'dx + \int^{(2)} P'dx - \int^{(3)} N'dx) + \frac{d^3V}{dx^3}(\int R'dx$$
$$- \int^{(2)} Q'dx + \int^{(3)} P'dx - \int^{(4)} N'dx)$$
etc.

His

His autem valoribus pro ν; $\frac{d\pi}{dx}$, $\frac{dd\varkappa}{dx^2}$ etc. introductis, obtinebimus sequentem aequationem:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\text{etc.}\right)\int V'dx-V'\left(P-\frac{2\,dQ}{dx}+\frac{3\,ddR}{dx^2}-\text{etc.}\right)\\
+\frac{dV'}{dx}\left(Q-\frac{3\,dR}{dx}+\frac{6\,ddS}{dx^2}-\text{etc.}\right)-\frac{ddV'}{dx^2}\left(R-4\frac{dS}{dx}+\text{etc.}\right)\\
+V\left(m\int N'dx-(m-1)P'+(m-2)\frac{dQ'}{dx}-(m-3)\frac{ddR'}{dx^2}\text{ etc.}\right)\\
+\frac{dV}{dx}\left(\frac{m(m-1)}{1.2}\int^{(2)}N\,dx-\frac{m(m-1)}{1.2}\int P'dx+\frac{(m+1)(m-2)}{1.2}Q'-\frac{(m+2)(m-3)}{1.2}\frac{dR'}{dx}+\text{etc.}\right)\\
+\frac{ddV}{dx^2}\left(\begin{array}{l}\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\int^{(3)}N'dx-\int^{(2)}P'dx+\int Q'dx-R'+\frac{dS'}{dx}\right)\text{ etc.}\\
\qquad+R'-4\frac{dS'}{dx}+10\frac{ddT'}{dx^2}\qquad\text{etc.}\end{array}\right)\\
\qquad\text{etc.}
\end{array}\right\}=0$$

vnde sublatis terminis, qui propter primam conditionem nihilo aequantur, habebimus:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}\text{etc.}\right)\int V'dx-V'\left(P-\frac{2\,dQ}{dx}+3\frac{ddR}{dx^2}-\text{etc.}\right)\\
+\frac{dV'}{dx}\left(Q-\frac{3\,dR}{dx}+\frac{6.\,ddS}{dx^2}\text{ etc.}\right)-\frac{ddV'}{dx^2}\left(R-\frac{4\,dS}{dx}+10.\frac{ddT}{dx^2}\text{ etc.}\right)\\
\qquad\text{etc.}\\
+V\left(P'-2\frac{dQ'}{dx}+3\frac{ddR'}{dx^2}\text{ etc.}\right)-\frac{dV}{dx}\left(Q'-3\frac{dR'}{dx}+6.\frac{ddS'}{dx^2}\text{ etc.}\right)\\
+\frac{ddV}{dx^2}\left(R'-4\frac{dS'}{dx}+10.\frac{ddT'}{dx^2}\text{ etc.}\right)\text{ etc.}
\end{array}\right\}=0$$

Ceterum si ab hac postrema aequatione subtrahatur

$$\left(N'-\frac{dP'}{dx}+\frac{ddQ'}{dx^2}-\frac{d^3R'}{dx^3}\text{ etc.}\right)\int V\,dx=0$$

abibit ea in sequentem, quae commodioris est formae

$$\left.\begin{array}{l}
N\int V'dx-\frac{d.P\int V'dx}{dx}+\frac{dd.Q\int V'dx}{dx^2}-\frac{d^3.R\int V'dx}{dx^3}+\text{etc.}\\
-N'\int V\,dx+\frac{d.P'\int V\,dx}{dx}-\frac{dd.Q'\int V\,dx}{dx^2}+\frac{d^3.R'\int V\,dx}{dx^3}+\text{etc.}
\end{array}\right\}=0$$

qua aequatione iam alterum integrabilitatis criterium quaesitum continebitur. Heic vero obseruari meretur, posito $V'=V$ singula aequationis huius membra destrui,

destrui, adeo vt pro isto casu conditio integrabilitatis prima sufficiat, quod etiam ipsi rei naturae conveniens est, quoniam $\int V dx \int V dx = \frac{1}{2}(\int V dx)^2$.

15. Ex hisce principiis facillimum nunc erit diiudicare, quibus requisitis formula quaecunque differentialis $V dx$ instructa esse debet, vt integrabilis fiat, posito quod V sit functio quaecunque quantitatum x, y, p, q, etc. quae igitur vt ex quotcunque formulis integralibus quantitates x, y, p etc. vtcunque inuoluentibus composita concipi potest, quemadmodum si fuerit $V = \int V' dx \int V'' dx$ vbi V' et V'' functiones algebraicas quantitatum x, y, p etc. designant; superfluum vero erit his criteriis euoluendis diutius immorari, quum ex praeceptis supra traditis ea pro quouis casu speciali, absque vllo labore, erui queant. Potius igitur examini subiiciamus formulam differentialem Vdx ita comparatam, vt quantitas V praeter binas variabiles x et y cum differentialibus posterioris, adhuc inuoluat tertiam quandam variabilem, cum ipsius differentialibus cuiuscunque gradus. Inquiramus vero in istos characteres, qui certa nobis praebere valent indicia formulam hanc integrabilem esse. Si igitur vt antea ponatur

$\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{dp}{dx} = q$; $\frac{dq}{dx} = r$ etc. $\frac{dz}{dx} = p'$; $\frac{dp'}{dx} = q'$; $\frac{dq'}{dx} = r'$ etc.

de eo quaeritur, quomodo comparata esse debeat functio quaecunque V harum variabilium x; y; z; p; p'; q; q' etc. vt formula $\int V dx$ verum sit integrale. Ponamus iam esse

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \text{ etc.} \ldots + U\,du, + \mathfrak{N}\,dz + \mathfrak{P}\,dp' + \mathfrak{Q}\,dq' \ldots\ldots + \mathfrak{T}\,dt',$$

tum vero ſtatuatur

$$V\,dx = \mu\,dx + \nu\,dy + \pi\,dp + \varkappa\,dq \ldots\ldots + \tau\,dt + \nu'dz + \pi'dp' + \varkappa'dq' \ldots\ldots + \sigma'ds'$$

et ex iis quae § 2 monuimus, patet ſi formula $V\,dx$ ſit integrabilis, ſequentibus conditionibus ſatisfieri debere

$$\left(\frac{d\,\mu}{d\,y}\right) = \left(\frac{d\,\nu}{d\,x}\right); \left(\frac{d\,\mu}{d\,z}\right) = \left(\frac{d\,\nu'}{d\,x}\right); \left(\frac{d\,\mu}{d\,p}\right) = \left(\frac{d\,\pi}{d\,x}\right); \left(\frac{d\,\mu}{d\,p'}\right) = \left(\frac{d\,\pi'}{d\,x}\right) \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{d\,\nu}{d\,z}\right) = \left(\frac{d\,\nu'}{d\,y}\right); \left(\frac{d\,\nu}{d\,p}\right) = \left(\frac{d\,\pi}{d\,y}\right); \left(\frac{d\,\nu}{d\,p'}\right) = \left(\frac{d\,\pi'}{d\,y}\right) \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{d\,\nu'}{d\,p}\right) = \left(\frac{d\,\pi}{d\,z}\right); \left(\frac{d\,\nu'}{d\,p'}\right) = \left(\frac{d\,\pi'}{d\,z}\right) \text{ etc. } \left(\frac{d\,\pi}{d\,p'}\right) = \left(\frac{d\,\pi'}{d\,p}\right) \text{ etc. etc.}$$

Ex § autem 3 viciſſim concluditur, ſi his conditionibus fuerit ſatisfactum, formulam $V\,dx$ eſſe integrabilem Neceſſum igitur eſt, vt valores litterarum $\mu, \nu, \nu', \pi, \pi'$ etc. per litteras $M, N\, \mathfrak{N}, P, \mathfrak{P}$ etc. determinentur, quem in finem notetur eſſe:

$$V = \mu + \nu\,p + \pi\,q + \varkappa\,r \ldots\ldots + \tau\,u + \nu'p' + \pi'q' + \varkappa'r' \ldots\ldots + \sigma't'$$

deinde vero

$$dV = d\mu + p\,d\nu + \nu\,dp + q\,d\pi + \pi\,dq + r\,d\varkappa + \varkappa\,dr \ldots\ldots + u\,d\tau + \tau\,du$$
$$+ p'd\nu' + \nu'dp' + q'd\pi' + \pi'dq' + r'd\varkappa' + \varkappa'dr' \ldots\ldots + t'd\sigma' + \sigma'dt'.$$

Hinc vero eliciuntur ſequentes valores litterarum $M, N, \mathfrak{N}$ etc.

$M =$

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu'}{dx}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dx}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dx}\right) + \text{etc.}$$
$$N = \left(\frac{d\mu}{dy}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu'}{dy}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dy}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dy}\right) + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N} = \left(\frac{d\mu}{dz}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dz}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dz}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu'}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dz}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dz}\right) + \text{etc.}$$
$$P = \left(\frac{d\mu}{dp}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) + \text{etc.} + \nu$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu'}{dp}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dp}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dp}\right) + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{P} = \left(\frac{d\mu}{dp'}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dp'}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp'}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dp'}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu'}{dp'}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dp'}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dp'}\right) + \text{etc.} + \nu'$$
etc. etc.
$$U = \tau \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{T} = \sigma'$$

Qui valores propter requiſita integrabilitatis nuper memorata, in ſequentes transformantur:

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\mu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\mu}{dp}\right) + r\left(\frac{d\mu}{dq}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\mu}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\mu}{dp'}\right) + r'\left(\frac{d\mu}{dq'}\right) + \text{etc.}$$
$$N = \left(\frac{d\nu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + r\left(\frac{d\nu}{dq}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\nu}{dp'}\right) + r'\left(\frac{d\nu}{dq'}\right) + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{N} = \left(\frac{d\nu'}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu'}{dy}\right) + q\left(\frac{d\nu'}{dp}\right) + r\left(\frac{d\nu'}{dq}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\nu'}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\nu'}{dp'}\right) + r'\left(\frac{d\nu'}{dq'}\right) + \text{etc.}$$
$$P = \left(\frac{d\pi}{dx}\right) + p\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + r\left(\frac{d\pi}{dq}\right) + \text{etc.} + \nu$$
$$+ p'\left(\frac{d\pi}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\pi}{dp'}\right) + r'\left(\frac{d\pi}{dq'}\right) + \text{etc.}$$

 $\mathfrak{P} =$

$$\mathfrak{P} = \left(\frac{d\,\pi'}{d\,x}\right) + p\left(\frac{d\,\pi'}{d\,y}\right) + q\left(\frac{d\,\pi'}{d\,p}\right) + r\left(\frac{d\,\pi'}{d\,q}\right) + \text{etc.}$$
$$+ p'\left(\frac{d\,\pi'}{d\,z}\right) + q'\left(\frac{d\,\pi'}{d\,p'}\right) + r'\left(\frac{d\,\pi'}{d\,q'}\right) + \text{etc.} + \nu'$$
$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Hinc autem multiplicando vtrinque per $d\,x$ et integrando, consequimur:

$\mu = \int M\,dx$; $\nu = \int N\,dx$; $\nu' = \int \mathfrak{N}\,dx$; $\pi = \int (P-\nu)\,dx$; $\pi' = \int (\mathfrak{P}-\nu')\,dx$; $\varkappa = \int (Q-\pi)\,dx$; $\varkappa' = \int (\mathfrak{Q}-\pi')\,dx$ etc.

16. Hi valores ipsarum μ, ν, ν', π, π' etc. adhibito supra §. 4. recepto signandi modo, sic quoque exprimi poterunt:

$\mu = \int M\,dx$; $\nu = \int N\,dx$; $\nu' = \int \mathfrak{N}\,dx$;

$\pi = \int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx$; $\pi' = \int \mathfrak{P}\,dx - \int^{(2)} \mathfrak{N}\,dx$

$\varkappa = \int Q\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int^{(3)} N\,dx$; $\varkappa' = \int \mathfrak{Q}\,dx - \int^{(2)} \mathfrak{P}\,dx + \int^{(3)} \mathfrak{N}\,dx$

etc. etc.

$\tau = \int T\,dx \ldots \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m)} N\,dx$; $\sigma' = \int \mathfrak{S}\,dx \ldots \pm \int^{(n-1)} \mathfrak{P}\,dx \mp \int^{(n)} \mathfrak{N}\,dx$

vbi signa superiora valent, si m et n fuerint numeri pares, contra vero si impares. Vlterius quum formula $V\,dx$ differentialia vltra $d\,t$ et $d\,s'$ progredientia inuoluere nequeat, euidens est fore $\tau = U$ et $\sigma' = \mathfrak{T}$, vnde hae deducuntur aequationes

$$U = \mp \int^{(m)} N\,dx \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m-2)} Q\,dx \ldots + \int T\,dx$$
$$\mathfrak{T} = \mp \int^{(n)} \mathfrak{N}\,dx \pm \int^{(n-1)} \mathfrak{P}\,dx \mp \int^{(n-2)} \mathfrak{Q}\,dx \ldots + \int \mathfrak{S}\,dx$$

quarum prior post m differentiationes et diuisiones per $d\,x$ reducitur ad hanc

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^2} \dots \pm \frac{d^mU}{dx^m} = 0.$$

Altera vero poſt differentiationes numero n inſtitutas, totidemque diuiſiones per dx in hanc transformatur:

$$\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} \dots \mp \frac{d^n\mathfrak{Z}}{dx^n} = 0.$$

Ex quibus patet, ſi formula $V\,dx$ ponatur integrabilis, tum eſſe debere

$$\text{I}^\circ \quad N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} \dots \pm \frac{d^mU}{dx^m} = 0$$

$$\text{II}^\circ. \quad \mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} \dots \pm \frac{d^n\mathfrak{Z}}{dx^n} = 0$$

quibus duabus aequationibus criteria integrabilitatis huius formulae continentur.

17. Quemadmodum iam demonſtrauimus, ſi formula $V\,dx$ integrabilis ſit, aequationes modo allatas locum habere; ita viciſſim quoque demonſtrari poteſt, quod ſi quantitas V ita fuerit comparata, vt his aequationibus ſatisfiat, formulam differentialem $V\,dx$ eſſe integrabilem. Quandoquidem vero ex iis quae ſupra §. 7, 8 tractauimus, intelligi poterit, quomodo huius propoſitionis demonſtratio ſit adornanda, eam hoc loco penitus praetermittere non dubitauimus. Ceterum ex demonſtratione prioris horum Theorematum iam allata, liquet, quod in-

tegrabilitas formulae $V\,dx$ inuoluat quoque integrabilitatem sequentium formularum:

$$M\,dx;\ N\,dx;\ \mathfrak{N}\,dx;\ (P-\nu)\,dx;\ (\mathfrak{P}-\nu')\,dx;\ (Q-\pi)\,dx;\ (\mathfrak{Q}-\pi')\,dx \text{ etc.}$$

ex quo etiam sequitur integrabiles esse debere has formulas:

$$M\,dx;\ N\,dx;\ \mathfrak{N}\,dx;\ dx(P+Nx);\ dx(\mathfrak{P}+\mathfrak{N}x);\ dx(Q+Px+\tfrac{1}{2}Nx^2)$$
$$dx(\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}x+\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}x^2);\ dx(R+Qx+\tfrac{1}{2}Px^2+\tfrac{1}{6}Nx^3);\ dx(\mathfrak{R}+\mathfrak{Q}x+\tfrac{1}{2}\mathfrak{P}x^2+\tfrac{1}{6}\mathfrak{N}x^3).$$

18. Characteres integrabilitatis pro formula $V\,dx$ modo inuenti ita comparati sunt, vt priori satisfieri debeat, si in functione V quantitate z pro constanti habita, inquiratur an formula $V\,dx$ sit integrabilis nec ne? posteriori autem satisfaciendum sit, si y pro constante spectata, $V\,dx$ fieri debeat integrabile. Prona hinc deducitur consequentia, quod formula $V\,dx$ si fuerit absolute integrabilis, verum quoque admittat integrale, si in quantitate V, siue y seu z pro constante habeatur. Vicissim autem patet, si quantitas V, talis sit functio variabilium x, y, z et differentialium ex iis ortorum, vt positis tam y, quam z constantibus, formula $\int V\,dx$ verum constituat integrale; eandem formulam absolute spectatam fore integrabilem, id est si ambae y et z, simul vt variabiles spectentur. Haec vero proprietas nos deducit ad inuentionem criteriorum pro integrabilitate eiusmodi formulae $V\,dx$, in qua

V non

V non solum quantitates quascunque finitas, x, y, z, w, sed etiam earum differentialia quaecunque inuoluat, hoc est si posito:

$$\frac{dy}{dx}=p;\ \frac{dp}{dx}=q;\ \frac{dq}{dx}=r \text{ etc. } \frac{dz}{dx}=p';\ \frac{dp'}{dx}=q';\ \frac{dq'}{dx}=r' \text{ etc.}$$
$$\frac{dw}{dx}=p'';\ \frac{dp''}{dx}=q'';\ \frac{dq''}{dx}=r'' \text{ etc. etc.}$$

fuerit V functio quaecunque quantitatum x, y, z, w etc.

$$p;\ p';\ p'' \text{ etc. } q;\ q';\ q'' \text{ etc. } r;\ r';\ r'' \text{ etc. etc.}$$

Regula nimirum generalis, quae pro assignandis his criteriis valet, sequens est: "Vt formula V dx fiat „integrabilis, positis omnibus x, y, z, w etc. simul „variabilibus, necessum est, vt integrationem ad„mittat, prouti praeter quantitatem x, vnaquaeuis „reliquarum x, y, z vel w seorsim variabilis habe„tur, reliquis vt constantes spectatis; vnde pro for„mula V dx tot orientur criteria integrabilitatis, „quot functio V praeter x inuoluat quantitates va„riabiles y, z, w etc. seu quot modis x, cum vna„quauis earum, seorsim spectari potest.„ Euidens hinc est, si ponatur V esse functionem quatuor variabilium x, y, z, w atque differentialium inde derivatorum, tum vero statuatur:

$$\begin{aligned} dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ etc.} \\ + N'\,dz + P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' \text{ etc.} \\ + N''\,dw + P''\,dp'' + Q''\,dq'' + R''\,dr'' \text{ etc.} \end{aligned}$$

formulam V dx fieri integrabilem, si modo tribus sequentibus aequationibus fuerit satisfactum:

$$\text{I. } N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots\ldots = 0$$

$$\text{II. } N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} \ldots\ldots = 0$$

$$\text{III. } N'' - \frac{dP''}{dx} + \frac{ddQ''}{dx^2} - \frac{d^3R''}{dx^3} \ldots\ldots = 0.$$

19. Si quantitas V praeter variabiles x, y, z w etc. earumque differentialia cuiuscunque gradus, formulas quoque integrales, ex iisdem quantitatibus conflatas vtcunque inuoluat, criteria integrabilitatis formulae $V\,dx$ aeque facile eruentur. Quum enim formula $V\,dx$ integrabilis fit pofitis omnibus y, z, w etc. variabilibus; neceffum eft vt integrationem quoque admittat, fi ftatuantur aut x et y, aut x et z, aut x et w etc. folae variabiles. Vnde fiquidem ex fuperioribus iam pateat, fub quibus conditionibus formula $\int V\,dx$, quae praeter x aliam quamcunque variabilem cum differentialibus eius quomodocunque inuoluat, verum fiat integrale; hae eaedem conditiones dum pro vnaquaque variabili, y, z, w etc. feorfim inueftigantur, collectim fumtae, vera criteria integrabilitatis formulae $V\,dx$, in qua omnes x, y, z, w etc. pro variabilibus habentur, exhibebunt.

20. Poftquam igitur iam oftenderimus, qua ratione criteria integrabilitatis, pro quacunque formula differentiali fimplici $V\,dx$ inueftigari queant; proximum eft, vt ad formulas differentiales quae duplicatae dicuntur, progrediamur. Notum autem eft formulas integrales duplicatas, fub huiusmodi forma $\int\int V\,dx\,dy$ repraefentari effe folitas, cuius fignandi rationis hic eft fenfus: capiendum primo

effe

esse integrale formulae $V\,dx$ posita sola x variabili, deinde vero formulae differentialis $dy \int V\,dx$, instituendam esse integrationem habita sola y variabili; vel vicissim si primum capiatur integrale formulae $V\,dy$ posita y variabili, postea integrandam esse formulam $dx \int V\,dy$, sola x pro variabili spectata, vtroque autem modo idem integrale prodire debere. Deinde quod ad significationem litterae V attinet, notandum est, eam designare quantitatem, quae non modo variabiles x et y, sed alias quascunque z, u, v, w cum ipsarum differentialibus quibuscunque inuoluat, positis differentialibus ipsarum x et y constantibus, vt igitur ratio differentialium ipsarum z, v, w etc. ex calculo elidatur, liquet has quantitates spectandas esse, vt functiones ambarum variabilium x et y, adeo vt ex. caussa statui debeat

$$dz = p\,dx + p'\,dy.$$

21. Criteria igitur integrabilitatis huiusmodi formularum integralium duplicatarum inuestigaturi, incipiamus a casu simpliciori, eo nimirum, quo V praeter x et y tantum vnicam nouam variabilem z cum ipsius differentialibus cuiuscunque ordinis complectatur. Quum itaque z quasi functio binarum x et y tractari debeat, necessum est vt statuatur:

$$\begin{array}{ll} dz = p\,dx + p'\,dy & dq = r\,dx + r'\,dy \\ dp = q\,dx + q'\,dy & dq' = r'\,dx + r''\,dy \\ dp' = q'\,dx + q''\,dy & dq'' = r''\,dy + r'''\,dy \end{array}$$

etc.

deinde ponatur

$$\begin{aligned} dV = L\,dx + N\,dz &+ P\,dp + Q\,dq + R\,dr \\ + M\,dy \qquad &+ P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' \\ &\qquad + Q''\,dq'' + R''\,dr'' \text{ etc.} \\ &\qquad\qquad + R'''\,dr''' \end{aligned}$$

eritque nunc diſpiciendum, quaenam determinationes pro his quantitatibus L, M, N, P, P' etc. praeſcribendae ſint, vt formula $\int\int V\,dx\,dy$ verum conſtituat integrale, vel potius aſſumto quod formula noſtra ſit integrabilis, quaeramus quaenam inde eliciantur aequationes litteras modo dictas N, P, P', Q, Q', Q'' etc. intercedentes? Statuamus igitur integrale huius formulae per duplicem integrationem oriundum eſſe Z, deinde ſumto differentiali dZ, quod prodit habitis omnibus x, y, z ſimul pro variabilibus, ponamus eſſe:

$$\begin{aligned} dZ = \lambda\,dx + \nu\,dz &+ \pi\,dp + \varkappa\,dq \\ + \mu\,dy \qquad &+ \pi'\,dp' + \varkappa'\,dq' \quad \text{etc.} \\ &\qquad + \varkappa''\,dq'' \end{aligned}$$

atque ex principio generali ſupra §. 2. ſtabilito, liquet eſſe debere:

$$\left(\frac{d\lambda}{dy}\right) = \left(\frac{d\mu}{dx}\right);\ \left(\frac{d\lambda}{dz}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right);\ \left(\frac{d\lambda}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dx}\right);\ \left(\frac{d\lambda}{dp'}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dx}\right) \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{d\mu}{dz}\right) = \left(\frac{d\nu}{dy}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dp'}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dp'}\right) \text{ etc. } \left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dz}\right);$$

$$\left(\frac{d\nu}{dp'}\right) = \left(\frac{d\pi'}{dz}\right) \text{ etc. etc.}$$

Ne autem formulis vncinulis incluſis, ſignificatus tribuatur alienus ab eo, quem heic indigitauimus, obſer-

obſeruandum eſt, huiusmodi formulis duplicem tribui poſſe ſenſum. Formula etenim $dy\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)$ aut ſignificare ſolet differentiale quantitatis λ, quod prodit, ſi ex quantitatibus valorem ipſius λ ingredientibus, ſola y pro variabili habeatur, reliquis nimirum omnibus, x, z, p, p' etc. conſtantibus poſitis; aut vero hac formula $dy\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)$ indicatur, differentiale ipſius λ ex variabilitate ipſius y ortum, ſi quantitates quoque z, p, p' etc. prouti ab y pendent, vt variabiles tractentur, quo poſteriori ſenſu ſola quantitas x vt conſtans ſpectatur. Conſtat autem poſteriori hoc ſignificatu adhibito, aequalitates modo allatas, veritati amplius non conſentire, easque ſolum priori ſenſu veras eſſe, poſteriorem igitur ſignandi rationem tantiſper euitemus, donec valores litterarum λ, μ, ν, π, π' etc. inuenerimus; poſtmodum enim maioris breuitatis gratia, eam tanto magis adhibere licet, quod tum amplius nulla ex eius vſu ambiguitas ſit metuenda.

22. Quum itaque ſit $Z = \int\int V\,dx\,dy$, ſi ſtatuatur:

$dZ = \alpha dx + \beta dy$, habebimus $\alpha = \int V\,dy$ et $\beta = \int V\,dx$

vbi haec integralia ita capta intelliguntur, vt in priori x pro conſtante habeatur, in poſteriori vero y, quod pro ſimilibus formulis poſt hac occurrentibus quoque valebit, et heic ſemel monuiſſe ſufficiat. Hinc iam reperietur

$$\begin{array}{ll}
\alpha = \lambda + \nu p + \pi q + \varkappa r & \beta = \mu + \nu p' + \pi q' + \varkappa r' \\
\quad + \pi' q' + \varkappa' r' \text{ etc.} & \quad + \pi' q'' + \varkappa' r'' \text{ etc.} \\
\quad + \varkappa'' r'' & \quad + \varkappa'' r'''.
\end{array}$$

Si igitur vlterius ponatur $d\alpha = \gamma dx + \delta dy$, inuenietur

$$\begin{array}{ll}
\delta = V = \left(\frac{d\lambda}{dy}\right) + p'\left(\frac{d\lambda}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\lambda}{dp}\right) + r'\left(\frac{d\lambda}{dq}\right) & \\
\quad + q''\left(\frac{d\lambda}{dp'}\right) + r''\left(\frac{d\lambda}{dq'}\right) & + \nu q' + \pi r' + \varkappa s' \\
\quad + r'''\left(\frac{d\lambda}{dq''}\right) & + \pi' r'' + \varkappa' s'' \\
\quad + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + pp'\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + pq'\left(\frac{d\nu}{dp}\right) \text{ etc.} & + \varkappa'' s''' \\
\quad + pq''\left(\frac{d\nu}{dp'}\right) & \text{etc.} \\
\quad + q\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + qp'\left(\frac{d\pi}{dz}\right) & \\
\quad + q'\left(\frac{d\pi'}{dy}\right) + q'p'\left(\frac{d\pi'}{dz}\right) & \\
\quad + r\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) & \\
\quad + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dy}\right) & \\
\quad + r''\left(\frac{d\varkappa''}{dy}\right) &
\end{array}$$

Quae aequatio ſub hac quoque forma repraeſentari poteſt:

$$\begin{array}{ll}
V = \left(\frac{d\lambda}{dy}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) & \\
\quad + p'\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dy}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa'}{dy}\right) & + \nu q' + \pi r' + \varkappa' s' \\
\quad + q'\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + r''\left(\frac{d\varkappa''}{dy}\right) \text{ etc.} & + \pi' r'' + \varkappa' s'' + \text{etc.} \\
\quad + q''\left(\frac{d\pi'}{dx}\right) + r'\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) & + \varkappa'' s''' \\
\quad + pp'\left(\frac{d\nu}{dz}\right) + r''\left(\frac{d\varkappa'}{dx}\right) & \\
\quad + r'''\left(\frac{d\varkappa'}{dx}\right) &
\end{array}$$

+

$$+(p'q+pq')\left(\frac{d\pi}{dz}\right)$$
$$+(p'q'+pq'')\left(\frac{d\pi'}{dz}\right) \text{ etc.}$$

23. Ex aequatione igitur iam propoſita, valores litterarum L, M, N etc. determinari poterunt et primum quidem habebitur:

$$L=\left(\frac{dV}{dx}\right)=\left(\frac{dd\lambda}{dx\,dy}\right)+p\left(\frac{dd v}{dx\,dy}\right)+q\left(\frac{dd\pi}{dx\,dy}\right)+r\left(\frac{dd\varkappa}{dx\,dy}\right)$$
$$+p'\left(\frac{dd v}{dx^2}\right)+q'\left(\frac{dd\pi'}{dxdy}\right)+r'\left(\frac{dd\varkappa'}{dxdy}\right)$$
$$+q'\left(\frac{dd\pi}{dx^2}\right)+r''\left(\frac{dd\varkappa''}{dxdy}\right)$$
$$+q''\left(\frac{dd\pi'}{dx^2}\right)+r'\left(\frac{dd\varkappa}{dx^2}\right)+\text{etc.}$$
$$+pp'\left(\frac{dd v}{dxdz}\right)+r''\left(\frac{dd\varkappa'}{dx^2}\right)$$
$$+r'''\left(\frac{dd\varkappa''}{dx^2}\right)$$
$$+q'\left(\frac{dv}{dx}\right)+r'\left(\frac{d\pi}{dx}\right)+s'\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) \qquad +(pq'+p'q)\left(\frac{dd\pi}{dxdz}\right)$$
$$+r''\left(\frac{d\pi'}{dx}\right)+s''\left(\frac{d\varkappa'}{dx}\right)+\text{etc.} \quad +(pq''+p'q')\left(\frac{dd\pi'}{dxdz}\right)$$
$$+s'''\left(\frac{d\varkappa''}{dx}\right)$$

Vnde in vſum vocatis aequalitatibus §. 21. allatis obtinemus:

$$L=\left(\frac{dd\lambda}{dxdy}\right)+p\left(\frac{dd\lambda}{dydz}\right)+q\left(\frac{dd\lambda}{dydp}\right)+r\left(\frac{dd\lambda}{dydq}\right)$$
$$+p'\left(\frac{dd\lambda}{dxdz}\right)+q'\left(\frac{dd\lambda}{dydp'}\right)+r'\left(\frac{dd\lambda}{dydq'}\right)$$
$$+q'\left(\frac{dd\lambda}{dxdp}\right)+r''\left(\frac{dd\lambda}{dydq''}\right)+\text{etc.}$$
$$+q''\left(\frac{dd\lambda}{dxdp'}\right)+r'\left(\frac{dd\lambda}{dxdq}\right)$$
$$+pp'\left(\frac{dd\lambda}{dz^2}\right)+r''\left(\frac{dd\lambda}{dxdq'}\right)$$
$$+r'''\left(\frac{dd\lambda}{dxdq''}\right)$$

$$+q'\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)+r'\left(\frac{d\lambda}{dp}\right)+s'\left(\frac{d\lambda}{dq}\right) \qquad +(pq'+p'q)\left(\frac{dd\lambda}{dp\,dz}\right)$$
$$+r''\left(\frac{d\lambda}{dp'}\right)+s''\left(\frac{d\lambda}{dq'}\right) \;+\text{ etc.} +(pq''+p'q')\left(\frac{dd\lambda}{dp'\,dz}\right)$$
$$+s'''\left(\frac{d\lambda}{dq''}\right).$$

24. Capiatur iam integrale $\int L\,dx$, posita y constante et habebitur:

$$\int L\,dx = \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)+p'\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)+q'\left(\frac{d\lambda}{dp}\right)+r'\left(\frac{d\lambda}{dq}\right)$$
$$+q''\left(\frac{d\lambda}{dp'}\right)+r''\left(\frac{d\lambda}{dq'}\right)+\text{ etc.}$$
$$+r'''\left(\frac{d\lambda}{dq''}\right)$$

vnde denuo integrando, habita x pro constante orietur $\int dy\int L\,dx = \lambda$. Simili vero ratione, si primo capiatur integrale $\int L\,dy$, erit

$$\int L\,dy = \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)+p\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)+q\left(\frac{d\lambda}{dp}\right)+r\left(\frac{d\lambda}{dq}\right)$$
$$+q'\left(\frac{d\lambda}{dp'}\right)+r'\left(\frac{d\lambda}{dq'}\right)\text{ etc.}$$
$$+r''\left(\frac{d\lambda}{dq''}\right)$$

iterumque integrando y pro constante spectata:

$\int dx\int L\,dy = \lambda$, ex quo iam liquet esse $\lambda = \iint L\,dx\,dy$ vbi signa summatoria, quantitates, quae loco constantium per duplicatam integrationem inuehuntur, iam in se inuoluere concipienda sunt. Quantitates autem hae per integrationem ingressae, functiones quascunque arbitrarias quantitatum x et y constituent, adeo vt sit $\lambda = \iint L\,dx\,dy + X + Y$, significantibus X et Y, functiones quascunque solius x et y.

25. Ad eandem rationem demonstrari potest, esse $\mu = \iint M\,dx\,dy$ et $\nu = \iint N\,dx\,dy$, adeo vt his

his aequalitatibus confirmandis vlterius immorari necesse non sit; quaeramus igitur quaenam expressiones pro quantitatibus ipsarum π et π' ex valore ipsius V allato inuenia tur? Hunc in finem quaeratur primo valor ipsius P, qui erit

$$\begin{aligned} P = {} & \left(\tfrac{dd\pi}{dy\,dx}\right) + p\left(\tfrac{dd\pi}{dy\,dz}\right) + q\left(\tfrac{dd\pi}{dy\,dp}\right) + r\left(\tfrac{dd\pi}{dy\,dq}\right) \\ & + p'\left(\tfrac{dd\pi}{dx\,dz}\right) + q'\left(\tfrac{dd\pi}{dy\,dp'}\right) + r'\left(\tfrac{dd\pi}{dy\,dq'}\right) \\ & + q'\left(\tfrac{dd\pi}{dx\,dp}\right) + r''\left(\tfrac{dd\pi}{dy\,dq''}\right) \\ & + q''\left(\tfrac{dd\pi}{dx\,dp'}\right) + r'\left(\tfrac{dd\pi}{dx\,dq}\right) \\ & + pp'\left(\tfrac{dd\pi}{dz^2}\right) + r''\left(\tfrac{dd\pi}{dx\,dq'}\right) + \text{etc.} \\ & + r''\left(\tfrac{dd\pi}{dx\,dq''}\right) \\ & + q'\left(\tfrac{d\pi}{dz}\right) + r'\left(\tfrac{d\pi}{dp}\right) + s'\left(\tfrac{d\pi}{dq}\right) \qquad + (pq'+p'q)\left(\tfrac{dd\pi}{dz\,dp}\right) \\ & + r''\left(\tfrac{d\pi}{dp'}\right) + s''\left(\tfrac{d\pi}{dq'}\right) \text{ etc.} + (pq''+p'q')\left(\tfrac{dd\pi}{dz\,dp'}\right) \\ & + s'''\left(\tfrac{d\pi}{dq''}\right) \\ & + \left(\tfrac{dv}{dy}\right) + p'\left(\tfrac{dv}{dz}\right) + q'\left(\tfrac{dv}{dp}\right) \\ & + q''\left(\tfrac{dv}{dp'}\right) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Sumatur iam integrale $\int P\,dy$, fietque

$$\begin{aligned} \int P\,dy = {} & \left(\tfrac{d\pi}{dx}\right) + p\left(\tfrac{d\pi}{dz}\right) + q\left(\tfrac{d\pi}{dp}\right) + r\left(\tfrac{d\pi}{dq}\right) \\ & + q'\left(\tfrac{d\pi}{dp'}\right) + r'\left(\tfrac{d\pi}{dq'}\right) + \text{etc.} + v \\ & + r''\left(\tfrac{d\pi}{dq''}\right) \end{aligned}$$

vnde denuo integrando, posita y constante habebitur $\int dx \int P\,dy = \pi + \int v\,dx$, ex quo erit $\pi = \int dx \int P\,dy - \int v\,dx$.

Cete-

Ceterum si integratio prima instituatur y pro constante habita, fiet:

$$\int P\,dx = \left(\frac{d\,\pi}{d\,y}\right) + p'\left(\frac{d\,\pi}{d\,z}\right) + q'\left(\frac{d\,\pi}{d\,p}\right) + q''\left(\frac{d\,\pi}{d\,p'}\right) \text{ etc.}$$

$$+ \int dx\left(\left(\frac{d\,\nu}{d\,y}\right) + p'\left(\frac{d\,\nu}{d\,z}\right) + q'\left(\frac{d\,\nu}{d\,p}\right) + q''\left(\frac{d\,\nu}{d\,p'}\right) \text{ etc.}\right)$$

atque iterum multiplicando per dy et integrando posito x constante

$$\int dy \int P\,dx = \pi + \int dy \int dx\left(\left(\frac{d\,\nu}{d\,y}\right) + p'\left(\frac{d\,\nu}{d\,z}\right) + q'\left(\frac{d\,\nu}{d\,p}\right) + q''\left(\frac{d\,\nu}{d\,p'}\right) \text{ etc.}\right)$$

vbi posterioris membri integrale manifesto erit $= \int \nu\,dx$, adeo vt iam sit

$$\pi = \iint P\,dx\,dy - \int \nu\,dx = \iint P\,dx\,dy - \int dx \iint N\,dx\,dy.$$

Simili autem ratione demonstrabitur esse

$$\pi' = \iint P'\,dx\,dy - \int \nu\,dy = \iint P'\,dx\,dy - \int dy \iint N\,dx\,dy.$$

26. Vlterius ad inuestigandos valores ipsarum $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, breuitatis gratia indigitemus differentialia ipsius V, quae oriuntur positis quantitatibus q vel q' vel q'' variabilibus, ex sola differentiatione litterarum graecarum λ, μ, ν, π etc., per sequentes signandi formulas: $\left[\frac{d\,V}{d\,q}\right]$; $\left[\frac{d\,V}{d\,q'}\right]$; $\left[\frac{d\,V}{d\,q''}\right]$. Hoc igitur obseruato habebimus

$$Q = \left[\frac{d\,V}{d\,q}\right] + \left(\frac{d\,\pi}{d\,y}\right) + p'\left(\frac{d\,\pi}{d\,z}\right) + q'\left(\frac{d\,\pi}{d\,p}\right) + \text{etc.} + q''\left(\frac{d\,\pi}{d\,p'}\right)$$

ex quo deducetur

$$\int Q\,dy = \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) + p\left(\frac{d\varkappa}{dz}\right) + q\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) + q'\left(\frac{d\varkappa}{dp'}\right) + \text{etc.} + \pi, \text{ indeque}$$

$\int dx \int Q\,dy = \varkappa + \int \pi\,dx$, consequenter fiet $\varkappa = \int dx \int Q\,dy - \int \pi\,dx$, siue etiam

$$\varkappa = \int\int Q\,dx\,dy - \int dx \int\int P\,dx\,dy + \int dx \int dx \int\int N\,dx\,dy.$$

At pro $\varkappa'$ inueniendo habebimus

$$Q' = \left[\frac{dV}{dq'}\right] + \left(\frac{d\pi'}{dy}\right) + p'\left(\frac{d\pi'}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dp}\right) + q''\left(\frac{d\pi'}{dp'}\right) + \text{etc.} + \nu$$
$$+ \left(\frac{d\pi}{dx}\right) + p\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + q'\left(\frac{d\pi}{dp'}\right) + \text{etc.}$$

vnde prodit

$$\int Q'\,dx = \left(\frac{d\varkappa'}{dy}\right) + p'\left(\frac{d\varkappa'}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\varkappa'}{dp}\right) + q''\left(\frac{d\varkappa'}{dp'}\right) + \text{etc.} + \pi + \int \nu\,dx$$
$$+ \int dx \left(\left(\frac{d\pi'}{dy}\right) + p'\left(\frac{d\pi'}{dz}\right) + q'\left(\frac{d\pi'}{dp}\right) + q''\left(\frac{d\pi'}{dp'}\right) + \text{etc.}\right)$$

hincque iterum

$$\int dy \int Q'\,dx = \varkappa + \int \pi\,dy + \int dy \int \nu\,dx + \int dy \int dx\left(\left(\frac{d\pi'}{dy}\right) + p'\left(\frac{d\pi'}{dz}\right) + \text{etc.}\right)$$
$$= \varkappa + \int \pi\,dy + \int \pi'\,dx + \int dy \int \nu\,dx$$

vnde colligitur

$$\varkappa' = \int\int Q'\,dx\,dy - \int \pi\,dy - \int \pi'\,dx - \int\int \nu\,dx\,dy.$$

Denique inuenietur

$$\varkappa'' = \int\int Q''\,dx\,dy - \int \pi'\,dy.$$

27. Deinde si vlterius procedere velimus, inveniemus esse:

$$\varrho = \int\int R\,dx\,dy - \int \varkappa\,dx$$
$$\varrho' = \int\int R'\,dx\,dy - \int \varkappa\,dy - \int \varkappa'\,dx - \int\int \pi\,dx\,dy$$
$$\varrho'' = \int\int R''\,dx\,dy - \int \varkappa'\,dy - \int \varkappa''\,dx - \int\int \pi'\,dx\,dy$$
$$\varrho''' = \int\int R'''\,dx\,dy - \int \varkappa''\,dx$$

et

$$\sigma = \int\int S\,dx\,dy - \int \varrho\,dx$$
$$\sigma' = \int\int S'\,dx\,dy - \int \varrho\,dy - \int \varrho'\,dx - \int\int \varkappa\,dx\,dy$$
$$\sigma'' = \int\int S''\,dx\,dy - \int \varrho'\,dy - \int \varrho''\,dx - \int\int \varkappa'\,dx\,dy$$
$$\sigma''' = \int\int S'''\,dx\,dy - \int \varrho''\,dy - \int \varrho'''\,dx - \int\int \varkappa''\,dx\,dy$$
$$\sigma^{IV} = \int\int S^{IV}\,dx\,dy - \int \varrho'''\,dy. \text{ etc.}$$

28. Hinc quidem nunc criteria integrabilitatis quaesita, facillimo negotio erui poterunt, ii enim valores ipsarum, ν, π, π', $\varkappa$, $\varkappa'$ $\varkappa''$ etc., qui nihilo aequantur eadem suppeditabunt. Si igitur fuerit $Z = \int\int V\,dx\,dy$ et

$$\begin{aligned} dZ = \lambda\,dx + \nu\,dz + \pi\,dp &+ \varkappa\,dq + \varrho\,dr \\ + \mu\,dy \qquad + \pi'\,dp' &+ \varkappa'\,dq' + \varrho'\,dr' \\ &+ \varkappa''\,dq'' + \varrho''\,dr'' \\ &\qquad\quad + \varrho'''\,dr''' \end{aligned}$$

tum euidens est esse $\sigma, \sigma'\ \sigma''$ etc. $= 0$, similiterque posito $t = \frac{ds}{dx}$, si coefficientes ipsarum dt per τ, τ' etc. exprimantur, erunt quoque hae τ, τ', τ'' etc. $= 0$,

vnde

vnde pro criteriis integrabilitatis obtinemus ſequentes aequationes:

I. $\int\int S\,dx\,dy - \int \varrho\,dx = 0$;

II. $\int\int S'\,dx\,dy - \int \varrho\,dy - \int \varrho'\,dx - \int\int \varkappa\,dx\,dy = 0$

III. $\int\int S''\,dx\,dy - \int \varrho'\,dy - \int \varrho''\,dx - \int\int \varkappa'\,dx\,dy = 0$;

IV. $\int\int S'''\,dx\,dy - \int \varrho''\,dy - \int \varrho'''\,dx - \int\int \varkappa''\,dx\,dy = 0$

V. $\int\int S^{IV}\,dx\,dy - \int \varrho'''\,dy = 0$; vlterius

VI. $\int\int T\,dx\,dy - \int \sigma\,dx = 0$;

VII. $\int\int T'\,dx\,dy - \int \sigma\,dy - \int \sigma'\,dx - \int\int \varrho\,dx\,dy = 0$;

VIII. $\int\int T''\,dx\,dy - \int \sigma'\,dy - \int \sigma''\,dx - \int\int \varrho'\,dx\,dy = 0$;

IX. $\int\int T'''\,dx\,dy - \int \sigma''\,dy - \int \sigma'''\,dx - \int\int \varrho''\,dx\,dy = 0$;

X. $\int\int T^{IV}\,dx\,dy - \int \sigma'''\,dy - \int \sigma^{IV}\,dx - \int\int \varrho'''\,dx\,dy = 0$;

XI. $\int\int T^{IV}\,dx\,dy - \int \sigma^{IV}\,dy = 0$.

29. Vt vero melius pateat, qualis forma his aequationibus rite euolutis inducatur, e re erit ſequentes obſeruaſſe aequalitates:

$$\left(\frac{d\,d\,v}{dx\,dy}\right) = N;\ \left(\frac{d^3\,\pi}{dx^2\,dy}\right) = \left(\frac{d\,P}{d\,x}\right) - \left(\frac{d\,d\,v}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d\,P}{d\,x}\right) - N$$

$$\left(\frac{d^3\,\pi'}{dx\,dy^2}\right) = \left(\frac{d\,P'}{d\,y}\right) - \left(\frac{d\,d\,v}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d\,P'}{d\,y}\right) - N.$$

$$\left(\frac{d^4\,\varkappa}{dx^3 dy}\right) = \left(\frac{d\,d\,Q}{d\,x^2}\right) - \left(\frac{d\,P}{d\,x}\right) + N$$

$$\left(\frac{d^4\,\varkappa'}{dx^2 dy^2}\right) = \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d\,P}{d\,x}\right) + N - \left(\frac{d\,P'}{d\,y}\right)$$

$$\left(\frac{d^4\, \varkappa''}{dx\,dy^3}\right) = \left(\frac{dd\,Q''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d\,P'}{dy}\right) + N$$

$$\left(\frac{d^5\, \rho}{dx^4\,dy}\right) = \left(\frac{d^3\,R}{dx^3}\right) - \left(\frac{dd\,Q}{dx^2}\right) + \left(\frac{d\,P}{dx}\right) - N$$

$$\left(\frac{d^5\, \rho'}{dx^3\,dy^2}\right) = \left(\frac{d^3\,R'}{dx^2\,dy}\right) - \left(\frac{dd\,Q}{dx^2}\right) + \left(\frac{d\,P}{dx}\right) - N - \left(\frac{dd\,Q'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d\,P'}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d^5\, \rho''}{dx^2\,dy^3}\right) = \left(\frac{d^3\,R''}{dx\,dy^2}\right) - \left(\frac{dd\,Q'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d\,P}{dx}\right) - N - \left(\frac{dd\,Q''}{dy^2}\right) + \left(\frac{d\,P'}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d^5\, \rho'''}{dx\,dy^4}\right) = \left(\frac{d^3\,R'''}{dy^3}\right) - \left(\frac{dd\,Q''}{dy^2}\right) + \left(\frac{d\,P'}{dy}\right) - N$$

Porro

I. $$0 = \left(\frac{d^6\, \sigma}{dx^5\,dy}\right) = \left(\frac{d^4\,S}{dx^4}\right) - \left(\frac{d^3\,R}{dx^3}\right) + \left(\frac{dd\,Q}{dx^2}\right) - \left(\frac{d\,P}{dx}\right) + N$$

II. $$0 = \left(\frac{d^6.\, \sigma'}{dx^4\,dy^2}\right) = \left(\frac{d^4\,S'}{dx^3\,dy}\right) - \left(\frac{d^3\,R}{dx^3}\right) + \left(\frac{dd\,Q}{dx^2}\right) - \left(\frac{d\,P}{dx}\right) + N - \left(\frac{d^3\,R'}{dx^2\,dy}\right) + \left(\frac{dd\,Q'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d\,P'}{dy}\right)$$

III. $$0 = \left(\frac{d^6.\, \sigma''}{dx^3\,dy^3}\right) = \left(\frac{d^4\,S''}{dx^2\,dy^2}\right) - \left(\frac{d^3\,R'}{dx^2\,dy}\right) + \left(\frac{dd\,Q}{dx^2}\right) - \left(\frac{d\,P}{dx}\right) + N - \left(\frac{d^3\,R''}{dx\,dy^2}\right) + \left(\frac{dd\,Q'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d\,P'}{dy}\right) + \left(\frac{dd\,Q''}{dy^2}\right)$$

IV. $$0 = \left(\frac{d^6.\, \sigma'''}{dx^2\,dy^4}\right) = \left(\frac{d^4\,S'''}{dx\,dy^3}\right) - \left(\frac{d^3\,R''}{dx\,dy^2}\right) + \left(\frac{dd\,Q'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d\,P}{dx}\right) + N - \left(\frac{d^3\,R'''}{dy^3}\right) + \left(\frac{dd\,Q''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d\,P'}{dy}\right)$$

V. $$0 = \left(\frac{d^6.\, \sigma''''}{dx\,dy^5}\right) = \left(\frac{d^4\,S''''}{dy^4}\right) - \left(\frac{d^3\,R'''}{dy^3}\right) + \left(\frac{dd\,Q''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d\,P'}{dy}\right) + N$$

Hi igitur quinque valores vltimi nihilo aequales positi, praebebunt totidem criteria integrabilitatis pro formula nostra $V\,dx\,dy$. Ceterum omnino notasse meretur, omnibus his aequationibus in vnam summam collectis inueniri:

5 N—

$$\begin{aligned}
5N &- 4\left(\frac{dP}{dx}\right) + 3\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - 2\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) + \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) \\
&- 4\left(\frac{dP'}{dy}\right) + 3\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) - 2\left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) + \left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right) \\
&\qquad + 3\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) - 2\left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) + \left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right) = 0 \\
&\qquad\qquad - 2\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) + \left(\frac{d^4S'''}{dx\,dy^3}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad + \left(\frac{d^4S''''}{dy^4}\right).
\end{aligned}$$

30. Vlterius erit:

$$\begin{aligned}
\text{VI.}\;\; 0 &= \left(\frac{d^7T}{dx^6dy}\right) = \left(\frac{d^5T}{dx^5}\right) - \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) + \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) - \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N \\
\text{VII.}\;\; 0 &= \left(\frac{d^7T'}{dx^5dy^2}\right) = \left(\frac{d^5T'}{dx^4dy}\right) - \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) + \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) - \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N \\
&\qquad - \left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right) + \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) - \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) \\
\text{VIII.}\;\; 0 &= \left(\frac{d^7T''}{dx^4dy^3}\right) = \left(\frac{d^5T'''}{dx^3dy^2}\right) - \left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right) + \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) - \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N \\
&\qquad - \left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right) + \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) - \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) - \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) \\
\text{IX.}\;\; 0 &= \left(\frac{d^7T'''}{dx^3dy^4}\right) = \left(\frac{d^5T'''}{dx^2dy^3}\right) - \left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right) + \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) - \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N \\
&\qquad - \left(\frac{d^4S'''}{dx\,dy^3}\right) + \left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) - \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) - \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) \\
\text{X.}\;\; 0 &= \left(\frac{d^7T''''}{dx^2dy^5}\right) = \left(\frac{d^5T''''}{dx\,dy^4}\right) - \left(\frac{d^4S'''}{dx\,dy^3}\right) + \left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) - \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N \\
&\qquad - \left(\frac{d^4S''''}{dy^4}\right) + \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) - \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) \\
\text{XI.}\;\; 0 &= \left(\frac{d^7T'''''}{dx\,dy^6}\right) = \left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right) - \left(\frac{d^4S''''}{dy^4}\right) + \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) - \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) - N
\end{aligned}$$

Hae igitur ſex aequationes reliqua criteria integrabilitatis formulae noſtrae ſuppeditabunt, eas vero in vnam ſummam colligendo obtinebimus:

$$\begin{aligned}6N &- 5\left(\frac{dP}{dx}\right) + 4\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - 3\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \left(\frac{d^5T}{dx^5}\right)\\ &- 5\left(\frac{dP'}{dy}\right) + 4\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) - 3\left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) + 2\left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right) - \left(\frac{d^5T'}{dx^4dy}\right)\\ &+ 4\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) - 3\left(\frac{d^3R''}{dxdy^2}\right) + 2\left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right) - \left(\frac{d^5T''}{dx^3dy^2}\right) = 0\\ &- 3\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) + 2\left(\frac{d^4S'''}{dx\,dy^3}\right) - \left(\frac{d^5T'''}{dx^2dy^3}\right)\\ &+ 2\left(\frac{d^4S''''}{dy^4}\right) - \left(\frac{d^5T''''}{dx\,dy^4}\right)\\ &- \left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right).\end{aligned}$$

31. Ab hac aequatione, ſi ſumma quinque aequationum priorum ſubtrahatur, obtinebimus:

$$\begin{aligned}N &- \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) \ldots\ldots - \left(\frac{d^5T}{dx^5}\right)\\ &- \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) \qquad \vdots \qquad = 0\\ &+ \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) \ldots\ldots - \left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right).\end{aligned}$$

Haec aequatio per 5 multiplicata, et ab ea §. 29. ſubtracta dat:

$$\begin{aligned}&+ \left(\frac{dP}{dx}\right) - 2\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + 3\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) \ldots\ldots + 5\left(\frac{d^5T}{dx^5}\right)\\ &+ \left(\frac{dP'}{dy}\right) - 2\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + 3\left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) \qquad \vdots \qquad = 0\\ &- 2\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) + 3\left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) \qquad \vdots\\ &+ 3\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) \ldots\ldots + 5\left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right).\end{aligned}$$

32. Si aequationes quinque §. 29. addantur ad ſex §. 30. ita, vt ſequentes capiantur ſummae I + VII; II + VIII; III + IX etc. orientur hae aequationes:

$$\left(\frac{dP'}{dy}\right) - \left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) - \left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right) + \left(\frac{d^5T'}{dx^4dy}\right) = 0$$
$$-\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^3R''}{dxdy^2}\right) - \left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right) + \left(\frac{d^5T''}{dx^3dy^2}\right) = 0$$
$$+\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) - \left(\frac{d^4S'''}{dxdy^3}\right) + \left(\frac{d^5T'''}{dx^2dy^3}\right) = 0$$
$$-\left(\frac{d^4S''''}{dy^4}\right) + \left(\frac{d^5T''''}{dxdy^4}\right) = 0$$
$$+\left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right) = 0.$$

Quarum aequationum ſumma ab aequatione VI. §. 30. ſubtracta dat aequationem priorem ſupra §. 31. allatam. Porro ſi aequationes §. 29. cum iis §. 30. ita combinentur, vt ſumantur V + X; IV + IX, III + VIII etc. prodibunt ſequentes aequationes:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) - \left(\frac{ddQ'}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^3R''}{dxdy^2}\right) - \left(\frac{d^4S'''}{dxdy^3}\right) + \left(\frac{d^5T''''}{dxdy^4}\right) = 0$$
$$-\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) - \left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right) + \left(\frac{d^5T'''}{dx^3dy^3}\right) = 0$$
$$+\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) - \left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right) + \left(\frac{d^5T''}{dx^3dy^2}\right) = 0$$
$$-\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) + \left(\frac{d^5T'}{dx^4dy}\right) = 0$$
$$+\left(\frac{d^5T}{dx^5}\right) = 0$$

quarum aequationum ſumma ab aequatione XI §. 30 ſubtracta, iterum producit aequationem priorem §. 31. allatam.

33. Criteria igitur integrabilitatis formulae $V\,dx\,dy$, vno complexu repraeſentantur hac aequatione:

$$\begin{aligned} N &- \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) + \left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \left(\frac{d^5T}{dx^5}\right) \\ &- \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) + \left(\frac{d^4S'}{dx^3dy}\right) - \left(\frac{d^5T'}{dx^4dy}\right) \\ &\qquad + \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^3R''}{dxdy^2}\right) + \left(\frac{d^4S''}{dx^2dy^2}\right) - \left(\frac{d^5T''}{dx^3dy^2}\right) = 0 \\ &\qquad\qquad - \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) + \left(\frac{d^4S'''}{dx\,dy^3}\right) - \left(\frac{d^5T'''}{dx^2dy^3}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad + \left(\frac{d^4S''''}{dy^4}\right) - \left(\frac{d^5T''''}{dx\,dy^4}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad - \left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right). \end{aligned}$$

Singula autem eorum hinc inueniuntur, si omnia membra in iisdem lineis horizontalibus vel diagonalibus occurrentia, seorsim nihilo aequentur. Vt autem ex ipsa formulae differentialis natura perspiciatur $\left(\frac{d^5T}{dx^5}\right)$ et $\left(\frac{d^5T'''''}{dy^5}\right)$ reuera nihilo aequari, perpendendum est, nos supposuisse vltima membra, quae in valore ipsius dZ occurrunt esse $\varrho\, dr$, $\varrho'\, dr'$ etc. adeo vt quantitas Z valores differentiales vltra r assurgentes non inuoluat. Videndum igitur est, quaenam ex duplici differentiatione ipsius Z, qua primo x deinde y pro constante habetur, in functionem V introducantur variabiles. Si igitur fuerit

$$\begin{aligned} dr &= s\,dx + s'\,dy & ds &= t\,dx + t'\,dy \\ dr' &= s'\,dx + s''\,dy & ds' &= t'\,dx + t''\,dy \\ dr'' &= s''\,dx + s'''\,dy & ds'' &= t''\,dx + t'''\,dy \\ dr''' &= s'''\,dx + s^{IV}\,dy & ds''' &= t'''\,dx + t^{IV}\,dy \\ & & ds^{IV} &= t^{IV}\,dx + t^{V}\,dy \end{aligned}$$

liquet quantitates ex differentiatione duplici variabilium r, r etc. ortas, fore t', t'' .... t^{IV}, vnde euidens

dens eſt, quantitates t et t^V, functionem V non ingredi, quamobrem nec dV has quantitates T dt et $T^V dt^V$ inuoluere poterit.

34. Ex his ergo iam conſtat, quo modo ſola conſideratio differentialis dV cognitionem criteriorum integrabilitatis pro formula $V\,dx\,dy$ ſuppeditet, eo nimirum res redit, vt ex forma differentialis dV, de forma differentialis dZ iudicium inſtituatur, quod facili negotio fieri poteſt, modo inquiratur, in eas quantitates, quae ob duplicem differentiationem modo memoratam quantitatum formulam Z ingredientium, in V introducuntur. Sequenti autem tabella harum quantitatum mutuam dependentiam, ob oculos ponere, congruum viſum eſt:

Quantitates functionem Z ingredientes.	Quantitates inde per 1^{mam} differentiationem ortae.	Quantitates per ſecundum differentiationem ortae.
z	p vel p'	q'
p	q $\quad q'$	r'
p'	q' $\quad q''$	r''
q	r $\quad r'$	s'
q'	r' $\quad r''$	s''
q''	r'' $\quad r'''$	s'''
r	s $\quad s'$	t'
r'	s' $\quad s''$	t''
r''	s'' $\quad s'''$	t'''
r'''	s''' $\quad s^{IV}$	t^{IV}
etc.	etc.	etc.

liquet autem imprimis ex quantitatibus tertiae columnae, de correſpondentibus primae iudicium ferendum eſſe. Sic ex: cauſa, ſi in differentiali dV terminus $R''\,dr''$ defuerit, id pro certo indicio erit, in dZ terminum $\pi'\,dp'$ non adeſſe, ſeu eſſe $\pi' = 0$.

35. Si propoſita nunc fuerit formula differentialis duplicata $V\,dx\,dy$, in qua functio V praeter quantitates x et y, quarum differentialia ponuntur conſtantia, duas alias variabiles z et v cum earum differentialibus quibuscunque inuoluat; criteria integrabilitatis iſtiusmodi formulae ex principiis modo expoſitis facile aſſignari poterunt. Poſito enim

$$\begin{array}{ll}
dz = p\,dx + p'\,dy & dv = \mathfrak{p}'\,dx + \mathfrak{p}'\,dy \\
dp = q\,dx + q'\,dy & d\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\,dx + \mathfrak{q}'\,dy \\
dp' = q'\,dx + q''\,dy & d\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}'\,dx + \mathfrak{q}''\,dy \\
dq = r\,dx + r'\,dy & d\mathfrak{q} = \mathfrak{r}\,dx + \mathfrak{r}'\,dy \\
dq' = r'\,dx + r''\,dy & d\mathfrak{q}' = \mathfrak{r}'\,dx + \mathfrak{r}''\,dy \\
dq'' = r''\,dx + r'''\,dy \text{ etc.} & d\mathfrak{q}'' = \mathfrak{r}''\,dx + \mathfrak{r}'''\,dy \text{ etc.}
\end{array}$$

atque

$$\begin{array}{llll}
dV = L\,dx + N\,dz + & P\,dp & + Q\,dq & + \text{etc.} \\
\quad + M\,dy + \mathfrak{N}\,dv + & P'\,dp' & + Q'\,dq' & \\
 & + \mathfrak{P}\,d\mathfrak{p} & + Q''\,dq'' & \\
 & + \mathfrak{P}'\,d\mathfrak{p}' & + \mathfrak{Q}\,d\mathfrak{q} & + \text{etc.} \\
 & & + \mathfrak{Q}'\,d\mathfrak{q}' & \\
 & & + \mathfrak{Q}''\,d\mathfrak{q}'' &
\end{array}$$

aequa-

aequationes inter litteras N, P, P′ etc. et 𝔑, 𝔓, 𝔓′ in subsidium vocata regula §. 18. allata, inuestigandae sunt. Primo scilicet habita quantitate v pro constante, quaerantur criteria integrabilitatis pro formula duplicata $V\,dx\,dy$, tum vero iterum posita z constante similia criteria huius formulae inuestigentur; dein vtramque classem horum criteriorum colligendo, de integrabilitate formulae $V\,dx\,dy$, in qua z et v, simul vt variabiles tractantur, iudicare licebit. Huius vero asserti vlteriorem demonstrationem eo minus e re erit hoc loco adferre, quod ex iis quae supra §. 15 et seqq. pro simili casu formulae differentialis $V\,dx$ docuimus, pateat quomodo ea adornari debeat.

36. In genere igitur, si in formula differentiali duplicata $V\,dx\,dy$, V praeter quantitates x et y, quotcunque alias variabiles z, u, v etc. cum ipsarum differentialibus cuiuscunque ordinis inuoluat, haec regula pro integrabilitate huius formulae examinanda valebit: "Quaerantur valores formulae $V\,dx\,dy$ „qui prodeunt, si in quantitate V praeter x et y, „semper vna reliquarum vt z variabilis statuitur, cae„teris u, v etc. pro constantibus spectatis, et pro„deant hinc formulae $V'dxdy$; $V''dxdy$; $V'''dxdy$, „tum inuestigentur criteria integrabilitatis pro hisce „formulis, atque necessum erit, vt omnibus his „criteriis satisfiat, quo formula $V\,dx\,dy$ positis „omnibus z, u, v etc. simul variabilibus fiat inte„grabilis.„

37. Consideremus iam formulas integrales triplicatas, quae sub hac forma repraesentari possunt $\int\int\int V\, dx\, dy\, dz$. Hic enim posita V functione trium quantitatum x, y, z nec non aliarum quarumcunque variabilium, prima integratio instituatur considerata x vt variabili, y vero et z pro constantibus habitis, deinde secunda integratione quaeratur integrale formulae $dy \int V\, dx$; positis x et z constantibus et denique tertia integratione, inuestigetur integrale formulae $dz \int dy \int V\, dx$, considerando x et y vt constantes. Quaeritur ergo quomodo functio V comparata esse debeat, vt huiusmodi formula triplicata $\int\int\int V\, dx\, dy\, dz$ verum constituat integrale? In genere autem patet integrale hinc oriundum ita esse debere comparatum, vt idem prodeat, quocunque ordine, hae tres quantitates x, y, z variabiles statuantur, adeo vt sit:

$$\int dz \int dy \int V\, dx = \int dz \int dx \int V\, dy = \int dy \int dz \int V\, dx$$
$$= \int dy \int dx \int V\, dz = \int dx \int dy \int V\, dz = \int dx \int dz \int V\, dy.$$

38. Ex huiusmodi formularum integralium triplicatarum numero, consideremus primo casum simplicissimum quo V praeter x, y et z, quarum differentialia constantia supponuntur, inuoluat aliam quandam variabilem v nec non quaecunque ipsius differentialia. Vt vero species huiusmodi differentialium e calculo tollatur, et quum triplex heic sit instituenda integratio, prout tres quantitates x, y, z pro variabilibus habentur, liquet quantitatem v conside-

ſiderandam eſſe, vt functionem trium variabilium, x, y, z adeo vt ſtatuere liceat:

$$dv = p\,dx + p^{I}\,dy + p^{II}\,dz \qquad dq = r\,dx + r^{I}\,dy + r^{II}\,dz$$

tum vero

$$dq^{I} = r^{I}\,dx + r^{III}\,dy + r^{IV}\,dz$$

$$dp = q\,dx + q^{I}\,dy + q^{II}\,dz \qquad dq^{II} = r^{II}\,dx + r^{IV}\,dy + r^{V}\,dz$$

$$dp^{I} = q^{I}\,dx + q^{III}\,dy + q^{IV}\,dz \qquad dq^{III} = r^{III}\,dx + r^{VI}\,dy + r^{VII}\,dz$$

$$dp^{II} = q^{II}\,dx + q^{IV}\,dy + q^{V}\,dz \qquad dq^{IV} = r^{IV}\,dx + r^{VII}\,dy + r^{VIII}\,dz$$

$$dq^{V} = r^{V}\,dx + r^{VIII}\,dy + r^{IX}\,dz.$$

Hinc autem liquet $d\mathrm{V}$ huiusmodi formam habere:

$$\begin{aligned} d\mathrm{V} = +\mathrm{I}\,dx + \mathrm{N}\,dv &+ \mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \text{etc.} \\ +\mathrm{L}\,dy \qquad &+ \mathrm{P}^{I}\,dp^{I} + \mathrm{Q}^{I}\,dq^{I} \\ +\mathrm{M}\,dz \qquad &+ \mathrm{P}^{II}\,dp^{II} + \mathrm{Q}^{II}\,dq^{II} \\ &\qquad + \mathrm{Q}^{III}\,dq^{III} \\ &\qquad + \mathrm{Q}^{IV}\,dq^{IV} \\ &\qquad + \mathrm{Q}^{V}\,dq^{V}. \end{aligned}$$

Si vero ſupponatur eſſe $\mathrm{Z} = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{V}\,dx\,dy\,dz$ ſitque

$$\begin{aligned} d\mathrm{Z} = \iota\,dx + \nu\,dv &+ \pi\,dp + \varkappa\,dq + \text{etc.} \\ +\lambda\,dy \qquad &+ \pi^{I}\,dp^{I} + \varkappa^{I}\,dq^{I} \\ +\mu\,dz \qquad &+ \pi^{II}\,dp^{II} + \varkappa^{II}\,dq^{II} \\ &\qquad + \varkappa^{III}\,dq^{III} \\ &\qquad + \varkappa^{IV}\,dq^{IV} \\ &\qquad + \varkappa^{V}\,dq^{V}. \end{aligned}$$

inuentio criteriorum integrabilitatis formulae $\mathrm{V}\,dx\,dy\,dz$ eo reducitur, vt valores coefficientium

ι; λ; μ; ν etc. ope quantitatum I, L, M, N etc. determinentur.

39. Relationes igitur has inueſtigaturi, ne in nimis prolixos incidamus calculos, ſtatuamus mox ſequentes ipſarum ι, λ, μ etc. valores

$$\iota = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{I}\,dx\,dy\,dz + \alpha; \quad \lambda = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{L}.dx\,dy\,dz + \beta;$$
$$\mu = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{M}\,dx\,dy\,dz + \gamma; \quad \nu = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{N}\,dx\,dy\,dz + \delta;$$
$$\pi = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{P}\,dx\,dy\,dz + \varepsilon; \quad \pi' = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{P}'\,dx\,dy\,dz + \varepsilon';$$
$$\pi'' = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{P}''\,dx\,dy\,dz + \varepsilon''; \quad \varkappa = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{Q}\,dx\,dy\,dz + \zeta;$$
$$\varkappa' = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{Q}'\,dx\,dy\,dz + \zeta' \text{ etc. etc.}$$

Deinde quum ſit $\mathrm{Z} = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{V}\,dx\,dy\,dz$, patet quoque eſſe $d\mathrm{V} = \left(\frac{d^4\,\mathrm{Z}}{dx\,dy\,dz}\right)$. Si proinde valor ſuppoſitus ipſius $d\mathrm{V}$ comparetur cum eo, qui ex differentiatione formulae $d\mathrm{Z}$ oritur, facillimum erit valores litterarum α, β, γ determinare, vnde deinde ι, λ, μ, ν etc. determinabuntur.

40. Habemus vero primo, ſumendo differentiale ipſius $d\mathrm{Z}$ poſita ſola x variabili

$$\begin{aligned}\left(\frac{dd\mathrm{Z}}{dx}\right) = &+ dx\left(\int\!\!\int \mathrm{I}\,dy\,dz + \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\right) + dp\left\{\begin{matrix}\int\!\!\int \mathrm{P}\,dy\,dz + \left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)\\ + \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{N}\,dx\,dy\,dz + \delta\end{matrix}\right\}\\ &+ dy\left(\int\!\!\int \mathrm{L}\,dy\,dz + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)\right)\\ &+ dz\left(\int\!\!\int \mathrm{M}\,dy\,dz + \left(\frac{d\gamma}{dx}\right)\right) + dp'\left(\int\!\!\int \mathrm{P}'\,dy\,dz + \left(\frac{d\varepsilon'}{dx}\right)\right)\\ &+ dv\left(\int\!\!\int \mathrm{N}\,dy\,dz + \left(\frac{d\delta}{dx}\right)\right) + dp''\left(\int\!\!\int \mathrm{P}''\,dy\,dz + \left(\frac{d\varepsilon''}{dx}\right)\right)\end{aligned}$$

+ dq

$$+dq\,(\int\int Q\,dy\,dz+(\tfrac{d\zeta}{dx})+\int\int\int P\,dx\,dy\,dz+\varepsilon)$$
$$+dq'\,(\int\int Q'\,dy\,dz+(\tfrac{d\zeta'}{dx})+\int\int\int P'\,dx\,dy\,dz+\varepsilon')$$
$$+dq''(\int\int Q''\,dy\,dz+(\tfrac{d\zeta''}{dx})+\int\int\int P''\,dx\,dy\,dz+\varepsilon'')$$
$$+dq'''(\int\int Q'''\,dy\,dz+(\tfrac{d\zeta'''}{dx}))$$
$$+dq^{IV}(\int\int Q^{IV}\,dy\,dz+(\tfrac{d\zeta''''}{dx}))$$
$$+dq^{V}(\int\int Q^{V}\,dy\,dz+(\tfrac{d\zeta'''''}{dx}))\ \text{etc.}$$

Vlterius differentiando, habita y tantum pro variabili:

$$\begin{aligned}(\tfrac{d^2 Z}{dx\,dy}) &= dx(\int I\,dz+(\tfrac{dd\alpha}{dx\,dy}))+dp\left\{\begin{array}{l}\int P\,dz+(\tfrac{dd\varepsilon}{dx\,dy})\\ +\int\int N\,dx\,dz+(\tfrac{d\delta}{dy})\end{array}\right\}\\ &+dy(\int L\,dz+(\tfrac{dd\beta}{dx\,dy}))\\ &+dz(\int M\,dz+(\tfrac{dd\gamma}{dx\,dy}))+dp'\left\{\begin{array}{l}\int P'\,dz+(\tfrac{dd\varepsilon'}{dx\,dy})\\ +\int\int N\,dy\,dz+(\tfrac{d\delta}{dx})\end{array}\right\}\\ &+dv(\int N\,dz+(\tfrac{dd\delta}{dx\,dy}))\\ &\qquad +dp''(\int P''\,dz+(\tfrac{dd\varepsilon''}{dx\,dy}))\end{aligned}$$

$$+dq\,(\int Q\,dz+(\tfrac{dd\zeta}{dx\,dy})+\int\int P\,dx\,dz+(\tfrac{d\varepsilon}{dy}))$$
$$+dq'\left\{\begin{array}{l}\int Q'\,dz+(\tfrac{dd\zeta'}{dx\,dy})+\int\int P'\,dx\,dz+(\tfrac{d\varepsilon'}{dy})+\int\int P\,dy\,dx+(\tfrac{d\varepsilon}{dx})\\ \qquad+\int\int\int N\,dx\,dy\,dz+\delta\end{array}\right\}$$
$$+dq''\,(\int Q''\,dz+(\tfrac{dd\zeta''}{dx\,dy})+\int\int P''\,dx\,dz+(\tfrac{d\varepsilon''}{dy}))$$
$$+dq'''\,(\int Q'''\,dz+(\tfrac{dd\zeta'''}{dx\,dy})+\int\int P'\,dy\,dz+(\tfrac{d\varepsilon'}{dx}))$$
$$+dq^{IV}(\int Q^{IV}\,dz+(\tfrac{dd\zeta''''}{dx\,dy})+\int\int P''\,dy\,dz+(\tfrac{d\varepsilon''}{dx}))$$
$$+dq^{V}(\int Q^{V}\,dz+(\tfrac{dd\zeta'''''}{dx\,dy}))\ \text{etc.}$$

Deni-

Denique differentiando posita sola z variabili:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d^4 Z}{dx\,dy\,dz}\right) = {} & dx\left(I + \left(\frac{d^3 \alpha}{dx\,dy\,dz}\right)\right) + dp\left\{\begin{array}{l} P + \left(\frac{d^3 \varepsilon}{dx\,dy\,dz}\right) \\ + \int N\,dx + \left(\frac{d\,d\,\delta}{dy\,dz}\right) \end{array}\right\} \\
& + dy\left(L + \left(\frac{d^3 \beta}{dx\,dy\,dz}\right)\right) \\
& + dz\left(M + \left(\frac{d^3 \gamma}{dx\,dy\,dz}\right)\right) + dp'\left\{\begin{array}{l} P' + \left(\frac{d^3 \varepsilon'}{dx\,dy\,dz}\right) \\ + \int N\,dy + \left(\frac{d\,d\,\delta}{dx\,dz}\right) \end{array}\right\} \\
& + dv\left(N + \left(\frac{d^3 \delta}{dx\,dy\,dz}\right)\right) \\
& + dp''\left\{\begin{array}{l} P'' + \left(\frac{d^3 \varepsilon''}{dx\,dy\,dz}\right) \\ + \int N\,dz + \left(\frac{d\,d\,\delta}{dx\,dy}\right) \end{array}\right\} \\
& + dq\left(Q + \left(\frac{d^3 \zeta}{dx\,dy\,dz}\right) + \int P\,dx + \left(\frac{d\,d\,\varepsilon}{dy\,dz}\right)\right) \\
& + dq'\left\{\begin{array}{l} Q' + \left(\frac{d^3 \zeta'}{dx\,dy\,dz}\right) + \int P'dx + \left(\frac{d\,d\,\varepsilon'}{dy\,dz}\right) + \int P\,dy + \left(\frac{d\,d\,\varepsilon}{dx\,dz}\right) \\ \qquad + \iint N\,dx\,dy + \left(\frac{d\,\delta}{dz}\right) \end{array}\right\} \\
& + dq''\left\{\begin{array}{l} Q'' + \left(\frac{d^3 \zeta''}{dx\,dy\,dz}\right) + \int P''dx + \left(\frac{d\,d\,\varepsilon''}{dy\,dz}\right) + \int P\,dz + \left(\frac{d\,d\,\varepsilon}{dx\,dy}\right) \\ \qquad + \iint N\,dx\,dz + \left(\frac{d\,\delta}{dy}\right) \end{array}\right\} \\
& + dq'''\left(Q''' + \left(\frac{d^3 \zeta'''}{dx\,dy\,dz}\right) + \int P'\,dy + \left(\frac{d\,d\,\varepsilon'}{dx\,dz}\right)\right) \\
& + dq^{IV}\left\{\begin{array}{l} Q^{IV} + \left(\frac{d^3 \zeta''''}{dx\,dy\,dz}\right) + \int P''dy + \left(\frac{d\,d\,\varepsilon''}{dx\,dz}\right) + \int P'dz + \left(\frac{d\,d\,\varepsilon'}{dx\,dy}\right) \\ \qquad + \iint N\,dy\,dz + \left(\frac{d\,\delta}{dx}\right) \end{array}\right\} \\
& + dq^{V}\left(Q^{V} + \left(\frac{d^3 \zeta'''''}{dx\,dy\,dz}\right) + \int P''dz + \left(\frac{d\,d\,\varepsilon''}{dx\,dy}\right)\right) \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

41. Comparando nunc hanc aequationem, cum valore ipsius dV assumto, inueniemus

$$I = I + \left(\frac{d^3 \alpha}{dx\,dy\,dz}\right);\quad L = L + \left(\frac{d^3 \beta}{dx\,dy\,dz}\right);$$

$$M = M + \left(\frac{d^3 \gamma}{dx\,dy\,dz}\right);\quad N = N + \left(\frac{d^3 \delta}{dx\,dy\,dz}\right)$$

vnde sequitur $\left(\frac{d^3 \alpha}{dx\,dy\,dz}\right) = 0$; $\left(\frac{d^3 \beta}{dx\,dy\,dz}\right) = 0$ etc.

hinc

hinc vero deducitur

$$\alpha = \Delta(x, y) + \Phi(x, z) + \Psi(y, z),$$

vbi $\Delta(x, y)$ significat functionem quamcunque ipsarum x et y; $\Phi(x, z)$ ipsarum x et z, atque $\Psi(y, z)$ ipsarum y et z. Quum autem per ipsam integrationem huiusmodi functiones arbitrariae iam indroductae intelligantur, ita vt $\int\int\int I\,dx\,dy\,dz$ easdem iam inuoluat, tuto statuere licet $\alpha = 0$, simili vero ratione erunt $\beta = 0$; $\gamma = 0$ et $\delta = 0$, adeo vt habeatur

$$\iota = \int\int\int I\,dx\,dy\,dz; \quad \lambda = \int\int\int L\,dx\,dy\,dz$$

$$\mu = \int\int\int M\,dx\,dy\,dz; \quad \nu = \int\int\int N\,dx\,dy\,dz.$$

42. Deinde aequando inter se coefficientes ipsarum dp, dp', dp'' obtinebimus sequentes aequationes:

$$0 = \left(\frac{d^3\,\varepsilon}{dx\,dy\,dz}\right) + \int N\,dx; \quad 0 = \left(\frac{d^3\,\varepsilon'}{dx\,dy\,dz}\right) + \int N\,dy;$$

$$0 = \left(\frac{d^3\,\varepsilon''}{dx\,dy\,dz}\right) + \int N\,dz;$$

ex quibus oritur:

$$\varepsilon = -\int dx \int\int\int N\,dx\,dy\,dz = -\int \nu\,dx;$$

$$\varepsilon' = -\int \nu\,dy; \quad \varepsilon'' = -\int \nu\,dz$$

proinde habebimus

$$\pi = \int\int\int P\,dx\,dy\,dz - \int \nu\,dx; \quad \pi' = \int\int\int P'\,dx\,dy\,dz - \int \nu\,dy;$$

$$\pi'' = \int\int\int P''\,dx\,dy\,dz - \int \nu\,dz.$$

Comparatis denique inter se terminis, qui per dq, dq' etc. afficiuntur et loco $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ valoribus ipsorum introductis fiet:

$$0=\left(\frac{d^3\zeta}{dx\,dy\,dz}\right)+\int P\,dx-\int dx\int N\,dx$$

$$0=\left(\frac{d^3\zeta'}{dx\,dy\,dz}\right)+\int P'\,dx+\int P\,dy-\int dx\int N\,dy-\int dx\int N\,dy$$
$$+\int\int N\,dx\,dy$$

$$0=\left(\frac{d^3\zeta''}{dx\,dy\,dz}\right)+\int P''\,dx+\int P\,dz-\int dx\int N\,dz-\int dx\int N\,dz$$
$$+\int\int N\,dx\,dz$$

$$0=\left(\frac{d^3\zeta'''}{dx\,dy\,dz}\right)+\int P'\,dy-\int dy\int N\,dy$$

$$0=\left(\frac{d^3\zeta''''}{dx\,dy\,dz}\right)+\int P''\,dy+\int P'\,dz-\int dy\int N\,dz-\int dy\int N\,dz$$
$$+\int\int N\,dy\,dz$$

$$0=\left(\frac{d^3\zeta'''''}{dx\,dy\,dz}\right)+\int P''\,dz-\int dz\int N\,dz.$$

Vnde sequentes consequimur valores:

$$\zeta=-\int\pi\,dx;\quad \zeta'=-\int\pi\,dy-\int\pi'\,dx-\int\int\nu\,dx\,dy$$
$$\zeta''=-\int\pi\,dz-\int\pi''\,dx-\int\nu\,dx\,dz;\quad \zeta'''=-\int\pi'\,dy$$
$$\zeta^{IV}=-\int\pi'\,dx-\int\pi''\,dy-\int\nu\,dy\,dz;\quad \zeta^{V}=-\int\pi''\,dz$$

ex quibus colligitur:

$$\varkappa=\int\int\int Q\,dx\,dy\,dz-\int\pi\,dx;$$
$$\varkappa'=\int\int\int Q'\,dx\,dy\,dz-\int\pi\,dy-\int\pi\,dx-\int\int\nu\,dx\,dy$$
$$\varkappa''=\int\int\int Q''\,dx\,dy\,dz-\int\pi\,dz-\int\pi''dx-\int\int\nu\,dx\,dz$$
$$\varkappa'''=\int\int\int Q'''\,dx\,dy\,dz-\int\pi'dy$$
$$\varkappa^{IV}=\int\int\int Q^{IV}\,dx\,dy\,dz-\int\pi'\,dz-\int\pi''\,dy-\int\int\nu\,dy\,dz$$
$$\varkappa^{V}=\int\int\int Q^{V}\,dx\,dy\,dz-\int\pi''\,dz.$$

43. Inuentis hac ratione valoribus litterarum $\varkappa$, λ, μ, ν, π, π' etc., ii, qui pro formula differentiali triplicata $V\,dx\,dy\,dz$ in nihilum abeunt, criteria suppeditabunt, ex quibus de integrabilitate huiusmodi formulae

formulae iudicium inſtitui debet. Vt vero euidentius pateat, quaenam aequationes ex euolutione valorum ipſarum ν, π, π', π'', $\varkappa$, $\varkappa'$ etc. oriantur; ſequentes aequalitates annotaſſe vtile erit:

$$\text{I. } \left(\frac{d^3\nu}{dx\,dy\,dz}\right) = \mathrm{N};$$

$$\text{II. } \left(\frac{d^4\pi}{dx^2\,dy\,dz}\right) = \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right) - \mathrm{N};$$

$$\text{III. } \left(\frac{d^4\pi'}{dx\,dy^2\,dz}\right) = \left(\frac{d\mathrm{P}'}{dy}\right) - \mathrm{N};$$

$$\text{IV. } \left(\frac{d^4\pi''}{dx\,dy\,dz^2}\right) = \left(\frac{d\mathrm{P}''}{dz}\right) - \mathrm{N};$$

$$\text{V. } \left(\frac{d^5\varkappa}{dx^3\,dy\,dz}\right) = \left(\frac{dd\mathrm{Q}}{dx^2}\right) - \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right) + \mathrm{N}$$

$$\text{VI. } \left(\frac{d^5\varkappa'}{dx^2\,dy^2\,dz}\right) = \left(\frac{dd\mathrm{Q}'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right) + \mathrm{N}; \\ - \left(\frac{d\mathrm{P}'}{dy}\right)$$

$$\text{VII. } \left(\frac{d^5\varkappa''}{dx^2\,dy\,dz^2}\right) = \left(\frac{dd\mathrm{Q}''}{dx\,dz}\right) - \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right) + \mathrm{N} \\ - \left(\frac{d\mathrm{P}''}{dz}\right)$$

$$\text{VIII. } \left(\frac{d^5\varkappa'''}{dx\,dy^3\,dz}\right) = \left(\frac{dd\mathrm{Q}'''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d\mathrm{P}'}{dy}\right) + \mathrm{N}$$

$$\text{IX. } \left(\frac{d^5 \varkappa^{IV}}{dx\,dy^2\,dz^2}\right) = \left(\frac{dd\,Q^{IV}}{dy\,dz}\right) - \left(\frac{dP'}{dy}\right) + N - \left(\frac{dP''}{dz}\right)$$

$$\text{X. } \left(\frac{d^5 \varkappa^{V}}{dx\,dy\,dz^3}\right) = \left(\frac{dd\,Q^{V}}{dz^2}\right) - \left(\frac{dP''}{dz}\right) + N$$

$$\text{XI. } \left(\frac{d^6 \varrho}{dx^4\,dy\,dz}\right) = \left(\frac{d^3 R}{dx^3}\right) - \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N$$

$$\text{XII. } \left(\frac{d^6 \varrho'}{dx^3\,dy^2\,dz}\right) = \left(\frac{d^3 R'}{dx^2\,dy}\right) - \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N - \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right)$$

$$\text{XIII. } \left(\frac{d^6 \varrho''}{dx^3\,dy\,dz^2}\right) = \left(\frac{d^3 R''}{dx^2\,dz}\right) - \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N - \left(\frac{ddQ''}{dx\,dz}\right) + \left(\frac{dP''}{dz}\right)$$

$$\text{XIV. } \left(\frac{d^6 \varrho'''}{dx^2\,dy^3\,dz}\right) = \left(\frac{d^3 R'''}{dx\,dy^2}\right) - \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N - \left(\frac{ddQ'''}{dy^2}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right)$$

$$\text{XV. } \left(\frac{d^6 \varrho^{IV}}{dx^2\,dy^2\,dz^2}\right) = \left(\frac{d^3 R^{IV}}{dx\,dy\,dz}\right) - \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N - \left(\frac{ddQ''}{dx\,dz}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) - \left(\frac{ddQ^{IV}}{dy\,dz}\right) + \left(\frac{dP''}{dz}\right)$$

XVI.

$$\text{XVI.}\ \left(\frac{d^6 \varrho^{V}}{dx^2\, dy\, dz^3}\right) = \left(\frac{d^3 R^{V}}{dx\, dz^2}\right) - \left(\frac{ddQ''}{dx\, dz}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right) - N$$
$$- \left(\frac{ddQ^{V}}{dz^2}\right) + \left(\frac{dP''}{dz}\right)$$

$$\text{XVII.}\ \left(\frac{d^6 \varrho^{VI}}{dx\, dy^4\, dz}\right) = \left(\frac{d^3 R^{VI}}{dy^3}\right) - \left(\frac{ddQ'''}{dy^2}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) - N$$

$$\text{XVIII.}\ \left(\frac{d^6 \varrho^{VII}}{dx\, dy^3\, dz^2}\right) = \left(\frac{d^3 R^{VII}}{dy^2\, dz}\right) - \left(\frac{ddQ'''}{dy^2}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) - N$$
$$- \left(\frac{ddQ^{IV}}{dy\, dz}\right) + \left(\frac{dP''}{dz}\right)$$

$$\text{XIX.}\ \left(\frac{d^6 \varrho^{VIII}}{dx\, dy^2\, dz^3}\right) = \left(\frac{d^3 R^{VIII}}{dy\, dz^2}\right) - \left(\frac{ddQ^{IV}}{dy\, dz}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) - N$$
$$- \left(\frac{ddQ^{V}}{dz^2}\right) + \left(\frac{dP''}{dz}\right)$$

$$\text{XX.}\ \left(\frac{d^6 \varrho^{IX}}{dx\, dy\, dz^4}\right) = \left(\frac{d^3 R^{IX}}{dz^3}\right) - \left(\frac{ddQ^{V}}{dz^2}\right) + \left(\frac{dP''}{dz}\right) - N.$$

etc. etc.

44. Si igitur formula $V\,dx\,dy\,dz$ ita ſit comparata, vt eius integrale triplicatum Z non inuoluat, niſi quantitates finitas x, y, z et v ſeu ſi fuerit:

$$dZ = \iota\, dx + \lambda\, dy + \mu\, dz + \nu\, dv$$

criteria integrabilitatis formulis § antecedentis a II ad XX nihilo aequatis continebuntur, nam pro hoc caſu liquet omnes π, $\varkappa$ et ϱ euaneſcere. Vt vero

 haec

haec criteria ſimul obtutui repraeſentari queant, ſequentes transformationes omnino dignae ſunt, quae ſedulo notentur. Aequationes a IIda ad IVtam in vnam colligantur ſummam vt prodeat

$$\begin{aligned} 3N - 2\left(\frac{dP}{dx}\right) &= 0 \\ - 2\left(\frac{dP'}{dy}\right) & \\ - 2\left(\frac{dP''}{dz}\right). & \end{aligned}$$

Deinde ſex inſequentes formulae a valoribus $\varkappa$ ortae, hanc praebebunt ſummam

$$\begin{aligned} 6N - 3\left(\frac{dP}{dx}\right) &+ \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) = 0 \\ - 3\left(\frac{dP'}{dy}\right) &+ \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) \\ - 3\left(\frac{dP''}{dz}\right) & \quad \vdots \\ &+ \left(\frac{ddQ'''''}{dz^2}\right). \end{aligned}$$

Denique decem vltimae ex valoribus ϱ ortae hanc:

$$10N - 6\left\{\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{dP''}{dz}\right)\right\} + 3\left\{\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + \ldots + \left(\frac{ddQ^{V}}{dz^2}\right)\right\}$$
$$- \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) - \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) \ldots - \left(\frac{d^3R^{IX}}{dz^3}\right) = 0.$$

Additis ambabus vltimis et media bis ſumta ex ſumma earum ſubtracta obtinebimus:

N —

$$\begin{array}{llll}
N - \left(\frac{dP}{dx}\right) & + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) & - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) & = 0 \\
- \left(\frac{dP'}{dy}\right) & + \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) & - \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) & \\
- \left(\frac{dP''}{dz}\right) & + \left(\frac{ddQ''}{dx\,dz}\right) & - \left(\frac{d^3R''}{dx^2dz}\right) & \\
 & \vdots & \vdots & \\
 & + \left(\frac{ddQ^{V}}{dz^2}\right) & \vdots & \\
 & & - \left(\frac{d^3R^{IX}}{dz^3}\right). &
\end{array}$$

Pro qua aequatione obſeruetur omnia membra in iisdem lineis horizontalibus diſpoſita euaneſcere, deinde ſi ſcribendi ratio inuertatur adeo vt omnia membra pro ratione ipſius z ordinentur, hoc eſt ſi habeatur:

$$\begin{array}{llll}
N - \left(\frac{dP''}{dz}\right) & + \left(\frac{ddQ^{V}}{dz}\right) & - \left(\frac{d^3R^{IX}}{dz^3}\right) & = 0 \\
- \left(\frac{dP'}{dy}\right) & + \left(\frac{ddQ^{IV}}{dy\,dz}\right) & - \left(\frac{d^3R^{VIII}}{dy\,dz^2}\right) & \\
- \left(\frac{dP}{dx}\right) & + \left(\frac{ddQ''}{dx\,dz}\right) & - \left(\frac{d^3R^{V}}{dx\,dz^2}\right) & \\
 & \vdots & \vdots & \\
 & + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) & - \left(\frac{d^3R''}{dx^2dz}\right) & \\
 & & \vdots & \\
 & & - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) &
\end{array}$$

adhuc

adhuc omnia membra in iisdem lineis horizontalibus collocata nihilo aequabuntur, vnde iam habemus 19 aequationes particulares pro criteriis formulae noſtrae differentialis: $V\,dx\,dy\,dz$.

45. Vt vero ſtatim ex ſola conſideratione differentialis dV pateat, quaenam litterarum π, π' etc. $\varkappa$, $\varkappa'$ euaneſcere debeant, obſeruaſſe iuuabit, quaenam quantitates per triplicem differentiationem ex ſingulis v, p, p' etc. prodeant, quas ſequenti tabella repraeſentamus:

Quantitas formulam Z ingrediens	Quantitates per differentiationem ortae Per I^{mam}	II^{dam}	III^{iam}
v	$p;\ p';\ p''$	$q';\ q'';\ q^{\mathrm{IV}}$	r^{IV}
p	$q;\ q';\ q''$	$r';\ r'';\ r^{\mathrm{IV}}$	s^{IV}
p'	$q';\ q''';\ q^{\mathrm{IV}}$	$r''';\ r^{\mathrm{IV}};\ r^{\mathrm{VII}}$	s^{VII}
p''	$q'';\ q^{\mathrm{IV}};\ q^{\mathrm{V}}$	$r^{\mathrm{IV}};\ r^{\mathrm{V}};\ r^{\mathrm{VIII}}$	s^{VIII}
q	etc.	etc.	t^{IV}
q'			t^{VII}
q''			t^{VIII}
q'''			t^{XI}
q^{IV}			t^{XII}
q^{V}			t^{XIII}

Pro exemplo igitur a nobis allegato, quo

$$dZ = \iota\,dx + \lambda\,dy + \mu\,dz + \nu\,dv$$

omnes litterae quae ex p, p' etc. poſt triplicem differentiationem deriuantur, euaneſcent ideoque forma differentialis dV ita ſe habebit:

dV

$$
\begin{aligned}
dV = \mathrm{I}\,dx + \mathrm{N}\,dv &+ \mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}'\,dq' + \mathrm{R}^{\mathrm{IV}}\,dr^{\mathrm{IV}} \\
+ \mathrm{L}\,dy \qquad &+ \mathrm{P}'\,dp' + \mathrm{Q}''\,dq'' \\
+ \mathrm{M}\,dz \qquad &+ \mathrm{P}''\,dp'' + \mathrm{Q}^{\mathrm{IV}}\,dq^{\mathrm{IV}}
\end{aligned}
$$

adeoque ſi in differentiali dV praeter hos terminos adhuc reperiretur ex. gr. $\mathrm{R}^{\mathrm{V}}dr^{\mathrm{V}}$, certo ſtatuere licet formulam $V\,dx\,dy\,dz$ nequaquam fore integrabilem.

46. Si propoſita fuerit formula differentialis triplicata $V\,dx\,dy\,dz$ in qua V praeter tres variabiles x, y et z, quarum differentialia ſupponuntur conſtantia, adhuc binas alias v et u, quae vt functiones praecedentium tractari poterunt, inuoluat; criteria integrabilitatis pro eiusmodi formula ſequenti modo inueſtiganda erunt. Primum in functione V ſtatuatur u conſtans et quaerantur conditiones ſub quibus formula $V\,dx\,dy\,dz$ hac facta ſuppoſitione fiat integrabilis, deinde ſtatuatur v conſtans et disquiratur quinam ea conſtituta hypotheſi ſint characteres integrabilitatis formulae $V\,dx\,dy\,dz$, haec criteria collectim ſumta, characterem integrabilitatis formulae propoſitae abſoluent. Similis praeſcribenda erit regula, ſi quantitas V adhuc plures variabiles v, u, w etc. cum earum differentialibus quibuscunque inuolueret, nam disquirendum eſt, an formula $V\,dx\,dy\,dz$ omni caſu integrationem admittat, quo vnica harum v, u, w etc. pro variabili habetur, reliquis pro conſtantibus ſpectatis.

48. Denique etiam perſpicuum eſt, quomodo Methodus iam praeſcripta adplicari debeat, ad inuenienda criteria integrabilitatis pro formulis differentialibus quadruplicatis, vel adhuc complicatioribus, et praeter calculi moleſtias atque prolixitatem, nihil amplius hoc in negotio ſupereſſe videtur, quod aliquam difficultatem obiicere poſſet.

DE CVRVA RECTIFICABILI IN SVPERFICIE SPHAERICA.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Occaſione magni illius problematis Florentini, quo praeterito iam ſeculo poſtulabantur in ſuperficie ſphaerica portiones quadrabiles, iam tum problema fuit agitatum, vt in ſuperficie ſphaerica lineae ducerentur rectificabiles. Quamuis autem Geometrae plurimum ſtudii ad hoc problema ſoluendum contulerint; tamen plus vna huiusmodi linea inuenire non potuerunt. Quae circumſtantia nunc imprimis maxime videtur memorabilis, quandoquidem haec quaeſtio ad analyſin infinitorum indeterminatam eſt referenda, vbi plerumque infinita ſolutionum multitudo locum habere ſolet; quamobrem haec vnica ſolutio quam quidem adhuc elicere licuit maxime digna videtur, vt eius indolem accuratius inueſtigemus; vtrum fortaſſe inde plures ſolutiones deduci queant, an vero ratio quaepiam perſpiciatur ob quam eam ſolutionem vnice locum habere intelligere poſſimus? In hoc quidem Analyſeos genere quod etiamnunc parum eſt excultum, plurima obſeruantur

tur phaenomena, quae nullo modo ad certas rationes reuocare licet, cuiusmodi ſunt haec duo Theoremata, iam pridem a me obſeruata, quae tamen neutiquam omni rigore demonſtrare valeo, alterum: *praeter circulum nulla datur linea algebraica cuius portioni cuicunque, arcus circuli aequalis aſſignari poſſet*, alterum: *nulla plane datur curua algebraica cuius arcus quicunque per logarithmum exprimi poſſit.* Hic ſcilicet non de eiusmodi curuis loquor quarum rectificatio vel ab arcubus circularibus vel a logarithmis pendet, cuiusmodi ſine dubio infinita datur multitudo, ſed de talibus quarum arcus quicunque praeciſe aequalis ſit vel arcui cuidam circulari vel cuipiam logarithmo, nulla ſcilicet vel addita vel ſubtracta quantitate geometrica.

Tab. I. Fig. 1. II. Lineae igitur in ſuperficie ſphaerica quaeſitae, ſit punctum quodcunque Z, determinandum ternis coordinatis $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ vbi ſi punctum C in centro ſphaerae capiatur, radiusque ponatur $= 1$, habebitur haec aequatio:

$$xx + yy + zz = 1,$$

deinde quia elementum huius lineae Zz hac formula exprimitur:

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

neceſſe eſt vt eius integrale euadat quantitas algebraica.

III. Quum ex priore aequatione ſit:

$$z = \sqrt{(1 - xx - yy)} \text{ erit } dz = -\frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{(1 - xx - yy)}}$$

ex

ex quo elementum curuae colligitur

$$Zz = \sqrt{\left(dx^2+dy^2+\frac{(xdx+ydy)^2}{1-xx-yy}\right)} = \sqrt{\frac{dx^2(1-yy)+2xydxdy+dy^2(1-xx)}{1-xx-yy}}$$

siue etiam

$$Zz = \sqrt{\frac{dx^2+dy^2-(ydx-xdy)^2}{1-xx-yy}},$$

tota igitur quaestio iam huc redit, cuiusmodi relatio inter binas variabiles x et y intercedere, vel qualis functio altera alterius esse debeat; vt haec formula fiat integrabilis?

IV. Ante omnia hanc expressionem ad simpliciorem formam reduci oportet; quem in finem statuamus:

$$y = u\sqrt{(1-xx)}$$

vt sit

$$1-xx-yy = (1-xx)(1-uu),$$

tum ob

$$dy = \frac{du(1-xx)-xudx}{\sqrt{(1-xx)}} = du\sqrt{(1-xx)} - \frac{uxdx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

erit

$$ydx - xdy = \frac{udx}{\sqrt{(1-xx)}} - xdu\sqrt{(1-xx)}$$

vnde numerator noster fiet:

$$dx^2(1-uu) + du^2(1-xx)^2$$

ex quo formula nostra pro elemento Zz colligitur

$$\sqrt{\frac{(dx^2(1-uu)+du^2(1-xx)^2}{\sqrt{(1-xx)(1-uu)}}} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{1-xx}+\frac{du^2(1-xx)}{1-uu}\right)}$$

vbi quaestio iterum in inuentione relationis inter x et u versatur, vt huius formulae integrale exhiberi possit.

V. Si velimus angulos introducere haec formula adhuc concinnior reddi poteſt, ponendo enim $x = \operatorname{cof.} \theta$ et $u = \operatorname{fin.} \Phi$, vt fiat $y = \operatorname{fin.} \Phi . \operatorname{fin.} \theta$ et $z = \operatorname{cof.} \Phi . \operatorname{fin.} \theta$, formula noſtra integranda prodit $\sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2 \operatorname{fin.} \theta^2)}$. Hic autem iam probe obſeruari oportet, litteras θ et Φ denotare angulos ideoque ipſas algebraicas non eſſe, ſed per arcus circulares exprimi debere, quorum autem ſinus vel coſinus algebraice exprimantur deinde vero quia formula $\sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2 \operatorname{fin.} \theta^2)}$ integrabilis eſſe debet, neceſſe eſt vt eius integrale non arcui circulari ſed ſinui, coſinuiue, ſiue formae ex ſinibus et coſinibus vtcunque complexae aequetur.

VI. Quoniam nulla adhuc certa conſtat Methodus huiusmodi formulas tractandi alia via non relinquitur, niſi vt rem tentando et quaſi diuinando adgrediamur. Fingamus ergo primo integrale quaeſitum eſſe $= \alpha \operatorname{fin.} \theta$, eritque

$$\sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2 \operatorname{fin.} \theta^2)} = \alpha d\theta \operatorname{cof.} \theta \text{ vnde fit}$$

$$d\Phi = \frac{d\theta \sqrt{(\alpha^2 \operatorname{cof.} \theta^2 - 1)}}{\operatorname{fin.} \theta};$$

quare huius formulae integrale arcum circularem exprimere debet, quum igitur ſit

$$\sqrt{(\alpha\alpha \operatorname{cof.} \theta^2 - 1)} = \sqrt{((\alpha\alpha - 1) - \alpha\alpha \operatorname{fin.} \theta^2)}$$

habebimus

$$d\Phi = \frac{d\theta}{\operatorname{fin.} \theta} \sqrt{(\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha \operatorname{fin.} \theta^2)},$$

ſiue in membra partiendo

$$d\Phi = \frac{d\theta(\alpha\alpha - 1)}{\operatorname{fin.} \theta \sqrt{(\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha \operatorname{fin.} \theta^2)}} - \frac{\alpha\alpha d\theta \operatorname{fin.} \theta}{\sqrt{(\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha \operatorname{fin.} \theta^2)}}$$

quo

quo facilius pateat indoles posterioris membri, ponamus cos. $\theta = v$, ac ob $-d\theta$ sin. $\theta = dv$ posterius membrum fiet $\frac{\alpha\alpha dv}{\surd(\alpha\alpha vv - 1)}$ cuius autem integrale non per arcum circulorem sed per logarithmum exhibetur, quocirca hoc primum tentamen non succedit.

VII. Tentemus ergo hanc positionem

$\int \surd(d\theta^2 + d\Phi^2 \text{ sin. } \theta^2) = \alpha \text{ cos. } \theta$ siue differentiando

$-\alpha d\theta \text{ sin. } \theta = \surd(d\theta^2 + d\Phi^2 \text{ sin. } \theta^2)$, vnde colligimus $d\Phi = \frac{d\theta \surd(\alpha\alpha \text{ sin. } \theta^2 - 1)}{\text{sin. } \theta}$, quae simili modo in duo membra distributa praebet

$$d\Phi + \frac{\alpha\alpha d\theta \text{ sin. } \theta}{\surd(\alpha\alpha \text{ sin. } \theta^2 - 1)} = \frac{-d\theta}{\text{sin. } \theta \surd(\alpha\alpha \text{ sin. } \theta^2 - 1)},$$

vbi prius membrum posito cos. $\theta = v$, ob $d\theta$ sin. $\theta = dv$ induit hanc formam $\frac{-\alpha\alpha dv}{\surd(\alpha\alpha - 1) - \alpha\alpha vv}$ cuius integrale manifesto est α Ang. cos. $\frac{\alpha v}{\surd(\alpha\alpha - 1)}$, cuius sinum cosinumue dare licet, quoties α est numerus rationalis. Nunc igitur superest, vt etiam alterum membrum $\frac{-d\theta}{\text{sin. } \theta \surd(\alpha\alpha \text{ sin. } \theta^2 - 1)}$ per integrationem ad arcum circularem perducatur, facile autem intelligitur formam huius integralis fore: β Ang. cuius sin. $\frac{\gamma \text{ cos. } \theta}{\text{sin. } \theta}$ quae formula differentiata praebet $\frac{-\beta\gamma d\theta}{\text{sin. } \theta \surd(\text{sin. } \theta^2 - \gamma\gamma \text{ cos. } \theta^2)}$, quae vt aequalis fiat nostro secundo membro capi debet $\beta = 1$ et $\frac{1 + \gamma\gamma}{\gamma\gamma} = \alpha\alpha$, siue $\gamma = \frac{1}{\surd(\alpha\alpha - 1)}$ sicque integrale posterioris membri erit Ang. cuius sin. $\left(\frac{\text{cos. } \theta}{\text{sin. } \theta \surd(\alpha\alpha - 1)}\right)$, quo circa nostrum integrale totum seu valor anguli Φ ita exprimitur, vt sit

$$\Phi = \alpha \text{ Ang. cuius cos. } \left(\frac{\alpha \text{ cos. } \theta}{\surd \alpha\alpha - 1}\right) + \text{Ang. cuius sin. } \frac{\text{cos. } \theta}{\text{sin. } \theta \surd(\alpha\alpha - 1)}.$$

VIII.

VIII. Hanc formulam commodiorem reddemus constantem α ita immutando, vt sit $\alpha = \sec.\,\varepsilon = \frac{1}{\cos.\,\varepsilon}$, tum enim adipiscemur:

$$\Phi = \frac{1}{\cos.\,\varepsilon}.\ \text{Ang. cui. cos.}\left(\frac{\cos.\,\theta}{\sin.\,\varepsilon}\right) + \text{Ang. cui. sin.}\left(\frac{\cos.\,\theta\,\cos.\,\varepsilon}{\sin.\,\theta\,\sin.\,\varepsilon}\right) + C,$$

siue loco ε scribendo $90° - \varepsilon$

$$\Phi = \frac{1}{\sin.\,\varepsilon}.\ \text{Ang. cui. cos.}\left(\frac{\cos.\,\theta}{\cos.\,\varepsilon}\right) + \text{Ang. cui. sin.}\left(\frac{\text{Tang.}\,\varepsilon}{\text{Tang.}\,\theta}\right) + C.$$

Hic autem probe notandum est, nisi sin. ε fuerit fractio rationalis, hanc solutionem pro congrua haberi non posse propterea quod geometrice angulum assignare non licet, qui foret ad Ang. cuius cos. $\left(\frac{\cos.\,\theta}{\cos.\,\varepsilon}\right)$ in ratione $1 : \sin.\,\varepsilon$. Hinc ergo videri posset pro angulo ε alios angulos praeter $90°$ et $30°$ assumi non posse, sed quia ipse angulus ε hic non in computum venit, pro lubitu loco sin. ε fractionem quamcunque rationalem vnitate minorem assumere licet, vbi quidem casus excludi debere euidens est quibus foret vel $\sin.\,\varepsilon = 0$ vel $\sin.\,\varepsilon = 1$. At vero vt ambo anguli fiant reales, necesse est vt Ang. θ semper sit maior quam ε, vel saltem nusquam minor euadat.

IX. Vt huius integrationis exemplum speciale euoluamus, ponamus $\sin.\,\varepsilon = \frac{1}{2}$, vt fiat $\cos.\,\varepsilon = \frac{\surd 3}{2}$ tum erit pars prior $= 2$ Arc. cuius cos. $\frac{2\cos.\,\theta}{\surd 3}$ $=$ Arc. cuius sin. $\frac{4\cos.\,\theta\,\surd(4\sin.\,\theta^2 - 1)}{3}$ et pars posterior $=$ Arc. cuius sin. $\frac{1}{\text{Tang.}\,\theta.\,\surd 3} =$ Arc. cuius sin. $\frac{\cos.\,\theta}{\sin.\,\theta.\,\surd 3}$ quibus ambobus angulis coniunctis colligemus

$\Phi =$

$\Phi =$ Arcus cuius fin. $\left(\frac{9\ cof.\ \theta - 8\ cof.\ \theta^3}{3.\ fin.\ \theta.\ \surd 3}\right)$ ita vt fit

fin. $\Phi = \frac{cof.\ \theta (9 - 8\ cof.\ \theta^2)}{3\ fin.\ \theta \surd 3}$ fiue

cof. $\Phi = \frac{(4\ fin.\ \theta^2 - 1) \surd (4\ fin.\ \theta^2 - 1)}{3\ fin.\ \theta \surd 3}$

quare angulo hoc Φ ita definito, habebimus hanc integrationem:

$\int \surd (d\theta^2 + d\Phi^2.\ \text{fin.}\ \theta^2) = 2\ \text{cof.}\ \theta$, vnde fit

$d\Phi = \frac{-d\theta \surd (4\ fin.\ \theta^2 - 1)}{fin.\ \theta}$

cuius ergo integrale viffim eft, ille ipfe angulus Φ, quem modo defcripfimus. Quaeftio ergo eft quomodo per certam quandam Methodum directam ad hanc folutionem peruenire licuiffet.

X. Non parum autem hoc argumentum dilucidatum iri videtur, fi folutionem ex principiis Trigonometriae Sphaericae repetere conemur, quandoquidem plures infignes proprietates inde cognofcere poterimus. Sit igitur in fuperficie fphaerae cuius radium ponimus $= 1$, curua B M m linea illa rectificabilis quam quaerimus, ac fumto quodam puncto fixo A tamquam Polo ductisque meridianis A M et A m vocemus angulum B A M $= \Phi$ et arcum A M $= \theta$, erit angulus elementaris M A $m = d\Phi$ et ducta ad A m normaliter lineola M n erit M $n = d\Phi.\ \text{fin.}\ \theta$ et $m\,n = d\theta$, vnde elementum curuae colligitur, vt fupra iam habuimus M $m = \surd (d\theta^2 + d\Phi^2.\ \text{fin.}\ \theta^2)$ quod ergo integrabile effe oportet. Tab. I. Fig. 2.

XI. Quoniam autem hoc certa Methodo praestare non licet, inuestigemus nonnullas proprietates quas nobis natura sphaerae suppeditabit. Contemplemur igitur imprimis arcus circulorum maximorum qui in singulis curuae nostrae punctis sint normales cuiusmodi sunt arcus M O et m O, atque statim liquet fore angulum A M O $= n$ M m, vnde si ponamus angulum A M O $= \psi$, habebimus

$$\text{sin.}\,\psi = \frac{d\,\theta}{\sqrt{(d\,\theta^2 + d\,\Phi^2\,\text{sin.}\,\theta^2)}}\,;\ \text{cos.}\,\psi = \frac{d\,\Phi.\,\text{sin.}\,\theta}{\sqrt{(d\,\theta^2 + d\,\Phi^2\,\text{sin.}\,\theta^2)}}$$

ideoque $\text{Tang.}\,\psi = \frac{d\,\theta}{d\,\Phi.\,\text{sin}\,\theta}$.

XII. Quodsi ergo ex A in arcum M O demittamus perpendiculum AP, ex triangulo rectangulo A P M reperiemus:

$$\text{sin.}\,\text{AP} = \text{sin.}\,\theta.\,\text{sin.}\,\psi = \frac{d\,\theta\,\text{sin.}\,\theta}{\sqrt{(d\,\theta^2 + d\,\Phi^2.\,\text{sin.}\,\theta^2)}}$$ tum vero

$$\text{Tang.}\,\text{MP} = \text{Tang.}\,\theta\,\text{cos.}\,\psi = \frac{d\,\Phi.\,\text{sin.}\,\theta^2}{\text{cos.}\,\theta\,\sqrt{(d\,\theta^2 + d\,\Phi^2.\,\text{sin.}\,\theta^2)}},$$

ac praeterea

$$\text{Tang.}\,\text{MAP}.\,\text{Tang.}\,\psi = \frac{1}{\text{cos.}\,\theta},\ \text{seu Tang.}\,\text{MAP} = \frac{d\,\Phi\,\text{sin.}\,\theta}{d\,\theta.\,\text{cos.}\,\theta}.$$

XIII. Concurrant hi bini arcus in nostram curuam normales in puncto O eritque hoc punctum O, polus circuli minoris curuam nostram per elementum Mm osculantis, ita vt sin. O M recte pro radio osculi nostrae curuae haberi possit. Quo nunc istud punctum O inuestigemus ducamus arcum A O et consideremus bina triangula sphaerica A M O et AmO, quae non solum latus A O habebunt commune sed etiam in vtroque latera M O et m O sunt aequalia,

qualia, quare ſi ponamus arcum $MO = mO = r$, quoniam in triangulo AMO ex lateribus $AM = \theta$ et $MO = r$ cum angulo intercepto $AMO = \psi$ colligitur:

$$\operatorname{cof.} AO = \operatorname{cof.} \theta \operatorname{cof.} r + \operatorname{fin.} \theta \operatorname{fin.} r \operatorname{cof.} \psi$$

manifeſtum eſt ſi arcus θ ſuo differentiali $d\theta$ et angulus ψ ſuo differentiali $d\psi$ augeatur, valorem huius formulae eundem manere debere, hoc eſt eius differentiale, ſumtis tantum θ et ψ variabilibus nihilo aequari debere. Hoc autem facto nanciſcimur

$$-d\theta.\operatorname{fin.}\theta \operatorname{cof.} r + d.(\operatorname{fin.}\theta \operatorname{cof.}\psi)\operatorname{fin.} r = 0$$ vnde fit

$$\operatorname{Tang.} r = \frac{d\,\theta.\operatorname{fin.}\theta}{d.(\operatorname{cof.}\psi \operatorname{fin.}\theta)},$$

quae eſt expreſſio generalis pro radiis oſculi curuarum in ſuperficie ſphaerica deſcriptarum.

XIV. Quodſi inſuper ipſum arcum curuae vocemus $BM = s$, vt ſit eius elementum $Mm = ds$ angulum $mMn = \psi$ habebimus $d\theta = ds \operatorname{fin.} \psi$ et $d\Phi \operatorname{fin.} \theta = ds \operatorname{cof.} \psi$, vnde ſi relatio inter s et ψ eſſet data; inde binas quantitates Φ et θ deducere liceret, foret enim $\theta = \int ds.\operatorname{fin.}\psi$ hincque porro $\Phi = \int \frac{ds \operatorname{cof.}\psi}{\operatorname{fin.}\theta}$, quae integralia in ſe indeterminata ſatis declarant punctum A ab arbitrio noſtro pendere.

XV. Sin autem relatio detur inter arcum curuae s et radium oſculi r multo difficilius erit inde reliqua elementa ſcilicet ψ, θ et Φ determinare. Excluſo quidem angulo Φ habemus has duas aequationes:

$$d\theta = ds\,\text{fin.}\,\psi \quad \text{et} \quad \text{Tang.}\,r = \frac{d\,s.\,\text{fin.}\,\psi\,\text{fin.}\,\theta}{d.\,(\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\theta)}$$

ex quibus ambas quantitates θ et ψ inueſtigari oportet; verum etiamnunc nulla patet via ad hunc ſcopum perueniendi, quum tamen in plano ex data relatione inter arcum curuae et radium oſculi conſtructio curuae facile perficiatur.

XVI. Poſtquam igitur oſtendimus quemadmodum ex curua B M tamquam data ſpectata eius radium oſculi MO definiri oporteat, hinc vniuerſam Theoriam euolutionis in ſuperficie Sphaerica deriuare poterimus, namque punctum illud O ſitum erit in curua quapiam CO, quam merito euolutam curuae B M appellare licet. Si enim curuae C O filum concipiatur applicatum, idque extendatur in ſuperficie Sphaerica arcum circuli maximi repraeſentabit, qui euolutam in ipſo puncto O tangat, omnino vti in plano vſu venit, ita vt noſtra curua BM ex euolutione curuae CO reipſa deſcribi poſſit, vnde perinde atque in plano notandum eſt, fore radium oſculi ſeu arcum M O, arcui euolutae C O aequalem, vel quantitate conſtante ſuperantem, quae quantitas conſtans quoniam ab arbitrio noſtro pendet, euidens eſt ex eiusdem curuae C O euolutione innumerabiles curuas B M produci poſſe.

Tab. I. Fig. 3. XVII. His expoſitis ordine retrogrado conſideremus primum ipſam curuam euolutam C O o pro qua vocemus arcum CO $= s$ vt ſit elementum O$o = ds$, ac ne opus habeamus punctum quodpiam arbi-

arbitrarium veluti A in computum inducere, natura huius curuae definiatur eius radio osculi $OR = r$, quaecunque enim haec sit curua, quoniam vt data spectatur, relatio datur inter s et r, iam ope fili quod initio toti curuae applicatum concipiatur, fiat euolutio, quae nunc quidem pertigerit vsque in O vbi filum extensum erit, secundum arcum circuli maximi OM, cuius longitudo erit $= OC = s$, qui arcus tanget curuam CO in puncto O et nunc punctum M reperietur in curua BM per hanc euolutionem descripta, ad quam etiam ex puncto proximo o ducatur arcus om, qui perinde ac ille OM in hanc curuam erit normalis. Tum vero quum sit $OM = s$ erit $om = s + ds$, quo posito in indolem huius curuae descriptae BM inquiramus.

XVIII. Quoniam arcus circuli maximi MO normalis est ad OR eiusque continuatio pro ipso elemento Oo haberi potest is cum radio proximo Ro angulum faciet MoR cuius

$$\text{Tang.} = \frac{\text{Tang. R O}}{\text{fin. O }o} = \frac{\text{Tang. R}}{d\,s},$$

quum autem radius proximus mo sit ad Ro normalis erit ang. Mom complementum illius anguli OoR ideoque Tang. M$om = \frac{d\,s}{\text{Tang. } r}$, siue ipse hic angulus $= \frac{d\,s}{\text{Tang. } r}$, vbi notasse iuuabit esse angulum OR$o = \frac{d\,s}{\text{fin. } r}$, vnde patet angulos M$om$ et ORo non esse inter se aequales vti euenit in plano, sed illum Mom se habere ad hunc ORo :: fin. r : Tang. r hoc est in ratione minoris inaequalitatis, atque adeo si radius OR fiat quadrans circuli angulus M$om = 0$

feu ambo radii $M O$, $m o$ coincident, fcilicet ipfa curua circa elementum $O o$ erit circulus maximus, qui ipfe fibi eft tangens in fingulis punctis.

XIX. Nunc facile erit curuae per euolutionem defcriptae elementum $M m$ exprimere, quum enim hoc elementum per finum arcus $M O$ diuifum, praebeat angulum $M o m$, ob $O M = s$ habebimus elementum $M m = \frac{d s \, fin. s}{Tang. r}$. Quocirca fi nunc problema noftrum circa rectificationem curuae $B M$ adgrediamur, relatio inter binas variabiles r et s talis effe debet, vt formula $\frac{d s \, fin. s}{Tang. r}$ fiat abfolute integrabilis. Praeterea vero quia haec curua fimul effe debet algebraica vel geometrice conftruibilis, primo requiritur vt ipfa curua $C O$ fit geometrica deinde vero quia arcus $M O = C O$, curua $C O$, ita debet effe comparata vt cuilibet eius arcui $C O$, arcum circuli aequalem geometrice affignare liceat.

XX. Hic omnino notatu dignum eft, quod pro elemento $M m$, tam fimplicem formulam elicuerimus, de qua facillime iudicare licet, quibus cafibus ea integrabilis euadat, atque adeo ftatim in oculos incurrit fi radius ofculi $O R$ fuerit conftans, puta $r = c$, tum curuam $B M$ abfolute fore integrabilem, erit enim arcus

$$B M = \frac{\int d s \, fin. s}{Tang. c} = - \frac{cof. s}{Tang. c} + C,$$

vbi fi conftantem ita definiamus, vt defcriptio in ipfo puncto C incoeperit vbi $s = o$, ita vt punctum B in C incidat, tum erit arcus

B M

$$B\,M = \frac{1 - \text{cof.}\, s}{\text{Tang.}\, c} = \frac{2\, \text{fin.}\, \frac{s}{2}^2}{\text{Tang.}\, c}.$$

Hinc igitur patet dum initio quo $s = 0$, fit arcus B M $= 0$, fumto arcu C O quadranti circuli maximi aequali, ita vt O M fiat quadrans, tum fore arcum B M $= \frac{1}{Tang.\, c}$, ac fi arcus C O eo vsque augeatur, vt femiperipheriae circuli maximi aequalis fiat, quo cafu arcus O M abit in femicirculum, tum fore arcum B M $= \frac{2}{Tang.\, c}$, vbi vnitas definitur per ipfum radium Sphaerae.

XXI. En ergo fimplicem profecto folutionem problematis propofiti, quae quidem vt examinanti facile patebit prorfus conuenit cum ea, quam ante per plures ambages fumus adepti; fed hic eius infignes proprietates multo clarius elucent, quam antea ex intricatis illis formulis cognofcere licuiffet. Quia enim fumfimus $r = c$ ftatim apparet euolutam curuae noftrae B M effe circulum minorem, cuius radius fit $=$ fin. c; praeterea vero vt cuilibet huius circuli minoris arcui, C O $= s$ arcus circuli maximi aequalis M O $= s$, geometrice fumi poffit, neceffe eft, vt radius iftius circuli minoris fin. c ad radium Sphaerae rationem teneat rationalem, quae eft eadem conditio, quam etiam fupra inuenimus.

XXII. Quoniam infinitos huiusmodi circulos minores in Sphaera defignare licet, quorum radii ad radium Sphaerae rationem habeant rationalem, reuera

reuera quidem infinitas solutiones exhibuisse sumus censendi; verum tamen quia omnes in vna quasi formula continentur, non immerito haec solutio pro vnica haberi solet, atque nunc quaestio maximi momenti exoritur, vtrum praeter circulos minores non aliae dentur in superficie sphaerica lineae curuae ex quarum euolutione, etiam curuae geometricae et rectificabiles oriantur.

XXIII. Sed antequam hanc quaestionem diligentius examinemus, alias nonnullas insignes proprietates harum curuarum perpendamus. Ac primo quidem patet ex eodem circulo minore infinitas describi posse curuas problemati nostro satisfacientes, quoniam in eius peripheria initium seu punctum C pro arbitrio assumi potest. Omnes vero tales lineae si in superficie sphaerica descriptae concipiantur, quasi inter se erunt parallelae, quandoquidem omnes ab eodem circulo maximo, qui in vnam est normalis, simul normaliter secantur, atque omnes portiones talium circulorum maximorum inter binas curuas interceptae erunt inter se aequales. Euidens quidem est omnes has curuas esse aequales et tantum ratione situs super sphaera differre, vnde pulcherrimum exemplum infinitarum curuarum aequalium in superficie sphaerae ducendarum habemus, quarum traiectione orthogonales sint circuli maximi.

XXIV. Initio porro curuae B M in puncto C constituto, si arcus circuli minoris C O aequalis capiatur

capiatur ſemicirculo maximo, quod ſi circulus ille fuerit ſatis exiguus, demum poſt aliquot reuolutiones eueniet, tum quia arcus O M fit ſemicirculus, punctum M e diametro puncto O opponetur, quare ſi circulus iſte minor C O o tamquam circulus polaris ſpectetur polo exiſtente in R, atque aequalis circulus polaris huic oppoſitus concipiatur, omnes curuae deſcriptae inter hos duos circulos polares cadent, atque ſi circuli polares fuerint ſatis parui pluribus reuolutionibus circa ſphaeram vagabuntur antequam ad alterum circulum polarem pertingant.

XXV. Hinc adhuc alia generatio curuarum B M ſe manifeſtat, facile enim perſpiciemus easdem lineas curuas B M deſcribi debere, ſi circulus ſphaerae maximus ſuper peripheria circuli minoris voluendo incedat, ſimili modo quo in plano epicycloides deſcribi ſolent. Sit enim C O circulus ille minor, quem in puncto O contingere concipiatur circulus maximus O M F G, qui voluendo per peripheriam circuli minoris continuo vlterius progrediatur initio autem contactus fuerit in puncto C, vbi punctum M circuli maximi erat applicatum, ita vt per motus voluentis naturam arcus O M aequalis ſit arcui C O, vnde ſi circulus maximus in puncto M ſtilo fuerit munitus, hoc ipſo ſtilo, curuam quandam C M deſcripſerit neceſſe eſt, atque quum O M ſit arcus circuli maximi arcui C O aequalis et circulum minorem in puncto O tangens; euidens eſt, per hunc motum voluentem eandem curuam C M deſcribi, quae ante ex ſolutione erat nata, ita Tab. I. Fig. 4.

 vt

vt haec curua etiam epicycloidibus ſphaericis ſit annumeranda, quae ſcilicet oriuntur, ſi circulus maximus mobilis per peripheriam circuli minoris fixi voluendo promouetur.

XXVI. Si etiam in ſuperficie ſphaerica, praeter circulos nullae aliae darentur curuae geometricae, quarum cuilibet arcui indefinito arcus circuli aequalis aſſignari poſſet, quod Theorema initio pro figuris planis attulimus, tum demonſtrationem haberemus validam quod praeter curuas iam inuentas nullae aliae problemati noſtro ſatisfaciant. Si quis enim dicat dari aliam quandam curuam B M geometricam, quae eſſet rectificabilis, tum certe eius radium oſculi M O ideoque omnia puncta O geometrice aſſignare liceret, vnde ipſa curua euoluta C O reſultaret geometrica eiusque arcui indefinito C O daretur arcus circuli aequalis O M, per illud ergo Theorema curua C O neceſſario foret circulus, ideoque praeter ſolutionem iam inuentam alia nulla exſpectari poſſet.

XXVII. Verum etiamſi iſtud Theorema pro figuris planis perfecte eſſet demonſtratum, tamen in ſuperficie ſphaerica nullo modo locum inuenire poſſet. Quum enim nullum ſit dubium, quin in ſuperficie ſphaerica innumerabiles lineae curuae geometricae deſcribi queant; dummodo enim Sinus vel Tangentes angulorum ſupra vſurpatorum ϕ et θ algebraicam inter ſe teneant relationem curua inde nata B M vtique pro geometrica eſt cenſenda, hic enim ad conditionem rectificabilitatis non attendamus;

mus; tum autem eius radius osculi M O semper geometrice assignari potest; hincque etiam euoluta C O erit curua algebraica et quae insuper certe ita est comparata, vt eius arcui C O cuicunque arcus circuli maximi O M aequalis exhiberi possit, inde necessario sequitur infinitas dari curuas algebraicas C O, quarum singulos arcus per arcus circulares exprimere liceat. Quamobrem etiamnunc maximam dubitandi rationem habemus, vtrum problema nostrum solutione illa, quam iam duplici modo sumus adepti plane sit exhaustum nec ne? Ac si forte nullae aliae dentur solutiones longe aliam demonstrationem adferri oportet.

XXVIII. Quodsi formulam generalem supra pro elemento M m inuentam $\frac{ds.\,\text{fin}.\,s}{\text{Tang}.\,r}$ attentius consideremus, mox deprehendemus, eam praeter casum $r = o$ infinitis aliis integrabilem fieri posse veluti si fuerit $r = s$, vel Tang. $r =$ Cof. s^2, priori enim fiet arcus B M $=$ Sin. $s +$ C, hoc vero B M $=$ C $- \frac{1}{\text{Cof}.\,s}$, ac si esset Tang. $r =$ Sin. s Cof. s^2, foret BM $=$ Tang. s $+$ C verum tum quaestio hic reuoluitur vtrum curua C N proditura sit geometrica nec ne? Vbi imprimis notandum, si talis curua geometrica elici posset tum etiam alteri conditioni, qua arcus C O per arcum circularem exponi debet fore satisfactum, propterea quod data supponitur relatio inter quantitates Sin. s et Sin. r vel Tang. r; quum enim r sit arcus circuli maximi et Sin. s per eius quampiam functionem algebraicam exprimatur etiam in circulo

 maxi-

maximo arcum s aſſignare licebit cuius Sinus ſit illi functioni aequalis, verum hoc modo in maximas difficultates delaberemur quandoquidem ante iam annotauimus nullam adhuc Methodum patere, cuius ope ex data quapiam relatione inter arcum curuae s eiusque radium oſculi in ſuperficie ſphaerica r, ipſa curua definiri poſſet. Si enim ex aequationibus §. XV. datis, vel θ vel ψ eliminemus in aequationem differentialem ſecundi gradus incidimus, quam quomodo tractari oporteat quum non perſpiciatur; multo minus iudicare licebit, vtrum curua inde proditura algebraica ſit nec ne?

XXIX. Hactenus quidem curuae, quam pro noſtro problemate eruimus ea ſymptomata recenſuimus, quae conſiderationes geometricae nobis ſuppeditauerunt, nunc igitur etiam conueniet eius aequationem analyticam accuratius euolui. Sumatur igitur punctum A in ipſo polo circuli minoris COD, ex cuius euolutione initio facto in puncto C, oriatur curua noſtra rectificabilis CM, cuius radius oſculi in puncto M referatur arcu circuli maximi MO circulum minorem in C tangente eiusque arcui CO aequali. Ducantur arcus AO et AM et poſito arcu AC $=$ AO $= c$, ita vt circuli minoris radius ſit $=$ Sin. c quoniam poſuimus arcum CO $= s$ eiusque menſura eſt angulus CAO erit hic angulus CAO $= \frac{s}{\text{Sin. } c}$, nunc quia in triangulo AMO rectangulo dantur catheti AO $= c$ et MO $= s$, ſi vocemus vt ſupra arcum AM $= \theta$, habebimus Coſ. $\theta =$ Coſ. s Coſ. c, deinde ſi porro vocemus angulum CAM $= \Phi$ erit

Tab. I. Fig. 5.

ang.

ang. M A O $= \frac{s}{Sin.\ c} - \Phi$, hincque Tang. huius anguli $= \frac{Tang.\ s}{Sin.\ c}$, ita vt fit $\Phi = \frac{s}{Sin.\ c}$ — ang. cuius Tang. $\frac{Tang.\ s}{Sin.\ c}$, tum vero prodit ipſe curuae C M arcus $= \frac{1 - Cof.\ s}{Tang.\ c}$.

XXX. Reducamus haec ad bina elementa Φ et θ et cum ex priore aequatione fit Cof. $s = \frac{Cof.\ \theta}{Cof.\ c}$, vnde ſtatim ſequitur arcus C M $= \frac{Cof.\ c - Cof.\ \theta}{Sin.\ c}$ ex quo manifeſtum eſt hanc curuam prorſus eandem eſſe, quam prima methodo elicueramus, tum vero quum fit Sin. $s = \frac{\surd (Cof.\ c^2 - Cof.\ \theta^2)}{Cof.\ c}$ et $s =$ Ang. cuius Cof. $(\frac{Cof.\ \theta}{Cof.\ c})$ inde concludimus ang. $\Phi = \frac{1}{Sin.\ c}$ Ang. cuius Cof. $(\frac{Cof.\ \theta}{Cof.\ c})$ — Ang. cuius Tang. $\frac{\surd (Cof.\ c^2 - Cof.\ \theta^2)}{Sin.\ c\ Cof.\ \theta}$. Quodſi etiam formulas differentiales contemplari velimus, quum fit $d\,s.\ Sin.\ s = \frac{d\,\theta\ Sin.\ \theta}{Sin.\ c}$ hincque

$$d\,s = \frac{d\,\theta.\ Sin.\ \theta}{Tang.\ c\ \surd (Cof.\ c^2 - Cof.\ \theta^2)},$$

deinde quum fit

$$d\Phi = \frac{d\,s}{Sin.\ c} - \frac{d\,s.\ Sin.\ c}{Cof.\ s^2 (Sin.\ c^2 + Tang.\ s^2)} = \frac{d\,s}{Sin.\ c} - \frac{d\,s.\ Sin.\ c}{Sin.\ c^2\ Cof.\ s^2 + Sin.\ s^2}$$
$$= \frac{d\,s (Cof.\ c^2\ Sin.\ s^2)}{Sin.\ c (Sin.\ c^2\ Cof.\ s^2 + Sin.\ s^2}$$

erit

$$d\,\Phi = \frac{d\,s (Cof.\ c^2\ Sin.\ s^2}{Sin.\ c\ (Sin.\ c^2 + Cof.\ c^2\ Sin.\ s^2)} = \frac{d\,s\ Cof.\ c^2\ Sin.\ s^2}{Sin.\ c\ (1 - Cof.\ c^2\ Cof.\ s^2)}.$$

Iam quum fit

$$d\,s = \frac{d\,\theta.\ Sin.\ \theta}{Tang.\ c\ \surd (Cof.\ c^2 - Cof.\ \theta^2)};\ Sin.\ s^2 = \frac{Cof.\ c^2 - Cof.\ \theta^2}{Cof.\ c^2}$$

et $1 - Cof.\ c^2\ Cof.\ s^2 = Sin.\ \theta^2$ habebimus

$$d\,\Phi = \frac{d\,\theta\ Cof.\ c\ \surd (Cof.\ c^2 - Cof.\ \theta^2)}{Sin.\ c^2\ Sin.\ \theta},$$

 quae

quae eſt eadem formula cum ea, quam ſupra pro $d\Phi$ inuenimus.

XXXI. Quum nunc quidem certum ſit, in ſuperficie ſphaerica praeter circulos infinitas dari curuas geometricas, quarum ſingulas portiones indefinite arcubus circularibus metiri liceat: ſequens Problema nihilominus tamquam aeque difficile ac omni attentione dignum ſpectandum videtur.

Problema.

In ſuperficie ſphaerica omnes inuenire curuas geometricas quarum arcui indefinito cuicunque, arcum aequalem circuli exhibere liceat.

Si quis ſolutionem huius problematis methodo directa indagare voluerit maximas ſine dubio difficultates offendet, quas methodis adhuc cognitis vix ac ne vix quidem ſuperare licebit. At conſideratio-
Tab. I. Fig. 2.
nes ante factae nobis ſequentem ſolutionem ſatis concinnam ſuppeditant. Primum in ſuperficie ſphaerica deſcribatur curua quaecunque geometrica B M, quod fit ſi poſito angulo $BAM = \Phi$ et arcu $AM = \theta$, relatio quaecunque detur algebraica inter Sin. Φ et Sin. θ, ita vt Sin. Φ ſpectari poſſit tamquam functio algebraica ipſius Sin. θ, manifeſtum autem eſt quae hic de Sin. Φ et Sin θ dicuntur, aeque valere pro Coſinubus et Tangentibus. Tali ergo relatione inter Sin. Φ et Sin. θ conſtituta quaeratur angulus ψ, vt ſit Tangens $\psi = \frac{d\theta}{d\Phi \, \text{Sin.}\,\theta}$, quem ergo angulum etiam geometrice aſſignare licet, ſicque habebitur ang. $AMO = \psi$, quem arcus M O in curuam normalis

lis cum meridiano A M facit. Porro in hoc arcu circuli maximi M O abſcindatur arcus M O $= r$, ita vt ſit Tang. $r = \frac{d\,\theta\,\mathrm{Sin.}\,\theta}{d.\mathrm{Sin.}\,\theta\,\mathrm{Coſ.}\,\psi}$ ſic autem etiam punctum O geometrice aſſignabitur; quandoquidem Tang. r aequabitur functioni algebraicae quantitatum Sin. θ et Sin. Φ; quo facto punctum O reperietur in ipſa curua quaeſita C O, quippe quae ita erit comparata vt eius portio CO aequetur arcui circulari MO$=r$; atque iſta curua C O manifeſto erit geometrica vel algebraica, hic enim voces geometricae et algebraicae pro ſynonymis vſurpo, ita vt quicquid algebraice exprimi poteſt id etiam geometricum ſit cenſendum.

XXXII. Quo hanc curuam conſtructam C O etiam analytice euoluamus, ponamus angulum BAO$=x$ et arcum AO$=y$ et videamus cuiusmodi aequatio proditura ſit inter has quaſi coordinatas, ſeu potius inter quantitates Sin. x et Sin. y. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia ang. MAO$=\xi$ ita vt fiat $x = \Phi + \xi$; iam ex triangulo Sphaerico A M O, habemus primo

$$\mathrm{Coſ.}\,y = \mathrm{Coſ.}\,\theta\,\mathrm{Coſ.}\,r + \mathrm{Sin.}\,\theta\,\mathrm{Sin.}\,r\,\mathrm{Coſ.}\,\psi \text{ tum vero}$$

$$\mathrm{Tang.}\,\xi = \frac{\mathrm{Sin.}\,r\ \mathrm{Sin.}\,\psi}{\mathrm{Coſ.}\,r\ \mathrm{Sin.}\,\theta - \mathrm{Sin.}\,r\ \mathrm{Coſ.}\,\theta\ \mathrm{Coſ.}\,\psi},$$

vnde ſimul habetur $x = \Phi + \xi$, patet ergo tam Sin x, quam Sin. y etiam per functiones algebraicas quantitatum Sin. θ et Sin. Φ expreſſum iri.

XXXIII. Quodſi iam ſolutionem huius problematis methodo directa tentare velimus incipiendum erit

erit a coordinatis x et y et quum inde fiat arcus C O elementum $= V(dy^2 + dx^2 \text{Sin.} y^2)$ inter Sin. x et Sin. y talis relatio intercedere debet eaque algebraica vt integrale huius elementi fiat arcus circularis, quare posito hoc arcu $= r$ necesse est fiat $V(dy^2 + dx^2 \text{Sin.} y^2) = dr$, seu si tangens huius arcus r vocetur $= t$, vt fiat $V(dy^2 + dx^2 \text{Sin.} y^2) = \frac{dt}{1+tt}$, hic igitur Methodus desideratur, cuius beneficio cognosci queat qualis relatio inter quantitates sin. x et Sin. y intercedere debeat, vt haec conditio adimpleatur, seu quibusnam artificiis inuestigatio ita adornari possit, vt intelligatur ad hoc praestandum opus esse noua quadam variabili sin. θ cuius functio quaecunque algebraica sit Sin. Φ, indeque deduci oportere angulum ψ, vt sit Tang. $\psi = \frac{d\,\theta}{d\,\Phi\, \text{Sin.}\, \theta}$, hincque porro arcum r vt sit Tang. $r = \frac{d\,\theta.\, \text{Sin.}\, \theta}{d.\, \text{Sin.}\, \theta\, \text{Cof.}\, \psi}$, hincque porro angulum ξ, vt sit:

$$\text{Tang.}\, \xi = \frac{\text{Sin.}\, r\, \text{Sin.}\, \psi}{\text{Cof.}\, r\, \text{Sin.}\, \theta - \text{Sin.}\, r\, \text{Cof.}\, \theta\, \text{Cof.}\, \psi},$$

hisque omnibus factis, vt perspici queat problemati huic satisfieri si capiatur

$$x = \Phi + \xi \text{ et Cof.}\, y = \text{Cof.}\, \theta\, \text{Cof.}\, r + \text{Sin.}\, \theta\, \text{Sin.}\, r\, \text{Cof.}\, \psi.$$

Cuilibet hinc statim patebit hoc problema ad Analysin infinitorum indeterminatam pertinere, quae quum adhuc parum sit exculta, nullum est dubium quin si Methodum illam desideratam explorare valeamus, maxima inde incrementa, in nouam hanc Analyseos partem esse redundatura.

SECTIO

PHYSICO-
MATHEMATICA.

SECTIO TERTIA DE MOTV FLVIDORVM LINEARI POTISSIMVM AQVAE.

Auctore

L. EVLERO.

CAPVT I.

DE PRINCIPIIS MOTVS LINEARIS FLVIDORVM.

Definitio.

1.

Fluidum motu lineari ferri dicitur quando eius vena ita secundum lineam quandam DE, quam motus directionem vocare licet, mouetur, vt in singulis punctis Z motus fiat secundum directionem eius lineae, et per totam sectionem UV ad directricem normaliter factam celeritas in omnibus punctis sit eadem. Tab. I. Fig. 32.

Coroll 1.

2. Ad motum ergo linearem duo requiruntur, primo vt motus vbique sequatur directionem certae cuiusdam lineae DE, quae eius directrix vocatur, tum vero vt in singulis sectionibus UV ad directricem normalibus omnia fluidi elementa pari celeritate secundum eandem directionem proferantur.

Coroll. 2.

3. Cognita ergo linea directrice si in quouis eius puncto Z fluidi celeritas fuerit data eadem quoque toti sectioni U V est communis, et quia directio conuenit cum directricis tangente in puncto Z totus motus sectionis U V erit determinatus.

Scholion 1.

Tab. I. Fig. 33. 4. Quando fluidum per tubum angustissimum DE transire cogitur, eius motus recte pro lineari, quem hic descripsimus haberi potest, ob angustiam enim tubi in singulis punctis Z alia motus directio esse nequit, nisi quam tractus tubi permittit, ac si rem accuracius cognoscere velimus, per mediam tubi cauitatem lineam productam DZE concipere licet, quae motus directricem repraesentabit et ex cuius directione in singulis punctis Z ipsa motus directio innotescet. Tum vero quia tubus est angustissimus, in qualibet eius sectione U V ad directricem normali tam fluidi celeritas quam directio vbique

vbique erit eadem, non quod omnis inaequalitas absolute excludatur, quum vtique fieri posset, vt per partem ZU celerius vel lentius feratur quam per partem ZV, sed tales motus hic excludimus, dum in motum linearem inquirimus, tantum eos, qui sint definitioni consentanei consideraturi. Quodsi vero talis inaequalitas adsit, perspicuum est tubi amplitudinem continuo magis coarctando, tandem omnem huiusmodi inaequalitatem cessare debere, quocirca si tubos infinite angustos statuamus, huic exceptioni ne locus quidem relinquitur. Atque hoc casu etiam linea directrix non discrepat a ductu ipsius tubi; perindeque erit quodnam tubi latus pro directrice accipiatur; interim tamen non est necesse, vt tubo vbique eadem amplitudo tribuatur, quin potius insignis diuersitas admitti poterit, dummodo nusquam enormis saltus occurrat, veluti eueniret, si vspiam in F tubi continuitas tumore interrumperetur, qui etiamsi esset infinite paruus, tamen motus non amplius legem praescriptam sequi posset, dum fluidum in tumore fere stagnaret, et reliquum perinde praeterflueret, ac si tumor ille abesset. Huiusmodi ergo irregularitates in tubo motus continuitatem perturbantes omnino sunt excludendae.

Scholion 2.

5. Quanquam motus linearis proprie tubos infinite angustos postulat, ne eiusmodi inaequalitates quae huius motus indoli aduersarentur, locum habere

 queant,

queant, tamen etiam in tubis ſatis amplis fieri poteſt, vt motus fluidi iſtam legem ſequatur, hocque caſu iſtiusmodi etiam motus, quantumvis tubi fuerint ampli, recte ad motum linearem referuntur. Quin etiam etſi motus ab hac lege parumper recedat, in praxi hoc diſcrimen vix ſpectari ſolet, et concluſiones ex calculo deductae pro veris proxime habeantur, experientia non admodum reclamante. Ita effluxus aquae ex vaſis etiam ampliſſimis per foramen factus ex his principiis ita definiri ſolet, vt vix vllus diſſenſus ab experientia percipiatur, atque adeo a veritate eo minus aberratur, quo minus fuerit foramen, cum tamen hoc caſu tota vaſis ſtrata ad directricem normalia certe non communi motu ferantur. Verum hic commode vſu venit, vt vaſis figura ex calculo ad finem perducto iterum egrediatur, et effluxus eodem modo fieri deprehendatur, ac ſi vas reuera haberet figuram ad modum linearem accommodatam. Etſi autem haec motus linearis conſideratio ampliſſimum habet vſum, tamen quia in tubis amplioribus motus aliam legem ſequitur, vnde aberrationes, quamuis vix ſentiantur, naſci debent, noſtras inueſtigationes tantum ad tubos anguſtiſſimos referri conueniet, quamob cauſam etiam motus, quos hic ſum conſideraturus lineares vocaui.

Scholion 3.

6. Tractatio haec ingentem includit varietatem ex tuborum figura oriundam, primum ergo tubos con-

considerabo rectos, seu potius quorum directrices sint lineae rectae, quibus quidem amplitudines vtcunque variabiles tribuere licet. Deinde fluidi motus sum inuestigaturus per tubos, quorum directrices sunt lineae curuae; quae prout fuerint vel in eodem plano vel secus? in calculo aliquod aliscrimen pariunt, dum priori casu figura per duas tantum coordinatas, posteriori vero per tres est definienda. Plurimum deinde interest, vtrum fluidum perpetuo in huiusmodi tubis fluat, an alicubi effluat tum vero ipsa fluidi natura, et vires sollicitantes in computum sunt ducendae. Omnino autem motus determinatio ex principiis ante stabilitis peti debet, et quoniam duplici modo haec motus principia sunt euoluta, quouis casu vti conueniet eo qui maxime accommodatus videbitur. Primum quidem tubos in quiete positos spectabo, deinceps seorsim in motum per tubos mobiles inquisiturus.

Problema 42.

7. Motum linearem fluidi per tubum rectilineum ad calculum reuocare; methodum adhibendo supra priori loco expositam.

Solutio.

Sit O I A a tubus propositus eiusque directrix linea recta O A cuius amplitudo sit vtcunque variabilis. Elapso tempore $= t$ consideretur fluidi particula tubi spatiolum X x V v occupans, atque a termino Tab. I. Fig. 34.

termino fixo O ponatur diſtantia $OX = x$, tubique amplitudo in X ſeu ſectio normaliter facta $XV = \omega$, ita vt ω ſit functio data ipſius x. Iam per ſectionem XV ſit celeritas fluidi ſecundum directionem $XA = u$, denſitas $= q$, et preſſio $= p$; eruntque u, q et p functiones duarum variabilium x et t; tum vero ex fluidi natura datur relatio inter p et q, et calorem r ſi forte eius ratio fuerit habenda. Tribuatur huic particulae craſſities $Xx = dx$ eritque eius volumen $= \omega dx$ et maſſa $= q\omega dx$. Iam tempuſculo dt progrediatur haec particula in $X'V'x'v'$; et cum celeritas in X ſit $= u$, erit ſpatiolum $XX' = udt$; in x vero celeritas $= u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$ dabit ſpatiolum $xx' = udt + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right)$, ita vt ſit $X'x' = dx + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right)$. Cum autem amplitudo in X' ſit $= \omega + udt.\frac{d\omega}{dx}$, erit iſtius particulae volumen $= \omega dx + \omega dtdx\left(\frac{du}{dx}\right) + udtdx.\frac{d\omega}{dx}$. At denſitas noſtrae particulae in X' inde colligi debet, quod cum q ſit functio ipſarum x et t, prior x incrementum capiat $XX' = udt$, poſterior vero t incrementum dt, ex quo denſitas in X' erit $= q + udt\left(\frac{dq}{dx}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$ per quam ſi volumen modo inuentum multiplicetur, prodit maſſa noſtrae particulae translatae:

$$X'V'x'v' = q\omega dx + dxdt\left(q\omega\left(\frac{du}{dx}\right) + qu.\frac{d\omega}{dx} + \omega u\left(\frac{dq}{dx}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right)\right)$$

quae quia aequalis eſſe debet maſſae priori $q\omega dx$, haec conſideratio pro motu ſuppeditat hanc priorem aequationem

$q\,\omega$

$$q\,\omega\left(\frac{d\,u}{d\,x}\right)+q\,u.\frac{d\,\omega}{d\,x}+\omega\,u\left(\frac{d\,q}{d\,x}\right)+\omega\left(\frac{d\,q}{d\,t}\right)=0$$

ſeu $q\,u.\frac{d\,\omega}{\omega\,d\,x}+\left(\frac{d.\,q\,u}{d\,x}\right)+\left(\frac{d\,q}{d\,t}\right)=0.$

Cum porro celeritas u poſt tempuſculum $d\,t$, abeat in $u+u\,d\,t\left(\frac{d\,u}{d\,x}\right)+d\,t\left(\frac{d\,u}{d\,t}\right)$, quia non ſolum tempori t augmentum $d\,t$ ſed etiam diſtantiae O X $=x$ augmentum X X$'=u\,d\,t$ tribui debet, erit acceleratio particulae X V $x\,v=u\left(\frac{d\,u}{d\,x}\right)+\left(\frac{d\,u}{d\,t}\right)$, quae cum viribus acceleratricibus conuenire debet. Ad has inveniendas primo preſſio perpendatur, quae cum in facie X V ſit $=p$, erit in facie $x\,v=p+d\,x\left(\frac{d\,p}{d\,x}\right)$ ob X $x=d\,x$. Hinc naſcitur vis acceleratrix particulam retro vrgens $=\frac{1}{q}\left(\frac{d\,p}{d\,x}\right)$, ſiquidem vis motrix inde nata eſt $=\omega.\,d\,x\left(\frac{d\,p}{d\,x}\right)$, quae per maſſam $q\,\omega\,d\,x$ diuiſa illam dat vim acceleratricem. Ex viribus porro fluidi particulas ſingulas immediate ſollicitantibus naſcatur vis acceleratrix ſecundum directionem X A $=$ P ita vt iam ſecundum eandem directionem tota ſit vis acceleratrix $=\mathrm{P}-\frac{1}{q}\left(\frac{d\,p}{d\,x}\right)$, quae per $2\,g$ multiplicata accelerationi eſt aequanda, vnde pro motu fluidi altera aequatio ita ſe habet:

$$2\,g\,\mathrm{P}-\frac{2\,g}{q}\left(\frac{d\,p}{d\,x}\right)=u\left(\frac{d\,u}{d\,x}\right)+\left(\frac{d\,u}{d\,t}\right)$$

ſeu ſi tempus t conſtans accipiatur:

$$\frac{2\,g\,d\,p}{q}=2\,g\,\mathrm{P}\,d\,x-u\,d\,x\left(\frac{d\,u}{d\,x}\right)-d\,x\left(\frac{d\,u}{d\,t}\right)=2\,g\,\mathrm{P}\,d\,x-u\,d\,u-d\,x\left(\frac{d\,u}{d\,t}\right).$$

Haec ergo aequatio cum ante inuenta:

$$q\,u.\frac{d\,\omega}{\omega\,d\,x}+\left(\frac{d.\,q\,u}{d\,x}\right)+\left(\frac{d\,q}{d\,t}\right)=0$$

 con-

coniuncta, si relatio inter p et q ex natura fluidi in subsidium vocetur, totum motum determinabit.

Coorll. 1.

8. Multiplicetur etiam prior aequatio per dx, et in eius integratione tempus t constans spectetur; habebiturque

$$\frac{qud\omega}{\omega}+d.\,qu+dx\left(\frac{dq}{dt}\right)=0 \text{ seu } \omega dx\left(\frac{dq}{dt}\right)+d.\,qu\omega=0,$$

vnde si densitas fluidi fuerit constans $q=b$ colligitur $u\omega=$ Const. quae constans tempus t vtcunque inuoluere potest, vnde patet celeritates in diuersis tubi locis quouis tempore eius amplitudinibus reciproce esse proportionales, quae est notissima motus fluidorum per tubos proprietas.

Coroll. 2.

9. Sin autem densitas fluidi q non fuerit constans, sed etiam a pressione p pendeat, necessario ambae aequationes coniungi debent, vt ex iis deinceps pro quouis loco et ad quoduis tempus t tam celeritas u, quam pressio definiatur; quae inuestigatio propterea saepe vehementer difficilis euadit.

Scholion.

10. Cum hic motus sit casus maxime specialis problematis generalissimi, cuius supra duplicem solutionem exhibuimus, hicque methodo priori sim vsus, necesse est vt solutio hic inuenta in illa genera-

neraliſſima contineatur, quod quidem de altera aequatione preſſionem p definiente per ſe eſt perſpicuum; dum enim hic praeter tempus t vnica variabilis x adeſt, ii etiam termini, qui differentialia dy et dz complectebantur ſunt praetermiſſi, vbi imprimis notandum eſt binas celeritates v et w euaneſcere, propterea quod per totam ſectionem XV motus ſecundum eandem directionem OA fieri concipitur. Altera autem aequatio ob terminum $qu.\frac{d\omega}{\omega dx}$ generali formae penitus aduerſari videtur; amplitudine autem tubi vbique eadem exiſtente res egregie conuenit. Verum tamen re bene perpenſa et haec aequatio immediate ex forma generali deduci poteſt. Si enim tubus ab V ad V′ diuergat, motus directio circa V aliquantillum a directione OA deflectere debet. Poſita ergo $XV = y$, ſtatuatur celeritas $v = \alpha y$, vt in X nulla ſit deflexio, vt tertia autem celeritas w euaneſcat, ſumatur $z =$ conſt. $= \gamma$, vt ſit $\omega = \gamma y$. Quia autem denſitas q plane non ab y pendet, erit $(\frac{d.qv}{dy}) = \alpha q$; at quia y eſt functio ipſius x, erit $X'V' = y + u\,dt.\frac{dy}{dx}$, tum vero ex celeritate v fit etiam $XV' = y + v\,dt = y + \alpha y\,dt$, vnde fit

$$\alpha = u.\frac{dy}{y\,dx} = u.\frac{d\omega}{\omega\,dx}, \text{ ideoque } (\frac{d.qv}{dy}) = q\,u.\frac{d\omega}{\omega\,dx}.$$

Hinc ergo clare intelligitur, quomodo ſolutio ſpecialis hic data pulcerrime cum aequatione generali cohaereat, atque ex ea naſcatur.

Problema 43.

11. Praecedens problema, quo motus fluidi in tubo rectilineo quaeritur, per methodum posteriorem respectu ad statum initialem habito resoluere.

Solutio.

Tab. II. Fig. 35. Fluidi particula, cuius motum inuestigamus, initio $t = 0$ occupauerit tubi elementum $XVX'V'$, pro quo ponamus $OX = X$, $XX' = dX$, amplitudinem tubi in $X = \Omega$, vt volumen particulae sit $= \Omega\, dX$. Sit porro densitas in $X = Q$, pressio $= P$ et celeritas secundum directionem $XA = U$ quae omnibus particulae punctis est communis; vnde eius massa $= Q\,\Omega\, dX$. Iam elapso tempore t eadem particula reperiatur in $x\,v\,x'\,v'$ pro qua ponamus $Ox = x$, amplitudinem $xv = \omega$, tum vero densitatem in $x = q$, pressionem $= p$ et celeritatem secundum $xA = u$, eruntque litterae x, q, p, u functiones binarum variabilium X et t, at amplitudo ω est certa functio ipsius x ex tubi figura definienda. Cum iam sectio $X'V'$ eodem tempore t peruenerit in $x'v'$ erit $xx' = dX\,(\frac{dx}{dX})$; vnde particulae $xvx'v'$ volumen erit $\omega\, dX\,(\frac{dx}{dx})$ et massa $= q\,\omega\, dX\,(\frac{dx}{dX})$; quae cum semper maneat eadem habebimus pro motus determinatione hanc primam aequationem:

$$q\,\omega\,(\frac{dx}{dX}) = Q\,\Omega.$$

Cum deinde celeritas in x sit $u = (\frac{dx}{dt})$, erit particulae $x\,v\,x'\,v'$ acceleratio $= (\frac{ddx}{dt^2})$. Ex viribus sollicitanlicitantibus nascatur pro hac particula vis acceleratrix secundum directionem $x\,A = \mathfrak{P}$; tum vero quia in x' pressio est $= p + dX\left(\frac{dp}{dX}\right)$, hinc oritur vis motrix retro vrgens $= \omega\, dX\left(\frac{dp}{dX}\right)$, quae per massam $q\,\omega\, dX\left(\frac{dx}{dX}\right)$ diuisa dat vim acceleratricem $= \frac{1}{q\left(\frac{dx}{dX}\right)} \cdot \left(\frac{dp}{dX}\right)$ ab illa $\mathfrak{P}$ subtrahendam, vnde altera aequatio motus determinationem continens colligitur:

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2g\,\mathfrak{P} - \frac{2g}{q\left(\frac{dx}{dX}\right)} \cdot \left(\frac{dp}{dX}\right).$$

quae sumto tempore t constante abit in hanc:

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g\,\mathfrak{P}\,dx - dx\left(\frac{ddx}{dt^2}\right).$$

Coroll. 1.

12. Perspicuum est quantitates x, q, p et u eiusmodi functiones esse debere binarum variabilium X et t, vt facto $t = 0$ fiat $x = X$, $q = Q$, $p = P$, et $u = U$; quibus conditionibus per integrationem est satisfaciendum.

Coroll. 2.

13. Amplitudo ω vt functio data spectatur quantitatis $O\,x = x$, quae cum ipsa sit functio ipsarum X et t, eatenus amplitudo ω a tempore pendere est censenda.

 Scholion.

Scholion.

14. Quia hoc problema continet casum maxime specialem problematis generalissimi 41, etiam solutionem hic datam in illa generalissima contentam esse oportet, quod quidem de aequatione posteriori statim patet, quippe qui ex forma generali nascitur, si termini, qui ibi binas variabiles Y et Z inuoluunt expungantur. Quemadmodum autem aequatio prior cum solutione generali conueniat minus clare perspicitur. Consensus autem iterum ostendi potest, si modo ad amplitudinis tubi variationem rite respiciatur. Hunc in finem spectentur ternae tubi dimensiones, et si binae Y et Z prae $OX = X$ sunt infinite paruae, ac Z quidem vt constantis per totum tubum magnitudinis consideretur, vt sit $z = Z$ ideoque $(\frac{dz}{dZ}) = 1$, tum vero erit $\Omega = YZ$. Statuatur $y = LY$, existente L functione solius temporis t, fietque $(\frac{dy}{dY}) = L$ et $(\frac{dy}{dX})$ cum reliquis formulis differentialibus euanescit, atque amplitudo in x erit $\omega = LYZ = L\omega$. Nunc ex solutione generali colligitur valor $K = (\frac{dx}{dX}) L, 1$, qui ob $L = \frac{\omega}{\Omega}$ abit in $K = \frac{\omega}{\Omega}(\frac{dx}{dX})$: quo inuento manifesto est $Kq = Q$ vt solutio habet generalis; sicque tota haec solutio in generali continetur, ex eaque vt casus specialis deriuari potest.

Problema 44.

Tab. II. Fig. 36. 15. Si tubi directrix IYK sit linea curua quaecunque in eodem plano posita, eiusque amplitudo

tudo Y V per tubi longitudinem vtcunque ſit variabilis, per methodum priorem ſupra traditam motum fluidi cuiuscunque in hoc tubo inueſtigare.

Solutio.

Elapſo tempore $= t$ conſideretur fluidi particula in tubo occupans ſpatiolum $YVyv$, ac pro puncto Y ſtatuantur binae coordinatae $OX = x$, $XY = y$, quarum relatio mutua cum ex figura directricis tubi detur, erit y functio ipſius x; tubi vero amplitudo in Y minima ponatur $YV = \omega$, quae etiam vt functio ipſius x data eſt ſpectanda. Sit porro denſitas fluidi in $Y = q$ et preſſio $= p$, quae duae quantitates erunt functiones duarum variabilium x et t, perinde ac celeritas fluidi in tubo quae ſit $= \mathfrak{v}$, cuius directio cum ſit Yy, ſi hoc elementum breuitatis gratia vocemus $Yy = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$ erit celeritas ſecundum $OX = \frac{\mathfrak{v}dx}{ds} = u$ et ſec. $XY = \frac{\mathfrak{v}dy}{ds} = v$. Quia nunc ſectio $YV = \omega$ ad directricem eſt normalis, volumen noſtrae particulae $YVyv$ erit $= \omega ds$ et maſſa $= q\omega ds$. Iam tempuſculo dt progrediatur haec particula in $Y'V'y'v'$ ita vt elementum Y peruenerit in Y', eritque ſpatiolum $XX' = udt = \frac{\mathfrak{v}dx}{ds}.dt$ et $X'Y' - XY = vdt = \frac{\mathfrak{v}dy}{ds}.dt$. Cum autem in y eſſent celeritates $u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$ et $v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$, erit progreſſu temporis

$$xx' = udt + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right) \text{ et } x'y' - xy = vdt + dtdx\left(\frac{dv}{dx}\right),$$

hinc-

hincque

$X'x' = dx + dt\,dx\left(\frac{du}{dx}\right)$ et $x'y' - X'Y' = dy + dt\,dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$.

Quamobrem habebimus:

$$Y'y' = ds + \frac{dt\,dx^2}{ds}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dt\,dx\,dy}{ds}\left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Deinde in Y' eſt amplitudo $Y'V' = \omega + u\,dt.\frac{d\omega}{dx}$ et denſitas

$$= q + u\,dt\left(\frac{dq}{dx}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right);$$

ex quo concluditur particulae $Y'V'y'v'$ volumen

$$= \omega\,ds + \frac{\omega\,dt\,dx^2}{ds}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\omega\,dt\,dx\,dy}{ds}\left(\frac{dv}{dx}\right) + u\,dt\,ds.\frac{d\omega}{dx};$$

et maſſa

$$= q\omega\,ds + \frac{q\omega\,dt\,dx^2}{ds}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{q\omega\,dt\,dx\,dy}{ds}\left(\frac{dv}{dx}\right) + qu\,dt\,ds.\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$$
$$+ u\omega\,dt\,ds\left(\frac{dq}{dx}\right) + \omega\,dt\,ds\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

quae cum praecedenti $q\omega ds$ aequalis eſſe debeat, per $\omega\,dt\,ds$ diuidendo perueniemus ad hanc aequationem:

$$\frac{q\,dx^2}{ds^2}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{q\,dx\,dy}{ds^2}\left(\frac{dv}{dx}\right) + qu.\frac{d\omega}{\omega\,dx} + u\left(\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

ſubſtituantur autem hic valores $u = \frac{\vartheta\,dx}{ds}$, $v = \frac{\vartheta\,dy}{ds}$ et quia ϑ eſt functio ipſarum t et x, fractiones vero $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ a ſola x pendent, peruenietur ad hanc aequationem

$$q\vartheta.\frac{d\omega}{\omega\,ds} + \frac{dx}{ds}\left(\frac{d.q\vartheta}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

Deinde cum celeritates in Y' ſecundum directiones OX et XY ſint

$$u + u\,dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{du}{dt}\right) \text{ et } v + u\,dt\left(\frac{dv}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

erunt

erunt accelerationes:

$$u\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right) \text{ et } u\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Ex viribus nunc sollicitantibus ponamus secundum easdem directiones resultare vires acceleratrices P et Q. Postea vero ob pressionem in $y=p+dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, elementum $YVyv$ in directione yY retro vrgetur vi acceleratrice $=\frac{dx}{qds}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, vnde nascuntur vires secundum directiones OX et XY hae:

$$P-\frac{dx^2}{qds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right) \quad \text{et} \quad Q-\frac{dx\,dy}{qds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)$$

hincque porro istae aequationes:

$$2gP-\frac{2g\,dx^2}{qds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)=u\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{\vartheta\vartheta}{ds}d.\frac{dx}{ds}+\frac{\vartheta dx^2}{ds^2}\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)+\frac{dx}{ds}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$$

$$2gQ-\frac{2g\,dx\,dy}{qds^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)=u\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right)=\frac{\vartheta\vartheta}{ds}d.\frac{dy}{ds}+\frac{\vartheta dx\,dy}{ds^2}\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)+\frac{dy}{ds}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$$

a quarum prima per dy multiplicata si subtrahatur altera in dx ducta relinquitur:

$$2g(Pdy-Qdx)=\frac{\vartheta\vartheta}{ds}\left(\frac{dy\,ddx-dx\,ddy}{ds}\right)=\vartheta\vartheta d.\text{Ang. tang.}\frac{dx}{dy}$$

Praeterea vero hinc colligitur:

$$2g(Pdx+Qdy)-\frac{2g\,dx}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)=\vartheta dx\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)+ds\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right).$$

Prior autem aequatio penitus hinc est excludenda, propterea quod ex pressione solam accelerationem secundum motus directionem computauimus, dum inde alia quoque nasceretur a lateribus tubi excepta et destructa. Vires enim P et Q aliter motum non afficiunt, nisi quatenus secundum directionem motus

Yy agunt ex quo ſola aequatio poſterior in calculo relinquitur, quae ſi tempus t conſtans ſtatuatur, preſſionem p ita definit vt ſit

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g(P\,dx + Q\,dy) - \mathfrak{v}\,d\mathfrak{v} - ds\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right).$$

Coroll. 1.

16. Patet ergo curuaturam lineae directricis nihil in motu fluidi turbare, dum formularum $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ differentialia, quibus curuatura definitur, penitus ex calculo euanuerunt.

Coroll. 2.

17. Prior quoque aequatio inuenta ad formam commodiorem reduci poteſt. Cum enim s ſit functio ipſius x tantum, perinde eſt ſiue $\mathfrak{v}$ conſideretur vt functio ipſarum x et t ſiue ipſarum s et t: ex quo erit $dx\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dx}\right) = ds\left(\frac{d\mathfrak{v}}{ds}\right)$ et ob eandem rationem $dx\left(\frac{d.q\mathfrak{v}}{dx}\right) = ds\left(\frac{d.q\mathfrak{v}}{ds}\right)$, vnde prior aequatio abit in hanc formam:

$$q\mathfrak{v}.\frac{d\omega}{\omega\,ds} + \left(\frac{d.q\mathfrak{v}}{dt}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

et porro in hanc: $\left(\frac{d.q\mathfrak{v}\omega}{ds}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0.$

Scholion 1.

18. Solutionem huius problematis ideo per tantas ambages minus neceſſarias deduxi, quo clarius appareat, curuaturam lineae directricis nihil plane in motu fluidi turbare; quod principium ſi ſtatim ſtabilire

ſtabilire voluiſſem, merito id in dubium vocare licuiſſet. Nunc autem demum certo agnoſcimus, quidquid de viribus ad motum fluidi inflectendum inſumitur, id quaſi a tubi lateribus abſorberi, ita vt eaedem prodeant motus determinationes, ac ſi tubus eſſet rectilineus. De viribus tantum ſollicitantibus obſeruandum eſt, pro quouis fluidi elemento inde eam ſolum vim acceleratricem elici debere, quae ſecundum ipſam motus directionem agat, reliquis viribus plane neglectis, quippe quae totae in latera tubi impenduntur. Hoc notato euidens eſt ſolutionem huius problematis plane non diſcrepare a probl. 42 ex eoque ſtatim deriuari potuiſſe, tantum loco x et u ſcribendo s et ϑ, et loco vis P hanc $P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds}$. Hoc ergo compendio iam animaduerſo multo facilius ſequentia problemata reſoluemus.

Scholion 2.

19. Ne vlli dubio locus relinquatur, clarius declarandum videtur, cur in aeſtimatione preſſionum quibus particula fluidi YV yv vrgetur, nullam rationem inaequalitatis baſium yv et YV habuerim, dum tamen in reliquis inueſtigationibus ad eam tam ſollicite reſpici oporteat. Cum enim poſita amplitudine $YV = \omega$, amplitudo yv vtique fiat $= \omega + dx\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, in eamque preſſio agat $p + dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, tota preſſio quam baſis yv ſuſtentat fit $p\omega + p\,dx\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \omega\,dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ dum ea, quam baſis YV ſuſtinet tantum eſt $= p\omega$

 ſicque

ſicque vis retro pellens maior foret, quam in ſolutione aſſumſeram, quae eadem difficultas etiam praecedentia problemata premere videtur. Verum hoc dubium facile diluitur, ſi ex iis quae ſupra de indole preſſionum ſunt tradita, recordemur omnes preſſiones, quae per aequales altitudines repraeſentantur ſe mutuo in aequilibrio tenere etiamſi in baſes maxime inaequales agant; hinc illius vis $p+dx(\frac{p}{dx})$, quam baſis xy ſuſtinet, pars p plane eſt in aequilibrio cum vi p baſin YV vrgente, etiamſi baſis xy maxime foret inaequalis huic YV, ex quo preſſionis illius, qua baſin yv impelli vidimus, non ſola pars $p\omega$ ſed haec $p\omega+pdx(\frac{d\omega}{dx})$ a preſſione oppoſita deſtruitur, ita vt exceſſus ex ſola parte $\omega\, dx\, (\frac{dp}{dx})$ aeſtimari debeat, prorſus vti in horum problematum ſolutionibus feci. Deinde ſi cui dubium adhuc videatur, quomodo in euolutione aequationum inuentarum differentialia ſecundi gradus ex calculo euaneſcant ita vt ſit $\frac{\vartheta\vartheta}{ds}dx\,d.\frac{dx}{ds}+\frac{\vartheta\vartheta}{ds}dy\,d.\frac{dy}{ds}=0$ is has formulas tantum euoluat, ac reperiet,

$$\frac{\vartheta\vartheta}{ds}\left(\frac{dx\,ddx}{dt}-\frac{dx^2\,dds}{ds^2}+\frac{dy\,ddy}{ds}-\frac{dy^2\,dds}{ds^2}\right)$$ quae forma ob $dx^2+dy^2=ds^2$ et $dx\,ddx+dy\,ddy=ds\,dds$ abit in

$$\frac{\vartheta\vartheta}{ds}\left(\frac{ds\,dds}{ds}-\frac{ds^2\,dds}{ds^2}\right)=0.$$

Problema 45.

Tab. II. Fig. 37. 29. Si tubi directrix ſit IYK linea curua in eodem plano poſita cuius amplitudo per longitudinem tubi vtcunque ſit variabilis, per methodum poſterio-

posteriorem supra traditam respectu ad statum initialem habito, motum fluidi cuiuscunque in hoc tubo definire.

Solutio.

In statu initiali consideremus fluidi particulam $YVY'V'$ et pro puncto Y positis coordinatis $OX = X$, $XY = Y$, sit ipse arcus $IY = S$ et in Y amplitudo tubi $YV = \Omega$ quae siue vt functio ipsius X spectetur siue ipsius S perinde est. Tum vero sit densitas in $Y = Q$ pressio $= P$, et celeritas secundum tubi directionem $YY' = \Upsilon$, si iam capiatur tubi elementum $YY' = dS$, erit particulae nostrae volumen $= \Omega\, dS$ et pressio $= Q\,\Omega\, dS$. His quae ad statum initialem pertinent positis tempore $= t$ nostra particula transferatur in $y\,v\,y'\,v'$, et pro puncto y vocetur $Ox = x$ $xy = y$ et arcus directricis $Iy = s$, tum vero densitas $= q$, et pressio $= p$, quae quantitates omnes sunt functiones duarum varibilium S et t, eaeque tales vt posito tempore $t = 0$ fiat $x = X$, $y = Y$, $s = S$, $q = Q$ et $p = P$ amplitudo vero tubi in y sit $yv = \omega$ functioni ipsius s. Quod si iam ratiocinium instituatur vt in probl. 43, quoniam tubi curuatura nihil turbat in motu fluidi, loco quantitatis X ibi tubi longitudinem denotantis hic litteram S scribi oportet. Ex viribus autem sollicitantibus si eae vires acceleratrices, quae secundum coordinatarum Ox et xy directiones agunt sint $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$, ea quae in y secundum tubi di-

 rectio-

rectionem vrget, erit $\frac{\mathfrak{P}dx+\mathfrak{Q}dy}{ds}$ atque hinc motus fluidi ſequentibus duabus aequationibus exprimetur.

$$q\omega\left(\frac{ds}{ds}\right)=Q\Omega \text{ et } \frac{2g\,dp}{q}=2g(\mathfrak{P}dx+\mathfrak{Q}dy)-ds\left(\frac{d\,ds}{dt^2}\right)$$

in qua poſteriori tempus t conſtans eſt aſſumtum.

Coroll 1.

21. Denotat ergo $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ celeritatem fluidi in tubi puncto y elapſo tempore $=t$, quam ergo ita comparatum eſſe oportet vt facto $t=0$ fiat $\left(\frac{ds}{dt}\right)=\Upsilon$ quippe quae celeritas in ſtatu initiali vt cognita eſt ſpectanda.

Coroll 2.

Curuamen ergo tubi tantum in effectu virium ſollicitantium variationem parit quoniam pro quauis fluidi particula ex viribus ſollicitantibus ea tantum vis acceleratrix colligi debet quae ſecundum tubi directionem agit.

Scholion.

23. Animaduerti hic conuenit in ſtatu initiali neque celeritatem Υ neque preſſionem P pro lubitu fingi poſſe, cum enim hae quantitates in aequationes pro motu inuentas non ingrediantur eas ita comparatas eſſe oportet, vt poſtquam aequationes inuentae fuerint integratae, ex valoribus ipſarum s et p poſito tempore $t=0$ illae quantitates oriantur. Quanquam autem integratio maximam amplitudinem ſecum importat, tamen effici nequit, vt in ſtatu initiali

initiali pro ſingulis elementis illae ambae quartitates Υ et P datos valores obtineant. Quodſi enim fluidum nullius compreſſionis ſit capax, ſtatim atque in vnica tubi ſectione celeritas datur, ſimul in omnibus reliquis determinatur, tum vero etiam per preſſionem in vnico tubi loco preſſiones in omnibus reliquis determinantur. Vnde ſatis intelligitur etiamſi denſitas fuerit variabilis quia ſemper cum celeritate et preſſione certo modo cohaeret, tamen non in ſingulis locis pro ſtatu initiali celeritatem et preſſionem pro lubitu fingi poſſe.

Problema 46.

24. Si tubi directrix I Z z K fuerit linea curva quaecunque non in eodem plano ſita, eiusque amplitudo vtcunque variabilis, definire motum fluidi in huiusmodi tubo ſecundum methodum priorem ſupra expoſitam. Tab. II. Fig. 38.

Solutio.

Hac methodo vtentes ſtatim conſideramus fluidi ſtatum ad tempus quodcunque indefinitum $= t$ a certo initio elapſum. Definita igitur directrice per ternas coordinatas $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$, quae ita a ſe inuicem pendent, vt pro vnica variabili haberi queant, ſtatuamus praeterea arcum directricis $Iz = s$, et in z ſit tubi amplitudo $zv = \omega$, quae etiam vt functio ipſius s eſt ſpectanda. In hoc iam loco z ad tempus $= t$, contemplamur fluidi particulam, cuius denſitas ſit $= q$,

preſſio

pressio $= p$ et celeritas secundum tubi directionem $zK = \mathfrak{v}$; quae quantitates sunt functiones duarum variabilium ipsius s scilicet et temporis t. Ex viribus denique sollicitantibus oriantur pro puncto z hae tres vires acceleratrices P, Q, R secundum directiones coordinatarum Ox, xy et yz; ex quibus porro vis secundum tubi directionem zK accelerans colligitur $\frac{P\,dx + Q\,dy + R\,dz}{ds}$. His positis cum tubi curuatura in motu fluidi nihil immutet, motus quaesitus sequentibus duabus aequationibus exprimetur, quarum prior relationem inter densitatem, celeritatem et amplitudinem tubi definit et ita se habet:

$$q\mathfrak{v}.\frac{d\omega}{\omega\,ds} + \left(\frac{d.q\mathfrak{v}}{ds}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0 \text{ seu } \left(\frac{d.q\mathfrak{v}\omega}{ds}\right) + \omega\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

altera vero praeterea pressionem inuoluit, in eaque tempus t vt constans spectatur:

$$\frac{2g\,dp}{q} = 2g(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) - \mathfrak{v}\,d\mathfrak{v} - ds\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right).$$

Problema 47.

Tab. II. Fig. 38. 25. Si tubi directrix $IZzK$ sit linea curua quaecunque non in eodem plano posita, eiusque amplitudo vtcunque variabilis definire motum fluidi in huiusmodi tubo secundum methodum posteriorem respectu ad statum initialem habito.

Solutio.

Dum singula directricis puncta Z per ternas coordinatas definiuntur $OX = X$, $XY = Y$ et

$YZ = Z$,

$YZ = Z$, ponatur insuper longitudo arcus $IZ = S$ et tubi amplitudo in $Z = \Omega$. Consideretur iam fluidi particula quaecunque, quae in statu initiali vbi erat tempus $t = 0$, erat in Z, eiusque densitas $= Q$ tum vero pressio $= P$ et celeritas secundum tubi directionem $ZK = \Upsilon$; quae ergo quantitates vt datae et functiones vnius variabilis S spectari possunt. Nunc elapso tempore $= t$ eadem particula peruenerit in tubi punctum z, coordinatis $Ox = x$, $xy = y$ et $yz = z$ definitum, vbi sit arcus $Iz = s$, et tubi amplitudo $z = \omega$, quae est functio ipsius s, tum vero in z sit fluidi densitas $= q$, pressio $= p$, et celeritas secundum $zK = \upsilon$ quam per has denominationes nouimus esse $\upsilon = (\frac{ds}{dt})$, haeque quantitates omnes vt functiones duarum variabilium S et t sunt spectandae. Denique ex resolutione virium particulam in z sollicitantium deriuentur secundum directiones Ox, xy et yz hae tres vires acceleratrices $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$. Quibus positis cum tubi curuatura nihil in nostra inuestigatione perturbet, habebimus vti in Probl. 45 pro motu fluidi in hoc tubo has duas aequationes:

$$q\,\omega\,(\frac{ds}{dS}) = Q\,\Omega$$

et $\frac{2g\,dp}{q} = 2g(\mathfrak{P}\,dx + \mathfrak{Q}\,dy + \mathfrak{R}\,dz) - ds\,(\frac{dds}{dt^2})$

in qua posteriori tempus t constans est assumtum.

Scholion.

26. Omnia haec problemata duplici modo dedimus soluta, dum vtramque methodum in praece-

dente sectione expositam adhibuimus. Solutiones quidem hae geminae ratione formae plurimum discrepant, verumtamen quin semper egregie inter se conueniant nullo modo dubitari potest. Prout autem quaestiones fuerint comparatae modo magis expediet vti solutione priori modo posteriori; semper autem vtramque adhibendo non solum earum consensus veritatem eo magis confirmabit, sed etiam insignes dilucidationes suppeditabit, vnde veram motus naturam eo accuratius cognoscemus. Huius autem tractationis primariam diuisionem praebet fluidorum diuersitas, quatenus eorum densitas vel est constans vel variabilis, quorsum addi potest fluidum mixtum, veluti si fluidi continuitas in tubo bullis aëreis fuerit interrupta. Virium sollicitantium ratio tam parum afficit hanc tractationem, vt vix operae pretium sit alias vires praeter grauitatem considerari, neque hic etiam quicquam impedit, si forte actio virium $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ integrationem non admittat, hic enim x, y et z a se inuicem pendent, et vnicam variabilem constituere sunt censendae quamobrem illa difficultas locum habere nequit. At vero amplitudinis tubi variatio tantopere in calculum influit, vt maxime conducat hinc diuisionem petere; ex quo primo tubos eiusdem vbique amplitudinis sum contemplaturus. Denique omnem fluidorum diuersitatem ad duas species aquae et aëris reuocare licet.

CAPVT

CAPVT II.

DE

MOTV AQVAE IN TVBIS AEQVALITER VBIQVE AMPLIS.

Problema 48.

27. Si tubi aequaliter ampli directrix fuerit linea curua quaecunque in quo aqua a sola grauitate animata moueatur, eius motum definire.

Solutio.

Habeat tubi $IiKk$ directrix $IZzK$ figuram quamcunque curuam aequatione duplici inter ternas coordinatas $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$ determinatam, ponaturque directricis arcus $Iz = s$ vt sit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, vt quantitates x, y, z vt functiones ipsius s spectari queant. Sit tubi amplitudo $= \alpha$, et densitas aquae littera b designetur vt sit $\omega = \alpha$ et $q = b$. Tum vero elapso tempore $= t$ sit pressio aquae in $z = p$ et celeritas ibidem secundum directionem $zK = \upsilon$; vires autem sollicitantes P, Q, R, si applicata yz statuatur verticalis reducuntur ad $P = 0$, $Q = 0$ et $R = -1$. His positis ex probl. 46, ob $q = b$ et $\omega = \alpha$ motus duabus sequentibus aequationibus determinabitur: Tab. II. Fig. 38.

I. $\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) = 0$; II. $\frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dz - \upsilon\,d\upsilon - ds\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$

 in

in posteriori sumto tempore t constante. Ex priori ergo patet celeritatem υ functionem esse temporis t tantum, ideoque $\upsilon = \Gamma : t$; vnde cum in altera sola s vt variabilis spectetur fiet $d\upsilon = 0$, et $\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) = \Gamma' : t$, hincque habebitur:

$$\frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dz - ds\,\Gamma' : t \text{ et integrando:}$$

$$\frac{2gp}{b} = 2g(b - z) - s\,\Gamma' : t + \Delta : t.$$

Quouis ergo temporis instante celeritas aquae in tubo vbique est eadem, diuerso antem tempore vtcunque variabilis esse potest; a qua variabilitate pressio p non solum maxime pendet, sed insuper functionem temporis quamcunque assumit: has autem duas functiones in se arbitrarias ex circumstantiis et viribus extrinsecus aquam vrgentibus determinari debere per se est perspicuum.

Coroll. 1.

28. Circa motum ergo aquae in tubis aeque amplis hic in genere plus non determinatur, quam quod quouis temporis momento aqua vbique pari celeritate secundum tubi tractum moueatur, et quod pressio p certo quodam modo determinetur.

Coroll. 2.

29. Quaecunque igitur functio temporis t pro celeritate υ accipiatur, semper affirmare licet, eiusmodi motum aquae in tubo a equaliter amplo esse possibilem, dummodo eiusmodi vires externae adhibeantur,

beantur, quae illi continuae accelerationi seu retardationi producendae sint pares.

Scholion I.

30. In huius problematis solutione vsus sum methodo priore in probl. 46 exposita, vnde conueniet quoque solutionem ex altera methodo probl. 47 elicere. Ponamus ergo fluidi elementum quod nunc post tempus $= t$ in z considerauimus initio vbi $t = o$ fuisse in Z existente $OX = X$, $XY = Y$ $YZ = Z$ et arcu $IZ = S$, atque ob $q = Q = b$ et $\omega = \Omega = a$ prior aequatio dat $(\frac{ds}{dS}) = 1$ vnde colligitur $s = S + \Gamma : t$, ideoque celeritas aquae in z fit $(\frac{ds}{dt}) = \Gamma' : t$. Altera vero aequatio praebet:

$\frac{2g\,dp}{b} = -2g\,dz - ds.\Gamma'' : t$ tempore t sumto constante

quae ergo integrata dat:

$$\frac{2gp}{b} = 2g(b - z) - s\,\Gamma'' : t + \Delta : t$$

quae cum praecedente prorsus conuenit, nisi quod hic celeritas in z post tempus t exprimatur per $\Gamma' : t$ cum ea ante esset $\Gamma : t$. Id tantum obiici posset; quod cum z et s spectari debeant vt functiones binarum variabilium S et t, in posteriori vero aequatione tempus t constans sit assumtum, differentialia dz et ds non completa sed eae tantum partes accipi debeant, quae ex sola variabilitate ipsius S oriuntur; hincque vicissim integralia non absolute, vti est factum, capi debere. Cui dubio vt occurramus, sit z functio quaecunque binarum variabilium

S et t, vnde fiat $dz = M\,dS + N\,dt$; atque certum eſt in illa aequatione differentiali loco dz ſcribi debere $M\,dS$ Verum ob eandem rationem, quod hic tempus t ſumitur conſtans, membri $M\,dS$ integrale iterum eſt z, cui quidem functio ipſius t adiungi poſſet, quae autem iam in $\Delta : t$ contineri eſt cenſenda; quod idem de integratione differentialis ds eſt iudicandum.

Scholion 2.

31. Problema igitur propoſitum vt maxime indeterminatum ſpectari debet, cum vires quascunque externas, quibus aqua, dum in tubo mouetur, ſollicitari poteſt, in ſe complectatur, ideoque nunc demum verus eius motus ex his viribus externis penitus determinari debeat. Dum autem aqua in tubo verſatur, aliae vires externae in eam agere nequeant, niſi quibus maſſa aquae in vtroque termino prematur; maſſa ſcilicet aquae certa, quae quouis momento in tubo, cuius extenſio vt indefinita eſt conſideranda, certam longitudinem occupet, eſt ſtatuenda, quae vtrinque ope piſtillorum certis viribus ſollicitetur; quandoquidem durante motu neque nouam aquae molem accedere, neque vsquam effluxum ex tubo concedere velimus, quippe qui caſus peculiarem requirunt euolutionem. Primo ergo ſtatuamus in tubo infinitae longitudinis certam aquae molem continuo moueri, et vtroque termino jugiter certis viribus ſollicitari; et quia tubi curuatura non aliter in computum venit, niſi quatenus inde

inde altitudo z pendet, commoditatis gratia tubum, quasi eius directrix esset linea recta, contemplabor, simul pro quouis puncto eius altitudinem super plano horizontali fixo assignaturus.

Problema 49.

32. Si certa aquae massa in tubo aequaliter amplo continuo moueatur, et vtrinque a viribus quibuscunque vrgeatur, eius motum et pressionem in singulis punctis ad quoduis tempus determinare.

Solutio.

Tubum quomodocunque curuum tanquam in rectum extensum consideremus, id tantum annotantes puncti cuiusque z altitudinem supra certum planum horizontale esse $= z$, quae pro singulis punctis vt data est concipienda. Iam elapso tempore t aquae massa in tubo occupet spatium MN, quod ergo erit constantis quantitatis $= l$, ponamusque a puncto tubi fixo A distantia $AM = m$, $AN = n$, vt sit $l = n - m$; eleuatio autem super planum horizontale sit puncti $M = \mu$, puncti vero $N = \nu$. At iam haec vena aquea MN in M vrgeatur pressione $= M$, in N vero pressione $= N$, quae sint functiones temporis quaecunque datae, celeritas vero huius massae aqueae sit $= v$ qua versus K promoueatur, et quae est functio temporis quaesita posita $v = \Gamma : t$. Si nunc in loco z quouis medio, cuius distantia a termino fixo A sit $Az = s$, pressio sta- Tab. II. Fig. 39.

tuatur

tuatur $= p$, erit $\frac{2gp}{b} = 2g(b-z) - s\Gamma' : t + \Delta : t$. Transferatur hoc punctum z primo in M, tum vero in N et quia in his punctis pressiones illis ipsis, quibus nunc aqua in his terminis vrgeri assumimus, aequales esse debent, hinc duas elicimus aequationes:

$$\frac{2gM}{b} = 2g(b-\mu) - m\Gamma' : t + \Delta : t \text{ et}$$

$$\frac{2gN}{b} = 2g(b-\nu) - n\Gamma' : t + \Delta : t$$

quarum haec ab illa subtracta relinquit:

$$\frac{2g}{b}(M-N) = 2g(\nu-\mu) + (n-m)\Gamma' : t$$

vnde colligitur $\Gamma' : t = \frac{2g(M-N) - 2gb(\nu-\mu)}{b(n-m)}$ et

$$\Delta : t = \frac{2g(Mn-Nm)}{b(n-m)} - 2gb + \frac{2g(n\mu - m\nu)}{n-m}.$$

Quia autem terminorum M et N eadem est celeritas $\upsilon = \Gamma : t$, iique tempore dt per spatiola dm et dn progrediuntur, erit $\frac{dm}{dt} = \upsilon = \Gamma : t = \frac{dn}{dt}$; vnde fit $\Gamma' : t = \frac{ddm}{dt^2}$, ita vt ob $n - m = l$ constanti celeritas aquae $MN = \frac{dm}{dt}$ perinde ac distantia $AM = m$ ex hac aequatione elici debeat:

$$bl.\frac{ddm}{dt^2} = 2g(M-N) - 2gb(\nu-\mu)$$

vbi M et N sunt functiones datae temporis t at μ et ν quantitates variabiles ab m et n pendentes. Resoluta autem hac aequatione, qua ad tempus $= t$ locus termini M determinatur, habebitur primo celeritas aqueae venae $MN = \frac{dm}{dt}$, tum vero pro quocunque puncto medio z vt sit $Az = s$, pressio p ex hac aequatione definitur:

$\frac{2gp}{b}$

$$\frac{2gp}{b}=\frac{2g(Mn-Nm)}{bl}+\frac{2g(n\mu-m\nu)}{l}-2gz-\frac{2gs(M-N)}{bl}+\frac{2gs(\nu-\mu)}{l}$$

quae ergo praebet:

$$p=\frac{Mn-Nm}{l}+\frac{b(n\mu-m\nu)}{l}-bz-\frac{s(M-N)}{l}+\frac{bs(\nu-\mu)}{l} \text{ seu}$$

$$p=\frac{M(n-s)}{l}+\frac{N(s-m)}{l}+\frac{b\mu(n-s)}{l}+\frac{b\nu(s-m)}{l}-bz$$

Poſtquam ergo pro dato tempore t inuentus fuerit locus M in tubo ſeu $AM=m$, vnde ſimul celeritas $\frac{dm}{dt}$ innoteſcit, inde pro quouis elemento aquae in ſpatio MN contento preſſio definitur.

Coroll 1.

33. Si venam aqueam vtrinque nulla plane vis vrgeat vt ſit $M=0$ et $N=0$ eius motus ex hac aequatione debet determinari $bl.\frac{ddm}{dt^2}=-2gb(\nu-\mu)$ ſeu $\frac{ddm}{dt^2}+\frac{2g}{l}(\nu-\mu)=0$ tum vero preſſio erit

$$p=\frac{b\mu(n-s)+b\nu(s-m)}{l}-bz.$$

Coroll 2.

34. Sin autem binae preſſiones M et N inter ſe fuerint aequales, tum prior quidem aequatio differentio-differentialis manet eadem, altera vero parumper diſcrepat:

$$p=M+\frac{b\mu(n-s)+br(s-m)}{l}-bz$$

ita vt haec preſſio illam conſtanter ſuperet quantitate M.

Coroll 3.

35. Totum negotium ad aequationem differentialem secundi gradus reducitur, quae etiamsi pressiones M et N sint inaequales, ideo tamen non fit solutu difficilior sed tota difficultas residet in altitudinibus μ et ν, quippe quae per m determinantur.

Scholion.

36. Casus coroll 1. quo pressiones M et N euanescentes fecimus, nonnisi in vacuo locum habere potest, quando enim motus fit in aëre, vena aquea in vtroque termino a pondere atmosphaerae premitur et quidem pari vi, nisi ambo termini ad altitudines maxime differentes pertingant. Quare si vena in vtroque termino fuerit libera et aperta in coroll 2. littera M denotabit pressionem atmosphaerae quae cum fere aequiualeat columnae aqueae 33 pedes altae si pro hac altitudine scribamus k erit $M = bk$, et quia hic perpetuo de aqua est sermo pressiones etiam per columnas aqueas exprimi conueniet, vnde densitatem aquae b vnitati aequalem statuamus. Quocirca pressionem in aquae vena habebimus:

$$p = k \; [illegible] \; \frac{\mu(n-s)+\nu(s-m)}{l}.$$

Maximi autem momenti est pressionem atmosphaerae k in calculum introducere, etiamsi non sentiatur; ea enim omissa saepe fieri posset, vt pressio p euaderet negatiua, neque tamen continuitas fluidi soluatur; quod tamen semper euenire debet, vbi pressio reuera fit

fit negatiua. Atmofphaerae autem ratione habita motus inuentus durare poteft, quamdiu preffio p tum non fit negatiua; ea autem negatiua euadente continuitas certe foluitur; nifi forte ob cohaefionem feu potius aetheris preffionem contineatur.

Exemplum 1.

37. *Si tubus fuerit rectus et ad horizontem vtcunque inclinatus, motum venae aqueae* M N *vtrinque apertae in eo definire.* Sit inclinatio tubi AK ad horizontem $= \eta$, et vena aquea in eo furfum moveatur impetu fcilicet accepto; fin autem velimus vt defcendat, angulum η negatiuum capi oportet. Hinc ergo erunt altitudines fuper plano horizontali $\mu = m$ fin. η, $z = s$ fin. η et $\nu = (l + m)$ fin. η, vnde prima aequatio fit $\frac{ddm}{dt^2} + 2g$ fin. $\eta = 0$; hincque celeritas $\frac{dm}{dt} = 2g(f - t$ fin. $\eta)$, exiftente $2gf$ celeritate initiali. At porro prodit $m = g(2ft - tt$ fin. $\eta)$, fiquidem initio vena occupauerit tubi portionem A B. Iam in loco quouis z ob $\mu(n - s)$ $= m(m + l - s)$ fin. η et $\nu(s - m) = (m + l)(s - m)$ fin. η erit preffio $p = k - z + s$ fin. $\eta = k$ ideoque femper et vbique preffioni atmofphaerae aequalis. Hinc patet venam aqueam in tubo perinde moueri ac corpus folidum fiue afcendendo fiue defcendendo.

Exemplum 2.

38. *Si tubus* A B C D *fuerit recuruatus, vt duo habeat brachia verticalia* A B *et* D C *medio* B C Tab. II. Fig. 40.

 exiftente

existente horizontali, in eoque vena aquea M B C N *ita moueatur, vt eius termini* M *et* N *in brachiis verticalibus semper haereant, hunc motum determinare.* Elapso tempore $= t$ occupet vena aquea spatium tubi M B C N, vt sit $MB + BC + CN = l$, seu ducta horizontali E F ita vt sit $BE = CF = \frac{1}{2}(BM + CN)$ erit $l = BC + 2\,BE$. Tum posito $AM = m$ erit $\mu = BM$ et $\nu = CN$, hinc $\nu - \mu = CN - BM = -2\,ME$. Statuatur $AE = E$ et $ME = x$ erit $m = e - x$, vnde prima aequatio dat $-\frac{ddx}{dt^2} - \frac{4g}{l}x = 0$ seu $ddx + \frac{4g}{l}x\,dt^2 = 0$ quae per $2\,dx$ multiplicata praebet integrando $dx^2 + \frac{4g}{l}xx\,dt^2 = \frac{4g}{l}aa\,dt^2$, hincque

$$2\,dt\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{dx}{\sqrt{(aa - xx)}} \text{ et } 2(t+b)\sqrt{\frac{g}{l}} = \text{Ang. fin. } \frac{x}{a}$$

ita vt iam sit

$$x = e - m = a \,\text{fin.}\, 2(t+b)\sqrt{\frac{g}{l}}$$

et celeritas in M deorsum tendens $= -\frac{2a\sqrt{g}}{\sqrt{l}}\,\text{cof.}\, 2(t+b)\sqrt{\frac{g}{l}}$. Cum ergo in E peruenit erit eius celeritas $= \frac{2a\sqrt{g}}{\sqrt{l}}$ si tum fieri ponamus $2(t+b)\sqrt{\frac{g}{l}} = \pi$, vnde cum motus initium vbi lubuerit constitui queat, faciamus $e = a$, fitque

$m = AM = a(1 - \text{cof.}\, 2t\sqrt{\frac{g}{l}})$ vt fit $\frac{dm}{dt} = \frac{2a\sqrt{g}}{\sqrt{l}}\,\text{fin.}\, 2t\sqrt{\frac{g}{l}}$

ita vt motus initio fuerit $m = 0$ seu $EM = EA$ et celeritas $= 0$. Vena aquea ergo motu oscillatorio feretur, cuius excursiones maximae supra et infra horizontalem E F erunt $= a$, et terminus M ab altitudine maxima ad minimam perueniet tempore

$t =$

$t = \frac{\pi\sqrt{l}}{2\sqrt{g}}$, ſicque hic motus conueniet cum oſcillationibus penduli ſimplicis cuius longitudo $= \frac{1}{2}l = BE + \frac{1}{2}BC$. His inuentis in loco quocunque z vt ſit $Az = s$ preſſio erit

$$p = k - Bz + \frac{BM(Bz + BC + CN)}{l} + \frac{CN.Mz}{l} \text{ ſeu}$$

$$p = k + Mz - \frac{2ME.Mz}{l}$$

vbi Mz in priori loco denotat profunditatem puncti z infra M at in poſteriori loco diſtantiam in tubo a termino M. Quare in brachio horizontali erit preſſio

in $z' = k + BN - \frac{2ME(MB + Bz')}{l}$ et

in $z'' = k + BM - Cz'' - \frac{2ME(MB + BC + Cz'')}{l} = k + Nz'' + \frac{2ME.Nz''}{l}$.

Coroll. 1.

39. Cum ergo fluidum inter oſcillandum in horizontalem EF pertingit, ob $ME = 0$, preſſio in z erit $= k + Ez$, denotante Ez profunditatem puncti z infra lineam EF. Hinc ſi tubi pars BC non ſit recta ſed ſurſum inflexa, eius eleuatio ſuper EF maior eſſe nequit quam k, quia tum preſſio ibi fieret negatiua et fluidi continuitas ſolueretur.

Coroll. 2.

40. Si ergo tubus habeat figuram ABOCD, cuius brachia AB et DC ſint verticalia, medium autem BOC ſurſum ſupra horizontalem EF in- Tab. II. Fig. 41.

 flexum

flexum aequaliter vtrinque vt fit $EB + BO = \frac{1}{2} l$, pressio in summo puncto O erit $= k - OP + ME - \frac{2ME(OB+MB)}{l} = k - OP + ME - \frac{ME(MB+BO)}{EB+BO} = k - OP - \frac{ME.ME}{EB+BO}$. Ne ergo continuitas fluidi soluatur, non sufficit vt sit $OP < k$, sed oportet esse $OP < k - \frac{ME^2}{EB+BO}$.

Exemplum 3.

Tab. III. Fig. 42. 41. *Constet tubus aequaliter amplus duobus ramis rectis* AB *et* BC *ad horizontem* EF *vtcunque inclinatis, ramus autem* BC *superne in* C *sit clausus et aëre vacuus, in hocque tubo moueatur vena aquae* MBN *datae longitudinis, eius motum definire.*

Sit angulus $ABE = \varepsilon$ et angulus $CBF = \zeta$, longitudo venae $MB + BN = l$, et $AM = m$; in M ergo aqua premitur ab atmosphaera vt sit $M = k$, in N vero nulla est pressio, vt sit $N = 0$, tum vero ex solutione problematis est $\mu = M\mu$ et $\nu = N\nu$, vnde densitate aquae posita $= 1$ habetur haec aequatio

$$l.\frac{ddm}{dt^2} = 2gk - 2g(N\nu - M\mu)$$

ac pro tubi loco quocunque z erit pressio

$$p = \frac{k(l+m-Az)}{l} + \frac{M\mu(l+m-Az)}{l} + \frac{N\nu(Az-m)}{l} - zp \text{ seu}$$

$$p = \frac{k(l-Mz)}{l} + \frac{M\mu(l-Mz)}{l} + \frac{N\nu.Mz}{l} - zp$$

at pro puncto z' in altero ramo

$$p = \frac{k(l-BM-Bz')}{l} + \frac{M\mu(l-MB-Bz')}{l} + \frac{N\nu(MB+Bz')}{l} - z'p'$$

Ad

Ad hunc calculum expediendum vocemus $BM = x$ vt ſit $BN = l - x$ eritque $M\mu = x \text{ ſin. } \varepsilon$ et $N\nu = (l-x) \text{ ſin. } \zeta$; vnde aequatio differentialis erit

$$l. \frac{ddx}{dt^2} + 2g(k + x \text{ ſin. } \varepsilon - (l-x) \text{ ſin. } \zeta) = 0$$

quae per $2\,dx$ multiplicata et integrata praebet:

$$l. \frac{dx^2}{dt^2} + 2g(2kx + xx \text{ ſin. } \varepsilon + (l-x)^2 \text{ ſin. } \zeta) = 2gff.$$

Quare celeritas venae $\frac{dm}{dt} = -\frac{dx}{dt}$; ſiquidem eam verſus C ferri ponamus erit

$$\frac{-dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\,(ff - 2kx - xx \text{ ſin. } \varepsilon - (l-x)^2 \text{ ſin. } \zeta) \text{ ſeu}$$

$$\frac{-dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}(ff - ll \text{ ſin. } \zeta - 2kx + 2lx \text{ ſin. } \zeta - xx(\text{ſin. } \varepsilon + \text{ſin. } \zeta))$$

vnde intelligimus celeritatem euaneſcere, cum fuerit

$$x = \frac{-k + l \sin.\zeta \pm \sqrt{(kk - 2kl \sin.\zeta - ll \sin.\varepsilon \sin.\zeta + ff(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta))}}{\sin.\varepsilon + \sin.\zeta}$$

maxima autem fiet vbi $x = \frac{-k + l \sin.\zeta}{\sin.\varepsilon + \sin.\zeta}$; haecque celeritas maxima erit $= \sqrt{\frac{2g}{l}}\left(ff + \frac{kk - 2kl \sin.\zeta - ll \sin.\varepsilon \sin.\zeta}{\sin.\varepsilon + \sin.\zeta}\right)$.

Pro tempore vero habebimus:

$$dt\sqrt{\frac{2g}{l}} = \frac{-dx}{\sqrt{(ff - ll \sin.\zeta - 2kx + 2lx \sin.\zeta - xx(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta))}}$$

vnde integrando colligimus:

$$x = \frac{-k + l \sin.\zeta + \cos.\lambda t.\sqrt{(ff(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta) + kk - 2kl \sin.\zeta - ll \sin.\varepsilon \sin.\zeta)}}{\sin.\varepsilon + \sin.\zeta}$$

exiſtente $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{l}}\,(\text{ſin. } \varepsilon + \text{ſin. } \zeta)$.

Quodſi iam pro tubi puncto z ponamus $Bz = z$ erit preſſio ibidem

$$p = \frac{(k + x \sin.\varepsilon)(l - x + z)}{l} + \frac{(l+x)\sin.\zeta}{l}(x - z) - z \text{ ſin. } \varepsilon.$$

At pro puncto z' in altero ramo BC ponendo $Bz' = z'$ erit

$$p' = \frac{(k + x \sin.\varepsilon)(l - x - z')}{l} + \frac{(l-x)\sin.\zeta}{l}(x + z') - z' \text{ ſin. } \zeta.$$

Illo

Illo casu erit succinctius $p = \frac{(k + x(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta))(l - x + z)}{l}$ $- z(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta)$ hoc vero $p' = \frac{(k + x(\sin.\varepsilon + \sin.\zeta))(l - x - z')}{l}$.

Coroll. I.

Tab. III. Fig. 43. 42. Sit tubi brachium AB horizontale et BC verticale hincque $\varepsilon = 0$ et $\zeta = 90°$. Vnde fit celeritas in $M = = V \frac{2g}{l}(ff - ll - 2kx + 2lx - xx)$. Ponamus initio totam venam tubum horizontalem AB occupasse, ibique quieuisse, vt sit $AB = l$, necesse ergo est, vt posito $BM = x = l$ celeritas euanescat, sumique debeat $ff = 2kl$; vnde cum vena in situm MBN peruenerit erit celeritas $= V \frac{2g}{l}(l - x)(2k - l + x)$; et quando tota vena in tubum verticalem peruenit, quod fit si $x = 0$, eius celeritas qua ascendere perget erit adhuc $= V \frac{2g}{l}(2k - l)$. Dum ergo longitudo venae minor sit quam $2k$, tota vena in tubum verticalem ascendit, siquidem fuerit altior quam $2k$.

Coroll. 2.

43. Sumto autem $ff = 2kl$ et $\lambda = V \frac{2g}{l}$, aequatio bis integrata fit: $x = -k + l + k\,\mathrm{cos.}(\lambda t + \gamma)$. Vnde cum initio fuerit $x = l$, angulus constans γ euanescit, vt sit $x = l - k(1 - \mathrm{cos.}\,\lambda t)$. Tempus ergo quo tota vena in tubum verticalem intrat, hinc definiri debet $1 - \mathrm{cos.}\,\lambda t = \frac{l}{k}$ seu $\lambda t = \mathrm{Ang.\,cos.}(1 - \frac{l}{k})$. Quare si $l = k$ erit $t = \frac{\pi}{2\lambda} = \frac{\pi \surd l}{2\surd 2g}$, sin autem sit $l = 2k$ fit $t = \frac{\pi \surd l}{\surd 2g}$.

Scho-

Scholion.

44. Nihil impedit quo minus pro aqua mercurium ſubſtituamus, ac tum k erit altitudo mercurii in barometro; atque hinc oſcillationes mercurii in barometro definire poterimus, ſi ipſi infra adiunctus ſit tubus horizontalis B A eiusdem amplitudinis. Ponamus ergo in ſtatu aequilibrii altitudinem $BK = k$ et $BE = e$, vt ſit tota vena mercurialis $l = e + k$. Facta iam quadam agitatione, ſit vena in ſtatu MBN exiſtente $BM = x$ et $EM = x - e$ atque celeritas mercurii in tubo aſcendentis erit: Tab. III. Fig. 44.

$$-\frac{dx}{dt} = \sqrt{\tfrac{2g}{l}}(ff - ll - 2kx + 2lx + xx),$$

quam poſito $x = a = BA$ euanuiſſe ponamus, ita vt ſtatui debeat $ff = (l-a)^2 + 2ak$ quo facto erit celeritas $= \sqrt{\tfrac{2g}{l}}(a-x)(2k - 2l + a + x)$.

Statuamus $EA = c$; $EM = y$, vt ſit $a = c + e$; $x = e + y$, et ob $l = e + k$ erit haec celeritas:

$$-\frac{dy}{dt} = \sqrt{\tfrac{2g}{e+k}}(c-y)(c+y) = \sqrt{\tfrac{2g(cc-yy)}{e+k}}$$

vnde colligimus $\frac{dt\sqrt{2g}}{\sqrt{(e+k)}} = \frac{-dy}{\sqrt{(cc-yy)}}$ et integrando

$$\frac{t\sqrt{2g}}{\sqrt{(e+k)}} = \text{Ang. coſ.}\,\frac{y}{c}.\ \text{ſeu}\ y = c\,\text{coſ.}\,\frac{t\sqrt{2g}}{\sqrt{(e+k)}}.$$

Quare mercurius in barometro circa ſtatum aequilibrii Kk oſcillationes peraget, tempore cuiusque exiſtente $= \frac{\pi\sqrt{(e+k)}}{\sqrt{2g}}$, ſeu eae erunt iſochronae pendulo, cuius longitudo eſt $= e + k$.

Problema 50.

Tab. III. Fig. 45. 45. Si aqua in tubo aequaliter amplo ita moveatur, vt in altero termino effluat, in altero vero continuo ſuccedente prematur a vi quacunque, hunc motum effluxus et preſſionem in ſingulis elementis aquae determinare.

Solutio.

Quamcunque tubus habuerit figuram, is tanquam in directum extenſus A a O o conſideretur; cui adiungatur ſcala altitudinum $\alpha\,\omega$, cuius applicatae $z\,\pi$ exhibent cuiusque tubi puncti z altitudinem ſuper dato plano horizontali. Iam elapſo tempore t aqua effluat per tubi orificium O o celeritate $= v$, qua ſimul tota fluidi maſſa, quae adhuc eſt in tubo ſuccedat. Occupet autem iam aqua tubi partem M O et in M m vrgeatur vi exprimenda per altitudinem $=$ M. In O autem vbi aqua effluit in aërem alia preſſio locum habere nequit, niſi atmoſphaerae, quae aequiualens ſtatuatur columnae aqueae, altitudinis $= k$. Pertigerit initio aqua vsque ad A et ponatur longitudo A O $= a$, atque nunc ſit A M $= m$, functio temporis t, ex qua definitur celeritas $v = \frac{d\,m}{d\,t}$. Iam quoduis aquae elementum in z conſideretur, cuius altitudo ſupra planum horizontale ſit $z\,\pi = z$ et poſita denſitate aquae $= 1$, et preſſione in $z = p$, tum vero diſtantia A $z = s$, ex probl. 48. hanc nanciſcimur aequationem

$$2gp = 2g(b-z) - s\Gamma' : t + \Delta : t$$

vbi eſt $\Gamma : t = \mathfrak{v} = \frac{dm}{dt}$, ideoque $\Gamma' : t = \frac{ddm}{dt^2}$; eſt enim diſtantia $AM = m$ et celeritas $\mathfrak{v}$ functio temporis t tantum. Transferamus nunc primo punctum z in M, vbi cum preſſio ſit data $= M$ ob $s = m$ habebimus:

$$2gM = 2g(b - M\mu) - m\Gamma' : t + \Delta : t$$

deinde transferamus punctum z in orificium O ponendo $s = a$, vbi cum preſſio pariter ſit cognita $= k$ erit

$$2gk = 2g(b - O\omega) - a\Gamma' : t + \Delta : t.$$

Ex his aequationibus colligimus primo

$$2g(M-k) = 2g(O\omega - M\mu) + (a-m)\Gamma' : t$$

ideoque $\Gamma' : t = \frac{ddm}{dt^2} = \frac{2g(M-k+M\mu-O\omega)}{a-m}$

tum vero cum ſit

$$2g(M-p) = 2g(z - M\mu) + (s-m)\Gamma' : t \text{ erit}$$

$$M - p = z - M\mu + \frac{(s-m)(M-k+M\mu-O\omega)}{a-m}$$

ſeu $p = \frac{M(a-s)+k(s-m)+M\mu(a-s)+O\omega(s-m)}{a-m} - z$

vel $p = \frac{(M+M\mu)(a-s)+(K+O\omega)(s-m)}{a-m} - z$

vel etiam $p = \frac{Oz(M+M\mu)+Mz(k+O\omega)}{MO} - z.$

Totum ergo negotium ab illa aequatione differentio differentiali pendet.

Coroll. I.

46. Si preſſio in M fuerit vel conſtans, vel a ſpatio $AM = m$ pendens, quoniam altitudo $M\mu$

ab eodem pendet et $O\omega$ eſt conſtans, aequatio differentio-differentialis per $2\,dm$ multiplicata fit integrabilis reddens:

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int\frac{M-k+M\mu-O\omega}{a-m}\,dm$$

qua forma quadratum celeritatis exprimitur.

Coroll. 2.

47. Si effluxus fieret in ſpatium ab aëre vacuum, perſpicuum eſt in noſtris formis ſcribi debere $k=0$; ac ſi in M aqua nullam aliam vim praeter preſſionem atmoſphaerae ſuſtineat, erit $M=k$. Quare ſi aqua vtrinque aëri pateat erit $M=k$ et $\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int\frac{M\mu-O\omega}{a-m}\,dm$ et pro preſſione in z fiet $p = k - z + \frac{Oz.M\mu + Mz.O\omega}{MO}$.

Exemplum 1.

Tab. III. Fig. 46. 48. *Sit tubus rectus* AO *vtcunque inclinatus ad horizontem, qui initio ab* O *ad* A *vsque fuerit aqua plenus, indeque per orificium* Oo *effluat, hunc motum determinare.*

Poſito angulo $AOE=\varepsilon$, ob $MO=a-m$ erit altitudo $M\mu=(a-m)\,\text{ſin.}\,\varepsilon$ et $O\omega=0$. Quare cum ſit $M=k$, fiet $\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int dm\,\text{ſin.}\,\varepsilon$ $=4gm\,\text{ſin.}\,\varepsilon$, quia facto $AM=m=0$ motus a quiete incepiſſe ponitur. Hinc igitur porro fit $\frac{dm}{\sqrt{m}}$ $=2\,dt\sqrt{g\,\text{ſin.}\,\varepsilon}$, et integrando $\sqrt{m} = t\sqrt{g\,\text{ſin.}\,\varepsilon}$; vnde concludimus aquam omnem e tubo effluxuram eſſe tempore $=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g\,\text{ſin.}\,\varepsilon}}$; quod tempus conuenit cum

eo,

eo, quo corpus graue ſuper plano inclinato A O eſſet deſcenſurum.

In puncto z vero eſt preſſio $p = k - z\pi + \frac{Oz \cdot M\mu}{MO}$, cum autem ſit $MO : M\mu = Oz : z\pi$ ſit $p = k$, ſeu per totam venam M O preſſio eſt eadem ſcilicet atmoſphaerae, quae vulgo nulla reputatur.

Exemplum 2.

49. *Si vt ante ex tubo inclinato recto* A O *aqua non in aërem ſed in ſpatium vacuum effluat, hunc motum determinare.*

Manente angulo $AOE = \varepsilon$, et $AM = m$ $AO = a$, eſt $M\mu = (a - m)$ ſin. ε et $O\omega = o$, tum vero $M = k$ et quod ante eſt k hic eſt $= o$, ſicque habebimus:

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g \int \frac{k + (a - m)\,\text{ſin.}\,\varepsilon}{a - m}\, dm = 4gk\,l\frac{a}{a - m} + 4gm\,\text{ſin.}\,\varepsilon$$

vt ſcilicet poſito $m = o$, motus a quiete inceperit: ex quo ſequitur facto $m = a$ extremam guttulam celeritate infinita expulſum iri quod non adeo abſurdum eſt putandum, cum de vltimo quaſi ſtrato infinite tenui intelligi debeat, cui ſtatim atque minima craſſities tribuitur, celeritas admodum ſit modica. Ipſum autem tempus hinc nonniſi appropinquando definiri poteſt, cum ſit

$$2t\sqrt{g} = \int \frac{dm}{\sqrt{(k\,l\frac{a}{a + m} + m\,\text{ſin.}\,\varepsilon)}}$$

neque vllo casu siue inclinatio ε euanescat, siue in angulum rectum abeat. Deinde vero sumto $Az = s$ erit pressio

$$p = \frac{k.\,Oz}{MO} + \frac{Oz.\,M\mu}{MO} - z\pi = \frac{k(a-s)}{a-m}.$$

Pro casu autem quo tubus A O situm tenet horizontalem, et $\varepsilon = 0$; si ponamus $l\frac{a}{a-m} = \frac{x}{a}$, fit $m = a(1 - e^{-\frac{x}{a}})$ hincque $\frac{2t\sqrt{gk}}{\sqrt{a}} = \int e^{\frac{-x}{a}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$, vnde approximando colligitur:

$$\frac{t\sqrt{gk}}{\sqrt{ax}} = e^{-\frac{x}{a}}(1 + \tfrac{2}{3}.\tfrac{x}{a} + \tfrac{2.\,2}{3.\,5}.\tfrac{x^2}{aa} + \tfrac{2.\,2.\,2}{3.\,5.\,7}.\tfrac{x^3}{a^3} + \text{etc.})$$

pro motus ergo initio, vbi x valde paruum et $m = x - \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{6aa} - \text{etc.}$

fit $\frac{t\sqrt{gk}}{\sqrt{ax}} = (1 - \frac{x}{a} + \frac{xx}{2aa} - \text{etc.})(1 + \frac{2}{3}.\frac{x}{a} + \frac{2.\,2}{3.\,5}.\frac{x^2}{aa})$

seu $t = \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{gk}}(1 - \frac{1}{3}.\frac{x}{a} + \frac{1}{15}.\frac{xx}{aa})$.

Exemplum 3.

Tab. III. Fig. 47. 50. *Constet tubus aequaliter amplus* A B O *duobus brachiis rectis altero horizontali* A B, *altero verticali* B O *deorsum verso, qui cum initio fuisset plenus, aqua per orificium* O o *effluere coeperit, eius motum determinare, et pressionem in singulis locis.*

Sit longitudo brachii horizontalis $AB = b$, et verticalis $BO = c$ ideoque $a = b + c$. Cum igitur tempore t aqua ex A in M profluxerit existente $AM = m$, ob pressionem in $M = k$, perinde ac in O, erit celeritatis in M quadratum:

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int\frac{c\,dm}{a-m} = 4gc\,l\frac{a}{a-m}$$

vnde

vnde fit $2\,dt\,\sqrt{gc} = \frac{dm}{\sqrt{l\frac{a}{a-m}}}$, vbi eadem occurrit difficultas integrationis atque in exemplo praecedente.

Pressio autem in puncto quouis z tubi horizontalis erit

$$p = k - c + \frac{(c+Bz)c}{a-m} = k - \frac{c.Mz}{a-m} = k - \frac{BO.Mz}{BM+BO}$$

sicque in angulo B erit pressio $= k - \frac{BM.BO}{BM+BO}$ minima.

At sumto z' in tubo verticali pressio ibi erit

$$p' = k - Oz' + \frac{Oz'.BO}{BM+BO} = k - \frac{Oz'.BM}{BM+BO}.$$

Motus autem initium in A respondet vi acceleratrici $= \frac{c}{a}$ grauitate per vnitatem expressa.

Coroll. 1.

51. Initio ergo motus, dum ambo tubi erant pleni, pressio in B est omnium minima; atque adeo negatiua fieri potest, si vterque ramus maior quam k; quod si euenerit continuitas in B rumpitur, et aqua per tubum verticalem celerius descendit, quam reliqua per tubum horizontalem sequi potest.

Exemplum 4.

52. *Sit tubus rectus verticalis supra in A hermetice clausus infra apertus, at altior pressione atmosphaerae* k, *qui si initio fuerit plenus, descensum fluidi definire.* Tab. III. Fig. 48.

Tem-

Tempore t deſcenderit fluidum per $AM = m$, exiſtente altitudine $AO = a > k$, et quia ſupra Mm erit vacuum, fiet $M = 0$ vnde celeritatis deſcenſus in M quadratum fit

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 4g\int\frac{-k+a-m}{a-m}dm = 4g\left(m - k\,l\frac{a}{a-m}\right).$$

Quare cum celeritas initio vbi $m = 0$ fuerit nulla, ea maxima fiet, vbi $m = a - k$ ſeu $OM = k$, quo caſu erit $\frac{dm}{dt} = 2\sqrt{g}\left(a - k - k\,l\frac{a}{k}\right)$ dehinc vero iterum decreſcet et euaneſcet vbi fit $k\,l\frac{a}{a-m} = m$. Ponamus altitudinem a valde parum excedere k, eſſeque $a = k + \omega$ et celeritas maxima fiet $= 2\sqrt{g}\left(\omega - k\,l\left(1 + \frac{\omega}{k}\right)\right) = 2\omega\sqrt{\frac{g}{2k}}$ reſpondens ſpatio $AM = \omega$. Iterum autem celeritas euaneſcet vbi erit $k\left(\frac{m}{a} + \frac{mm}{2aa}\right) = m$ ſeu $m = 2\omega$ propius vero reperitur:

$$m = 2\omega - \frac{2\omega^2}{3k} + \frac{4\omega^3}{9kk} - \frac{44\omega^4}{135k^3} + \text{etc.}$$

Preſſio tandem in quouis loco z erit

$$p = \frac{Oz.MO + Mz.k}{MO} - Oz = \frac{k.Mz}{MO}.$$

Problema 51.

53. Si aqua in tubo aequaliter amplo ita moueatur, vt in altero eius termino Oo effluat, in altero vero Aa continue aliunde affluat data vi propulſa, hunc aquae per tubum propulſae motum definire.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 49. Tubum igitur vtcunque curuatum AO hic conſidero, in cuius orificium Aa aqua continuo intru-

intruditur vi quacunque per altitudinem L expreſſa quae vel vt conſtans, vel functio temporis t ſpectari poteſt, cuiusmodi continua aquae intruſio et propulſio ope antliarum effici ſolet, quarum vi ex loco inferiori A in altiorem O eleuatur, ibique effunditur. Quamobrem tubi terminum A in imo loco poſitum ſumo, a quo ducta horizontali A ω, ſingulorum punctorum tubi z altitudines ſuper ea aeſtimo, ita vt ſupremi orificii O o, vbi aqua expellitur altitudo ſit Oa. Poſita ergo pro puncto quouis z longitudine tubi A $z = s$ et altitudine $\pi z = z$, ſit elapſo tempore $= t$ celeritas aquae in tubo $= v$, qua ſimul in O o effluit, et quae eſt functio temporis t quam in probl. 48. poſui $v = \Gamma : t$ tum vero denotante p preſſionem in z, quam etiam ad aquam referamus vt ſit $b = 1$, hanc inuenimus aequationem

$$2gp = 2g(b-z) - s\Gamma' : t + \Delta : t$$

dum ſcilicet ſumimus aquam in tubo a termino A ad terminum O progredi, atque in hac aequatione vniuerſa motus ratio continetur. Eam ergo ad caſum oblatum accommodari oportet has conditiones implendo, vt et in A ſit preſſio data $= $ L, et in O $= k$, denotante k altitudinem columnae aqueae atmoſphaerae aequiponderantis. Punctum z indefinitum primum ad orificium A transferamus quo ſit $s = 0$, $z = 0$ et $p = $ L, ideoque

$$2g\text{L} = 2gb + \Delta : t$$

Deinde eodem ad orificium O translato, vbi ſit $s = $ A O, $z = $ O ω et $p = k$, habebimus:

$$2gk = 2g(b - O\omega) - AO.\Gamma' : t + \Delta : t$$

vnde colligimus

$$2g(L - k) = 2g.\,O\omega + AO.\,\Gamma' : t$$

ita vt ſit:

$$\Gamma' : t = \frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t} = \frac{2g(L - k - O\omega)}{AO}.$$

Tum vero pro preſſione in loco indefinito fiet

$$2g(L - p) = 2gz + \frac{2gs(L - k - O\omega)}{AO} \text{ ſeu}$$

$$p = L - z - \frac{s(L - k - O\omega)}{AO}.$$

Statuamus nunc totam tubi longitudinem $AzO = l$ et orificii Oo altitudinem $O\omega = a$, ac primo pro celeritate $\mathfrak{v}$ obtinuimus $\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t} = \frac{2g(L - K - a)}{l}$, ſicque integrando $\mathfrak{v} = \frac{2g}{l}(\int L\,dt - (a + k)\,t)$, deinde vero pro preſſione in quouis loco tubi z erit

$$p = L - z - \frac{s(L - k - a)}{l}.$$

Coroll. 1.

54. Quodſi ergo vis propellens L fuerit conſtans et $= a + k$ acceleratio aquae in tubo euaneſcit, ideoque eius fluxus per tubum erit vniformis, quanta autem ſit futura eius celeritas ex his principiis non definitur, ſed ex natura virium impellentium concludi debet.

Coroll. 2.

55. Sin autem vis propellens L perpetuo maior eſſet quam $a + k$, aquae per tubum propulſae celeritas continuo augeretur, ſin autem minor eſſet con-

continuo diminueretur. Neque ergo hinc quicquam certi circa aquae celeritatem dato tempore effusam statui potest.

Scholion 1.

56. Quantumuis hoc paradoxum atque adeo experientiae contrarium videatur, tamen hypothesi qua statuimus, pressionem in A perpetuo eadem vi aquam propulsare, quaecunque fuerit eius celeritas, prorsus est consentanea, ac si tales vires applicare liceret, nullum est dubium, quin etiam hic effectus reuera sit secuturus. Quare cum hoc in praxi minus eueniat, iudicandum est, vires quae ad aquam propulsandam adhiberi solent, neutiquam eius esse indolis, vt eadem pressione agant, quacunque celeritate aqua progrediatur. Satis autem superque constat, omnes vires, quae ab hominibus, animalibus, aquae fluxu et vento peti solent, ita esse comparatas, vt aucta celeritate debilitentur, ac tandem euanescant. Quantacunque enim sit huiusmodi vis obiecto quiescenti applicata, statim atque hoc obiectum mouetur, ea minor euadit, quare tales vires non absolute definire licet, sed earum quantitas pro quouis celeritatis gradu quo agunt, seorsim debet determinari. Ita si ponamus machinae, qua aqua per tubum propellitur, eiusmodi vim esse applicatam quae dum celeritate $= c$ operatur, aequalis sit ponderi aquae cuius volumen sit $= V$: atque machinam ita esse instructam, vt perpetuo hac celeritate $= c$ agat id quod semper ope rotarum fieri potest. Cum

 iam

iam in noſtro caſu preſſio in A altitudine $= L$ exprimatur, ſi amplitudinem tubi ſtatuamus $= \omega$, aequabitur ea ponderi voluminis aquae $= L\omega$, quae vt a vi illa V celeritate c mota producatur, illius celeritas hinc determinatur, ſcilicet ſi vim $L\omega$ celeritate υ aquam propellere ſumamus, oportet ſit $L\omega\upsilon = Vc$, hincque $\upsilon = \frac{Vc}{L\omega}$. Vt autem aqua hoc motu vniformiter propellatur, vidimus eſſe debere $L = a + k$, vbi quidem preſſionem atmoſphaere k omittere poſſumus, qui eadem quoque vim in A comitatur, ita vt ſufficiat ſtatui $L = a$, ex quo perſpicuum eſt aquam per tubum propulſum iri celeritate $\upsilon = \frac{Vc}{a\omega}$.

Scholion. 2.

57. Cum hic non vis principalis ſollicitans ſola V, ſed in celeritatem c qua agit ducta incomputum ingrediatur, hoc productum Vc, quod in omnium machinarum effectu determinando, maxime debet ſpectari, peculiarem denominationem meretur, et propterea *actio* a me eſt vocatum, ita vt *actio* ſit productum cuiusque vis per celeritatem qua agit multiplicata, vbi imprimis eſt obſeruandum, dum in machinis vires vel intenduntur, vel minuuntur, celeritatem ſemper in ratione inuerſa mutari, vt *actio* eadem maneat. Sic ſi per machinam vis principalis V in alium locum translata abeat in V', celeritas qua haec operatur erit $= \frac{Vc}{V'}$, ac ſi tum celeritas actionis ſit $= c'$, vis erit $V' = \frac{Vc}{c'}$.

Machi-

Machinarum ſcilicet vſus praecipuus in hoc conſiſtit vt ſeruata eadem *actione* vis ſollicitantis, vel vis vel celeritas ad lubitum immutetur. Ita in caſu problematis, quo opus erat vi $= a\,\omega$ ad aquam per tubum A O propellendam, ſi vis principalis machinam mouens ſit $= V$ cum celeritate $= c$ coniuncta, machinam ita inſtructam eſſe oportet, vt in translatione vis ad locum A vbi aqua in tubum intruditur, vis fiat $= a\,\omega$ et quia tum eius celeritas neceſſario fit $\upsilon = \frac{Vc}{a\,\omega}$, hinc celeritas aquae per tubum propulſae ſponte determinatur. Si forte ob machinae ſtructuram vis vrgens in A, quam poſuimus $= L\,\omega$ maior extaret quam $a\,\omega$, celeritas actionis in eadem ratione imminueretur, verum ob $L > a$ motus aquae acceleraretur: tum ergo vis principalis maiorem obtineret celeritatem, hincque eius quantitas ipſa V diminutionem pateretur ex quo prout eius *actio* increſcat vel decreſcat, deinceps cum motus ad vniformitatem fuerit perductus celeritas aquae per tubum propulſae definiri debet.

Scholion. 3.

58. Omnium autem virium quae ad machinas agitandas adhiberi ſolent, ratio ita eſt comparata, vt dum obiectum quieſcens vrgent, celeritateque propterea nulla agunt, maximam vim exerant, quae ſit $= F$, tum vero aucta celeritate continuo minorem exerant vim, tandemque plane nullam, cum certa celeritate quae ſit $= e$ agere debeant.

 Quia

Quia ergo illo casu celeritas, hoc vero vis euanescit, vtroque *actio* est nulla. Si iam celeritate quacunque minore quam e, quae sit $= u$ eadem vis agat, eius quantitas aestimari potest $= F(1 - \frac{u}{e})^2$ cuius ergo *actio* est $= F u (1 - \frac{u}{e})^2$, quae vtique tum casu $u = 0$ quam $u = e$ euanescit, maxima ergo euadit, si $u = \frac{1}{3} e$, ac tum erit $= \frac{4}{27} F e$. Quare semper machinas ita instrui conueniet vt virium, quae adhibentur *actio* reddatur maxima, quae regula nisi obseruetur, machina multo minorem effectum praestabit, quam ab iisdem viribus agitata, si debite instrueretur, obtineri posset. Tali ergo vi adhibita problema praecedens ad solutionem determinatam reuocemus.

Problema 52.

59. Si in casu praecedentis problematis aqua in tubum AO intrudatur a potentia, quae in quiete exerat vim $= F$, mota autem celeritate $= e$ omni vi destituatur, definire quomodo machina ad hanc vim sit accommodanda, vt effectus maximus reddatur seu maxima aquae copia dato tempore eiiciatur.

Solutio.

Ponamus hanc potentiam machinae applicatam celeritate $= u$ operari, vt sit vis quam exerat $= F(1 - \frac{u}{e})^2$ machinam autem ita esse instructam, vt ad aquam per tubum propulsandam ea vis in ratione $1 : n$ multiplicetur, ibi igitur agat celeritate

$= \frac{u}{n}$,

$=\frac{u}{n}$, qua propterea aqua iam per tubum promoveatur, vndecunque ipsi hic motus sit impressus, quandoquidem hic ad motus continuationem spectamus. Erit ergo nunc $\upsilon = \frac{u}{n}$, et posita tubi amplitudine $= \omega$, vis aquam in tubo propellens $nF(1-\frac{u}{e})^2 = L\omega$, ita vt sit $L = \frac{nF}{\omega}(1-\frac{u}{e})^2$. Quare cum inuenerimus $\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{2g(L-a)}{l}$, vbi pressionem atmosphaerae k in orificio Oo omittimus, quia pari pressione ipsa vis propellens adiuuatur. Iam siue sit $L > a$ siue $L < a$, vtroque casu motus mox ita ad vniformitatem perducetur vt fiat $L = a$ ideoque $1-\frac{u}{e} = \sqrt{\frac{a\omega}{nF}}$: sicque a potentia ita applicata, vti assumimus, ob $u = e(1-\sqrt{\frac{a\omega}{nF}})$ aqua per tubum propelletur celeritate $\upsilon = \frac{e}{n}(1-\sqrt{\frac{a\omega}{nF}})$, ita vt singulis minutis secundis aquae volumen $= \upsilon\omega$ per orificum eiiciatur Hic primo patet, si fuerit $\frac{a\omega}{nF} > 1$, seu $nF < a\omega$. nullum plane motum produci posse. Maximus autem effectus obtinebitur si $u = \frac{1}{3}e$, hincque $\frac{4}{9} = \frac{a\omega}{nF}$, vnde machina ita instrui debet, vt fiat $n = \frac{9a\omega}{4F}$, tum vero $\upsilon = \frac{4}{27}\cdot\frac{Fe}{a\omega}$, et quantitas aquae vno minuto secundo eiecti $= \frac{4}{27}\cdot\frac{Fe}{a}$, vbi vis F ad pondus reducta per volumen massae aqueae aequilibrantis exprimi debet ita vt F denotet certum volumen.

Coroll. 1.

60. Si ergo tam altitudo a ad quam aqua debet eleuari quam celeritas e seu spatium ea percur-

rendum

rendum vno minuto fecundo in pedibus, volumen F vero in pedibus cubicis exprimatur; tum formula $\frac{4}{27} \cdot \frac{Fe}{a}$ dabit volumen aquae itidem in pedibus cubicis expreffum, quod fingulis minutis fecundis ad altitudinem a pedum eleuari poterit.

Coroll. 2.

61. A potentia ergo, quae in quiete exerit vim $= F$, celeritate autem motu $= e$ omnem vim amittit, maior aquae copia ad altitudinem a eleuari nequit, quam $\frac{4}{27} \cdot \frac{Fe}{a}$. Neque vero hic effectus obtinebitur nifi machina ita fit inftructa vt vis mouens ei applicata in translatione ad aquam propellendam augeatur in ratione $1 : n = 1 : \frac{9a\omega}{4F}$.

Scholion 1.

62. Quo haec clarius perfpiciantur, ponamus vi hominis effe vtendum, quae in quiete aeftimetur 70 librarum feu vnius pedis cubici aquae vt fit $F = 1$; maximam autem celeritatem, qua nullam amplius vim exerere valeat effe $7\frac{1}{2}$ pedum feu $e = 7\frac{1}{2}$. Hic ergo homo, fi eius opera modo maxime lucrofo impendatur, fingulis minutis fecundis ad altitudinem a pedum eleuare poterit volumen aquae $= \frac{10}{9a}$ ped. cub. hocque fit fi machina ita fit inftructa vt operari poffit celeritate $= 2\frac{1}{2}$ ped. ac tum eius actio eft $= \frac{4}{27} \cdot Fe = \frac{10}{9}$, ita vt femper actio hoc modo expreffa, fi per altitudinem a diuidatur, praebeat quantitatem aquae fingulis minutis fecundis eleuandae.

dae. In machinae autem constructione insuper ad amplitudinem tubi ω est spectandum, quoniam vis mouens per translationem augeri debet in ratione $1 : \frac{g a \omega}{4 F}$; quae ratio contra non a celeritate $= e$ pendet. Deinde cum vnius hominis actio maxima sit $= \frac{10}{9}$, si λ homines operi admoueantur eorum actio erit $= \frac{10}{9}\lambda$, cui semper effectus est proportionalis. Si equis sit vtendum, et in quiete vnius equi vis triplo maior censeatur quam hominis, celeritasque maxima etiam triplo maior, eius actio nouies fiet maior, seu vnus equus tantum praestare valebit quantum nouem homines.

Scholion 2.

63. Si cursu fluminis ad machinam agitandam vti velimus cuius impulsu palmulae rotae ad motum incitentur; determinatio effectus in aqua elevanda hoc modo institui debet. Sit ff superficies quae aquae impulsum normaliter excipiat, et e denotet celeritatem fluminis, vnde altitudo, ex qua graue eandem celeritatem lapsu acquirit erit $= \frac{e e}{4 g}$: vis ergo fluminis in hanc superficiem quietam erit $= \frac{e e f f}{4 g}$, ponderi scilicet tanti voluminis aquae quam loco litterae F scribi oportet; tum vero quia impulsus euanescit statim ac palmula ipsa fluminis celeritate $= e$ mouetur, haec est illa celeritas, quam ante littera e notauimus. Actio ergo maxima euadet, cum superficies ff celeritate $= \frac{1}{3} e$ mouetur, eritque haec actio $= \frac{e^3 f f}{27 g}$, ideoque cubo celeritatis fluminis

proportionalis. Hac itaque actione ad altitudinem $= a$ singulis minutis secundis eleuabitur aquae quantitas $= \frac{e^3 ff}{27\, g\, a}$, cum ergo ab vno homine eleuetur quantitas $= \frac{10}{c\, a}$ ped. cub. effectus aquae aequiualebit λ hominibus existente $\lambda = \frac{e^3 ff}{30\, g}$, dum e et f in pedibus exprimuntur, vbi notandum est esse $g = 15\frac{1}{2}$ ped. ideoque $\lambda = \frac{e^3 ff}{465}$. Quodsi $ff = 1$ ped. quadr. et fluvius conficiat spatium $7\frac{3}{4}$ ped. vno minuto secundo, vnus homo eundem effectum producet. Hic quidem assumsimus, tubum A O eiusdem vbique esse amplitudinis, verum res pari modo se habet, etiamsi eius amplitudo fuerit variabilis, quem casum sequenti capite expendamus semper autem tenendum est tubum vt angustissimum considerari.

CAPVT III.

DE MOTV AQVAE IN TVBIS INAEQVALITER AMPLIS.

Problema 53.

64. Si data aquae quantitas in tubo, cuius amplitudo vtcunque est variabilis, moueatur, et vtrinque a viribus quibuscunque prematur, eius motum et pressionem in singulis punctis determinare.

Solutio.

Solutio.

Quamcunque directrix tubi habuerit figuram, ea vt linea recta A O consideretur, cui autem adiungatur linea curua $\alpha\,\omega$ cuius applicatae $z\,\pi$ singulorum punctorum z altitudines super plano horizontali fixo denotent. Iam elapso tempore t consideretur aquae particula quaecunque, quae versetur circa tubi punctum z, existente directricis longitudine $Az = s$ a puncto fixo A computata, ibique sit tubi amplitudo $zv = \omega$, et altitudo $z\pi = z$ quae per s datae assumuntur. Densitas aquae vnitate exprimatur vt sit $q = 1$, in z vero vocetur pressio $= p$ pariter ad aquam relata, et celeritas huius particulae in tubo versus O sit $= u$ quae sunt functiones duarum variabilium s et t. Quibus positis probl. 46. primo nobis suppeditat hanc aequationem $(\frac{d.\, u\,\omega}{d\, s}) = 0$ vnde $u\,\omega$ functioni solius temporis aequetur necesse est, cum ergo hoc tempore vbique celeritas sit reciproce vt amplitudo, concipiamus alicubi amplitudinem datam $= ff$, in qua sit celeritas $= v$, functio ipsius tempore t, eritque $u\,\omega = ffv$ et $u = \frac{ffv}{\omega}$; ita vt si definita fuerit celeritas v amplitudini datae ff conueniens pro hoc tempore, ex ea celeritas in quacunque alia amplitudine ω innotescat ad idem tempus; hacque formula $u = \frac{ffv}{\omega}$ iam prima determinatio contineatur, vbi probe notetur celeritatem v esse functionem solius temporis t amplitudinem vero ω spatii s tantum. Nunc ad alteram aequationem progrediamur,

Tab IV. Fig. 50.

 qua

qua pressio p definitur, et quia aquam a sola gravitate animari ponimus erit $P = 0$, $Q = 0$ et $R = -1$ tum vero quia in hac aequatione tempus t constans accipitur, erit $d\,\vartheta = \frac{-ffv\,d\omega}{\omega\omega}$ et $(\frac{d\,\vartheta}{d\,t}) = \frac{ff\,d\,v}{\omega\,d\,t}$, sicque aequatio posterior abit in hanc formam:

$$2\,g\,d\,p = -2\,g\,d\,z + \frac{f^4 v\,v\,d\omega}{\omega^3} - \frac{ff\,d\,s}{\omega} \cdot \frac{d\,v}{d\,t}$$

quae quia v et $\frac{d\,v}{d\,t}$ vt constantes spectantur per integrationem dat:

$$2\,g\,p = \Delta : t - 2\,g\,z - \frac{f^4\,v\,v}{2\,\omega\,\omega} - \frac{ff\,d\,v}{d\,t} \int \frac{d\,s}{\omega}$$

vbi cum ω sit functio solius s integrale $\int \frac{d\,s}{\omega}$ vt quantitas cognita spectari potest.

Nunc ad ambos terminos nostrae massae aqueae respiciamus qui sint in M et N existente $AM = m$, $AN = n$, amplitudine in $M = \mu$, in $N = \nu$, altitudine $M\mu = \mathfrak{m}$, $N\nu = \mathfrak{n}$, integralis $\int \frac{d\,s}{\omega}$ valore in $M = \mathfrak{M}$ in $N = \mathfrak{N}$; tum vero pressione in $M = \mathrm{M}$ et in $N = \mathrm{N}$. Cum igitur celeritas in M sit $= \frac{ffv}{\mu}$, in $N = \frac{ffv}{\nu}$, tempusculo $d\,t$ ambo termini M et N promouebuntur in M', N' vt sit

$$M'M = \frac{ffv\,d\,t}{\mu} \quad \text{et} \quad N\,N' = \frac{ffv\,d\,t}{\nu}$$

vnde quia m et n sunt functiones solius temporis t erit $d\,m = \frac{ffv\,d\,t}{\mu}$, $d\,n = \frac{ffv\,d\,t}{\nu}$ hincque $\mu\,d\,m = \nu\,d\,n$.

Ex cognitis autem pressionibus in M et N has duas obtinemus aequationes:

$$2\,g\,\mathrm{M} = \Delta : t - 2\,g\,\mathfrak{m} - \frac{f^4\,v\,v}{2\,\mu\,\mu} - \frac{ff\,d\,v}{d\,t} \cdot \mathfrak{M}$$

$$2\,g\,\mathrm{N} = \Delta : t - 2\,g\,\mathfrak{n} - \frac{f^4\,v\,v}{2\,\nu\,\nu} - \frac{ff\,d\,v}{d\,t} \cdot \mathfrak{N}$$

vnde

vnde colligimus:

$$2g(M-N)=2g(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})+\frac{f^4 vv}{2}\left(\frac{1}{\nu\nu}-\frac{1}{\mu\mu}\right)+\frac{ffdv}{dt}(\mathfrak{N}-\mathfrak{M})$$

quae aequatio tantum functiones ipsius temporis t involuit, indeque propterea celeritas v definiri poterit. Tum vero pro pressione inuenitur:

$$2g(M-p)=2g(z-\mathfrak{m})+\frac{f^4 vv}{2}\left(\frac{1}{\omega\omega}-\frac{1}{\mu\mu}\right)+\frac{ffdv}{dt}\left(\int\frac{ds}{\omega}-\mathfrak{M}\right)$$

quae elisa formula $\frac{ffdv}{dt}$ praebet hanc aequationem:

$$\left(2g(p+z)+\frac{f^4 vv}{2\omega\omega}\right)(\mathfrak{N}-\mathfrak{M})=\begin{array}{l}+\left(2g(M+\mathfrak{m})+\frac{f^4 vv}{2\mu\mu}\right)\left(\mathfrak{N}-\int\frac{ds}{\omega}\right)\\+\left(2g(N+\mathfrak{n})+\frac{f^4 vv}{2\nu\nu}\right)\left(\int\frac{ds}{\omega}-\mathfrak{M}\right).\end{array}$$

Coroll 1.

65. Cum detur massa fluidi in tubo contenta, ex dato spatio $AM=m$, quo simul quantitates μ, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{M}=\int\frac{dm}{\mu}$ determinantur definitur spatium $AN=n$, cum $\int\nu dn-\int\mu.dm$ praebeat illam massam sicque etiam n cum ν, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{N}=\int\frac{dn}{\nu}$ vt functiones solius quantitatis m spectari poterunt.

Coroll. 2.

66. Quoniam totum negotium a resolutione aequationis differentialis inuentae pendet, et est $dt=\frac{\mu dm}{ffv}$, si ea aequatio per $\mu dm=ffvdt$ multiplicetur habebitur:

$$2g(M-N+\mathfrak{m}-\mathfrak{n})\mu dm=\tfrac{1}{2}f^4 vv\mu dm\left(\frac{1}{\nu\nu}-\frac{1}{\mu\mu}\right)$$
$$+f^4 vdv(\mathfrak{N}-\mathfrak{M})$$

quae posito $f^4 vv=V$ abit in hanc

$$4g(M-N+\mathfrak{m}-\mathfrak{n}).\frac{\mu dn}{\mathfrak{N}-\mathfrak{M}}=dV+\frac{V\mu dm}{\mathfrak{N}-\mathfrak{M}}\left(\frac{1}{\nu\nu}-\frac{1}{\mu\mu}\right)$$

ex quo quantitatem V elici oportet, qua inuenta primo reperitur celeritas $v = \frac{\nu V}{ff}$, indeque porro tempus $t = \int \frac{\mu\, dm}{\nu V}$.

Coroll 3.

67. Si enim pressiones M et N vel sint constantes, vel a spatiis m et n pendeant, quia n per m determinatur aequatio illa duas tantum variabiles m et V continere est censenda, et integrabilis redditur si multiplicetur per e^Q existente $Q = \int \frac{\mu\, dm}{\mathfrak{N} - \mathfrak{M}} \left(\frac{1}{\nu\nu} - \frac{1}{\mu\mu}\right)$. Quia vero est $\mu\, dm = \nu\, dn$ et $\frac{dn}{\nu} = d\mathfrak{N}$ item $\frac{dm}{\mu} = d\mathfrak{M}$, fit $Q = \int \frac{d\mathfrak{N} - d\mathfrak{M}}{\mathfrak{N} - \mathfrak{M}}$ hincque multiplicator $e^Q = \mathfrak{N} - \mathfrak{M}$.

Coroll 4.

68. Quamobrem illius aequationis integrale est:

$$(\mathfrak{N} - \mathfrak{M})V = f^4 vv(\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) = 4g \int \mu\, dm (M - N + m - n)$$

vbi notandum est cum sit celeritas aquae in $M = \frac{ffv}{\mu}$ et in $N = \frac{ffv}{\nu}$, expressionem $f^4 vv(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) = \int \frac{f^4 vv}{\nu\nu} . \nu\, dn - \int \frac{f^4 vv}{\mu\mu} . \mu\, dm$ designare vim viuam massae aquae $M\, m\, N\, n$ quandoquidem $\nu\, dn$ est eius elementum $N\, n\, N'\, n'$, idque in celeritatis quadratum ducitur.

Scholion.

69. Omni attentione dignum est; quod aequatio differentialis inuenta tam commode integrari potuerit, eiusque integrale ad vim viuam aquae in tubo

tubo contentae ſit perductum, vnde ſummus vſus principii conſeruationis virium viuarum, quo iam olim Celeb. *Bernoulli* in Hydrodynamica feliciſſimo ſucceſſu eſt vſus, clariſſime perſpicitur. Hinc ſcilicet intelligimus, ſi vires vtrinque prementes M et N fuerint aequales, et tubi directrix horizontalis, vt nullae adſint vires motum fluidi vel accelerantes vel retardantes, tum fluidi maſſam eandem perpetuo vim viuam eſſe conſeruaturam, poſito enim $M = N$ et $\mathfrak{m} = 0$ et $\mathfrak{n} = 0$ ſeu in genere $z = 0$, prodit vis viua $f^4 vv(\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) =$ Conſt. ſin autem altitudines $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ non euaneſcant, aequatio inuenta ob $\mu\, dm = \nu\, dn$ ita repraeſentari poteſt:

$$f^4 vv(\mathfrak{N} - \mathfrak{M}) = 4g\int(M + \mathfrak{m})\mu\, dm - 4g\int(N + \mathfrak{n})\nu\, dn.$$

vnde manifeſtum eſt, quantum incrementum vis viua capiat a vi accelerante; quandoquidem preſſio M motum accelerat, preſſio vero N retardat, ac praeterea ex altitudinibus $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ ſingulorum elementorum vel aſcenſus vel deſcenſus definitur. Ceterum hic imprimis notari meretur, quod aequatio differentialis inuenta ſola multiplicatione per $2\mu\, dm = 2\nu\, dn = 2ffv\, dt$ ſtatim integrabilis reddatur dum prodit

$$4g(M - N + \mathfrak{m} - \mathfrak{n})\mu\, dm = f^4 vv\left(\frac{dn}{\nu} - \frac{dm}{\mu}\right) + 2f^4 v\, dv(\mathfrak{N} - \mathfrak{M})$$

cuius integrabilitas ob $\frac{dn}{\nu} = d\mathfrak{N}$ et $\frac{dm}{\mu} = d\mathfrak{M}$ ſtatim in oculos incurrit; ita vt iam totum negotium ad integrationem primae partis reducatur. Ad maiorem ergo dilucidationem ſufficit, vt nonnulla exempla proferamus.

Exem-

Exemplum I.

Tab. IV. Fig. 51. 70. *Si tubus sit conicus eiusque directrix* A O *verticalis, in quo massa aquea* A C c *libere descendat, eius motum definire.*

Sit A C $= c$ et amplitudo tubi in C nempe C $c = \alpha c c$, vt fiat tota massa aquae A C $c = \frac{1}{3}\alpha c$, quae post tempus t occupet tubi spatium M m N n, vnde ob A M $= m$ et A N $= n$ erit $n^3 = c^3 + m^3$. Tum vero posita altitudine fixa A O $= a$, erunt primo amplitudines M $m = \mu = \alpha m m$; N $n = \nu = \alpha n n$ et $z v = \omega = \alpha s s$ posito A $z = s$, deinde altitudines O M $= \mathfrak{m} = a - m$; O N $= \mathfrak{n} = a - n$ et O z $= \mathfrak{z} = a - s$. Porro ob $\int \frac{ds}{\omega} = -\frac{1}{\alpha s}$, fit $\mathfrak{M} = -\frac{1}{\alpha m}$ et $\mathfrak{N} = -\frac{1}{\alpha n}$. Quare si pressiones in M et N aequentur soli pressioni atmosphaerae k, quod euenit si tubus in apice A apertus concipiatur, erit M $=$ N $= k$. Quodsi iam amplitudini ff conueniat celeritas $= v$ deorsum tendens, aequatio nostra integralis pro hoc casu colligitur:

$$f^4 v v\left(\frac{1}{\alpha m} - \frac{1}{\alpha n}\right) = 4 g \int \alpha m m d m (n - m) = 4 \alpha g \left(\tfrac{1}{4} n^4 - \tfrac{1}{4} m^4\right) + \text{Const.}$$

ob $m m d m = n n d n$. Cum autem descensus ex quiete incipiat facto $m = 0$ et $n = c$ celeritas euanescere debeat, vnde habebitur:

$$f^4 v v\left(\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{n}\right) = \alpha \alpha g (n^4 - m^4 - c^4)$$

hincque $ffv = \alpha \sqrt{\frac{g m n (n^4 - m^4 - c^4)}{n - m}}$

sicque colligitur tempus,

$$t = \int \frac{\mu d m}{ff v} = \int \frac{m d m \sqrt{m (n - m)}}{\sqrt{g n (n^4 - m^4 - c^4)}}$$

cuius

cuius formulae ob $n^3 = c^3 + m^3$ integrale est capiendum, vt ad datum tempus t spatium $AM = m$ definiri possit.

Denique pro pressione in z, quae est p, inuenienda, habetur haec aequatio superiorem per z multiplicando

$$\left(4g(p+a-s)+\frac{f^4vv}{\alpha\alpha s^4}\right)\left(\frac{1}{\alpha m}-\frac{1}{\alpha n}\right)=\begin{matrix}+\left(4g(k+a-m)+\frac{f^4vv}{\alpha\alpha m^4}\right)\left(\frac{1}{\alpha s}-\frac{1}{\alpha n}\right)\\ +\left(4g(k+a-n)+\frac{f^4vv}{\alpha\alpha n^4}\right)\left(\frac{1}{\alpha m}-\frac{1}{\alpha s}\right)\end{matrix}$$

quae ob $\frac{f^4 vv}{\alpha\alpha} = \frac{gmn(n^4-m^4-c^4)}{n-m}$ abit in hanc:

$$\frac{4(p+a-s)(n-m)}{mn} = \frac{4(k+a-m)(n-s)}{ns} + \frac{4(k+a-n)(s-m)}{ms}$$
$$+ \frac{(s-m)(n-s)(n^4-m^4-c^4)(mmnn+mn(m+n)s+(m^2+mn+nn)ss)}{m^3 n^3 s^4}$$

vnde deducimus:

$$p = k + \frac{mn}{s} - m - n + s + \frac{(s-m)(n-s)(n^4-m^4-c^4)(mmnn+mn(m+n)s+(mm+mn+nn)ss)}{4mmnn(n-m)s^4}.$$

Exemplum 2.

71. *In casu praecedentis exempli si tubus sit in A clausus vt superior superficies* Mm *nullam pressionem sustineat, motum aquae determinare.*

Cum omnia maneant vt in praecedente exemplo nisi quod hic sit $M = 0$, et $N = k$, aequatio prior abit in hanc formam

$$f^4 vv\left(\frac{1}{\alpha m}-\frac{1}{\alpha n}\right) = 4g\int \alpha mm\,dm(n-m-k) \text{ seu}$$
$$f^4 vv\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right) = \alpha\alpha g(n^4-m^4-c^4-\tfrac{4}{3}km^3)$$

Hic autem primum obseruo initio vbi $m = 0$ et $n = c$ motum incipere non potuisse nisi fuerit $c > k$, si enim sit $c < k$ vel etiam $c = k$ aqua per-

 petuo

petuo in summitate tubi haerebit, nullusque motus sequetur. Sin autem sit $c > k$ motus primo quidem accelerabitur, donec fiat $n = \sqrt[3]{(c^3 + m^3)} = m + k$ hoc est

$c^3 = 3kmm + 3kkm + k^3$ seu $m = \sqrt{(\frac{c^3}{3k} - \frac{1}{12}kk)} - \frac{1}{2}k$ Inde vero celeritas decrescet, atque adeo euanescet, quando fiet

$$n^4 = (c^3 + m^3)^{\frac{4}{3}} = c^4 + m^4 + \tfrac{4}{3}km^3,$$

quae euoluta dat

$$\begin{aligned}4km^8 + \tfrac{16}{3}kkm^7 + \tfrac{64}{27}k^3m^6 + 3c^4m^5 + 8kc^4m^4 + \tfrac{16}{3}k^2c^4m^3 + 3c^8m + 4kc^8 = 0\\ -4c^3m^6 \qquad\qquad\qquad\qquad -6c^6m^2 \qquad\quad -4c^9\end{aligned}$$

Quo hinc aliquid facilius concludere queamus, ponamus c valde parum excedere k statuamusque $c = (1 + \delta)k$ denotante δ fractionem minimam et quia m quoque erit spatium valde paruum fiet $n = c + \frac{m^3}{3cc}$ hincque

$$f^4 vv(\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{c} + \tfrac{m^3}{3c^4}) = \alpha\alpha g(\tfrac{4\delta c m^3}{3(1+\delta)} - m^4 + \tfrac{2m^6}{3cc})$$

ac celeritas maxima respondebit loco $m = \frac{\delta c}{1+\delta} + \frac{m^3}{3cc}$ $= \frac{\delta c}{1+\delta} + \frac{\delta^3 c}{3(1+\delta)^3}$ rursusque euanescet vbi $m = \frac{4\delta c}{3(1+\delta)} + \frac{2m^3}{3cc}$ seu satis exacte $m = \frac{4\delta c}{3(1+\delta)}$. Deinde vero colligitur

$$ffv = \alpha mm\sqrt{g(\tfrac{4\delta c}{3(1+\delta)} - m)} = \alpha mm\sqrt{g(\tfrac{4}{3}\delta k - m)}$$

hincque tempus

$$t = \int \frac{dm}{\sqrt{g(\frac{4}{3}\delta k - m)}} = 2\sqrt{\frac{4\delta k}{3g}} - 2\sqrt{\frac{4\delta k - 3m}{3g}}$$

et tempus totius descensus $= 4\sqrt{\frac{\delta k}{3g}}$.

Exem-

Exemplum 3.

72. *Si tubus habeat duo brachia verticaliter erecta* A B *et* C O *iuncta ramo horizontali* B C *et quaelibet pars sit aequaliter ampla sed a reliquis diversa definire motum oscillatorium aquae in hoc tubo.* Tab. IV. Fig. 52.

Tubi AB in quo alter venae terminus M m reperitur amplitudo sit vbique $= \mu$, tubi vero O C $= \nu$, horizontalis vero B C $= \lambda$. Cum aqua vtrinque est in aequilibrio, pertingat ad horizontalem E F, ponaturque B E $=$ C F $= a$, et B C $= b$ vt totum aquae volumen sit $= a\mu + b\lambda + a\nu$. Iam in statu motus ad tempus $= t$ vocetur E M $= \nu x$ eritque F N $= \mu x$, et iam quantitates μ et ν sunt constantes. Statuatur A E $= e$, erit $m = e - \nu x$ $\mathfrak{m} = a + \nu x$, $\mathfrak{M} = \frac{e-\nu x}{\mu}$, porro $n = e + 2a + b - \mu x$, $\mathfrak{n} = a - \mu x$ et $\mathfrak{N} = \frac{e+a}{\mu} + \frac{b}{\lambda} + \frac{a-\mu x}{\nu}$, vnde $\mathfrak{N} - \mathfrak{M}$ $= \frac{b}{\lambda} + \frac{a+\nu x}{\mu} + \frac{a-\mu x}{\nu}$. Deinde ob M $=$ N $= k$ pressioni atmosphaerae, et $\mathfrak{m} - \mathfrak{n} = (\mu + \nu) x$ erit

$$f^4 vv\left(\frac{b}{\lambda} + \frac{a+\nu x}{\mu} + \frac{a-\mu x}{\nu}\right) = -4g\int \mu\nu dx(\mu+\nu)x$$
$$= -2g\mu\nu(\mu+\nu)xx + C.$$

Ponamus facto $x = 0$ celeritatem amplitudini ff conuenientem fieri $v = 2\sqrt{gc}$, vt hinc constans ita determinetur.

$$4gcf^4\left(\frac{b}{\lambda} + \frac{a(\mu+\nu)}{\mu\nu}\right) = C\text{, atque habebitur.}$$

$$ffv\sqrt{\left(\frac{b}{\lambda} + \frac{a+\nu x}{\mu} + \frac{a-\mu x}{\nu}\right)} =$$
$$\sqrt{2g\mu\nu(\mu+\nu)\left(\frac{2cf^4}{\mu\nu(\mu+\nu)}\left(\frac{b}{\lambda} + \frac{a(\mu+\nu)}{\mu\nu}\right) - xx\right)}$$

 pro

pro excurſionibus maximis ergo erit

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{2cf^4}{\mu\nu(\mu+\nu)}\left(\frac{b}{\lambda} + \frac{a(\mu+\nu)}{\mu\nu}\right)\right)}$$

Pro tempore autem hanc aequationem integrari oportet

$$t = -\mu\nu\int\frac{dx}{ffv}$$

quae formula autem nimis eſt perplexa, quam vt eius euolutio ſuſcipi queat, niſi caſu quo c ac proinde etiam x eſt quantitas quam minima. In genere enim tempus tali forma definitur $t = \int\frac{dx\sqrt{(A+Bx)}}{\sqrt{(bb-xx)}}$, cuius integratio reiecto termino Bx eſt manifeſta. Admiſſo autem termino Bx totae quidem oſcillationes erunt iſochronae ſed tempora, quibus terminus Mm ſupra libellam E F vel aſcendit vel deſcendit non erunt aequalia temporibus, quibus infra libellam verſatur.

Problema 54.

Tab. IV. Fig. 50. 73. Si aqua ex tubo vtcunque inaequaliter amplo et cuius directrix eſt linea curua quaecunque per orificium Oo effluat, vt eius quantitas in tubo continuo minuatur eius motum determinare.

Solutio.

Maneant omnia vti in ſolutione problematis, praecedentis niſi quod amplitudo illa conſtans ff iam ipſi orificio Oo tribuatur per quod nunc aqua elapſo tempore $=t$ effluat celeritate $=v$ alter vero aquae terminus haereat in Mm, vbi amplitudo ſit $=\mu$

$= \mu$ altitudo ſupra horizontem $M\mu = \mathfrak{m}$, et preſſio $= \mathrm{M}$ quae quidem ſi aeri pateat, erit aequalis preſſioni atmoſphaerae k periude ac in ipſo orificio $O\,o$. A loco autem tubi dato A ſecundum eius directricem ſit diſtantia $AM = m$ et tota longitudo $AO = a$ tum vero celeritas qua aquae ſuprema ſuperficies $M\,m$ per tubum promouetur erit $= \frac{ffvdt}{\mu}$. Statuamus nunc pro loco tubi quocunque z, longitudinem $Az = s$, amplitudinem $zv = \omega$, altitudinem $z\pi = z$ et preſſionem $= p$, ac principia motus hanc nobis ſuppeditant aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f^4 vv}{2\omega\omega} - \frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

quam primo ad extremitatem $M\,m$ tum vero ad orificium $O\,o$ transferri oportet, quandoquidem in his duobus locis preſſio eſt data. Pro illa autem $M\,m$ fit $p = \mathrm{M}$; $z = \mathfrak{m}$, $\omega = \mu$, integralis vero $\int\frac{ds}{\omega}$ valor hic fiat $= \mathfrak{M}$, vnde fit

$$2g\mathrm{M} = \Delta : t - 2g\mathfrak{m} - \frac{f^4 vv}{2\mu\mu} - \frac{ffdv}{dt}\mathfrak{M}$$

Pro orificio vero $O\,o$ ſiquidem aqua in aerem effluat, habetur preſſio $p = k$, amplitudo $\omega = ff$, altitudo vero $O\,\omega$ fit nulla, quoniam planum horizontale per ipſum orificium $O\,o$ ducere licet valor autem formulae integralis $\int\frac{ds}{\omega}$ ad hunc locum translatus fiat $= \mathfrak{A}$, quippe qui erit conſtans ex quo noſtra aequatio fiet

$$2gk = \Delta : t - \tfrac{1}{2}vv - \frac{ffdv}{dt}.\ \mathfrak{A}$$

quae ab illa ſubtracta relinquit

$$2g(\mathrm{M} - k) = -2g\mathfrak{m} - \frac{f^4 vv}{2\mu\mu} + \tfrac{1}{2}vv + \frac{ffdv}{dt}(\mathfrak{A} - \mathfrak{M})$$

 quam

quam aequationem, in qua ſolum tempus t variabile ineſt, integrari oportet, hanc formulam $dm = \frac{ffvdt}{\mu}$ in ſubſidium vocando. vnde ob $dt = \frac{\mu dm}{ffv}$ habetur

$$2g(M-k)\mu dm = -2g\mathfrak{m}\mu dm + \tfrac{1}{2}vv\mu dm\left(1-\frac{f^4}{\mu\mu}\right) + f^4 v dv(\mathfrak{A}-\mathfrak{M})$$

vbi eſt $\mathfrak{M} = \int\frac{dm}{\mu}$, ex quo valore naſcitur quantitas $\mathfrak{A}$ ſi fiat $m = a$. Sunt autem μ et $\mathfrak{m}$ functiones datae ipſius m, vnde haec aequatio duas tantum variabiles m et v inuoluit, ex qua valorem ipſius vv facile elicere licet, quo inuento ope formulae $dt = \frac{\mu dm}{ffv}$ ad quoduis tempus t cum longitudo $AM = m$ tum celeritas v, qua aqua per orificium Oo effluit aſſignari poterit. Deinde vero etiam pro preſſione p in loco quocunque z, habebitur:

$$2g(p-k) = -2gz + \tfrac{1}{2}vv\left(1-\frac{f^4}{\omega\omega}\right) + \frac{ffdv}{dt}\left(\mathfrak{A}-\int\frac{ds}{\omega}\right)$$

quare ſi terminus $\frac{ffdv}{dt}$ elidatur colligitur:

$$2g(M-k)\left(\mathfrak{A}-\int\frac{ds}{\omega}\right) + 2g(k-p)(\mathfrak{A}-\mathfrak{M}) = 2gz(\mathfrak{A}-\mathfrak{M}) - 2g\mathfrak{m}\left(\mathfrak{A}-\int\frac{ds}{\omega}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}vv\left(\mathfrak{M}-\int\frac{ds}{\omega}\right) - \frac{f^4vv}{2\mu\mu}\left(\mathfrak{A}-\int\frac{ds}{\omega}\right)$$
$$+\frac{f^4vv}{2\omega\omega}(\mathfrak{A}-\mathfrak{M}).$$

Coroll 1.

74. Sumamus tubi terminum fixum A in ipſo orificio O vt ſit $a = 0$, et vocemus $OM = m$, atque $Oz = s$, ita vt iam in formulis inuentis hae duae quantitates m et s negatiue capi debeant; tum vero erit $\mathfrak{A} = 0$, et loco $\mathfrak{M}$ et $\int\frac{ds}{\omega}$ ſcribi oportebit $-\int\frac{dm}{\mu}$ et $-\int\frac{ds}{\omega}$, vnde pro preſſione habebimus:

$$2g(M-k)\int\frac{ds}{\omega}+2g(k-p)\int\frac{dm}{\mu}=2gz\int\frac{dm}{\mu}-\tfrac{1}{2}vv\left(1-\frac{f^4}{\omega\omega}\right)\int\frac{dm}{\mu}+\tfrac{1}{2}vv\left(1-\frac{f^4}{\mu\mu}\right)\int\frac{ds}{\omega}$$
$$-2g\mathfrak{m}\int\frac{ds}{\omega}.$$

Coroll. 2.

75. Manentibus autem $OM=m$ et $Oz=s$, primum pro tempore habebitur $dt=-\frac{\mu\,dm}{ffv}$, quoniam labente tempore t interuallum $OM=m$ minuitur celeritas autem effluxus v ex hac aequatione debet definiri

$$2g(M-k+\mathfrak{m})\mu\,dm=\tfrac{1}{2}vv\mu\,dm\left(1-\frac{f^4}{\mu\mu}\right)-f^4\,v\,dv\int\frac{dm}{\mu}$$

quae commodius ita repraesentatur:

$$2f^4v\,dv\int\frac{dm}{\mu}+\frac{f^4vv\,dm}{\mu}-vv\mu\,dm+4g(M-k+\mathfrak{m})\mu\,dm=0.$$

Coroll. 3.

76. Ponatur hic $f^4vv\int\frac{dm}{\mu}=u$, vt habeatur:

$$du-\frac{\mu u\,dm}{f^4\int\frac{dm}{\mu}}+4g(M-k+\mathfrak{m})\mu\,dm=0$$

quae vt integrabilis reddatur multiplicari debet per e^O existente $O=-\frac{1}{f^4}\int\frac{\mu\,dm}{\int\frac{dm}{\mu}}$ eritque tum

$$e^Ou+4g\int e^O(M-k+\mathfrak{m})\mu\,dm=\text{Const.}$$

Scholion.

77. In hac solutione omnia continentur, quae vulgo de effluxu aquae ex vasis cuiuscunque figurae tradi solent, quae autem eatenus tantum admitti possunt, quatenus ea vasa vel sunt angustissima, vel motus

motus per ea ita fiat, vt ſingula ſtrata ad directricem normaliter ſumta communi motu ferantur, niſi enim haec conditio locum habeat, celeritas effluxus hic definita a veritate recedet, etſi ſaepenumero discrimen experimentis inſtituendis vix percipitur. Quodſi in formulis inuentis ſtatuatur $M = k$, habebitur caſus, quo ſuprema aquae ſuperficies eſt aperta, et effluxus fit in aërem, ſin autem aqua in ſpatium aëre vacuum efflueret, ſumi deberet $k = o$, at ſi tubi orificium O *o* aquae ſtagnanti eſſet immerſum, littera *k* preſſionem huius aquae in orificium exprimere deberet. Totum autem negotium ſemper reducitur ad aequationem differentialem inventam, ex cuius integratione pro quouis loco vbi ſuperficies aquae ſuprema haeret celeritas effluxus cognoſcetur, tum vero formulam $dt = -\frac{\mu\, dm}{ffv}$ (75) in ſubſidium vocando tempus innoteſcet, quo aqua in tubo ad datum locum M *m* ſubſidit; ac denique cum elapſo tempore $= t$ aqua per orificium O *o*, cuius amplitudo eſt $= ff$ celeritate $= v$ effluat, omnis aqua quae tempore t effluxerit, erit $= ff \int v\, dt = -\int \mu\, dm$. Quod quo clarius appareat, aliquot caſus euoluamus.

Exemplum I.

Tab. IV. Fig. 53. 78. *Si tubi directrix* A O *ſit recta verticalis, at tubus initio ad* A a *fuerit aqua plenus, quae tum per orificium* O o = ff *effluere inceperit, ad datum quoduis tempus celeritatem effluxus et preſſionem in quavis ſectione* z v *determinare.*

Poſito

Poſito ergo interuallo $OM = m$ et amplitudine $Mm = \mu$, quem in locum aquam ex Aa elapſo tempore $= t$ ſubſediſſe aſſumimus erit etiam altitudo $OM = m = m$, et preſſio $M = k$. Poſita nunc celeritate effluxus per orificium $= v$, eam ex aequatione definiri oportet:

$$2f^4 v dv \int \frac{dm}{\mu} + \frac{f^4 vv dm}{\mu} - vv\mu dm + 4g\mu m dm = 0$$

quae poſito $f^4 vv \int \frac{dm}{\mu} = u$ abit in hanc formam

$$du - \frac{u\mu\, dm}{f^4 \int \frac{dm}{\mu}} + 4g\mu m\, dm = 0.$$

Deinde pro preſſione in ſectione quacunque zv ſit $Oz = s$ et amplitudo $zv = \omega$, erit quoque altitudo $z = s$, ideoque

$$2g(k-p)\int \frac{dm}{\mu} = 2gs\int \frac{dm}{\mu} - 2gm\int \frac{ds}{\omega} - \tfrac{1}{2}vv\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right)\int \frac{dm}{\mu}$$
$$+ \tfrac{1}{2}vv\left(1 - \frac{f^4}{\mu\mu}\right)\int \frac{ds}{\omega}.$$

Aequatio autem illa differentialis ita integrari debet, vt facta altitudine $OM = m = OA = a$ celeritas v euaneſcat, tum vero inuenta celeritate v calculus ad tempus accommodabitur ope huius formulae $t = -\int \frac{\mu dm}{ffv}$, quae poſito $m = a$ euaneſcere debet. Quod ſi deinceps ponatur $m = 0$, tempus totius effluxus innoteſcet.

Praeterea vero durante effluxu, quoniam ab initio celeritas v continuo creſcit, celeritas maxima vbi $dv = 0$, ita definitur vt ſit $vv = \frac{4gm\mu\mu}{\mu\mu - f^4}$, ideoque $v = \frac{2\mu\sqrt{gm}}{\sqrt{(\mu\mu - f^4)}}$. Cum ergo ſit $v > 2\sqrt{gm}$,

 celeri-

celeritas maxima maior erit ea, quam graue delabens ex altitudine m acquirit.

Coroll. 1.

Tab. IV. Fig. 54. 79. Si vas vbique sit aeque amplum seu $\mu = \omega = cc$, cuius fundum OC foramine $Oo = ff$ est pertusum, habebimus:

$$du - \frac{c^4}{f^4} \cdot \frac{u\,dm}{m} + 4gccm\,dm = 0.$$

Sit $\frac{c^4}{f^4} = \lambda$, erit $m^{-\lambda}u + \frac{4gcc}{2-\lambda}m^{2-\lambda} = C$ hincque

$$u = Cm^\lambda + \frac{4gcc}{\lambda - 2}mm = \frac{f^4 mvv}{cc}$$

et constante rite definita

$$f^4 vv = \frac{4gc^4 m}{\lambda - 2}(1 - a^{2-\lambda} m^{\lambda - 2})$$

seu $v = \sqrt{\frac{4\lambda gm}{\lambda - 2}}\left(1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}\right)$, vnde colligitur pressio

$p = k + \frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}(m - s)\left(1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}\right)$ pro sectione zv ad altitudinem $Oz = s$, denique pro tempore erit

$t = -\int \frac{dm\sqrt{(\lambda - 2)}}{2\sqrt{gm(1 - a^{2-\lambda}m^{\lambda-2})}}$ celeritas autem maxima fit $= \frac{2cc\sqrt{gm}}{\sqrt{(c^4 - f^4)}} = \frac{2\sqrt{\lambda gm}}{\sqrt{(\lambda - 1)}}$, quae conuenit altitudini m hinc definiendae $\frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} = 1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}$, ita vt

sit $m = \frac{a}{\sqrt[\lambda-2]{(\lambda - 1)}}$.

Coroll. 2.

80. Casus quo $\lambda = 2$ seu $c^4 = 2 f^4$ singularem postulat euolutionem; quia aequatio $d u - \frac{2 u d m}{m} + 4 g c c m d m = 0$ integrata dat $u = 4 g c c m m \, l \frac{a}{m} = \frac{c c m v v}{2}$, hinc $v = \sqrt{8 g m l \frac{a}{m}}$ et $t = - \int \frac{d m}{\sqrt{4 g m l \frac{a}{m}}}$, pro pressione vero $p = k + (m - s) \, l \frac{a}{m}$.

Coroll. 3.

81. Sit tubus conus ad orificium truncatus, et $\mu = (f + \alpha m)^2$, atque $\omega = (f + \alpha s)^2$, hinc fit $\int \frac{d m}{\mu} = \frac{1}{\alpha f} - \frac{1}{\alpha (f + \alpha m)} = \frac{m}{f (f + \alpha m)}$, similique modo $\int \frac{d s}{\omega} = \frac{s}{f (f + \alpha s)}$. Pro motu ergo habetur:

$$d u - \frac{u d m}{m} (1 + \frac{\alpha m}{f})^3 + 4 g m d m (f + \alpha m)^2 = 0$$

vnde inuento u erit $f^4 v v = \frac{f (f + \alpha m) u}{m}$.

Coroll 4.

82. Expandatur tubus superne in infinitum secundum hanc aequationem $\omega \omega = \frac{a f^4}{a - s}$, ita vt initio suprema superficies Aa fuerit infinita; eaque etiamnunc nihil subsederit, vt sit elapso tempore t altitudo $m = a$ et $\mu \mu = \frac{a f^4}{a - m} = \infty$. Quam ob caussam aequatio differentialis statim praebet $v v = 4 g m = 4 g a$, ita vt aqua constanter eadem celeritate effluat. Quia autem hic motus effluxus est vniformis ob $\frac{d v}{d t} = 0$ pressio ad $z v$ ex aequatione primum inuenta ita definitur:

$$2g(p-k) = -2gs + 2ga\left(1 - \frac{a+s}{a}\right) = 0$$

vbique scilicet pressio aequalis erit pressioni atmosphaerae seu latera tubi extrinsecus aequaliter pressa nullam vim sustinent, iisque adeo remotis fluxus perinde fieret.

Exemplum 2.

Tab. IV. Fig. 55. 83. *Sit superior tubi pars* A a B b *verticalis et aequaliter ampla inferior vero pars* B b O o *vtcunque curua et inaequaliter ampla, definire aquae ex eo effluentis motum, quamdiu suprema aquae superficies* M m *in parte superiori versatur.*

Sit amplitudo partis superioris $Mm = \mu = cc$, longitudo tubi inferioris $BzO = a$; altitudo $BC = b$ et $BM = x$; erit ergo $m = a + x$; et $\mathrm{m} = b + x$; Tum sumta longitudine $Oz = s$, cui respondeat amplitudo $zv = \omega$ et altitudo $Pz = z$, sit valor integralis $\int \frac{ds}{\omega}$ per totam partem inferiorem extensi $= B$ quandoquidem hic valor erit constans; tum igitur idem integrale ad superficiem supremam Mm extensum erit $= B + \frac{x}{cc} = \int \frac{dm}{\mu}$: vnde hanc habebimus aequationem ob $M = k$:

$$2gcc(b+x)dx = \tfrac{1}{2}ccvvdx\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) - f^4 v\,dv\left(B + \frac{x}{cc}\right)$$

quae posito $f^4 vv\left(B + \frac{x}{cc}\right) = u$ abit in hanc:

$$du - \frac{c^4 u\,dx}{f^4(Bcc+x)} + 4gcc(b+x)dx = 0.$$

Ponatur $\frac{c^4}{f^4} = \lambda$ et multiplicando per $(Bcc+x)^{-\lambda}$ erit integrale:

$vv =$

$$vv = C(Bcc+x)^{\lambda-1} - \frac{4\lambda g}{(1-\lambda)(2-\lambda)}((2-\lambda)b - Bcc + (1-\lambda)x).$$

Si iam descensum ex A a incepisse assumamus existente

$$AB = e, \text{ fiet } C = \frac{4\lambda g}{(1-\lambda)(2-\lambda)} \cdot \frac{(2-\lambda)b - Bcc + (1-\lambda)e}{(Bcc+e)^{\lambda-1}}$$

ideoque

$$vv = \frac{4\lambda g((2-\lambda)b - Bcc + (1-\lambda'e)}{(1-\lambda)(2-\lambda)}\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1}$$

$$-\frac{4\lambda g((2-\lambda)b - Bcc + (1-\lambda)x)}{(1-\lambda)(2-\lambda)}$$

$$\text{vel } vv = \frac{4\lambda g((2-\lambda)b - Bcc)}{(1-\lambda)(2-\lambda)}\left(\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1} - 1\right)$$

$$+\frac{4\lambda g}{2-\lambda}\left(e\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1} - x\right)$$

$$\text{seu } vv = \frac{4\lambda g(Bcc+(\lambda-2)b)}{(\lambda-1)(\lambda-2)}\left(1 - \left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1}\right)$$

$$+\frac{4\lambda g}{\lambda-2}\left(x - e\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1}\right).$$

Ac si tempore $= t$ aqua ab A a ad M m subsederit erit $dt = \frac{-dx\sqrt{\lambda}}{v}$: cum autem aqua maxima celeritate effluit fiet

$$vv = \frac{4\lambda g(b+x)}{\lambda-1}$$

quod ergo euenit vbi erit

$$x = -Bcc + \frac{(Bcc+e)^{\frac{\lambda-1}{\lambda-2}}}{(Bcc+(\lambda-2)b+(\lambda-1)e)^{\frac{1}{\lambda-2}}}.$$

 Deni-

Denique pro pressione p qua tubi pars inferior in sectione zv vrgetur, aequatio supra inuenta hanc induet formam:

$$2g(k-p)(B+\frac{x}{cc})=(2gz-\frac{1}{2}vv(1-\frac{f^4}{\omega\omega})(B+\frac{x}{cc})$$
$$-(2g(b+x)-\frac{1}{2}vv(1-\frac{1}{\lambda}))\int\frac{ds}{\omega}$$

vnde fit

$$p=k+\frac{cc(b+x-\frac{(\lambda-1)vv}{4\lambda g})\int\frac{ds}{\omega}}{Bcc+x}-z+\frac{vv}{4g}(1-\frac{f^4}{\omega\omega}).$$

Casus hic imprimis notari meretur quo $\lambda=\frac{c^4}{f^4}$ est numerus valde magnus, quo casu ex aequatione differentiali

$$4\lambda g(b+x)dx=(\lambda-1)vvdx-2(Bcc+x)vdv$$

statim colligitur $vv=4g(b+x)$, scilicet quia orificium Oo est minimum, quasi a primo statim initio celeritas fit maxima, et pressio in sectione zv prodit

$$p=k-z+(b+x)(1-\frac{f^4}{\omega\omega}+\frac{cc}{\lambda}\int\frac{ds}{\omega})$$

et quia vltimum terminum per λ diuisum omittere licet erit $p=k-z+(b+x)(1-\frac{f^4}{\omega\omega})$.

Coroll. I.

84. Casus iste quo $\lambda=\frac{c^4}{f^4}$ est numerus valde magnus imprimis notari meretur, quia experimenta facillime ad eum accommodantur; quibus etiam euincitur celeritatem effluxus vix discrepare a valore inuento.

Coroll.

Coroll. 2.

85. Circa pressiones autem in tubi parte inferiori B O, hoc casu potissimum obseruari conuenit, eas non solum vltra k diminui, sed etiam negatiuas fieri posse. Si enim sectio $zv = \omega$ aequalis sit orificio ff, erit $p = k - z = k - z\,P$, at si haec sectio minor est foramine ff pressio multo magis diminuitur.

Coroll. 3.

86. Quando autem pressio p reuera fit negatiua fluidi continuitas tollitur, et quia latera tubi deserendo se in arctius spatium contrahit, neque amplius legem stabilitam sequitur. Quamdiu autem pressio est positiua quidem sed minor quam k, tum quia pressio externa superat internam si tubus ibi foraminulo perforetur, aër aliudue fluidum extra positum intrudetur, ita vt tubus ibi vi attractrice praeditus videatur.

Scholion 1.

89. Huc fere redeunt quae de effluxu aquae ex tubis vel vasis cuiuscunque formae tradi solent, quae quia iam copiose ac diligenter sunt pertractata, hic fusius euoluere nolo: idque adeo ob hanc potissimum rationem, quod in plerisque casibus, ad quos haec Theoria applicari solet, calculus non mediocriter a veritate aberrare deprehendatur. Statim enim ac vas, vti fig. 54. notabilem prae foramine O o habet

habet amplitudinem manifeſtum eſt tota ſtrata zv non aequaliter ſubſidere, ſed partes foramini imminentes magis ad deſcenſum impelli. Tum vero vbi tubus ſubito in foramen coarctatur, ibi certe neutiquam aquae motus ita eſt comparatus, vti in hac ſectione aſſumimus. Tantopere potius verus motus ab hac hypotheſi diſcrepabit vt mirandum ſit experimenta non multo magis a calculo diſcrepare. Interim tamen diſſenſus inſignis ſe prodit, quando fundus vaſis OC tenuiſſimo foramine Oo eſt pertuſus, quo caſu in vena effluente ingens contractio animaduertitur inde oriunda quod aqua a lateribus erumpens oblique effluit; quo fit vt per foramen minor aquae copia quam pro eius amplitudine eiiciatur. Cui incommodo ii, qui experimenta calculo conſentanea reddere volunt ita medentur, vt foramini tubulum cylindricum inſerere ſoleant, vt hoc modo obliquitas motus euitetur.

Scholion. 2.

88. Caſus quo $\lambda = \frac{e^4}{f^4}$ eſt numerus vehementer magnus euolutionem ſingularem poſtulat, qua dilucide explicetur, quomodo aqua, dum eius motus a quiete incipit ſubito maximam celeritatem adipiſcatur. Hunc in finem formula $\left(\frac{Bcc+x}{Bcc+e}\right)^{\lambda-1}$ rite euolui oportet, vt motum ab initio genitum exhibeat. Statim ergo ac motus incipit altitudo x fit minor quam e, ponamus igitur $\frac{Bcc+x}{Bcc+e} = 1 - \frac{y}{\lambda-1}$, vt ſit

$x = e$

$x = e - \frac{y(Bcc+e)}{\lambda - 1}$, ac denotante ε numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas, erit proxime $\left(1 - \frac{y}{\lambda - 1}\right)^{\lambda - 1} = \varepsilon^{-y}$. Habebimus ergo:

$$vv = \frac{4\lambda g(Bcc + \lambda b)}{\lambda\lambda}(1 - \varepsilon^{-y}) + \frac{4\lambda g}{\lambda}(x - e\varepsilon^{-y}) \text{ ſeu}$$

$$vv = 4gb(1 - \varepsilon^{-y}) + 4g(x - e\varepsilon^{-y}) = 4g(b+x) - 4g(b+e)\varepsilon^{-y}$$

vnde patet in ipſo initio, vbi $x = e$ et $y = 0$, ob $\varepsilon^{-y} = 1$ reuera fieri $v = 0$, ſtatim autem, atque aqua ſubſederit per interuallum minimum $\frac{y(Bcc+e)}{\lambda - 1}$, quoniam y valorem notabilem ſortitur, quantitatem ε^{-y} euaneſcere, ideoque fieri $vv = 4g(b+x)$. Deinde vero ex aequatione pro tempore $dt = \frac{-dx\sqrt{\lambda}}{v}$, quoniam in valore ipſius vv loco x ſcribere licet e, vt ſit $vv = 4g(b+e)(1 - \varepsilon^{-y})$ erit

$$dt = \frac{-dx\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{g(b+e)(1-\varepsilon^{-y})}} = \frac{dy(Bcc+e)}{2\sqrt{\lambda g(b+e)(1-\varepsilon^{-y})}},$$

vnde colligitur integrando

$$t = \frac{Bcc+e}{2\sqrt{\lambda g(b+e)}}\, l\, \frac{1+\sqrt{(1-\varepsilon^{-y})}}{1-\sqrt{(1-\varepsilon^{-y})}}.$$

Simul igitur atque ε^{-y} fit fractio quam minima, ob

$$l\,\frac{1+\sqrt{(1-\varepsilon^{-y})}}{1-\sqrt{(1-\varepsilon^{-y})}} = l(4\varepsilon^{y} - 1) = l4\varepsilon^{y} = y + l4 \text{ erit}$$

$$t = \frac{Bcc+e}{2\sqrt{\lambda g(b+e)}}(y + l4) = \frac{Bcc+e}{2\sqrt{\lambda g(b+e)}}\left(\frac{\lambda(e-x)}{Bcc+e} + l4\right).$$

 Cum

Cum porro celeritas euadat maxima vbi

$$x = -Bcc + (Bcc + e)\left(\frac{Bcc + e}{Bcc + \lambda(b + e)}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = e - \frac{(Bcc + e)l\lambda}{\lambda}$$

eueniet hoc vbi $y = l\lambda$, ideoque poſtquam ab initio effluxerit tempus $t = \frac{(Bcc + e)l\lambda}{2\sqrt{\lambda g(b + e)}}$, quod cum $\frac{l\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ euaneſcat ſi $\lambda = \infty$, erit quam minimum ita vt aqua primo quaſi inſtanti maximam celeritatem adipiſcatur. Interim hinc intelligitur quo longior ſimulque anguſtior fuerit tubi pars inferior B O eo tardius ad celeritatem maximam peruentum iri.

Scholion. 3.

89. Euoluto caſu quo $\lambda = \frac{e^4}{f^4}$ eſt quaſi numerus infinitus, etiam is quo λ eſt numerus mediocriter magnus accuratiori euolutione dignus videtur. Cum igitur inuenerimus:

$$\frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)vv}{4\lambda g} = Bcc + (\lambda - 2)b + (\lambda - 1)x$$
$$-(Bcc + (\lambda - 2)b + (\lambda - 1)e)\left(\frac{Bcc + x}{Bcc + e}\right)^{\lambda - 1}$$

ponamus vt ante $\frac{Bcc + x}{Bcc + e} = 1 - \frac{y}{\lambda - 1}$, vt ſit $y = \frac{(\lambda - 1)(e - x)}{Bcc + e}$; et quia totum negotium ad commodam euolutionem formulae $\left(1 - \frac{y}{\lambda - 1}\right)^{\lambda - 1}$ reducitur poſita ea $= Y$ ſit $lY = (\lambda - 1)l(1 - \frac{y}{\lambda - 1})$, ac quia ſemper eſt $y < \lambda - 1$, ob $\frac{y}{\lambda - 1} = \frac{e - x}{Bcc + e}$ erit

$$lY = -y - \frac{yy}{2(\lambda - 1)} - \frac{y^3}{3(\lambda - 1)^2} - \frac{y^4}{4(\lambda - 1)^3} - \text{etc.}$$

quae

quae ſeries vtique valde conuergit. Hinc ergo invento valore Y erit:

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)vv}{4\lambda g}=(Bcc+(\lambda-2)b+(\lambda-1)e)(1-Y)-(Bcc+e)y$$

vbi eſt $y=(\lambda-2)(1-Y^{\frac{1}{\lambda-1}})$ et $x=(Bcc+e)Y^{\frac{1}{\lambda-1}}-Bcc$

Cum iam celeritas maxima ſit:

$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)vv}{4\lambda g}=(\lambda-2)(b+x)$, hic locus definitur hac aequatione

$$Y^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}}=\frac{Bcc+e}{Bcc+(\lambda-2)b+(\lambda-1)e}$$

et poſito

$$\frac{Bcc+(\lambda-2)b+(\lambda-1)e}{Bcc+e}=E,\ \text{fit}\ Y^{\frac{1}{\lambda-1}}=E^{-\frac{1}{\lambda-1}}=\varepsilon^{-\frac{1}{\lambda-1}lE}$$
$$=1-\frac{lE}{\lambda-1}+\frac{(lE)^2}{2(\lambda-1)^2}-\frac{(lE)^3}{6(\lambda-1)^3}+\text{etc.}$$

vnde celeritas erit maxima vbi

$$x=e-(Bcc+e)(\frac{lE}{\lambda-1}-\frac{(lE)^2}{2(\lambda-1)^2}+\frac{(lE)^3}{6(\lambda-1)^3}-\text{etc.}$$

Cum nunc porro ſit

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)vv}{4\lambda g}=(Bcc+e)(E(1-Y)-y)$$

erit pro tempore

$$dt=\frac{-dx\sqrt{\lambda}}{v}=\frac{-Y^{\frac{2-\lambda}{\lambda-1}}dY\sqrt{(\lambda-2)(Bcc+e)}}{2\sqrt{(\lambda-1)g(E(1-Y)-(\lambda-1)(1-Y^{\frac{1}{\lambda-1}})}}$$

et facto $Y=u^{\lambda-1}$, fit

$$dt=\frac{-du\sqrt{(\lambda-1)(\lambda-2)(Bcc+e)}}{2\sqrt{g(E-\lambda+1+(\lambda-1)u-Eu^{\lambda-1})}}$$

 Verum

Verum calculus commodius instituetur solam quantitatem y retinendo et ponendo:

$$Y = \varepsilon^{-y}\left(1 - \frac{yy}{2(\lambda-1)} - \frac{y^3}{3(\lambda-1)^2} + \frac{y^4}{8(\lambda-1)^2}\right)$$

vnde solutio §. praeced. propius ad veritatem perducetur, dum etiam termini per λ diuisi introducuntur. Sed quia haec mere sunt analytica, ea hic vberius non petracto.

Problema 55.

Tab. V. Fig. 56. 90. Si tubus, dum aqua per orificium O o effluit in altero termino A a continuo nouum aquae supplementum accipiat vt perpetuo ad A a vsque plenus conseruetur, ibique aqua a vi quacunque iugiter protrudatur, eius motum definire.

Solutio.

Posita amplitudine orificii O $o = ff$ sit v celeritas, qua iam elapso tempore $= t$, aqua ibi effluit in alio vero loco quocunque z, cuius distantia ab initio A sit A$z = s$, tubique amplitudo $zv = \omega$, et altitudo super plano horizontali fixo $z\pi = z$, siquidem curuae $\alpha\pi\omega$ applicatae singulorum tubi punctorum altitudines super eodem plano exhibere assumuntur. His positis si in sectione zv statuatur pressio $= p$, principiia motus hanc suppeditant aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f^4 vv}{2\omega\omega} - \frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}.$$

Sit

Sit nunc pressio in $Aa = L$ amplitudo $Aa = cc$ et altitudo $A\alpha = \mathfrak{a}$, et quia hic $s = 0$, simulque integrale $\int \frac{ds}{\omega}$ euanescit, ob $p = L$, $z = \mathfrak{a}$, et $\omega = cc$, erit:

$$2gL = \Delta : t - 2g\mathfrak{a} - \frac{f^4 vv}{2c^4}$$

Deinde pro orificio Oo, sit ibi pressio $= k$, pondus atmosphaerae referens, et valor integralis $\int \frac{ds}{\omega}$ per totum tubum AO extensi fiat $= \mathfrak{O}$, altitudo vero $O\omega = \mathfrak{o}$. Quocirca ob $p = k$, $z = \mathfrak{o}$ et $\omega = ff$ habebitur;

$$2gk = \Delta : t - 2g\mathfrak{o} - \tfrac{1}{2}vv - \frac{ffdv}{dt}.\mathfrak{O}$$

Nunc haec aequatio ab illa subtracta relinquit

$$2g(L-k) = 2g(\mathfrak{o}-\mathfrak{a}) + \tfrac{1}{2}vv\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) + \frac{ffdv}{dt}.\mathfrak{O} \text{ seu}$$

$$4g(L-k+\mathfrak{a}-\mathfrak{o})dt - vvdt\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) = 2\mathfrak{O}ffdv$$

vnde cum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{O}$ sint quantitates constantes, pressio vero L functionem temporis denotare possit, siquidem ea cum tempore varietur, celeritas v ad quoduis tempus definiri debet. Posita autem pressione L constante huiusmodi aequatio erit resolvenda:

$$dt = \frac{A\,dv}{B \pm Cvv},$$

existente

$$A = 2\mathfrak{O}ff;\ B = 4g(L-k+\mathfrak{a}-\mathfrak{o}) \text{ et } \pm C = \frac{f^4}{c^4} - 1;$$

tres ergo casus sunt euoluendi.

I. Si $cc = ff$ seu amplitudo Aa orificio $Oo = ff$ aequalis, erit $C = 0$ et $t = \frac{Av}{B}$ seu $v = \frac{B}{A}t + \text{Const.}$ vnde si $B > 0$ celeritas continuo crescere posset.

 II.

II. Si $cc > ff$ seu amplitudo Aa orificium Oo superet, posito $C = 1 - \frac{f^4}{c^4}$ aequatio $dt = \frac{A\,dv}{B - Cvv}$ integrata dat $t = \frac{A}{2\sqrt{BC}}\, l\, \frac{\sqrt{B} + v\sqrt{C}}{\sqrt{B} - v\sqrt{C}} +$ Const. quae constans, si motus a quiete inceperit euanescit; hocque casu celeritas quidem crescit, sed elapso etiam tempore infinito non vltra $v = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{C}}$ augetur.

III. Si $cc < ff$ seu amplitudo Aa minor sit orificio Oo, posito $C = \frac{f^4}{c^4} - 1$, aequatio $dt = \frac{A\,dv}{B + Cvv}$ integrata dat:

$$t = \frac{A}{\sqrt{BC}} \text{ Ang. tang. } \frac{v\sqrt{C}}{\sqrt{B}}, \quad \text{seu } v = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{C}} \text{ tang. } \frac{t\sqrt{BC}}{A},$$

vbi hoc memoratu dignum euenit, vt elapso tempore $t = \frac{A}{\sqrt{BC}} \cdot \frac{\pi}{2}$ celeritas iam infinita euadat.

Inuenta celeritate effluxus v ad quoduis tempus t, in quouis loco medio zv pressio p ita exprimitur:

$$2g(p-k) = 2g(o-z) + \tfrac{1}{2}vv\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right) + \frac{ff\,dv}{dt}\left(\mathfrak{O} - \int\frac{ds}{\omega}\right)$$

quae elisa formula differentiali $\frac{ff\,dv}{dt}$ praebet:

$$4g(p - L + z - a)\mathfrak{O} = vv\left(\frac{f^4}{c^4} - \frac{f^4}{\omega\omega}\right)\mathfrak{O} + vv\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right)\int\frac{ds}{\omega}$$
$$- 4g(L - k + a - o)\int\frac{ds}{\omega}$$

sicque omnia quae ad motum pertinent sunt determinata.

Coroll. 1.

91. Si motus ad vniformitatem peruenerit, ita vt iam aqua constanter eadem celeritate per orificium

ficium Oo expellatur, ob $dv = 0$ habebitur haec aequatio:

$$4g(L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o}) = vv\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right)$$

vnde si amplitudo in Aa aequalis sit orificio Oo vti in capite praecedente pressio in Aa debet esse $L = k + \mathfrak{o} - \mathfrak{a}$, neque hinc celeritas v ipsa determinatur.

Coroll. 2.

92. At si amplitudo $Aa = cc$ maior fuerit quam orificium $Oo = ff$, pro motus vniformitate celeritas effluxus v ita definitur vt sit:

$$vv = \frac{4gc^4(L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o})}{c^4 - f^4}.$$

Hoc ergo casu necesse est vt sit $L > k + \mathfrak{o} - \mathfrak{a}$, atque ex hoc excessu celeritas effluxus determinatur.

Coroll. 3.

93. Sin autem amplitudo $Aa = cc$ minor sit orificio $Oo = ff$, motus vniformitas hanc praebet aequationem

$$vv = \frac{4gc^4(k + \mathfrak{o} - \mathfrak{a} - L}{f^4 - c^4}:$$

vnde patet motum aequabilem obtineri non posse nisi sit $L < k + \mathfrak{o} - \mathfrak{a}$; atque ex hoc defectu celeritas effluxus determinatur.

Scholion 1.

94. Omnia haec certe sunt maxime paradoxa, cum ex eadem pressione L, qua aqua in sectione

Aa

A *a* vrgetur, celeritas quantumuis magna oriri posse sit inuenta; atque hoc imprimis videbitur absurdum, quod in casu tertio a vi finita L tempore finito aquae celeritas adeo infinita imprimi possit. Haec autem absurditas statim euanescet, si modo hypothesin, cui totum problema innititur, attentius perpendamus; assumimus enim dum aqua per sectionem A *a* propellitur, continuo aliunde nouam aquae copiam eadem celeritate eo influere, neque hic curamus, vnde haec aqua adueniat, et a quanam vi ipsi hic motus inducatur; longe diuersa scilicet haec vis est a vi L quae nihil aliud agit, nisi vt aquam iam illa celeritate intrusam vlterius per tubum propellat. Dum ergo haec vis L valeat aquae per A *a* ingressae motum accelerare celeritas effluxus increscet, ideoque per hypothesin aqua noua etiam continuo maiori celeritate ab illa vi peregrina ingeri assumitur. Quando igitur calculus ostendit, celeritatem mox fieri adeo infinitam, hic effectus minime vi nostrae finitae L, aquam per tubum propellenti, sed manifesto vi illi peregrinae, quae hoc casu vtique sit infinita tribui debet; quippe quae aquam nouam celeritate infinita in tubum compellit. Atque eidem causae est etiam illud paradoxon adscribendum quod celeritas effluxus ipsa in problemate non determinetur; quo celerius enim et copiosius aqua noua a vi illa peregrina, quaecunque ea sit, subministratur, eo celerius etiam eadem pressio L in A *a* eam per tubum propellere valebit; quoniam igitur illius vis peregrinae nulla ratio in

nostro

noſtro calculo habetur, mirum non eſt, quod calculus tam immania paradoxa in ſe implicet, quae autem re bene expenſa ſponte diluuntur.

Scholion 2.

95. Introductio autem eiusmodi potentiae L, quae iugiter pari vi premat ſiue aqua per tubum celerius promoueatur ſiue tardius, a natura virium, quae ad aquam propellendam vſurpantur, maxime abhorret, cum omnes iſtae vires ita ſint comparatae, vt quo celerius iam aqua per tubum promovetur, eo magis debilitentur. Quamobrem ſi hoc problema ad caſus reales, quibus aqua ad certam altitudinem eleuari debet, accommodare velimus, naturam earum virium, quibus ad hunc finem eſt vtendum, probe conſiderari oportet. Quam indolem cum iam in praecedente capite dilucide expoſuerim inde ad praeſens inſtitutum id tantum repeto, ad opus peragendum adhiberi certam vim F quae certa velocitate e agat, ita vt iam tota quaeſtio eo redeat; quomodo machinam inſtrui conueniat, vt ab iſta vi hac celeritate agente aqua vniformiter per tubum propelli poſſit.

Problema 56.

96. Si aqua per tubum vtcunque inaequaliter amplum Aa Oo ad altitudinem datam O$\omega = a$ motu vniformi eleuari debeat a data vi $= F$, quae data celeritate $= e$ operetur, machinam inuenire Tab. IV. Fig. 49.

 cuius

cuius ope hic effectus obtineri queat, simulque copiam aquae dato tempore eleuandae definire.

Solutio.

Quia omnis machinae indoles in hoc consistit, vt vim qua agitatur, in alium locum transferat, eamque simul in data ratione vel augeat vel minuat, ponamus machinam quaesitam id praestare, vt vis aquam per orificium inferius A a propellens fiat $= n\,F$; atque ex natura machinarum ista vis hic aget celeritate $= \frac{e}{n}$, ita vt machinae constructio a solo numero n pendeat, quem ergo definiri oportet. Nunc praecedens problema in subsidium vocando, quia amplitudo A a posita est $= cc$ in quam vis $n\,F$ agit, pressio ibi exerta erit $= \frac{n\,F}{cc}$, quae cum pressione atmosphaerae k adiunetur, habebimus pressionem ibi positam $L = \frac{n\,F}{cc} + k$; atque aqua per orificium inferius A a propelletur celeritate $= \frac{e}{n}$. Quare cum superioris orificii O o amplitudo sit posita $= ff$, aqua ibi expelletur celeritate $= \frac{cce}{nff}$, ita vt sit $v = \frac{cce}{nff}$: et $dv = 0$. Nunc porro altitudo orificii O o ante posita $= o$ hic est O $\omega = a$, inferioris vero A a nulla seu $a = o$, ex quo aequatio pro motu ibi inuenta induet hanc formam:

$$4g\left(\frac{nF}{cc} - a\right) - \frac{c^4 ee}{nnf^4}\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) = 0 \text{ seu}$$

$$4gnn\left(\frac{nF}{cc} - a\right) = ee\left(\frac{c^4}{f^4} - 1\right)$$

vnde

vnde numerum n ideoque machinam definire licet. Tum autem necesse est vt aqua aliunde iugiter celeritate $= \frac{e}{n}$ in orificium A a aduehatur; singulisque minutis secundis aquae aduectae volumen sit $= \frac{cce}{n}$, tantum autem singulis minutis secundis per orificium superius O o exonerabitur.

Deinde si in loco tubi quouis z ponatur amplitudo $zv = \omega$, altitudo $z\pi = z$, et longitudo A $z = s$, pressio vero ibidem $= p$, erit ex problemate praecedente:

$$2g(p-k) = 2g(a-z) + \frac{c^4 ee}{2nnf^4}\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right)$$

vnde si per praecedentem aequationem $\frac{c^4 ee}{nnf^4}$ eliminemus fit

$$p = k - z + \left(a\left(\frac{f^4}{\omega\omega} - \frac{f^4}{c^4}\right) + \frac{nF}{cc}\left(1 - \frac{f^4}{\omega\omega}\right)\right) : \left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right).$$

Coroll. 1.

97. Si ambo orificia A a et O o sunt aequalia, seu $cc = ff$ fit $\frac{nF}{cc} - a = 0$, ideoque $n = \frac{acc}{F}$; pro machinae instructione tum singulis minutis secundis eiicitur aquae volumen $= \frac{Fe}{a}$; tanta vero copia interea continuo celeritate $= \frac{Fe}{acc}$ in orificium A a suppeditari debet; ad quod peculiari opus est vi, ad quam hic non respicimus.

Coroll. 2.

68. Si sit $cc > ff$, ideoque $\frac{c^4}{f^4} - 1 > 0$, fit $\frac{n}{cc} > \frac{a}{F}$, hinc aquae volumen vno minuto secundo

eiectum erit $< \frac{Fe}{a}$ ac tantumdem aquae in orificium A a aduehi debet celeritate minore quam $\frac{Fe}{acc}$, ad quod minori vi peculiari opus est quam casu praecedente.

Coroll. 3.

99. Sin autem orificium superius ff minus sit quam inferius cc, prodit $\frac{n}{cc} < \frac{a}{F}$, et volumen aquae vno minuto secundo eiectae fit $> \frac{Fe}{a}$, ita vt hoc modo plus aquae eleuetur quam casu primo $ff = cc$; verum etiam tanto plus aquae a vi illa peregrina in orificium A a, idque maiori celeritate quam $\frac{Fe}{acc}$ aduehi debet.

Scholion.

100. Mirum igitur non debet videri, quod ab eadem vi machinam mouente modo maior modo minor aquae copia ad eandem altitudinem eleuetur, prout superius orificium O o fuerit maius vel minus inferiore A a. Si enim integrum effectum perpendere velimus, etiam integra causa est spectanda, quae habetur, si ad eam vim, qua machinam agitari assumimus, insuper adiungatur illa vis, quae ad aquam continuo in orificium A a ingerendam requiritur, hae autem ambae vires iunctim sumtae eo casu quo minor aquae copia eleuatur vtique minorem praebent summam quam altero casu, quo maior copia eleuatur, ita vt hic nihil occurrat, quod aequalitati inter causam et effectum aduersetur.

Quo-

Quoniam vero in praxi eadem vis qua aqua per tubum propellitur, etiam aquam continuo in tubum ſuppeditare debet, quatenus hic duplex effectus ab eadem cauſa producitur, in vſum practicum accuratius eſt inueſtigandum. Cum igitur antliarum ope aqua tam in tubum attrahi, quam per eum propelli ſoleat, huic inueſtigationi, quae in praxi ampliſſimum habet vſum, caput peculiare deſtinamus.

CAPVT IV.

DE ELEVATIONE AQVAE ANTLIARVM OPE.

Problema 57.

101. Si tubus cylindricus $BbCc$ inferius ad Aa vehementer ampliatus aquae ſtagnanti Ee ſit immerſus, in eoque embolus POo data vi ſurſum trahatur, vt ob preſſionem atmoſphaerae aqua continuo ſuccedat, hunc aquae motum aſcenſus definire. Tab. V. Fig. 57.

Solutio.

Elapſo tempore t embolus cum aqua iam eleuatus ſit ad altitudinem $CO = x$; ſitque amplitudo tubi $Oo = ff$, et celeritas tam emboli quam aquae aſcendentis $= v$. Vis autem embolum ſurſum tollens ſit $= ffu$, et cum embolus ab atmoſphaera deprimatur preſſione $= k$, foret preſſio in $Oo = k - u$ ſi nullus adeſſet motus, cum autem motus mutationem afferat, ponatur ea $= \pi$, donec ex ſequentibus determinetur. Sectio porro Aa ampliſſima ponatur $= cc$, eiusque profunditas infra ſuperficiem aqua $C\alpha = \alpha$, eritque preſſio in $Aa = k + \alpha$. His poſitis ſolutio problematis 55. huc accommodabitur, ſi ponamus $L = k + \alpha$, $\mathfrak{a} = -\alpha$, $\mathfrak{o} = x$, et quia cc eſt valde magnum loco $\mathfrak{O} = \int \frac{ds}{\omega}$ habebimus $\frac{x}{ff}$, quod autem ibi erat k hic nobis eſt π; vnde fit $L - k + \mathfrak{a} - \mathfrak{o} = k - \pi - x$. Sicque hanc adipiſcimur aequationem:

$$4g(k - \pi - x)dt - vvdt = 2xdv$$

eleuatio autem elementaris dat $dt = \frac{dx}{v}$, eritque

$$2xvdv + vvdx = 4g(k - \pi - x)dx$$

et integrando

$$vvx = 4g\int(k - \pi - x)dx$$

hinc ergo fiet

$$vvx = 4g(kx - \tfrac{1}{2}xx - \int \pi dx)$$

et nunc tantum reſtat vt preſſionem adhuc incognitam π inueſtigemus; cuius valorem ex motu emboli repeti oportet. Ponamus ergo totius emboli maſſam aequari maſſae aqueae cuius volumen eſt $= ffh$, quo ſimul eius pondus exprimitur, et quia frictio emboli maxime motui obſtat, ponatur ea $= \delta ffh$. Iam ob preſſionem inter embolum et aquam $= \pi$

ab

ab ea embolus ſurſum vrgetur vi motrice $=\pi ff$, cui addatur vis actu ſurſum tollens ffu; a ſumma vero ſubtrahatur preſſio atmoſphaerae ffk, ita vt vis ſurſum pellens ſit $=ff(\pi+u-k)$ a qua porro auferri debet reſiſtentia tam a pondere emboli quam a frictione nata, quae eſt $=(1+\delta)ffb$ vnde ob maſſam mouendam $=ffb$ vis acceleratrix prodit $=\frac{\pi+u-k-(1+\delta)b}{b}$. Quia nunc celeritas emboli ſurſum directa eſt v, qua tempuſculo dt per ſpatiolum dx eleuatur erit acceleratio $=\frac{dv}{dt}=\frac{v\,dv}{dx}$, vnde naſcitur haec aequatio $\frac{v\,dv}{dx}=\frac{2g}{b}(\pi+u-k-(1+\delta)b)$, quae in $2\,b\,dx$ ducta et integrata praebet

$$bvv=4g(\int\pi\,dx+\int u\,dx-kx-(1+\delta)bx)$$

ante vero inuenimus

$$xvv=4g(kx-\tfrac{1}{2}xx-\int\pi\,dx);$$

quarum aequationum additione formula incognita $\int\pi\,dx$ eliditur, oriturque

$$(b+x)vv=4g(\int u\,dx-(1+\delta)bx-\tfrac{1}{2}xx)$$

qua aequatione celeritas in quauis altitudine $CO=x$ determinatur. Sin autem ex illis duabus aequationibus vv eliminemus, peruenimus ad hanc aequationem: $(b+x)\int\pi\,dx-k(b+x)x+x\int u\,dx-(\tfrac{1}{2}+\delta)bxx=0$ ſeu

$$\int\pi\,dx=kx+\frac{(\frac{1}{2}+\delta)bxx}{b+x}-\frac{x\int u\,dx}{b+x}$$

quae differentiata monſtrat preſſionem illam incognitam

$$\pi = k + \frac{(\frac{1}{2}+\delta)b(2bx+xx)}{(b+x)^2} - \frac{b\int u\,dx}{(b+x)^2} - \frac{ux}{b+x}$$

quam ideo tantum nosse oportet, vt quando ea sit negatiua agnoscamus aquam non amplius embolum sequi sed inter eum et aquam spatium vacuum relinqui, continuitate, cui calculus innititur, e medio sublata.

Coroll. 1.

102. Cum igitur inuenerimus esse:

$$vv = \frac{4g(\int u\,dx - (1+\delta)bx - \frac{1}{2}xx)}{b+x}$$

nisi haec quantitas sit positiua, nullus motus producetur; iam igitur primo motus initio vbi $x = 0$ esse debet $u > (1+\delta)b$. Post motum vero crescente x continuo maiori opus est vi.

Coroll 1.

103. Si vis attollens u sit constans, fiet:

$$vv = \frac{4gx(u-(1+\delta)b - \frac{1}{2}x)}{b+x}$$

vnde patet celeritatem v quae ab initio creuerat, iterum decrescere et tandem euanescere cum euaserit $x = 2u - 2(1+\delta)b$ tum autem prodit pressio

$$\pi = k + (\tfrac{1}{2}+\delta)b - u + \frac{bb}{4(u-(\frac{1}{2}+\delta)b)}$$

quae dum ne sit negatiua, aqua eo vsque embolum sequetur.

Coroll.

Coroll 3.

104. Vt igitur cognoscamus, ad quantam altitudinem aquam eleuare liceat, faciamus illam pressionem euanescentem et posito breuitatis gratia $u-(\frac{1}{2}+\delta)b=r$ erit:

$4kr-4rr+bb=0$ hincque $r=\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\sqrt{(bb-kk)}$ et

$$u=(\tfrac{1}{2}+\delta)b+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}\sqrt{(bb+kk)}$$

Atque ab hac vi aqua attolletur ad altitudinem

$$x=k+\sqrt{(bb+kk)}-b$$

vnde patet quo minor sit emboli massa, eo maiorem fore hanc altitudinem, quae adeo vsque ad $2k$ increscere posset si esset $b=0$. Ad hoc autem frictionem nihil conferre, notari meretur.

Scholion 1.

105. Tubo BbCc ideo infra partem ampliatam CcAa anneximus ne opus esset aquae in tubum intranti subito celeritatem finitam tribuere cum ante quieuisset, cum autem eius ratio prorsus ex calculo excesserit, intelligimus aquae eleuationem eandem fore, etiamsi tubus totus cylindricus adhibeatur, eiusque inferius orificium Cc aquae stagnanti immergatur. Neque vero putandum est tum aquam per Cc intrantem subito celeritatem finitam accipere, sed potius in aqua externa circa orificium Cc eiusmodi motus generabitur quasi talis pars amplata CcAa esset annexa. Deinde imprimis necesse erat cum motus generatione etiam emboli motum coniungere eiusque tam inertiae quam

frictionis rationem habere quoniam in his obstaculis superandis notabilis virium sollicitantium pars insumitur, quod potissimum in ipso motus initio maximum affert momentum. Si enim quod fieri nequit emboli tam inertia quam frictio euanesceret, vt vis attollens cum nulla plane massa mouenda esset coniuncta ob $h = 0$, foret $vv = \frac{4g(\int u\,dx - \frac{1}{2}xx)}{x}$, ideoque si vis u esset finita posito $x = 0$ statim ab initio celeritas adeo orietur infinita in aqua, mox quidem imminuenda verum hoc calculi incommodum etiam nunquam in mundo locum habere potest quia nullae dantur vires quae non propriam quandam massam mouendam sibi habeant adiunctam.

Scholion 2.

106. Huiusmodi cylindrus embolo instructus antlia vocatur, cuius ope dum embolus sursum attollitur, orificio inferiori Cc aquae stagnanti immerso aqua simul in cylindrum eleuatur, vel potius a pressione atmosphaerae intruditur. Etsi enim in formula pro celeritate v inuenta pressio atmosphaerae k non reperitur, in ea tamen conditione manifesto inuoluitur, quod aqua embolum in tubo ascendentem non sequatur, nisi pressio π inter embolum et aquam sit positiua, si enim atmosphaerae pressio k esset nulla, statim ab initio posito $x = 0$, foret pressio π nulla, neque propterea aqua embolum sequeretur simulque totus calculus pro sequenti motu sublata

con-

continuitate per ſe corrueret. Ex quo patet ſolam atmoſphaerae preſſionem k in cauſa eſſe cur aqua in his antliis eleuetur. Hic autem contra vulgarem opinionem calculus noſter declarat fieri poſſe, vt aqua longe vltra altitudinem k, quae 32 pedum aeſtimatur, atque adeo fere duplo maiorem eleuetur ſi modo inertia emboli b ſatis ſit parua et vis elevans ſatis magna. Ex coroll. 3 autem ad hoc neceſſe eſt vt ſit vis embolum attollens

$$u = (\tfrac{1}{2} + \delta) b + \tfrac{1}{2} k + \tfrac{1}{2} \sqrt{(bb + kk)}$$

quo aqua ad altitudinem $k + \sqrt{(bb + kk)} - b$ elevari queat, tum vero in quauis altitudine minore x pro motus celeritate v erit

$$vv = \frac{2gx(k + \sqrt{(bb + kk)} - b - x)}{b + x};$$

quae celeritas ſit maxima vbi

$$x = -b + \sqrt{(bk + b\sqrt{(bb + kk)})}$$

ipſaque celeritas maxima erit

$$= (\sqrt{(bk + b\sqrt{(bb + kk)})} - b)\sqrt{\tfrac{2g}{b}}.$$

Si exempli gratia eſſet $b = \frac{3}{4} k$, aqua ad altitudinem $= \frac{3}{2} k$ eleuari poſſet a vi $u = \frac{3}{2} k + \frac{3}{4} \delta k$, et maxima celeritas foret $= \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \sqrt{2gk}$, qua vno minuto ſecundo ſpatium $19\frac{1}{2}$ pedum percurritur.

Scholion 3.

107. In vſu autem huiusmodi antliarum quo aqua, poſtquam modo expoſito in cylindrum fuerit eleuata, depreſſione emboli ad altitudinem multo Tab. V. Fig. 58.

maiorem propelli solet, plerumque altitudo antliae satis parua esse solet, ita vt ille casus tantae altitudinis neutiquam locum habeat, neque multo minus sit verendum, vt aqua embolum sequatur. Tales antliae in sectione Cc diaphragma habent foramine pertusum quod valuula m ita operitur, vt dum embolus aquam attrahit, valuula haec aperiatur, aquae inferiori viam ascendendi patefaciens. Tum vero plerumque haec sectio Cc non in superficie aquae stagnantis Ee sed ad quandam altitudinem AC supra eam statuitur, prout circumstantiae exigere videntur, ita vt inferior haec tubi pars CA semper aqua maneat plena indeque in superiorem cauitatem sit haurienda. Ob hunc autem tubum annexum, si eius altitudinem super aqua stagnante ponamus $AC = \alpha$ manente in superiori spatio $CO = x$, praecedens determinatio aliquam mutationem postulat, qua fit $vv = \frac{4g(\int u\,dx - \alpha x - (1+\delta)bx - \frac{1}{2}xx)}{b + \alpha + x}$ siquidem inferior tubus CA sit aeque amplus ac superior BC, sin autem esset amplior in denominatore quantitas α minor accipi deberet, contra vero maior, quandoquidem haec pars ex quantitate $\mathfrak{D} = \int \frac{ds}{\omega}$ nascitur in numeratore vero semper α ipsam altitudinem AC denotat. Quando vero embolus Oo ad certam altitudinem fuerit eleuatus tum iterum deprimitur, simulque valuula m clauditur, antliae autem infra insertus est alius $DdVv$, cuius orificium Dd hactenus ope valuulae n erat clausum nunc vero embolo depresso aperitur, vt aqua ante

hausta

hausta per tubum $D\,d\,V\,v$ propelli queat, qui motus quomodo eueniat, in sequenti problemate inuestigabimus.

Problema 58.

108. Cum antlia $B\,b\,C\,c$ fuerit vsque ad $B\,b$ aqua repleta, tum vero embolus data vi detrudatur, et aqua per tubum quemcunque $D\,d\,Z\,z$ expellatur quem tubum iam ab initio aqua plenum fuisse assumimus, hunc motum quo aqua per orificium $Z\,z$ eiicietur, inuestigare. Tab. V. Fig. 59.

Solutio.

Sit vt ante amplitudo antliae $= ff$, altitudo $BC = b$, et elapso tempore t embolus iam ad $O\,o$ sit detrusus, vbi celeritas emboli deorsum sit $= v$ et altitudo $CO = x$. Vis porro embolum detrudens sit $= ffu$, a qua in superficie $O\,o$ nascatur pressio $= \pi$ deinceps ex comparatione motus emboli definienda. Iam in tubo annexo Dz, sit orificii $Z\,z$ amplitudo $Z\,z = ee$ et altitudo $T\,Z = a$, eritque celeritas effluxus per hoc orificium $= \frac{ffv}{ee}$. Tum in loco quouis medio $S\,s$ sit longitudo tubi $D\,S = s$, amplitudo $S\,s = \omega$, et altitudo $V\,S = z$, pressio autem in $S\,s = p$, quibus positis, cum in $S\,s$ sit celeritas $\mathfrak{v} = \frac{ffv}{\omega}$ principia motus suppeditant hanc aequationem

$$2gp = \Delta : t - 2gz - \frac{f^4vv}{2\omega\omega} - \frac{ffdv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

 vbi

vbi $\int\frac{ds}{\omega}$ ab O o vsque ad S s extendi debet. Huius autem valor in tubo OC eſt $=\frac{x}{ff}$, per totum vero tubum annexum DZ vocetur valor inde oriundus $=$ D. Hinc quia preſſio in O o eſt $=\pi$ erit

$$2g\pi=\Delta:t-2gx-\tfrac{1}{2}vv$$

et ob preſſionem in Z z aequalem preſſioni atmoſphaerae $=k$ erit ibi:

$$2gk=\Delta:t-2ga-\frac{f^4vv}{2e^4}-\frac{ffdv}{ds}(\mathrm{D}+\frac{x}{ff})$$

quarum aequationum haec ab illa ſubtracta dat

$$2g(\pi-k)=2g(a-x)+\tfrac{1}{2}vv(\tfrac{f^4}{e^4}-1)+\frac{ffdv}{dt}(\mathrm{D}+\frac{x}{ff})$$

Quoniam vero tempuſculo dt altitudo x minuitur elemento dx celeritate v erit $dt=\frac{-dx}{v}$, fiet

$$4g(\pi-k-a+x)dx=(\tfrac{f^4}{e^4}-1)vvdx-2ffvdv(\mathrm{D}+\tfrac{x}{ff})$$

Ponamus $\mathrm{D}=\frac{m}{ff}$ et $\frac{f^4}{e^4}-1=\lambda$ vt ſit

$$4g(\pi-k-a+x)dx=\lambda vvdx-2(m+x)vdv$$

quae diuiſa per $(m+x)^\lambda$ et integrata praebet

$$4g\int\frac{\pi-k-a+x}{(m+x)^\lambda}dx=\text{Conſt.}-\frac{vv}{(m+x)^\lambda}$$

vbi conſtantem ita definiri oportet, vt poſito $x=b$ celeritas v euaneſcat.

Iam pro motu emboli poſito eius pondere $=ffh$, frictione $=\delta ffh$, is deorſum vrgetur vi $=ff(k+u+h-\pi-\delta h)$, vnde eius motus erit

$$vv=\text{Conſt.}-\frac{4g(kx+(1-\delta)hx+\int udx-\int\pi dx)}{h}$$

verum

verum pro eliminatione pressionis π potius vtamur aequationibus differentialibus:

$$4g(\pi-k-a+x)dx=\lambda vvdx-2(m+x)vdv$$

et $4g(k+u+b-\delta b-\pi)dx=-2bvdv$

ex quarum summa colligitur:

$$4g\int\frac{(u-a+(1-\delta)b+x)dx}{(b+m+x)^{\lambda-1}}=\text{Const.}-\frac{vv}{(b+m+x)^{\lambda}}$$

vbi constanti tribuendus est valor formulae integralis, quem recipit facto $x=b$, siquidem ea ita integretur, vt euanescat posito $x=0$.

Coroll. 1.

109. Si ponatur interuallum $BO=y$, ob $x=b-y$, aequatio motum definiens erit:

$$\frac{vv}{(b+m+b-y)^{\lambda}}=4g\int\frac{u-a+(1-\delta)b+b-y}{(b+m+b-y)^{\lambda+1}}dy$$

integrali ita sumto vt euanescat posito $y=0$.

Coroll. 2.

110. Vt ergo embolus aquae saltem motum imprimere possit, necesse est sit vis sollicitans $u>a+\delta b-b-b$; tum vero ab initio motus accelerabitur, maximusque euadet, cum fiet $y=u-a+(1-\delta)b+b$. Si igitur fuerit $u<a+\delta b-b$, ideoque intra limites $a-(1-\delta)b$ et $a-(1-\delta)b-b$ contineatur, motus postquam maximam celeritatem fuerit consecutus, iterum retardabitur.

Coroll.

Coroll. 3.

111. Si altitudo $TZ = a$ ad quam aqua elevari debet, fuerit valde magna prae altitudine antliae $BC = b$; etiam quantitas $m = Dff = ff\int\frac{ds}{\omega}$ valde erit magna, cum si tubi amplitudo vbique fuerit $= ff$, fiat $m = DSZ$. Hoc ergo casu ob $b + m + b - y$ constans, habebitur $(b + m + b)vv = 4g\int(u - a + b + (1 - \delta)b)dy$ seu $(b + m + b)vv = 4g(\int u\,dy - (a - b - (1 - \delta)b)y)$: neque hic amplitudo supremi orificii $Zz = ee$ in computum ingreditur.

Scholion.

112. Tempus quo embolus per totam antliae altitudinem BC deprimitur, et aquae in ea contentae volumen $= bff$ per orificium Zz eiicitur hic non definio, quia vis embolum sollicitans ffu seu quantitas u nondum est cognita; neque enim eam pro arbitrio fingere licet, quia ex natura virium naturalium cuiuis celeritati peculiaris conuenit efficacia. Sin autem ope ponderis cuiusdam embolo impositi hic effectus obtineri debeat, peculiari inuestigatione non est opus, quoniam istud pondus coniunctim cum pondere emboli per ffh exhiberi potest; tum vero quia frictio solum embolum afficit numerus δ tanto minor euadet, vt δffh quantitatem frictionis praebeat. Cum igitur hoc pacto quantitas u in h inuoluatur, erit:

vv

$$\frac{vv}{(h+m+b-y)^{\lambda}} = 4g\int\frac{(1-\delta)h-a+b-y}{(h+m+b-y)^{\lambda+1}}dy =$$

$$\frac{4g(h+m+b-y)^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \frac{4g(a+m+\delta h)}{\lambda}(h+m+b-y)^{-\lambda}$$

$$-\frac{4g(h+m+b)^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{4g(a+m+\delta h)}{\lambda}(h+m+b)^{-\lambda}$$

et facta euolutione

$$vv = \frac{4g}{\lambda(1-\lambda)}\Big(\lambda(h+b-y)+m+(1-\lambda)(a+\delta h)\Big)$$

$$-\frac{4g(h+m+b-y)^{\lambda}}{\lambda(1-\lambda)(h+m+b)^{\lambda}}\Big(\lambda(h+b)+m+(1-\lambda)(a+\delta h)\Big).$$

Vnde primo quidem patet esse debere $h > a - b + \delta h$, quia alioquin ne motus quidem inciperet, deinde si y est valde paruum respectu $h+m+b$ erit proxime

$$vv = \frac{2g}{h+m+b}\Big(2(h-a-\delta h+b)y + \frac{(1-\lambda)(h-a-\delta h+b)}{h+m+b}yy - yy\Big)$$

Sed quia non conuenit solam vim, qua aqua iam hausta propellitur, considerari, sed ei priorem vim, qua aqua in antliam hauriebatur, adiungi oportet, ambo praecedentia problemata iam coniunctim pertractemus binas antlias alteram haurientem alteram propellentem simul contemplaturi.

Problema 59.

113. Si binae antliae similes $BbCc$ et $B'b'$ Tab. V. $C'c'$, quarum illa aquam hauriat, haec vero per Fig. 60. fora-

foramen D' ad altitudinem $= a$ propellat, vti in praec. probl. ſtatuimus; a data vi ſimul agitentur, definire motum in vtraque antlia.

Solutio.

Sit vt ante vtriusque antliae altitudo $BC = b$, et amplitudo $= ff$, emboli vtriusque maſſa $= ffk$ et frictio $= \delta ff h$. Eodem tempore inceperit embolus aſcendens a baſi Cc attolli, et deſcendens a ſummitate $B'b'$ deprimi, piſtilla autem bina ſuperne iuncta ſint vecti PQ circa eius medium V mobili, ita vt quouis tempore quantum embolus Oo eſt eleuatus, tantum alter $O'o'$ infra $B'b'$ ſit depreſſus; et vtriusque motus pari celeritate peragatur. Ponamus nunc vectem in Q deprimi a vi $= Vff$, quam vt cognitam ſpectamus, ex eaque naſcatur vis embolum Oo attollens $= Pff$, ex altera vero parte vis embolum $O'o'$ deprimens $= Qff$, ita vt ſit $P + Q = V$. Vocetur porro ſpatium $CO = B'O' = x$, et celeritas vtriusque emboli $= v$. Ac pro priori ex §. 107 ob $u = P$ habebimus:

$$vv = \frac{4g(\int P\,dx - \alpha x - (1+\delta)hx - \frac{1}{2}xx)}{h + \alpha + x}$$

pro motu poſteriori vero ex §. 109. quia hic ſit $u = Q$ et $y = x$ erit

$$\frac{vv}{(h+m+b-y)^{\lambda}} = 4g\int \frac{Q - a + (1-\delta)h + b - x}{(h+m+b-x)^{\lambda+1}}\,dx.$$

Conſi-

Confiderentur autem potius harum aequationum differentialia, quae funt

$$2vdv(b+\alpha+x)+vvdx = 4gdx(P-\alpha-(1+\delta)b-x)$$

$$2vdv(b+m+b-x)+\lambda vvdx = 4gdx(Q-a+(1-\delta)b+b-x)$$

quae inuicem additae ob $P+Q=V$ praebent pro vtroque motu

$$2vdv(2b+m+b+\alpha)+(\lambda+1)vvdx = 4gdx(V-\alpha-a-2\delta b+b-2x).$$

Pofito ergo breuitatis gratia $\frac{\lambda+1}{2b+m+b+\alpha} = \mu$ erit integrando

$$vv = \frac{4g\varepsilon^{-\mu x}}{2b+m+b+\alpha}\int \varepsilon^{\mu x}dx(V-\alpha-a-2\delta b+b-2x)$$

integrali ita fumto vt euanefcat pofito $x=0$, vbi litterae α et m idem fignificant quod in praecedentibus problematibus, et denotante ee amplitudinem orificii fupremi Zz erat $\lambda = \frac{f^4}{e^4} - 1$.

Coroll. 1.

114. Qualibet ergo vectis PVQ agitatione, qua brachium VP eleuatur, alterum vero VQ deprimitur, antlia BC aqua repletur, antlia vero B′C′ euacuatur, dum aqua in ea contenta ad altitudinem a eleuatur; vtriusque autem aquae maffa eft $= bff$.

Coroll. 2.

115. Finita hac agitatione, fi fequente brachium VQ fimili modo eleuatur alterumque VP

deprimitur, antlia B' C' iterum aqua repletur, ex altera vero B C aqua, qua fuerat repleta eiicitur, idque ad eandem altitudinem, si modo tubi vtrique antliae in D et D' inserti in tubo aquam sursum euehente vniantur.

Coroll 3.

116. Tali ergo vectis P V Q agitatione reciproca aqua continuo sursum eleuatur, et singulis agitationibus volumen aquae $= bff$ per tubi euehentis superius orificium Zz eiicitur; hicque effectus producitur a vi illa vectem agitante, quae aequatur ponderi aquae, cuius volumen $= Vff$.

Scholion.

117. Ex formula pro celeritate inuenta, intelligitur, quomodo vim illam Vff, qua vectem agitari assumimus, comparatam esse oporteat, vt huic effectui producendo par sit. Euidens scilicet statim a cuiusque agitationis initio esse debere $V > \alpha + a + 2\delta b - b$, vbi α est profunditas aquae stagnantis, vnde aqua hauritur, infra antliae vtriusque fundum Cc et a altitudo supra eundem, ad quam aqua eleuatur, ita vt $\alpha + a$ exhibeat totam altitudinem eleuationis, quae quo fuerit maior vtique eo maiorem vim postulat: Deinde vero $2\delta b$ exprimit frictionem, quam vterque embolus in motu suo offendit, quae pariter a vi sollicitante superari debet. Denique a summa $\alpha + a + 2\delta b$ subtrahitur

trahitur altitudo antliae b, quia aqua in ea contenta etiam pondere ſuo motum iuuat. Porro vero ad motus ipſius determinationem concurrunt quantitates $2b$ et m, quarum illa $2b$ inertiam vtriusque emboli continet quacum etiam inertiam tam vectis P V Q quam eam, quae vi ſollicitanti eſt propria, coniungi oportet, quantitas vero m cum ex longitudine tubi deuehentis, tum ex eius amplitudine ita definitur vt ſit $m = \int \frac{ff\,ds}{\omega}$ denotante s longitudinem huius tubi indefinitam D s (fig. 59.) et ω eius amplitudinem S s in hoc loco. Denique etiam orificium tubi euehentis ſuperius Z $z = ee$ in computum ingreditur et in numero $\lambda = \frac{f^4}{e^4} - 1$ continetur; ex quo intelligitur determinationem motus maxime eſſe difficilem cum hinc in genere formula temporis $dt = \frac{dx}{v}$ tractari nequeat. His autem difficultatibus occurremus, ſi actionem cuiuspiam machinae modo magis determinato ad hunc motum producendum accommodemus.

Problema 60.

118. Si vectis P V Q, quo in praecedente problemate ad binas antlias agitandas vſi ſumus, ope manubrii vel axis incuruati M F N vniformiter in gyrum acti alternatim deprimatur et attollatur, definire vires, quibus hunc axem incuruatum quouis tempore agitari oportet, vt effectus ante deſcriptus producatur. Tab. V. Fig. 61.

Solutio.

Eiusmodi vectis P V Q alternus motus, qualem descripsimus effici solet ope axis horizontalis M N ad F inflexi, qui in F gerit virgam rigidam F Q cum vectis extremitate altera Q ita connexam, vt dum ille axis in gyrum agitur, primo terminus ille Q ope virgae F Q deprimatur per spatium $= 2$ F G, tum vero per tantum spatium iterum attollatur; sicque qualibet axis M F N reuolutione vtriusque antliae embolus deprimatur et attollatur. Quare vt vterque embolus per totam antliae altitudinem B C $= b$ agitetur, oportet sit F G $= \frac{1}{2}b$, et virgae F Q superior terminus per peripheriam circuli verticalis F S H mouebitur, quem motum, quo deinceps commodius ad machinam referre liceat, vniformem assumo. Primo virga rigida supremum tenuerit situm in F, quo vectis extremitas Q fuerit in I, ponamusque virgae longitudinem F I $= l$, motusque, quo eius terminus F per peripheriam circuli circumfertur, celeritas sit $= c$. Iam elapso tempore t peruenerit virgae terminus superior in S, sitque angulus F G S $= \Phi$; erit arcus F S $= \frac{1}{2}b\Phi$, et elementum temporis $dt = \frac{b\,d\Phi}{2c}$; virga vero nunc tenebit situm S Q, vt sit S Q $= l$ et spatium I Q $= x$, quoniam embolum vtrumque iam per spatium x protrusum ponimus. Cum ergo sit G I $= l - \frac{1}{2}b$ erit

Tab. V. Fig. 62.

$$GQ = l - \tfrac{1}{2}b + x;\ \text{et } \cos\Phi = \frac{bl - \frac{1}{2}bb - (2l - b)x - xx}{bl - \frac{1}{2}bb + bx},$$

at

at ex angulo Φ interuallum x ita definitur vt sit

$$x = \sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\text{sin.}\Phi^2)} - l + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}b\,\text{cos.}\Phi$$

hinc fit differentiando

$$dx = \frac{-\tfrac{1}{4}bb\,d\Phi\,\text{sin.}\Phi\,\text{cos.}\Phi}{\sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\text{sin.}\Phi^2)}} + \tfrac{1}{2}b\,d\Phi\,\text{sin.}\Phi.$$

At est $dt = \frac{dx}{v} = \frac{b\,d\Phi}{2c}$, ideoque $v = \frac{2c}{b} \cdot \frac{dx}{d\Phi}$ seu

$$v = c\,\text{sin.}\Phi - \frac{\tfrac{1}{2}bc\,\text{sin.}\Phi\,\text{cos.}\Phi}{\sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\text{sin.}\Phi^2)}}.$$

Ponamus nunc ad virgae terminum S in circulo promouendum opus esse vi $= Sff$, cuius directio cum sit ad radium GS normalis, dabit pro directione SQ vim $\frac{Sff}{\text{sin.}\,GSQ}$ qua virga secundum suam directionem pellitur, ea ergo punctum Q deprimitur vi $= \frac{Sff\,\text{cos.}\,GQS}{\text{sin.}\,GSQ}$, quae est illa ipsa vis quam in praecedente problemate vocaui Vff vt sit $V = \frac{S\,\text{cos.}\,GQS}{\text{sin.}\,GSQ}$. Est vero sin. $GSQ = \frac{GQ\,\text{sin.}\Phi}{l}$ et

$$\text{cos.}\,GQS = \frac{GQ + \tfrac{1}{2}b\,\text{cos.}\Phi}{l}, \text{ ideoque } V = \frac{S(GQ + \tfrac{1}{2}b\,\text{cos.}\Phi)}{GQ\,\text{sin.}\Phi}:$$

et ob $GQ = \sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\text{sin.}\Phi^2)} - \tfrac{1}{2}b\,\text{cos.}\Phi$, fiet

$$V = \frac{S\sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\text{sin.}\Phi^2)}}{\text{sin.}\Phi\sqrt{(ll - \tfrac{1}{4}bb\,\text{sin.}\Phi^2)} - \tfrac{1}{2}b\,\text{sin.}\Phi\,\text{cos.}\Phi}.$$

His definitis consideremus aequationem differentialem qua praecedentis problematis solutio continetur.

$$2v\,dv(2h + m + b + \alpha) + (\lambda + 1)vv\,dx = 4g\,dx(V - \alpha - e - 2\delta h + b - 2x)$$

Consi-

Confideremus virgae longitudinem l vt praemagnam prae radio circuli $\frac{1}{2}b$; eritque

$x = \frac{1}{2}b(1 - \text{cof.}\Phi)$; $\frac{dx}{d\Phi} = \frac{1}{2}b\,\text{fin.}\Phi$; $vv = cc\,\text{fin.}\Phi^2$; $\frac{2vdv}{d\Phi}$
$= 2cc\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\Phi$ et

$$V = \frac{Sl}{l\,\text{fin.}\Phi - \frac{1}{2}b\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\Phi} = \frac{S}{\text{fin.}\ \Phi};$$

vnde facta fubftitutione erit

$$(2b+m+b+\alpha)2cc\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\Phi + (\lambda+1)cc\,\text{fin.}\Phi^2.\tfrac{1}{2}b\,\text{fin.}\Phi$$
$$= 2gb(S-(\alpha+a+2\delta b-b)\,\text{fin.}\Phi - 2gb\,\text{fin}\ \Phi.b(1-\text{cof.}\Phi)$$
$$= 2gb(S-(\alpha+a+2\delta b-b\,\text{cof.}\Phi)\,\text{fin.}\Phi)$$

hincque elicimus vim ad motum axis vniformem requifitam

$$S = (\alpha+a+2\delta b-b\,\text{cof.}\Phi)\,\text{fin.}\Phi + \frac{cc}{gb}(2b+m+b+\alpha)\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\Phi$$
$$+ \frac{(\lambda+1)cc}{4g}\,\text{fin.}\ \Phi^3.$$

Qua vi efficietur vt dum axis femireuolutionem peragit hoc eft tempore $= \frac{\pi b}{2c}$ fec: aquae maffa $= bff$ per tubum euehentem DZ fupra eiiciatur. Cum autem curuatura axis in imum locum H fuerit perducta, tum gyratione continuata vectis terminus Q attolletur, fimilique modo vbi peruenerit in S′ exiftente iam angulo HGS′ $= \Phi$, pro vi, qua axis gyrari debet reperitur vt ante:

$$S = (\alpha+a+2\delta b-b\,\text{cof.}\Phi)\,\text{fin.}\Phi + \frac{cc}{gb}(2b+m+b+\alpha)\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\Phi$$
$$+ \frac{(\lambda+1)cc}{4g}\,\text{fin.}\Phi^3$$

ita vt fiue axis cubitus fit in S fiue e regione in S′ eadem vis ad eius conuerfionem requiratur.

Coroll.

Coroll 1.

119. Dum igitur axis cubitus verſatur ſiue in loco ſummo F ſiue in imo H, fit $S=0$, ſeu nulla plane opus eſt vi ad motum gyratorium vniformem conſeruandum. In locis autem hinc 90° diſtantibus, pro vi hac erit

$$S=\alpha+a+2\delta b+\frac{(\lambda+1)cc}{4g}.$$

Coroll. 2.

120. Si angulus $FGS=\Phi$ fuerit 45° vel 225° ob ſin. $\Phi=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et coſ. $\Phi=\frac{1}{\sqrt{2}}$ erit

$$S=\frac{\alpha+a+2\delta b}{\sqrt{2}}-\frac{b}{2}+\frac{cc}{2gb}(2b+m+b+\alpha)+\frac{(\lambda+1)cc}{8g\sqrt{2}}$$

in alteris vero octantibus vbi $\Phi=135°$ vel $\Phi=315°$ ob ſin. $\Phi=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et coſ. $\Phi=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ fit

$$S=\frac{\alpha+a+2\delta b}{\sqrt{2}}+\frac{b}{2}-\frac{cc}{2gb}(2b+m+b+\alpha)+\frac{(\lambda+1)cc}{8g\sqrt{2}}.$$

Coroll. 3.

121. Quodſi ergo axis MN duos huiusmodi habeat cubitos, inter ſe perpendiculares quibus quaternae ſimiles antliae agitentur, vt tempore $\frac{\pi b}{2c}$ ſec. ſuperne effundatur aquae volumen $=2bff$; tum dum alter cubitus in ſummo loco F vel imo H verſatur vi opus eſt

$$S=\alpha+a+2\delta b+\frac{(\lambda+1)cc}{4g}$$

dum autem vterque a verticali FH declinat angulo 45° erit:

$$S = (\alpha + a + 2\delta b)\sqrt{2} + \frac{(\lambda+1)cc}{4g\sqrt{2}}$$

quae duae vires erunt inter se aequales si fuerit

$$\alpha + a + 2\delta b = \frac{(\lambda+1)cc}{4g\sqrt{2}}.$$

Scholion. I.

122. In omni machinarum actione plurimum interest, vt earum motus sit quantum fieri potest vniformis, et vt perpetuo aequali vi agitentur, ex quo manifestum minime conuenire, vt modo descripto duae tantum antliae ad machinam applicentur, quoniam ad hoc vis maxime inaequabilis requireretur; sin autem duo antliarum paria ita applicentur, vt cubiti axis sint inter se normales, vires ad machinam circumagendam requisitae multo magis ad aequalitatem accedent: minime tamen conuenit ad maiorem aequabilitatem obtinendam formulae $\frac{(\lambda+1)cc}{4g}$ tantum valorem conciliare quantum inuenimus. Quin potius semper consultum est hanc formulam tam exiguam reddi quam circumstantiae permittunt, quandoquidem hoc modo vis ad effectum producendum requisita diminuitur. Cum igitur posita orificii supremi Zz amplitudine $= ee$ sit $\lambda + 1 = \frac{f^4}{e^4}$ vtique conueniet hoc orificium quam amplissimum effici, circa celeritatem autem c nihil arbitrio nostro relinquitur quia enim tempore $\frac{\pi b}{2c}$ sec. quantitas aquae $= 2bff$ superne eiicitur, quantitas vno minuto secundo eiecta est $= \frac{4}{\pi}cff$; quam cum actione vis sollicitantis comparemus. Cum igitur inter binos

valores

valores ipſius S medium capiendo ſit quaſi $S = \frac{5}{4}(\alpha + a + \delta b) + \frac{5}{6}.\frac{(\lambda+1)cc}{4g}$, quia vis ipſa eſt $= Sff$ et celeritate $= c$ agit, erit eius actio $= cff\left(\frac{5}{4}(\alpha + a + \delta b) + \frac{5}{6}.\frac{(\lambda+1)cc}{4g}\right)$. Quod ſi ergo vis principalis machinam totam agitans ſit $= V$ eaque celeritate $= u$ operetur, eius actio erit $= Vu$, cui illa aequalis poſita praebet quantitatem aquae ſingulis minutis ſecundis ad altitudinem $\alpha + a$ eleuatae

$$\frac{\frac{16}{5\pi} V u}{\alpha + a + \delta b + \frac{(\lambda+1)cc}{6g}},$$

vbi coefficiens $\frac{16}{5\pi}$ fere aequatur vnitati.

Scholion. 2.

123. Si autem vt modo ſumſimus, duo tantum antliarum paria ad machinam applicentur etſiamſi cubiti eas agitantes ad angulum rectum ſint diſpoſiti, tamen nobabilis adhuc inaequalitas in viribus ad hoc requiſitis deprehenditur; quam autem multo magis diminuere licet, ſi quatuor antliarum paria applicentur, et cubiti axis quatuor ea agitantes ad angulos ſemirectos ſint inter ſe diſpoſiti, tum enim fere perpetuo erit

$$S = \frac{5}{2}(\alpha + a + \delta b) + \frac{17}{10}.\frac{(\lambda+1)cc}{4g},$$

ſicque ſingulis minutis ſecundis aquae quantitas $\frac{8}{\pi}cff$ eleuatur. Quare ſi vt ante vim machinam mouentem principalem vocemus V et celeritatem qua

 opera-

operatur u ab ea, quantitas aquae ſingulis minutis ſecundis eleuata erit

$$\frac{\frac{16}{5\pi} V u}{\alpha + a + \delta b + \frac{17}{100} \cdot \frac{(\lambda+1)cc}{g}}$$

quae a praecedente vix differt. Hinc intelligitur ſemper expedire celeritatem c quam minimam ſtatui quod iam pro lubitu fieri poteſt, inde enim amplitudo antliarum ita definitur, vt ſit

$$ff = \frac{\frac{2}{5c} V u}{\alpha + a + \delta b + \frac{(\lambda+1)cc}{6g}}:$$

quare ſemper conducit ipſas antlias ampliſſimas confici vt inde celeritas c eo minor euadat: tum vero altitudo antliarum b per elongationem cubitorum ab axe determinatur, cum ſit $b = 2\,FG$, id quod arbitrio noſtro permittitur.

CAPVT V.

DE MOTV AQVAE PER TVBOS DIVERSO CALORIS GRADV INFECTOS.

Problema 61.

Tab. VI. Fig. 63. 124. Dato caloris gradu in ſingulis tubi locis quem ſtatim cum aqua ibi contenta communicari aſſumi-

assumimus definire motum, quem aqua in huiusmodi tubo recipere poterit.

Solutio.

Sit tubus AO ratione amplitudinis vtcunque variabilis et incuruatus, sumtoque in eo interuallo indefinito $AS = s$, sit ibi amplitudo $= \omega$ et altitudo puncti S super plano horizontali fixo $S\sigma = z$; gradus autem caloris tantus, vt ibi aquae tribuatur densitas $= q$, quae ergo per hypothesin est variabilis et functio certa ipsius $AS = s$, quoniam in eodem loco aquam perpetuo eodem caloris gradu infectam assumimus. Elapso autem tempore t sit aquae per sectionem Ss transfluentis celeritas $= \upsilon$ in plagam SO directa et pressio $= p$, quae sunt functiones vtriusque variabilis s et t. His positis quia $\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$ ex problemate 46 has duas consequimur aequationes:

$$\left(\frac{d.q\omega\upsilon}{ds}\right) = 0 \text{ et } \frac{2g\,dp}{q} = -2g\,dz - \upsilon\,d\upsilon - ds\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$$

Ex priori aequatione sequitur fore $q\upsilon\omega = \Gamma : t$, ita vt eodem tempore quantitas $q\upsilon\omega$ per totum tubum eundem obtineat valorem. Ponamus ergo in certo tubi loco, vbi amplitudo $= ff$ et densitas aquae $= 1$, celeritatem esse $= v$, quae ergo erit functio solius temporis t; ac prima conditio praebet $q\upsilon\omega = ffv$, ita vt sit $\upsilon = \frac{ffv}{q\omega}$, hincque quia quantitates q et ω a sola vatiabili s pendent, erit $\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) = \frac{ff}{q\omega}\frac{dv}{dt}$ qui valor in altera aequatione, qua tempus t constans spectatur, substitutus praebet

 $2g\,dp$

$$2g\,dp = -2gq\,dz - q\vartheta\,d\vartheta - \frac{ff\,dv}{dt}\cdot\frac{ds}{\omega}$$

ex qua integrando elicimus:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \tfrac{1}{2}q\vartheta\vartheta + \tfrac{1}{2}\int \vartheta\vartheta\,dq - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

seu loco $\vartheta\vartheta$ substituto valore $\frac{f^4\,vv}{qq\,\omega\omega}$

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{f^4\,vv}{2q\omega\omega} + \tfrac{1}{2}f^4\,vv\int\frac{dq}{qq\omega\omega} - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

Quodsi ergo in duobus locis pressio aliunde fuerit cognita ad ea hanc aequationem applicando, primo functio temporis $\Delta : t$ eliminari, tum vero celeritas v pro quouis tempore determinari poterit, qua cognita deinceps omnia quae ad motum spectant, innotescent.

Coroll. 1.

125. Cum sit $\int\frac{dq}{qq\omega\omega} = \frac{-1}{q\omega\omega} - 2\int\frac{d\omega}{q\,\omega^3}$, aequatio inuenta etiam ita repraesentabitur:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{f^4\,vv}{q\omega\omega} - f^4\,vv\int\frac{d\omega}{q\omega^3} - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

in qua hoc commodi occurrit, vt quoties tubus vbique est aequaliter amplus, terminus $\int\frac{d\omega}{q\,\omega^3}$ euanescat, simulque fiat $\int\frac{ds}{\omega} = \frac{s}{\omega}$.

Coroll. 2.

126. Quia v denotat celeritatem in data tubi sectione, cuius amplitudo $= f$, et vbi densitas q fit $= 1$; hanc sectionem vbi lubuerit assumere licet; quoniam densitas, quam aqua ibi ob certum caloris gradum habet, vt densitas naturalis spectari potest, ex qua pressiones definiuntur.

Scho-

Scholion.

127. Quoniam ſupra vidimus maſſam fluidam grauem in aequilibrio eſſe non poſſe, niſi in aequalibus altitudinibus vbique eadem denſitas locum habeat, operae omnino erit pretium hic eiusmodi caſus euoluere, vbi aequilibrium prorſus ſubſiſtere nequit. Ac primo quidem ſe offert tubus circularis in ſitu verticali poſitus, qui ab vna parte calidus, ab altera frigidus ſeruatur. Sit ſcilicet A S B D tubus circularis in plano verticali poſitus cuius A C B ſit diameter horizontalis; hunc tubum circa A ita calefieri ſumamus, vt aqua ibi contenta tantum non ebulliat e regione vero in B tubus ſit frigidus, gradu caloris ab A ad B ſiue ſurſum ſiue deorſum progrediendo ſucceſſiue decreſcente, vt in A calor ſit maximus in B vero minimus. Quatenus ergo tubum vehementer anguſtum ponimus, aqua per eum mota quaſi puncto temporis in quouis loco tubi calorem recipiet. Quodſi nunc totum tubum aqua plenum aſſumamus, fieri omnino nequit, vt aqua ſe ad aequilibrium componat, cuius modi igitur motum ſit adeptura in ſequente problemate inueſtigabimus. Tab. VI. Fig. 64.

Problema 62.

128. Si tubus circularis in ſitu verticali poſitus A S B D ſit perpetuo in A calidus, in B vero frigidus, tum vero aqua repleatur, quae vbique tubi temperamentum ſtatim recipiat; huius aquae motum Tab. VI. Fig. 64.

motum in tubo, quia aequilibrium non datur determinare.

Solutio.

Sit radius circuli $CA = CB = c$, AB diameter horizontalis et amplitudo tubi vbique eadem $= ff$. Iam quia ad A calor eſt maximus ad B vero minimus, denſitas aquae ad A erit minima ad B vero maxima: ſtatuamus denſitatem mediam $= 1$, ad quam ſcilicet aeſtimationem preſſionem referimus; tum vero in A ſit denſitas $= 1 - \alpha$ in B vero $= 1 + \alpha$, ab A vero ad B progrediendo denſitas ita creſcat, vt in puncto quouis S poſito angulo $ACS = \Phi$ ſit denſitas $q = 1 - \alpha \operatorname{cof.} \Phi$, quippe quae formula pro puncto A dat denſitatem $1 - \alpha$ pro B autem $1 + \alpha$. Nunc porro altitudo puncti S ſuper linea horizontali AB eſt $PS = c \operatorname{fin} \Phi = z$ et arcus $AS = c\Phi = s$. Ab initio quo vniuerſa aqua adhuc erat in quiete elapſum ſit tempus $= t$, ac celeritas in puncto S vocetur $= \mathfrak{v}$ a termino A recedens, preſſio vero ibidem $= p$. Quodſi nunc in eo loco vbi denſitas eſt $= 1$, celeritas aquae ponatur $= v$, ob amplitudinem vbique eandem $\omega = ff$ erit $\mathfrak{v} = \frac{v}{q} = \frac{v}{1 - \alpha \operatorname{cof.} \Phi}$. Hinc ex principiis ante ſtabilitis definiamus ante omnia preſſionem in loco indefinito S, ac primo ob $z = c \operatorname{fin.} \Phi$, $q = 1 - \alpha \operatorname{cof} \Phi$ erit $\int q\,dz = c \int d\Phi \operatorname{cof.} \Phi (1 - \alpha \operatorname{cof.} \Phi) = c \int d\Phi (\operatorname{cof.} \Phi - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha \operatorname{cof.} 2\Phi)$ ideoque $\int q\,dz = c \operatorname{fin.} \Phi - \frac{1}{2}\alpha c \Phi - \frac{1}{4}\alpha c \operatorname{fin.} 2\Phi$. Deinde ob $\omega = ff$ eſt $\int \frac{d\omega}{q\,\omega^3} = 0$ et $\int \frac{ds}{\omega} = \frac{s}{ff}$

$= \frac{s}{ff} = \frac{c\Phi}{ff}$; his factis substitutionibus consequimur hanc aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2gc(\text{fin.}\Phi - \tfrac{1}{2}\alpha\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{fin.}2\Phi) - \frac{vv}{1-\alpha\,\text{cof.}\Phi} - \frac{c\Phi dv}{dt}.$$

Hinc pro initio in puncto A prodit haec aequatio:

$$2gp = \Delta : t - \frac{vv}{1-\alpha}$$

pro puncto B vero ponendo $\Phi = \pi = 180°$ haec

$$2gp = \Delta : t + \alpha g c \pi - \frac{vv}{1+\alpha} - \frac{\pi c dv}{dt}.$$

Percurramus totum circulum vt reuertamur in punctum A et ponendo $\Phi = 2\pi$, pro puncto A prodit etiam haec aequatio:

$$2gp = \Delta : t + 2\alpha\pi g c - \frac{vv}{1-\alpha} - \frac{2\pi c dv}{dt}.$$

Cum igitur necesse sit vt haec pressio illi pro eodem puncto A sit aequalis, hinc colligimus hanc aequationem

$$2\alpha\pi g c - \frac{2\pi c dv}{dt} = 0 \quad \text{seu} \quad dv = \alpha g dt$$

quae integrata dat $v = \alpha g t$, vnde discimus, cum initio celeritas fuisset nulla, eam cum tempore vniformiter crescere, ita vt sit $v = \alpha g t$. Tum vero ob $\frac{dv}{dt} = \alpha g$ erit pro loco quocunque S elapso tempore t pressio

$$p = \Sigma : t - c(\text{fin.}\Phi - \tfrac{1}{2}\alpha\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{fin.}2\Phi) - \frac{\alpha\alpha g t t}{2(1-\alpha\,\text{cof.}\Phi)} - \tfrac{1}{2}\alpha c\Phi$$

seu $p = \Sigma : t - c\,\text{fin.}\Phi + \tfrac{1}{4}\alpha c\,\text{fin.}2\Phi - \frac{\alpha\alpha g t t}{2(1-\alpha\,\text{cof.}\Phi)}$

vnde concludimus pressiones

pro A vbi $\Phi = 0$; $p = \Sigma : t - \frac{\alpha \alpha g t t}{2(1-\alpha)}$
pro E vbi $\Phi = 90°$; $p = \Sigma : t - \frac{\alpha \alpha g t t}{2} - c$
pro B vbi $\Phi = 180°$; $p = \Sigma : t - \frac{\alpha \alpha g t t}{2(1+\alpha)}$
pro D vbi $\Phi = 270°$; $p = \Sigma : t - \frac{\alpha \alpha g t t}{2} + c.$

Coroll. 1.

129. Cum igitur aqua primum in tubo quieverit, ſtatim ita moueri incipiet, vt in parte inferiore A D B, e locis frigidioribus in calidiora, in parte ſuperiore A E B contra ex calidioribus in frigidiora feratur, fluxusque exoriatur in plagam A E B D, qui continuo vniformiter acceleretur.

Coroll. 2.

130. Iſta motus acceleratio eo erit promtior, quo maius fuerit discrimen inter calorem maximum in A et minimum in B. Si in A aqua fere ebulliat in B vero propemodum congelaſcat, fractio α eſt circiter $\frac{1}{30}$, ideoque $v = \frac{1}{30} g t = \frac{1}{2} t$ ped. ob $g = 15$ ped. ſicque poſt vnum minutum ſecundum, motus iam ita rapidus exiſteret, vt minuto ſecundo ſpatium $\frac{1}{4}$ pedis percurreret, poſt minutum primum autem ſpatium 30 pedum.

Coroll. 3.

131. Quod ad preſſiones attinet, quas tubus interea ſuſtinet, eae quidem non definiuntur, quia tubum vel aquam extrinſecus premendo ad quoduis tempus

tempus preſſio pro lubitu variari poteſt. Interim tamen ad B preſſio perpetuo erit maxima, ſumto enim $\Sigma : t = \frac{\alpha \alpha g t t}{2(1-\alpha)}$ vt preſſio in A euaneſcat, in B erit ea $= \frac{\alpha^3 g t t}{1 - \alpha \alpha}$, ſicque in temporis ratione duplcata creſcet.

Scholion 1.

132. Facile autem intelligitur, ſi res experimentis exploretur accelerationem motus neutiquam tam rapidam eſſe futuram, quam calculo inuenimus cuius ratio manifeſto in eo eſt poſita, quod ſtatim atque aqua iam velocitatem notabilem acquiſiuerit eius calor non ſubito ſe ad calorem tubi accommodare valeat, eaque proinde priſtinam temperaturam ad aliquod tempus conſeruans, in B magis calida quam tubus, in A vero minus ſit futura. Cum igitur idem eueniat ac ſi fractio α minor redderetur, motus quoque accelerationem relaxari oportebit, quae tamen omnino extingui nequit; ſimul enim atque hoc eueniret, et aquae tempus ſuppeteret in quouis loco tubi calorem recipiendi, motus de nouo vti ab initio inſtauraretur. Ex quo perſpicuum eſt, ob hanc cauſam motum tantum ad certum vsque gradum acceleratum iri in quo deinceps perpetuo ſit permanſurus, quamdiu ſcilicet in ipſo tubo diſcrimen caloris ineſt. Quoniam vero haec motus moderatio ab ea ratione potiſſimum pendet, qua tubus cum aqua, haecque viciſſim cum tubo ſuum inſitum caloris gradum communicat vbi ſimul ad vtriusque maſſam reſpici oportet, ex ſola

 theoria

theoria hic vix quicquam ſtatuere licebit. At ſi ope ignis circa A ſuſcitati in hoc loco tubo perpetuo inſignis caloris gradus imprimatur, tubusque ſatis ſit magnus, vt tantus calor non ad locum oppoſitum B transferri poſſit, nullum plane eſt dubium, quin aqua perpetuo motum ſatis velocem in plagam A E B D ſit conſeruatura.

Scholion 2.

133. Aſſumſi in problemate tubo in altera extremitate horizontali A maximum caloris gradum, in altera vero B minimum induci, quae diſpoſitio ad motum generandum maxime eſt accommodata. Si enim maximus calor excitaretur in loco vel ſummo E vel imo D, et e regione minimus exiſteret, tum nullus plane motus oriretur, ſed aqua ſemel in quiete poſita perpetuo in eodem ſtatu perſeueraret. Quare etiamſi initio tubus circa A maximum calorem acceperit, niſi is a cauſa externa ſuſtineatur, aqua per A tranſiens calorem ibi receptum cum tubi locis ſuperioribus S et E communicabit viciſſimque frigus, quo per B tranſiens erat imbuta in tubi regionem inferiorem E transferet, quo tandem efficietur, vt cum maximus calor in tubi locum ſummum E fuerit translatus minimusque in imum D, tum omnis motus ſit ceſſaturus, et aqua in ſtatum aequilibrii ſit peruentura, in quo acquieſcere valeat. De cetero in ſolutione problematis certam legem ſtabiliui, ſecundum quam denſitas fluidi ab A verſus B progrediendo augea-

tur,

tur, quod augmentum ipſis diſtantiis in recta horizontali A B ſumtis proportionale ſtatui, ita vt exceſſus denſitatis in S ſupra denſitatem in A proportionalis eſſet ſpatio A P; quae hypotheſis cum veritate ſatis conſentire videtur, ſi prope A ignis aliave materia calorem gignens concipiatur conſtituta, cum enim vis calefaciendi in loco quouis S quadrato diſtantiae A S proportionalis aeſtimetur, hoc quadratum in circulo ipſi ſinui verſo A P eſt proportionale: Interim tamen hac hypotheſi calculo potiſſimum conſulens ſum vſus, et infra rem generalius expedire conabor.

Problema 64.

134. Sit vti in praecedente problemate tubus circularis in plano verticali poſitus isque in A calidus in B vero frigidus; verum huic tubo diuerſa tribuatur amplitudo; hoc poſito ſi tubus fuerit aqua repletus, eius motum definire. Tab. VI. Fig. 64.

Solutio.

Sit vt ante radius circuli $CA = CB = c$, denſitas aquae in $A = 1 - \alpha$, in $B = 1 + \alpha$, at in E et $D = 1$, in loco vero quouis indefinito S poſito angulo $ACS = \Phi$ ſit denſitas $q = 1 - \alpha \operatorname{cof.} \Phi$. Tum vero in E et D ſit amplitudo $= ff$ verum in A ſtatuatur $= ff(1 - \beta)$, in $B = ff(1 + \beta)$ at in S ſit $\omega = ff(1 - \beta \operatorname{cof.} \Phi)$. Elapſo iam tempore t in E vel D, vbi amplitudo eſt ff et denſitas $= 1$, celeritas aquae sit $= v$, vnde in loco indefinito S erit $\mathfrak{u} = \frac{v}{(1-\alpha \cos.\Phi)(1-\beta \cos.\Phi)}$ quam aequationem prima motus conditio suppeditat. Altera vero posita pressione in $f = p$ ita se habet:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \tfrac{1}{2}q\mathfrak{u}\mathfrak{u} + \tfrac{1}{2}\int \mathfrak{u}\mathfrak{u}\,dq - \frac{ff\,dv}{dt}\int \frac{ds}{\omega}$$

pro cuius euolutione ob $z = c\,\text{sin.}\Phi$ et $q = 1 - \alpha\,\text{cos.}\Phi$ est vt ante

$$\int q\,dz = c\,\text{sin.}\Phi - \tfrac{1}{2}\alpha c\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha c\,\text{sin.}\,2\Phi.$$

Deinde ob $s = c\Phi$ et $\omega = ff(1 - \beta\,\text{cos.}\Phi)$ est $\int \frac{ds}{\omega} = \frac{c}{ff}$

$$\int \frac{d\Phi}{1-\beta\,\text{cos.}\Phi} = \frac{c}{ff\sqrt{(1-\beta\beta)}}\,\text{Ang. sin.}\,\frac{\text{sin.}\Phi\sqrt{(1-\beta\beta)}}{1-\beta\,\text{cos.}\Phi}.$$

Denique ob $dq = \alpha d\Phi\,\text{sin.}\Phi$ est $\int \mathfrak{u}\mathfrak{u}\,dq = \alpha vv \int \frac{d\Phi\,\text{sin.}\Phi}{(1-\alpha\cos.\Phi)^2(1-\beta\cos.\Phi)^2}$

vnde fit integrando:

$$\int \mathfrak{u}\mathfrak{u}\,dq = \frac{\alpha vv}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{-(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\cos.\Phi}{(1-\alpha\cos.\Phi)(1-\beta\cos.\Phi)} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}\,l\,\frac{1-\beta\cos.\Phi}{1-\alpha\cos.\Phi}\right).$$

Ponatur nunc $\Phi = 0$, vt pressionem in puncto A obtineamus

$$2gp = \Delta : t - \frac{vv}{2(1-\alpha)(1-\beta)^2} + \frac{\alpha vv}{2(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{-\alpha-\beta+2\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}\,l\,\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)$$

tum vero pro eodem puncto fit $\Phi = 2\pi$ erit

$$2gp = \Delta : t + 2\pi\alpha gc - \frac{vv}{2(1-\alpha)(1-\beta)^2} + \frac{\alpha vv}{2(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{-\alpha-\beta+2\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}\,l\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)\right)$$
$$- \frac{2\pi c\,dv}{dt\sqrt{(1-\beta\beta)}}$$

ex quorum valorum aequalitate elicitur $dv = \alpha g\,dt\sqrt{(1-\beta\beta)}$ hincque $v = \alpha g t\sqrt{(1-\beta\beta)}$.

Coroll. I.

135. Diuersa ergo tubi amplitudo, siquidem legem in solutione positam sequitur, efficit vt celeritas

ſeritas aliquanto minor generetur, idque perinde ſiue maxima amplitudo ſtatuatur in B ſiue in A. Ac ſi foret $\mathfrak{E} = 1$, quo caſu amplitudo in A vel B euaneſceret, motus plane nullus orietur, vti per ſe eſt manifeſtum.

Coroll. 2.

136. Si eſſet $\mathfrak{E} = \alpha$, ſeu denſitas vbique tubi amplitudini eſſet proportionalis, foret

$$\int \vartheta\vartheta\, dq = \alpha v v \int \frac{d\Phi\, \sin.\Phi}{(1-\alpha \cos.\Phi)^4} = \frac{-v v}{3(1-\alpha\cos.\Phi)^3} \text{ et } \vartheta\vartheta q = \frac{v v}{(1-\alpha\cos.\Phi)^3}:$$

ideoque

$$-\tfrac{1}{2} q \vartheta\vartheta + \tfrac{1}{2}\int \vartheta\vartheta\, dq = \frac{-2vv}{3(1-\alpha\cos.\Phi)^3}$$

quibus formulis pro preſſione inuenienda eſt vtendum.

Scholion.

137. Quoniam igitur vidimus, quantum inaequalitas in tubi amplitudine conferat ad motum aquae, inquiramus nunc etiam qualis motus ſit oriturus in eodem tubo circulari, ſi loca maximi et minimi caloris non in diametrum horizontalem, ſed alium vtcunque oblique poſitum incidant, vbi quidem amplitudinem tubi iterum vbique eandem ſtatuamus.

Problema 65.

138. Sit vt hactenus tubus circularis in plano verticali poſitus isque vbique aeque amplus; verum maximus calor reperiatur in A minimus in B, Tab. VI. Fig. 65.

vt

vt diameter A B ſit ad horizontem H I inclinatus angulo $ACH = \zeta$; atque cum hic tubus fuerit aqua plenus, eius motum definire.

Solutio.

Sit radius circuli $CA = CB = c$, amplitudo tubi conſtans $= ff$ vt ſit $\omega = ff$; ac pro puncto quouis S poſito angulo $ACS = \Phi$ ſit aquae denſitas $q = 1 - \alpha \operatorname{cof.} \Phi$, ita vt in punctis E et F ea fiat $= 1$, vbi aquae celeritas elapſo tempore t ſtatuatur $= v$, quae ergo eodem tempore in S erit $\mathfrak{v} = \frac{v}{1 - \alpha \operatorname{cof.} \Phi}$, cuius puncti S altitudo ſuper horizonte cum ſit $SP = c \operatorname{fin.} (\Phi - \zeta) = z$ ſi preſſio in S vocetur $= p$, ob arcum $AS = c\Phi$ erit:

$$2gp = \Delta : t - 2gc \int (1 - \alpha \operatorname{cof.} \Phi) d\Phi \operatorname{cof.} (\Phi - \zeta) - \frac{vv}{1 - \alpha \operatorname{cof.} \Phi} - \frac{c\Phi dv}{dt}.$$

At eſt

$$\int d\Phi \operatorname{cof.} \Phi \operatorname{cof.} (\Phi - \zeta) = \tfrac{1}{2} \int d\Phi (\operatorname{cof.} \zeta + \operatorname{cof.} (2\Phi - \zeta)) = \tfrac{1}{2} \Phi \operatorname{cof.} \zeta + \tfrac{1}{4} \operatorname{fin.} (2\Phi - \zeta)$$

ideoque habebitur:

$$2gp = \Delta : t - 2gc \operatorname{fin.} (\Phi - \zeta) + \alpha gc \Phi \operatorname{cof.} \zeta + \tfrac{1}{2} \alpha gc \operatorname{fin.} (2\Phi - \zeta) - \frac{vv}{1 - \alpha \operatorname{cof.} \Phi} - \frac{c\Phi dv}{dt}.$$

Hinc pro loco A preſſionem duplici modo exprimere poterimus prout ponamus vel $\Phi = 0$ vel $\Phi = 2\pi$; prior poſitio dat

$$2gp = \Delta : t + 2gc \operatorname{fin.} \zeta - \tfrac{1}{2} \alpha gc \operatorname{fin.} \zeta - \frac{vv}{1 - \alpha},$$

altera vero

$$2gp = \Delta : t + 2gc \operatorname{fin.} \zeta + 2\alpha\pi gc \operatorname{cof.} \zeta - \tfrac{1}{2} \alpha gc \operatorname{fin} \zeta - \frac{vv}{1 - \alpha} - \frac{2\pi c dv}{dt}$$

quae

quae duae expressiones cum inter se debeant esse aequales est

$$\alpha g \operatorname{cos.} \zeta = \frac{d v}{d t}, \text{ hincque } v = \alpha g t \operatorname{cos.} \zeta,$$

vnde ad quoduis tempus in quouis loco celeritas innotescit cuius quidem directio in plagam A E B F tendit. Tum vero pressio in loco quocunque S erit:

$$p = \Sigma : t - c \operatorname{sin.} (\Phi - \zeta) + \tfrac{1}{4} \alpha c \operatorname{sin.} (2 \Phi - \zeta) - \frac{\alpha \alpha g t t \operatorname{cos.} \zeta^2}{2 (1 - \alpha \operatorname{cos.} \Phi)}.$$

Coroll. 1.

139. Hinc ergo patet si diameter AB per loca maximi minimique caloris transiens fuerit verticalis, ita vt maximus calor sit in circuli loco vel summo vel imo ob cos. $\zeta = 0$, nullum motum a diuersitate caloris generatum iri; sed aquam hoc casu in aequilibrio consistere posse, propterea quod in tubi locis aeque altis par caloris gradus reperitur.

Coroll. 2.

140. Si locus maximi caloris A a puncto horizontali H minus quadrante distet, siue sursum siue deorsum, motus aquae fiet in directione AEBF; sin autem illa distantia H A quadrantem superet, quia tum cos. ζ fit negatiuus, motus in contrariam plagam A F B E erit directus.

Coroll. 3.

144e. Semper ergo in locis inferioribus motus fiet a regione frigidiore in calidiorem; in superiori-

 bus

bus vero contra a regione calidiore in frigidiorem; omnino vti iam supra circa aequilibrium est observatum, etiamsi ibi motum ipsum definire haud licuerit.

Scholion.

142. Cum igitur iam non solum sit euictum, aquam in tubo circulari, in quo ad pares altitudinis gradus caloris sit diuersus, in aequilibrio consistere non posse, sed etiam ipsum motum inde genitum determinauerimus; probe tenendum est hoc tantum euenire, si totus tubus sit aqua repletus; si enim minor aquae copia ei sit infusa, ea semper eiusmodi situm habere poterit, in quo perpetuo acquiescat. In quo certe ingens paradoxon agnosci debet, quod dum in eiusmodi tubo vacuum aliquod spatium admittitur, semper aequilibrium dari possit, id omni vacuo remoto subito tollatur, ac necessario motus oriri debeat; multo maius autem hoc fiet paradoxon, cum ostendero etiam admisso spatio ab aqua vacuo, dummodo sit minimum, aequilibrium excludi, ita vt quoties illud vacuum certa quadam quantitate fuerit minus, tum semper necessario motus generetur, quomodocunque aqua in tubo sit disposita sin autem id vacuum ista quantitate fuerit maius, tum semper aquae eiusmodi situs tribui queat, in quo perpetuo acquiescat. Maxime igitur operae pretium erit, vt hoc insigne paradoxon accuratissime euoluamus.

Proble-

Problema 66.

143. Sit tubus circularis in plano verticali positus vbique eiusdem amplitudinis, calor vero maximus in A, minimus in B verfetur, vt recta A B fit diameter horizontalis. Quod fi iam huius tubi tantum portio M N aquam contineat, eius motum inueftigare. Tab VI. Fig. 66.

Solutio.

Sit radius circuli $CA = CB = 1$, amplitudo tubi vbique eadem $\omega = ff$; calor autem ita comparatus, vt in loco quocunque S pofito arcu $AS = s$ fit denfitas aquae $q = 1 - \alpha \operatorname{cof.} s$. Iam elapfo tempore $= t$ occurret aqua tubo infufa fpatium M N, vocemusque arcus $AM = m$ et $AN = n$; ac primo quidem perpendendum eft, aquae maffam perpetuo eandem manere, cum igitur in S fit denfitas $q = 1 - \alpha \operatorname{cof.} s$ maffa aquae quae tubi portionem AS effet impletura, erit $\int q\, ds = s - \alpha \operatorname{fin.} s$, vnde colligimus aquae portionem M N implentis maffam fore $= n - m - \alpha (\operatorname{fin.} n - \operatorname{fin.} m)$, quae cum fit conftans ponatur $= 2e$. In hunc finem ftatuatur:

$$m - \alpha \operatorname{fin.} m = u - e \text{ et } n - \alpha \operatorname{fin.} n = u + e$$

et quia α eft fractio minima habebimus proxime

$$m = u - e + \alpha \operatorname{fin.} (u - e) \text{ et } n = u + e + \alpha \operatorname{fin.} (u + e)$$

vbi obferuo fi totus tubus effet aqua repletus fore $n = m + 2\pi$ ideoque $2e = 2\pi$ feu $e = \pi$, ita vt tubus eatenus non fit totus aqua repletus, quatenus arcus e minor eſt ſemiperipheria circuli π radio exiſtente $= 1$. Cum nunc ſit $z =$ ſin. s erit $\int q\,dz = $ ſin. $s - \frac{1}{2}\alpha s - \frac{1}{4}\alpha$ ſin. $2s$, et poſita preſſione in S $= p$ habebitur

$$2gp = \Delta : t - 2g(\text{ſin.}\,s - \tfrac{1}{2}\alpha s - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}\,2s) - \frac{vv}{1-\alpha\,\text{coſ.}\,s} - \frac{s\,dv}{dt}$$

vnde preſſio pro vtroque termino M et N colligi poterit ſiue autem praeter aquam in tubo inſit vacuum ſiue aer, ſemper preſſiones in M et N aequales ſint neceſſe eſt; ex quo fiet

$$\left.\begin{array}{l} +2g(\text{ſin.}\,n - \tfrac{1}{2}\alpha n - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}\,2n) + \frac{vv}{1-\alpha\,\text{coſ.}\,n} + \frac{n\,dv}{dt} \\ -2g(\text{ſin.}\,m - \tfrac{1}{2}\alpha m - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}\,2m) - \frac{vv}{1-\alpha\,\text{coſ.}\,m} - \frac{m\,dv}{dt} \end{array}\right\} = 0$$

Ex hac aequatione primum colligere licet, ſub quibus conditionibus aequilibrium locum habere queat. Si enim hoc ſtatu adſit aequilibrium, oportet ſit tam $v = 0$, quam $\frac{dv}{dt} = 0$, quod fieri nequit niſi ſit:

$$\text{ſin.}\,n - \text{ſin.}\,m - \tfrac{\alpha}{2}(n-m) - \tfrac{1}{4}\alpha(\text{ſin.}\,2n - \text{ſin.}\,2m) = 0$$

Quare quoties huic aequationi ſatisfieri poteſt, aequilibrium dabitur; contra vero neceſſario motus exorietur. Statim autem patet, ſi ſit $n = 2\pi + m$, hanc aequationem neutiquam ſubſiſtere, neque propterea aequilibrium locum habere poſſe. Statuamus ergo $n = 2\pi + m - \delta$, atque aequilibrium poſtulat hanc aequationem:

$$\text{ſin.}(m-\delta) - \text{ſin.}\,m - \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \delta) - \tfrac{1}{4}\alpha(\text{ſin.}(2m-\delta) - \text{ſin.}\,2m) = 0.$$

Sumamus δ valde paruum, eritque

$$-\delta\,\text{coſ.}\,m - \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \delta) + \tfrac{1}{4}\alpha\delta\,\text{coſ.}\,2m = 0$$

vnde

vnde deducitur proxime $\operatorname{cos}. m = \frac{-\alpha(2\pi-\delta)}{2\delta}$; nisi ergo sit

$$\alpha(2\pi-\delta) < 2\delta \text{ seu } \delta > \frac{2\alpha\pi}{2+\alpha};$$

aequilibrium plane locum habere nequit.
Siue autem aequilibrium excludatur siue aqua ab alia caussa fuerit agitata, motus ex superiori aequatione definiri poterit. Introducta nempe noua variabili u, vt sit

$$m = u - e + \alpha \operatorname{sin}.(u-e) \text{ et } n = u + e + \alpha \operatorname{sin}.(u+e) \text{ erit}$$

$$\operatorname{sin}. m = \operatorname{sin}.(u-e) + \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{sin}. 2(u-e); \operatorname{cos}. m = \operatorname{cos}.(u-e) - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{cos}. 2(u-e)$$

$$\operatorname{sin}. n = \operatorname{sin}.(u+e) + \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{sin}. 2(u+e); \operatorname{cos}. n = \operatorname{cos}.(u+e) - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{cos}. 2(u+e)$$

$$\operatorname{sin}. 2m = \operatorname{sin}. 2(u-e) - \alpha \operatorname{sin}.(u-e) + \alpha \operatorname{sin}. 3(u-e)$$

$$\operatorname{sin}. 2n = \operatorname{sin}. 2(u+e) - \alpha \operatorname{sin}.(u+e) + \alpha \operatorname{sin}. 3(u+e).$$

Porro cum celeritas in M sit $= \frac{v}{1-\alpha \operatorname{cos}. m}$ ex promotione momentanea concluditur temporis elementum $dt = \frac{dm(1-\alpha \operatorname{cos}. m)}{v}$ factaque substitutione fit $dt = \frac{du}{v}$. Quia deinde est proxime $\frac{1}{1-\alpha \operatorname{cos}. n} = 1 + \alpha \operatorname{cos}. n$, nostra aequatio induet hanc formam

$$2g(\operatorname{sin}. n - \operatorname{sin}. m - \tfrac{1}{2}\alpha(n-m) - \tfrac{1}{4}\alpha(\operatorname{sin}. 2n - \operatorname{sin}. 2m)) + \alpha vv(\operatorname{cos}. n - \operatorname{cos}. m) + \frac{v\,dv}{du}(n-m) = 0$$

Iam vero ex superioribus formis elicitur

$$\operatorname{sin}. n - \operatorname{sin}. m = 2 \operatorname{sin}. e \operatorname{cos}. u + \alpha \operatorname{sin}. 2e \operatorname{cos}. 2u; \; n - m = 2e + 2\alpha \operatorname{sin}. e \operatorname{cos}. u$$

$$\operatorname{cos}. n - \operatorname{cos}. m = 2 \operatorname{sin}. e \operatorname{sin}. u - \alpha \operatorname{sin}. 2e \operatorname{sin}. 2u; \; \operatorname{sin}. 2n - \operatorname{sin}. 2m = 2 \operatorname{sin}. 2e \operatorname{cos}. 2u$$

 facta

facta ergo substitutione prodibit:

$$2vdv(e+\alpha\,\text{sin.}\,e\,\text{cos.}\,u)-2\alpha vvdu\,\text{sin.}\,e\,\text{sin.}\,u+2gdu(2\,\text{sin.}\,e\,\text{cos.}\,u - \alpha e+\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{sin.}\,2e\,\text{cos.}\,2u)=0$$

quae per $e+\alpha$ sin. e cos u multiplicata integrabilis redditur:

$$vv\,(e+\alpha\,\text{sin.}\,e\,\text{cos.}\,u)^2+2g\int du(2e\,\text{sin.}\,e\,\text{cos.}\,u-\alpha ee +\tfrac{1}{2}\alpha e\,\text{sin.}\,2e\,\text{cos.}\,2u+2\alpha\,\text{sin.}\,e^2\,\text{cos.}\,u^2)=C$$

ita vt hinc prodeat

$$vv=\frac{C-4ge\,\text{sin.}\,e\,\text{sin.}\,u+2\alpha geeu-2\alpha gu\,\text{sin.}\,e^2-\tfrac{1}{2}\alpha ge\,\text{sin}\,2e\,\text{sin}\,2u-\alpha g\,\text{sin.}\,e^2\,\text{sin.}\,2u}{(e+\alpha\,\text{sin.}\,e\,\text{cos.}\,u)^2}$$

seu

$$vv=\text{Const.}-\tfrac{4g}{e}\,\text{sin.}\,e\,\text{sin.}\,u+\tfrac{8\alpha g}{ee}\,\text{sin.}\,e\,\text{sin.}\,u+2\alpha gu-\tfrac{2\alpha gu}{ee}\,\text{sin.}\,e^2 -\tfrac{\alpha g\,\text{sin.}\,2e}{2e}\,\text{sin.}\,2u-\tfrac{\alpha g}{ee}\,\text{sin.}\,e^2\,\text{sin.}\,2u.$$

Coroll. 1.

144. Si ponamus $e=\pi$, vt tubus fiat aqua plenus, quem casum quidem iam supra enodauimus, aequatio hic inuenta in hanc abit formam $vv=C+2\alpha gu$, vnde fit

$$dt=\frac{du}{\sqrt{(C+2\alpha gu)}} \quad\text{et}\quad t=\frac{1}{\alpha g}\sqrt{(C+2\alpha gu)}=\frac{v}{\alpha g}$$

ita vt sit $v=\alpha gt$, vti supra inuenimus.

Coroll. 2.

145. Pro limite ad quem vsque aequilibrium locum habere potest inuenimus $\delta=\frac{2\alpha\pi}{2+\alpha}$, vnde fit $m=\pi$ vel $m=-\pi$, et $n=\pi-\frac{2\alpha\pi}{2+\alpha}=\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\pi$.

Hoc

Hoc casu inferior semicirculus totus aqua plenus, superior vero aquam continebit vsque ad Dd existente B D $= \frac{2\alpha}{2+\alpha}\pi$; qui est extremus status aequilibrii.

Coroll. 3.

146. Hinc sequitur, si portio tubi aqua destituta fuerit maior quam $\frac{2\alpha}{2+\alpha}\pi$, tum semper aequilibrium exhiberi posse, sin autem illa portio minor sit quam $\frac{2\alpha}{2+\alpha}\pi$, tum aequilibrio nullus plane locus relinquitur sed aqua quasi sponte motum concipiet.

Scholion.

167. Paradoxon ergo supra memoratum ita resoluitur, vt quando tubus non omnino aqua est plenus, in eoque spatium vacuum relinquitur, aequilibrium quidem semper locum habere possit, dummodo hoc spatium vacuum non fuerit valde paruum. Datur enim terminus quidam valde exiguus et a discrimine inter maximam minimamque aquae densitatem pendens, quo si spatium illud vacuum fuerit minus, aequilibrium penitus excludatur, et aqua in tubo contenta, quemcunque situm tenuerit, necessario ad motum concitetur. Cum cognitio huius termini maximi sit momenti, eum accuratius ex aequatione differentiali inter v et u definiamus et quia nouimus tum tubum fere esse plenum, ponamus pro hoc termino esse $e = \pi - \varepsilon$, existente ε arcu minimo atque vt tam v quam $\frac{dv}{du}$ euanescat, oportet sit

$$2\varepsilon \operatorname{cos}. u - \alpha\pi + \alpha\varepsilon - \alpha\varepsilon \operatorname{cos}. 2u = 0 \text{ seu}$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha\pi}{2 \operatorname{cos}. u + \alpha - \alpha \operatorname{cos}. 2u},$$

quae

quae expreſſio minima reddi debet, vt valor pro ε minimus etiam nunc aequilibrium admittens obtineatur. Sumi igitur debet $u = 0$, vnde fit $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha\pi$ tum autem hoc aequilibrii ſtatu extremo reperitur,

$$m = -\pi + \tfrac{1}{2}\alpha\pi = -(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\pi \text{ et } n = (1-\tfrac{1}{2})\pi$$

vt ſit longitudo venae aqueae in tubo contentae

$$MN = n - m = 2(1-\tfrac{1}{2}\alpha)\pi = 2\pi - \alpha\pi,$$

ideoque ſpatium vacuum $= \alpha\pi$; quod in aequilibrio ita locum B vbi denſitas eſt maxima occupabit, vt altera extremitas infra punctum B altera ſupra id cadat interuallo $\frac{1}{2}\alpha\pi$; quae determinatio accuratior eſt ea, quae in coroll. 2 circa ſpatium BD eſt data, etiamſi aequilibrium in quouis ſitu proximo aeque ſubſiſtere queat.

Problema 67.

Tab VI. Fig. 67. 148. Si tubus in ſe rediens habuerit figuram quamcunque, gradusque caloris in eo vtcunque diverſus, vt aqua qua eum penitus repletum aſſumimus, in aequilibrio conſiſtere nequeat: motum in ea genitum determinare.

Solutio.

Sit in A calor maximus ideoque denſitas minima, quae ponatur $= 1$, ibique ſit tubi amplitudo $= ff$; in loco B vero ſit calor minimus ideoque denſitas maxima $= 1 + \alpha$. Conſideretur nunc locus tubi quicunque S, et ponatur in eius directrice ce longitudo $AS = s$, amplitudo $Ss = \omega$ et altitudo ſupra planum horizontale fixum $= z$; quod planum per ipſum punctum A ducere licet, denſitas vero ibidem ſit $= q$. Iam elapſo tempore $= t$, aqua eiusmodi motum acquiſierit, vt in A celeritas in plagam AS, ſit $= v$, ideoque in S futura ſit $\mathfrak{v} = \frac{ffv}{q\omega}$. Quodſi ergo ſtatuamus preſſionem in $S = p$, hanc ſupra elicuimus aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{f^4 vv}{q\omega\omega} - f^4 vv\int\frac{d\omega}{q\omega^3} - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

quae ob $\int q\,dz = qz - \int z\,dq$ transformetur in hanc

$$2gp = \Delta : t - 2gqz + 2g\int z\,dq - \frac{f^4 vv}{q\omega\omega} - f^4 vv\int\frac{d\omega}{q\omega^3} - \frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

vbi integralia per totam longitudinem tubi AS capi aſſumo, ita vt poſito $s = 0$ ea quoque euaneſcant. Pro ipſo ergo puncto A, vbi etiam fieri $z = 0$ ſumimus; erit

$$2gp = \Delta : t - vv \text{ ob } q = 1 \text{ et } \omega = ff$$

eandem autem preſſionem prodire neceſſe eſt, ſi arcum s eousque augeamus, vt confecta tota tubi longitudine punctum S in A transferatur, qualem ergo formam tum noſtra aequatio ſit indutura, inveſtigari oportet. Ac primo quidem obſeruo ſi amplitudo tubi vbique eſſet eadem $\omega = ff$, tum formulam $ff\int\frac{ds}{\omega}$ longitudinem totius tubi in ſe redeuntis eſſe expreſſuram, quatenus ergo amplitudo variabilis ω fuerit vel maior vel minor quam ff, eatenus valor iſtius integralis vel minor erit vel maior illa longitudine tota. Poſita ergo tota hac longitudine $= a$, ſtatuatur intrgrale per totum tubum expanſum

$\int\!\!\int\!\int \frac{ds}{\omega} = \lambda a$. Deinde integrale $\int \frac{d\omega}{q\omega^3}$ per totum tubum extenſum vel iterum euaneſcit, vel certum quendam valorem induit, prout binae variabiles q et ω inter ſe fuerint comparatae, ponamus ergo valorem integralis $\int \frac{d\omega}{q\omega^3}$ per totum tubum extenſi $= \frac{\mu}{f^4}$. Integralis autem $\int z\, dq$ valor diligentiorem inueſtigationem poſtulat; ſumatur in tubo alius locus S' vbi denſitas aquae eadem ſit $= q$ atque in loco S, ibi autem altitudo ſuper plano horizontali fixo ſit $= z'$. Quia vero ab A ad S progrediendo quantitas q augebatur, vlterius autem curſu per B vsque ad S' inſtituto, quantitas q decreſcit pro puncto S' loco dq ſcribere debemus $-dq$, ita vt binis tubi elementis in S et S' iunctim ſumtis habeatur $(z-z')\,dq$, et nunc integrale $\int (z-z')\,dq$ ab A tantum vsque B extendi oportet. Hunc in finem ſumta recta $CA =$ denſitati minimae 1, et $CB =$ maximae $1+\alpha$ notentur quotcunque denſitates mediae CE, CF, CG, CH etc. atque in tubo notentur bina loca coniugata EE', FF', GG', HH' in quibus illae denſitates inſint, tum cuique exceſſui, quo altitudo punctorum E, F, G, H ſuperat altitudinem punctorum E', F', G', H' ſtatuantur applicatae aequales Ee, Ff, Gg, Hh, et curuae per puncta e, f, g, h ductae area $A\,e\,f\,g\,h\,B\,A$ dabit verum valorem integralis $\int z\,dq$ quatenus per totam tubi longitudinem extenditur. Statuamus hunc valorem $\int z\,dq = h$ et facto integro circuitu pro preſſione in A habebimus

Tab. VI. Fig. 68.

$$2gp = \Delta : t + 2gh - vv - \mu vv - \frac{\lambda a\, dv}{dt}$$

qui

qui valor cum ante inuento $2gp = \Delta : t - vv$ aequalis esse debeat pro motu determinando nascetur haec aequatio:

$$\lambda a dv + \mu vv dt = 2gh dt \text{ seu } dt = \frac{\lambda a dv}{2gh - \mu vv}$$

quae tres supeditat casus considerandos

I. Si $\mu = 0$ erit $t = \frac{\lambda a v}{2gh}$ ideoque $v = \frac{2gh}{\lambda a} t$.

II. Si $\mu > 0$; ponatur $\mu = \frac{2gh}{cc}$, fit $dt = \frac{\lambda acc dv}{2gh(cc - vv)}$, hincque integrando $t = \frac{\lambda ac}{4gh} l \frac{c+v}{c-v}$, siquidem posito $t = 0$ esse debet $v = 0$ faciamus $\frac{4gh}{\lambda ac} = \gamma$, eritque $v = \frac{e^{\gamma t} - 1}{e^{\gamma t} + 1} c$. Hoc ergo casu celeritas v quidem crescit sed non vltra terminum c quem demum elapso tempore infinito assequitur. Hinc casus primus nascitur si $c = \infty$.

III. Si $\mu < 0$ ponatur $\mu = \frac{-2gh}{cc}$, vt fiat $dt = \frac{\lambda acc dv}{2gh(cc + vv)}$ hincque integrando $t = \frac{\lambda ac}{2gh}$ Ang. tang. $\frac{v}{c}$: vnde elicimus $v = c$ tang. $\frac{2gh}{\lambda ac} t$. Hoc ergo casu elapso tempore finito $t = \frac{\pi . \lambda ac}{4gh}$, celeritas v iam fit infinita.

Exemplum.

149. Sit tubus circularis in plano verticali positus aqua plenus radio existente $CA = CB = c$. Sumto autem angulo $ACS = \Phi$, fit in S densitas aquae $q = 1 - \alpha \operatorname{cos}. \Phi$, et amplitudo tubi $\omega = ff(1 - \beta \operatorname{sin}. \Phi)$ altitudo vero super plano horizontali $z = c \operatorname{sin}. \Phi$ existente arcu $AS = c\Phi = s$. Cum iam pro motu in plagam AECD, posita in sectione vbi Tab. VI. Fig. 64.

vbi foret denſitas $=1$ et amplitudo $=ff$, celeritate $=v$, haec inuenta ſit aequatio

$$0=2g\int z\,dq-f^4 vv\int\frac{d\omega}{q\omega^3}-\frac{ff\,dv}{dt}\int\frac{ds}{\omega}$$

his integralibus per totum circulum extenſis ſingula ſeorſim euoluamus. Ac primo quidem ob $z=c\,\text{ſin.}\,\Phi$ et $dq=\alpha\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$ erit

$$\int z\,dq=\alpha c\int d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2=\tfrac{1}{2}\alpha c\int d\Phi(1-\text{coſ.}\,2\Phi)=\tfrac{1}{2}\alpha c(\Phi-\tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2\Phi)$$

cuius valor per totum circulum ponendo $\Phi=2\pi$ expanſum praebet $\int z\,dq=\pi\alpha c$. Deinde ob ds $c\,d\Phi$ et $\omega=ff(1-\beta\,\text{ſin.}\,\Phi)$ fit

$$ff\int\frac{ds}{\omega}=c\int\frac{d\Phi}{1-\beta\,\text{ſin.}\,\Phi}=\frac{c}{\sqrt{(1-\beta\beta)}}\left(\text{Ang. ſin.}\,\sqrt{(1-\beta\beta)}-\text{Ang. ſin.}\,\frac{\text{coſ.}\,\Phi\sqrt{(1-\beta\beta)}}{1-\beta\,\text{ſin.}\,\Phi}\right).$$

Sit ψ angulus iſte cuius ſinus eſt $\frac{\text{coſ.}\,\Phi\sqrt{(1-\beta\beta)}}{1-\beta\,\text{ſin.}\,\Phi}$, et poſito $\Phi=90°$ fit $\psi=0$, poſito autem $\Phi=\pi$ fit

$$\psi=-\text{Ang. ſin.}\,\sqrt{(1-\beta\beta)}$$

poſito porro $\Phi=270°$ fit $\psi=-\pi$, poſito denique $\Phi=2\pi$ colligitur

$$\psi=-2\pi+\text{Ang. ſin.}\,\sqrt{(1-\beta\beta)},$$

ex quo pro toto circulo fit $ff\int\frac{ds}{\omega}=\frac{2\pi c}{\sqrt{(1-\beta\beta)}}$ quod idem clarius fit ſi β vt valde paruum ſpectemus; tum enim erit

$$\int\frac{d\Phi}{1-\beta\,\text{ſin.}\,\Phi}=\int d\Phi(1+\beta\,\text{ſin.}\,\Phi)=\Phi-\beta\,\text{coſ.}\,\Phi+\beta,$$

cuius valor poſito $\Phi=2\pi$ fit $=2\pi$. Pro tertia formula integrali ob $d\omega=-\beta\,ff\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $q=1-\alpha\,\text{coſ.}\,\Phi$ erit

$$f^4 \int \frac{d\,\omega}{q\,\omega^3} = -\beta \int \frac{d\,\Phi\, cof.\, \Phi}{(1-\alpha\, cof.\, \Phi)(1-\beta\, fin.\, \Phi)^3}$$

Confideremus iterum β perinde ac α valde paruum vt denominator cenferi poffit $= 1 - \alpha\, cof.\, \Phi - 3\,\beta\, fin.\, \Phi$, hincque habeatur

$$f^4 \int \frac{d\,\omega}{q\,\omega^3} = -\beta \int d\Phi\, cof.\, \Phi (1 + \alpha\, cof.\, \Phi + 3\,\beta\, fin.\, \Phi) \text{ feu}$$

$$f^4 \int \frac{d\,\omega}{q\,\omega^3} = -\beta (fin.\, \Phi + \tfrac{1}{2}\alpha\Phi + \tfrac{1}{4}\alpha\, fin.\, 2\,\Phi - \tfrac{3}{4}\beta\, cof.\, 2\,\Phi + \tfrac{3}{4}\beta)$$

cuius valor pofito $\Phi = 2\,\pi$ fit $= -\pi\alpha\beta$. Quocirca noftra aequatio differentialis ita fe habebit:

$$0 = 2\,\pi\alpha g c + \pi\alpha\beta v v - \frac{2\,\pi\, c}{\sqrt{(1-\beta\beta)}} \cdot \frac{d\,v}{d\,t}$$

vbi quia ipfius β altiores dimenfiones negligimus loco $\sqrt{(1-\beta\beta)}$ fcribere licet 1, ita vt fit

$$d\,t = \frac{c\,d\,v}{\alpha(g c + \frac{1}{2}\beta v v)}.$$

Cum ergo facta comparatione cum forma fupra exhibita fit $\lambda a = c$, $2\,g\,b = \alpha g c$ et $\mu = -\frac{1}{2}\alpha\beta$, fi β fit numerus pofitiuus ex cafu tertio fit $c c = \frac{2\,g\,b}{-\mu}$ $= \frac{2\,g\,c}{\beta}$ et $c = \sqrt{\frac{2\,g\,c}{\beta}}$ vnde colligitur:

$$v = \frac{\sqrt{2\,g\,c}}{\sqrt{\beta}} \text{ tang. } \frac{\alpha\gamma\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\,g\,c}}\, t,$$

ita vt poft tempus $t = \frac{\pi\sqrt{2\,g\,c}}{2\,\alpha\, g\sqrt{\beta}}$ fec. celeritas iam fiat infinita.

At fi β fit numerus negatiuus feu amplitudo tubi in S generaliter $\omega = ff(1 + \beta\, fin.\, \Phi)$ comparatio cum cafu fecundo inftitui debet; ex quo ob $\lambda a = c$; $2\,g\,b = \alpha g c$; et $\mu = \frac{1}{2}\alpha\beta$ fit $c c = \frac{2\,g\,c}{\beta}$, et $c = \sqrt{\frac{2\,g\,c}{\beta}}$. Capiatur ergo numerus $\gamma = \frac{2\,\alpha\, g\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\,g\,c}}$ et ad datum tempus t erit $v = \frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{e^{\gamma t} - 1}{e^{\gamma t} + 1}$ quae ergo celeritas elapso demum tempore infinito fit $= \frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{6}}$.

Coroll. 1.

150. Ex casu $\omega = ff(1 - 6 \sin. \Phi)$ discimus in genere, si tubi pars superior A E B angustior sit quam pars inferior A D B, tum motum aquae tantopere accelerari, vt iam tempore finito celeritas fiat infinita. Ex altero vero casu $\omega = ff(1 + 6 \sin. \Phi)$ colligimus in genere, si tubi pars superior A E B fuerit amplior inferiori A D B, tum motum multo minus accelerari, vt elapso adeo tempore infinito celeritas non sit certum limitem superatura.

Coroll. 2.

151. Pro formula integrali $f^4 \int \frac{d\omega}{q\,\omega^3}$ si tantum α vt fractio valde parua spectetur, ipsi 6 valorem quemcunque vnitate saltem minorem relinquendo, calculo subducto reperitur eius valor per totum circulum extensus $= \frac{-\pi \alpha 6}{(1 - 66)\sqrt{(1 - 66)}}$ hincque motus hac aequatione exprimetur:

$$dt = \frac{2(1 - 66)\,c\,dv}{2\alpha g c (1 - 66)^{\frac{3}{2}} + \alpha 6 vv}.$$

Coroll. 3.

152. Calculo hinc vlteriori subducto pro amplitudine $\omega = ff(1 - 6 \sin. \Phi)$ reperitur $v = (1 - 66)^{\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{2gc}}{\sqrt{\beta}}$

$\frac{V\,2gc}{V\,\beta}$ tang. $\frac{\alpha g V \beta}{(1-\beta\beta)^{\frac{1}{4}} V\,2gc}\,t$ pro altero vero casu amplitudinis $\omega = ff(1+\beta \text{ fin. } \Phi)$ sumto

$$\gamma = \frac{2\alpha g V \beta}{(1-\beta\beta)^{\frac{1}{4}} V\,2gc} \text{ erit } v = (1-\beta\beta)^{\frac{3}{4}} \frac{V\,2gc}{V\,\beta} \cdot \frac{e^{\gamma t}-1}{e^{\gamma t}+1}.$$

Scholion.

153. Quando vti in exemplo allato vsu venit, quantitates variabiles q, z et ω, sunt certae functiones continuae ipsius s inuestigatio secundum praecepta analyseos consueta institui potest. Verum si tubus constet pluribus partibus nulla continuitatis lege inter se connexis, tum pro singulis partibus valores formularum integralium, quae in motus determinationem ingrediuntur, seorsim inuestigari ac deinceps colligi oportet. Directrice tubi A B in directum extensa pro eius portione E F dentur in E altitudo E H $= h$, amplitudo tubi E N $= ffn$ et densitate aquae E M $= m$ in F vero sint eadem elementa E H$'$ $= h'$; E N$'$ $= ffn'$, et E M$'$ $= m'$, quae ab E et F ita vniformiter mutari assumamus vt scalae ea repraesentantes H Z H$'$, N O N$'$ et M Q M$'$ pro lineis rectis haberi possint. Hinc E F $= e$, et E S $= x$, vt sit $ds = dx$, erit S Z $= z = h + \frac{(h'-h)x}{e}$; S O $= \omega = ff(n + \frac{(n'-n)x}{e})$ et S Q $= q = m + \frac{(m'-m)x}{e}$. Quamobrem si differentias $h' - h$, $n' - n$ et $m' - m$ vt valde paruas spectemus, inueniemus primo $ff\int\frac{ds}{\omega}$ Tab. VI. Fig 69.

$= \int$

$= \int \frac{e\,d\,x}{e\,n + (n' - n)\,x}$, quod per ſpatium E F $= e$ expanſum fit

$$= \frac{e}{n' - n}\, l \frac{n'}{n} = e \left(\frac{1}{n} - \frac{(n' - n)}{2\,n\,n} + \frac{(n' - n)^2}{3\,n^3} - \text{etc.} \right).$$

Deinde eſt

$$\int z\,d\,q = \frac{m' - m}{e} \int d\,x \left(b + \frac{(b' - b)\,x}{e} \right)$$

quod integrale pariter per totum ſpatium E F $= e$ expanſum praebet

$$\int z\,d\,q = \tfrac{1}{2} (b' + b)(m' - m).$$

Denique formula $f^4 \int \frac{d\,\omega}{q\,\omega^3}$ abit in hanc formam

$$\frac{n' - n}{e\,n^2} \left(\frac{x}{m\,n} - \frac{3\,(n' - n)}{2\,e\,m\,n\,n}\, x\,x - \frac{(m' - m)}{2\,e\,m\,m\,n}\, x\,x \text{ etc.} \right)$$

ſicque iſtius formulae valor per ſpatium E F extenſus erit

$$\frac{n' - n}{m\,n^3} - \frac{3\,(n' - n)^2}{2\,m\,n^4} - \frac{(m' - m)\,(n' - n)}{2\,m\,m\,n^3},$$

cuius ſufficit partem ſumſiſſe primam $\frac{n' - n}{m\,n^3}$. Exempla non addo, quia praecipua phaenomena ex figura circulari ſatis iam ſunt facta manifeſta.

EXAMEN

EXAMEN PHYSICO-MECHANICVM

DE

MOTV MIXTO QVI LAMINIS ELASTICIS A PERCVSSIONE SIMVL IMPRIMITVR.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Varii vtique ſyſtemati ſimul ineſſe poſſunt motus, quorum vnusquisque, independenter a reliquis, ſua peculiari lege perficiatur, non ſecus ac ſi ſolus eſſet; Duo huius rei allegabo exempla, quae praeſentium commentationum argumentum facient: *primo* motum progreſſiuum coniunctum cum motu rotatorio circa centrum grauitatis, *ſecundo* motum itidem progreſſiuum cui accedit motus vibratorius; in vtroque exemplo ambo ſimul motus ab vna eademque cauſa ſimplici, nempe a percuſſione, produci poſſunt. Requiritur autem quanam proportione vterque effectus a communi cauſa ſit oriturus: etenim tanto minor orietur a percuſſione motus progreſſiuus atque adeo tanto magis aberrabunt leges communiter receptae de motibus a percuſſione oriundis, quanto maior vis percuſſionis pars impenditur in motum rotatorium vel vibratorium excitandum. Equidem ſolutionem quaeſtionis noſtrae pro motu rotatorio coniuncto cum motu progreſſiuo iam ante plurimos annos, cum a nemine adhuc tractatum eſſet hoc argumentum, cum Academia communicaui in Diatriba hiſce commentariis ſuo tempore inſerta *de percuſſione excentrica*: quia vero animus eſt communi principio theoriam ſuperinſtruere, erit e re noſtra priſtinum argumentum breuiter reſumere.

Tab. VII. Fig. 1. §. 2. Sit igitur virga $a\,b$ recta, vtcunque inaequaliter grauis nullamque admittens inflexionem: percutiatur in puncto c verſus γ atque hoc punctum, primo poſt percuſſionem tempuſculo, peruenire putetur in γ totamque virgam in ſitum $\alpha\,\gamma\,\beta$; ſic ambo ſitus ſe interſecabunt in puncto e; iſtud vero punctum vel intra extremitates a et b vel extra eas cadere poterit; ab eo autem tempore audire coepit *centrum rotationis ſpontaneae*, etiamſi pro primo tantum a percuſſione tempuſculo admitti poſſit: vera rotatio fit circa centrum grauitatis, quod ipſum ſimul motu rectilineo vniformiter moueri pergit, ſicque motus abſolutus vniuscuiusque puncti variabilis eſt nec punctum interſectionis e abſolute quieſcit, ad momentum quam cum motus centri grauitatis ad poſitionem virgae perpendicularis eſt. Sumatur nunc punctum e pro initio abſciſſarum ſitque diſtantia $c\,e = s$: deinde duo accipiantur puncta infinite propinqua o et p; ponatur $e\,o = x$; $o\,p = d\,x$; centro

centro e ducantur arculi infinite parui $d\delta$, oq, pr, $c\gamma$ et $a\alpha$; denotat autem punctum d positionem centri grauitatis: denique ponduſculum elementi op ponatur $= d\xi$. Iam putetur loco ponduſculi $d\xi$ aliud ſubſtitui in puncto percuſſionis c, quod vi impellenti eandem offerat inertiam reſpectu puncti c, quod tanquam quieſcens eo momento pro puncto fixo, circa quod rotatio fiat, aſſumi poterit; notum eſt hoc ponduſculum in puncto c ſubſtituendum eſſe $= \frac{xx}{ss} d\xi$. Hoc modo erit maſſa integra in c ſubſtituenda $= \int \frac{xx\,d\xi}{ss}$. Iam vero per ſe patet, punctum e ita fore locatum vt omnis maſſa in c ſubſtituta minima fiat ſeu vt minimam inertiam vi impellenti offerat; igitur efficiendum erit, vt iſta quantitas $\int \frac{xx\,d\xi}{ss}$ vel $\frac{\int xx\,d\xi}{ss}$ (eſt enim hactenus diſtantia s conſtans) minima fiat. Hunc in finem diſtantia s quantitate infinite parua augeri ponatur, quam vocabimus α: ſic pro diſtantiis s et x ſubſtituendae erunt diſtantiae $s+\alpha$ et $x+\alpha$ atque tunc fiet tota maſſa in puncto percuſſionis c ſubſtituenda $= \frac{\int (x+\alpha)^2\,d\xi}{(s+\alpha)^2}$; atque haec priori cenſenda eſt aequalis vi legis maximorum et minimorum: aequatio iſta, reiectis terminis infinite paruis ſecundi ordinis, dat denique $s = \frac{\int xx\,d\xi}{\int x\,d\xi}$. Igitur punctum c eſt centrum oſcillationis virgae ab ex puncto e ſuſpenſae vel reciproce punctum quaeſitum e eſt centrum oſcillationis virgae ex puncto percuſſionis ſuſpenſae. Atque haec eſt eadem illa proprietas quam olim obſeruaueram.

§. 3. Alio nunc vtar principio metaphyſico amplioris vſus etſi parum diuerſo. Si maſſa omnium particularum, poſtquam in punctum percuſſionis translatae fuerunt, minima ſit, conſequens eſt, vt pro eadem velocitate puncti c integra vis viua a percuſſione in virgam, antea quiescentem, translata minima fiat; hoc equidem principium in praeſenti quaeſtione mihi clarum videtur. Exprimatur velocitas puncti c per $c\gamma$ ſitque $c\gamma = c$ atque tunc quaeritur, quisnam futurus ſit integrae virgae motus?

Ponatur iterum virgam, poſt primum a percuſſione tempuſculum, ſitum primitiuum $a\,b$ commutaſſe cum ſitu $\alpha\,\beta$, retentis omnibus denominationibus antea adhibitis. Erit velocitas in puncto $o = \frac{x}{s}c$ atque vis viua elementi $o\,p$ fiet $= \frac{x\,x}{s\,s}c\,c\,d\xi$: ergo vis viua integrae virgae erit $= \int\frac{x\,x}{s\,s}\,c\,c\,d\,\xi$, et cum ponitur c conſtans ſequitur iterum ex altero principio, punctum e ita eſſe poſitum vt ſit quantitas $\int\frac{x\,x\,d\,\xi}{s\,s}$ minima.

Gaudet etiam punctum e hac proprietate geometrica ſi virga fuerit vniformiter grauis vt ſolidum generatum ex rotatione lineae $\alpha\,\beta$ circa axem $a\,b$ inter omnia alia minimum ſit. Caeterum ex determinata poſitione puncti e immediate deducitur relatio inter motum progreſſiuum communem et motum rotatorium; poſito enim centro grauitatis in d, erit motus centri grauitatis ad motum rotatorium puncti c circa centrum grauitatis, vt $d\,\delta$ ad $c\,\gamma - d\,\delta$ amboque tales deinde permanebunt.

§. 4.

§. 4. Quia punctum percussionis ad arbitrium sumi potest, liquet rationem quamcunque datam inter vtrumque motum obtineri posse; haec autem vtique ratio non mutabitur siue fortius siue leuius virga percussa fuerit. Quod si vero in ipso centro grauitatis percutiatur omnis euanescet motus rotatorius, quia tunc centrum oscillationis infinite distat a puncto percussionis siue a centro grauitatis, sic vt linea $\alpha\beta$ maneat constanter parallela cum linea *a b*. Vicissim, dato vtroque motu in virga simul coëxistente, facile erit percussionem indicare qua ambo motus vna fuerint generati.

§. 5. Prouti motus rotatorius virgae circa suum centrum grauitatis vna cum motu eiusdem progressiuo vniformiter simul consistere possunt, ita et motus vibratorii cum motu progressiuo in virga coëxistere possunt, si flexilis et elastica ponatur: patet quoque motus vibratorios seorsim sumtos situm centri grauitatis non variare nec motum vnum ab altero perturbari; ambo autem motus simul ab vna eademque percussione produci poterunt: nouum istud argumentum physicorum aeque ac geometrarum examine haud indignum puto. Ne vero in ipso limine a pluribus difficultatibus inutiliter vexemur, totam rem ad simplicissimas reducam hypotheses.

Fuerit virga vel lamina tota sua longitudine aeque crassa, grauis, flexilis et vbique perfecte elastica: haec super plano horizontali quiescens percutiatur in medio centro grauitatis; sic lamina a per-

 cussione

cuſſione praeter motum progreſſiuum ſimul obtinebit motus reciprocos vel vibratorios; haſce vibrationes, vt fieri ſolet, pro valde paruis habebimus; attamen cum incredibili rapiditate abſoluantur et ſe inuicem ſubſequantur, fieri poterit vt hiſce motibus vis viua inſit, quae notabilem habeat proportionem cum vi viua motui eiusdem laminae progreſſiuo debita: vnde motus progreſſiuus, quem lamina ab impulſu obtinuit, haud parum diminuetur. Leges enim motuum a percuſſione in corporibus elaſticis ſupponunt omnem ab impulſu effectum in variationem motuum progreſſiuorum impendi, quam ſuppoſitionem vel ſolus ſonus corporum percuſſorum deſtruit.

§. 6. Notetur porro, percuſſionem phyſice conſideratam, comparari poſſe cum enormi preſſione parum admodum durante; percuſſio autem tam diu durat, quamdiu corpora manent contigua, haecque contiguitas ob flexibilitatem corporum ad momentum temporis phyſicum perdurare poteſt et donec ſubſiſtit variatio in ſyſtemate oritur nimis complicata, quam vt calculos admittat. Non haeſitaui adeoque ſupponere integram percuſſionem fieri in inſtanti. Solenne eſt phyſicis flexibilitati corporum ſubſtituere elaſtrum inter ambo corpora poſitum, quod comprimi ſeſeque reſtituere poſſit; ſi tunc tale elaſtrum longitudinem habere infinite paruam fingamus, veram habebimus ideam percuſſionis in inſtanti peractae: hoc igitur ipſo inſtanti laminae per-

percuſſae ambos ſuos motus totos impreſſos cenſebimus atque, ſi motum laminae vibratorium ſeorſim conſideremus, reducta erit lamina in ſtatum, quem habet inter vibrandum, quoties in lineam rectam reſtituitur atque in partem contrariam inflecti incipit, quod in quauis media vibratione contingit. Hic omnino requiritur notitia harum vibrationum, quarum infinitae ſunt ſpecies; argumentum iſtud ante hos triginta et quod excurrit annos ſcrupuloſe, pro eius dignitate atque complicatione, perquiſiui eiusque integram theoriam expoſui in commentariis hiſce, duobus ſchediasmatibus, altero *de vibrationibus et ſono laminarum elaſticarum* altero *de ſonis multifariis quos laminae elaſticae diuerſimode edunt.* Illuſtris *Eulerus* noſter, cui iſtud argumentum propoſueram, ſolutionem inuenit cum mea plane conformem. Plura tum temporis iam monui expreſſis verbis de coëxiſtentia vibrationum diuerſarum ſonisque pluribus, qui inde producuntur, ſimul et vna diſtinctiſſime perceptis, quibus principiis longo poſt tempore vſus ſum ad illuſtrandam theoriam de chordis ſonoris atque vibrationibus ſyſtematum, ex quocunque numero corporum, compoſitorum; haec omnia forent in memoriam reuocanda, ſi omni rigore praeſentes disquiſitiones pertractare vellemus; at potius operam dabo vt quae dicenda habeo in compendium contrahantur.

§. 7. Quaeritur imprimis an proportio inter vtrumque motum, primo poſt percuſſionem tempuſculo, Tab. VII. Fig. 2.

pusculo, definiri possit? Fuerit ante percussionem lamina recta et vniformis in situ $a\,b$ (fig. 2.) eaque percutiatur in puncto medio c: putetur punctum c primo post percussionem tempusculo infinite paruo peruenire in γ atque laminam incuruari simulque transferri in situm $\alpha\,\gamma\,\beta$. Ducatur recta $\alpha\,\beta$ vna cum lineola $\gamma\,c\,p$: fuerit centrum grauitatis laminae incuruatae in o: sic exprimet lineola $c\,o$ velocitatem centri grauitatis et $o\,\gamma$ velocitatem motus vibratorii pro laminae puncto medio, eo temporis momento quo lamina se incuruare incipit; tota autem $c\,\gamma$ repraesentabit velocitatem absolutam puncti c. Iam vero liceat supponere curuam $\alpha\,\gamma\,\beta$ pertinere ad classem earum curuarum, quas lamina successiue assumit, dum vibrationes suas format; at tunc quaestio erit quanta futura sit amplitudo $\gamma\,p$, qua demum curua ipsa specie sua determinatur? ego quidem existimo, curuam $\alpha\,\gamma\,\beta$ inter omnes socias talem fore, vt permutatio vi viua minima pro eadem translatione $c\,\gamma$ absoluatur: hoc modo propositus effectus veluti minimis impensis obtineri videtur; nec nos fefellit principium, quum eo §. 3. vteremur ad determinandum motum virgae rigidae a percussione excentrica: nemini obtrudam hypotheses; videamus saltem quo nos perducant.

§. 8 Per punctum γ ducatur linea $m\,n$ ipsi $a\,b$ parallela et aequalis: sit $\gamma\,m = l$; fuerit, pro puncto qualicunque q, abscissa $\gamma\,q = x$; applicata $q\,r = y$; lineola data $\gamma\,c = \beta$ et quaesita $\gamma\,p = \alpha$; memi-

meminerimus autem quantitates y, α, β esse veluti infinite paruas. Quaecunque iam fuerit curua $\alpha\gamma\beta$, notum est atque demonstratum ex natura vibrationum minimarum isochronarum, singulas applicatas qr vnice pendere a maxima amplitudine $\gamma p = \alpha$ et a functione numerica composita ex abscissa x et semilongitudine l, quae functio si indicetur per ξ habebitur $y = \xi\alpha$; producta autem lineola qr vsque in s fit $sr = \beta - \xi\alpha$ et cum motus absolutus elementi dx repraesentetur per sr, exprimemus vim viuam elementi dx per $(\beta - \xi\alpha)^2 dx$ atque vim viuam partis γr per $\int(\beta - \xi\alpha)^2 dx$ siue per $\beta\beta x - 2\alpha\beta\int\xi dx + \alpha\alpha\int\xi\xi dx$. Iam vero manentibus valoribus β, x et ξ erit amplitudo α hac lege accipienda vt facta post integrationem $x = l$ fiat quantitas $\beta\beta x - 2\alpha\beta\int\xi dx + \alpha\alpha\int\xi\xi dx$ minima: posito igitur sola nunc amplitudine α variabili, erit differentiale huius quantitatis $= 0$ siue $-2\beta d\alpha\int\xi dx + 2\alpha d\alpha\int\xi\xi dx = 0$; vnde $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\int\xi dx}{\int\xi\xi dx}$. Si vero pro ξ reponatur valor ipsius $\frac{y}{\alpha}$ atque nunc iterum α pro quantitate constante, vt debet, assumitur, habebitur aequatio finalis:

$$\beta = \frac{\int yy\,dx}{\int y\,dx}.$$

§. 9. Egregiam haec aequatio indicat proprietatem; scilicet sumatur mn pro axe horizontali, circa quem curua $\alpha\gamma\beta$, qualiscunque ad hoc negotium sumenda fuerit, minimas perficiat oscillationes erit punctum c in centro oscillationis huius curuae;

 quia

quia porro centrum grauitatis eiusdem curuae positum fuit in o, repraesentabit distantia centri oscillationis a centro grauitatis, id est, distantia $c\,o$ velocitatem motus progressiui a percussione oriundi, siue velocitatem centri grauitatis, haecque velocitas permanebit. Deinde lineola $o\,\gamma$ exprimit velocitatem initialem puncti medii c, quae ad motum vibratorium pertinet, haec velocitas vibratoria postea sensim diminuitur instar corporis penduli dum inter oscillandum arcum ascensus describit. Sed et olim demonstraui longitudinem penduli, quod cum vibrationibus laminae isochronum est; atque ex his omnibus integer laminae motus a percussione definitur, modo congrua accipiatur curua $\alpha\,\gamma\,\epsilon$.

§. 10. Nunc itaque requiritur vt curuatura laminae consideretur; Demonstraui olim in duobus schediasmatibus §. 6. allegatis curuaturam laminae motiunculis reciprocis agitatae generalissime hac exprimi aequatione $y = a\,e^{\frac{x}{f}} + b\,e^{\frac{-x}{f}} + h$ sin. $(\frac{x}{f} + n)$ quae infinitas curuarum classes subministrat, inter quas sola simplicissima hic attentionem meretur, quia omnia experimenta indicant vibratiunculas altiorum generum excursiones facere longe minimas; licebit saltem rem ita considerare, quasi lamina solas suas vibrationes fundamentales ad normam figurae 2. perficiat, sed et tunc aequatio quantitatibus similibus exprimitur, vnde intelligitur quantitatem $\int y\,y\,d\,x$ omnem fere analysin eludere; igitur reccurrendum erit ad approximationes per series, quas pariter in citatis ambabus

bus diatribis exhibui: ſed et haec operatio taedioſa foret. Aliam igitur aperiam methodum facilem atque parum a vero abducentem tramite, quod ſola figurae inſpectione manifeſtum fit et quod ipſo calculo edoctus ſum. Scilicet ſupponere licebit curuam $\alpha\gamma\beta$ ſimplicem eſſe parabolam, quae verticem habeat in γ ſuper axe γp et cuius parameter veluti infinities maior ſit quam amplitudo γp.

§. 11. Ponatur itaque, retentis denominationibus antea adhibitis, $y = \frac{xx}{ll}\alpha$, quae eſt aequatio ad parabolam cuius parameter $= \frac{ll}{\alpha}$ adeoque veluti infinita quia α ſupponitur valde parua. Quod ſi iam pro tali parabola ponatur $\gamma p = \alpha$, reperitur $\gamma o = \frac{1}{3}\alpha$, quae denotat diſtantiam centri grauitatis o a vertice γ: inuenitur porro $\gamma c = \frac{3}{5}\alpha$, quae eſt diſtantia centri oſcillationis a vertice (§. 9.); hinc etiam $c o = \frac{4}{15}\alpha$ atque $c p = \frac{2}{5}\alpha$. Valores iſti nos docent quod ſi lamina primo poſt percuſſionem tempuſculo ſitum $a b$ permutarit cum ſitu $\alpha\gamma\beta$, haec permutatio ita facta ſit vt centrum grauitatis deſcripſerit lineolam $c o = \frac{4}{15}\alpha$: iſta vero permutatio indicat velocitatem motus progreſſiui, quae permanens erit; hoc motu lamina $a b$ cenſenda eſt perveniſſe in ſitum parallelum $f g$ per centrum grauitatis o tranſeuntem. Deinde $o\gamma = \frac{1}{3}\alpha$ exprimit velocitatem, qua punctum medium motum ſuum vibratorium ſuper axem $f g$ efficere incipit. Denique $c\gamma = \frac{3}{5}\alpha$ exprimit velocitatem initialem abſolutam puncti medii c in quo percuſſio facta fuit. Eſt itaque

que velocitas co ad velocitatem $o\gamma$ vt $\frac{4}{15}\alpha$ ad $\frac{1}{3}\alpha$ siue vt 4 ad 5.

§. 12. Determinanda superest vis viua laminae, quae ex vtroque motu seorsim nascitur. Quod primo pertinet ad motum localem progressiuum, velocitas eius, singulis elementis communis, aestimanda est ex $co = \frac{4}{15}\alpha$ eiusque massa ex longitudine laminae $= 2l$, vnde statim eruitur vis viua pro motu laminae progressiuo $= \frac{32}{225}\alpha\,\alpha\,l$. At vero vis viua, motui vibratorio debita, deducenda est ex velocitate singularum particularum, facta velocitate puncti medii $= o\gamma = \frac{1}{3}\alpha$: ista vero velocitas pro quouis alio puncto r mutatur in $\frac{1}{3}\alpha - y$; ergo pro motu vibratorio fit vis viua cuiuscunque elementi:

$$= (\tfrac{1}{3}\alpha - y)^2 dx = (\tfrac{1}{3}\alpha - \tfrac{xx}{ll}\alpha)^2 dx,$$

cuius integrale est $= \frac{1}{9}\alpha\alpha x - \frac{2\alpha\alpha x^3}{9ll} + \frac{\alpha\alpha x^5}{5l^4}$: sic, facta $x = l$, oritur vis viua pro dimidia lamina $= \frac{4}{45}\alpha\,\alpha\,l$ adeoque vis viua totius laminae motui vibratorio debita $= \frac{8}{45}\alpha\,\alpha\,l$; sunt itaque vires viuae, motui progressiuo et motui vibratorio debitae vt $\frac{32}{225}$ ad $\frac{8}{45}$ seu vt 4 ad 5. Ergo haec ratio, quod notari meretur, eadem est cum ratione quam inuenimus inter velocitates puncti medii pro vtroque motu seorsim sumto. Quod si igitur integra vis viua, quam lamina vtroque suo motu a percussione accepit, dicatur A, erit vis viua soli motui progressiuo debita tantum $\frac{4}{9}$ A ipsaque velocitas huius motus erit $\frac{2}{3}$ eius velocitatis quam leges communiter

receptae

receptae indicant. Haec omnia vero propemodum eadem erunt ſi loco curuaturae parabolicae ea ſubſtituatur, quam lamina motu ſuo vibratorio naturaliter aſſumit. Reliquae interim $\frac{5}{9}$ partes vis viuae totalis in motum vibratorium formandum ipſamque ſimul laminam incuruandam impenduntur.

§. 13. Statim itaque a percuſſione, ſingula laminae elementa determinata velocitate vibrationes ſuas incipiunt; punctum autem medium laminae maximas facit excurſiones, haeque excurſiones tanto erunt maiores quanto flexibilior eſt lamina; attamen omnes quas allegauimus, proportiones eaedem manent: ſolutio huius paradoxi in hoc poſita videtur, quod creſcente laminae flexibilitate tempus vnius vibrationis ſimul creſcat, ſic vt tempore vnius vibrationis ſpatium a centro grauitatis vniformiter deſcriptum nihilo minus conſtanter eandem proportionem habere poſſit ad integram amplitudinem cuiusvis vibrationis. Ita et longitudo laminae percuſſae calculos quos fecimus minime perturbat. Quodſi integra excurſio vel amplitudo vibratoria pro puncto medio laminae dicatur $\mathfrak{E}$, erit ſpatium a centro grauitatis vniformiter deſcriptum, dum vna abſoluitur vibratio, aequale $\frac{4}{5}\pi\,\mathfrak{E}$, intelligendo per π quadrantem circuli, cuius radius vnitate exprimitur, Sunt itaque ſpatiia vtroque motu deſcripta ſibi conſtanter proportionalia, quaecunque ſit laminae longitudo, qualiscunque ipſi inſit ſiue flexibilitas ſiue rigiditas et quaecunque fuerit percuſſionis intenſitas

 modo

modo vibrationes pro valde paruis haberi poſſint. Si lamina vel infinite rigida ſupponatur, ita vt nullam admittere inflexionem, videri poſſit, adhucdum ſaluae manebunt concluſiones noſtrae; arctiſſimo enim vinculo cum adhibitis hypotheſibus cohaerent. Quomodocunque experimentum inſtituatur, non puto vnquam futurum vt lamina percuſſa motu ſuo progreſſiuo vim viuam oſtendat plusquam dimidiam eius quam regulae communes indicant: imo ſi curuatura laminae reuera parabolica accurate conueniret, foret eius vis viua pro ſolo motu progreſſiuo tantum $\frac{4}{9}$ vis viuae totalis.

§. 14. Apparet ergo, quam longe abſit vt in huiusmodi laminis motus progreſſiuus a percuſſione oriatur, qualis in corporibus elaſticis vulgo ſtatuitur. Nec dubito quin etiam in corporibus elaſticis communiter adhibitis, veluti in corporibus ſphaericis, pars notabilis vis viuae a percuſſione ratione motuum progreſſiuorum pereat, quae in motum tremulum partium, corpora conſtituentium, tranſiuerit: hic enim motus tremulus etiamnum poſt finitam percuſſionem corporibus inhaerebit. Cum res ita ſe habeat in laminis vtcunque breuibus, quidni etiam in globis etiamſi perfecte elaſticis: experimenta diminutionem aliquantulam virium viuarum manifeſtant; diminutio autem male, mea quidem ſententia elaſticitatis defectui adſcribitur. Vel ſolus ſonus, qui a percuſſione in globis excitatur, vibrationes prodit, quarum motus minime negligi poſſe exiſtimo: at deter-

determinatio vibrationum, poſt percuſſionem in globis aliiſue huiusmodi corporibus ſuperſtitum, erit longe difficillima. Nec in ipſis, quas pertractauimus, laminis totum negotium omni, qui deſiderari poſſit, rigore geometrico confectum fuiſſe contendo.

§. 15. Suppoſuimus ſupra curuam $\alpha\,\gamma\,\beta$ eſſe parabolam loco illius curuae quam lamina, vibrationes faciens, format; haec vtique ſuppoſitio non aliter quam proxime vera accipienda eſt, facile autem admitti poſſe apparebit, ſi quaeratur punctum e in quo linea $f\,g$, per centrum grauitatis parabolae $\alpha\,\gamma\,\beta$ tranſiens, ab ipſa hac curua interſecatur: ſcilicet inuenimus $\gamma o = \frac{1}{3}\alpha$ et quia parameter parabolae poſita fuit $= \frac{ll}{\alpha}$, fit ab vtraque parte $oe = l\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{57}{100}\,l$. In diſquiſitionibus autem noſtris, quas olim de vibrationibus et ſonis multifariis laminarum elaſticarum fecimus, determinata fuit haec diſtantia $o\,e = \frac{56}{100}\,l$, vnde videmus quam parum curua parabolica ab altera recedat. Caeterum ambo haec puncta e praerogatiua gaudent, quod ſolo motu vniformi progreſſiuo ferantur, quandoquidem ratione motus vibratorii quieta manent.

§ 16. Liceat pauca ſuperaddere verba de quaeſtione quae hiſce pagellis anſam dedit. Cum ſit per ſe clarum laminam a percuſſione propelli ſimulque, ob partium inertiam, in partes contrarias incuruari, in mentem venit quaeſtio vter motus prope ambas extremitates laminae praeualeret primo poſt percuſſionem

cuſſionem tempuſculo. Si praeualeat motus progreſſiuus in punctis extremis laminae, haec duo puncta motu ſuo initiali abſoluto antrorſum, ſi e contrario motus ab inflexione laminae oriundus excedat alterum, haec eadem puncta retrorſum moueri incipient. Si prius, lamina primo incuruationis momento, non interſecabit ſitum, quem ante percuſſionem habuerat: Si poſterius interſectio fiet, qualem ſiſtit figura noſtra, in qua curua $\alpha \gamma \beta$ ſecat rectam $a c b$ in duobus punctis t, t: perpendens quaeſtionem, dubius, quod fateor, aliquamdiu haeſi: mox tamen ad alteram inclinabam ſententiam: etiamſi non ſtatim appareat, qui fieri poſſit vt ſola inertia motum in partes contrarias, ad vtrumque latus ſimul, in lamina plane libera producat: haec porro mecum verſans, denique in mentem incidit theoria, quam nunc expoſui et in qua ſtare non ſum veritus. Haec vero theoria omnino indicat, extremitates laminae percuſſae primo impetu retrorſum ferri et ad vtrumque latus interſectionem fieri in punctis t, t. Solutio praeſentis quaeſtionis vnice petenda erat ex ratione quam calculus doceret exiſtere inter diſtantias γc et γp et vtra altera eſſet maior. Vidimus autem paragrapho vndecimo, quod poſita $\gamma p = \alpha$ fiat $\gamma c = \frac{3}{5} \alpha$. Igitur neceſſe eſt vt puncta a et b ſitu proximo perveniant in α et β: erit autem $c o$ ad $c p$ vt 2 ad 3.

§. 17. Denique intereſt, vt ipſa poſitio punctorum t definiatur, in quibus ſcilicet lamina

ſtatim

ſtatim a percuſſione interſecat ſitum, quem eadem lamina habuit ante percuſſionem. Quod ſi pro curua $\alpha\gamma\beta$ iterum accipiamus parabolam (§ 11.) inuenimus $\gamma c = \frac{3}{5}\alpha$, fiet ab vtroque latere $ct = l\sqrt{\frac{5}{9}}$ atque ta vel $tb = l - l\sqrt{\frac{5}{9}}$, vel proxime $ct = 0,77 l$ atque ta vel $tb = 0,23 l$; at vero pro curua vibratoria poni poteſt $ct = 0,76 l$ et ta vel $tb = 0,24 l$. Sic ſi fuerit, verbi gratia, lamina trium pedum atque adeo $l = 18$ pollicum, fiet quam proxime ta vel $tb = 4\frac{1}{5}$ poll. et $ct = 13\frac{4}{5}$ poll. Singula puncta in ct ab vtroque latere motu ſuo abſoluto ferentur in antecedentia at vero in ta vel tb motus abſolutus initialis fiet in conſequentia ſiue retrorſum: denique ambo puncta t, t ſtatim a percuſſione erunt veluti ſtationaria. Atque ſic videmus multa ineſſe argumento noſtro, quae non omnem reſpuant determinationem, modo congrua principia adhibeantur eaque magni momenti eſſe poſſe in actione mechanica, quae a percuſſione expectatur, explicanda; quicquid ſit de principiis, quae paullo liberius adoptaui, intelligimus ſaltem in diiudicandis percuſſionibus minime negligendum eſſe motum tremulum, qui in ſyſtemate orietur.

§. 18. Ne omnis methodo noſtrae denegetur fiducia experimenta aliqua ſuperaddam, quae vtcunque obiter inſtituta argumentum noſtrum non male confirmant atque illuſtrant. Norma vſus ſum tripedali, ex ligno duro, flexili, elaſtico conſtructa, recta, vniformi: latitudo eius erat 10 linearum, craſſities

 ſesqui-

ſesquilineae; hanc tabulae horizontali politae impoſui modo in ſuperficie gracili atque percuſſionem feci in ſuperficiem latam, modo in ſuperficie lata tuncque impetum faciebam in ſuperficiem gracilem: hanc normam percuſſi ſemper accurate in centro grauitatis, quod aliquantillum a medio diſtabat, eo modo quo globi eburnei in ludo, qui *billard* vocatur percutiuntur extremitate acutiori clauae ligneae (*la queue*); impulſum feci modo fortiorem modo debiliorem.

Experimentum 1. Laminam vel normam gracili ſua ſuperficie tabulae impoſui atque a tergo vtrique extremitati globulum leuiuſculum appoſui tumque normam eo quo dixi modo percuſſi ſaepius antrorſum; ſemper autem contigit, vt vterque globulus retrorſum, ipſa vero lamina antrorſum, impetum facerent pro intenſitate percuſſionis. conf. §. 16.

Experimentum 2. Globulum vtrumque remoui ab extremitate normae verſus medium, primo ad diſtantiam vnius, deinde duorum, trium, quatuor pollicum; attamen globuli normae contigui ponebantur; ſemper a percuſſione ambo globuli retrorſum ferebantur. Repercuſſio autem manifeſte fiebat tanto debilior, quanto magis globuli ab extremitate fuerunt remoti.

Experimentum 3. Similis fuit euentus, cum globuli, non ad laminam contigui, ſed tantillo interteruallo ab illa ponerentur: hoc interuallum prope extremitates laminae feci aliquando quatuor linearum et adhuc vterque globulus repellebatur; In locis autem ab extremitatibus remotioribus, minori interuallo ponendi erant globuli conf. fig. 2.

Experimentum 4. Cum globulus vterque vltra diſtantiam $4\frac{1}{3}$ poll. ab extremitate normae eſſet poſitus, etiamſi eſſent laminae tantum non contigui, nullam porro repercuſſionem patiebantur conf. §. 17. at vero cum globuli plane contingerent normam nec multum vltra $4\frac{1}{3}$ poll. ab extremitatibus laminae diſtarent, euenit aliquando vt repellerentur; id vero an eueniret nec ne? dubium erat: repulſionem hanc minimis vibratiunculis, quae aliquando in partibus laminae contingunt, diuerſis a vibrationibus primi ordinis maxime conſpicuis tribuo. conf. §. 10.

Experimentum 5. Eandem normam ſuperficie ſua latiori tabulae impoſui atque latus gracile percuſſi; tunc autem virgae rigiditas ſupra modum aucta erat; nec enim absque magno conatu illam tantillum inflectere poteram in plano latitudinis, cum antea facile in plano craſſitiei inflecteretur. Nihilominus percuſſio facta eſt in globulis, cum prope extremitates virgae eidemque contigui eſſent poſiti. Imo parem habui ſucceſſum in norma ſex tantum pollices longa, vnum pollicem lata atque duas lineas cum dimidia craſſa; ex ligno duriſſimo facta, cum eius ſuperficiem latiorem percuterem. Exinde

 intelli-

intelligitur nec auctam laminae rigiditatem nec diminutam longitudinem theoriam euertere atque omnia corpora elastica, in quibus a percussione motus excitatur tremulus, huc pertinere. conf. §. §. 13 et 14.

De ipsis velocitatibus, quas laminae elasticae aliaue corpora elastica a percussione impetrant, nondum feci periculum.

GENVINA

GENVINA PRINCIPIA DOCTRINAE DE STATV AEQVILIBRII ET MOTV CORPORVM TAM PERFECTE FLEXIBILIVM QVAM ELASTICORVM.

Auctore

L. EVLERO.

Quae adhuc de figura corporum flexibilium et elasticorum a Geometris in medium sunt allata, non latius quam ad fila simplicia sunt extendenda, in quorum figuram, quam a viribus quibuscunque sollicitata accipiunt est inquisitum, siue ea fila sint perfecte flexibilia, siue rigore quodam seu elasticitate inflexioni resistant. Quae enim passim de curuatura lintei et velorum tradita reperiuntur, eatenus tantum admitti possunt, quatenus has figuras ad curuaturam fili simplicis referre licet. Quin etiam omnia, quae in hoc genere sunt explorata, ad curuas tantum in eodem plano formatas sunt restringenda: quare longissime adhuc sumus remoti a Theoria completa, cuius ope non solum superficierum, sed etiam corporum flexibilium figura definiri queat; atque haec Theoria etiamnunc tantopere abscondita videtur, vt ne prima quidem eius principia adhuc sint euoluta, neque etiam hoc loco meum inſtitutum permittit, vt talem laborem ſuſcipiam; ſed potius tantum fila ſimplicia ſiue perfecte flexibilia ſiue elaſtica, vti quidem adhuc a Geometris ſunt tractata accuratius ſum contemplaturus. Quum enim pleraeque ſolutiones, quae paſſim ſuper hoc argumento reperiuntur, vel ex principiis tantum particularibus vel ſaltem non ſatis claris et perſpicuis ſint deductae, operam dabo vt vera et generalia principia, quibus determinatio figurae huiusmodi corporum innititur ita dilucide exponam, vt non ſolum ſtatus aequilibrii, ſed etiam motus huiusmodi corporum inde inueſtigari queat.

Problema generale.

Si filum ſiue perfecte flexile ſiue elaſticum et in ſingulis punctis a viribus quibuscunque ſollicitatum ad ſtatum aequilibrii fuerit perductum; pro ſingulis eius elementis ſtatum ſiue tenſionis, ſiue inflexionis inueſtigare.

Solutio.

Tab. VII. Fig. 3. I. Referat hic curua A M B huiusmodi filum a viribus quibuscunque ſollicitatum, quod in aequilibrio reperiatur atque fixum ſit in terminis A et B, atque manifeſtum eſt in ſingulis huius fili punctis M dari certum tenſionis ſiue inflexionis ſtatum, quem inde intelligere licet, quod ſi hoc filum alicubi in M reſecetur, vtraque portio A M et B M extemplo longe aliam figuram ſit acceptura, vnde neceſſa-

neceſſario ſequitur in hoc puncto M, quamdiu ambae partes adhuc inter ſe ſunt coniunctae, dari quandam vim, quae illi ſeparationi aduerſetur, filumque in hoc ipſo ſtatu aequilibrii quem ſupponimus conſeruet.

II. Quo iſtam vim puncto M quaſi inhaerentem exploremus fingamus inferiorem partem A M reuera abſcindi et quaeramus eas vires, quas in puncto M applicari oportet, vt pars ſuperior B M in eodem plane ſtatu perſeueret; haec enim ipſa vis ante reciſionem in puncto M extitiſſe eſt intelligenda, atque ſi hanc vim pro ſingulis fili punctis determinauerimus, nullum eſt dubium quin verum ſtatum in quo ſingula elementa noſtri fili verſantur, perfecte cognoſcamus.

III. Ponamus hanc ipſam vim quam quaerimus, iam eſſe inuentam et puncto M reuera applicatam, ita vt reſecta portione A M, altera portio B M etiamnunc in priſtino ſtatu perſiſtat, atque primum obſeruo eandem hanc vim ad filum B M in ſtatuo ſuo retinendum requiri etiamſi in puncto quocunque C, filum ope claui vel vnci figeretur, ſiquidem haec operatio nihil in eius figura mutet, hocque etiam intelligendum eſt, ſi filum ſimul in pluribus punctis hoc modo figeretur; quare hoc etiam nunc locum habebit, ſi filum adeo in puncto proximo *m* figatur, nihilo enim minus in puncto M eadem adhuc vi opus erit, ad conſeruationem ſtatus

ſtatus ac ſi tota portio B M eſſet libera atque in ſolo puncto B fixa.

IV. At ſi filum B M in puncto m, vt modo diximus ope vncinulae figatur, ita vt nunc ſolum elementum M m liberum relinquatur, ei alias vires adplicare non licet, niſi quae id vel ex m auellere vel circa m inflectere conarentur, vnde iam manifeſtum eſt, ſi filum propoſitum fuerit perfecte flexile, in puncto M nullam vim inflectentem admitti poſſe, quoniam alioquin e veſtigio hoc elementum M m circa m inflecteretur adeoque non in ſuo ſtatu conſeruaretur. Hoc ergo caſu perfectae flexibilitatis, vis illa quam quaerimus in puncto M adplicanda neceſſario ſecundum ipſam directionem M m, ſollicitare debet, ſicque eius directio erit ipſa m M T.

V. At ſi filum noſtrum fuerit elaſticitate praeditum, tum ſola vis ſecundum tangentem M T non ſufficiet elemento M m in ſitu ſuo retinendo, ſiquidem in puncto m fuerit incuruatum, et quia incuruatio vim quandam inflectentem poſtulet, vtrum autem hic incuruatio detur ex tangente proxima $m\,t$ iudicari debet, idque ex angulo elementari T $m\,t$, quippe cui incuruatio cenſetur proportionalis, quare, ſi elaſticitas filo inſit, vis ea quam quaerimus non ſolum ſecundum tangentem M T erit directa, ſed etiam vis quaedam obliqua adeſſe debet, cuius momentum incuruationem in puncto m ſuſtinere valeat.

VI.

VI. His perpenſis intelligimus puncto M praeter vim tangentialem ſecundum M T, aliam inſuper applicatam concipi debere; quae ſit V P normalis ſcilicet ad tangentem M T. Hoc enim menti ita repraeſentare licet, quaſi elemento m M primo virga rigida m T eſſet annexa, tum vero illi in puncto V inſuper vis normalis V P applicata, ita vt vis illa quam quaerimus manifeſto reuocetur ad duas vires, quarum altera agat ſecundum tangentem M T, altera vero ad hanc ſit normalis in certo quodam puncto V.

VII. Vocemus igitur vim illam priorem, quae ſecundum directionem tangentis agit $=$ T, alteram vero huic normalem V P $=$ V, at pro eius applicatione interuallum M V $= v$, vbi notari oportet, ſi filum omni elaſticitate careat, ſeu perfecte ſit flexile, tum vim normalem V euaneſcere debere, neque propterea interuallum v in calculum ingredi, at ſi filum fuerit elaſticum, tum curuatura in puncto m, quae ex angulo elementari T $m\, t$ aeſtimatur, certum virium momentum poſtulabit, ex indole elateris definiendum, cui aequale eſſe debet momentum vis normalis V P, quod eſt V v, quoniam elementum M m eſt euaneſcens, ſicque ex natura fili propoſiti, momentum V v determinatur.

VIII. Conſtitutis his duabus viribus T et V cum interuallo v pro puncto M, transferamus ea ſecundum principia differentialium ad punctum proximum m, vocato elemento M $m = d\, s$, atque ducta tangente $m\,t$, vis ſecundum hanc tangentem $m\,t$ erit $= T + d\,T$ et vis normalis $v\,p = V + d\,V$, tum vero interuallum $m\,v = v + d\,v$. Hae ergo vires natura ſua ita ſunt comparatae, vt facta reciſione in puncto m portionem reliquam $B\,m$ in eodem ſtatu retineant, perinde ac duae priores vires T et V puncto M applicatae eundem effectum producunt, quem ante reciſionem portio A M in punctum M exeruerat.

IX. Quum igitur vires T et V reſpectu puncti M aequiualeant omnibus viribus, quibus portio A M in punctum M agit, ſimilique modo vires proximae $T + d\,T$ et $V + d\,V$, cunctis viribus portionis $A\,m$ aequiualeant; neceſſe eſt vt hae poſteriores aequiualeant prioribus vna cum viribus elementaribus ipſi elemento $M\,m$ applicatis, quoniam hoc aggregatum complectitur vires portioni fili A M et inſuper vires ipſi elemento $M\,m$ applicatas, quibus ſimul ſumtis, illae vires ſuis differentialibus auctae aequiualere debent. Quaecunque autem vires elementum $M\,m$ afficiant, eas per reſolutionem ſemper ad duas reuocare licet, quarum altera agat ſecundum directionem $M\,m$, altera vero huic ſit normalis, ſecundum $m\,r$ et quia hae vires, caeteris paribus ipſi elemento $M\,m = d\,s$ ſunt proportionales, ponamus vim tangentialem ſecundum $M\,m = p\,d\,s$ et vim normalem ſecundum $m\,r = q\,d\,s$, perinde enim eſt in quonam huius elementi puncto, ſiue m ſiue M haec poſterior vis applicetur; quibus poſitis vires illae T et V vna cum his elementaribus

$p\,d\,s$

$p\,d\,s$ et $q\,d\,s$, ſimul ſumtae aequiualere debent viribus ſequentibus $T + dT$ et $V + dV$; vnde inſignes relationes orientur, quas ſollicite inueſtigari oportet.

X. In hunc finem ante omnia angulus elementaris $T\,m\,t$ in calculum introduci debet, qui ſi vocetur $= d\Phi$, et radius oſculi curuae in puncto $m = r$, conſtat eſſe $d\Phi = \frac{ds}{r}$, ita vt hic angulus ex curuatura innoteſcat. Nunc conſideremus primo vim tangentialem ſecundum $m\,t$ quae eſt $= T + dT$, et reſoluta ſecundum directiones $m\,T$ et $M\,R$, dat pro directione $M\,T = (T + dT)\,\text{coſ.}\,d\Phi = T + dT$ et ſecundum directionem $m\,R = (T + dT)\,\text{ſin.}\,d\Phi = T\,d\Phi + dT\,d\Phi$. Altera autem vis $vp = V + dV$ ad directionem $m\,T$ applicata, ſeu puncto applicationis in u translato, manente eadem vi $up = V + dV$, dabit $m\,u = m\,v = v + dv$, et haec vis ſecundum directionem $u\,T$ et ad eam normalem $u\,s$ reſoluta, dat vim ſecundum $u\,T = (V + dV)\,\text{ſin.}\,d\Phi = (V + dV)\,d\Phi$, et vim ſec: $u\,s = V + dV$, ſicque ambae illae vires $T + dT$ et $V + dV$, nunc reductae ſunt ad vires:

I°. vim ſec. $MT = T + dT$ et II. ſec. $mR = Td\Phi + dTd\Phi$

III. ſec. $uT = (V + dV)d\Phi$ et IV. ſec. $us = V + dV$.

XI. Hae igitur quatuor vires aequiualere debent, his quatuor viribus iunctim ſumtis:

I°. ſec. $MT = T$ II°. ſec. $VP = V$,

III°. vi elementari ſec. $mM = pds$ et IV°. ſec. $mr = qds$

 quare

quare hinc primo tangentiales ſecundum m T agentes, ſeorſim inter ſe debent aequari, vnde naſcitur haec aequatio:

$$T + dT + V d\Phi + dV . d\Phi = T + p ds,$$

ex qua concluditur

$$dT + V d\Phi = p ds.$$

Secundo vires normales quatenus in eandem partem tendunt, ſeorſim debent eſſe aequales, vnde fit

$$-(T + dT) d\Phi + dV = V + q ds \text{ hincque}$$
$$dV - T d\Phi = q ds.$$

Tertio vero inſuper requiritur, vt etiam momenta virium normalium, inter ſe conueniant, ſumtis igitur momentis reſpectu puncti m, prodit haec aequatio:

$$-(T + dT) d\Phi . o + (V + dV)(v + dv) = V(v + ds) + q ds . o$$

vnde concluditur

$$v dV + V dv = V ds, \text{ ſiue } d . Vv = V ds$$

atque his tribus aequationibus omnia continentur, quae ad problematis noſtri ſolutionem pertinent.

XII. Hoc iam problemate reſoluto, facile omnes caſus quomodocunque vires ſollicitantes fuerint comparatae, dummodo in idem planum cadant expedite euolui poterunt, id quod pro duobus caſibus principalibus quorum prior continet fila perfecte flexibilia, alter vero aequabiliter elaſtica, diſtincte explicemus.

Caſus

Casus Primus pro filis perfecte flexibilibus.

Iam obseruauimus hoc casu vires normales V euanescere debere, quo pacto tertia aequatio inuenta sponte disparet, duae priores vero nobis suppeditant has aequationes:

$$\text{I. } dT = p\,ds \quad \text{et II. } -T\,d\Phi = q\,ds$$

quibus omnes curuae, quas fila perfecte flexibilia induere possunt a quibuscunque viribus in eodem plano fuerint sollicitata, facili calculo inuestigari possunt; id quod deinceps aliquot exemplis illustrabimus. Ceterum hic obseruasse iuuabit, si tensio eliminetur, ob $T = \int p\,ds$ et $T = -\frac{q\,ds}{d\Phi}$ obtineri hanc aequationem $d\Phi = -\frac{q\,ds}{\int p\,ds}$, quae tantum quantitates cognitas seu datas complectitur, quia vires p et q quouis casu praescribuntur.

Casus Secundus pro filis vniformiter elasticis.

XIII. Assumimus hic filum in singulis punctis pari elasticitatis gradu esse praeditum et in statu naturali situm rectum tenere, siue in lineam rectam esse extensum, vbique igitur ipsa elasticitas, proportionalis erit curuaturae directe siue radio osculi reciproce, ita vt momentum ad angulum $d\Phi$ requisitum, proportionale sit formulae $\frac{d\Phi}{ds}$, quare si hoc momentum per $A.\frac{d\Phi}{ds}$ exprimamus, ita vt A

 denotet

denotet certam quantitatem conſtantem, ante omnia debebit eſſe $V v = A. \frac{d \Phi}{d s}$ cum qua aequatione inſuper tres illas inuentas coniungi oportet, quae ſunt I°. $d T + V d \Phi = p d s$; II°. $d V - T d \Phi = q d s$; III°. $d. V v = V d s$

ex qua vltima aequatione, ſtatim concluditur

$$A d. \frac{d \Phi}{d s} = V d s,$$

vnde ſi elementum $d s$ conſtans ſumatur, elicitur $V = \frac{A d d \Phi}{d s^2}$, hincque porro $v = \frac{d s d \Phi}{d d \Phi}$, qui valores in aequatione I. ſubſtituti praebent

$$d T = p d s - \frac{A d \Phi d d \Phi}{d s^2},$$

ideoque integrando

$$T = \int p d s - \frac{A d \Phi^2}{2 d s^2},$$

aequatio vero II. dat

$$T = \frac{A d^3 \Phi}{d \Phi d s^2} - \frac{q d s}{d \Phi},$$

qui duo valores inuicem aequati aequationem ſuppeditant pro curua quaeſita, quae erit

$$\frac{2 A d^3 \Phi + A d \Phi^3}{d s^2} = 2 d \Phi \int p d s + 2 q d s$$

vbi notaſſe iuuabit angulum elementarem $d \Phi$, implicare differentialia ſecundi gradus vnde terminus $d^3 \Phi$ ad differentialia quarti gradus aſſurget.

XIV. His duobus praecipuis caſibus expeditis, non difficile erit ſolutionem noſtram etiam ad alios caſus accommodare, vbi filum vel ob diuerſam craſſitiem, vel diuerſam materiem non vbique eſt aeque

que elaſticum, vel etiam vbi in ſtatu ſuo naturali non ſitum rectum tenet, ſed ſecundum curuam quamcunque datam ſit formatum, quocirca adhuc duos caſus ſequentes adiungamus.

Caſus Tertius pro filis inaequaliter elaſticis.

XV. Talis inaequalitas ſcilicet locum habere poteſt, ſi vel ipſum filum non vbique ſit aeque craſſum etiamſi ex eadem conſtet materia, vel ſi adeo ex diuerſis materiis fuerit compoſitum, hoc igitur caſu elaſticitas in ſingulis punctis, non ſimpliciter formulae $\frac{d\Phi}{ds}$ erit proportionalis, ſed praeterea a functione quadam pendebit, ad punctum quoduis M pertinente, vnde manifeſtum eſt hanc functionem per ipſam portionem fili A M $= s$, determinari debere, ſit igitur S iſta functio elaſticitatem abſolutam definiens, atque loco conſtantis illius A, caſu praecedente hic ſcribi oportebit S, ſicque tota ſolutio ſequenti modo ſe habebit: Ante omnia debet eſſe $\mathrm{V}v = \frac{\mathrm{S}\,d\Phi}{ds}$, cui inſuper vt ante adiungi conuenit has tres:

I. $d\mathrm{T}+\mathrm{V}d\Phi=p\,ds$; II. $d\mathrm{V}-\mathrm{T}d\Phi=q\,ds$; III. $d.\,\mathrm{V}v=\mathrm{V}ds$

ex vltima aequatione ſtatim concluditur

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{S}\,dd\Phi + d\mathrm{S}\,d\Phi}{ds^2},$$

poſito elemento ds conſtante, hincque viciſſim

$$v = \frac{\mathrm{S}\,d\Phi\,ds}{\mathrm{S}\,dd\Phi + d\mathrm{S}.\,d\Phi},$$

qui

qui valores in aequatione I^a. ſubſtituti dant

$$dT = p\,ds - \frac{(s\,d\Phi\,dd\Phi + ds\,d\Phi^2)}{ds^2},$$

quam formulam autem nunc integrare non licet, etiamſi integrale $\int p\,ds$ concederetur. Ex II. autem colligimus

$$T = \frac{s\,d^3\Phi + 2\,ds\,dd\Phi + dds\,d\Phi}{ds^2 .\, d\Phi} - \frac{q\,ds}{d\Phi},$$

nunc igitur huius valoris differentiale priori aequari deberet, vt aequatio inter elementa curuae obtineatur, quem laborem autem hic in genere ſuſcipere ſuperfluum foret.

Caſus Quartus pro filis elaſticis, quae in ſtatu naturali curuaturam habent datam.

Tab. VII. Fig. 4. XVI. Hactenus aſſumſimus fila elaſtica, quorum curuaturam inueſtigauimus, ſtatu ſuo naturali in directum eſſe extenſa, nunc autem eiusmodi fila conſideremus, quae iam in ſtatu naturali certam quandam curuam exhibeant. Sit igitur figura 2, curua A M B ea figura, quam filum in ſtatu naturali tenet, quae quum ſit cognita, vocetur radius oſculi in puncto $M = r$ exiſtente arcu $A\,M = s$, ita vt r ſpectari poſſit tamquam functio ipſius s, cuius quippe natura, figurae naturalis indoles determinatur.

XVII. Quodſi nunc hoc filum a viribus quibuscunque ad figuram (Fig. 1.) A M B fuerit perductum,

ductum, atque in puncto m curuatura ad angulum elementarem $Tmt = d\Phi$ fuerit redacta, tum eatenus tantum virium momento opus erit ad hanc curuaturam producendam, quatenus formula $\frac{d\Phi}{ds}$ discrepat ab $\frac{1}{r}$, quam ob rem solutiones praecedentes ad hunc casum accomodabuntur, si modo in formula momentum elasticitatis exprimente loco $\frac{d\Phi}{ds}$, scribatur $\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r}$, sumamus autem hic elasticitatem absolutam per totum filum esse aequabilem ita vt habeamus, hanc formulam: $Vv = A\left(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r}\right)$: cum qua tres reliquas aequationes coniungi oportet.

XVIII. Quoniam igitur $Vv = A\left(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r}\right)$ ex tertia aequatione statim colligimus, sumto elemento ds constante:

$$V = A\left(\frac{dd\Phi}{ds^2} + \frac{dr}{r^2 ds}\right) \text{ et } v = \frac{r\,ds(r\,d\Phi - ds)}{r^2\,dd\Phi - ds.\,dr}.$$

Inuento autem valore V, I^{ma} aequatio praebet: $dT = p\,ds - V\,d\Phi$, secunda vero $T = \frac{dV - q\,ds}{d\Phi}$, ex quorum valorum comparatione, determinatio curuae est petenda.

XIX. Quodsi filum in statu naturali secundum arcum circularem fuerit incuruatum, vt sit r quantitas constans, ponatur $r = a$ atque ex praecedentibus formulis nanciscemur:

$$V = A\frac{dd\Phi}{ds^2};\ v = \frac{a\,d\Phi\,ds - ds^2}{a\,dd\Phi}$$

praeterea vero habebimus

$$dT = p\,ds - \frac{A\,d\Phi\,dd\Phi}{ds^2}, \text{ siue } T = \int p\,ds - \frac{A.\,d\Phi^2}{2\,ds^2}$$

at vero eſt ex II^a.

$$T = \frac{dV - q\,ds}{d\,\Phi} = \frac{A\,d^3\,\Phi - q\,d\,s^3}{d\,s^2 . d\,\Phi},$$

vnde patet aequationem finalem non inuoluere quantitatem a eamque demum in integrationibus in calculum introduci debere, quatenus ea ſcilicet in momento V v occurrit, quippe quod momentum in extremitatibus fili eſt ſpectandum.

Applicatio ad caſus particulares.

XX. Vires ſollicitantes, quaecunque demum fuerint, hactenus ita ſumus contemplati, vt ſingulis fili elementis $Mm = ds$, duas aſſignauerimus vires, alteram ſecundum directionem tangentis m M T $= p\,d\,s$, alteram vero ſecundum directionem normalem $m\,r = q\,d\,s$, quaecunque enim aliae vires elementares in hoc elementum agant, eas ſemper ad has duas directiones reuocare licet, quandoquidem hic tantum curuas in eodem plano formates conſideramus, ideoque vires extra hoc planum tendentas excludimus.

XIX. Nunc demum curuas in quarum inueſtigatione verſamur ad certas coordinatas reuocemus quae ſint A X $= x$ et X M $= y$, earumque differentialia X x = M $n = d\,x$ et $m\,n = d\,y$, ita vt ſit $d\,s = \surd(d\,x^2 + d\,y^2)$. Nunc vero etiam perſpicuum eſt, ſi vocemus angulum X M T $= \Phi$, tum proditurum eſſe angulum elementarem T $m\,t = d\,\Phi$ omnino vti ſupra aſſumſimus, hinc ergo erit ſin. $\Phi = \frac{d\,x}{d\,s}$ et coſ. $\Phi = \frac{d\,y}{d\,s}$, ſiue viciſſim $dx = d\,s$. ſin. Φ et $d\,y = d\,s$ coſ. Φ.

XXII.

XXII. Quodſi iam omnes vires, quae in elementum Mm agunt reductae ſint ſecundum directiones fixas coordinatarum, quarum vna ſollicitans in directione X A ſit $= P\,ds$, altera vero in directione $MX = Q\,ds$ ex his duabus viribus, naſcetur vis tangentialis, ſecundum directionem MT

$$=(P.\,\text{ſin.}\,\Phi + Q\,\text{coſ.}\,\Phi)\,ds = p\,ds,$$

ita vt ſit $p = P\,\text{ſin.}\,\Phi + Q\,\text{coſ.}\,\Phi$, vis autem normalis inde nata ſecundum $m\,r$

$$=(Q\,\text{ſin.}\,\Phi - P\,\text{coſ.}\,\Phi)\,ds = q\,ds$$

ita vt ſit $q = Q\,\text{ſin.}\,\Phi - P\,\text{coſ.}\,\Phi$, his igitur notatis exempla quaedam illuſtriora, noſtra methodo euolvamus.

Problema I.

Si filum fuerit perfecte flexile, et per totam longitudinem aequaliter craſſum, inuenire curuam, quam hoc filum, ex duobus punctis ſuſpenſum et a ſola grauitate ſollicitatum, formabit, ſiue inuenire curuam catenariam.

Solutio.

XXIII. Statuatur hic axis AX verticalis ſurſum directus, vt applicata $XM = y$, fiat horizontalis, hic igitur ſola vis P in computum venit, exiſtente $Q = 0$, quae quum ſit vis grauitatis et filum vbique ſit aequabile, ſi eius portionis cuius longitudo $= b$, pondus vocetur B, tum portionis ſeu arcus Tab. VII. Fig. 5.

 AM

$A M = s$ pondus erit $\frac{sB}{b}$, ideoque pondus elementi $M m$ erit $\frac{B ds}{b}$, cui aequari debet vis illa $P ds$, fit autem breuitatis gratia $\frac{B}{b} = \beta$, vt fiat $P = \beta$, atque ob $q = 0$ habebimus $p = \beta \sin. \Phi$, $q = - \beta \cos. \Phi$ ideoque $p ds = \beta dx$ et $q ds = - \beta dy$. Quoniam hoc problema ad primum casum pertinet, habebimus sequentes formulas:

$$\text{I. } dT = \beta dx \quad \text{et II. } + T d\Phi = \beta dy.$$

Ex priore fit $T = \beta x + C$, ideoque hinc pro curua colligimus $\beta x d\Phi + C d\Phi = \beta dy$ ad hanc aequationem resoluendam ponamus statim $dy = u dx$, fietque $ds = dx \sqrt{(1 + uu)}$, hinc $\sin. \Phi = \frac{1}{\sqrt{(1+uu)}}$ et $\cos. \Phi = \frac{u}{\sqrt{(1+uu)}}$: vnde elicitur $d\Phi = \frac{-du}{1+uu}$, quo valore substituto aequatio nostra erit $\frac{-du(\beta x + C)}{1+uu} = \beta u dx$; ideoque $\frac{\beta dx}{\beta x + C} = \frac{-du}{u(1+uu)} = \frac{-du}{u} + \frac{u du}{1+uu}$, vnde integrando consequimur $\text{Log.} (\beta x + C) = L \frac{\sqrt{(1+uu)}}{u} + L. D$, seu $\beta x + C = D \frac{\sqrt{(1+uu)}}{u}$, vnde $u = \frac{D}{\sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}} = \frac{dy}{dx}$, hincque $dy = \frac{D dx}{\sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}}$, quae est aequatio differerentialis inter coordinatas x et y pro catenaria, cuius constructio pendet vti constat a logarithmis, siquidem hinc fit $\frac{\beta y}{D} = L. \frac{\beta x + C + \sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}}{\varepsilon}$ praeterea vero notasse iuuabit, hinc fore

$$ds = \frac{(\beta x + C) dx}{\sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}}$$

ita vt fit $D ds = (\beta x + C) dy$, inde vero integrando colligimus $\beta s = \sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)} + E$ vbi βs denotat ipsum pondus arcus $A M = s$.

XXIV.

XXIV. Inuenta hac aequatione generali consideremus etiam ipsam illam vim T, quae tensionem elementi Mm exhibet, quae vis ex praecedentibus erit $\beta x + C$, ita vt in eo loco vbi $x = 0$, haec tensio fiat $= C$, et quo altius filum ascendit eo fortior euadit eius tensio Quo nunc constantes propius definiamus, sumamus primo initium abscissarum in ipso puncto A, vbi ipsa curua axem secat, ita vt fiat $x = 0$, $y = 0$ quin etiam $s = 0$. Hinc consequimur

$$\frac{\beta y}{D} = L.\frac{\beta x + C + \surd((\beta x + C)^2 - DD)}{C + \surd(CC - DD)} \text{ et}$$

$$\beta s = \surd((\beta x + C)^2 - DD) - \surd(CC - DD)$$

Si praeterea verticem A ibi constituamus, vbi tangens curuae fit horizontalis, vt sumto $x = 0$ fit $\frac{dy}{dx} = \infty$ ideoque $D = C$, seu $dy = \frac{C\,dx}{\surd(2C\beta x + \beta\beta xx)}$, quae si ponamus $C = \beta a$, abit in $dy = \frac{a\,dx}{\surd(2ax + xx)}$, vnde fit $y = a\,L\frac{x + a + \surd(2ax + xx)}{a}$, et arcus A M $= s = \surd(2ax + xx)$ ita vt sit $dy = \frac{a\,dx}{s}$, siue $dy : dx :: a : s$, tum vero erit tensio in puncto imo A $= \beta a$, tensio vero in puncto M $= \beta(x + a)$.

XXV. Hinc si funis aequabilis in duobus punctis aeque altis M et N, fuerit fixus et pondere suo curuam M A N induerit, pro eius figura autem dentur primo sagitta seu profunditas A X $= x$, deinde vero etiam dimidia longitudo totius funis A M $= s$, cuius pondus sit βs, hinc omnia, quae huc pertinent poterunt determinari. Primo autem Tab. VII. Fig. 6.

 reperi-

reperitur $a = \frac{ss - xx}{2x}$ vnde ſtatim innoteſcit diſtantia horizontalis

$$XM = XN = y = \frac{ss - xx}{2x} L \frac{s + x}{s - x}.$$

Tertio anguli quo funis in punctis M et N ad horizontem inclinatur tangens ſeu Tang. A M X = Tang. A N X $= \frac{2sx}{ss - xx}$ hincque Tang. $\frac{1}{2}\Phi = \frac{x}{s}$. Denique vero tenſio in imo puncto A erit $\beta\frac{(ss - xx)}{2x}$; tenſio vero in punctis ſupremis M et N prodit $\beta\frac{(ss + xx)}{2x}$ vnde patet, quo minor fuerit profunditas A X $= x$ pro eadem funis longitudine, eo maiorem requiri tenſionem in punctis M et N ita vt funis prorſus in directum extendi nequeat, niſi a vi infinita, vbi notaſſe iuuabit ſi altitudo x fuerit valde exigua reſpectu arcus s, tum ob

$$L \frac{x + s}{x - s} = \frac{2x}{s} + \frac{2x^3}{3s^3} + \frac{2x^5}{5s^5} \text{ etc. fore}$$

$$MX = y = s - \frac{2xx}{3s} - \frac{2x^4}{3.5.s^3}.$$

Problema Secundum.

Si filum perfecte flexile et aequaliter craſſum, vento exponatur, definire curuam, quae ipſi a vi venti inducetur, mentem abſtrahendo a grauitate ipſius fili, ſiue inueſtigare curuam velariam.

Solutio.

Tab. VII. Fig. 7. XXVI. Statuatur axis A X horizontalis, vt directio venti V M ipſi fiat parallela, ſitque A M curua quaeſita, in cuius elementum M m ventus

ferit

ferit ſub angulo $VMm = 90^\circ - \Phi$. Ponatur k altitudo celeritati venti debita atque conſtat eius vim in datam baſin ds aequalem fore ponderi columnae aereae, cuius baſis ſit $= ds$, altitudo vero $= k \operatorname{coſ.} \Phi^2$, quicquid autem ſit quoniam hic de vi abſoluta non ſumus ſolliciti, ſufficit noſſe hanc vim eſſe proportionalem formulae $ds. \operatorname{coſ.} \Phi^2$, quoniam igitur haec vis normalis eſt in ipſam curuam, inde nulla naſcitur tangentialis eritque $p\,ds = 0$, atque ipſa iam dabit vim illam elementarem normalem, quia autem directionem habet contrariam ponamus $q\,ds = -\beta\,ds. \operatorname{coſ.} \Phi^2$.

XXVII. Quare quum hoc problema etiam ad caſum primum referatur habemus

I°. $dT = 0$; ideoque $T = C$, II°. vero $C d\Phi = \beta ds. \operatorname{coſ.} \Phi^2$

vnde colligitur haec aequatio $\frac{C\,d\,\Phi}{\operatorname{coſ.} \Phi^2} = \beta\,ds$, quae integrata praebet $C \operatorname{Tang.} \Phi = \beta s + D$, at vero eſt $\operatorname{Tang.} \Phi = \frac{dx}{dy}$, ita vt pro velaria habeatur iſta aequatio $\frac{C\,dx}{dy} = \beta s + D$. Vnde iam intelligitur hanc curuam non diſcrepare a praecedente funicularia, niſi quod hic axis AX ſit horizontalis, quum in caſu praecedente eſſet verticalis. Vt autem aequationem inter coordinatas eruamus, primam aequationem $\frac{C\,d\,\Phi}{\operatorname{coſ.} \Phi^2} = \beta\,ds$ multiplicemus per ſin. Φ, et quia $ds \operatorname{ſin.} \Phi = dx$ integratio dabit $\frac{C}{\operatorname{coſ.} \Phi} = \beta x + D$, vnde quum ſit $\operatorname{coſ.} \Phi = \frac{dy}{ds}$, habebimus hanc aequationem $C\,ds = dy(\beta x + D)$, hincque $dy = \frac{C\,dx}{\sqrt{((\beta x + D)^2 - CC)}}$ tum

tum vero erit $\beta s = \sqrt{((\beta x + D)^2 - CC)} + E$, prorſus vt in ſolutione praecedente, quocirca ſi axis AX quaſi per medium veli A tranſeat, vbi tangens curuae eſt verticalis, ſumi debebit $C = D$, ponatur autem porro $C = D = \beta a$, fietque pro hac curua

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax + xx)}};\ y = a\,L\,\frac{x + a + \sqrt{(2ax + xx)}}{a};$$

ipſe arcus $AM = s = \sqrt{(2ax + xx)}$ et tenſio in puncto $M = \beta a$, quae in omnibus punctis eſt eadem. Ceterum quae ſupra de catenaria obſeruauimus hic etiam locum habebunt.

Problema III.

Si filum aequabile, vbique fuerit aequaliter elaſticum atque adeo grauitatis expers, idque duabus viribus quibuscunque eius terminis A et B vtcunque applicatis incuruetur, naturam huius curuae AMB inueſtigare, ſiue naturam curuae elaſticae definire.

Solutio.

Tab. VII. Fig. 3. XXVIII. Quia praeter vires ipſis terminis A et B applicatas, nullas vires quae ſeorſim in ſingula elementa agunt admittimus, vires illae elementares $p\,ds$ et $q\,ds$ euaneſcunt, ideoque ex caſu ſecundo, quo hoc problema eſt referendum, ſequentem ſolutionem elicimus, ante omnia $Vv = \frac{A\,d\Phi}{ds}$ tum vero praeterea

I°. $dT + Vd\Phi = 0$; II°. $dV - Td\Phi = 0$; III°. $d.\,Vv = Vds$.

Ex

Ex tertia ſtatim colligimus ſumto elemento ds conſtante, $V = \frac{A\, dd\Phi}{ds^2}$, qui valor in I^{ma} et II^{da} ſubſtitutus praebet:

$$dT + \frac{A\, d\Phi\, dd\Phi}{ds^2} = 0; \quad T = \frac{A\, d^3\Phi}{d\Phi.\, ds^2}$$

prioris integrale manifeſto eſt

$T = B - \frac{A\, d\Phi^2}{2\, ds^2}$, ſicque eliminando T aſſequimur $\frac{2A\, d^3\Phi}{d\Phi} + A\, d\Phi^2 = 2B\, ds^2$, quae per $\frac{4\, d\Phi\, dd\Phi}{A}$ multiplicata praebet: $8\, dd\Phi\, d^3\Phi + 4\, d\Phi^3.\, dd\Phi = \frac{8B}{A}.\, ds^2.\, d\Phi\, dd\Phi$ cuius integrale eſt $4\, dd\Phi^2 + d\Phi^4 = \frac{4B}{A}.\, ds^2.\, d\Phi^2 + C\, ds^4$ vnde elicitur

$$dd\Phi = \surd\left(\frac{C}{4} ds^4 + \frac{B}{A} ds^2\, d\Phi^2 - \frac{1}{4} d\Phi^4\right).$$

Statuatur nunc $d\Phi = u\, ds$, vt obtineamus hanc aequationem:

$$du = ds \surd\left(\frac{C}{4} + \frac{B}{A}.uu - \frac{1}{4}u^4\right) \text{ ſiue } ds = \frac{du}{\surd\left(C + \frac{4B}{A}uu - u^4\right)}.$$

Verum hoc modo calculus fit nimis moleſtus, vnde ab initio eum multo commodius inſtituamus.

XXIX. Quoniam $p = 0$ et $q = 0$, ambae aequationes I et II quae ſunt $dT + V\, d\Phi = 0$; $dV - T\, d\Phi = 0$, tres tantum continent variabiles T, V et $d\Phi$ ex quibus eliminando $d\Phi$ elicimus $T\, dT + V\, dV = 0$, vnde fit $TT + VV = CC$ et $T = \surd(CC - VV)$, qui in ſecunda ſubſtitutus praebet $dV = d\Phi \surd(CC - VV)$, ſiue $d\Phi = \frac{dV}{\surd(CC - VV)}$, vnde denuo integrando, Ang. cui. ſin. $\frac{V}{C} = \Phi + D$

hincque $V = C$ ſin.$(\Phi + D)$ et $T = C$ coſ. $(\Phi + D)$. Quod hic ad angulum Φ attinet cuius differentiale tantum $d\Phi$ in noſtras formulas principales ingreditur eius determinatio pendet a certa quadam directione fixa, quae quum penitus arbitrio noſtro relinquatur ea ita capiatur vt fiat $D = 0$, ſicque iam adepti ſumus has duas formulas ſatis ſimplices $V = C$ ſin. Φ et $T = C$ coſ. Φ, his autem litteris binae illae vires exprimuntur, quibus ſtatus cuiusque elementi Mm definitur, quae ergo vbique ita ſunt comparatae vt ſit $TT + VV = CC$ ſiue vis illis aequiualens conſtans.

XXX. His inuentis iam ſupra vidimus ex tertia aequatione fieri $V = \frac{A\,dd\Phi}{ds^2} = C$ ſin. Φ, ſumto ds conſtante, quae per $2\,d\Phi$ multiplicata et integrata praebet: $\frac{A\,d\Phi^2}{ds^2} = B - 2C.\text{coſ.}\Phi$, hincque $\frac{d\Phi}{ds} = \sqrt{\left(\frac{B - 2C\,\text{coſ.}\Phi}{A}\right)}$, ſiue $ds = \frac{d\Phi\sqrt{A}}{\sqrt{(B - 2C.\,\text{coſ.}\Phi)}}$, quae aequatio duas tantum variabiles continet Φ et s, vbi s denotat arcum curuae AM a puncto quodam fixo computatum; angulus Φ vero exprimit amplitudinem huius arcus. Deinde poſſumus etiam radium oſculi curuae definire, qui ſi ponatur $= r$, ob $d\Phi = \frac{ds}{r}$, aequatio inuenta oſtendit fore $r = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{(B - 2C\,\text{coſ.}\Phi)}}$, vnde patet ſumto $\Phi = 0$, fieri radium oſculi $r = \sqrt{\frac{A}{B - 2C}}$.

XXXI. Hinc etiam facile poſſumus progredi ad coordinatas orthogonales, ſi enim axem AX ita ducamus vt fiat angulus $AMX = \Phi$, tum quia $dx = ds$ ſin. Φ, et $dy = ds$ coſ. Φ ſequentem habebimus aequationem:

$$dx = \frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi.\sqrt{A}}{\sqrt{(B - 2C.\,\text{coſ.}\Phi)}},$$

quae

quae aequatio integrata praebet

$$x = \frac{\sqrt{A(B - 2C\,cof.\,\Phi)}}{C} + \text{Conft.}$$

quare fi punctum A ibi affumimus vbi axis in curvam erit normalis, tum vtique arcus A M amplitudo erit aequalis Φ, at quia nunc amplitudine Φ euanefcente abfciffa x fit $= 0$, conftante poftrema debito determinata habebitur:

$$x = \frac{\sqrt{(A(B - 2C\,cof.\,\Phi)}}{C} - \frac{\sqrt{A(B - 2C)}}{C},$$

vnde colligimus

$$cof.\,\Phi = 1 - x\frac{\sqrt{A(B - 2C)}}{A} - \frac{C}{2A}.\,xx,$$

quo haec aequatio concinnior reddatur ftatuamus

$$cof.\,\Phi = 1 - \frac{x}{a} - \frac{nxx}{aa}$$

fietque

$$B = \frac{(4n + 1)A}{aa} \quad \text{et} \quad C = \frac{2nA}{aa},$$

ficque inuento angulo Φ per abfciffam x, ambae vires ftatim prodeunt

$$V = \frac{2nA}{aa}.\,fin.\,\Phi \quad \text{et} \quad T = \frac{2nA}{aa}.\,cof.\,\Phi.$$

XXXII. Deinde quia fupra habebamus:

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\sqrt{(B - 2C.\,cof.\,\Phi)}}{\sqrt{A}} \quad \text{erit} \quad \frac{d\Phi}{ds} = \frac{\sqrt{(4n + 1 - 4n\,cof.\,\Phi)}}{a},$$

hincque

$$Vv = \frac{A\sqrt{(4n + 1 - 4n\,cof.\,\Phi)}}{a}$$

ideoque

$$v = \frac{a\sqrt{(4n + 1 - 4n\,cof.\,\Phi)}}{2n\,fin.\,\Phi},$$

vnde vires quibus ſingula elementa afficiuntur nunc perfecte innoteſcunt. Denique quoniam

$$\text{coſ.}\,\Phi = \frac{dy}{ds} \quad \text{et} \quad \text{ſin.}\,\Phi = \frac{dx}{ds} \quad \text{erit} \quad dy = dx \cot \Phi,$$

vbi ſi loco coſ. Φ valor ſubſtituatur orietur

$$\frac{dy}{dx} = \frac{aa - ax - nxx}{\sqrt{(2a^3x + (2n-1)aaxx - 2nax^3 - n^2x^4)}}$$

ſicque inter coordinatas habebitur haec aequatio differentialis

$$dy = \frac{(aa - ax - nxx)\,dx}{\sqrt{(2a^3x + (2n-1)aaxx - 2nax^3 - n^2x^4)}}.$$

XXXIII. Quo autem clarius intelligatur, quam variae curuarum ſpecies hic locum inuenire poſſint, conſideretur illa aequatio inter amplitudinem Φ et radium oſculi r inuenta

$$r = \frac{a}{\sqrt{(4n + 1 - 4n\,\text{coſ.}\,\Phi)}},$$

vel quod eodem redit valor ſupra pro abſciſſa inventus

$$x = \frac{a\sqrt{(4n + 1 - 4n\,\text{coſ.}\,\Phi)}}{2n} - \frac{a}{2n}, \quad \text{ita vt ſit} \quad x = \frac{aa}{2nr} - \frac{a}{2n},$$

quam eximiam proprietatem omnibus elaſticis communem probe notari conuenit. Totum negotium ad formulam hanc irrationalem reducitur

$$\sqrt{(4n + 1 - 4n\,\text{coſ.}\,\Phi)} = \sqrt{(1 + 8n\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2)},$$

vbi imprimis ſpectandum eſt, an coefficiens $8n$, ſit poſitiuus an negatiuus, vel maior vel minor vnitate. Primum enim perſpicuum eſt, ſi $8n$ fuerit numerus poſitiuus puta $= m$, tum formulam $\sqrt{(1 + m\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2)}$ ſemper eſſe realem ideoque angulum Φ per omnes valores

valores crescere posse; sin autem fiat $8n = 0$, elasticam fore circulum ob $r = a$. Si autem $8n$ fuerit numerus negatiuus, duos casus considerari oportet alterum quo vnitate fit minus, alterum quo maius, priori casu quo $8n = -m$ et $m < 1$ formula $\sqrt{(1 - m \sin \frac{1}{2}\Phi^2)}$, etiam nunc per omnes valores ipsius Φ variari potest, id quod vsque ad valorem $m = 1$ valet, quo casu erit $r = a \cos. \frac{1}{2}\Phi$. Verum si denique fuerit $m > 1$, haec formula realis esse nequit, nisi $\sin. \frac{1}{2}\Phi^2$ fuerit $< \frac{1}{m}$, vnde amplitudo non vltra certum gradum augeri poterit, atque hinc sequentur omnes istae species elasticarum, quas euoluimus in Tractatu de Problemate Isoperimetrico.

XXXIV. Plura exempla circa aequilibrium huiusmodi filorum flexibilium et elasticorum, hic subiungere superfluum foret, quoniam hoc argumentum iam passim abunde tractatum reperitur. Hic enim id tantum nobis erat propositum, vt methodum facilem simulque aequabilem, quae ad omnia genera huiusmodi corporum extendatur, traderemus, hocque respectu nullum est dubium, quin haec methodus aliis quibus Geometrae sunt vsi, longe sit anteferenda, id quod imprimis ex altera parte huius dissertationis patebit, vbi ostendemus hanc methodum pari successu adeo ad motus huiusmodi corporum determinandos adhiberi posse.

Problema Generale Alterum.

Si filum siue perfecte flexile siue elasticum atque in singulis punctis a viribus quibuscunque sollicitatum vtcunque moueatur, principia exponere ex quibus hunc motum definire liceat, vbi quidem assumimus totum motum semper in eodem plano absolui, in quo ipsa fili figura versatur.

Solutio.

XXXV. Hic primo motum fili in genere considerari conuenit, ante quam necesse sit vires elementares quibus in singulis punctis sollicitatur, in computum introducere, id quod cum insigni calculi commodo fieri licet, ne statim ab initio multitudo quantitatum nimis augeatur. Constituta certa temporis epocha qua motum inchoasse assumimus, teneat filum elapso tempore $= t$ (quod in minutis secundis exprimi sumimus) situm in figura repraesentatum AMB, quem ad certum axem AD aliumue ipsi parallelum referimus, quoniam etiam fili punctum A, motu quocunque ferri potest, ita vt etiam punctum fili A, non amplius pro initio abscissarum haberi debet. Vocetur fili portio quaecunque $AM = s$ (vt ante, hoc tantum discrimine, quod nunc A non amplius sit punctum fixum) et ducta tangente MT, vocetur etiamnunc vt ante angulus $XMT = \Phi$ atque nunc manifestum est hunc angulum Φ non amplius tamquam functionem arcus s spectari posse, quoniam eidem arcui $AM = s$, diuersis temporibus, diuersi anguli Φ conueniunt, sed potius angulus Φ pro functione duarum variabilium s et t haberi debebit, quo ipso haec inuestigatio ad eam quasi nouam Analyseos partem in qua de functionibus duarum

Tab. VII. Fig. 3.

rum

rum variabilium tractatur erit referenda, atque hinc nunc facile intelligitur, quid per formulas $(\frac{d\Phi}{ds})$ et $(\frac{d\Phi}{dt})$ indicetur.

XXXVI. Interim tamen ex angulo Φ elementa coordinatarum dx et dy perinde vt ante exprimentur, ita vt ſit $dx = ds\,\text{ſin.}\,\Phi$ et $dy = ds\,\text{coſ.}\,\Phi$, vnde abſciſſa x a certo puncto fixo computata erit $\int ds\,\text{ſin.}\,\Phi$ et applicata $y = \int ds\,\text{coſ.}\,\Phi$, in quibus integralibus, ſola variabilitas arcus s ſpectatur. Hoc autem non obſtante, ipſae hae coordinatae x et y erunt functiones ambarum variabilium s et t, de quibus nouimus eſſe $(\frac{dx}{ds}) = \text{ſin.}\,\Phi$ et $(\frac{dy}{ds}) = \text{coſ.}\,\Phi$. Nunc autem inueſtigemus motum elementi $Mm = ds$, cuius maſſam ponamus $= \Sigma\,ds$, ita vt Σ ſit certa functio ſolius variabilis s, quam ſecundum binas directiones fixas coordinatarum reſoluamus, atque conſequemur eius celeritatem in directione $AX = (\frac{dx}{dt})$ et in directione $XM = (\frac{dy}{dt})$, quae denuo differentiatae pro ſolo t variabili dabunt accelerationes in directione $AX = (\frac{ddx}{dt^2})$ et in directione $XM = (\frac{ddy}{dt^2})$, quae ductae in maſſam elementi mouendi $\Sigma\,ds$ et diuiſae per $2g$ (denotante g altitudinem lapſus grauis, tempore vnius minuti ſecundi) dabunt vires requiſitas, quibus hoc elementum ſollicitari deberet, vt motum ſuppoſitum proſequeretur. Quocirca vt motus fili ita ſit comparatus, quemadmodum poſitiones noſtrae declarant, neceſſe eſt, vt ſingula eius elemen-

elementa $M\,m = d\,s$ praeſenti tempore a binis viribus ſollicitentur, quae ſunt

ſec. directionem $A\,X = \frac{\Sigma\,d\,s}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)$ et ſec. $X\,M = \frac{\Sigma\,d\,s}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)$.

XXXVII. Vires iſtae vocari ſolent, vires ad motum producendum immediate requiſitae, quas probe diſtingui oportet ab iis viribus, quibus ſingula elementa actu ſollicitantur; at quia filum tantum ab his poſterioribus reuera ſollicitatur, neceſſe eſt vt hae eundem effectum producant, quem illis viribus adſcripſimus, ſiue quod eodem redit neceſſe eſt, vt omnes vires requiſitae ſimul ſumtae aequivaleant viribus actualibus ſimul ſumtis. Ex quo ſequitur ſi vires illae requiſitae contrario modo applicarentur, eas cum actualibus in aequilibrio conſiſtere debere, ſiue tum ipſum filum, eo ſaltem momento in aequilibrio fore conſtitutum, hoc igitur modo, quaeſtionem de motu fili ad inueſtigationem aequilibrii feliciter perduximus.

XXXVIII. Vt igitur in hoc aequilibrium, ex quo ipſe motus fili innoteſcit, inquiramus; filo noſtro praeter vires illas $p\,d\,s$ et $q\,d\,s$, quibus immediate ſollicitatur, inſuper adiungamus *primo* vim in directione $X\,A = \frac{\Sigma\,d\,s}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)$; *deinde* in directione $M\,X = \frac{\Sigma\,d\,s}{2\,g}.\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)$, quandoquidem nunc certum eſt, filum tum futurum eſſe in aequilibrio; hunc in finem has vires poſteriores etiam ad directionem tangentis $M\,T$ et normalis $m\,r$ reducamus, atque hinc prodit vis

$$\text{ſec. } M\,T = \frac{\Sigma\,d\,s}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi + \frac{\Sigma\,d\,s}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)\text{coſ.}\,\Phi$$

at vero in directione $m\,r$

$$\frac{\Sigma\, d\,s}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)\text{fin.}\,\Phi - \frac{\Sigma\, d\,s}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)\text{cof.}\,\Phi$$

quo facto filum nunc ita confiderari debebit, quafi eius elementum $M\,m$ follicitaretur a duabus viribus, fequentibus:

$$\text{I}^\circ.\ \text{fec. } M\,T = p\,d\,s + \frac{\Sigma\, d\,s}{2\,g}\left(\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)\text{fin.}\,\Phi + \left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)\text{cof.}\,\Phi\right)$$

$$\text{II. fec. } m\,r = q\,d\,s + \frac{\Sigma\, d\,s}{2\,g}\left(\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)\text{fin.}\,\Phi - \left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)\text{cof.}\,\Phi\right)$$

quibus inuentis nunc tantum opus eft, vt iftae vires loco $p\,d\,s$ et $q\,d\,s$ in formulis noftris fupra inuentis fubftituantur, atque tum illae aequationes noftri problematis folutionem fuppeditabunt.

XXXIX. Quodfi vires illae $p\,d\,s$ et $q\,d\,s$ non immediate dentur, fed vt fupra oftendimus ex viribus elementaribus fecundum certas directiones agentibus deduci debeant, calculus fequenti modo fe habebit: ponamus igitur fili elementum $M\,m$ actu follicitari in directione $X\,A$ vi $P\,d\,s$ et in directione $M\,X$ vi $= Q\,d\,s$, atque nunc vires, quae mente faltem filo applicari debebunt, erunt

$$\text{I}^\circ.\ \text{vis. fec. } M\,T = d\,s\left(P + \frac{\Sigma}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)\right)\text{fin.}\,\Phi + d\,s\left(Q + \frac{\Sigma}{2\,g}\,\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)\text{cof.}\,\Phi$$

$$\text{II. vis. fec. } m\,r = d\,s\left(Q + \frac{\Sigma}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)\right)\text{fin.}\,\Phi - d\,s\left(P + \frac{\Sigma}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)\right)\text{cof.}\,\Phi$$

quas vt ante loco formularum $p\,d\,s$ et $q\,d\,s$ fubftitui oportet.

XL. Faciamus igitur hanc fubftitutionem, atque pro motu fili definiendo, habebimus fequentes quatuor aequationes:

$$\text{I.}\quad \left(\frac{dT}{ds}\right)+V\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)=\left(P+\frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\right)\text{fin.}\,\Phi+\left(Q+\frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\right)\text{cof.}\,\Phi$$

$$\text{II.}\quad \left(\frac{dV}{ds}\right)-T\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)=\left(Q+\frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\right)\text{fin}\;\Phi-\left(P+\frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\right)\text{cof.}\,\Phi$$

$$\text{III.}\; Vv=S\left(\frac{d\Phi}{dt}\right);\quad \text{IV.}\; \left(\frac{d.\,Vv}{ds}\right)=V.$$

Quoniam enim fupra omnes iftae quantitates V, T et Φ functiones erant folius variabilis s, hic autem vt functiones duarum variabilium s et t fpectari debent, fignandi modum per claufulas, more confueto introduci oportuit, tum vero notandum eft, hic litteram S exprimere elafticitatem abfolutam fili in puncto M, ideoque functionem effe ipfius S tantum. Quo autem clarius appareat, quomodo hae quatuor aequationes, folutionem problematis noftri fuppeditare queant, primo quidem perfpicuum eft determinationem incipi debere, a viribus T et V cum diftantia v, ex quibus etiam durante motu ad quoduis tempus, tenfio et ftatus cuiusque elementi cognofcitur, his autem tribus quantitatibus inuentis et fubftitutis exorietur vna aequatio has quidem quinque quantitates inuoluens, t, s, x, y et Φ quae autem ob has duas relationes cognitas:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)=\text{fin.}\,\Phi \quad\text{et}\quad \left(\frac{dy}{ds}\right)=\text{cof.}\,\Phi,$$

ad tres tantum reducuntur, quae fi fuerint s et t cum angulo Φ, haec aequatio natura fua declarat valorem anguli Φ, per binas variabiles s et t exprimendum, vnde pro quouis fili puncto M ad quoduis tempus t, angulus conueniens Φ determinatur, vnde deinceps ipfae coordinatae conftabunt, atque adeo figura totius fili ad quoduis tempus, hincque etiam ipſe motus eius patefiet.

XLI. Ex tertia et quarta aequatione eliminando diſtantiam v ſtatim colligimus

$$V = S\left(\frac{dd\Phi}{ds^2}\right) + \frac{dS}{ds}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$$

ita vt hoc valore ſubſtituto, iam tantum duas aequationes ſimus habituri ex quibus ſi vis T elidatur ſtatim obtinetur illa aequatio finalis principalis, cuius rationem modo explicauimus.

XLII. Quoniam praeter oſcillationes infinite paruas vix quicquam adhuc circa huiusmodi motus eſt inueſtigatum, neque etiam nunc Methodus patet tales formulas non parum intricatas tractandi, hinc ſaltem eas deducamus formulas ex quibus Geometrae motum cordarum vibrantium determinauerunt. Primo igitur filum perfecte flexile ſtatuatur, vnde ſtatim fit $V = 0$, deinde etiam vires elementares P et Q euaneſcant, poſtmodum quia tantum vibrationes infinite paruae ſunt conſiderandae, ſtatuamus applicatam y veluti infinite paruam prae s et x, vnde etiam erit $\frac{dy}{ds} = 0$, et $\frac{dx}{ds} = 1$, tum vero erit Φ quaſi rectus. Quibus notatis noſtrae duae aequationes erunt:

$$\text{I.}\quad \left(\frac{dT}{ds}\right) = \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\text{coſ.}\,\Phi$$

$$\text{II.}\quad + T\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\text{coſ.}\,\Phi - \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi.$$

 Ratione

Ratione prioris obſeruandum eſt, quia abſciſſa x ab ipſo arcu s non diſcrepare cenſetur, fore $(\frac{dx}{dt}) = 0$, atque $(\frac{ddx}{dt^2}) = 0$, deinde quia coſ. $\Phi = 0$, manifeſtum eſt fore $\frac{dT}{ds} = 0$, hincque vim T conſtantem ſiquidem etiam durante motu, tenſio fili eadem conſeruari ſupponitur. Pro altera aequatione, quia coſ $\Phi = (\frac{dy}{ds})$, hincque differentiando $-(\frac{d\Phi}{ds})$ ſin. $\Phi = (\frac{ddy}{ds^2})$ ſiue ob ſin. $\Phi = 1$, $(\frac{d\Phi}{ds}) = -(\frac{ddy}{ds^2})$; haec aequatio ob coſ. $\Phi = 0$, praebet ſtatim $T(\frac{ddy}{ds^2}) = \frac{\Sigma}{2g}(\frac{ddy}{dt^2})$, quae quia T eſt quantitas conſtans et Σ craſſitiem fili in puncto M exprimit, aequatio noſtra talem induet formam $A(\frac{ddy}{ds^2}) = \frac{\Sigma}{2g}(\frac{ddy}{dt^2})$, vbi A denotat tenſionem fili, atque haec eſt eadem aequatio, qua Auctores ſunt vſi in motu cordarum determinando.

XLIII. Deinde quae de inflexione laminarum elaſticarum ſunt tradita, etiam hinc peti poſſunt, quia enim vt ante vibrationes infinite paruae conſiderantur, erit iterum ſin. $\Phi = 1$, coſ. $\Phi = 0$, $(\frac{dx}{dt}) = 0$ et $(\frac{d\Phi}{ds}) = -(\frac{ddy}{ds^2})$; praeterea etiam vires elementares P et Q hinc excluduntur, vnde primo vim V ita habebimus expreſſam vt ſit:

$$V = -\frac{dS}{ds}(\frac{ddy}{ds^2}) - S(\frac{d^3y}{ds^3});$$

duae reliquae vero aequationes induent has formas

$$(\frac{dT}{ds}) - V(\frac{ddy}{ds^2}) = 0; \quad (\frac{dV}{ds}) + T(\frac{ddy}{ds^2}) = \frac{\Sigma}{2g}(\frac{ddy}{dt^2})$$

quae

quae ſi lamina elaſtica fuerit aequabilis, ideoque $S = A$, dabunt ſtatim $V = - A \left(\frac{d^3 y}{d s^3}\right)$, hincque $\left(\frac{d T}{d s}\right) = - A \left(\frac{d d y}{d s^2}\right)\left(\frac{d^3 y}{d s^3}\right)$, quae per $d s$ multiplicata et integrata dat $T = B - \frac{A}{2} \left(\frac{d d y}{d s^2}\right)^2$; vnde eliminando T ad aequationem peruenitur differentialem quarti gradus, quemadmodum etiam inuenerunt ii, qui hoc argumentum fuſius tractauerunt.

DE
ICTV GLANDIVM
CONTRA TABVLAM EXPLOSARVM.

Auctore

L. EVLERO.

Caſus primus, quo tabula eſt immobilis.

I.

Aſſumimus hic primo tabulam eſſe immobilem, quo Analyſis ex principiis motus petenda euadat facilior. Quod nunc ad glandem attinet, duae res potiſſimum conſiderandae veniunt, prima eſt eius celeritas, qua in tabulam impingit, quam metimur ſpatio, quod hac celeritate vno minuto ſecundo percurreretur, ſit igitur haec celeritas $= c$, ac denotet g altitudinem ex qua graue libere cadit tempore vnius minuti ſecundi, ita vt ſi celeritas glandis tanta fuerit, quanta ex altitudine g acquiritur, tum ſit $c = 2g$, ſin autem illa celeritas tanta ſit, quanta ex altitudine nng acquiritur, tum ſit $c = 2ng$, vnde ſequitur poſito $c = 2ng$ fore $n = \frac{c}{2g}$ ideoque altitudinem ex qua haec celeritas c generatur fore $nng = \frac{cc}{4g}$. Deinde vero in computum venit maſſa huius glandis, quam littera M deſignemus, vbi ſecundum principia Mechanica M men-

menſuratur pondere eiusdem glandis. Quod autem ad figuram glandis attinet, eius ratio hic vix habetur, dummodo eandem figuram retineat.

II. Statim atque glans tabulam ferire incipit, hoc erit initium ictus, a quo tempora computabimus. Ponamus ergo ab hoc initio, iam elapſum eſſe t minut: ſecund:, quaeriturque quousque nunc glans in tabulam penetrauerit, ponamus ergo glandem ad profunditatem $= x$ penetraſſe et quum hoc ſit ſpatium a glande tempore t percurſum, erit celeritas glandis hoc momento $\frac{dx}{dt}$ eiusque acceleratio $= \frac{M\, d\, d\, x}{2\, g\, d\, t^2}$, ſumto elemento $d\,t$ conſtante, cui vis reſiſtens negatiue ſumta debet eſſe aequalis. Animum autem hic abſtrahimus a grauitate glandis, qua eius motus incuruatur, quippe qui effectus in hoc phaenomeno nullius eſt momenti.

III. Quum nunc glans ad profunditatem $= x$, in tabulam penetrauerit, quam quidem hic minorem ipſa craſſitie tabulae aſſumimus, poſita enim craſſitie tabulae $= a$, ſimul ac fit $x = a$, glans per tabulam penitus tranſiiſſe conſendus eſt, nunc igitur dum in profunditate $= x$ verſatur, certam atque inſignem offendet reſiſtentiam, quae eius motui ſe opponit, et quam litera R denotemus, cuius valorem cum vix vllo caſu accurate definire liceat, hic tantum obſeruemus eam, cum a magnitudine glandis, tum vero etiam a duritie ipſius tabulae, atque ab ipſa profunditate penetrationis x pendere, quare quum duo

duo priora momenta eadem maneant pro eadem glande et tabula, vis resistentiae spectari poterit tamquam functio ipsius x, quae euanescat tam posito $x = 0$, quam $x = a$, quandoquidem tam ante impulsum, quam post eruptionem, nullam patitur resistentiam.

IV. Constituta igitur hac resistentia R, habebimus statim istam aequationem, $\frac{ddx}{2g\,dt^2} = -\frac{R}{M}$, quae per dx multiplicata et integrata praebet $\frac{dx^2}{4g\,dt^2} = C - \int\frac{R\,dx}{M}$ vbi integrale $\int\frac{R\,dx}{M}$ ita capi sumamus, vt ipso initio vbi $x = 0$ euanescat. Hinc constantem C ita definiri oportet, vt posito $x = 0$, celeritas glandis quae est $\frac{dx}{dt}$ fiat $= c$, vnde colligitur $C = \frac{cc}{4g}$ ita vt habeamus $\frac{dx^2}{dt^2} = cc - 4g\int\frac{R\,dx}{M}$; hincque ipsa celeritas glandis $\frac{dx}{dt} = \sqrt{(cc - 4g\int\frac{R\,dx}{M})}$, vnde porro pro tempore cognoscendo deducitur ista aequatio

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{(cc - 4g\int\frac{R\,dx}{M})}}.$$

V. Parum autem solliciti de tempore, ex aequatione pro celeritate inuenta, facile iudicare poterimus, vtrum glans penitus per tabulam perrumpat, an vero in ipsa tabula sit haesurum omni scilicet motu amisso. Hic praecipue ad ipsam resistentiam R indeque formatum integrale $\int R\,dx$ est respiciendum, cuius valor crescente x continuo augetur, ponamus igitur posita $x = a$, fieri $\int\frac{R\,dx}{M} = f$, atque nunc perspicuum est, glandem per tabulam

per-

perrumpere non poſſe quamdiu cc minus eſt quam $4gf$, atque hinc ſequentes caſus diſtingui oportet.

1°. Si fuerit celeritas glandis $c < 2\sqrt{gf}$, glans non penitus per tabulam perrumpet, ſed alicubi haerebit, vbi ſcilicet fit $\int \frac{R\,dx}{M} = \frac{cc}{4g}$, vnde profunditas penetrationis intelligi poterit.

2do. Sin autem fuerit celeritas glandis $c > 2\sqrt{gf}$ tum glans non ſolum penitus per tabulam transuibrabit, ſed etiam adhuc celeritatem quandam conſeruabit, quae erit $= \sqrt{(cc - 4gf)}$.

Caſus Secundus quo tabula ſuper plano horizontali libere eſt mobilis.

VI. Manentibus iis quae circa glandem eiusque celeritatem ante ſunt conſtituta, nunc etiam maſſa tabulae in computum eſt ducenda, quae ſit $= N$, atque ne tabula motum obliquum recipiat, glandis ictum ponamus fieri in ipſo tabulae centro inertiae, motumque glandis eſſe horizontalem. Sit porro adhuc craſſities tabulae in loco ictus $= a$.

VII. Elapſo tempore $= t$ ſecund. a primo ictus initio, vbi ipſa tabula erat in quiete, glans vero celeritate $= c$ ferebatur, ponamus tabulam iam eſſe promotam per ſpatium $= y$, glandem autem iam in tabulam penetraſſe ad profunditatem $= x$, vbi reſiſtentiam offendat $= R$, vti ante poſuimus; quum igitur tabula tempore t promota ſit per ſpatium y, erit eius celeritas $= \frac{dy}{dt}$ et acceleratio more ſuperiori ſumta $= \frac{N\,dd\,y}{2\,g\,d\,t^2}$, glans autem interea confecit ſpatium $x + y$, vnde eius celeritas erit $\frac{d\,x + d\,y}{d\,t}$ et acceleratio $= \frac{M(dd\,x + dd\,y)}{2\,g\,d\,t^2}$, notandum autem eſt, ipſo initio fuiſſe $x = 0$ et $y = 0$, at vero celeritas primo tabulae $\frac{d\,y}{d\,t} = 0$ et glandis $\frac{d\,x + d\,y}{d\,t} = c$, ita vt tum fuerit $\frac{d\,x}{d\,t} = c$.

VIII. Quod nunc primum ad motum tabulae attinet, euidens eſt eum accelerari a vi R, haec enim dum motui glandis ſe opponit, aequa vi in tabulam reagit, eiusque motum accelerat, vnde haec prima aequatio reſultat:

I. $\frac{N\,dd\,y}{2\,g\,d\,t^2} = R$, ſiue $\frac{dd\,y}{d\,t^2} = \frac{2\,g\,R}{N}$

deinde vero motus glandis ab eadem vi R retardatur, vnde oritur haec ſecunda aequatio:

II. $\frac{M(dd\,x + dd\,y)}{2\,g\,d\,t^2} = -R$ ſiue $\frac{dd\,x + dd\,y}{d\,t^2} = -\frac{2\,g\,R}{M}$

ex quibus duabus aequationibus vtrumque motum deriuari oportet, ſcilicet ſpatia x et y, vbi imprimis notaſſe iuuabit, quantitatem R, tantum eſſe functionem ipſius x, ita vt ex priori aequatione ſola nihil concludi queat.

XI. Hinc igitur primo $dd\,y$ eliminemus vnde orietur iſta aequatio:

$$\frac{dd\,x}{d\,t^2} = -\frac{2\,g\,(M + N)}{M\,N}.\,R$$

quae per $d\,x$ diuiſa et integrata dat

$$\frac{d\,x^2}{d\,t^2} = C - \frac{4\,g\,(M + N)}{M\,N}\int R\,d\,x$$

vbi

vbi ſi $\int R\,dx$ euaneſcat facto $x = 0$, aequatio noſtra ita determinatur, vt ſit

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc - \frac{4g(M+N)}{MN}\int R\,dx.$$

Quodſi ergo vt ante pro tota craſſitie tabulae $= a$ ſtatuatur $\int \frac{R\,dx}{M} = f$, perſpicuum eſt vt glans per tabulam penitus perrumpat, neceſſe eſſe, vt ſit $cc > 4fg\frac{(M+N)}{N}$, vnde intelligitur maiori glandis celeritate opus eſſe ſi tabula fuerit mobilis, quam ſi eſſet immobilis, niſi moles tabulae fuerit maxima reſpectu glandis, at quo leuior tabula eſt, manente quidem eadem craſſitie et duritie, eo maior glangis celeritas requiritur, vt perrumpat. Cognita autem maſſa tabulae N, iudicium vtrum glans perrumpat nec ne, perinde inſtituitur, atque in hypotheſi tabulae immotae.

X. Hic autem maxime curioſa eſt inueſtigatio motus quem tabula hinc recipit, ad quem inueniendum, addamus ambas aequationes prius inuentas vt ipſa quantitas R eliminetur ſic enim prodit haec aequatio:

$$\frac{M\,ddx}{2g\,dt^2} + \frac{(M+N)\,ddy}{2g\,dt^2} = 0$$

quae ſemel integrata ſponte dat

$$\frac{M\,dx}{dt} + \frac{(M+N)\,dy}{dt} = Mc$$

quare quum $\frac{dy}{dt}$ celeritatem tabulae exprimat, habebimus

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Mc}{M+N} - \frac{M\,dx}{(M+N)\,dt}$$

ex qua aequatione intelligitur iis casibus, quibus glans non penitus transit per tabulam, sed in certa penetratione arcetur, ibique fit $\frac{dx}{dt} = 0$, tabulam motum esse accepturam cuius celeritas sit $= \frac{Mc}{M+N}$. At si aucta celeritate c glans penitus perrumpat, tum tabula minorem accipiet motum, vti mox patebit, in quo non exiguum paradoxon cernitur.

XI. Quamdiu ergo glans non penitus perrumpit, tabulaeque infixa manet, quod fit vbi $\frac{dx}{dt} = 0$; motus determinatio nulla laborat difficultate, tum enim celeritas tabulae vt modo vidimus erit $\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N} . c$, euoluamus igitur eos casus quibus glans penitus perrumpit, quod euenit quando

$$cc > 4fg\frac{(M+N)}{N} = 4fg\left(1 + \frac{M}{N}\right);$$

ponamus igitur breuitatis gratia

$$4gf\left(1 + \frac{M}{N}\right) = kk$$

ita vt k eum celeritatis gradum exhibeat, quo tantum non per tabulam penetrare valet, ac si fuerit $c = k$ ob $\frac{dx}{dt} = 0$ erit tabulae celeritas post ictum $\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N} . k$ glans vero ipsi extremitati tabulae inhaerebit. Nunc autem ponamus $c > k$ et quidem $c = nk$ vt sit $n > 1$, atque post ictum habebimus:

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{(nn-1)}$$

vnde fit celeritas tabulae post ictum

$$\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N}(nk - k\sqrt{(nn-1)}) = \frac{M}{M+N}k(n - \sqrt{(nn-1)}).$$

Quare

Quare ſi n paulisper tantum vnitatem excedat, vt ſit $n = 1 + \alpha$ erit celeritas tabulae poſt ictum

$$= \frac{M k}{M + N} (1 - \sqrt{2 \alpha}),$$

ſpectata ſcilicet α vt infinite parua, vnde patet celeritatem tabulae minorem eſſe, quam ſi eſſet $n = 1$.

XII. Sit iam n numerus quicunque maior vnitate et quum ſit poſt ictum

$$\frac{dx}{dt} = k \sqrt{(nn - 1)} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{M}{M + N} k (n - \sqrt{(nn - 1)}),$$

quae eſt celeritas tabulae poſt ictum, erit glandis celeritas poſt ictum

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{M n k}{M + N} + \frac{N}{M + N} k \sqrt{(nn - 1)},$$

hinc ergo euoluamus aliquot caſus praecipuos:

celeritas glandis ante ictum	celeritas tabulae poſt ictum	celeritas glandis poſt ictum
I. $c = k$	$\frac{M}{M+N} . k$	$\frac{M}{M+N} k$
II. $c = 2k$	$\frac{M}{M+N} k (2 - \sqrt{3})$	$\frac{k(2M + N\sqrt{3})}{M+N}$
III. $c = 3k$	$\frac{M}{M+N} k (3 - \sqrt{8})$	$\frac{k(3M + N\sqrt{8})}{M+N}$
IV. $c = 4k$	$\frac{M}{M+N} k (4 - \sqrt{15})$	$\frac{k(4M + N\sqrt{15})}{M+N}$
V. $c = 5k$	$\frac{Mk}{M+N} (5 - \sqrt{24})$	$\frac{k(5M + N\sqrt{24})}{M+N}$
VI. $c = 6k$	$\frac{Mk}{M+N} (6 - \sqrt{35})$	$\frac{k(6M + N\sqrt{35})}{M+N}$

XIII. Quodſi ergo n fuerit numerus mediocriter magnus, vt ſit proxime $\sqrt{(nn - 1)} = n - \frac{1}{2n}$, tum ergo ſi celeritas glandis ante ictum fuerit $c = nk$ prodibit poſt ictum celeritas tabulae $\frac{M k}{2n(M + N)}$ cele-

 ritas

ritas vero glandis $= n\,k - \frac{N\,k}{2\,n(M+N)}$, vnde manifeſtum eſt, quo maior fuerit numerus n ſeu quo maior fuerit celeritas glandis ante ictum, celeritatem tabulae poſt ictum eo fore minorem, glandis autem celeritatem eo minus defecturam eſſe a celeritate ante ictum, ſiue iacturam celeritatis quam glans patitur eo fore minorem.

Obſeruationes in ſolutiones praecedentes.

XIV. Problemata haec referenda ſunt ad doctrinam de colliſione corporum, quae non ſolum in Matheſi, ſed etiam in Philoſophia tractari eſt ſolita. Totum diſcrimen in hoc tantum conſiſtit, quod hic corpus impingens, in alterum penetret, atque adeo ſibi tranſitum aperiat, dum in vulgari doctrina eiusmodi tantum corpora conſiderantur, quae in conflictu ſibi vel nullam impreſſionem, vel ſaltem quam minimam inducunt.

XV. Noſtram igitur ſolutionem ad notiones vulgares reuocaturi, nominemus ſiue durante conflictu, ſiue eo iam finito celeritatem glandis $= v$, et celeritatem tabulae $= u$, et quum ſit $v = \frac{dx+dy}{dt}$ et $u = \frac{dy}{dt}$ ambae aequationes pro ſecundo problemate inuentae, quae ſcilicet facta integratione prodierunt, ita ſe habebunt,

$$(v-u)^2 = cc - 4g\frac{(M+N)}{MN}\int R\,dx \text{ et } Mv + Nu = Mc,$$

quarum

quarum poſterior inuoluit eam notionem, quae vulgo quantitas motus vocari ſolet, et indicat quantitatem motus, ſiue productum ex maſſa vtriusque corporis in ſuam celeritatem perpetuo eandem conſeruari, quia enim ante conflictum tabula quieuit, tota quantitas motus erat Mc, durante autem conflictu vel finito, quantitas motus eſt $Mv + Nu$. Iſta quantitatis motus conſeruatio inuoluit aequabilem progreſſum communis centri grauitatis.

XVI. Vt vero etiam priorem aequationem ad notiones receptas perducamus, eam per MN multiplicemus vt habeamus:

$$MN(v-u)^2 = MNv^2 - 2MNvu + MNuu = MNcc - 4g(M+N)\int R\,dx$$

ad hanc addamus quadratum poſterioris aequationis, quod eſt:

$$MMv^2 + 2MNvu + NNuu = MMcc$$

prodibitque aggregatum

$$M(M+N)v^2 + N(M+N)uu = (M+N)cc - 4g(M+N)\int R\,dx$$

quae per $M+N$ diuiſa praebet hanc aequationem:

$$Mv^2 + Nuu = Mcc - 4g\int R\,dx,$$

quae manifeſto continet eas notiones, quae vulgo virium viuarum nomine efferri ſolent. Eſt enim Mcc tota vis viua ante conflictum, at Mvv vis viua glandis durante vel finito conflictu, atque Nuu vis viua tabulae.

XVII. Hinc ergo perſpicuum eſt neque durante conflictu neque finito, vim viuam totam eandem manere ſed potius diminui et quidem quantitate $4g\int R\,dx$, id quod vulgari principio conſeruationis virium viuarum aduerſari videtur, verum probe notandum eſt conſeruationem virium viuarum, tum tantum locum habere, quando de viribus nihil perit. Quum autem noſtro caſu, tabula perforetur, atque ad foramen efficiendum non exigua virium quantitas impendi debeat, mirum non eſt, quod ſumma virium viuarum hic decrementum patiatur, quin etiam ex ipſa noſtra analyſi manifeſtum eſt, formulam integralem $\int R\,dx$, ſummam virium in foramen impenſarum exprimere.

XVIII. Hic non inutile erit oſtendere quomodo immediate ex noſtris aequationibus differentialibus ſecundi gradus, ad vires viuas calculum perducere potuiſſemus. Aequationum enim §. 8 inventarum, prior ducatur in dy, altera vero in $dx+dy$ eaeque inuicem additae dabunt iſtam aequationem.

$$\frac{N\,dy.\,ddy}{2g\,dt^2}+\frac{M(dx+dy)(ddx+ddy)}{2g\,dt^2}=-R\,dx$$

quae integrata producit:

$$\frac{N\,dy^2}{4g\,dt^2}+\frac{M(dx+dy)^2}{4g\,dt^2}=\frac{Mcc}{4g}-\int R\,dx$$

ſicque introductis litteris v et u, ſtatim aſſecuti ſumus hanc aequationem:

$$Nuu+Mvv=Mcc-4g\int R\,dx.$$

XIX. Ex principiis igitur vulgaribus, quae paſſim in doctrina de colliſione corporum expoſita repe-

reperiuntur ſolutionem problematis noſtri deducere potuiſſemus, dum modo perpendiſſemus in penetrationem glandis intra tabulam certas vires impendi, easque iunctim ſumtas formula $4g\int R\,dx$ comprehendi poſſe Tum enim quia tota vis viua ante conflictum erat $= Mcc$, durante autem conflictu, cum penetratio iam facta eſt ad profunditatem $= x$, ſumma virium viuarum ſit $Mvv + Nuu$, neceſſe eſt, vt fiat:

$$Mvv + Nuu = Mcc - 4g\int R\,dx,$$

alterum vero principium quantitatis motus ſiue aequabilis progreſſus communis centri grauitatis ſtatim ſuppeditat hanc aequationem $Mv + Nu = Mc$ quae cum illa coniuncta completam problematis noſtri ſolutionem continet.

XX. Hac occaſione non abs re erit paucis exponere, quid de notiſſimis illis notionibus, circa quantitatem motus et vires viuas, quibus Philoſophi totam motus theoriam ſuperſtruere ſunt conati, ſit iudicandum et quatenus eae cum veris et vniverſalibus Mechanicae principiis conciliari poſſint. Ac primo quidem de veris Mechanicae principiis tenendum eſt, ea ex vnico principio proficiſci, quo ratio inter accelerationes et vires ſollicitantes continetur et ita latiſſime patet, vt etiam ad fluida corpora extendatur. At vero hoc principium ita eſt comparatum, vt ſemper ad formulas differentiales ſecundi gradus deducat, de quibus deinceps videndum eſt, num integrationem admittant?

XXI. Dantur autem infiniti caſus, quibus huiusmodi integratio locum habet, hocque modo ad formulas differentiales primi gradus peruenitur, quas per celeritates explicare licet, quemadmodum noſtro caſu $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ celeritates praebuerunt, atque hae ipſae formulae iam integratae, eas notiones inuoluunt, quae vulgo ſub quantitatis motus, vel vis viuae nomine innotuerunt, de quo quidem iam dudum obſeruatum eſt, nomen vis viuae incongrue adhiberi, quum productum ex maſſa cuiuspiam corporis per quadratum celeritatis, neutiquam ad notionem cuiuspiam vis reduci queat.

XXII. Talia igitur principia, quae vulgo leges motus continere cenſentur, non aliter ſpectari poſſunt niſi tamquam concluſiones ex vnico illo Mechanicae principio deductae, quae quum ſemper ſub certis tantum conditionibus, quatenus ſcilicet formulas integrales ſecundi gradus integrare licuit, locum habeant, tantum pro principiis particularibus ſunt habendae, quae etiam principia ſecundaria vel deriuata appellare liceat, dum verum Mechanicae principium eſt vnicum et maxime vniuerſale.

Examen

Examen accuratius ſuperiorum ſolutionum.

XXIII. Quoniam vis illa R, quam in ſolutionem noſtram introduximus, nullo modo reſtringitur aut limitatur, ſolutio noſtra maxime generalis et ad omnes plane caſus extendi poſſet videri, quomodocunque enim perforationis effectus promotioni glandis aduerſetur, ſemper certam vim concipere licet, quae iſti reſiſtentiae foret aequalis, et quam adeo ſub littera illa R contentam intelligere liceret. Quatenus autem illa quantitas R, vt functio variabilis x, qua profunditas penetrationis deſignatur, a nobis conſideratur, quocunque demum modo, tam ab ipſa glandinis magnitudine et figura, quam ab ipſius tabulae duritie et craſſitudine pendeat, ſiquidem hae res vt quantitates conſtantes ſunt ſpectandae: eatenus noſtra ſolutio ſaepius a veritate recedere poteſt, quum vtique eiusmodi dentur caſus vbi vis reſiſtentiae non tantum vnicam illam variabilem x, ſed aliam praeterea veluti celeritatem implicare poſſit, id quod clarius explicari neceſſe eſt.

XXIV. Ad hoc oſtendendum concipiamus tabulam tamquam proprietate fluidi praeditam eſſe, atque tum nullum foret dubium, quin omnis reſiſtentia a ſola celeritate penderet eiusque quadrato proportionalis eſſet, huiusmodi igitur caſu quantitas illa R non foret functio ipſius x, ſed potius celeri-

 tatis,

tatis, qua glans in tabulam penetrat et quam formula $\frac{dx}{dt}$ expreſſimus. Facile autem intelligitur, ſi reſiſtentia illa R etiam formulam $\frac{dx}{dt}$ inuoluat rationem integrationis, qua ſumus vſi, neutiquam locum habere poſſe, propterea quod formula R dx tamquam integrabilis eſt ſpectata.

XXV. Quodſi ergo tabula naturae fluidi particeps eſſet, ita vt reſiſtentia partim ex functione ipſius x, vti aſſumſimus, partim vero etiam ex quadrato celeritatis conſtaret; ſolutio noſtra nullo modo ſubſiſtere poſſet, vnde maxime neceſſarium eſt, in eos caſus inquirere quibus talis indoles ſeſe reſiſtentiae tabulae admiſcere poſſet. Verum ſatis iam eſt cognitum omnem fluidi reſiſtentiam inde potiſſimum oriri, quod partes fluidi de loco ſuo depelli iisque motus imprimi debeat, id quod ſine virium diſpendio fieri nequit, ſupra autem littera R tantum eiusmodi vim reluctantem denotauit, quae motum glandis quidem retardaret ipſa autem in ſe nullam motus generationem requireret. Duos igitur hos reſiſtentiae caſus ſollicite a ſe inuicem diſtingui oportet.

XXVI. Id reſiſtentiae genus, quod motui corporis directe ſe opponit et quaſi elaſtrum corpus repellit, vocemus reſiſtentiam abſolutam, quorſum pertinet illa ipſa reſiſtentia, quam ſupra ſumus contemplati. Alterum vero reſiſtentiae genus, quod veluti

veluti in fluidis euenit, a generatione noui motus oritur, toto coelo a priori genere discrepat, etiamsi corporis motum quoque retardet, quo discrimine notato, quoniam tabulae nullum foramen induci potest, nisi eius particulae internae non solum a se inuicem diuellantur, sed etiam de loco suo remoueantur, satis perspicuum est resistentiam vtriusque generis hic reuera locum habere debere.

XXVII. Pro nostro ergo casu, veram resistentiam duabus partibus exprimi oportebit, prior scilicet pars continebit resistentiam absolutam et functioni cuipiam ipsius x proportionalem, quam littera R vt supra designabimus, altera vero pars a motus generatione oriunda et quadrato celeritatis proportionalis, hac formula $A.\frac{dx^2}{dt^2}$ exprimatur, vbi $\frac{dx}{dt}$ significat celeritatem, qua glans in tabula vlterius penetrat, A vero est quantitas quaepiam a densitate materiae et magnitudine foraminis pendens. Hoc modo tota resistentia tali formula repraesentari debet

$$R + A.\frac{dx^2}{dt^2}$$

XXVIII. Quod autem posterior pars, quadrato celeritatis sit proportionalis, ita plano ratiocinio colligi poterit. Concipiamus massam quampiam $= M$ quiescentem, quae a vi quadam P in motum sollicitetur, elapso tempore $= t$, massa iam sit promota per spatium $= s$, et quum ex principio motus ſit $\frac{M\,d\,d\,s}{2\,g\,d\,t^2} = P$ habebimus integrando $\frac{M\,d\,s^2}{4\,g\,d\,t^2} = P\,s$, vbi $\frac{d\,s}{d\,t}$ celeritatem maſſae M impreſſam denotat. Hinc ergo diſcimus, vt datae maſſae quieſcenti M dum per ſpatium s propellitur, data celeritas $\frac{d\,s}{d\,t}$ imprimatur, ad hoc requiri vim ſollicitatem, $P = M.\frac{d\,s^2}{4\,g\,s\,d\,t^2}$, quam formulam applicemus ad noſtrum caſum, quo glans intra tabulam vlterius penetrat per ſpatiolum $= d\,x$, ita vt nobis ſit $s = d\,x$, interea autem neceſſe eſt, vt certa portio materiae, quae hoc ſpatiolum dx occupabat, de loco ſuo remoueatur cuius ergo maſſa proportionalis erit partim ipſi ſpatiolo $d\,x$, partim amplitudini glandis nec non denſitati materiae qua tabula conſtat, ex quo maſſa remouenda ita exprimi poterit, vt ſit $= C.\,d\,x$, quam loco M ſcribi conuenit; denique huic maſſae celeritas imprimi debet, celeritati glandis aequalis, vt ſcilicet ſucceſſioni glandis cedat, ſicque haec celeritas erit noſtro caſu $= \frac{d\,x}{d\,t}$, loco $\frac{d\,s}{d\,t}$ ſubſtituenda. Quocirca vt maſſae $C\,d\,x$ dum per ſpatium $s = d\,x$ promouetur, celeritas $= \frac{d\,x}{d\,t}$ imprimatur, ad hoc requiritur vis ſollicitans $= \frac{C}{4\,g}\,\frac{d\,x^2}{d\,t^2}$, quam ergo recte per formulam $A.\,\frac{d\,x^2}{d\,t^2}$ exprimimus, quam formam adeo ipſum principium motus vniuerſale ſuppeditare eſt cenſendum.

Tab. VII. Fig. 8. XXIX. Hic quidem aſſumimus glandem non ſolum directe per tabulam penetrare, ſed etiam perpenpendiculariter in eius particulas illidere, verum ſi oblique illidat? Sit enim recta A B directio motus et D C E anterior corporis moti ſuperficies, quae percurſo ſpatiolo $Cc = dx$, perueniat in ſitum dce, ſitque angulus obliquitatis $DCB = \alpha$, iam ducatur $C\gamma$ ad ambas rectas obliquas normalis, atque manifeſtum eſt, vt corpus motum proſequi poſſit, non opus eſſe, vt particulae obuiae per ſpatiolum Cc promoueantur ſed tantum per ſpatium $C\gamma$, quod ſe habet ad illud vt ſin. α ad 1, ex quo etiam ſufficit iis celeritatem imprimi $= \frac{dx}{dt}$. ſin. α, ſicque pro hoc caſu obliquitatis, reſiſtentia putanda erit $= \frac{C}{4g} \cdot \frac{dx^2}{dt^2}$. ſin. α^2, ſcilicet praeterea quadrato ſinus obliquitatis proportionalis, quia autem ſin. α^2 eſt quantitas conſtans, commode ſimul in littera illa C comprehendi poteſt, ita vt non opus ſit huic caſui, peculiarem locum in noſtra analyſi tribuere.

Emendatio ſolutionis ſupra datae.

XXX. Vt igitur ſolutionem ſupra datam a vitio modo memorato liberemus, tantum opus eſt, in ambabus aequationibus ibi inuentis loco R ſcribere $R + \frac{A.\,dx^2}{dt^2}$, quo pacto aequationes illae erunt:

$$\frac{Nddy}{2gdt^2} = R + \frac{A.\,dx^2}{dt^2}\,;\quad \frac{M(ddx + ddy)}{2gdt^2} = -R - \frac{A.\,dx^2}{dt^2},$$

quae inuicem additae ſummam praebebunt, vt ante

$$\frac{Mddx + (M+N)ddy}{2gdt^2} = 0,$$

cuius

cuius integrale ergo etiam erit, vt ante

$$\frac{M\,dx}{dt} + (M+N)\frac{dy}{dt} = Mc.$$

Ad alteram autem aequationem integralem inueniendam, ex priore valorem

$$\frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{R}{N} + \frac{A}{N}\,\frac{dx^2}{dt^2},$$

ſubſtituamus in poſteriore vt prodeat

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = -\frac{(M+N)}{MN}R - \frac{(M+N)}{MN}A\,\frac{dx^2}{dt^2} \text{ ſiue}$$

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -4g\frac{(M+N)}{MN}.R - 4gA\frac{(M+N)}{MN}.\frac{dx^2}{dt^2},$$

ponamus nunc breuitatis gratia

$$\frac{4g(M+N)A}{MN} = 2\alpha,$$

vt habeamus hanc aequationem

$$\frac{2\,ddx + 2\alpha\,dx^2}{dt^2} = -4g.\frac{(M+N)}{MN}.R,$$

quam videamus quomodo ad integrabilitatem perducere liceat.

XXXI. Ante omnia igitur obſeruamus, formulam $ddx + \alpha\,dx^2$ integrabilem reddi, ſi multiplicetur per $e^{\alpha x}$, erit enim $e^{\alpha x}(ddx + \alpha\,dx^2) = d.e^{\alpha x}dx$, multiplicemus igitur per $e^{\alpha x}$ et noſtra aequatio fiet

$$\frac{2\,d.e^{\alpha x}dx}{dt^2} = -4g\frac{(M+N)}{MN}e^{\alpha x}R,$$

quae vt prorſus integrabilis reddatur multiplicetur per $e^{\alpha x}dx$ eritque integrale

$$\frac{e^{2\alpha x}dx^2}{dt^2} = C - 4g\frac{(M+N)}{MN}.\int e^{2\alpha x}R\,dx,$$

vbi

vbi si formula integralis ita capiatur, vt euanescat facto $x = 0$, valor constantis C debet esse $= cc$, sicque obtinebimus hanc aequationem integratam

$$\frac{dx^2}{dt^2} = e^{-2\alpha x}\left(cc - 4g\frac{(M+N)}{MN}\int e^{2\alpha x}.\, R\, dx\right),$$

quae aequatio iam cum ante inuenta

$$\frac{M\,dx + (M+N)\,dy}{dt} = Mc$$

coniuncta, veram solutionem nostri secundi problematis suppeditat.

XXXII. Circa hanc solutionem obseruamus, si exponens $2\alpha x$ euanesceret, ita vt esset $e^{2\alpha x} = 1$, tum hanc solutionem cum praecedente perfecte conuenire, eatenus igitur tantum ab ea discrepabit, quatenus $2\alpha x$ non euanescit, quia autem tum formula $e^{2\alpha x}$ eo magis vnitatem superat, quo maior fuerit exponens $2\alpha x$, intelligimus formulam $e^{2\alpha x} R\, dx$ maiorem esse, quam casu ante tractato et quidem eo magis, quo maius fuerit spatium penetrationis x, ex quo intelligitur, quo crassior fuerit tabula, praeterquam quod sola formula $\int R\, dx$ fit maior posito scilicet $x = a$, ob factorem $e^{2\alpha x}$ multo magis insuper augeri; quare quum supra pro casibus quibus glans per totam tabulam perrumpit, posuerimus

$$4g\frac{(M+N)}{MN}\int R\, dx = kk,$$

si nunc etiam ponamus

$$4g\frac{(M+N)}{MN}\int e^{2\alpha x}.\, R\, dx = kk$$

 ista

ista quantitas k maior erit quam casu praecedente, ideoque nunc maior glandis celeritas requiritur, vt ea per totam tabulae crassitiem penetret, et quo crassior fuerit tabula, vt glans penetret, eius celeritas tanto maior debet esse, quam secundum superiorem solutionem.

XXXIII. Cum autem glans per tabulam penitus perruperit, pro eius celeritate in egressu habebimus $\frac{dx^2}{dt^2} = e^{-2\alpha a}(cc - kk)$, quae ergo celeritas ob duplicem causam minor erit quam casu praecedente, pro eadem scilicet celeritate c ante collisionem; primo enim quia k maior est quam ante, quantitas $cc - kk$ iam est multo magis minor quam ante, deinde quia ea insuper multiplicatur in $e^{-2\alpha a}$ vel quod perinde est, diuiditur per $e^{+2\alpha a}$, quae formula maior est vnitate, celeritas $\frac{dx}{dt}$ multo magis diminuitur. Quod denique ad ipsum tabulae motum attinet, quia eius celeritas post perforationem inuenta est $\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N}(c - \frac{dx}{dt})$, et quia vt modo vidimus $\frac{dx}{dt}$ multo minus est quam casu praecedente, nunc ipsi tabulae multo maior motus imprimetur, quam casu praecedente, atque ob hanc rationem celeritas glandis post ictum, quae est $\frac{dx+dy}{dt}$ hinc aliquantillum augebitur, interim tamen quia ex formula nostra fit:

$$\frac{dx+dy}{dt} = \frac{M}{M+N} \cdot c + \frac{N}{M+N} \cdot \frac{dx}{dt}$$

et

et quoniam $\frac{dx}{dt}$ minus eſt quam caſu praecedente, ipſa quoque glandis celeritas minor euadet.

XXXIV. Reducamus nunc etiam has formulas ad notiones communes et pro caſibus quibus glans ſiue penetrat, ſiue ſecus, ponatur celeritas glandis poſt ictum $= v$, celeritas vero tabulae $= u$ et quia eſt

$$\frac{dy}{dt} = u \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = v - u,$$

noſtrae binae aequationes inuentae fient

$$Mv + Nu = Mc \quad \text{et} \quad (v-u)^2 = e^{-2\alpha x} cc - 4g\frac{(M+N)}{MN} e^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x}.\,R\,dx$$

quarum prior vti iam monuimus perinde ſignificat conſeruationem quantitatis motus, ſiue aequabilem progreſſum communis centri grauitatis. Pro viribus viuis autem eliciendis alteram aequationem per MN multiplicatam euoluamus

$$MNvv - 2MNvu + MNuu = MNcce^{-2\alpha x} - 4g(M+N)e^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x}.\,R\,dx$$

ad eamque addamus quadratum prioris vt prodeat

$$M(M+N)vv + N(M+N)uu = Mcc(Me^{-2\alpha x} + N) - 4g(M+N)e^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x}.\,R\,dx$$

quae aequatio per $M+N$ diuiſa praebet

$$Mvv + Nuu = \frac{Mcc}{M+N}(Me^{-2\alpha x} + N) - 4ge^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x}.\,R\,dx$$

ex qua intelligitur nunc ſummam virium viuarum poſt ictum non amplius tam ſimpliciter ſe habere

 ad

ad vim viuam ante conflictum, quae erat Mcc quam in casu praecedente nunc enim erit

$$Mvv + Nuu = Mcc - \frac{MMcc}{M+N}(1 - e^{-2\alpha x}) - 4g\, e^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x}.\, R dx$$

vnde patet vim viuam in conflictu deperditam aestimandam esse

$$= \frac{MMcc}{M+N}(1 - e^{-2\alpha x}) + 4g\, e^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x} R dx$$

quonam autem ratiocinio haec iactura concludi possit, nullo modo perspicitur.

PHYSICA.

PHYSICA.

RARIORVM AVIVM EXPOSITIO.

Auctore

SAMVEL GOTTLIEB GMELIN.

Viſum mihi eſt, ex aduerſariis, hiſtoriam corporum Naturalium in itinere obſeruatorum continentibus, ad commentariorum vſum ſenſim ſenſimque colligere, quae vel noua eſſe, vel illuſtratione digna puto. Ornithologica nunc offero.

I.

ACCIPITER *macrourus.*

Tab. VIII. et IX.

Ruth. Лунь: (Lun:)

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo totius auis ab extremo roſtro ad finem caudae - - - -	1.	7.	8.
Longitudo mandibulae ſuperioris a baſi cerae ad extremum - - - -	0.	0.	$7\frac{1}{4}$.
Diameter longitudinalis cerae ——	0.	0.	$4\frac{1}{2}$.
—— —— latitudinalis - - - - - -	0.	0.	3. 0
Diameter maxillae ſuperioris ab angulo laterali ad extremum ——	0.	1.	0. 0
Diſtantia oculorum a baſi cerae ——	0.	0.	6. 0
Diſtantia inter oculos —— ——	0.	1.	$1\frac{3}{4}$.

	Ped.	Poll.	Lin.
Diſtantia oculorum ab angulo laterali maxillae ſuperioris —— ——	o.	o.	$3\frac{3}{4}$.
Diameter oculorum longitudinalis —	o.	o.	$2\frac{1}{4}$.
Diameter ciliorum ad palpebras —	o.	o.	$1\frac{1}{4}$.
—— vibriſſarum ex longiſſimis ——	o.	o.	4. o
Longitudo capitis ad nucham ——	o.	1.	10. o
Longitudo colli —— —— ——	o.	2.	6. o
Longitudo pectoris ad vropygium —	o.	6.	6. o
—— ab vropygio ad extremam caudam	o.	8.	8. o
Alae expanſae diſtant —— ——	1.	11.	8. o
Longitudo a baſi roſtri ad flexuram cubiti — — — — — —	o.	4.	7. o
Diameter latitudinalis abdominis —	o.	1.	7. o
Longitudo femorum denudatorum —	o.	1.	$9\frac{3}{4}$.
Longitudo digiti antici medii ——	o.	1.	$0\frac{1}{2}$
Longitudo vnguis illius —— ——	o.	o.	6. o
Longitudo digiti antici intimi ——	o.	o.	9. o
—— vnguis illius —— —— ——	o.	o.	8. o
—— digiti antici extimi —— ——	o.	o.	$7\frac{1}{2}$.
—— vnguis illius —— —— ——	o.	o.	8. o
—— digiti poſtici cum vngue ——	o.	1.	o. o

DESCRIPTIO.

Magnitudo Lanarii. Roſtrum nigrum, baſi viride, mox ab exortu aduncum. *Cera* lutea. *Nares* ouales, ſemitectae *vibriſſis* nigris, confertis, rigidis, erectis, e fouea temporali excurrentibus. *Palpebrae* cum *iride* croceae. *Pupilla* nigerrima. *Pars* corporis *ſupina* omnis cinerea, plumis quibusdam dorſalibus non nonnunquam in colorem obſolete rubrum vergentibus. *Pars prona* tota niuea, rudimento cinerei in collo ſuperſtite. *Remigum prima* minor gryſea, maior, *ſecunda* ad *quartam* fuſceſcentes, maiores, latere anteriore gryſeae; reliquae omnes cinereae, apice albicantes. *Tectrices* cinereae, infra niueae. *Cauda* rotunda, *rectricibus* duodecim longiſſimis, albicantibus, *faſciis* transuerſis, nunc dilutius, nunc profundius fuſcis, duabus intermediis immaculatis. *Veſtitrices* niueae, faſciis iterum transuerſis dilute fuſcis. *Pedes* flaui. *Vngues* nigerrimi, ſpiraliter incurui, acutiſſimi, ita autem *Mas* ſe habere ſolet.

Magna eſt *feminae* ab eo differentia, vt iurares diſtinctam ſpeciem conſtituere. Huic *pars* corporis *ſupina* fuſca, marginibus pennarum caſtaneis, maxime ad *caput*, *ſubtus* autem caſtaneo colore tota flauet. *Remiges* omnes immaculatae, ſature fuſcae, et ſummo tantum apice obſolete candicantes. *Tectrices* itidem fuſcae, extremo apice ferrugineae. Inſigniter quoque *rectrices* diſcrepant, e quibus *tres* vtrinque *extimae* caſtaneae, *prima* verſus apicem nigro maculata, *ſecunda*, *tertia* et *quarta* per totum ſui decurſum faſciis latis et nigris interruptis; *quatuor intermediis* fuſcis, et fuſco ſaturiore transuerſim maculatis, omnibus autem apice ferrugineis. Eodem quoque *femoralia* colore et *cauda* inferius ornantur. Sed eſſentialibus notis omnibus, *roſtro*, *cera*, *pedibus*, *habitu*, *volata* conuenit.

A *Woronez* abhinc ad omnem *Tanain* occurrit. Icones et *marem* et *feminam* bene exprimunt.

II.

Tab. X.

ACCIPITER *ferox*.

	Ped.	Poll	Lin.
Magnitudo ab imo roſtro ad finem caudae - - - - - - - - - -	2.	1.	8.
Longitudo roſtri - - - - - - -	0.	1.	7½.
Diſtantia roſtri ab oculis - - - -	0.	1.	1½.
Diſtantia narium ab iisdem - - -	0.	1.	0 0
Diſtantia inter oculos - - - - - -	0.	1.	11.0
Diſtantia a baſi roſtri ad flexuram cubiti - - - - - - - - -	0.	8.	2. 0
Longitudo colli - - - - - - -	0.	2.	6. 0
Longitudo dorſi - - - - - - -	0.	7.	1. 0
Longitudo caudae - - - - - - -	0.	10.	1. 0
Diſtantia alarum expanſarum - - -	3.	5.	8. 0
Longitudo tibiarum - - - - - -	0.	3.	1. 0
Longitudo digiti antici medii cum vngue - - - - - - - - - -	0.	2.	5. 0
—— —— —— intimi - - - -	0.	1.	8. 0
—— —— —— extimi - - - -	0.	1.	3½.
—— —— —— poſtici - - -	0.	1.	4½.

DESCRIPTIO.

Eatenus ferocem hanc ſpeciem dico, quod rapaciſſima ſit, in alias aues tyranni adinſtar ſaeuiat, nec et quemadmodum aquila, cadauera, reſpuat. Pertinet,

Pertinet, vt ex dimenſione elucefcit, ad accipitres maiores, et craſſitie Falcone fuluo, LIN. non multo inferior eſt.

Roſtrum habet admodum aduncum, e plumbeo colore nigrum, *cera* viridi baſi inſtructum, perforata vtroque latera *naribus*, quatuor lineis longis, duas circiter latis, fere parallelogramma referentibus. Tota auis ſuperne fuſca, vel e fuſco ferruginea, albicantis tamen coloris capiti et poſtico non nihil addito. *Regio ſupra oculos* nigris, longis, incumbentibus pilis, tanquam, continuatione vibriſſarum obſita. *Palpebrae* cum *pupilla* caeruleae. *Irides* flauae. *Caput collumque* inferius, pauco albido admixto, ferruginea. *pectus* poſterius et abdomen niuea, maculis caſtaneis variegata. *Remiges* viginti ſex, ſupra nigrae, et latere poſteriore fuſco albo que dimidiatae infra candidae, et extremitatem verſus gryſeae. *Tectrices* colore corporis paululum tantum albidiores pone niueae, et anterius maculis ferrugineis notatae *Cauda rectricibus* duodecim aequalibus, fuſcis, latere poſteriore albis, vtroque faſciis quatuor, ſaturatius fuſcis. Infra cum *vropygio* albent. *Pedes* craſſi, valde tabellati, digitis coloris eiusdem, *vnguibus* incuruis, acutis munitis.

Aſtrachaniae hyeme 1769. auis haec obſeruata fuit, frequens ibi circa vrbem.

Icon formam quidem bene exprimit, ſed in eo peccat, quod ſiſtat auem magnitudine iuſto minore.

III.

Tab. XI. a.

ACCIPITER *Korſchun.*

DESCRIPTIO.

Adeo ſimilis eſt miluo, eſſentialibus notis omnibus, volatu, oeconomia, migratione, vt forte non niſi varietate diſtincta auis ſit. *Magnitudine* eſt 21. cum dimidio pollicum; corporis *ircumf erentia* miluo ſimilis. *Roſtrum* e plumbeo colore nigrum, mox ab exortu aduncum, pollicis vnius, et linearum quinque. *Cera* viridis, diametro longitudinali linearum quinque, latitudinali perfecte eadem. *Nares* inaequaliter ouales, *vibriſſis* ſemitectae. *Spatium* inter oculos et roſtrum nudiuſculum. *Caput*, id ſingularitatem huius auis conſtituit, anterius que *collum ſuperius* cum *gula* eleganter caſtanea, ſed *ocularis regio* alba, et latera capitis dilute fuſca. Hicque color totius reliqui corporis partes occupat, marginibus pennarum plurimis rufis, *plumis* quibusdam ad *collum ſuperius* et poſterius, non minus, quam ad pectus fuſco et caſtaneo dimidiatis. *Oculi* a naribus nouem lineas remouentur: Diameter eorum longitudinalis quatuor, latitudinalis tribus lineis reſpondet; inter ſe autem pollicem vnum et lineas quinque diſtant. A *baſi roſtri* ad flexuram cubiti ſpatium eſt quinque pollicum cum dimidio REMIGES 24 nigrae 1 maiore 2 – 4 maximis, reliquis gradatim minoribus, omnibus apice vinaceis. *Tectrices* concolores. *Rectrices* duodecim, colore remigum: earum *veſtri-*

tices

tices colore corporis. *Pedes* lutefcentes, tabellati. *Femora* pennis corpore concoloribus tecta. *Tibiae* nudae, pollicum duorum, cum lineis decem. *Digitus anticus medius* cum *vngue* pollices duos longus; *extimus* pollicem vnum et lineas fex, *intimus* et *pofticus* longitudinis eiusdem. *Vngues* nigricant.

Auis haec in defertis ad Tanain, caftello quod a Diuo Paulo nomen habet, abhinc, fere ad *Tfcbercask* vrbem, Kofacorum Tanaicorum metropolin, faepius mihi occurrit. Amat folitudinem, excubitorem frequenter agit, cacuminibus tumulorum tataricorum, qui Kurgani dicuntur, infidendo, auiculasque praeteruolantes muresque attendendo, quibus vefci folet.

IV.

AQVILA *mogilnik*. Tab. XI. B.

Nomine auem infignis, quo Rutheni adpellare eam folent, et pari ratione antecedentem nominaui. Magnitudine et craffitie *F. fuluo* LIN. paulo minor eft. Omnium vero partium dimenfionem inuenio fequentem.

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo ab extremo roftro ad extremam caudam - - - - - - -	2.	3.	1.
— a bafi roftri ad flexuram cubiti	0.	7.	9.
— roftri ad frontem cera fimul menfurata	0.	2.	3.
— ad tempora - - - - - - -	0.	2.	9.
— a bafi roftri frontali ad oculos -	0.	1.	0.

	Ped.	Poll.	Lin.
Diameter cerae longitudinalis - -	0.	0.	6.
—— —— —— latitudinalis - - -	0.	0.	10.
Longitudo apicis mandibul. ſuperioris ſuper inferiorem prominentis - -	0.	0.	3.
Diſtantia inter oculos - - - - - -	0.	2.	1.
Longitudo capitis - - - - - - -	0.	4.	9.
—— —— colli - - - - - -	0.	3.	8.
Diſtantia alarum expanſarum - - -	4.	6.	
Longitudo vniuerſa pedum - - -	0.	10.	4.
—— digiti antici medii cum vngue	0.	3.	0.
—— —— —— extimi - - -	0.	1.	9.
—— —— —— intimi - - -	0.	2.	3.
—— —— —— poſtici - - -	0.	1.	6.
—— —— caudae - - - -	1.	0.	9.

DESCRIPTIO.

Roſtrum baſi rectum, tum vero valde aduncum, *cera* lutea inſtructum, luteo colore vtrisque lateribus inſtructum, cetera nigrum. *Mandibula* inferior ſpatulata. *Lingua* integra, medio profunde canaliculata. *Nares* transuerſae, ouales. *Spatium* roſtrum inter et oculos medium diuerſae magnitudinis vibriſſis nigris mollibusque obſitum. *Caput*, *collum*, *dorſum et alae* fuſca ſ. obſcure ferruginea, pennis albis raro et uage intermixtis. *Remiges* 24 nigrae; e primoribus 12 et 3 latere poſteriore et inferius gryſeo maculatae, 4—7. vtroque, apicibus extremitate nigris: reliquae eundem in modum vndulatae, ſed extremitate rufa donatae. Remiges compli-

complicatae caudam extremam non attingunt. *Tectrices* remigum minorum ad inſtar coloratae. Prona pars corporis dorſo penitus concolor, hac tantum cum differentia, quod albedo omnis exulet. Pennae pedes vsque ad exortum digitorum, quemadmodum in Bubone denſe tegunt, dorſique pariter colorem prae ſe ferunt, rufum autem largius ſubinde iis admixtum video. Digiti admodum tabellati, lutei. *Vngues* nigri. *Palpebrae* pallide caeruleae ſunt, *Iris* lurida. *Pupilla* nigra, ſplendens. *Cauda* aequalis, rectricibus 12 nigris, gryſeo obſolete faſciatis, apice rufis. *Tectrices* remotiores fuſcae, extremo rufae, propiores fuſco rufoque dimidiatae.

Victus, *mores*, *oeconomia* praecedentis.

V.

NOCTVA *minor*. Tab. XII.

BRISS. *av. p.* 150. *ord.* 3. *g.* 12. *ſ.* 5.
Gmel. Syst. II p. 163. T. 9. Strix accipitrina.

Deſcriptioni BRISSONIANAE per omnia ſimilis eſt, ſed magnitudine tantum maior, quippe quae ad pedalem accedit, et craſſitie vlulina inſignior. Deinde *roſtrum* habet totum nigrum; *Remiges* e fuſco et flauicante varias, multumque flaueſcentis ventri admiſcetur. Mentum album.

VI.

Tab. XIII.

PERDIX *rufa.*

GESN. *Will t.* 29. BRISSON. *av. ord.* 2. *gen. sext. sp.* 10. TETRAO *rufus* LIN.

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo auis ab extremo roſtro ad finem caudae - - - - - - -	1.	2.	7.
—— ab extremo roſtro ad brachium	0.	6.	11.
—— roſtri lateraliter menſurata - -	0.	0.	10.
—— —— longitudinaliter - -	0.	0.	9.
Diſtantia roſtri ab oculis - - - - -	0.	0.	4.
Diſtantia inter oculos ſupra caput menſurata - - - - - - -	0.	0.	$8\frac{1}{2}$.
Diameter oculorum longitudinalis - -	0.	0.	$4\frac{3}{4}$.
—— —— —— latitudinalis - -	0.	0.	$2\frac{3}{4}$.
Longitudo faſciae nigrae pone oculos oblique deſcendentis - - - - -	0.	2.	6.0
Latitudo illius - - - - - -	0.	0.	$4\frac{3}{4}$.
Longitudo ſpatii a macula orbiculari nigra infra roſtrum ad concurſum faſciarum ad collum inferius - - -	0.	3.	$1\frac{1}{2}$.
Circumferentia colli circiter - - -	0.	3.	0.0
Longitudo colli - - - - - -	0.	3.	2.0
Longitudo a baſi colli ad brachium	0.	1.	6.0
—— —— —— —— ad femora - -	0.	3.	10.0
Longitudo dorſi mox poſt brachiorum principium menſurata - - - - -	0.	2.	8.
Latitudo dorſi ad finem brachiorum menſurata - - - - - - -	0.	2.	4.0

Longi-

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo caudae - - - - - -	0.	3.	6.
Diſtantia alarum expanſarum - - -	0.	11.	6 0
—— —— pedum - - - -	0.	3.	0.0
Craſſities crurum - - - - -	0.	2.	4.0
——— femorum ad tibias - - -	0.	0.	9.0
Longitudo femorum - - - - -	0.	3.	$2\frac{1}{2}$.
—— —— tibiarum - - - -	0.	1.	10.0
Craſſities tibiarum - - - -	0.	0.	6.0
Longitudo digiti antici medii - -	0.	1.	3.0
—— —— vnguis illius - - -	0.	0.	$5\frac{1}{2}$
—— —— digiti antici intimi - -	0.	1.	0.0
—— —— vnguis illius - - - -	0.	0.	5.0
—— —— digiti antici extimi - -	0.	0.	9.0
—— —— vnguis illius - - -	0.	0.	$4\frac{1}{2}$.
—— —— digiti poſtici - - -	0.	0.	$4\frac{1}{2}$.
—— —— vnguis illius - - -	0.	0.	4.0

DESCTIPTIO.

Roſtrum ſanguineum, conico - incuruum, *baſi* vtrinque *membrana* firma, cartilaginea, itidem purpurea, in formam oualem coacta, *nares* tegente, auctum. *Caput ſuperius* oblongum, cinereum, *fronte* faſcia nigra, transuerſa, ſubhemicyclica, *temporibus* ex albo colore obſolete caſtaneis. *Criſta* denſa, tempore coitus, vel iraſcente gallo, erecta. Oculorum *irides* et *palpebrae* coccineae. *Pupilla* caerulea. *Pone oculos* faſcia vtrinque, gryſeo parcius intermixto, nigra, lata, oblique ad collum inferius deorſum deſcendens, principio ſeparata ſenſim ſenſimque ſibi vi-

 cinior

cinior, donec ad finem colli inferioris in vnam confluat. *Gula* et *principium* colli inferioris colore temporum; ſed *maculae tres* nigrae ſubtus baſi roſtri adponuntur, *vna* reliquis inſigniore, ſuborbiculari, et *duabus* lateralibus oblongis, ſubhaſtatis. *Collum ſuperius* elongatum, laete cinereum. *Dorſum* coloris eiusdem, ſubrubicundum. *Remiges* ad viginti quatuor, concolores, latere anteriore ſuperius caſtaneae, adeo breues, vt caudae exortum vix attingant. *Tectrices* remigibus colore reſpondentes. *Pectus* et *abdomen* cinerea. *Inferior pars* corporis ad caudam extremam vsque caſtanea. *Femoralia* quoque flaueſcunt, ſed *regio ſubalaris* pulcherrime caſtanea, *faſciisque* transuerſis atris, latioribus et anguſtioribus eleganter interrupta. *Dorſum*, quod in principio lateſcit, caudam verſus anguſtatur, et gibbam formam contrahit. *Caudae* autem ſingularis gallorum omnium ratio eſt, hac tantum cum differentia, quod *rectricibus* componatur duodecim, angulum acutum inter ſe formantibus, cinereis, intermediis quatuor immaculatis reliquis apice rufis. *Pedes* coccinei, craſſi, admodum tabellati. *Calcar* craſſum, breue, obtuſiſſimum in mare, medietati tibiae poſterius adpoſitum. *Digiti* quatuor, tres anteriores, poſtico vnico, *vnguibus* incuruatis, ex incarnato colore nigris.

Habitat in *Perſia*: ab Excellentiſſimo Gubernatore et Equite BEKETOW Aſtrachaniae enutrita auis, cuius eam munificentiae debeo.

VII.

VII.

PHASIANVS *Colchicus*, LIN.

PHASIANVS *Auctorum*. Ruth. Fasan vel dikaia kuriza. (фазанъ или дикая курица.)

Ad complendam descriptionem BRISSONIANAM sequentia spectant.

MAS. *Supercilia* pallide violacea, plumulis minimis nigris adspersa. *Membrana* cartilaginea, nares tegens, rostri adinstar, coloris cornei. *Pupilla* atra. *Gula* sature viridis, et prae virore nigrescens. *Collum inferius* e viridi aureum. *Colli superioris* pars *anterior* e viridi et violaceo splendens, *posterior* et *dorsum* in nostris ruso igneum, *pennis* apice cordatim nigro emarginatis. *Dorsum* inferius plumis, lituris nigris et albis variis, apiceque ruso aureis. *Femoralia* castaneo tantillum intermixto, fusca. *Remiges* viginti quatuor, primoribus fuscis, fusco albidoque transuersim fasciatis, *secundariis* cinereis. *Tectrices* ferrugineae, exterius in violaceum vergentibus. *Vropygium* immixto viridi, dilute castaneum. *Tectrices* rectricum colore vropygii.

FEMINA. Ex fusco gryseo, rufescente et nigricante varia, mare multo difformior, vt in Gallinis semper. *Supercilia* in nostris nudiuscula, e viridi et cinereo albentia. *Cauda* rectricibus, punctis creberrimis, nigris adspersis, nigro et cinereo-nigro transuersim striatis.

Degit in arundinetis prope mare *Caspium* copiosissima, humi nidificans, nidumque gallinae adinstar exstruens. Ponit oua ad duodecim.

VIII.

Tab. XIV.

ARDEA *Kwakwa.*

Nycticorax L.

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo totius auis ab extremo rostro ad extremam caudam - - -	1.	9.	2.
—— —— rostri - - - - - -	0.	2.	4½.
Distantia a basi mandibulae superioris ad oculos - - - - - -	0.	0.	5.
—— —— —— inter oculos - - -	0.	1.	4.
—— a basi rostri ad flexuram cubiti	0.	10.	9.0
—— a basi mandibulae inferioris ad nucham - - - - - -	0.	2.	4.0
Longitudo colli - - - - -	0.	7.	6.0
Distantia alarum expansarum - -	2.	8.	0.0
Alae complicatae caudam exacte attingunt			
Circumferentia corporis circiter aequalis	0.	9.	0.0
Longitudo cristae maioris - - -	0.	4	3½.
—— —— —— minoris - - -	0.	2.	11.0
—— pedum cruribus denudatorum vsque ad pedes - - - - -	0.	3.	6.0
—— digiti antici medii - - - -	0.	2.	3.0
—— —— —— extimi - - -	0.	1.	8.0
—— —— —— intimi - - -	0.	0.	11.0

DE-

DESCRIPTIO.

Roſtrum rectum, nigrum, acutiſſimum *mandibula ſuperiore* paululum longiore, ſulco longitudinali vtrinque notata. *Nares* ad baſin roſtri, lanceolato-lineares, peruiae. *Anterior pars frontis* alba. *Taenia* vtrinque candida a fronte trans tempora ſuper oculos excurrens, pone eos anguſtata. *Iris* coccinea, *pupilla* nigra. *Omne reliquum caput ſuperius* e viridi colore atrum, *pennis* longiuſculis, dependentibus, ſubcriſtatis, e quarum medio erigitur *criſta* ſolitaria, filamentoſa, alba, vltra dorſi initium continuata. *Latera occipitis*, *caput inferius*, *vtrumque collum*; *ſternum*, *ſubalaris regio*, *abdomen*, *femoralia* cum *criſſo* alba. *Dorſum* e viridi colore nigrum. *Remiges* earumque *tectrices* immaculate cinereae. Illae complicatae caudam extremam exacte attingunt. *Cauda rectricibus* duodecim ſubaequalibus, cinereo-albicantibus. *Pars femorum plumis denudata* flaua. *Tibiae* flauae. *Digitus anticus medius* cum extimo membrana lutea, ad primum fere articulum vsque protenſa, connexus. *Vngues* pallide nigri, incuruati, omnium maxime poſtico.

Ad *Tanais* littora degit, migratoria auis, trans mare nigrum primo vere adueniens, eoque autumno redeuns, nobis primo ad caſtellum, quod a diuo Paulo nomen ſortitum eſt, obſeruata, et poſtea ingentibus cohortibus ad omnia huius fluuii littora ad *Tſcherkask* vsque vrbem viſa. A voce quam edit, ruthenice Kwakwa (кваква) dicitur, eodem que nomine Ornithologico eam inſigniui. Victitat congenerum more piſcibus, more ſequentium, quas nunc propono.

IX.

Tab. XV.

ARDEA *caſtenea*.

DESCRIPTIO.

Longitudo a ſummo roſtro ad imam caudam pedi vni, pollicibus decem, et lineis ſex reſpondet. *Roſtrum* fere tres pollices longum eſt, baſi ſua liuidum, extremitate nigrum, acutiſſimum; vtrinque ſulcatum. *Nares* lineares anguſtiſſimae; *mandibula inferior* ſubtus *membrana* viridi cincta, a ſpatio, quod oculos et roſtrum interiacet, continuata. *Caput* exiguum. *Vertex* et *occiput* pennis longis laxisque e candicante nigricantibus, criſtam vsque ad medium collum protenſis abeuntibus. *Gula* alba, ſaccata. *Spatium* inter oculos et roſtrum medium, viride, linearum quatuor. *Supercilia* viridia. *Iris* crocea. *Pupilla* nigra. Longitudine caput pollices 2 et lineas 4 aequat; ab illius autem baſi ad finem criſtae pollicum 4 et linear. 3 ſpatium intermedium eſt. *Oculi* vnum pollicem et quatuor lineas diſtant. A baſi autem roſtri ad flexuram cubiti 8 poll. et 9 lin. numero. *Latera* capitis flaueſcunt. *Collum* gracilisſimum, caſtaneo-flauum longitudine pollicum 8, et linearum 10. *Inferius* e flauo et candicante colore varium eſt. *Dorſum* caſtaneo-rufum, *pennis* conſtans

ſetifor-

ſetiformibus, longiſſimis. *Pectus*, *abdomen*, *vropygium*, *et ſemoralia* niuea, flauedine rarius interſperſa. *Remiges* 24. niueae, vltra caudam extenſae, ex his interius, ſed inconſtanter quaedam latere poſteriori maculis nigris conſpurcatae ſunt. *Tectrices* e niueo colore obſolete flauae. Remiges expanſae vnum pedem et pollices vndecim ab inuicem diſtant. *Rectrices* 12 itidem vtrinque niueae quaedam apicibus nigro maculatae. Earum *veſtitrices* coloris eiusdem. *Pedes* crocei. *Femora* quousque nuda ſunt, linearum nouem; *Tibiae* pollicum duorum, *digitus anticus medius* pollicum duorum et linearum ſex, *intimus* cum eodem pollicis vnius et linearum nouem; *extimus* pollicis vnius et linearum ſeptem; *poſticus* vero pollicis vnius et quatuor linearum. Hi vngues nigri ſunt, valde incurui, longiſſimus autem poſtici, inter omnes iterum quam maxime arcuatus. Cohaerent digiti antici, vt in Ardeis moris eſt; membrana inter ſe, vix autem notabilis eſt inter digitum intimum et medium.

Venit et haec ſpecies e mari nigro ad Tanain, nec autem vltra progreditur ac ter centum circiter ſtadia ab oſtio celebris huius fluuii in terram, ibi autem, congenerum ritu in arborum cacuminibus nidificare ſolet.

Comparata auis cum deſcriptionibus Auctorum, inprimis cum ſpeciebus, quas BRISSONI ſynopſis Auium methodica exhibet, adfinitates quidem oſtendit cum cancroſagis n. 33. 34. 35. 36 et 37. ſed

in

in nullam exacte quadrat, quare eam non descriptam puto.

X.

Tab. XVI.

ARDEA *Ferruginea.*

DESCRIPTIO.

Ruthenis Cosacis ob vocem, quam edit bouinae similem быкъ dicitur. Auis, quam exhibeo, longitudine adaequat, pedem vnum, pollices nouem, cum lineis quinque, crassitie vero vix respondet dimidio pedi cum lineis quinque. *Rostrum* rectum, acutum. *Mandibula superior* supra fusca, apice vix decliuis, infra ex incarnato colore viridis, medio inter hanc coloris diuersitatem sulco notata, a naribus producto. *Mandibula* inferior incarnato viridis, et apice tantum vtrinque lateribus fusca. *Nares* lineares, longitudine linearum septem, angustae, et aequalis vbique latitudinis. Spatium rostrum inter et oculos intermedium nudum, viride diametro longitudinali linearum septem cum dimidia, latitudinali, vbi maximus est, linearum quinque. *Supercilia* nuda, medio liuida, ambitu viridia. *Iris* croccea. *Pupilla* nigra. Oculos autem haec auis sat magnos habet, quod si enim in viua contemplaris, diameter eorum longitudinalis lineas septem, latitudinalis vero quinque adaequat; oculi e contra ipsi a semet inuicem vnum cum dimidio pollicem distant. Summa frontis basis tres fere pollices a fine occipitis

pitis distat. Capitis autem latitudo summa infra tempora mensurata pollicibus duobus, lineisque tribus aequalis est. Hoc *caput* oblongum est, nigrum, *pennarum* apicibus extremitate ferrugineis. *Pennas* in vertice extantes obseruo non nullas, sed ita capiti adprimuntur, vt cristae nomen vix mereri videantur. *Collum* gracile, elongatum, pedis fere dimidii, colore capitis, ita vt pennae inferiores cinerescant, qui quoque color nec in capitis pennis inferioribus excluditur. *Mentum* ex albo flauet, candicans que etiam color medio in collo inferiore adparet, ceterum priori simili, magis tantum ruso. *Dorsum* quoque nigricat, et extremitate pennae ferrugineae sunt. *Remiges* 26. fusco-nigrae, omnibus apice candidis, et vltimis latere anteriore obsolete rufo maculatis. *Tectrices* coloris eiusdem, remotis apice ferrugineis, vicinis albo et rufo variis. *Pectus*, *abdomen* et *vropygium* e ferrugineo, candicante, fusco, cinereo que colore varia. *Femoralia* e rufo et cinereo candida. *Pedes* virides. *Femora* nuda longitudine linearum quinque. *Tibiae* pollicum 2. linearum 6. *Digitus anticus medius* cum suo vngue longitudinis eiusdem. *Intimus* pollicis vnius, linearum vndecim, *extimus* pollicis vnius, linearum nouem cum dimidia, posticus pollicis vnius, atque linearum sex. *Vngues* pro more incurui, pallidi, postici illo crassiore quam maxime, et medio inferius dentato. Basis rostri a temporibus mensurata, a flexura cubiti 8 pollices cum linea vna distat. Alae complicatae caudam vix excedunt. Expansae duos pedes et duos pollices

 paulo

paulo que vltra a ſemet inuicem diſtant. *Rectrices* duodecim, aequales, cinereae. *Veſtitrices* fuſco-cinereae.

Pondere Ruthenico pendet libram vnam cum quadrante.

Cum priori degit, migratur, et eodem piſcibus inſectisque veſcitur more.

XI.

Tab. XVII.

ARDEA *niuea.*

Ruthenice бѣлой шабуръ.

Longitudine eſt duorum pedum et linearum 2 menſurando auem ab extremo roſtro ad ſummam caudam. *Roſtrum* rectum, acutum, longitudine pollicum trium linearumque ſex, ſulco e naribus producto notatum, laeuiſſimum, nigerrimum. Spatium inter oculos et roſtrum nudum e flauicante caeruleum, diametro transuerſali menſuratum pollicis vnius. *Caput*, *collum*, *dorſum*, *pectus*, *abdomen*, *vropygium*, *femoralia*, *remiges*, quarum numero viginti ſex ſunt, *rectrices* duodecim, vtrarumque tectrices niueae. *Criſta* nulla, ſed collum vtrinque prope inſertionem ſuam *plumis* extantibus amictum eſt, criſtae ſpeciem mentientibus, dorſumque terminatur *pennis* longiſſimis, vtrinque crinitis, ſimilibus pauonis criſtati plumis. Earum color ex albido in flaueſcentem aliquantum vergit. *Femora* quousque nuda, pollices duos longa ſunt. *Tibiae* pollices tres

habent;

habent; vtraque colore nigro obſeruantur conſpicua, et interrupta ſunt inciſuris, lineis, circulis, figuris que rhomboidalibus, omnibus mire ſe decuſſantibus. *Digitus anticus medius* pollices duos, lineas que tres longus. *Vnguis* linearum 8. latere dentatus. *Digitus anticus intimus* pollicis vnius, linearum 9. *Vnguis* illius linearum ſex, extimus pollicis 1 et linearum 10. vnguis linearum 5 poſticus cum ſuo vngue pollicem vnum et lineas decem. *Femora* et *pedes* nigra. *Digiti* crocei. Vngues iterum nigri. Hi arcuati, at poſticus inter omnes quam maxime. Alae complicatae vltra caudam extenduntur.

Femina mari magnitudine cedit, pennas que, quas ad collum et dorſum deſcripſi, multo minores habet. Ceterum plane eadem. In ventriculo, quum valde magnum vidi, piſciculos multos deprehendi. *Hepar* ingens eſt, et in duos lobos fiſſum, quorum dexter ſiniſtrum longitudine ſuperat. *Cor* magnum, cunei forma. *Inteſtina* longo canali inſtituuntur, infra ampliato.

In altis arboribus nidificat, ex mari nigro vere *Tanain* petens, ſed hunc fluuium vix per quatuor centum leucas proſequens, autumno, quo venit, redit.

XII.

Tab. XIII.

NVMENIVS *igneus.*

Ruthenis Kafacis Krawaika : (Кравайка :)

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo ab extremo roftro ad extremam caudam - - - -	I.	II.	0.
—— roftri a bafi frontis menfurata -	0.	5.	I.
—— roftri a bafi temporum menfurata	0.	5.	0.
—— narium - - - - - -	0.	0.	3.
Longitudo narium - - - - - -	0.	0.	$1\frac{1}{4}$.
Longitudo a bafi narium ad canthum oculorum anteriorem - - -	0.	0.	10.0
—— a bafi roftri frontali ad eundem tranfuerfim menfurata - -	0.	0.	8. 0
Diftantia inter nares - - - -	0.	0.	$2\frac{1}{5}$.
Diameter oculorum longitudinalis -	0.	0.	4.
—— oculorum latitudinalis - -	0.	0.	$2\frac{1}{2}$.
Diftantia inter oculos - - -	0.	I.	0. 0
Longitudo a bafi roftri temporali ad flexuram cubiti - - - -	0.	6.	10.0
—— capitis - - - - -	0.	4.	$7\frac{1}{2}$.
Latitudo fumma - - - - -	0.	I.	$3\frac{1}{2}$.
Longitudo colli - - - - -	0.	6.	6. 0
Circumferentia colli infra caput menfurata - - - - - - -	0.	3.	6. 0
—— ipfius ad ingreffum - - -	0.	4.	3. 0
Longitudo a principio putoris ad extremam caudam - - - - - -	0.	II.	I.0
—— caudae - - - - - - -	0.	5.	10.0

Maxima

	Ped.	Poll.	Lin.
Maxima latitudo abdominis - - -	0.	3.	0. 0
Longitudo femorum cruribus denudatorum - - - - - - - - -	0.	2.	0. 0
—— tibiarum - - - - - - - - -	0.	3.	7. 0
Longitudo digiti antici medii cum vngue - - -	0.	3.	2. 0
—— digiti antici extimi cum vngue	0.	2.	5
—— —— intimi - - - - - -	0.	2.	$2\frac{1}{2}$.
—— postici cum vngue - - - -	0.	1.	0. 0.

DESCRIPTIO.

Rostrum laeue, teretiusculum, valde arcuatum, obtusum; *mandibula superiori* tantillum longiore, lateribus vtrinque sulcata, coloris viridis, mortua aue in oliuaceum inclinantis. *Nares* ad basin rostri frontalem oblongae, medio latiusculae. *Lingua* principio bifida, dentata, longo, acuto, et angusto fine terminata. *Caput* oblongum, nigrum, apicibus pennarum albo fimbriatis. OCVLI *palpebris* fuscis absque ciliis, *iride* oliuacea, *pupilla* nigra. *Circulus* albus ab oculorum angulo superiore inferius perpendiculariter descendens, transuersim per frontem decurrens, postea adscendens, ad angulum superiorem oculi alterius terminatus. Similis, sed angustior *circulus* sub oculis decurrens, perpendiculariter descendens rostri mandibulae inferiori implantatus. *Caput inferius* eodem, ac superius, colore donatum. *Collum* gracile, elongatum, colore capitis, hac cum differentia, quod pinnae posterius absque extremo candore omnino

 nigrae

nigrae obseruentur. *Collum inferius* superiori in omnibus respondet. *Reliquum corpus* e cyaneo, nigricante, viridi et vinaceo splendentibus coloribus varium, vnde auis, per aëra volitans, solis illustrata radiis aurea videtur esse. *Pectus et Abdomen* e nigricante rufa. Hic que posterior color praeualet. *Remiges* vinginti quatuor, gradatim minores, e viridi et aureo pulcherrime splendentes. *Complicatae* vltimam caudam attingunt. *Expansae* vltrà duos pedes a semet inuicem distant. *Inferius* eundem colorem adfectant, ob nigredinem tamen immixtam paulo saturatiores adparent. *Tectrices primi ordinis*, corpori scilicet vicinissimae, e rubicundo et cyaneo, *secundi* e nigro, rubro, viridi, *tertii*, remigibus quippe propiores, e viridi splendentes. *Cauda* aequalis e viridi et violaceo varia, terminata *rectricibus* duodecim e rubro, viridi, et aureo splendentibus, subtus coloris eiusdem. *Vropygium* et *femoralia* colore abdominis. *Pedes* longissimi, laete virides. Digitus medius cum extimo membrana viridi coniunctus. *Vngues* nigri, incurui.

Degit ad littora *Tanais*, ad *Choperum* fluuium quoque frequens, piscibus et insectis victitat, gregatim volat, in altis nidificat.

XIII.

Tab. XIX.

NVMENIVS *viridis*.

DESCRIPTIO.

Magnitudine et crassitie Numenio arquato similis est. Ipsius nempe longitudo ab extremo rostro vsque

vsque ad finem caudae pedem vnum aequat, cum ſeptem et dimidio pollicibus. *Roſtrum* pollicum trium cum dimidio, laeue, coloris ex fuſco plumbei; *Mandibula inferior* ſubtus et latere incarnata. Idem roſtrum vehementer arcuatum, *Mandibula ſuperiore* ſulco pariter medio excauata, intra quem membrana iacet a temporibus producta, *Nares* ex parte cooperiens, atque abhinc flexibilis in ſulco deliteſcens, vsque dum ſenſim et ſenſim anguſtata circum finem roſtri euaneſcat. *Nares* anguſto principio ortae lateſcunt, et eandem latitudinem vsque ad finem ſervant. Eorum autem diameter longitudinalis lineis octo reſpondet, latiſſimae vix duas lineas adaequant. *Lingua* illi ſimilis eſt, quam in numenio igneo deſcripſi. *Caput* oblongum, longitudine pollicum duorum, latitudine, vbi ea maxima, pollicis vnius cum dimidio, color illius ad nigricantem accedit, pennae tamen margine ſuperiore obſolete candicant. *Macula* ſupra oculos alba, occiput reſpiciens. *Maculae* duae vel tres in vertice albae, vagae. *Oculi* parui, lineas nouem a naribus diſtantes, *ſuperciliis* nudiuſculis, *Iride* pallido, *pupilla* nigra. *Spatium* roſtrum inter et oculos intermedium nigrum, rugoſum, nudum. *Collum* elongatum, pollicum quatuor cum dimidio, gracile, e gryſeo colore nigrum. *Mentum* nigricans punctulis albicantibus notatum. *Collum inferius* colore ſuperioris, at anterius interruptum faſciis transuerſis tribus, albis, diſtantibus, accedente quarta obſoleta. A baſi roſtri ad flexuram cubiti ſpatium intermedium eſt, pollicis cum quatuor lineis adaequans. *Dorſum*

viri-

viridi-aureo colore ſplendens, ſimillimus illi, quem Galli *changeant* vocant, conuexum, vsque ad finem caudae 8 cum dimidio pollices longum. *Pectus* et *Abdomen* e fuſco nigricantia. *Remiges* viginti ſex, viridi et cyaneo colore, ſaturatius ſplendentes. *Tectrices* omnes coloris eiusdem. *Rectrices* duodecim aequales, colore dorſi, *vropygium* et *femoralia* colore abdominis. *Pars crurum plumis denudata* pollicis vnius et linearnm ſex, circulis notata. *Tibiae* pollicum 3 et linearum 2, inciſuris transuerſis per omnem ſui longitudinem interruptae. *Digitus anticus medius* longitudine pollicum duorum et lineae 1. vnguis illius linearum 4. *Digitus anticus extimus* cum vngue longit. poll. 2. et linear 2. Intimus pollicum 2. Anticus medius cum extimo cohaeret membrana vsque ad articulum primum producta, et cum intimo membrana ſimili, mox deficiente. *Poſticus* omnino ſolutus eſt. *Pedes* autem cum *vnguibus* colore nigerrimo praediti ſunt.

Iisdem cum *N. igneo* locis degit, iisdem cibis viſtitat, at volatu demiſſiore differt, et aëra, hirundinis ad inſtar, percurrit.

Non refragabor, ſi quis hanc Numeniorum bigam ad genus Tantali referre velit, nam ſecundum definitionem huic generi adplicatam *iugulari ſacco* eo omnino pertinet. Sed nondum perſpicio, an hic Tantalos a Numeniis ſufficienter diſtinguat.

XIV.

XIV.

ANAS *eritrocephala*.

Tab. XX.

Ruth. Krasnogolowoi Nyrok.

(Красноголовой Нырокъ :)

	Ped.	Poll.	Lin
Longitudo auis ab extremo roſtro ad extremam caudam - - - -	1.	3.	10.
—— mandibulae ſuperioris a baſi frontis menſurata - - - - -	0.	1.	11.
—— —— a media fronte menſurata	0	2.	4.
—— —— a baſi temporum menſurata	0.	2.	1
—— mandibulae inferioris a baſi menti vsque ad extremum -	0.	2.	$1\frac{1}{2}$.
Diſtantia oculorum a baſi roſtri anteriore ad mediam frontem - -	0.	0.	17
—— —— a baſi roſtri poſteriore ad baſin frontis - - -	0.	1.	$0\frac{1}{2}$.
—— —— a baſi roſtri laterali ad baſin temporum - - -	0.	0.	$10\frac{3}{4}$.
—— inter oculos - - - - -	0.	0.	$11\frac{4}{5}$.
Longitudo capitis ad nucham - - -	0.	2.	$10\frac{1}{2}$.
—— colli - - - - - - -	0.	4.	1.0
—— pectoris vsque ad vropygium -	0.	8.	0.0
Diameter latitudinalis abdominis - -	0.	4.	11 0
—— ab extremo collo ad flexuram cubiti - - - - - - -	0	3.	7. 0
Alae expanſae diſtant - - - - -	1	6.	10.
Longitudo caudae - - - - - - -	0	2.	2.
—— femorum cruribus denudatorum	0	1.	10.

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo digiti antici medii - - -	0.	2	6.
—— vnguis illius - - - - -	0.	0.	5.
—— digiti antici intimi - - -	0.	1.	9.
—— vnguis illius - - - -	0	0.	4.
—— digiti antici extimi - - -	0.	2.	3.
—— digiti poftici - - - -	0.	0.	7.
—— vnguis illius - - - - -	0.	0.	$2\frac{1}{4}$.

DESCRIPTIO.

Roftrum ad exortum duplici conuexitate, in, quam plumago frontis demittitur, fenfim planum, bafi medio lateribus que nigrum, medio pallidum, vngue nigro, gibbo terminatum, *mandibula inferiore* fafcia candicante ad vtrumque fulcum, duplici convexitati fuperioris refpondentem. *Caput* turgidum. *Frons*, *tempora*, *vertex*, *occiput*, *collum* caftaneo-fplendentia, macula fubtus fordide alba ad bafin maxillae inferioris longitudine linearum duarum, diametro linearum 2. cum dimidia. *Pupilla* nigra. *Irides* coccineae. *Oculi* minimi linearum vix duarum. *Collum* contractum *Pectus* dilatatum, fupra nigrum, anterius medio plumis rubicundis a collo excurrentibus, varium, infra quoque nigrum, fed plumis pofterius fufco et albo ciliatis. *Dorfum* cinereum, lineolis nigricantibus transuerfim vndatimque ftriatum. *Abdomen* cinereo punctatum, et circinnatum. Regio *vropygii* profundius gryfea, circulis nigricantibus, hinc inde flauefcentibus vndata. Regio pone illud e fufco nigra. *Remiges* 24, primores 1-10, gryfeae apice

apice nigricantes 11 - 24 gryſeae, apice albicantes, punctis que albicantibus adſperſae, quae in vltimis ad vtrumque latus confertiſſimae, nigricantes euadunt. *Tectrices* corpori propriores, gryſeae, ſymmetrico ordine nigricantibus circulis vndatim ſtriatae, quo magis alis vicinae, e gryſeo-fuſcae, lineis que albicantibus transuerſis absque ordine notatae. Infra *Tectrices* omnes candicant. Plumae femora tegentes reſpondent veſtitricibus, corpori viciuis. *Cauda* breuiſſima, *rectricibus* 12, latere anteriore flaueſcentibus, duabus vtrinque extimis immaculatis. *Pedes* pallide incarnati. Faſcia ad ſingulos articulos nigricans. *Vngues* et *membrana* connectens nigra.

FEMINA differt, quod pectus cum capite et collo concolor ſit, nebuloſo ferrugineum illud intenſius, hoc dilutius. *Dorſum* fuſco cinereum. *Hypochondria* ferruginea, quae in mare alba.

Videtur Anas Fiſtularis BRISSON ord. 24 gen. 107. ſp. 21. eſſe, ſed deſcriptio ferinae, ad eam excitatae, quatenus in fauna ſuecica habetur, vix quadrat.

XV.

Tab. XXI.

ANAS *Kogolka.*

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo totius Auis - - - -	1.	6.	$2\frac{3}{4}$.
—— roſtri ab apice frontis vsque ad baſin extremam - - - -	0.	1.	$5\frac{1}{2}$.
—— —— a temporibus ad eandem baſin menſurata - - -	0.	1.	$7\frac{1}{2}$.
Peripheria roſtri - - - - - -	0.	0.	$9\frac{1}{2}$.
Longitudo maxillae inferioris a temporibus ad apicem - - - - -	0	1.	$6\frac{3}{4}$.
—— —— a baſi menti vsque ad extremum - - - - - -	0.	1.	2. 0
—— a frontis baſi anteriore vsque ad nucham - - - - - -	0.	2.	5. 0
Diſtantia a baſi roſtri ad initium remigum - - - - - -	0.	2.	0. 0
—— oculorum - - - - -	0.	0.	$10\frac{1}{2}$.
—— roſtri ab oculis - - -	0.	0.	$9\frac{1}{4}$.
Peripheria oculorum - - - - -	0.	0.	$3\frac{3}{4}$.
Diſtantia a baſi roſtri laterali ad nucham	0.	2.	0. 0
Longitudo colli - - - - -	0.	4.	$3\frac{3}{4}$. 0
Diameter pectoris - - - -	0.	3.	7. 0
—— dorſi - - - - -	0.	4.	4. 0
Longitudo pectoris et dorſi - -	0.	6.	0. 0
—— regionis vropygii - - -	0.	2.	0. 0
—— Caudae - - - - -	0.	3.	8. 0
Alae expanſae diſtant - - - -	1.	8.	4. 0
—— Complicatae caudam extremam attingentes - - - -			

Lon-

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo femorum cruribus denudatorum vsque ad exortum digiti medii	0.	1.	$7\frac{3}{4}$.
—— digiti antici medii - - -	0.	1.	8. 0
—— vnguis illius - - - -	0.	0.	5. 0
—— digiti antici extimi - - -	0.	1.	$4\frac{1}{4}$.
—— vnguis illius - - - -	0.	0.	3. 0
—— —— intimi - - - -	0.	1.	$2\frac{3}{4}$.
—— vnguis digiti antici intimi -	0.	0.	4.
—— digiti postici - - - -	0.	0.	$3\frac{1}{4}$.
—— vnguis illius - - - -	0.	0.	$2\frac{1}{2}$.

DESCRIPTIO.

Rostrum medio conuexum, lateribus compressum, supra pallide violaceum, vngue gibbo, nigerrimo, infra pariter nigrum. *Linea* ad omnem illius basin nigra, supra ad exortum frontis triangulum inaequilaterale formans. *Caput* tumidum, subcristatum. *Fascia* alba ad *frontem* et *verticem* inter oculos, longitudine pollicis vnius cum lineis decem et dimidia, diametro linearum fere octo, maculis castaneis ad frontem frequentioribus varia. Reliquum *caput*, *collum superius* et *inferius* cum *gula* ex ruso castanea; temporibus punctis nigris, ad ossa parietalia excurrentibus, adspersis, oculorum orbita punctis maculisque ex nigricante et viridescente colore splendentibus, et abhinc occiput versus non nunquam conspicuis, circumdata. *Irides* liuidae. Caput inferius medio a basi maxillae inferioris vsque ad supremum collum pollicum trium septemque linearum, spatio e caſtaneo colore nigricat. *Collum ſuperius poſteriusque* et *dorſum* concolora, ex cinereo et nigricante transverſim vndatimque ſtriata. Pectus inferius antice caſtaneum, poſtice gryſeum. *Pectus* et *prolobi* cum *vropygio* dilute caſtanea. *Venter* niueus, criſſo nigro. *Remiges*, primores 10, fuſcae, latere poſteriore gryſeae, ſecundariae priores 8, excepta prima, primoribus reſpondentes, latere anteriore e viridi ſplendentes, eodem apice nigro terminatae, poſteriori gryſeae; ſubtus coloris eiusdem, quemadmodum ſecundariae. *Tectrices* corpori propiores, gryſeae; quae alas ſecundarias obuoluunt, niueae, apicibus nigerrimis ſplendentes; quae primores fuſcae, duabus prioribus infra candicantibus, punctisque et lineis gryſeis, confertis adſperſis; vltimis gryſeis, et ſimilibus punctis ad marginem, apicemque notatis. *Regio* ſubalaris et plumae femorales ex albicante et nigricante transuerſim et vndatim ſtriatae. *Rectrices* 14 gryſeae, ſubaequales, margine anteriore tantiſper albicantibus, duabus mediis, reliquis paulo longioribus, fuſcis; illis infra e diluto gryſeo colore candicantibus; his ſaturate gryſeis. *Tectrices* ex nigricante, gryſeo alboque colore variae. *Pedes* liuidi. *Vngues* nigricantes.

An ſufficienter ab A. Penelope diſtincta? Fere, dum haec ſcribo, conuenire nimium mihi videtur.

XVI.

XVI.

ONOCROTALVS *Auctorum.*

PELECANVS *Onocrotalus* LIN.

Ruthenice баба.

DESCRIPTIO.

Mas eſt, quam dico, valde annoſa, magnae magnitudinis, anſerem tota corporis figura referens, ni ad roſtrum attendas, tardiore inceſſu, prolobosque propendente cygnum. *Roſtrum* habet rectum, flauum, dum liuidum in iunioribus eſſe ſolet, rubrumque in perfectis. *Mandibula ſuperior* in tres lamellas diſtincta, media ad frontem ſubrotunda, verſus apicem plana, ſenſim anguſtiore, cui ligula adunca, deorſum flexa, flauicans dura ac oſſea adnaſcitur; vtrinque ad hanc lamella lateralis, ad ligulam roſtri aduncam deficiens, ad mediam ſubrotundam rimam formans, quae nares fere obliteratas 1 — 10 pollicis, a plumagine frontis ſitas, recipit, non niſi membrana roſtri diducta in conſpectum venientes. *Subſtantia* roſtri cornea, lacuiſſimae preſſioni cedens, *ligula* autem *adunca* robuſtiſſima, qua piſces lubricos comprimit, exanimatosque roſtri protenſo vnco ſaccatae gulae immittit. *Iris* e cinereo flaueſcens. *Pupilla* opalina coeruleſcens. *Plumago frontis*, parte, qua roſtrum attingit, cinerea, ea parte, qua medium roſtrum ſpectat, deficiens, nares verſus duobus veluti cornubus latius diffunditur *Mandibula*

dibula inferior 5 eminentiis linearibus quatuorque aequalibus intermediis ſpatiis ſecundum longitudinem excurrentibus inaequalis, aſpera, nec, vt in anſeribus, villoſa. Ita enim cauet natura, ne petita praeda, dum proiiciendo eam gulae admouere debet onocrotalus, elaberetur. Deficientibus eminentiis palati rima conſpicitur, et poſt hanc inter nares et oculos ad perpendiculum eminentia quaedam longa pollicem, acuminabus gibboſa: rima palati ad nares hiat, huius que ope ſaccum ſublingualem, adeo capacem, mandibulae inferiori ita adducit auis, vt ne vel minimum propendeat. Eadem rima raucori vocis inſeruit, clauſis enim mandibulis haec clamoſior euadit, et ad Aſinorum grunnitum accedit. *Mandibula* inferior ſuperiori tantillum breuior, tres circiter pollices a plumagine frontis remota capiti articulatur, inde diuaricata, non niſi 4 pollices in vnum coit, ibidem validiſſimo apice oſſeo donatur, interius eminet areola quaedam gibboſa, quam ſulcus ambit, areola autem illa reſpondet cauitati ligulae mandibulae ſuperioris, et adprehenſioni fortiori inſeruit. *Latera* mandibulae inferioris adaucta ſuperioris anguſtiora, et gulam verſus ſaccatam oblique ſubſtantiae corneae, introrſum extrorſumque flexilia. Huic mandibulae inferiori ab interiori parte ſaccus ſublingualis appenditur. *Saccus* ipſe validus, membranaceus, e multis venis a lingua ortis ortus, huicque lingua ipſa ſub oculis adcreta eſt, frenum autem retrorſum et verſus roſtri ligulam extenditur, tantamque ſacco elaſticitatem praebet,

vt

vt ſecundum neceſſitatem molem et magnitudinem praedae pro lubitu extendi et mandibulae adduci poſſit. Extendit autem Onocrotalus ſaccum hami adinſtar, et deglutit. Irata hominum manus pedesque ferire intendit, tuncque mandibulam ſuperiorem inferiori fortiter allidit, vt inſignis ſtrepitus oriatur.

A plumagine frontis ad nucham ſpatium eſt 3 et $\frac{2}{15}$ pollicum. Caput plane anſerinum ad frontem non nihil rotundatum, in vertice planum, verſus nucham latius adſurgens, ad oculos planum, mentum verſus oblique latius. Mentum ipſum latiſſimum, et ſi ſaccum propendentem exceperis, omnino planum. *Caput* et *collum* villis potius, quam plumis tecta. *Illud* compreſſum, oblongum, *ſcapis* pennarum fuſcis, *radio* denſo, albo, verſus apicem ſpectante. *Occiput* criſtatum. *Aures* freno oris ſitu parallelae, anſerinae. *Dorſum* in quibusdam cinereo-albidum, in aliis candidum. *Vropygium* album, *cauda* ſubrotunda, rectricibus 22. albis, lateribus fuſcis et ad apicem cinereis. *Remiges* 56. extimis maioribus, tertia longiſſima, ſcapis omnium atris, latere anteriore nigris, poſteriore albo nigroque dimidiatis, nigro praedominante. Vsque ad remigem octauam nigredo praeualet, latere adeo interiore, tum autem albus augetur color, vt mediae minores totae candidae euadant, et vltimae iterum maiores colore e fuſco cinereo tinguntur. *Tectrices* ſupra colore dorſi, infra candidae, neque vero in colore totius corporis conſtantia datur. Variat plurimum

 aetate

aetate Onocrotalus, variatque loco. Vidi in Castello *Nowopavlovsk* fere totos candidos et *Astrachaniae* vidi fuscos, incarnatos, alios que scapulis splendentes nigris, vt plane certi determinem nihil. Sed adlegata coloris ratio omnium frequentissima occurrit. *Pedes* crassi. *Femora* plumosa. *Tibiae* nudae, vndique squamatae, *squamis* circularibus liuidis. *Digiti* membrana crassa, inferne vltra dimidium vnguiculorum excurrente, plumbea, subtus que rubicunda inter se connexi. *Digiti* quatuor, scutis semicircularibus loricati, intimo minimo, secundo longissimo, quem magnitudine primus, hunc que tertius sequitur. *Vngues* crassi, viridiusculi, spatulati. Lingua hac in aue singularem attentionem meretur. Adeo minuta est, vt imposuerit multis Auctoribus, nullam habere. Scilicet ligulae tantum meretur nomen, vix enim vltra dimidium pollicem longa, cartilaginea apice deorsum flectitur, pollicem vnum a Laryngis rima remota, ad latera vtrinque *ossi hyoidi* adnascitur, et intra illius deuaricata crura valida, vt vt tenui, expanditur membrana. Aldrouando elapsum est, carere medulla ossa, sed bene ea repleta inuenio.

Onocrotalus adspectum hominum fugiens saepe in aquis delitescit, sed in illis ad al quod tantum temporis interuallum permanet. Vere lacus insignes, hyeme mare redit, qui Tanain abit, nigrum, qui Wolgam, Caspium, inter omnes lacus in toto terrarum orbe existentes, maximum; venit autem, et reuertitur cum Ciconiis, Anseribus, Gruibus,

bus, et Cygnis eodem tempore. *Femina* nidum ſtruit ex gramine arundinaceo, figura rotunda, latitudine diametrali, ſeſquipedali, concauo, mollibus graminibus impleto; nidum autem ſemper ſtruit ad inſulas lacuum et ceſpites muſcoſos, Ruthenis мун-дра dictos. Oua ponit alba, Cygni illis et magnitudine et numero plerumque reſpondentia, duo vt plurimum, tantum que temporis, vt Anſeres et Cygni excludendis illis inſumit. In nidos Femina aduentu hominum deturbata, oua ex illis excutit, in aquam deiicit, abeuntibus ſibi inimicis viſis oua, vndis immerſa, extenſo roſtro nidis denuo infert.

Piſcibus victitat, magnam eorum vim conſumit, in piſcatu Pelecani carbonis, Ruthenis бакланъ dicti auxilio opus habet. Onocrotalus expanſis alis agitat aquas, Carbo infra alis prouocat piſces, alis Onocrotalus illos ad littus pellit, pulſosque deuorat, carbone comite et *Gauia ridibunda maiore* ſaepe accedente, exoptatam talem praedam non reſpuente.

Ad tringinta libras Ruthenicas ponderat.

XVII.

STERNA *metopoleucos.*

Tab. XII. Fig. 1.

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo totius auis ab extremo roſtro ad extremam caudam - - -	o.	8.	9.
—— roſtri - - - - - -	o.	1.	4.
—— a baſi mandibulae ſuperioris vsque ad oculos - - - - -	o.	o.	3.
Diſtantia inter oculos - - - -	o.	o.	8.

 Longi-

	Ped.	Poll	Lin.
Longitudo a basi mandibulae superioris ad flexuram cubiti - - - -	0.	2.	8.
—— caudae - - - - - -	0.	2.	9.
Alae expansae distant - - - -	0.	9.	6.
—— complicatae vltra caudam extensae			
Circumferentia corporis aequalis - -	0.	4.	5.
Longitudo frontis albae - - -	0.	0.	5.
—— nigredinis a basi frontis albae ad collum superius et anterius - -	0.	1.	4.
—— ab extremitate colli superioris ad finem dorsi - - - - - -	0.	3.	2.
—— femorum plumis obtectorum -	0.	1.	0.
—— pedum plumis denudatorum vsque ad exortum digitorum - -	0.	0.	11.
—— digiti antici medii - - - -	0.	0.	5.
—— vnguis illius - - - - -	0.	0.	3.
—— digiti antici intimi - - -	0.	0.	5.
—— vnguis illius - - - - -	0.	0.	1.
—— digiti antici extimi - - -	0.	0.	5.
—— vnguis illius - - - - -	0.	0.	1.
—— digiti antici postici cum vngue	0.	0.	$1\frac{1}{2}$.

DESCRIPTIO.

Ex hac dimensione patet ad minores pertinere, et sternas quidem habitu et volatu refert, neque proinde ob mandibulam superiorem, apice decliuem, lateribus que adplanatam et nares antice latiores sub laris militare puto. *Rostrum* basi rubrum, ab hinc flauum, extremitate nigrum. *Nares* diame-

diametro linearum duarum. *Lingua* ex lato principio ſenſim anguſtata, extremitate ſua bifida. *Frons* alba. *Tempora* nigra, vt omne *caput*, *collumque* ſuperius et anterius. *Dorſum* canum, immaculatum. *Cauda* forficata, niuea. *Prona pars* corporis a *mento* ad finem vropygii niue candidior. *Remiges* 26. 1 et 2 longiſſimis, fuſcis, latere poſteriori dimidiato albis, reliquis gradatim minoribus, eleganter cinereis, candore ad latus, poſterius in aliquibus ſuperſtite, ſubtus omnino niueis, praeſertim ſecundariis. *Tectrices* concolores. *Caudae* rectrices 12. niueae. *Oculi* mediocres. *Pupilla* nigra. *Iris* liuida. *Plumae* femorales niueae. *Pedes* crocei, graciles, tribus anterioribus membrana tenui inter ſe coniunctis, poſtico minimo ſoluto. *Vngues* incurui, nigri.

Ad aquas degit, piſciculis minoribus victitans, menſe Iunio nidificans, oua plerumque duo pariens, quibus per aliquot ſeptimanas incubat. Alte volat et velociſſime, vt difficulter explodatur, quin quod noſtra non obtigerim ſpecimina, niſi venator prius, ſternam hirundinem, quam agitabant, ipſius praedam auferre tentabant, exploſiſſet, et exploſam poſtea ſaepe in aëra proieciſſet, vt deciperentur volare humilius.

Femina a mari nec colore nec magnitudine differt. Vtrique vero indiſſolubiles ſocii.

Trans mare nigrum vere huc venit; primo autem centum verſtas a *Woronez* mihi viſus. Autumno redit.

 XVIII.

XVIII.

Tab. XXII. Fig. 2.

LARVS *Atricilla*. An varietas?

Sterna caspia Pall.

DESCRIPTIO.

Per omnia Atricillae auis similis est, cuius Iconem exhibeo, *rostro* quoque sanguineo, *pedibus* que nigris. Differt autem *capite* nigro albo que maculato, et magnitudine multo minor conspicuus est. *Dorsum* pariter canum; et *prona pars corporis* alba. Ad *Tscherkask* tantum vrbem vidi.

XIX.

Tab. XXIII. Fig. 1.

TVRDVS *roseus* LIN.

DESCRITPIO.

Magnitudine T. pilari aliquantum maior, crassitie ipsi aequalis. *Rostrum* pallide liuidum, tereti-cultratum, apice decliui terminatum, longitudine linearum nouem. *Maxilla inferior* superiori tantillum breuior. *Nares* ouato-oblongae. *Caput* nigrum. *Collum* e fusco-gryseum, marginibus plumarum nigris. *Dorsum* sanguineum, *gula* et *collum inferius* nigra. *Pectus* et *abdomen* sanguinea. *Remiges* ib. fuscae vnicolores, e *secundariis* vltimae latere anteriori viridi splendentes. *Tectrices* coloris eiusdem eodem que virore imbuti. *Rectrices* 12. nigrae. *Vestitrices* albo ferrugineae. *Femora* plumis e fusco-nigris obtecta. *Pedes* pallide rubri. *Digitus* posterior

rior anticis longior. *Vngues* valde incurui, pallide fuſci, nitentes. *Pupillam* nigram habet, pallida vero ſunt *Iris* et *palpebrae*.

Femina a mare abludit colore pallidius ſanguineo magnitudine quoque ipſi paululum cedit.

XX.

ALAVDA *mutabilis*.

Tab. XXIII. Fig. 2.

DESCRIPTIO.

Ab imo roſtro ad finem caudae ſeptem pollices cum duabus lineis longa eſt; corporis autem circumferentia quinque fere lineis reſpondet. *Roſtrum* linearum 8, baſi albidum, apice nigricans, ſubulatum, craſſum, recta decliue, *mandibulis* ſubaequalibus. Tota auis atra, extremitatibus pennarum in *collo ſuperiore*, *dorſo*, et ad *caudam* albo cano que colore fimbriatis. *Frons* feminae, quae atra in mare eſt, ſimiliter cana. Sed in vtrisque *prona* pars corporis aterrima, et *regio* tantum ſubalaris rarioribus caneſcentibus pennis ſparſim obſita. *Remiges* 18 nigerrimae, apice obſolete fuſceſcentes. *Tectrices* eodem colore donatae. *Cauda* ſubforcipata rectricibus 12 nigris, extima vtrinque immaculata, reliquis apice canis. Pedes et digiti nigri. E tribus anterioribus *medius* cum vngue, lateralibus magnitudine aequalibus, longiori *vngue*. *Poſtici* rectiore, vnguibus omnium longiore. *Oculi* minuti, *Iride* et *pupilla* liuidis.

Atque

Atque haec facies auis eſt, dum ſub adultam aetatem deprehenditur. Iunior alaudinaceum prae ſe fert ordinem, toto corpore cinerea, vel et e cinereo rubicunda, quemadmodum icon dorſum ſupremum exprimit. Mutatio in atrum colorem fit pedetentim, vt ſpecimina poſſideam, tota gryſeo-rubra, duabus partibus gryſea, vna que atra, gryſeo nigro que dimidiata, alia aterrima. Icon tale habet, vbi auis vniuerſali nigredini proxima eſt. Sed feminae frons ſemper caneſcens.

Hyeme Aſtrachaniae frequentiſſima auis, in deſertis volitans, adpropinquante vere loca *Wolgae* ſuperiora gregatim petens.

XXI.

Tab. XXIII. Fig. 3.

EMBERIZA *leucocephalos.*

Roſtrum $\frac{9}{20}$ longum, conicum, paululum ad latera depreſſum, *mandibula ſuperiori* nigra, *inferiori* albente. *Pennae* circa roſtrum ſature caſtaneae ſiue rufae, in latam ſimilis coloris faſciam ſupra oculos continuatae, quae reflexa ſecundum inferiorem malarum marginem ad roſtrum redit, albas malas circulo ſuo includit, in gula torquis ſpeciem efficit. *Rufus* quoque ductus infra oculos conſpicuus. *Vertex* et *occiput* alba, pennis quibusdam ad verticem apice nigricantibus. *Album* hoc ad frontem regionemque ſyncipitis *ſpatium* ductu nigricante cinctum, faſciae rufae ſupra oculos contiguae. *Ceruix* dilute rufa, pennarum oris in in quibusdam lutefcentibus, in aliis cinerefcentibus. *Dorfum* rufum, pennis fingulis verfus apicem fecundum fcapum nigris. *Vropygium* et *pennae caudae incumbentes* rufa. *Pectoris fumma pars* et *fubalaris regio* fafcia lata rufa, ad oras albente. *Reliquum pronum corpus* candidum, hinc inde confpurcatum. *Cauda* forcipata $\frac{29}{10}$ poll. longa, rectricibus duodecim, quarum *octo intermediae* fufcae, exteriores obfcurius, *duabus* vtrinque *extimis* verfus apicem macula lata alba notatis. *Alae* ab extrema cauda vnum et $\frac{3}{4}$ pollices deficientes. *Remiges* obfcure fufcae, oris limborum anteriorum obfcure albentibus. Infimus alae nothae ordo nigricans, ad oras lutefcens, aut dilute rufus, cui refpondent infimus *tectricium* ordo, ad oras fafcia dilute rufa cinctus, apice candido. *Tectrices* fupremae anterius e fufco cinerafcentes, pofterius fere totae rufae. *Pedes* et digiti incuruati. *Vngues* nigricantes, modice adunci, *vngue* pofterioris reliquis longiori fortiori, maxime adunco.

Longitudo auis ab extremo roftro ad initium caudae tribus poll. et 3. lineis refpondet.

Diftantia alarum expanfarum decem pollicibus aequalis eft.

Longitudo caudae pollicum circiter quatuor: digiti pofterioris vnguis longitudine reliquos $\frac{3}{10}$ poll. fuperat.

Medii anteriorum digitorum vnguis $\frac{2}{10}$ poll. vix attingit.

Pondus Ruthenicum auis $6\frac{1}{2}$. solotn. aequat. Habitat *Astrachaniae* in arundinetis. In ea, ad quam expressum fuit, occiput erat nigrum, coniunctioni fasciae frontem et syncipit cingentis efformatum; ceterum nihil differebat. Figura auem naturali magnitudine sistit etiam ad *Tanais* littora copiosissimam.

XXII.

Tab.XXIV.

An ARDEA *Botaurus maior?*

BRISS. av. ord 17. g. 81. sp. 28.

Dimensio partium.

	Ped.	Poll	Lin.
Longitudo totius auis ab extremo rostro ad extremos pedes - - - -	4.	6.	6.
—— —— —— Ad extremam caudam	3.	8.	0.
—— rostri a basi frontali mensurata	0.	5.	$4\frac{1}{2}$.
—— —— temporali - - - - -	0.	6.	3.
—— narium - - - - - - -	0.	0.	10.
Latitudo - - - - - -	0.	0.	$1\frac{1}{2}$.
Distantia inter eas - - - -	0.	0.	6.
Longitudo ab angulo posteriore narium ad anteriorem oculorum - - -	0.	1.	3.
—— oculorum - - - - -	0.	0.	4.
Latitudo - - - - - -	0.	0.	4.
Distantia oculorum - - - -	0.	0.	10.
—— a basi rostri frontali ad flexuram cubiti - - - - - -	1.	11.	10.
Longitudo capitis - - - -	0.	4.	10

Lon-

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo colli - - - - -	0.	2.	5. 8
—— dorſi - - - - - -	0.	10.	8.
—— caudae - - - - -	0.	6.	10½.
Circumferentia capitis - - -	0.	5.	3.
—— colli infra caput menſurata - -	0.	3.	3.
—— —— ante inſertionem - -	0.	5.	10.
—— corporis - - - - -	1.	4.	7.
Diſtantia alarum expanſarum - -	4.	11.	2.
Longitudo femorum - - -	0.	9.	0.
—— tibiarum - - - -	0.	6	10.
—— digiti antici medii - - -	0.	5.	3.
—— vnguis illius - - - -	0.	1.	1.
—— —— intimi - - - -	0.	2.	10.
—— —— —— vnguis illius - -	0.	0.	11.
—— —— extimi - - - -	0.	4.	8.
—— —— vnguis illius - - -	0.	0.	10¼.
— Digiti poſtici - - - - -	0.	2.	1½.
—— —— vnguis illius - - - - -	0.	1.	2½.

DESCTIPTIO.

Specioſa auis eſt, quam propono, dubitanter valde BRISSONIANAM denominationem meam faciens. *Roſtrum* cultratum, ſupra ſecundum morem huius generis *ſulco longitudinali* exaratum, flauum, *mandibula ſuperiore* medio fuſca. *Nares* lineares. *ſpatium* roſtrum inter et oculos nudum, luteum. Caput nigrum, pennis conſtans mollibus, longiuſculis, criſtae in ſpeciem propendentibus. *Tempora* flaua, baſi punctis nigris adſperſa. *Palpebrae* nudae, e caeruleo luteſcen-

 tes.

tes. *Iris* crocea. *Pupilla* nigra. *Caput inferius* niueum. *Plumae* ab eo intra commiſſuras mandibulae inferioris excurrentes, ſine maculis nigris, margine ferrugineis, interruptae. *Collum* gracile, elongatum, ad octo pollices et vltra caſtaneum, triplici faſcia nigra notatum, media latiore, poſtea vsque ad inſertionem gryſcochalybeum inferius itidem caſtaneum, maculis longitudinalibus nigris, et nigro alboque dimidiatis varium. *Dorſum* ſature cinereum, pennis vltimis longe productis, lateſcentibus, rubris, longiſſimis albo terminatis *Vropygium* gryſeo-fuſcum. *Corpus inferius* e nigro rubroque colore varium. *Remiges* 26. nigrae. *Tectrices* cinereae nonnullis apice flaueſcentibus. Margo alarum ferrugineus. *Rectrices* aequales, 12, remigibus concolores. *Tectrices* ſature gryſeae. *Femoralia* caſtanea. *Pedes* ſupra fuſci, infra rubicundi. *Digiti* ſupra fuſci, infra lutei. *Vngues* pallide fuſci, incurui, medio interius ſerrato, poſtico longiſſimo omnium maxime arcuato.

Cum congeneribus in arundinetis viuit, femina ponit oua tria, magnitudine gallinaceorum, glabra, immaculate viridia. Migratur Aſtrachaniae. Menſe Maio mihi obſeruata auis.

DE-

DESCRIPTIONES AVIVM.

Auctore

I. LEPECHIN.

d. 12. Nouembr. 1770.

Emberiza ſuperne rufa, ſubtus flaua, faſcia pectorali transuerſa ferruginea.

DIMENSIO.

Fringillam domeſticam adaequatur.

Longitudo ipſius ab apice roſtri ad caudae extremum - - - - - -	5''—10'''
Roſtrum longum eſt - - - - -	$4\frac{1}{2}$
Digitorum medius cum vngue - - - -	9
laterales multo ſunt breuiores.	
Extremitates alarum diſtant - - -	8 — 7
Alae complicatae vix tertiam caudae partem tegunt. Longitudo caudae - - -	2 — 3.

DESCRIPTIO.

Pulcra haec Emberizarum ſpecies roſtro donatur pallido cum tranſparente aliqua nigredine in dorſo mandibulae ſuperioris. Frons tegitur pennis nigricantibus, quarum nigredo adumbrat etiam capillitium. Occiput et nucha cum pennis interſcapularibus rufo reſplendent colore, vbi ſingulae pennae apex tenuiſſima cingitur canitie. Dorſum cum adiacente vropygio nuchae concolor, hoc cum diſcrimine, quod memorata canicies in dorſo magis ſit conſpicua, et rachis quorundam pennarum lituris nigris tingatur. Scapulae alarum albae, ſecundus tectricum ordo conſtat pennis vexillo externo ruſeſcente, cum albicante fimbria marginis, coſta vero eorum et vexillum internum nigricant, vnde macula in alis ſecundaria alba: reliquae tectrices dorſo propiores interſcapuleo concolores. Remiges primores fuſcae, albicante tenui fimbria exterius notatae; poſteriores remiges itidem fuſcae, aſt vexillum externum in illis maiori ex parte ferrugineum eſt. Genae atque gula nigrae, pectus cum abdomine flavum; ſed flauedo in pectore interrumpitur faſcia transverſa ſegmentum circuli efficiente, et ſeſe in hypochondria extendente, vnde hypochondria ferruginea quoque apparent. Tectrices ſubcaudales albae cauda parum forcipata, 12. conſtat rectricibus fuſcis, quarum duae extimae ſecundum vexillum internum longa tenia alba, longitudinali notantur. Pedes atque vngues ſordide albi. Haec eſt deſcriptio maris. vid. Tab. XXV. Fig. 1.

Foemina perfectiſſime cum mare conuenit, praeter quod in ipſa capillitium magis ſit nigrum et dorſalium pennarum margines maiori canitie gaudeant.

Habitat in pinetis circa Catharinopolin.

Alia Emberizae ſpecies confinia priori inhabitans loca diſtinguitur a congeneribus capite diuerſimode faſciato, corpore ſupra ruſeſcente; pectore atque imo abdomine canis.

DI-

DIMENSIO.

Magnitudo Emberizae citrinellae.

Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum	6''-5'''
Longitudo roſtri - - - - - - -	$4\frac{1}{2}$
Longitudo digiti medii cum vngue - -	5
Laterales paulo breuiores.	
Extremitates alarum explicatarum diſtant	8 – 6
Alae complicatae $\frac{1}{3}$ caudae attingunt.	
Longitudo caudae - - - - -	2 – 4.

DESCRIPTIO.

Caput ornatur variis faſciis; medium occupat faſcia longitudinalis ſat lata, cana; ad latera capillitii vtrinque ducuntur faſciae nigrae, quae in occipite concurrunt et canitiem interſecant, vnde in collo poſteriori maculae duae canae conſpiciuntur; a naribus per oculos tranſit faſcia rufeſcens, genas occupat macula alba triangularis, cuius apex ab angulo ducitur oris; albam maculam excipit macula nigra eiusdem figurae occupans regionem temporum. Partes colli laterales gula atque collum anterius ferruginea. Pectus inſignitur macula magna alba triangulari, medium abdomen ex cinereo album, hypochondria atque latera abdominis rufa; interſcapulcum cum dorſo itidem rufum rachi pennarum nigricante. Vropygium ſupra rufum infra albicans. Tectrices alarum fuſcae, rufeſcente vndique margine. Remiges maiores nigricantes, per vexillum externum ex toto, per internum vero ad dimidium albido

bido fimbriatae. Remiges minores tectricibus concolores. Cauda parum forcipata 12 conſtant rectricibus, quae remigibus concolores ſunt, exceptis duabus vtrinque extimis, quae a medio ad apicem per vexillum internum albae, in vexillo externo vero a baſi ad medium albo fimbriatae. Roſtrum atque pedes ſordide albi, vngues nigricantes. Mas Tab. XXV. Fig. 2.

Foemina ſupra tota griſeo aut rufeſcente vario, rachi pennarum nigricante, ſubtus magis rufeſcens, ima abdominis regio ſordide alba, vropygium remiges rectricesque prouti in mare.

MOTACILLA ſuperne nigricans, torque albo interrupto, pectore atque abdomine ſuperiore croceis.

DIMENSIO.
Magnitudo motacillae Rubetrae.

Longitudo ipſius ab apice roſtri ad caudae extremum - - - -	4‴–11‴
Longitudo roſtri - - - - -	4
Alae explicatae extremitatibus diſtant -	6 – 7
Compoſitae dimidiam fere caudam attingunt	
Longitudo caudae - - - -	1 – 10
Digitus medius cum vngue - - -	8
Laterales multo ſunt breuiores - - - - -	

DESCRIPTIO.

Roſtrum tenue nigrum, mandibula ſuperior paulo longior apice incurua vti in congeneribus. Vertex capitis, genae, gula atque collum anterius atra,

atra, Nucha quoque infignitur nigredine a capillitio ad dorfum producta; partes laterales colli albae; qui color etiam fumma hypochondriorum tenet. Pectus atque abdomen crocea, fed in abdomine croceus color magis magisque diluitur ita vt ad pedes albidus fit. Dorfum nigricans margine pennarum parum rufefcente. Scapulae alarum niueae, tectrices anteriores nigrae apicibus ex albido rufefcentibus. Remiges maiores fufcae, minores nigricantes, omnes margine vexilli interni ad dimidium albo. Vropygium vtrinque niueum. Rectrices duodecim aequales nigrae exceptis vtrinque externis, quarum margo vexilli externi albicat. Pedes vnguesque nigri. Maff. Tab. XXV. Fig. 3.

Foemina fupra fufca marginibus pennarum rufefcentibus, macula alarum candida, gutture fordide albo, pectore atque abdomine dilute rufefcente. Remiges rectricesque prouti in mare.

Rutheno nomine a voce Tfchecantfchiki (чеганчики) vocantur. Habitant in betuletis atque locis paludofis.

STRIX

Nota: Maxima conuenientia eft Motacillae noftrae cum Rubetra luccouenfi Clariff. *Briffon*, defcripta in ipfius Ornithologia T. I. p. 432. N. 30. fed in defcriptione fua Clariffimus Autor nullam mentionem iniicit de pectore maris croceo atque collari albo interrupto. Hinc iure concludimus Motacillam noftram aut prorfus non, aut imperfecte defcriptam.

STRIX capite aurito, e gente ſua minima, corpore toto gryſeo, fuſco, ferrugineo, alboque vario.

Strigi Paſſerinae magnitudine multum cedit.

Longitudo ipſius ab apice roſtri ad caudae extremum - - - - - -	9″-4‴
Longitudo roſtri - - - - - -	$6\frac{1}{2}$
Alae explicatae extremitatibus diſtant -	1-4 -3
Complicatae extremum caudae attingunt	
Cauda longa eſt - - - - -	2 -6
Digitus medius cum vngue - - -	1 -2
Laterales ſunt breuiores.	

DESCRIPTIO.

Medium capillitii tegitur pennis rufeſcentibus tenuiſſimis lineis fuſceſcentibus transuerſim ſtriatis; latera eiusdem albidiora ſunt, cinereo colore vndulata, quae permixtio colorum continuatur in aures ex 10 pennulis compoſitas. Spatium poſterius inter aures et occiput, quaſi faſciis candidioribus notatur; extremitates enim pennarum his in locis albicant. Interſcapuleum itidem ſe maiori albedine diſtinguit. Dorſum ſordide cinereum. Mediis in alis conſpiciuntur maculae albae, oblongae, piliformes, natae a tectricum alarum peſteriorum vexillo externo albo, nigro colore terminato. Remiges aut dilute, aut obſcure cinereis, punctis albidis faſcias imitantibus in vtroque vexillo diſtincti. Remigum extima ſerrata eſt. Oculos ambit circulus conſtans pennis decompoſitis cinereis. Circulum complectitur quaſi

aſcia

faſcia albo nigro et rufeſcente varia a baſi auricularum ad pectus vsque producta, interrupta. Pectus atque abdomen ratione dorſi candidiora ſunt, vbi ſingula penna per album colorem riuulis transuerſis fuſcis notatur. Rachis omnium pennarum nigra eſt. Vropygium ſupra dorſo, infra abdomini concolor; tectrices caudae inferiores albae duabus faſciis flauicantibus transuerſim interſtructae. Rectrices ſubaequales rufeſcentes faſciis et punctulis fuſcis notatae. Oculorum irides flauae. Pedes veſtiuntur pennis rufeſcentibus nigris lineolis adumbratis. Roſtrum, pedes vnguesque ſordidi. Obſeruata eſt circa Catharinopolin. Tab. XXVI. Fig. 1.

CYPRINVS Corpore aliuaceo maculis fuſcis diſtincto, ima corporis parte Cinnabarina pinna ani radiis ſeptem.

Pinna dorſi radiis - -	8	
pectoral. - - -	14	
ventral. - - - -	8	
caudae - - -	19	
ani - - -	7	
Longitudo totius - - - -		3″—
capitis - - - -		6 —
Diſtantia ab apice roſtri ad oculum -		2
inter nares et oculum - -		$\frac{1}{2}$
ad pinnas pectoral.		—7
ad apertur. branchiar. ſuper.		—6$\frac{1}{2}$
ad pinnam dorſi		1—5
ad pinnas ventrales -		1—2

Diſtantia ad pinnam ani	- - -	1—6
ad caudae initium	-	2—7
Longitudo pinnarum pectoralium	- -	—5
ventralium	- -	—3½
Ani	- - -	—5
Dorſi	- - -	—6
Caudae	- - -	—5
Craſſities capitis linea circulari per oculos ducta	- - - - - -	$1''-1'''$
ad aperturam branchiarum		1 —5
pone pinnas ventrales	-	1 —6
ad initium pinnae dorſal.		1 —6
ad exortum caudae	- -	—6.

DESCRIPTIO.

Caput breue fere conicnm, cuius vertex nigricat, oculi lateraliter ſiti iride argentea, pupilla atra. Ab angulo oris infra oculum vsque ad regionem auditus ducitur macula alba ſat lata fere lunaris. Operculi branchioſtegi vltimum oſſiculum argenteo colore reſplendet, vnde in operculo macula trapezoides argentea: reliquae capitis partes atrae. Rictus anguſtus, mandibula inferior paulo breuior ſuperiore, extus colore ſanguineo imbuta, qui ſanguineus color occupat etiam marginem mandibulae ſuperioris ab oris angulo ad medium. Maxillae faucium quatuor denticulis ſetaceis vna ſerie poſitis armantur. Dorſum ab initio vltra cranii planum eleuatum, ad caudam vero decliue linea fuſca notatum: latera piſcis olivacea, ad aperturam branchiarum obſcuriora vbique macu-

maculis fuſcis rotundatis temere notata. Linea lateralis incurua et abdomini propior vt in congeneribus. Venter et tota ima corporis pars pulcherrimo cinnabarino colore imbuta eſt. Squamae valde exiguae, rotundatae, tenaciter corpori adhaerentes. Radii pinnarum omnes apice ramoſi. Pinnarum baſis cinnabarina, apex fuſcus, medium albicans, ſed cauda bifurca et pinna dorſi quadrangula excipiuntur; in his enim baſis nigra, reliqua pars albicans punctulis nigris adſperſa. Tab. XXVI. Fig. 2. 3. Pulcra haec cyprinorum ſpecies habitat in riuis ſcopuloſis circa Catharinopolin.

Rutheno nomine vocatur Galian, (Галїанъ) deriuatione mihi incerta. Et Miles (Солдатъ) ob rubrum colorem. Gratam conſtituit eſcam ſole torrefacta vna cum Peskany, Песканы cyprinus gobio, et Piſcaſoby, (Пискачобы) cobitis barbatula.

Nota: Ichthyotomiam huius piſcis non neceſſariam putaui, dum fere nullum diſcrimen ratione partium internarum in omni Cyprinorum familia obſeruatur. Id ſolum monendum habeo, quod variis e gente Cyprinorum ſpeciebus ſub examen reuocatis, obſeruauerim, nullam conſtantiorem notam ad diſtinguendas ſpecies dari, quam, ordinem, numerum et figuram dentium, qui in faucibus horum piſcium reperiuntur; et ſi obſeruationes exterarum ſpecierum per has notas inſtituentur, credo fore, vt haec confuſa atque non ſat determinata piſcium gens clarior et ſtabilita euadat.

DESCRIPTIO CYPRINI RVTILI, QVEM HALAWEL RVSSI VOCANT, HISTORICO-ANATOMICA.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

d. 3. Decembris 1770.

Cyprinus (*rutilus*) pinna ani radiis 12 rubicunda Lin. Syſt. Nat. ed. 10. p. 324. n. 16. Fn. Suec. 329.

Cyprinus iride, pinnis ventris ac ani plerumque rubentibus. Art. gen. 3. Syn. 10. Spec. 10. Gron. muſ. 1. n. 8. Act. vpſ. 1741. p. 74. n. 51 et 52.

Brama. Klein. piſc. N°. 5. Tab. XIII. fig. 2.

Corpus ab oris extremo ad pinnae dorſi principium vsque ſenſim aſcendit, hinc vero ad eiusdem pinnae baſin notabiliter deſcendit, iſtaque deſcenſione, minus quidem, quam antea, obſeruabili, ad caudae pinnam vsque pergit. Ab eodem quoque termino idem pinnas ventrales verſus deſcendit, hincque recto curſu anum petit; inde autem iuxta ani pinnam, ſub aſcenſione maxime notabili, ad eius finem

finem vsque procedit, viaque tandem rectilinea ad caudae pinnam excurrit. Dorſum ab initio latum ac conuexum, pinnam ſuam verſus, ſub aucta magis conuexitate, ſenſim in anguſtius contrahitur, pone hanc vero denuo lateſcit, ita quidem, vt ipſius latitudo ad caudae pinnam vsque ſenſim ſenſimque decreſcat, conuexitas autem mediocris ac ſibi vndique aequalis ſit. Abdomen infra pinnas pectorales ac inter pinnas ventrales et anum parum contractum ac ſubconuexum, ante pinnas ventrales planum, inter pinnae ani finem vero pinnaeque caudae principium denuo ſubconuexum.

Color totius corporis argenteus, pallide aureo mixtus; dorſum quidem, pro varia ad ſpectatorem directione, vel argenteo aureum, vel ſubfuſcum. Iris oculorum ex argenteo deaurata, ſuperne macula nigricante, a lateribus autem punctis ſimilibus notata. Latera capitis in aureum magis vergunt, quam ipſe truncus. Prona capitis regio ſubfuſca. Abdomen pallide carneum. Pinnae pectorales ſubcinereae, pauciſſimo rubro colore admixto. Pinna dorſi cineracea. Pinnae ventrales ex ſanguineo purpuraſcentes; eodemque colore etiam ani et caudae pinna, ſed minus ſaturato, tincta eſt.

Prona capitis ſuperficies ſubconuexa, glaberrima absque omni carina eminente. Nares amplae.

Squamae magnae, ſtriatae, ſubquadrangulae. Maximae omnium in trunci fere medio ad vtrumque latus, 6‴ latae, $6\frac{1}{2}$‴ longae, margine antico ſiue

ſiue tecto, diuerſimode crenato ac ſinuato, poſtico circulari ac integerrimo.

Linea longitudinalis, ſub angulo operculi branchiarum poſtico, eodemque ſuperiore, ad 3 lin. diſtantiam, oriunda, ab initio ſtatim ad pinnarum ventralium regionem vsque deſcendit, inde infra dorſi pinnam in rectum ſenſim flectitur, circa ani pinnam vero ſenſim aſcendit, iterumque recto tramite ad finem vsque excurrit, toto ſuo decurſu, ſi initium eius excipias, imo ventri propior, quam dorſi ſummo.

Pinna dorſi radiorum vndecim, quorum primus 2 lin. longus, omnium breuiſſimus, ſecundus 1 poll. 2 lin. longus, tertius ac praecipue quartus omnium longiſſimi, reliqui vero ex ordine breuiores; ceterum primi tres ſimplices, ac ſibi inuicem arcte appreſſi; reliqui omnes ramoſi; vltimus bipartitus.

Pinnae pectorales radiorum octodecim; quorum primus fortiſſimus, et ſecundo tertioque, longiſſimis, paullo breuior.

Pinnae ventrales radiorum decem: primus horum ſecundo, cui arcte appreſſus eſt, plus dimidiam partem breuior, ſimplex; ſecundus omnium fortiſſimus, itidemque ſimplex, tertio paullo breuior; ceteri a tertio, qui longiſſimus omnium eſt, ad vltimum vsque ramoſi et ex ordine iterum breuiores.

Pinna

Pinna ani radiorum tredecim, quorum primus 3 lin. longus, omnium breuiſſimus, ſecundus 1 poll. longus, tertius ac praecipue quartus longiſſimi omnium; reliqui vero ex ordine iterum breuiores; caeterum, vt in dorſi pinna, primi tres ſimplices, ac ſibi inuicem arcte appreſſi; reliqui omnes ramoſi; vltimus bipartitus.

Pinna caudae radiorum circiter triginta, ab vtriusque lateris octauo ad intimum vsque ramoſorum.

Principium pinnae dorſi principio pinnarum ventralium paullo poſterius eſt, finis autem pinnae dorſi ano ex diametro opponitur.

OBS. Pinnis huius Cyprini, pectoralibus praeſertim, Lerneam viuentem, albidam frequenter adhaerere vidi, abdomine quaſi annulato, ſubcylindraceo, tentaculisque tribus inſtructam, binis ſcil. praedae affixis, tertio ſolitario, diſſito, liberoque, quae, cum in hunc vsque diem incognita plane mihi viſa fuerit ſpecies, breuiter hic deſcripta, ac naturali magnitudine declineata traditur. Vid. Tab. XXVI. Fig. 4.

ANATOME.

Hepar in varios lobos grandiores diuiſum. Lobus anterior longiſſimus, inter ventriculum, duodenum et reflexam inteſtimi partem ſitus, a principio ſuo, quo ex hepatis maſſa egreditur tenuiſſimo, ad angulum iſtius flexurae vsque, deſcendendo ſenſim increſcit. Lobus dexter, ventriculo ac duodeno ſub-

 iacens;

iacens; anteriore paullo craſſior eſt, ac ſub eadem flexura terminatur.

Siniſter lobus latiſſimus, concauitate ſua, reflexam inteſtini partem reſpiciente, lienis portionem dimidiam anguſtiorem, eamque ſuperiorem, amplectitur, dextro, maſſula mediante hepatica, per ſiniſtram ventriculi faciem transuerſim extenſa, annexus. Praeterea ſub mox memorata lienis portione tenue quoddam hepaticae ſubſtantiae ſtratum conſpicitur, ſiniſtro lobo hinc inde cohaerens; ipſum vero hepatis corpus mole admodum paruum. Veſicula fellis, inter hoc ipſum, eiusdemque dextrum lobum ſita, oblonga, collo ſuperius terminatur breviſſimo, quod ductus hepaticus, a dextra hepatis portione deſcendens, ſubit. Collum hoc, in ingreſſu ad ventriculum parum inflexum, ſub diuerticuli ſatis ampli, valuulisque interius vndique intertexti ſpecie ductum perbreuem largitur choledochum, Flatu in ductum hepaticum immiſſo non tantum ipſa fellis veſicula intumeſcebat, ſed ſimul etiam ductus choledochus bullas aereas in ventriculi cauum eructabat.

Lien longiſſimus, 3 circiter pollicum, extremitate ſua ſuperiore, eaque tenuiore, ſub hepatis ſumma ac concaua facie partim deliteſcit, partim inferiore maiore ac ſubtriquetra ampliori veſicae aereae ventri incumbit.

Ab oeſophago ad duodeni reflexum, qui vnius circiter pollicis ab ano diſtantia incipit, vnus canalis rectus eſt, inde vero ad hepatis diuiſuram vsque reuerti-

reuertitur inteſtinum, iterumque abhinc deflexum, recta via anum petit. Ipſe ventriculus, inteſtini reflexum verſus, ſenſim anguſtior fit, ac a duodeno et pyloro non multum diſtinguitur. Hoc diſſecto, ductus choledochi oſtium, quod circumcirca flauo bilis colore tinctum eſt, 9 linearum diſtantia ab eius ſummitate, ſub papillae forma eminet.

In inferiore ventriculi parte, inprimis autem in duodeni reflexu, vermes ſedecim, illis, quorum in deſcriptione Coregoni Lauareti iam facta eſt mentio, ſimillimos, albentes, lineari oblongos ac planiuſculos, inteſtini tunicis adhuc inhaerentes deprehendi. Caput eorum oblongum, ſubdiaphanum ac denticulis durioribus, vel nudo oculo conſpiciendis, ſcabrum; collum capite anguſtius ac breue; truncus ipſe autem figurae turbinatae, vel lineari oblongus, rugisque circularibus diſtinctus erat. Si eiusmodi vermis caput exporrectum, quod proboſcidis vſum ei praeſtare olim dixeram, microſcopii ope inſpicias, totum aculeis validis recuruis ac vere oſſeis horridum videbis, quibus extractionem eius tentanti fortiter reſiſtunt. Extrahere nihilominus hos omnes, quotquot erant, poteram absque capitis ipſorum iactura; contrarium tamen aliis, quos in variis Cyprinis et in Coregono Lauareto olim inueni, ſaepius accidiſſe. indicium ex parte iam factum eſt. Magnitudinis autem ac formae ſunt admodum diverſae, nec color omnibus ſemper idem: inter viginti ſc. eiusmodi vermes, quibus Cyprinum id. *Linn.*

Syſt. Nat. ed. 10. p. 324. n. 17. ſimili loco infeſtatum vidi, plures octo lineas longos, lineares, ſubteretes, glaberrimos, ac a praeterfluente bile, quaſi gummigutta tinctos fuiſſe, ex manuſcripto mihi conſtat, cum alii vel diuerſae progenici, iidemque aetate ſine dubio minus prouecti, $1\frac{1}{2}$ tantum vel 2 lineas longi, plus minusue turbinati, in rugas contracti ac albidi eſſent. Dum viuunt hi *acanthocephali*, quo diſtincto nomine hoc animalium genus appellare liceat, aculeatam corporis extremitatem ſimili plane mechaniſmo, quo ſerpentes penem, ac limaces cornicula ſua, pro lubitu modo exſerere, modo reducere valent Vid. Tab. XXVI. Fig. 5. Sed redeo ad vlteriorem Cyprini noſtri anatomen:

Veſica aerea eiusdem plane figurae, quae huic piſcium generi propria eſt, duobus ſcil. ventribus conſtat, altero antico, minore, ſubſtantiae firmioris et craſſioris, altero poſtico, maiore, tenuioris magisque tendinoſae fabricae, ductuque pneumatico inſtructo. Diſſecto ſecundum longitudinem poſteriore, diſtincte apparet, fibras ipſius longitudinales, tendinoſas, albentes, oſtium verſus vtrique commune excurrere, ac $2\frac{1}{2}$ lin. diſtantia ab eodem euaneſcere, in circulum omnes collectas. Harum actio procul dubio in eo conſiſtit, vt, ſi idem, ad aerem contentum in ductum expellendum, ſe contrahat, inſita ipſarum vi ſtringant quaſi ac occludant commune illud oſtium, ne aer in receptaculum anterius, ad quod patentior longe via eſt, retrocedat. Ductus pneu-

pneumaticus in poſticum oeſophagi latus, proxime ad diaphragma, inſeritur, ac orificio ſuo ad imas fauces hiat. Hoc, primo quidem adſpectu, ſatis largum, aerem tamen ex oeſophago afflatum non admittit, licet eum, ex ipſo ductu impulſum, ſub bullarum forma facile eructet. Recte autem, ad aditum aeri, aquae vel cibis praecludendum, ſatis denſo ac valuuloſo lacunisque variis imperuiis, ad duas vsque lineas extenſis, cautum eſt.

Lactes valde tenues. Renum potior pars ſub thorace, ſeu caput inter ac apophyſin iſtam, cui anticus veſicae aereae venter, ligamenti fortiſſimi ope, annectitur, ſita eſt; infra hoc iidem latiores facti, et circa abdominis medium in monticulum quaſi eleuati ſunt, inde vero ad ipſorum extremitatem vsque, veſicae vrinariae fundo contiguam, in anguſtius ſenſim coeunt. Veſica vrinaria ouata, vrethra ampliſſima, patente inſtructa.

MENSVRA.

	Poll.	Lin. paris.
Longitudo tota, ſcil. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum	1'. 2''	3.
Ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - -	11.	10.
—— —— —— ad oculi medium - -	1.	$\frac{1}{3}$.
—— —— —— ad marginem operc. branch. poſticum - - -	2.	11.

	Poll. Paris.	Lin.
Ab oris extremo ad principium pinnarum pectoralium - - - - - - -	3.	3
—— —— —— ventralium - - -	6.	4.
—— —— —— —— ani - - - -	6.	7.
—— —— —— ad anum - - -	8.	9.
Longitudo pinnarum pectoralium - -	8.	5.
—— —— —— ventralium - - - -	2.	5.
—— —— pinnae dorsi, ad basin - -	2.	1.
—— —— —— radiorum longiorum -	1.	6.
—— —— pinnae ani, ad basin - - -	2.	2.
—— —— —— radiorum longiorum - -	1.	6.
—— —— pinnae caudae, sc. ab eius principio ad longiorum radiorum	1.	10.
apices - - - - - - -	3.	1.
—— —— radiorum longiorum - - -	—	10.
Extremitas corporis squamosa in caudae pinnam extensa ad - - - - - -	—	7.
Diameter oculi horizontalis - - -	—	$6\frac{1}{2}$.
—— —— perpendicularis - - -	—	6.
Distantia inter primi pinnae pectoralis radii basin et primum pinnae ventralis radium - - - - - - -	3.	3.
—— —— primi pinnae ventralis primique pinnae ani radii basin - -	2.	7.
—— —— vltimi pinnae dorsi radii basin et primum pinnae caudae radium	3.	3.
—— —— vltimi pinnae ani radii basin et primum pinnae caudae radium	1.	6.

Lati-

	Poll.	Lin. Paris.
Latitudo horizontalis per oculorum axes	1.	4.
—— —— per posticum opere branch. marginem - - - -	1.	6.
—— —— ad principium pinnae dorsi -	1.	3.
—— —— —— —— pinnae caudae	—	5.
Latitudo perpendicularis per oculi medium	1.	9.
—— —— —— —— per principium pectoralium - -	2.	10.
—— —— —— —— pinnae dorsi - -	3.	3.
—— —— —— —— pinnarum ventralium	3.	2.
—— —— —— —— pinnae ani - -	2.	10.
—— —— —— per pinnae ani finem - -	1.	10.
—— —— —— —— caudae principium	1.	6.

Explicatio Figurarum.

Tab. XXVI. Fig. 4. Lernea corpore subcylindraceo, annulato; brachiis seu tentaculis tribus.

a. Pinnae affixa vna.

b., *c.*, *d.*, *e* } Solutae aliae, variae magnitudinis ac formae

Tab. XXVI. Fig. 5. Acanthocephalus, vermium nouum genus, in intestinis piscium reperiundum.

a. intestini tunicis inhaerens.

b. inde detractus.

c. idem magnitudine aucta expositus.

d. alius, (*a*) longe maior, ex Cyprino Id. *Linn.*

DE-

DESCRIPTIO. PISCIS, E COREGONORVM GENERE, RVSSICE *SIG* (СИГЪ) VOCATI, HISTORICO-ANATOMICA.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

d. 10. Decembris 1770.

Salmo (*Lauaretus*) maxilla ſuperiore longiore, radiis pinnae dorſi quatuordecim *Linn.* Syſt. Nat. ed. 10. p. 310. n. 14. Fn. Suec. 312. Act. Stockh. 1753. p. 195.

Coregonus maxilla ſuperiore longiore, pinna dorſi oſſiculorum 14. Art. gen. 10. Syn. 19. ſpec. 37.

Albula nobilis Gesn. piſc. 33.

Albula nobilis maior. Schoenf. ichth. 12. Ionſt. piſc. t. 46. f. 1. Rai. piſc. 60. 61.

Lauaretus allobrogum. Will. ichth. 183.

Caput pro corporis ratione non magnum, ad latera compreſſum, circa verticem angulum obtuſum, ſecundum eius longitudinem excurrentem, efformabat, vix niſi tactu percipiendum. Ab occipite dorſum ſtatim notabiliter eleuabatur, ad pinnae dor-

dorſualis principium vsque, ipſiusque margo, quo propior huic erat, eo acutior fiebat; margo autem inter pinnam dorſi primam et ſecundam plane convexus, inter hanc et caudam fere planus erat. Sic quoque latitudo corporis a pinnae dorſualis primae principio ad caudam vsque iterum decreſcebat. Decreſcentia tamen iſta inter anticum et poſticum vtriusque pinnae dorſualis marginem potior erat. Margo abdominis a mento ad quatuor vsque pollices retroſecus eleuabatur, inde ad marginem baſis pinnae ani poſticum vsque ſenſim decreſcebat, hinc vero, ſub angulo valde obtuſo eandem deſerens, linea magis recta in caudam excurrebat. Idem etiam abdominis margo pinnas pectorales ac ventrales inter leuiſſime conuexus, circa ventralium inſertionem planus, inter has et anum notabiliter convexus, inter ani pinnam vero caudamque fere planus erat. Venter ab anteriore pinnarum pectoralium regione ad pinnas ventrales vsque ſatis latus erat, pone has vero ipſius latitudo ad corporis extremitatem vsque ſenſim ſenſimque decreſcebat.

Color dorſi, ſi piſcem a cauda caput verſus, et parum oblique inſpexeris, ex coeruleo nigricans, inuerſa autem ratione ex viridi fuſcus apparebat. Latera corporis infra lineam longitudinalem ſub omni adſpectu e pallide caeruleo argentea erant. Oris extremitas, regio capitis ſuperior, et pinnae, praeſertim dorſuales ac caudae, in nigricantem inclinabant; Facies vero corporis inferior vndique alba.

 Iris

Iris oculorum argentea, ſupra pupillam coeruleo-nigricante colore leuiter tincta. Vertex capitis ſatis pellucidus. Cutis pone oculos et circa ambitum operculi branchiarum ſuperiorem pallide deaurata. Mandibula ſuperior, oſſe mobili conſtructa, inferiorem duarum linearum longitudine ſuperabat, faciemque anteriorem offerebat retuſam. Rictus oris reſpectu corporis anguſtus.

Limbus maxillae ſuperioris denticulorum minutiſſimorum ac viſu vix percipiendorum ſerie, quorum numerum octonum circiter eſſe deprehendi, erat inſtructus, paribusque etiam, aſt longe pluribus lingua fauceſque armatae.

Opercula branchiarum laminis oſſeis quatuor conſtabant: ſuperiore ſ. prima circulari, ſecunda obſolete triangula, tertia quaſi cultrata ſiue ſubfalcata, et quarta triangulari cum acumine anteriora verſus ſpectante. Oſſicula membranae branchioſtegae octo.

Squamae mediocres, ouales, integerrimae ac glaberrimae; caput et branchiarum opercula iis carent.

Linea longitudinalis, primae ſ. ſuperiori operculi branchiarum laminae e diametro oppoſita, ſquamulisque XCVII, leuiter emarginatis, conflata, recta via excurrebat, dorſo tamen, quam ventri, propior.

Pinna dorſi prima, ex incano nigricans, radiorum quatuodecim; quorum primus omnium breviſſimus, ſecundus et tertius iſto paulo longiores, ſimpli-

ſimplices; ceteri a quarto, omnium longiſſimo, ad vltimum vsque, ex ordine iterum breuiores ac ramoſi.

Pinna dorſi ſecunda, radiis deſtituta, adipoſa, figurae quodammodo falcatae, poſticos ipſius margines verſus extenuata valde, ac ad $3\frac{1}{3}$ lin. vsque libera. Per huius pinnulae ſubſtantiam puncta innumera nigricantia erant diſperſa, qualia etiam in reliquis pinnis et omnibus ſquamis, ſi ventrales exceperis, obueniebant.

Pinnae pectorales ex incano albicantes, radiorum quindecim. Primus horum ſequenti breuior ac fortior, ſimplex; ceteri omnes apicibus ramoſi.

Pinnae ventrales albicantes, circa apices autem et in ſuperficie potiſſimum exteriore ex coeruleo nigricantes, radiorum duodecim vel tredecim; quorum 1 et 2 omnium breuiſſimi ac ſimplices, ceterorum omnium apices ramoſi.

Pinna ani pallida ad baſin, circa radiorum maiorum extremitates vero e coeruleo nigricans, radiorum ſedecim vel ſeptendecim; horum 1, 2, 3 breuiſſimi ac ſimplices, 4, 5 et 6 longiſſimi omnium et cum reliquis ramoſi.

Pinna caudae ex incano nigricans, bifurca, 32 circiter radiis compoſita, quorum primi ſ. extimi breuiſſimi, plures inſequentium ex ordine longiores, ceteri vero, in medio conſtituti, ad formandam bifurcationem ex ordine iterum breuiores; ſimplices

1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 tam ex ſuperiorum, quam ex inferiorum extimis; reliqui valde ramoſi.

Magna horum piſcium, cucumeres redolentium, copia quotannis in Newa fluuio capitur.

ANATOME (*a*).

Diſſecto abdomine hepar ſtatim ſub adſpectum veniebat, diaphragmatis ſuperficiei inferiori contiguum, in regione pinnarum pectoralium ſitum, coloris pallidioris, quam huic viſceri alias proprium eſt, a ſumma ipſius conuexitate ad marginem inferiorem, quo inteſtinula ſiue ſic dictas appendices lambit, 6‴ longum; in ſiniſtro autem latere maxima eiusdem portio, ſub poſticam ventriculi faciem reflexa, ad pollicem vsque extendebatur.

Appendices ventriculi ſ. potius pylori infra hepatis marginem conſpiciendae, et ad 11 lin. vsque deorſum extenſae, totum transuerſum abdominis ambitum occupabant, ſubſtantia pinguedinea, qua, praeſertim inferiora verſus, inter ſe ex parte erant conne-

(*a*) Notandum hic, viſcerum deſcriptionem e. g. ratione faciei ſuperioris et inferioris, vel anticae ac poſticae alicuius partis ex piſce elaboratam eſſe dorſo incumbente; hinc id, quod ſub hoc ſitu eſt ſuperius, in prono cadavere inferius erit. Vbi vero ſermo eſt de dextro et ſiniſtro latere vel hypochondrio, pronum piſcis ſitum ſ. naturalem intelligas, quamuis reliquae denominationes ad ſupinum factae ſint.

connexae, interſtrata. Eadem pinguedo, coloris e pallide rubello albicantis, ac 2 poll. 3 lin infra hepatis marginem et circa ventriculi flexuram in vnam confluens maſſam, ſatis latam craſſamque, continuo tractu vtrumque replebat hypochondrium, ventriculi parte denudata tantummodo a ſe inuicem ſeiuncta. Potior pinguedineae huius ſubſtantiae pars circa coſtam decimam octauam inciſura quadam erat notata, ſub qua lienis profunde rubentis extremitas triangulari ſub forma apparuit, lobo triquetro ſenſim attenuato, et ſuper veſicam aeream recta protenſo, circa coſtam vigeſimam ſextam terminata.

In dextro latere, ſeptem circiter linearum diſtantia a mox memorato liene, infra fines appendicum, quintam inter ac decimam coſtam, maſſula quaedam ex atro rubens, figurae quaſi lanceolatae ſ. ellipticae, 1 poll. 1 lin. longa, 3 lin. circiter lata, ſubconuexa, extremitate ſuperiore obtuſa, inferiore attenuata occurrebat, partim tractu illo pinguedineo dextro obtecta, partim conuexitate ſua peritoneo obuerſa, quam lienis pariter vices gerere ſuaſit non tantum ſubſtantia et color, ſed etiam ipſius nexus cum liene inferiore, de quo mox ſermo erit, ope vaſis ſanguinei maioris, quod ex ſummitate huius ortum, infra lateris interni medium ei inſerebatur.

In ſiniſtro latere viſcus quoddam albicans, ſubſtantiae firmioris, 2 poll. 4 lin. longum, 8 lin. in medio latum, inter tertiam ac decimam ſextam coſtam ſitum erat, facie exteriore peritoneum, interiore tractum pinguedineum finiftrum refpiciens. Vifcus hoc, quod lactium vnam effe comperi, latitudine fua inferiora verfus fenfim decrefcebat, ipfiusque margines leuiter attenuati erant.

Ad partes, quae diffecto abdomine vifui ftatim fefe obtulere, tubus inteftinalis quoque pertinet, iuxta latus dextrum recto itinere ad anum vsque decurrens. Emerfit fc. hic infra lienem fuperiorem, et tam fupra quam infra tractum fibi annexum habuit pinguedineum; fuperior horum circa coftam vigefimam quartam, proxime inferiorem, finiebatur, hic autem auerfam inteftini partem, ad anum vsque, inueftiebat, aduerfa plane nuda relicta.

Remotis dextri lateris appendicibus, leuiterque eleuato liene primum dicto, quem medium nuncupabo, mox in confpectum veniebat tertius lien, huic, fitu inter quartam et decimam coftam, contiguus, 1 poll. 4 lin. longus, 4 lin. in medio latus, figurae itaque valde oblongae vel lanceolatae. Superficies ipfius fuperior fubconuexa erat, nullique partium adiacentium adhaerebat, fuperne appendicibus, inferne medio liene, obtecta, inferior autem, fi fummitatem eius omnino liberam exceperis, cum pinguedine fubftrata appendicibusque fubiacentibus arcto nexu erat coniuncta. Ipfe autem hic lien vafe mediante fanguineo, cum medio cohaerebat. Videmus itaque, tres diftinctos huic pifci a natura datos effe lienes, variae magnitudinis ac formae; id quod fingulare omnino et notatu digniffimum eft. Sed plura ra adhuc ſuperſunt, quae non minorem merentur attentionem.

In eodem latere, dextro nempe hypochondrio, abſcondita iacebat lactium altera, alteri, niſi quod latior paulo et craſſior fuerit, plane ſimilis, vix, niſi prius partes ipſi ſuperincumbentes remoueantur, conſpicienda, appendicibus ſc. inteſtini tractu et pinguedine, huic adnata, facile tota contecta. Haec ratione figurae et ſitus cum illa ſiniſtri lateris fere conueniebat, longitudine autem, cum ſub hepate diaphragmati iam contigua, et circa vigeſimam demum coſtam terminata eſſet, eandem ſuperabat. Vtraeque margine ſuo poſtico, membranae ope, angulo affixae, quem veſicae aereae cum hypochondriis connexus efformat. Binae aliae lactes, quas ſuccenturiatas vocare placet, eiusdem coloris ac ſubſtantiae, magnitudine tamen prioribus longe cedentes, inteſtini recti extremitatem circumdabant, quarum dextri lateris vna altera ſiniſtri paulo maior erat. Vaſa vtriusque lactium generis ſpermatica, ſub poſtica ipſarum ſuperficie decurrentia, veſicaeque aereae membranulae ope adnexa, ſub inteſtini recti extremitate ad angulum acutum inter ſe coibant.

Infra lienem infimum iuxtaque inteſtini tractum diſtentae veſicae aereae pars in conſpectu erat, per cuius tunicam valde pellucidam vermes nouem filiformes, pollice plus minusue longiores, internae eius ſuperficiei agglutinati, translucebant.

Hepar

Hepar in ſuprema abdominis parte transuerſim ſitum, indiuiſum ac tota dextra parte ſubtus concauum. Veſicula fellis ſatis ampla, in dextro magis latere, quam in medio, collocata, pyloro ſeu potius duodeni principio, lactiumque dextrae flauo bilis colore tinctae, contigua, 6''' longa, 4½''' lata, figurae oualis, pariter, ac illud, transuerſa. Ductus choledochus ex ſiniſtra huius extremitate ſub angulo acuto ortus, ſatis capax, ac inter ſiniſtram hepatis partem et appendices pylori poſteriores decurrens.

Separata omni ab oeſophago et ventriculo pinguedine, comperi, iſtum ad huius fundum incurvari, eidemque ſub angulo valde acuto iungi, ita, vt ſitum inter ſe haberent fere parallelum. Oeſophagi collapſi, teneriorisque ſubſtantiae, maxima latitudo in diſtantia 10 lin. ab inferiore ipſius extremitate 7 lin. aequabat; ipſe autem ventriculus teres, ac oeſophago, ſi fundum tenuiorem excipias, longe ſolidior, 1 poll. 7 lin. longus, 5 lin. latus, craſſitiei fere vbique aequalis, ac ſub directione parum obliqua in pylorum leuiter contractus. Duodenum, ſubſtantiae tenerioris, principio tenui primum et arcuato ex pyloro ortum, ſenſim vero ſenſimque amplius factum diaphragma verſus reflectebatur, ad duos pollices ſuae longitudinis vsque, appendicibus numeroſiſſimis, inferius circumcirca, ſuperius alteri tantum ipſius lateri appenſis auctum. Numerum earum 219 fuiſſe comperi, omniumque oſcula

oſcula ad duodeni cauum hiare, ſuccumque, pancreatico forte ſimillimum in idem transfundere, cuiuis iam patet. Reliquus inteſtini tractus, ſubſtantiae membranaceae, tenacioris, a duodeno ad anum vsque, curſum fere rectilineum tenebat. Obſeruationes, quas diſſectio totius inteſtinorum canalis, muco albicante ac tenaci valde repleti, mihi ſuppeditauit, ſequentes ſunt: interior ſc. oeſophagi ſuperficies iugis quinque, valuuloſis, rectis ac longitudinalibus inſtructa, valuula pylori, ab relaxata tunica ventriculi interiore oriunda, limbum efformabat aequalem, circularem, ac $\frac{1}{2}$ lin. latum. Oſtium ductus choledochi, in ora appendicis cuiusdam, quatuor circiter linearum a pylori valuula interuallo, conſpiciendum. Rectum, proprie ſic dictum, proxima inteſtini parte paulo amplius, rugis innumeris transuerſis notatum.

Vermes praeterea non omittendi ſunt turbinati, ab $\frac{1}{2}$ lin. ad $2\frac{1}{2}$ lin. longi, et $\frac{1}{3}$ lin. lati, coloris vel ruſſi vel ex albido flaueſcentis, rugisque circularibus vndique diſtincti, quorum non exigua copia totum inteſtinorum canalem, inprimis vero rectum inhabitabat, in quo ad 80 facile numerare mihi licuerat. Muco partim ſupra dicto libere eos innatare, partim pedunculi vel proboſcidis ope, quam e craſſiore corporis extremitate pro lubitu vel propellere, vel penitus reducere poſſunt, inteſtini tunicis adeo arcte inhaerere vidi, vt, dum eorum nonnullos vi inde auellere conabar, ſaepius eam abruptam

 relin-

relinquerent. Pleniorem huius vermis historiam in descriptione piscis, Cyprini rutili, *Linn.* quem Russi *Halawel* vocant, tradere mihi constitutum est. Vesica aerea simplex, magna, versus inferiora angustior, superiora versus amplior, et ab abdominis lateribus, cui interstrato vtrinque pinguedinis tractu cohaeret, facile separabilis. Summitas ipsius coarctata primum, iterumque, circa costam sextam, leuiter ampliata, dextrorsum deorsumque flectebatur, et hac ipsa flexura in ductum aereum, penna columbina crassiorem ac in oesophagi cauum patentem desinebat.

Renes in vnum corpus coaliti, longissimi, ad diaphragmatis basin latiori principio orti, et ad extremitatem ipsorum acuminatam vsque, quae vesicae vrinariae fundo obuersa est, sensim angustiores facti.

Vreteres, ex huius visceris medio enati, duo, quorum vnus, substantia eius euolutus, in sinistro, alter, eadem vndique obtectus, in dextro renum latere decurrit, vesicae vrinariae fundo inserebantur.

Vesica vrinaria ellipticae figurae, sub ascensu obliquo, in vrethram parentissimi oris excurrens.

Peritoneum argentei coloris, punctis nigricantibus rarioribus adspersum.

Costae 37. vertebrae in vniuersum 62. 35 sc. dorsi, et 27 caudae.

MEN-

MENSVRA.

	Poll.	Lin paris.
Longitudo tota, sc. ab oris extremo ad apices radiorum pinn. caudae long. - -	1′, 1	4
Ab oris extremo ad oculi medium - -	—	10
—— —— —— ad angulum operc. branch. posticum - - - - - - - - -	2	3
—— —— —— ad pinnas pectorales - -	2	3
—— —— —— ad pinnam dorsi primam	5	6
—— —— —— ad pinnam dorsi secundam	9	9
—— —— —— ad pinnas ventrales -	6	
—— —— —— ad pinnae ani principium	9	3
Longitudo pinnarum pectoralium - - -	1	8
—— —— pinnae dorsi primae, ad basin,	1	$4\frac{1}{2}$
—— —— —— —— radiorum longiorum	1	9
—— —— —— secundae - - - - - -	—	10
—— —— pinnarum ventralium - - -	1	8
—— —— pinnae ani, ad basin, - - -	1	5
—— —— pinnae caudae tota - - -	1	9
—— —— —— —— radiorum, ad bifurcationem, - - - - - - -	—	6
A fine fixo pinnae dors. primae ad pinnae dors. secundae princ. - - - - -	3	
—— libero pinnae dors. secundae ad caudae extremum - - - - - - - -	2	8
—— —— —— —— ad pinnae caudae principium - - - - - - -	—	11
A principio pinnarum pect. ad principium pinnarum ventral. - - - - - - -	4	
—— —— —— ventralium ad anum - -	3	

	Poll.	Lin. parif.
A fine fixo pinnae ani ad pinnae caudae principium - - - - - - -	I	2
Diameter oculi - - - - - - -	—	$5\frac{1}{3}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes	—	9
—— —— —— —— inter pinn. dorf. prim. et pinn. pect. - - - - - - - -	I	3
—— —— —— —— inter extremos margines principii pinn. ventr. - - - -	I	
—— —— —— —— ad pinnae caudae principium - - - - - - -	—	$4\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium	I	2
—— —— —— —— —— princ. pinn. pect.	2	3
—— —— —— —— —— princ. pinn. dorf. primae - - - - - - - - -	3	2
—— —— —— —— —— princ. pinn. ani	I	II
—— —— —— —— —— princ. pinn. caudae	—	$10\frac{1}{2}$

DE

DE LEONE OBSERVATIONES ANATOMICAE

Auctore

C. F. WOLFF.

d. 23. Maii 1771.

In eos ſtructurae characteres praecipue inquiſiui, quibus ſingularia huius animalis attributa maxime deberi videbantur. Muſculos ideo cubiti notaui et humeri muſculos ad pectus ſitos, quorum nempe actionibus maximam vim Leo exſerere dicitur. Deinde neruos extremitatis anterioris. Denique viſcera quoque thoracis et abdominis, quorum ſtructura non modo ad robur corporis multum conferre, ſed rationem quoque exhibere viſa eſt, vnde ſingularis, quae in hoc animali obſeruatur, alacritas et audacia aliquo modo intelligi poſſint.

Remota cute thoracis, muſculus pectoralis, qui pectorali maiori humano reſpondet, (minor enim deficit) in conſpectum venit. In eo iam non nulla notabilia occurrunt. Ex quatuor plane diſtinctis portionibus ille conſtat, quarum prima, quae reliquis ſuperſtrata eſt, a manubrio ſterni et a latere ſterni ad quintam circiter coſtam vsque, deinde a peculiari ligamento quodam originem ſuam ducit. Ligamen-

Muſculus pectoralis.

Eius portio exterior (fig. 1. h. h.) T. XXVII.

tum hoc fummo apici fterni firmiter adhaeret, indeque furfum ad aliquot pollices continuatur et producitur ex fibris tendineis horum pectoralium vtriusque lateris ipfis, in illo loco concurrentibus, fibique inuicem intertextis, quemadmodum ex fibris trapeziorum ligamentum nuchae efficitur. Hac ftructura, dum punctum fixum extenditur et fibrarum quoque copia augetur, vis mufculi increfcit et nullum tamen motui colli impedimentum producitur, quod fieret fi fternum offeum furfum magis extenderetur. Fibrae huius portionis conuergendo ad latus thoracis verfus os humeri decurrunt et mufculum paulo anguftiorem et fatis fortem conftituunt, qui in varias minores portiones mufculofo membranofas, vt triceps femoris, diffinditur, iisque in fpinam humeri, quae a tubere maiori defcendit, fe infinuat, partemque occupat offis humeri dimidiam inferiorem, dum fibrae infimae huius portionis ad condylum humeri externum, tanquam locum, ab hypomochlio remotiffimum vsque decurrunt; vnde patet, infertionem huius mufculi ita comparatam effe, vt maximum effectum exferere poffit; cum in homine idem mufculus prope extremitatem fuperiorem fefe inferat, ibique exiguam tantummodo partem occupet. Altera pectoralis portio, fuperior, aliqua fui parte priori fubftrata, oritur a ligamento fupradicto, a manubrio fterni et a parte fterni, quae primae coftae refpondet. Inde fibris parallelis verfus humerum decurrit et fimili modo, vt prior portio, in partes mufculofo-membranofas diuiditur, quibus mediam offis humeri partem

Portio fuperior (fig. 1. *i.*) T. XXVII.

partem in eadem ſpina occupat, adeo, vt fibrae ſuperiores ad extremitatem ſuperiorem fere attingant, inferiores autem retro portionem primam ad aliquod ſpatium deſcendant cum eaque in eandem ſpinae partem inferantur, quemadmodum ſimilem ſtructuram quoque in inſertione tricipitis femoris in homine obſeruamus. Tertia portio, inferior, a ſterni parte inferiore oritur, quae ſextae et ſeptimae coſtae reſpondet; atque inde fibris craſſioribus muſculoſis verſus os humeri adſcendit, retro priores portiones tranſit et in partem ſuperiorem oſſis humeri, ad baſin tuberculi maioris vsque, inſeritur. Denique quarta portio, infima*, a linea alba abdominis originem ducit et cum fibris muſculi deſcendentis connexa eſt vsque ad marginem coſtarum ſpuriarum. Ibi ab illis ſecedit et verſus humerum adſcendit, abitque in longum gracilem muſculum, qui coniunctus denique cum fibris portionis inferioris in eandem tuberis baſin inſeritur.

Portio inferior (*k.*)

Portio abdominalis (*l.*)

Totum igitur os humeri ab extremitate ſua ſuperiori vsque ad inferiorem ab hoc muſculo pectorali comprehenditur; cum exiguum tantum, vix duorum pollicum, haud procul ab extremitate ſuperiori oſſis humeri, ſpatium in homine ſit, quod inſertione pectoralis maioris occupatur; vbi tamen notandum, os humeri in leone, vt in reliquis fere animalibus, craſſius et robuſtius, ſed breuius quoque eſſe pro portione animalis, quam in homine. Hinc functio muſculi intelligetur. In eo quidem conuenit cum pectorali humano, vt brachium verſus thora-

Vſus muſculi pectoralis.

thoracem adducat. Differt autem in eo, vt motus iſte adductorius in leone minor ſit quoad diſtantiam, ſed longe validior, et maior quoad vim, qua motus peragitur. Ipſa enim illa inſertio ad extremitatem inferiorem efficit, vt neque abduci brachium a thorace, neque adduci ad eundem eo vsque poſſit quam in homine, vbi inſertio hypomochlio propior maiorem arcum decribere ſinit extremitatem brachii inferiorem. Sed eadem inſertio cauſa ſimul eſt, vt motus ille minor cum vi, eo maiori, exerceatur, quod facile intelligitur. Generatim ita muſculorum in leone fabricam comparatam eſſe obſeruaui, vt motus minus accurati minusque completi et pauciores quoque, quam in homine, motus, ſed longe validiores, per eos exerceri poſſint. Denique muſculus pectoralis alligando praecipue humero ad thoracem inſeruit, quo mobilior cubitus in motibus ſuis maiorem firmitatem acquirat. Caeterum ſuperiores portiones muſculi humerum ſurſum ſimul inferiores deorſum trahere poſſe, ſi ſeiunctim agant, facile patet.

Structura huius muſculi in fele.

In fele ſimilem fere huius muſculi ſtructuram inueni, ſed tertia circiter pars oſſis humeri inferior ab inſertione eiusdem libera manet. Minor ergo, quam leoni, ſed maior, quam homini, vis inde feli reſultat.

Pectorali alius muſculus incumbit, qui ad flexores cubiti pertinet. Hos autem non ſatis intelligemus omnes, niſi ſingularis quidam, et, quantum ſcio,

ſcio, proprius leoni, muſculus, magnus erector cervici, antea innotuerit.

Magnus erector ceruicis (fig. 1. *d.*)

Hic muſculus ab oſſe occipitis et ligamento nuchae originem ſuam ducit. Inde flectendo ſeſe ex parte colli poſteriori verſus anteriorem et deſcendendo ſimul verſus humerum in enormem maſſam carneam cylindricam excreſcit, quae vtrinque ad collum duo quaſi alia colla acceſſoria referri videtur. Nam ſi totum collum in quatuor partes aequales diuiſeris, duae earum exteriores a ſolis fere his musculis efficiuntur. Fibrae, dum circa collum flectuntur, diuergunt; in parte vero anteriori et prope humerum in planitiem magis expanduntur cum in parte colli laterali perfecte cylindricam figuram effecerint. Inſertio muſculi ſingularis eſt. Abeunt enim fibrae eius, quae exteriores ſunt et ſuperficiem tenent in lineam quandam debilem albam tendineam, quae transuerſaliter fere et ductu ſerpentino ſuper caput oſſis humeri in facie eius anteriori decurrit. (fig. 1. *e.*) Haec linea formatur a fibris erectoris huius magni ceruicis et a fibris, quibus alter flexorum cubiti oritur. Vtriusque muſculi fibrae carneae ſunt, et nonniſi in ipſa linea, quae tenuis eſt, albeſcnnt, adeo vt linea obliterata hinc inde videatur. Perfecte ſimilis eadem eſt inſcriptionibus tendineis muſculi recti abdominis, niſi vt etiam debilior ſit illis. Fibrae erectoris profundiores, in ſpecie quae in media musculi parte ſitae ſunt, in clauiculam inſeruntur, ex qua itidem flexoris quoque fibrae profundae enaſcuntur,

 dum

dum laterales vtriusque musculi fibrae, siue profundae, siue superficiales fuerint, sola linea illa alba intermedia coniunguntur. Clauicula, quam dixi, magis quam humana curuata est et simplicem arcum figura refert. Extremitas anterior tenuior, subcylindrica, capitulo paruo instructa, posterior, seu exterior, plana et lata est. Totius ossiculi longitudo ad arcum maiorem tribus pollicibus octoque lineis, latitudo maxima septem lineis aequalis est. Adeoque diametrum capitis ossis humeri, cui incumbit, longitudine sua non excedit. Nulli ossi per ligamenta vel per articulationem adnectitur sed inter musculos dictos flexorem cubiti et erectorem ceruicis, quasi suspensa haeret, in eorumque carne adeo sepulta est, vt nisi musculi dissecentur, eius externe nullum vestigium appareat. In fele eandem fere clauiculae rationem inueni respectu figurae, situs et connexionis; sed paulo minor haec pro portione animalis, quam in leone visa est.

Analogia erectoris magni.

Dixi proprium hunc musculum esse leoni, non, quod nihil esset in aliis animalibus vel etiam in homine, quod ei responderet, nam datur omnino in ipso homine aliquid eius analogi, sit ideo, quod hoc analogum a musculo leonis adeo tamen differt, vt eidem vsui inseruire non possit. In fele loco vastissimi cylindrici musculi, qui circa collum quasi torquetur, tres dantur tenues nec latae sed longae laminae musculares a ligamento nuchae ortae, quarum duae interiores cum alia portione, a sterno orta,

orta, in ventrem flexoris cubiti abeunt, cuius illae totidem capita referunt, exterior autem in aponevroticam vaginam humeri inſeritur. In homine facile patet, reſpondere erectori leonis partem ſuperiorem ceruicalem trapezii, quae ab oſſe occipitis et ligamento nuchae orta in partem poſteriorem clauiculae inſeritur, quae portio aeque, ac felis muſculi, ab illo leonis muſculo figurae inſertionis et muneris reſpectu differt. Trapezios generatim ſoli homini proprios eſſe puto.

Vſus huius muſculi varius eſt. Primaria actio in erectione ceruicis conſiſtit. Sed notabile eſt, magnum hunc muſculum eo munere nunquam fungi poſſe, niſi in auxilium ſimul vocentur et flexor ille cubiti, quocum, nullo oſſe fixo intercedente, coniunctus eſt, et ipſe anconeus magnus. Nam clauicula, quae inter erectorem ceruicis et flexorem cubiti ſuſpenſa mobilis haeret, nullum illi punctum fixum ſuppeditare poteſt. Hoc igitur a muſculo flexore praeſtari debet. Sed hoc ipſum fieri non poteſt, niſi cubitus, vnde porro flexorem ſuam firmitatem petere oportet, ope anconei magni fixus prius redditus fuerit. Quum vero os humeri quoque et ſcapulam fixa eſſe oporteat, vt vlna firmari et anconeus agere poſſit; facile patet, ad vnam erectionem ceruicis omnes fere muſculos extremitatum anteriorum ſimul concurrere debere, et illum motum ceruicis ſine motu extremitatum exerceri non poſſe. Quae ſane fabrica haud apta eſt multis diuerſis et Vſus eiusdem.

 deter-

determinatis motibus exercendis; nam ad paucas ea ratione compofitas actiones redibunt, quascunque leo omnibus fui corporis mufculis efficere poteft; fed eo aptior quoque ea fabrica inde euadit maximis viribus exferendis, vti continuo patebit.

Actiones specialiores. Rugitus. Dilaceratio.

Si alter horum mufculorum agit, caput ad latus oppofitum reiicitur et in eo fitu tenetur. Sic leo plerumque dum incedit, caput gerere folet, et peculiari igitur mufculo leonis haec propria eidem actio debetur. Si ambo mufculi fimul agunt, collum rigefcit et caput eleuatur. Eam actionem leo exferit, dum rugit. Denique eadem actione et toto mufculorum fuperius dicterum apparatu vtitur, dum aliquid dilacerat aut difrumpit. Vngulis enim et dentibus dum leo praedam arripit, pedibus, adeoque vi anconei magni hanc ad folum deprimit, erectore autem ceruicis partem, dentibus prehenfam, furfum ducit, qua actione vix effe exiftimo, quod non disrumpere aut diffringere poffit, et quam etiam inter omnes, quas exferere poteft, validiffimam effe credo. Nam bini hi mufculi erector ceruicis et anconeus magnus, praecipue hic pofterior, qui erectorem vi longe praecellit, fine dubio robuftiffimi funt inter omnes, quos in corpore leonis inuenias. Praeterea ita quoque compofiti funt hi mufculi, vt ex ipfa compofitionis ratione fingulari modo aliquod illis virium augmentum accedat. Dum enim punctum fixum erectoris magni ceruicis foli flexoris cubiti et praecipue anconei magni actioni innititur; hoc pun-

punctum fixum eo firmius reddetur, quo magis, quoque validius anconeus magnus agit. Quo magis igitur praeda ad solum deprimitur ope anconei, eo validius erector agere, partemque dentibus comprehensam sursum contra abripere poterit. Imo cum punctum illud, quod fixum dicitur, clauicula nempe et tota linea alba mobiles sint; dum anconeus vlnam extendit, dumque flexor simul vlnae agit, punctum fixum erectoris deorsum trahetur et a ceruice et capite, tanquam puncto mobili magis remouebitur. Quodsi nunc erectorem simul in actione versari posueris, quo minus se extendi, punctumque fixum a mobili remoueri sinat; patet, ipso anconeo, quo praeda versus solum deprimitur, ceruicem simul et caput, cuius inter maxillas pars altera praedae tenetur, retrorsum duci, adeoque vim erectoris augeri, quod sane fieri non posset, si clauicula fixa esset. Quantum igitur haec fabrica in leone minus apta est humana fabrica ad varios multiplicesque motus instituendos, tantum quoque aptior est eadem ad summas in vnica saltem actione vires exserendas. Etiam hoc notabile est in illa dilacerationis actione quod aliquatenus spontanea sit et mechanica. Dum enim leo, facto in praedam saltu, pedibus anterioribus eam deprimit, dentibusque simul arripit, eo ipso quoque ceruix cum parte, dentibus praehensa, et necessario, sursum retrahitur. Neque improbabile est, erectorem, dum anconeus magnus vlnam, eiusque simul flexorem extendit, ea actione lacessiri atque adeo per modum irritationis ad actionem perduci, quo eo magis efficitur, vt actio erectoris ceruicis cum actione anconei magni necessario coniuncta sit. Sic vno igitur eodemque momento et eadem actione qua praeda capitur, eadem quoque dilacerabitur.

Flexor cubiti pectoralis. (fig. 1. g.)

Musculus, quem incumbere dixi pectorali, flexor cubiti pectoralis, originem ducit a ligamento manubrii sterni, porro a manubrio ipso et a parte laterali sterni, cui prima et secunda costa respondent. Oritur, vt solent musculi, a sterni latere orti, fibris tendineis breuissimis abitque in musculum planum qui fibris longis, sensim conuergentibus ad latus thoracis super mediam portionem pectoralis versus brachium decurrit, et in regione flexurae cubiti tandem tendinem producit breuem teretem, quo cum simili tendine flexoris deltoidei coniungitur et in faciem anteriorem radii inseritur ad angulum, semirecto maiorem. Vsus est flectere antibrachium.

Vsus eiusdem.

In homine nullus musculus reperitur, qui ortus a thorace ad cubitum vsque pertingeret. In scapulum transeunt, os thoraci proximum, qui inde oriuntur, vel saltim ad humerum perueniunt. Cubitum nullus eorum attingit. Qui autem in cubitum inseruntur, vel ab humero, osse proxime praecedente, vel a scapula saltim ortum petunt. Sed facile patet, quid singulari hac fabrica efficiatur. Qui musculi, vti flexores in homine, vel ab osse humeri vel a margine cauitatis glenoideae et ab apo-

apophyſi coracoidea ſcapulae oriuntur, paralleli decurrunt oſſi humeri cubitoque extenſo, in eumque inſeruntur ad angulum omnium acutiſſimum; vnde cubitum nonniſi cum maxima difficultate mouere poſſunt in qua difficultate ſuperanda magna pars virium conſumitur. Si vero a ſterno flexor cubiti aduenit, in radium extenſum impingit ad angulum, ſi brachium thoraci parallelum teneatur multo maiorem ſemirecto et fere perpendicularis. Tum nulla ergo difficultas ſuperanda eſt et omnis vis muſculi ad mouendum antibrachium immediate adhibetur. Longe ergo aptior ad vires exſerendas haec fabrica in leone quam in homine eſt. Sed patet ſimul, quo maiori cum vi motus ille in leone exercetur, eo minus hunc motum fore completum. Nam nonniſi eo vsque muſculus cubitum flectere poterit, donec punctum inſertionis cum puncto muſculi fixo et hypomochlio in vnam lineam rectam contingat et angulus inſertionis euanuerit; id quod fiet, quando cubitus cum oſſe humeri angulum efficit, praeter propter aequalem angulo inſertionis. Quo igitur hic angulus inſertionis maior eſt, eo minus cubitus flecti poterit. Maxima flexio fiet, ſi muſculus flexor vti in homine vel ab oſſe humeri, vel, quod etiam praeſtat, a margine cauitatis glenoideae et proceſſu coracoideo ortus radio extenſo parallelus inſeratur, nullumque cum eodem vel minimum angulum efficiat. Sed non modo hic flexor pectoralis ipſe cubitum vltra angulum, angulo inſertionis aequalem, flectere non poteſt, ſed impedit quoque, dum

dum agit, quo minus reliqui flexores, ab humero vel a ſcapula orti, vltra eundem angulum cubitum flectere poſſint. Quamprimum enim hoc factum eſt, flexor pectoralis retrahere cubitum conabitur. Varias ergo ob cauſas haec ſtructura incommoda eſt, ſi ad varietatem motuum inde pendentium eorumque perfectionem reſpicias; aptiſſima contra, ſi ad gradum virium, muſculo exſerendarum, quem ſcilicet ſolum in hoc animale finem fuiſſe cognoſcimus, attenderis.

Analogia. In fele ſimilis flexor pectoralis exiſtit ſed multo tenuior et longior pro portione animalis. Si fabricam humanam pro norma conſtituere velis, ad quam reliqua animalia comparentur, hunc flexorem cubiti tanquam portionem pectoralis maioris conſiderare oportet. Nam pectoralis in leone, humano maiori reſpondens, ad extremitatem inferiorem humeri vsque ſe extendit. Haec ergo eius portio paulo vlterius ad radium vsque progreditur.

Flexor deltoideus (fig. 1. *f*) Secundus flexor cubiti deltoideus eſt idemque muſculus, in quem erector magnus ceruicis intermedia linea alba finitur, cuiusque in ſuperioribus mentionem iam feci. Oritur ergo hic flexor a dicta linea alba et a clauicula, quae in media parte lineae albae ſepulta in carne horum muſculorum haeret. Inde eius fibrae ad faciem anteriorem oſſis humeri conuergendo decurrunt, adeo vt variae earum hinc inde pennatim in ſtrias tendineas concurrant

rant et vltimato in regione flexurae in anguſtiorem tendinem teretem omnes colligantur, muſculique figuram triangularem efficiant. Tendo cum flexoris pectoralis tendine coniungitur, tendinemque communem conſtituit, qui porro cum tertii flexoris tendine coaleſcens in radium denique ſe inſerit.

Omnibus notis hic muſculus deltoideo humano, eleuatori humeri, qui in leone et fele non exiſtit, ſimilis eſt, adeo, vt pro eodem, cuius etiam locum occupat, haberi poſſit, cum eo tamen diſcrimine, vt qui in homine brachium attollit, antibrachium in leone flectat. Sed mirandam etiam in hoc exemplo natura ſe praebet, quae viribus conſulens omnibus modis in hoc animale, motum quoque peculiarem alteri membro detrahit plane, alterique addit ſuperfluum ne aliquo modo vires perdantur. Omnibus enim, quibus homo, et praeterea pectorali quoque, leo flexoribus cubiti gaudet. Ergo ſuperfluus deltoideus eſt, niſi ad vim in flectendo auctam reſpicias. Sed ſi humero, velut in homine hic muſculus inſeritur, quo motus efficiatur proprius, eleuatio humeri; flexio non modo debilior inde redditur, ſed quantum huic actioni virium decedit, id neque adhibetur omne ad nouam illam actionem efficiendam ob inſertionem deltoidei in humerum, quae nota eſt, viribus minime fauentem. In homine contra manifeſtum eſt in hoc exemplo, quam egregie, cum diſpendio nempe virium, motuum varietati proſpectum ſit.

Analogia.

Vſus.

Flexor cubiti, qui bicipiti respondet. (fig. 3. *k.*) T.XXVIII.

Tertius cubiti flexor, musculus egregius, robustus, durus, ventricosus, facie nitida, superne inferneque argenteo-splendidus, respondet bicipiti humano, cui, praeterquam quod nomen bicipitis non conueniat, in omnibus reliquis notis similis est. Oritur principio tendineo, forti, tereti, eoque vnico, a margine superiori cauitatis glenoideae scapulae, in quo loco tuberculum est, quod quasi vestigium apophyseos coracoideae refert. Transit deinde sub ligamentum articulatorium humeri et sub insertionem supremam musculi pectoralis, cuius partem tendineam in eo loco perforat. In conspectum venit infra caput ossis humeri et ad latus interius pectoralis. Ibi expandi sensim incipit in ventrem rotundum, magnum, humano bicipite etiam proportione longitudinis musculi et ossis humeri quadruplo saltim crassiorem et finitur tendine fortissimo tereti, qui cum communi tendine flexorum pectoralis et deltoidei coniungitur, et in radium denique inseritur, loco tertiam circiter partem totius antibrachii ab extremitate superiori remoto.

Flexor cubiti brachialis.

Denique quartus flexor cubiti brachiaeus est, horum, quos hactenus pertractaui, minimus, neque tamen inualidus. Oritur fibris mere carneis ab exteriori ossis humeri facie inter insertionem pectoralis et anconeum externum sub musculo, quem postea dicam, tensore vaginae humeralis. Inde oblique versus interiora brachii decurrit et cum tendine com-

communi flexorum coniunctus hic quoque in radium inferitur.

Ad extenfores nunc peruenimus cubiti, ideo praecipue notabiles, quod maxima vis leonis communi horum mufculorum actioni, qua nempe praedam percutit et quae percuffio extenfione cubiti abfoluitur, vulgo, nec perperam, vt puto, attribuitur. Nimirum in leone, vti in reliquis fere animalibus offa extremitatis anterioris ita compofita funt, vt, dum flexura cubiti, vti in fitu naturali, anterior, olecranum autem pofterius eft, dorfum manus, aliter atque in homine, fimul anterius, palmaque pofterior ponatur, vel extenfo carpo verfus terram refpiciat. Hinc homo flectendo cubitum et transuerfim, animalia contra extendendo eundem et deorfum palma feriunt. Adeoque homini flexores cubiti, animalibus extenfores eiusdem mufculi funt verberatorii. Extenforibus autem homo in feriendo nonnifi ad pugnum infligendum, non palma feriendum, vti poteft. Extenfores cubiti.

Tres dantur in leone mufculi extenfores anconei, quorum primus, idemque maximus fitu medius, fecundus externus, tertius minimusque internus eft. Prius quam vero hos mufculos defcribam, ordo poftulat, vt membranam exponam aponeuroticam, fimilem fafciae latae potius quam debiliori humerali vaginae hominis, vna cum mufculo eiusdem tenſore, qua membrana omnes muſculi ad humerum ſiti, praecipue vero anconei includuntur comprimunturque.

Muſculus tenſor vaginae humeralis. (fig. 2. *b*) T.XXVIII

Muſculus ille durus, tendineo-carneus, ex fibris varie decuſſatis, contextus, originem a baſi tota ſcapulae ducit fibris tendineo-membranoſis fortiſſimis, vnde conformiter ſitui ſcapulae, (quae in leone et fele baſi breuiori, lateribusque duobus longioribus gaudet,) perpendiculariter verſus humerum adſcendit, et porro a tota ſibi hac ratione ſubiecta ſpina ſcapulae. Fibrae, quae a parte baſeos ſupraſpinata oriuntur, oblique verſus humerum deſcendunt, in eundemque quoad maiorem partem inſeruntur, in ſpinam, quae a tubere maiori deſcendit. Aliae tamen earum magis oblique progrediuntur et in membranam dictam tranſeunt, in eaque oblique verſus regionem flexurae cubiti tendineae decurrunt. Illae fibrae, quae a parte baſeos infraſpinata ortum duxerunt, magis perpendiculariter verſus humerum tranſeunt; ſed in medio hoc itinere in tendineam membranam humeralem abeunt, in qua eandem continuo directionem obſeruantes circa brachium voluuntur. Quae denique fibrae a ſpina ſcapulae oriuntur, exceptis illis quae ab ipſo acromio originem ducunt, eae a prioribus fibris, a baſi ortis, fere teguntur. Sic oſſi humeri et thoraci paralleli deſcendunt, et in eodem termino, vbi fibrae a baſi productae membraneſcere incipiebant, hae quoque eandem

dem naturam membranofam induunt, et ad vaginam humeri conftituendam concurrunt. Quae vero ab ipfo acromio nafcuntur, illae maxime cum iis, quae a parte bafeos fupraſpinata ortum duxerant, in fpinam offis humeri tranfeunt, nonnullae tamen earum itidem in membranam oblique abeunt. Sic igitur complicatus ifte mufculus, miffa fibrarum fuarum aliqua parte in fpinam offis humeri, reliquis, iisque plurimis, producit membranam fortiffimam, lineam, aut plus ea craffam, ex fibris duriffimis, longitudinalibus, transuerfalibus et obliquis compofitam. Longitudinales enim a fibris mufculi, fpinae fcapulae adhaerentibus, producuntur, indeque fuper mufculos anconeos magnum et externum ad regionem olecrani recta defcendunt, eosque mufculos contegunt. Transuerfales fibris mufcularibus debentur, quae a parte bafeos fcapulae infrafpinata oriuntur. Hae fuper mufculos anconeos ad interius latus humeri perueniunt, totumque brachium circumdant. Denique obliquae a parte bafeos fupraſpinata et ab acromio maxime proueniunt et verfus flexuram cubiti tendunt. Haec membrana nunc vaginam conftituit, qua omnes ad humerum fiti mufculi, maxime tamen anconei includuntur et continentur. Nam quae ad interius brachii latus pertingunt, rariores tantum et debiliores fibrae funt. In parte exteriori vero copiofiffimae et duriffimae fibrae membranam efficiunt firmiffimam et validiffimam. Denique membrana terminatur deorfum,

Membrana vaginae humeralis.

Vagina.

 dum

dum fibrae eiusdem partim cum lata massa tendinea anconeorum, adeo quidem firmiter, coalescunt, vt separari nequeant, partim vero in similem vaginam, qua musculi ad vlnam et radium siti inuestiuntur, abeunt.

Vsus vaginae humeralis.

Vsus quidem eiusmodi vaginarum aliquid adhucdum obscuri habet in explicationibus physiologorum; neque enim, quomodo ad vim musculi, dum agit, augendam, aliquid conferant, satis manifestum est, neque omnino quidquam in eum vsum efficere possunt vaginae, quas eo tempore, dum musculus agit, praecipue si nullis propriis musculis tensoribus instructae sunt, necessario laxiores esse oportet musculis ipsis, quos inuestiunt; siquidem fibra tendinea minus quam carnea contractilis est; adeoque musculum eo tempore comprimere, aut continere non possunt. Videntur potius ad conseruandum musculi robur et firmitatem fibrarum destinatae esse. Vt enim minus contractiles, ita duriores minusque extensiles quoque sunt fibrae tendineae quam carneae, adeoque impedient, quominus vel ab antagonistis, vel aliis causis musculi inclusi nimium extendantur, laxentur et mollescant. Quicquid interea sit; siue immediate vim musculi agentis augeant, vt vulgo putatur, siue robori eiusdem intrinseco conseruando inseruiant; hoc certum tamen est, musculos eiusmodi vaginis indutos, caeteris paribus fortiores aestimandos esse, quam si nudi sunt; idque eo magis cum videmus, praecipue illos musculos vaginis donatos

natos esse, qui vel sua natura et debiliores sunt et nimiae extensioni facile exponuntur, vt longi extremitatum musculi, vel qui magnis effectibus, quibus vires vix sufficiant, exserendis destinati sunt, vti in exemplo crotaphytis apparet. Similiter ergo de nostris quoque anconeis iudicandum erit, notabile iis accedere robur ob vaginam hanc rigidissimam, qua inuoluuntur. Et omnino hi musculi singulari fibrarum duritie et firmitate gaudent, quam ipsi vaginae deberi, facile censeas.

Caeterum musculus tensor vaginae praeterquam quod hanc membranam intendat, os humeri quoque, cui pars fibrarum suarum inseritur et totum brachium ad thoracem alligat, non modo dictis carneis fibris sed ipsa membrana quoque, quae circa os humeri producitur et in olecrano firmatur. Adeoque pectorali in sua actione respondet. Hic enim os humeri ad partem thoracis anteriorem reuincit, ille idem versus partem posteriorem retrahit; adeoque efficitur vt os humeri valida vi ad thoracem firmetur atque in suo situ fixetur, ne in magnis anconeorum actionibus vllo modo vacillare possit. Vsus musculi tensoris.

Analogus hic musculus est parti posteriori deltoidis, quae ab acromio et spina scapulae originem ducit, cum parti eiusdem anteriori flexorem cubiti deltoidem respondere supra vidimus. Analogia eiusdem.

In

Structura eius in fele.

In fele ſtructura diuerſa eſt. Tenuis lamina carnea a baſi ſcapulae praecipue, tum et fibris debilioribus a ſpinae parte inferiori orta tenuiſſimam pro vagina membranam producit. Sed ab acromio peculiaris muſculus oritur, ſubuentricoſus, a priori plane ſeparatus, qui totus in ſpinam humeri tranſit, nec quidquam ad vaginam contribuit.

Anconeus magnus (fig. 2. *d.*) T.XXVIII.

Anconeus denique magnus ſequitur, quem ſane vi aeque, qua pollet, ac muneris, quo fungitur, praeſtantia, principem in toto corpore leonis muſculum eſſe arbitror, quem vna cum erectore ceruicis ſolum naturam curaſſe, ſolum ornaſſe dixeris. Vis quidem non vna cauſa eſt, cur maxima huic muſculo attribuatur, vti in ſequentibus patebit; munere autem inſignem eſſe, facile credas, ſi conſideraueris, hunc cum erectore ceruicis praecipuum inſtrumentum eſſe, quo animalia leo occidit (cui tamen prouinciae ille maxime praefectus eſſe videtur) cuiusque vnice virtute fretum hoc animal audax nihil non aggreditur vincitque.

Eius origo.

Ille oritur fibris carneis ſub muſculo tenſore vaginae humeralis a coſta ſcapulae, cuius maximam quidem partem principium hoc muſculi occupat, vt quarta circiter pars eius verſus baſin libera maneat pro adhaeſione teretium muſculorum. Iam notandum eſt, hanc coſtam ſcapulae in leone longiorem eſſe pro portione reliquarum partium quam

in

in homine, et, vt paucis dicam, ſolam eius partem, ab anconeo occupatam, haud cedere longitudine dimidiae parti oſſis humeri; vnde iam ex principio validitas muſculi cognoſci poteſt. Inde ergo muſculus ortus actutum valdopere intumeſcit, et ſub tenſore vaginae, tanquam e ſpelunca ſua prodit. Hic nempe tenſor, dum fibris aponeuroticis a parte baſeos infraſpinata oritur proxime ad faciem externam ſcapulae continuat vsque in eam regionem, vbi a coſta anconeus oriri incipit. Ibi tenſor aequaliter margini ſpinae eleuatur ſuper faciem ſcapulae ab eaque et a coſta ſcapulae remouetur tres digitos transverſos, eaque ratione carneis fibris ad humerum vsque continuat. Totum igitur hoc ſpatium, quod tenſori muſculo coſtaeque intereſt, a craſſo hoc principio anconei repletur. Hic vero, dum prodit, ilico et latior fit multo et craſſior, vt inde appareat, eum tamen, quatenus a tenſore tegitur, ab eodem compreſſum fuiſſe. Sic progreditur vaſtiſſimus muſculus fibris arcuatis, quae valde diuergunt, ventremque conſtituunt, deinde iterum conuergunt ad tendinem producendum. Muſculus, hoc modo productus, ſi tendinem nempe, quem poſtea dicam conoideum, quo in olecranum inſeritur, ſeparaueris, ſolamque partem muſculoſam reſpicias, maſſam carneam refert figurae ſubgloboſae, vel irregulariter cubicae, cuius nempe latitudo nullo modo longitudini cedit, et craſſities haud multo latitudine aut longitudine inferior eſt. Si etiam os humeri ita dirigitur, vt cum ſcapula, quam a baſi ad cauitatem

Ventris deſcriptio.

glenoideam eiusdem fere cum osse humeri longitudinis esse monui, angulum intercipiat rectum; hoc totum spatium inter humerum et scapulam a solo hoc anconeo occupatur, et humerus cum scapula et interiecto anconeo magno iterum massam quadraticam refert. In omnibus animalibus anconeus magnus musculus longus subcylindricus est. In homine is anconeus, qui magno leonis respondet, ille est, qui longus dicitur; idemque a parte costae scapulae breuissima illa oritur sola quae collum vocatur, vnde non alius nisi subcylindricus musculus, neque crassus euadere potuit. Similisque eiusdem figura in fele est. Quos aliorum animalium anconeos, si comparaueris cum illo in leone, videntur hi longi graciles musculi modo ad vlnam mouendam facti esse, cum ille quadraticus solus ad magnas ope vlnae vires exserendas productus sit. Neque etiam in aliis musculis maioribus exemplum facile inuenitur eiusmodi figurae, qui quippe vel plani sunt et satis plerumque tenues, vt musculi ad thoracem siti, vel longi subcylindrici, vt musculi extremitatum. Neque in maximorum animalium glutaeis magnis eius figurae massam inueniri persuasus sum, quorum tamen glutaeorum insertio in os femoris exserendis viribus adeo parum fauet, vt magnitudo eorum omnino magis obstaculis vincendis quam producendis effectibus inseruire videatur.

Insertio. Tendine tandem lato et crasso conoide fortissimo anconeus finitur. Ei in superficie exteriori fibrae acce-

accedunt a vagina humerali, quae ad ipſam baſin cum hoc tendine concreſcit, vnde ille notabiliter augetur. Tendo deinde coniungitur cum collaterali exterioris, et ad faciem interiorem humeri cum interioris, anconei tendinibus, quibus vnitis ampla maſſa tendinea formatur. Hac tanquam in capſula totum olecrauum praecipue proceſſus vlnae anconeus ſuſcipitur. Ea huius maſſae tendineae portio, quae in facie poſteriori ad proceſſum anconeum decurrit, duriſſimis fibris in eius ſubſtantiam oſſeam intrat, totamque eiusdem tum ſuperiorem, quae verſus humerum ſpectat, tum poſteriorem planam latamque ſuperficiem occupat. Laterales vero dictae capſulae tendineae partes exterior et interior ſuper antibrachium deſcendunt et vaginam antibrachii producunt. In eandemque vaginam etiam ſuperficiales fibrae illius portionis abeunt, quae in proceſſum anconeum inſeritur.

Nunc verum quidem eſt in fele, et etiam in ipſo homine ſimilem fere eſſe anconeorum ad vlnam applicationem. Interim primo quidem fatendum tamen eſt, hanc applicationem pro viribus parcendis melius excogitari non poſſe. Nam tendinis pars, quae in anconeum proceſſum inſeritur, reſpectu lineae a puncto inſertionis ad articulationem ductae, ad quam ſcilicet ſolam reſpiciendum eſt, angulo inſertionis omnino recto gaudet; quamuis fibrae in anconei faciem poſteriorem intrantes, reſpectu huius faciei ſub angulo acutiſſimo inſerantur. Ea vero tendinis portio, quae in vaginam antibrachii abit, praeter illam vtilem inſertionem totum antibrachium ipſa hac mediante vagina in ſingulis punctis comprehendit. Deinde porro conſiderandum eſt, in homine omnia longe eſſe debiliora, tendinem, qui proceſſui anconeo inſeritur, vaginam, qua antibrachium prehenditur, et proceſſum anconeum ipſum. Denique propinquitatem inſertionis anconeae ad hypomochlion in homine quidem, vt fere vbique fieri ſolet, nocere facilitati motus, in leone vero nullo modo eidem obſtaculo eſſe. Nam in leone antibrachium in parte ſuperiori adeo craſſum, praetereaque vna cum manu adeo breue eſt, vt nullus pro inſertione anconei locus in vlna aptior reperiri poſſe videatur, quominus ob imminutam motus celeritatem effectus actionis quoque imminuatur quam ille, qui propior hypomochlio eſt. Quibus omnibus computatis apparet quamuis homini et feli, caeteriſque forte animalibus, ſimilis quoad inſertionem anconeorum ſtructura ſit; nullo tamen modo eundem inde vſum redundare poſſe in exſerendis viribus, qui in leone obtinetur..

Vires huius muſculi maximas eſſe oportet.

Vſum huius muſculi in ſuperioribus iam explicui, vbi de erectore ceruicis et de actione dilacerationis agebatur. De viribus addere liceat, eas paene incredibiles videri, ſi ad omnes muſculi proprietates attenderis; Principium largum validum, quo a ſcapula oritur! Inſertio, qua ad vlnam applicatur, pro viribus parcendis vtiliſſima, inſimulque vali-

validiſſima. Craſſities ventris, qua gaudet, enormis! Membrana rigida, qua includitur et denique quae haud minoris, quam priora, momenti eſt, breuitas totius muſculi, ſingularumque eius fibrarum, cum muſculi craſſitie coniuncta. Quo enim maiorem copiam fibrarum muſculus habet, quae ex craſſitie eiusdem iudicatur, et quo breuiores hae fibrae ſunt, eo maius robur ei ineſſe facile intelligitur. Ideoque qui muſculi longi ſunt, eos vaginis, vel inſcriptionibus tendineis, vel aliis artificiis, quibus debilitati eorum ſuccurratur, munitos videmus. Ex his omnibus igitur colligendum eſſe exiſtimo, hunc muſculum anconeum leonis omnino ſingulare exemplum validitatis et roboris exhibere, nec perperam leoni, praecipue eius actioni, qua ferit, vim maxime inſignem inſolitamque adſcriptam eſſe.

Anconeus externus (fig. 2. *f*) T.XXVIII.

Secundus anconeus exterior eſt. Ille oritur ſub parte tenſoris anteriori a plana lataque facie tuberis maioris oſſis humeri carneus, et porro ab exteriori eiusdem oſſis ſuperficie. Inde latus et craſſus recta deſcendit et cito in tendinem abit, ipſo muſculo latiorem, qui coniunctus cum tendine magni, in proceſſum anconeum partim, partimque in aponeuroticam vaginam antibrachii inſeritur. Quamuis vi longe cedat anconeo magno, tamen et ipſe validus muſculus eſt, qui ſymbolum ſuum haud ſpernendum ad actionem cubiti conferre videtur.

Anconeus internus (fig. 3. *f*.) T.XXVIII.

Tertius autem, interior, omnino, quatenus in leone, paruus muſculus eſt, et parum, credo, con-

contribuit ad vires augendas. Idem oritur a superficie offis humeri interna fibris carneis et ad latus interius defcendit. Inferitur tendine tenuiori in latus interius proceffus anconei.

Reliquos vel humeri, vel fcapulae mufculos, vel manus extremae, cur in leone magis inquirerem et defcriberem quam in quouis animale alio, nullam caufam video. De neruis quaedam notatu digna occurrunt. Haec addo.

De Neruis brachialibus.

Neruos in leone aliter reperi, atque putaueram. Quis enim non crederet tantae maffae mufculari proportionatam quoque datam effe copiam neruorum? et fane, qui ftatuunt, neruos fluido mufculis aduehendo inferuire, quo motus in illis producerentur, haud facile phaenomenon hoc in exfpectatum interpraetari poterunt.

Trunci quatuor. Nerui enim leoni valde exigui funt, quod idem quoque de arteriis et de venis valet. Quatuor trunci in meo exemplo ad producendos brachiales neruos ex medulla ceruicali concurrunt, quorum duo fuperiores quidem ex interftitio inter penultimam et antepenultimam vertebram colli alter anterior, alter pofterior prodeunt. Ille, qui anterior eft, (Eorum primus fig. 3. *a.*) ipfe haud validus, et radiali humano vel mediano vix latior, poft breue fpatium in tres ramos tenuiores diuiditur, quorum fuperior minimus continuo carni

carni ſubſcapulari quosdam ramulos communicat alios que ad muſculos ſupra - infraque - ſpinatos mittit. Hic loco ſuperſcapularis humani eſſe videtur, eique magnitudine fere aequalis eſt. In fele duos truncos ſuperſcapulares reperi aequales, quorum vnus pro portione animalis hunc vnicum leonis neruum longe ſuperat. Secundus ramus neruus radialis, idemque humano radiali maniſeſto tenuior eſt. Si vero ad proportionem animalis reſpicias octuplo ſaltem craſſiorem eum eſſe oporteret, vt reſpondeat magnitudine neruo humano. Deſcendit ille ſine ramis notabilibus ad medium os humeri vsque. Ibi diuiſus in duos ramos aequales retro os humeri tranſit, et vt fieri ſolet, in reliquis animalibus ſecundum longitudinem radii decurrit diſtribuendus in dorſo manus. In fele hic neruus inſignis eſt magnitudinis et non adeo multum abeſt, quin, quod incredibile videtur, craſſitie aequalis ſit radiali leonis. Tertius primi trunci ramus ille neruus eſt quem in homine medianum vocamus. Hic notabile ſpatium ſine ramis deſcendit, tum duas radices accipit, ſibi fere aequales, a neruo cubitaeo. Inde paululum augetur. Poſthaec ad partem inferiorem oſſis humeri peruenit. Ibi ſingularis trabecula oſſea a corpore oſſis ſecedit, iterumque cum eodem coniungitur. Sub hac trabecula, quaſi ſub ponte neruus vna cum arteria et vena brachiali tranſit et diuiditur in duos ramos, quorum alter muſculos ad vlnam ſitos adit, alter ad palmam manus peruenit, ſolitoque modo in digitales diuiditur. Similis trabecula oſſea pro tranſitu nerui medi-

Neruus ſuperſcapularis (fig. 3. *f.*)

Neruus radialis (fig. 3. *g.*)

Neruus medianus (fig. 3. *h.*

mediani in fele eſt, ſed longior, elegantiorque, viam producens ampliorem. Hic medianus neruus, etiam poſt acceptas radices a cubitaeo, tamen ſenſibili gradu tenuior itidem eſt quam medianus in homine, et proportione reliquarum partium fere octuplo tenuiorem eſſe cenſeo. In fele et coniunctum cum cubitaeo vsque fere ad tranſitum per foramen oſſis humeri, vbi vterque ramus a ſe inuicem ſecedit, et ſeparatum truncum hunc medianum reperi. Siue vero proprius truncus, ſiue ramus fuerit trunci, ſibi cum cubitaeo communis, proportione animalis tamen etiam humano, craſſior eſt, licet enormem illam craſſitiem non habeat, quam radialis.

Truncus ſecundus (fig. 3. *b.*) Secundus pro brachio truncus ceruicalis poſt aliquod ab ortu ſpatium tres notabiles ramos reddit anaſtomoticos, a ſe inuicem remotos, breuiores, qui in plexum latum planumque, a tertio et quarto trunco formatum, inſeruntur. Nerui axillares (fig 3. *m,n*) Poſthaec truncus ipſe in duos ramos aequales finditur; atque hi ſub celluloſam, quae ſubſcapularem obducit, repunt ad angulum inter humerum et ſcapulam et in muſculos ſuperſcapulares et qui ad latus exterius humeri ſuperne collocantur, ſeſe diſtribuunt, vnde ergo patet, hos ramos loco eius nerui eſſe, qui in homine axillaris dicitur. Vtrique ſimul ſumti omnino maiores et quilibet eorum circiter aequalis eſt axillari humano; ſed multum tamen abeſt, quin iuſtam proportione reliquarum partium magnitudinem habeant. In fele etiam hic neruus valdopere, humanum aeque ac leoninum relatiua craſſitie ſuperat.

Ter-

Tertius truncus ex interſtitio inter vltimam et penultimam vertebram colli prodit. Hic neruus inter reliquos maxime ſpectabilis eſt et videtur primo intuitu eiusmodi neruus fere eſſe quales in leone quaeſiueris. Gaudet etiam latitudine quinque linearum et dimidiae. Verum enim vbi recte conſideraveris hanc laminam nerueam, vix lineam craſſam eam inuenies. Adeoque minorem longe portionem ſubſtantiae medullaris, quam alteruter priorum truncorum brachio adfert; neque notabiles neruos hic truncus edit. Primus ramulus eſt, qui cuti proſpicit interioris partis humeri et loco cutanei interni eſſe videtur. Deinde continuo truncus coniungitur cum quarto et expanſionem nerueam cum eodem producit latam, oblongam, valde tenuem, hinc inde quaſi in filamenta fiſſam, in qua tres illi rami anaſtomotici trunci ſecundi recipiuntur. Poſtea a quarto trunco iterum ſecedit, et nunc notabili gradu, quam ante coniunctionem, anguſtior, ſed tantundem quoque craſſior, vnaque mollior eſt. Tum vero denuo lateſcere et expandi in maiorem planitiem incipit. Tandemque ſenſim in mera filamenta tenuiſſima ſeparata flabelli inſtar diſpergitur, quae retro medium os humeri progrediuntur, ibique maxime circa perioſteum in celluloſa et adipe, partim quoque in adiacentibus muſculis diſtribuuntur Neque in homine neque in fele quod huic neruo ſimile ſit, reperitur. Loco vero eiusdem muſculo-cutaneus eſt.

Tertius truncus (fig. 3. *c.*)

Cutaneus internus (o.)

Denique quartus truncus ex interſtitio inter vltimam vertebram colli et primam dorſi naſcitur.

Quartus truncus (*d*)

Iſte omnium reliquorum validiſſimus et aequalis circiter eſt coniunctis in vnum truncum ceruicali ſeptimo et octauo ex quo trunco cubitaeus et cutaneus internus in homine oriri ſolent. Tamen multum abeſt, quin requiſitam proportione muſculorum craſſitiem habeat. Poſt aliquod ſpatium vnitur cum tertio trunco in dictum latum plexum nerueum, eique in eo latere, vbi accedit, craſſitiem paulo maiorem, quam in oppoſito latere producit. Secedit deinde ab illo et duos ramos anaſtomoticos ad medianum mittit quibus arteria brachialis et vena comes complectuntur, vnde neruus paulo tenuior euadit et cubitaeum nunc refert, qui cubitaeo craſſior et aequalis circiter mediano vel etiam paulo maior eodem eſt; neque tamen iuſtam proportione muſculorum craſſitiem habet. Deſcendendo verſus cubitum primo attenuatur, deinde denuo intumeſcit, ſimulque mollescit et rubricundo colore tingitur, vt retro condylum internum oſſis humeri clauae fere figura gaudeat. Tum inter muſculos ad cubitum ſitos ſe recipit, iisque ramulos reddit ſolitoque modo ad latus vlnare decurrit et ad palmam, vbi diſtribuitur, peruenit.

Neruus cubitaeus (*p.*)

Explicatio exiguae neruorum ad muſculos rationis.

Dummodo ad phaenomena neruorum notiſſima attenditur; quae difficilis videtur primo intuitu, neruorum exigua ad muſculos ratio, eam explicatu haud difficilem eſſe exiſtimo. Si neruus, qui muſculum adit, ligatur vel diſſecatur, muſculus nullo modo aut viribus ſuis, aut facultate motus, deſtituitur; ſoli animae potentia aufertur motum pro arbitrio ſuo

ſuo in hoc muſculo excitandi. Si enim vel muſculus ipſe vel neruus infra ligaturam irritatur, vehementiſſimos ille motus actutum exercet. Non igitur a neruis muſculorum facultas mouendi aut vires dependent, quae muſculo ipſi eſſentialiter inſunt. Nerui vero animae inſeruiunt, quo muſculum quaſi tangere eumque ad motum ſuum edendum ſollicitare poſſit. Eaque ratione in diuerſis corporis partibus motus pro lubitu excitat moderatque.

Neque in corpore humano exempla deſunt vbi aut validis muſculis validae exiguis ſub neruis vires exſeruntur, aut debilioribus partibus magni nerui praeſunt. Illud in corde quod viribus, quas exſerit, non minus, quam neruorum ſuorum exiguitate inſigne eſt, hoc in digitis elucet, qui viribus ſatis mediocribus neruisque permagnis inſtructi ſunt. Quid ergo demum magni aut parui nerui efficient? aut quid dicendum erit de illis muſculis, qui magnis neruis, et de his, qui paruis inſtructi ſunt? ſiquidem ſoli animae nerui inſeruiunt, vt motus muſculorum iis mediantibus excitet atque moderet; facile apparet; ibi multis fibrillis nerueis, vel quod idem eſt magnis neruis, qui multas fibrillas contineant, opus eſſe, vbi multi et varii motus a muſculis produci et ab anima excitari, variaque ratione determinari et moderari poſſunt, ſiue cum magna vi hi motus exerceantur in muſculis magnis et validis, ſiue in debilibus muſculis debiles tantummodo motus ſint, qui producuntur; ibi vero magnos neruos ſuperfluos eſſe, minores con-

conuenire, vbi (vel magnis cum viribus, vel paruis) motus nonnisi pauci, iique vno semper eodemque modo exercentur, vbi minor in motibus varietas et parum adeo negotii in musculis animae est. In ipsis adductis exemplis rei veritas se manifestat. Cor enim, quod, licet vi magna, tamen neruis exiguis gaudet, quos et ipsos sensorios solummodo esse puto, liberum prorsus ab omni animae arbitrio est, quae neque excitare, neque interrumpere, neque vllo modo validos eius motus mutare vel determinare potest. Sed mirum est, quantum eadem contra imperium habeat in digitos musici, qui crassis ideo neruis instructi sunt.

Quum ergo in leone magnos quidem et validos musculos, sed pauciores, eosque ita applicatos inuenerimus, vt magnas quidem vires in motibus, quos exercent, sed pauciores quoque motus diuersos efficere possint; quumque omnia generatim ita comparata sint, vt facile appareat, solis viribus, dispendio varietatis motuum in hoc animali consultum esse; non mirum sane est, si neruos in eodem debiliores inueneris.

Si quis vero crediderit forte, neruos eo inseruire, vt fluidum nerueum musculis adferant, quo fibrillae eorum inflentur, et motus in iis producantur, tum sane magni musculi leonis massae inutiles erunt, quae ob defectum fluidi neruei succurrentis nunquam satis inflari, nunquam, quamuis magni sint, magnas vires exserere poterunt.

Caete-

Caeterum ex comparatione ſtructurae leonis cum humana apparet quoque melius, quam ex ſola humanae conſideratione apparere poteſt, quam omnibus modis in homine, etiam, ſi aliter fieri non potuit, cum maximo diſpendio virium, multitudini et varietati motuum, eorundemque plenitudini et perfectioni proſpexerit Sapientia Diuina. Membra hominis longa ſunt et gracilia, et idem de muſculis eorum valet. Horum praeterea punctum mobile plerumque propius eſſe ſolet hypomochlio. Plerumque etiam ad angulum acutiorem inſeruntur. Haec omnia eo exacte redeunt, vt homo inde euadat debilior, ſed tantundem quoque mobilior et in dirigendis motibus dexterior, ad quam dexteritatem ſuam viciſſim partem contribuunt magni, quibus inſtructus eſt, nerui.

Scholium de ſtructura corporis humani.

Cauendum autem eſt in comparatione virium diuerſorum animalium cum humanis, ne, quae ipſi huic dexteritati humanae, vel ingenio, vel maiori applicationi et diligentiae debentur, viribus adſcribantur. Probe cauendum adeo, ne cum ſoliditate oſſium et firmitate ligamentorum vires muſculares confundantur. Dum pondera homo eleuat, ligamenta maxime patiuntur et vi ponderum firmitate ſua reſiſtunt. Dum onera, quae fert, capiti, vel ceruici et dorſo incumbunt, oſſa, praecipue vertebrae, earumque cartilagines comprimuntur, ſuaque duritie vel elaſticitate reſiſtunt. Muſculi nil conferunt, niſi, vt totum corpus in aequilibrio et ſingula membra in suo situ erecto contineant; quod nullius fere momenti res est. Si ponderi quoque, quod homo dorso sustinet, animal homine maius succumberet, etiam hoc noli mirari. Nam columna vertebrarum in homine erecta est et vertebra vertebrae incumbit. In animalium columna horizontali vertebrae a se inuicem se disrumpi patiuntur. Multa alia hic porro sunt consideranda, quae euoluere nimis longum esset, et a meo penso alienum. Obseruata de visceribus leonis proxime dabo.

EXPLICATIO TABVLARVM.

Fig. 1. Musculi humeri et cubiti ex parte anteriori thoracis orti.

a. a. Latissimis colli.
b. b. Portiones sternomastoideorum.
c. Portio laryngis.
d. Magnus erector ceruicis.
e. Linea tendinea.
f. Flexor cubiti deltoideus.
g. Flexor cubiti pectoralis.
h. h. Portio musculi pectoralis exterior.
i. Portio eiusdem superior.
k. Portio inferior.
l. Portio abdominalis.
m. Manubrium sterni.
n. Ligamentum manubrii sterni.

Fig. 2. Musculi ad exteriorem partem humeri siti.

a. Tuberculum maius ossis humeri.

b.

b. Tenſor vaginae humeralis.

c. Margo huius muſculi, a quo membrana vaginae reſecta eſt.

d. Anconeus magnus.

e. Margo reſectae membranae vbi cum tendine anconeorum muſculorum concreſcit.

f. Anconeus externus.

g. Pectoralis maior.

h. Flexor cubiti pectoralis.

i. Flexor cubiti deltoideus.

k. Portio flexoris cubiti, qui bicipiti humano reſpondet.

l. Flexor cubiti brachiaeus.

Fig. 3. Nerui brachiales.

A. Pectoralis muſculus.

B. Portio flexoris deltoidei.

C. Flexor pectoralis.

D. Anconeus magnus.

E. Supraſpinati portio.

F. Subſcapularis coniunctus cum tereti.

G. Portio latiſſimi dorſi.

H. Portio ſternomaſtoidei.

I. Pars inferior anconei interni, cuius pars ſuperior reſecta eſt, vt neruus *ſ* appareat.

K. Muſculus flexor, qui bicipiti humano reſpondet.

a. Truncus neruorum brachialium primus.

b. Truncus ſecundus.

c. Tertius. *d.* Quartus.

e. Arteria axillaris.

f.

f. Neruus qui superscapulari humano respondet.
g. Neruus radialis.
h. Neruus medianus.
i. k. Eius diuisio, postquam per foramen singulare ossis humeri transiit.
l. Rami tres anastomotici inter truncos secundum et tertium.
m. n. Nerui, qui loco sub axillaris humani sunt.
o. Neruus cutaneus, qui loco cutanei interni esse videtur.
p. Neruus cubitaeus.
q. r. Rami anastomotici inter cubitaeum et medianum.
s. Neruus, qui musculo-cutanei humani loco est.

Vngulae vna cum vltimis phalangibus digitorum in cute effarcienda relictae, quae ideo in his figuris deficiunt.

NOVAE

NOVAE PLANTARVM SPECIES.

Auctore

E. LAXMANN.

Exhibit d. 20. Iunii 1771.

Ex herbario meo ſibirico, quod per quinquennium praeſertim in alpinis auſtralioribus comparaui, quodque pluſculas nouas ſpecies continet, Pemptadem hic ſtirpium ſpecioſiorum publicae luci committo. Primus eorum mihi dicitur:

I.

VERONICA *pinnata* ſpica terminali, foliis linearibus, dentato pinnatis. T. XXIX. Fig. 1.

DESCR. RADIX ramoſo fibroſa, perennis.

CAVLES plurimi, pedales, erecti, teretes, ſimpliciſſimi, herbacei.

FOLIA linearia, alterna, conſertiſſima; inferiora pinnata, intermedia dentata, ſuperiora integerrima.

SPICA terminalis caule dimidio breuior, plerumque vnica, floribus conſertiſſimis.

CALYCIS perianthium quadripartitum, perſiſtens, laciniis lanceolatis, acutis.

COROLLA dilute coerulea; *tubo* calyce paulo longiore; *limbo* quadripartito plano; *laciniae* ouatae, inferiore reliquis minore.

STAMINVM *filamenta* duo adſcendentia, corollae tubo quadruplo longiora, *antheris* oblongis.

PISTILLI, *germen* compreſſum, *ſtylus* filiformis, longitudine filamentorum, perſiſtens, *ſtigma* ſimplex.

PERICARPII *capſula* ouata, obcordata, apice compreſſa, glabra, bilocularis, quadriualuis.

SEMINA plurima, rotunda, rufa, minima.

Habitat ad Obum fluuium in apricis; floret circa initium Iunii; caules, folia et perianthio pube quadam tenuiſſima coriacea veſtita.

Obſeru. In alpibus Siniae Sopka, Reunoua Sopka, aliisque altioribus argentifodinam Smeinogorsk circumiacentibus montibus, varietatem huius Veronicae obſeruari glabram, floribus albis, foliis ſucculentis, caule palmari.

II.

Secundo loco prodeat noua Spiraeae ſpecies, elegantiſſimus in ſuo genere frutex, quam ob locum natalem *altaienſem* dico, et a congeneribus ſequenti denominatione diſtinguo.

SPIRAEA

SPIRAEA foliis lanceolatis, integerrimis, glabris, ad basin angustatis, sessilibus, floribus racemosis, racemis simplicibus. T. XXIX. Fig. 2.

DESCR. RADIX lignea, solidissima, ramoso fibrosa.

CAVLIS fruticosus, solidus, quadripedalis, laeuis, ramosus.

FOLIA sparsa, lanceolata, integerrima, in denticulum excurrentia, ad basin angustata, glabra, sessilia, patentia, plana, dilute viridia et quasi membranacea.

RACEMI plures, simplices, in capitulum ouale congestis, ramos terminantes.

CALYCIS perianthium monophyllum, basi planum, quinquefidum, laciniis acutis, paruis.

COROLLAE *petala* quinque, alba, ouata, obtusa, patentia *vnguibus* angustatis, magnitudine petalorum spiraeae opulifoliae.

STAMINVM *filamenta* capillaria, circiter triginta, petalis longiora; *Antherae* subrotundae.

PITILLI *germina* quinque, *styli* filiformes, longitudine calycis, *stigmata* simplicia, obtusa.

PERICARPII *capsulae* quinque, oblongae, teretes, accuminatae.

SEMINA plurima, ouata, parua.

Habitat in montoſis radicibus alpium Maloi Altai. Floret circa finem Iunii. Inter fluuios Injae (иня et Bjelaja (белая) haud procul a munimento Tigiretskoi Krepoſt vt et ad amnem Kabanovka legi.

III.

Tertia noſtra planta erit ex ordine ringentium.

T. XXIX. Fig. 3. DRACOCEPHALVM *altaienſe* foliis radicalibus cordatis, orenatis, petiolatis; caulinis orbiculatis ſubſerratis ſeſſilibus, floribus verticillatis, bracteis laciniatis, oblongis.

DESCR. RADIX fuſca, fibroſa, perennis.

CAVLIS plerumque vnicus (raro plures) quadrangularis, ſimplex, erectus, pedalis, herbaceus.

FOLIA leuiter rugoſa, *radicalia* pauca, oblonga, cordata, crenata, obtuſa, petiolata petiolis foliis longioribus, hirſutis: *caulina* oppoſita alterno ordine, orbiculata, crenato ſerrata, quinqueneruia, ſeſſilia, ad baſin hirſuta: *floralia* profundius ſerrata, laciniis accuminatis, in violaceum colorem vergentia, neruis hirſutis.

BRACTEAE colore foliorum floralium, oblongae, profunde laciniatae, hirſutae, ad baſin floris plerumque duae vel tres.

VERTI-

VERTICILLI ex alis foliorum floralium totidem in capitulum coarctati, floribus sex vel octo maximis, violaceo coeruleis, patentibus.

CALYCIS *perianthium* tubulatum, striatum, hirsutum, quinquefidum, laciniis lanceolatis, integerrimis, inaequalibus; superiore latiore obtusiusculo, reliquis angustioribus acutis.

COROLLA ringens: *tubus* longitudine calycis, versus faucem sensim ampliatus; *faux* maxima, inflata, barbata, hians; *labium superius* fornicatum, emarginatum, lobis rotundatis, intergerrimis; *labium inferius* trifidum, laciniis lateralibus obtusis, integerrimis reflexis, media pendente, emarginata, longiore.

STAMINVM *filamenta* quatuor, filiformia, sub labio superiore recondita, quorum duo paulo longiora; antherae nigrae, subcordatae, lobis longissimis, distantibus.

PISTILLI *germen* quadripartitum; *stylus* filiformis staminibus paulo longior, *stigma* bifidum, tenue, reflexum.

PERICARPIVM nullum.

SEMINA quatuor, ouato oblonga, nigra, nitida, *hilo* albo, plano, ouato.

Habitat in summis cacuminibus alpium Maloi Altai et Sinjae Sopka in vmbrosis versus septemtrionem vergentibus. Alibi nunquam vidi. Floret Iunio.

Obferu. Maxime adfinis noftra planta Dracocephalo *grandifloro* LIN. Sp. Pl. Tom. 2. p. 830. n. 8. Fl. Sib. Tom. 3. p. 233. n. 56. Radix enim fufca fibrofa, caulis quadrangulus, calyx quinquefidus, hirfutus, lacinia fuperiore latiore, maximi et coerulei denique flores in ambabus hifce plantis fimillima: longitudo autem caulis pedalis, folia radicalia crenata, cordata, caulina quinqueneruia orbiculata, floralia profunde ferrata, bracteae denique profunde laciniatae laciniis accuminatis noftrum Dracocephalum a linneano feparant.

IV.

Dracocephalo huic duas Papilionaceas fubiungo, et quidem quarto loco Robiniae fpeciem, quae mihi ob ingentes acutiffimasque fpinas:

Tab. XXX. Fig. 4. ROBINIA *fpinofiffima* foliis iunioris plantae fparfis, abruptae pinnatis, ftipulatis, petiolo perfiftente, arboreo, inque fpinam acutiffimam exeunte: adultae vero plantae foliis quaternatis, fubpetiolatis, fafciculatis, floribus feffilibus.

DESCR. RADIX ramofa, fruticofa, folida, longiffima, varie fefe extendens.

CAVLES

CAVLES plures fruticoſi, plerumque orgyales, ſolidi, teretes, cortice luteo, *virideſcente*, coriaceo, glabro, ramoſiſſimi, ramis foliatis, virgatis.

FOLIA ramulorum et ſurculorum primi anni ſparſa, abrupte pinnata, tri vel quadriiuga, pinnis lanceolatis acutis ſpineſcentibus, petiolo coſtaceo in mucronem acutiſſimum exeunte, perſiſtente: in adulta vero planta folia quaternata, petiolo breui ſpinula terminato inſidentia, oblonga, obtuſa cum ſpinula, verſus baſin ſenſim anguſtiora: petioli faſciculati, faſciculis ex alis petiolorum coſtaceorum perſiſtentium.

STIPVLAE duae ad baſin petiolorum coſtaceorum lanceolatae, membranaceae, acutae, ſpineſcentes, cum petiolo caulem amplectentes.

FLORES ſeſſiles e faſciculis foliorum, plerumque ex ſingulo faſciculo vnicus.

CALYCIS perianthium coloratum, quadridentatum, denticulo ſupremo latiori, emarginato, caeteris acutis.

COROLLA Papilionacea, magnitudine et figura Robiniae caraganae ſiimillima.

STAMINA et piſtillum vti in congeneribus.

PERICARPIVM Legumen cylindraceum, pollicare.

SEMI-

SEMINA plerumque quinque vel ſex oblonga, cylindrica.

Habitat ad Selengam fluuium in campis montoſis, arenoſo glareoſis: alibi nunquam vidi. Floret Iunio.

Obs. Frutex hic elegantiſſimus non quidem prorſus nouus, ſed minus rite hactenus deſcriptus. Figura Ammanni Tab. XXXV. Robiniam pygmaeam Illuſtr. a Linne repraeſentat, neque ex deſcriptione pag. 204 data aliud videri poteſt. Iuniores vero plantae, quas ex ſeminibus ſatis in horto academico accepit, quarum mentionem pag. 205 fecit, quaeque iamdudum periere, nihil aliud quam noſtra Robinia fuere. Nunc iterum ex ſeminibus quae exportaui, nonnulla ſpecimina in horto noſtro academico vigent. Allata noſtra figura ramulum adultae plantae cum flore, magnitudine naturali, optime repraeſentat.

V.

Altera Papilionacea quam propono eſt Trifolii, generis botanicis difficillimi, noua ſpecies, mihi ob locum natalem transbaicalenſem:

Tab. XXX. Fig. 5. TRIFOLIVM *dauricum* foliis oualibus, integerrimis, venoſis, caule erecto, floribus capitatis, capitulis axillaribus et pedunculatis et ſeſſilibus ex ſingula ala.

DESCR.

DESCR. RADIX ramoſa, longiſſima, perennis.

CAVLIS herbaceus, ſtriatus, erectus, foliatus, ramoſus, ramis ſparſis, foliatis.

FOLIA ternata, petiolata, foliolis oualibus, integerrimis, obbuſis, denticulo ſpiniformi terminatis, venoſis, laeuibus, lateralibus ſeſſilibus terminali paulo maiore, remotiore.

STIPVLAE duae, ſetaceae, ad baſin petiolorum.

FLORES Capitula ex alis foliorum plurima et quidem ex ſingula ala bina, pedunculatum vnum, ſeſſile alterum.

CALYCIS perianthium monophyllum, tubulatum, quinquedentatum, denticulis lanceolatis, acutis, longitudine tubi, perſiſtens.

COROLLA flaua, perſiſtens, marceſcens, *Vexillum* obtuſum, patens, *Alae* vexillo paulo breuiones, *carina* longitudine alarum, interdum paulo longior.

STAMINVM *Filamenta* diadelpha, adſcendentia *Anthenae* ſimplices.

PISTILLI *Germen* ſubrotundum, *ſtylus* filiformis, adſcendens perſiſtens, *ſtygma* ſimplex.

PERICARPIVM *Legumen* ouatum, acutum, vniualue, monoſpermum.

Habitat ad Selengam fluuium in pinetis. Floret Iulio.

EXPLICATIO TABVLARVM.

Tab. XXIX. Fig. 2. Veronica pinnata cum flore et fructu.

Fig. 2. Spiraea altaienſis cum flore.

Fig. 3. Dracocephalum altaienſe.

a. Calyx cum ſtaminibus, piſtillo et bracteis.

b. Bractea.

Tab. XXX. Fig. 4. Robinia ſpinoſiſſima cum flore.

Fig. 5. Trifolium daurium cum flore.

a. Flos per microſcopium ampliatus.

b. Flos magnitudine naturali.

c. Vexillum.

d. Carina cum alis.

e. Stamina cum piſtillo.

f. Calyx.

g. Legumen.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

OBSERVATIONES
NON NVLLAE OBSERVATORIO PETROPOLI INSTITVTAE.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKI.

Anno 1767.

Occultatio Pleyadum a Luna die $\frac{22\ \text{Febr.}}{5\ \text{Mart.}}$

Praecedentibus tranſitum Lunae per Pleyades diebus ob coelum nubilum motum horologii ad examen reuocare non licuit; ipſo vero die tranſitus, tubo quadrantis tripedalis in Sirium directo, obſeruaui appulſum illius

ad fil. vert. microm.	9^h.	$52'$.	$12''$
—— obliqu. ——	—	53.	23
Exitum e tubo	—	53.	45.

Poſt modum tubo *Dollondiano* ſex pedes longo ad idem horologium obſeruaui Lunam limbo obſcuro occultaſſe.

Seleno - - - - - - - -	11^h.	$5'$.	$53''$
Electram	11.	8.	$8\frac{1}{2}$
Maiam	11.	32.	38
Lucidae pleyadum proximam	12.	9.	23
η ſeu Lucidam Pleyadum	12.	13.	$43\frac{1}{2}$
Emerſio Electrae	12.	56	26.

Emerſio Electrae obſeruata eſt ad limbum Lunae lucidum et tremulum; quam obrem pro exacta reputari nequit; praecedentes vero ad ſemiſſem ſecundi certae ſunt.

Nubila coeli facies durat vsque ad $\frac{4}{15}$ Martii, qua demum ſequentes capere licuit altitudines Solis correſpondentes.

Ante merid.	Alt. ☉lis	Poſt. merid.	Meridies
$9^h. 46'. 43''$	$23°. 0'$	$2^h. 17'. 40''$	$0^h. 2'. 11''\frac{1}{2}$
— 48. 4		16. $21\frac{1}{2}$	— 2. $12\frac{3}{4}$
— 51. 15	23. 20	13. 2	— 2. $8\frac{1}{2}$
— 52. $34\frac{1}{2}$	23. 40	11. $42\frac{1}{2}$	— 2. $8\frac{1}{2}$
9 55. 56		2. 8. 25	0. 2. $10\frac{1}{2}$.

Meridies medius	0. 2. 10, 3
Correctio meridiei	— 28, 3
Meridies verus	0. 1. 42.

Eodem die tranſitum Sirii per tubum quadrantis, priſtinum ſitum ſeruantis, ſequentem in modum obſeruaui.

Appuls. ad fil. vert. micr.	$9^h. 20'. 48''$	acc. hor.	$47'', 7$
—— ad fil. obliqu.	22. 0	- -	47, 6
Exitus ſtellae e tubo	22. 16	- -	47, 0.

Poſita itaque acceleratione horologii ſupra diem ſolarem medium $47''$, 3 momenta Immerſionum ad tempus verum reducta habebunt ſe, vt ſequitur.

Immer-

Immerſ.	Seleno - - - - -	11^h.	$9'$.	$10''$
	Electrae		11.	$25\frac{1}{2}$
	Maiae	11.	35.	54
	Stellae Lucid. Pleyad. prox.	12.	12.	3
	η ſeu Lucidae Pleyad.	12.	16.	59.

Inuigitanti mihi huic phaenomeno minores ſtellae longius, maiores vero minus limbo Lunae inherere viſae ſunt, id quod mereri videtur, vt obſeruationibus aliorum aſtronomorum vel confirmetur vel euertatur.

Labentibus menſibus Februario et Martio plures inſtitutae ſunt ſuper *Satellites Iouis* obſeruationes, verum motum horologii obſeruationibus altitudinum Solis correſpondentium ſtabilire non licuit, id circo referendis iis ſuperſedeo. Emerſio tantum die $\frac{22 \text{ Martii}}{2 \text{ Aprilis}}$ horologio monſtrante $7^h. 35'. 18''$ obſeruata hoc incommodo non laborat; nam eo ipſo die meridies correctus ex altitudinibus Solis correſpondentibus $0^h. 10'. 9'', 6$ et die $\frac{24 \text{ Martii}}{4 \text{ April}}$ eodem modo meridies verus repertus eſt $0^h. 10'. 42'', 3$; vnde tempus verum *Em. I. Sat. Iouis* erit $7^h. 25'. 2''$.

Anno

Anno 1768.

	Temp. Horol.	Temp. ver.
Die $\frac{5}{16}$ Febr. meridies ex 8 paribus altitudinum Solis correſpond.	$0^h.51'.40'',9$	
Correctio meridiei	— 26, 7	
Meridies verus	0. 51. 14, 2	
Immers. I. Sat. Iouis tubo Gregoriano 24 poll. longo.	13. 52. 0	$12^h.59'.19''$
Islenieff tubo Achr. 10 ped.	13. 52. 5	59 24
Die $\frac{6}{17}$ Febr. meridies medius ex 4 paribus alt. Solis correſpondent.	0. 52. 57, 5	
Correctio meridiei	— 26, 7	
Meridies verus	0. 52. 30, 8	
Die $\frac{19\ \text{Febr.}}{1\ \text{Martii}}$ meridies medius ex ſex paribus altit. Solis correſpondent.	1. 6. 2, 9	
Correctio meridiei	— 28, 6	
Meridies verus.	1. 5. 34, 3	
Eodem die obſeruata eſt *Imm. I. Sat. Iouis* tubo Gregoriano 24 poll.	5. 54. 36.	4. 48. 50
Obſeruatio haec ſubdubia eſt ob intemperiem aeris		
Die $\frac{20\ \text{Febr.}}{2\ \text{Mart.}}$ meridies medius ex 4 paribus altit. Solis correſpondentium.	1. 7. 1, 1	
Correctio meridiei	— 28, 7	
Meridies verus	1. 6. 32, 4	

Eodem

	Temp. Horol.	Temp. ver.
Eodem die coelo ſereno ſed Luna ſplendente		
Imm. III. Sat. Iouis	$12^h. 58'. 32''$	$11^h. 51'. 25''$
Imm. II. Sat. Iouis	14. 17. 49	13. 10. 40
Die $\frac{22 \text{ Febr.}}{4 \text{ Mart.}}$ meridies medius ex ſex paribus altit. Solis correſpondent.	1. 9. 16, 9	
Correctio merid.	— 28, 9	
Meridies verus.	1. 8. 48	
Die $\frac{27 \text{ Febr.}}{9 \text{ Mart.}}$ *Imm. III. Sat. Iouis* coelo ſereno.	17. 1. 45	15. 49. 49
Die $\frac{28 \text{ Febr.}}{10 \text{ Mart.}}$ meridies medius ex 5 paribus altitud. Solis correſpondent.	1. 12. 36	
Correctio meridiei	— 28, 3	
Meridies verus	1. 12. 7, 7	
Eodem die *Imm. I. Sat Iouis*	14. 25. 55	
Die ſequenti horologium ad quod hucusque obſeruationes peractae ſunt, poſt meridiem ſubſtitit; id circo in ſequentibus aliud a *Charoſt* nempe elaboratum ad obſervationes adhibitum eſt.		
Die $\frac{8}{19}$ Martii meridies medius ex ſex paribus altit. Solis correſp.	0. 6. 6, 7	
Correctio meridiei	— 27, 9	
Meridies verus.	0. 5. 38, 8	

	Temp. Horol	Temp. ver.
Eodem die coelo sereno *Imm. I. Sat.*	$9^h. 44'. 46$	$9^h. 39'. 0''$
Die $\frac{9}{20}$ Mart. meridies medius ex sex paribus altit. Solis corresspond.	0. 6. 23, 9	
Correctio meridiei	— 27, 8	
Meridies verus	0. 5. 56, 1	
Die $\frac{15}{26}$ Mart. meridies medius ex sex paribus alt. Solis corresspond.	0. 7. 52, 3	
Correctio meridiei	— 26, 2	
Meridies verus	0. 7. 26, 1	
Eodem die aere tranquillo, coelo sereno *Imm. I. Sat. Iouis.*	11. 42. 3	11. 34. 52.
Die $\frac{21 \text{ Mart.}}{1 \text{ April.}}$ meridies medius ex sex paribus altit. Solis corresspondent.	0. 9. 15, 5	
Correctio meridiei	— 25, 5	
Meridies verus	0. 8. 50.	

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE ANNIS 1769 ET 1770. INSTITVTAE.

Vna cum determinationibus geographicis aliquot locorum Imperii Russici inde deductis.

Auctore
W. L. KRAFFT.

In obseruationibus, quas hic Academiae exhibeo, instrumentis vsus sum iisdem, quibus obseruatio Veneris in Sole a me instituta. Iis igitur describendis hic non immoror, cum iam in Commentariorum nostrorum praecedenti tomo reperiantur descripta. Id vnum arbitror praemonendum, altitudinibus siderum hic recensitis correctiones necessarias tam ob deuiationem radii visionis, quam quae parallaxi, refractioni et reductioni ad centrum astri debentur, iam esse, vt spatio parceretur, adplicatas.

I. Obseruationes pro latitudine geographica oppidi Vfa.

Anno 1769. mense Augusti nov. stil.

	Altit. merid. ☉	Decl. bor. ☉	Eleuat. aequat.
d. 22.	46°. 58'. 42"	11°. 41'. 30"	35°. 17'. 12"
24.	46°. 17'. 33"	11°. 0'. 36"	35° 16'. 57"
25.	45°. 57'. 1"	10°. 39'. 51"	35°. 17'. 10".

 Mense

Menſe Septembris.

1.	43°. 27′. 40″	8°. 10′. 28″	35°. 17′. 12″
4.	42°. 21′. 39″	7°. 4′. 19″	35°. 17′. 20″
5.	41°. 59′. 1″	6°. 42′. 2″	35°. 16′. 59″
8.	40°. 52′. 8″	5°. 34′. 33″	35°. 17′. 35″
19.	36°. 38′. 4″.	1°. 20′. 54″.	35°. 17′. 10″.

Eodem menſe.

	α aquilae		
3.	43°. 33′. 59″	8°. 16′. 43″. B.	35°. 17′. 16″
	Aldebaran		
23.	51°. 19′. 20″.	16° 1′. 42″. B.	35°. 17′. 38″.

Vnde, ſumto medio arithmetico, colligitur
Altitudo aequatoris 35°. 17′. 15″
et latitudo borealis 54°. 42′. 45″.

II. Obſeruatio occultationis ſtellae τ Tauri ſub Luna 1769. d. 24. Aug. n. ſt. Vſae inſtituta.

Motus horologii, ad quod haec obſeruatio eſt inſtituta, altitudinibus Solis correſpondentibus adcurate exploratus ſe habere deprehenſus eſt, vti ſequens oſtendit tabula:

1769. menſe Aug. n. ſt.

	Merid. verus	Retardatio horologii	Retardatio temp. med.
d. 17.	0^h. 13′. 18″. 7		
		3′. 13″. 6	12″ 9
18.	0^h. 10′. 5″. 1		
		6′. 29″. 6	27″. 2
20.	0^h. 3′. 35″ 5		
		3′. 14″. 2	14″. 4
21	0^h. 0′. 21″. 3		
		12′. 57″. 7	1′. 2″. 0
25.	11^h. 47′. 23″. 6		

vnde

vnde concluditur retardatio diurna horologii ſuper tempus medium $3'. 0''$ et d. 24. Aug. meridies verus $11^h. 50'. 40''$.

Die 25. Aug. temp. ciuili, mane, monſtrante horologio $3^h. 39'. 15''$ obſeruaui immerſionem ſtellae τ ♉ ſub Luna, tubo praeſtanti *Dollondiano* 10. pedum, aëre tranquillo et puro. Licet eclipſis facta ſit ad limbum Lunae lucidum; tamen, cum fuerit fere inſtantanea, incertitudo momenti aſſignati vltra duo vel tria minuta ſecunda extendi non poteſt.

Huius itaque occultationis inuenitur pro meridiano oppidi Vſa tempus verum 1769. d. 24. Aug $15^h. 50'. 44''$; ſiue ob aequationem temporis $+ 1'. 48''$. tempus medium $15^h. 52'. 32''$.

Longitudo geographica oppidi Vſa ex hac obſeruatione deducta.

Stellae huius, quae eſt quintae magnitudinis et in fronte Tauri borea, ex ephemeridibus Cel. Dni *de la Caille* colligitur (*), habita ratione effectus nutationis et aberrationis, ſequens poſitio:

Aſcenſio recta		$67°. 6'. 54''$
Declinatio bor.		$22°. 29'. 46''$
Longitudo	$2^s.$	$8°. 56'. 24''$
Latitudo		$0°. 41'. 3''$

 quibus

(*) Conf. Introd. ad ephemerides pro anno 1765. pag. 68.

quibus conſtitutis, ex tabulis lunaribus Cel. *Maieri* concluditur pro meridiano Pariſino tempus medium coniunctionis verae ſtellae τ ♉ cum Luna 1769. d. 24. Aug. $13^h. 5'. 25''$.

Factis pluribus pro quaeſita meridianorum differentia hypotheſibus, quas hic adferre foret ſuperfluum, inueni veram huius loci longitudinem a Lutetiis Pariſiorum ſtatui debere $3^h. 34'. 14''$ verſus orientem; hac enim aſſumta, obſeruationi plene ſatisfit, vti ex ſequenti calculo patet:

Temp. med. obſeruat.	$15^h. 52'. 22''$
Differ. merid.	$3^h. 34'. 14''$
Temp. merid. Paris.	$12^h. 18'. 18''$
Longit. Lunae vera	$2^s. 8^\circ. 28'. 50''$
Latit. Lunae vera B. . . .	$1^\circ. 7'. 52''$
Parall. ☾ horiz. pro fig.	
Sphaeroid. terrae	$59'. 12''$
Semidiam. ☾ aucta in ratione altitud.	$16'. 24''$
Parallaxis ☾ in longit. . . .	$+ 14'. 21''$
in latit.	$- 36'. 32''$
Longit. ☾ appar.	$2^s\ 8^\circ. 43'\ 11''$
Latit. ☾ appar.	$0^\circ. 31'. 20''$
Differ. appar. long. τ ♉ et ☾	$13'. 13''$
- - - - latitud.	$9'\ 43''$
Diſtantia appar. centrorum . . .	$16'. 24''$.

Cum

Cum igitur computata in hac longitudinis geographicae hypothesi distantia centrorum apparens prorsus congruat cum semidiametro Lunae apparente; ea hinc plene confirmatur, siquidem a tabularum erroribus animum abstrahamus, quos ob defectum obseruationis correspondentis inuestigare non licuit. Quare statui poterit.

Longit. geograph. oppidi Vfa versus orientem a Lutetiis Parisiorum.

in tempore . . . $3^h. 34'. 14''$
in part. circuli $53°. 33'. 30''$.

III. Obseruatio Cometae anni 1769. Vfae instituta.

Insignem hunc Cometam, quamuis diuturna fuerit ipsius adparitio, tamen partim coelo, in istis regionibus eo anni tempore vtplurimum nubilo et pluuio, partim itineris inopino casu impeditus non nisi vnica vice adcurate obseruare potui; die nimirum 3. Sept. n. st. quo Cometa ad parallelum stellae γ Orionis prope accessit. Horologii mei consueti, sed de nouo suspensi, motum non nisi ad meridianam, quam quidem satis exactam noui, examinare licuit. Erat autem meridies verus:

d. 31. Aug. . . . $11^h. 58'. 19''\frac{1}{2}$
d. 4. Sept. . . . $11^h. 42'. 33''$.

ex quibus cum tempore medio collatis colligitur retardatio penduli diurna super tempus medium $3'. 37''. 7$

vnde

vnde ſtatui poteſt d. 3. Septembr. merid. verus $11^h. 46'. 30''$.

Quadrante, poſtquam filorum tubo inſertorum poſitionem probe exploraueram, in circulo aliquo verticali, ad cuius azimutum, calculo ex datis obſeruationis facile inueniendum, ob circuli azimutalis paruitatem non attendi, firmato, Cometam cum ſtella γ Orionis comparaui; notaui nempe

Temp. horol.	Temp. ver.	
$12^h. 52'. 43''$	$13^h. 8'. 19''$	appulſum Cometae ad filum verticale ſub altitudine $12°. 50'. 27''$
$12^h. 58'. 38''$	$13^h. 14'. 13''$	appulſum ſtellae γ Orionis ad idem filum ſub altitudine $12°. 40' 59''$.

Ex ephemeridibus Cel. *de la Caille* inuenitur pro hoc tempore ſtellae γ Orionis

Aſcenſio recta . . . $78°. 11'. 52''$
Declin. bor. . . . . $6°. 7'. 14''$.

vnde, facto calculo, prodiit pro tempore

d. 3. Sept. n. ſt. $13^h. 8'. 19''$. Temp. ver. ſub mer. Vſenſi
adeoque $9^h. 34'. 5''$. Temp. ver. } Pariſino
et $9^h. 32'. 58''$. Temp. med. }

Cometae.

Aſcenſ. rect. . .	$76°. 37'. 39''$	Longit. . .	$2^s. 16°. 7'. 7''$
Declin. bor. . .	$6°. 15'. 0''$	Latit. auſtr.	$16°. 33'. 20''$.

Calcu-

Calculus praecedentis obſeruationis ex elementis theoriae huius Cometae.

Qualiſcunque haec ſit obſeruatio; iuuat tamen eam comparare cum theoria huius Cometae, quam a compluribus Aſtronomis inueſtigatam (*) accipimus. Eminet inprimis ea, quam in peculiari ſcripto: *Recherches et calculs ſur la vraie orbite de la Comete de l'année* 1769, noua methodo Illuſtr. *Eulerus* ſtabiliuit; quae igitur elementa, cum iſte liber Aſtronomorum latere neminem cenſendus ſit, hic ſuppono cognita. Vt vero ante omnia de obſeruationis meae vel defectu vel praeciſione eo procliuius eſſet iudicium; obſeruationes diebus 2, 3 et 4 Septembris in citato ſcripto pag. 4 recenſitas interpolando ſequentes elicui formulas generales: die 3. Sept. $12^{h}.\ 24^{\prime}.\ 11^{\prime\prime} + z^{hor.}$

$$\text{Longit. Cometae} = 2^{s}\,16^{\circ}34^{\prime}56^{\prime\prime} + 587,58.z^{\prime\prime} + 0,93.zz^{\prime\prime}.$$

$$\text{Latitudo} \;.\;.\;. = 16^{\circ}37^{\prime}48^{\prime\prime} + 176,40.z^{\prime\prime} + 0,25.zz^{\prime\prime}$$

Cum igitur propoſita obſeruatio praecedat hanc epocham interuallo $2^{h}.\ 51^{\prime}.\ 13^{\prime\prime}$; erit $z = -2,8536$ quo valore ſubſtituto prodit Cometae longitudo $2^{s}\ 16^{\circ}.\ 7^{\prime}.\ 0^{\prime\prime}$; et latitudo $16^{\circ}.\ 29^{\prime}.\ 25^{\prime\prime}$; quarum ergo haec ab obſeruata $2^{\prime}\ 55^{\prime\prime}$ illa vero nihil diſcrepat; ita, vt haec obſeruatio cum reliquis ſatis bene conſentire

(*) Conf. *Bernoulli*, Aſtron. Berol. Recueil pour les Aſtronom.

ſentire cenſenda ſit. Inſtituto itaque praeuio hoc obſeruationis examine; eiusdem calculus in hypotheſi traiectoriae ellipticae ex elementis *Eulerianis* ita ſe habet.

Obſeruatio praecedit tempus perihelii interuallo 34, 25323 dier. ex quo poſita Solis a terra diſtantia media = 1, concluditur Cometae.

Anomalia vera 140°.10′. 5″	Diſtantia a ☉le 1,04931.
Elong. a Nodo deſc.	
in orbita 9°. 0′.52″	Long. helioc. 0ˢ1°55′23″
in eclipt. 6°.50′.42″	Latit. helioc. 5°52′49″A.

Pro locis geocentricis colligitur ex tabulis Cel. *de la Caille* ad tempus propoſitae obſeruationis.

Longitudo ☉ = 5ˢ 11° 32′ 47″; eiusque a terra diſtantia = 1, 00753 quibus poſitis, prodit.

Angulus commutationis 20°22′36″	Long. Com. geoc. 2ˢ16° 6′42″
Angulus elongationis 85°26′ 5″	Latit. geoc. 16°25′35″

vbi quidem longitudo non niſi 25″ ab obſeruata diſcrepat; latitudo vero computata cum obſeruatione non aeque feliciter congruit.

VI.

VI. Obſeruationes pro latitudine oppidi Siſran. 1770 d. 28. Martii n. ſt.

	Altit. merid.	Declinatio	Alt. aequat.
Sol.	39° 54′ 23″	3° 3′56″.B	36° 50′ 27″
α Leonis	49° 55′ 9″	13° 5′ 4″ —	36° 50′ 5″
δ	58° 36′ 56″	21°46′53″ —	36° 50′ 3″
γ	57° 49′ 47″	20°59′47″ —	36° 50′ 0″
α Hydrae	29° 9′ 47″	7°40′22″.A	36° 50′ 9″
Polaris.	51° 14′ 52″	88° 4′36″.B	36° 49′ 44″
β. Caſſiop.	21° 2′ 36″	57°52′45″ —	36° 50′ 9″
α	18° 26′ 14″	55°16′16″ —	36° 50′ 2″
γ	22° 37′ 37″	59°27′57″ —	36° 50′ 20″

Sumto medio . . . 36° 50′ 7″
Latit. bor. . . . . . 53° 9′ 53″.

Obſeruatio tranſitus Lunae ad ſtellam ζ Tauri 1770. d. 1. Apr. n. ſt. in oppido Siſran.

De horologii, quo vſus ſum, aſtronomici motu captis quamplurimis altitudinibus Solis correſpondentibus perfecte conſtitit; ex quibus prodiit

d. 29. Martii Merid. ver. $11^h\ 58'\ 51''.\ 8$
d. 30. - - - - - - $0^h\ 0'\ 26''.\ 4$
d. 3. Aprilis - - - $0^h\ 6'\ 39''.\ 2$

vnde concluditur acceleratio penduli diurna ſuper tempus medium $1\ 52''.\ 8$ atque hinc d. 1. Aprilis merid. verus $0^h\ 3'\ 35''.\ 2$. Quamprimum per crepuſculum veſpertinum fieri potuit, ad Lunam obſervandam me accinxi; et cum ſtellam non procul a Lunae limbo remotam ſatis diſtincte conſpicerem, tres ſequentes inſtitui obſeruationes. Quadrante nimirum, de cuius errore perfecte conſtitit, ad certum eleuationis gradum firmato, eo ipſo momento, quo Lunae limbus filum medium immobile attigit, ſtellae ab iſto limbo diſtantiam micrometro ſum dimenſus; vnde pro eodem momento vtriusque ſideris altitudo innotuit.

Obſeruatio Prima.

Temp. horol.	Temp. ver		
$7^h\ 36'\ 50''$	$7^h\ 32'\ 45''$	Altit. limbi ☾ infer.	$44°22'45''$
		Altit. ζ ♉ . .	$44°\ 0'16''$
		Differ. appar. altit.	$0°22'29''$
$7^h\ 37'\ 15''$	$7^h\ 33'\ 10''$	Stella in filo verticali	
$7^h\ 37'\ 36''$	$7^h\ 33'\ 31''$	Limb. ☽ occid in eodem vertic.	
		Differ. appulſuum $=$ 21″.	

Obſeruatio Secunda.

Temp. horol.	Temp. ver.		
$7^h\ 41'\ 40''$	$7^h\ 37'\ 35''$	ζ ♉ in filo verticali.	
$7^h\ 41'\ 50''$	$7^h\ 37'\ 45''$	Altit. limbi ☽ infer.	$43°42'44''$
		Altit. ζ ♉ . . .	$43°18'55''$
		Differ. appar. altit.	$0°23'49''$
$7^h\ 42'\ 11''$	$7^h\ 38'\ 6''$	Limb. ☽ occid. in eodem vertic.	
		Differ. appulſum $=$ 31″.	

Obſer-

Obseruatio Tertia.

Temp. horol	Temp. ver	
$7^h\ 46'\ 0''$	$7^h\ 41'\ 55''$	ζ♉ in filo verticali
$7^h\ 46'\ 40''$	$7^h\ 42'\ 35''$	Limb. ☽ occid. in eodem
		Differ. appulsuum $= 40''$
$7^h\ 47'\ 4''$	$7^h\ 42'\ 59''$	Altit. limb. ☽ infer. $43^\circ\ 2'42''$
		Altit. ζ♉ . . . . $42^\circ 37' 27''$
		Differ. appar. altit. $0^\circ 25' 15''$

vbi notari conuenit, altitudines has per refractionem iam esse correctas.

Longitudo geographica oppidi Sisran ex obseruatione praecedente deducta.

Elementa calculi ex tabulis astronomicis depromta ita se habent: 1770. Temp. Parisino med. April. $1^d\ 4^h\ 0'\ 0''$.

Stel ζ♉ asc. R. appar.	$80^\circ 59' 0''$	Mot. Lunae hor. in long.	$+ 35' 32''$
Declinatio . .	$20^\circ 58' 50''$	in latit.	$+ 3'\ 5''$
Longitudo .	$2^s\ 21^\circ 34' 42''$	in declin.	$+ 4'\ 3''$
Latit. austr.	$2^\circ 13' 26''$	Parall. aequat.	$59' 25''$
Lunae Long. ver.	$2^s 22^\circ 21' 38''$	Semidiameter	$16' 12''$
Latit. austr.	$1^\circ 21' 20''$	Par. horiz. pro ♁ sphaeroid.	$59' 14''$
Declinat. bor.	$21^\circ 53' 47''$	Aequ. temp. ad temp. ver. add.	$3' 48''$

ex quibus concluditur coniunctionis verae stellae ζ♉ cum Luna tempus Parisinum medium 1770. d. 1. April $2^h\ 40'\ 45''$.

Conſtitutis his elementis, pro tribus iſtis momentis, quibus ſtella in filo verticali obſeruata eſt, differentias longitudinum et latitudinum ſtellae et Lunae ope angulorum parallacticorum indagaui. Huius calculi potiora elementa in ſequenti laterculo exhibentur; in figura vero 1: Tab. XXXI repraeſentet Z zenit loci propoſiti, P et Π polos aequatoris et eclipticae, S locum ſtellae, Λ et L locum Lunae apparentem et verum. Mora ſemidiametri ☽ per meridianum inuenta eſt $1' 13''$; per circulos autem iſtos verticales $1' 29''$.

Calculus obſeruationis.

	I^{mae}	II^{dae}	III^{tiae}
Temp. medio	$7^h36'58''$	$7^h41'23''$	$7^h45'43''$
Diff. app. alt. centri ☽ et ſtellae	$0°38'59''$	$0°40'\ 9''$	$0°41'21''$
Parall. altitud. Λ L . . .	$42'11''$	$42'37''$	$43'\ 0''$
Differ. vera altitud . . .	$1°21'10''$	$1°22'46''$	$1°24'21''$
Differ. azimutalis appar. Λ λ	$0°20'\ 4''$	$0°21'51''$	$0°23'29''$
Ducatur L μ cum Z λ parall. eritque			
Λμ, a Λλ ſubtrahendum =	$-14''$	$-14''$	$-14''$
Parall. azimutalis	$+16''$	$+16''$	$+17''$
Differ. azim. vera L *l* . . .	$0°20'\ 6''$	$0°21'53''$	$0°23'32''$
Angul. diſtantiae Z S L . .	$13°54'32''$	$14°48'36''$	$15°36'\ 3''$
Diſtantia centr. vera S L	$1°23'37''$	$1°25'36''$	$1°27'33''$
Angul. parall. Z S P . .	$34°49'32''$	$35°14'20''$	$35°37'20''$
Ang. poſitionis P S Π . .	$3°34'50''$	. . . .	. . . .
Hinc			
Ang. coniunctionis Π S L	$52°18'54''$	$53°37'46''$	$54°48'13''$
Differentia latitud. S *m* . .	$0°51'\ 7''$	$0°50'46''$	$0°50'28''$
. . . . . longitud L *m*	$1°\ 6'\ 9''$	$1°\ 8'55''$	$1°11'32''$

vbi

vbi quidem arcus L *m* reductione ad eclipticam non indiget.

Ex inuentis his longitudinum differentiis, ope motus horarii Lunae in longitudinem $= 35'. 32''$, per singulas istas obseruationes tempus medium coniunctionis verae definitur; ex quo cum tempore Parisino, quod est $2^h. 40'. 45''$, collato differentia meridianorum innotescit.

	Temp. med. coni. verae	Differ. meridian.
ex obseru. I.	$5^h. 45'. 16''$	$3^h. 4'. 31''$
II.	$5^h. 45'. 1''$	$3^h. 4'. 16''$
III.	$5^h. 44'. 56''$	$3^h. 4'. 11''$.

Sumto itaque medio statui potest Longitudo oppidi Sisran a Lutetiis Parisiorum versus orientem

in tempore . . . . . $3^h. 4'. 19''$
vel in partibus circuli . . $46°. 4'. 45''$.

VI. Obseruatio Immersionis IIdi Satellitis Iovis ibidem instituta.

Horologio in hac obseruatione eodem, quo in praecedente, vsus sum; et quae ad motum eius diiudicandum pertinent, ibi iam sunt recensita. Die 29 Martii 1770. post mediam noctem, monstrante horologio $2^h. 14'. 56''$, per tubum *Dollondianum* achromaticum 10. pedum, II^{dus} Satelles Iouis in vmbram penitus immergi visus est; quae ergo eclipsis accidit tempore vero sub meridiano oppidi Sisran die 29. Martii $14^h. 15'. 9''$.

Obser-

Obſeruationem hanc pro exactiſſima non vendito, ſiquidem facta eſt aëre vaporibus pleno et Iovo vix ſex gradus ſupra horizontem eleuato. Operae tamen pretium eſt, eam comparari cum ſua correſpondente, quam in vrbe Tſcherkaski prope Maeotidem ſimili tubo et fauente coelo *Chriſtoph. Eulerus* inſtituit, vbi quidem haec immerſio contigit temp. vero d. 29. Martii $13^h. 40'. 30''$. Quamobrem inde concluditur differentia meridianorum

inter Sisran et Tſcherkaski . . . $0^h. 34'. 39''$

adeoque inter Tſcherkaski et Lutetias Pariſ. $2^h. 29'. 38''$

vel in partibus circuli . . . . . $37°. 24'. 30''$.

ita, vt longitudo huius vrbis ab inſula Ferri ſtatuenda ſit $57°. 17'. 30''$; latitudo vero obſeruata eſt $47°. 13'. 40''$.

Obſeruatio haec pro Geographia haud contemnendi vſus eſt; liquet enim inde, in mappis etiam praeſtantiſſimis oſtium Tanais ſeu littus orientale Maeotidis ad tres vsque gradus nimis ad orientem eſſe poſitum; ex quo interuallum inter mare nigrum et Caſpicum totidem gradibus augendum eſt; ita, vt ſuſpicio, in quam dudum inciderunt Geographi, bina iſta maria nimis eſſe in mappis ſibi inuicem vicina, hac obſeruatione confirmata et extra dubium poſita eſſe cenſenda ſit.

VII.

VII. *Obſeruatio Emerſionis I^{mi} Satellitis Iovis Kiouii inſtituta.*

Ex obſeruationibus Solis correſpondentibus inveni

d. 13. Aug. 1770. merid. ver. $11^h. 57'. 21''. 3$
d. 15. . . . . $11^h. 56'. 25''.$

ex quo concluditur retardatio penduli diurna ſuper tempus medium $= 17''$; quam tamen exactius $20''$ ſtatui poſſe exiſtimo.

Die 14. Auguſti, aëre ſereno et tranquillo, ſed luce crepuſculari adhuc ſenſibili, monſtrante horologio $7^h. 45'. 51''$, I^{mus} Satelles Iouis, ex vmbra emergere tubo achromatico 10. ped. obſeruatus eſt; cuius emerſionis inuenitur

temp. ver. . . . . $7^h. 49'. 9''.$
Eadem Pariſiis ſec. ephem. contigit . . . $5^h. 53'. 59''.$

vnde prodit merid. different. in tempore $1^h. 55'. 10''.$
vel in part. circuli . . $28°. 47'. 30''.$

quae determinatio, cum ephemeridum pro iſto tempore cum coelo conſenſus ex aliis obſeruationibus huius ſatellitis confirmetur, a veritate multum discrepare non poteſt.

Eleuationem poli concluſi $50°. 30'$; quae vltra vnum minutum primum incerta non eſt; nihil enim in altitudinibus ☉ meridianis deſiderabatur, niſi quod eas per errorem quadrantis corrigere non

 licuit,

licuit, cuius verificationi necessitas inopina repentini ex ista vrbe abitus obstitit.

VIII. Declinatio acus magneticae.

Vſae ſub latitud. bor. 54° 53′ et 53° 33′ verſus orientem a Lutetiis Pariſiorum acus magnetica 5 poll. longa, die 29 Septembr. n. ſt. 1769 repetito ſollicite experimento, 1° 30′ a ſeptentrione verſus ortum declinare reperta eſt.

IX. Obſeruationes meteorologicae.

1769. d. 26. Septembr Vſae hora 8 veſpertina, Aurora borealis inuſitatae prorſus claritatis viſa eſt, fulgura quaquauerſum eiaculans vehementiſſima. Huius aurorae aſpectus, nunciantibus nouellis publicis, per omnem fere Germaniam patuit; eodem die in regionibus Rheni terra vehementi motu concuſſa refertur; huius phaenomeni apparitio tam late extenſa, vt nonnunquam eadem aurora bor. per totam Europam viſa fuerit, de ingenti materiae eam generantis altitudine dubitare non ſinit.

1770. d. 2. Apr. Anrora bor. inſignis claritatis in vrbe Sisran viſa.

1770. d. 12. Febr. tenue veſtigium luminis zodiacalis poſt ⊙ occaſum; eadem apparitio etiam d. 27 obſeruata. d. 28 Martii lumen hoc Caſſinianum pulcerrimum viſum eſt inter horam 9 et 10, ab horizonte ad conſtellationem pleiadum vsque protenſum.

Halones

Halones circa Lunam viſi ſunt diebus 14 et 15 Februar, quorum poſterior notatu inprimis dignus. Taceo phaenomena halonum vſitata; id vnum annoto; exiguo ſupra halonem primarium interuallo viſus eſt arcus alius halonis ſecundarii, ſed inuerſi, Lunae conuexitatem obuertentis, qui pariter, ac primarius, colores, iridi aemulos, ſed ordine inuerſo oſtendebat. Dies praeceſſit ſubnubila. Thermom. *De l'Islianum* 178°. Halonis eiusmodi excentrici apparitio fallor, an cum Hugeniana horum phaenomenorum explicatione, a particulis glacialibus, in atmoſphaera pendulis petita, haud ita facile conciliari poteſt.

DETERMINATIO LONGITVDINIS GEOGRAPHICAE PLVRIMORVM LOCORVM, IN QVIBVS ECLIPSIS SOLIS A. 1769. OBSERVATA FVIT.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

Inter methodos vulgo vſitatas, pro determinandis longitudinibus locorum ex inſtitutis obſeruationibus Eclipſium Solis, frequentiſſimo vſu apud Aſtronomos inualuit ea, qua ex Longitudine et altitudine Nonageſimi, Parallaxes Lunae tam in Longitudinem quam Latitudinem determinantur, indeque verum tempus coniunctionis Solis et Lunae eruitur. Quum igitur eodem fere tempore, quo ad praeſcriptum elegantiſſimae Methodi ab Illuſtr. *Eulero* inventae (quae in Part. II. Tom. XIV. horum Commentar. expoſita legitur), plurimarum obſeruationum ſuper Eclipſi Solari Anno 1769. factarum calculum inſtituiſſem; auidus eſſem ſcire, an Methodo Nonageſimi adhibita ad easdem pertingere liceret concluſiones; vt has obſeruationes, ſecundum praecepta quoque Methodi Nonageſimalis computarem, in animum induxi. Laborem autem hunc adgreſſus, inſignes

ſignes mihi ſtatim ſe obiecerunt difficultates, quippe quum inuenerim iſtam Methodum vti ab Aſtronomis communiter adhibetur, omnino operoſiſſimam eſſe et variis defectibus laborare, quorum in numero ſequentes praecipui mihi viſi ſunt: I°. Formulae quae pro computandis Parallaxibus tam Longitudinis quam Latitudinis, imprimis ſub hypotheſi figurae telluris Sphaeroidicae, in ſcriptis Aſtronomorum adferri ſolent, non ſolum quam maxime prolixae et intricatae ſunt, ſed etiam propter ſaepius repetendas approximationes ad calculum moleſtiſſimae. II°. Methodi vulgares definiendi correctiones Longitudinis et Latitudinis Lunae, omnino incertae ſunt et ſaepius in graues errores inducunt. III^{tio} Communiter reſpectus haberi non ſolet ad correctiones, quibus Parallaxis Lunae aut Diametri Solis vel Lunae indigere poſſint, et licet probabile ſit has correctiunculas fore quam minimas, eas tamen minime negligere licebit, donec ad eiusmodi peruentum fuerit concluſiones, ex quibus appareat id ſine ſenſibili errore fieri poſſe.

2. Dum itaque ob rationes modo allegatas Methodum vulgarem deſerere coactus fui, in aliam incidi ab ea in paucis diuerſam, ſed vt ſpero multo concinniorem et ad calculum ineundum accommodatiorem, ad cuius quoque praeſcriptum, pleraſque obſeruationes Eclipſis Solis A. 1769. computaui, calculis his cum iis qui Tomo praecedenti inſerti ſunt egregie conſentientibus. Breuem igitur expoſi-

 tionem

tionem horum calculorum et conclusionum inde deductarum eo minus Astronomis displiciturarn confido, quod sine exacta determinatione Longitudinum pro iis locis, vbi transitus Veneris obseruatus fuit, obseruationes posterioris huius Phaenomeni inutiles euadant ad determinandam quantitatem Parallaxis Solaris, dum ea tamen loca excipienda sunt, in quibus, tam ingressum quam egressum Veneris obseruare licuit. Congruum autem mihi visum est, hanc tractatiunculam in tres dispertiri Articulos, quorum *primus* continebit delineationem nouae Methodi ex obseruatis Eclipsibus Solaribus Longitudinem locorum determinandi, *secundus* breuem sistet expositionem elementorum per calculum ex singulis obseruationibus deductorum et *tertius* denique modum ex aequationibus finalibus, non solum correctiones elementorum Astronomicorum inueniendi, sed etiam veras Longitudines locorum determinandi.

ARTICVLVS I.

Expositio Methodi ex obseruationibus Eclipsium Solis, Longitudines locorum determinandi.

3. Quum in praesenti disquisitione verae figurae telluris rationem habere constituimus, e re quoque erit pro vnoquoque loco, in quo Eclipsis Solis obseruata fuit, cognoscere tum distantiam huius loci a centro telluris, cum etiam angulum quem recta ad centrum telluris ducta facit cum linea ad super-

ſuperficiem telluris hoc in loco perpendiculari. Sit itaque A L B meridianus quidam terreſtris per datum terrae locum L tranſiens, qui aequatori occurrat in puncto A, Polo in B exiſtente, ſupponamus autem eius figuram eſſe ellipticam, quoniam huiusmodi figuram a vera non multum abludere poſſe conſtat, ductis igitur rectis A C et B C ad centrum telluris C, hae rectae axes ellipſeos conſtituent. Deinde ducatur etiam L O normalis ad ſuperficiem telluris in puncto L, quae quum in planum ACB incidat, occurrat rectae A C in puncto O et iungatur L C. Iam ſi productis C L et O L bina in coelo puncta z et Z reſpondere concipiantur; liquet poſterius id eſſe, quod communiter nomine zenith venire ſolet, nos vero idem zenith apparens appellabimus, vt diſtinguatur a puncto z, quod nobis zenith verum dicetur. Deinde euidens quoque eſt angulum L O A aequalem eſſe Latitudini loci L, quam littera L indigitabimus. T. XXXI. Fig. 2.

4. Vt autem nunc valores anguli O L C et rectae L C inueſtigentur, deſcribatur centro C radio C A circulus, cui recta LP ex L ad AC normaliter demiſſa occurrat in puncto M et iungatur CM, tum vero anguli A C L et A C M litteris N et M inſignientur. Quoniam igitur A L B ſupponitur eſſe ellipſis atque ratio axium A C et B C cognita aſſumitur, ſtatuamus A C : B C : : 1 : n, adeo vt ſit B C $= \frac{1}{n}$ A C, quum vero habeatur P L : P M : : A C : B C, erit Tang. M : Tang. N : : P L : P M : : 1 : n. Vlterius

quum

quum ſit Tang. L : Tang. N : : PC : PO, per proprietatem ellipſis vero PC : PO : : ACq : BCq : : $1 : n^2$ erit Tang. L : Tang. N : : $1 : n^2$, vnde Tang. N $= n^2$ Tang. L, per quam itaque formulam ex dato angulo L invenitur N, hincque OLC $=$ L $-$ N. Porro ob n^2 Tang. $M^2 =$ Tang. N^2 erit quoque Tang. M^2 Tang. L. Tang. N, hincque

$$\text{ſin. } M^2 \text{ coſ. L coſ. N} = \text{coſ. } M^2.\ \text{ſin. L. ſin. N},$$

ex quo colligitur

$$\text{coſ. L. coſ. N} = \text{coſ. } M^2 \text{ coſ. } (L - N), \text{ vnde}$$

$$\text{coſ. } M^2 : \text{coſ. } N^2 : : \text{coſ. L} : \text{coſ. N coſ. } (L - N), \text{ eſt vero}$$

$$LCq : MCq : : \text{coſ. } M^2 : \text{coſ. } N^2, \text{ quapropter erit}$$

$$LCq : ACq : : \text{coſ. L} : \text{coſ. N coſ. } (L - N) \text{ ſeu}$$

$$LC = AC \sqrt{\frac{\text{coſ. L}}{\text{coſ. N coſ. } (L - N)}}.$$

Formulae igitur pro angulo N et linea LC inueniendis ſequentes notari merentur:

$$\text{Tang. N} = n^2 \text{ Tang. L}; \quad LC = AC \sqrt{\frac{\text{coſ. L}}{\text{coſ. N coſ. } (L - N)}}$$

in poſteriori autem ob angulum L $-$ N ſemper minimum, etiam termino coſ. (L $-$ N) omiſſo, habetur $LC = AC \sqrt{\frac{\text{coſ. L}}{\text{coſ. N}}}$. Quoniam angulus $ZLz = CLO$, euidens iam eſt, modo detur ratio inter diametrum aequatoris et axem telluris, pro vnoquoque telluris loco facile inueniri poſſe diſtantiam inter Zenith verum et apparens et ea inuenta diſtantias corporum coeleſtium a Zenith vero ſine vlla difficultate computari poſſe.

5. Hiſce

5. Hiſce igitur praemonitis, repraeſentet $P z M$ meridianum alicuius loci, in quo Eclipſis Solis obſeruata fuit, ſitque eius Zenith verum in z et Polus aequatoris in P. Pro dato tempore obſeruationis, ſcilicet aut initii vel finis obſeruati, aut Phaſeos alicuius, ſit MPQ angulus horarius, occurrat autem circulus declinationis PQ aequatori ♈MQ in puncto Q, atque propter datos arcus MQ et ♈Q, priorem ſcilicet angulo MPQ aequalem, poſteriorem aſcenſioni rectae Solis pro hoc tempore, dabitur quoque ♈$M = \pm$ ♈$Q \mp MQ$, vbi iudicium haud difficile eſt, quaenam ſigna pro quouis caſu obtineant. Ad cognoſcendam vero aſcenſionem rectam Solis pro tempore obſeruationis, ſufficiet Longitudinem loci, in quo obſeruatio facta a vera non multum vltra aliquot minuta prima abludentem aſſumere. Quin etiam, ſi in aeſtimanda Longitudine grauior committeretur error, calculo ad finem perducto Longitudo loci ad veritatem multo propius accedens inueniri poteſt, cum qua calculum denuo inire licebit.

6. Deſignet iterum $P z M$ meridianum, ♈MT aequatorem et ♈N♋ eclipticam polo eius in Π exiſtente, ductis quadrantibus circulorum maximorum ΠP♋ et $\Pi z N$, prior erit colurus ſolſtitiorum qui aequatori occurrat in puncto T, poſterior vero in ecliptica definiet punctum N quod iam punctum Nonageſimi adpellare licebit, etſi a puncto Nonageſimi communiter ſic dicto diuerſum ſit, hoc Tab. XXXI Fig. 4.

 enim

enim definitur quadrante circuli maximi $\Pi Z N'$ per zenith apparens Z ducto, ambobus tamen punctis dum Π eſt in meridiano, plane coincidentibus. Situm vero iſtius puncti N calculo iam facile definire poterimus. In triangulo enim Sphaerico $\Pi P z$ ob data latera ΠP et $P z$ nec non angulum interiacentem $\Pi P z = 180 - M T = 90 + ♈ M$, dabitur per cognitas regulas Trigonometriae Sphaericae, tam latus Πz quam angulus $P \Pi z = N ♋$, vnde Nonageſimi non ſolum longitudo, ſed etiam diſtantia a zenith vero innoteſcet.

7. Priusquam ad inueſtigationem formularum pro parallaxibus Longitudinis et Latitudinis Lunae progrediamur, opus eſt, vt expreſſio pro parallaxi diſtantiae ipſius a zenith vero inueſtigetur. Sit igitur
Tab. XXXI diſtantiae ipſius a zenith vero inueſtigetur. Sit igitur
Fig. 5. L locus obſeruationis, S locus Lunae vel alius cuiuscunque aſtri, ſiue in ipſo meridiano ſeu extra eundem, ductis lineis CLz, CS et LS, patet diſtantiam aſtri a zenith vero z e centro telluris C viſam menſurari angulo LCS, parallaxin autem huius diſtantiae per angulum LSC exprimi. Quum iam ſit

$$zLS = LCS + LSC, \text{ erit } \sin. zLS = \sin LCS \cos. LSC + \cos. LCS \sin. LSC,$$

quoniam autem habeatur

$$\sin. zLS : \sin. LSC :: CS : CL \text{ erit}$$

$$\frac{CS}{CL}. \sin. LSC = \sin. LCS. \cos. LSC + \cos. LCS. \sin. LSC$$

ex

ex quo deducitur

$$\text{Tang. } LSC = \frac{\text{fin. } LCS}{\frac{CS}{CL} - \text{cof. } LCS}$$

Si iam parallaxis aequatorea Lunae horizontalis dicatur Π, erit $\Pi = \frac{AC}{CS}$, ideoque fi ftatuatur $CL = \varepsilon AC$ vbi valorem numeri ε per formulam § 4 datam definire licet, habebitur $\frac{CS}{CL} = \frac{CS}{\varepsilon AC} = \frac{1}{\varepsilon \Pi}$, hoc igitur valore in aequatione fuperiori fubftituto, confequemur $\text{Tang. } LSC = \frac{\varepsilon \Pi . \text{ fin. } LCS}{1 - \varepsilon \Pi . \text{ cof. } LCS}$. Quum pro noftro inftituto, non praecife opus fit hanc parallaxin diftantiae a zenith vero cognofcere, quia ftatim parallaxes Longitudinis et Latitudinis inueftigare conftituimus, huic formulae omnino pro vfu praefenti acquiefcere poterimus, ceterum quoniam alioquin faepius eiusmodi occurrant cafus, vbi ipfam parallaxin diftantiae a zenith noffe iuuat, haud fuperfluum exiftimauimus, fequentem expreffionis modo allatae transformationem, vt videtur non inelegantem heic fubiungere. In formula noftra loco Π introducatur fin. Π, quod eo magis facere licebit, quia exactius fit $\frac{AC}{CS} = \text{fin. } \Pi$ quam $= \Pi$, eritque

$$\text{Tang. } LSC = \frac{\varepsilon \text{ fin. } \Pi . \text{ fin. } LCS}{1 - \varepsilon \text{ fin. } \Pi . \text{ cof. } LCS},$$

ponatur igitur ε fin. $\Pi = $ fin. Φ, ex quo fiet

$$\text{Tang. } LSC = \frac{\text{fin. } \Phi . \text{ fin. } LCS}{1 - \text{fin. } \Phi . \text{ cof. } LCS}.$$

Hinc igitur deducitur

$$\text{fin. } \Phi = \frac{\text{Tang. } LSC}{\text{fin. } LCS + \text{Tang. } LSC . \text{ cof. } LCS},$$

 inde-

indeque

$$\frac{1+\text{fin.}\,\phi}{1-\text{fin.}\,\phi} = \frac{\text{fin.}\,LCS + 2\,\text{Tang.}\,LSC.\,\text{Cof.}\,\tfrac{1}{2}LCS^2}{\text{fin}\,LCS - 2\,\text{Tang.}\,LCS\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}LCS^2}$$

$$= \text{Cot.}\,\frac{LCS}{2}\left(\frac{\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}LCS\,\text{Cof.}\,LSC + \text{Cof}\,\tfrac{1}{2}LCS.\,\text{fin}\,LSC}{\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}LCS\,\text{Cof.}\,LSC - \text{Cof}\,\tfrac{1}{2}LCS\,\text{fin.}\,LSC}\right)$$

$$= \text{Cot.}\,\tfrac{LCS}{2}\,\text{Tang.}\left(LSC - \tfrac{LCS}{2}\right),$$

Eſt vero $\frac{1+\text{fin.}\,\Phi}{1-\text{fin.}\,\Phi} = \text{Tang.}\left(\frac{90+\Phi}{2}\right)^2$, proinde fiet

$$\text{Tang.}\left(LSC - \tfrac{LCS}{2}\right) = \text{Tang.}\,\tfrac{LCS}{2}\,\text{Tang.}\left(\tfrac{90+\Phi}{2}\right)^2.$$

T. XXXI. Fig. 6. 8. Sit iam Π Polus eclipticae, ♈ N P ecliptica, z zenith verum atque ducta quadrante $\Pi z N$, N punctum Nonageſimi, ſi locus Lunae a centro Telluris viſus fuerit in L, et ducto arcu circuli maximi $zL\lambda$ capiatur $L\lambda$ aequalis parallaxi diſtantiae a zenith, erit λ locus Lunae apparens pro obſeruatore, cuius zenith verum in z. Ducantur iam per Polum eclipticae quadrantes ΠLP et $\Pi\lambda p$ eclipticae in punctis P, p occurrentes; euidens eſt parallaxin Longitudinis Lunae exprimi angulo $P\Pi p$ et parallaxin Latitudinis differentia arcuum ΠL et $\Pi\lambda$. Si igitur ex λ in ΠL demittatur perpendicularis λl, coincidet ea proxime cum circulo minori polo Π per λ deſcripto, vnde parallaxis Latitudinis iam exprimetur per arculum Ll, Longitudinis vero per Pp. In triangulo vero $L\lambda l$ habetur $\lambda l = L\lambda\,\text{fin.}\,\lambda Ll$ et $Ll = L\lambda\,\text{cof.}\,\lambda Ll$, quum igitur ſit

$L\lambda =$

$L\lambda = \frac{\varepsilon \Pi \text{ fin. } zL}{1 - \varepsilon \Pi \text{ cof. } zL}$, erit $\lambda l = \frac{\varepsilon \Pi . \text{ fin. } zL . \text{ fin. } \lambda L l}{1 - \varepsilon \Pi \text{ cof. } zL}$ atque $L l = \frac{\varepsilon \Pi \text{ fin. } zL . \text{ cof. } \lambda L l}{1 - \varepsilon \Pi . \text{ cof. } zL}$, deinde ob $Pp = \frac{\lambda l}{\text{cof. } PL}$ fiet $Pp = \frac{\varepsilon \Pi \text{ fin. } zL . \text{ fin. } \lambda L l}{\text{cof. } PL (1 - \varepsilon \Pi \text{ cof. } zL)}$.

9. Ducatur nunc per z in ΠL normalis arcus zK, eritque in triangulo rectangulo $z\Pi K$, fin. zK = fin. Πz fin. $z\Pi K$ = fin. Πz fin. NP, at in triangulo rectangulo zLK, fin. zK = fin. zL fin. zLK, ideoque fin. zL. fin. zLK = fin. Πz. fin. NP pro Parallaxi igitur longitudinis haec prodibit expreſſio:

$$\text{Par. Long.} = Pp = \frac{\varepsilon \Pi \text{ fin. } \Pi z . \text{ fin. } NP}{\text{cof. } PL (1 - \varepsilon \Pi \text{ cof. } zL)} = \frac{\varepsilon \Pi \text{ fin. } zK}{\text{cof. } PL (1 - \varepsilon \Pi \text{ cof. } zL)}.$$

Vlterius quum fit Tang. ΠK = Tang. Πz cof. NP, inuento ΠK habebitur $LK = 90° - \Pi K - LP$, tum vero erit cof. $\lambda L l$ = cof. $KLz = \frac{\text{Tang. } LK}{\text{Tang. } Lz}$, quare fiet Paral. Latit. $= \frac{\varepsilon \Pi \text{ Tang. } LK \text{ cof. } zL}{1 - \varepsilon \Pi \text{ cof. } zL}$.

Circa has expreſſiones parallaxium Longitudinis et Latitudinis notandum eſt, eas non quidem exacte veras eſſe, ſiquidem Ll non praeciſe ſit aequalis differentiae arcuum ΠL et $\Pi \lambda$, neque Pp exacte $= \frac{\lambda l}{\text{cof. } PL}$, aberratio vero harum expreſſionum a veris valoribus tantilla erit, vt pro Luna nunquam ad vnum minutum ſecundum aſſurgat. Ceterum ſi quis has parallaxes accuratius inueſtigare voluerit, ſequenti modo res ipſi peragenda eſt. Inuento primum arcu $z\lambda$, ex datis iam Πz, ΠL, zL et $L\lambda$, quaerat $\Pi\lambda$ ope huius formulae

$$\text{cof. } \Pi\lambda = \frac{\text{cof. } \Pi L \text{ fin. } z\lambda - \text{cof. } \Pi z . \text{ fin. } L\lambda}{\text{fin. } zL},$$

 vel

vel etiam

$$\text{cof. } \Pi\lambda = \text{cof. } \Pi L . \text{cof. } L\lambda - \text{fin. } \Pi L \text{ fin. } L\lambda \text{ cof. } \Pi L z.$$

Differentia inter $\Pi\lambda$ et ΠL dabit parallaxin Latitudinis. Porro habetur fin. $\lambda \Pi L = \frac{\text{fin. } L\Pi z . \text{fin. } L\lambda \text{ fin. } \Pi z}{\text{fin. } \Pi\lambda \text{ fin. } Lz}$, vnde cognofcetur angulus $\lambda \Pi L =$ parallaxi Longitudinis. In praefenti autem negotio tantis ambagibus opus non eft. Denique notari conuenit in formulis parallacticis, loco parallaxis Lunae horizontalis aequatoreae, in Π fubftituendam effe hanc parallaxin, parallaxi Solis mulctatam.

10. Quum in Tabulis plerumque affignari foleat, diameter Lunae horizontalis qualis fub aequatore videtur, nunc neceffum eft, vt primum quaeratur menfura huius diametri ex centro telluris fpectatae, erit vero, fi diameter horizontalis fub aequatore vifa dicatur D, ea quae e centro fpectatur D cof. Π, loco autem huius D cof. Π, iam fimpliciter fcribamus D. Deinde vt valor diametri Lunae apparentis pro dato obferuationis loco et tempore inueniatur, fit iterum S locus Lunae apparens, atque fi diameter Lunae apparens pro diftantia apparente zLS a zenith vero dicatur Δ, erit $\Delta : D :: SC : LS^2$, quum igitur fit

Tab. XXXI Fig. 5.

$$LS = \sqrt{(SCq + LCq - 2\, SC.\, LC.\, \text{cof. } LCS)},$$

atque $\frac{LC}{SC} = \varepsilon\Pi$, prodibit

$$\Delta : D :: 1 : \sqrt{(1 + \varepsilon^2 \Pi^2 - 2\varepsilon\Pi \text{ cof. } LCS)}$$

ex quo proxime fit $\Delta = \frac{D}{1 - \varepsilon\Pi \text{ cof. } LCS}$

quae

quae expreſſio omnino tam prope ad veritatem accedit, vt abberratio pro nulla reputari queat.

11. Quum nunc cognita ſit diameter Lunae apparens, cum diametro Solis, dabitur diſtantia centrorum Solis et Lunae apparens ☉☽, quippe quae pro obſeruato initio vel fine Eclipſis aequatur ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae, ſi autem Phaſis quaedam obſeruata fuerit, ad ſemidiametrum Lunae apparentem addere oportet partem lucidam diſci Solis ex obſeruatione concluſam et ex ſumma ſubtrahere ſemidiametrum Solis, quo facto prodibit diſtantia centrorum apparens. Iam ſi ex ☽ in eclipticam demittatur perpendicularis ☽B erit ea aequalis Latitudini Lunae apparenti, quae inuenitur ſi ex Latitudine Lunae geocentrica ſubtrahatur parallaxis Latitudinis, tum vero in triangulo rectangulo ☽☉B ex datis ☉☽ et ☽B habetur Tab. XXXI Fig. 7.

$$B☉ = \sqrt{(☉☽q - ☽Bq)} = \sqrt{(☉☽ + ☽B)(☉☽ - ☽B)},$$

quoniam ſiue vllo errore, hoc triangulum tamquam rectilineum ſpectari poteſt. Tum autem B☉ $\pm$ Parallaxi Longitudinis Lunae, dabit differentiam longitudinum Solis et Lunae, quae ſi per motum horarium Lunae relatiuum in Ecliptica in tempus conuertatur, atque quantitas temporis hinc oriunda ad datum tempus obſeruationis addatur vel ab eo ſubtrahatur, quemadmodum ex circumſtantiis facile diiudicare licebit; orietur tempus verum coniunctionis Solis et Lunae, ad meridianum loci in quo obſeruatio facta eſt relatum. Quodſi igitur in pluribus

locis

locis obſeruationes Eclipſis Solis inſtitutae fuerint, pro omnibus ad praeſcriptum huius Methodi, tempora coniunctionis Solis et Lunae determinari poterunt, differentiae autem inter haec tempora, differentias quoque Meridianorum his locis reſpondentium, in tempore expreſſas, exhibebunt.

12. Hucusque a nobis ſuppoſitum fuit, omnia elementa Aſtronomica ex Tabulis deſumta, quibus calculus Eclipſis Solis ſuperſtruitur, veritati perfecte eſſe conſentanea, quum vero imprimis quod ad Longitudinem et Latitudinem Lunae attinet, Tabulis Aſtronomicis vix maior certitudo, quam quae intra vnum minutum primum continetur adſcribi queat; tum vero incertum ſit, an non parallaxis Lunae horizontalis aequatorea in Tabulis aſſignata, tantillam admittat correctionem, idque praecipue ob incertitudinem verae figurae Telluris; cum etiam probabile denique ſit ſemidiametros Solis et Lunae aliquam admittere poſſe correctiunculam ſiue realem, ſeu ex refractione atmoſphaerae Lunaris vel inflexione radiorum Solis prope limbum Lunae oriundam, neceſſum omnino eſt, vt inquiramus, quomodo concluſio noſtra pro tempore coniunctionis ob huiusmodi correctiones immutetur. Quod igitur primum attinet correctionem, qua Longitudo Lunae ex tabulis deſumta indiget, tenendum eſt vix opus eſſe, vllam eius hoc in negotio habere rationem, ſiquidem Parallaxes Longitudinis et Latitudinis, propter aliquantum immutatam Longitudinem Lunae ſenſibilem non

patian-

patiantur variationem. Si enim ponamus correctionem Longitudinis ad $1'$ assurgere, atque arcum N P esse satis paruum, parallaxis Longitudinis inde $2''$ vel ad summum $3''$ immutabitur. Quamuis itaque correctionem Longitudinis in sequentibus calculis plane praetermisimus, pro iis tamen casibus vbi N P paruus est, huius etiam correctiunculae pro parallaxi Longitudinis oriundae rationem habuimus conf. §. 24. Vt vero ratio habeatur reliquarum correctionum ponamus esse correctionem latitudinis y, summae semidiametrorum Solis et Lunae δ, quoniam hic imprimis ad obseruationes initii et finis Eclipseos attendimus, denique correctionem parallaxeos Lunae horizontalis aequatoreae $= \pi$. Atque quum nunc inquirendum sit, quam variationem subeat differentia apparens longitudinum Solis et Lunae, habebimus eam statim $= d. B\odot \pm d.p$, vbi p parallaxin Longitudinis designat. Deinde quum sit B☉ cathetus trianguli rectanguli cuius hypothenusa est ☉☽, alter vero cathetus ☽B aequalis Latitudini Lunae ipsa parallaxi Latitudinis mulctatae, haud difficile erit ex datis correctionibus summae semidiametrorum, latitudinis et Parallaxis, variationem ipsius B☉ deducere.

13. Supponamus igitur primum ☉☽ constantem, at ☽B particula quadam augeri debere, si itaque centro ☉ radio ☉☽ describatur arcus circuli ☽L et ducatur L b ita, vt sit L b vera quantitas latitudinis Lunae apparentis, tum vero iungatur L☉ T. XXXI. Fig. 8.

et ducatur $☽\,m$ parallela ipſi $B\odot$, exprimet $Bb = ☽\,m$ diminutionem ipſius $B\odot$ propter augmentum Latitudinis apparentis oriundam. Quum vero ſit $\Delta\, ☽\, L\, m \sim ☽\odot B$ erit $☽\, m : L\, m :: ☽\, B : B\odot$ ideoque $B\,b = ☽\, m = L\, m$ Tang. $☽\odot B$. Si iam dicatur parallaxis Latitudinis p', habebitur eius correctio ex correctione π deducenda $= \frac{p'\,\pi}{\Pi}$, vnde fiet $L\, m = y - \frac{p'\,\pi}{\Pi}$, conſequenter ſi angulus $☽\odot B$ per Φ exprimatur erit $B\,b = (y - \frac{p'\,\pi}{\Pi})$ Tang. $☽\odot B$ $= (y - \frac{p'\,\pi}{\Pi})$ Tang. Φ. Ponamus Latitudinem apparentem nulla indigere correctione, at ſummam ſemidiametrorum quantitate δ augeri debere, productis igitur recta $☽\, m$ ipſi $B\odot$ parallela et arcu $☽\, L$, $\odot\, l$ ipſis ita occurrat in l et n, vt ſit $l\,n = \delta$, tumque demiſſa perpendiculari $l\,b'$, erit augmentum ipſius $B\odot$ propter correctionem δ oriundum $= B\,b'$ ex ſimilitudine autem triang. $l\, ☽\, n$ et $☽\odot B$ habetur $B\,b' (= ☽\, l) : l\,n :: \odot ☽ : B\odot$, vnde $B\,b' = \frac{\delta}{\cos.\,\Phi}$ $= \delta$ Sec. Φ. Vtramque igitur correctionem ipſius $B\odot$ colligendo fiet:

$$d.B\odot = B\,b' - B\,b = \delta\,\text{Sec.}\,\Phi - y.\,\text{Tang.}\,\Phi + \frac{p'\,\pi}{\Pi}\,\text{Tang.}\,\Phi.$$

Denique qnoniam habemus $d\,p = \frac{p\,\pi}{\Pi}$, tota correctio diſtantiae Solis et Lunae ſecundum longitudinem ſic erit expreſſa:

$$d.B\odot \pm d.p = \delta\,\text{Sec.}\,\Phi - y\,\text{Tang.}\,\Phi + \frac{\pi}{\Pi}(p'\,\text{Tang.}\,\Phi \pm p)$$

vbi ſignorum ambiguorum ſuperius valebit, dum parallaxis Longitudinis ad $B\odot$ addi debet, inferius

vero

vero ſi a B ☉ ſubtrahenda ſit. Si haec correctio nunc inuenta in tempus conuertatur et valor inde oriundus addatur ad expreſſionem ſupra inuentam temporis, quod differentiae longitudinum Solis et Lunae reſpondet, haecque noua temporis expreſſio correcta, ad tempus obſeruationis vel addatur, vel ab eo ſubtrahatur, quemadmodum circumſtantiae requirunt, obtinebitur verum momentum coniunctionis Solis et Lunae dato meridiano reſpondens.

14. Ex his igitur patet, ſi in vno eodemque loco, binae inſtitutae fuerint obſeruationes phaſium eiusdem Eclipſis, imprimis ſi tam initium quam finem obſeruare licuerit, duas inde pro tempore coniunctionis prodire expreſſiones, ex quibus inter ſe comparatis deduci poteſt aequatio, quae praeter numerum aliquem abſolutum tres incognitas δ, y et π inuoluit. Liquet enim, ſi pro initio Eclipſis obſervato, tempus coniunctionis exprimatur per hanc formulam:

$$T + \alpha\delta + \beta y + \gamma\pi$$

pro fine vero per iſtam

$$T' + \varepsilon\delta + \zeta y + \eta\pi$$

tum vna harum expreſſionum ab altera ſubtracta prodire:

$$T - T' + (\alpha - \varepsilon)\delta + (\beta - \zeta) y + (\gamma - \eta)\pi = 0.$$

Simili ratione ſi pro duobus aliis terrae locis, eiusmodi aequationes inuentae fuerint, et in omnibus tribus, coefficientes incognitarum, δ, y et π inſigniter discrepent, ex iisdem aequationibus veri valores correctionum δ, y et π elici poterunt, quibus valoribus rursus in expressionibus temporum coniunctionis substitutis, vera momenta coniunctionum definientur. Elementis autem Astronomicis hac ratione certo determinatis, pro vnoquoque loco, vbi vnicam tantum obseruationem instituere licuit, etiam verum momentum coniunctionis Solis et Lunae in tempore Meridiano istius loci respondente, exprimi poterit.

15. Vt de veris valoribus correctionum δ, y et π certi fieri queamus, praeprimis necessum erit, vt eiusmodi aequationes adhibeantur, in quibus coefficientes incognitarum δ, y et π insigniter differunt, si enim differentia harum coefficientium sit exigua, ipsae aequationes pro coincidentibus haberi debent ex quibus, omnino nihil concludi poterit. Eiusmodi autem aequationibus quales desideramus obtentis, vnica quae circa correctionum inuestigationem superest incertitudo, orietur ex incertitudine momentorum obseruatorum, at vero hi errores tanto maiorem habebunt influxum, quanto minores fuerint coefficientes, quibus δ, y et π afficiuntur, ne igitur de his valoribus nimis praecipitanter quicquam statuamus, conducet ad manus habere sufficientem numerum aequationum etiam talium, in quibus coefficientes incognitarum haud multum differunt, vt deinde ex conuenientia vel discrepantia numerorum absolutorum, de certitudine et praestantia obseruationum iudicium ferre liceat. Pro iis vero ca-

fibus

ſibus vbi ⊙ B proxime = ☽ B adeoque ang. Φ non parum a 90° differt, noſtra methodus inueniendi correctiones non amplius cum vſu adhiberi poteſt, quum correctiones ipſius B ⊙, tum non amplius, vt minimae reſpectu ipſius B ⊙ conſiderari poſſint. Cum autem tales occurrunt caſus, valorem approximatum correctionum aliunde concluſum ſtatim adhibere licebit, indeque nouum deducere valorem anguli Φ, nec non ſi placuerit correctionum huic angulo reſpondentium.

16. Quoniam Longitudines et Latitudines Lunae, quales in noſtris calculis adhibentur, non ſolum eo reſpectu erroneae ſunt, quatenus Tabulae Aſtronomicae ex quibus deſumtae fuerunt a veritate deficiunt; ſed etiam quatenus in aeſtimanda Longitudine loci pro qua obſeruationem aliquam computauimus, a veritate aberrauimus; videri poſſet etiam correctionum ad poſterioris generis errores deſtruendos neceſſariarum in noſtris calculis haberi debuiſſe rationem. Verum de Longitudine Lunae iam ſupra monuimus, etiam grauiores errores in ea aeſtimanda commiſſos, parallaxes Longitudinis et Latitudinis inuentas non multum immutare. Motus autem horarius Lunae in latitudinem quum exiguus ſit, facile liquet, etiam ſenſibiles errores in longitudine loci aeſtimanda commiſſos, determinationem latitudinis non multum incertam reddere. De reliquo calculis ad finem perductis, imprimis ſi pro eodem loco adfuerint obſeruationes initii et finis, ex inuen-

tis momentis temporum coniunctionum, Longitudo loci a vera certe non vltra 30'' deficiens definiri poterit, cum qua deinde omnes calculos denuo instituere licebit.

ARTICVLVS II.

Recensio elementorum per calculum ex singulis obseruationibus deductorum.

17. Quoniam nimis longum atque etiam superfluum foret, singulos calculos arithmeticos obseruationum a nobis computatarum heic exponere, sufficiet binis tantum exemplis illustrasse, quomodo huiusmodi calculus, tam pro obseruato initio, quam fine Eclipsis institui debeat, quibus exemplis deinde subiungamus Tabellam repraesentantem ea elementa, quae pro determinando tempore vero coniunctionis Solis et Lunae ex singulis obseruationibus deducta sunt. In antecessum autem monuisse iuuabit, elementis Astronomicis ex Tabulis *Mayerianis* depromtis, nos vsos fuisse iisdem, quibus calculi ad praescriptum Methodi *Eulerianae* instituti superstruuntur, vid. Tom. XIV. Nov. Comment. P. II. pag. 350. Quum vero pro calculo exactissime instituendo, etiam minimarum variationum, quae Parallaxis Lunae aequatorea eiusque Diameter horizontalis aequatorea subeunt, rationem habere vtile duximus; hinc Elementa Astronomica non solum pro ipso tempore coniunctionis, sed etiam pro binis horis ante coniunctio-

iunctionem, atque vna hora poſt coniunctionem elicere conſtitui, quoniam intra hoc temporis interuallum, omnes obſeruationes ſuper hac Eclipſi inſtitutas cadere deprehendi. Haec autem elementa ſequenti laterculo ob oculos ponam, vt vnicuique de exactitudine calculorum iudicium ferre, integrum ſit.

18. Elementa Aſtronomica ex Tab. deſumta.

Temp. med. Par. A. 1769. 3. Iun.	$18^{h}. 30'$	$19^{h}. 30'$	$20^{h}. 30'$	$21'. 30''$
Aſcen. ⊙ recta	$72°. 24'. 40''$	$72°. 27'. 14''$	$72°. 29'. 49''$	$72°. 32'. 23''$
Semid. ⊙	$15'. 47''$			
Parallax. ⊙ hor.	$8''$			
Longit. ☽ vera	$2^{s}.12°.35'.54'',4$	$2^{s}.13°.13'.49'',4$	$2^{s}.13°.51'.44'',3$	$2^{s}.14°.29'\ 39'',1$
Latit. ☽ Bor.	1. 2. 41, 2	59. 14, 7	55. 48, 0	52. 21, 1
Paral. ☽ aequat.	61. 22, 8	61. 22, 2	61. 21, 7	61. 21, 2
Paral. reducta Π	61. 14, 8	61. 14, 2	61. 13, 7	61. 13, 2
Diamet. ☽ hor. aequatorea	33. 28, 8	33. 28, 5	33. 28, 2	33. 27, 9
Diamet. ☽ a centr. terrae viſa	33. 28, 5	33. 28, 2	33. 27, 9	33. 27, 6
Logarithmi pro mot. horar.				
☽ in Longit	9, 8006789	. . . .	. . . . .	9, 8006407
in latitut.	8, 7586176	8. 7590380		8, 7594580
L. Π =	3, 5652337	3, 5651628	3, 5650919	3, 5650446
L. D =	3, 3028718	3, 3028070	3, 3027421	3, 3026772
pro reduct ſpatii in tempus	0, 2275550	. . . .	. . . .	0, 2275564

Calcu-

Calculus pro obſeruationibus Eclipſis Solaris, Grenouici inſtitutis.

19. Quum eleuatio Poli obſeruatorii Grenovicenſis exacte determinata ſit $51°.28'.40''$, habebitur ſub hypotheſi figurae telluris ſphaeroidicae, qua ratio axis ad diametrum aequatoris aſſumitur vt 200:201, diſtantia inter zenith verum et zenith apparens $= 16'.44''$, vnde fiet $Pz = 38°.48'.4''$, tum vero quoque habebitur $\text{Log.}\ \varepsilon = 9,9986814$.

T. XXXI. Fig. 3. Initium huius Eclipſis obſeruatum eſt a Celeb. *Maskelyne* Tempore vero $18^h.38'.54''$ ex quo fiet ang. $MPQ = 80°.16'.30''$, quum autem differentia meridianorum inter obſeruatorium Grenouicenſe et Pariſinum ſit $9'.16''$, erit tempus Pariſinum verum huius obſeruationis $18^h.48'.10''$ et medium $18^h.46'1''$, quo tempore habetur aſcenſio Solis recta $72°.25'.21''$, vnde deducitur arcus $♈M = MP - ♈Q = 7°.51'.9''$ et $zP♋ = 97°.51'.9''$. (*a*).

Calculus pro reſolutione trianguli Sphaerici $zP\Pi$.

Fig. 4. Vbi $Pz = 38°.48'.4''$, $\Pi P = 23°.28'.9''$ et ang. $zP\Pi = 82°.8'.51''$. Demiſſo ex z in ΠP arcu zR perpendiculari erit:

Log.

(*a*) Notandum eſt, figuram a nobis allatam huic exemplo non eſſe accommodatam, quiuis autem facile perſpicit, pro hoc caſu punctum ♈ cadere inter M et T, ſic enim angulus $zP♋$ certe fiet obtuſus.

Log. ſin. Pz = 9.7970035	Log. Tang. Pz = 9.9052844
L. ſin. zPΠ = 9.9959084	Log. coſ. zPΠ = 9.1355249
L. ſin. zR = 9.7929119	L. Tang. PR = 9.0408093
zR = 38°. 22′. 13″	PR = 6°. 16′. 8″
	PΠ = 23. 28. 9
	ΠR = 17. 12. 1

Log. coſ. zR = 9.8943247	L. Tang. zR = 9.8985858
Log. coſ. ΠR = 9.9801296	L. ſin. ΠR = 9.4708699
Log. coſ. Πz = 9.8744543	L. Ta. ♋N = 10.4277159
Πz = 41°.30′.1″	♋N = 69°.31′.11″
	♈N = 0ˢ. 20. 28. 49
	Long. ☽ = 2. 12. 46. 2
	NP = 52. 17. 13.

Calculus pro reſolutione trianguli Πz L: Fig. 6.

L. ſin. Πz = 9.8212670	L. Tang. Πz = 9.9468126
L. ſin. NP = 9.8982227	L. coſ. NP = 9.7865491
L. ſin. Kz = 9.7194897	L. Tang. ΠK = 9.7333617
Kz = 31°.36′.50″	ΠK = 28°.25′.21″
	PL = 1. 1. 46,1
	29. 27. 7
	LK = 60. 32. 53.

Calculus pro denominatore formularum Parallacticarum:

Log.cof.Kz	= 9.9302356		
L. cof. L K	= 9.6916944	in part. rad.	
L. cof. L z	= 9.6219300	ε Π cof z L	= 0,0074374
L. ε Π	= 3.5639151	1 − ε Π cof. z L	= 0,9925626
L. Conft.	= 4.6855749		
L.εΠcof.zL	= 7.8714200		

Calculus pro parallaxi tam Longitudinis, quam Latitudinis atque diametro apparente

L(1-εΠcof.zL)	= 9.9967579	L.εΠCompl.	= 3.5671572
L. compl.	= 0.0032421	L.Tang.LK	= 10.2482083
L. ε Π	= 3.5639151	L.cof.L z	= 9.6219300
	3.5671572	L. Par. Lat.	= 3.4372955
L. fin. K z	= 9.7194897	Par. Lat.	= 2737″, 1
	3.2866469	L. D	= 3.3028718
L. cof. P L	= 9.9999299	L. Compl.	= 0.0032421
Log. Par. Long.	= 3.2867170	L. Δ	= 3.3061139
Par. Long.	= 1935″, 2	Δ	= 2023, 5

Fig. 7. Calculus pro refolutione trianguli ☽ ⊙ B et tempore coniunctionis:

Δ	= 2023, 5	L. Summae	= 3.4665266
d	= 1894, 0	L. Differ.	= 2.9955036
	3917, 5	L. B ⊙²	= 6.4620302
		L. B ⊙	= 3.2310151
⊙ ☽	= 1958, 7	B ⊙	= 1702, 2
☽ B	= 969, 0	P. Long.	= 1935, 2
Summa	= 2927, 7		3637, 4
Differ.	= 989, 7		

L. 3637,

$$L. 3637,4 = 3.5607911 \qquad 6143'' = 1^h.42'.23''$$
$$L \text{ red. temp.} = 0.2275550 + \text{Temp. obs.} = 18.\ 38.\ 54$$
$$L. 6143'' = 3.7883461 \quad \text{Temp. coni.} = 20.\ 21.\ 17$$

Calculus pro correctionibus temporis coniunctionis:

$$L. ☽ B = 2.98632$$
$$L. B ⊙ = 3.23101$$
$$L. \text{Tang. } \Phi = 9.75531$$
$$L. \text{ red. in temp.} = 0.22755$$
$$L \text{ Tang. } \Phi = 9.98286$$
$$L. \tfrac{p'}{\Pi} = 9.87206$$
$$L. \tfrac{p'}{\Pi} \text{ Tang. } \Phi = 9.85492$$

$$L. \text{Sec. } \Phi = 0.06096$$
$$L \text{ red. in temp.} = 0.22755$$
$$L. \text{Sec. } \Phi = 0.28851$$

$$L. \tfrac{p}{\Pi} = 9.72148$$
$$L. \text{ red. in temp.} = 0.22755$$
$$L. \tfrac{p}{\Pi} = 9.94903$$

in temp.

$$\tfrac{p'}{\Pi} \text{ Tang. } \Phi = 0,72$$
$$\tfrac{p}{\Pi} = 0,89$$
$$\text{Summa} = 1,61.$$

Hinc ergo deducitur verum tempus coniunctionis:

$$20^h.\ 21'.\ 17'' + 1,94.\ \delta - 0,96.\ y + 1,61\ \pi.$$

20. Finis Eclipsis ibidem a Celeb. *Maskelyne* obseruatus est Temp. vero $20^h. 23'. 30''$, ex quo habetur ang. $MPQ = 54°. 7'. 30''$. Tempus vero Parisinum verum huius obseruationis erit $20^h.32'.46''$ et

et medium $20^h. 30'. 38''$, quo tempore erat aſcenſio Solis recta $72°. 29'. 50''$, ideoque ♈ $M = 18°. 22'. 20''$ et zP♋ $= 71°. 37'. 40''$.

Calculus pro reſolutione trianguli Sphaerici $zP\Pi$.

L. ſin. $Pz = 9.7970035$	L. Tang. $Pz = 9.9052844$
L. ſin $zP\Pi = 9.9772795$	L. coſ. $zP\Pi = 9.4985710$
L. ſin. $zR = 9.7742830$	L. Tang. $PR = 9.4038554$
$zR = 36°. 29'. 23''$	$PR = 14°. 13'. 16''$
	$P\Pi = 23. 28. 9$
	$\Pi R = 37. 41. 25$
L. coſ. $zR = 9.9052363$	L. Tang. $zR = 9.8690459$
L. coſ. $\Pi R = 9.8983562$	L. ſin. $\Pi R = 9.7863203$
L. coſ. $\Pi z = 9.8035925$	L. Tang. ♋$N = 10.0827256$
$\Pi z = 50°. 29'. 28''$	♋$N = 50°. 25'. 27''$
	♈$N = 1^s. 9. 34. 33$
	Long. ☽ $= 2. 13. 52. 8$
	$NP = 34. 17. 35$

Calculus pro reſolutione trianguli $\Pi z L$:

L. ſin. $\Pi z = 9.8873505$	L. Tang. $\Pi z = 10.0837582$
L. ſin. $NP = 9.7508368$	L. coſ $NP = 9.9170676$
L. ſin. $Kz = 9.6381873$	L. Tang. $\Pi K = 10.0008258$
$Kz = 25°. 55'. 58''$	$\Pi K = 45°. 3'. 16''$
	$PL = 55. 45, 8$
	$45\ 59. 2$
	$LK = 44. 0. 58$

Calcu-

Calculus pro denominatore formularum parallacticarum:

L. cof. K z = 9.9545204	
L. cof. L K = 9.8568162	
L. cof. L z = 9.8113366	in part. rad.
L. $\varepsilon\Pi$ = 3.5637733	$\varepsilon\Pi$ cof. L z = 0,011500
L. conft. = 4.6855749	$1-\varepsilon\Pi$ cof. L z = 0,988500.
L. $\varepsilon\Pi$ cof. L z = 8.0606848	

Calculus pro Parallaxibus et Diametro apparente:

L.($1-\varepsilon\Pi$ cof. L z) = 9.9949767	L. $\varepsilon\Pi$ Compl = 3.5687966
L. Compl. = 0.0050233	L. Tang. LK = 9.9850816
L. $\varepsilon\Pi$ = 3.5637733	L. cof. L z = 9.8113366
3.5687966	L. Par. Lat. = 3.3652148
L. fin. K z = 9.6381873	Par. Lat. = 2318,6
3.2069839	L. D = 3,3027421
L. cof. P L = 9.9999429	L. Compl. = 0.0050233
L. Par. Long. = 3.2070410	L. Δ = 3.3077654
Par. Long. = 1610,8	Δ = 2031,3

Calculus pro refolutione trianguli ☽ ☉ B et tempore coniunctionis:

$\Delta = 2031,\ 3$
$d = 1894,\ 0$
$3925,\ 3$

☉☽ $= 1962,\ 6$
☽B $= 1027,\ 2$
Summa $= 2989,\ 8$
Differ. $= 935,\ 4$
L. $61,\ 5 = 1.7888751$
L. red. $= 0.2275564$
L. $104'' = 2.0164315$

Log. Summae $= 3.4756421$
L. Differ. $= 2.9709974$
L. B☉$^2 = 6\ 4466395$
L. B☉ $= 3\ 2233197$
B☉ $= 1672,\ 3$
P. Long. $= 1610,\ 8$
$61,\ 5$

$104'' = 1'.\ 44''$
Sub. a Temp. obs. $= 20^h.23'.30''$
Temp. coni. $= 20^h.21'.46''$

Calculus pro correctionibus temporis coniunctionis.

L. ☽B $= 3.01165$
L. B☉ $= 3\ 22332$
L. Tang. $\Phi = 9.78833$
L. red. $= 0.22755$
in temp.
L. Tang. $\Phi = 0.01588$
L $\frac{p'}{\pi} = 9.80013$
in temp.
L. $\frac{p'}{\pi}$ T. $\Phi = 9.81601$

Log. Sec. $\Phi = 0.06952$
L. $\frac{p}{\pi} = 9\ 64194$
L. red. $= 0.22755$
in temp.
Log. Sec. $\Phi = 0\ 29707$
L. $\frac{p}{\pi} = 9.86949$
$\frac{p'}{\pi}$ Tang. $\Phi = -0,655$
$\frac{p}{\pi} = +0,741$
Corr. III. $= +0,086$

Hinc

Hinc habetur verum tempus coniunctionis:

$$20^h.\ 21'.\ 46'' - 1,98.\delta + 1,04.y + 0,09.\pi$$

at quum pro initio esset

$$20.\ 21.\ 17 + 1,94.\delta - 0,96.y + 1,61.\pi$$

habebitur subtrahendo hanc expressionem ab illa, sequens aequatio:

$$29 - 3,92\delta + 2,00.y - 1,52.\pi = 0.$$

Denique et notari meretur, quod si vtraque expressio addatur et summa per 2 diuidatur, prodeat haec expressio pro tempore coniunctionis:

$$20^h.\ 21'.\ 32'' - 0,02.\delta + 0,04.y + 0,085.\pi$$

seu neglectis plane correctionibus δ et y, quorum coefficientes sunt quam minimi, $20^h.21'.32'' + 0,85\,\pi$, ideoque si certe constaret π esse $= 0$, sine sensibili errore statui posset verum tempus coniunctionis Grenouicense $20^h.\ 21'.\ 32''$.

21. Quum exempla iam allata abunde satisfacere possint, ad praxin calculi nostri illustrandam, reliquum est, vt elementa pro calculo coniunctionis verae ex singulis obseruationibus a nobis computatis deducta exponamus, vbi quidem quum pro correctionibus δ, y et π inueniendis necessum sit, obseruationes tam initii, quam finis Eclipseos in iisdem locis institutas adhibere, has obseruationes a reliquis distinguamus easque numeris maioribus I. II. III. etc. indigitemus, quibus dein totidem respondebunt aequationes correctionibus inuestigandis inseruientes.

Elemen-

Elementa calculi coniunctionnm

	I.	II.	III.
Locus obseruationis	Lezardi prom.	Grenouicum	Lutetia Paris.
Nomen obseru.	Bradley.	Maskelyne	Messier.
Tempus obseruat.	$18^h. 14'. 54''$	$18^h. 38'. 54''$	$18^h. 47'. 13''$
P z =	$40°. 19. 24$	$38. 48. 4$	$41. 26. 45$
L. ε =	9. 9987382	9, 9986814	9, 9987817
z P ♋ =	$103°. 51'. 15''$	$97°. 51'. 9''$	$95°. 46'. 26''$
♈ N =	$0^s. 14°. 24'. 58''$	$0^s. 20°. 28'. 49''$	$0^s. 19°. 49'. 37''$
Long. ☽ =	2. 12. 44. 29	2. 12. 46. 2	2. 12. 45. 24
N P =	58. 19. 31	52. 17. 13	52. 55. 47
Π z =	40. 26. 48	41. 30. 1	44. 25. 52
Lat. ☽ =	1. 1. 54,5	1. 1. 46,1	1. 1. 49,5
L K =	64. 51. 21	60. 32. 53	58. 23. 20
K z =	33. 30. 34	31. 36. 50	33. 57. 25
Par. Long. =	$2036''$, 0	$1935''$, 2	$2063''$, 1
Par. Lat. =	2783, 1	2737, 1	2608, 7
Δ =	2021, 2	2023, 5	2023, 9
B ☉ =	1721, 8	1702, 2	1620, 3
Temp. coni. =	$20^h. 0'. 30''$	$20^h. 21'. 17''$	$20^h. 30'. 51''$
an. Φ =	$28°. 24. 40$	29. 39. 10	34, 11. 30

ex obseruato initio Eclipsis deducta.

IV.	V	VI.	VII.
Bonona Zanotti	Cajaneburgum Planman	Petropolis Stahl	Wardhus Hell
$19^h. 28'. 14''$	$21^h. 0'. 53''$	$21^h. 10'. 24''$	$21^h. 22'. 42''$
45. 47. 32	$25°. 59'. 58$	$30°. 18. 31$	$19°. 48. 18$
9, 9989467	9, 9982486	9, 9983857	9, 9980826
$85°. 30' 59''$	$62° 20'. 3''$	$59°. 57'. 22''$	$56°. 52'. 28''$
$0^s.24°.43'.35''$	$1^s.24°.31'. 3''$	$1^s.22°.48'. 9''$	$2^s. 2°.28'.35''$
2. 12. 48. 33	2. 13. 5. 46	2. 13. 5. 8	2. 13. 10. 57
48. 4 58	18. 34. 43	20. 16. 59	10 42. 22
51. 43. 0	41. 58. 46	46. 16. 9	37. 52. 55
1. 1. 32,4	59. 58,6	1. 0. 2,1	59. 30,4
48. 33. 37	48. 32. 26	44. 33. 49	51. 36. 46
35 50. 2	12. 18. 15	14. 30. 24	6. 33. 0
$2167''$, 1	789, 1	928, 4	421, 9
2249, 5	2711, 0	2517, 6	2880, 1
2027, 8	2031, 8	2033, 1	2030, 4
1327, 7	1750, 7	1636, 9	1836, 7
$21^h. 6'. 36''$	$22^h. 12'. 22''$	$22^h. 22'. 36''$	$22^h. 26'. 16''$
$47°. 23. 0$	$26°. 53. 10$	$33°. 31. 40$	$20°. 36. 0$

Elementa calculi coniunctionum

	VII.	IX.	X.
Locus obferuationis	Vmba	Gurjet	Orenburgum
Nomen obferuat.	Pictet	Lowits	Krafft
Tempus obferuat.	$21^h.33'.43''$	$23^h.29'.45''$	$23^h.30'.22''$
P z =	23°.27.29	43°. 9'.58''	38°.30.40
L. ε =	9,9981661	9,9988454	9,9986717
z P ♋ =	54°. 7'.16''	25°. 4'.51''	24°.56'. 7''
♈ N =	2^s. 0°.53'.36''	2^s.11°.20'31''	2^s.12°.26'.24''
Long. ☽ =	2. 13. 10. 11	2. 13. 38. 25	2. 13. 31. 2
N P =	12. 16. 35	2. 17. 54	1. 4 38
Π z =	41. 32. 7	65. 1. 18	60. 28. 8
Lat. ☽ =	59.34,5	57. 0,5	57.40,9
L K =	48. 7.44	24. 2.44	28. 34.27
z K =	8. 6.18	2. 5. 0	0. 56 14
Par. Long. =	522,0	135,3	60,9
Par. Lat. =	2729,2	1516,5	1779,5
Δ =	2032,0	2041,0	2040,0
B ☉ =	1771,6	495,8	1020,7
Temp. coni. =	$22^h.38'.16''$	$23^h.47'.31''$	$24^h. 0'.49''$
ang. Φ =	25°.30.30	75°.24.10	58°.44.20

ex obseruato initio Eclipsis deducta.

XI.

Iakutsk Islenieff	Caua Mason
$29^h. 5'. 52''$	$18^h. 11'. 1''$
$28°. 12. 30$	$35°. 24. 23$
9,9983475	9,9985588
$58°. 58'. 0''$	$104°. 49'. 17''$
$4^s. 5° 11'. 5''$	$0^s. 18°. 36'. 54''$
2, 13 54. 31	2. 12. 47. 38
51. 16. 34	54. 10. 44
44. 39 37	36. 13. 45
55. 32,9	1. 1. 37,3
57. 21. 0	65. 45. 48
33. 15 22	28 38. 5
2023, 3	1766, 8
2597, 5	2950, 2
2024, 1	2021, 4
1815, 8	1809, 5
$29^h. 0'. 2''$	$19^h. 51'. 50''$
$22°. 2. 50$	$22°. 26. 0$

 Ele-

Elementa calculi coniunctionis

	I.	II.	III.
Locus obseruationis	vt ante	. . . . .	. . . . .
Nomen obseruat.	. . . . .	. . . . .	. . . . .
Tempus obseruat.	$19^h.57'.17''$	$20^h.23'.30''$	$20^h.27'.24''$
P z =	. . . . .	. . . . .	. . . . .
Log. ε =	. . . . .	. . . . .	. . . . .
z P ♋ =	$78°.11'.7''$	$71°.37'.40''$	$70°.39'.24''$
♈ N =	$1^s.\ 3°.52'.18''$	$1^s.\ 9°.34'.33''$	$1^s.\ 8°.39'.35''$
Long. ☽ =	2. 13. 49. 12	2. 13. 52. 8	2. 13. 48. 43
N P =	39. 56. 54	34. 17. 35	35. 9. 8
Π z =	49. 43. 0	50. 29. 28	53. 6. 42
Lat. ☽ =	56. 1,9	55. 45,8	56. 4,4
L K =	46. 56. 12	44. 0. 58	41. 36. 52
K z =	29. 19. 45	25. 45. 58	27. 25. 7
Par. Long. =	1813, 6	1610, 8	1707, 3
Par. Lat. =	2358, 0	2318, 6	2185, 3
Δ =	2029, 3	2031, 3	2031, 6
B ☉ =	1685, 3	1672, 3	1569, 2
Temp. coni. =	$20^h.\ 0'.54''$	$20^h.21'.46''$	$20^h.31'.15''$
ang. Φ =	30°.46.50	31°.33.40	36°.55.20

ex obſeruato fine Eclipſis deducta.

IV.	V.	VI.	VII.
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	Mayer	. . . .
$20^h.54'.11''$	$23^h.0'.0''$	$23^h.6'.14''$	$23^h.22'.36''$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$63°.58'.3''$	$32°.28'.12''$	$30°.54'.54''$	$26°.48'.49''$
$1^s.11°.19'.16''$	$2^s.11°.20'.52''$	$2^s.10°.42'.52''$	$2^s.16°.48'.32''$
2. 13. 42. 52	2. 14. 21. 2	2. 14. 18. 20	2. 14. 26. 43
32. 23. 36	3. 0. 10	3. 35. 28	2. 21. 49
59. 2. 59	47. 22. 42	51. 43. 21	42. 2. 51
56. 36,3	53. 8,1	53. 22,8	52. 37,0
34. 26. 20	41. 46. 31	37. 26. 33	47. 5. 59
27. 21. 6	2. 12. 33	2. 49. 6	1. 34. 58
1706, 3	$142''$, 9	$182''$, 5	$102''$, 2
1865, 1	2468, 1	2253, 9	2710, 6
2034, 4	2034, 5	2036, 2	2032, 1
1230, 2	1827, 5	1720, 8	1911, 6
$21^h.7'.35''$	$22^h.12'.35''$	$22^h.22'.56''$	$22^h.25'.55''$
$51°.13.10$	$21°.30'.20''$	$28°.52'.20''$	$13°.8'.40''$

Elementa calculi coniunctionis

	VIII.	IX.	X.
Locus obseruationis	vt supra	. . . . .	. . . . .
Nomen obseruat.	. . . . .	. . . . .	. . . . .
Tempus obseruat.	$23^h.34'.\ 8''$	$24^h.26'.48''$	$25^h.\ 2'.43''$
P z =	. . . . .	. . . . .	. . . . .
Log. ε =	. . . . .	. . . . .	. . . . .
z P ♋ =	$23^\circ.55'.51''$	$10^\circ.46'.39''$	$1^\circ.46'.55''$
♈ N =	$2^s.16^\circ.59'.39''$	$2^s.21^\circ.58'.16''$	$2^s.28^\circ.44'.35''$
Long. ☽ =	2. 14. 26. 17	2. 14. 14. 29	2. 14. 29. 23
N P =	2. 33. 22	7. 43. 47	14. 15. 12
Π z =	45. 50. 56	66. 20. 6	61. 58. 22
Lat. ☽ =	52. 39,5	53. 43,8	52. 22,6
L K =	43. 18. 8	22. 57. 44	27. 54. 13
K z =	1. 50. 1	7. 4. 34	12. 33. 9
Par Long. =	118'', 6	458'', 8	808'', 3
Par. Lat. =	2540, 0	1441, 7	1698, 8
Δ =	2033, 8	2040, 7	2038, 8
B ☉ =	1863, 6	833, 3	1335, 0
Temp. coni. =	$22^h.38'.21''$	$23^h.50'.26''$	$24^h.\ 0'.24''$
ang. Φ =	$18^\circ.23'.10''$	$64^\circ.56'.20''$	$47^\circ.14'.40''$

ex obſeruato fine Eclipſis deducta.

XI.

. . . . .	Hafnia	Windobona	Stockholmia
. . . . .	Horrebow	Sambach	Wargentin
$30^h.52'.37''$	$21^h.30'.55''$	$21^h.28'.50''$	$22^h.\ 4'.53''$
. . . . .	$34^\circ.35.15$	42. 4. 31	$30^\circ.54'.35''$
. . . . .	9,9985293	9,9988048	9.9984028
$85^\circ.43'.48''$	$54^\circ.45'.42''$	$55^\circ.17'.40''$	$46^\circ.\ 5'.40''$
$4^s.20^\circ.53'.16$	$1^s.23^\circ.34'.31''$	$1^s.19^\circ.31'.31''$	$2^s.\ 0^\circ.55'.26''$
2.15. 1.59	2.14. 2.46	2.13.52. 4	$2.14.10.38''$
65.51.17	20.28.15	24.20.33	13.15.12
37.24.39	51.20.20	58. 4. 4	49.47.32
49.24,8	54.47,9	55.46,2	54. 5,0
71.48.12	39.34.58	33.26.39	40. 4.14
33.40. 3	15 50.53	20.28.34	10. 5. 1
2037,9	1013,3	1299,7	$649'',6$
2906,2	2274,1	1918,1	2351,2
2016,6	2034,6	2036,2	2035,1
1954,4	1682,5	1349,9	1749,4
$29^h.\ 0'.15''$	$21^h.12'.\ 5''$	$21^h.27'.25''$	$21^h.33'.57''$
$1^\circ.43.\ 0$	$31^\circ.\ 4.20$	$46^\circ.36.30$	$27^\circ.\ 3'.50''$

Ele-

Elementa calculi coniunctionis ex fine Eclipsis deducta

Locus obseruationis	Pello	Kola	Ponoi
Nomen obseruat	Mallet	Rumovsky	Mallet
Tempus obseruat.	$22^h.45'.36''$	$23^h.30'.18''$	$24^h.\ 7'.55''$
P z =	23° 24. 28	21°.19. 4	23°. 7. 51
Log. ε =	9.9981736	9 9981189	9. 9981661
z P ♋ =	36°. 9. 10	$24°.53'.19''$	$15°.29'.50''$
♈ N =	$2^s.10°.26'.33''$	$2^s.17°.12'.\ 4''$	$2^s.21°.37'.52''$
Long. ☽ =	2. 14 21. 6	2. 14. 26. 42	2. 14. 30. 9
N P =	3. 54. 33	2. 45. 22	7. 7. 43
Π z =	44. 26. 9	43. 40. 58	46. 8. 59
Lat. ☽ =	53. 7,8	52. 37,3	52. 18,4
L K =	44. 44. 43	45. 28. 24	43. 12. 2
K z =	2. 44. 9	1. 54. 11	5. 8. 4
Par. Long. =	$176'',8$	$123'',0$	$331'',6$
Par. Lat. =	2604, 8	2638, 7	2526, 4
Δ =	2033, 2	2032, 8	2033, 8
B ⊙ =	1875, 1	1893, 7	1866, 1
Temp. Coni. =	$21^h.57'.48''$	$22^h.33'.33''$	$23^h.\ 6'.\ 4''$
Ang. Φ =	17°.16. 20	15°.19. 0	18°. 9. 30

22. De-

22. Determinata igitur quantitate anguli Φ valores correcti pro temporibus coniunctionis facile inueniuntur, ex quibus deinceps pro iis locis, vbi tam initium, quam finem obseruare licuit, aequationes pro correctionibus δ y et π definiendis, deducuntur. Tempora autem coniunctionis hinc inventa, ita erunt expressa:

Pro Promontorio Lezardi Tempus coniunctionis.

ex initio $20^h.0'.30'' + 1,92.\delta - 0,91.y + 1,63.\pi$

ex fine $20.\ 0.\ 54 - 1,96.\delta + 1,01.y + 0,19.\pi$

hinc aequat. I. $24 - 3,88.\delta + 1,92.y - 1,44.\pi = 0.$

Pro Grenouico.

ex initio $20^h.21'.17'' + 1,94.\delta - 0,96.y + 1,61.\pi$

ex fine $20.\ 21.\ 46 - 1,98.\delta + 1,04.y + 0,09.\pi$

aequat. II. $29 - 3,92.\delta + 2,00.y - 1,52.\pi = 0.$

Pro Lutetia Paris.

ex initio $20^h.30'.51'' + 2,04.\delta - 1,15.y + 1,76.\pi$

ex fine $20.\ 31.\ 15 - 2,11.\delta + 1,27.y + 0,03.\pi$

aequat. III. $24 - 4.15.\delta + 2,42.y - 1,73.\pi = 0.$

Pro Bononia.

ex initio $21^h.6'.36'' + 2,49.\delta - 1,84.y + 2,12.\pi$

ex fine $21.\ 7.\ 35 - 2,70.\delta + 2,10.y - 0,28.\pi$

aequat. IV. $59 - 5,19.\delta + 3,94.y - 2,40.\pi = 0.$

Pro Caianeburgo.

ex initio $22^h.12'.22'' + 1,89.\delta - 0,86.y + 0,99.\pi$
ex fine $22.\ 12.\ 35\ - 1,81.\delta + 0,66.y - 0,38.\pi$
aequat. V. $13\ - 3,70.\delta + 1,52.y - 1,37.\pi = 0.$

Pro Petropoli.

ex initio $22^h.22'.36'' + 2,03.\delta - 1,12.y + 1,19.\pi$
ex fine $22.\ 22.\ 56\ - 1,93\ \delta + 0,93.y - 0,49.\pi$
aequat. VI. $20\ - 3,96.\delta + 2,05.y - 1,68.\pi = 0.$

Pro Wardhus.

ex initio $22^h.26'.16'' + 1,80.\delta - 0,64.y + 0,69.\pi$
ex fine $22.\ 25.\ 55\ - 1,74.\delta + 0,39.y - 0,25.\pi$
aequat. VII. $21\ + 3,54.\delta - 1,03.y + 0,94.\pi = 0.$

Pro Vmba.

ex initio $22^h.38'.16'' + 1,87.\delta - 0,81.y + 0,84\ \pi$
ex fine $22.\ 38.\ 21\ - 1,78.\delta + 0,56.y - 0,44.\pi$
aequat. VIII. $5\ - 3,65.\delta + 1,37.y - 1,28.\pi = 0.$

Pro Gurjef.

ex initio $23^h.47'.31'' + 6,70.\delta - 6,48.y + 2,74.\pi$
ex fine $23.\ 50.\ 26\ - 3,99.\delta + 3,61.y - 1,63.\pi$
aequat. IX. $175 - 10,69.\delta + 10.09.y - 4,37.\pi = 0.$

Pro Orenburgo.

ex initio $24^h.\ 0'.49'' + 3,25.\delta - 2,78.y + 1,38.\pi$
ex fine $24.\ \ 2.\ 24\ - 2,49.\delta + 1,83.y - 1,22.\pi$
aequat. X. $95\ - 5,74.\delta + 4,61.y - 2,60.\pi = 0.$

Pro

Pro Iakutsk.

ex initio $29^h.\ 0'.\ 2''+1,82.\delta-0,68.y-0,45.\pi$
ex fine $29.\ 0.15\ -1,69.\delta+0,05.y-1,08.\pi$
aequat. XI. $13\ -3,51.\delta+0,73.y-0,63.\pi=0.$

Pro Caua.

ex initio $19^h.51'.50''+1,83.\delta-0,70.y+1,37.\pi$

Pro Hafnia.

ex fine $21^h.12'.\ 5''-1,97.\delta+1,02.y-0,16.\pi$

Pro Windobona.

ex fine $21^h.27'.25''-2,46.\delta+1,79.y-0,33.\pi$

Pro Stockholmia.

ex fine $21^h.33'.57''-1,90.\delta+0,86.y-0,25.\pi$

Pro Pello.

ex fine $21^h.57'.48''-1,77.\delta+0,53.y-0,29.\pi$

Pro Kola.

ex fine $22^h.23'.33''-1,75.\delta+0,46.y-0,39.\pi$

Pro Ponoi.

ex fine $23^h.\ 6'.\ 4''-1,78.\delta+0,54.y-0,53.\pi.$

23. Praeter obſeruationes ſupra recenſitas, nonnullas quoque alias computaui, quas tamen praetermittere coactus fui, quum pro locis vbi inſtitutae

 fuerunt,

fuerunt, eiusmodi praebeant Longitudines, quae a Longitudinibus eorundem locorum antea ſatis exacte determinatis inſigniter differunt. Sic finis Eclipſis *Goettingae* obſeruatus $21^h.12'.16''$, praebet tempus coniunctionis $21^h.\ 4'.\ 38''$, quod ſi conferatur cum tempore coniunctionis *Grenouicenſi* etiam ex fine elicito $20^h.\ 21'.\ 46''$, habebitur differentia Meridianorum inter *Grenouicum* et *Goettingam* $42'.\ 52''$, hoc eſt plus quam $3'$ maiorem, quam ex accuratiſſimis obſeruationibus B: MAYERI deducitur. Neque praetexatur fieri poſſe, vt haec differentia ob correctiones δ, y et π oriatur; neceſſum enim eſt, vt in expreſſionibus temporis coniunctionis ex vtraque obſeruatione deductis, coefficientes haud multum inter ſe ſint diverſi. Obſeruationes initii et finis Eclipſis *Lundae* in Scania inſtitutae vix quoque inter ſe conciliari poſſunt, videtur autem maiorem obtineri conſenſum, ſi ſupponatur in allegando tempore initii Eclipſis errorem integri minuti primi fuiſſe commiſſum, adeo vt habeatur initium Eclipſis $19^h.\ 43'.\ 58''$. Quicquid autem de initio ſit, notaſſe ſufficiet finem $21^h.33'.50''$ vt videtur exacte obſeruatum, praebere pro tempore coniunctionis hunc valorem:

$$21^h.\ 14'.\ 30'' - 1,97.\ \delta + 1,02.\ y - 0,17.\ \pi.$$

Simili ratione finis Eclipſis *Gryphiswaldiae* $21^h.\ 30'.\ 52''$ obſeruatus, dat tempus coniunctionis:

$$21^h.\ 16'.\ 42'' - 2,05.\ \delta + 1.\ 16\, y - 0,17.\ \pi.$$

ARTI-

ARTICVLVS III.

Determinatio correctionum δ, y et π, vt et Longitudinum Geographicarum pro locis, vbi obseruationes supra allatae institutae fuerunt.

24. Priusquam ipsam inuestigationem correctionum δ, y et π adgrediamur, haud abs re erit, quaedam de modo inueniendi correctiones Tabularum Lunarium ex obseruatis Eclipsibus Solis praemonere. Primum igitur si correctiones δ, y et π plane euanescant, necessum erit, vt valores inuenti pro temporibus coniunctionis veritati proxime sint consentanei, quum omnis discrepantia, quae amplius superesse poterit, ab incertitudine obseruationum originem ducat. At vero ex aequationibus nostris imprimis IV, IX et X constat, valores qui pro temporibus coniunctionis ex obseruato initio et fine Eclipsis deducuntur, nullo modo inter se conciliari posse, si supponatur valores ipsorum δ, y et π simul euanescere. Faciles quidem largimur, momenta obseruati initii Eclipsis semper multo esse incertiora momentis obseruati finis, hoc tamen initium ad praecisionem $10''$ obseruari posse existimamus, errores autem in hoc momento assignando ad $2'$ vel $3'$ assurgentes, ab Astronomis exercitatis commissos fuisse, nemo facile suspicari poterit. Magnam igitur committunt fallaciam, qui assumtis temporibus coniunctionis ex obseruato fine deductis pro veris,

ris, inde correctionem Longitudinis Lunae deducunt, postea vero ope argumenti Latitudinis correcti, ipsam Latitudinis correctionem quaerere conantur; ea enim quae iam monuimus, euidenter ostendunt, valores correctionum δ, y et π primum esse quaerendos, tumque his correctionibus ita determinatis, vt tam ex initio quam fine Eclipsis idem proxime prodeat tempus coniunctionis, Longitudinis correctionem sponte innotescere. Tanto magis autem mirum videbitur Rev. P. HELL in Dissertatione *de Transitu Veneris ante discum Solis Wardoehusii obseruato*, in hunc errorem illapsum fuisse; quanto certius demonstrari potest, si correctiones δ et π plane negliguntur, quemadmodum ab ipso factum est, correctionem Latitudinis multo tamen prodire maiorem, quam quae ab ipso inuenta

T. XXXI. Fig. 7. est. Grenouici enim Cel. MASKELYNE Temp. vero $19^h. 30'. 14''$ inuenit partem lucidam $15'. 14'', 5$, pro quo tempore ex Tabulis habetur Latit. Lunae $58'. 49'', 4$, deinde per calculum deducitur Parall. Latit. $= 2529'', 5$ et semidiameter Lunae apparens $1013, 7$, vnde fit ☉☽ $= 982, 2$ et ☽B $= 999, 9$, quod certe fieri nequit nisi ☽B, seu latitudo $18''$ diminuatur. Petropoli Cel. P. MAYER Temp. vero $22^h. 8'. 47''$ inuenit partem lucidam $15'. 46'', 0$, pro quo tempore quum ex Tab. sit Latitudo Lunae $56'. 40'', 9$, calculus autem det Parall. Lat. $2367'', 6$ et Semidiametrum Lunae apparentem $1017'', 5$ erit in triangulo ☽☉B, latus ☉☽ $= 1016, 8$ latus vero ☽B $= 1033, 3$ quae inter se conciliari nequeunt,

queunt, nisi ☽ B ad minimum 17'' diminuatur. Neque error praesertim in priori obseruatione 2'' superare poterit, vt ex mensuris partium lucidarum ante et post institutis, euidenter patet. Quodsi vero diameter Solis 4'' augeatur, vt conueniat cum ea quam P. HELL adhibuit, tamen certo affirmare liceb't, correctionem Latitudinis ad minimum 16'' statui debere. Denique obseruari meretur ad inueniendam correctionem Latitudinis nequaquam sufficere, vt verum argumentum Latitudinis innotescat, quis enim affirmare audebit, in Tabulis MAYERIANIS, pro Latitudine Lunae nullos alios errores possibiles esse, quam qui ex argumentis Latitudinis perperam aestimatis originem ducunt.

25. Quum dubium videri posset, an non correctio Longitudinis Lunae in temporibus coniunctionum inuentis sensibilem producat mutationem? pro iis obseruationibus vbi N P (Fig. 5.) exiguus est, inquisiui quomodo ob correctionem Longitudinis ad 1' assurgentem, parallaxes Longitudinis indeque tempora coniunctionis immutentur, inueni autem tempora coniunctionis deducta ex obseruato fine Petropoli, Caianeburgi, Wardhusii, Vmbae, Kolae et in Pello 2'', in Ponoi vero 1'' prorogari, similiter quoque temporibus coniunctionis ex obseruato initio, Gurjefii 2'' et Orenburgi 3'' addi debere. Porro quum in aequatione IX coefficientes correctionum δ, y et π sint praemagni, adeoque numerus absolutus huius aequationis, correctionibus in ipsarum coeffi-

coefficientes ductis, non praecise aestimari queat aequalis, vt ad veritatem propius accederem, statim supposui correctionem Latitudinis $y = -10''$ atque sub ea hypothesi vera momenta temporum coniunctionis pro Gurjef inueni sequentia:

ex initio $23^h.48'.35'' + 6,25.\delta - 6,00.y + 2,54.\pi$

ex fine $23.\ 49.\ 51 - 3,89.\delta + 3,50.y - 1,59.\pi$

hinc aequatio IX. $76 - 10,14.\delta + 9,50.y - 4,13.\pi$

Quantum ad reliquas aequationes attinet facile quivis perspiciet, ex suppositione $y = -10$, coefficientes litterarum δ, y et π non sensibiliter mutari, quamobrem sufficiet in vnaquaque earum pro y, -10 substituere atque sic XI nostrae aequationes correctionibus determinandis inseruientes erunt:

I.	$5 - 3,88\,\delta + 1,92.y - 1,44.\pi = 0$
II.	$9 - 3,92.\delta + 2,00.y - 1,52.\pi = 0$
III.	$0 - 4,15.\delta + 2,42.y - 1,73.\pi = 0$
IV.	$20 - 5,19.\delta + 3,94.y - 2,40.\pi = 0$
V.	$0 - 3,70.\delta + 1,52.y - 1,37.\pi = 0$
VI.	$2 - 3,96.\delta + 2,05.y - 1,68.\pi = 0$
VII.	$-29 - 3,54.\delta + 1,03.y - 0,94.\pi = 0$
VIII.	$-7 - 3,65.\delta + 1,37.y - 1,28.\pi = 0$
IX.	$76 - 10,14.\delta + 9,50.y - 4,13\,\pi = 0$
X.	$46 - 5,74.\delta + 4,61.y - 2,60.\pi = 0$
XI.	$6 - 3,51.\delta + 0,73.y - 0,63.\pi = 0.$

26. Qui has aequationes attente conſiderauerit, facile inueniet inter easdem aliqualem adeſſe diſſenſum, vix tamen maiorem, quam qui ex modicis erroribus in ipſis obſeruationibus commiſſis deduci poteſt, vnica tamen excepta aequatione VII^{ma}, quae certe cum reliquis conſiſtere nequit. Quum igitur numeri abſoluti harum aequationum ad minimum erroribus $15''$ obnoxii eſſe poſſint, valores correctionum δ, y et π maxime ſaltem probabiles inueniſſe erimus cenſendi, ſi hae correctiones ita comparatae fuerint, vt errores obſeruationum quantum fieri poſſit deprimantur. Quod autem primum correctionem Parallaxis attinet, quum accuratiſſimis obſeruationibus Parallaxis Lunae iam definita ſit, iſta correctio aut omnino pro nulla haberi poterit, aut certe quam minima erit. Quoniam igitur Parallaxis Lunae a nobis heic adhibita talis eſt, quae ex modo dictis obſeruationibus ſequitur, ſi ſtatuatur ratio axis telluris ad ſemidiametrum aequatoris, vt 177:178; pro ea vero ratione, quam nos ſupra adhibuimus, parallaxis circiter $3''$ minor prodiret; exiſtimauimus absque ſenſibili errore in aequationibus noſtris poni poſſe $\pi = -3$, quo facto eaedem in has transformantur:

I.	$9,3 - 3,88.\delta + 1,92.y = 0$
II.	$13,6 - 3,92.\delta + 2,00.y = 0$
III.	$5,2 - 4,15.\delta + 2,42.y = 0$
IV.	$27,2 - 5,19.\delta + 3,94.y = 0$
V.	$4,1 - 3,70.\delta + 1,52.y = 0$
VI.	$7,0 - 3,96.\delta + 2,05.y = 0$

$$\begin{array}{rl}
\text{VII.} & -27,8-3,54.\delta+1,03.y=0 \\
\text{VIII.} & -3,2-3,65.\delta+1,37.y=0 \\
\text{IX.} & 88,4-10,14.\delta+9,50.y=0 \\
\text{X} & 53,8-5,74.\delta+4,61.y=0 \\
\text{XI.} & 7,9-3,51.\delta+0,73.y=0.
\end{array}$$

27. Vt nunc valores approximatos correctionum δ et y inueniamus, comparemus inter se aequationes II et IX, idque eam imprimis ob rationem, quod numerus absolutus aequationis II non multum esse possit dubius, quia obseruatio Eclipsis Solis Grenouici a pluribus obseruatoribus egregie inter se conuenientibus instituta fuit, in aequatione vero IX ob coefficientes ipsorum δ et y magnos, aliquantillus error in numero absoluto commissus, minorem omnino producet variationem, quam in reliquis aequationibus. Ex aequatione igitur II deducitur:

$y=-6,8+1,96.\delta$ et ex aequ: IX $y=-9,3+1,07\ \delta$ ex quibus fiet $0=2,5+0,89.\delta$, seu $\delta=-2,8$ et $y=-12$. Si ponamus numerum absolutum aequationis II $5''$ augeri debere, orietur $y=-9,3$ et $\delta=0$, vnde propter ineuitabiles errores obseruationum tantisper statuamus $\delta=-2$ et $y=-11$. Vt autem valores pro δ et y consequamur etiam reliquis obseruationibus satisfacientes, danda opera est vt numeri absoluti nostrarum aequationum quantum fieri licet destruantur, quod sequenti modo adgressi sumus:

I.

		$y = -11$		$\delta = -2$		$y = -1$		$\delta = -1$	
I.	+ 9,3	− 21,1	−11,8	+ 7,8	− 4,0	−1,9	− 5,9	+ 3,9	− 2,0
II.	+13,6	− 22,0	− 8,4	+ 7,8	− 0,6	−2,0	− 2,6	+ 3,9	+ 1,3
III.	+ 5,2	− 26,6	−21,4	+ 8,3	−13,1	−2,4	−15,5	+ 4,1	−11,1
IV.	+27,2	− 43,3	−16,1	+10,4	− 5,7	−3,9	− 9,6	+ 5,2	− 4,4
V.	+ 4,1	− 16,7	−12,6	+ 7,4	− 5,2	−1,5	− 6,7	+ 3,7	− 3,0
VI.	+ 7,0	− 22,5	−15,5	+ 7,9	− 7,6	−2,0	− 9,6	+ 4,0	− 5,6
VII.	−27,8	− 11,3	−38,4	+ 7,1	−31,3	−1,0	−32,[illegible]	+ 3,5	−28,8
VIII.	− 3,2	− 15,1	−18,3	+ 7,3	−11,0	−1,4	−12,4	+ 3,6	− 8,8
IX.	+88,4	−104,5	−16,1	+20,3	+ 4,2	−9,5	− 5,3	+10,1	+ 4,8
X.	+53,8	− 50,7	+ 3,1	+11,5	+14,6	−4,6	+10,0	+ 5,7	+15,7
XI.	+ 7,9	− 8,0	− 0,1	+ 7,0	+ 6,9	−0,7	+ 6,2	+ 3,5	+ 9,7

Ex his igitur iam concludere poterimus, valores correctionum y et δ sequentes assumi posse $y = -12$ et $\delta = -3$, adeo vt totus valor correctus ipsius y sit $= -22$.

29. His valoribus ipsorum δ, y et π adhibitis facillimum iam euadet, non solum correctionem Longitudinis Lunae, sed etiam veros valores pro tempore coniunctionis ex singulis obseruationibus deductos assignare. Quum igitur ex obseruationibus Grenouicensibus inuentum fuerit tempus coniunctionis verum Solis et Lunae

$$20^h.\, 21'.\, 32'' - 0,02.\,\delta + 0,04.\,y + 0,85.\,\pi$$

substitutis pro δ, y et π valoribus, fiet id tempus $20^h.21'.30''$, at quum Tabulae Lunares *Mayeri* praebeant $20^h.\,23'.\,19''$, patet errorem Tabularum pro momento coniunctionis aequari $1'.\,49''$, quibus re-

 spon-

ſpondet motus Lunae relatiuus in longitudinem $1'.4''$ qui igitur correctionem Longitudinis Lunae exprimit. Simili modo obſeruationes Bononienſes praebent Tempus coni. $= 21^h.7'.5'' - 0,10.\delta + 0,13.y + 0.92\pi$ quae expreſſio in hanc abit $21^h.7'.0''$ at quum ex Tab. eſſe deberet Tempus coniunctionis $21^h.8'.40''$ deducitur hinc correctio Longitudinis $59''$, ideoque ſine ſenſibili errore haec correctio $1'.2''$ aſſumi poterit. Tempora autem coniunctionis ex ſingulis obſeruationibus concluſa iam ſe habebunt vti ſequens Tabula refert.

Tempus coniunctionis verae Solis et Lunae.

	ex initio Eclipſeos	ex fine Eclipſeos
in Caua	$19^h.51'.56''$	. . . . . .
Promont. Lezard	20. 0. 39	$20^h.0'.37''$
Grenouico	20. 21. 28	20. 21. 29
Lutetia Paris.	20. 31. 5	20. 30. 54
Bononia	21. 7. 3	21. 6. 58
Caianeburgo	22. 12. 32	22. 12. 29
Petropoli	22. 22. 51	22. 22. 45
Wardhus	22. 26. 23	22. 25. 55
Vmba	22. 38. 26	22. 38. 18
Gurief	23. 49. 21	23. 49. 25
Orenburg	24. 1. 39	24. 1. 54
Iakutsk	29. 0. 12	29. 0. 21
Hafnia	. . . . . .	21. 11. 49
Windobona	. . . . . .	21. 26. 54

Stock-

	ex fine Eclipseos
Stockholmia	21^h.33$'$.45$''$
Lunda	21. 14. 14
Gryphiswaldia	21. 16. 23
Pello	21. 57. 42
Kola	22. 33. 31
Ponoi	23. 6. 0

29. Vt nunc verae Longitudines eorum locorum, quorum ſitus Geographicus vel hucusque incognitus fuit, vel minus certe determinatus, hinc determinari poſſint, fundamenti loco ſubſternamus momenta coniunctionum pro iis locis inuenta, quorum Longitudines a meridiano Pariſino iam antea ſatis exacte determinatae ſunt, qualia igitur erunt, quae ex obſeruationibus Grenouicenſibus, Bononienſibus, Petropolitanis, Windobonenſi et Stockholmienſi deducuntur, haec autem momenta ſtatim ad Meridianum Pariſinum reducamus, atque ſic habebimus pro tempore vero coniunctionis Solis et Lunae ad meridianum Pariſinum ſequentes valores:

ex initio eclipſis	ex fine eclipſis
20^h. 30$'$. 44$''$	20^h. 30$'$. 45$''$
20. 31. 5	20. 30. 54
20. 30. 58	20. 30. 53
20. 30. 51	20. 30. 45
. . . .	20. 30. 44
. . . .	20. 30. 50.

Liquet autem momentum coniunctionis ex initio Eclipsis Parisiis obseruato deductum, incertius esse, quam vt cum caeteris in computum duci queat, vnde illud excludendum esse videtur.

30. Si igitur momenta coniunctionis pro reliquis locis inuenta, comparentur cum singulis momentis Parisinis, atque conclusionum inde deductarum sumatur medium, prodibunt Longitudines eorum locorum a meridiano Parisino sequentes:

Promontorium Lezardi	0^h.	$30'$.	$11''$	Occid.
Caianeburg	1.	41.	41	Orient.
Wardhus	1.	55.	34	.... ex obseruato initio
	1.	55.	6	ex obseru. fine
Vmba ...	2.	7.	33	
Gurjef ..	3.	18.	34	med ex omnibus
	3.	18.	37	ex fine cum momentis pro fine
Orenburg .	3.	30.	50	ex initio
	3.	31.	5	ex fine
Iakutsk ..	8.	29.	28	med. ex omnibus
	8.	29.	34	... ex fine
Caua	0.	38.	43.	Occid.
Hafnia	0.	41.	0.	Orient.
Lunda	0.	43.	25.	....
Gryphiswaldia	0.	45.	34.	....
Pello	1.	26.	53.	....
Kola	2.	2.	42.	....
Ponoi	2.	35.	11.	....

31.

31. Quo melius perſpiciatur, qua praeciſione differentiae Meridianorum modo aſſignatae gaudeant, placet pro nonnullis horum locorum Longitudines ex aliis obſeruationibus deductas breuiter recenſere. In Promontorio Lezard Emerſio I. Satellitis Iouis obſeruata eſt d. 8. Iunii 1769. temp. vero $9^h. 20'. 14''$, eadem Emerſio Stockholmiae obſeruata fuit $10^h. 53'. 15''$, Vpſaliae autem $10^h. 51'. 45''$, hinc ſi differentia Longitudinis inter Pariſios et Stockholmiam ponatur $1^h. 2'. 55''$, inter Vpſaliam vero et Pariſios $1^h. 1'. 15''$, prodibit ex comparatione obſeruationis in Promontorio Lezard factae, cum Stockholmienſi et Vpſalienſi, Longitudo huius promontorii a Meridiano Pariſino $0^h. 30'. 6''$ vel $0^h. 30'. 16''$, adeoque medium ſumendo $0^h. 30'. 11''$ praeciſe vt modo invenimus. Longitudo Caianeburgi per ſaepius obſervatas Eclipſes Satellitum Iouis inuenta eſt a Stockholmia $0^h. 38'. 40''$ adeoque a Meridiano Pariſino $1^h. 41'. 35''$, quae tantum $6''$ a noſtra concluſione differt. Pro Gurjef obſeruationes Satellitum Iouis cum Tabulis comparatae, proximae eandem praebent huius loci Longitudinem, cum ea, quam ex fine Eclipſis ibi obſeruato deduximus. Vid. Part. II. Tom. XIV. Comment. p. 169. et ſequu. Obſeruationes Satellitum Iouis a Cl. *Islenieff* in Iakutsk inſtitutae, praebent Longitudinem huius loci a Meridiano Pariſino $8^h. 29' 35''$, quae tantum vnico ſecundo differt a noſtra concluſione ex fine Eclipſis deducta. Conf. P. II. Tom. XIV. Comm. p. 308. Immerſionem I^mi^ Satellitis Iouis Cel. *Mason* in Cava

va

va obſeruauit 1769. d. 5. Aprilis $13^h. 49'. 35''$, quae ſi conferatur cum obſeruatione eiusdem immerſionis Stockholmiae inſtituta $15^h. 32'. 30''$, dat differentiam meridianorum inter Cauam et Pariſios $40'. 0''$ adeoque integro minuto primo maiorem ea, quam inuenimus, at ex obſeruatione ingreſſus Veneris ibidem inſtituta liquet, noſtram determinationem non multum vltra $30''$ eſſe erroneam, et probabile quoque eſt momentum inchoatae Eclipſis minus exacte aſſignatum fuiſſe. Praeterea noſtrae determinationes Longitudinum pro Hafnia et Lunda, circiter $30''$ ab antea cognitis differunt, per obſeruationes enim Satellitum Iouis concluſa eſt Longitudo Lundae a Pariſiis $43'. 50''$, differentia Longitudinis inter Lundam et Hafniam exiſtente $2'. 28''$, ceu ex menſuris a *Picardo* inſtitutis conſtat. Quum tamen obſeruationes Hafnienſes et Lundenſes pro fine Eclipſis egregie inter ſe conſentiant, vix quidem dubito, quin Longitudines horum locorum a nobis allatae, ad veritatem propius accedant, quam eae quae ex obſeruationibus Satellitum antea deductae ſunt. Si igitur ſupponatur Obſeruatorium Hafnienſe a Pariſino $41'. 0''$ verſus Orientem diſtare, quum Vranieburgum celebris iſte locus Obſeruatorii *Tychonis de Brahe* ab Hafnia $29''$ verſus Orientem diſtet, erit Longitudo Obſeruatorii Tychonici a Pariſiis $41'. 29''$ adeoque $40''$ minor, quam *Cel. la Lande* in ſuis ephemeridibus *Connoiſſance des temps* eam ſtatuere ſolet. Denique per obſeruationes Satellitum Iouis conſtat Longitudinem loci Pello in Lapponia a meridiano

Pariſino

Parisino esse circiter $1^h. 27'. 3''$, quae egregie convenit cum ea, quam supra inuenimus.

32. Quamuis itaque determinationes Longitudinum a nobis modo allatae, ita esse videntur comparatae, vt ad veritatem quam proxime accedant, haud tamen negare volumus, etiam eas, quae exactissimae nobis videntur correctionem $5''$ admittere posse, imprimis quum in determinandis valoribus correctionum δ, y et π rigorem Geometricum sequi non liceat. Hoc tamen pro certo affirmare audemus, etiam neglectis correctionibus δ et π, Latitudinis correctionem certe duplo fore maiorem ea, quam Rev. *P. Hell* inuenerat, quum tamen si nos eius ratiocinandi modum secuti fuissemus, eandem vel saltem non multum diuersam a sua correctionem Latitudinis inuenissemus.

33. Denique haud superfluum erit, de gradu certitudinis, quem obseruationes Eclipsium Solis circa determinandas Longitudines locorum sibi vindicant, quaedam adiicere. Vt autem distincte agamus, in genere obseruare licet, omnem incertitudinem, qua conclusiones hinc deductae afficiuntur, ex duplici promanare fonte, scilicet vel ex ipsis erroribus obseruationum, vel ex defectu Theoriae et calculi. Non quidem diffitemur obseruationes initii eclipsis erroribus ad $10''$ et vltra assurgentibus esse posse obnoxias, finem autem ad praecisionem $5''$ secundorum obseruari posse, omnes nobis largientur

Aſtronomi. Quis autem Aſtronomorum affirmare audebit, ſe de immerſione vel emerſione alicuius Satellitum Iouis intra 4 aut 5'' certum eſſe? Quae de Theoriae defectibus in computo Eclipſium Solis a nonnullis etiam magni nominis Aſtronomis adferuntur, certe non eius ſunt momenti, vt certitudinem concluſionum ex obſeruatis Eclipſibus Solis deductarum infringere valeant. Quod enim I°. incertitudinem verae figurae telluris attinet, ea adeo exiguum in calculos parallacticos habet influxum, vt maximae variationes, quae hinc in Parallaxibus Longitudinis et Latitudinis oriantur certe non duo aut tria ſecunda ſuperent. Si autem quis pro computandis parallaxibus eiusmodi adhibuerit formulas, quae vltra 15'' a veritate deuiant, hic defectus certe pro inſigni haberi meretur, qui autem non Theoriae ſed calculatori vitio verti debet. II°. Vera quantitas diametrorum Solis et Lunae pro exacte cognita non quidem haberi poteſt, huic autem incommodo facilis adfertur medela, ſi ipſa correctio, aut ſemiſummae, aut ſemidifferentiae diametrorum in computum introducatur. Quin etiam ſi has diametros exacte cognoſcere non liceat, ſola in vſum vocata correctione Latitudinis, longitudines locorum absque errore 10'' definiri poterunt. Sic ſi pro noſtro caſu ponatur tam δ quam $\pi = 0$, habebitur valor ipſius y proxime $= -18''$, ex quo fiet tempus coniunctionis Grenouicenſe $= 20^h. 21'. 31''$ et Gurjefuenſe ex obſeruato fine Eclipſis $23^h. 49' 26''$ vnde prodiret differentia meridianorum inter Grenovicum

vicum et Gurjef $3^h. 27'. 52''$, quae a ſuperius inventa vix differt. Obſeruatio finis Eclipſis in Wardhus, praebet ſub hac hypotheſi, tempus coniunctionis $= 22^h. 25'. 48''$, vnde prodibit Longitudo Wardhuſii a Grenouico $2^h. 4'. 17''$, quae cum ſuperius inuenta bene conſentit. Quod III°. ad Parallaxin Lunae ſpectat, videtur quidem eam iam adeo accurate eſſe definitam, vt vix dubium $5''$ ſupereſſe poſſit, obſeruationibus omnibus hunc in finem inſtitutis, pulcre inter ſe conſentientibus. Quicquid autem ſit ex neglecta quoque correctione Parallaxis, nullum plane incommodum eſſe metuendum exempla modo allegata manifeſto oſtendunt. Quamuis igitur correctiones δ, y et π exacte non ſint definitae, id tamen certitudinem concluſionum pro Longitudinibus Geographicis non multum turbat, modo hae correctiones ita definiantur, vt iis ſatisfaciant aequationibus, in quibus earum coefficientes ſunt praemagni. Inexſpectatum autem nemini occurrere debebit, ſi quis dum veram Longitudinem oppidi Gurjef determinare conaretur, eamque ex momento coniunctionis pro fine Eclipſis concluſo $23^h. 50'. 26''$, omni Latitudinis correctione omiſſa, concluderet eſſe $3^h. 19'. 11''$ a meridiano Pariſino, in errorem $30''$ incideret. Si vero idem perſpiceret initium Eclipſis praebere Longitudinem huius loci a Meridiano Pariſio $3^h. 16'. 44''$, certe huiusmodi diſſenſum nulla cum veriſimilitudine, vel ex errore obſeruationum, vel ex defectu Theoriae deriuare poterit. Methodum itaque determinandi longitugitudines locorum ex Eclipſibus Solis pro certiſſima habere non dubitamus, atque omne dubium, quod concluſionibus ex ea deductis ineſt, incertitudini obſeruationum tantum adſcribendum eſſe, quae tamen obſeruationes dum a peritis Aſtronomis inſtituuntur, pro fine Eclipſis non multum vltra 5'' dubiae eſſe poſſunt. Vtrum ex vnica vel binis obſeruatis Eclipſibus Satellitum Iouis, Longitudo alicuius loci ad praeciſionem 10 ne dicam 5 ſec. determinari queat (niſi id forte caſu fortuito contingat) vehementer dubito; pluribus ſaltem exemplis oſtendi poteſt, ex obſeruationibus per aliquot decennia ſuper Eclipſibus Satellitum inſtitutis, Longitudines locorum vix cum praeciſione 5'' ſtabiliri potuiſſe.

LON-

LONGITVDO OBSERVATORII PETROPOLITANI EX OBSERVATIONE ECLIPSIS SOLIS A. 1769. DETERMINATA.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

Praeter initium et finem huius Eclipſis, vti ſupra vidimus Petropoli ſatis exacte obſeruatos, Cel. Prof. *Mayer* micrometro obiectiuo ad Tubum Achromaticum *Dollondi* 7 pedum applicato, plurimas inſtituit menſuras partium lucidarum limbi Solis; quum igitur pleraſque harum obſeruationum computauerim, quaenam ex iis deduci queant concluſiones pro determinanda Longitudine obſeruatorii Petropolitani, breuiter heic exponere conſtitui. In vſum autem meum eas imprimis ſelegi obſeruationes, pro quibus diſtantiae apparentes centrorum Solis et Lunae ſeu rectae haec centra iungentes, ante et poſt coniunctionem apparentem Solis et Lunae, ad Eclipticam videbantur aeque inclinatae, quae enim ex binis quibuscunque huiusmodi obſeruationibus deducuntur expreſſiones pro tempore coniunctionis, ita ſunt comparatae, vt dum inuicem addantur, correctiones ex erroribus Latitudinis et diſtantiae centrorum Solis et Lunae oriturae ſe mutuo deſtruant, paruula remanente particula ex correctione parallaxis oriunda, quae autem quum de Parallaxi non multum ſimus dubii, quoque plane negligi poterit. Repraeſentet igitur M ⊙ N eclipticam, A B orbitam Lunae apparentem Petropoli viſam, A et B duo quaecunque loca Lunae in orbita apparenti, prior A ante coniunctionem apparentem, alter B vero poſt eandem, ſintque haec loca ita diſpoſita vt fiat angulus A ⊙ M = B ⊙ N. Hoc facto ſi correctiones Latitudinis et parallaxis vt antea indigitentur per y et π, correctio autem diſtantiae apparentis centrorum per δ, vbi δ ob ⊙ A et ⊙ B proxime aequales pro vtraque obſeruatione eundem habebit valorem, angulus denique A ⊙ M = B ⊙ N exprimatur per Φ, atque nunc ex iis quae in Diſſertat. praecedenti §. 14. monuimus, ſequitur expreſſionem pro tempore coniunctionis ex loco Lunae apparenti in A deductam, ita repraeſentari poſſe:

T. XXXI. Fig. 9.

$$T + \alpha\delta \,\mathrm{Sec.}\,\Phi - \alpha y \,\mathrm{Tang.}\,\Phi + \tfrac{\alpha\pi}{\Pi}(p' \,\mathrm{Tang.}\,\Phi + p)$$

vbi p' et p eosdem habent ſignificatus ac ante, α vero denotat numerum per quem aliquod ſpatium multiplicari debet, vt tempus inueniatur, quod Luna motu ſuo relatiuo huic ſpatio percurrendo impendit. Simili vero modo ex loco Lunae in B obſeruato tempus coniunctionis ita elicietur expreſſum:

$$T' - \alpha\delta \,\mathrm{Sec.}\,\Phi + \alpha y \,\mathrm{Tang.}\,\Phi - \tfrac{\alpha\pi}{\Pi}(p' \mp p)$$

nunc

nunc autem probe notandum eſt, valores litterarum p' et p, non amplius eosdem eſſe ac in formula praecedenti. Additis vero duabus his expreſſionibus et ex ſumma earum medio ſumto, orietur pro tempore coniunctionis ſimplex huiusmodi expreſſio: $\frac{1}{2}(T+T')+\beta\pi$ vbi vt ſupra diximus, quantitas minima $\beta\pi$, absque metu ſenſibilis erroris omitti poterit.

2. Methodus iam expoſita, inueniendi vera momenta temporis coniunctionis, tanto ſane maiorem meretur attentionem, quanto euidentius patet, etiam inſignes errores Tabularum Lunarium, certitudinem concluſionum vix infringere, adeo vt vnicum dubium quo determinationes hinc elicitae premuntur ex ipſa incertitudine obſeruationum oriatur. Negare autem non poſſumus quin huiusmodi obſeruationibus etiam ſumma induſtria et exactitudine inſtitutis ſaepius errores plurium ſecundorum ineſſe poſſint, qui errores tanto maiorem in determinationem pro tempore coniunctionis habebunt influxum, quanto propius loca A, et B diſtant a coniunctione Solis et Lunae apparenti. At vero quo propiora A et B ſunt ad momentum coniunctionis apparentis, eo minus erit errandi periculum, propter diſtantiam apparentem centrorum Solis et Lunae, circa haec loca tardius decreſcentem vel increſcentem. Ex aduerſo autem commode fit, vt licet pro locis A et B a coniunctione apparente magis remotis, ob motum Lunae velociorem facilius ſit in errores illabi, hi tamen errores in tempore coniunctionis aſſignando non nimis

nimis magnam producant mutationem. Quamuis vero quoque mediocres errores in menſuris partium lucidarum ſupponantur commiſſi, modo pro binis obſeruationibus in eundem ſenſum cadant et haud multum ſint inaequales, pro tempore coniunctionis tamen inuenietur expreſſio haud multum a veritate abludens.

3. Ex praecedenti diſſertatione conſtat momenta initii et finis Eclipſeos Grenouici obſeruata pro tempore coniunctionis has praebuiſſe expreſſiones.

ex initio $20^h.21'.17'' + 1,94.\delta - 0,96.y + 1,61.\pi$

ex fine $20.21.46 - 1,98.\delta + 1,04.y - 0,09.\pi$

ex quibus medium ſumendo prodibit tempus coniunctionis

$$20^h.21'.32'' - 0,02.\delta + 0,04.y + 0,85.\pi$$

vbi quum coefficientes correctionum δ et y ſint quam minimi, hos terminos tuto negligere poterimus, adeo vt iam ſit Tempus coniunctionis verum Solis et Lunae pro Meridiano Grenouicenſi $20^h.21'.32'' + 0,85.\pi$. Quo autem certior euaderem de certitudine huius concluſionis, ex obſeruationibus a Celeb. *Maskelyne* circa partes lucidas inſtitutis, valores pro tempore coniunctionis elicere conſtitui. Hunc in finem imprimis ſelegi binas ſequentes obſeruationes:

Temp. Grenou. ver.	Pars lucida
$19^h.22'.13''$	$15'.40'',5$
37.56	15.49,1

Calcu-

Calculo autem ſubducto pro his temporibus ſequentia inueni elementa.

Temp. ver.	Semid. Lunae apparens	Latit. Lunae	Paral. Latit.	Paral. Longit.
$19^h.22'.13''$	$1013'',4$	$59'.\ 7'',0$	2561, 8	1851, 9
37.56	1014, 0	58. 12, 9	2498, 5	1803, 5

vbi notaſſe ſufficiat Latitudinem Lunae e Tabulis depromtam, $10''$ a nobis diminutam eſſe, quod hoc in negotio nullam producit mutationem.

Hinc ex priori obſeruatione deducitur tempus coniunctionis

$$20^h.20'.19''+8,00.\delta-7,82.y+6,30.\pi$$

ex poſteriori vero

$$20^h.22'.45''-8,15.\delta+7,97.y-4,59.\pi$$

ideoque medium ſumendo

$$20^h.21'.32''-0,07.\delta+0,07.y+0,85.\pi$$

vel reiectis correctionibus ex δ et y profluentibus: $20^h.21'.32''+0,85.\pi$ prorſus vt ante. Videtur ergo hanc expreſſionem pro tempore coniunctionis Grenouicenſi, maxime indubitatam eſſe, vnde cum ea ſimiles expreſſiones pro eodem tempore ad meridianum Petropolitanum computato, tuto conferre licebit.

4. Inter obſeruationes a Celeb. *Mayero* inſtitutas, non niſi 14 inueniuntur eſſe correſpondentes, ſeu tales, vt binis quibusque idem reſpondeat angulus Φ, has autem obſeruationes, vna cum reliquis elementis ex calculo deductis, ſequenti Tabella ob oculos ponere, viſum eſt.

Temp. Petrop. ver. ante coni. appar.		Pars. Luc.	Diam. ☽ appar.	Latit. ☽	Par. Lat.	Par. Long
I.	$21^h. 18'. 51''$	$28'. 6'',2$	$1016'',7$	$59'.32'',9$	$2494'',1$	$882'',6$
II.	25. 32	25. 18, 2	1016, 9	59. 9, 9	2476, 0	845, 0
III.	30. 50	23. 25, 0	1017, 0	58. 51, 6	2461, 9	814, 8
IV.	34. 30	22. 8, 3	1017, 1	58. 39, 1	2452, 3	793, 3
V.	43. 19	19. 21, 1	1017, 2	58. 8, 6	2429, 7	740, 9
VI.	45. 48	18. 42, 3	1017, 3	58. 0, 1	2423, 4	726, 0
VII.	51. 45	17. 22, 8	1017, 4	57. 39, 5	2408, 3	688, 9
post.	coni. appar.					
VII.	22. 18. 28	16. 40, 5	1017, 7	56. 5, 8	2344, 8	513, 6
VI.	24. 51	17. 47, 6	1017, 7	55. 45, 6	2332, 4	473, 7
V.	28. 30	18. 35, 6	1017, 8	55. 33, 0	2324, 5	449, 1
IV.	37. 25	21. 3, 0	1018, 0	55. 2, 2	2306, 4	387, 8
III.	40. 38	22. 6, 2	1018, 1	54. 51, 2	2300, 6	365, 3
II.	43. 25	22. 54, 4	1018, 1	54. 41, 6	2294, 7	345, 9
I.	53. 34	26. 35, 6	1018, 2	54. 6, 1	2275, 9	274, 0

Monuiſſe autem heic ſufficiat, calculo inſtituto partibus lucidis quoque paruulam additam eſſe correctionem, propter effectum refractionis, quo fit vt hae partes viſui minores offerantur, quam reuera ſunt, quamuis hanc quoque correctiunculam ob rationes § 2 allegatas tuto negligere licuiſſet.

5. Ex hiſce elementis ſequentes iam deducuntur expreſſiones pro tempore coniunctionis, in quibus recenſendis eas, quae ex obſeruationibus correſpondentibus deducuntur, ſemper coniunctim adferemus:

Tempus

Tempus coniunctionis ex singulis obseruationibus conclusum.

I. $$\left.\begin{array}{l} 22^h.22'.33''+2,12.\delta-1,29.y+1,27.\pi \\ 22.\ 23.\ 12\ -2,03.\delta+1,21.y-0,62.\pi \end{array}\right\}$$

II. $$\left.\begin{array}{l} 22.\ 22.\ 16\ +2,31.\delta-1,57.y+1,45.\pi \\ 22.\ 23\ \ 25\ -2,31.\delta+1,58.y-0,83.\pi \end{array}\right\}$$

III. $$\left.\begin{array}{l} 22.\ 22.\ 21\ +2,45.\delta-1,78.y+1,57.\pi \\ 22.\ 23.\ 10\ -2,39.\delta+1,70.y-0,89.\pi \end{array}\right\}$$

IV. $$\left.\begin{array}{l} 22.\ 22.\ 19\ +2,61.\delta-1,99.y+1,69.\pi \\ 22.\ 23.\ 19\ -2,54.\delta+1,89.y-1,01.\pi \end{array}\right\}$$

V. $$\left.\begin{array}{l} 22.\ 21.\ 54\ +3,30.\delta-2,83.y+2,22.\pi \\ 22.\ 23.\ 50\ -3,21.\delta+2,73.y-1,52.\pi \end{array}\right\}$$

VI. $$\left.\begin{array}{l} 22.\ 21.\ 49\ +3,64.\delta-3,22.y+2,46.\pi \\ 22.\ 23.\ 33\ -3,69.\delta+3,29\ y-1,71.\pi \end{array}\right\}$$

VII. $$\left.\begin{array}{l} 22.\ 21.\ 43\ +5,02.\delta-4,73.y+3,42.\pi \\ 22.\ 23.\ 28\ -5,12.\delta+4,82.y-2,84.\pi \end{array}\right\}$$

Tempus coniunctionis quod medium sumendo prodit.

I. $22^h.22'.52''+0,04.\delta-0,04.y+0,34.\pi$

II. $22.\ 22.\ 50\ -0,00.\delta+0,00.y+0,31.\pi$

III. $22.\ 22.\ 45\ +0,03.\delta-0,04.y+0,34.\pi$

IV. $22^h.22'.49''+0,04.\delta-0,05.y+0,34.\pi$
V. $22.\ 22.\ 52\ +0,04.\delta-0,05.y+0,35.\pi$
VI. $22.\ 22.41\ -0,03.\delta+0,03\ y+0,37.\pi$
VII. $22.\ 22.\ 35\ -0,05.\delta+0,05.y+0,29.\pi$

Hinc autem per medium colligitur tempus verum coniunctionis Solis et Lunae ad meridianum Petropolitanum

$$22^h.\ 21'.\ 47''+0,01.\ \delta-0,01.y+0,33.\pi$$

ſeu reiectis δ et y $22^h.\ 21'.\ 47''+0,33\ \pi$, at pro meridiano Grenonicenſi inuenimus $20^h.\ 21'.\ 32''+0,85.\pi$ ex quo habebitur differentia Meridianorum inter Grenouicum et Petropolin $2^h.\ 1'.\ 15''-0,52.\pi$, ideoque ſi π ſtatuatur $=-3$ erit Longitudo Obſeruatorii Petropolitani a meridiano Pariſino $1^h.\ 52'.\ 1''$ ſin autem π aſſumatur $=0$ prodibit ea $1^h.\ 51'.\ 59''$. Ceterum ſi in expreſſionibus pro tempore coniunctionis Grenouicenſi, loco y eius valor ſubſtituatur, prodibit hoc tempus $20^h.\ 21'.\ 31''+0,85.\pi$, vnde Longitudo obſeruatorii Petropolitani vno ſecundo augebitur. Deinde quum conclufio ſeptima a reliquis aliquantum differat, ſi ea excluſa ex reliquis medium ſumatur, erit tempus coniunctionis Petropolitanum: $22^h.\ 22'.\ 48''+0,34.\pi$ hincque differentia meridianorum inter obſeruatorium Grenouicenſe et Petropolitanum $2^h.\ 1'\ 17''-0,51.\pi$, quae poſito $\pi=-3$, dat Longitudinem Petropolis a meridiano Pariſino $1^h.\ 52'.\ 3''$, at ſumto $\pi=0$ eandem praebet $1^h.\ 52'.\ 1''$, quae a communiter recepta non differt.

6. Circa

6. Circa ſignificatum litterae δ heic obſeruari meretur, quod is plane diuerſus ſit ab eo, quem huic litterae in praecedenti diſſertatione tribuimus, ibi enim δ ſignificabat correctionem ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae, heic vero δ generaliter denotat correctionem cuiuscunque diſtantiae apparentis centrorum Solis et Lunae, quae igitur cum de Phaſi aliqua obſeruata quaeſtio eſt, inuoluere putanda eſt non modo correctionem ſemidifferentiae diametrorum Solis et Lunae, ſed etiam partis lucidae menſuratae, ſi igitur correctio ſemidiametri Lunaris exprimatur per a, ſemidiametri vero Solaris per b, et pars lucida menſurata dicatur P, habebitur pro huiusmodi caſu $\delta = a - b(1 - \frac{P}{d})$ ſignificante d ſemidiametrum Solis. Quodſi igitur de valore ipſius δ ex praecedenti Diſſertatione ſatis eſſemus certi, tamen inde minime ſequeretur, hunc valorem quantitati δ heic adhibitae competere. Ex obſeruationibus autem modo allatis valorem quantitatis δ eruere vellae, res ſane foret difficillima ob ineuitabiles errores obſeruationum, id tamen notaſſe iuuabit, ſi hunc valorem exacte determinare liceret, tum correctiones ſemidiametri tam Solis, quam Lunae ſeorſim aſſignari poſſe.

7 Quamquam ſitus obſeruatorii Petropolitani ex obſeruatis Eclipſibus Satellitum Iouis iam antea ſatis exacte definitus ſit, noſtra tamen opera in computandis obſeruationibus memoratis eo minus erit ſuperflua, quod hoc imprimis argumento euictum

 ſit,

ſit, Longitudines locorum ex Eclipſibus Solis ſaltem ad praeciſionem 5″ definiri poſſe, etiamſi vel maxime omnes correctiones Elementorum Aſtronomicorum plane negligantur. Maximus quidem diſſenſus, qui in expreſſionibus noſtris pro tempore coniunctionis occurrit, ad 17″ aſſurgit, qui tamen reiecta VII concluſione ad 11″ reducitur, iam vero vnicuique diiudicandum relinquo, an non pro inveſtiganda Longitudine locorum ex Eclipſibus Satellitum Iouis, dum 12 obſeruationes inter ſe comparantur, diſſenſus ad 10″ et vltra aſſurgentes nunquam non prodire ſoleant? Hoc ipſo autem nihil methodo vulgo receptae, longitudines locorum per Eclipſes Satellitum definiendi, detrahere volo; ſed eorum tantum refellere opinionem, qui Eclipſibus Solaribus ad determinandas Longitudines locorum etiam deliquia Lunae praeferre non dubitant, dum omnes concluſiones, quae ex prioribus deducuntur pro incertiſſimis habent.

EX-

EXPOSITIO OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM A. 1770. IN VRBE ZARICIN INSTITVTARVM.

a

PETRO INOCHODSOW.

I.

Verificatio Quadrantis ad horizontem.

Notatis in baculo duabus metis centro tubi immobilis, in vtroque Quadrantis ſitu recto et inverſo reſpondentibus, hocque baculo ad diſtantiam $\frac{2}{3}$ Werſtarum defixo, cepi altitudines harum metarum.

In ſitu quadrantis recto altitudo metae ſuperioris	$0°.$	$11'.$	$36''$
In ſitu inuerſo, altitudo inferioris	$0.$	$9.$	$26, 7$
Differentia		$2.$	$9, 3$
Vnde error Quadrantis		$1.$	$4, 6.$

Haec operatio inſtituta fuit die Aprilis 6^{to}, vet. ſtyl. Barometro ante operationem monſtrante 28 Dig. $\frac{2}{3}$ Lin. poſt operationem 28 Dig. $\frac{1}{2}$ Lin.

Die 17^{mo} Aprilis in diſtantia 300 perticarum collocaui aſſerem, factis in ipſo vt ante duabus metis, atque reperi altitudinem

in

in ſitu recto metae ſuperioris 0°. 54′. 3″ aëre
in ſitu inuerſo metae inferioris 0. 52. 5 vndulante
vnde error Quadr. 0′. 59″.

Barometrum monſtrabat ante operationem 28 Dig. $3\frac{3}{4}$ Lin., poſt operationem 28 Dig. $3\frac{1}{6}$ Lin.

Die 2 Maii cepi altitudines earundem metarum

in ſitu recto	0°. 53′. 50″
in ſitu inuerſo	0. 51. 36
vnde error Quadrantis	1′. 7.

Altitudo Barometri ante operat. 27 Dig. $10\frac{2}{3}$ Lin., poſt operationem 27 Dig. $10\frac{1}{6}$ Lin.

Die 8. Maii eorundem ſignorum inueni altitudines

in ſitu recto	0°. 54′. 9″
in ſitu inuerſo	0. 51. 59
Ex quibus prodit error	1. 5.

Altit. Barometri ante operat. 28 Dig. $1\frac{7}{8}$ Lin. poſt 28 Dig. $1\frac{5}{6}$ Lin.

Die 18. Maii Earundem metarum altitudines

in ſitu recto	0°. 54′. 5″, 8
in ſitu inuerſo	0. 52. 1, 7
vnde error Quadrantis	1. 2.

Barometrum monſtrabat ante operationem 27 Dig. $11\frac{2}{3}$ Lin. poſt operationem 27 Dig. $11\frac{1}{3}$ Lin.

Ex his quinque operationibus error quadrantis medius erit − 1′. 3″, 5, vel reiiciendo ſecundam opera-

operationem, quae propter vndulationem aëris eſt ſubdubia, prodibit error Quadrantis $-$ 1'. 4'', 6.

Verificatio Quadrantis ad Zenit.

Altitudo	Limbo ad Occid. G.	M.	S.	Limbo ad Orient. G.	M.	S.	Error
δ Vrſae maioris	80.	35.	21	99.	47.	3	11'. 12''
ε	81.	41.	1	98.	41.	17	11. 9
ζ	82.	45.	40	97.	36.	31	11. 5½
η	88.	45.	42	91.	56.	38	11. 10.

Ex his ſumendo medium Arithmeticum erit error 11'. 9'', 1. Nunc ſi ſubtrahantur 10 minuta prima, quae in limbo Quadrantis deficiunt, ideoque hac quantitate indicatas altitudines augent, erit error ex hac verificatione $-$ 1'. 9'', 1; erat autem ex verificatione ad horizontem $-$ 1'. 4'', 6 repertus, conſequenter ex vtraque rectificatione 1'. 6'', 8, qui ex captis altitudinibus eſt auferendus, ſed poſt 78° et 50', 11'. 6'', 8 ſubtrahenda erunt.

Craſſitiem fili micrometri etiam diuerſam inveni, ſed ex multis et repetitis obſeruationibus prodiit ea 13''.

II. Determinatio Latitudinis vrbis Zaricin.

Ex ingenti numero obſeruationum ſuper altitudines meridianas Solis et fixarum inſtitutarum, quaedam tantum ſelectae fuerunt, ad inueniendam huius loci Latitudinem. Et quum concluſiones ex iis deductae egregie inter ſe conueniant, confidimus determinationem Latitudinis ex ipsis petitam, quam proxime ad veritatem accedere. Primum itaque quum diebus a 21. Maii vet. St. ad 2. Iunii obseruatae fuerint altitudines limbi Solis inferioris, considerandum est veras altitudines centri Solis inueniri si ex valore semidiametri Solaris pro hoc tempore, subtrahatur tum correctio instrumenti, cum refractio parallaxi Solari minuta, atque differentia ad obseruatam altitudinem limbi inferioris addatur. Inuenitur autem quantitatem addendam pro his diebus fore 14'. 17'', quare iam facillimum erit ex obseruatis his altitudinibus, Latitudinem loci deriuare, quod sequenti Schemate exhibetur, vbi notasse iuuabit pro computanda Declinatione Solis suppositam fuisse Longitudinem Zaricini a Parisiis 2^h. 48'.

	Altit. limbi inf. obseru.	Altit. vera centri Solis	Decl. ☉lis	Eleuatio Poli
Maii 21.	63°. 8'. 40''	63°. 22'. 57''	22°. 5'. 24''	48°. 42'. 27''
25.	63. 38. 16	63. 52. 33	22. 34. 46	48. 42. 13
27.	63. 50. 40	64. 4. 57	22. 47. 6	48. 42. 9
28.	63. 56. 9	64. 10. 26	22. 52. 40	48. 42. 14
Iunii 2.	64. 18. 4	64. 32. 21	23. 14. 28	48. 42. 7
			Medium	48. 42. 14.

Sequentibus diebus a 2. Iunii vsque ad 26. captae fuerunt altitudines limbi Solis superioris, vt igitur ex iis verae altitudines centri deducantur, obseruasse sufficiat ex altitudinibus obseruatis constanter subtrahi debere 17'. 16'', binis diebus 25 et 26. Iunii exceptis, pro quibus 17'. 17'' subtrahenda erunt.

Iunii

	Altit. limbi Sup.	Altit. centri ☉lis	Declin. ☉lis	Eleuatio Poli
Iunii 3	64°. 52'. 35"	64°. 35'. 19"	23°. 17'. 36"	48°. 42'. 17"
6	64. 59. 18	64. 42. 2	23. 24. 33	48. 42. 31
7	65. 1. 4	64. 43. 48	23. 26. 4	48. 42. 16
8	65. 1. 55	64. 44. 39	23. 27. 9	48. 42. 30
9	65. 2. 40	64. 45. 24	23. 27. 49	48. 42. 25
10	65. 2. 58	64. 45. 42	23. 28. 6	48. 42. 24
13	65. 1. 9	64. 43. 53	23. 26. 21	48. 42. 28
14	64. 59. 30	64. 42. 14	23. 24. 56	48. 42. 42
16	64. 55. 29	64. 38. 13	23. 20. 52	48. 42. 39
18	64. 49. 48	64. 32. 32	23. 15. 14	48. 42. 42
19	64. 46. 23	64. 29. 7	23. 11. 46	48. 42. 39
22	64. 33. 37	64. 16. 21	22. 59. 1	48. 42. 40
24	64. 23. 26	64. 6. 10	22. 48. 29	48. 42. 19
25	64. 17. 32	64. 0. 15	22. 42. 37	48. 42. 22
26	64. 11. 17	63. 54. 0	22. 36. 22	48. 42. 22
			Medium	48. 42. 29

Si igitur ex omnibus his viginti obferuationibus altitudinum Solis medium fumatur, prodibit eleuatio Poli Zaricini 48°. 42'. 25". Progrediamur vero nunc ad ftellas fixas, quarum altitudines obferuatae funt, in earum autem numero primum occurrit Regulus, cuius Declinatio quum ineunte anno 1770 fuerit 13°. 5'. 8", pro die vero 10 Aprilis inueniatur eius Deuiatio − 7", 3, Praeceffio − 4,9 et Aberratio — 3", 1, fimilique ratione pro die 24, deuiatio − 7, 3, praeceffio − 4, 9 et aberratio − 3, 1; nunc ex eius obferuatis altitudinibus, determinationes latitudinis loci facile peti poffunt.

	Altit. obſeruata	Altit. vera	Decl. app. Reguli	Eleuat. Poli
d. 10. Apr.	54°. 24′. 37″, 5	54°. 22′. 50″	13°. 4′. 53″	48°. 42′. 3″
d. 17.	54. 24. 40	54. 22. 53	13. 4. 53	48. 42. 0
20.	54. 24. 39	54. 22. 52	13. 4. 54	48. 42. 2
21.	54. 24. 37	54. 22. 50	13. 4. 54	48. 42. 4
24.	54. 24. 33	54. 22. 46	13. 4. 54	48. 42. 8
			medium	48°. 42′. 3″.

Regulum excipiat Arcturus, cuius declinatio pro Anno 1770. fuit 20°. 23′. 13″, ad diem vero 1 Maii habetur eius deuiatio − 3, 6; Praec. − 6, 5; Aberratio + 4″, 3; porro pro die 9 Iunii deuiatio − 3″, 3; praeceſſio − 9, 0 et aberratio + 10, 6, quibus obſeruatis determinatio Latitudinis loci ita ſe habebit.

	Altit. obſeruata	Altit. vera	Declin. app.	Latitudo loci
d. 1. Maii	61°. 42′. 39″	61°. 41′. 1″	20°. 23′. 7″	48°. 42′. 6″
4.	61. 42. 41	61. 41. 3	20. 23. 8	48. 42. 5
7.	61. 42. 49	61. 41. 11	20. 23. 8	48. 41 57
12.	61. 42. 47	61. 41. 9	20. 23. 9	48. 42. 0
13.	61. 42. 44	61. 41. 6	20. 23. 9	48. 42. 3
24.	61. 42. 45	61. 41. 7	20. 23. 10	48. 42. 3
26.	61. 42. 37	61. 40. 59	20. 23. 11	48. 42. 12
2. Iunii	61. 42. 45	61. 41. 7	20. 23. 11	48. 42. 4
3.	61. 42. 46	61. 41. 8	20. 23. 11	48. 42. 3
8.	61. 42. 44	61. 41. 6	20. 23. 12	48. 42. 6
9.	61. 42. 47	61. 41. 9	20. 23. 12	48. 42. 3
			Medium	48. 42. 4

Pro

Pro calculo Latitudinis ex obſeruationibus ε Bootis ineundo obſeruamus fuiſſe A. 1770. eius Declinationem 28°. 3′. 19″ Bor., porro vero ad diem 1. Maii Deuiat. - 2, 6, Praec. - 5, 3 et Aberr. - 1, 8 atque ad diem 9. Iunii Deuiat. - 2, 4, Praec. - 7, 7 et Aberr. + 7, 0.

	Altit. obſeru.	Altit. vera	Declin. app.	Latit. loci
d. 1. Maii	69°. 22′. 20″	69°. 20′. 52″	28°. 3′. 9″	48°. 42′. 17″
4.	69. 22. 14	69. 20. 46	28. 3. 10	48. 42. 24
20.	69. 22. 20	69. 20. 52	28. 3. 13	48. 42. 21
1. Iunii	69. 22. 19	69. 20. 51	28. 3. 15	48. 42. 24
2.	69. 22. 24	69. 20. 56	28. 3. 15	48. 42. 19
6.	69. 22. 33	69. 21. 5	28. 3. 15	48. 42. 10
9.	69. 22. 27	69. 20. 59	28. 3. 16	48. 42. 17
			Medium	48. 42. 19

Pro α Coronae Borealis habetur Declinatio ineunte A. 1770 27°. 30′. 9″ Bor., pro die autem 16 Maii Deuiat — 0, 9 , Praec. — 4, 9 et aberr. — 0, 3, ſimiliter pro die 6 Iunii deuiat. — 0, 7 Praeces. — 5, 8 et Aberr. + 4, 9.

	Altit. obſeru.	Altit. vera	Decl. app.	Latitudo loci
16 Maii	68°. 49′. 25″,½	68°. 47′. 57″	27°. 30′. 3″	48°. 42′. 6″
24	68. 49. 19	68. 47. 50	27. 30. 5	48. 42. 15
29.	68. 49. 26	68. 47. 57	27. 30. 6	48. 42. 9
1 Iunii	68. 49. 30	68. 48. 1	27. 30. 7	48. 42. 6
3.	68. 49. 30	68. 48. 1	27. 30. 7	48. 42. 6
5.	68. 49. 24	68. 47. 55	27. 30. 8	48. 42. 13
6.	68. 49. 22½	68. 47. 54	27. 30. 8	48. 42. 14
			medium	48. 42. 10

Adiiciamus denique quasdam altitudines ζ Bootis, pro qua erat Decl. A. 1770. 14°. 43′. 39″ Bor, ad diem vero 2 Iunii deuiat. — 2, 5, Praec. — 7, 1 et aberrat. + 2, 4 ſimiliterque pro die 9 Iunii, Deuiat. vt ante, Praeces — 7, 4 et Aberratio + 3, 7.

	Alt. obſeru.	Altit. vera	Decl. app.	Eleuatio Poli
d. 2 Iunii	56°. 2′. 50″	56°. 1′. 5″	14°. 43′. 32″	48°. 42′. 27″
3	56. 2. 45	56. 1. 0	14. 43. 32	48. 42. 32
5	56. 2. 41	56. 0. 56	14. 43. 33	48. 42. 37
6	56. 2. 52	56. 1. 7	14. 43. 33	48. 42. 26
8	56. 2. 55	56. 1. 10	14. 43. 33	48. 42. 23
9	56. 2. 56	56. 1. 11	14. 43. 33	48. 42. 22
			medium	48. 42. 28

Si igitur ex omnibus his determinationibus, quas ex altitudinibus fixarum deduximus, medium ſumatur prodibit Eleuatio Poli pro Zaricino 48°. 42′. 14″, quum vero obſeruationes altitudinum Solis dediſſent 48°. 42′. 25″, medium ex his ſumendo, ſine ſenſibili errore ea ſtatui poſſe videtur 48°. 42′. 20″, praeſertim quum plures aliae obſeruationes fixarum confirment eam aliquanto eſſe maiorem, quam quae ex obſeruationibus Arcturi et Reguli ſequeretur.

III. Obſeruationes pro Longitudine vrbis Zaricin determinanda inſtitutae.

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{18}{29}$ Martii meridies medius ex altit. Solis correſp.	0^h. 0′ 20″, 9	
Correctio meridiei	— 17, 1	
Meridies verus.	0^h. 0′. 3″, 8	

Die

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{20}{31}$ Martii meridies ex altit. corresp.	$0^h.\ 0'.25'',1$	
Correctio merid.	$-17,\ 2$	
Meridies verus.	0. 0. 7, 9	
Die $\frac{18}{29}$ Martii *Imm. II. Sat. Iouis* obseruata Telescopio Gregoriano duorum circiter pedum.	13. 57. 26	$13^h.57'.21''$
Tempore obseruationis aer erat tranquillus, sed circa horizontem vaporosus, vt nullum plane fasciarum vestigium videre licuerit. Minutis primis 7 elapsis, Iouis altitudo 8°. 37½'.		
Die $\frac{25\ \textit{Martii}}{5\ \textit{April}}$ meridies ex ex altit. corresp.	0. 0. 24, 3	
Correctio meridiei	$-17,\ 1$	
Meridies verus	0. 0. 7, 2	
Die $\frac{26\ \textit{Martii}}{6\ \textit{April}}$ meridies ex altit. corresp.	0. 0. 17, 9	
Correctio meridiei	$-16,\ 3$	
Meridies verus	0. 0. 1, 6	
Die $\frac{25\ \textit{Martii}}{5\ \textit{April}}$ *Imm. II. Sat.* Satelles splendorem suum		
amittit	16. 35. 17	16. 35. 14
occultatur	35. 49	35. 46
extra omne dubium immersus	16. 36. 2	35. 59

Obser-

Obſeruatio inſtituta Teleſcopio Gregoriano. Faſciae Iouis confuſe videbantur. Tempore obſeruationis aer erat tranquillus, ſed circa horizontem, vti hic ſemper fere fieri ſolet, vaporibus aſcendendibus ex *Volga* et lacubus trans *Volgam* ſitis, inſpiſſatus; nihilominus haec obſeruatio videtur bona.

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{5}{16}$ Aprilis meridies ex altit. correſp.	$0^h. 0'. 21'', 1$	
Correctio meridiei	$-14, 2$	
Meridies verus	0. 0. 6, 9	
Die $\frac{7}{18}$ Aprilis meridies ex altit. correſp.	0. 0. 20, 5	
Correctio meridiei	$-16, 2$	
Meridies verus	0. 0. 4, 3	
Die $\frac{6}{17}$ Aprilis *Imm. I. Satellitis Iouis*		
Imminutio lucis ſenſibilis	16. 37. 58	16. 37. 53
Satelles immergi videtur.	38. 28	38. 23
Extra omne dubium immerſus.	38. 34	38. 29
Obſeruatio inſtituta Teleſcopio Gregoriano, altitudo Iovis poſt obſeruationem 17°. 38'.		
Die $\frac{11}{22}$ Aprilis meridies ex altit correſp.	0. 0. 28, 9	
Correctio meridiei	$-13\ 7$	
Meridies verus	0. 0. 15, 2	

Die

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{12}{23}$ Aprilis meridies ex altitud. corresp.	$0^h. 0'. 30'',8$	
Correctio Meridiei	$-12, 8$	
Meridies verus	$0. 0. 18, 0$	
Die $\frac{11}{22}$ *Imm. III. Sat. Iouis*		
Decrementum lucis sensibile	13. 59. 30	13. 59. 13
Immergi videtur	14. 0. 26	14. 0. 9
Iterum apparet	14. 0. 30	14. 0. 13
Immersio perfecta	14. 0. 36	14. 0. 19

Tempore obseruationis aer tranquillus. Altitudo Iouis post obseruationem $16°. 12'$. Emersionem obseruare non licuit.

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{15}{26}$ Aprilis meridies ex altit. corresp.	$0^h. 0'.47'',0$	
Correctio meridiei	$-12, 3$	
Meridies verus	$0. 0. 34, 7$	
Die $\frac{16}{27}$ Aprilis meridies ex altit. corresp.	$0. 0. 50, 2$	
Correctio meridiei	$-12, 7$	
Meridies verus	$0. 0. 37. 5$	
Die $\frac{15}{26}$ Aprilis *Imm. I. Satellitis Iouis* Tubo *Dollondiano* 12 ped. obseruata	$13^h. 1'. 43''$	$13^h. 1'. 7''$
Tempore obseruationis aer circa horizontem erat vapo-		

	Temp. Pend.	Temp. ver.
rofus. Altitudo Iouis poft obferuationem erat $13\frac{1}{2}^{\circ}$.		
Die $\frac{19}{30}$ Aprilis meridies ex altit. correfp.	$0^h.\ 1'.12'',7$	
Correctio meridiei	$-12,8$	
Meridies verus	$0.\ 0.\ 59,\ 9$	
Die $\frac{20}{1}$ $\frac{Aprilis}{Maii}$ merid. ex altit. correfp.	$0.\ 1.\ 23,\ 2$	
Correctio meridiei	$11,\ 6$	
Meridies verus	$0.\ 1.\ 11,\ 6$	
Die $\frac{18}{29}$ Aprilis Occultatio ftellae fixae a Luna	$8^h.39'.28''$	$8^h.38'.33''$
Haec obferuatio dubia eft, ob nubeculam per eam difci Lunaris partem, vbi occultatio obferuata propulfam.		
Die $\frac{19}{25}$ Aprilis *Imm. II. Satellitis Iouis*		
Satelles immergi videtur	13. 43. 40	13. 42. 33
Immerfio certe contigit	43. 51	42. 44
Altitudo Iouis poft obfervationem $17^{\circ}.\ 8'$. Aer tranquillus, fed ad horizontem vaporofus.		
Die $\frac{21}{1}$ $\frac{Maii}{Iunii}$ meridies ex altit correfp.	$0.\ 5.\ 55,\ 6$	
Correctio meridiei	$-\ 5,\ 6$	
Meridies verus	$0.\ 5.\ 50,\ 0$	

Die

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{23}{3}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iunii}}$ meridies ex altit. corresp.	$0^h.\ 6'.\ 43'',5$	
Correctio meridiei	$-\ 4,\ 9$	
Meridies verus	$0.\ 6.\ 38,\ 6$	
Die $\frac{22}{2}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iunii}}$ Occultatio fixae a Luna obseruata	$9^h.17'.45''$	$9^h.11'.22''$
Dubium adest $6''$ in excessu.		
Die $\frac{8}{19}$ Iunii meridies ex altit. corresp.	$0.\ 13.\ 55,\ 3$	
Correctio meridiei	$-\ 0,\ 6$	
Meridies verus	$0.\ 13.\ 54,\ 7$	
Die $\frac{9}{20}$ Iunii meridies ex altit. corresp.	$0.\ 14.\ 22,\ 7$	
Correctio meridiei	$-\ 0,\ 3$	
Meridies verus	$0.\ 14.\ 22,\ 4$	
Die $\frac{10}{21}$ Iunii meridies ex altit. corresp.	$0.\ 14.\ 48,\ 5$	
Die $\frac{8}{19}$ Iunii *Emersio II. Satellitis Iouis*		
Emersionis initium	10. 23. 40	10. 9. 33
Satelles distincte videtur	10. 24. 26	10. 10. 19
Obseruatio facta Tubo Dollondiano. Tempore obseruationis aer erat tranquillus. Altitudo Iouis post obseruationem $17°.53'$. Tres fasciae in disco Iouis videbantur, sed non satis distincte.		

	Temp. Pend	Temp. ver.
Die 9/20 Iunii *Emersio I. Satellitis Iouis.*		
Emersio incipit	$12^h. 8'. 27''$	$11^h. 53'. 51''$
Satellitem video distincte.	9. 12	54. 36
Altitudo Iouis post obseruationem 17°. 46', fasciae vt praecedenti die videbantur.		
Die 16/27 Iunii meridies ex altit. corresp.	0. 17. 20, 0	
Correctio meridiei	+ 1, 2	
Meridies verus	0. 17. 21, 2	
Die 22/3 Iunii/Iulii meridies ex altit. corresp.	0. 19. 51, 0	
Correctio meridiei	+ 2, 8	
Meridies verus	0. 19. 53, 8	
Die 26/7 Iunii/Iulii meridies ex altit. corresp.	0. 21. 27, 2	
Correctio meridiei	+ 3, 7	
Meridies verus	0. 21. 30, 9	
Die 18/29 *Emersio I. Sat. Iouis* obseruata.	8. 34. 33	8. 16. 11
Haec obseruatio dubia, satelles enim iam satis distincte oculis repraesentabatur, cum hoc momentum signatum fuit.		
Die 25/6 Iunii/Iulii *Emersio I. Sat. Iouis.*		

Initium

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Initium emerſionis	$10^h. 31'. 12''$	$10^h. 9'. 55''$.
Satellitem diſtincte video	32. 8	10. 10. 51
Obſeruatio inſtituta Tubo Dollondiano. Quinque faſciae in Ioue videbantur, ſed non ſatis diſtincte. Altitudo Iouis $18°. 54'$.		
Die $\frac{9}{20}$ Iulii meridies ex altit. correſp.	0. 0. 39, 1	
Correctio meridiei	+ 6, 9	
Meridies verus	0. 0. 46, 0	
Die $\frac{12}{23}$ Iulii meridies ex altit. correſp.	0. 0. 31	
Correctio meridiei	+ 7, 3	
Meridies verus	0. 0. 38, 3	
Die $\frac{11}{22}$ Iulii *Emerſio I. Satellitis Iouis*		
Initium emerſionis	8. 28. 13	8. 27 33
Satelles diſtincte videtur	28. 53	28. 13
Obſeruatio inſtituta Tubo *Dollondiano*, tempore obſeruationis ad plagas horizontis Septentrionales et Orientales nubes atrae, tonitru et fulgur aere vaporoſo exiſtente. Altitudo *I*ouis $19°. 3'$. Quinque faſciae confuſe videbantur.		

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{17}{28}$ Iulii meridies ex altit. corresp.	$0^h. 0'. 9''$	
Correctio meridiei	+ 8, 2	
Meridies verus	0. 0. 17, 2	
Die $\frac{20}{31}$ Iulii meridies ex altit. corresp.	11. 59. 47, 6	
Correctio meridiei	+ 9, 4	
Meridies verus	11. 59. 57, 0	
Die $\frac{18}{29}$ Iulii *Emersio I. Satellitis Iouis.*		
Emersio incipit	10. 22. 48	$10^h.22'.40''$
Satelles distincte splendet	23. 40	23. 32

Obseruatio facta Telescopio Gregoriano. Altitudo Iouis $13°. 14'$. Aere post pluuiam admodum vaporoso.

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Die $\frac{11}{22}$ Augusti meridies ex altit. corresp.	$11^h.54'.34'',3$	
Correctio meridiei	+ 14, 5	
Meridies verus	11. 54. 48, 8	
Die $\frac{12}{23}$ Augusti meridies ex altit. corresp.	11. 54. 11, 8	
Correct. meridiei	+ 13, 6	
Meridies verus	11. 54. 25, 4	
Die $\frac{11}{22}$ Augusti *Emersio II. Satellitis Iouis.*		
Emersio incipit	9. 16. 50	$9^h.22'.10''$
Satelles bene splendet	17. 26	22. 46

Immer-

	Temp. Pend.	Temp. ver.
Immerſio III. Satellitis		
Satelles abſconditur	$9^h.26'.40''$	$9^h.32'.\ 1''$
Sine omni dubio immerſus	26.58	32. 19
Obſeruationes hae inſtitutae Teleſcopio Gregoriano, aer erat tranquillus, tres faſciae in diſco Iouis videbantur.		

Vt ex his obſeruationibus vera longitudo vrbis Zaricin determinetur, easdem partim cum Tabulis Cel. *Wargentin*, partim etiam cum aliis obſeruationibus correſpondentibus ab eodem viro Celeb. nobis communicatis comparauimus, vnde ſequentes deductae ſunt concluſiones:

Die $\frac{6}{17}$. Aprilis Immerſio I. Satellitis Iouis.				
Pariſiis ex calculo	13^h.	$50'$.	$29''$	
Zaricini obſeruata	16.	38.	23	
Differ. merid. inter Pariſios et Zaricin	2.	47.	54	
Die $\frac{15}{26}$. Apr. Imm. I. Pariſiis	10.	14.	3	ex calc.
Zaricini obſeru.	13.	1.	7	
Differ. Meridian.	2.	47.	4	
Die $\frac{9}{20}$. Iunii Emerſio I. Holmiae	10.	8.	30	
Zaricini	11.	53.	51	
Differ. Merid.	1.	45.	21	
inter Holm. et Pariſios	1.	2.	55	
Differ. Mer. int. Par. et Zar.	2.	48.	16	

Die

Die $\frac{9}{20}$. Iunii Em. I. Holm.	10^h.	$8'$.	$30''$
add. temp. 5. reuol. 8^D.	20.	21.	41
Temp. Em. die $\frac{18}{29}$. Iunii	6.	30.	11
Haec Emersio in Zaricin	8.	16.	11
	1.	46.	0
	1.	2.	55
Longit. a Parisiis	2.	48.	55
Die $\frac{2}{13}$. Iulii Em. I. Berolini	9.	59.	15
Subtr. Temp. 4 reuol. 7^D.	1.	54.	2
T. Em. I. Berolin. $\frac{25.\ Iun.}{6.\ Iul.}$	8.	5.	13
Zaricini obseruata	10.	9.	55
	2.	4.	42
Longit. Berol. a Paris.		44.	25
Longit. Zaricin a Paris.	2.	49.	7
Die $\frac{18}{29}$. Iulii Em. I. Tyrnavii	8.	34.	19
Subtr. temp. 4. reuol. 7^D.	1.	55.	23
T. Em. I. d. $\frac{11}{22}$. Iulii Tyrnav	6.	38.	56
Zaricini obseruata	8.	27.	33
	1.	48.	37
Longit Tyrnaw a Parisiis	1.	0.	55
Longit. Zaricin a Parisiis	2.	49.	32

Die $\frac{18}{29}$. Iulii Em. I. Tyrnav	$8^h. 34'. 19''$
Zaricini obſeruat.	10. 22. 40
	1. 48. 21
	1. 0. 55
Longit. Zaricini a Pariſiis	2. 49. 16
Die $\frac{25.\ Martii}{5.\ April}$ Imm. II. Berolin.	14. 32. 7
Subtr. temp. 2. reuol. 7^D.	2. 37. 6
T. Imm. II. Berol. $\frac{18}{29}$. Mart.	11. 55. 1
in Zaricin obſeruat.	13. 57. 21
	2. 2. 20
	44 25
Longit. Zaricin a Pariſiis	2. 46. 45
Die $\frac{25.\ Martii}{5.\ April}$ Imm. II. Berol.	14. 32. 7
Zaricini	16. 35. 46
	2. 3. 39
	44. 25
Longit. Zaric. a Pariſ.	2. 48. 4
Die $\frac{19}{30}$. April. Imm. II. Tyrnauii	11. 55. 8
Zaricini	13. 42. 44
	1. 47. 36
	1. 0. 55
Longit. Zaricini a Pariſiis	2. 48. 31

Die $\frac{8}{19}$. Iunii Em. II. Tyrnauii	8^h.	$23'$.	$37''$	
Zaricini	10.	9.	33	
	1.	45.	56	
	1.	0.	55	
Longit. Zaricin a Parisiis	2.	46.	51	
Die $\frac{11}{22}$. Aug. Em. II. Parisiis	6.	33.	36	ex calc.
Zaricini	9.	22.	10	
Differ. Meridian.	2.	48.	34.	

Si iam omnium harum conclusionum sumatur medium habebitur Longitudo Zaricini a Parisiis $2^h. 48'. 14''$, dum medium ex immersionibus dat $2^h. 47'. 39''$ et ex emersionibus $2^h. 48'. 39''$. Inter immersiones vero reiecta ea *Secundi*, quae $\frac{18}{29}$. Mart. obseruata fuit, Longitudinum ex reliquis deductarum medium est $2^h. 47'. 53''$. Similiter si ex numero emersionum excludantur Emersio I. die $\frac{11}{22}$. Iulii et Emersio II^{di} die $\frac{8}{19}$. Iunii, quippe quum obseruatio Tyrnauiensis cum qua haec comparata est, omnino dubia videatur, reliquae praebebunt medium sumendo Longitudinem vrbis Zaricin a Parisiis $2^h. 48'. 49''$. Vnde si denuo ex melioris notae obseruationibus medium sumatur, prodibit quaesita differentia Meridianorum inter Zaricin et Parisios $2^h. 48'. 24''$, quam igitur numero rotundo statuere licebit $2^h. 48'. 30''$, seu in grad. $42°. 7'. 30''$.

IV.

IV. Declinatio Acus Magneticae.

Die 24. Aprilis ducta linea meridiana methodo consueta, declinationem acus repetitis vicibus inueni $4^{\circ}.\frac{3}{4}$ ad Occid. Die 25. Aprilis Declinationem acus inueni modo $4^{\circ}\frac{3}{4}$ modo 5° versus Occid.

Die 16. Maii iterum duxi Lineam meridianam atque Declinationem acus inueni 5° versus Occid. Longitudo acus erat $8\frac{1}{2}$ pollic. Angl.

EPITOME OBSERVATIONVM

METEOROLOGICARVM PETROPOLI A. MDCCLXX. ST. VET. INSTITVTARVM.

Auctore

IOAN. ALBERTO EVLER.

Iisdem monitis quae de ſtatu inſtrumentorum adhibitorum et methodo mea obſeruationes ipſas annotandi, anno praeterito praedicatus ſum, progrediar iam ſtatim ad Summarium obſeruationum per ſingulos menſes huius anni MDCCLXX. inſtitutarum, quas eodem ordine hic exponam quem praeterita vice ſecutus ſum, et quidem quo melius eae vno quaſi intuitu cognoſci poſſint, ſingulas claſſes forma tabularum exhibebo.

I.

I.
Barometrum.

Scala diuiſa eſt in pollices et partes centeſimas pollicis ſeu partis duodecimae pedis Pariſini: cyphrae duae priores autem denotant pollices integros, et binae poſteriores partes centeſimas. Barometrum ſuſpenſum erat ad altitudinem 20 pedum ſupra ſuperficiem mediam fluminis Neuae in diſtantia 6000 pedum ab eius oſtio.

denotat autem d. *die*; h. *hora*; a. m. *ante meridiem* et p. m. *poſt meridiem*.

Menſe	Altitudo maxima	Altitudo minima	Differentia	Medium	Altitudo media	Altitudo frequentiſſ.
Ianuar.	28. 51 d. 15. h. 8. a. m.	26. 90 d. 24. med. noct.	1. 61	27. 71	27. 89	28. 00
Febr.	28. 48 d. 14. h. 2 p. m.	27. 20 d. 7. h. 11. p. m.	1. 28	27. 84	27. 95	27. 85
Mart.	28. 32 d. 6. h. 9. a. m.	27. 45 d. 27. h. 5. a. m.	0. 87	27. 88	27. 88	27. 92
April.	28. 46 d. 16. h. 11. a. m.	27. 61 d. 24 h. 9 a. m.	0. 85	28. 03	28. 06	27. 92
Mai.	28. 43 d. 5. meridie	27. 56 d. 20. h. 6. p. m.	0. 87	28. 00	28. 03	27. 96
Iun.	28. 16 d. 15. h. 2. p. m.	27. 55 d. 3. h. 2. p. m.	0. 61	27. 85	27. 82	27. 83
Iul.	28. 38 d. 11. h. 9. a. m.	27. 71 d. 31. h. 6. p. m.	0. 67	28. 05	28. 10	28. 11
Aug.	28 21 d. 24. h. 1-10. p. m.	27. 68 d. 3. meridie	0. 53	27. 94	27. 97	28. 02
Sept.	28. 30 d. 6. h. 9. p. m.	27 08 d. 17. h. 2. p. m.	1. 22	27. 69	27. 86	27. 82 et 28. 05
Octobr.	28. 48 d. 9. h. 6. a. m.	27. 52 d. 25. h. 4. p. m.	0. 96	28. 00	28. 02	27. 98
Nouemb.	28. 63 d. 20. h. 10 p. m.	27. 08 d. 5. h. 2. p. m.	1. 55	27. 85	27. 81	27. 70 et 27. 80
Decembr.	28. 22 d. 14. h. 6. a m.	26. 76 d. 27. h. 8. p. m.	1. 46	27. 49	27. 62	27. 57
per totum annum	28. 63 Nouembr.	26. 76 Decembr.	1. 87	27. 70	27. 92	27. 97

II.

Thermometrum.

Thermometrum eſt deslislianum: aqua communis ebullit in puncto o, et congelat in puncto 150.

Menſe	Altitudo maxima	Altitudo minima	Differentia
Ianuar.	146 d. 4. h. 2. p. m.	185 d. 29. h. 8. a. m.	39
Februar.	141 d. 8. h. 9. p. m.	184½ d. 14. h. 7. a. m.	43½
Mart.	129 d. 31. h 2. p. m	186 d. 6. h. 7. a. m.	57
April.	117 d. 15. h. 11. a. m.	153 d. 3. h. 5. a. m.	36
Maii	117 d. 3. h. 2. p. m.	152 d. 20. h. 10. a. m.	35
Iunii	115 d. 12. h. 2. p. m.	135 d. 30. h. 5. a. m.	20
Iul.	106 d. 10 h. 2. p. m.	134 d. 20. h. 5. a. m.	28
Auguſt.	103 d. 11. h. 2. p. m.	137 d. 29. h. 5. a. m.	34
Septemb.	116 d. 1. h. 2. p. m	148 d. 16. h 7. a. m.	32
Octobr.	129 d. 3. meridie	150 d. 9. h. 6. a. m.	21
Nouemb.	136 d. 1. h. 2. p. m.	173 d. 10. h. 7. a. m.	37
Decemb.	145 d. 24. h. 9. p. m.	176 d. 31. h. 9. p. m.	31
per totum annum.	103 Auguſt.	186 Mart.	83

III.

III.

Frigus et calor.

Quouis die altitudinem et minimam et maximam Thermometri feorfim annotaui, quarum prima huius diei gradum frigoris, fecunda vero caloris gradum indicat. Tum elapfo menfe, fingulos eius dies hoc refpectu in claffes diftribui: vnde deinceps haec fequens Tabula nata eft.

Menfe.	Dies frigidiores gradibus.						Dies calidiores gradibus.					
	180	170	160	150	140	130	110	120	130	140	150	160
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ianuar.	1	9	19	30	31	31					4	29
Febr.	2	12	21	24	28	28					7	16
Mart.	1	8	20	28	31	31			1	3	13	22
April.				4	20	30		2	17	30	30	30
Mai.				1	17	31		3	20	28	31	31
Iun.						20		7	27	30	30	30
Iul.						12	5	20	31	31	31	31
Aug.						14	3	17	31	31	31	31
Sept.					13	28		1	11	27	30	30
Octob.					21	30			1	23	31	31
Nou.		1	15	24	29	30				2	11	21
Decemb.		4	8	26	31	31					12	28
per totum annum.	4	34	83	138	220	316	8	50	139	205	261	310

IV.

IV.

Ventus.

Menſe	Malacia	Ventus lenis	Ventus fortis	Ventus procelloſus
	dies	dies	dies	dies
Ian.		13	10	8
Febr.		18	6	4
Mart.		9	14	8
April		10	17	3
Mai		0	19	6
Iun.		8	17	5
Iul	7	2	18	4
Aug.	5	7	14	5
Sept.		7	17	6
Oct.	1	7	20	3
Nou.		17	9	4
Dec.		6	14	11
per totum annum	13	110	175	67

V.

V.

Directio venti.

Menſe	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	variabilis
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ian.	3	9	4	1	4	4	2	4	
Febr.	7	12	1	2		1	2		3
Mart.	3	19	3		1			3	2
April.	2	13	9	2	1		1	1	1
Mai.	7	11	1	1				10	1
Iun.	6	10	4			2		7	1
Iul.	10	10	2			1	1	5	2
Aug.	5	9	7	1	2			4	3
Sept.	5	4	2	3	5	1	3	6	1
Oct.	2	2	5	5	7	6		1	3
Nou.	5	8	7	5	2	2			1
Dec.	3	2	4	3	6	3		7	3
per totum annum	58	109	49	23	28	20	9	48	21

VI.

Status coeli.

Menſe	ſere-num	nebu-ſoſum	Pluuia parca	Pluuia copioſa	Nix parc.	Nix cop.	Grando
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ian.	5	4	2		15		
Feb.	12	10	1		10	1	
Mart.	4	8	2	2	8	4	
April.	9	5	7	6			
Mai.	11		10	2	2	2	
Iun.	11		10	4			
Iul.	14	4	10	5			1
Aug.	7	6	9	11			
Sept.	2	5	15	10			
Oct.	4	2	15	6			
Nou.	4	3	3		13	3	1
Dec.	4	4	7		15	4	1
per totum anuum	87	51	91	46	63	14	3

VII.

VII.

Alia Phaenomena.

Menſe	Phaenomena
Ian.	
Febr.	Quinque aurorae boreales die 2. 14. 16. 17 et 19 Paraſelena ſplend. d. 20.
Mart.	Duae aurorae boreales die 12 et 16.
April.	Ters aurorae boreales die 1. 2. et 4. Tres tonnit. die 21. 27 et 28. Glacies fluminis Neuae ſoluta eſt die 12
Mai.	
Iun.	Tonuit ſemel die ſcilicet 9.
Iul.	Tonuit bis. die 12 et 31.
Aug.	Tonuit quater. die 6. 8. 13 et 14.
Sept.	
Oct.	Aurora borealis die 15.
Nou.	Duae aurorae boreales die 13 et 15 Die 9na flumen Neuae trudere incoepit glaciem et penitus tectum fuit glacie die 11.
Dec.	
per totum annum	Aurorae boreales XII. Tonitrua X.

Fig. 2.

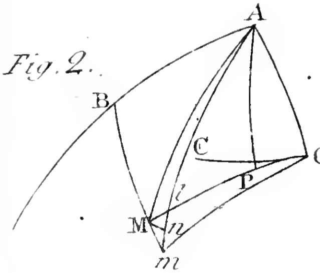
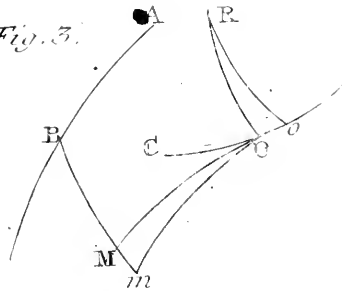


Fig. 3.



g. 4.

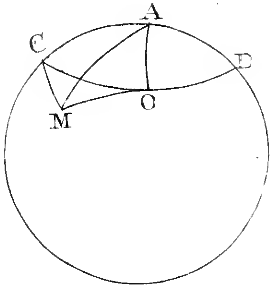


Fig. 5.

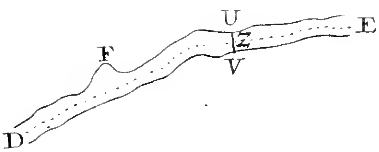
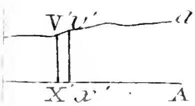


Fig. 33.



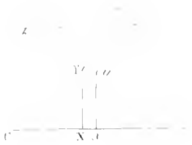


Fig. 2

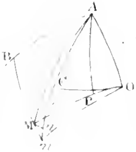


Fig. 3

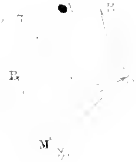


Fig. 4

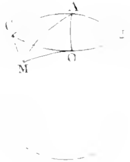


Fig. 32

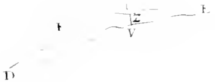
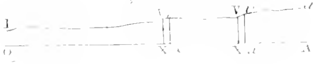
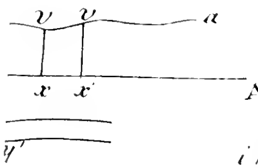


Fig. 34





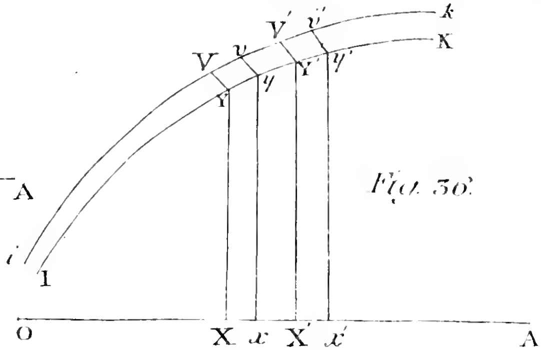


Fig. 36.

Fig. 37.

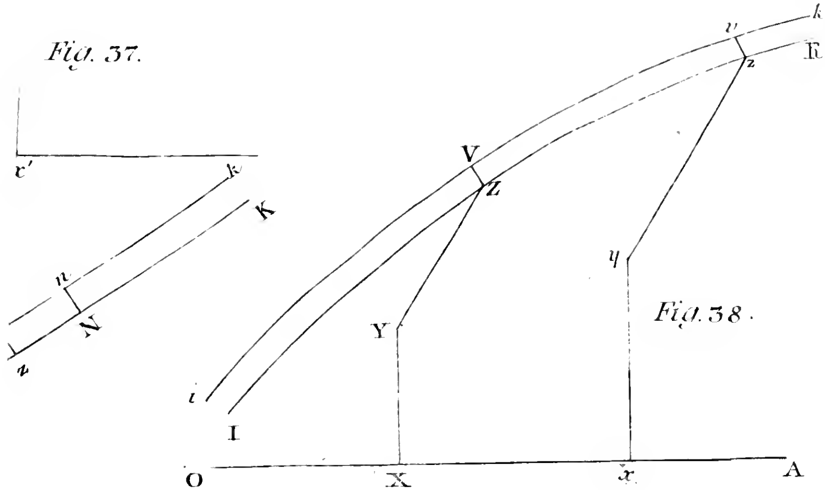
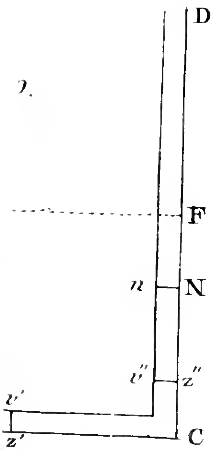


Fig. 38.



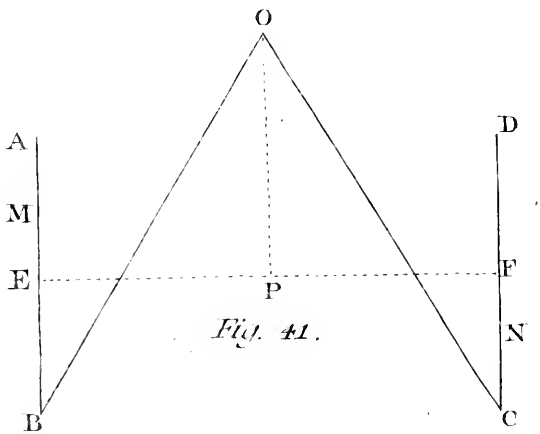


Fig. 41.

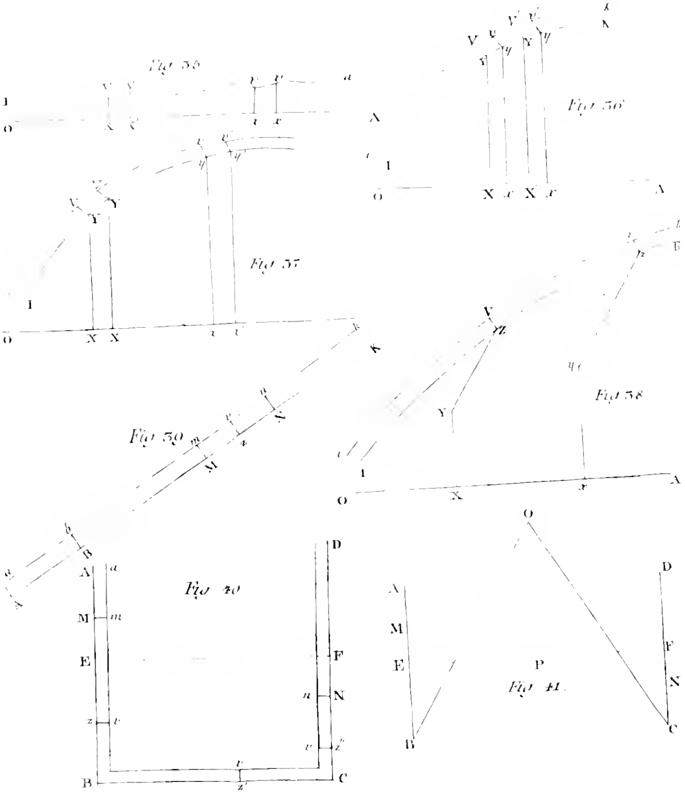


Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41.

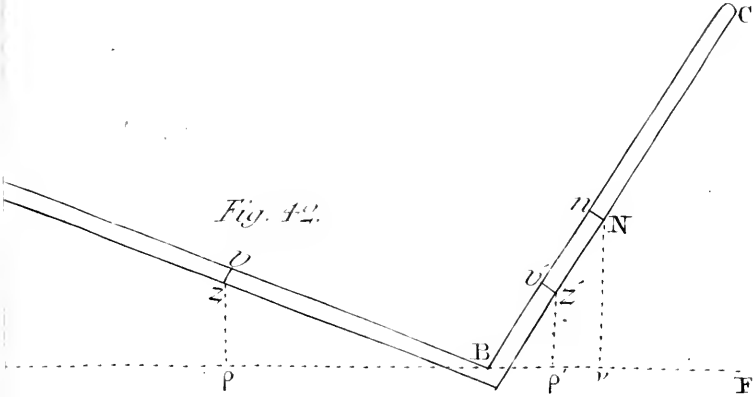
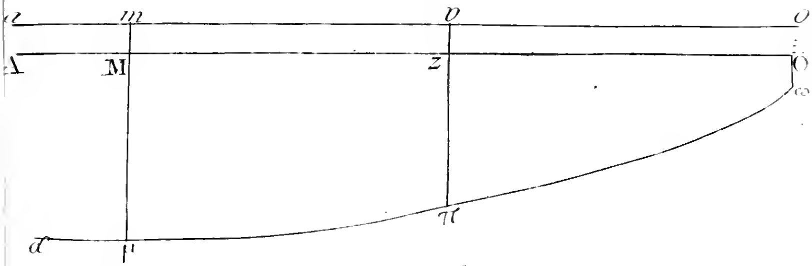


Fig. 42.

Fig. 45.



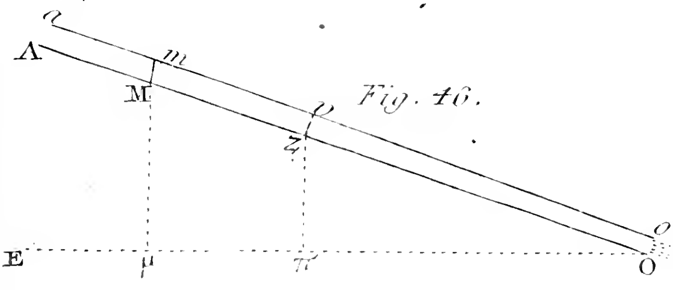


Fig. 46.

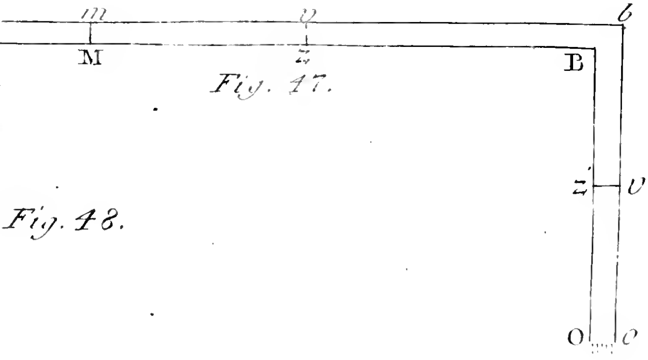


Fig. 47.

Fig. 48.

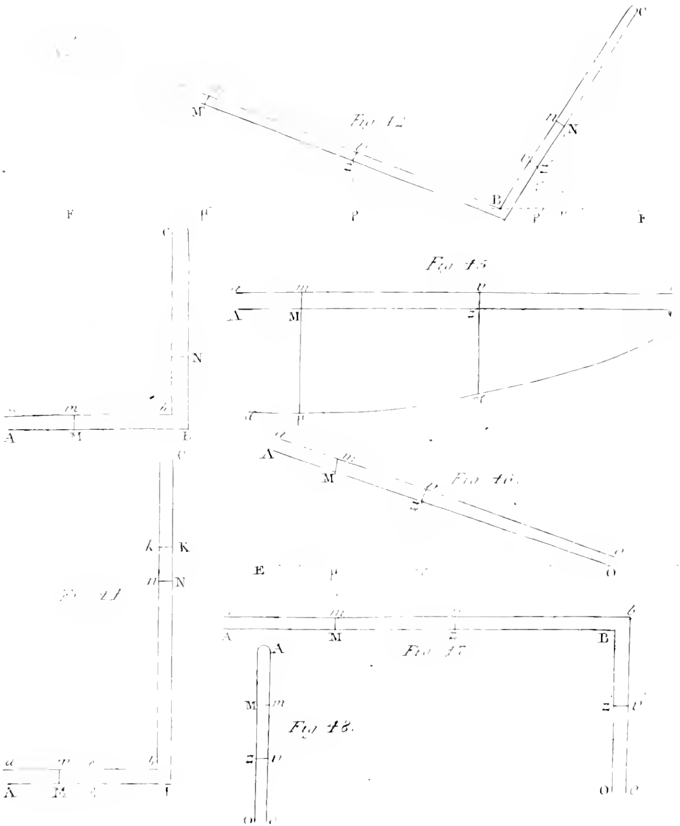


Fig. 42
Fig. 43
Fig. 44
Fig. 46.
Fig. 47
Fig. 48.

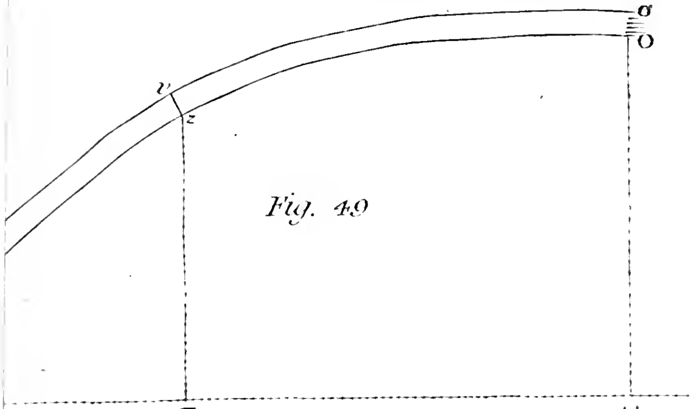


Fig. 49

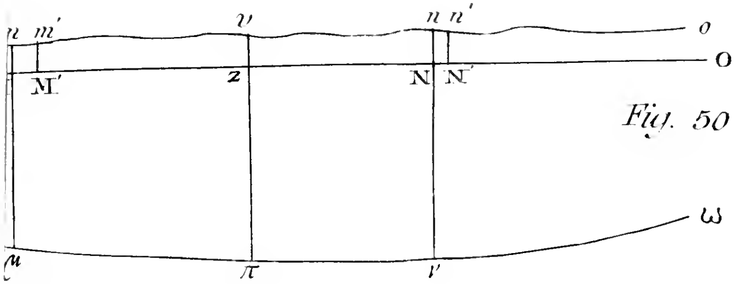


Fig. 50

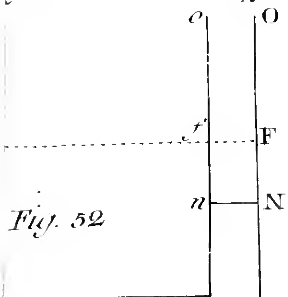


Fig. 52

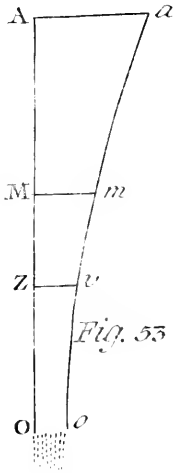


Fig. 53

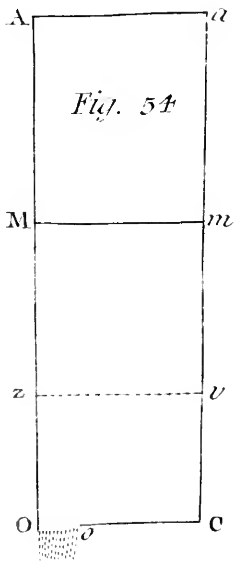


Fig. 54

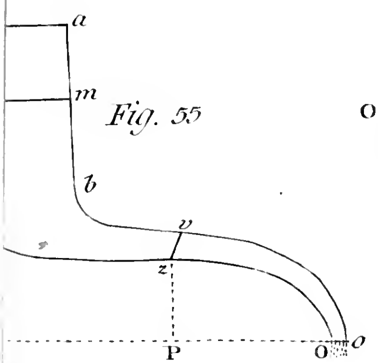


Fig. 55

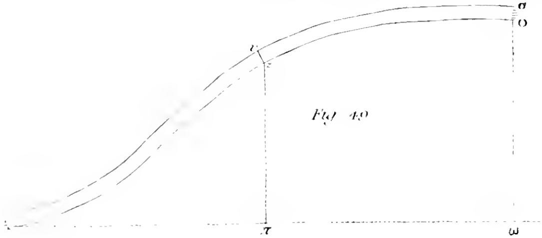


Fig. 49

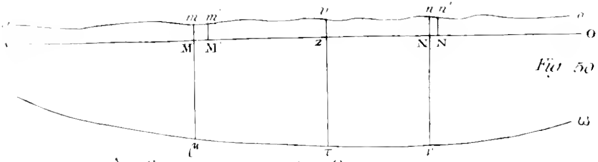


Fig. 50

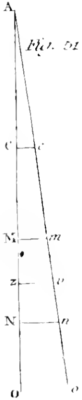


Fig. 51

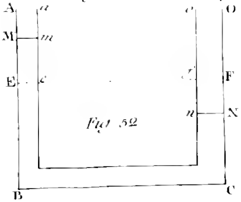


Fig. 52

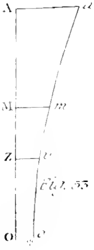


Fig. 53

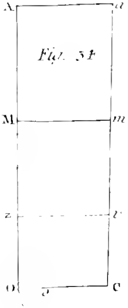


Fig. 54

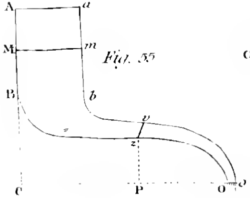
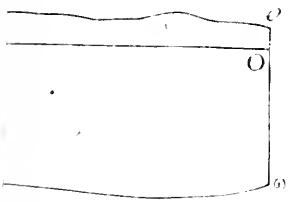


Fig. 55



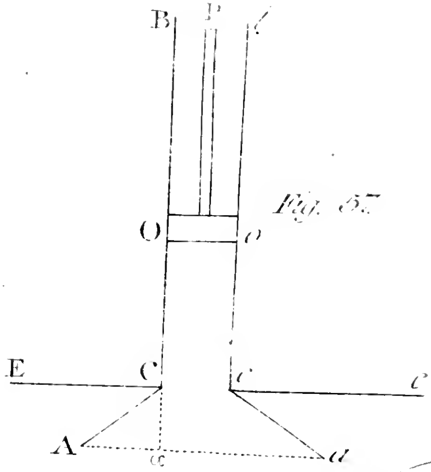


Fig. 57.

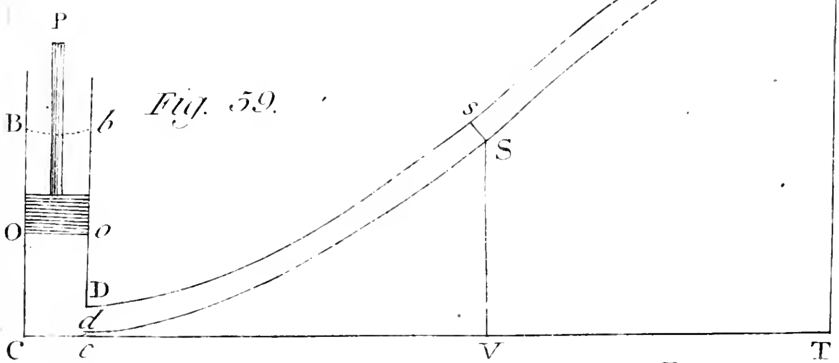
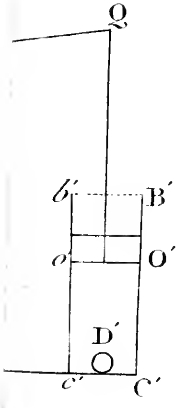


Fig. 59.



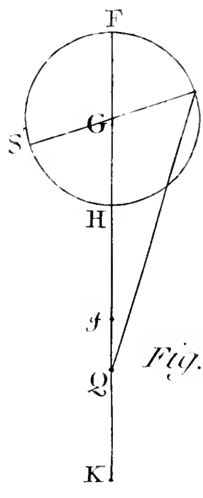


Fig. 62.

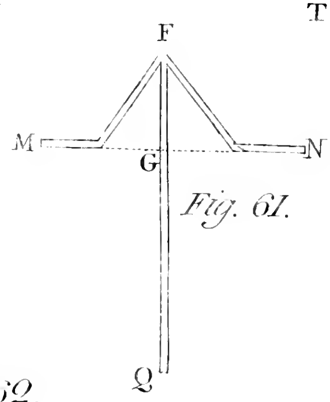
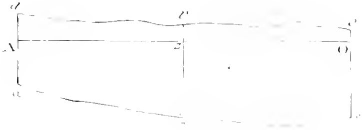


Fig. 61.

Fig. 56.



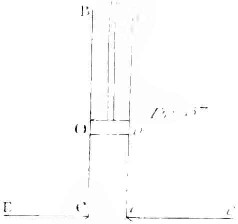


Fig. 57.

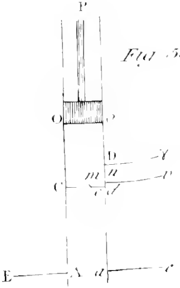


Fig. 58.

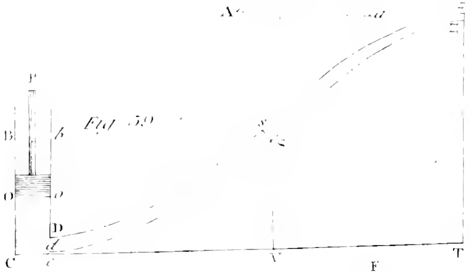


Fig. 59.

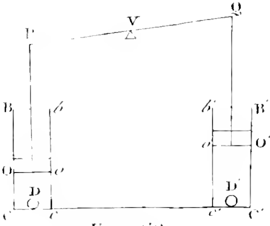


Fig. 60.

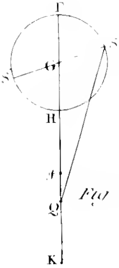


Fig. 62.

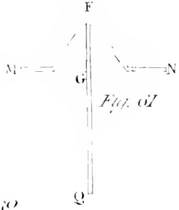


Fig. 61.

Fig. 63.

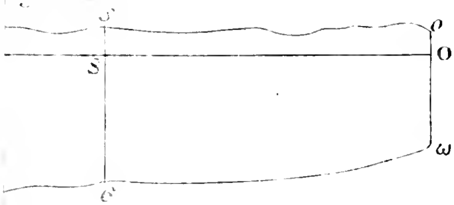
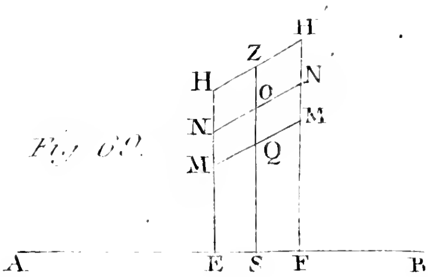


Fig. 69.



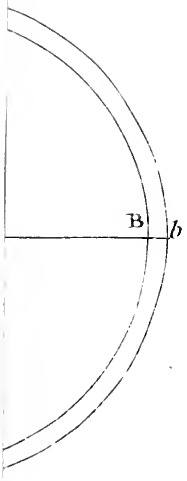


Fig. 65.

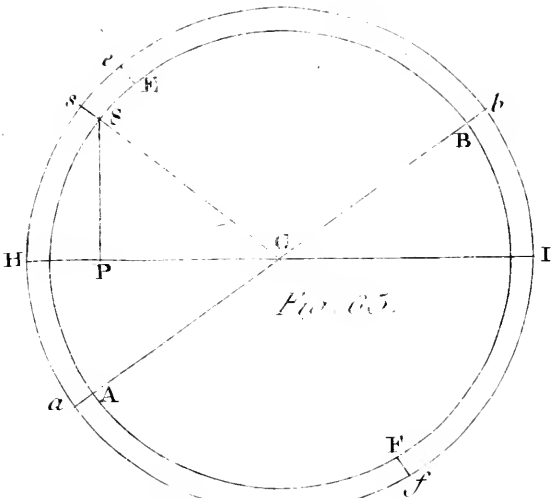
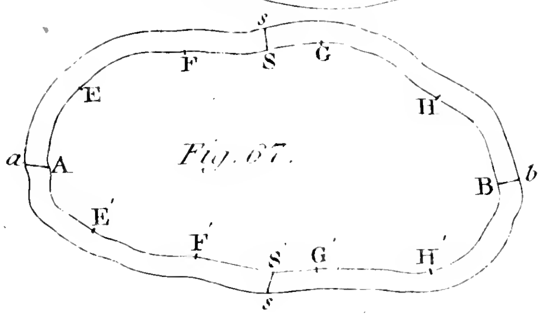


Fig. 67.



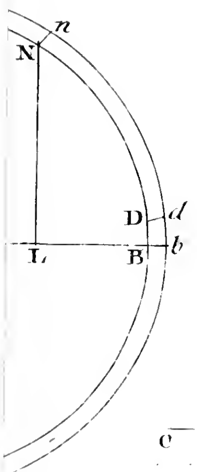
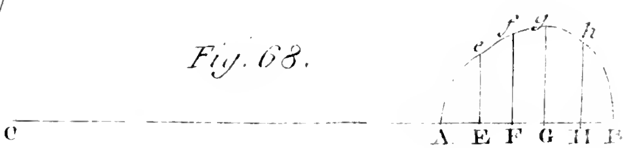


Fig. 68.



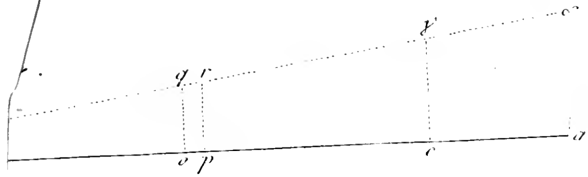


Fig. 2.

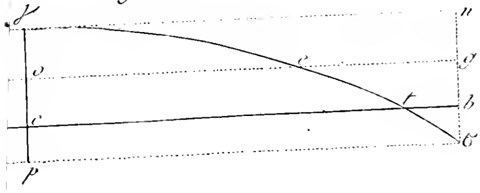


Fig. 4.

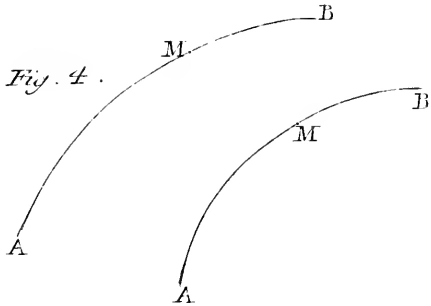


Fig. 6.

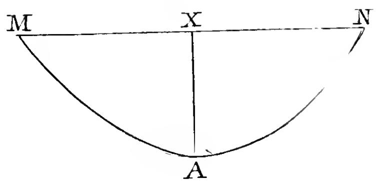
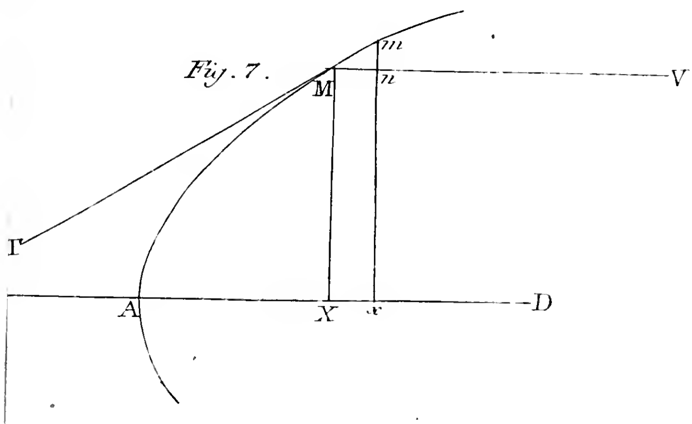


Fig. 7.



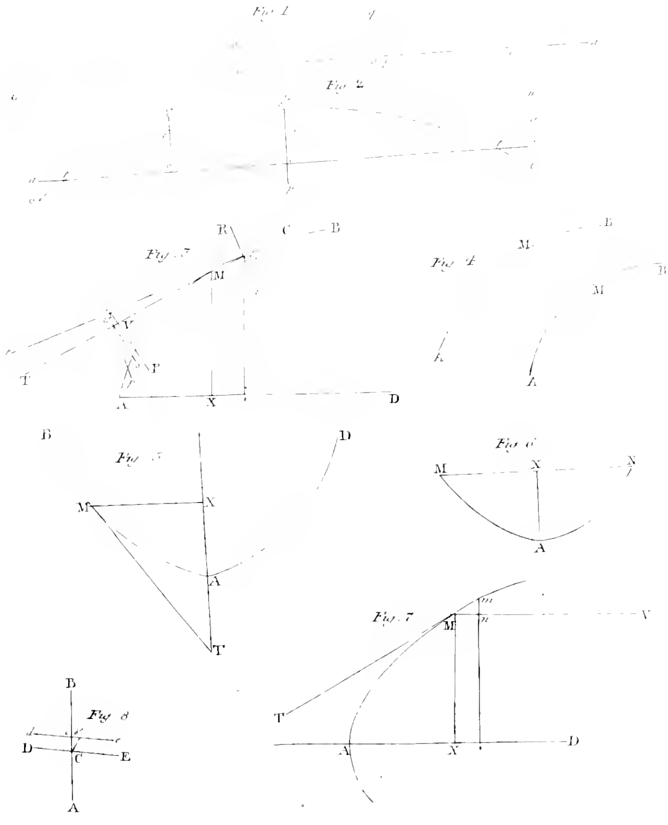
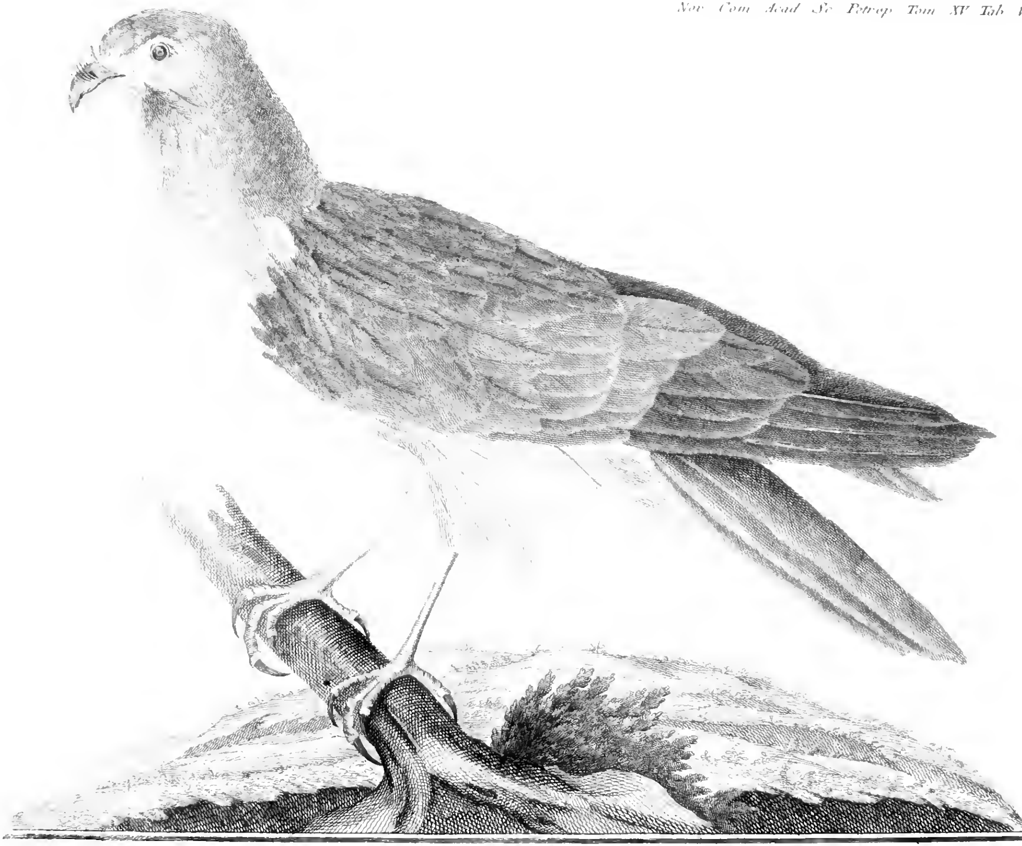
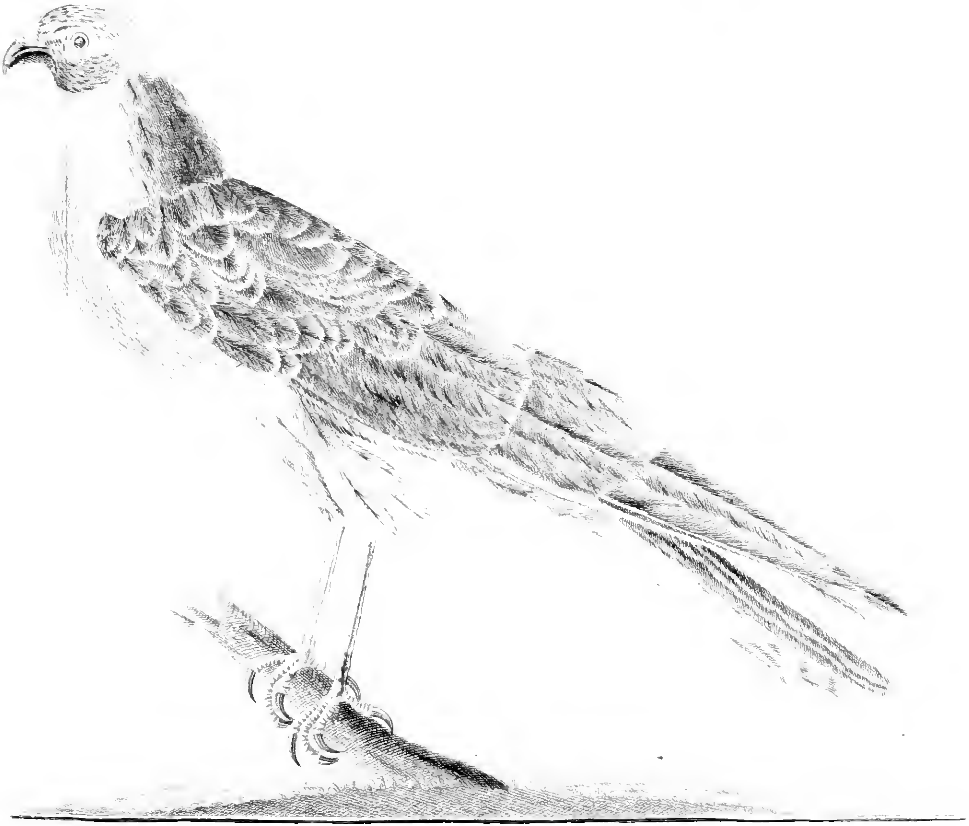
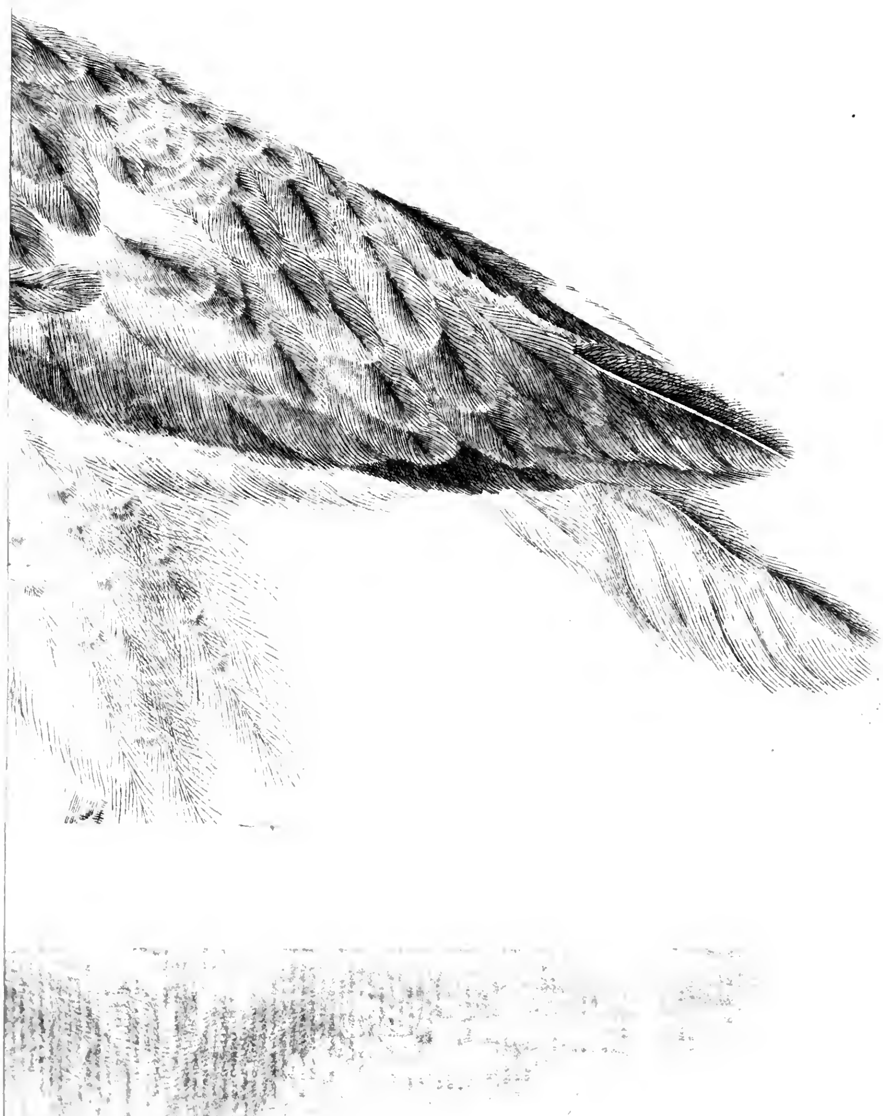
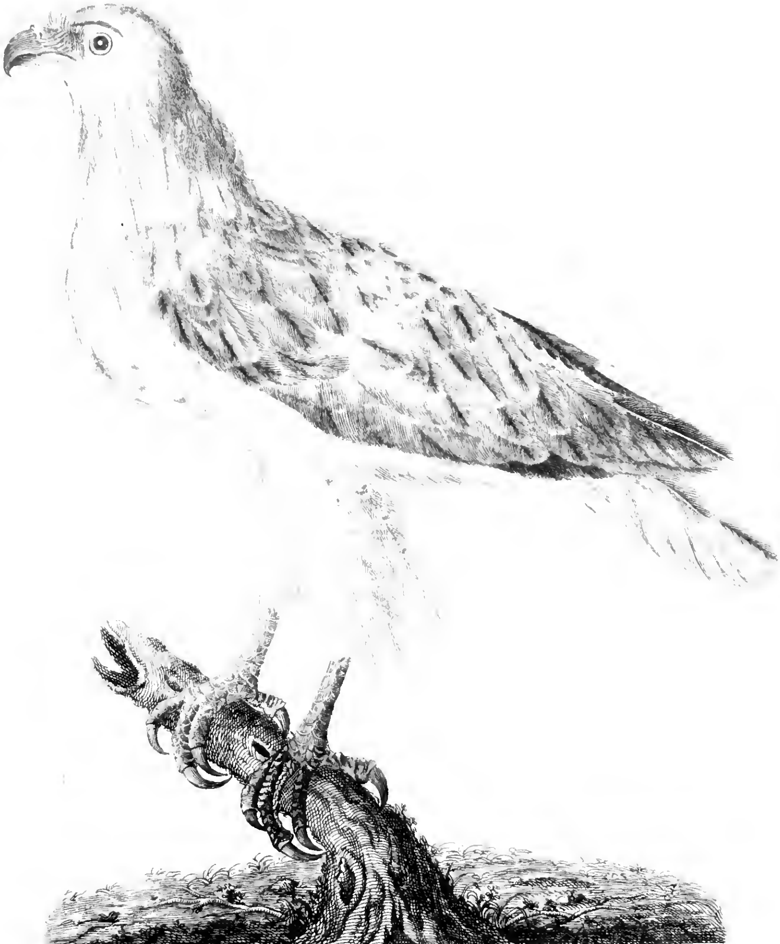


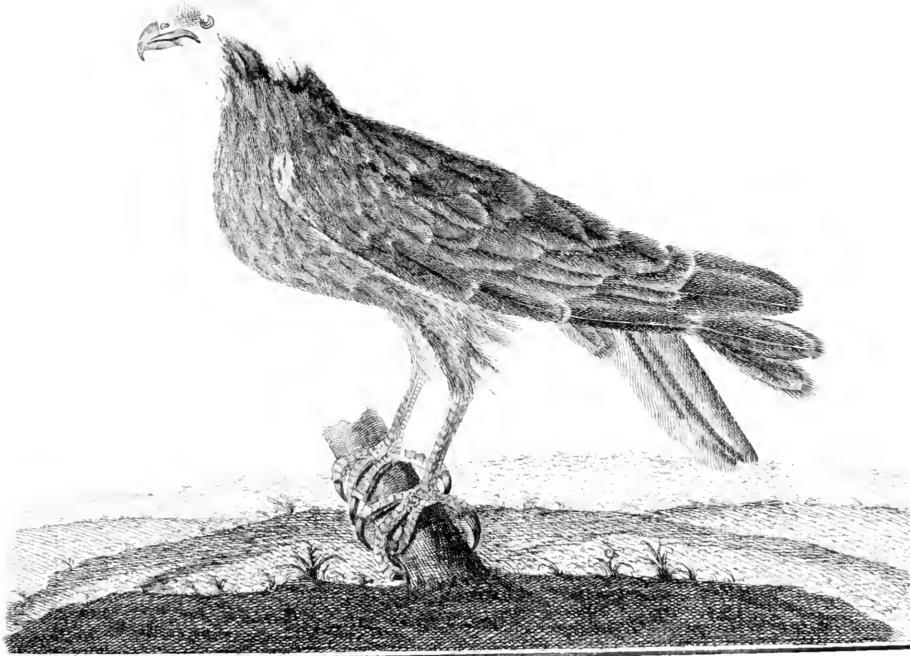
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
R
C
B
M
V
P
T
A
X
D
Fig. 4
E
M
B
M
A
A
Fig. 5
B
D
M
X
A
T
Fig. 6
M
X
N
A
Fig. 7
m
M
n
V
T
A
X
D
Fig. 8
B
d
e
D
C
E
A

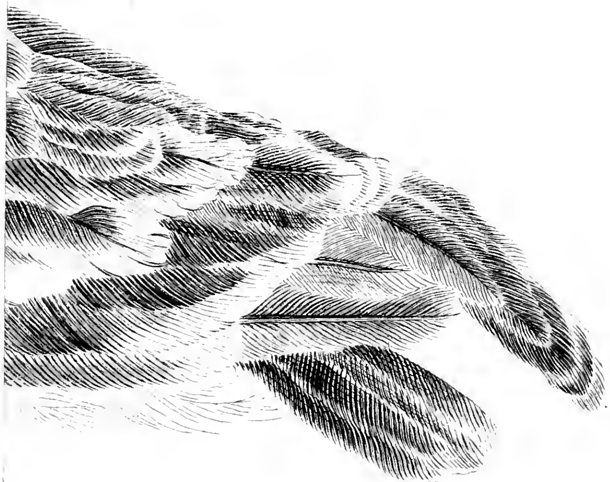


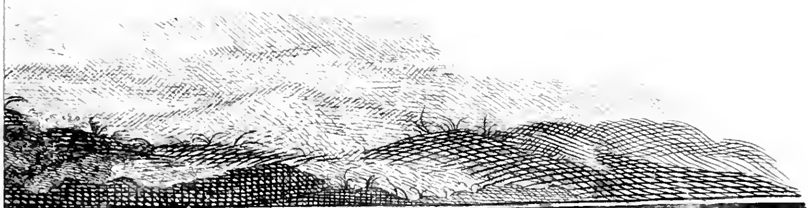


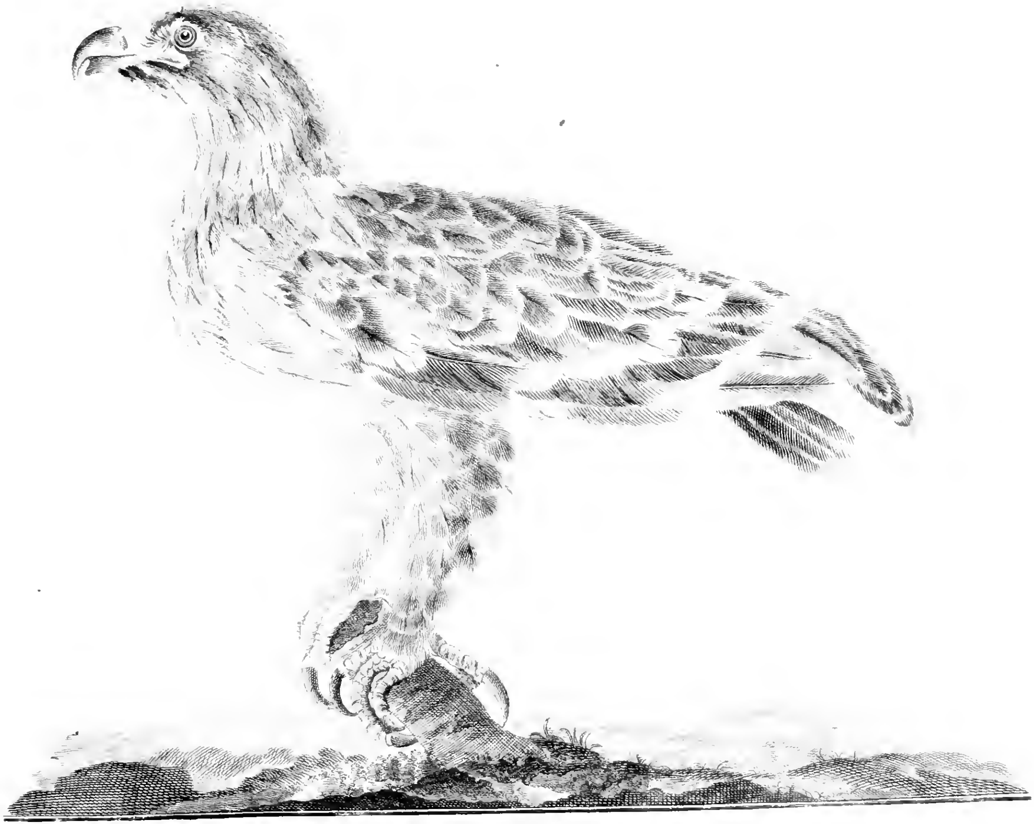




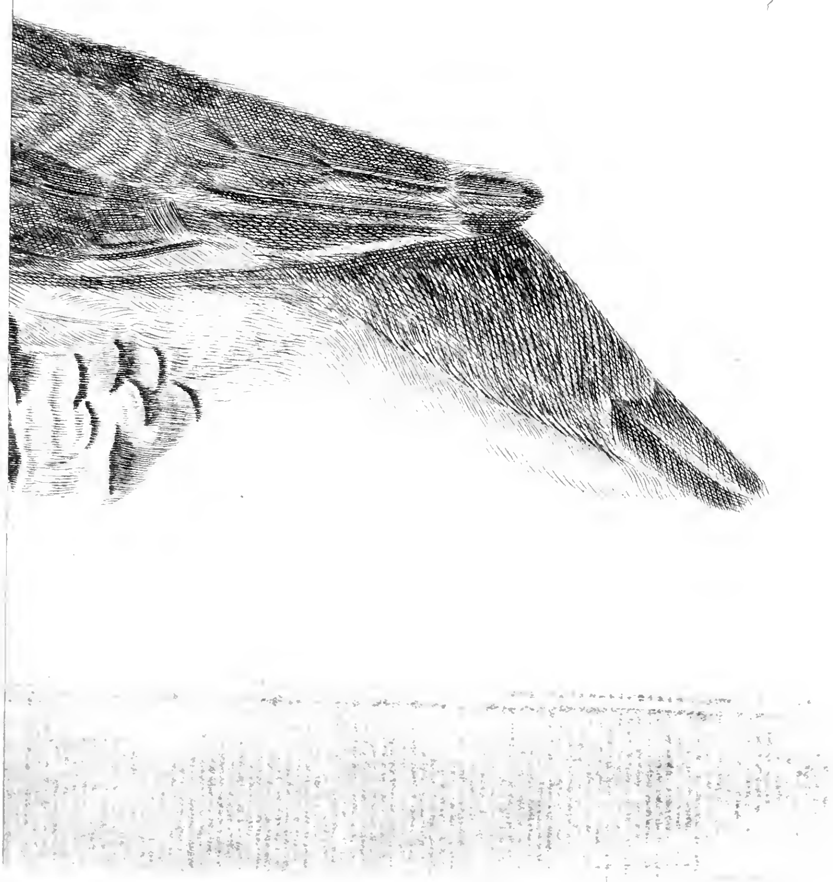


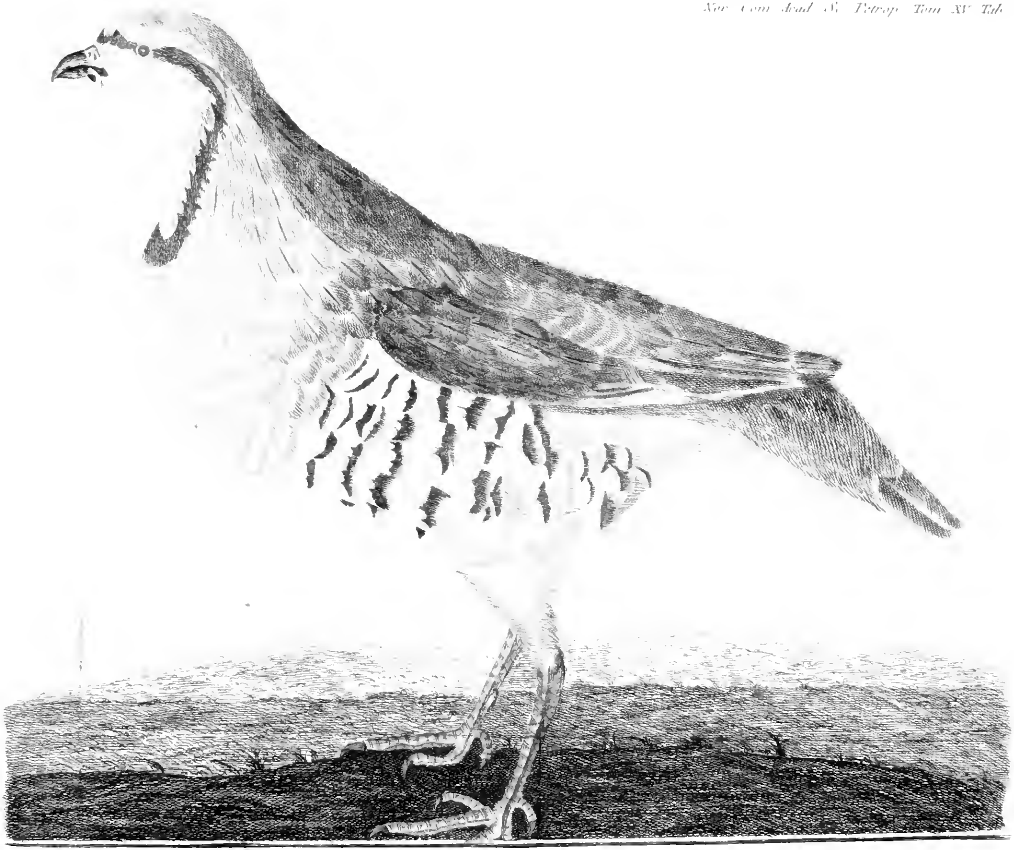


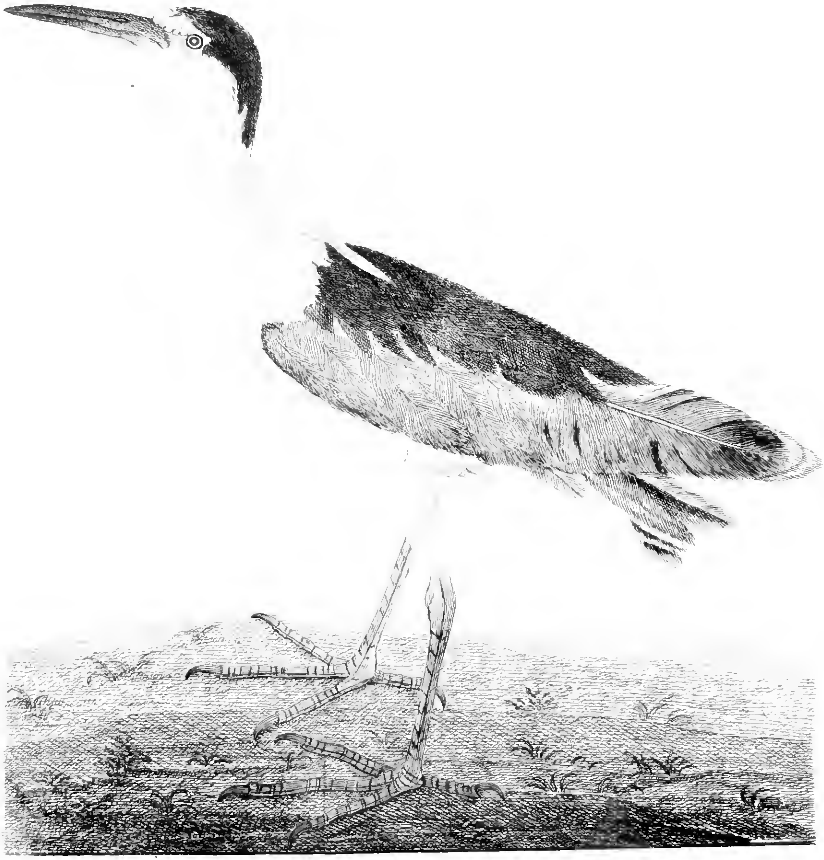


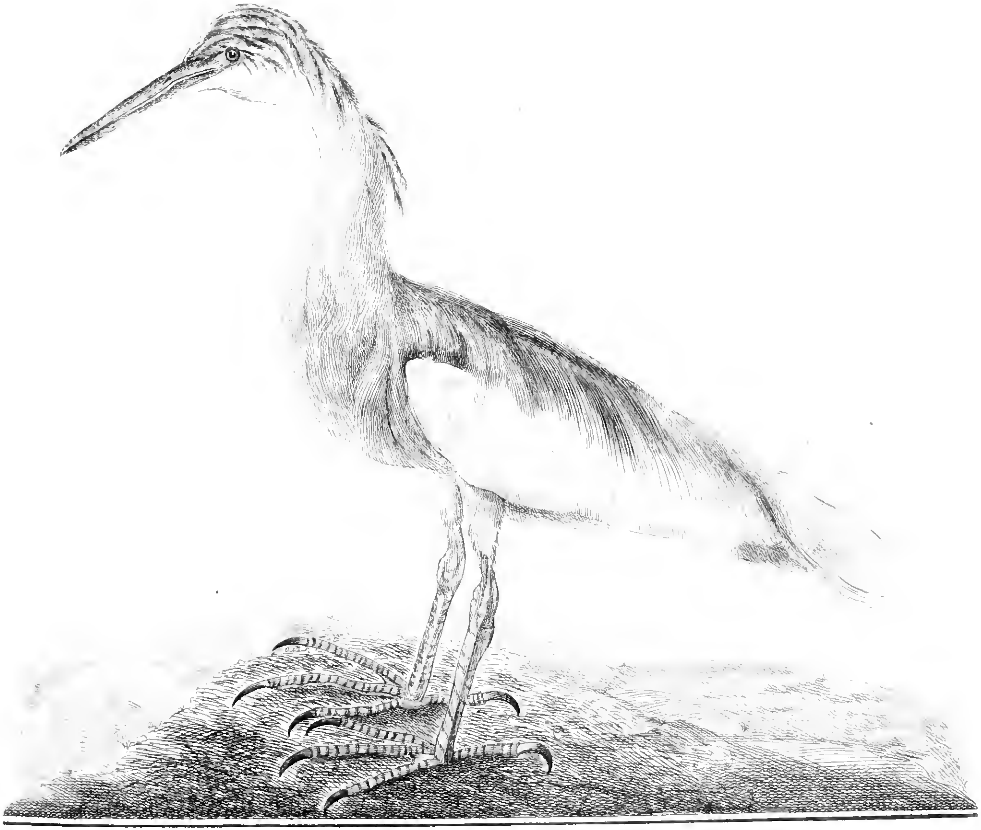


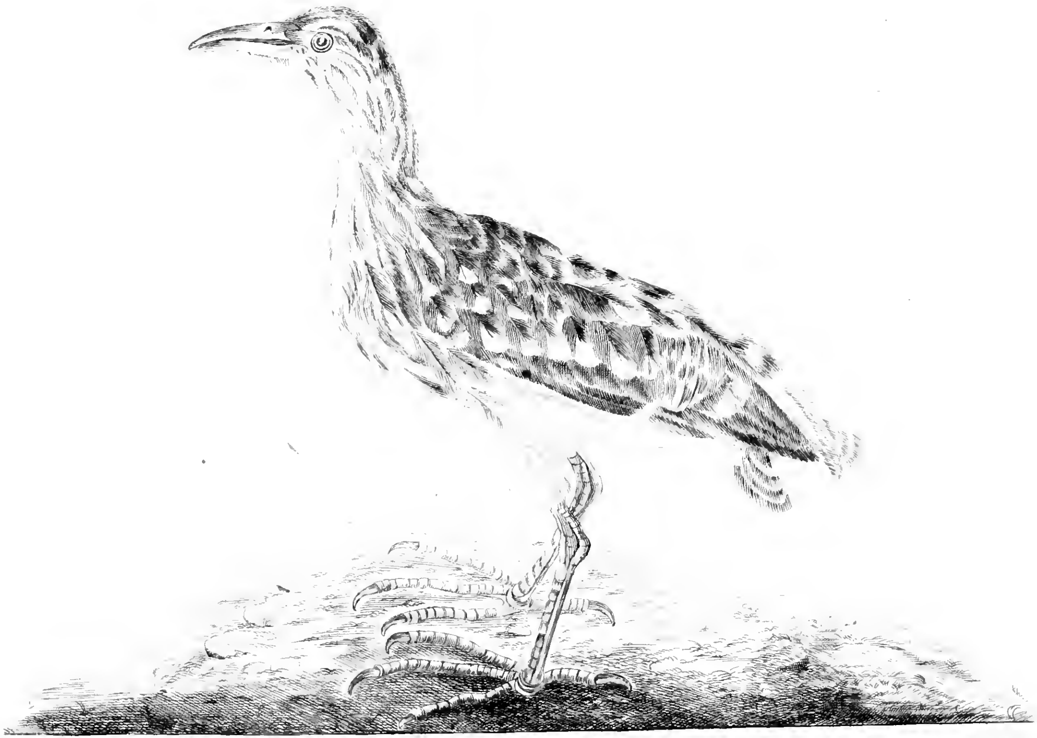
Nov. Com. Acad. Sc. Petrop. Tom. XV. Tab. XIII.

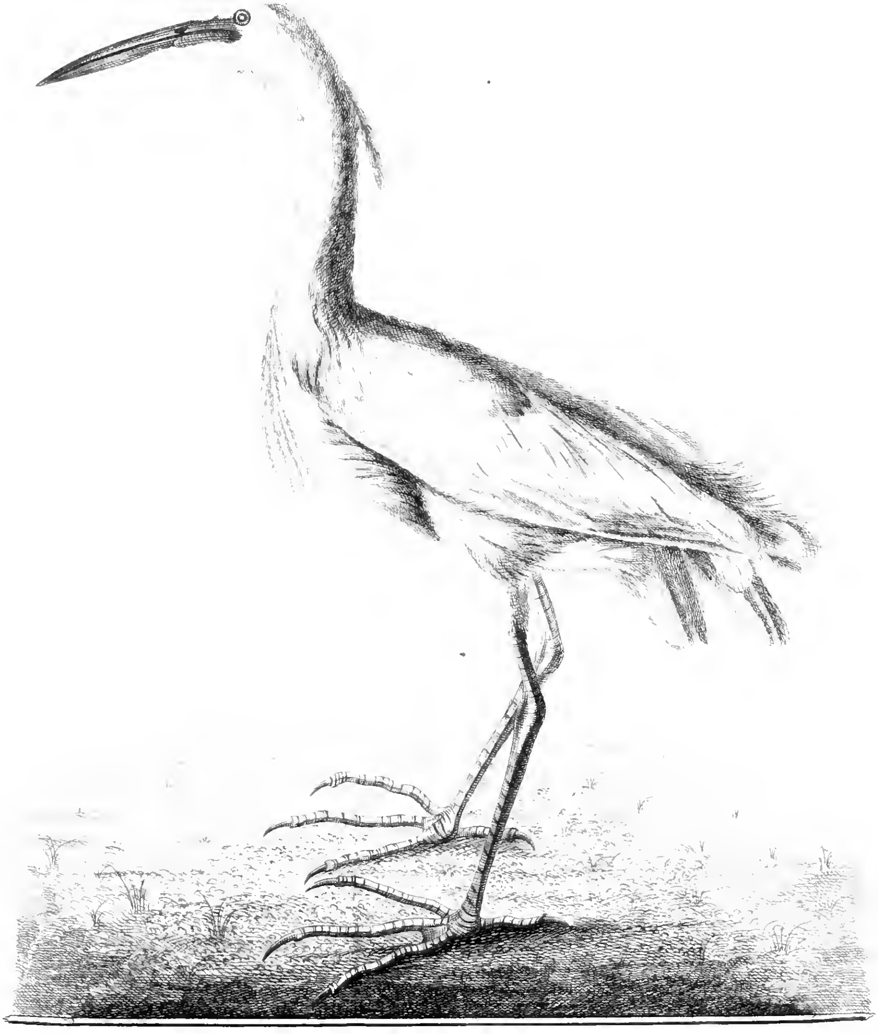


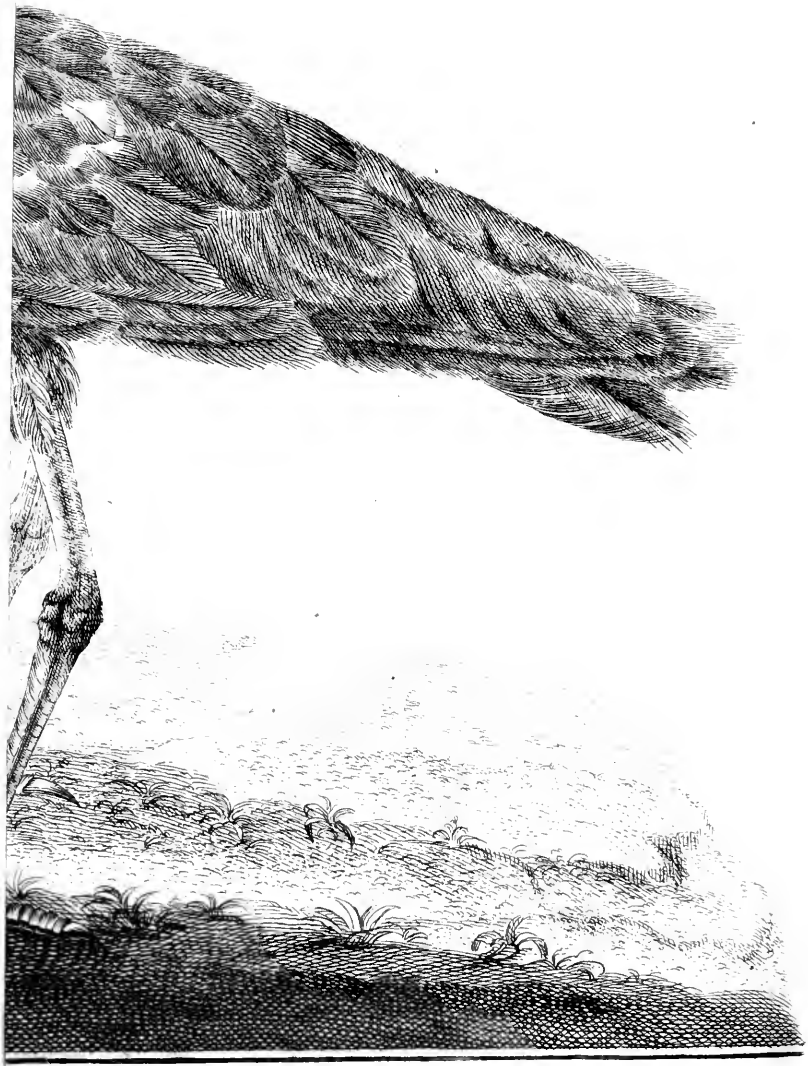


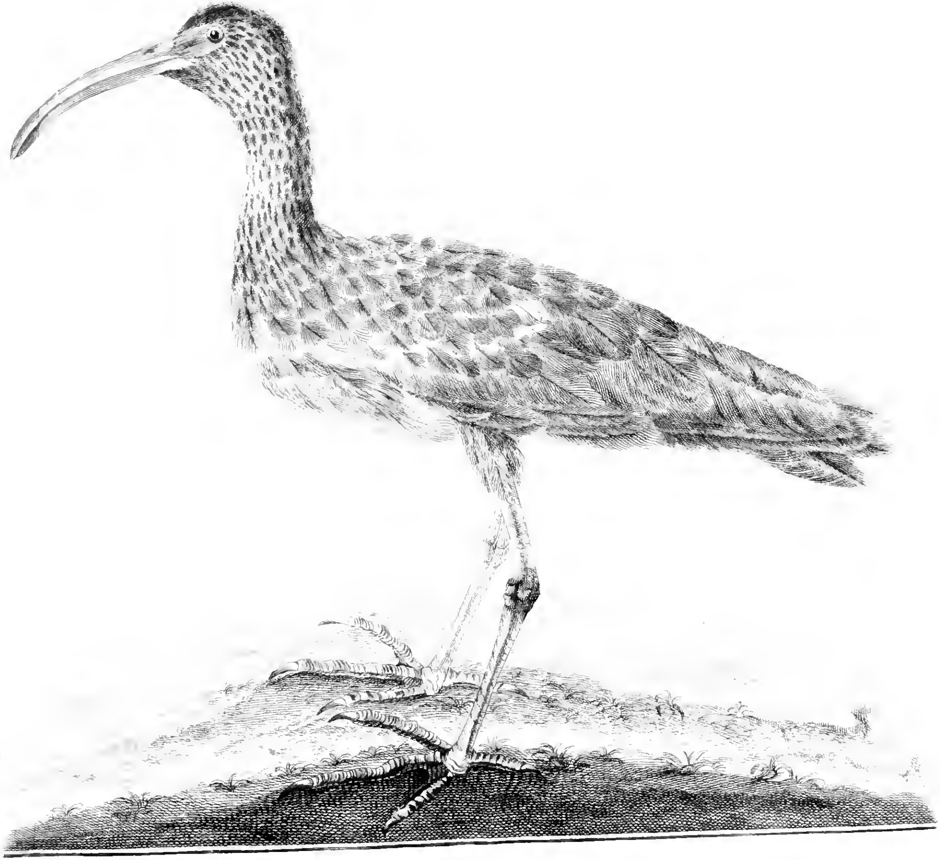


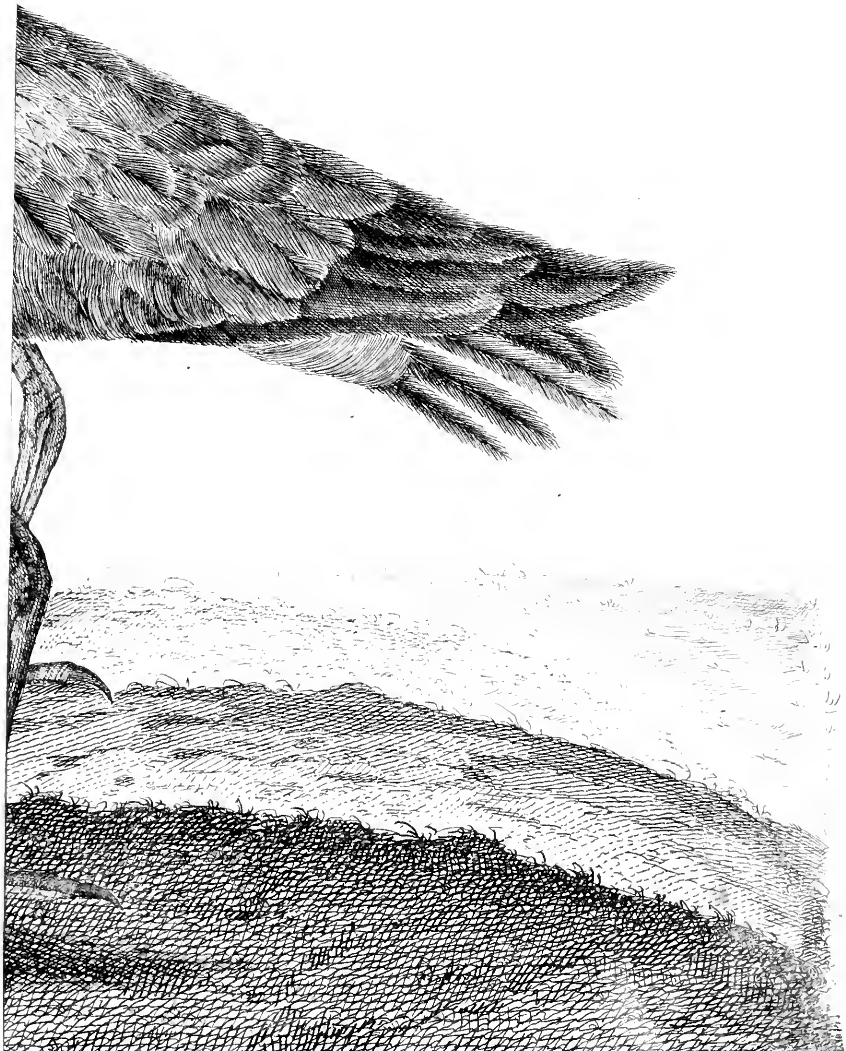


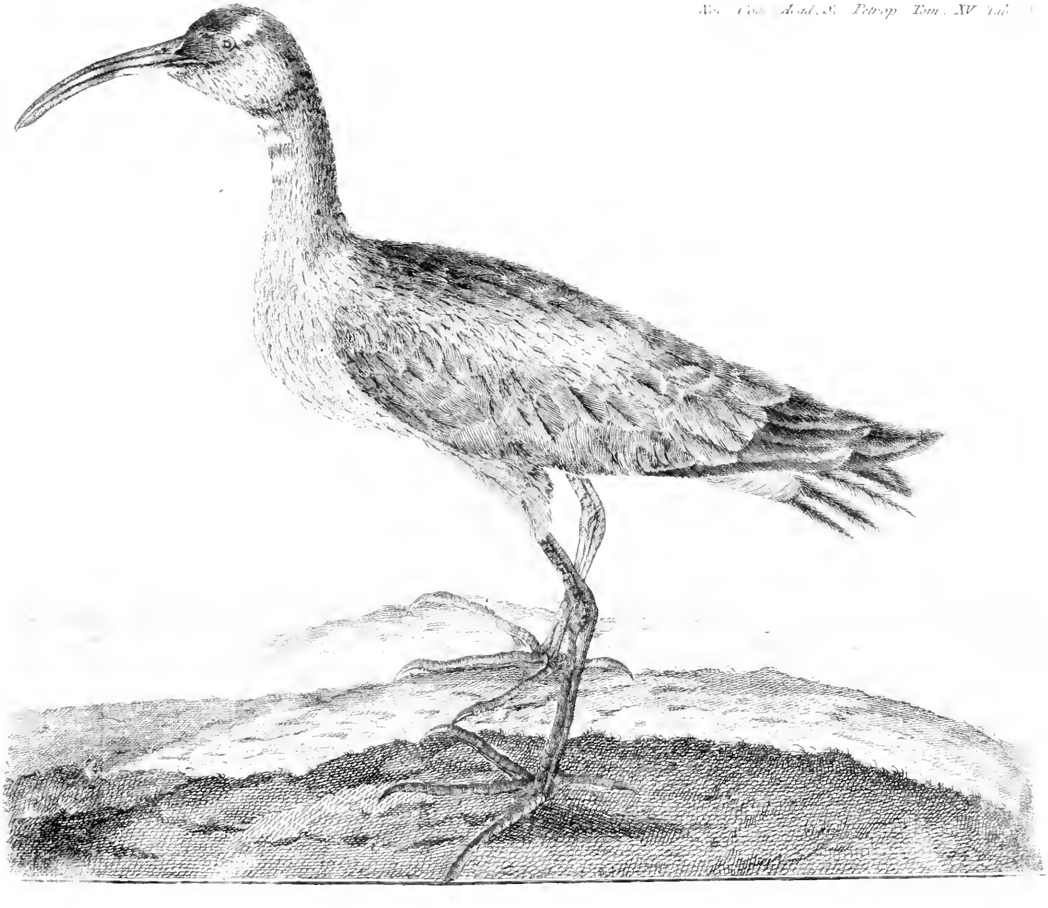


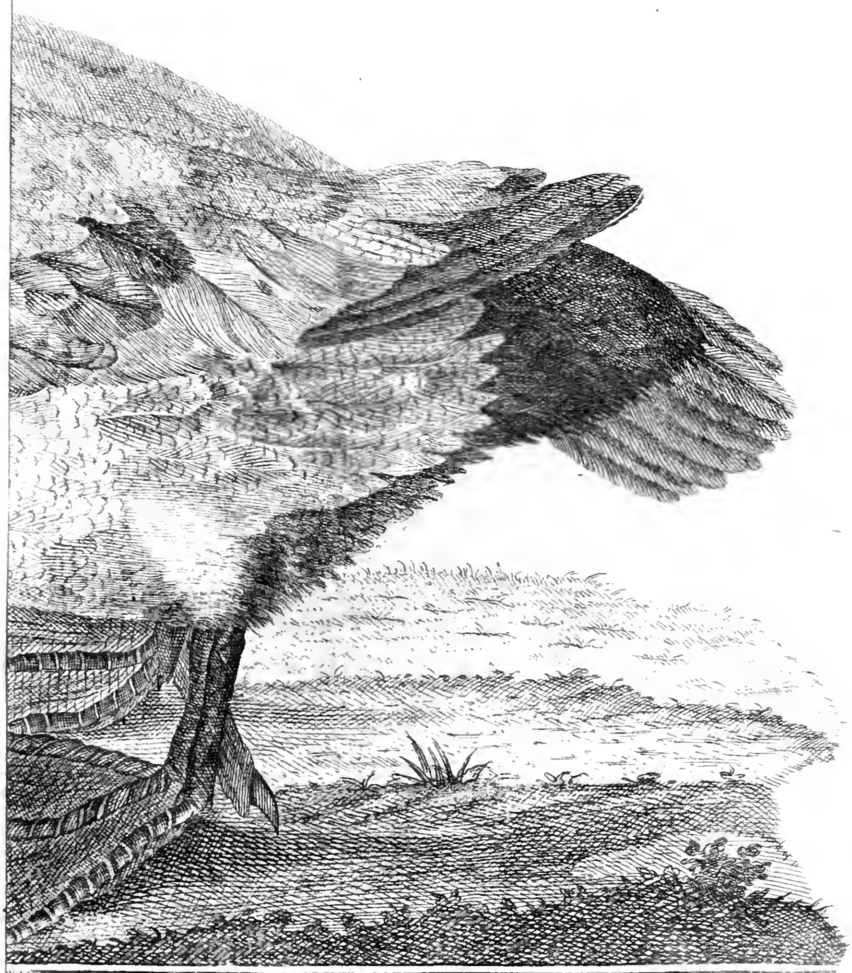


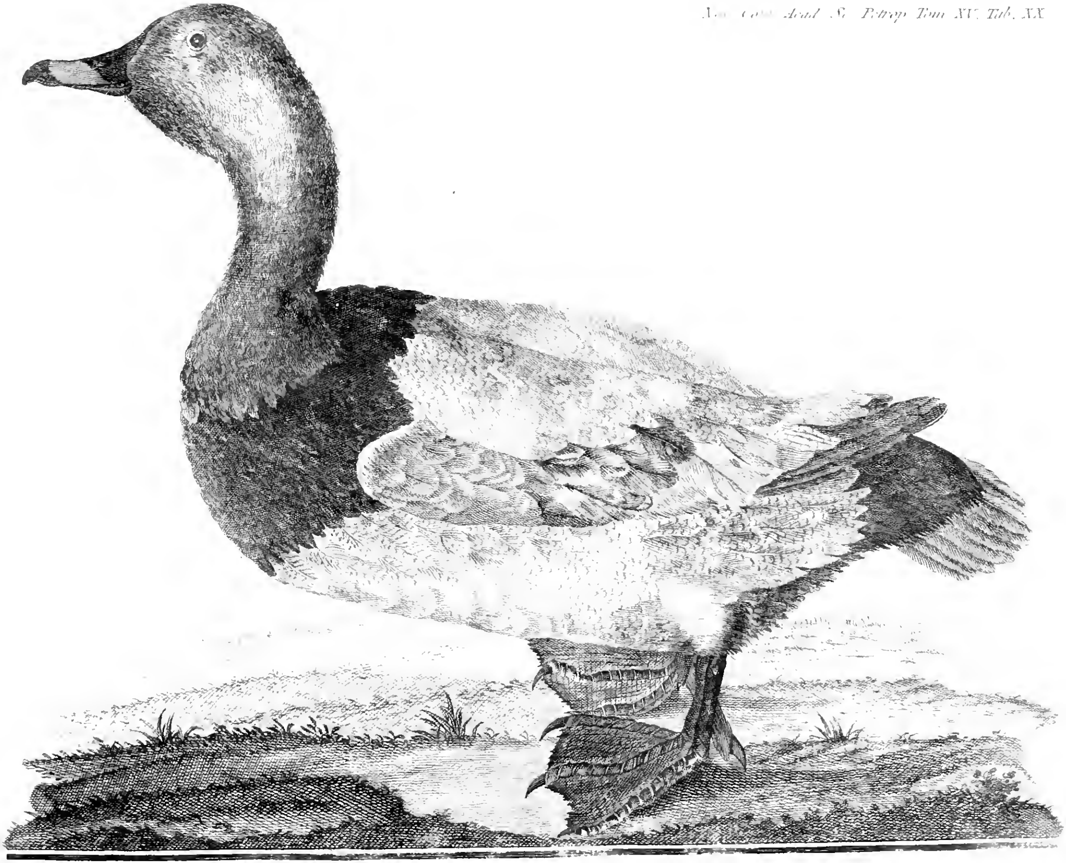


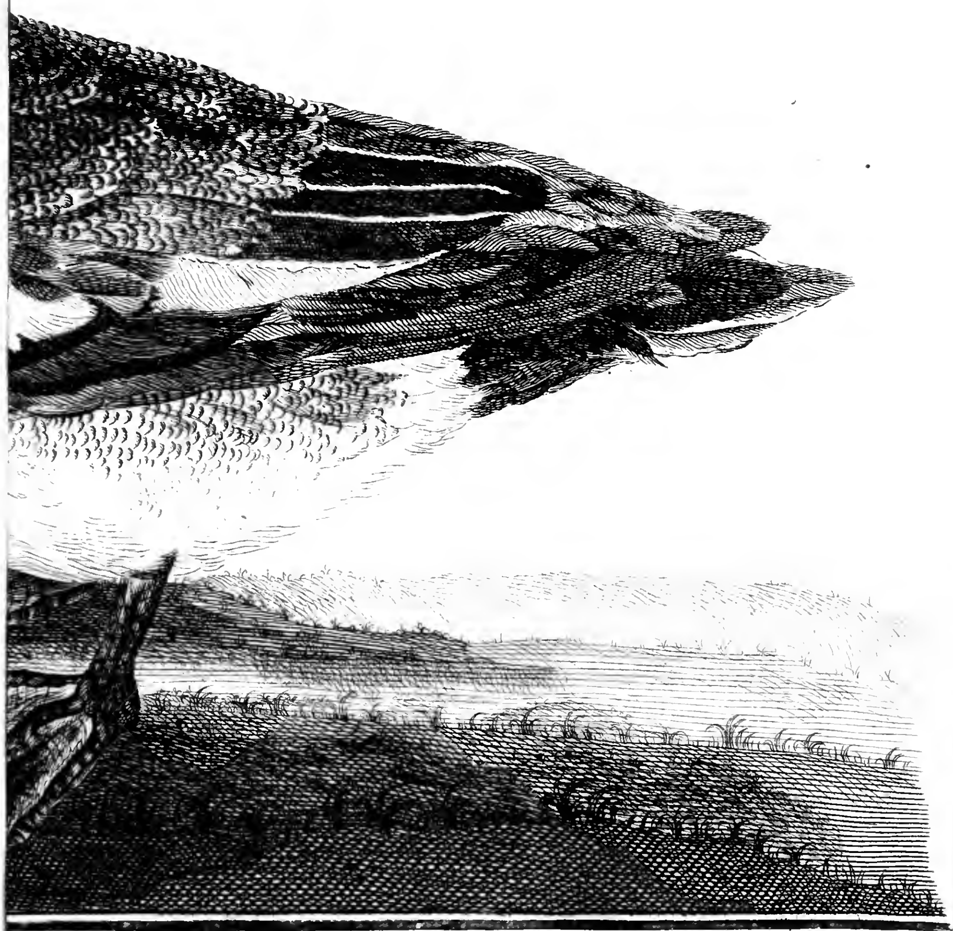


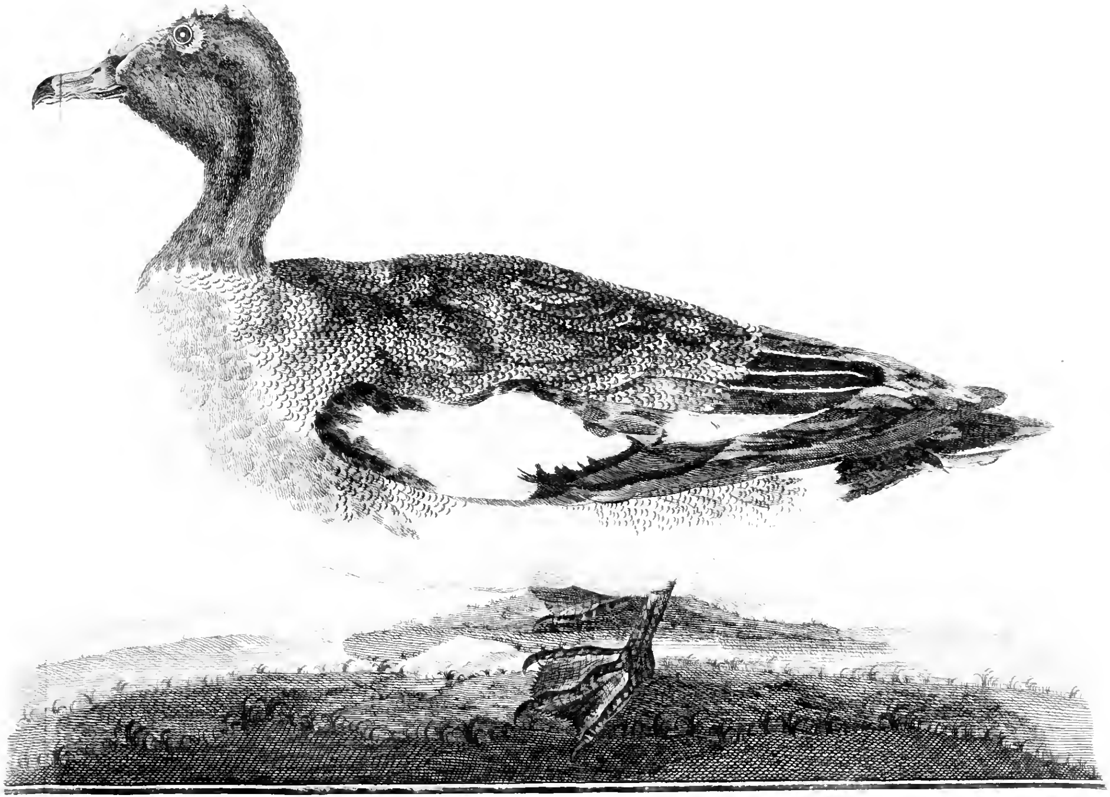


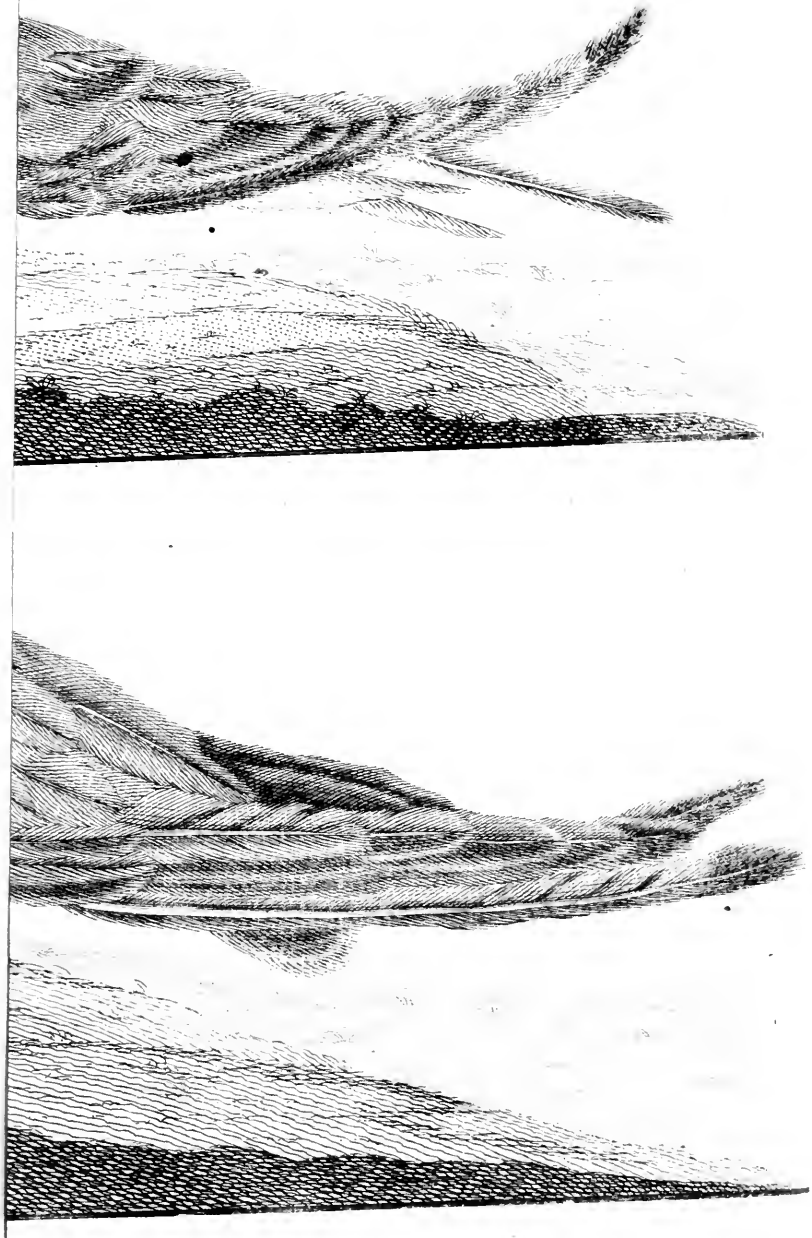












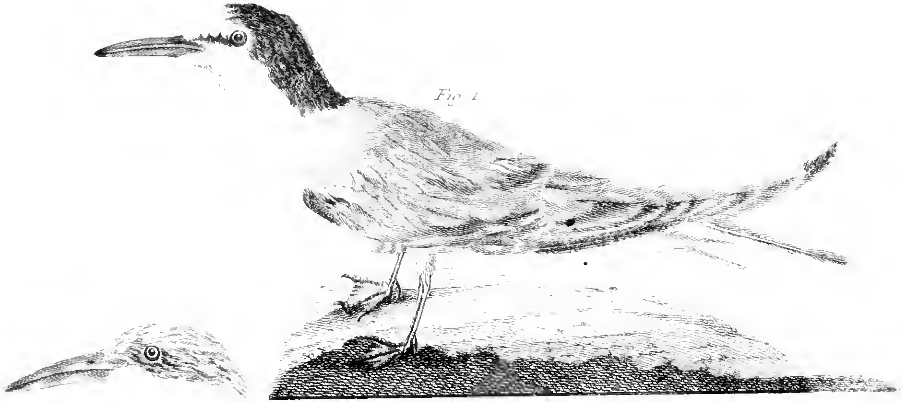


Fig. 1

Fig. 2

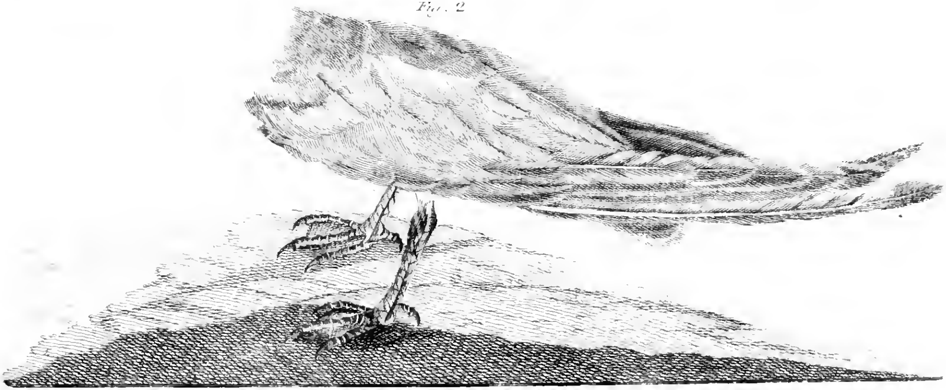


Fig. 2.

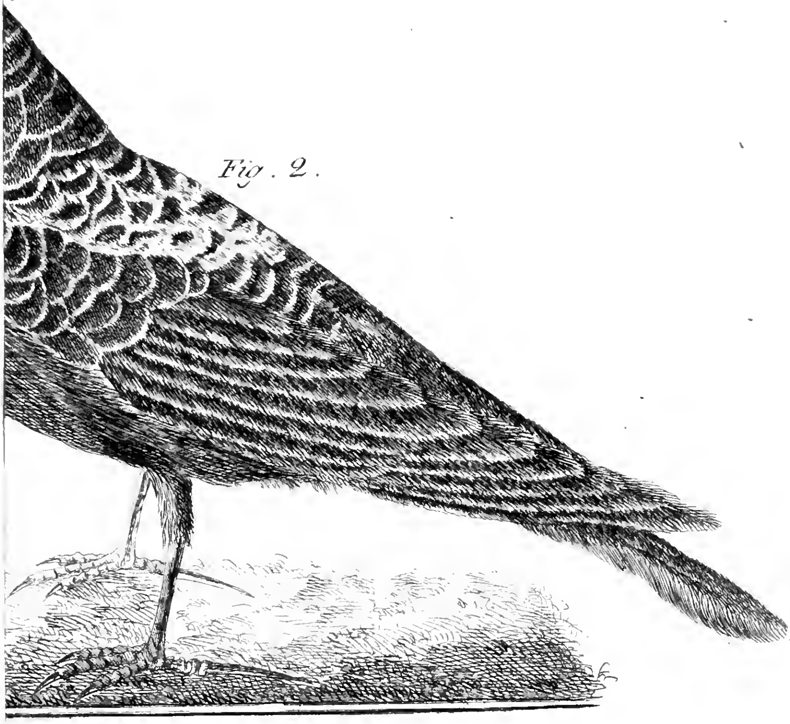
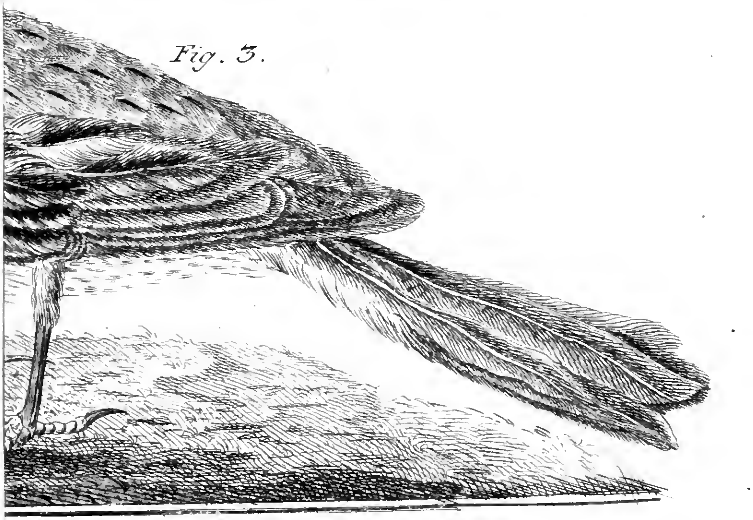


Fig. 3.



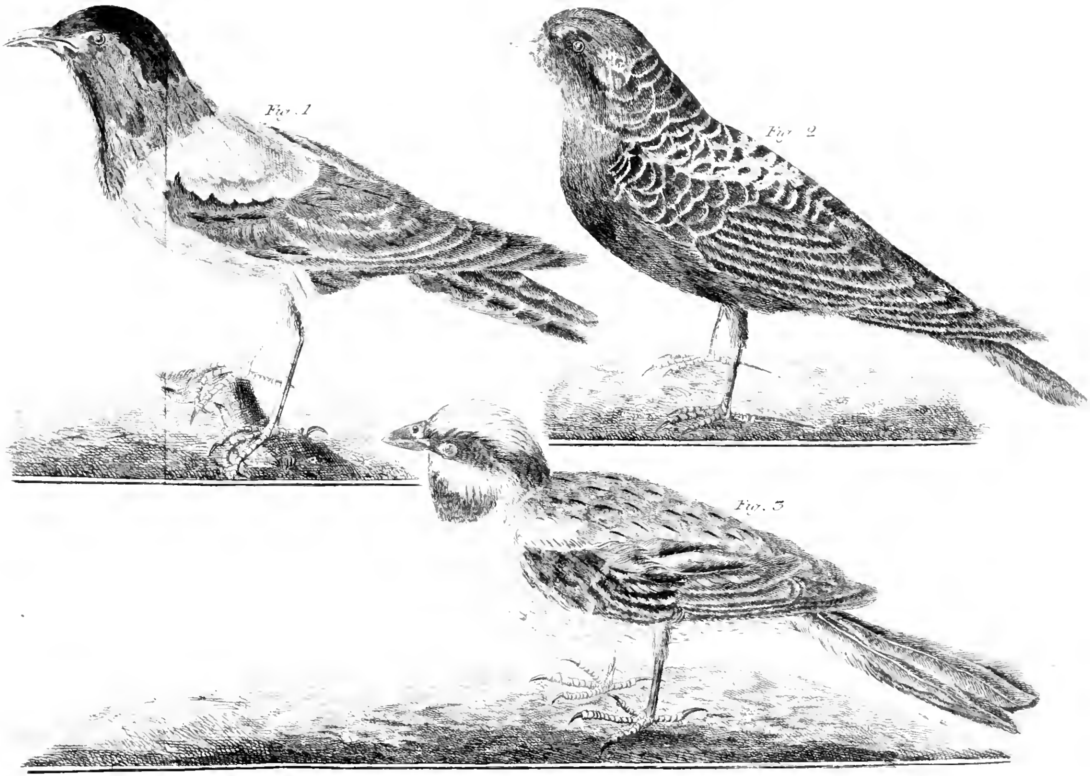
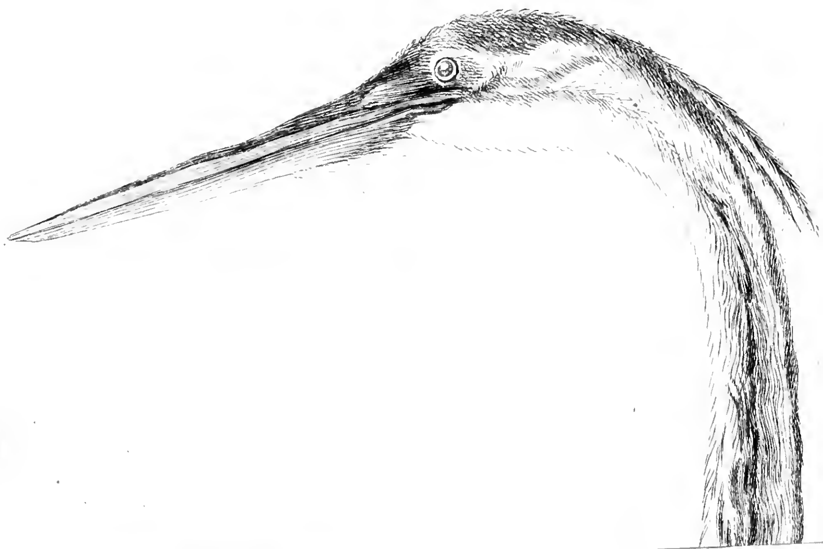


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3

Tav. 67



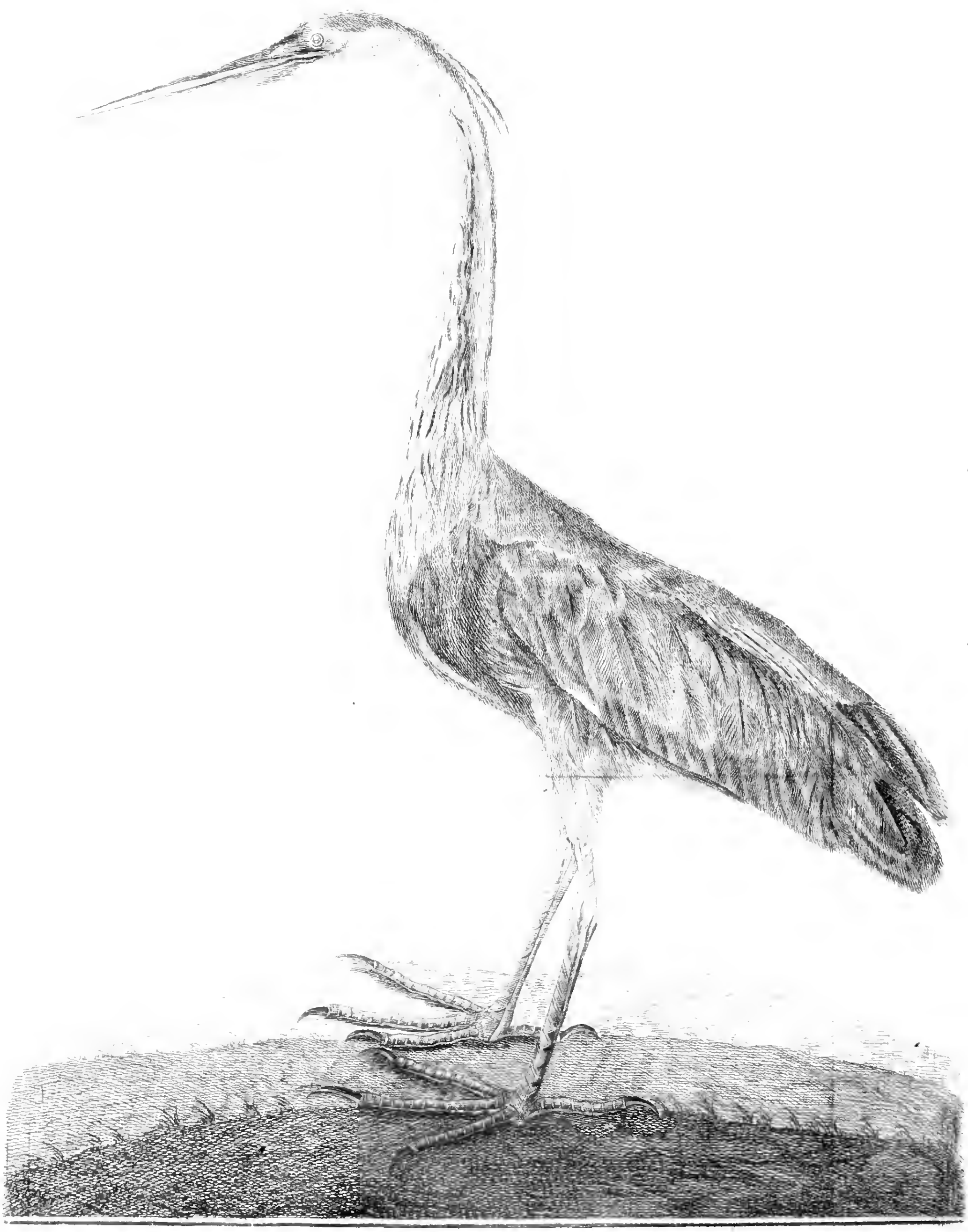


Fig. 2.

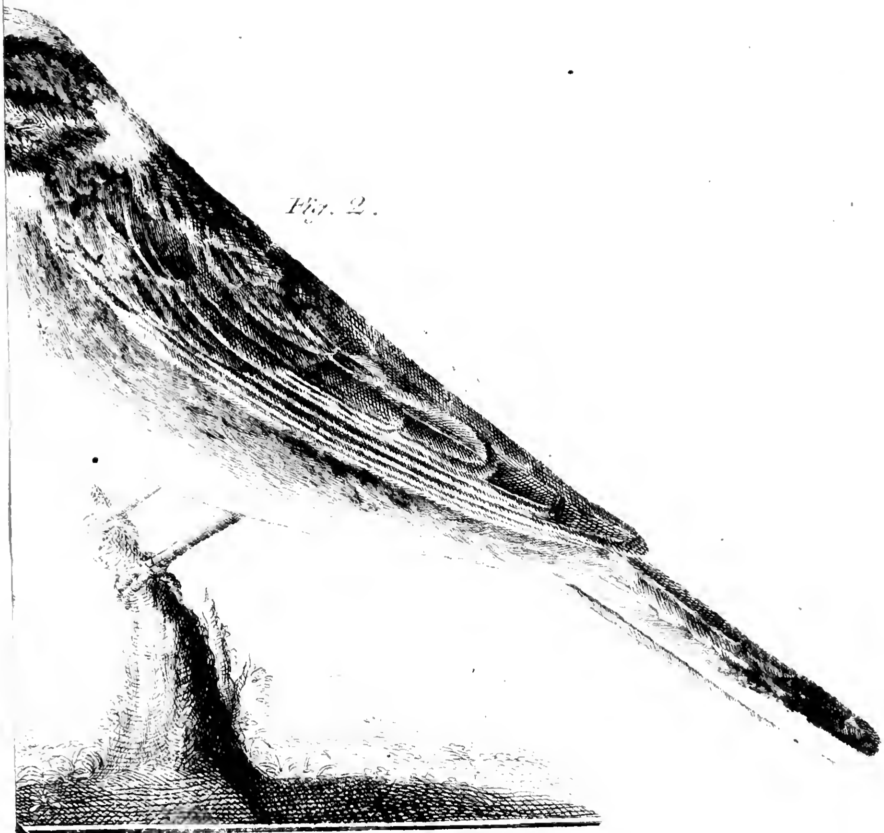
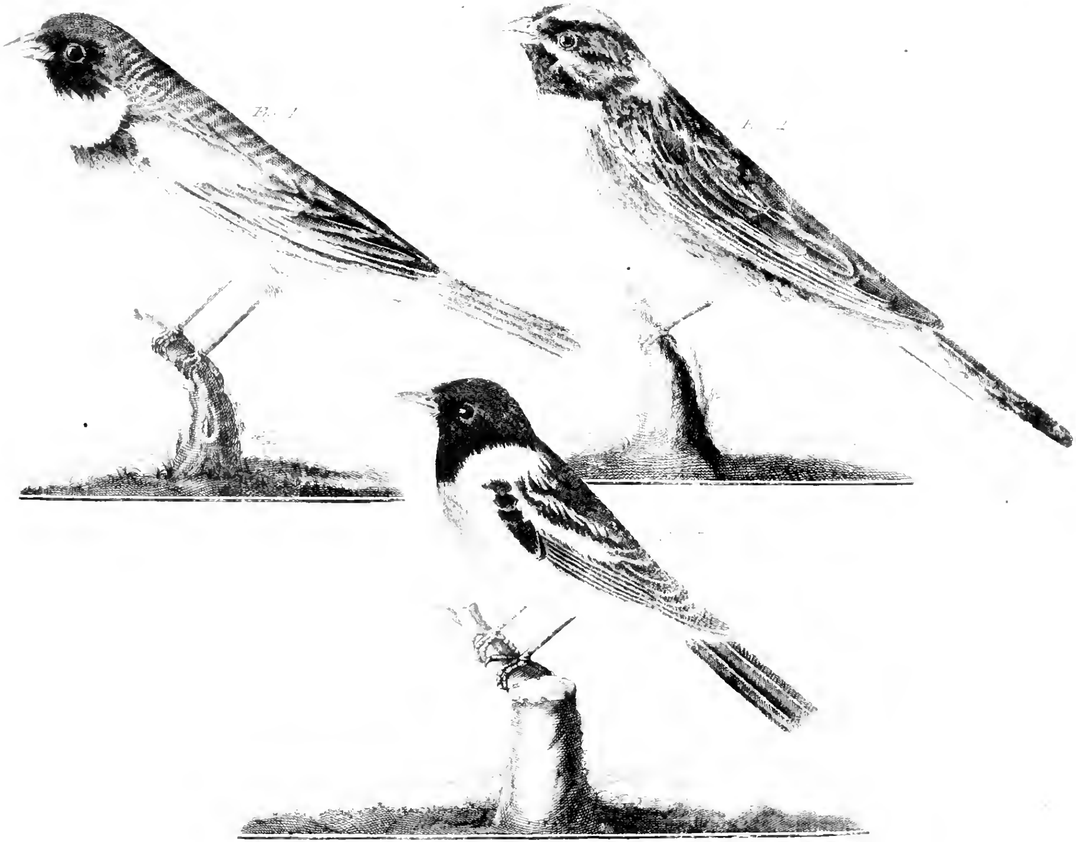


Fig. 3



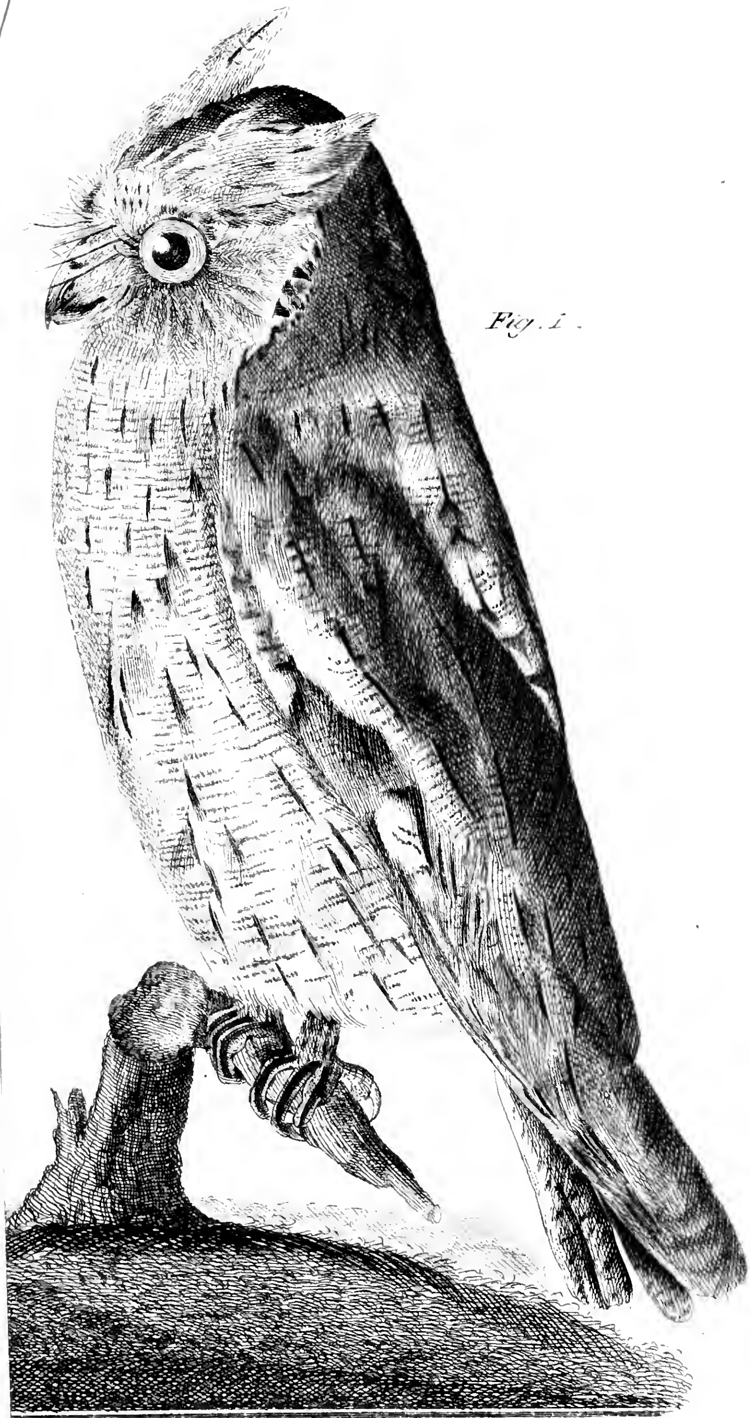


Fig. 1.

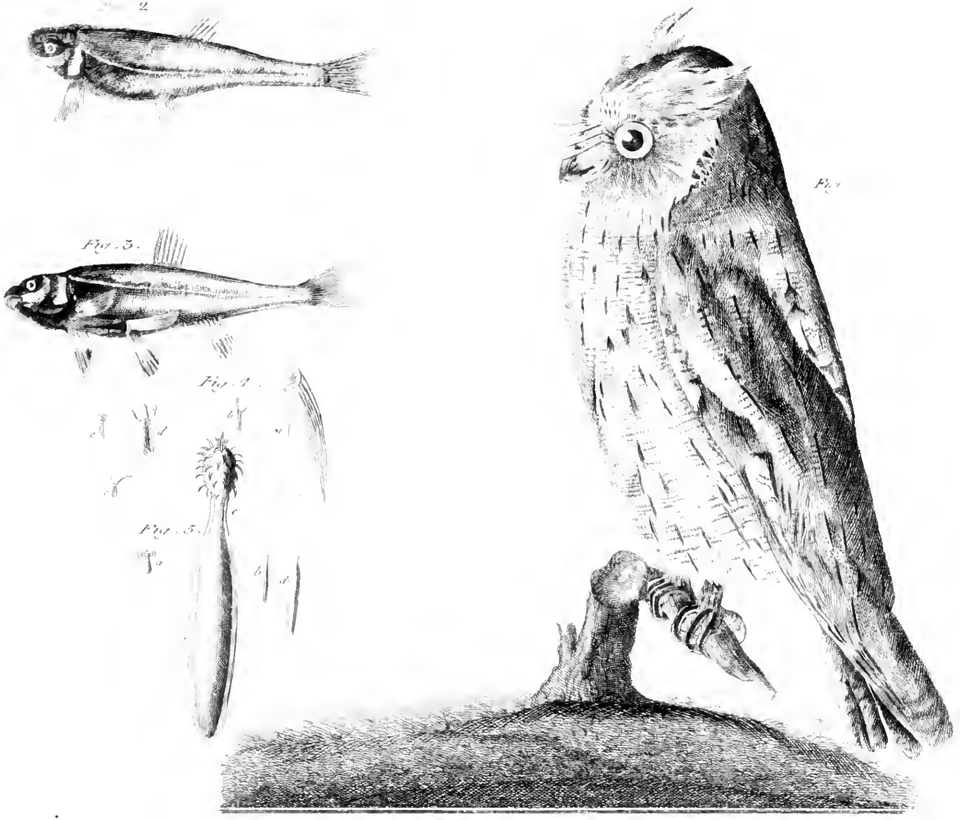

2
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 2

Fig. 3

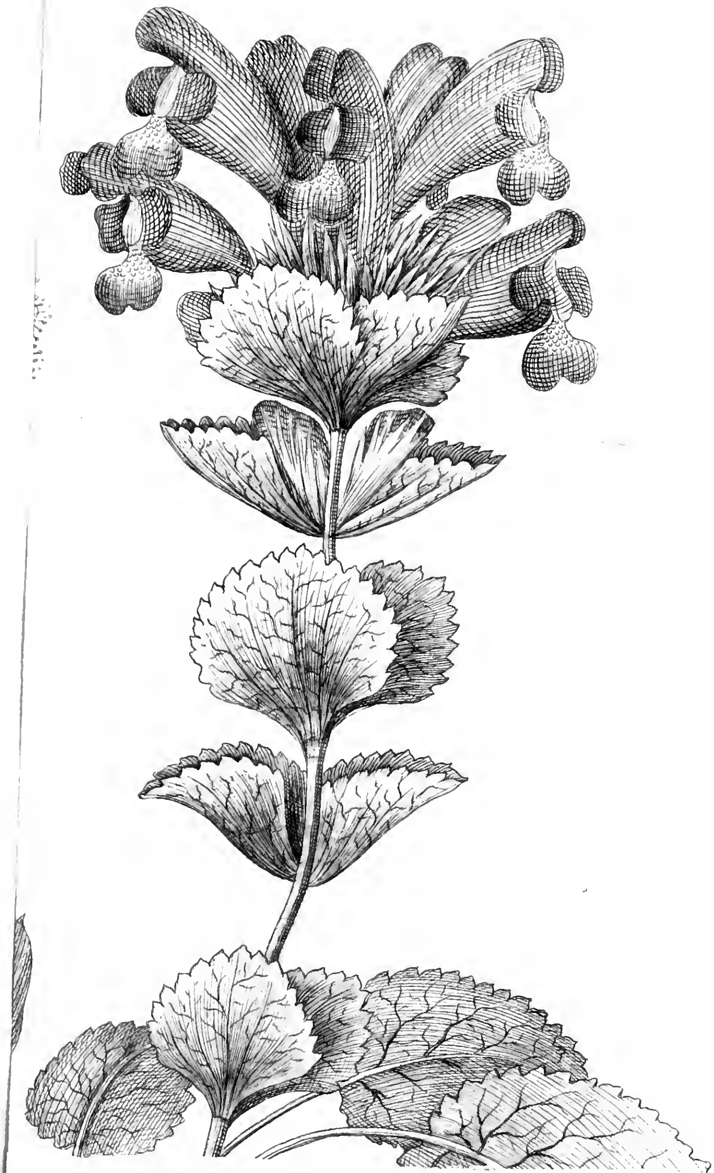



Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
a
b

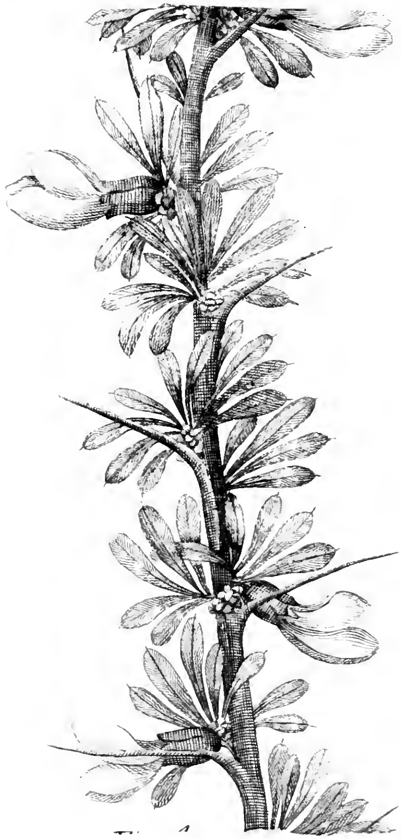



Fig. 5.
a
b
c
d
e
f
g
Fig. 4.

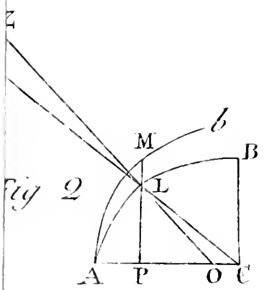


Fig. 2

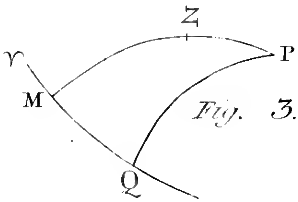
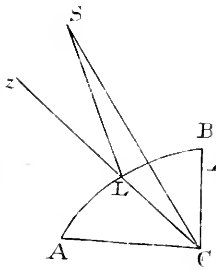


Fig. 3.



4.

Fig. 5.

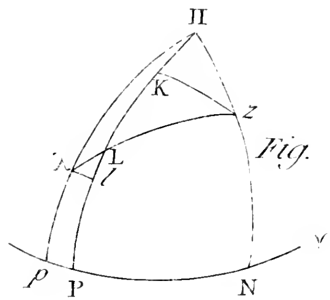


Fig. 6.

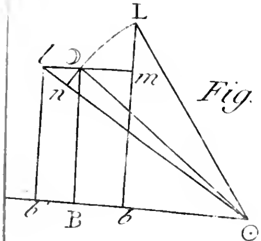


Fig. 8.

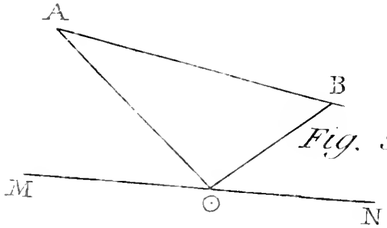
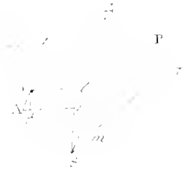


Fig. 9.



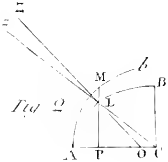


Fig. 2

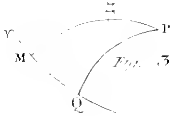


Fig. 3

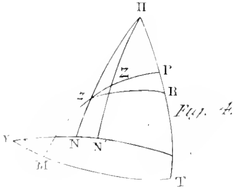


Fig. 4

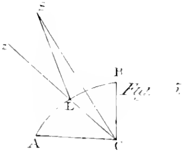


Fig. 5

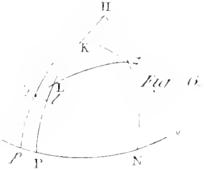


Fig. 6

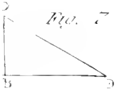


Fig. 7

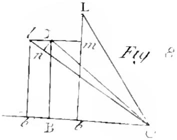


Fig. 8

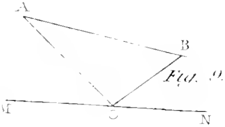


Fig. 9

Novi commentarii Ac
tanae 0

DEC 1 1940

MAR c.Ja

AMNH LIBRARY
100125018