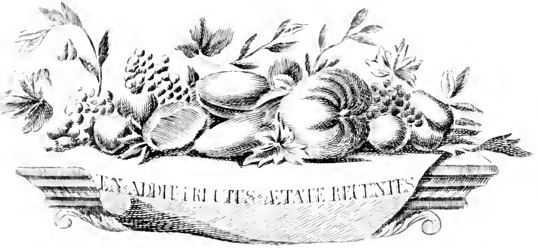
NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XVI.

pro Anno MDCCLXXI.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXII.

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XVI.

MATHEMATICA.

I.

De Solidis quorum ſuperficiem in planum explicare licet.

Auctore L. Eulero pag. 3.

Notum eſt ex ipſa Geometria elementari cylindros et conos ea gaudere proprietate, quod eorum ſuperficies in planum explicari queat, quae proprietas ad omnia deinde corpora cylindrica et conica extenditur, quorum baſibus figura quaecunque tribuitur; contra vero de ſphaera conſtat, eius ſuperficiem nullo modo in planum explicari ſiue ſuperficie plana obduci poſſe; quaeſtio igitur hinc naſcitur maxime notatu digna, quo charactere ea ſolida inſtructa eſſe oportet, quorum ſuperficiem in planum explicare licet, atque eius quaeſtionis tres omnino ſolutiones ab Illuſtr.

Eulero in praeſenti Diſſertatione allatae ſunt. Primae ſolutionis, quae quaſi ex meris principiis Analyticis deriuata eſt, fundamentum in eo verſatur, quod elementum quodcunque ſuperficiei ſolidi, aequetur elemento ſuperficiei planae. Hoc modo quaeſtio iſta Geometrica reducitur ad reſolutionem ſequentis problematis Analytici: *binarum variabilium* t *et* u, *ſex inuenire functiones* $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ *ita comparatas vt formulae* $l\,dt + \lambda\,du$; $m\,dt + \mu\,du$; $n\,dt + \nu\,du$ *ſint integrabiles*; *praeterea vero ſit* $ll + mm + nn = 1$; $\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1$; $l\lambda + m\mu + \nu n = 0$. Hoc autem problema primo intuitu adeo arduum videtur, vt niſi ipſa haec quaeſtio Geometrica media ſuppeditaſſet pro eo ſoluendo, vix aliquam ſolutionem inueniri potuiſſe videtur. Secundae ſolutionis ex principiis Geometricis deductae, fundamentum in eo imprimis ſitum eſt, quod corpora quorum ſuperficies in planum explicari poſſint, ita comparata eſſe debeant, vt ex vnoquoque huius ſuperficiei puncto, ſaltem vna educi poſſit linea recta, quae tota in ſuperficie ſit ſita, tum vero vt binae quaecunque huiusmodi inter ſe proximae in eodem plano ſint conſtitutae, ideoque niſi ſint parallelae in aliquo puncto concurrant. Hoc modo igitur planum fit, per concurſum harum rectarum oriri lineam curvam duplicis curuaturae, cuius omnes tangentes productae in ipſam ſuperficiem corporis quaeſiti incidunt. Quum igitur infinita detur varietas linearum curuarum duplicis curuaturae, iam nullum quidem eſt dubium, quin praeter corpora cylindrica et et conica infinita detur varietas corporum, quorum superficies superficie plana obduci possit. Postquam autem Illustr. Auctor ipsam huius quaestionis solutionem expediuit, operae pretium quoque duxit fusius ostendere, quomodo haec solutio perducat ad resolutionem illius Problematis Analytici, de quo modo loquuti fuimus. Formulae autem quae tum pro valoribus litterarum l; m; n; λ; μ; ν, cum etiam pro valoribus integralium $\int(l\,dt + \lambda\,du)$; $\int(m\,dt + \mu\,du)$; $\int(n\,dt + \nu\,du)$ proponuntur tanta concinnitate et elegantia se commendant, vt non possint non Geometris esse gratissimae. Tertia demum solutio Problematis commemorati deducitur ex Theoria lucis et vmbrae, facili scilicet attentione adhibita liquet, omnes figuras vmbrarum ita esse comparatas, vt in planum explicari queant, quum enim radii luminis propagentur secundum lineas rectas, quae dum corpus opacum stringunt vmbram formant, omnes vero hi radii simul tam corpus lucidum, quam opacum tangant adeoque bini proximi in eodem plano siti sint, iam omnino patet eas conditiones impletas esse, quae ad hoc requiruntur, vt superficies solidi in planum sit explicabilis. Admodum autem simplex est solutio, quae ex hac consideratione deducitur, scilicet si tres coordinatae ad superficiem dicantur x, y, z inuenit Illustr. Auctor naturam huius superficiei his duabus exhiberi aequationibus $y = P + Qx$ et $z = R + Sx$, positis P, Q, R, S functionibus quibuscunque nouae variabilis Φ, modo ista impleatur conditio, vt sit

$\frac{dR}{dS}$

$\frac{dS}{dR} = \frac{dQ}{dP}$. Facile autem ostendi potest secundam Illustr. Auctoris solutionem cum hac tertia perfecte conuenire, adeo vt inter omnes tres allatas solutiones egregius sit consensus.

II.

Methodus noua et facilis calculum variationum tractandi.

Auctore L. Eulero pag. 35.

Quamquam hoc argumentum de calculo variationum ab Illustr. *Eulero* multoties antea sit pertractatum, imprimis in opusculo Tertio Calculi Integralis Volumini annexo, tamen quae in hac Dissertatione occurrunt vt plane noua considerari merentur, siquidem heic in eo occupatus est, vt ostendat calculum variationum, quem antea nouum calculi genus constituere ratus erat, leui facta immutatione referri posse ad secundam partem calculi integralis, qua de integrationibus formularum differentialium disquiritur, in quibus functiones duarum variabilium occurrunt. Quum enim calculus variationum in eo versetur, vt si proposita fuerit quaecunque relatio binarum variabilium x et y et ea aliquantillum varietur, inuestigandum sit, quam mutationem subeant non solum x et y sed etiam eorum differentialia quaecunque ex huiusmodi variatione;

tione; omnino liquet has variationes facile assignari posse si y consideretur vt functio binarum variabilium x et t, quo ipso variatio quaesita ipsius y alias signo δy exprimi solita, jam exprimetur hac formula $dt(\frac{dy}{dt})$. Si nimirum y concipiatur vt applicata alicuius lineae curuae cuius abscissa sit x, in calculo variationum requiritur, vt relatio assignetur, quae omnes alias curuas huic proximas complectitur; manifestum autem est omnes has curuas exprimi posse aequatione $y = V$, vbi V functio est quaecunque ipsorum x et t, modo ita fuerit comparata, vt posito $t = o$ prodeat $V = X$, ideoque $y = X$ aequatio quae pro curua principali locum habere debet. In ipsis vero variationibus inuestigandis ita versatur Illustr. *Eulerus*, vt consideret functiones secundum ordinem expressionum, tractando scilicet primum formulas quae x et y tantum continent, deinde formulas quae praeter x et y eorum differentialia primi, secundi vel altiorum graduum complectuntur, tum vero progreditur ad expressiones quae formulas quoque integrales inuoluunt, invenit autem variationem formulae integralis $\int Z\,dx$, posito

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \text{ etc.}$$

vbi

$$p = \frac{dy}{dx};\; q = \frac{dp}{dx} \text{ etc.}$$

hac exprimi formula:

$$dt\int dx\left(N\left(\frac{dy}{dt}\right) + P\left(\frac{d\,dy}{dx\,dt}\right) + Q\left(\frac{d^2y}{dx^2\,dt}\right) + R\left(\frac{d^4y}{dx^4\,dt}\right) + \text{etc.}\right).$$

 Per-

Perſpicuum autem eſt huiusmodi expreſſiones $(\frac{dy}{dt})$ $(\frac{ddy}{dx\,dt})$ determinatos valores adipiſci non poſſe, niſi y conſideretur vt determinata functio ipſorum x et t, in doctrina autem variationum eiusmodi relatio inter x et y vt plane incognita ſpectari ſolet, imprimis quando huius doctrinae applicatio fit, ad quaeſtiones de maximis et minimis, vbi requiritur vt huiusmodi variatio in nihilum abeat. Oſtendendum igitur fuit, quomodo formula ſupra allata in aliam transformari poſſit, ita comparatam, vt ſub ſigno ſummatorio non occurrat niſi $(\frac{dy}{dt})$, ex quo colligitur, pro caſu variationis euaneſcentis, membrum iſtud ſigno ſummatorio affectum in nihilum abire. Methodus haec, quae ad quascunque expreſſiones duarum variabilium patet, etiam facile adplicari poteſt, ad formulas quae tres variabiles x, y, z inuoluit, in hoc autem negotio neceſſum eſt vnam earum vti z tamquam functionem binarum reliquarum x et y conſiderare. Heic igitur regulae praeſcribuntur pro inuenienda variatione expreſſionum quae vel ſolas variabiles x, y, z inuoluunt, vel praeterea differentialia quaecunque ipſius z, vel denique formulam integralem duplicatam $\int\int Z\,dx\,dy$ vbi Z eſt functio quaecunque variabilium x, y, z et differentialium quorumcunque ipſius z, integratio autem ita inſtituenda eſt, vt pro prima integratione ſola x vt variabilis tractetur, pro ſecunda autem ſola y. Simili vero modo patet huius Methodi applicationem facile fieri poſſe, ad formulas quatuor vel plures variabiles involuunt-

vol-

voluentes. Huiusmodi autem formularum complicatiorum euolutio, quum parum fructuosa sit, et praeterea vix rite adumbrari possit, nisi omnia phaenomena formularum quae binas tantum variabiles inuoluunt accurate fuerint explicata; hunc in finem Illustr. Auctor singulas partes, quae expressionem pro variatione formulae $\int Z\, d\, x$ ingrediuntur ad examen reuocare vtile duxit. Huic autem explicationi demum subiunxit dilucidationes quasdam circa curuas maximi minimiue proprietate praeditas, idque eo potiori cum iure, quod vsus calculi variationum imprimis in huiusmodi quaestionibus resolvendis, sit insignis. Quaestiones autem de maximis et minimis in varias distribui possunt classes, prout scilicet aequatio pro maximo vel minimo, vel finita est, vel differentialia primi, secundi aut altiorum graduum inuoluat. Animaduertit autem Illustr. Auctor, quod quemadmodum pro prima classe aequatio omnino est determinata, et curua huiusmodi quaestionibus satisfaciens, non detur nisi vnica, ita pro reliquis classibus certas praescribi conditiones, vt determinata assignari possit curua quaestioni satisfaciens, easque tanto plures, quanto sublimioris gradus differentialia inuoluit formula maximi et minimi. Sic pro secunda classe, vbi differentialia primi gradus inuoluuntur, haec praescribitur conditio, vt curuae inter quas maxima exquiri debet, per data duo transeat puncta, pro tertia autem classe quae differentialia secundi gradus inuoluit, insuper praescribitur, vt datae sint tangentes curuarum in datis his punctis.

III.

De fummatione ferierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione et vfu.

Auctore Dan. Bernoulli pag. 71.

Quamuis Scientiae Mathematicae et principiorum euidentia et conclufionum certitudine, reliquis omnibus palmam praeripiant, fatendum tamen eft, multa in iisdem occurrere, quae primo intuitu non folum paradoxa, fed adeo abfurda videntur; huiusmodi eft fummatio ferierum recurrentium, quippe quae faepius indicat fummam feriei alicuius propofitae, magis vel minus a veritate difcrepantem, quum tamen ipfa operatio Analytica indicaret fummationem allatam pro genuina effe habendam. Sic pro ferie fimpliciffima $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. cuius fumma ftatuitur $= \frac{1}{2}$ facile quidem liquet vbicunque haec feries abrumperetur fummam allatam femper fore erroneam, ratio autem cur pro vera haberi queat in eo fita eft, quod quum feries nunquam finiri fupponatur, aequalis ratio fit quae vrgeat vt eius fumma fit 1 et 0, vnde fumma ftatuenda eft quantitas quae aequaliter diftat ab 1 et 0, hoc eft $= \frac{1}{2}$, quod etiam operationes Analyticae indicant ex. gratia fi euoluatur fractio $\frac{1}{1+x}$ et poft euolutionem ponatur $x = 1$. Neque tamen haec fumma *proprie* loquen-

loquendo ſiue vera ſeu falſa dici poteſt, quod non ſolum pro exemplo allato, vbi ſeries ad ſummam neque conuergit, nec ab ea diuergit, ſed etiam pro ſeriebus diuergentibus locum habet. Sic ſumma ſeriei $1 - 2 + 3 - 4$ etc. inuenitur eſſe $= \frac{1}{4}$, eiusque aſſerti veritas non ſolum per operationes Analyticas demonſtrari poteſt, ſed etiam inde confirmatur, quod ex hac ſumma aliarum quantitatum valores deducantur veritati plane congruae. Quum enim per euolutionem formulae $\frac{1}{(1+x)^2}$ oriatur $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4$ etc., inde facile deducitur $x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ etc. $=$ Log. $(1+x)$, atque ſi ponatur $x = 1$ inde habetur Log. $2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc., de cuius veritate quum dubitare non liceat, neque diffitendum eſt, quin ſumma ſeriei $1 - 2 + 3 - 4 + 5$ etc. ſit $= \frac{1}{4}$. Pro ſeriebus recurrentibus vbi datur certa periodus terminorum, quae continuo recurrit, facile ſumma aſſignari poteſt, ſi enim in periodo continuo recurrente primus terminus ſit a, ſumma primi et ſecundi b, ſumma ter priorum c etc. et numerus terminorum in hac periodo n, erit ſumma ſeriei $= \frac{a+b+c \text{ etc.}}{n}$, modo ſumma cuiusuis periodi integrae ſit o; ratio autem in eo ſita eſt, quod ſi ſeries circa primum periodi terminum abrumpatur ſumma ſit a, ſi circa ſecundum b, circa tertium c etc. igitur quum hi valores pro ſumma aequo iure gaudeant, ſumma ſtatuenda erit $\frac{a+b+c \text{ etc.}}{n}$. Ad huiusmodi ſeries pertinent, qui formantur ex ſinubus vel coſinubus arcuum ſecundum

cundum arithmeticam progreſſionem procedentium, et quum in genere ſit:

$$\text{coſ.}\, x + \text{coſ.}\, 2x + \text{coſ.}\, 3x + \text{coſ.}\, 4x + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}$$

ceu a plurimis Auctoribus demonſtratum reperitur, ſi pro x ponatur $2q$, $\frac{4}{3}q$; q; $\frac{2}{3}q$ etc. deſignante q angulum rectum, habebuntur ſeries recurrentes diverſae, pro quibus ſumma continuo eſt $= -\frac{1}{2}$. Singularis autem heic occurrit caſus, qui a regula generali differt, ſi ſcilicet ponatur $x = 4nq$, deſignante n numerum integrum, tum enim haec ſeries abit in

$$1 + 1 + 1 + 1 \text{ etc.}$$

cuius ſumma certe nullo ſenſu ſtatui poteſt $= -\frac{1}{2}$. Pro ſinuum progreſſione ſequens habetur formula:

$$\text{Sin.}\, x + \text{Sin.}\, 2x + \text{Sin.}\, 3x + \text{Sin.}\, 4x + \text{etc.} = \frac{\text{Sin.}\, x}{2(1 - \text{coſ.}\, x)},$$

cuius aequationis veritas, quamuis ab Illuſtr. huius diſſertationis Auctore iam egregiae ſtabilita ſit, tamen eandem facillimo hoc ratiocinio illuſtrare non pigebit: ponatur

$$\text{Sin.}\, x + \text{Sin.}\, 2x + \text{Sin.}\, 3x + \text{Sin.}\, 4x + \text{etc.} = S,$$

mutiplicetur tota aequatio per coſ. x et fiet

$$\text{Sin.}\, x + 2\,\text{Sin.}\, 2x + 2\,\text{Sin.}\, 3x + 2\,\text{Sin.}\, 4x + \text{etc.} = 2S\,\text{coſ.}\, x$$

ideoque

$$\text{Sin.}\, x = 2S\,(1 - \text{coſ.}\, x).$$

Licet ea quae in hac Diſſertatione ab Illuſtr. *Bernoullio* allata ſunt, multis in caſibus iis dubiis quae circa

circa ſummationes ſerierum oriuntur, diluendis ſufficere queant; tamen alii atque alii dantur caſus, quibus explicationes ab Ipſo allatae minus ſatisfacere videntur, quamobrem non diffitemur nobis magis placere eam explicationem, quam Illuſtr. *Eulerus* in Inſtitutionibus Calculi Differentialis Cap. III. §. 110. adfert, quippe qua omnibus dubiis plane ſatisfieri poſſe exiſtimamus.

IV.

Euolutio formulae integralis $\int x^{f-1}\,dx\,(lx)^{\frac{m}{n}}$ integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extenſa.

Auctore L. Eulero pag. 91.

Quum qui in hac Diſſertatione occurrunt calculi Analytici ita comparati ſint, vt eorum ſummarium quoddam vix tradi queat, Mathematum peritos ad ipſam diſſertationem ablegamus, id tantum monuiſſe contenti, quod Illuſtr. *Eulerus* heic fuſius proſequutus ſit, quae olim in Tomo V. Comment. Petropol. de integrationibus formularum differentialium ſub certis conditionibus peragendis iam expoſuit.

V.

V.

Problematis cuiusdam Geometrici prorſus ſingularis euolutio.

Auctore L. Eulero pag. 140.

Problema Geometricum, cuius euolutionem heic tradit Illuſtr *Eulerus* in eo conſiſtit, vt quaeratur linea curua, cuius dum ducitur tangens quaecunque datae lineae rectae occurrens, et angulus inter tangentem et rectam datam interceptus biſſecetur, recta iſta biſſecans curuae perpetuo ſit normalis. Perſpicuum quidem eſt omnes circulos qui datam rectam habent tangentem, huic problemati ſatisfacere, dubium tamen adhuc relinquitur vtrum praeter circulum aliae dentur lineae curuae, quae conditiones Problematis adimpleant. Hanc igitur quaeſtionem eo maiori attentione dignam iudicauit Illuſtr. Auctor, quod inuenta iam ſolutione Analytica, tamen dubium ſuperſit, vtrum vnica curua an plures ei ſatisfaciant. Quod vero ad ipſam ſolutionem Analyticam attinet, ea inter difficiliores haberi meretur, quod primo intuitu nexus inter bina iſta puncta curuae, prius vbi tangitur et alterum ei correlatum vbi normaliter traiicitur, ſe non manifeſtet. Ad nexum autem hunc indagandum tangens curuae ducta quoque concipiatur ad punctum poſterius, quo ipſo euidens eſt angulum quem haec tangens facit cum

cum recta data, dimidium fore illius quem tangens prior cum eadem recta facit, vnde demum deducitur, ſi angulus dimidius dicatur ω, tangens ipſi reſpondens t et Tangens prior T, fore T ſimilem functionem 2ω ac t eſt ipſius ω. Hac autem proprietate praeſuppoſita, facillimum iam eſt, aequationem Analyticam pro curua inuenire, cum ſcilicet duplex quaeritur valor portionis rectae datae interceptae inter binas tangentes, quam aequationem Analyticam praeter T et t angulus ω ingreditur. Loco autem aequationis inter T, t et ω, alia quaeri poteſt inter reſectas rectae datae et angulum ω, vel etiam inter normales ad curuam in binis punctis correlatis et hunc angulum, vel etiam inter binos arcus curuae et hunc angulum, vel inter curuae radios oſculi ad bina puncta correlata et eundem angulum etc. Quum autem his aequationibus tres incognitae inſint, videretur easdem problemati reſoluendo non ſufficere, notandum tamen eſt, reapſe binas heic occurrere aequationes, quarum altera exinde deſumitur, quod ſit ex, cauſſa T talis functio ipſius 2ω ac t eſt ipſius ω. Et ſi haec conditio in calculum introducatur inueniri poteſt aequatio, quae praeter angulum ω, vnicam tantum variabilem inuoluit. Ad hoc comprobandum conſideremus aequationem Illuſtr. Auctoris §. 8. qua relatio definitur inter reſectas rectae datae x, X et angulum ω, quae ita eſt expreſſa

$$X \operatorname{coſ.} \omega = \frac{dx}{d\omega}. \operatorname{Sin.} \omega + x \operatorname{coſ.} \omega,$$

et poſito $x \operatorname{Sin.} \omega = y$, nec non $X \operatorname{Sin.} 2\omega = Y$,

 in

in hanc abit

$$Y = \frac{2\,dy}{d\omega}.\ \text{fin.}\ \omega\ ,$$

vbi Y fimilis debet effe functio ipfius $2\,\omega$, ac eft y ipfius ω. Ponamus igitur effe $y = \Phi:\omega$ eritque

$$Y = \Phi:(2\omega) = \Phi:\omega + \omega\frac{d.\Phi:\omega}{d\omega} + \frac{\omega^2}{1.2}\ \frac{dd.\Phi:\omega}{d\omega^2} + \frac{\omega^3}{1.2.3}\ \frac{d^3.\Phi:\omega}{d\omega^3} + \text{etc.}$$

vnde pro $\Phi:\omega$ iterum fubftituto y habebitur

$$y + \frac{\omega\,dy}{d\omega} + \frac{\omega^2}{1.2}\ \frac{dd.\,y}{d\omega^2} + \frac{\omega^3}{1.2.3}\ \frac{d^3y}{d\omega^3} + \text{etc.} = \frac{2\,dy}{d\omega}\ \text{Sin.}\ \omega$$

aequatio quae binas tantum variabiles y et ω inuolvit. Quaeftio igitur eo reducitur, vtrum praeter circulum aliae lineae curuae dentur, quae hanc aequationem adimpleant? Si valor ipfius y exprimatur per feriem, in qua poteftates ipfius ω exponentes integros et pofitiuos tantum habent, facile quidem oftendi poteft, pro huiusmodi fuppofitione, circulum folum fatisfacere, quum vero nulla adeffe videatur ratio, cur pro y eiusmodi expreffionem fupponere non liceret, vbi exponentes poteftatum ipfius ω occurrerent fiue negatiui, fiue fracti, omnino probabile eft praeter circulum dari infinitas lineas curuas quae Problemati allato fatisfaciunt.

VI.

VI.

Confiderationes Cyclometricae.

Auctore L. Eulero pag. 160.

Varia in hac differtatione proponuntur ab Illuftr. eius Auctore circa conftructionem Lunularum quadrabilium, notum autem eft hanc quaeftionem eo redire, vt quaerantur bini anguli, qui inter fe duplicatam tenent rationem finuum, adeo vt fi vnus eorum dicatur m alter n, effe debeat $m : n : :$ Sin m^2: Sin. n^2. Communiter quidem in refolutione problematis de lunulis quadrabilibus fupponi folet numeros m et n effe commenfurabiles, demonftratum tamen adhuc non inuenimus, nullo alio cafu folutionem Geometricam exfpectari poffe. Ex ipfa quaeftionis natura intelligitur quidem rationem finuum effe debere algebraicam quum alioquin ratio angulorum algebraice definiri non poffit, inde tamen non fequi videtur, hanc rationem numeris tantum integris circumfcribi. Quam vero Methodus adhuc defideretur quo hoc problema etiam per angulos non commenfurabiles expediri poteft, Illuftr. Auctor heic praeprimis fibi confiderandos propofuit cafus, quibus problematis folutio per circulum et normam expediri poteft, qui cafus numero habentur quinque. Si enim ftatuatur $m = \frac{1}{2} \mu \omega$ et $n = \frac{1}{2} \nu \omega$, fequentes cafus Geometricam admittunt conftructionem per circulum

culum et normam I°. si $m = 45°$ et $n = 90°$, qui est casus notissimae Lunulae Hippocratis, II. si $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$, III. si $m = \omega$ et $n = {}_{3}\omega$, IV. si $m = {}_{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$, denique V. si $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$. Possunt vero omnes hi casus facillime detegi, si statuatur $m = \mu z$ et $n = \nu z$, quo facto erit

$$\mu : \nu :: \text{Sin}\, \mu z^2 : \text{Sin}.\, \nu z^2 \text{ seu } \text{Sin}.\, \mu z : \text{Sin}.\, \nu z :: \sqrt{\mu} : \sqrt{\nu},$$

quum enim sit

$$\text{Sin}.\, \mu z = \text{Sin}.\, z\big(2^{\mu-1} \text{cos}.\, z^{\mu-1} - (\mu-2)\, 2^{\mu-3} \text{cos}.\, z^{\mu-3} + \tfrac{(\mu-3)(\mu-4)}{1.\ 2}\, 2^{\mu-5} \text{cos}.\, z^{\mu-5} - \text{etc.}\big)$$

$$\text{Sin}.\, \nu z = \text{Sin}.\, z\big(2^{\nu-1} \text{cos}.\, z^{\nu-1} - (\nu-2)\, 2^{\nu-3} \text{cos}.\, z^{\nu-3} + \tfrac{(\nu-3)(\nu-4)}{1.\ 2}\, 2^{\nu-5} \text{cos}.\, z^{\nu-5} - \text{etc.}\big)$$

inde fiet

$$\sqrt{\nu}\big(2^{\mu-1} \text{cos}.\, z^{\mu-1} - (\mu-2)\, 2^{\mu-3} \text{cos}.\, z^{\mu-3} + \tfrac{(\mu-3)(\mu-4)}{1.\ 2}\, 2^{\mu-5} \text{cos}.\, z^{\mu-5} - \text{etc.}\big) =$$
$$\sqrt{\mu}\big(2^{\nu-1} \text{cos}.\, z^{\nu-1} - (\nu-2)\, 2^{\nu-3} \text{cos}.\, z^{\nu-3} + \tfrac{(\nu-3)(\nu-4)}{1.\ 2}\, 2^{\nu-5} \text{cos}.\, z^{\nu-5} - \text{etc.}\big).$$

Ponamus iam μ esse numerum minorem, et substituamus pro μ numeros integros 1, 2, 3 etc., quo facto patebit pro $\mu = 1$, ν tres adipisci posse valores, vt aequatio fiat quadratica vel ad quadraticam facile deprimenda, erit scilicet ν vel $= 2$, quo casu $\text{cos}.\, z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vel $\nu = 3$, vnde oritur aequatio

$$\sqrt{3} = 4 \text{cos}.\, z^2 - 1, \text{ seu } \text{cos}.\, z^2 = \tfrac{1+\sqrt{3}}{4}, \text{ vel } \nu = 5,$$

ex quo fit

$$\sqrt{5} = 16 \text{cos}.\, z^4 - 3.\, 4 \text{cos}.\, z^2 + 1,$$

aequatio biquadratica sed quae ad quadraticam facile depri-

deprimitur. Si μ ponatur $= 2$, vnicus habetur valor ipſius ν ſcilicet $= 3$, vnde prodit aequatio quadratica

$$2 \sqrt{3} . \text{coſ.}\, z = 4 \sqrt{2} . \text{coſ.}\, z^2 - \sqrt{2}.$$

Denique pro $\mu = 3$, prodit $\nu = 5$ vt aequatio fiat biquadratica, ad quadraticam deprimenda:

$$4 \sqrt{5} . \text{coſ.}\, z^2 - \sqrt{5} = 16 \sqrt{3} \,\text{coſ.}\, z^4 - 3 . 4 \sqrt{3} . \text{coſ.}\, z^2 + \sqrt{3}.$$

Si alia ſupponatur ratio inter μ et ν conſtructio lunularum ad altiores locos Geometricos aſſurgit, quae tamen ſemper haberi debet pro Geometrica ſi μ et ν inter ſe ſint commenſurabiles.

VII.

De criteriis integrabilitatis formularum differentialium Diſſertatio Secunda.

Auctore A. I. Lexell pag. 171.

Quum in priori de hoc argumento Diſſertatione, Tomo XV. Nov. Comment. inſerta nulla allata ſint exempla, quibus vſus et applicatio doctrinae de criteriis integrabilitatis illuſtrari poſſet, Cl. Auctor in praeſenti diſſertatione huiusmodi defectum ſupplere conſtituit, in anteceſſum autem varia praemittere ipſi e re viſum eſt, quae ad ea aut ſtabilienda aut vlterius explicanda, quae in priori Diſſertasertatione tradita sunt, necessaria esse poterunt. Et primum quidem multo exactiorem heic proponere constituit demonstrationem insignis istius Theorematis *Euleriani*, quod ipsum quasi fundamentum totius huius doctrinae censeri potest, quam quae in priori Dissertatione occurrit, et de qua obseruat, eam haud leuibus dubiis esse obnoxiam, quum contra haec iam allata summum prae se ferat rigorem. Deinde formulas recenset, quae integrabiles esse debent, vt formulae $dx \int V dx$ vel $dx \int dx \int V dx$ integrabiles fiant. Porro cum in priori dissertatione conditiones quidem exposuisset, quibus integrabilitas formulae differentialis duplicatae $\int\int V dx dy$ continetur, iam quoque tradidit conditiones quae locum habere debent, vt huiusmodi formula duplicata bis vel ter etc. sit integrabilis, hoc est vt $\int\int dx dy \int\int V dx dy$ vel $\int\int dx dy \int\int dx dy \int\int V dx dy$ vera sint integralia, quae regulae maximam habere possunt vtilitatem, quando disquirendum, an huiusmodi formula differentialis duplicata integrale finitum admittat. Et hinc quidem iam facile concluditur, quomodo eiusdem generis conditiones detegi possint, pro formulis differentialibus triplicatis, vel adeo complicatioribus. Quod autem imprimis spectat ea exempla, quae ad doctrinam de criteriis integrabilitatis illustrandam heic allata sunt, in iis proponendis ita versatus est Cl. Auctor, vt primum eiusmodi adducat formulas differentiales duarum variabilium x, y, quae per se integrabiles sunt, deinde progrediatur ad formulas differentiales quae licet per se integrabiles non sint,

certo

certo tamen multiplicatore adhibito ad integrabilitatem perduci possint, pro huiusmodi enim casibus vsus doctrinae de criteriis integrabilitatis insignis esse solet, ad hos multiplicatores detegendos. Et hinc quidem occasionem nactus est, generaliter demonstrandi formulam differentialem homogeneam $R\,dx + S\,dy$ fieri integrabilem, si diuidatur per $Rx+Sy$. Deinde formulae proponuntur differentiales, quae tres variabiles x, y, z inuoluunt, quae iterum duplicis generis sunt, aut per se integrabiles, aut quae in certum multiplicatorem ductae ad integrabilitatem perducuntur. Ex posteriori genere variae heic considerantur formulae differentiales homogeneae, pro quibus multiplicatores idonei eas ad integrabilitatem perducentes inuestigantur, tum vero demum generaliter demonstratur formulam differentialem homogeneam quamcunque primi gradus

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + V\,dv \text{ etc.}$$

fieri integrabilem si diuidatur per

$$Xx + Yy + Zz + Vv,$$

quod tamen tantum sub ea conditione valet, quod haec formula sit possibili-, nam quemadmodum quaecunque formula differentialis binas variabiles inuolvens $R\,dx + S\,dy$, semper sit realis, ita contra pro formulis differentialibus tres vel plures variabiles inuoluentibus tenendum est, eas non semper esse possibiles sed certam praescribi conditionem ex qua de earum realitate judicium ferre licet. Quoties autem

tem huiusmodi formulae differentiales homogeneae fuerint possibiles, toties integrabiles euadent, si dividantur per formulam supra allatam. Exempla autem formularum differentialium duplicatarum, quae heic quoque adferre in animum induxerat Cl. Auctor, sententia mutata in aliam occasionem reseruare satius duxit.

VIII.

Demonstratio Theorematis Analytici a Cel. *la Grange* inuenti.

Auctore A. I. Lexell pag. 230.

Dum Cel. *la Grange* in Tomo XXIV. Actorum Academiae Scientiarum Berolinensis in modum inquireret, quo cuiuscunque aequationis algebraicae radices per series exprimi possint, ad elegantissimum deuenit Theorema, quo forma vniuscuiusque radicis exprimitur, inuenit enim quod si sit $t - x + \Phi x = 0$, vbi t et x sunt binae variabiles et Φx functio quaecunque ipsius x, esse debere:

$$\psi x = \psi t + \Phi t . \psi' t + \frac{d. \Phi t^2 \psi' t}{1.2\, dt} + \frac{dd. \Phi t^3 . \psi' t}{1.2.3\, dt^2} + \frac{d^3. \Phi t^4 \psi' t}{1.2.3.4\, dt^3} + \text{etc.}$$

Quum vero ratiocinium quo Cel. *la Grange* ad hoc Theorema perductus sit, non nisi pro inductione admodum particulari haberi queat, ipsumque Theorema ma ſit generaliſſimum, adeo vt non ſolum locum habeat quando Φx eſt functio algebraica ipſius x, ſed etiam pro quibuscunque functionibus tranſcendentibus; hinc Cl. huius diſſertationis Auctor operae pretium duxit in generalem et latiſſime patentem eius demonſtrationem inquirere. Hac autem demonſtratione tradita, Theorematis vſum adhuc generaliorem eſſe oſtendit, adeo vt eius ope non ſolum functio quaecunque ipſius x, ſed adeo functio binarum variabilium x et t exhiberi queat. Deinde vero Theorema adhuc multo latius extenditur, ſi fuerit $t - x + P = o$, vbi P deſignat quantitatem quomodocunque ex x et t conflatam, pro hoc enim caſu non ſolum quaeuis functio ipſius x, ſed etiam functio quaecunque binarum variabilium x et t, per ſolam t ſatis concinne exhiberi poteſt, quod etiam viciſſim valere de functionibus ipſius t, vel ipſarum x et t, per x exprimendis per ſe euidens eſt. Vt demum de vſu huius Theorematis aliqua conſtarent Cl. Auctor eius adplicationem commonſtrauit, ad exprimendas aequationum algebraicarum radices per ſeries, vbi tamen id obſeruat, has ſeries ſaepius non fieri conuergentes ideoque radices aequationis non exhibere, neque criterium conſtare ex quo demonſtrari poſſit pro vniuscuiusque aequationis algebraicae radicibus, tot exhiberi poſſe ſeries conuergentes, quot radices illa habuerit reales. Porro quum Φx quascunque functiones tranſcendentes inuoluere poſſit, huius Theorematis applicatio ad huiusmodi caſus quoque ſe extendit, ex quo genere notiſſimum eſt Problema *Keplerianum* pro quo ſcilicet habetur $t = x + n \text{ Sin. } x$, hincque variae deduci poſſunt expreſſiones pro determinando angulo x ope anguli t, non ſolum enim ipſe hic angulus x ſed etiam eius ſinus vel coſinus, vel Tangens ſatis concinne per t exprimi poteſt, vbi tamen et obſeruari meretur expreſſiones hinc deductas, raro adeo fieri conuergentes, vt cum vſu in Aſtronomia adhiberi poſſent.

PHY-

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

De Vibrationibus chordarum, ex duabus partibus tam longitudine quam craſſitie ab inuicem diuerſis compoſitarum.

Auctore Daniele Bernoulli pag. 257.

Theoria de motu chordarum vibratorio quanquam dudum eſt a ſummis Geometris omni ſtudio pertractata, ita tamen reconditis et abſtruſis disquiſitionibus implicatur, vt iis euoluendis et extricandis mathematicorum adeo principes ingenii ſui acumen etiamnum adplicare operae omnino pretium arbitrentur. Neque vero ſolum ipſa ſua natura ſingulari attentione digna eſt iſta quaeſtio, ſed eam quoque ob cauſſam ſummi momenti reputanda, quod a cognitione naturae minimorum iſtorum motuum tremulorum primaria totius Acuſtices fundamenta deriuantur, id quod Illuſtres Geometrae, *Dan. Bernoulli* et *Leon. Eulerus* in variis huius argumenti diſſertationibus de ſono inſtrumentorum muſicorum, tibiarum varii generis, tympanorum, vt et campanarum,

narum, fummo ingenio docuerunt. In praefenti tractatione quo magis lectores fuos ad perfpiciendas meditationes fuas adcommodet quafi et praeparet Ill. Auctor, praecipua theoremata theoriae communis de chordis vibrantibus tota fua longitudine vniformibus paffim demonftratae praemittit; atque hoc modo viam fternit ad indagandam naturam motus vibratorii chordarum ex duabus partibus conftructarum et longitudine et craffitie inaequalibus.

Principio autem cafum aliquem fimpliciorem Ill. Auctor contemplatur, chordam fcilicet vniformiter grauem, fed connexam cum filo omni grauitate deftituto; quale quidem etfi actu in rerum natura nullibi datur, iftius tamen cafus imaginarii euolutio haud parum confert ad explicationem argumenti primarii, vbi fcilicet in fili illius grauitate carentis locum alius chordae portio, fuo quoque pondere donata et cum priori connexa fubftituitur. Ad fonos a vibrationibus chordae eiusmodi compofitae oriundos quod attinet, ii quidem, fi binae partes nodo alioue fimili modo connecterentur, nimis rauci forent, quam vt fonis muficis annumerari poffent; alio autem exemplo optime dilucidat Ill. Auctor argumentum fuum a fidibus, quibus mufici vtuntur, petito, filo metallico ad augendam grauitatem foni inuolutis; quarum, quid obftat? quin fingi poffint tales fpecies, vbi chordae certa tantum pars filo metallico eft implicata, parte reliqua manente nuda.

Hanc

Hanc itaque quaeſtionem maxime memorabilem Ill. Auctor ita pertractat, vt omnes et ſingulas vibrationum ſpecies pro eiusmodi chordis determinet ſimulque in valores inquirat ſonorum iſtis motuum vibratoriorum ſpeciebus debitorum.

Sub finem diſſertationis ſuae Ill. Auctor alius quoque modi mentionem facit, quo in chorda aliqua vibrante lex continuitatis interrumpi poteſt, ſi ſcilicet ea quidem tota ſua longitudine ſit vniformis, ſed in puncto quodam arbitrario annexum habeat ponduſculum; cuius quidem caſus euolutio motusque vibratorii pro tali chorda determinatio Geometrarum attentionem vtique eſt mereri exiſtimanda.

II.

Sectio quarta de motu Aeris in Tubis.

Auctore L. Eulero pag. 281.

Tractatus hydrodynamici, quem per partes his Commentariis inſeruimus, ab Ill. *Eulero* conſcripti quarta, quae hic ſiſtitur ſectio, adhuc ad theoriam de motu fluidorum lineari, iam in tertia ſectione tractari coeptam, pertinet. Huius ſcilicet argumenti primariam diuiſionem Ill. Auctor a fluidorum diuerſa indole, quatenus eorum denſitas vel conſtans vel variabilis eſt, commodiſſime repetendam ſtatuit omnemque fluidorum diuerſitatem hoc intuitu ad duas ſpecies, aquae et aëris, reuocauit.

Expedita itaque in praecedente ſectione tota de motu aquae lineari doctrina; hic ad alteram fluidorum ſpeciem, elaſticorum nempe, generali aëris nomine contentorum, progreditur. At vero etiam hic variatio amplitudinis tuborum tantopere iſtos calculos omnesque argumenti tractationem adficit, vt eius peculiaris ratio fuerit habenda. Hanc ob rem Ill. Auctor in tribus prioribus capitibus motum aëris non, niſi in tubis *aequaliter amplis* contemplatur. Statim vero, quantis difficultatibus implicata ſit determinatio motus aëris, vel primo tentamine Ill. Auctor oſtendit, dum ſcilicet caſum ſimpliciſſimum, quo aër eodem vbique caloris gradu praeditus in tubo aequaliter amplo, remoto adeo grauitatis effectu, moueri concipitur, ad aequationem quidem differentialem ſecundi gradus perducere licuit, ſed talem, cuius reſolutio nullo conſuetae Analyſeos artificio expediri poteſt. Commodiſſime tamen hac in re vſu venit, vt iſta aequatio felici ſucceſſu ad aëris agitationes *minimas*, vbi ſcilicet ſingulae particulae non niſi quam minime a loco initiali recedunt, accommodari poſſit; quo igitur praeſuppoſito, ſi in ſtatu initiali pro quouis tubi loco aëris tam denſitas quam celeritas ſit data, ad quoduis elapſum tempus ſtatum et motum aëris in tubo Ill. Auctor in primo capite definire docet.

Quan-

Quanquam vero iam hic inficias ire non licet, ſolutionem iſtam adeo non eſſe generalem, vt potius vltra ſpeciem motus quam maxime particularem nullo modo pateat: tamen hoc non obſtat, quin ea in pluribus ſummi momenti disquiſitionibus phyſicis vſum praeſtet ampliſſimum; id quod in ſequentibus ipſe Ill. Vir inſignibus exemplis comprobat; dum ſcilicet in ſecundo capite theoriam ſuam ad doctrinam de propagatione ſoni adplicat, a Geometrarum nullo, ſi a Cel. *La Grangio* diſceſſeris, felici ſatis ſucceſſu pertractatam. Hoc igitur grauiſſimum argumentum Ill. Auctor pro tubis aequaliter amplis ita expedit, vt, ſi in iis pulſus alicubi in ſpatio minimo fuerit excitatus, quo aër vtcunque a ſtatu aequilibrii receſſerit, huius agitationis minimae propagationem ad quoduis tempus definire doceat et quidem 1°. ſi tubus fuerit vtrinque in infinitum extenſus 2°. ab vna parte in infinitum extenſus ab altera vero vel clauſus vel apertus 3°. vtrinque apertus 4°. denique ab vna parte apertus, ab altera vero clauſus. Alterum phaenomenon, cui explicando Ill. Auctor theoriae ſuae principia hactenus tradita adplicat, et in quo a naturae ſcrutatoribus vix quidquam praeſtitum eſt, in ſono, quem tibiae edunt inflatae, eiusque explicatione verſatur. Dudum quidem Ill. Auctor elegantem ſimilitudinem inter naturam eiusmodi ſoni et leges chordarum vibrantium detexit; nullo autem modo ipſi eo vsque progredi licuit, vt ipſam aëris agitationem, qua iſti ſoni generantur, calculis definire potuerit: Iam vero in capite

capite tertio abſtruſum hoc argumentum Ill. Auctor ope theoriae ſuae tam felici ſucceſſu perſequitur, vt omnes iſtos motus aëris oſcillatorios in tubis aequaliter amplis determinare ſonosque tibiarum varii generis, ſiue ſint vtrinque ſiue ab vna parte tantum apertae, ſiue etiam vtrinque clauſae, dilucide explicare eorumque leges ex genuinis principiis, conſentiente experientia, deriuare poſſit. Hic vero, vbi theoriam cum experimentis comparare quis velit, id probe perpendi neceſſe eſt, in omni iſto calculo latera tubi tanto rigore praedita aſſumi, vt nullius plane impreſſionis et agitationis ſint capacia; quam conditionem cum praxis perfecte non admittat, experientiam tamen eo minus a theoria, quo durior fuerit tubi materia, diſcrepaturam, dubitari non poteſt.

His abſolutis Ill. Auctor ad tubos *inaequaliter amplos* progreditur; quae quidem inueſtigatio multo pluribus, quam praecedens, obſtaculis et difficultatibus premitur. In capite igitur quarto ante omnia motus aëris in tubo inaequaliter amplo ad formulas analyticas reuocatur, quae vero cum ob defectum Analyſeos reſolui non queant, tantum ad agitationes aëris *minimas* adcommodantur. Neque vero etiam admiſſa hac reſtrictione, generalis obtenta eſt reſolutio; quanquam enim ſingularibus artificiis continuo plures reperiantur tuborum figurae, in quibus aëris agitationes minimas definire licet; infinite tamen multae tuborum figurae locum hic prorſus non inue-

inueniunt, pro quibus etiamnum motus aëris determinari non poteſt. Ex eorum igitur tuborum claſſe, quorum figuris principia theoriae hactenus traditae adcommodari licuit, Illuſtr. Auctor ſpecies aliquot ſimpliciſſimas examini peculiari ſubiicit; atque hunc in finem in capite quinto aëris agitationes minimas in tubis figuram conoidicam hyperbolicam habentibus inueſtigat, in quibus motus iſti tremuli, modo ſint minimi, perinde ac in tubis aequaliter amplis, licet calculo paululum operoſiore, definiri poſſunt. Poſt hos deinceps in capite ſexto. Ill. Auctor eadem methodo circa tubos figurae *conicae* verſatur; cuius argumenti euolutio etiam eam ob cauſſam notatu quam maxime digna eſt, quod inde colligere licet, qua ratione pulſus quicunque in libero aëre quaquauerſum propagetur, ſi quidem vniuerſum aërem circumfluum circa centrum quaſi pulſus in infinite multos conos, quorum vertices in iſto centro concurrant, diſtributum concipere licet.

III.

De Perturbatione motus Terrae ab actione Veneris oriunda.

Auctore L. Eulero pag. 426.

Quum ex doctrina grauitatis *Newtouiana* ſequatur, omnia corpora coeleſtia mutua et reciproca inter ſe affici actione, inde quoque intelligitur Planetam quemcunque primarium qui ſi ſola vi verſus Solem attrahente ageretur, ellipſem circa Solem deſcriberet, accedente actione reliquorum Planetarum, ab hoc motu regulari et elliptico multum deturbari. Res igitur eſt in Aſtronomia maximi momenti, has perturbationes et inaequalitates in motibus Planetarum ex actione eorum mutua oriundas perſpicue definire et explicare, quamobrem etiam ſummi noſtri aeui Geometrae *Clairaltius*, *d'Alembertus* et imprimis Illuſtr. huius diſſertationis Auctor in perturbationibus his definiendis, inſignem collocarunt operam. Quod autem imprimis motum Telluris noſtrae attinet, notum eſt, eum praeter vim principalem, qua verſus Solem agitatur, actionibus Iouis, Veneris et Lunae admodum ſenſibiliter adfici. In praeſenti igitur Diſſertatione Illuſtr. *Eulerus* perturbationem motus Terrae ab actione Veneris oriundam examini ſubiicere operae pretium duxit, idque eo maiori cum iure, quod in hac inaequalitate definienda ſecundum conſuetas in huiusmodi operationibus Methodos procedere non liceat. Scilicet in formulis iſtis quae pro actione Veneris in Terram inueniuntur, quum duplicis generis occurrant termini, alii quos diſtantia Veneris a Sole ingreditur, alii vero in quibus diſtantia Veneris a Terra reperitur, vtraque horum terminorum ſpecies ſingularem meretur conſiderationem. Prior enim, quam Illuſt. Auctor partem actionis Veneris Solarem nominauit, ita comparata eſt, vt ſiue tantum ad motum medium Veneris reſpiciatur ſeu etiam excentrici-

cita-

citatis ratio habeatur, ſatis commode per ſeriem conuergentem exprimi queat. Cum poſteriori autem, quae heic pars terreſtris actionis Veneris dicitur, res longe aliter ſe habet, ſcilicet quum formulam irrationalem quam diſtantia Veneris a Terra ingreditur, nullo modo in ſeriem conuergentem reſoluere liceat, omnia integralia, in quibus expreſſio huius diſtantiae reperitur mechanice tantum definienda ſunt, quod etiam heic pro ſingulis 5 gradibus elongationis mediae Veneris a Terra praeſtitum eſt. Valoribus autem horum integralium definitis, ſi parti terreſtri actionis Veneris addatur pars Solaris, facile tota perturbatio ab actione Veneris orta definitur, quam igitur Illuſtr. Auctor in Tabella ad finem diſſertationis ſubnexa repraeſentat. Si haec Tabula conferatur cum ea, quam adfert Celeb. *de la Caille* in Tabulis ſuis Solaribus, inſignis inter eas reperietur diſcrepantia, in Tabula ſcilicet Dni *de la Caille*, a o Sig. vsque ad II Sig. 3°. expreſſio pro actione Veneris eſt negatiua, et maximum eius reperitur circa I Sig. 1°. vbi eſt $= - 5, 6$; a II Sig. 3°. vero vsque ad VI Sig. perturbatio haec poſitiua ſtatuitur, et maximum adipiſcitur valorem circa IV Sig. 3°. ſcilicet $+ 15'', 2$. In Tabula praeſenti per ſex ſigna praecedentia perturbatio eſt negatiua et maximum induit valorem circa II Sig. 10°. vbi eſt $= - 22'', 3$. Liquet igitur hinc maximum diſcrimen quod inter hanc Tabulam et eam Dni *de la Caille* oritur vsque ad $30''$ aſſurgere, quae differentia in loco Solis definiendo certe pro inſigni habenda eſt.

 PHYSICA.

PHYSICA.

I.

De Corde Leonis,

Auctore C. F. Wolff pag. 471.

Solum cor leonis, quoad singularia, quae in eo occurrunt, anatomice describitur. Deinde effectus, quos singularis illa structura in functionibus cordis producit, qui notabiles sunt, et ipsam quoque corporis humani physiologiam illustrant, explicantur.

Pericardium in hoc animali plenum spisso cruore et adeo distentum inueniebatur, vt maximam partem cauitatis thoracis, quae multum sanguinem itidem continebat, repleret. Ventriculi contra et auriculae cordis vacuae erant. Haec ergo omnino causa mortis fuit; cum neque cor se dilatare, neque cerebro sufficiens, (quae ad sustinendas actiones animales et vitales in eo continuo requiritur,) copia sanguinis suppeditari potuerit.

Quae circa figuram cordis leonini, eiusque structuram internam et partes, auriculas, septum, ventriculos, orificia eorundem et valuulas, hisce praefixas, columnasque carneas, notabilia occurrunt, ea in ipsa Dissertatione legenda sunt. Praecipuae tantum-

tantummodo obſeruationis mentionem faciemus, quae in oeconomiam vitalem maximum ſibi influxum vindicat, et vnde patebit, quo vsque in variis animalibus actiones vitales variare poſſint. Leoni cor datum eſt, pro mole corporis paruum, ſed ventriculis inſtructum praegrandibus; vnde parietes eiusdem aeque ac ſeptum, ſi ad alia animalia comparantur, mire tenues ſunt. Hoc hactenus etiam a *Pariſinis Scriptoribus* iam obſeruatum et pro rei dignitate traditum fuit (videantur, quae in hac Diff. pag. 477 et 478. deinde quae pag. 491. dicta ſunt). Sed, quod magis forte attentionem Anatomici meretur, quodque minus ab aliis obſeruatum fuit, illud eſt, quod trunci arteriarum, quae ex ventriculis oriuntur, quemadmodum ventriculi ipſi proportione aliorum animalium magni ſunt, parui potius exiſtant proportione eadem, et quod rami earum arteriarum ſimili modo decreſcere pergant. Nam, ſi arteriae leonis ad arterias aliorum animalium in eadem ratione iterum eſſent, vti ventriculi cordis ſunt, quod tamen veriſimile videri potuiſſet, nihil eo mutaretur in motu ſanguinis. Maſſa ſanguinis maior per vaſa maiora ſimili modo in leone quam in aliis animalibus moueretur. Quo magis autem ratio arteriarum leonis ad aliorum animalium arterias ſucceſſiue decreſcit; eo magis quoque celeritas, qua ſanguis in leone mouetur, celeritatem ſuperabit, qua idem in aliis animalibus propellitur. Haec itaque vt accuratius definiri et aeſtimari poſſint, ventriculos cordis et arterias praecipuas maiores in leone et in homine, aliisque in animalibus metitus eſt Clar. Auctor, ventriculosque cum magnitudine cordis, arterias vero cum ventriculis eorundem animalium comparauit, vnde apparuit, quantum in leone ventriculi proportione cordis totius maiores, arteriae vero proportione ventriculorum minores ſint quam in aliis animalibus. Media cordis humani longitudo 4 pollicum et 10 linearum, circumferentia transuerſalis autem 10 pollicum eſt. Ventriculus dexter pro hac cordis magnitudine longitudine gaudet 3 poll. 8 lin. et circumferentia 5. poll. 4 lin. In corde leonis igitur, cum eius longitudo ſit 5 poll. 3 lin. et circumferentia 11 poll. 4 lin. ventriculus dexter, ſiquidem iſte nunc ad cor eandem quam in homine rationem haberet, longitudine eſſe deberet 3 poll. 10 lin. et circumferentia 6 poll. Sed inuenitur longitudine 4 poll. 7 lin. et circumferentia 9 poll. 6 lin. Adeoque ventriculus dexter in leone quinta ſere parte proportione cordis longior quam in homine, et plus quam tertia parte amplior eſt. Ne vero haec differentia, quae ſane notabilis eſt, paruitati potius ventriculi cordis humani, quam magnitudini leonini adſcribenda eſſe videatur, ventriculus humanus porro cum felino et vitulino comparatus eſt. Felino ventriculo proportione corculi ſui ad normam humanam longitudo eſſe debuiſſet 12 lin. et amplitudo $15\frac{1}{2}$ lin. Sed illa nonniſi 10 lin. haec tantummodo $11\frac{1}{3}$ lin. inventa fuit Vitulinus, qui longitudine 3 poll. $\frac{3}{7}$ lin. et amplitudine 4 poll. $3\frac{1}{3}$ lin. eſſe debuiſſet, nonniſi

niſi 2 poll. 1 lin. longus et 3 poll. 10 lin. amplus inueniebatur, vnde patet, in his animalibus ventriculum etiam humano minorem, nec ergo periculum errandi eſſe, ſi magnitudo ventriculorum leonis ex comparatione ventriculorum hominis diiudicatur. Ventriculus cordis ſiniſter in leone proportione cordis eſſe debuiſſet longitudine 3 poll. $7\frac{1}{2}$ lin. et ambitu 4 poll. $4\frac{1}{8}$ lin. Sed obſeruatus eſt longitudine 5 poll. et ambitu 8 poll. 2 lin. Proinde iſte ventriculus in leone plus quam quarta parte ſolito longior et duplo fere amplior eſt. In fele nempe et vitulo menſurae itidem humanis, quibus cum leoninae comparatae ſunt, minores fuere, excepta ſola circumferentia in corde vitulino, quae paullulo humana maior fuit. Pro hac enormi ventriculorum magnitudine fieri non potuit, quin et mire tenuis ſit ſubſtantia carnea, qua cor efficitur. Paries ventriculi ſiniſtri in corde vitulino et felino duplo fere craſſior eſt quam idem paries eodem in loco in corde humano. At iſte paries humanus tamen eſt ad leoninum vt $9\frac{2}{3} : 5$.

De magnitudine arteriarum vltima modo reſultata repetemus. Ambitus trunci aortae proportione ventriculi ſui in leone fere dimidio quam in homine minor eſt. Nimirum ante ramos maiores editos maximam partem leonis aorta ad humanam eſt vti $1 : (2 - \frac{1}{7}.)$. Sed hoc magno decremento non obſtante tamen aorta poſt ramos maiores illos editos adhuc porro erga hominis aortam decreſcit, eaque

que multo plus quam dimidio minor euadit. Nam vbi ad columnam vertebrarum ſe applicat, antequam primam intercoſtalem arteriam ediderit, ad humanam eſt vti $1 : 2\frac{3}{4}$, prope diaphragma autem vti $1 : 2\frac{5}{8}$. Idemque de caeteris trunci aortae ramis valet. Arteria ſubclauia dextra ad eandem hominis arteriam eſt vti $1 : 2\frac{1}{8}$. Subclauia ſiniſtra vti $1 : 2\frac{1}{3}$ et carotides adeo ſere ſunt vti $1 : 3$. Neque aliter comparatum eſt cum arteriis pulmonalibus. Truncus arteriarum pulmonalium ad eundem truncum in homine proportione ventriculi ſui dextri ſe habet vti $1 : 1\frac{3}{5}$. Sed eius ramus dexter vti $1 : 2$ et ſiniſter vti $1 : 2\frac{1}{3}$. Probabile igitur eſt, idem vaſorum decrementum continuatum iri porro per ſuccedentes ramificationes, adeo, vt in ordinibus vltimis, veluti in decimo quinto, vel ſexto, vaſcula decuplo quoque circiter in ambitu ſuo humanis proportione ventriculi ſiniſtri minora ſint.

Hinc facile colligitur, quanto celeritas motus ſanguinis in leone maior ſit quam in homine et in aliis animalibus. Etiamſi in calculo multa largiamur; (nam in imminuendis potius, quam in augendis mirabilibus Auctor peccare voluit) ſanguis tamen quamprimum ex corde erumpit, et in ea parte Aortae, quae citra ramos eſt, quadruplo iam celerius in leone quam in homine et in aliis animalibus quadrupedibus mouebitur; noncuplo autem in ramis ſecundi vel tertii ordinis, quorum, veluti carotidum, peripheriae triplo et lumina igitur non

cuplo

cuplo quam in homine minora ſunt; denique centuplo celerius in ramis decimis quintis, quorum peripheriae decuplo et lumina centuplo in leone minora ſunt quam in homine.

Quum ſanguinis motum in homine ob lumina ramorum, qui ex trunco quouis oriuntur, coniuncta ſemper multo maiora lumine trunci, continuo retardari notum ſit, prout ſanguis ſucceſſiue per ſyſtema arteriarum progreditur; eaque retardatio ſecundum calculos, a Celeberrimis Phyſiologis inſtitutos enormis fere euadat; (KEILIVS celeritatem, qua in vltimis arteriolis ſanguis mouetur, ad eam, qua per aortam propellitur, paſſim ſe habere inuenit vt 1 : 44307. vid. *Perill.* HALL. *El. Phyſ. Tom II. p.* 174.) non minus mirum forte videbitur, ſi pericula docuerint, in leone retardationem nullam fieri, ſed potius accelerari ſanguinem prouti per arterias progreditur. Nam iſtaec retardatio tanta cum ſit in homine; credidiſſes, eam neceſſariam eſſe ad vitam animalis. Quum ergo non ſit, ſequitur, aliam et peculiarem cauſam eſſe debere, cur tanta ſit in homine. Sic alia alia illuſtrant. Ratio ſummae luminum ramorum, qui ex trunco aortae oriuntur, aortae nempe dorſalis, ſubclauiae vtriusque et corotidis vtriusque ad lumen trunci aortae in leone eſt vt $94\frac{1}{4} : 147$ vel vt $1 : (1\frac{1}{2} + \frac{1}{19})$. Ratio ſummae luminum ramorum pulmonalium, dextri nempe et ſiniſtri ad lumen trunci pulmonalis eſt vt $88\frac{1}{3} : 133\frac{1}{3}$, quae eſt $1 : (1\frac{1}{2} +$ circiter $\frac{1}{93})$.

Vnde patet, non modo retardationem nullam, ſed magnam potius accelerationem ſanguini leonis contingere, dum ex trunco aortae, vel etiam arteriarum pulmonalium in ramos eorum ingreditur.

Haec tandem incredibilis fere celeritas ſanguinis influxum quoque habere videtur in naturam et attributa leonis. Robur non modo corporis quoad partem et agilitatem huius animalis, ſed audaciam quoque et atrocitatem inde deriuat Clar. Auctor, quod quo pacto quibusue argumentis fiat, in ipſa Diſſertatione legi meretur.

II.

Obſeruationes ſplanchnologicae ad Acipenſeris Rutheni *Linn.* anatomen ſpectantes.

Auctore I. T. Koelreuter pag. 511.

Quanquam ea, quae in hac Diſſertatione de ſtructura interna *Acipenſeris rutheni* traduntur, eius indolis non ſint, vt oeconomia vitalis piſcium iis aliqua ratione illuſtrari, vel phyſiologia incrementum inde aliquod capere poſſit, (ſunt nempe merae partium abdominalium deſcriptiones Zootomicae), tamen non ingrata fore ſperauimus cultoribus ſcientiae

tiae naturalis, qui quippe in condendis animalium characteribus nonnunquam etiam interiori partium conformatione vtuntur; atque in hunc finem imprimis hae descriptiones inferuire posse videntur. Hepar primum consideratur. Agitur de eius colore, figura, diuisione in duodecim lobos, qui omnes secundum figuram, quae singulis diuersa et irregularis est, prolixe describuntur. Caeterum nihil in his occurrit, quod se distinguat, vel quod notabile sit. Vesiculae felleae deinde et ductus cystici mentio fit, in quibus nihil insoliti est. Oesophagi pars prior intus glabra, ea autem, quae propior ventriculo, papillis in superficie interiori obsita est. Ventriculus ipse figura ouatus, caeterum carnosus, crassus et durus est et ventriculo auium graniuorarum similis. Duodenum teres, itidem durum. Pancreas figura reniformi gaudet, idemque dissectum etiam intus structuram monstrat renum structurae quodammodo similem. Substantia scilicet exteriori corticali duriori, coloreque distincta et interiori molliori praeditum est, illaque radiatim quasi ex peripheria versus centrum producitur. His viscerum abdominalium descriptionibus figuras cordis Clar. Auctor adiunxit.

III.

De Hermaphrodito ad ſexum virilem pertinente.

Auctore I. Lepechin pag. 525.

Egregiae obſeruationes ſunt, et quae non poſſunt non gratiſſimae eſſe phyſiologis, quas Clar. Auctor in hac Diſſertatione Academiae communicavit. Si nihil aliud per hermaphroditum intellexeris, quam hominem, qui inter naturam femineam et maſculam vere ambigit, hic certe, quem deſcriptum tenemus, hermaphroditus fuit. Hoc ſolo reſpectu ei, vt caeteris hactenus in ſcenam productis, nomen illud denegari poterit, ſi hominem poſtules, qui officio vtroque, femineo et maſculo pro lubitu in negotio generationis fungi poſſit. Hoc enim reſpectu mas ille fuit, ſed tamen probe diſtinguendus non modo a feminis illis quae ob ſolam maiorem clitoridem, membrum virile mentientem, immerito et ſine vlla cauſa pro hermaphroditis habitae fuerunt, ſed etiam a maribus, quorum teſticuli in abdomine retenti aliquam ouariorum ſpeciem retulerunt. Scrotum noſtro homini longitudinaliter diuiſum erat in duos ſacculos oblongos, rima profunda diſtinctos, quorum quisque ſuum teſticulum interdum continebat, et qui extremitate ſua anteriori ſupra baſin penis coniungebantur, adeo, vt ſacculi labia

maiora

maiora vuluae, rima hanc ipſam et penis, ſolito breuior, a labiis incluſus, clitoridem ad amuſſim referret. Sed iſte penis imperforatus quoque et loco vrethrae nonniſi ſulco longitudinali inſtructus erat, cum vrethra iam ſub radice penis intra labia terminaretur. Quid ergo obſtat, quo minus pro vera clitoride habeatur haec pars, quae neque ſpecie externa, neque ſtructura membrum virile ſed omni reſpectu clitoridem refert. His notis ſexus feminini accedunt facies imberbis! vox feminea! (nam hominem nonniſi viuum obſeruare licuit,) et tandem mammae muliebres, turgidae, papillis craſſioribus, areola cinctis, inſtructae! Recte monuit Clar. Auctor non caſu haec omnia accidiſſe. Nam inter ipſas cauſas formatrices, quaecunque hae fuerint, et quantumcunque easdem nos latere velis, tamen aliquid fuiſſe, quod ad fingendam feminam requiritur, vel aliquid defuiſſe, quod ad producendum marem neceſſarium eſt, res ipſa loquitur, confirmatque obſeruatio, quam Clar. Auctor addit duorum fratrum, qui hermaphrodito noſtro fuere, et quibus ambobus eadem partium genitalium conformatio, idemque muliebris habitus erat. Neque autem veriſimile eſt, praedelineata fuiſſe primordia horum hominum in ouis maternis. Nam aut feminae aut mares perfecti, non homines dubii, praedelineati fuiſſent, acque minus ac monſtra illa, quae, poſtquam nata ſunt, perire neceſſe eſt. Caeterum viros tamen eſſe hos hermaphroditos pericula docuerunt. Nam maximus eorum natu vxorem duxit ex eaque liberos genuit.

IV.

Salmo Leucichthys et Cyprinus Chalcoides descripti.

Auctore A. I. Gueldenstaedt pag. 531.

Mare Caspium, quorsum Clar. huius Dissertationis Auctor indagandorum naturae productorum caussa missus est, piscibus quidem, eodem referente, omnino abundat, sed magis tamen individuorum copia, quam varietate specierum superbit. Hae enim ad decades quatuor vix accedunt, maximamque partem Europeae et aquis dulcibus communes sunt. Plerasque Clar. Auctor recenset et nonnullas ex Acipenserum genere, characteribus a capitis partibus desumtis, determinat. Deinde duas species producit, quarum altera ad *Salmonum* altera ad *Cyprinorum* genus pertinet, quaeque plane indigenae mari Caspio et Ichtyologis minus notae sunt. Salmoni nomen specificum triuiale *Leucichthydis*, Cyprino vero *Chalcoidis* addidit et vtriusque piscis descriptionem concinnauit. Prior vbique per Russiam *Belaia Rybyza*, id est *albi piscis* posterior vero *Harengi Kislariensis* nomine venit, vnde nomina triuialia petita. Ille ob maxillas edentulas, inferioremque longiorem facile cum *Salmone Albula* LINNAEI confundi posset, quamobrem sequentes ambarum specierum characteres essentiales constituti sunt:

Leu-

Leucichthys erit : Salmo maxillis edentulis inferiore longiore ; radiis membranae branchioftegae decem. *Albula* autem : Salmo maxillis inferiore longiore , radiis membranae branchioftegae feptem. Hic pofterior , *Cyprinus* nempe *Chalcoides* , a congeneribus fpeciebus fequenti charactere diftingui-tur : Cyprinus pedalis , radiis pinnae ani nouemdecim maxilla inferiore longiore incurua.

V.

Krafcheninnikouia , nouum plantarum genus.

Auctore A. I. Gueldenftaedt p. 548.

Nouum hoc plantarum genus , quod Clar. Auctor hic nobis offert , quodque in memoriam Viri meritiffimi , membri olim Academiae noftrae , *Krafcheninnikouiam* appellat , a pluribus quidem Botanicis hactenus vifum et collectum , fed non fatis adcurate , vti Clar. Auctor obferuat , examinatum , neque adeo recte determinatum fuit. TOVRNEFORTIVS primus hanc plantam inuenit in Oriente, eamque *Ceratoidis* fui generi adiunxit , quod idem *Ceratocarpus* LINNAEI eft. Deinde STELLERVS eandem in campis fibiricis reperit ; fed varie , nunc ad *Bliti* , nunc ad *Camphoratae* genus retulit. Illuftr. LINNAEVS prius *Vrticam* poft haec *Axiridem* eandem

dem appellauit, quem etiam GMELINVS in Flora Sibirica fecutus eft, adeo tamen, vt ipfe de vero genere adhuc dubius permanferit. Hos omnes itaque Clar. Auctor non modo in affignatione generis fed eatenus etiam erraffe exiftimat, quod generatim ad vnum horum generum, iamiam notorum, inter quae quafi ambigua fit, hanc plantam referendam effe, vnanimi licet fenfu, crediderint. Nam novam prorfus, propriique generis illam iudicat, quamuis tamen omnino concedit, multa illi cum Vrtica et plura adhuc cum Ceratocarpo communia effe, adeo, vt media quafi inter dicta haec genera et *Atriplicem* fit, eaque coniungat. Conftituit eius characterem genericum, cuius notae praecipue in florum mafculorum *Perianthio* tetraphyllo, perfiftente; *Corolla* nulla; *Staminum* filamentis quatuor capillaribus, thalamo infertis, antherisque fubrotundis didymis; in florum femineorum *Perianthio* monophyllo *Corolla* nulla *Germine* ouato fupero, *Stylo* fimplici, *Stigmatibus* duobus capillaribus reflexis, *Pericarpii* calyce dilatato, femen vndique tegente; *Semineque* vnico, ouato-compreffo confiftunt. Et cum characterem Ceratocarpi, quocum magna Krafcheninnikouiae fimilitudo eft, hactenus notum aeque erroneum inuenerit, correctiorem reddit. Denique defcriptionem plantae, quae noui generis eft, addit, fpeciemque eiusdem, quam *Ceratoidem* triuiali nomine vocat, determinat.

VI.

VI.

Koelreuteria, nouum plantarum genus.

Auctore E. Laxmann pag. 561.

Diu iam plantae huius, in horto Academico nostro perennantis flores exspectauerant, qui illi prioribus temporibus praeerant Botanici, sed frustra hactenus; donec tandem nuper aestate valde calida exoptatos flores produxit. Clar. itaque huius Diss. Auctor, cui occasio fauebat, plantam delineari curauit, genus eiusdem, quod nouum fore ab aliis coniectura iam prospectum erat, descripsit, nomenque *Koelreuteriae paniculatae* eidem imposuit. Character genericus consistit in *calyce pentaphyllo*, *infero*, *foliolis inaequalibus*; *corolla tetrapetala*, *petalis aequalibus*; *nectariis petaloideis*, *et corpusculo receptaculi analogo genitalia tantum sustinente.*

ASTRONOMICA.

I.

Experimenta circa Longitudinem Penduli ſimplicis minuta ſecunda Kolae et Archangelopoli oſcillantis.

Auctore Stephano Rumovski pag. 567.

Ab eo tempore, quo *Richerus* Horologium Aſtronomicum Cayennam translatum ſingulis diebus duobus minutis primis retardaſſe, ac longitudinem penduli $1\frac{1}{4}$ lin. minuendam fuiſſe obſeruauit, vt illud motu ſuo ſingula minuta ſecunda temporis aeque ac Pariſiis indicaret, Aſtronomi nullam praetermittunt occaſionem inquirendi in longitudinem penduli ſimplicis, vt certius conſtet, quantum figura telluris a ſphaeroidica aberret. Non inanem itaque operam collocaſſe cenſendus eſt Cl. Auctor, dum Kolae ſub latitudine 68°. $52\frac{1}{2}'$ longitudinem penduli ſimplicis per experimenta definire allaborauerit.

Duplex hic occurrit determinatio penduli ſimplicis minuta ſecunda Kolae oſcillantis: altera ab experimentis authomato pendulo inuariabili inſtructo inſtitutis petita, altera ab experimentis pendulo ſimplici peractis. Ex his longitudo penduli ſimplicis in in temperie aeris 12° fupra o thermometri Reaumuriani deducitur 3 ped. 9, 46 lin.; ex illis vero in temperie aeris 6½° fupra o eiusdem thermometri longitudo penduli eruitur 3 ped. 9, 34 lin., quam priori praeferendam effe non fine ratione exiftimat Cl. Auctor.

Ad calcem huius differtationis ftabilitur longitudo penduli fimplicis Archangelopoli 3 ped. 9, 15 lin. verum determinatio haec non aeque certa eft ac praecedens; innititur enim determinationi longitudinis penduli fimplicis Kolae, dein fupponitur horologium Aftronomicum Kola Archangelopolin translatum nullam in itinere mutationem fuiffe paffum. Interim tamen negari nequit determinationem hanc magis veritati confentaneam videri ac *De l'Islii*, prout patet ex comparatione longitudinum pendulorum Kolae, in Ponoi et in Pello inuentarum.

II.

De Parallaxi Solis conclufa ex tranfitu Veneris per Solem A. 1769. in Infula Regis Georgii obferuato.

Auctore A. I. Lexell pag. 586.

Dum in Parte IIda Tom. XIV. horum Commentariorum, obferuationum fuper tranfitu Veneris ad ſinum Hudſonis et in California factarum, inſtituta eſt comparatio, cum illis obſeruationibus quae in Europa factae fuerunt, euidenter quidem demonſtratum eſt, valorem parallaxis tempore tranſitus 8 ſecunda ſuperare, neque tamen ad 9 ſecunda excreſcere, ſed probabiliter 8½ ſec. aliquanto eſſe maiorem; quia tamen haec disquiſitio ita comparata erat, vt leues in obſeruationibus commiſſi errores ipſam concluſionum certitudinem multum debilitare poſſent, ſummo omnium Aſtronomorum deſiderio exſpectabantur obſeruationes, quae ſuper hoc phaenomeno ab Aſtronomis Anglis in Inſula quadam maris Pacifici *King-Georg Eyland* dicta inſtitutae fuerunt, quippe ex quarum obſeruationum comparatione cum Europeicis de vera quantitate Parallaxis Solaris tutiſſimum inſtitui poſſet iudicium, ſiquidem pro hac inſula effectus parallaxis ad durationem tranſitus Veneris imminuendam erat inſignis adeoque contrarius illi, qui pro locis Europeicis obtinuit, qui ſcilicet valuit ad durationem tranſitus augendam. Statim igitur ac Illuſtr. Societas Scientiarum Regia Londinenſis, obſeruationes has cum noſtra Academia Scientiarum communicare dignata eſt, Cl. huius diſſertationis Auctor easdem ad praeſcriptum Methodi *Eulerianae* in Tomo XIV. Comment expoſitae, calculo ſubiecit, easque pro Parallaxi Soli inuenit concluſiones, quas in hac Diſſertatione fuſius exponit, et cuius ſumma tantum capita hoc loco perſtringere ſuffecerit. Vt Cl. Auctor eo certiores pro Parallaxi Solis inueniret concluſiones, ſingulas obſer-

vationes

vationes Americanas cum insigni numero earum, quae in Europa institutae fuerunt, comparare necessum duxit, in quo negotio exsequendo duo casus seorsim considerandi fuerunt, prior quo ratio habetur tam contactuum internorum quam externorum, alter quo ad contactus tantum internos vtpote certiores tantum respicitur His itaque praesuppositis, si π designat Parallaxin Solis tempore transitus, y autem correctionem Latitudinis Geocentricae Veneris ex Tabulis assumtae pro tempore coniunctionis, inuenit combinationem obseruationum pro Insula Regis Georgii cum Europeicis praetere pro priori casu $\pi = 8'', 68 - 0,0077 y$ et pro posteriori $\pi = 8'', 58 - 0,0080.y$. Simili modo combinatio obseruationum ad sinum Hudsonis factarum cum Europeicis dat pro priori casu $\pi = 8'', 52 - 0,0019.y$ et pro posteriori $\pi = 8'',74 - 0,0029 y$. Denique obseruationes Californiae institutae, si cum Europeicis comparentur, praebent pro posteriori casu $\pi = 8,61 - 0,0062.y$, pro hoc scilicet loco obseruationes tantum contactuum internorum in computum ductae fuerunt. Vt autem nunc ex his diversis conclusionibus valor medius rite exquiratur, vnicuique earum ea tribuenda est probabilitas, quae ipsi reapse competit, et quae proportionalis est censenda coefficienti ipsius π in aequatione vnde eius valor deductus est. Hoc modo igitur probabilitates aestimando, inuenit Cl. Auctor valorem parallaxis medium tempore transitus fore $\pi = 8'', 63 - 0,0062.y$, si ad omnes obseruationes attendatur, vel $\pi = 8, 57$

 — 0,

$-0,0062.y$, ſi obſeruationes in Inſula Regis Georgii pro contactibus externis excludantur, vel $\pi = 8'', 62 - 0,0065.y$ ſi obſeruationes contactuum externorum pro ſinu Hudſonis etiam excludantur, vnde exacte quidem ſtatuere licuit $\pi = 8,60 - 0,006.y$. Ad huius autem concluſionis vlteriorem confirmationem Cl. Auctor obſeruationes Americanas ſeorſim cum obſeruationibus in iis Lapponiae locis factis, vbi totum tranſitum obſeruare licuit comparat, tum etiam ipſas obſeruationes Americanas inter ſe confert, ex priori disquiſitione inuenit medio ſumto $\pi = 8,64 - 0,0075.y$, et ex poſteriori $\pi = 8'', 47 - 0,01.y$. Denique vt valor abſolutus ipſius π inueniatur correctionem Latitudinis Geocentricae ſupponit $8''$, vnde habetur $\pi = 8'', 55$ de qua Auctor noſter affirmare non dubitat eam vltra partem decimam ſecundi a veritate non fore diſcrepantem. Si contactuum externorum pro Inſula Regis Georgii ratio haberetur, nullum quidem eſt dubium, quin valor Parallaxis aliquanto maior prodiret, oſtendit igitur Cl. Auctor has obſeruationes imprimis pro contactu externo circa egreſſum inſignibus erroribus eſſe obnoxias, qua etiam occaſione in Longitudinem Geographicam Inſulae Regis Georgii a Pariſiis inquirit, quae ab ipſo inuenta eſt $10^h. 7'. 22''$ verſus Occid. Vltimo demum loco exponit quales errores in obſeruationibus admittere neceſſe foret, ſi Parallaxis ad 10 ſec. vel ad 9 ſec., augenda eſſet. Et pro Parallaxi quidem 10 ſec. medius valor errorum vsque ad duo minuta prima increſceret, pro hypotheſi autem

autem Parallaxis 9'' hic error vix infra 20 aut 30 fec. fubfiftere poffet.

III.

Elementa Aftronomica Theoriae Veneris deducta ex obferuatione tranfitus Veneris fub Sole ad finum Hudfonis, Californiae et in Infula Regis Georgii inftituta.

Auctore W. L. Krafft pag. 649.

Coniunctiones eclipticae Veneris cum Sole, etiamfi a principali iftiusmodi obferuationum, in definienda parallaxi Solis horizontali, vfu difcefferis, eam quoque ob cauffam Aftronomorum attentionem fummo iure prouocant, quod ad perficienda theoriae huius planetae primaria elementa maxime funt accommodatae. Noftri igitur aeui Aftronomis cum tam contigerit effe felicibus, vt bis intra nouem annos rariffimo hoc fruerentur phaenomeno; quin in motuum Veneris cognitionem infignis inde redundauerit vtilitas, dubitari non poteft. Hunc ipfum quoque fcopum in hac differtatione fibi fixit Cl. Auctor, dum vltimi tranfitus Veneris fub Sole 1769. vifi tres omnibus numeris abfolutae obferuationes ad Academiam effent transmiffae. Principio itaque

itaque Cl. Auctor id operam dat, vt motus Veneris horarios in ecliptica, in orbita relatiua et in latitudinem summa cum praecisione definiat; quibus praemissis ex mora ingressus vel egressus per effectus parallacticos in hypothesi parallaxis Solis $= 8'', 55$ computatos ad centrum terrae reducta quantitatem semidiametri Veneris determinat; vnde porro ad distantiam centrorum minimam, latitudinem Veneris geocentricam atque coniunctionis tempus verum, inuestiganda progreditur. Locum Nodi Veneris ex hac ipsa obseruatione deductum cum eo, quem obseruatio anni 1761. praebet, comparando motus annuus lineae Nodorum Veneris respectu aequinoctiorum colligitur $32'', 03$ adeoque $- 18'', 30$ intuitu fixarum; quae quidem determinatio parum ab ea discrepat, quae ex theoria attractionis vniuersalis deriuatur.

IV.

Tentamen Orbitae Veneris excentricitatem et aphelium huiusque motum annuum definiendi.

Auctore W. L. Krafft pag. 658.

Methodus, planetarum excentricitates et aphelia definiendi, quam a Cassinio prolatam inprimis Cel. *la Lande* in Comment. Paris. 1755. insigniter

gniter excoluit, quantumuis ſit egregia et ad calculi facilitatem apta; eo tamen haud mediocri incommodo premi videtur, quod ipſos apheliorum motus annuos tanquam elementa calculi ſupponat cognitos; quodſi enim, quae adhibentur, obſeruationes magno temporis interuallo inter ſe ſint disiunctae; omnis calculi praeciſio pro orbitis praeſertim valde excentricis haud parum inde labefactari videtur. Remedium huic difficultati adferre conatus eſt Cl. Auctor, dum correctionem aliquam ipſius quoque aphelii annuo motui adplicandam, tanquam incognitam quantitatem, in calculum introducit et ex quaternis obſeruationibus, debite inter ſe diſpoſitis, tres elicit aequationes analyticas, vnde correctiones pro excentricitate, aphelii poſitione eiusque praeceſſione annua definiuntur. Ad elementorum, quae hic pro Veneris theoria inuenit Cl. Auctor, praeciſionem quod attinet; ea plures obſeruationes, in idoneis huic disquiſitioni orbitae punctis inſtitutas, comparando etiam magis perfici et comprobari poterit. Ceterum excentricitas et poſitio aphelii hic ſtabilita, illa a Caſſinianis, haec ab Halleianis, tabulis vix discrepat; motus vero aphelii annuus 45 minutis ſecundis maior fuit inuentus eo, quem Cel. *Caſſini* ſtatuit adoptandum.

V.

De Latitudine Veneris Geocentrica tempore transitus A. 1769.

Auctore A. I. Lexell pag. 669.

Quum ex obseruationibus contactuum Veneris cum Sole pro Latitudine Veneris Geocentrica prodeat valor aliquanto maior eo, qui reperitur si ad obseruationes distantiarum minimarum attendatur, Cl. huius dissertationis Auctor in veram et exactam quantitatem latitudinis Geocentricae ex obseruationibus distantiarum inter centra Solis et Veneris deducendam, inquirere constituit, vt eo ipso constaret cuinam obseruationum speciei potior tribuenda sit fides. Hunc in finem eas imprimis computo subiecit obseruationes, quae Noritoni in Pensyluania circa distantias proximas inter limbos Solis et Veneris institutae sunt, ex quarum inter se combinatione valor distantiae minimae inter centra Solis et Veneris facile exquiritur. Si enim pro datis duobus temporibus, innotescant distantiae apparentes centrorum Solis et Veneris eaedem effectu parallaxis correctae dabunt veras distantias inter haec ipsa centra, tum vero ex tempore inter obseruationes praeterlapso dabitur chorda a Venere eo tempore percursa, ideoque in triangulo cuius tria dantur latera, inueniri quoque potest perpendicularis in basin (chordam

a Vea Venere percurſam), quae erit ipſa diſtantia minima. Hoc autem modo ex 36 diuerſis comparationibus, quarum maxima diſcrepantia 5″ non excedit, colligitur valor diſtantiae minimae 10′. 9″, 4 pro ſemidiametro Solis 15′. 47″, ſi autem binae obſeruationes, quae reliquis ſunt incertiores excludantur, maximus diſſenſus concluſionum 2″ non ſuperabit, tumque medio ſumto habebitur diſtantia minima 10′. 10″, quam tamen vno ſecundo maiorem eſſe ſuſpicatur Cl. Auctor, quod etiam per obſeruationes Philadelphiae inſtitutas confirmare annititur. Deinde obſeruationes quoque a Cel. *Krafft* Orenburgi inſtitutas circa appulſus Solis et Veneris ad eadem fila Quadrantis horizontalia et verticalia in computum duxit, indeque valorem Latitudinis Geocentricae Veneris quaeſiuit, quam tamen vera maiorem reperit, oſtendit igitur ex huiusmodi obſeruationibus licet quam maxime exactis, vic quicquam certi de valore Latitudinis Geocentricae ſtatui poſſe, quum vnius ſecundi error in appulſu notando, in valore Latitudinis producat errorem 8 ſec., igitur vt concluſiones ex huiusmodi obſeruationibus deduci poſſent, quae non vltra 3 aut 4 ſecunda inter ſe diſcreparent, neceſſum eſſet, vt momenta appulſus ad praeciſionem dimidiae vel tertiae partis minuti ſecundi notari poſſent qualem exactitudinem in huiusmodi obſeruationibus exſpectare fruſtraneum eſſet. Denique reticendum non eſt, ſi valor diametri Solaris aliquantum imminuatur, obſeruationes contactuum cum obſeruationibus Micrometricis melius

h 2 con-

conciliari posse, immo perfectum obtineri consensum si cum Cel. *de la Lande* diameter Solis 7'' imminuatur, quo facto prodibit distantia minima 10' 8'' circiter. Verum quum tanta diminutio diametri Solaris vix admittenda sit, nisi per mensuras actuales Micrometris captas comprobari possit, Cl. Auctor tutissimum indicauit pro valore diametri Solis 10'. 45'', 5, qui ipsi admodum probabilis visus est, statuere valorem distantiae minimae Veneris a centro Solis 10'. 10'', ex quo Latitudo Veneris Geocentrica tempore coniunctionis habebitur 10'. 17''.

IV.

Epitome Obseruationum meteorologicarum, anno 1771. secundum Calendarium Iulianum Petropoli institutarum.

Auctore I. A. Eulero pag. 693.

Obseruationes meteorologicas anni 1771. eadem Cel. Auctor et instituit et heic exponit methodo, quam in horum Commentariorum Tomo decimo quarto fusius ab Ipso legimus explicatam. Barometri maxima altitudo obseruata fuit 28. 77 poll. ped. Paris. cum spatio variationis annuo 1. 81; ad menstruas vero variationes quod attinet, eas, vti com-

communiter, ita et hoc anno, in menſibus aeſtiuis, longe minores, quam hybernis, deprehendimus. Frigus intenſiſſimum fuit 198°. diuiſionis *Deslilianae*, quod ergo vix tribus gradibus a ſummo frigore abfuit Petropoli adhuc obſeruato; calor maximus fuit 109° ſeu 22° ſupra punctum congelationis in diuiſione Reaumuriana. Obſeruationes aurorarum borealium, quales quidem viginti nouem hoc anno adparuerunt, aliorumque phaenomenorum Cel. Auctor ſingulis menſibus ſubnectit.

INDEX.

DISSERTATIONVM.

Mathematica.

Phyſico-Mathematica.

Phyſica.

Aſtronomica.

A. I.

MATHEMATICA.

DE SOLIDIS QVORVM SVPERFICIEM IN PLANVM EXPLICARE LICET.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Notiſſima eſt proprietas cylindri et coni, qua eorum ſuperficiem in planum explicare licet atque adeo haec proprietas ad omnia corpora cylindrica et conica extenditur, quorum baſes figuram habeant quamcunque; contra vero ſphaera hac proprietate deſtituitur, quum eius ſuperficies nullo modo in planum explicari neque ſuperficie plana obduci queat; ex quo naſcitur quaeſtio aeque curioſa ac notatu digna, vtrum praeter conos et cylindros alia quoque corporum genera exiſtant, quorum ſuperficiem itidem in planum explicare liceat nec ne? quam ob rem in hac diſſertatione ſequens conſiderare conſtitui Problema:

Inuenire aequationem generalem pro omnibus ſolidis, quorum ſuperficiem in planum explicare licet, cuius ſolutionem variis modis ſum agreſſurus.

SOLVTIO PRIMA.

ex meris principiis Analyticis petita.

Tab. I. Fig. 1. 2. Sit Z punctum quodcunque in superficie solidi quaesiti, cuius locus more solito per has ternas coordinatas inter se normales $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ exprimatur, ita vt aequatio inter has coordinatas sit inuestiganda, qua problemati satisfiat. Deinde concipiamus superficiem huius solidi, iam in planum esse explicatam eamque in Fig. 2. repraesentari, in qua punctum illud Z incidat in V, cuius locus per binas coordinatas orthogonales ita definiatur vt sit, $OT = t$ et $TV = u$ atque manifestum est, ternas coordinatas priores x, y et z certo quodam modo ab his binis t et u pendere debere, ideoque singulas earum tamquam certas functiones istarum t et u spectari posse.

3. Quo hanc conditionem commodius in calculum introducamus eam in differentialibus consideremus et quoniam tam x, quam y et z sunt functiones binarum variabilium t et u, earum differentialia his formulis definiamus:

$$dx = l\,dt + \lambda\,du;\quad dy = m\,dt + \mu\,du \quad \text{et} \quad dz = n\,dt + \nu\,du$$

vbi quum litterae l, m, n et λ, μ, ν itidem certas functiones binarum variabilium t et u significent, ex natura huiusmodi functionum constat esse debere:

$$\left(\frac{dl}{du}\right) = \left(\frac{d\lambda}{dt}\right);\quad \left(\frac{dm}{du}\right) = \left(\frac{d\mu}{dt}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dn}{du}\right) = \left(\frac{d\nu}{dt}\right).$$

4. Iam

4. Iam in ſuperficie explanata praeter punctum V duo alia infinite propinqua v et v' contemplemur, pro quorum illo coordinatae ſint $OT = t$ et $Tv = u + du$ pro hoc vero $Ot = t + dt$ et $tv' = u$, ita vt puncta V et v communem habeant abſciſſam $OT = t$, at puncta V et v' communem applicatam $= u$. Hinc iunctis lineolis Vv et vv' latera trianguli elementaris Vvv' ita determinantur, vt ſit $Vv = du$, $Vv' = dt$, et $vv' = \surd(du^2 + dt^2)$, atque nunc facile intelligitur, hoc idem triangulum in ſuperficie ſolidi quaeſiti reperiri debere. Tab. I. Fig. 2.

5. Sint igitur in ſuperficie ſolidi puncta z et z', quae punctis v et v' reſpondeant, atque videamus quo modo pro illis punctis z et z' ternae coordinatae ſe ſint habiturae? Quemadmodum autem ipſum punctum Z per has tres coordinatas primam $= x$ ſecundam $= y$ et tertiam $= z$ definitur, quae ſingulae ſunt functiones binarum t et u, quoniam pro puncto v abſciſſa t manet, applicata vero u ſuo differentiali du augetur, pro puncto ſolidi z ternae coordinatae ita ſe habebunt:

$$\mathrm{I}^{ma}\; x + \lambda du \quad \mathrm{II}^{da}\; y + \mu du \quad \text{et} \quad \mathrm{III}^{tia}\; z + \nu du$$

ſimili modo quia pro puncto v' applicata u manet abſciſſa vero t ſuo differentiali dt augetur, pro puncto z' ternae coordinatae erunt:

$$\mathrm{I}^{ma}\; x + l dt \quad \mathrm{II}^{da}\; y + m dt \quad \text{et} \quad \mathrm{III}^{tia}\; z + n dt.$$

6. Conſtat autem ſi pro puncto quocunque in ſuperficie ſolidi coordinatae fuerint x, y et z pro

alio vero puncto proximo x', y', et z', tum eorum punctorum distantiam fore $= \sqrt{((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2)}$; hinc pro triangulo Zzz' habebimus singula eius latera 1°. $Zz = du\sqrt{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}$; 2°. $Zz' = dt\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}$ et 3^{tio} $zz' = \sqrt{((\lambda du - ldt)^2 + (\mu du - mdt)^2 + (\nu du - ndt)^2)}$ siue $zz' = \sqrt{(dt^2(ll + mm + nn) + du^2(\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu) - 2dtdu(l\lambda + m\mu + n\nu))}$.

7. Iam quum superficies solidi prorsus debeat conuenire cum figura plana (Fig. 2) necesse est, vt triangula Zzz' et Vvv' sint non solum aequalia, sed etiam similia ideoque latera homologa aequalia, scilicet:

I°. $Zz = Vv$, II°. $Zz' = Vv'$ et $zz' = vv'$ vnde tres sequentes nanciscimur aequationes

I°. $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$; II°. $l^2 + m^2 + n^2 = 1$;

III°. $dt^2(l^2 + m^2 + n^2) + du^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - 2dtdu(l\lambda + m\mu + n\nu) = dt^2 + du^2$

tertia autem ob binas priores reducitur ad hanc

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0,$$

quibus tribus aequationibus solutio problematis nostri continetur, ex quo intelligitur eam reduci ad sequens problema analyticum:

Propositis duabus variabilibus t *et* u *earum sex inuenire functiones* l, m, n *et* λ, μ, ν *ita comparatas, vt sex sequentibus conditionibus satisfiat*

I°. $\left(\frac{dl}{du}\right) = \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)$; II°. $\left(\frac{dm}{du}\right) = \left(\frac{d\mu}{dt}\right)$; III^{tio} $\left(\frac{dn}{du}\right) = \left(\frac{d\nu}{dt}\right)$

IV°. $ll + mm + nn = 1$; V°. $\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1$;

VI°. $l\lambda + m\mu + n\nu = 0$

quod

quod problema in se consideratum longe videtur difficillimum, cuius tamen solutionem satis concinnam infra exhibere licebit.

SECVNDA SOLVTIO.

ex principiis Geometricis petita.

8. Vt hanc solutionem a primis principiis repetamus, consideremus corpora vel prismatica vel pyramidica, quae basibus exceptis charta obducta intelligantur, atque in hac charta plicae rectilineae deprehendentur vel inter se parallelae, vel ad certum punctum verticem scilicet pyramidis conuergentes, quae lineae rectae quotcunque fuerint, litteris A *a*, B *b*, C *c*, D *d* etc. designentur. Quodsi ergo charta in planum expandatur, in ea eaedem lineae rectae A *a*, B *b*, C *c* etc. occurrent, eruntque vel inter se parallelae vel ad certum punctum conuergentes. Vnde vicissim si super charta plana huiusmodi lineae rectae ducantur, secundum quas chartam plicare liceat, ea certo corpori vel prismatico vel pyramidico obducendo erit apta.

9. Quin etiam in ista charta plana rectas A *a*, B *b*, C *c* etc. pro lubitu ducere licebit, ita vt neque inter se sint parallelae neque ad certum punctum conuergant, dummodo se mutuo nusquam decussent, quemadmodum (Fig. 3.) declarat quocunque enim modo ista charta secundum has rectas plicetur semper concipere licebit eiusmodi solidum, cui ista charta plicata adaptari possit. Ex quo patet praeter Tab. I. Fig. 3.

corpora

corpora prismatica et pyramidica, alia quoque dari corporum genera quae hoc modo charta obduci queant, quorumque adeo ſuperficiem in planum explicare liceat.

10. In ſuperficie ergo horum corporum dabuntur etiam quotcunque lineae rectae A*a*, B*b*, C*c*, D*d* etc. quae etiamſi neque inter ſe ſint parallelae, neque ad quodpiam punctum conuergentes, tamen ita erunt comparatae, vt binae quaeque proximae veluti A*a* et B*b*, vel B*b* et C*c*, vel C*c* et D*d* etc. niſi ſint parallelae, productae ſaltem in vno puncto concurrant, niſi enim hoc eueniret, ſpatium inter huiusmodi binas rectas proximas in ſuperficie corporis interceptum non foret planum, neque propterea ipſam ſuperficiem in planum explicare liceret, quamuis in ea darentur quotcunque lineae rectae A *a*, B *b*, C *c* etc. Ex quo concludimus ad corpora ſcopo noſtro ſatisfacientia non ſufficere, vt ſuper iis quotcunque rectas A *a*, B *b*, C *c* ducere liceat, ſed inſuper imprimis requiri vt binae proximae in eodem plano exiſtant, ſpatiumque inter eas interceptum ipſum ſit planum.

11. Nunc iam in infinitum augeamus rectas illas A *a*, B *b*, C *c* etc. vt corpus noſtrum obtineat ſuperficiem vbique incuruatam, quemadmodum Problema noſtrum ob continuitatis legem poſtulat. Atque nunc quidem ſtatim apparet, ſuperficiem huiusmodi corporum ita comparatam eſſe debere, vt ex quolibet in ea ſumto puncto vna ſaltem linea recta educi

educi poſſit, quae tota in ipſa ſuperficie ſit ſita, verum haec conditio ſola nondum indolem Problematis noſtri exhaurit, ſed inſuper neceſſe eſt, vt quaeuis huiusmodi binae rectae inter ſe proximae in eodem plano ſint conſtitutae, hoc eſt vt niſi ſint parallelae, eae ſaltem productae in vno puncto concurrant. Quare ſi ſingulae illae rectae hoc modo ad concurſum vsque producantur, omnia concurſuum puncta in certa quadam linea curua ſita reperientur, quae cum tota non ſit in eodem plano duplici curuatura erit praedita atque ita comparata, vt ſingula eius elementa ſi producantur, ipſas illas rectas A a, B b, C c ſupra memoratas in ſuperficie corporis exhibeant.

12. Quemadmodum igitur quoduis corpus noſtro Problemati conueniens ad certam quandam lineam curuam duplicis curuaturae deducit; ita viciſſim ſumta pro lubitu huiusmodi linea curua ex ea corpus determinare poterimus, quod problemati noſtro ſatisfaciet. Talis autem linea curua primo proiiciatur in plano tabulae, ſitque eius proiectio a U u pro qua ponamus abſciſſam A T $= t$ et applicatam T U $= u$, ita vt aequatio inter t et u tamquam data ſpectetur, ſitque recta U M tangens huius curvae in puncto U, recta vero $u\,m$ tangens in puncto proximo u; hoc poſito ſit b V v ipſa curua duplicis curuaturae, cuius applicata ad planum noſtrum normalis ponatur U V $= v$, ſitque v proximum in eadem curua punctum, atque ex vtroque puncto V, v educantur tangentes quarum illa V S rectae U M in puncto S, haec vero $v\,s$ rectae $u\,m$ in Tab. I. Fig. 4.

 puncto

puncto s occurrat. Hic quidem ductu tangentium proximarum in punctis u et v carere potuissemus, sed quia in sequentibus iis opus erit, hic eas in Figura indicare visum est.

13. Quum igitur natura curuae $b\,V\,v$ duplici aequatione inter ternas coordinatas $AT = t$, $TU = u$ et $UV = v$ exprimatur, tam littera u, quam v vt functio ipsius t spectari poterit, vnde simul definietur positio vtriusque tangentis UM et VS, quocirca vocemus angulos $TUM = \zeta$ et $UVS = \theta$, atque posito elemento $Tt = dt$ erit $du = \frac{dt}{tang.\,\zeta}$, $Uu = \frac{dt}{sin.\,\zeta}$, tum vero $dv = \frac{dt}{sin.\,\zeta\; tang.\,\theta}$ ac denique elementum curuae $Vv = \frac{dt}{sin.\,\zeta\; sin.\,\theta}$. Pro situ autem tangentium habebimus $TM = u\; tang.\,\zeta$; $UM = \frac{u}{cos.\,\zeta}$, at recta $US = v\; tang.\,\theta$ et $VS = v\; sec.\,\theta = \frac{v}{cos.\,\theta}$.

14. Quoniam nunc tota recta VS sita est in superficie corporis quod quaerimus, capiamus in ea punctum quodcunque indefinitum Z, vnde in planum tabulae demisso perpendiculo ZY et ex Y ad axem AT ducta normali YX habebimus pro superficie quaesita ipsas ternas coordinatas, quas supra sumus contemplati, scilicet $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, inter quas ergo debitam aequationem inuestigari oportet, qua huius superficiei natura exprimatur.

15. Hunc in finem vocemus interuallum indefinitum $VZ = s$, quae ergo est quantitas variabilis neutiquam a puncto V pendens, ideoque probe distinguen-

ſtinguenda a variabili t, cuius functiones non ſolum ſunt binae applicatae $TU = u$ et $UV = v$, ſed etiam bini anguli ζ et θ. Hinc autem adipiſcimur $ZY = z = v - s \operatorname{coſ.} \theta$ et interuallum $UY = s \operatorname{ſin} \theta$, vnde porro concludimus $XY = y = u - s \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{coſ.} \zeta$ et $XT = s \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{ſin.} \zeta$, ſicque tandem obtinemus abſciſſam $AX = x = t - s \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{ſin.} \zeta$ ita vt per binas variabiles t et s, tres noſtrae coordinatae hoc modo ſuccincte determinentur:

I°. $x = t - s \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{ſin.} \zeta$ II°. $y = u - s \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{coſ.} \zeta$
III. $z = v - s \operatorname{coſ.} \theta$.

16. Praeter omnem igitur exſpectationem hic vſu venit, vt formulas adeo algebraicas pro ternis coordinatis x, y, z elicuerimus, ſiquidem pro quantitatibus u et v functiones algebraicae ipſius t accipiantur. Hae enim functiones penitus arbitrio noſtro permittuntur, iis autem aſſumtis, bini anguli ζ et θ ita determinantur, vt ſit $\operatorname{tang.} \zeta = \frac{dt}{du}$ vel $\operatorname{ſin.} \zeta = \frac{dt}{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}$ et $\operatorname{coſ.} \zeta = \frac{du}{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}$, tum vero $\operatorname{tang.} \theta = \frac{dt}{dv . \operatorname{ſin.} \zeta} = \frac{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}{dv}$, ideoque $\operatorname{ſin.} \theta = \frac{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}{\sqrt{(dt^2 + du^2 + dv^2)}}$ et $\operatorname{coſ.} \theta = \frac{dv}{\sqrt{(dt^2 + du^2 + dv^2)}}$. Quodſi autem viciſſim bini anguli ζ et θ per variabilem t, fuerint dati, ipſae applicatae u et v, per ſequentes formulas integrales reperientur expresſae $u = \int \frac{dt}{\operatorname{tang.} \zeta}$ et $v = \int \frac{dt}{\operatorname{ſin.} \zeta \operatorname{tang.} \theta}$.

17. In his ergo formulis omnia plane ſolida, quorum ſuperficiem in planum explicare licet contineri neceſſe eſt. Ante omnia igitur operae pre-

 tium

tium erit ostendere quomodo quaeuis corpora conica in iis contineantur, siquidem cylindrica in conicis iam continentur, vertice in infinitum remoto. Sit igitur punctum V vertex coni, qui quum sit fixus coordinatae t, u et v constantes habebunt valores. Quoniam igitur nihil impedit, quo minus hic vertex in ipso puncto fixo A accipiatur, ponere poterimus $t = o$, $u = o$ et $v = o$, tum autem ob $\text{tang.}\,\zeta = \frac{dt}{du}$ et $\text{tang.}\,\theta = \frac{dt}{dv.\,\text{sin.}\,\zeta} = \frac{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}{dv}$, hi anguli ζ et θ prodeunt indefiniti, ita tamen, vt alter tamquam functio quaedam alterius spectari possit, quandoquidem omnia quae ad positionem rectarum VS pertinent, ad vnicam variabilem sunt referenda.

18. Quum igitur sit $t = o$, $u = o$ et $v = o$ habebimus:

I°. $x = -s\,\text{sin.}\,\theta\,\text{sin.}\,\zeta$, II°. $y = -s\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\zeta$ et III^{tio} $z = -s\,\text{cos.}\,\theta$,

vnde fit $\frac{x}{y} = \text{tang.}\,\zeta$ et $\frac{x}{z} = \text{tang.}\,\theta\,\text{sin.}\,\zeta$, ex illa colligitur $\text{sin.}\,\zeta = \frac{x}{\sqrt{(xx + yy)}}$, ideoque ex hac $\text{tang.}\,\theta = \frac{\sqrt{(xx + yy)}}{z}$; quum igitur $\text{tang.}\,\theta$ functioni cuicunque ipsius $\text{tang.}\,\zeta$ aequetur, habebimus talem aequationem: $\frac{\sqrt{(xx + yy)}}{z} = \Phi : (\frac{x}{y})$, sicque quantitas $\frac{\sqrt{(xx + yy)}}{z}$ aequabitur functioni homogeneae nullius dimensionis ipsarum x et y hincque porro ipsa quantitas z aequabitur functioni homogeneae vnius dimensionis ipsarum x et y, siue quod eodem redit aequatio inter x, y et z, ita erit comparata, vt in

ea

ea tres variabiles x, y et z vbique eundem dimensionum numerum adimpleant. Quodsi vna coordinatarum x, y, z in infinitum abeat, aequatio pro solido duas tantum reliquas implicabit coordinatas, quod est criterium corporum cylindricorum.

19. Aliis solidis nostro problemati satisfacientibus hic euoluendis non immoramur; quum infra vbi tertiam Methodum trademus, multo facilius cuncta huiusmodi corporum genera cognoscere queamus. Interea dum ista secunda Methodus, tam facilem nobis suppeditauit solutionem, cum per Methodum priorem vix vllam solutionem sperare licuisset; nunc etiam priorem solutionem vberius euoluere atque adeo formulas illas analyticas primo intuitu summopere arduas, resoluere poterimus vnde in Analysin plurimum lucis inferetur. Ad hoc praestandum tantum opus erit, vt hanc posteriorem solutionem ad elementa prioris sollicite reuocemus.

Applicatio Methodi posterioris ad solutionem priorem.

20. Quoniam in posteriori solutione iam formulas pro ternis coordinatis x, y et z quibus natura solidi continetur, elicuimus, in eo nobis erit elaborandum vt etiam formulas pro figura plana in quam superficies solidi explicatur, inuestigemus. Hic ante omnia curua illa duplicis curuaturae $b\,V\,v$ accuratius est perpendenda, quippe quae per explicationem illius superficiei etiam ad planum perducitur.

tur. Quum autem haec curua per inflexionem infinitis modis ad planum reduci atque adeo in lineam rectam extendi queat, ante omnia inquirendum est, quanam lege hanc reductionem ad planum fieri oporteat. Ex superioribus autem manifestum est, hanc reductionem ita fieri debere, vt binae quaeque tangentes proximae VS, et vs eundem situm inter se conferuent, siue vt angulus inter eas interceptus SVs maneat idem. Scilicet ipsa linea curua BVv ita ad planum est redigenda, vt bina eius quaeque elementa proxima eandem inclinationem inter se conferuent.

Tab. I. Fig. 4.

21. Praecipuum igitur negotium huc redit, vt angulum infinite paruum SVs inuestigemus, quem in finem ab angulo MUm est exordiendum. Quum autem sit angulus $TUM = \zeta$, et angulus $tum = \zeta + d\zeta$, manifesto sequitur angulus $MUm = d\zeta$, deinde quia supra iam inuenimus $US = v \,\mathrm{tang.}\, \theta$, erit ex natura differentialium $us = v \,\mathrm{tang.}\, \theta + d.(v \,\mathrm{tang.}\, \theta) = v \,\mathrm{tang.}\, \theta + dv.\, \mathrm{tang.}\, \theta + \frac{v\, d\theta}{\mathrm{cos.}\, \theta^2}$, vbi $dv = \frac{dt}{\mathrm{sin.}\, \zeta \,\mathrm{tang.}\, \theta}$, quum igitur sit $Uu = \frac{dt}{\mathrm{sin.}\, \zeta}$, erit $Us = v \,\mathrm{tang}\, \theta + dv \,\mathrm{tang.}\, \theta + \frac{v\, d\theta}{\mathrm{cos.}\theta^2} - \frac{dt}{\mathrm{sin.}\, \zeta} = v \,\mathrm{tang.}\, \theta + \frac{v\, d\theta}{\mathrm{cos.}\, \theta^2}$. Ex S itaque in Us ducatur perpendiculum Sr, vt habeatur $rs = \frac{v\, d\theta}{\mathrm{cos.}\, \theta^2}$, tum vero erit $Sr = v\, d\zeta \,\mathrm{tang.}\, \theta$, vnde etiam elementum Ss definire liceret, siquidem eo opus haberemus.

22. Nunc ex puncto r in tangentem vs quoque perpendiculum ducamus $r\varrho$, vt ducta $S\varrho$ fiat norma-

normalis in $v s$, vbi notandum triangulum $S r \varrho$ fore rectangulum ad r, quia $S r$ ad ipsum planum $s U V$ est normalis. Quia nunc angulus $r s \varrho = 90^\circ - \theta$ erit $r \varrho = s r.$ fin. $r s \varrho = \frac{v d \theta}{cof. \theta}$, vnde colligitur $S \varrho = \sqrt{}(v v d \zeta^2 \text{ tang. } \theta^2 + \frac{v v d \theta^2}{cof. \theta^2}) = \frac{v}{cof. \theta} \sqrt{}(d \zeta^2 \text{ fin. } \zeta^2 + d \theta^2)$. Quum igitur fit $V S = \frac{v}{cof. \theta}$, hinc concluditur angulus $S V s = \frac{S \varrho}{VS} = \sqrt{}(d \zeta^2 \text{ fin. } \theta^2 + d \theta^2)$.

23. Sic itaque inuenimus angulum $S V s$, quo bina elementa curuae proxima inter se inclinantur ex quo promtiffime radius osculi huius curuae in puncto V definiri poteft, quippe qui eft $= \frac{V v}{S V s} = \frac{d t}{fin. \zeta . fin. \theta \sqrt{}(d \zeta^2 . fin. \theta^2 + d \theta^2)}$ quod ergo negotium ob duplicem curuaturam non impeditur, quae in tranfitu monuiffe fat eft. Quoniam autem hic cardo rei in hoc angulo elementari $S V s$ verfatur, vocemus hunc angulum $S V s = d \omega$, ita vt fit $d \omega = \sqrt{}(d \zeta^2 \text{ fin. } \theta^2 + d \theta^2)$, fiue $d \omega^2 - d \theta^2 = d \zeta^2 \text{ fin. } \theta^2$, vbi quum ambo anguli ζ et θ per variabilem t determinentur, cuius etiam functiones funt ambae applicatae u et v, patet quoque angulum ω tamquam functionem eiusdem variabilis t fpectari debere.

24. Iam fecundum praecepta fupra data curva illa duplicis curuaturae $b V v$, in plano fit defcripta, ita vt angulus inter tangentes proximas interceptus $S V s$ fit $= d \omega$, atque hac curua ad axem $O P$ per applicatam $P V$ relata, euidens eft fore angulum $P V S = \omega$. Statuamus autem has coordinatas $O P = p$ et $P V = q$, atque habebimus $\frac{d p}{d q} = \text{tang } \omega$ Tab. I. Fig. 5.

et

et elementum curuae $Vv = \frac{dr}{\sin.\omega}$ at vero per coordinatas praecedentes t, u et v cum angulis ζ et θ, erat idem elementum $Vv = \frac{dt}{\sin.\zeta \sin.\theta}$, vnde consequimur dt fin. $\omega = dp$ fin ζ fin. θ, quae cum illa aequatione $\frac{dp}{dq} =$ tang. ω coniuncta, dabit pro praesentibus coordinatis p et q sequentes valores integrales $p = \int \frac{dt.\sin.\omega}{\sin.\zeta.\sin.\theta}$ et $q = \int \frac{dt.\cos.\omega}{\sin.\zeta.\sin.\theta}$ inuentis his quantitatibus p et q, quae itidem sunt functiones eiusdem variabilis t, capiatur interuallum $VZ = s$, quae est altera variabilis in calculum introducenda atque ex puncto Z ad axem demisso perpendiculo ZT, inuenimus $OT = p - s$ fin. ω et $TZ = q - s$ cof. ω.

25. Quoniam igitur pro puncto Z ad planum reducto determinationem sumus adepti, ponamus eius coordinatas $OT = T$ et $TZ = U$, quae ita per binas variabiles t et s definiuntur, vt sit

$$T = p - s \text{ fin. } \omega = \int \frac{dt.\,\text{fin.}\,\omega}{\text{fin.}\,\zeta.\,\text{fin.}\,\theta} - s \text{ fin. } \omega$$

$$U = q - s \text{ cof. } \omega = \int \frac{dt.\,\text{cof.}\,\omega}{\text{fin.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\theta} - s \text{ cof. } \omega$$

vbi notandum angulum ω ita pendere ab angulis ζ et θ, vt fit $d\omega = \sqrt{(d\zeta^2 \text{ fin. } \theta^2 + d\theta^2)}$. Sunt vero hae coordinatae T et U eaedem, quas in prima solutione literis t et u designauimus, vnde eadem mutatione ibi facta, formulae pro solido ibi inuentae ad has redeunt

$$dx = l\,dT + \lambda\,dU;\ dy = m\,dT + \mu\,dU;\ dz = n\,dT + \nu\,dU$$

manentibus conditionibus quas ibi inuenimus scilicet:

$$ll + mm + nn = 1;\ \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1 \text{ et } l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

26. Hic autem pro iisdem coordinatis solidi, x, y et z, sequentes inuenimus valores:

$$x = t - s\,\text{sin.}\,\theta\,\text{sin.}\,\zeta;\quad y = u - s\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\zeta \quad\text{et}\quad z = v - s\,\text{cos.}\,\theta$$

qui ob $d\,u = \frac{d\,t}{\text{tang.}\,\zeta}$ et $d\,v = \frac{d\,t}{\text{sin.}\,\zeta.\,\text{tang.}\,\theta}$, differentiati praebent:

$$d\,x = d\,t - d\,s\,\text{sin.}\,\theta\,\text{sin.}\,\zeta - s\,d\,\zeta\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\zeta - s\,d\,\theta\,\text{sin}\,\zeta\,\text{cos.}\,\theta$$

$$d\,y = \frac{d\,t}{\text{tang.}\,\zeta} - d\,s\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\zeta + s\,d\,\zeta\,\text{sin.}\,\zeta\,\text{sin.}\,\theta - s\,d\,\theta\,\text{cos}\,\zeta\,\text{cos.}\,\theta$$

$$d\,z = \frac{d\,t}{\text{sin.}\,\zeta\,\text{tang.}\,\theta} - d\,s\,\text{cos.}\,\theta + s\,d\,\theta\,\text{sin.}\,\theta.$$

27. Antequam vlterius progrediamur, haud abs re erit praecipuas harum formularum relationes annotasse, ac primo quidem pro ipsis formulis finitis eliminando s obtinemus has relationes:

$$x\,\text{cos.}\,\zeta - y\,\text{sin.}\,\zeta = t\,\text{cos.}\,\zeta - u\,\text{sin.}\,\zeta;$$

$$x\,\text{sin.}\,\zeta + y\,\text{cos.}\,\zeta = t\,\text{sin.}\,\zeta + u\,\text{cos.}\,\zeta - s\,\text{sin.}\,\theta;$$

$$x\,\text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\theta + y\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\theta - z\,\text{sin.}\,\theta = t\,\text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\theta + u\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\theta - v\,\text{sin.}\,\theta.$$

Deinde vero pro differentialibus sequentes:

$$\text{I.}\ d\,x\,\text{cos.}\,\zeta - d\,y\,\text{sin.}\,\zeta = -s\,d\,\zeta\,\text{sin.}\,\theta$$

$$\text{II.}\ d\,x\,\text{sin.}\,\zeta + d\,y\,\text{cos.}\,\zeta = \frac{d\,t}{\text{sin.}\,\zeta} - d\,s\,\text{sin.}\,\theta - s\,d\,\theta\,\text{cos.}\,\theta \quad\text{et}$$

$$\text{III.}\ d\,x\,\text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\theta + d\,y\,\text{cos.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\theta - d\,z\,\text{sin.}\,\theta = -s\,d\,\theta.$$

28. Quoniam autem hoc nouo calculo omnia ad binas variabiles t et s reduximus, dum in priori calculo vsi sumus binis variabilibus T et U, videamus quomodo hae per illas exprimantur, atque

 ex

ex formulis quidem pro T et U inuentis ſtatim habemus:

$$dT = \frac{dt.\ \text{ſin.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\zeta.\ \text{ſin.}\,\theta} - ds\,\text{ſin.}\,\omega - s\,d\omega.\,\text{coſ.}\,\omega \quad \text{et}$$

$$dU = \frac{dt.\ \text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\zeta.\ \text{ſin.}\,\theta} - ds\,\text{coſ.}\,\omega + s\,d\omega.\,\text{ſin.}\,\omega$$

quos valores ſi in formulis dx, dy et dz ante inventis ſubſtituamus et binas variabiles t et s probe diſtinguamus; ſequentes nanciſcemur expreſſiones:

$$dx = dt\frac{(l\,\text{ſin.}\,\omega + \lambda\,\text{coſ.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\zeta\ \text{ſin.}\,\theta} - sd\omega\,(l\,\text{coſ.}\,\omega - \lambda\,\text{ſin.}\,\omega) - ds\,(l\,\text{ſin.}\,\omega + \lambda\,\text{coſ.}\,\omega)$$

$$dy = dt\frac{(m\,\text{ſin.}\,\omega + \mu\,\text{coſ.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\zeta.\ \text{ſin.}\,\theta} - sd\omega\,(m\,\text{coſ.}\,\omega - \mu\,\text{ſin.}\,\omega) - ds\,(m\,\text{ſin.}\,\omega + \mu\,\text{coſ.}\,\omega)$$

$$dz = dt\frac{(n\,\text{ſin.}\,\omega + \nu\,\text{coſ.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\zeta\ \text{ſin.}\,\theta} - s\,d\omega\,(n\,\text{coſ.}\,\omega - \nu\,\text{ſin.}\,\omega) - ds\,(n\,\text{ſin.}\,\omega + \nu\,\text{coſ.}\,\omega)$$

quas cum iis quae per poſteriorem ſolutionem prodierunt comparemus, quae ſunt

$$dx = dt - s\,d\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\zeta - s\,d\theta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta - ds\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta$$

$$dy = \frac{dt}{\text{tang.}\,\zeta} + s\,d\zeta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta - s\,d\theta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta - ds\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta$$

$$dz = \frac{dt}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{tang.}\,\theta} + s\,d\theta\,\text{ſin.}\,\theta - ds\,\text{coſ.}\,\theta$$

atque primo membra per ds affecta vtrinque aequalia eſſe debent, vnde obtinemus has aequationes:

I. $l\,\text{ſin.}\,\omega + \lambda\,\text{coſ.}\,\omega = \text{ſin.}\,\zeta.\ \text{ſin.}\,\theta$

II. $m\,\text{ſin.}\,\omega + \mu\,\text{coſ.}\,\omega = \text{coſ.}\,\zeta.\ \text{ſin.}\,\theta$

III. $n\,\text{ſin.}\,\omega + \nu\,\text{coſ.}\,\omega = \text{coſ.}\,\theta.$

29 Quodsi iam hi valores in prioribus membris, quae differentiale dt et ab eo pendentia, $d\zeta$ $d\theta$ et $d\omega$ inuoluunt, substituantur, adipiscemur sequentes aequationes:

$$l \operatorname{cos}.\omega - \lambda \operatorname{sin}.\omega = \frac{d\zeta \operatorname{cos}.\zeta . \operatorname{sin}.\theta + d\theta \operatorname{sin}.\zeta \operatorname{cos}.\theta}{d\omega} = \frac{d(\operatorname{sin}.\zeta . \operatorname{sin}.\theta)}{d\omega}$$

$$m \operatorname{cos}.\omega - \mu \operatorname{sin}.\omega = -\frac{d\zeta . \operatorname{sin}.\zeta \operatorname{sin}.\theta + d\theta \operatorname{cos}.\zeta \operatorname{cos}.\theta}{d\omega} = \frac{d. \operatorname{cos}.\zeta . \operatorname{sin}.\theta}{d\omega}$$

$$n \operatorname{cos}.\omega - \nu \operatorname{sin}.\omega = -\frac{d\theta . \operatorname{sin}.\theta}{d\omega} = \frac{d. \operatorname{cos}.\theta}{d\omega}.$$

Hic imprimis notari meretur ex his formulis inventis alteram variabilem s prorsus excessisse, ita vt iam quantitates l, λ, m, μ, n, ν per vnicam variabilem t determinentur, alteramque s prorsus non inuoluant, dum contra ipsae quantitates T et U ambas variabiles t et s implicant.

30. Nunc pro functionibus l et λ definiendis has duas inuenimus aequationes:

$$l \operatorname{sin}.\omega + \lambda \operatorname{cos}.\omega = \operatorname{sin}.\zeta \operatorname{sin}.\theta$$

$$l \operatorname{cos}.\omega - \lambda \operatorname{sin}.\omega = \frac{d.(\operatorname{sin}.\zeta . \operatorname{sin}.\theta)}{d\omega}$$

Hinc prior in sin. ω + posterior in cos. ω dat:

$$l = \operatorname{sin}.\zeta . \operatorname{sin}.\theta . \operatorname{sin}.\omega + \operatorname{cos}.\omega . \frac{d(\operatorname{sin}.\zeta . \operatorname{sin}.\theta)}{d\omega}$$

at I. cos. ω — II. sin. ω dat.

$$\lambda = \operatorname{sin}.\zeta . \operatorname{sin}.\theta . \operatorname{cos}.\omega - \operatorname{sin}.\omega \frac{d(\operatorname{sin}.\zeta . \operatorname{sin}.\theta)}{d\omega}$$

Simili modo reliquae literae reperientur, vt sequitur

$$m = \operatorname{cos}\zeta . \operatorname{sin}.\theta . \operatorname{sin}.\omega + \operatorname{cos}.\omega . \frac{d(\operatorname{cos}.\zeta . \operatorname{sin}.\theta)}{d\omega}$$

$$\mu = \operatorname{cos}.\zeta . \operatorname{sin}.\theta . \operatorname{cos}.\omega - \operatorname{sin}.\omega . \frac{d(\operatorname{cos}.\zeta . \operatorname{sin}.\theta)}{d\omega}$$

$$n = \operatorname{cos}.\theta \ \operatorname{sin}.\omega + \frac{\operatorname{cos}.\omega . d. \operatorname{cos}.\theta}{d\omega}$$

$$\nu = \operatorname{cos}.\theta . \operatorname{cos}.\omega - \frac{\operatorname{sin}.\omega . d. \operatorname{cos}.\theta}{d\omega}.$$

En ergo idoneos valores pro litteris l, λ, m, μ et n, ν, qui ita ſunt comparati, vt tres illas formulas $l\,dT + \lambda\,dU$, $m\,dT + \mu\,dU$ et $n\,dT + \nu\,dU$ fiant integrabiles, atque adeo ipſa integralia facile exhiberi queant, quippe quae ſunt

$x = t - s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\zeta;\ y = u - s\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\zeta;\ z = v - s\,\text{coſ.}\,\theta.$

31. Quoniam ambae noſtrae ſolutiones penitus inter ſe conuenire debent, nullum eſt dubium, quin etiam reliquae conditiones ſupra memoratae impleantur, ſcilicet certo erit:

$ll + mm + nn = 1;\ \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1;\ l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$

Ad quod oſtendendum ponamus breuitatis gratia

$\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta = p;\ \text{coſ.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta = q$ et $\text{coſ.}\,\theta = r$, ita vt ſit

$pp + qq + rr = 1$, ideoque $pdp + qdq + rdr = 0$,

iam vero quum habeamus

$$l = p\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{dp}{d\omega}.\,\text{coſ.}\,\omega;\ m = q\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{dq}{d\omega}.\,\text{coſ.}\,\omega;\ n = r\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{dr}{d\omega}\,\text{coſ.}\,\omega$$

$$\lambda = p\,\text{coſ.}\,\omega - \tfrac{dp}{d\omega}.\,\text{ſin.}\,\omega;\ \mu = q\,\text{coſ.}\,\omega - \tfrac{dq}{d\omega}.\,\text{ſin.}\,\omega;\ \nu = r\,\text{coſ.}\,\omega - \tfrac{dr}{d\omega}.\,\text{ſin.}\,\omega$$

hinc inſtituto calculo reperiemus,

$$1^\circ\ ll + mm + nn = (pp + qq + rr)\,\text{ſin.}\,\omega^2 + \tfrac{2\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega}{d\omega}(pdp + qdq + rdr) + \tfrac{\text{coſ.}\,\omega^2}{d\omega^2}(dp^2 + dq^2 + dr^2)$$ ſiue

$$ll + mm + nn = \text{ſin.}\,\omega^2 + \tfrac{\text{coſ.}\,\omega^2}{d\omega^2}(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

ſicque tota quaeſtio in valore $dp^2 + dq^2 + dr^2$ inveſtigando verſatur. Quum autem ſit

$$dp = d\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta + d\theta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ}\,\theta$$

$$dq = -d\zeta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta + d\theta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta \text{ et } dr = -d\theta\,\text{ſin.}\,\theta;$$

colli-

colligemus

$$dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\zeta^2 \sin.\theta^2 + d\theta^2 = d\omega^2,$$

ita vt iam certum ſit eſſe

$$\frac{dp^2 + dq^2 + dr^2}{d\omega^2} = 1$$

quocirca manifeſtum eſt fore:

$$ll + mm + nn = \sin.\omega^2 + \cos.\omega^2 = 1.$$

32. Simili modo pro litteris Graecis reperiemus:

$$\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = (pp + qq + rr)\cos.\omega^2 - \frac{2\sin.\omega\cos.\omega}{d\omega}(pdp + qdq + rdr)$$
$$\frac{\sin.\omega^2}{d\omega^2}(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

quae manifeſto praebet vt ante

$$\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = \cos.\omega^2 + \sin.\omega^2 = 1.$$

Supereſt igitur vt tertiam proprietatem examinemus pro qua nanciſcimur:

$$l\lambda = pp\sin.\omega\cos.\omega - \frac{pdp}{d\omega}\sin.\omega^2 + \frac{pdp}{d\omega}\cos.\omega^2 - \frac{dp^2}{d\omega^2}\sin\omega\cos.\omega$$
$$m\mu = qq\sin.\omega\cos.\omega - \frac{qdq}{d\omega}\sin.\omega^2 + \frac{qdq}{d\omega}\cos.\omega^2 - \frac{dq^2}{d\omega^2}\sin.\omega\cos.\omega$$
$$n\nu = rr\sin.\omega\cos.\omega - \frac{rdr}{d\omega}\sin.\omega^2 + \frac{rdr}{d\omega}\cos.\omega^2 - \frac{dr^2}{d\omega^2}\sin.\omega\cos.\omega$$

quibus in vnam ſummam collectis fiet

$$l\lambda + m\mu + n\nu = \sin.\omega\cos.\omega - \sin.\omega\cos\omega = 0.$$

Atque hoc modo Problema illud Analyticum ſupra commemoratum (7) feliciſſime ſolutum dedimus, quae ſolutio ita ſuccincte ſe habet.

Problema Analyticum.

33. Propofitis duabus variabilibus T et U earum fex inuenire functiones l, m, n et λ, μ, ν ita comparatas, vt fex fequentibus conditionibus fatisfiat:

I°. $\left(\frac{d\,l}{d\,U}\right) = \left(\frac{d\,\lambda}{d\,T}\right)$; II°. $\left(\frac{d\,m}{d\,U}\right) = \left(\frac{d\,\mu}{d\,T}\right)$; III^{io} $\left(\frac{d\,n}{d\,U}\right) = \left(\frac{d\,\nu}{d\,T}\right)$

IV°. $ll + mm + nn = 1$; V°. $\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1$;

VI. $l\lambda + m\mu + n\nu = 0$.

Solutio.

Introductis in calculum duabus nouis variabilibus s et t, huius pofterioris t capiantur duae functiones quaecunque ζ et θ, quae fcilicet vt anguli fpectentur, e quibus formetur nouus angulus ω, ita vt fit $d\,\omega = \sqrt{(d\,\zeta^2\, \text{fin.}^2\, \theta^2 + d\,\theta^2)}$, tum vero hinc binae variabiles T et U, ita determinentur, vt fit

$$T = \int \frac{d\,t\, \text{fin.}\, \omega}{\text{fin.}\, \zeta\, \text{fin.}\, \theta} - s\, \text{fin.}\, \omega$$

$$U = \int \frac{d\,t\, \text{cof.}\, \omega}{\text{fin.}\, \zeta\, \text{fin.}\, \theta} - s\, \text{cof.}\, \omega$$

quo facto fex functiones quaefitae ita fe habebunt

$$l = \text{fin.}\,\zeta\, \text{fin.}\,\theta\, \text{fin.}\,\omega + \frac{\text{cof.}\,\omega}{d\,\omega} d(\text{fin.}\,\zeta\, \text{fin.}\,\theta);\quad \lambda = \text{fin.}\,\zeta\, \text{fin}\,\theta\, \text{cof.}\,\omega - \frac{\text{fin.}\,\omega}{d\,\omega} d(\text{fin.}\,\zeta\, \text{fin.}\,\theta)$$

$$m = \text{cof.}\,\zeta\, \text{fin.}\,\theta\, \text{fin.}\,\omega + \frac{\text{cof.}\,\omega}{d\,\omega} d(\text{cof.}\,\zeta\, \text{fin.}\,\theta);\quad \mu = \text{cof.}\,\zeta\, \text{fin.}\,\theta\, \text{cof.}\,\omega - \frac{\text{fin.}\,\omega}{d\,\omega} d(\text{cof.}\,\zeta\, \text{fin.}\,\theta)$$

$$n = \text{cof.}\,\theta\, \text{fin.}\,\omega + \frac{\text{cof.}\,\omega}{d\,\omega} d.\,\text{cof.}\,\theta;\quad \nu = \text{cof.}\,\theta\, \text{cof.}\,\omega - \frac{\text{fin}\,\omega}{d\,\omega} d.\,\text{cof.}\,\theta.$$

His autem valoribus, fequentes tres formulae differentiales:

I°. $l\,d\text{T} + \lambda\,d\text{U}$; II°. $m\,d\text{T} + \mu\,d\text{U}$; III^{io} $n\,d\text{T} + \nu\,d\text{U}$

quip-

quippe quibus tres priores conditiones continentur, non solum integrabiles redduntur, sed etiam ipsa integralia sequenti modo exprimentur:

$$\text{I}^\circ.\ \int(l\,d\text{T} + \lambda\,d\text{U}) = t - s\ \text{sin.}\ \theta\ \text{sin.}\ \zeta$$

$$\text{II}^\circ.\ \int(m\,d\text{T} + \mu\,d\text{U}) = \int\frac{d\,t}{\text{tang.}\,\zeta} - s\ \text{sin.}\,\theta\ \text{cos.}\,\zeta$$

$$\text{III}^\circ.\ \int(n\,d\text{T} + \nu\,d\text{U}) = \int\frac{d\,t}{\text{sin.}\,\zeta\ \text{tang.}\,\theta} - s\ \text{cos.}\ \theta,$$

quae solutio adeo pro completa haberi debet propterea quod duas functiones arbitrarias complectitur.

34. Haec euolutio sine dubio maximi est momenti atque imprimis meretur, vt omni studio in singula eius elementa inquiramus. Ac primo quidem quum introductis litteris p, q et r, ita vt sit

$$pp + qq + rr = 1 \quad \text{et} \quad dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\omega^2$$

inuenerimus

$$l\ \text{sin.}\,\omega + \lambda\,\text{cos.}\,\omega = p \quad \text{et} \quad l\ \text{cos.}\,\omega - \lambda\ \text{sin.}\,\omega = \frac{d\,p}{d\,\omega},$$

si illam differentiemus habebimus

$$d\,l\ \text{sin.}\,\omega + d\lambda\,\text{cos.}\,\omega + l\,d\omega\,\text{cos.}\,\omega - \lambda\,d\omega\ \text{sin.}\,\omega = dp$$

ideoque

$$d\,l\,\text{sin.}\,\omega + d\lambda\ \text{cos.}\,\omega = 0, \ \text{ita vt sit}\ \frac{d\,\lambda}{d\,l} = -\,\text{tang.}\,\omega.$$

Simili vero modo etiam reperiemus

$$\frac{d\,\mu}{d\,m} = -\ \text{tang.}\ \omega \quad \text{et} \quad \frac{d\,\nu}{d\,n} = -\ \text{tang.}\ \omega.$$

En ergo pulcherrimam proprietatem, quae inter sex nostras functiones l, m, n et λ, μ, ν intercedit, quam hoc modo repraesentare licet, vt sit

$$d\,l : d\,\lambda = d\,m : d\,\mu = d\,n : d\,\nu = -\ \text{cos.}\ \omega : \text{sin.}\ \omega$$

35.

35. Quod si haec probe perpendamus, vestigia quaedam deprehendimus quibus insistentes solutionem directam problematis huius difficillimi indagare poterimus. Scilicet constitutis his aequationibus:

$$dx = l\,dT + \lambda\,dU;\quad dy = m\,dT + \mu\,dU;\quad dz = n\,dT + \nu\,dU$$

primum obseruari conuenit quantitates l, m, n et λ, μ, ν functiones esse debere vnicae nouae variabilis, quae tamen ad binas principes variabiles T et U certam quandam teneat relationem. Sit igitur ω ista noua variabilis, cuius sex nostrae quantitates sint certae quaedam functiones. Atque iam vidimus si litterae p, q et r tales functiones ipsius ω denotent, vt sit

$$pp + qq + rr = 1 \text{ et } dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\omega^2,$$

tum statuendo:

$$l = p \text{ sin. } \omega + \tfrac{dp}{d\omega} \text{. cos. } \omega;\quad m = q \text{ sin. } \omega + \tfrac{dq}{d\omega} \text{ cos. } \omega;$$
$$n = r \text{ sin. } \omega + \tfrac{dr}{d\omega} \text{. cos. } \omega$$
$$\lambda = p \text{ cos. } \omega - \tfrac{dp}{d\omega} \text{. sin. } \omega;\quad \mu = q \text{ cos. } \omega - \tfrac{dq}{d\omega} \text{. sin. } \omega;$$
$$d\nu = r \text{ cos } \omega - \tfrac{dr}{d\omega} \text{. sin. } \omega$$

has tres conditiones iam adimpleri scilicet:

$$ll + mm + nn = 1;\quad \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1;\quad \text{et } l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

praeterea vero hinc modo deduximus istam insignem proprietatem, vt sit

$$d\lambda = -dl \text{ tang. } \omega;\quad d\mu = -dm \text{ tang. } \omega;\quad \text{et } d\nu = -dn \text{ tang. } \omega$$

quae nobis insignem praestabit vsum ad reliquas conditiones adimplendas vti mox patebit.

36.

36. Hae ſcilicet tres conditiones id poſtulant, vt formulae illae differentiales pro dx, dy et dz exhibitae integrabiles reddantur, quem in finem relationem illam, quae inter binas variabiles T et U et inter ω intercedere debet, inueſtigari oportet. Ad hoc praeſtandum conuertantur illae aequationes differentiales per integrationem in ſequentes formas:

$$x = l\mathrm{T} + \lambda \mathrm{U} - \int(\mathrm{T}\,dl + \mathrm{U}\,d\lambda);$$
$$y = m\mathrm{T} + \mu \mathrm{U} - \int(\mathrm{T}\,dm + \mathrm{U}\,d\mu);$$
$$z = n\mathrm{T} + \nu \mathrm{U} - \int(\mathrm{T}\,dn + \mathrm{U}\,d\nu);$$

nunc vero hae tres nouae formulae integrales induent ſequentes formas:

$$x = l\mathrm{T} + \lambda \mathrm{U} - \int dl(\mathrm{T} - \mathrm{U}\,\mathrm{tang}\,\omega);$$
$$y = m\mathrm{T} + \mu \mathrm{U} - \int dm(\mathrm{T} - \mathrm{U}\,\mathrm{tang}.\,\omega);$$
$$z = n\mathrm{T} + \nu \mathrm{U} - \int dn(\mathrm{T} - \mathrm{U}\,\mathrm{tang}.\,\omega).$$

Quum igitur l, m et n ſint functiones eiusdem variabilis ω, manifeſtum eſt ternas has formulas reuera integrabiles reddi, ſi modo expreſſio $\mathrm{T} - \mathrm{U}\,\mathrm{tang}.\,\omega$ fuerit functio quaecunque nouae variabilis ω; quare ſi talis functio indicetur littera Ω habebimus $\mathrm{T} - \mathrm{U}\,\mathrm{tang}.\,\omega = \Omega$, qua aequatione quaeſita illa relatio, quae inter variabiles T, U et ω intercedere debet determinatur.

37. Quare ſi pro Ω accipiatur pro lubitu functio quaecunque ipſius ω, cuius etiam vt vidimus litterae p, q et r ſunt certae functiones, per quas iam litteras l, m, n et λ, μ, ν definiuimus, binae variabiles T et U, ita debent eſſe comparatae, vt

 fiat

fiat $T = \Omega + U \operatorname{tang.} \omega$, ſcilicet nunc tantum binas variabiles U et ω in calculo retineamus et loco T iſtum valorem introducamus, tum igitur ternae noſtrae formulae integrales ita repraeſentari poterunt:

$$x = l\,\Omega + l\,U \operatorname{tang.} \omega + \lambda\, U - \int \Omega\, dl$$
$$y = m\,\Omega + m\,U \operatorname{tang.} \omega + \mu\, U - \int \Omega\, dm$$
$$z = n\,\Omega + n\,U \operatorname{tang.} \omega + \nu\, U - \int \Omega\, dn$$

quae expreſſiones facile transformantur in ſequentes

$$x = U(l \operatorname{tang.} \omega + \lambda) + \int l\, d\Omega = \frac{Up}{\operatorname{coſ.} \omega} + \int p \operatorname{ſin.} \omega .\, d\Omega + \int \frac{dp\, d\Omega}{d\omega} \operatorname{coſ.} \omega$$
$$y = U(m \operatorname{tang.} \omega + \mu) + \int m\, d\Omega = \frac{Uq}{\operatorname{coſ.} \omega} + \int q \operatorname{ſin.} \omega .\, d\Omega + \int \frac{dq\, d\Omega}{d\omega} \operatorname{coſ.} \omega$$
$$z = U(n \operatorname{tang.} \omega + \nu) + \int n\, d\Omega = \frac{Ur}{\operatorname{coſ.} \omega} + \int r \operatorname{ſin.} \omega\, d\Omega + \int \frac{dr\, d\Omega}{d\omega} \operatorname{coſ.} \omega .$$

TERTIA SOLVTIO

Problematis principalis, ex Theoria Lucis et vmbrae petita.

38. Quae vulgo in Opticis de luce et vmbra tradi ſolent, plerumque ad caſum maxime ſpecialem ſunt reſtricta, quo tam corpori lucido quam opaco a quo vmbra proiicitur, figura ſphaerica tribuitur, vnde vmbra oritur vel cylindrica vel conica ſiue conuergens ſiue diuergens, prout corpus opacum vel aequale, vel minus vel maius fuerit quam corpus lucidum. Quando autem vel corporis lucidi vel opaci vel adeo

adeo vtriusque figura a sphaerica recedit, vix quicquam in libris, qui de hac re prodierunt reperimus in quo acquiescere queamus; quin etiam si hoc argumentum in genere pertractare velimus, vtrique corpori lucido et opaco figuras quascunque tribuentes, quaestio exoritur maxime ardua atque adeo in eam partem Analyseos infinitorum circa functiones binarum, pluriumue variabilium, quae non ita pridem demum excoli est coepta, referenda.

39. Quod autem imprimis circa hanc Theoriam ad praesens nostrum institutum pertinet, est, quod semper figurae vmbrarum ita sint comparatae, vt earum superficiem in planum explicare liceat, ex quo vicissim intelligitur, si pro figura quacunque tam corporis lucidi, quam opaci formam vmbrae determinare poterimus, tum simul quoque problema nostrum perfecte fore solutum.

40. Quod autem semper figura vmbrae nostro problemati subiiciatur, hoc modo facile ostendi potest. Quoniam vmbra ab extremis corporis lucidi radiis, qui simul corpus opacum stringunt terminatur, primo patet in superficie vmbrae cuiusque infinitas dari lineas rectas, quandoquidem singuli radii secundum lineas rectas progrediuntur, praeterea vero etiam omnes hi radii vtrumque corpus tam lucidum quam opacum tangent, u are si pla num quodcunque concipiatur, quod haec duo corpora simul contingat ac punctum contactu quidem in corpore lucido notetur littera M, in opaco vero littera *m*,

 perspi-

perspicuum est, lineam rectam M m productam radium lucis exhibere, quo vmbra terminatur, quod etiam intelligendum est de aliis radiis proximis, qui ex puncto M super eodem plano tangente educuntur, quippe qui itidem vt tangentes corporis opaci spectari possunt, ex quo ipsa palmaria proprietas nostri problematis exsurgit, quod quaeuis binae rectae proximae in superficie ducendae simul in eodem plano reperiantur.

41. Verum haec Theoria lucis et vmbrae nimis late patet, quam vt eam hic pro dignitate pertractare locus permittat; tantum igitur inde depromamus, quantum ad praesens institutum expediendum sufficit. Seposita autem tam corporis lucidi quam opaci figura, hic tantum formam quasi coni vmbrosi spectemus, quem in finem duas eius sectiones inter se parallelas ac dato interuallo distantes contemplemur, quibus quum figuras quascunque tribuere liceat, manifestum est, hanc considerationem omnes prorsus vmbrarum figuras in se complecti.

Tab I. Fig. 6. 42. Sint igitur duae hae Sectiones normales in planum tabulae rectaeque A a perpendiculariter insistentes, ac prior quidem sit curua B U U′ cuius natura aequatione quacunque inter coordinatas A T $=$ T et T U $=$ U exprimatur; simili modo sit $b\,u\,u'$ altera curua a priore vtcunque diuersa pro qua data sit aequatio inter coordinatas $a\,t = t$, $t\,u = u$, interuallum autem harum sectionum ponatur A $a = a$, hic quidem alteram Sectionem B U U′ tamquam

discum

discum planum lucidum spectare licebit, et dum altera $b\,u\,u'$ discum planum opacum refert, a radiis lucidis ille ipse conus vmbrosus orietur, quem contemplamur.

43. Puncta autem U et u ita sint sumta, vt recta $U\,u$ producta referat radium vmbram terminantem, quae cum in plano vtrumque discum tangente, sita esse debeat, necesse est vt ambo elementa, $U\,U'$ et $u\,u'$ cum recta $U\,u$ in eodem plano sint sita ex quo perspicuum est haec duo elementa inter se parallela esse debere, ex quo sequitur inter differentialia eandem rationem subsistere debere, ita vt sit $dT : dU :: dt : du$, quare si ponatur $dU = \Phi dT$ erit etiam $du = \Phi\, dt$.

44. Spectetur igitur haec quantitas Φ, vt variabilis quantitas principalis, per quam reliquae omnes determinentur sequenti modo. Pro priore curua B U, sit T functio quaecunque ipsius Φ, cuius quippe natura, indoles curuae B U U′ definitur tum vero erit $dU = \Phi\, dT$ et $U = \int \Phi\, dT$, euidens autem est hoc modo curuam quamcunque per variabilem Φ exprimi posse. Simili autem modo pro altera curua $b\,u\,u'$, abscissa t certe aequabitur functioni ipsius Φ, ac tum itidem habebitur $du = \Phi\, dt$ ac $u = \int \Phi\, dt$, vnde quum ambae curuae penitus arbitrio nostro relinquantur, pro litteris T et t functiones quascunque ipsius Φ assumere licet, quibus constitutis simul ambae applicatae U et u determinantur.

45. Sumatur nunc in recta Uu punctum quodcunque Z, quod quum situm sit in superficie quam inuestigamus, inde ad planum tabulae demittamus perpendiculum Z Y in rectam T t incidens et ex Y ad axem nostrum A a agatur normalis Y X, vt pro puncto indefinito Z ternas obtineamus coordinatas, quas vocemus:

$$AX = x,\quad XY = y,\quad \text{et}\quad YZ = z$$

atque nunc facile erit aequationem inter has ternas coordinatas, qua natura superficiei quaesitae exprimatur eruere

46. Principia scilicet Geometriae statim nobis suppeditant has analogias:

$$T - t : a :: T - y : x;\quad \text{seu}\quad Tx - tx = aT - ay$$

$$U - u : a :: U - z : x;\quad \text{siue}\quad Ux - ux = aU - az,$$

vnde per ambas variabiles Φ et x, ambas coordinatas y et z definire licebit, siquidem habebimus:

$$y = T - \frac{x(T-t)}{a}\quad \text{et}\quad z = U - \frac{x(U-u)}{a};$$

quodsi enim ex his duabus aequationibus variabilis Φ cum quantitatibus inde pendentibus T, t et U, u eliminentur, resultabit aequatio naturam nostrae superficiei exprimens.

47. Tali autem eliminatione neutiquam indigemus, quum natura superficiei multo clarius ex binis aequationibus inuentis perspici possit, quae per se iam ita sunt simplices, vt solutionem commodiorem desiderare nefas foret, interim tamen formas harum

harum aequationum aliquantillum immutare haud inutile erit. Generaliori autem modo, valores pro y et z ita repraesentemus $y = P + Qx$ et $z = R + Sx$, vbi iam litterae P, Q, R, S significent functiones alterius varibialis Φ, atque nunc quaestio in hoc versabitur, cuiusmodi hae functiones esse debeant, vt binae aequationes exhibitae superficiem in planum explicabilem definiant.

48. Comparemus ergo has formas assumtas cum iis quas ante inuenimus, ac primo quidem habebimus:

$$P = T \text{ et } R = U, \; Q = \frac{t - T}{a}, \; S = \frac{u - U}{a}$$

vbi quum T et t sint functiones arbitrariae ipsius Φ, euidens est functiones P et Q etiam pro lubitu accipi posse, at quoniam U et u certo modo a T et t pendent, etiam functiones R et S certo modo a binis prioribus P et Q pendere debebunt. Quum autem sit

$$T = P, \; t = P + aQ, \; U = R \text{ et } u = R + aS$$

hos valores substituamus in formulis fundamentalibus

$$dU = \Phi\, dT \text{ et } du = \Phi\, dt$$

et obtinebimus

$$dR = \Phi\, dP \text{ et } dR + a\,dS = \Phi\, dP + a\,\Phi\, dQ$$

seu $dS = \Phi\, dQ$.

49. Nunc igitur quoque ipsam quantitatem Φ ex calculo exturbare poterimus, quum sit vel

$\Phi =$

$\Phi = \frac{dR}{dP}$ vel $\Phi = \frac{dS}{dQ}$ ita vt eius loco altera litterarum R vel S arbitrio noſtro permittatur, quare ſi P, Q et R fuerint functiones quaecunque einsdem cuiusdam variabilis, tum S talis functio eiusdem variabilis eſſe debet, vt ſit $dS = \frac{dQ\,dR}{dP}$ ſiue $\frac{dS}{dR} = \frac{dQ}{dP}$; quin etiam adhuc commodius haec ſolutio ita adornari poterit, vt dicamus pro litteris P, Q, R S eiusmodi functiones cuiuspiam variabilis aſſumi debere, vt fiat $\frac{dS}{dR} = \frac{dQ}{dP}$ vel etiam $\frac{dS}{dQ} = \frac{dR}{dP}$, quod ſi fuerit praeſtitum hae duae aequationes

$$y = P + Qx \text{ et } z = R + Sx$$

naturam ſolidi quaeſiti exprimient.

50. Perinde eſt quaenam littera illa variabilis cuius functiones ſunt P, Q, R et S indicetur, quin etiam pro ea vna harum quatuor P, Q, R, S aſſumi poterit, cuius deinde tres reliquae functiones ſunt intelligendae. Hinc quamdiu vna earum valorem conſtantem retinet, reliquae etiam manebunt conſtantes, ac tum ex variabilitate ipſius x orientur omnes lineae rectae, quas in ſuperficie ducere licet.

51. Conditioni autem praeſcriptae $\frac{dS}{dQ} = \frac{dR}{dP}$, manifeſto ſatisfiet ſumendo quantitates P et R conſtantes; vnde ſolutio particularis problematis noſtri ſequitur. Ponamus enim eſſe $P = A$ et $R = B$, ita vt nunc S ſpectanda ſit, vt functio quaecunque ipſius Q. At ſemper coordinatas ita variare licet vt fiat $A = 0$ et $B = 0$, quo facto ob $Q = \frac{y}{x}$ erit $\frac{z}{x} = S$ functio homogenea nullius dimenſionis

ipſa-

ipſarum x et y, ſiue z aequabitur functioni homogeneae vnius dimenſionis ipſarum x et y, quod eſt criterium ſuperficierum conicarum.

52. Conditioni etiam ſatisfit ſumendo $Q = 0$ et $S = 0$, ita vt R maneat functio quaecunque ipſius P, quo caſu pro z prodibit functio quaecunque ipſius y, quae quum duas tantum variabiles inuoluat y et z erit pro ſolido cylindrico. Idem vſu venit, ſi ſtatuamus vel $P = 0$ et $Q = 0$ vel $R = 0$ et $S = 0$, priore enim caſu habetur $y = 0$ poſteriore vero $z = 0$, vtroque caſu aequatio eſt pro plano.

53. Verum vt etiam alias ſpecies huiusmodi ſolidorum cognoſcamus pro ſimplicioribus accipiamus:

$$P = a\,\Phi^{\alpha},\quad Q = b\,\Phi^{\beta},\quad R = c\,\Phi^{\gamma};\quad S = d\,\Phi^{\delta}$$

atque vt conditioni praeſcriptae ſatisfiat neceſſe eſt ſit $\frac{b\,\beta}{a\,\alpha}\,\Phi^{\beta-\alpha} = \frac{d\,\delta}{c\,\gamma}\,\Phi^{\delta-\gamma}$, vnde duplex determinatio oritur, prima ſcilicet exponentium $\beta - \alpha = \delta - \gamma$ altera vero coefficientium: $\frac{b\,\beta}{a\,\alpha} = \frac{d\,\delta}{c\,\gamma}$, cui vtrique ſatisfiet ſumendo vt ſequitur

$$a = \frac{f\,g}{\varkappa + \lambda};\quad b = \frac{f\,h}{\varkappa + \mu};\quad c = \frac{g\,k}{\lambda + \nu};\quad d = \frac{h\,k}{\mu + \nu}$$

$$\alpha = \varkappa + \lambda;\quad \beta = \varkappa + \mu;\quad \gamma = \lambda + \nu;\quad \delta = \mu + \nu,$$

tum vero aequationes erunt:

$$y = a\,\Phi^{\alpha} + b\,\Phi^{\beta}\,x;\quad z = c\,\Phi^{\gamma} + d\,\Phi^{\delta}\,x.$$

54. In numeris ergo determinatis consideremus hunc casum:

$$y = 2\Phi + 3\Phi^2 x \text{ et } z = \Phi^2 + 2\Phi^3 x$$

vnde facta eliminatione litterae Φ sequens elicitur aequatio:

$$4y^3 x + 72y^2 xxz - yy - 18yxz + 27xxzz + 2z = 0$$

quae ergo est pro solido, cuius superficiem in planum explicare licet.

ME-

METHODVS NOVA ET FACILIS CALCVLVM VARIATIONVM TRACTANDI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si detur aequatio quaecunque inter binas variabiles x et y seu quod eodem redit, si y fuerit functio quaecunque ipsius x, tum omnes expressiones quomodocunque ex his duabus quantitatibus x et y formatae et compositae tamquam functiones vnius variabilis x, spectari poterunt; ita vt pro quouis valore determinato ipsius x, determinatos quoque valores sortiantur.

2. Huiusmodi autem expressionum ex quantitatibus x et y formatarum, tria genera constitui conuenit; ad quorum primum referimus omnes illas expressiones in quibus tantum ipsae quantitates x et y occurrunt et per operationes quascunque siue algebraicas siue etiam transcendentes inter se sunt complicatae, cuiusmodi sunt $\alpha x^3 + \beta xy + \gamma y^3$, item $e^{\alpha x}$ Arc. sin. y, in qua posteriore operationes transcendentes cernuntur. Secundum autem genus eas complectitur expressiones in quibus praeter ipsas

 quan-

quantitates x et y etiam ratio differentialium occurrit, quam rationem adeo ad differentialia cuiusque gradus extendimus, cuiusmodi expressionum indolem quo clarius perspiciamus, ponatur more solito

$$dy = p\,dx\,;\; dp = q\,dx\,;\; dq = r\,dx \text{ etc.}$$

ac tales expressiones erunt functiones quantitatum x, y, p, q, r etc. Tertium denique genus eiusmodi expressiones continet in quibus praeterea formulae integrales inuoluuntur, quorsum pertinent expressiones illae in calculo variationum imprimis consideratae, quae hac forma sunt repraesentatae $\int V\,dx$, vbi V est functio quaecunque non solum ipsarum x et y; sed etiam quantitatum p, q, r etc., quin etiam ea alias insuper formulas integrales inuoluere potest.

3. His circa terna huiusmodi expressionum genera constitutis, facilius indolem calculi variationum explicare poterimus. Totum enim negotium huc redit, vt si proposita fuerit relatio quaecunque inter x et y eaque aliquantillum varietur, seu eius loco alia quaepiam relatio inter x et y ab illa infinite parum quomodocunque discrepans adhibeatur, inuestigari oporteat, quantam mutationem omnes illae expressiones, tam primi, quam secundi et tertii generis sint subiturae ad quod inueniendum in calculo variationum prouti equidem eum olim tractaui, praeter differentiale dy, quo quantitas y augetur dum x in $x+dx$ abit, ipsi quantitati y aliud incrementum δy tribuitur penitus ab arbitrio nostro pendens neque per x determinatum, cui incremento

varia-

variationis nomen indideram atque methodum exposueram variationes inde in singula expressionum genera redundantes inueniendi.

4. Videbatur igitur calculus variationum omnino singulare calculi genus constituere, verum postquam eius indolem accuratius essem perscrutatus, vniuersum hunc calculum perspexi leui facta immutatione ad secundam partem calculi integralis cuius elementa in tertio volumine operis mei de hoc argumento exposui, reduci posse. Pertractaui autem in ista secunda parte eas integrationes, quae circa functiones duarum variabilium versantur in quo calculi genere etiam nunc vix vltra prima elementa progredi licuit.

5. Illius scilicet incrementi loco, quod variationem appellaui, ipsam quantitatem y non amplius tamquam functionem solius variabilis x considero, sed eam tamquam functionem binarum variabilium x et t in calculum introduco, sic enim dum $dx(\frac{dy}{dx})$ significat verum differentiale ipsius y haec formula $dt(\frac{dy}{dt})$ idem significare poterit, quod antea signo δy indicauimus. Quo haec reddantur clariora concipiamus y vt applicatam cuiuspiam curuae abscissae x respondentem atque in calculo variationum, alia relatio requiritur, quae omnes alias curuas huic saltem proximas complectatur, omnes autem huiusmodi curuas, si X denotet illam functionem cui y aequatur tali aequatione contineri posse: $y = X + tV$ manifestum est; denotante V functionem quamcun-

que ipsius x. Sumta enim t infinite parua haec aequatio omnes omnino lineas curuas propositae proximas in se comprehendet atque adeo hanc formam multo generaliorem reddere licet, ita vt pro y functio quaecunque binarum variabilium x et t vsurpari possit, dummodo ea ita fuerit comparata, vt posito $t = 0$, prodeat ipsa functio proposita $y = X$.

7. Pro variatione igitur inuenienda, quantitas x vt constans spectari ipsius vero y differentiale tantum ex variabilitate ipsius t desumi debet; vnde si expressio proposita fuerit primi generis functio scilicet ipsarum x et y tantum, quam littera Z designemus; ponamus differentiatione consueta prodire $M\,dx + N\,dy$ atque nunc pro variatione inuenienda fiat $dx = 0$, at loco dy scribatur $dt(\frac{dy}{dt})$, quippe quod est incrementum ex sola variabilitate t oriundum. Quo facto variatio quaesita huius expressionis Z erit $= N\,dt(\frac{dy}{dt})$. Quare si ipsa variatio simili modo per $dt(\frac{dZ}{dt})$ indicetur, habebimus $(\frac{dZ}{dt}) = N(\frac{dy}{dt})$.

7. Nunc ad expressiones secundi generis progrediamur, in quibus quum praeter x et y occurrant quantitates p, q, r etc. harum variationes quatenus y etiam a variabili t pendet, per legem generalem his formulis exprimentur

$$dt(\tfrac{dp}{dt});\quad dt(\tfrac{dq}{dt});\quad dt(\tfrac{dr}{dt})\ \text{etc.}$$

Quum autem pro sola variabili x, sit

$$p = (\tfrac{dy}{dx});\quad q = (\tfrac{dp}{dx}) = (\tfrac{ddy}{dx^2});\ \text{et}\ r = (\tfrac{dq}{dx}) = (\tfrac{ddp}{dx^2}) = (\tfrac{d^3y}{dx^3})\ \text{etc.}$$

erit

erit per regulas generales differentiandi functiones duarum variabilium

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)=\left(\frac{d\,dy}{dx\,dt}\right);\ \left(\frac{dq}{dt}\right)=\left(\frac{d^3y}{dx^2dt}\right);\ \left(\frac{dr}{dt}\right)=\left(\frac{d^4y}{dx^3dt}\right)\ \text{etc.}$$

vbi meminisse iuuabit formulam verbi gratia $\left(\frac{d^3y}{dx^2.dt}\right)$ prodire, si functio y ter differentietur et duabus vicibus sola x, vna vice autem sola t variabilis sumatur tum vero qualibet differentiatione differentialia simplicia dx vel dt abiiciantur.

8. His expeditis sit iam Z functio quaecunque ipsarum x, y, p, q, r etc., hic quidem nullo adhuc respectu habito ad variabilem t, quippe quae tantum in subsidium variationis introducitur, atque differentiatione more solito facta prodeat

$$dZ=M\,dx+N\,dy+P\,dp+Q\,dq+R\,dr\ \text{etc.}$$

nunc igitur pro variatione seu $dt\left(\frac{dZ}{dt}\right)$ inuenienda scribi debebit vt sequitur:

$$dx=0;\ dy=dt\left(\frac{dy}{dt}\right),\ dp=dt\left(\frac{dp}{dt}\right)=dt\left(\frac{d\,dy}{dx\,dt}\right),$$

$$dq=dt\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right),\ dr=dt\left(\frac{d^4y}{dx^3\,dt}\right)\ \text{etc.}$$

atque variatio quaesita erit

$$dt\left(\frac{dZ}{dt}\right)=N\,dt\left(\frac{dy}{dt}\right)+P\,dt\left(\frac{d\,dy}{dx\,dt}\right)+Q\,dt\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right)+R\,dt\left(\frac{d^4y}{dx^3\,dt}\right)\ \text{etc.}$$

vnde sequitur diuisione per dt facta fore:

$$\left(\frac{dZ}{dt}\right)=N\left(\frac{dy}{dt}\right)+P\left(\frac{d\,dy}{dx\,dt}\right)+Q\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right)+R\left(\frac{d^4y}{dx^3\,dt}\right)\ \text{etc.}$$

9. Sit nunc etiam expressio quaecunque tertii generis proposita $\int Z\,dx$, vbi Z sit functio quaecunque

cunque ipſarum x, y, p, q, r etc. ita vt per differentiationem ordinariam habeatur:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr ,$$

vbi quidem hactenus nulla ratio nouae variabilis t eſt habita atque integratio formulae propoſitae $\int Z\,dx$ per ſolam variabilem x eſt expedienda, quo obſeruato, quaeſtio huc redit, vt ſi iam y vt functio binarum variabilium x et t conſideretur et vbique quantitas y elemento $dt(\frac{dy}{dt})$ augeatur, augmentum quod ipſa formula integralis $\int Z\,dx$ inde capiet definiatur, hoc enim augmentum ipſa erit variatio formulae integralis propoſitae.

10. Quare ad hanc variationem inueniendam in functione illa Z vbique loco y ſcribatur eius valor auctus $y + dt(\frac{dy}{dt})$, ſicque vt ante vidimus, ipſa functio Z augmentum capiet $dt(\frac{dZ}{dt})$ ex quo ipſa formula integralis augmentum capiet hoc: $\int dt(\frac{dZ}{dt})dx$, quod erit ipſa variatio quaeſita. Quoniam vero in hac integratione ſola x pro variabili habetur, elementum dt ante ſignum poni poterit ita vt iam variatio futura ſit $= dt\int dx(\frac{dZ}{dt})$.

11. Quoniam igitur in § 8 valor ipſius $(\frac{dZ}{dt})$ iam euolutus habetur ſi ille hic ſubſtituatur formulae $\int Z\,dx$ variatio prodibit ita expreſſa:

$$dt\int dx\left(N(\tfrac{dy}{dt}) + P(\tfrac{ddy}{dx\,dt}) + Q(\tfrac{d^3y}{dx^2dt}) + R(\tfrac{d^4y}{dx^3.dt})\ \text{etc.}\right)$$

quam

quam etiam sequenti modo per partes repraesentasse iuuabit

$$dt\int N\,dx\left(\frac{dy}{dt}\right)+dt\int P\,dx\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)+dt\int Q\,dx\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right)+dt\int R\,dx\left(\frac{d^4y}{dx^3\,dt}\right) \text{ etc.}$$

qua expressione contenti esse possemus, si quaestio circa casum aliquem determinatum institueretur, vbi y non solum functioni cuipiam datae ipsius x aequaretur, sed etiam noua variabilis t modo determinato introduceretur; tum enim omnes illas formulas $\left(\frac{dy}{dt}\right)$; $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$; $\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right)$ etc. actu euoluere liceret, ita vt tum elementum dx per solam functionem ipsius x afficeretur, siquidem vti initio innuimus euolutione facta, iterum poni debet $t=0$.

12. At vero tales quaestiones determinatae nunquam occurrere solent; sed potius relatio inter y et x semper incognita esse solet, inde demum determinanda, quod variatio in nihilum abire debeat, quippe in quo Methodus maximorum et minimorum versatur. Huiusmodi quaestiones ergo ita enunciari conuenit, qualis relatio inter quantitates x et y intercedere debeat, vt formulae integralis propositae $\int Z\,dx$ variatio in nihilum abeat, quomodocunque etiam noua variabilis t in calculum introducatur? Quodsi autem quaestio hac ratione instituatur, perspicuum est formulis $\left(\frac{dy}{dt}\right)$; $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$; $\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right)$ etc. nullos certos valores tribui posse.

13. Verum hic prorsus singulare artificium in subsidium vocari potest, cuius ope formulas integrales posteriores in § 11 ad formam prioris redu-

 duce-

ducere licet, ita vt in omnibus eadem formula $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ occurrat. Quum enim $dx\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$ fit differentiale formulae $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ fumta fola x variabili, erit per confuetam integralium reductionem:

$$\int P\,dx\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) = P\left(\frac{dy}{dt}\right) - \int dx\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right),$$

fimili modo quia $dx\left(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt}\right)$ eft differentiale formulae $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$ habebimus ftatim hanc reductionem

$$\int Q\,dx\left(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt}\right) = Q\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) - \int dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right),$$

nunc vero per praecedentem reductionem fit

$$\int dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) - \int dx\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

ficque omnino habebimus

$$\int Q\,dx\left(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt}\right) = Q\left(\frac{ddy}{dx.\,dt}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \int dx\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

atque nunc fatis perfpicuum eft, fequentem formulam integralem ita reductum iri:

$$\int R\,dx\left(\frac{d^4y}{dx^3\,dt}\right) = R\left(\frac{d^3y}{dx^2.\,dt}\right) - \left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) + \left(\frac{ddR}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) - \int dx\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

ac fi infuper talis formula adeffet, foret:

$$\int S\,dx\left(\frac{d^5y}{dx^4\,dt}\right) = S\left(\frac{d^4y}{dx^3.\,dt}\right) - \left(\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^2\,dt}\right) + \left(\frac{ddS}{dx^2}\right)\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) - \left(\frac{d^3S}{dx^3}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \int dx\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

14. Quodfi nunc has formulas reductas fubftituamus in expreffione variationis quaefitae, formulae $\int Z\,dx$, tum haec variatio non folum formulis conftabit integralibus, fed etiam continebit partes abfolu-

ſolutas, quarum aliae formulam $(\frac{dy}{dt})$, aliae hanc $(\frac{ddy}{dxdt})$; aliae vero hanc $(\frac{d^3y}{dx^2dt})$ etc. continebunt; dum contra omnes integrales eandem formulam $(\frac{dy}{dt})$ inuoluunt, quocirca variatio quaeſita formula propoſitae $\int Z\,dx$, ſequenti modo habebitur expreſſa;

$$dt\int dx(\tfrac{dy}{dt})(N-(\tfrac{dP}{dx})+(\tfrac{ddQ}{dx^2})-(\tfrac{d^3R}{dx^3})+(\tfrac{d^4S}{dx^4})\text{ etc.})$$
$$+dt(\tfrac{dy}{dt})\quad(P-(\tfrac{dQ}{dx})+(\tfrac{ddR}{dx^2})-(\tfrac{d^3S}{dx^3}))$$
$$+dt(\tfrac{ddy}{dxdt})(Q-(\tfrac{dR}{dx})+(\tfrac{ddS}{dx^2})-\text{ etc.})$$
$$+dt(\tfrac{d^3y}{dx^2dt})(R-(\tfrac{dS}{dx})\text{ etc.})$$
$$+dt(\tfrac{d^4y}{dx^3dt})(S-\text{ etc.})$$
$$+\text{ etc.}$$

15. Quamquam hic meum inſtitutum non eſt methodum maximorum et minimorum pertractare, quoniam hoc alibi iam ſatis copioſe eſt factum; tamen hic praetermittere non poſſum, quin obſervem, ſi variatio formulae $\int Z\,dx$ euaneſcere debeat, quomodocunque etiam noua variabilis t in calculum ingrediatur; id nullo modo fieri poſſe, niſi tota pars prima integralis ſeorſim euaneſcat, ex quo neceſſe eſt, inter x et y hanc aequationem conſtitui

$$0=N-(\tfrac{dP}{dx})+(\tfrac{ddQ}{dx^2})-(\tfrac{d^3R}{dx^3})+(\tfrac{d^4S}{dx^4})\text{ etc.}$$

et quia nunc variabilis t nulla amplius ratio habetur, ſicque tantum vnica adhuc variabilis x ſupereſt, clauſulis omiſſis hanc habebimus aequationem:

$$0=N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}\text{ etc.}$$

qua desiderata relatio inter x et y exprimitur. Partes autem absolutae, tantum ad terminos extremos referuntur, circa quas ea obseruari debent, quae iam alibi fusius sunt praecepta.

16. Hic etiam non immoror iis casibus quibus quantitas Z ipsa insuper formulas integrales inuoluit, quoniam etiam hoc argumentum alibi satis est pertractatum, verum hic opus multo magis arduum molior, dum eandem hanc methodum ad functiones adeo duarum variabilium extendere conabor, quod equidem in dissertatione illa, quam olim de calculo variationum conscripseram, tunc temporis praestare non potui, multitudine tot quantitatum diuersi generis deterritus.

Applicatio Methodi praecedentis ad functiones duarum variabilium.

17. Si habeatur aequatio quaecunque inter ternas variabiles x, y et z ea naturam cuiuspiam superficiei exprimi censemus, vbi quidem binas coordinatas x et y in plano horizontali constitui intelligamus, tertiam vero z verticalem, sicque haec tertia z, vt functio spectari potest binarum x et y; vnde more solito duplicia incrementa consideranda occurrunt, quatenus scilicet a variabilitate ipsius x, vel ipsius y nascuntur. Illud nempe incrementum ipsius z quod ex variatione ipsius x oritur hac formula:

$$dx\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

hoc

hoc vero ex variatione ipsius y oriundum ista:

$$dy\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

indicari solet.

18. Quodsi iam haec superficies aequatione inter x, y et z expressa, cum aliis quibuscunque superficiebus ipsi proximis comparari debeat, id commodissime fiet nouam variabilem t introducendo, ita vt iam z spectanda sit vt functio trium variabilium, x, y et t, quae quidem sumto $t = 0$, in functionem superiorem abeant, at dum ipsi t valores infinite parui tribuuntur, omnes superficies proximas complectatur, quo posito perspicuum est, quoniam variabiles x et y a noua t, neutiquam pendent earum differentialia dx et dy nullo modo cum dt permisceri, sola vero coordinata z triplicis generis incrementa capere potest, praeter bina enim iam ante commemorata, quae vel ab x vel ab y proficiscuntur, accipere poterit incrementum a variabilitate ipsius t oriundum, quod tali formula $dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$ est repraesentandum.

19. Ponamus nunc V esse expressionem vtcunque ex ipsis coordinatis x, y et z compositam, siue per meras operationes algebraicas, siue etiam transcendentes formatas, quae more solito differentiata praebeat:

$$dV = L\,dx + M\,dy + N\,dz,$$

atque si eiusdem incrementum desideretur a noua variabili t sola oriundum manifestum est, statui debere $dx = 0$ et $dy = 0$, at loco dz ſcribi debere $dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$, ſicque hoc ſignandi modo vſurpato habebimus

$$dt\left(\frac{dV}{dt}\right) = N\,dt\left(\frac{dz}{dt}\right) \text{ ideoque } \left(\frac{dV}{dt}\right) = N\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Tales autem expreſſiones vt ante primum genus conſtituunt.

20. Progrediamur ergo ad ſecundum genus, quo expreſſio v praeter ipſas coordinatas x, y, z etiam rationes differentialium earum inuoluat; atque hic quidem ante omnia, formam huiusmodi expresſionum accuratius perpendi oportet. Quoniam autem hic ſtatim quantitas z duplicia incrementa capere poteſt (hic enim nondum ad nouam variabilem t reſpicimus) ponamus breuitatis gratia

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{et} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = p',$$

quae duae litterae differentialia primi gradus comprehendunt, deinde pro differentialibus ſecundi gradus ponamus:

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = q\,; \quad \left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = q'\,; \quad \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = q''$$

vnde ſequentes relationes inter has litteras et praecedentes notaſſe iuuabit:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = q\,; \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right) = q'\,; \quad \left(\frac{dp'}{dy}\right) = q''$$

ſimili modo differentialia tertii gradus his formulis complectamur:

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = r\,; \quad \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) = r'\,; \quad \left(\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right) = r''\,; \quad \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = r'''$$

vbi

vbi hae relationes funt notandae:

$$r = \left(\frac{dq}{dx}\right);\; r' = \left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{dq'}{dx}\right);\; r'' = \left(\frac{dq'}{dy}\right) = \left(\frac{dq''}{dx}\right);\; r''' = \left(\frac{dq''}{dy}\right)$$

quarta autem differentialia has formulas praebent:

$$s = \left(\frac{d^4 z}{dx^4}\right);\; s' = \left(\frac{d^4 z}{dx^3\,dy}\right);\; s'' = \left(\frac{d^4 z}{dx^2\,dy^2}\right);\; s''' = \left(\frac{d^4 z}{dx\,dy^3}\right);$$
$$s'''' = \left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right)$$

et fic vltra quousque libuerit.

21. His explicatis expreffiones fecundi generis, praeter ipfas coordinatas x, y et z etiam quantitates p, p', q, q', q'', r, r', r'', r''' etc. vtcunque inuoluere poffunt, ex quo fi V denotet quamcunque huiusmodi expreffionem eius differentiale more folito fumtum fequenti forma exhibeamus:

$$\begin{aligned} dV = L\,dx + M\,dy + N\,dz + P\,dp + Q\,dq &+ R\,dr \\ +P'\,dp' + Q'\,dq' &+ R'\,dr' \\ +Q''\,dq'' &+ R''\,dr'' \quad \text{etc.} \\ &+ R'''\,dr''' \end{aligned}$$

quam formam animo imprimi conueniet, ne opus fit eam faepius repetere.

22. Quodfi iam huiusmodi expreffionum variatio, feu id incrementum inueniri debeat, quod refultat ex variatione nouae variabilis t, quam in valorem coordinatae z introducimus, iam vidimus fumi debere $dx = 0$ et $dy = 0$, tum vero fieri $dz = dt\left(\frac{dz}{dt}\right)$, ob eandem vero rationem fequentia differentialia fimili modo erunt exprimenda, quae cum

cum suis transformationibus per se satis claris ita se habebunt:

$$dp = dt\left(\frac{dp}{dt}\right) = dt\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right);\; dp' = dt\left(\frac{dp'}{dt}\right) = \left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)$$
$$dq = dt\left(\frac{dq}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^3z}{dx^2dt}\right);\; dq' = dt\left(\frac{dq'}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right);$$
$$dq'' = dt\left(\frac{dq''}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^3z}{dy^2dt}\right)$$
$$dr = dt\left(\frac{dr}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dx^3dt}\right);\; dr' = dt\left(\frac{dr'}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dx^2dy\,dt}\right)$$
$$dr'' = dt\left(\frac{dr''}{dt}\right) = dt\left(\frac{d^4z}{dx\,dy^2dt}\right);\; dr''' = dt\left(\frac{dr'''}{dt}\right)$$
$$= dt\left(\frac{d^4z}{dy^3dt}\right) \text{ etc.}$$

23. Totum ergo negotium huc redit, vt in formula illa differentiali pro dV data loco singulorum differentialium isti valores substituantur, hocque modo prodibit variatio expressionis V ex sola variabilitate ipsius t oriunda, seu valor huius formulae $dt\left(\frac{dV}{dt}\right)$, quoniam autem singula membra elemento dt erunt affecta, eo omisso adipiscimur sequentem formam:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) = N\left(\frac{dz}{dt}\right) + P\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right) + Q\left(\frac{d^3z}{dx^2.dt}\right) + R\left(\frac{d^4z}{dx^3.dt}\right)$$
$$+ P'\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right) + Q'\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right) + R'\left(\frac{d^4z}{dx^2dy\,dt}\right)$$
$$+ Q''\left(\frac{d^3z}{dy^2.dt}\right) + R''\left(\frac{d^4z}{dx\,dy^2dt}\right)$$
$$+ R'''\left(\frac{d^4z}{dy^3.dt}\right)$$

quae ad variationes quarumcunque expressionum secundi generis inueniendas sufficit.

24. Nunc expressiones tertii generis adgredi poterimus formulas integrales inuoluentes in quibus potissi-

potiſſimum vis huius methodi cernitur. Quando enim quaeſtio circa maxima vel minima quae in ſuperficiebus occurrere poſſunt, verſatur; formula illa, quae maximum vel minimum reddi debet neceſſaro eſt formula integralis atque adeo formula integralis duplicata, cuius indolem hic paucis explicari conuenit Quemadmodum enim in praecedente parte, formulae integrales ſimplices ſunt conſideratae, quae ad datam abſciſſam x ſunt relatae, ita hic in ſuperficiebus, quaeſtiones ſemper non ad ſolam abſciſſam x, ſed ad totum quoddam ſpatium in plano horizontali tanquam baſem ſunt referendae cui portio ſuperficiei quae maximi minimiue quadam proprietate gaudere debet, immineat. Quare quum talis baſis duplicem habeat dimenſionem alteram ab x, alteram vero ab y pendentem, huiusmodi formulae integrales erunt duplicatae, hoc modo exprimi ſolitae $\int\int V\, dx\, dy$, eae ſcilicet duplicem integrationem poſtulant, atque in priore ſola coordinata x vel ſola y pro variabili habetur, et integratio vsque ad terminos baſis propoſitae extenditur, tum vero demum etiam altera variabilis aſſumitur atque altera integratio abſoluitur. Et quoniam perinde eſt vtra prius pro variabili habeatur, ſine diſcrimine geminam illam integrationem ſigno duplicato $\int\int$ indicamus; neque vero hic loci eſt, omnia quae circa huiusmodi integrationes duplicatas ſunt obſeruanda, fuſius exponere, quippe quod argumentum in Tomo XIV. horum Commentariorum iam ſatis accurate eſt pertractatum.

25. Quodsi ergo huiusmodi formulae integralis $\int\int V\,dx\,dy$ variatio quaeri debeat, vbi V denotat expressionem quamcunque vel primi vel secundi generis, ex superioribus satis liquet hanc variationem ita expressum iri:

$$dt\int\int\left(\frac{dV}{dt}\right)dx\,dy$$

quae forma iterum est integralis duplicata et prouti vel x vel y priore integratione vt constans spectatur, ea formula vel hoc modo

$$dt\int dx\int\left(\frac{dV}{dt}\right)dy,$$

vel hoc modo

$$dt\int dy\int\left(\frac{dV}{dt}\right)dx$$

exhiberi potest.

26. Sit nunc V talis expressio qualem supra § 19 descripsimus et cuius variationem seu valorem $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ in § 23 euoluimus, tantum opus erit, singula membra ibi exposita heic loco $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ substituere; vnde sequens congeries formularum integralium nascetur, quibus iunctim sumtis variatio quaesita $dt\int\int\left(\frac{dV}{dt}\right)dx\,dy$ exprimetur:

$$dt\int\int N\left(\frac{dz}{dt}\right)dx\,dy+dt\int\int P\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dx.\,dy+dt\int\int Q\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dt}\right)dx\,dy+dt\int\int R\left(\frac{d^4z}{dx^3\,dt}\right)dx\,dy$$
$$+dt\int\int P'\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)dx\,dy+dt\int\int Q'\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right)dx\,dy+dt\int\int R'\left(\frac{d^4z}{dx^2\,dy\,dt}\right)dx\,dy$$
$$+dt\int\int Q''\left(\frac{d^3z}{dy^2\,dt}\right)dx\,dy+dt\int\int R''\left(\frac{d^4z}{dx\,dy^2\,dt}\right)dx\,dy$$
$$+dt\int\int R'''\left(\frac{d^4z}{dy^3\,dt}\right)dx\,dy$$

etc.

27.

27. Nunc ſingula haec membra poſt primum peculiares reductiones admittunt, quas probe notaſſe iuuabit. Pro ſecundo membro ſumamus primo x tantum variabile eritque:

$$\int P\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dx = P\left(\frac{dz}{dt}\right) - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)dx\left(\frac{dP}{dx}\right),$$

vnde etiam alteram integrationem adiiciendo erit:

$$\iint P\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dx\,dy = \int P\left(\frac{dz}{dt}\right)dy - \iint\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dP}{dx}\right)dx\,dy.$$

Pro tertio membro ſumatur primo ſola y variabilis eritque:

$$\int P'\left(\frac{ddz}{dy.\,dt}\right)dy = P'\left(\frac{dz}{dt}\right) - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)dy\left(\frac{dP'}{dy}\right)$$

vnde ipſum tertium membrum tranſibit in

$$\iint P'\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)dx\,dy = \int P'\left(\frac{dz}{dt}\right)dx - \iint\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dP'}{dy}\right)dx\,dy.$$

28. Pro ſequentibus membris hae ipſae reductiones ſequentes dabunt transformationes, pro quarto ſcilicet habebimus ex ſecundo

$$\iint Q\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dt}\right)dx = \int Q\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dy - \iint\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)\left(\frac{dQ}{dx}\right)dx\,dy$$

at vero hoc membrum poſterius ad ſimilitudinem ſecundi reducitur hoc modo, vbi tantum loco P ſcribi debet $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$:

$$\int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dQ}{dx}\right)dy - \iint\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)dx\,dy$$

ita vt nunc quartum membrum praebeat hanc formam:

$$\int Q\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)dy - \int\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dQ}{dx}\right)dy + \iint\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)dx\,dy.$$

Simili modo quintum membrum ope ſecundi reducitur vbi loco P ſcribitur Q' et loco $\left(\frac{d\,d\,z}{d\,x\,d\,t}\right)$, $\left(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y\,d\,t}\right)$, ſiue loco $\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)$ ſcribendo $\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)$ ſicque habebitur

$$\iint Q'\left(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y\,d\,t}\right)dx\,dy = \int Q'\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)dy - \iint\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)\left(\frac{d\,Q'}{d\,x}\right)dx\,dy$$

quod poſterius membrum cum tertio conferatur, vbi loco tantum P' ſcribi debet $\left(\frac{d\,Q'}{d\,x}\right)$, quo pacto totum membrum induet hanc formam:

$$\int Q'\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)dy - \int\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,Q'}{d\,x}\right)dx + \iint\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,d\,Q'}{d\,x\,d\,y}\right)dx\,dy,$$

ſextum vero membrum bis cum ſecundo collatum reducitur ad hanc formam:

$$\int Q''\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)dx - \int\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,Q''}{d\,y}\right)dx + \iint\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,d\,Q''}{d\,y^2}\right)dx\,dy$$

28. Si hoc modo vlterius progrediamur ad ſequentia membra, ſeptimum membrum in ſequentes partes reſoluitur:

$$\int R\left(\frac{d^3\,z}{d\,x^2\,d\,t}\right)dy - \int\left(\frac{d\,d\,z}{d\,x\,d\,t}\right)\left(\frac{d\,R}{d\,x}\right)dy + \int\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,d\,R}{d\,x^2}\right)dy$$
$$-\iint\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d^3\,R}{d\,x^3}\right)dx\,dy$$

deinde octauum membrum

$$\int R'\left(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y\,d\,t}\right)dy - \int\left(\frac{d\,d\,z}{d\,x\,d\,t}\right)\left(\frac{d\,R'}{d\,x}\right)dy + \int\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,d\,R'}{d\,x\,d\,y}\right)dy$$
$$-\iint\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d^3\,R'}{d\,x^2\,d\,y}\right)dx\,dy$$

tum nonum membrum fiet

$$\int R''\left(\frac{d^3\,z}{d\,x\,d\,y\,d\,t}\right)dx - \int\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)\left(\frac{d\,R''}{d\,y}\right)dx + \int\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,d\,R''}{d\,x\,d\,y}\right)dx$$
$$-\iint\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d^3\,R''}{d\,x\,d\,y^2}\right)dx\,dy$$

et decimum

$$\int R'''\left(\frac{d^3\,z}{d\,y^2\,d\,t}\right)dx - \int\left(\frac{d\,d\,z}{d\,y\,d\,t}\right)\left(\frac{d\,R'''}{d\,y}\right)dx + \int\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,d\,R'''}{d\,y^2}\right)dx$$
$$-\iint\left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)\left(\frac{d^3\,R'''}{d\,y^3}\right)dx\,dy.$$

29.

29. Colligamus nunc omnes iſtas formulas in vnam ſummam, atque variatio quaeſita pluribus conſtabit membris, quarum primum formulas integrales duplicatas, reliqua vero ſimplices complectentur, hoc pacto variatio quaeſita ſequenti modo erit expreſſa:

$$dt\iint dx\,dy\left(\frac{dz}{dt}\right)\left\{\begin{aligned} &N-\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^3R}{dx^3}\right)\\ &\quad-\left(\frac{dP'}{dy}\right)+\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right)-\left(\frac{d^3R'}{dx^2\,dy}\right)\\ &\qquad+\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right)-\left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right)\\ &\qquad\qquad-\left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right)\end{aligned}\quad\text{etc.}\right\}$$

$$+dt\left\{\begin{aligned} &\int\left(\frac{dz}{dt}\right)P\,dy+\int Q\,dy\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)-\int dy\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\int R\,dy\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dt}\right)\\ &\int\left(\frac{dz}{dt}\right)P'dx+\int Q'dy\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)-\int dx\left(\frac{dQ'}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\int R'\,dy\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right)\\ &\qquad+\int Q''dx\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)-\int dx\left(\frac{dQ''}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)+\int R''dx\left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,dt}\right)\\ &\qquad\qquad+\int R'''dx\left(\frac{d^3z}{dy^2\,dt}\right)\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} &-\int dy\left(\frac{dR}{dx}\right)\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)+\int dy\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR}{dx^2}\right)\\ &-\int dy\left(\frac{dR'}{dx}\right)\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)+\int dy\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR'}{dx\,dy}\right)\\ &-\int dx\left(\frac{dR''}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)+\int dx\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR''}{dx\,dy}\right)\\ &-\int dx\left(\frac{dR'''}{dy}\right)\left(\frac{ddz}{dy\,dt}\right)+\int dx\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{ddR'''}{dy^2}\right)\end{aligned}\right\}\ \text{etc.}$$

30. Verum quid haec ſingula membra proprie ſignificent et ad quemnam vſum adhiberi queant, neutiquam adhuc perſpicere licet, unde hoc argumentum cuius prima fundamenta etiamnunc vix iacta ſunt cenſenda omnem Geometrarum attentionem atque multo accuratiorem inueſtigationem poſtulare videtur, quod negotium vix ante ſuſcipere licet, quam

casus nonnulli particulares omni studio et diligentia fuerint euoluti, quin etiam ipsa pars prior, quae tantum circa functiones vnius variabilis versatur neutiquam adhuc satis clare et distincte est enucleata, ita vt perspicue intelligeremus veram indolem atque naturam singularum partium, quibus variationem contineri inuenimus, quem in finem dilucidationes sequentes hic adiungere visum est.

Dilucidationes super Theoria variationum ad functiones saltem vnius variabilis accommodata.

31. Quaestiones quae hic occurrunt ad hoc problema generale reuocare licet:

Explicatio ipsius Problematis.

Si y *fuerit functio quaecunque ipsius* x, *indeque definiatur valor cuiuspiam formulae integralis datae* $\int Z\,dx$, *denotante* Z *expressionem ex ipsis quantitatibus* x *et* y *earumque differentialium rationibus vtcunque compositam, quaestio est, si loco illius functionis* y *alia quaecunque illi proxima seu infinite parum tantum ab ea discrepans adhibeatur, quanto maiorem minoremve valorem, tum eadem formula integralis* $\int Z\,dx$ *sit consecutura.*

32. At quia hoc modo ista quaestio enunciata nimis videri posset abstracta, eam more solito ad Geometriam reuocemus. Sit igitur super axe
Tab. II. Fig. 1. A P, proposita curua quaecunque A M aequatione inter abscissam $AP = x$ et applicatam $PM = y$ expressa, pro qua definiri oporteat valorem formulae cuius-

cuiuspiam integralis $\int Z\,dx$, qui fit $= W$, quo posito consideretur alia curua quaecunque $\alpha\mu$ infinite parum a data discrepans, ac si pro hac curua itidem definiatur valor formulae $\int Z\,dx$, quaeritur, quantum iste valor a praecedente sit discrepaturus, euidens enim est, hoc discrimen praebere ipsam variationem quantitatis W, quam supra ope calculi variationum exhibuimus.

33. Quo haec adhuc clariora euadant, exemplum quodpiam proferamus, quo proposita curua A M eiusque axe A P tamquam verticali considerato, quaeritur tempus quo corpus ex puncto A super hac curua A M descendens vsque ad punctum M pertingit. Iam quia celeritas corporis in M, est vt $\sqrt{AP} = \sqrt{x}$ et ipsum curuae elementum $= dx\sqrt{(1+pp)}$, posito scilicet $dy = p\,dx$ vti in solutione generali est praeceptum; erit tempus per elementum Mm $= dx\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$ vnde formula integralis $\int Z\,dx$ pro hoc casu abit in $\int dx\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$, ita vt habeatur $Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$, quare nunc tempus erit definiendum, quo corpus super curua quacunque proxima $\alpha\mu$ descendens ab α vsque ad μ perueniet, vbi discrimen dabit ipsam variationem formulae $\int dx\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$ huic casui conuenientem.

34. Quoniam hic formula integralis consideranda venit, ante omnia dispiciendum est, quomodo eam determinari oporteat. In exemplo quidem allato, manifestum est formulae $\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$ integrale

grale ita capi debere, vt euanefcat pofito $x = o$, vnde etiam in genere intelligitur, femper pro integratione formulae $\int Z\,dx$, certum aliquem terminum veluti punctum A, tamquam principium integrationis ftatui atque integrale $\int Z\,dx$ euanefcere debere pofito $x = o$, vel fi forte circumftantiae aliter fuerint comparatae, tribuendo ipfi x valorem quempiam datum, deinde vero initio conftituto, valor formulae $\int Z\,dx = W$ abfciffae $AP = x$ refpondebit.

35. His circa formulam integralem $\int Z\,dx$ obferuatis, videamus, quamnam ideam nobis de curvis illis proximis $\alpha\,\mu$ formare debeamus. Ac primo quidem patet, has curuas continuo quodam tractu ductas effe debere, ita vt in iis nusquam anguli aliiue faltus deprehendantur; hoc folo notato, perinde eft fiue iftae curuae lege quapiam continuitatis vel aequatione quapiam contineantur, fiue fint adeo discontinuae, quafi libero manus motu ductae.

36. Huiusmodi lineae curuae commodiffime fequenti modo formatae menti repraefentari poffunt. Ducatur fcilicet pro lubitu linea curua quaecunque BN eidem abfciffae AP imminens, ac ductis ad fingula axis puncta X applicatis XYV fingula interualla YV in ratione finiti ad infinite paruum fecentur in v, ita vt Yv fit quafi pars infinitefima interualli YV. Hoc enim modo curua $\alpha\,\nu\,\mu$ obtinebitur a curua propofita AM in omnibus punctis infinite parum diffita, qualem ad inftitutum noftrum requi-

requirimus. Praeterea tamen notandum eſt, in curva illa arbitraria B N nusquam tangentem ad axem A P normalem eſſe debere, quia hoc modo diuiſio illorum interuallorum turbaretur. Atque nunc euidens eſt, non ſolum interualla Y v eſſe infinite parva, ſed etiam tangentes in punctis Y et v infinite parum a parallelismo deficere.

37 His circa ipſam quaeſtionis propoſitionem annotatis, contemplemur nunc accuratius quoque ſolutionem ſupra inuentam, eiusque ſingulas partes, vt quid quaelibet earum innuat et ad quemnam vſum ſit transferenda perſpicue intelligamus; ſolutionem autem in §. 14. datam hic contemplabimur. Statim igitur conſideremus primam variationis ibi inuentae partem, quae hac formula integrali continetur. Explicatio partis primae in variatione.

$$d t \int d x \left(\frac{d y}{d t}\right) \left(N - \left(\frac{d P}{d x}\right) + \left(\frac{d d Q}{d x^2}\right) - \left(\frac{d^3 R}{d x^3}\right) + \left(\frac{d^4 S}{d x^4}\right) - \text{etc.}\right)$$

cuius integratio ita capi debet, vt in ipſo termino initiali A euaneſcat, qua conditione conſtans arbitraria determinatur, quod ſi ergo in ſingulis punctis X Y haec formula applicata intelligatur, aggregatum omnium iſtarum formularum elementarium ab initio A vsque ad terminum M extenſum praebebit primam partem variationis quaeſitae, atque hic quidem in Figura perſpicuum eſt, ſpatiolum Y v exprimere incrementum applicatae y a ſola variabili t oriundum ita vt ſit Y $v = d t \left(\frac{d y}{d t}\right)$.

38. Haec igitur prima pars variationis inuoluit omnia fpatiola Y v intra terminos A et M contenta, quae quum in infinitum variari poffint, atque adeo a pofitiuis ad negatiua tranfire queant, maximae variationes hic locum habere poffunt. Verum tamen vnicus cafus hinc debet excipi, quo curva A M ita eft comparata, vt fit

$$o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^3} \text{ etc.}$$

tum enim vtcunque curuae proximae fuerint comparatae, ifta pars prima variationis, femper in nihilum abit. Neque deuiatio curuarum proximarum $\alpha\mu$ a principali A M intra terminos A et M quicquam ad variationem confert; ex quo haec curua refpectu formulae integralis $\int Z\,dx$ inprimis eft memorabilis, quandoquidem in ea haec formula integralis vel maximum vel minimum obtinet valorem.

Explicatio partis fecundae in variatione.

39. Progrediamur nunc ad fecundam partem variationis fupra inuentae, quae eft

$$dt\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

circa quam primum obferuo, quoniam ea ad terminum M refertur per integrationem rite inftitutam, infuper adiici debere, fimilem expreffionem ad terminum priorem A relatam, at vero figno contrario affectam, id quod ideo eft neceffarium vt facto $x = o$, etiam haec expreffio penitus tollatur. Refertur autem ifta pars

$$dt\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$

vnice

vnice ad vltimum terminum M, vbi $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$ ipſum ſpatiolum $M\mu$ exprimit, ſimilique modo in alteram partem pro initio A ſpatiolum $A\alpha$ ingredietur. Hinc patet ſi omnes curuae proximae $\alpha\mu$ per ipſos ambos terminos A et M ducantur tum variationem ſecundae partis in nihilum abire.

40. Conſideremus autem caſum, quo curua proxima $\alpha\mu$ per primum quidem terminum A tranſit non vero quoque per alterum M, ſed ſit punctum μ eius terminus, atque variatio ex ſecunda parte nata erit

$$= M\mu\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2}\text{ etc.}\right).$$

Atque hinc etiam definire poterimus variationem ex eodem fonte oriundam, ſi curua proxima $A\mu$, non in ipſo puncto μ ſed alio quocunque ω terminetur, exiſtente ſemper interuallo $\mu\omega$ infinite paruo. Ducta enim applicata $\omega m p$, variatio modo inuenta inſuper augeri debet particula formulae $\int Z\,dx$, quae elemento $Pp = dx$ reſpondet, quae particula quum ſit $= Z.\ Pp$, pro arcu curuae proximae $A\omega$ erit variatio ex ſecunda parte oriunda

$$= M\mu\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2}\text{ etc.}\right) + Z.\,Pp.$$

41. Ducatur recta $M\omega$ et quaeramus angulum $\omega M m$, quem haec recta $M\omega$ cum curua principali conſtituit, ponatur ille angulus $\omega M m = \omega$ et ducta MO ipſi Pp parallela, quia eſt proxime $m\omega = M\mu$ et anguli mMo tangens $= p$ ideoque

$o\,m = p.\,\mathrm{P}\,p$; habebitur $\mathrm{O}\,\omega = \mathrm{M}\,\mu + p.\,\mathrm{P}\,p$ vnde fit:

$$\text{tang.}\ \omega\,\mathrm{M}\,o = \frac{\mathrm{M}\,\mu}{\mathrm{P}\,p} + p,$$

atque hinc colligitur

$$\omega\,\mathrm{M}\,m = \text{tang.}\ \omega = \frac{\mathrm{M}\,\mu}{\mathrm{P}\,p\,(1 + p\,p) + \mathrm{M}\,\mu.\,p}.$$

Seruemus nunc in calculo hunc ipsum angulum ω atque hinc habebimus spatiolum:

$$\mathrm{M}\,\mu = \frac{\mathrm{P}\,p\,(1 + p\,p)\,\text{tang.}\,\omega}{1 - p\,\text{tang.}\,\omega}$$

quo valore substituto variatio pro arcu $\mathrm{A}\,\omega$ erit:

$$\mathrm{P}\,p\,(\mathrm{Z} + \tfrac{(1 + p\,p)\,\text{tang.}\,\omega}{1 - p\,\text{tang.}\,\omega}.\,(\mathrm{P} - \tfrac{d\,\mathrm{Q}}{d\,x} + \tfrac{d\,d\,\mathrm{R}}{d\,x^2}\ \text{etc.})).$$

42. Nunc operae pretium erit eum angulum ω definire, vt ista variatio in nihilum abeat, id quod eueniet, si capiatur

$$\text{tang.}\ \omega = \frac{\mathrm{Z}}{p\,\mathrm{Z} - (1 + p\,p)(\mathrm{P} - \frac{d\,\mathrm{Q}}{d\,x} + \frac{d\,d\,\mathrm{R}}{d\,x^2}\ \text{etc})}$$

quare hoc angulo ita constituto pro omnibus lineis proximis vbicunque in recta $\mathrm{M}\,\omega$ terminatis variatio ex secunda parte oriunda euanescet. Hic casus prae caeteris omnino notatu dignus considerari meretur, quo recta $\mathrm{M}\,\omega$ fit ad curuam principalem in puncto M normalis, quod euenit, si fuerit

$$p\,\mathrm{Z} - (1 + p\,p)(\mathrm{P} - \tfrac{d\,\mathrm{Q}}{d\,x} + \tfrac{d\,d\,\mathrm{R}}{d\,x^2}\ \text{etc.}) = 0,$$

qua aequatione certa conditio ipsius formulae integralis $\int \mathrm{Z}\,d\,x$ siue indoles expressionis Z definitur.

43.

43. Non igitur pigebit in talem expressionem Z inquisiuisse, ac primo quidem patet eam praeter coordinatas x et y etiam quantitatem p inuoluere debere. Sumamus autem praeterea in Z non ingredi litteras q, r etc. ita vt sit $Q = 0$, $R = 0$, ac nostra aequatio resoluenda erit:

$$p\,Z = (1 + pp)\,P,$$

vbi notandum est esse

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp,$$

quare si ambae coordinatae x et y tanquam constantes tractentur erit

$$dZ = P\,dp \quad \text{ideoque} \quad P = \frac{dZ}{dp},$$

quo valore ibi introducto haec prodibit aequatio

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{p\,dp}{1 + pp}$$

quae integrata dat

$$L.\,Z = L.\,\surd(1 + pp) + L.\,C$$

quae constans functio quaecunque ipsarum x et y esse potest, talis functio sit V atque habebimus

$$Z = V\surd(1 + pp),$$

ideoque formula integralis

$$= \int V\,dx\,\surd(1 + pp).$$

Huius formulae significatum satis eleganter per tempus, quo corpus quodpiam per curuam A M promouetur exprimi potest. Si enim celeritas in puncto M, fuerit $= \frac{1}{V}$, hoc est si celeritas in singulis punctis proportionalis fuerit, functioni cuicunque binarum variabilium x et y, tum

$$V\, dx \sqrt{(1+pp)}$$

exprimit elementum temporis ideoque formula

$$\int V\, dx \sqrt{(1+pp)},$$

totum tempus quo corpus ab A ad M peruenit.

Explicatio partis tertiae in variatione.

44. Quod ad tertiam partem variationis attinet scilicet

$$dt\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} \text{ etc.}\right)$$

ea locum non habet, nisi expressio Z etiam differentialia secundi gradus inuoluat, quod quidem rarissime vsu venire solet. Hic autem obseruandum est, quoniam $M\mu = dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$ fore pro sequenti elemento

$$m\omega = dt\left(\frac{dy}{dt}\right) + dt\,dx\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$$

vnde colligitur

$$dt\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) = \frac{m\omega - M\mu}{dx} = \frac{M\omega - M\mu}{Pp},$$

hac autem formula exprimitur declinatio directionis $\mu\omega$ a directione Mm, quae quidem, vt iam ante obseruauimus semper est quam minima.

45. Quodsi ergo Tangens in μ perfecte fuerit parallela tangenti in M, quod euenit, si etiam in curua generatrice BN, tangens ad N huic fuerit parallela, tum variatio ex tertia parte oriunda prorsus euanescit, quod etiam de termino initiali A est intelligendum, si tangentes in A et B inter se fuerint

fuerint parallelae, atque hinc iam perspicitur, vt variationes ex quarta parte oriundae euanescant, necesse est, vt praeterea etiam radii osculi in punctis M et μ fiant aequales.

46. Atque ex his iam satis perspicuum est, variationes ex secunda parte oriundas euanescere, si omnes curuae proximae $\alpha\,\mu$ per vtrumque terminum M et A ducantur. Deinde vero insuper etiam variationes tertiae partis, si omnes curuae proximae simul in vtroque termino A et M cum curua principali A M communes habeat tangentes. Praeterea vero quoque variationes quartae partis in nihilum abire, si omnes curuae proximae in terminis A et M insuper ratione curuaturae cum curua principali conveniant. Hic autem probe meminisse iuuabit, variationes tertiae partis per se euanescere, si modo quantitas Z non differentialia secundi gradus involuat; quartae vero partis semper euanescere nisi differentialia tertii gradus in quantitatem Z ingrediantur, et ita porro. Vnde quum initio ostenderimus, quomodo variatio primae partis ad nihilum sit redigenda, nunc euidentissime intelligimus sub quibusnam conditionibus, omnes variationis partes simul euanescant.

Dilucidationes circa curuas maximi, minimiue proprietate praeditas.

47. Si formula integralis $\int Z\,dx$ in curua quaesita debeat esse vel maximum vel minimum, iam supra ostendimus, posito

dZ

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}$$

naturam huius curuae, hac exprimi aequatione:

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \text{ etc.}$$

quae aequatio nisi quantitates P, Q, R euanescant, vel sint constantes, semper est differentialis vel secundi, vel quarti, vel sexti, aliusue gradus paris. Hic ergo statim memoratu dignum occurrit quod ista aequatio nunquam vel simpliciter differentialis, vel tertii, vel quinti, aliusue gradus imparis euadat, id quod mox clarius exponemus.

48. Quaestiones ergo huc pertinentes, sponte in varias diuiduntur pro gradu differentialium, ad quem aequationes exsurgunt, quandoquidem ab hoc gradu natura solutionis maxime pendet, propterea quod ea semper totidem constantes arbitrarias inuoluit. Ad primam ergo classem referimus eos casus quibus aequatio pro maximo vel minimo inuenta prorsus est finita. Ad secundam autem classem eos, quibus haec aequatio fit differentialis secundi gradus, ad tertiam eos, quibus aequatio ad quartum gradum ascendit et ita porro, quas singulas classes ordine describamus.

I. Classis. Ad solutionem ergo primae classis formula $\int Z\,dx$ statim perducit quando expressio Z tantum per coordinatas x et y exclusis omnium differentialium rationibus determinatur, quia enim hoc casu, simpliciter fit

$$dZ = M\,dx + N\,dy$$

aequatio pro curua maximi vel minimi erit $N = 0$, quae ergo aequatio omnino est determinata, atque adeo

adeo curua satisfaciens vnica in suo genere. Veluti si quaeratur linea in qua valor formulae $\int dx(2xy-yy)$ fiat maximus vel minimus, ob $Z = 2xy - yy$, ideoque $N = 2(x-y)$, aequatio quaesita erit $x-y=0$, seu linea quaesita erit recta ad axem angulo semirecto inclinata, pro qua ergo valor formulae propositae integralis est $\frac{x^3}{3}$, qui vtique minor est, quam si vlla alia linea curua sumeretur pro eadem scilicet abscissa.

49. His autem casibus prima classis nondum exhauritur, sed dantur adhuc alii perinde ad aequationes finitas ducentes, ad quod ostendendum, sit $\mathfrak{Z}$ functio quaecunque ipsarum x et y atque $d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy$, iamque ponatur $Z = \mathfrak{Z}p$ eritque $M = \mathfrak{M}p$; $N = \mathfrak{N}p$; $P = \mathfrak{Z}$, quare vt formula $\int Z\,dx$ fiat maximum vel minimum aequatio reperitur:

$$0 = \mathfrak{N}p - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx} = \mathfrak{N}p - \mathfrak{M} - \frac{\mathfrak{N}.\,dy}{dx} = -\mathfrak{M}$$

quae itidem est aequatio finita. Quod quidem etiam statim praeuidere licuisset, quum enim sit $p\,dx = dy$, haec formula integralis $\int \mathfrak{Z}\,dy$ a praecedente $\int Z\,dx$ aliter non differt, nisi quod coordinatae x et y sint permutatae, vnde quod de priore erat affirmatum, etiam de posteriore valet.

Hinc natura primae classis adhuc generalius ita describi potest; vt ea complectatur omnes formulas integrales huiusmodi $\int(Z + \mathfrak{Z}p)\,dx$, vbi litterae Z et $\mathfrak{Z}$ denotant functiones quascunque ipsarum x et y, tum enim aequatio pro curua maximi vel minimi erit:

$$o = N - \mathfrak{M},$$

quae est aequatio omnino determinata.

II. Classis. 50. Ad classem secundam referimus eas formulas integrales $\int Z dx$, quae deducunt ad aequationem differentialem secundi gradus, huc ergo primo pertinent casus, quibus Z tantum ex litteris x, y et p componitur, ita vt sit

$$dZ = M dx + N dy + P dp$$

vnde quidem casum posteriorem primae classis excipere oportet, quippe quod euenit, si P fuerit functio tantum ipsarum x et y, ita vt pro praesenti casu quantitas P praeter x et y etiam litteram p complecti debeat. Tum autem aequatio pro curua quaesita erit $o = N - \frac{dP}{dx}$, vbi quum P inuoluat p, ideoque $d.(\frac{dx}{dy})$ formula $\frac{dP}{dx}$ continebit differentialia secundi gradus, haec ergo aequatio neutiquam est determinata, quum duas adeo constantes arbitrarias recipiat, quibus effici potest, vt curua per data duo puncta transeat, atque adeo quaestiones huius classis ita accuratius sunt definiendae, vt curuae inuestigentur, quae non inter omnes plane curuas, sed inter eas tantum, quae per eadem duo puncta ducuntur, praescripta maximi minimiue proprietate gaudeant; semper autem quaestiones huius classis ita sunt comparatae, vt per naturam suam hanc restrictionem postulent.

51.

51. Praeterea vero etiam ad fecundam classem referri oportet casus, quibus $Z = \mathfrak{Z} q$ existente $\mathfrak{Z}$ functione quacunque ipsarum x, y et p, si enim fuerit

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp$$

habebimus

$$M = \mathfrak{M} q\,;\; N = \mathfrak{N} q\,;\; P = \mathfrak{P} q\,,\text{ et } Q = \mathfrak{Z}$$

quare quum aequatio pro curua sit

$$o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2},\text{ siue } o = N - \frac{1}{dx} d.\left(P - \frac{dQ}{dx}\right);$$

formula haec $P - \frac{dQ}{dx}$ abit in

$$\mathfrak{P} q - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx} = \mathfrak{P} q - \mathfrak{M} - \mathfrak{N} p - \mathfrak{P} q = - \mathfrak{M} - \mathfrak{N} p$$

vnde aequatio nostra euadet

$$o = N + \frac{1}{dx} d(\mathfrak{M} + \mathfrak{N} p) = 2\mathfrak{N} q + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + p\frac{d\mathfrak{N}}{dx},$$

quae manifesto tantum differentialia secundi gradus continet. Generalius ergo adhuc si formula integralis proposita fuerit $\int (Z + \mathfrak{Z} q) dx$, vbi Z et $\mathfrak{Z}$ quomodocunque ex quantitatibus x, y et p sint compositae, aequatio pro curua quaesita erit

$$o = N - \frac{dP}{dx} + 2\mathfrak{N} q + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + p\frac{d\mathfrak{N}}{dx}$$

siue etiam

$$o = N\,dx - dP + 2\mathfrak{N}\,dp + d\mathfrak{M} + p\,d\mathfrak{N}$$

quae manifesto tantum est differentialis secundi gradus.

52. At si quantitas Z ita ex litteris x, y, p et q fuerit composita vt posito III. Classis.

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq$$

 etiam

etiam quantitas Q inuoluat litteram q, tum huiusmodi casus ad tertiam classem erunt referendi et quum aequatio pro curua quaesita reperiatur

$$o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$$

euidens est terminum $\frac{ddQ}{dx^2}$ inuoluere differentialia quarti gradus, vnde aequatio finita pro curua implicabit quatuor constantes arbitrarias, quibus ergo effici potest, vt curua desiderata non solum per datos duos terminos transeat, sed etiam eius tangentes in vtroque termino datam obtineant positionem, in qua quadruplici determinatione natura quaestionum ad hanc classem pertinentium continetur et accuratissime perspicitur.

53. Reliquis casibus ad hanc classem pertinentibus non immoror, verum potius illustrationis caussa insigne adferam exemplum, quo curuae elasticae in- Tab. II. Fig. I. uestigari solent. Scilicet si littera ϱ denotet radium osculi curuae quaesitae in puncto M, omnes has curuae hac gaudent proprietate, vt in iis haec formula $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\varrho\varrho}$ sit minimum, ideoque habeatur $Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\varrho\,\varrho}$, quum vero sit $\varrho = \frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$ habebimus $Z = \frac{qq}{(1+pp)^{5:2}}$ vnde fit

$$M = o,\ N = o,\ P = \frac{-5pqq}{(1+pp)^{7:2}} \text{ et } Q = \frac{+2q}{(1+pp)^{5:2}}$$

quare quum ob $N = o$, aequatio pro curuis quaesitis sit:

$$o = -\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2},$$

eius

eius integrale ſtatim praebet

$$P - \frac{dQ}{dx} = A,$$

quae adhuc eſt differentialis tertii gradus.

54. Verum haec aequatio adhuc in genere integrari poteſt, multiplicetur enim per $q\,dx = dp$, vt habeatur haec aequatio

$P\,dp - q\,dQ = A\,dq$, quum vero ſit $dZ = P\,dp + Q\,dq$ erit $P\,dp = dZ - Q\,dq$, quo valore ſubſtituto aequatio reſultat haec: $dZ - Q\,dq - q\,dQ = A\,dp$, cuius integrale manifeſto eſt $Z - Qq = Ap + B$, nunc igitur pro Z et Q valores ſupra dati ſubſtituantur atque nanciſcemur ſequentem aequationem:

$$\frac{-qq}{(1+pp)^{5:2}} = Ap + B$$

mutatis igitur ſignis conſtantium colligemus

$$qq = (Ap + B)(1+pp)^{5:2} \text{ ideoque}$$

$$q = (1+pp)^{5:4} \sqrt{(Ap+B)} = \frac{dp}{dx},$$

ſicque concludimus

$$dx = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{5}{4}} \sqrt{(Ap+B)}},$$

hincque porro

$$dy = \frac{p\,dp}{(1+pp)^{\frac{5}{4}} \sqrt{(Ap+B)}}$$

quibus duabus aequationibus conſtructio curuae abſoluitur.

55. Cum olim haec Methodus maximorum et minimorum tractari est coepta, non solum eiusmodi curuae sunt inuestigatae in quibus formula quaepiam integralis $\int Z\,dx$ esset vel maximum vel minimum; sed etiam eiusmodi quaestiones proponebantur, vt non inter omnes plane curuas, sed inter eas tantum, quae habeant eandem longitudinem ea quaeratur, in qua illa formula fiat maxima vel minima, ex quo ipso casu nomen Problematis Isoperimetrici est natum hoc autem nomen non impediuit, quo minus eiusmodi quaestiones generaliores proponerentur, vt inter omnes eas curuas quibus valor certae cuiuspiam formulae integralis $\int V\,dx$ aeque conueniat, ea definiatur in qua formula $\int Z\,dx$ maximum minimumve sortiatur valorem, quin etiam conditiones adhuc fuerunt multiplicatae in hunc modum, vt tantum inter omnes eas curuas, quibus non solum formula $\int V\,dx$, sed etiam hae quotcunque $\int V'\,dx$, $\int V''\,dx$ etc. aequaliter competant, ea definiatur in qua $\int Z\,dx$ fit maximum vel minimum, cuiusmodi problemata tum temporis summopere ardua sunt visa. Postquam vero in *tractatu meo de hoc argumento* ostendissem huiusmodi problemata semper reduci posse ad hoc problema simplex, quo inter omnes plane lineas, ea inuestigetur, in qua haec formula integralis

$$\int dx\,(Z + \alpha V + \beta V' + \gamma V'' \text{ etc.})$$

fiat maximum vel minimum, huius generis problemata nullam amplius habent difficultatem.

DE

DE SVMMATIONIBVS SERIERVM QVARVNDAM INCONGRVE VERIS EARVMQVE INTERPRETATIONE ATQVE VSV.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Seriebus potiſſimum recurrentibus hoc commune eſt, vt in infinitum continuatae aliquando ſummam indicent manifeſte falſam *in concreto*, nec tamen abſurdam *in abſtracto*: ſola quippe ſumma, quam analyſis docet, ſufficiente quadam ratione ſuffulta eſt, quae efficit, vt ſic nec aliter determinetur, haec ratio ſufficiens, cum in vera quaeſtionis natura poſita ſit, non ſinit ſolutionem eſſe falſam in abſtracto; hinc fit vt ſi diuerſos ſolutionis modos adhibeamus, in eundem vsque valorem conſtantiſſime incidamus: imo ſi ſolutione paradoxa vtamur ceu termino medio ad alias quantitates inde determinandas, nulli amphiboliae ſubiectas, determinatio obtinetur manifeſte vera non ſecus ac quantitates reales deducuntur ex quantitatibus imaginariis.

§. 2. Proponatur, exempli gratia, ſimpliciſſima ſeries iam olim agitata $1 - 1 + 1 - 1 + 1 -$ etc. cuius

cuius summa dicitur $= \frac{1}{2}$. Vera atque sufficiens huius determinationis ratio in hoc posita est, quod summa sit vel $= 1$ vel $= 0$ prouti numerus terminorum fuerit siue impar siue par: sed quia series nusquam finitur, vtraque summa aequali vtique iure gaudet; nulla militat ratio pro numero terminorum pari potius quam impari; ergo summa statuenda est, quae aequaliter distat ab 1 et ab nihilo, id est, $= \frac{1}{2}$. Iam vero hanc summam, ex primo artis coniectandi lemmate deductam, aliis modis confirmemus.

Si quantitas $\frac{1}{1+x}$ in seriem conuertatur per diuisionem infinitam, fiet

$$1 - x + xx - x^3 + x^4 - \text{etc.} = \frac{1}{1+x}.$$

Sumatur $x = 1$ et habebitur iterum

$$1 - 1 + 1 - 1 - \text{etc.} = \frac{1}{2}.$$

Eandem nos docet summam theorema illud, quo demonstratur pro quouis angulo x, quod sit

$$\text{cos.}\, x + \text{cos.}\, 2x + \text{cos.}\, 3x + \text{cos.}\, 4x + \text{cos.}\, 5x + \text{etc.} = -\frac{1}{2};$$

si enim sumatur angulus x aequalis duobus rectis, orietur

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

atque proinde

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.} = \frac{1}{2}.$$

Insuper ponatur

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.} = S;$$

subtra-

ſubtrahatur primus terminus et erit

$$-1+1-1+1-\text{etc.}=S-1$$

ſiue conuerſis ſignis

$$1-1+1-1+\text{etc.}=-S+1:$$

quia vero haec vltima ſeries eadem eſt cum ea quae propoſita eſt, habebitur $-S+1=S$ vnde $S=\frac{1}{2}$. Hic equidem opponi poteſt, ſeriem emerſam non eandem eſſe cum propoſita, quandoquidem vi conſtructionis altera alteram vno termino ſuperat; ſed quia terminus in ſerie emerſa deficiens aequo iure eſt vel $+1$ vel -1, adhibendus eſt medius inter vtrumque adeoque ſtatuendus $=0$; Ergo differentia inter vtramque ſeriem $=0$ ſicque omne oppoſitionis momentum euertitur.

Denique notetur quod pro quouis terminorum numero n ſit ſumma ſeriei propoſitae $=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n$ et quod, ob rationem modo dictam, pro caſu $n=\infty$, ſit $-\frac{1}{2}(-1)^n$ vel $=\frac{1}{2}$ vel $=-\frac{1}{2}$, inter quos ambos valores, cum medius iterum euaneſcit, ſumma ſeriei propoſitae ſimpliciter ſtatuenda erit $=\frac{1}{2}$.

§ 3. Apparet ergo, quod omnes et ſinguli modi, quibus ad ſummam quaeſitam peruenitur, eodem conſtantiſſime recidant ſimulque intelligimus omnem alium valorem, praeter ſummam inuentam, contradictionem inuoluere ideo, quod ſi ſumma dicatur $\frac{1}{2}+\alpha$, eadem ſit ratio vt ſtatuatur $=\frac{1}{2}-\alpha$: igitur, vt contradictio euitetur, oportet vt ſit $\alpha=0$ atque adeo ſumma ſeriei propoſitae $=\frac{1}{2}$. Attamen ſeries nullo modo ad hanc ſummam conuergit, nec vnquam fieri poteſt, vt cum illa congruat. Summa *proprie* nec vera eſt nec falſa; prius per ſe manifeſtum, poſterius liquet ex eo, quod ex falſo verum nunquam legitime deduci poſſit; id vero fieri poſſe videbimus in ſequentibus.

§. 4. Sed et ſeries diuergentes, quarum termini alternant in ſignis, ſimilem agnoſcunt legem: proponatur, exempli gratia, ſeries $1 - 2 + 3 - 4 + 5 -$ etc. dico ſummam eius eſſe $= \frac{1}{4}$: hoc autem aſſertum pluribus iterum modis demonſtratur, qui omnes egregie inter ſe conſpirant, vtcunque proprio ſenſu falſum ſit.

Primo. Conſideretur ſeries tanquam recurrens ſecundi ordinis, cuius ſcilicet indices ſunt -2 et -1, ita vt quiuis terminus compoſitus ſit ex duplo praecedenti negatiue ſumto et ex antepraecedente pariter negatiue ſumto; huius ſeriei, ſi termini cuiusvis index dicatur n, terminus generalis eſt $-n(-1)^n$. Sequitur etiam ex theoria ſerierum recurrentium, pro quouis terminorum numero n, eſſe ſummam omnium terminorum generaliter $= -\frac{1}{2}n(-1)^n - \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{4}$; iam vero, cum numerus terminorum eſt infinitus, aequum ius competit in numerum parem et imparem: in priori caſu fit ſumma $= -\frac{1}{2}n$, in poſteriori $= \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$: ergo valor medius inter vtramque ſummam $= \frac{1}{4}$, cui vtique ſumma ſeriei propoſitae infinitae, ſecundum regulam fundamentalem probabilitatum, cenſenda eſt aequalis. Haec ad mentem inter-

interpretationis noſtrae: videamus an idem valor ex aliis principiis oriatur.

Secundo. Conſideretur ſeries propoſita ſub forma generaliori $1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4 -$ etc. notum autem eſt ſummam huius ſeriei infinitae eſſe $= \frac{1}{(1+x)^2}$, quicunque fuerit valor x: ponatur nunc $x = 1$ et habebitur ſeries propoſita $1 - 2 + 3 - 4 + 5 -$ etc. $= \frac{1}{4}$.

Tertio. Ponatur $1 - 2 + 3 - 4 + 5 -$ etc. $= S$; ſubtrahatur aequatio $1 - 1 + 1 - 1 + 1 -$ etc. $= \frac{1}{2}$ paragrapho ſecundo demonſtrata et habebitur $0 - 1 + 2 - 3 + 4 -$ etc. $= S - \frac{1}{2}$. Conuerſis ſignis neglectoque primo termino, nihilo aequali, fit $1 - 2 + 3 - 4 +$ etc. $= - S + \frac{1}{2}$; haec vltima vero ſeries nihil differt a ſerie propoſita, cuius ſummam ponimus $= S$; erit itaque $S = - S + \frac{1}{2}$ ſiue $S = \frac{1}{4}$. Alias huiuscemodi ſiue ſolutiones ſiue demonſtrationes quisque ſibi haud difficulter formabit. Dico autem non poſſe non eſſe concordantes cum noſtris etiamſi aſſertum in *concreto* manifeſte falſum fuerit. Scio interim quid vbique obiici poſſit, imo obiectionibus aſſentior: at hoc ipſum eſt, quo tendo. Verane ſunt allata an falſa? vtrumque aequo affirmabitur iure: ſecabo nodum ſubſidiario vocabulo vtcunque hybrido *incongruenter vera.* Caeterum me non monente per ſe patet formari poſſe huiuscemodi ſeries innumeras altiorum generum quas ſignorum alternatio ſummabiles reddat. Sufficient autem allata exempla ſimpliciora pro inſtituto noſtro.

§. 5. In praecedente paragrapho, articulo secundo, consideraui sub forma generaliori aequationem $1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4 - \text{etc.} = \frac{1}{(1+x)^2}$ pro quocunque numero x. In quemcunque nunc censum referatur haec aequatio, pro casu $x = 1$, certum est legitimo inde modo deduci posse valores, ab omni dubio liberos; scilicet multiplicetur aequatio per dx, considerando x tanquam quantitatem variabilem, posteaque integretur aequatio cum additione debitae constantis: hoc modo peruenitur ad hanc aliam aequationem $x - xx + x^3 - x^4 + x^5 - \text{etc.} = \frac{x}{1+x}$, quae cum nondum clara sit in casu $x = 1$, poterit vlterius deprimi, si multiplicetur per $\frac{dx}{x}$, quo facto obtinebitur $dx - xdx + xxdx - x^3dx + x^4dx - \text{etc.} = \frac{dx}{1+x}$, cuius integralis dat $x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \text{etc.} = \log. 1 + x$. Iam vero ista aequatio nulli porro controuersiae subiecta est cum sumitur $x = 1$: ergo etiam antecedentes aequationes, ex quibus legitime deducta fuit postrema, peculiari suo iure veris erunt annumerandae.

§. 6. In prima nostra serie simplicissima (A) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.}$ quaeuis periodus ex duobus saltem terminis constat, post quos series eadem resurgit; consideremus iam series periodicas trium terminorum, atque constanter tales vt summa terminorum pro quauis periodo sit $= 0$, ad quam classem pertinent series sinuum aut cosinuum, quorum anguli formant progressionem arithmeticam. Sit, verbi gratia, series infinita (B) $1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - \text{etc.}$ cuius

cuius ſcilicet quaeuis periodus conſtat ex tribus terminis $1, -1$ et 0; haec ſeries recurrens formatur ſi ſumma duorum quorumuis terminorum, ſe inuicem ſubſequentium ſumatur ſub ſigno contrario pro termino proxime ſequente habetque, pro quocunque indice n, terminum generalem $\frac{1}{\sqrt{-3}}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{-3}}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n$. Pertinet quoque haec ſeries ad ſeriem ſinuum: ſumatur nempe ſin. $120°$ + ſin. $2.120°$ + ſin. $3.120°$ + ſin. $4.120°$ + etc. atque ſinguli termini multiplicentur per $\frac{2}{\sqrt{3}}$ atque ſic formabitur rurſus ſeries propoſita (B). Quaeritur nunc ſumma huius ſeriei (B): an ſumma eadem erit quae in ſerie (A), ideo quod ſinguli termini ſuperabundantes in ſerie (B) ſint nihilo aequales? minime erit eadem: vera enim aeſtimatio ſic eſt formanda.

Cum numerus periodorum nihil ad ſummam faciat, omne quaeſtionis momentum in hoc conſiſtet an ſeries in eadem periodo abrumpatur vel a primo, vel a ſecundo vel a tertio periodi termino: in primo caſu fit ſumma ſeriei (B) $= 1$: in duobus poſterioribus fit $= 0$: quoniam autem ſinguli caſus, ſi ſeries infinita cenſeatur, aequo inter ſe gaudent iure, ponenda erit ſumma $= \frac{1}{3}$ ad normam regulae fundamentalis in aeſtimanda ſorte, mutato autem ſolo ordine trium terminorum cuiusuis periodi, alia oritur ſumma; ſic ſi, verbi gratia, formetur ſeries (C) $1+0-1+1+0-1+1+0-$ etc. habebimus duos caſus pro ſumma 1 et vnum caſum pro 0; vnde nunc ſumma facienda eſt $= \frac{2}{3}$.

§. 7. Vndecunque principium nostrum contemplemur, mirificum manifestat consensum. Addantur series (A) cuius summam inuenimus $= \frac{1}{2}$ et series (B) $= \frac{1}{3}$, oportet vt summa ab additione oriatur $= \frac{5}{6}$. Nempe oritur:

$$\begin{array}{ll} (A) & 1-1+1-1+1-1+1-1+1-\text{etc.} = \frac{1}{2} \\ (B) & 1-1+0+1-1+0+1-1+0+\text{etc.} = \frac{1}{3} \\ \hline (A)+(B) & 2-2+1+0+0-1+2-2+1+\text{etc.} = \frac{5}{6}. \end{array}$$

Notetur nunc aggregatum ex vtraque serie nouam formare seriem recurrentem, in qua quaeuis periodus constat ex sex terminis, post quos constanter eadem resurgit. Iam vero si series in primo periodi termino terminari censeatur, erit summa $= 2$; si in secundo sit summa $= 0$; si in tertio, erit summa $= 1$ eademque erit summa si in quarto vel in quinto termino series terminetur atque tandem summa erit $= 0$, si in vltimo periodi termino series abrupta putetur; sunt igitur duo casus, quibus summa sit $= 0$; dein tres casus, quibus sit $= 1$ et vnus casus, qui summam facit $= 2$; hinc docemur, ex lege probabilitatum, summam seriei $2-2+1+0+0-1+2-2+1+\text{etc.}$ statuendam esse $= \frac{5}{6}$ plane vt prouidebatur.

Simili modo, si series (B) ab serie A subtrahatur, series noua sexti ordinis oritur, cuius singulae periodi constant ex terminis $0-0+1-2+2-1$ et cuius summa prouidetur $= \frac{1}{6}$. Reuera summa est vel 0 vel 0 vel 1 vel -1 vel 0, prouti series vel

vel in primo, vel in fecundo, tertio, quarto, quinto vel fexto periodi termino abrumpi cenfeatur: igitur in tribus cafibus fit fumma feriei $= 0$, in duobus fit fumma $= 1$ et in vnico cafu $= -1$: ergo valor fummae *in abftracto* ftatuendus $= \frac{1}{6}$.

Si lubeat infuper combinationem inftituere inter feries (A), (B) et (C), qualiscunque illa fuerit, noua inde prouueniens feries fummam habebit principio noftro exacte conformem. Id quidem principium iam ante hos quadraginta annos, cum in contemplandis feriebus recurrentibus me occuparem, perfpexeram, nunc autem in lucem ponere volui, vt inde genuina huiusmodi fummationum interpretatio pateret, fine qua facile nubes pro Iunone accipi poffet. Si concipiamus punctum aliquod fixum in linea recta et fingulas fummas poffibiles repraefentemus per diftantiam puncti a praefato puncto fixo, principium noftrum exhibet diftantiam centri grauitatis, quae omnibus iftis diftantiis conuenit. Quotcunque interim termini fibi inuicem addantur, fummae reales nunquam conuergunt verfus determinatum centrum grauitatis, fed potius circa illud a puncto ad punctum tranfiliunt: igitur huiusmodi feries hoc nomine inutiles fiunt ad problemata phyfico-mechanica appropinquatione foluenda, nifi fumma vniuscuiusuis periodi diminuatur, id quod mediante ipfa ferie primitiua infinita, etiamfi *incongruenter vera*, faepe fieri poteft, vti in anteceffum monui §. 5; vbi dixi quod pofito $x = 1$ aequatio

$$1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4 - \text{etc.} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

equidem

equidem fit incongrue vera, fed quod tamen legitimo modo inde deducatur aequatio nulli dubio fubiecta

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \text{etc.} = \log.\ 2.$$

Mihi quidem principium, de quo fermo eft, antequam vllum vlterius examen de illo inftituerem fuit per fe clarum, fimul autem intelligo alios aliter fentire poffe: quoniam autem demonftrationem directam principii non video, multiplici inductione argumentum ftabiliendum effe cenfui.

§. 8. Quod ad vnam quamuis feriei periodum attinet, poteft illa ex quotcunque imo innumeris compofita effe terminis; fuerit primus periodi terminus a, fumma ex duobus primis terminis b, fumma ex tribus primis terminis c et fic porro donec periodus integra fuerit exhaufta, fitque n numerus terminorum quamuis periodum formantium, principium noftrum dabit fummam feriei recurrentis infinitae $= \frac{a + b + c + \text{etc.}}{n}$, fi modo fumma cuiusuis periodi integrae ponatur $= 0$ et quacunque methodo alia, feries fummata fuerit, nunquam fumma ab ifto valore differet, etiamfi fumma non aliter quam incongrue vera fit nec vllam admittat feries appropinquationem quantuscunque terminorum numerus aggregetur: Haec ideo notari merentur, quod omnes feries finuum atque cofinuum, quorum anguli arithmeticam formant progreffionem, perfecte pertineant ad feries recurrentes de quibus hic fermonem facio: etfi enim in ferie generaliter expreffa nulla appareat periodus, apparebit tamen in quouis cafu pecu-

peculiari; imo fimpliciffima feries finuum aut cofinuum, omnes ordines in fe comprehendit pro ratione, quam primus angulus habet ad quatuor rectos, fiue femel fiue quotiescunque fumtos.

§. 9. Si fumatur in circulo, vnitatem pro radio habente arcus quali-cunque x, animaduertit Illuftris de la Grange, quod fit feries infinita

$$\text{cof.}\, x + \text{cof.}\, 2x + \text{cof.}\, 3x + \text{cof.}\, 4x + \text{cof.}\, 5x + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}$$

fiue aequalis cof. 60°. negatiue fumto. Hoc theorema inter incongrue vera pono, nec aliter interpretandum eft, quam quod valor feriei medius fit inter omnes cuiusuis periodi valores reales poffibiles. Iam vero apparet folam hanc feriem in fe comprehendere omnes ordines feriei recurrentium: nam fi quadrans circuli fiue angulus rectus dicatur q et ponatur fucceffiue

$$x = 2q;\quad x = \tfrac{4}{3}q;\quad x = q;\quad x = \tfrac{2}{3}q \quad \text{etc.}$$

obtinebimus feries recurrentes, quae fequuntur pro ordine fecundo, tertio, quarto, fexto

$$-1+1) -1+1-1+1+\text{etc.}$$

$$-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1) -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1-\text{etc.}$$

$$0-1-0+1)+0-1-0+1+0-1-\text{etc.}$$

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}-1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+1)+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}-1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+1+\tfrac{1}{2}-\text{etc.}$$

Summa fingularum harum feriecrum, pro regula §. 8. femper dabit valorem $-\tfrac{1}{2}$ plane vt indicat ipſum theorema generale. Sic vltima ſeries pro ſexto ordine ſummam habet

$$\frac{\frac{1}{2}+0-1-\frac{1}{2}-1+0}{6}=-\frac{1}{2}:$$

vnde intelligimus, quemadmodum huiusmodi theoremata ſint interpretanda et qualis inde vſus in ſoluendis problematis ſperari poſſit; nihil vnquam ſtatuendum, quod cum vera infiniti idea conſiſtere nequeat.

§. 10. Si ex duabus pluribusue ſeriebus recurrentibus, additione terminorum analogorum, noua formetur ſeries haec quoque recurrens erit, vt vidimus §. 7. Index autem ordinis pro noua ſerie ſemper erit minimus communis diuiduus omnium indicum, qui conueniunt ordinibus ſerierum ex quibus noua formata fuit. Sic aggregatum quatuor ſerierum numericarum in praecedente paragrapho expoſitarum et ad ordinem ſecundum, tertium, quartum et ſextum pertinentium, ſeriem formabit recurrentem de ordine duodecimo, cuius ſumma, ſi in infinitum continuetur, neceſſario erit $=-2$. Id vero ſequens confirmabit ſchema

$$\begin{array}{l}
-1+1)-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\text{etc.}=-\frac{1}{2}\\
-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\text{etc.}=-\frac{1}{2}\\
\;\;0-1-0+1)+0-1-0+1+0-1-0+1+0-1-0+\text{etc.}=-\frac{1}{2}\\
\;\;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-\text{etc.}=-\frac{1}{2}\\
\hline
\text{ſumma }(-1-1-1+1-1+2-1+1-1-1-1+4)-1-1-1+\text{etc}=-2.
\end{array}$$

Quae-

Quaeratur nunc ad normam paragraphi octaui summa feriei vltimae in infinitum continuatae et erit haec summa

$$= \frac{-1-2-3-2-3-1-2-1-2-3-4+0}{12} = -2.$$

Scilicet inter duodecim casus aeque faciles vnus est, qui summam dat $= 0$; tres casus quibus summa obtinetur -1; quatuor quibus summa fit -2, tres quibus -3 et vnus quo summa prodit -4; ergo regula probabilitatum exigit vt statuatur summa $= -2$ nec vsquam principium fallit.

§. 11. Elegantissimum vtique theorema est, cuius mentionem feci ab initio paragraphi noni; mirum nempe est, quod qualiscunque fuerit arcus x, summa omnium cosinuum in infinitum, constanter eadem prodeat. Incipiatur series ab arculo vtcunque paruo vel vtcunque magno; imo excedat primus arcus x integram circuli peripheriam, non fallet theorema, quod summam facit $= -\frac{1}{2}$. Tanto minus reticendos esse puto casus solitarios, quibus assumitur $x = 4nq$ intelligendo per n numerum integrum qualemcunque, non excepta nullitate: In his nimirum casibus nascitur ex theoremate series vnitatum

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}$$

de qua non apparet, quod vllo sensu dici possit $= -\frac{1}{2}$, cum sit aperte infinita nullique dubio incertaeue interpretationi submissa. Ergo hi casus reuera a regula generali erunt excipiendi, an vero theore-

theorema, quod calculus vniuerſaliter verum indicat, in aliquibus caſibus falſum eſſe poterit? imo poterit, ſi caſus iſti eius ſint indolis ac hic ſunt. Paradoxum ſic explico.

Notetur quod, ſi ponatur $x = 4nq + \alpha$, theorema totam ſuam vim retineat, vtcunque parua fuerit quantitas α, ſola enim nullitas eius abſoluta excludenda eſt, quia ſcilicet in theoremate ſeries conſideratur non *relatiue* ſed *abſolute* infinita; Dico igitur non dari arculum α, qui vllam falſitatis ſuſpicionem mouere poſſit; quicquid exiſtit, ſi abſolute infinities replicari ponatur, in infinitum tranſire poteſt. Ergo in arcu x non excluduntur arculi; excluduntur ſaltem puncta vere mathematica, quorum exiſtentiam et poſitionem analyſis abſtracta indicare nequit. Sic methodus tangentium indicare non poteſt puncta regreſſuum (points de rebrouſſement) ſi quae ſint in curua propoſita, nec tamen propterea methodus tangentium infringitur aut vllius falſitatis argui poteſt. Sic igitur theorema, de quo agimus, valet de omni magnitudine arcus aſſumti x, a nihilo vsque ad finem integrae primae reuolutionis, ab initio ſecundae reuolutionis vsque ad finem, et ſic de reuolutione quauis quoties libuerit repetita; excipiuntur ſaltem puncta vere mathematica cuiusuis tranſitionis vna cum ipſo puncto initiali.

§. 12. Praemiſſam vrgere explicationem volui, quia ſeries infinitae ſinuum atque coſinuum egregie illuſtrant abſtruſiſſimum aeque ac vtiliſſimum argumentum

de

de minimis chordarum vibrationibus. Disputatum diu est inter primos huius saeculi mathematicos, an singula chordae puncta ad quamcunque ab axe distantiam minimam deduci possint, vt vibrationes suas forment regulares, mihi autem nunc videtur id affirmari non posse, nisi per vibrationes minimas intelligantur vibrationes vere nullae; equidem et tunc ratio qualiscunque inter singulas applicatas concipi potest; reuera autem curuatura qualiscunque quaeritur in linea perfecte recta et motus vibratorius in quiete absoluta. Verum haec discussio nimis adhuc a proposito nostro remota est, quam vt illi in praesentia rerum insistam. Notetur autem dari progressiones sinuum atque cosinuum innumeras, si diuersae coefficientes terminis seriei praefigantur, quarum aliae praefato incommodo subiectae sint aliae non sint. Caeterum theoremati, quod de progressione cosinuum infinita allegatum fuit, mutatis mutandis simile inquiram de progressione sinuum, ideo quod maxime ad praesens institutum nostrum pertinet nec meminerim an ab aliis iam expositum fuerit, imo fortasse a me ipsomet.

§. 13. Proponatur ergo indaganda series infinita $\text{sin.}\,x + \text{sin.}\,2x + \text{sin.}\,3x + \text{sin.}\,4x +$ etc. Dico summam huius seriei statuendam esse $= \frac{\frac{1}{2}\,\text{sin.}\,x}{\text{sin. vers.}\,x}$. En demonstrationis summarium.

Pertinet series proposita ad series recurrentes secundi ordinis, cuius ambo indices sunt $2\,\text{cos.}\,x$ et -1,

 sic

ſic vt quiuis terminus ſit aequalis termino praecedenti multiplicato per $2 \operatorname{coſ.} x$ demto termino antepraecedente. Igitur, ſecundum theoriam ſerierum recurrentium, formanda eſt aequatio ſecundi ordinis

$$ss = 2s \operatorname{coſ.} x - 1,$$

cuius ambae radices ſunt

$$s = \operatorname{coſ.} x + \sqrt{}(\square \operatorname{coſ.} x - 1) \text{ et } s = \operatorname{coſ.} x - \sqrt{}(\square \operatorname{coſ.} x - 1)$$

ſiue paullo contractius

$$s = \operatorname{coſ.} x + \operatorname{ſin.} x \sqrt{-1} \text{ et } s = \operatorname{coſ.} x - \operatorname{ſin.} x \sqrt{-1}.$$

Sic nunc, poſito indice termini $= n$, in anteceſſum innoteſcit fore terminum generalem in ſerie propoſita $= \alpha(\operatorname{coſ.} x + \operatorname{ſin.} x \sqrt{-1})^n + \beta(\operatorname{coſ.} x - \operatorname{ſin.} x \sqrt{-1})^n$, vbi coefficientes α et β ex cognitis duobus primis ſeriei propoſitae terminis ſunt determinandae vel compendioſius ex primo et ex eo qui primum praecederet quique foret $= 0$: hoc modo inuenitur $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{-1}$ et $\beta = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}$, ipſeque tandem terminus generalis $\frac{(\operatorname{coſ.} x + \operatorname{ſin.} x \sqrt{-1})^n - (\operatorname{coſ.} x - \operatorname{ſin.} x \sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$.

Hoc modo intelligitur, ſeriem propoſitam aggregatam eſſe ex duabus ſeriebus geometricis, quae ſummationem admittunt. Notetur autem hanc ipſam ſummationem pertinere ad theoremata *incongruenter vera*. Sit igitur n numerus abſolute infinitus, erit ſumma ſeriei geometricae, termino generali $(\operatorname{coſ.} x + \operatorname{ſin.} x \sqrt{-1})^n$ expreſſae, $= \frac{(\operatorname{coſ.} x + \operatorname{ſin.} x \sqrt{-1})}{1 - (\operatorname{coſ.} x + \operatorname{ſin.} x \sqrt{-1})}$ pariterque ſumma ſeriei geometricae, termino generali $(\operatorname{coſ.} x - \operatorname{ſin.} x \sqrt{-1})^n$ expreſſae, $\frac{(\operatorname{coſ.} x - \operatorname{ſin.} x \sqrt{-1})}{1 - (\operatorname{coſ.} x - \operatorname{ſin.} x \sqrt{-1})}$. Exinde

inde ſequitur, eſſe ſummam quaeſitam ſeriei propoſitae infinitae $= \left[\frac{(\text{coſ}.\,x + \text{ſin}.\,x\sqrt{-1})}{1-(\text{coſ}.\,x + \text{ſin}.\,x\sqrt{-1})} - \frac{(\text{coſ}.\,x - \text{ſin}.\,x\sqrt{-1})}{1-(\text{coſ}.\,x - \text{ſin}.\,x\sqrt{-1})} \right]$ $2\sqrt{-1}$, quae, ſi recte reducta fuerit, abit in ſimplicem formulam $\frac{\text{ſin}.\,x}{2 - 2\,\text{coſ}.\,x}$ ſiue $\frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin}.\,x}{\text{ſin. vers}.\,x}$. Q. E. I.

§. 14. Patet ex praemiſſa ſolutione, ſeries ſinuum atque coſinuum proprie pertinere ad ſecundum ordinem recurrentium, quia quiuis terminus ex duobus praecedentibus formatur. Sed quod iam monui, numerus terminorum, poſt quos ſeries numerica eadem recurrit, vnice pendet a ratione quae intercedit inter arcum aſſumptum x et peripheriam circuli quod ſi iſta ratio ſit incommenſurabilis, infiniti requiruntur termini pro vnica formanda periodo, ſimulque infinitae periodi ſupponi debent, vt valor ſeriei, quem modo determinauimus, locum habere poſſit. Licebit autem ordinem cuiusuis ſeriei numericae etiam determinare ex numero terminorum vnamquamuis periodum componentium. Ex iſtis notationibus facile erit mente concipere ſolutionem caſus ſingularis, qui contradictionem manifeſtam atque maxime abſurdam inuoluere prima fronte videtur.

§. 15. Ponamus $x = 0$; ſic erit $\text{ſin}.\,x + \text{ſin}.\,2x + \text{ſin}.\,3x + \text{ſin}.\,4x + \text{ſin}.\,5x + \text{etc.} = 0$, quia quiuis terminus eſt $= 0$: valor autem ſeriei, quem inuenimus §. 13. $\frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin}.\,x}{\text{ſin. vers}.\,x}$ eſt infinitus. An quid abſurdius furdius, dicent aliqui, excogitari poteſt, quam vt eadem res ſimul ſit nihilo aequalis ſimulque omni quantitate poſitiua aſſignabili maior? ſimilem caſum iam ſupra expoſui. §. 11. Reſponſio iterum in eo conſiſtit, vt diſtinguamus inter vere nihilum idemque abſolutum et inter primum quantitatis naſcentis elementum; In theoria noſtra nihilum abſolutum excluditur, quia non poſſunt tunc ſtatui periodi infinitae numero, cum nec prima periodus vsquam terminari poſſit, ne quidem cogitatione; aliter vero ſe res habet, quamprimum naſcens aliquod quantitatis elementum, etiamſi omni quantitate aſſignabili minus, arculo x ineſſe putamus, ſic enim ſubito valor ſeriei a vero nihilo ad vere infinitum tranſilit. Dein creſcente x ſtatim enormiter decreſcit ſeries ſinuum haecque plane euaneſcit cum ſumitur $x = 2q$: tum vero creſcente adhucdum arcu x, fit ſumma ſeriei negatiua, tandemque, facto $x = 4q$, ſumma ſeriei prodit negatiue infinita. Superato hoc puncto ſeries ab infinito negatiuo ad infinitum affirmatiuum tranſilit variationesque eaedem perfecte recurrunt ac repetuntur in infinitum haec omnia vlteriori commentatione non indigna forent; dabitur fortaſſe occaſio vt argumentum reſumam. Nunc quidem non aliud conſtitui, quam vt veram ſummationum omnino inſolitarum atque incongruarum interpretationem darem vna cum vſu quem permittunt ſimulque oſtenderem perpetuum conſenſum inter ſummam, analytice pro ſerie infinita determinatam et inter ſummam mediam vniuscuiusuis periodi diuiſam per numerum

merum terminorum quamuis periodum formantium (conf. §. 8.) Igitur superest vt consensum etiam ostendam aliquibus exemplis in serie sinuum §. 13. generaliter summata.

§. 16. Inuenimus nempe generaliter

$$\text{sin.}\,x+\text{sin.}\,2x+\text{sin.}\,3x+\text{sin.}\,4x+\text{sin.}\,5x+\text{etc.}=\frac{\frac{1}{2}\,\text{sin.}\,x}{\text{sin. vers}\,x}$$

ponatur $x=\frac{2}{3}q$ siue 120°. prodit series

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+0)+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\text{etc}=\tfrac{1}{6}\sqrt{3}:$$

hic periodus quaeuis constat ex tribus terminis

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+0$$

atque regula nostra paragraphi octaui indicat eandem summam

$$=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}+0+0}{3}=\frac{1}{6}\sqrt{3}.$$

Sumatur porro $x=\frac{1}{4}q$ siue 45°. atque obtinebitur series

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}+1+\sqrt{\tfrac{1}{2}}+0-\sqrt{\tfrac{1}{2}}-1-\sqrt{\tfrac{1}{2}}-0)+\sqrt{\tfrac{1}{2}}+1+\text{etc.}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Hic quaeuis periodus constat ex octo prioribus terminis, quae ad legem nostram §. 8. facit summam seriei

$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}+(1+\sqrt{\frac{1}{2}})+(1+2\sqrt{\frac{1}{2}})+(1+2\sqrt{\frac{1}{2}})+(1+\sqrt{\frac{1}{2}})+\sqrt{\frac{1}{2}}+0+0}{8}$$

$$=\frac{8\sqrt{\frac{1}{2}}+4}{8}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Quando minus concinna eſt expreſſio ſinuum in quauis periodo occurentium, in vſum vocare licebit tabulas ſinuum, quam operationem vnico illuſtrabo exemplo Fuerit $x = \frac{4}{9} q$ ſiue $= 40°$. Erit, ad legem §. 13, ſumma ſeriei ſiue

$$\frac{\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,x}{\text{ſin. vers}\,x} = \frac{0.\,3213938}{0.\,2339556} = 1.\,37373.$$

Iſte vero idem valor obtinebitur vi regulae paragrapho octauo expoſitae, ſi ex tabulis ſinuum excerpantur ſucceſſiue ſinus 40°. 80°. 120°. 160°. 200°. 240°. 280° 320°. et 360°. qui nempe ſinus efformant terminos vniuscuiusuis periodi; quod ſi deinde ſucceſſiue ſumatur ſinus primus, ſumma ex duobus ſinubus primis, ſumma ex tribus ſinubus primis et ſic porro donec omnes fuerint exhauſti atque hae omnes ſummae ſibi inuicem addantur idque aggregatum diuidatur per numerum ſinuum primitiuorum, reperitur

$$\frac{0.\,64278 + 1.\,62758 + 2.\,40360 + 2.\,83562 + 2.\,49360 + 1.\,62758 + 0.\,64278 + 0 + 0}{9}$$

$$= \frac{12.\,36354}{9} = 1.\,37373.$$

qui valor rurſus idem eſt cum praecedente. Mirabilis profecto eſt iſte conſenſus ideo potiſſimum, quod ambae methodi nihil commune inter ſe habere prima fronte videantur: mihi ſaltem etiamnum mirabilis eſt quamuis iam diutiſſime detecta.

EVO-

EVOLVTIO FORMVLAE INTEGRALIS

$$\int x^{f-1}\,dx\,(lx)^{\frac{m}{n}}$$

INTEGRATIONE A VALORE $x=0$ AD $x=1$ EXTENSA.

Auctore

L. EVLERO.

Theorema 1.

1.

Si n denotat numerum integrum positiuum quemcunque et formulae $\int x^{f-1}\,dx\,(1-x^g)^n$ integratio a valore $x=0$ vsque ad $x=1$ extendatur, erit eius valor:

$$=\frac{g^n}{f}\cdot\frac{1.\quad 2.\quad 3.\ \ldots\ldots\ldots\ n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots\ldots(f+ng)}.$$

Demonstratio.

Notum est in genere integrationem formulae $\int x^{f-1}dx\,(1-x^g)^m$ reduci posse ad integrationem huius $\int x^{f-1}dx\,(1-x^g)^{m-1}$ quoniam quantitates constantes A et B ita definire licet, vt fiat

$$\int x^{f-1}dx\,(1-x^g)^m=A\int x^{f-1}dx\,(1-x^g)^{m-1}+Bx^f(1-x^g)^m$$

 sumtis

ſumtis enim differentialibus prodit haec aequatio:

$$x^{f-1}dx(1-x^g)^m = Ax^{f-1}dx(1-x^g)^{m-1} + Bfx^{f-1}dx(1-x^g)^m - Bmgx^{f+g-1}dx(1-x^g)^{m-1}$$

quae per $x^{f-1}dx(1-x^g)^{m-1}$ diuiſa dat:

$$1-x^g = A + Bf(1-x^g) - Bmgx^g \text{ ſeu}$$

$$1-x^g = A - Bmg + B(f+mg)(1-x^g)$$

quae aequatio vt conſiſtere poſſit, neceſſe eſt ſit

$$1 = B(f+mg) \quad \text{et} \quad A = Bmg$$

vnde colligimus $B = \frac{1}{f+mg}$ et $A = \frac{mg}{f+mg}$.

Quocirca habebimus ſequentem reductionem generalem:

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^m = \frac{mg}{f+mg}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{m-1} + \frac{1}{f+mg}\cdot x^f(1-x^g)^m$$

quae cum euaneſcat poſito $x=0$, ſiquidem ſit $f>0$, conſtantis additione haud eſt opus. Quare extenſo vtroque integrali vsque ad $x=1$, pars integralis poſtrema ſponte euaneſcit, eritque pro caſu $x=1$

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^m = \frac{mg}{f+mg}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{m-1}.$$

Cum igitur ſumto $m=1$ ſit $\int x^{f-1}dx(1-x^g)^0 = \frac{1}{f}x^f = \frac{1}{f}$ poſito $x=1$, nanciſcimur pro eodem caſu $x=1$ ſequentes valores:

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^1 = \frac{g}{f}\cdot\frac{1}{f+g}$$

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^2 = \frac{g^2}{f}\cdot\frac{1}{f+g}\cdot\frac{2}{f+2g}$$

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^3 = \frac{g^3}{f}\cdot\frac{1}{f+g}\cdot\frac{2}{f+2g}\cdot\frac{3}{f+3g}$$

hinc-

hincque pro numero quocunque integro positiuo n concludimus fore

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^n = \frac{g^n}{f}\cdot\frac{1}{f+g}\cdot\frac{2}{f+2g}\cdot\frac{3}{f+3g}\cdots\cdots\frac{n}{f+ng}$$

si modo numeri f et g sint positiui.

Coroll. 1.

2. Hinc ergo viciſſim valor huiusmodi producti ex quotcunque factoribus formati, per formulam integralem exprimi poteſt, ita vt ſit

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots(f+ng)} = \frac{f}{g^n}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^n$$

integrali hoc a valore $x=0$ vsque ad $x=1$ extenſo.

Coroll. 2.

3. Quodſi ergo huiusmodi habeatur progreſſio:

$$\frac{1}{f+g};\ \frac{1.\ 2}{(f+g)(f+2g)};\ \frac{1.\ 2.\ 3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)};\ \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{(f+g)(f+2g)(f+3g)(f+4g)};\ \text{etc.}$$

eius terminus generalis qui indici indefinito n conuenit commode hac forma integrali $\frac{f}{g^n}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^n$ repraeſentatur, cuius ope ea progreſſio interpolari, eiusque termini indicibus fractis reſpondentes exhiberi poterunt.

Coroll. 3.

4. Si loco n ſcribamus $n-1$, habebimus:

$$\frac{1.}{(f+g)}\frac{2.}{(f+2g)}\frac{3}{(f+3g)}\cdots\frac{(n-1)}{(f+(n-1)g)}=\frac{f}{g^{n-1}}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

quae per $\frac{n}{f+ng}$ multiplicata praebet

$$\frac{1.}{(f+g)}\frac{2.}{(f+2g)}\frac{3}{(f+3g)}\cdots\frac{n}{(f+ng)}=\frac{f.ng}{g^n(f+ng)}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}.$$

Scholion 1.

5. Hanc posteriorem formam immediate ex praecedente deriuare licuisset, cum modo demonstrauerimus esse:

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^n=\frac{ng}{f+ng}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

siquidem vtrumque integrale a valore $x=0$ vsque ad $x=1$ extendatur; quam integralium determinationem in sequentibus vbique subintelligi oportet. Deinde etiam perpetuo est tenendum, quantitates f et g esse positiuas, quippe quam conditionem demonstratio allata absolute postulat. Quod autem ad numerum n attinet, quatenus eo index cuiusque termini progressionis (§. 3.) designatur, nihil impedit, quominus eo numeri quicunque siue positiui siue negatiui denotentur, quandoquidem eius progressionis omnes termini etiam indicibus negatiuis respondentes per formulam integralem datam exhiberi censentur. Interim tamen probe tenendum est hanc reductionem

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^m=\frac{mg}{f+mg}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{m-1}$$

non esse veritati consentaneam, nisi sit $m>0$; quia alioquin

alioquin pars algebraica $\frac{1}{f+mg}x^f(1-x^g)^m$ non euanefceret pofito $x=1$.

Scholion 2.

6. Huiusmodi feries, quas tranfcendentes appellare licet, quia termini indicibus fractis refpondentes funt quantitates tranfcendentes, iam olim in Comment. Petrop. Tomo V. fufius fum profecutus; vnde hoc loco non tam iftas progreffiones, quam eximias formularum integralium comparationes, quae inde deriuantur, diligentius fum fcrutaturus. Cum fcilicet oftendiffem huius producti indefiniti $1.2.3\ldots.n$ valorem hac formula integrali $\int dx\,(l\frac{1}{x})^n$ ab $x=0$ ad $x=1$ extenfa exprimi, quae res quoties n eft numerus integer pofitiuus per ipfam integrationem eft manifefta, eos cafus examini fubieci, quibus pro n numeri fracti accipiuntur; vbi quidem ex ipfa formula integrali neutiquam patet, ad quodnam genus quantitatum tranfcendentium hi termini referri debeant. Singulari autem artificio eosdem terminos ad quadraturas magis cognitas reduxi, quod propterea maxime dignum videtur, vt maiori ftudio perpendatur.

Problema 1.

7. Cum demonftratum fit effe:

$$\frac{1}{(f+g)}\cdot\frac{2}{(f+2g)}\cdot\frac{3}{(f+3g)}\cdots\cdots\frac{n}{(f+ng)}=\frac{f}{g^n}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^n$$

inte-

integrali ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſo; eiusdem producti caſu quo $g = 0$ valorem per formulam integralem aſſignare.

Solutio.

Poſito $g = 0$ in formula integrali membrum $(1 - x^g)^n$ euaneſcit, ſimul vero etiam denominator g^n, vnde quaeſtio huc redit vt fractionis $\frac{(1 - x^g)^n}{g^n}$ valor definiatur caſu $g = 0$, quo tam numerator quam denominator euaneſcit. Hunc in finem ſpectetur g vt quantitas infinite parua, et cum ſit $x^g = e^{g\,lx}$ fiet $x^g = 1 + g\,lx$ ideoque $(1 - x^g)^n = g^n(-lx)^n$ $= g^n(l\frac{1}{x})^n$; ex quo pro hoc caſu formula noſtra integralis abit in $f\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^n$ ita vt iam habeatur

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n}{f^n} = f\int x^{f-1}\,dx\,(l\tfrac{1}{x})^n$$

ſeu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n = f^{n+1}\int x^{f-1}\,dx\,(l\frac{1}{x})^n$.

Coroll. 1.

8. Quoties n eſt numerus integer poſitiuus, integratio formulae $\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^n$ ſuccedit, eaque ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſa reuera prodit id productum, cui iſtam formulam aequalem inuenimus. Sin autem pro n capiantur numeri fracti eadem formula integralis inſeruiet huic progreſſioni hypergeometricae interpolandae:

1; 1.2; 1.2.3; 1.2.3.4; 1.2.3.4.5; etc.
ſeu 1; 2; 6; 24; 120; 720; 5040; etc.

Coroll.

Coroll. 2.

9 Si expressio modo inuenta per principalem diuidatur, orietur productum, cuius factores in progressione arithmetica quacunque progrediuntur:

$$(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots(f+ng)=f^n g^n.\frac{\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^n}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^n}$$

cuius ergo etiam valores, si n sit numerus fractus hinc assignare licebit.

Coroll. 3.

10. Cum sit

$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^n=\frac{ng}{f+ng}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

erit etiam simili modo pro casu $g=0$.

$$\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^n=\frac{n}{f}\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{n-1}$$

hincque per istas alteras formulas integrales:

$$1.2.3\ldots\ldots n=nf^n\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{n-1} \text{ et}$$

$$(f+g)(f+2g)..(f+ng)=f^{n-1}g^{n-1}(f+ng).\frac{\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}}.$$

Scholion.

11. Cum inuenerimus esse:

$$1.2.3\ldots\ldots n=f^{n+1}\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^n$$

patet hanc formulam integralem non a valore quantitatis f pendere, quod etiam facile perspicitur ponendo $x^f=y$, vnde fit $fx^{f-1}dx=dy$, et $l\frac{1}{x}=$

 $-lx$

$-lx = -\frac{1}{j}ly = \frac{1}{j}l\frac{1}{y}$, ideoque $f^n(l\frac{1}{x})^n = (l\frac{1}{y})^n$, ita vt fit

$$1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots n = \int dy\,(l\tfrac{1}{y})^n$$

quae formula ex priori nafcitur ponendo $f=1$. Pro interpolatione ergo huiusmodi formarum totum negotium huc reducitur, vt iftius formulae integralis $\int dx\,(l\frac{1}{x})^n$ valores definiantur, quando exponens n eft numerus fractus. Veluti fi n fit $=\frac{1}{2}$, affignari oportet valorem huius formulae $\int dx\,\sqrt{l\frac{1}{x}}$, quem olim iam oftendi effe $=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ denotante π circuli peripheriam cuius diameter $=1$: pro aliis autem numeris fractis eius valorem ad quadraturas curuarum algebraicarum altioris ordinis reuocare docui. Quae reductio cum minime fit obuia, atque tum folum locum habeat, quando formulae $\int dx\,(l\frac{1}{x})^n$ integratio a valore $x=0$ ad $x=1$ extenditur, fingulari attentione digna videtur. Etfi autem iam olim hoc argumentum tractaui, tamen quia per plures ambages eo fum perductus, idem hic refumere et concinnius euoluere conftitui.

Theorema 2.

12. Si formulae integrales a valore $x=0$ vsque ad $x=1$ extendantur et n denotet numerum integrum pofitiuum erit:

$$\frac{1.}{(n+1)}\frac{2.}{(n+2)}\frac{3\ldots\ldots n}{(n+3)\ldots 2n} = \tfrac{1}{2}ng\int x^{f+ng-1}dx\,(1-x^g)^{n-1}.\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}$$

quicunque numeri pofitiui loco f et g accipiantur.

Demon-

Demonſtratio.

Cum ſupra (§ 4.) oſtenderimus eſſe:

$$\frac{1.}{(f+g)}\,\frac{2.}{(f+2g)}\,\frac{3\,.\,.\,.\,.\,.\,n}{\ldots(f+ng)}=\frac{f.\,ng}{g^n(f+ng)}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

habebimus ſi loco n ſcribamus $2n$

$$\frac{1.}{(f+g)}\,\frac{2.}{(f+2g)}\,\frac{3\,.\,.\,.\,.\,2n}{\ldots(f+2ng)}=\frac{f.\,2ng}{g^{2n}(f+2ng)}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}$$

Diuidatur nunc prima aequatio per ſecundam, ac prodibit iſta tertia:

$$\frac{(f+(n+1)g)(f+(n+2)g)\ldots(f+2ng)}{(n+1)(n+2)\ldots\ldots 2n}=\frac{g^n(f+2ng)}{2(f+ng)}\cdot\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}$$

At ſi in prima aequatione loco f ſcribatur $f+ng$, orietur haec aequatio quarta:

$$\frac{1.}{(f+(n+1)g)}\,\frac{2.}{(f+(n+2)g)}\,\frac{3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n}{\ldots(f+2ng)}=\frac{(f+ng)ng}{g^n(f+2ng)}\int x^{f+ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

Multiplicetur haec quarta aequatio per illam tertiam ac reperietur ipſa aequatio demonſtranda:

$$\frac{1.}{(n+1)}\,\frac{2.}{(n+2)}\,\frac{3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n}{(n+3)\ldots 2n}=\tfrac{1}{2}ng\int x^{f+ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}.\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}$$

Coroll. 1.

13. Si in prima aequatione ſtatuatur $f=n$ et $g=1$ orietur idem productum:

$$\frac{1.}{(n+1)}\,\frac{2.}{(n+2)}\,\frac{3\,.\,.\,.\,.\,.\,n}{\ldots.\,2n}=\tfrac{1}{2}n\int x^{n-1}dx(1-x)^{n-1}$$

qua aequatione cum illa collata adipiscimur:

$$\frac{\int x^{n-1}\,dx\,(1-x)^{n-1}}{g\int x^{f+ng-1}\,dx\,(1-x^g)^{n-1}} = \frac{\int x^{f-1}\,dx\,(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}\,dx\,(1-x^g)^{2n-1}}.$$

Coroll. 2.

14. Si in illa aequatione loco x scribamus x^g, fiet

$$\frac{1.\;2.\;3\ldots\ldots\ldots n}{(n+1)(n+2)\ldots\ldots 2n} = \tfrac{1}{2} n g \int x^{ng-1}\,dx\,(1-x^g)^{n-1}$$

ita vt iam consequamur istam comparationem inter sequentes formulas integrales:

$$\int x^{ng-1}\,dx(1-x^g)^{n-1} = \int x^{f+ng-1}\,dx(1-x^g)^{n-1}.\frac{\int x^{f-1}\,dx(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}\,dx(1-x^g)^{2n-1}}.$$

Coroll. 3.

15. Si in aequatione theorematis ponamus $g=0$ ob $(1-x^g)^m = g^m(l\frac{1}{x})^m$, potestates ipsius g se destruent orieturque haec aequatio:

$$\frac{1.\;2.\;3\ldots n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \tfrac{1}{2} n \int x^{f-1}\,dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1}.\frac{\int x^{f-1}\,dx(l\frac{1}{x})^{n-1}}{\int x^{f-1}\,dx(l\frac{1}{x})^{2n-1}}$$

vnde colligimus

$$\frac{(\int x^{f-1}\,dx(l\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int x^{f-1}\,dx(l\frac{1}{x})^{2n-1}} = g\int x^{ng-1}\,dx\,(1-x^g)^{n-1}$$

seu ob

$$\int x^{f-1}\,dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1} = \tfrac{f}{n}\int x^{f-1}\,dx(l\tfrac{1}{x})^n \text{ hanc}$$

$$\frac{2f}{n}.\frac{(\int x^{f-1}\,dx(l\frac{1}{x})^n)^2}{\int x^{f-1}\,dx(l\frac{1}{x})^{2n}} = g\int x^{ng-1}\,dx\,(1-x^g)^{n-1}.$$

Coroll.

Coroll. 4.

16. Ponamus hic $f=1$, $g=2$ et $n=\frac{m}{2}$ vt m sit numerus integer positiuus, et ob $\int dx(l\frac{1}{x})^m = 1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots m$ erit

$$\frac{4}{m}\cdot\frac{(\int dx(l\frac{1}{x})^{\frac{m}{2}})^2}{1.\ 2.\ 3\ldots m} = 2\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}$$

hincque

$$\int dx(l\tfrac{1}{x})^{\frac{m}{2}} = \sqrt{1.\ 2.\ 3\ldots m.\ \tfrac{m}{2}\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}}$$

et sumendo $m=1$ ob $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{\pi}{2}$ habebitur

$$\int dx\sqrt{l\tfrac{1}{x}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Scholion.

17. En ergo succinctam demonstrationem theorematis olim a me prolati, quod sit $\int dx\sqrt{l\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, eamque ab interpolationis ratione, qua tum vsus fueram, liberam. Deducta scilicet hic ea ex hoc theoremate quo inueni esse:

$$\frac{(\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int x^{f-1}dx(l\frac{1}{x})^{2n-1}} = g\int x^{ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

Principale autem theorema, vnde hoc est deductum ita se habet

$$\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}.\int x^{f+ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}} = \int x^{n-1}dx(1-x)^{n-1}$$

vtrumque enim membrum per integrationem ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſam euoluitur in hoc productum numericum:

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots (n-1)}{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n-1)}$$

Ac ſi alteri membro ſpeciem latius patentem tribuere velimus, theorema ita proponi poterit vt ſit:

$$g \cdot \frac{\int x^{f-1} dx (1-x^g)^{n-1} \cdot \int x^{f+ng-1} dx (1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1} dx (1-x^g)^{2n-1}}$$
$$= k \int x^{nk-1} dx (1-x^k)^{n-1}$$

hicque ſi capiatur $g = 0$, fit

$$\frac{(\int x^{f-1} dx (l\tfrac{1}{x})^{n-1})^2}{\int x^{f-1} dx (l\tfrac{1}{x})^{2n-1}} = k \int x^{nk-1} dx (1-x^k)^{n-1}.$$

Imprimis igitur notandum eſt, quod illa aequalitas ſubſiſtat, quicunque numeri loco f et g accipiantur caſu quidem $f = g$, ea eſt manifeſta, cum ſit

$$\int x^{g-1} dx (1-x^g)^{n-1} = \frac{1-(1-x^g)^n}{ng} = \frac{1}{ng}$$

fiet enim

$$2g \int x^{ng+g-1} dx (1-x^g)^{n-1} = k \int x^{nk-1} dx (1-x^k)^{n-1}$$

et quia

$$\int x^{ng+g-1} dx (1-x^g)^{n-1} = \tfrac{1}{2} \int x^{ng-1} dx (1-x^g)^{n-1},$$

aequalitas eſt perſpicua, quia k pro lubitu accipere licet. Eodem autem modo, quo ad hoc theorema perueni, ad alia ſimilia pertingere licet.

Theo-

Theorema. 3.

18. Si sequentes formulae integrales a valore $x=0$ ad $x=1$ extendantur et n denotet numerum integrum positiuum quemcunque, crit

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots n}{(2n+1)(2n+2)\ldots 3n}=\tfrac{2}{3}ng\int x^{f+2ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}.\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{3n-1}}$$

quicunque numeri positiui pro f et g accipiantur.

Demonstratio.

In praecedente Theoremate iam vidimus esse:

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots 2n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+2ng)}=\frac{f.\,2ng}{g^{2n}(f+2ng)}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}$$

simili autem modo, si in forma principali loco n scribamus $3n$ habebimus:

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ 3n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+3ng)}=\frac{f.\,3ng}{g^{3n}(f+3ng)}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{3n-1}$$

ex quo illa aequatio per hanc diuisa producit:

$$\frac{(f+(2n+1)g)(f+(2n+2)g)\ldots\ldots(f+3ng)}{(2n+1)(2n+2)\ldots\ldots\ldots 3n}=\frac{2g^n(f+3ng)}{3(f+2ng)}.\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{2n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{3n-1}}.$$

Verum si in aequatione principali (§. 4.) loco f scribamus $f+2gn$ adipiscimur hanc aequationem:

$$\frac{1. \quad 2. \quad 3. \ldots\ldots\ldots n}{(f+(2n+1)g)(f+(2n+2)g)\ldots\ldots(f+3ng)} = \frac{(f+2ng).ng}{g^n(f+3ng)}.$$
$$\int x^{f+2ng-1} dx (1-x^g)^{n-1}.$$

Multiplicetur nunc haec aequatio per praecedentem, et orietur ipsa aequatio, quam demonstrari oportet:

$$\frac{1. \quad 2. \quad 3. \ldots n}{(2n+1)(2n+2)\ldots\ldots 3n} = \tfrac{2}{3} ng. \int x^{f+2ng-1} dx (1-x^g)^{n-1}.$$
$$\frac{\int x^{f-1} dx (1-x^g)^{2n-1}}{\int x^{f-1} dx (1-x^g)^{3n-1}}.$$

Coroll. 1.

18. Eundem valorem ex aequatione principali nanciscimur ponendo $f = 2n$ et $g = 1$, ita vt sit:

$$\frac{1. \quad 2. \quad 3. \ldots\ldots n}{(2n+1)(2n+2)\ldots 3n} = \tfrac{2}{3} n \int x^{2n-1} dx (1-x)^{n-1}$$

quae formula integralis loco x scribendo x^k transformatur in hanc $\frac{2}{3} n k \int x^{2nk-1} dx (1-x^k)^{n-1}$, ita vt sit

$$g \int x^{f+2ng-1} dx (1-x^g)^{n-1}. \frac{\int x^{f-1} dx (1-x^g)^{2n-1}}{\int x^{f-1} dx (1-x^g)^{3n-1}}$$
$$= k \int x^{2nk-1} dx (1-x^k)^{n-1}.$$

Coroll. 2.

20. Si hic statuamus $g = 0$, ob $1 - x^g = g\, l\frac{1}{x}$ habebimus hanc aequationem:

$$\int x^{f-1} dx (l\tfrac{1}{x})^{n-1}. \frac{\int x^{f-1} dx (l\frac{1}{x})^{2n-1}}{\int x^{f-1} dx (l\frac{1}{x})^{3n-1}} = k \int x^{2nk-1} dx (1-x^k)^{n-1}$$

cum

cum igitur ante inueniſſemus

$$\frac{\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1})^2}{\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{2n-1}} = k\int x^{nk-1}\,dx\,(1-x^k)^{n-1}$$

habebimus has aequationes in ſe multiplicando:

$$\frac{(\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{n-1})^3}{\int x^{f-1}dx(l\tfrac{1}{x})^{3n-1}} = k^2\int x^{nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}.\int x^{2nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}.$$

Coroll. 3.

21. Sine vlla reſtrictione hic ponere licet $f=1$; tum ergo ſumto $n=\frac{1}{3}$ et $k=3$ erit

$$\frac{(\int dx(l\tfrac{1}{x})^{-\frac{2}{3}})^3}{\int dx(l\tfrac{1}{x})^0} = 9\int dx(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}.\int x\,dx(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}$$

et ob $\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{-\frac{2}{3}} = 3\int dx(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}}$ et $\int dx(l\tfrac{1}{x})^0 = 1$,

$$(\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}})^3 = \int dx\,(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}.\int x\,dx\,(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}$$

tum vero ſumto $n=\frac{2}{3}$ et $k=3$ erit

$$\frac{(\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{-\frac{1}{3}})^3}{\int dx\,(l\tfrac{1}{x})} = 9\int x\,dx(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}.\int x^3\,dx(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}$$

ſeu $(\int dx(l\tfrac{1}{x})^{\frac{2}{3}})^3 = 4\int x\,dx(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}\int x^3\,dx\,(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}$.

Theorema generale.

22. Si ſequentes formulae integrales a valore $x=0$ vsque ad $x=1$ extendantur et n denotet numerum integrum poſitiuum quemcunque, erit

$$\frac{1.\;2.\;3\ldots\ldots n}{(\lambda n+1)(\lambda n+2)\ldots(\lambda+1)n}=\frac{\lambda}{\lambda+1}ng\int x^{f+\lambda ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}.$$
$$\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{\lambda n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{(\lambda+1)n-1}}$$

quicunque numeri positiui pro litteris f et g accipiantur.

Demonstratio.

Cum sit vti supra ostendimus:

$$\frac{1.\;2\ldots\ldots n}{(f+g)(f+2g)\ldots\ldots(f+ng)}=\frac{f.\,ng}{g^n(f+ng)}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

si hic loco n scribamus primo λn tum vero $(\lambda+1)n$ nanciscemur has duas aequationes

$$\frac{1.\;2\ldots\ldots\ldots\lambda n}{(f+g)(f+2g)\ldots\ldots(f+\lambda ng)}=\frac{f.\,\lambda ng}{g^{\lambda n}(f+\lambda ng)}\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{\lambda n-1}$$

$$\frac{1.\;2\ldots\ldots\ldots(\lambda+1)n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+(\lambda+1)ng)}=\frac{f.\,(\lambda+1)ng}{g^{(\lambda+1)n}(f+(\lambda+1)ng)}$$
$$\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{(\lambda+1)n-1}$$

quarum illa per hanc diuisa praebet:

$$\frac{(f+\lambda ng+g)(f+\lambda ng+2g)\ldots\ldots(f+\lambda ng+ng)}{(\lambda n+1)(\lambda n+2)\ldots\ldots\ldots\ldots(\lambda n+n)}=g^n\frac{\lambda(f+\lambda ng+ng)}{(\lambda+1)(f+\lambda ng)}$$
$$\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{\lambda n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{(\lambda+1)n-1}}.$$

At si in aequatione prima loco f scribamus $f+\lambda ng$ obtinebimus:

1. 2

$$\frac{1.}{(f+\lambda ng+g)}\frac{2\ldots\ldots\ldots\ldots}{(f+\lambda ng+2g)\ldots\ldots}\frac{n}{(f+\lambda ng+ng)}=\frac{(f+\lambda ng)ng}{g^n(f+\lambda ng+ng)}$$
$$\int x^{f+\lambda ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$

quae duae aequationes in se ductae producunt ipsam aequalitatem demonstrandam:

$$\frac{1.}{(\lambda n+1)}\frac{2\ldots\ldots}{(\lambda n+2)\ldots\ldots}\frac{n}{(\lambda n+n)}=\frac{\lambda ng}{\lambda+1}\int x^{f+\lambda ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}$$
$$\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{\lambda n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{(\lambda+1)n-1}}.$$

Coroll. 1.

23. Si in aequatione principali statuamus $f=\lambda n$ et $g=1$ reperiemus etiam:

$$\frac{1.\ 2\ldots\ldots\ldots\ldots n}{(\lambda n+1)(\lambda n+2)\ldots(\lambda n+n)}=\frac{\lambda n}{\lambda+1}\int x^{\lambda n-1}dx(1-x)^{n-1}$$

quae forma loco x scribendo x^k abit in hanc:

$$\frac{\lambda nk}{\lambda+1}\int x^{\lambda nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}$$

ita vt habeamus hoc theorema latissime patens:

$$g\int x^{f+\lambda ng-1}dx(1-x^g)^{n-1}.\frac{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{\lambda n-1}}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^{\lambda n+n-1}}$$
$$=k\int x^{\lambda nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}.$$

Coroll. 2.

24. Hoc iam theorema locum habet, etiamsi n non sit numerus integer, quin etiam cum nume-

rum λ pro lubitu accipere liceat, loco λn scribamus m, et perueniemus ad hoc theorema:

$$\frac{\int x^{f-1}dx\,(1-x^g)^{m-1}}{\int x^{f-1}dx\,(1-x^g)^{m+n-1}} = \frac{k\int x^{mk-1}dx\,(1-x^k)^{n-1}}{g\int x^{f+mg-1}dx\,(1-x^g)^{n-1}}.$$

Coroll. 3.

25. Si ponamus $g=0$; ob $1-x^g = g\,l\frac{1}{x}$, hoc theorema istam induet formam:

$$\frac{\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^{m-1}}{\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^{m+n-1}} = \frac{k\int x^{mk-1}dx\,(1-x^k)^{n-1}}{\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^{n-1}}$$

quae commodius ita repraesentatur:

$$\frac{\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^{n-1}\cdot\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^{m-1}}{\int x^{f-1}dx\,(l\frac{1}{x})^{m+n-1}} = k\int x^{mk-1}dx\,(1-x^k)^{n-1}$$

vbi euidens est numeros m et n inter se permutari posse.

Scholion.

26. Duplicem ergo deteximus fontem, vnde innumerabiles formularum integralium comparationes haurire licet; alter fons §. 24. patefactus complectitur huiusmodi formulas integrales

$$\int x^{p-1}dx\,(1-x^g)^{q-1},$$

quas iam ante aliquod tempus pertractaui in obseruationibus circa integralia formularum

$$\int x^{p-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

a vaa valore $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſa, vbi oſtendi primo litteras p et q inter ſe permutari poſſe, vt ſit

$$\int x^{p-1}\,dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \int x^{q-1}\,dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}$$

tum vero etiam eſſe

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{p}{m}}} = \frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\,\frac{p\pi}{n}}$$

imprimis autem demonſtraui eſſe:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \cdot \int \frac{x^{p+q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}} = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}} \cdot \int \frac{x^{p+r-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

in qua aequatione comparatio in §. 24. inuenta iam continetur; ita vt hinc nihil noui, quod non iam euolui, deduci queat. Alterum igitur fontem §. 25 indicatum hic potiſſimum inueſtigandum ſuſcipio, vbi cum ſine vlla reſtrictione ſumi queat $f = 1$, aequatio noſtra primaria erit:

$$\frac{\int dx(l\frac{1}{x})^{n-1} \cdot \int dx(l\frac{1}{x})^{m-1}}{\int dx(l\frac{1}{x})^{m+n-1}} = k\int x^{mk-1}\,dx(1-x^k)^{n-1}$$

cuius beneficio valores formulae integralis $\int dx(l\frac{1}{x})^\lambda$ quando λ non eſt numerus integer ad quadraturas curuarum algebraicarum reuocare licebit; quandoquidem quoties λ eſt numerus integer, integratio habetur abſoluta, quoniam eſt

$$\int dx(l\frac{1}{x})^\lambda = 1.\ 2.\ 3 \ldots \ldots \lambda.$$

Maximi autem momenti quaeſtio verſatur circa eos

O 3 caſus,

casus, quibus λ est numerus fractus, quos ergo pro ratione denominationis hic successiue sum definiturus.

Problema 2.

27. Denotante i numerum integrum positiuum definire valorem formulae integralis $\int dx\,(l\,\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}$ integratione ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extensa.

Solutio.

In aequatione nostra generali faciamus $m = n$ eritque

$$\frac{(\int dx\,(l\,\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int dx\,(l\,\frac{1}{x})^{n-1}} = k\int x^{nk-1}\,dx\,(1 - x^k)^{n-1}$$

Sit iam $n - 1 = \frac{i}{2}$, et ob $2n - 1 = i + 1$ erit

$$\int dx\,(l\,\tfrac{1}{x})^{2n-1} = 1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (i+1)$$

sumatur porro $k = 2$ vt sit $nk - 1 = i + 1$, fietque

$$\frac{(\int dx\,\sqrt{(l\,\frac{1}{x})^i})^2}{1.\ 2.\ 3 \ldots (i+1)} = 2\int x^{i+1}\,dx\,(1 - x^2)^{\frac{i}{2}}$$

ideoque

$$\frac{\int dx\,\sqrt{(l\,\frac{1}{x})^i}}{\sqrt{(1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (i+1))}} = \sqrt{2\int x^{i+1}\,dx\,\sqrt{(1 - x^2)^i}}$$

vbi euidens est pro i numeros tantum impares sumi conuenire, quoniam pro paribus euolutio per se est manifesta.

Coroll. 1.

28. Omnes autem casus facile reducuntur ad $i = 1$, vel adeo ad $i = -1$, dummodo enim $i + 1$, non

non fit numerus negatiuus reductio inuenta locum habet. Pro hoc ergo casu erit:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{l\frac{1}{x}}} = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \sqrt{\pi} \text{ ob } \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}.$$

Coroll. 2.

29 Hoc autem casu principali expedito ob $\int dx (l\frac{1}{x})^n = n \int dx (l\frac{1}{x})^{n-1}$ habebimus,

$$\int dx \sqrt{l\frac{1}{x}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,;\ \int dx (l\tfrac{1}{x})^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\sqrt{\pi}$$

atque in genere

$$\int dx (l\tfrac{1}{x})^{\frac{2n+1}{2}} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{7}{2}\cdots\cdots\tfrac{(2n+1)}{2}\sqrt{\pi}.$$

Problema 3.

30. Denotante i numerum integrum positiuum definire valorem formulae integralis $\int dx (l\frac{1}{x})^{\frac{i}{3}-1}$ integratione ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensa.

Solutio.

Inchoemus ab aequatione praecedentis problematis:

$$\frac{(\int dx (l\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int dx (l\frac{1}{x})^{2n-1}} = k \int x^{nk-1} dx (1-x^k)^{n-1}$$

atque in forma generali statuamus $m = 2n$, vt habeatur:

$$\frac{\int dx (l\frac{1}{x})^{n-1} . \int dx (l\frac{1}{x})^{2n-1}}{\int dx (l\frac{1}{x})^{3n-1}} = k \int x^{2nk-1} dx (1-x^k)^{n-1}$$

ac

ac multiplicando has duas aequalitates adipiſcimur:

$$\frac{(\int dx(l\frac{1}{x})^{n-1})^3}{\int dx(l\frac{1}{x})^{3n-1}} = kk\int x^{nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}.\int x^{2nk-1}dx(1-x^k)^{n-1}.$$

Hic iam ponatur $n = \frac{i}{3}$ vt ſit

$$\int dx(l\frac{1}{x})^{i-1} = 1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (i-1)$$

ſumaturque $k = 3$ ac prodibit

$$\frac{(\int dx\sqrt[3]{(l\frac{1}{x})^{i-3}})^3}{1.2.3\ldots(i-1)} = 9\int x^{i-1}dx\sqrt[3]{(1-x^3)^{i-3}}.\int x^{2i-1}dx\sqrt[3]{(1-x^3)^{i-3}}$$

vnde concludimus

$$\frac{\int dx\sqrt[3]{(l\frac{1}{x})^{i-3}}}{\sqrt[3]{1.\ 2.\ 3\ldots(i-1)}} = \sqrt[3]{9\int\frac{x^{i-1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-i}}}.\int\frac{x^{2i-1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-i}}}}.$$

Coroll. 1.

31. Bini hic occurrunt caſus principales, a quibus reliqui omnes pendent, ponendo ſcilicet vel $i = 1$ vel $i = 2$, qui ſunt:

$$\text{I. } \int\frac{dx}{\sqrt[3]{(l\frac{1}{x})^2}} = \sqrt[3]{9\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}}$$

$$\text{II. } \int\frac{dx}{\sqrt[3]{l\frac{1}{x}}} = \sqrt[3]{9\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}.\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}}$$

quae poſterior forma ob $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$

abit

abit in

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{l\frac{1}{x}}} = \sqrt[3]{3} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} . \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} .$$

Coroll. 2.

32. Si vti in obſeruationibus meis ante allegatis breuitatis gratia ponamus $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-q}}} = (\frac{p}{q})$, atque vt ibi pro hac claſſe $(\frac{2}{1}) = \frac{\pi}{3 \sin. \frac{\pi}{3}} = \alpha$, tum vero $(\frac{1}{1}) = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = A$, erit

$$\text{I.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(l\frac{1}{x})^2}} = \sqrt[3]{9(\tfrac{1}{1})(\tfrac{2}{1})} = \sqrt[3]{9\alpha A}$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(l\frac{1}{x})^1}} = \sqrt[3]{3(\tfrac{1}{2})(\tfrac{2}{2})} = \sqrt[3]{\tfrac{3\alpha\alpha}{A}}.$$

Coroll. 3.

33. Pro caſu ergo priori habebimus,

$$\int dx \sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^{-2}} = \sqrt[3]{9\alpha A}; \int dx \sqrt[3]{l\tfrac{1}{x}} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{9\alpha A} \text{ et}$$

$$\int dx \sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^{3n+1}} = \tfrac{1}{3}.\tfrac{4}{3}.\tfrac{7}{3} \ldots\ldots \tfrac{3n+1}{3}\sqrt[3]{9\alpha A}$$

pro altero vero caſu

$$\int dx \sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^{-1}} = \sqrt[3]{\tfrac{3\alpha\alpha}{A}}; \int dx \sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^2} = \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{\tfrac{3\alpha\alpha}{A}} \text{ et}$$

$$\int dx \sqrt[3]{(l\tfrac{1}{x})^{3n-1}} = \tfrac{2}{3}.\tfrac{5}{3}.\tfrac{8}{3} \ldots\ldots\ldots \tfrac{3n-1}{3}\sqrt[3]{\tfrac{3\alpha\alpha}{A}}.$$

Problema 4.

34. Denotante i numerum integrum positiuum definire valorem formulae integralis $\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{i}{4}-1}$ integratione ab $x=0$ ad $x=1$ extensa.

Solutio.

In solutione problematis praecedentis perducti sumus ad hanc aequationem

$$\frac{(\int dx\,(l\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{2n-1}} = kk\int\frac{x^{nk-1}\,dx}{(1-x^k)^{1-n}}\cdot\int\frac{x^{2nk-1}\,dx}{(1-x^k)^{1-n}}$$

forma generalis autem sumendo $m=3n$ praebet

$$\frac{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{n-1}\int dx\,(l\frac{1}{x})^{3n-1}}{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{4n-1}} = k\int\frac{x^{3nk-1}\,dx}{(1-x^k)^{1-n}}$$

quibus coniungendis adipiscimur,

$$\frac{(\int dx\,(l\frac{1}{x})^{n-1})^4}{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{4n-1}} = k^3\int\frac{x^{nk-1}\,dx}{(1-x^k)^{1-n}}\int\frac{x^{2nk-1}\,dx}{(1-x^k)^{1-n}}\cdot\int\frac{x^{3nk-1}\,dx}{(1-x^k)^{1-n}}$$

Sit nunc $n=\frac{i}{4}$ et sumatur $k=4$ fietque

$$\frac{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{i}{4}-1}}{\sqrt[4]{1.2.3\ldots(i-1)}} = \sqrt[4]{4^3}\int\frac{x^{i-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-i}}}\cdot\int\frac{x^{2i-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-i}}}\cdot\int\frac{x^{3i-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-i}}}$$

Coroll.

Coroll 1.

35. Si igitur ſit $i = 1$, habebimus

$$\int dx \sqrt[4]{(l\tfrac{1}{x})^{-3}} = \sqrt[4]{4^3} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} \cdot \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}$$

quae expreſſio ſi littera P deſignetur erit in genere

$$\int dx \sqrt[4]{(l\tfrac{1}{x})^{4n-3}} = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{9}{4} \cdots \cdots \tfrac{4n-3}{4} \cdot P.$$

Coroll 2.

36. Pro altero caſu principali ſumamus $i = 3$ eritque

$$\int dx \sqrt[4]{(l\tfrac{1}{x})^{-1}} = \sqrt[4]{2 \cdot 4^3} \int \frac{x^7\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{x^8\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}$$

ſeu facta reductione ad ſimpliciores formas

$$\int dx \sqrt[4]{(l\tfrac{1}{x})^{-1}} = \sqrt[4]{8} \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}$$

quae expreſio ſi littera Q deſignetur erit generatim

$$\int dx \sqrt[4]{(l\tfrac{1}{x})^{4n-1}} = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{7}{4} \cdot \tfrac{11}{4} \cdots \cdots \tfrac{4n-1}{4} \cdot Q.$$

Scholion.

37. Si formulam integralem $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[i]{(1-x^i)^{i-q}}}$ hoc ſigno $(\frac{p}{q})$ indicemus, ſolutio problematis ita ſe habebit

$$\int dx \sqrt[i]{(l\tfrac{1}{x})^{i-i}} = \sqrt[i]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (i-1) \cdot 4^3} (\tfrac{i}{1})(\tfrac{2i}{1})(\tfrac{3i}{1})$$

P 2 et

et pro binis casibus euolutis fit

$$P = \sqrt[4]{4^3 \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)} \text{ et } Q = \sqrt[4]{8 \left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)}.$$

Statuamus nunc pro iis formulis quae a circulo pendent:

$$\left(\tfrac{3}{1}\right) = \frac{\pi}{4 \sin. \frac{\pi}{4}} = \alpha \text{ et } \left(\tfrac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4 \sin. \frac{2\pi}{4}} = \beta$$

pro transcendentibus autem altioris ordinis

$$\left(\tfrac{2}{1}\right) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt[2]{(1 - x^4)}} = A$$

quippe a qua omnes reliquae pendent ac reperimus,

$$P = \sqrt[4]{4^3 \tfrac{\alpha\alpha}{\beta}.\, AA} \text{ et } Q = \sqrt[4]{4.\, \alpha\alpha\beta.\, \tfrac{1}{AA}}$$

vnde patet esse $PQ = 4\alpha = \frac{\pi}{\sin. \frac{\pi}{4}}$. Cum autem sit $\alpha = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$ erit $P = \sqrt[4]{32\,\pi AA}$ et $Q = \sqrt[4]{\frac{\pi^3}{8AA}}$ et $\frac{P}{Q} = \frac{4A}{\sqrt{\pi}}$.

Problema 5.

38. Denotante i numerum integrum positiuum definire valorem formulae integralis $\int dx \sqrt[5]{(l\frac{1}{x})^{i-5}}$ integratione ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensa.

Solutio.

Ex praecedentibus solutionibus iam satis est perspicuum pro hoc casu tandem peruentum iri ad hanc formam

$\int dx$

$$\frac{\int dx \sqrt[5]{(l\frac{1}{x})^{i-5}}}{\sqrt[5]{1.2.3\ldots(i-1)}} = \sqrt[5]{5^4 \int \frac{x^{i-1}dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-i}}} \cdot \int \frac{x^{2i-1}dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-i}}} \cdot \int \frac{x^{3i-1}dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-i}}} \cdot \int \frac{x^{4i-1}dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-i}}}}$$

quae formulae integrales ad claſſem quintam diſſertationis meae ſupra allegatae ſunt referendae. Quare ſi modo ibi recepto ſignum $(\frac{p}{q})$ denotet hanc formulam $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-q}}}$, valorem quaeſitum ita commodius exprimere licebit, vt ſit:

$$\int dx \sqrt[5]{(l\tfrac{1}{x})^{i-5}} = \sqrt[5]{1.2.3\ldots(i-1)\, 5^4 (\tfrac{i}{i})(\tfrac{2i}{i})(\tfrac{3i}{i})(\tfrac{4i}{i})}$$

vbi quidem ſufficit ipſi i valores quinario minores tribuiſſe: quando autem numeratores quinarium ſuperant tenendum eſt eſſe:

$$(\tfrac{5+m}{i}) = \tfrac{m}{m+i}(\tfrac{m}{i}) \text{ tum vero porro}$$

$$(\tfrac{10+m}{i}) = \tfrac{m}{m+i} \cdot \tfrac{m+5}{m+i+5}(\tfrac{m}{i})$$

$$(\tfrac{15+m}{i}) = \tfrac{m}{m+i} \cdot \tfrac{m+5}{m+i+5} \cdot \tfrac{m+10}{m+i+10} \cdot (\tfrac{m}{i})$$

Deinde vero pro hac claſſe binae formulae quadraturam circuli inuoluunt quae ſunt.

$$(\tfrac{4}{1}) = \frac{\pi}{5 \sin. \frac{\pi}{5}} = \alpha \text{ et } (\tfrac{3}{2}) = \frac{\pi}{5 \sin. \frac{2\pi}{5}} = \beta$$

duae autem quadraturas altiores continent quae ponantur:

$$\left(\tfrac{3}{1}\right)=\int\frac{x\,x\,d\,x}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\int\frac{d\,x}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}=\mathrm{A} \text{ et}$$

$$\left(\tfrac{2}{2}\right)=\int\frac{x\,d\,x}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=\mathrm{B}$$

atque ex his valores omnium reliquarum formularum huius classis assignaui scilicet:

$$\left(\tfrac{5}{1}\right)=1;\ \left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{1}{2};\ \left(\tfrac{5}{3}\right)=\tfrac{1}{3};\ \left(\tfrac{5}{4}\right)=\tfrac{1}{4};\ \left(\tfrac{5}{5}\right)=\tfrac{1}{5}$$

$$\left(\tfrac{4}{1}\right)=\alpha;\ \left(\tfrac{4}{2}\right)=\tfrac{\beta}{\mathrm{A}};\ \left(\tfrac{4}{3}\right)=\tfrac{\beta}{2\,\mathrm{B}};\ \left(\tfrac{4}{4}\right)=\tfrac{\alpha}{3\,\mathrm{A}}$$

$$\left(\tfrac{3}{1}\right)=\mathrm{A};\ \left(\tfrac{3}{2}\right)=\beta;\ \left(\tfrac{3}{3}\right)=\tfrac{\beta\beta}{\alpha\mathrm{B}}$$

$$\left(\tfrac{2}{1}\right)=\tfrac{\alpha\mathrm{B}}{\beta};\ \left(\tfrac{2}{2}\right)=\mathrm{B};$$

$$\left(\tfrac{1}{1}\right)=\tfrac{\alpha\mathrm{A}}{\beta}.$$

Coroll. 1.

39. Sumto exponente $i=1$ erit:

$$\int d\,x\,\sqrt[5]{\left(l\tfrac{1}{x}\right)^{-4}}=\sqrt[5]{5^4\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right)}=\sqrt[5]{5^4\cdot\tfrac{\alpha^3}{\beta^2}\mathrm{A}^2\mathrm{B}}$$

vnde in genere concludimus fore denotante n numerum integrum quemcunque

$$\int d\,x\,\sqrt[5]{\left(l\tfrac{1}{x}\right)^{5n-4}}=\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{11}{5}\cdots\tfrac{5n-4}{5}\cdot\sqrt[5]{5^4\cdot\tfrac{\alpha^3}{\beta^2}\mathrm{A}^2\mathrm{B}}.$$

Coroll. 2.

40. Sit nunc $i=2$ et cum prodeat:

$$\int d\,x\,\sqrt[5]{\left(l\tfrac{1}{x}\right)^{-3}}=\sqrt[5]{1\cdot5^4\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{6}{2}\right)\left(\tfrac{8}{2}\right)}$$

ob $\left(\tfrac{6}{2}\right)=\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{1}\right)$ et $\left(\tfrac{8}{2}\right)=\tfrac{3}{5}\left(\tfrac{3}{2}\right)$

erit

erit haec expreſſio

$$\sqrt[s]{5^3 \left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)} = \sqrt[s]{5^3} . \alpha \beta . \frac{BB}{A} \text{ et in genere}$$

$$\int dx \sqrt[s]{(l\tfrac{1}{x})}^{sn-3} = \tfrac{2}{5} . \tfrac{7}{5} . \tfrac{12}{5} \ldots . \tfrac{sn-3}{s} \sqrt[s]{5^3} . \alpha \beta . \tfrac{BB}{A} .$$

Coroll 3.

51. Sit $i = 3$ et forma inuenta:

$$\int dx \sqrt[s]{(l\tfrac{1}{x})}^{-2} = \sqrt[s]{2 . 5^4 \left(\tfrac{3}{3}\right) \left(\tfrac{6}{3}\right) \left(\tfrac{9}{3}\right) \left(\tfrac{12}{3}\right)} \text{ ob}$$

$$\left(\tfrac{6}{3}\right) = \tfrac{1}{4} \left(\tfrac{5}{1}\right); \quad \left(\tfrac{9}{3}\right) = \tfrac{4}{7} \left(\tfrac{4}{3}\right); \quad \left(\tfrac{12}{3}\right) = \tfrac{2}{5} . \tfrac{7}{15} \left(\tfrac{2}{2}\right)$$

abit in $\sqrt[s]{2 . 5^2 \left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)} = \sqrt[s]{5^2} . \frac{\beta^4}{\alpha} . \frac{A}{BB}$

vnde in genere colligitur:

$$\int dx \sqrt[s]{(l\tfrac{1}{x})}^{sn-2} = \tfrac{3}{5} . \tfrac{8}{5} . \tfrac{13}{5} \ldots . \tfrac{sn-2}{s} \sqrt[s]{5^2} . \tfrac{\beta^4}{\alpha} . \tfrac{A}{BB} .$$

Coroll. 4.

42. Poſito denique $i = 4$ forma noſtra:

$$\int dx \sqrt[s]{(l\tfrac{1}{x})}^{-1} = \sqrt[s]{6 . 5^4 \left(\tfrac{4}{4}\right) \left(\tfrac{8}{4}\right) \left(\tfrac{12}{4}\right) \left(\tfrac{16}{4}\right)} \text{ ob}$$

$$\left(\tfrac{8}{4}\right) = \tfrac{3}{7} \left(\tfrac{4}{3}\right); \quad \left(\tfrac{12}{4}\right) = \tfrac{2}{8} . \tfrac{7}{11} \left(\tfrac{4}{2}\right); \quad \left(\tfrac{16}{4}\right) = \tfrac{1}{5} . \tfrac{6}{15} . \tfrac{11}{15} \left(\tfrac{4}{1}\right)$$

transformabitur in hanc:

$$\sqrt[s]{6 . 5 \left(\tfrac{4}{4}\right) \left(\tfrac{4}{3}\right) \left(\tfrac{4}{2}\right) \left(\tfrac{4}{1}\right)} = \sqrt[s]{5} . \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{AAB}$$

ita vt ſit in genere

$$\int dx \sqrt[s]{(l\tfrac{1}{x})}^{sn-1} = \tfrac{4}{5} . \tfrac{9}{5} . \tfrac{14}{5} \ldots . \tfrac{sn-1}{s} \sqrt[s]{5} . \alpha\alpha\beta\beta . \tfrac{1}{AAB} .$$

Scho-

Scholion.

43. Si valorem formulae integralis $\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\lambda}$ hoc ſigno $[\lambda]$ repraeſentemus, caſus hactenus euoluti praebent:

$$[-\tfrac{4}{5}] = \sqrt[5]{5^4 \cdot \tfrac{\alpha^3}{\beta^2} \cdot A^2B}\,;\quad [+\tfrac{1}{5}] = \tfrac{1}{5}\sqrt[5]{5^4 \cdot \tfrac{\alpha^3}{\beta^2} \cdot A^2B}$$

$$[-\tfrac{3}{5}] = \sqrt[5]{5^3 \cdot \alpha\beta \cdot \tfrac{BB}{A}}\,;\quad [+\tfrac{2}{5}] = \tfrac{2}{5}\sqrt[5]{5^3 \cdot \alpha\beta \cdot \tfrac{BB}{A}}$$

$$[-\tfrac{2}{5}] = \sqrt[5]{5^2 \cdot \tfrac{\beta^4}{\alpha} \cdot \tfrac{A}{BB}}\,;\quad [+\tfrac{3}{5}] = \tfrac{3}{5}\sqrt[5]{5^2 \cdot \tfrac{\beta^4}{\alpha} \cdot \tfrac{A}{BB}}.$$

$$[-\tfrac{1}{5}] = \sqrt[5]{5 \cdot \alpha^2\beta^2 \cdot \tfrac{1}{AAB}}\,;\quad [+\tfrac{4}{5}] = \tfrac{4}{5}\sqrt[5]{5 \cdot \alpha^2\beta^2 \cdot \tfrac{1}{AAB}}$$

vnde binis, quarum indices ſimul ſumti fiunt $=0$ coniungendis colligimus.

$$[+\tfrac{1}{5}]\cdot[-\tfrac{1}{5}] = \alpha = \frac{\pi}{5\sin.\frac{\pi}{5}}$$

$$[+\tfrac{2}{5}]\cdot[-\tfrac{2}{5}] = 2\beta = \frac{2\pi}{5\sin.\frac{2\pi}{5}}$$

$$[+\tfrac{3}{5}]\cdot[-\tfrac{3}{5}] = 3\beta = \frac{3\pi}{5\sin.\frac{3\pi}{5}}$$

$$[+\tfrac{4}{5}]\cdot[-\tfrac{4}{5}] = 4\alpha = \frac{4\pi}{5\sin.\frac{4\pi}{5}}.$$

Ex antecedente autem problemate ſimili modo deducimus:

$$[-\tfrac{3}{4}] = P = \sqrt[4]{4^3\,\tfrac{\alpha\alpha}{\beta}\cdot AA}\,;\quad [+\tfrac{1}{4}] = \tfrac{1}{4}\sqrt[4]{4^3\cdot\tfrac{\alpha\alpha}{\beta}\cdot AA}$$

$$[-\tfrac{1}{4}] = Q = \sqrt[4]{4\cdot\alpha\alpha\beta\cdot\tfrac{1}{AA}}\,;\quad [+\tfrac{3}{4}] = \tfrac{3}{4}\sqrt[4]{4\cdot\alpha\alpha\beta\,\tfrac{1}{AA}}$$

hinc-

hincque

$$[+\tfrac{1}{4}].\ [-\tfrac{1}{4}] = \alpha = \frac{\pi}{4\ \text{fin.}\ \frac{\pi}{4}}$$

$$[+\tfrac{3}{4}].\ [-\tfrac{3}{4}] = 3\alpha = \frac{3\ \pi}{4\ \text{fin.}\ \frac{3\pi}{4}}$$

vnde in genere hoc Theorema adipiſcimur quod ſit

$$[\lambda].\ [-\lambda] = \frac{\lambda\pi}{\text{fin.}\ \lambda\pi}$$

cuius ratio ex methodo interpolandi olim expoſita ita reddi poteſt:

$$\text{cum ſit } [\lambda] = \frac{1^{1-\lambda}.\ 2^{\lambda}}{1+\lambda}.\ \frac{2^{1-\lambda}.\ 3^{\lambda}}{2+\lambda}.\ \frac{3^{1-\lambda}.\ 4^{\lambda}}{3+\lambda}\ \text{etc.}$$

$$\text{erit } [-\lambda] = \frac{1^{1+\lambda}.\ 2^{-\lambda}}{1-\lambda}.\ \frac{2^{1+\lambda}.\ 3^{-\lambda}}{2-\lambda}.\ \frac{3^{1+\lambda}.\ 4^{-\lambda}}{3-\lambda}\ \text{etc.}$$

hincque

$$[\lambda].\ [-\lambda] = \frac{1.\ 1}{1-\lambda\lambda}.\ \frac{2.\ 2}{4-\lambda\lambda}.\ \frac{3.\ 3}{9-\lambda\lambda}\ \text{etc.} = \frac{\lambda\pi}{\text{fin.}\ \lambda\pi}$$

vti alibi demonſtraui.

Problema 6 generale.

44. Si litterae i et n denotent numeros integros poſitiuos definire valorem formulae integralis $\int dx\,(l\tfrac{1}{x})^{\frac{i-n}{n}}$ ſeu $\int dx\,\sqrt[n]{(l\tfrac{1}{x})^{i-n}}$, integratione ab $x=0$ ad $x=1$ extenſa.

Solutio.

Methodus hactenus vsitata quaesitum valorem sequenti modo per quadraturas curuarum algebraicarum expressum exhibebit:

$$\frac{\int dx\,\sqrt[n]{(l\frac{1}{x})^{i-n}}}{\sqrt[n]{1.2.3.(i-1)}}=\sqrt[n]{n^{n-1}}\int\frac{x^{i-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-i}}}.\int\frac{x^{2i-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-i}}}\ldots\ldots\int\frac{x^{(n-1)i-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-i}}}.$$

Quod si iam breuitatis gratia formulam integralem $\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ hoc charactere $(\frac{p}{q})$, formulam vero $\int dx\,\sqrt[n]{(l\frac{1}{x})^m}$ isthoc $[\frac{m}{n}]$ designemus, ita vt $[\frac{m}{n}]$ valorem huius producti indefiniti 1. 2. 3 .... z denotet existente $z=\frac{m}{n}$, succinctius valor quaesitus hoc modo expressus prodibit:

$$[\tfrac{i-n}{n}]=\sqrt[n]{1.2.3\ldots(i-1)n^{n-1}}.\,(\tfrac{i}{i})\,(\tfrac{2i}{i})\,(\tfrac{3i}{i})\ldots\ldots(\tfrac{ni-i}{i})$$

vnde etiam colligitur

$$[\tfrac{i}{n}]=\tfrac{i}{n}\sqrt[n]{1.2.3\ldots(i-1)n^{n-1}}.\,(\tfrac{i}{i})(\tfrac{2i}{i})(\tfrac{3i}{i})\ldots(\tfrac{ni-i}{i}).$$

Hic semper numerum i ipso n minorem accepisse sufficiet quoniam pro maioribus notum est esse:

$$[\tfrac{i+n}{n}]=\tfrac{i+n}{n}[\tfrac{i}{n}];\ \text{item}\ [\tfrac{i+2n}{n}]=\tfrac{i+n}{n}.\tfrac{i+2n}{n}[\tfrac{i}{n}]\ \text{etc.}$$

hocque modo tota inuestigatio ad eos tantum casus reducitur, quibus fractionis $\frac{i}{n}$ numerator i denominatore n est minor. Praeterea vero de formulis integrategralibus $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$, sequentia notasse iuvabit:

I. Litteras p et q inter se esse permutabiles vt sit $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$.

II. Si alteruter numerorum p vel q ipsi exponenti n aequetur, valorem formulae integralis fore algebraicum scilicet:

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{p}. \text{ seu } \left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{q}{n}\right) = \frac{1}{q}.$$

III. Si summa numerorum $p+q$ ipsi exponenti n aequatur, formulae integralis $\left(\frac{p}{q}\right)$ valorem per circulum exhiberi posse, cum sit:

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{p}\right) = \frac{\pi}{n \sin.\frac{p\pi}{n}} \text{ et } \left(\frac{q}{n-q}\right) = \left(\frac{n-q}{q}\right) = \frac{\pi}{n \sin.\frac{q\pi}{n}}.$$

IV. Si alteruter numerorum p vel q maior sit exponente n, formulam integralem $\left(\frac{p}{q}\right)$ ad aliam reuocari posse, cuius termini sint ipso n minores, quod fit ope huius reductionis

$$\left(\frac{p+n}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right).$$

V. Inter plures huiusmodi formulas integrales talem relationem intercedere vt sit:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right) = \left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right)$$

cuius ope omnes reductiones reperiuntur quas in obseruationibus circa has formulas exposui.

Coroll. 1.

45. Si hoc modo ope reductionis n°. IV. indicatae formam inuentam ad singulos casus accommodemus, eos sequenti ratione simplicissime exhibere poterimus. Ac primo quidem pro casu $n = 2$, quo nulla opus est reductione habebimus:

$$\left[\tfrac{1}{2}\right] = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{2\left(\tfrac{1}{1}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{\pi}{\text{fin.}\,\frac{\pi}{2}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Coroll. 2.

46. Pro casu $n = 3$ habebimus has reductiones:

$$\left[\tfrac{1}{3}\right] = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{3^2.\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)}$$

$$\left[\tfrac{2}{3}\right] = \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{3.\,1.\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)}.$$

Coroll. 3.

47. Pro casu $n = 4$ hae tres reductiones obtinentur:

$$\left[\tfrac{1}{4}\right] = \tfrac{1}{4}\sqrt[4]{4^3\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)}$$

$$\left[\tfrac{2}{4}\right] = \tfrac{2}{4}\sqrt[4]{4^2.\,2.\left(\tfrac{2}{2}\right)^2\left(\tfrac{4}{2}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{4\left(\tfrac{2}{2}\right)} \text{ ob } \left(\tfrac{4}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$\left[\tfrac{3}{4}\right] = \tfrac{3}{4}\sqrt[4]{4.\,1.\,2\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)}$$

cum in media sit $\left(\tfrac{2}{2}\right) = \left(\frac{2}{4-2}\right) = \frac{\pi}{4}$ erit vtique vt ante $\left[\tfrac{2}{4}\right] = \left[\tfrac{1}{2}\right] = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Coroll.

Coroll. 4.

48. Sit nunc $n = 5$, et prodeunt hae quatuor reductiones:

$$\left[\tfrac{1}{5}\right] = \tfrac{1}{5}\sqrt[5]{5^4 \cdot \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right)}$$

$$\left[\tfrac{2}{5}\right] = \tfrac{2}{5}\sqrt[5]{5^3 \cdot 1\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)}$$

$$\left[\tfrac{3}{5}\right] = \tfrac{3}{5}\sqrt[5]{5^2 \cdot 1 \cdot 2\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)}$$

$$\left[\tfrac{4}{5}\right] = \tfrac{4}{5}\sqrt[5]{5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3\left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{2}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)}.$$

Coroll. 5.

49. Sit $n = 6$, et habebimus has reductiones:

$$\left[\tfrac{1}{6}\right] = \tfrac{1}{6}\sqrt[6]{6^5 \cdot \left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right)}$$

$$\left[\tfrac{2}{6}\right] = \tfrac{2}{6}\sqrt[6]{6^4 \cdot 2\left(\tfrac{2}{2}\right)^2\left(\tfrac{4}{2}\right)^2\left(\tfrac{6}{2}\right)} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{6^2\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)}$$

$$\left[\tfrac{3}{6}\right] = \tfrac{3}{6}\sqrt[6]{6^3 \cdot 3 \cdot 3\left(\tfrac{3}{3}\right)^3\left(\tfrac{6}{3}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{6\left(\tfrac{3}{3}\right)}$$

$$\left[\tfrac{4}{6}\right] = \tfrac{4}{6}\sqrt[6]{6^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2\left(\tfrac{4}{4}\right)^2\left(\tfrac{2}{4}\right)^2\left(\tfrac{6}{4}\right)} = \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{6 \cdot 2\left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{2}{4}\right)}$$

$$\left[\tfrac{5}{6}\right] = \tfrac{5}{6}\sqrt[6]{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\left(\tfrac{5}{5}\right)\left(\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right)\left(\tfrac{2}{5}\right)\left(\tfrac{1}{5}\right)}.$$

Coroll. 6.

50. Posito $n = 7$ sequentes sex prodeunt aequationes:

$$\left[\tfrac{1}{7}\right] = \tfrac{1}{7}\sqrt[7]{7^6\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right)}$$

$$\left[\tfrac{2}{7}\right] = \tfrac{2}{7}\sqrt[7]{7^5 \cdot 1\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{6}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{5}{2}\right)}.$$

$$\left[\tfrac{3}{7}\right] = \tfrac{3}{7}\sqrt[7]{7^4.1.2\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)}$$

$$\left[\tfrac{4}{7}\right] = \tfrac{4}{7}\sqrt[7]{7^3.1.2.3\left(\tfrac{4}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{2}{4}\right)\left(\tfrac{6}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)}$$

$$\left[\tfrac{5}{7}\right] = \tfrac{5}{7}\sqrt[7]{7^2.1.2.3.4\left(\tfrac{5}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right)\left(\tfrac{1}{5}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right)\left(\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{2}{5}\right)}$$

$$\left[\tfrac{6}{7}\right] = \tfrac{6}{7}\sqrt[7]{7.1.2.3.4.5\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)\left(\tfrac{4}{6}\right)\left(\tfrac{3}{6}\right)\left(\tfrac{2}{6}\right)\left(\tfrac{1}{6}\right)}.$$

Coroll. 7.

51. Sit $n = 8$, et feptem hae reductiones impetrabuntur.

$$\left[\tfrac{1}{8}\right] = \tfrac{1}{8}\sqrt[8]{8^7\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{4}{1}\right)\left(\tfrac{5}{1}\right)\left(\tfrac{6}{1}\right)\left(\tfrac{7}{1}\right)}$$

$$\left[\tfrac{2}{8}\right] = \tfrac{2}{8}\sqrt[8]{8^6.2\left(\tfrac{2}{2}\right)^2\left(\tfrac{4}{2}\right)^2\left(\tfrac{6}{2}\right)^2\left(\tfrac{8}{2}\right)} = \tfrac{1}{4}\sqrt[4]{8^3\left(\tfrac{2}{2}\right)\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{6}{2}\right)}$$

$$\left[\tfrac{3}{8}\right] = \tfrac{3}{8}\sqrt[8]{8^5.1.2\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)}$$

$$\left[\tfrac{4}{8}\right] = \tfrac{4}{8}\sqrt[8]{8^4.4.4.4\left(\tfrac{4}{4}\right)^4\left(\tfrac{8}{4}\right)^3} = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{8\left(\tfrac{4}{4}\right)}$$

$$\left[\tfrac{5}{8}\right] = \tfrac{5}{8}\sqrt[8]{8^3.1.2.3.4\left(\tfrac{5}{5}\right)\left(\tfrac{2}{5}\right)\left(\tfrac{7}{5}\right)\left(\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{1}{5}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right)}$$

$$\left[\tfrac{6}{8}\right] = \tfrac{6}{8}\sqrt[8]{8^2.4.2.6.4.2\left(\tfrac{6}{6}\right)^2\left(\tfrac{4}{6}\right)^2\left(\tfrac{2}{6}\right)^2\left(\tfrac{8}{6}\right)} = \tfrac{3}{4}\sqrt[4]{8.2.4\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{4}{6}\right)\left(\tfrac{2}{6}\right)}$$

$$\left[\tfrac{7}{8}\right] = \tfrac{7}{8}\sqrt[8]{8.1.2.3.4.5.6\left(\tfrac{7}{7}\right)\left(\tfrac{6}{7}\right)\left(\tfrac{5}{7}\right)\left(\tfrac{4}{7}\right)\left(\tfrac{3}{7}\right)\left(\tfrac{2}{7}\right)\left(\tfrac{1}{7}\right)}.$$

Scholion.

52. Superfluum foret hos cafus vlterius euoluere cum ex allatis ordo iftarum formularum fatis perfpiciatur. Si enim in formula propofita $\left[\frac{m}{n}\right]$ numeri m et n fint inter fe primi lex eft manifefta, cum fiat

$$\left[\tfrac{m}{n}\right] = \tfrac{m}{n}\sqrt[n]{n^{n-m}.1.2\ldots(m-1).\left(\tfrac{1}{m}\right)\left(\tfrac{2}{m}\right)\left(\tfrac{3}{m}\right)\ldots\left(\tfrac{n-1}{m}\right)}$$

fin

ſin autem hi numeri m et n communem habeant diuiſorem expediet quidem fractionem $\frac{m}{n}$ ad minimam formam reduci et ex caſibus praecedentibus quaeſitum valorem peti, interim tamen etiam operatio hoc modo inſtitui poterit. Cum expreſſio quaeſita certe hanc habeat formam

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n} \sqrt[n]{n^{n-m}}\ \mathrm{P.\ Q}$$

vbi Q eſt productum ex $n - 1$ formulis integralibus P vero productum ex aliquot numeris abſolutis, primum pro illo producto Q inueniendo, continuetur haec formularum ſeries $\left(\frac{m}{m}\right)\left(\frac{2\,m}{m}\right)\left(\frac{3\,m}{m}\right)$ donec numerator ſuperet exponentem n, eiusque loco exceſſus ſupra n ſcribatur, qui ſi ponatur $= \alpha$, vt iam formula noſtra ſit $\left(\frac{\alpha}{m}\right)$, hic ipſe numerator α dabit factorem producti P tum hinc formularum ſeries porro ſtatuatur $\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{\alpha + m}{m}\right)\left(\frac{\alpha + 2\,m}{m}\right)$ etc. donec iterum ad numeratorem exponente n maiorem perueniatur, formulaque prodeat $\left(\frac{n + \beta}{m}\right)$ cuius loco ſcribi oportet $\left(\frac{\beta}{m}\right)$, ſimulque hinc factor β in productum P inferatur, ſicque progredi conueniet, donec pro Q prodierint $n - 1$ formulae. Quae operationes quo facilius intelligantur, caſum formulae $\left[\frac{9}{12}\right] = \frac{9}{12} \sqrt[12]{12^3}$ P. Q hoc modo euoluamus, vbi inueſtigatio litterarum Q et P ita inſtituetur.

Pro Q. . . .	$\left(\frac{9}{9}\right)$	$\left(\frac{6}{9}\right)$	$\left(\frac{3}{9}\right)$	$\left(\frac{12}{9}\right)$	$\left(\frac{9}{9}\right)$	$\left(\frac{6}{9}\right)$	$\left(\frac{3}{9}\right)$	$\left(\frac{12}{9}\right)$	$\left(\frac{9}{9}\right)$	$\left(\frac{6}{9}\right)$	$\left(\frac{3}{9}\right)$
Pro P.		6.	3		9.	6.	3		9.	6.	3

ſicque

ſicque reperitur:

$$Q = \left(\frac{9}{9}\right)^3 \left(\frac{6}{9}\right)^3 \left(\frac{3}{9}\right)^3 \left(\frac{12}{9}\right)^2 \quad \text{et}$$

$$P = 6^3 .\ 3^3 .\ 9^2 .$$

Cum igitur ſit $\left(\frac{12}{9}\right) = \frac{1}{9}$ ſit $PQ = 6^3 . 3^3 \left(\frac{9}{9}\right) \left(\frac{6}{9}\right)^3 \left(\frac{3}{9}\right)^3$ ideoque

$$\left[\frac{9}{12}\right] = \frac{3}{4} \sqrt[4]{12 .\ 6 .\ 3 . \left(\frac{9}{9}\right)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right)}.$$

Theorema.

53. Quicunque numeri integri poſitiui litteris m et n indicentur, erit ſemper ſignandi modo ante expoſito:

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n} \sqrt[n]{n^{n-m} .\ 1 .\ 2 .\ 3 \ldots (m-1)\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{m}\right)}.$$

Demonſtratio.

Pro caſu, quo m et n ſunt numeri inter ſe primi, veritas theorematis in antecedentibus eſt euicta, quod autem etiam locum habeat, ſi illi numeri m et n commune diuiſore gaudeant, inde quidem non liquet: verum ex hoc ipſo, quod pro caſibus, quibus m et n ſunt numeri primi, veritas conſtat, tuto concludere licet, theorema in genere eſſe verum. Minime quidem diffiteor hoc concludendi genus prorſus eſſe ſingulare, ac plerisque ſuſpectum videri debere. Quare quo nullum dubium relinquatur quoniam pro caſibus, quibus numeri m et n inter ſe ſunt compoſiti, geminam expreſſionem ſumus nacti, vtriusque conſenſum pro caſibus ante euolutis oſtendiſſe iuuabit. Inſigne autem iam ſuppeditat

peditat firmamentum casus $m = n$, quo forma nostra manifesto vnitatem producit.

Coroll. 1.

54. Primus casus consensus demonstrationem postulans est quo $m = 2$ et $n = 4$, pro quo supra §. 47. inuenimus

$\left[\frac{2}{4}\right] = \frac{2}{4}\sqrt[4]{4^2}.\left(\frac{2}{2}\right)^2$ nunc autem vi theorematis est

$$\left[\frac{2}{4}\right] = \frac{2}{4}\sqrt[4]{4^2}.\,1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$

vnde comparatione instituta fit $\left(\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$ cuius veritas in Obseruationibus supra allegatis est confirmata.

Coroll. 2.

55. Si $m = 2$ et $n = 6$, ex superioribus (49) est

$\left[\frac{2}{6}\right] = \frac{2}{6}\sqrt[6]{6^4}.\left(\frac{2}{2}\right)^2\left(\frac{4}{2}\right)^2$ nunc vero per theorema

$$\left[\frac{2}{6}\right] = \frac{2}{6}\sqrt[6]{6^4}.\,1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$$

ideoque necesse est sit

$$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$$

cuius veritas indidem patet.

Coroll. 3.

56. Si $m = 3$ et $n = 6$, peruenitur ad hanc aequationem:

$$\left(\frac{3}{3}\right)^2 = 1.\,2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)$$

at ſi $m = 4$ et $n = 6$ fit ſimili modo:

$$2^2\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = 1.\,2.\,3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$$

ſeu $\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$

quod etiam verum deprehenditur.

Coroll. 4.

57. Caſus $m = 2$ et $n = 8$ praebet hanc aequalitatem:

$$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)$$

at caſus $m = 4$ et $n = 8$ hanc:

$$\left(\frac{4}{4}\right)^3 = 1.\,2.\,3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{6}{4}\right)\left(\frac{7}{4}\right)$$

caſus denique $m = 6$ et $n = 8$ iſtam

$$2.\,4\left(\frac{6}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right) = 1.\,3.\,5\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{7}{6}\right)$$

quae etiam veritati ſunt conſentaneae.

Scholion.

58. In genere autem ſi numeri m et n communem habeant factorem 2, et formula propoſita ſit $\left[\frac{2m}{2n}\right] = \left[\frac{m}{n}\right]$ quia eſt;

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n}\sqrt[n]{n^{n-m}}.\ 1.\,2.\,3\ldots(m-1)\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{m}\right)$$

erit eadem ad exponentem $2n$ reducta:

$$\frac{m}{n}\sqrt[2n]{2n^{2n-2m}}.\ 2^2.\,4^2.\,6^2\ldots(2m-2)^2\left(\frac{2}{2m}\right)^2\left(\frac{4}{2m}\right)^2\left(\frac{6}{2m}\right)^2\ldots\left(\frac{2n-2}{m}\right)^2$$

Per theorema vero eadem expreſſio fit

$$\frac{m}{n}\sqrt[2n]{2n^{2n-2m}}.\ 1.\,2.\,3\ldots(2m-1)\left(\frac{1}{2m}\right)\left(\frac{2}{2m}\right)\left(\frac{3}{2m}\right)\ldots\left(\frac{2n-1}{2m}\right)$$

vnde

vnde pro exponente $2n$ erit

$$2.\,4.\,6\ldots(2m-2)\left(\tfrac{2}{2m}\right)\left(\tfrac{4}{2m}\right)\left(\tfrac{6}{2m}\right)\ldots\left(\tfrac{2n-2}{2m}\right)=$$
$$1.\,3.\,5\ldots(2m-1)\left(\tfrac{1}{2m}\right)\left(\tfrac{3}{2m}\right)\left(\tfrac{5}{2m}\right)\ldots\left(\tfrac{2n-1}{2m}\right)$$

Simili modo ſi communis diuiſor ſit 3 pro exponente $3n$ reperietur

$$3^2.6^2.9^2\ldots\ldots(3m-3)^2\left(\tfrac{3}{3m}\right)^2\left(\tfrac{6}{3m}\right)^2\left(\tfrac{9}{3m}\right)^2\ldots\left(\tfrac{3n-3}{3m}\right)^2=$$
$$1.2.4.5\ldots(3m-2)(3m-1)\left(\tfrac{1}{3m}\right)\left(\tfrac{2}{3m}\right)\left(\tfrac{4}{3m}\right)\left(\tfrac{5}{3m}\right)\ldots\left(\tfrac{3n-1}{3m}\right)$$

quae aequatio concinnius ita exhiberi poteſt:

$$\frac{1.\;2\;\;4.\;5.\;7.\;8.\;10\ldots\ldots\ldots(3m-2)(3m-1)}{3^2.\qquad 6^2.\qquad 9^2\ldots\ldots\ldots(3m-3)^2}=$$
$$\frac{\left(\tfrac{3}{3m}\right)^2\qquad\left(\tfrac{6}{3m}\right)^2\ldots\ldots\left(\tfrac{3n-3}{3m}\right)^2}{\left(\tfrac{1}{3m}\right)\left(\tfrac{2}{3m}\right)\left(\tfrac{4}{3m}\right)\left(\tfrac{5}{3m}\right)\left(\tfrac{7}{3m}\right)\ldots\ldots\ldots\left(\tfrac{3n-2}{3m}\right)\left(\tfrac{3n-1}{3m}\right)}.$$

In genere autem ſi communis diuiſor ſit d et exponens dn habebitur.

$$\left[d.2d.3d\ldots(dm-d)\left(\tfrac{d}{dm}\right)\left(\tfrac{2d}{dm}\right)\left(\tfrac{3d}{dm}\right)\ldots\ldots\left(\tfrac{dn-d}{dm}\right)\right]^d=$$
$$1.\,2.\,3.\,4\ldots(dm-1)\left(\tfrac{1}{dm}\right)\left(\tfrac{2}{dm}\right)\left(\tfrac{3}{dm}\right)\ldots\ldots\left(\tfrac{dn-1}{dm}\right)$$

quae aequatio facile ad quosuis caſus accommodari poteſt vnde ſequens Theorema notari meretur.

Theorema.

59. Si α fuerit diuiſor communis numerorum m et n haecque formula $\left(\frac{p}{q}\right)$ denotet valorem inte-

 gralis

gralis $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ ab $x=0$ vsque ad $x=1$ extensi, erit

$$[\alpha . 2\alpha . 3\alpha \ldots (m-\alpha)(\tfrac{\alpha}{m})(\tfrac{2\alpha}{m})(\tfrac{3\alpha}{m})\ldots(\tfrac{n-\alpha}{m})]^{\alpha} =$$

$$1.\ 2.\ 3 \ldots (m-1)(\tfrac{1}{m})(\tfrac{2}{m})(\tfrac{3}{m})\ldots(\tfrac{n-1}{m}).$$

Demonſtratio.

Ex praecedente ſcholio veritas huius theorematis perſpicitur, cum enim ibi diuiſor communis eſſet $= d$, binique numeri propoſiti dm et dn horum loco hic ſcripſi m et n loco diuiſoris eorum autem d litteram α quam diuiſoris rationem aequalitas enunciata ita complectitur, vt in progreſſione arithmetica α, 2α, 3α, etc. continuata occurrere aſſumantur ipſi numeri m et n ideoque etiam $m-\alpha$ et $n-\alpha$. Ceterum fateri cogor hanc demonſtrationem vtpote inductioni potiſſimum innixam, neutiquam pro rigoroſa haberi poſſe: cum autem nihilominus de eius veritate ſimus conuicti, hoc theorema eo maiori attentione dignum videtur, interim tamen nullum eſt dubium, quin vberior huiusmodi formularum integralium euolutio tandem perfectam demonſtrationem ſit largitura quod autem iam ante nobis hanc veritatem perſpicere licuerit, inſigne hinc ſpecimen analyticae inueſtigationis elucet.

Coroll.

Coroll. 1.

69. Si loco fignorum adhibitorum ipfas formulas integrales fubftituamus, theorema noftrum ita fe habebit vt fit:

$$\alpha.2\alpha.3\alpha\ldots(m-\alpha)\int\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}.\int\frac{x^{2\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}\ldots\ldots\int\frac{x^{n-\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}=$$

$$\sqrt[\alpha]{}\,1.2.3\ldots(m-1)\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}.\int\frac{x\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}\ldots\ldots\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}.$$

Coroll. 2.

61 Vel fi ad abbreuiandum ftatuamus $\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}} = X$ erit

$$\alpha\,2\alpha.3\alpha\ldots(m-\alpha)\int\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{X}.\int\frac{x^{2\alpha-1}\,dx}{X}\ldots\ldots\int\frac{x^{n-\alpha-1}dx}{X}=$$

$$\sqrt[\alpha]{}\,1.2.3\ldots(m-1)\int\frac{dx}{X}.\int\frac{x\,dx}{X}.\int\frac{x^2\,dx}{X}\ldots\ldots\int\frac{x^{n-2}\,dx}{X}.$$

Theorema generale.

62. Si binorum numerorum m et n diuifores communes fint α, β, γ etc. formulaque $(\frac{p}{q})$ denotet valorem integralis $\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ ab $x=0$ ad $x=1$ extenfi fequentes expreffiones ex huiusmodi formulis integralibus formatae inter fe erunt aequales:

R 3 [$\alpha.2\alpha.$

$$[\alpha.\ 2\alpha.\ 3\alpha \ldots\ldots (m-\alpha)(\tfrac{\alpha}{m})(\tfrac{2\alpha}{m})(\tfrac{3\alpha}{m}) \ldots\ldots (\tfrac{n-\alpha}{m})]^{\alpha} =$$
$$[6.\ 2 6.\ 3 6 \ldots\ldots (m-6)(\tfrac{6}{m})(\tfrac{2 6}{m})(\tfrac{3 6}{m}) \ldots\ldots (\tfrac{n-6}{m})]^{6} =$$
$$[\gamma.\ 2\gamma.\ 3\gamma \ldots\ldots (m-\gamma)(\tfrac{\gamma}{m})(\tfrac{2\gamma}{m})(\tfrac{3\gamma}{m}) \ldots\ldots (\tfrac{n-\gamma}{m})]^{\gamma} \text{etc.}$$

Demonſtratio.

Ex praecedente Theoremate huius veritas manifeſto ſequitur cum quaelibet harum expreſſionum ſeorſim aequetur huic:

$$1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (m-1)(\tfrac{1}{m})(\tfrac{2}{m})(\tfrac{3}{m}) \ldots\ldots (\tfrac{n-1}{m})$$

quae vnitati vtpote minimo communi diuiſori numerorum m et n conuenit. Tot igitur huiusmodi expreſſiones inter ſe aequales exhiberi poſſunt, quot fuerint diuiſores communes binorum numerorum m et n.

Coroll. 1.

63. Cum ſit haec formula $(\frac{n}{m}) = \frac{1}{m}$, ideoque; $m(\frac{n}{m}) = 1$; expreſſiones noſtrae aequales ſuccinctius hoc modo repraeſentari poſſunt:

$$[\alpha.\ 2\alpha.\ 3\alpha \ldots\ldots m(\tfrac{\alpha}{m})(\tfrac{2\alpha}{m})(\tfrac{3\alpha}{m}) \ldots\ldots (\tfrac{n}{m})]^{\alpha} =$$
$$[6.\ 2 6.\ 3 6 \ldots\ldots m(\tfrac{6}{m})(\tfrac{2 6}{m})(\tfrac{3 6}{m}) \ldots\ldots (\tfrac{n}{m})]^{6} =$$
$$[\gamma.\ 2\gamma.\ 3\gamma \ldots\ldots m(\tfrac{\gamma}{m})(\tfrac{2\gamma}{m})(\tfrac{3\gamma}{m}) \ldots\ldots (\tfrac{n}{m})]^{\gamma}.$$

Etſi enim hic factorum numerus eſt auctus, tamen ratio compoſitionis facilius in oculos incurrit.

Coroll.

Coroll. 2.

64. Si ergo ſit $m = 6$ et $n = 12$ ob horum numerorum diuiſores communes 6, 3, 2, 1 quatuor ſequentes formae inter ſe aequales habebuntur:

$$\left[6\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{12}{6}\right)\right]^{6} = \left[3.\ 6\left(\tfrac{3}{6}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{9}{6}\right)\left(\tfrac{12}{6}\right)\right]^{3} =$$

$$\left[2.\ 4.\ 6\left(\tfrac{2}{6}\right)\left(\tfrac{4}{6}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{8}{6}\right)\left(\tfrac{10}{6}\right)\left(\tfrac{12}{6}\right)\right]^{2} =$$

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{2}{6}\right)\left(\tfrac{3}{6}\right)\ldots\left(\tfrac{12}{6}\right).$$

Coroll. 3.

65. Si vltima cum penultima combinetur, naſcetur haec aequatio:

$$\frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6} = \frac{\left(\tfrac{2}{6}\right)\left(\tfrac{4}{6}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{8}{6}\right)\left(\tfrac{10}{6}\right)\left(\tfrac{12}{6}\right)}{\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{3}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right)\left(\tfrac{9}{6}\right)\left(\tfrac{11}{6}\right)}$$

vltima autem cum antepenultima comparata praebet:

$$\frac{1.\ 2.\ 4.\ 5}{3.\ 3.\ 6.\ 6} = \frac{\left(\tfrac{3}{6}\right)\left(\tfrac{3}{6}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{6}{6}\right)\left(\tfrac{9}{6}\right)\left(\tfrac{9}{6}\right)\left(\tfrac{12}{6}\right)\left(\tfrac{12}{6}\right)}{\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{2}{6}\right)\left(\tfrac{4}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right)\left(\tfrac{8}{6}\right)\left(\tfrac{10}{6}\right)\left(\tfrac{11}{6}\right)}.$$

Scholion.

66. Infinitae igitur hinc conſequuntur relationes inter formulas integrales formae:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \left(\tfrac{p}{q}\right)$$

quae eo magis ſunt notatu dignae, quod ſingulari prorſus methodo ad eas hic ſumus perducti. Ac ſi quis de earum veritate adhuc dubitet, obſeruationes meas circa has formulas integrales conſulat, indeque pro

pro quouis casu oblato de veritate facile conuincetur. Etsi autem illa tractatio huic confirmandae inseruit, tamen relationes hic erutae eo maioris sunt momenti, quod in iis certus ordo cernitur, eaeque per omnes classes, quantumuis exponentem n accipere lubeat, facili negotio continuentur, in priori vero tractatione calculus pro classibus altioribus continuo fiat operosior et intricatior.

SVPPLEMENTVM
continens demonstrationem
Theorematis §. 53. propositi.

Demonstrationem hanc altius peti conuenit; sumatur scilicet aequatio §. 25. data, quae posito $f = 1$ et mutatis litteris est:

$$\frac{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\nu-1}.\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\mu-1}}{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\mu+\nu-1}} = \varkappa\int\frac{x^{\varkappa\mu-1}\,dx}{(1-x^{\varkappa})^{1-\nu}}$$

eaque per reductiones notas hac forma repraesentetur:

$$\frac{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\nu}.\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\mu}}{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\mu+\nu}} = \frac{\varkappa\mu\nu}{\mu+\nu}\int\frac{x^{\varkappa\mu-1}\,dx}{(1-x^{\varkappa})^{1-\nu}}.$$

Statuatur nunc $\nu = \frac{m}{n}$ et $\mu = \frac{\lambda}{n}$ tum vero $\varkappa = n$ vt habeamus:

$$\frac{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{m}{n}}.\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{\lambda}{n}}}{\int dx\,(l\frac{1}{x})^{\frac{\lambda+m}{n}}} = \frac{\lambda m}{\lambda+m}\int\frac{x^{\lambda-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^{n})^{n-m}}}$$

qua

quae breuitatis gratia, more fupra vfitato, ita concinne referatur:

$$\frac{[\frac{m}{n}][\frac{\lambda}{n}]}{[\frac{\lambda+m}{n}]} = \frac{\lambda m}{\lambda+m}\cdot\left(\frac{\lambda}{m}\right)$$

Iam loco λ fucceffiue fcribantur numeri $1, 2, 3, 4 \ldots n$ omnesque hae aequationes, quarum numerus eft $= n$ in fe inuicem ducantur, et aequatio refultans erit:

$$[\tfrac{m}{n}]^n \frac{[\frac{1}{n}][\frac{2}{n}][\frac{3}{n}]\ldots\ldots\ldots[\frac{n}{n}]}{[\frac{m+1}{n}][\frac{m+2}{n}][\frac{m+3}{n}]\ldots[\frac{m+n}{n}]} =$$

$$m^n\cdot\frac{1}{m+1}\cdot\frac{2}{m+2}\cdot\frac{3}{m+3}\ldots\ldots\frac{n}{m+n}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right) =$$

$$m^n\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots\ldots m}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+m)}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\ldots\left(\frac{n}{m}\right).$$

Simili autem modo pars prior transformetur vt fit

$$[\tfrac{m}{n}]^n\cdot\frac{[\frac{1}{n}][\frac{2}{n}][\frac{3}{n}]\ldots\ldots\ldots[\frac{m}{n}]}{[\frac{n+1}{n}][\frac{n+2}{n}][\frac{n+3}{n}]\ldots\ldots[\frac{n+m}{n}]}$$

cuius conuenientia cum forma praecedente multiplicando per crucem, vt aiunt, fponte fe prodit. Cum vero ex natura harum formularum fit

$$[\tfrac{n+1}{n}] = \tfrac{n+1}{n}[\tfrac{1}{n}];\ [\tfrac{n+2}{n}] = \tfrac{n+2}{n}[\tfrac{2}{n}];\ [\tfrac{n+3}{n}] = \tfrac{n+3}{n}[\tfrac{3}{n}]\text{ etc.}$$

ob harum formularum numerum $= m$, euadet haec prior pars:

$$[\tfrac{m}{n}]^n\cdot\frac{n^m}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+m)}$$

quae cum aequalis fit parti alteri ante exhibitae:

$$m^n\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots m}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+m)}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\ldots\left(\frac{n}{m}\right)$$

adipiſcimur hanc aequationem:

$$\left[\frac{m}{n}\right]^n = \frac{m^n}{n^m} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)$$

ita vt ſit

$$\left[\frac{m}{n}\right] = m \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}{n^m}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)}$$

quae cum propoſita in §. 53. ob $\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{m}$ omnino congruit, ex quo eius veritas nunc quidem ex principiis certiſſimis eſt euicta.

Demonſtratio Theorematis
§. 59. propoſiti.

Etiam hoc Theorema firmiori demonſtratione indiget, quam ex aequalitate ante ſtabilita:

$$\frac{\left[\frac{m}{n}\right] \cdot \left[\frac{\lambda}{n}\right]}{\left[\frac{\lambda+m}{n}\right]} = \frac{\lambda m}{\lambda + m}\left(\frac{\lambda}{m}\right)$$

ita adorno. Exiſtente α communi diuiſore numerorum m et n, loco λ ſucceſſiue ſcribantur numeri α, 2α, 3α etc. vsque ad n, quorum multitudo eſt $= \frac{n}{\alpha}$ atque omnes aequalitates hoc modo reſultantes in ſe inuicem ducantur, vt prodeat haec aequatio

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{\left[\frac{\alpha}{n}\right]\left[\frac{2\alpha}{n}\right]\left[\frac{3\alpha}{n}\right]\ldots\ldots\left[\frac{n}{n}\right]}{\left[\frac{m+\alpha}{n}\right]\left[\frac{m+2\alpha}{n}\right]\left[\frac{m+3\alpha}{n}\right]\ldots\left[\frac{m+n}{n}\right]} =$$

$$m^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{\alpha}{m+\alpha} \cdot \frac{2\alpha}{m+2\alpha} \cdot \frac{3\alpha}{m+3\alpha} \ldots \frac{n}{m+n}\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right).$$

Iam

Iam prior pars in hanc formam ipsi aequalem transmutetur:

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{\left[\frac{\alpha}{n}\right]\left[\frac{2\alpha}{n}\right]\left[\frac{3\alpha}{n}\right]\ldots\ldots\ldots\left[\frac{m}{n}\right]}{\left[\frac{n+\alpha}{n}\right]\left[\frac{n+2\alpha}{n}\right]\left[\frac{n+3\alpha}{n}\right]\ldots\left[\frac{n+m}{n}\right]}$$

quae ob $\left[\frac{n+\alpha}{n}\right] = \frac{n+\alpha}{n}\left[\frac{\alpha}{n}\right]$ sicque de ceteris reducitur ad hanc:

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{n}{n+\alpha} \cdot \frac{n}{n+2\alpha} \cdot \frac{n}{n+3\alpha} \cdots\cdots \frac{n}{n+m}.$$

Posterior vero aequationis pars simili modo transformatur in:

$$m^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{\alpha}{n+\alpha} \cdot \frac{2\alpha}{n+2\alpha} \cdot \frac{3\alpha}{n+3\alpha} \cdots \frac{m}{n+m}\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)$$

vnde enascitur haec aequatio:

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{\frac{n}{\alpha}} n^{\frac{m}{\alpha}} = m^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha \ldots m\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)$$

hincque

$$\left[\frac{m}{n}\right] = m \sqrt[n]{\frac{1}{m^n}}\left(\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha \ldots m\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{\alpha}$$

quae expressio cum praecedente comparata praebet hanc aequationem:

$$\left(\alpha, 2\alpha, 3\alpha \ldots m\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)\right)^{\alpha} =$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right)$$

quod de omnibus diuisoribus communibus binorum numerorum m et n est intelligendum.

PROBLEMATIS CVIVSDAM GEOMETRICI PRORSVS SINGVLARIS EVOLVTIO.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quaestionem hic geometricam ad examen sum reuocaturus quae cum ad genus adhuc nondum tractatum pertineat eo maiore attentione digna videtur, quod solutio quam Analysis suppeditat, ita sit comparata, vt ex ea vix intelligi queat, vtrum illi vnica satisfaciat linea curua an plures ac fortasse innumerabiles. Neque vero memini alia huiusmodi problemata a Geometris esse considerata quae tali incertitudini sint obnoxia, vt inuenta adeo solutione analytica ancipites haereamus, vtrum ad genus determinatarum quaestionum, an indeterminatarum sint referenda. Quare non dubito, quin euolutio quaestionis, quam hic sum institurus, occasionem sit praebitura fines cognitionis nostrae analyticae haud mediocriter proferendi.

2. Notissima autem circuli proprietas, qua recta angulum a binis tangentibus formatum bisecans circulum normaliter traiicit, quaestionem hic tractandam suppeditauit.

Pro-

Propofita fcilicet recta pofitione data A B *cius-modi quaeritur curua* A m M, *vt ducta ad eius punctum quodcunque* M *tangente* M T *rectae illi* A B *in* T *occurrente recta* T C *angulum* A T M *bifecans eandem curuam in* m *normaliter traiiciat.* Tab II. Fig. 2.

Manifeftum igitur eft huic quaeftioni fatisfacere circulum quemcunque rectam pofitione datam A B alicubi tangentem; et cum tam locus contactus quam magnitudo circuli arbitrio noftro relinquatur, folutiones quidem innumerabiles inde nafcuntur, quae tamen omnes, quoniam eadem fpecie continentur, vnam quafi folutionem conftituere funt cenfendae. Ex quo praecipuum huius quaeftionis momentum in hoc verfatur, num praeter circulos aliae dentur lineae curuae, in quas eadem proprietas competat.

3. Mentem ergo a circulo abftrahentes quaeftionem propofitam ita aggrediamur, vt analytice generatim in eas lineas curuas inquiramus, quae proprietate memorata fint praeditae. Methodus autem hoc problema refoluendi ideo haud parum videtur recondita, quod bina puncta M et *m*, quorum nexus non fatis definitur, ad eandem curuam fint referenda, dum pro altero M recta tangens pro altero vero *m* normalis ad curuam confiderari debent quas binas rectas M T et *m* T ita in recta data AB concurrere neceffe eft, vt ifta *m* T angulum A T M bifariam fecet. Neque vero haec birorum punctorum M et *m* relatio eft reciproca, vti in plerisque aliis huiusmodi quaeftionibus vfu venit, vbi ex

 certa

certa quadam binorum punctorum relatione naturam curuae inuestigari oportet.

4. Quo igitur indolem binorum punctorum m et M ad similitudinem perducamus, ad m quoque tangentem concipiamus $m\,t$ rectae datae $A\,B$ in t occurrentem, ac iam manifestum est relationem inter lineas $A\,t$ et $t\,m$ eadem aequatione exprimi oportere, ac relationem inter rectas $A\,T$ et $T\,M$, vbi ergo videndum est, quomodo hae binae relationes inter se connectantur. Hunc in finem consideretur angulus $B\,t\,m$, qui vocetur $= \omega$, et ob $T\,m\,t$ rectum habebimus angulum $A\,T\,m = 90^\circ - \omega$, cui cum per conditionem problematis aequalis esse debeat angulus $M\,T\,m$, erit angulus $M\,T\,B = 2\,\omega$, vnde solutio eo reuocatur, vt curuae punctum M eodem modo ex angulo $2\,\omega$ determinetur, quo punctum m ex angulo ω determinatur.

5. Cum igitur posito angulo $B\,t\,m = \omega$ sit angulus $B\,T\,M = 2\,\omega$, vocemus rectas tangentes $m\,t = t$ et $M\,T = T$, ac nunc perspicuum est, qualis fuerit functio quantitas t ipsius ω, talem functionem esse debere quantitatem T ipsius $2\,\omega$; haecque est conditio ob legem continuitatis requisita qua efficitur vt bina puncta m et M ad eandem lineam curuam continuam referantur. Simili vero modo cum etiam recta $A\,t$ tanquam functio anguli $B\,t\,m = \omega$ spectari possit, necesse est vt recta $A\,T$ simils omnino sit functio anguli dupli $B\,T\,M = 2\,\omega$. Harum autem rectarum $A\,t$ et $A\,T$ differentia $T\,t$, quia

quia ob triangulum $t\,m\,T$ rectangulum esse debet $T\,t = \frac{t}{cos.\,\omega}$, ex hac ipsa conditione solutio problematis erit deducenda. Ceterum hic notari conueniet angulum $B\,t\,m = \omega$ designare amplitudinem arcus $A\,m$, ita vt arcus $A\,M$ amplitudo illius sit dupla.

6. Ad quaestionem itaque resoluendam dispiciamus, quomodo per angulum $B\,t\,m = \omega$ et tangentem $t\,m = t$ interuallum $A\,t$ in recta positione data $A\,B$ determinetur, vbi quidem perinde est vbi punctum fixum A accipiatur. Ducta igitur curuae tangente proxima $\mu\,\tau$, vt sit angulus $B\,\tau\,\mu = \omega + d\omega$, ideoque angulus $t\,\mu\,\tau = d\,\omega$, vnde centro m vel μ descripto arculo elementari $t\,\theta$ radio $\mu\,\tau$ producto in θ occurrente, erit $t\,\theta = t\,d\,\omega$, hincque ob $\theta\,t\,\tau = 90° - \omega$ fit $t\,\tau = \frac{t\,d\,\omega}{sin.\,\omega}$, quod est incrementum interualli $A\,t$ ita vt hinc concludamus $A\,t = \int \frac{t\,d\,\omega}{sin.\,\omega}$. Qua expressione ad priorem figuram translata, si pro t scribamus T et loco anguli ω eius duplum $2\,\omega$, lex continuitatis praebet Tab. II. Fig. 3.

$$A\,T = \int \frac{2\,T\,d\,\omega}{sin.\,2\,\omega} = \int \frac{T\,d\,\omega}{sin.\,\omega\; cos.\,\omega},$$

vnde elicitur interuallum

$$T\,t = \int \frac{T\,d\,\omega}{sin.\,\omega\; cos.\,\omega} - \int \frac{t\,d\,\omega}{sin.\,\omega}$$

quantitati $\frac{t}{cos.\,\omega}$ aequandum.

7. Sumtis ergo differentialibus hanc adipiscimur aequationem:

$$\frac{T\,d\,\omega}{sin.\,\omega\; cos.\,\omega} - \frac{t\,d\,\omega}{sin.\,\omega} = \frac{d\,t}{cos.\,\omega} + \frac{t\,d\,\omega\, sin.\,\omega}{cos.\,\omega^2}$$

quae

quae reducitur ad hanc

$$\frac{T\,d\,\omega}{\sin.\omega\,\cos.\omega} = \frac{d\,t}{\cos.\omega} + \frac{t\,d\,\omega}{\sin.\omega\,\cos.\omega^2}$$

indeque ad iſtam:

$$T\,\cos.\,\omega = t + \frac{d\,t}{d\,\omega}\,\sin.\,\omega\,\cos.\,\omega.$$

Quocirca quaeſtio iam huc eſt perducta, vt pro t eiusmodi functio ipſius ω ſit inueſtiganda vt ſi pro T ſimilis functio ipſius $2\,\omega$ ſcribatur, aequationi modo inuentae ſatisfiat. Quemadmodum autem eiusmodi conditiones ſint adimplendae, methodus certa adhuc deſideratur, imprimis ſi ſolutiones generales poſtulentur. Quamobrem haud inutile erit aequationem inuentam in plurimas alias formas transfundere, ex quibus quae fuerit ſimpliciſſima, facillime quoque poterit tractari.

8. Angulum quidem ω perpetuo in calculo conſeruari oportet quia per eum quantitates ad bina puncta m et M referendae commodiſſime definiuntur. Ponamus igitur ipſa interualla $A\,t = x$ et $A\,T = X$, ita vt iam ſimili modo X talis debeat eſſe functio ipſius $2\,\omega$, qualis x fuerit ipſius ω. Quia ergo habemus $\int \frac{T\,d\,\omega}{\sin.\,\omega\,\cos.\,\omega} = X$ et $\int \frac{t\,d\,\omega}{\sin.\,\omega} = x$, hinc fit $t = \frac{d\,x\,\sin.\,\omega}{d\,\omega}$ et nunc ſolutio problematis perducitur ad hanc aequationem:

$$X - x = \frac{d\,x}{d\,\omega}\,\text{tang.}\,\omega \text{ ſeu}$$

$$X\,\cos.\,\omega = \frac{d\,x}{d\,\omega}\,\sin.\,\omega + x\,\cos.\,\omega.$$

Quodſi

Quodſi porro ponamus x ſin. $\omega = y$ ſimilique modo X ſin. $2\,\omega = Y$ vt ſit X coſ. $\omega = \frac{Y}{2\,ſin.\,\omega}$, haec aequatio prodit ſimplicior:

$$\frac{Y}{2\,ſin.\,\omega} = \frac{d\,y}{d\,\omega} \text{ ſeu } Y = \frac{2\,d\,y}{d\,\omega}\,ſin.\,\omega$$

cui aequationi ita ſatisfieri oportet, vt qualis y fuerit functio ipſius ω, talis Y ſit functio ipſius $2\,\omega$.

9. Poſſumus quoque pro puncto m ipſam normalem m T in calculum introducere, poſita enim $m\,T = p$, et normali puncto M conueniente $= P$, quia eſt $p = t$ tang. ω, erit ſimili modo $P = T$ tang. $2\,\omega$ et ob $t = \frac{p\,coſ.\,\omega}{ſin.\,\omega}$ et $T = \frac{P\,coſ.\,2\,\omega}{ſin.\,2\,\omega}$ aequatio ſolutionem continens abit in hanc formam:

$$\int \frac{2\,P\,d\,\omega\,coſ.\,2\,\omega}{(ſin.\,2\,\omega)^2} - \int \frac{p\,d\,\omega\,coſ.\,\omega}{(ſin.\,\omega)^2} = \frac{p}{ſin.\,\omega}$$

quae differentiata dat:

$$\frac{2\,P\,d\,\omega\,coſ.\,2\,\omega}{(ſin.\,2\,\omega)^2} - \frac{p\,d\,\omega\,coſ.\,\omega}{(ſin.\,\omega)^2} = \frac{d\,p}{ſin.\,\omega} - \frac{p\,d\,\omega\,coſ.\,\omega}{(ſin.\,\omega)^2}$$

ſeu $P\,d\,\omega\,coſ.\,2\,\omega = 2\,dp\,ſin.\,\omega\,coſ.\,\omega^2 = dp\,coſ.\,\omega\,ſin.\,2\,\omega$

ita vt ſit $P = \frac{d\,p}{d\,\omega}\,coſ.\,\omega\,tang.\,2\,\omega$.

10. In computum etiam duci poteſt ipſe arcus curuae A m, qui ponatur $= s$, ita vt relatio inter hunc arcum A $m = s$ et amplitudinem eius ω ſit definienda. Ex figura autem 2, hoc facillime praeſtabitur, cum enim poſita tangente $m\,t = t$ ſit $\mu\,\tau = t + d\,t$ et $m\,\mu = d\,s$, ob $t\,\theta = t\,d\,\omega$ hincque $\tau\,\theta = \frac{t\,d\,\omega\,coſ.\,\omega}{ſin.\,\omega}$ erit $\mu\,\theta = t + d\,t + \frac{t\,d\,\omega\,coſ.\,\omega}{ſin.\,\omega}$, Tab. II. Fig. 3.

quae linea ipsi $\mu\, t = t + d\,s$ aequalis statui debet vnde colligitur:

$$d\,s = d\,t + \frac{t\,d\,\omega\,\mathrm{cos.}\,\omega}{\mathrm{sin.}\,\omega} = \frac{d.\,t\,\mathrm{sin.}\,\omega}{\mathrm{sin.}\,\omega}$$

Tab. II. Fig. 2. ideoque $t = \frac{1}{\mathrm{sin.}\,\omega} \int d\,s\ \mathrm{sin.}\,\omega$. Quare si simili modo ponatur arcus $AM = S$ tangente existente $MT = T$, habebimus

$$T = \frac{1}{\mathrm{sin.}\,2\,\omega} \int dS\,\mathrm{sin.}\,\omega = \frac{1}{\mathrm{sin.}\,\omega\,\mathrm{cos.}\,\omega} \int dS\,\mathrm{sin.}\,\omega\,\mathrm{cos.}\,\omega\ ,$$

quos valores in aequatione supra inuenta $T\,\mathrm{cos.}\,\omega = t + \frac{d\,t}{d\,\omega}\,\mathrm{sin.}\,\omega\,\mathrm{cos.}\,\omega$ substitui oportet, ex quo conficitur

$$\frac{1}{\mathrm{sin.}\,\omega} \int dS\,\mathrm{sin.}\,\omega\,\mathrm{cos.}\,\omega = \frac{1}{\mathrm{sin.}\,\omega} \int d\,s\,\mathrm{sin.}\,\omega + \frac{d\,s}{d\,\omega}\,\mathrm{sin.}\,\omega\,\mathrm{cos.}\,\omega$$
$$- \frac{\mathrm{cos.}\,\omega^2}{\mathrm{sin.}\,\omega} \int d\,s\,\mathrm{sin.}\,\omega$$

seu $\int dS\,\mathrm{sin.}\,\omega\,\mathrm{cos.}\,\omega = \mathrm{sin.}\,\omega^2 \int d\,s\,\mathrm{sin.}\,\omega + \frac{d\,s}{d\,\omega}\,\mathrm{sin.}\,\omega^2\,\mathrm{cos.}\,\omega$.

11. Hac aequatione differentiata prodit

$$dS\,\mathrm{sin.}\,\omega\,\mathrm{cos.}\,\omega = 2\,d\,\omega\,\mathrm{sin.}\,\omega\,\mathrm{cos.}\,\omega \int d\,s\,\mathrm{sin.}\,\omega + d\,s\,\mathrm{sin.}\,\omega^3$$
$$+ \frac{d\,d\,s}{d\,\omega}\,\mathrm{sin.}\,\omega^2\,\mathrm{cos.}\,\omega + 2\,d\,s\,\mathrm{sin.}\,\omega\,\mathrm{cos.}\,\omega^2 - d\,s\,\mathrm{sin.}\,\omega^3$$

ac facta diuisione per $\mathrm{sin.}\,\omega\,\mathrm{cos.}\,\omega$ fit

$$dS = 2\,d\,\omega \int d\,s\,\mathrm{sin.}\,\omega + 2\,d\,s\,\mathrm{cos.}\,\omega + \frac{d\,d\,s}{d\,\omega}\,\mathrm{sin.}\,\omega$$

Denuo ergo differentiatione instituta nanciscimur:

$$ddS = 2\,d\,\omega\,d\,s\,\mathrm{sin.}\,\omega + 2\,d\,d\,s\,\mathrm{cos.}\,\omega - 2\,d\,\omega\,d\,s\,\mathrm{sin.}\,\omega + \frac{d^3\,s}{d\,\omega}\,\mathrm{sin.}\,\omega$$
$$+ d\,d\,s\,\mathrm{cos.}\,\omega$$

ideoque $d\,d\,S = 3\,d\,d\,s\,\mathrm{cos.}\,\omega + \frac{d^3\,s}{d\,\omega}\,\mathrm{sin.}\,\omega$

vbi quidem differentiale $d\,\omega$ pro constanti est sumtum. Huic aequationi satisfieri statim liquet, sumendo $\frac{d\,ds}{d\,\omega^2} = 0$ quia tum quoque fit $\frac{d\,d\,S}{d\,\omega^2} = 0$; hinc autem colli-

colligitur $s = a + b\,\omega$ ita vt arcus $Am = s$ fit amplitudini proportionalis, quae eſt notiſſima circuli proprietas.

12. Quodſi porro radius oſculi curuae in m ſtatuatur $= r$, in M vero $= R$, quoniam tum fit $ds = r\,d\omega$ et $dS = 2\,R\,d\omega$, aequationem modo inventam facile ad radios curuaturae traducimus, vnde reſultat

$$2\,dR = 3\,dr\,\mathrm{coſ.}\,\omega + \frac{ddr}{d\omega}\,\mathrm{ſin.}\,\omega$$

vbi multo magis perſpicuum eſt circulos ſatisfacere, cum ſumto radio oſculi conſtante conditio iſtius aequationis impleatur. Vlterius vero curuae $A\,m\,M$ euoluta induci poteſt, cuius radius oſculi pro puncto ex m nato ſi ponatur $= r'$, pro puncto autem ab M deriuato $= R'$, quia conſtat eſſe $dr = r'\,d\omega$ et $dR = 2\,R'\,d\omega$ prodit haec aequatio:

$$4\,R' = 3\,r'\,\mathrm{coſ.}\,\omega + \frac{dr'}{d\omega}\,\mathrm{ſin.}\,\omega.$$

Quaeſtio igitur noſtra iam huc eſt perducta vt iudicetur, num huic aequationi per alios valores praeter $r' = 0$ et $R' = 0$ ſatisfieri queat.

13. Cum ſit $ds = dt + \frac{t\,d\omega\,\mathrm{coſ.}\,\omega}{\mathrm{ſin.}\,\omega}$, erit radius oſculi curuae in m quem poſuimus

$$r = \frac{ds}{d\omega} = \frac{dt}{d\omega} + \frac{t\,\mathrm{coſ.}\,\omega}{\mathrm{ſin.}\,\omega},$$

et radius oſculi in M

$$R = \frac{dT}{2\,d\omega} + \frac{T\,\mathrm{coſ.}\,2\,\omega}{\mathrm{ſin.}\,2\,\omega},$$

 quibus

quibuscum normales ad curuam in m et M ductas et in C concurrentes comparemus. Quia vero est angulus $MTC = ATC = 90° - \omega$, ob $MT = T$ erit

$$MC = \frac{T \operatorname{cos}. \omega}{\operatorname{sin}. \omega} = \frac{t}{\operatorname{sin}. \omega} + \frac{dt}{d\omega} \operatorname{cos}. \omega$$

in subsidium vocando relationem inter tangentes $mt = t$ et $MT = T$ supra inuentam. Tum vero hinc porro habetur:

$$CT = \frac{T}{\operatorname{sin}. \omega} = \frac{t}{\operatorname{sin}. \omega \operatorname{cos}. \omega} + \frac{dt}{d\omega}:$$

vnde auferatur interuallum

$$Tm = t \operatorname{tang}. \omega = \frac{t \operatorname{sin}. \omega}{\operatorname{cos}. \omega}, \text{ vt remaneat}$$

$$mC = \frac{t \operatorname{cos}. \omega}{\operatorname{sin}. \omega} + \frac{dt}{d\omega},$$

ex quo perspicuum est hanc rectam mC ipsi radio osculi in m aequari, ideoque punctum C reperiri in euoluta curuae quaesitae.

14. Cum normalis mC vtpote radius osculi euolutam curuae quaesitae in C tangat, normalis vero MC per idem punctum transeat, ea hic euolutam secabit, nisi euoluta in vnicum punctum concentretur, vti euenit in circulo. Quare si praeter circulum aliae curuae nostrae quaestioni satisfaciant, earum euolutas ita comparatas esse oportet, vt si normalis mC euolutam tangat in C, normalis MC eandem hic secet producta vero alibi tangat, sicque necesse est, omnes euolutae tangentes eandem simul alicubi intersecare, quod quomodo in omnibus tangentibus contingere possit, haud perspicitur, nisi forte

forte spirales lineae miris spiris contortae, sint adhibendae. Summa autem difficultas huiusmodi mirabiles figuras concipiendi earum impossibilitatem minime arguit, neque hinc concludere licet praeter circulos nullas alias lineas curuas quaestioni satisfacere posse.

15. Quanquam autem vix vlla patet via aequationes inuentas resoluendi, tamen ea, quae videtur simplicissima $Y = \frac{2\,dy}{d\omega}$ sin. ω, pro qua est $x = \frac{y}{\sin.\omega}$ et

$$m\,t = t = \frac{dx\,\sin.\omega}{d\omega} = \frac{dy}{d\omega} - \frac{y\,\cos.\omega}{\sin.\omega}$$

vnde fit $ds = \frac{d\,dy}{d\omega} + y\,d\omega$ haud leue suppeditat argumentum, quo praeter circulos omnes aliae figurae excludi videntur. Si enim solutionem generalem quaerentes statuamus:

$$y = A - B\omega^2 + C\omega^4 - D\omega^6 + E\omega^8 - \text{etc.}$$
$$+ \mathfrak{A}\omega - \mathfrak{B}\omega^3 + \mathfrak{C}\omega^5 - \mathfrak{D}\omega^7 + \mathfrak{E}\omega^9 - \text{etc.}$$

vt sit ob principium continuitatis:

$$Y = A - 2^2 B\omega^2 + 2^4 C\omega^4 - 2^6 D\omega^6 + 2^8 E\omega^8 + \text{etc.}$$
$$+ 2\mathfrak{A}\omega - 2^3\mathfrak{B}\omega^3 + 2^5\mathfrak{C}\omega^5 - 2^7\mathfrak{D}\omega^7 + 2^9\mathfrak{C}\omega^9 - \text{etc.}$$

euidens est, tam potestates pares, quam impares seorsim definiri posse.

16. Ponamus breuitatis gratia

$$\sin.\omega = \omega - \alpha\omega^3 + \beta\omega^5 - \gamma\omega^7 + \delta\omega^9 - \text{etc. vt sit}$$
$$\alpha = \frac{1}{1.2.3};\ \beta = \frac{\alpha}{4.5};\ \gamma = \frac{\beta}{6.7};\ \delta = \frac{\gamma}{8.9};\ \text{etc.}$$

et pro potestatibus paribus, ob

$$\frac{dy}{d\omega} = -2B\omega + 4C\omega^3 - 6D\omega^5 + 8E\omega^7 - \text{etc.}$$

 aequa-

aequatio $\frac{2\,dy}{d\omega}$ fin. $\omega - Y = 0$ praebet hanc aequationem

$$\begin{array}{l}
0 = -4B\omega^2 + 8C\omega^4 - 12D\omega^6 + 16E\omega^8 - 20F\omega^{10} \\
\qquad\qquad\quad + 4\alpha B - 8\alpha C + 12\alpha D - 16\alpha E \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 4\beta B + 8\beta C - 12\beta D \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 4\gamma B - 8\gamma C \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 4\delta B \\
-A + 2^2 B - 2^4 C + 2^6 D - 2^8 E + 2^{10} F \text{ etc.}
\end{array}$$

vnde colligitur $A = 0$, tum vero per 4 diuidendo prodeunt hae aequalitates:

$$\begin{array}{l}
(2^2 - 2)C = \alpha B \\
(2^4 - 3)D = 2\alpha C + \beta B \\
(2^6 - 4)E = 3\alpha D + 2\beta C + \gamma B \\
(2^8 - 5)F = 4\alpha E + 3\beta D + 2\gamma C + \delta B \\
\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

17. Etfi hinc vix vllam legem progreffionis concinnam fperare licet, tamen praeter expectationem euenit, vt fumto $B = \frac{a}{1.2}$ fequentes eliciantur valores:

$$B = \frac{a}{1.2};\ C = \frac{a}{1.2.3.4};\ D = \frac{a}{1\ldots\ldots 6};\ E = \frac{a}{1\ldots\ldots 8} \text{ etc.}$$

fimilique modo pro poteftatibus imparibus reperitur:

$$\mathfrak{A} = b;\ \mathfrak{B} = \frac{b}{1.2.3};\ \mathfrak{C} = \frac{b}{1\ldots\ldots 5};\ \mathfrak{D} = \frac{b}{1\ldots\ldots 7} \text{ etc.}$$

quae feries cum per finus et cofinus fint fummabiles, colligitur fore $y = a$ cof. $\omega - a + b$ fin. ω; vnde concluditur

$$t = \frac{-a(1 - \text{cof.}\,\omega)}{\text{fin.}\,\omega} = -a \text{ tang.} \tfrac{1}{2}\omega \text{ et } \frac{dt}{d\omega} = r = -a,$$

ita vt curuae quaefitae radius ofculi vbique fit eiusdem magnitudinis ideoque curua circulus.

18.

18. Cum autem haec lex progreſſionis ex calculo perquam operoſo et moleſto per inductionem ſit concluſa, ne huic concludendi generi ſaepenumero fallaci nimium confidere videar, idem alio adhuc modo facilius euinci poteſt. Statuatur enim

$$y = A + B\,\text{coſ.}\,\omega + C\,\text{coſ.}\,3\,\omega + D\,\text{coſ.}\,5\,\omega + E\,\text{coſ.}\,7\,\omega + \text{etc.}$$

vbi quidem multipla paria omitto, vt quantitas $\frac{2\,dy}{d\omega}$ ſin. ω tantum multipla ſimilia anguli ω complectatur, qualia valor:

$$Y = A + B\,\text{coſ.}\,2\omega + C\,\text{coſ.}\,6\omega + D\,\text{coſ.}\,10\omega + E\,\text{coſ.}\,14\,\omega \text{ etc.}$$

continet. Cum igitur ſit

$$\frac{dy}{d\omega} = -B\,\text{ſin.}\,\omega - 3\,C\,\text{ſin.}\,3\,\omega - 5\,D\,\text{ſin.}\,5\,\omega - 7\,E\,\text{ſin.}\,7\omega - \text{etc.}$$

per -2 ſin. ω multiplicando abit $Y - \frac{2\,dy}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega = 0$ in

$$\begin{array}{llllll} B - B\,\text{coſ.}\,2\,\omega & -3\,C\,\text{coſ.}\,4\omega & -5\,D\,\text{coſ.}\,6\omega & -7\,E\,\text{coſ.}\,8\,\omega & -9\,F\,\text{coſ.}\,10\,\omega\,\text{etc.} & = 0 \\ \quad +3\,C & +5\,D & +7\,E & +9\,F & +11\,G & \\ +A+B & & +C & & +D & \end{array}$$

vnde primo patet eſſe $B = -A$, tum vero $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$, ſequentesque litteras omnes euaneſcere; ita vt ſit

$$y = A\,(1 - \text{coſ.}\,\omega).$$

19. Simili modo ſi ſtatuamus:

$$y = A + B\,\text{ſin.}\,\omega + C\,\text{ſin.}\,3\,\omega + D\,\text{ſin.}\,5\,\omega + E\,\text{ſin.}\,7\,\omega + F\,\text{ſin.}\,9\,\omega \text{ etc.}$$

hincque

$$\frac{dy}{d\omega} = B\,\text{coſ.}\,\omega + 3\,C\,\text{coſ.}\,3\,\omega + 5\,D\,\text{coſ.}\,5\,\omega + 7\,E\,\text{coſ.}\,7\,\omega \text{ etc.}$$

aequatio noſtra induet hanc formam:

$$0 = B$$

$$\begin{array}{llllll} 0 = B\,\text{fin.}\,2\omega & +3C\,\text{fin.}\,4\omega & +5D\,\text{fin.}\,6\omega & +7E\,\text{fin.}\,8\omega & +9F\,\text{fin.}\,10\omega & +\text{etc.} \\ \quad -3C & \quad -5D & \quad -7E & \quad -9F & \quad -11G & \\ -A-B & & \quad -C & & \quad -D & \end{array}$$

vbi fit $A = 0$, tum vero vt ante $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$ etc. ita vt his valoribus coniunctis habeatur

$$y = a\,(1 - \text{cof.}\,\omega) + b\,\text{fin.}\,\omega$$

quae eft ipfa folutio iam ante inuenta.

20. Haec autem folutio merito non fatis generalis videtur, cum ex valoribus ipfius y multipla paria anguli ω praeter neceffitatem reiecerimus; iis enim admiffis fi ftatuamus:

$$y = A + B\,\text{cof.}\,\omega + C\,\text{cof.}\,2\omega + D\,\text{cof.}\,3\omega + E\,\text{cof.}\,4\omega + F\,\text{cof.}\,5\omega\ \text{etc.}$$

vt fit

$$\frac{dy}{d\omega} = -B\,\text{fin.}\,\omega - 2C\,\text{fin.}\,2\omega - 3D\,\text{fin.}\,3\omega - 4E\,\text{fin.}\,4\omega - 5F\,\text{fin.}\,5\omega - \text{etc.}$$

fequens refultat aequatio:

$$\begin{array}{lllllll} 0 = B & +2C\,\text{cof.}\,\omega & -B\,\text{cof.}\,2\omega & -2C\,\text{cof.}\,3\omega & -3D\,\text{cof.}\,4\omega & -4E\,\text{cof.}\,5\omega & -5F\,\text{cof.}\,6\omega \\ & & \quad +3D & \quad +4E & \quad +5F & \quad +6G & \quad +7H \\ \quad +A & & \quad +B & & \quad +C & & \quad +D \end{array}$$

vbi iterum eft

$$B = -A;\ C = 0,\ D = 0,\ E = 0,\ F = 0,\ G = 0\ \text{etc.}$$

ita vt nunc quidem certum videatur, folutionem praecedentem latiffime patere, neque praeter circulos vllas alias curuas quaeftioni fatisfacere poffe. Quod enim hic de cofinibus eft oftenfum, idem fimili modo de finibus demonftratur.

21. Cum igitur superior inductio sit penitus confirmata, illae determinationes eo magis sunt notatu dignae quae huc redeunt, vt si fuerit:

$$2^2 C = 2C + \frac{B}{1.2.3}$$
$$2^4 D = 3D + \frac{2C}{1.2.3} + \frac{B}{1\ldots5}$$
$$2^6 E = 4E + \frac{3D}{1.2.3} + \frac{2C}{1\ldots5} + \frac{B}{1\ldots7}$$
$$2^8 F = 5F + \frac{4E}{1.2.3} + \frac{3D}{1\ldots5} + \frac{2C}{1\ldots7} + \frac{B}{1\ldots9}$$
etc.

tum istae quantitates ita determinentur, vt sit

$$B = \frac{a}{1.2};\; C = \frac{a}{1\ldots4};\; D = \frac{a}{1\ldots6};\; E = \frac{a}{1\ldots8}\text{ etc.}$$

qui valores, quemadmodum ex illis relationibus commode deriuentur, omnino accuratiorem disquisitionem mereri videntur.

22. Simili vero modo si ibi §. 15. statuatur:

$$y = \mathfrak{A}\omega - \mathfrak{B}\omega^3 + \mathfrak{C}\omega^5 - \mathfrak{D}\omega^7 + \mathfrak{E}\omega^9 - \text{etc. vt sit}$$
$$\frac{dy}{d\omega} = \mathfrak{A} - 3\mathfrak{B}\omega^2 + 5\mathfrak{C}\omega^4 - 7\mathfrak{D}\omega^6 + 9\mathfrak{E}\omega^8 - \text{etc.}$$

obtinetur ista aequatio

$$\begin{array}{rrrrrl}
0 = 2\mathfrak{A}\omega & - 6\mathfrak{B}\omega^3 & + 10\mathfrak{C}\omega^5 & - 14\mathfrak{D}\omega^7 & + 18\mathfrak{E}\omega^9 & - \text{etc.} \\
 & - 2\alpha\mathfrak{A} & + 6\alpha\mathfrak{B} & - 10\alpha\mathfrak{C} & + 14\alpha\mathfrak{D} & \\
 & & + 2\beta\mathfrak{A} & - 6\beta\mathfrak{B} & + 10\beta\mathfrak{C} & \\
 & & & - 2\gamma\mathfrak{A} & + 6\gamma\mathfrak{B} & \\
 & & & & + 2\delta\mathfrak{A} & \\
 & - 2\mathfrak{A} & + 2^3\mathfrak{B} & - 2^5\mathfrak{C} & + 2^7\mathfrak{D} & - 2^9\mathfrak{E}\text{ etc.}
\end{array}$$

 vnde

vnde nafcuntur hae determinationes:

$$2^2\mathfrak{B} = 3\mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{A}}{1.\,2.\,3}$$

$$2^4\mathfrak{C} = 5\mathfrak{C} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{1.\,2.\,3} + \frac{\mathfrak{A}}{1\ldots\ldots 5}$$

$$2^6\mathfrak{D} = 7\mathfrak{D} + \frac{5\,\mathfrak{C}}{1.\,2.\,3} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{1\ldots\ldots 5} + \frac{\mathfrak{A}}{1\ldots\ldots 7}$$

$$2^8\mathfrak{E} = 9\mathfrak{E} + \frac{7\,\mathfrak{D}}{1.\,2.\,3} + \frac{5\,\mathfrak{C}}{1\ldots\ldots 5} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{1\ldots\ldots 7} + \frac{\mathfrak{A}}{1\ldots\ldots 9}$$

etc.

quae euolutae fequentes fuppeditant valores:

$$\mathfrak{A} = b;\ \mathfrak{B} = \frac{b}{1.\,2.\,3};\ \mathfrak{C} = \frac{b}{1\ldots\ldots 5};\ \mathfrak{D} = \frac{b}{1\ldots\ldots 7}\ \text{etc.}$$

quae fimplex progreffionis lex nonnifi per multas ambages ex illis formulis deducitur, ideoque diftinctior euolutio maxime defideratur.

23. Neque vero hoc argumentum fatis validum videtur ad euincendum praeter circulum nullas alias lineas curuas quaeftioni noftrae fatisfacere. Cum enim aequationem $Y = \frac{2dy}{a\omega}$ fin. ω ita refolui oporteat, vt Y fiat talis functio ipfius 2ω, qualis y eft ipfius ω, refolutio hic adhibita naturam iftius aequationis minime exhaurire videtur, propterea quod pro y eiusmodi feriem affumfimus, in qua nonnifi poteftates ipfius ω, quarum exponentes funt numeri integri pofitiui, occurrunt; dum fortaffe etiam exponentes vel fracti vel negatiui, vel etiam irrationales atque adeo imaginarii locum habere poffent; imaginariis fcilicet fe mutuo deftruentibus. Quod num fieri poffit ftatuamus:

$$y = A\,\omega^\alpha + B\,\omega^\beta + C\,\omega^\gamma\ \text{etc.}$$

quorum

quorum exponentium primus α ſit minimus. Erit ergo

$$\frac{dy}{d\omega} = \alpha A \omega^{\alpha - 1} + \beta B \omega^{\beta - 1} \text{ etc.}$$

quae ſeries per

$$2 \,\text{ſin.}\, \omega = 2 \omega - \frac{2}{1.2.3} \omega^3 + \frac{2}{1.2\ldots 5} \omega^5 - \text{etc.}$$

multiplicata praebet hanc formam

$$\begin{aligned} &2 \alpha A \omega^{\alpha} + 2 \beta B \omega^{\beta} \text{ etc.} \\ &\quad - \frac{2 \alpha A}{1.2.3} \omega^{\alpha + 2} - \frac{2 \beta B}{1.2.3} \omega^{\beta + 2} - \text{etc.} \\ &\qquad + \frac{2 \alpha A}{1 \ldots 5} \omega^{\alpha + 4} + \text{etc.} \end{aligned}$$

ipſi $Y = 2^{\alpha} A \omega^{\alpha} + 2^{\beta} B \omega^{\beta} + 2^{\gamma} C \omega^{\gamma}$ etc. aequandam. Neceſſe ergo eſt, vt infimae poteſtates vtrinque ſint aequales, vnde fit $2^{\alpha} = 2 \alpha$, quod realiter duobus tantum modis fieri poteſt ſumendo vel $\alpha = 1$ vel $\alpha = 2$, ex quo ſeries ſupra aſſumtae totum negotium conficere videntur.

24. Cum autem nullum ſit dubium, quin aequatio $2^{\alpha} = 2 \alpha$ praeter has duas radices innumeras alias imaginarias complectatur, merito naſcitur ſuſpicio, ex iis quoque ſolutiones vtiles naſci poſſe. Neque igitur abs re fore arbitror methodum indicaſſe, qua etiam radices imaginarias huius aequationis proxime ſaltem definire liceat. Cum ergo α ſit numerus imaginarius, eius forma certo eſt huiusmodi

$$\alpha = \mu + \nu \sqrt{-1},$$

vnde fit

$2^{\alpha} = 2^{\mu} . 2^{\nu\sqrt{-1}} = 2^{\mu} (\text{coſ.} (\nu l 2) + \sqrt{-1}.\ \text{ſin.} (\nu l 2))$, cui

$$2 \alpha = 2 \mu + 2 \nu \sqrt{-1}$$

V 2 ita

ita aequale ſtatui debet vt partes reales et imaginariae ſeorſim aequentur: hinc ergo fit

$$2\mu = 2^\mu \operatorname{coſ.}(\nu\, l\, 2) \quad \text{et} \quad 2\nu = 2^\mu \operatorname{ſin.}(\nu\, l\, 2)$$

ideoque

$$4(\mu\mu + \nu\nu) = 2^{2\mu} \quad \text{et} \quad \nu = \sqrt{(2^{2\mu-2} - \mu\mu)}.$$

Ponamus $\frac{\mu}{2^{\mu-1}} = \operatorname{coſ.}\Phi$, et oritur $\nu = 2^{\mu-1}\operatorname{ſin.}\Phi = \mu \operatorname{tang.}\Phi$.

Cum igitur ſit $\operatorname{coſ.}(\nu\, l\, 2) = \frac{\mu}{2^{\mu-1}} = \operatorname{coſ}\Phi$, ſequitur fore $\nu\, l\, 2 = 2n\pi \pm \Phi$, denotante $2n\pi$ multiplum quodcunque totius circumferentiae. Quare habetur $\mu\, l\, 2.\operatorname{tang.}\Phi = 2n\pi \pm \Phi$ et $\mu = \frac{2n\pi \pm \Phi}{l\, 2.\, \operatorname{tang.}\Phi}$, qui valor cum illo ex formula $\mu = 2^{\mu-1}\operatorname{coſ.}\Phi$ oriundo conuenire debet Hoc autem ob n numerum arbitrarium dummodo integrum infinitis modis obtineri poſſe euidens eſt. Scilicet ſumendo $n = 1$ et ponendo $\mu = \frac{2\pi - \Phi}{l\, 2.\, \operatorname{tang.}\Phi}$, approximationibus aliquot inſtitutis colligitur angulus $\Phi = 61^\circ, 24', 24''$, hincque

$$\mu = 4{,}0980836 \quad \text{et} \quad \nu = 7{,}51850, \text{ ita vt ſit}$$
$$\alpha = \mu \pm \nu\sqrt{-1} = 4{,}0980836 \pm 7{,}51850.\sqrt{-1}.$$

25. Inuentis ergo huiusmodi valoribus imaginariis pro α, vt ſit $2^\alpha = 2\alpha$, talis forma pro y fingi debet

$$y = A\,\omega^\alpha - B\,\omega^{\alpha+2} + C\,\omega^{\alpha+4} - D\,\omega^{\alpha+6} + \text{etc.}$$

vnde fit

$$Y = 2\alpha A\omega^\alpha - 2^3\alpha B\omega^{\alpha+2} + 2^5\alpha C\omega^{\alpha+4} - 2^7\alpha D\omega^{\alpha+6} + \text{etc.}$$

quae

quae feries ipfi

$$\frac{2\,dy}{d\omega}\,\text{fin.}\,\omega = \frac{dy}{d\omega}\left(2\,\omega - \frac{2}{1\ldots3}\,\omega^3 + \frac{2}{1\ldots5}\,\omega^5 - \text{etc.}\right)$$

aequalis eft ftatuenda, fcilicet huic expreffioni

$$2\,\alpha\,A\,\omega^{\alpha} - 2\,(\alpha+2)\,B\,\omega^{\alpha+2} + 2\,(\alpha+4)\,C\,\omega^{\alpha+4} - \text{etc.}$$
$$- \frac{2\,\alpha\,A}{1.2.3} \qquad\qquad + \frac{2\,(\alpha+2)\,B}{1.2.3}$$
$$+ \frac{2\,\alpha\,A}{1\ldots5}$$

vnde fequentes determinationes colliguntur:

$$2^2\,\alpha\,B = (\alpha+2)\,B + \frac{\alpha\,A}{1.2.3}$$
$$2^4\,\alpha\,C = (\alpha+4)\,C + \frac{(\alpha+2)\,B}{1.2.3} + \frac{\alpha\,A}{1\ldots5}$$
$$2^6\,\alpha\,D = (\alpha+6)\,D + \frac{(\alpha+4)\,C}{1.2.3} + \frac{(\alpha+2)\,B}{1.2\ldots5} + \frac{\alpha\,A}{1\ldots7}$$

etc.

26. Hinc ergo fine dubio coefficientes B, C, D etc. definire licet, at ne vllum dubium fuperfit, an hoc modo pro y valores reales obtineri queant, notandum eft binos valores idoneos pro y inuentos femper inter fe coniungi poffe. Hoc obferuato ponamus ex valore $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ prodiiffe $y = P$, ex valore autem $\alpha = \mu - \nu\sqrt{-1}$ fieri $y = Q$, quae binae expreffiones vtcunque fuerint imaginariae certum eft ex iis realem huiusmodi $y = m\,P + n\,Q$ conflari poffe, idque duplici modo. Atque ex forma affumta quidem $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ feries pro y ita erunt comparatae:

$$y = \omega^{\mu}\,\text{cof.}\,(\nu\,l\,\omega).\,(A + B\,\omega^2 + C\,\omega^4 + D\,\omega^6 + \text{etc.}) \text{ vel}$$
$$y = \omega^{\mu}\,\text{fin.}\,(\nu\,l\,\omega).\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,\omega^2 + \mathfrak{C}\,\omega^4 + \mathfrak{D}\,\omega^6 + \text{etc.})$$

 quarum

quarum ſumma vel differentia itidem praebet valorem ſatisfacientem pro y. Euidens autem eſt hos valores minime in ſeries ſecundum poteſtates ſimplices ipſius ω progredientes conuerti poſſe. Huiusmodi autem formae ſtatim ab initio pro y fingi poſſunt; vbi cum in Y contineatur $\operatorname{coſ.}(\nu l 2\omega)$ notandum eſt eſſe:

$$\operatorname{coſ.}(\nu l 2\omega) = \operatorname{coſ.}(\nu l\omega).\ \operatorname{coſ.}(\nu l 2) - \operatorname{ſin.}(\nu l\omega).\ \operatorname{ſin.}(\nu l 2).$$

27. Ne autem hunc calculum nimis moleſtum quo infinitae aliae problematis ſolutiones declarari videntur ſuſcipiam idem ex relatione inter radios oſculi euolutae curuae quaeſitae facilius oſtendi poſſe videtur. Cum enim §. 12. inuenerimus

$$4R' = 3r' \operatorname{coſ.}\omega + \frac{dr'}{d\omega}\operatorname{ſin.}\omega, \text{ ſi fingamus:}$$

$$r' = A\omega^n + B\omega^{n+2} + C\omega^{n+4} + \text{etc. vt ſit}$$

$$R' = 2^n A\omega^n + 2^{n+2}B\omega^{n+2} + 2^{n+4}C\omega^{n+4} + \text{etc.}$$

pro poteſtate infima ω^n debet eſſe

$$4.\, 2^n A = 3A + nA \text{ ſeu } 4.\, 2^n = 3 + n = 2^{n+2}$$

cui conditioni duplici modo ſatisfit, altero $n = -2$, altero $n = -1$. Statuamus ergo

$$r' = \frac{A}{\omega} + B\omega + C\omega^3 + D\omega^5 + \text{etc. erit}$$

$$\frac{dr'}{d\omega} = \frac{-A}{\omega^2} + B + 3C\omega^2 + 5D\omega^4 + \text{etc.}$$

$$R' = \frac{A}{2\omega} + 2B\omega + 8C\omega^3 + 32D\omega^5 + \text{etc.}$$

vnde

vnde colligitur eſſe debere:

$$\frac{2A}{\omega}+8B\omega+32C\omega^3+128D\omega^5+\text{etc.}=$$

$$\begin{array}{llll}
\hline
3A & +3B & +3C & +3D \\
 & -\frac{3A}{1\cdot 2} & -\frac{3B}{1\cdot 2} & -\frac{3C}{1\cdot 2} \\
 & & +\frac{3A}{1\ldots 4} & +\frac{3B}{1\ldots 4} \\
 & & & -\frac{3A}{1\ldots 6} \\
-A & +B & -3C & +5D \\
 & +\frac{A}{1\ldots 3} & -\frac{B}{1\ldots 3} & -\frac{3C}{1\ldots 3} \\
 & & -\frac{A}{1\ldots 5} & +\frac{B}{1\ldots 5} \\
 & & & +\frac{A}{1\ldots 7}
\end{array}$$

hincque eiusmodi eruuntur valores, qui vtique ſolutionem realem praebere videntur. Interim tamen deſideratur adhuc methodus hoc problema perfectius reſoluendi

CONSI-

CONSIDERATIONES CYCLOMETRICAE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Lunularum quadrabilium constructio ab inuentione binorum angulorum pendet, qui inter se rationem duplicatam sinuum teneant, binos scilicet eiusmodi angulos m et n inuestigari oportet, vt sit

$$m : n = \text{sin.}\, m^2 : \text{sin.}\, n^2 \text{ seu } \frac{m}{\text{sin.}\, m^2} = \frac{n}{\text{sin.}\, n^2}$$

quam aequalitatem hic accuratius perpendere constitui.

2. Dato autem angulo quocunque m valorem expressionis inde natae $\frac{m}{\text{sin.}\, m^2}$ haud difficulter assignare licet, idque duplici modo vel in gradibus, si angulus m ita detur, vel in partibus radii $= 1$, si arcus angulum metiens in partibus radii exprimatur facile autem altera expressio ad alteram reducitur.

3. De hac autem expressione $\frac{m}{\text{sin.}\, m^2}$ obseruo, eam primo, si angulus m euanescat, euadere infinitam, tum vero diminui ad certum vsque terminum, quo superato denuo augetur siquidem angulo m ad duos rectos aucto ob sin. $m = 0$, iterum fit infinita. Quod quo clarius appareat, sit r nota anguli recti, et quia

$$\text{sin.}\, \tfrac{1}{3} r = \tfrac{1}{2};\ \text{sin.}\, \tfrac{1}{2} r = \tfrac{1}{\sqrt{2}};\ \text{sin.}\, \tfrac{2}{3} r = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ et sin.}\, r = 1$$

si fueſi fuerit

$$m = 0r;\ \tfrac{1}{3}r;\ \tfrac{1}{2}r;\ \tfrac{2}{3}r;\ r;\ \tfrac{4}{3}r;\ \tfrac{3}{2}r;\ \tfrac{5}{3}r;\ 2r$$

erit

$$\frac{m}{\sin. m^2} = \infty r;\ \tfrac{4}{3}r;\ r;\ \tfrac{8}{9}r;\ r;\ \tfrac{16}{9}r;\ 3r;\ \tfrac{20}{3}r;\ \infty r.$$

4. Antequam igitur angulus m nonaginta gradus attingit formula $\frac{m}{\sin. m^2}$ fit minima; colligitur autem hoc euenire vbi ſit $m = \frac{1}{2}$ tang. m, ſeu arcus angulum metiens aequalis ſemiſſi tangentis. Hunc angulum nonniſi proxime aſſignare licet, qui calculo inſtituto reperitur $= 66^\circ, 46', 54\tfrac{1}{4}''$ vnde prodit valor omnium minimus $\frac{m}{\sin. m^2} = 79,07102$ grad.

5. Hunc angulum tam inſigni proprietate praeditum littera a denotabo, ita vt ſit $a = 66^\circ, 46', 54\tfrac{1}{4}''$ in gradibus, in partibus radii autem $a = 1,165561$, vbi obſeruare licet hunc angulum neque ad peripheriam neque ad radium rationem commenſurabilem tenere, ſed vtriusque reſpectu pro tranſcendente eſſe habendum.

6. Interim tamen iuuabit praecipuas affectiones huius anguli perpendiſſe reperitur autem:

ſin. $a = 0,9190096$; coſ. $a = 0,3942360$; tang. $a = 2,331122$

tum vero

ſin. $2a = 0,7246132$ et coſec. $2a = 1,380050$

duplum angulum ideo conſidero, quia ob $a = \frac{1}{2}$ tang. a, fit formula noſtra $\frac{a}{\sin. a^2} = \frac{1}{\sin. 2a} =$ coſec. $2a$, ita vt $1,380050$ ſit valor minimus quem formula $\frac{m}{\sin. m^2}$

 aſſe-

aſſequi poteſt. Idem autem in gradibus expreſſus dat vt ante $79^\circ, 07102$.

7. Vt ergo bini anguli m et n rationem teneant duplicatam ſinuum, ſeu vt ſit $\frac{m}{\sin. m^2} = \frac{n}{\sin. n^2}$, neceſſe eſt alterum eorum m infra a, alterum vero n ſupra a exiſtere, et quo magis angulus m infra a deprimitur, eo magis alter n ſuperabit, neque tamen ſimili ratione, cum ſumto $m = 0$, ſiat $n = 180^\circ$, neque vero angulus a in horum terminorum medium incidit.

8. Si igitur angulus m ſit minimus, ponatur $m = \mu$ in partibus radii, et denotante π ſemicircumferentiam ſeu menſuram duorum rectorum, angulus n quam minime a π deficiet, ſtatuatur ergo $n = \pi - \nu$, eritque

$\mu \sin. \nu^2 = (\pi - \nu) \sin. \mu^2$ ſeu $\mu(1 - \cos. 2\nu) = (\pi - \nu)(1 - \cos. 2\mu)$

Iam vero eſt

$$1 - \cos. \phi = \tfrac{1}{2}\phi^2 - \tfrac{1}{24}\phi^4 + \tfrac{1}{720}\phi^6 - \text{etc.}$$

Ergo

$$\mu(2\nu\nu - \tfrac{2}{3}\nu^4 + \tfrac{4}{45}\nu^6) = (\pi - \nu)(2\mu\mu - \tfrac{2}{3}\mu^4 + \tfrac{4}{45}\mu^6)$$

vnde colligitur proxime

$$\nu = \sqrt{\pi\mu} - \tfrac{1}{2}\mu + \frac{3 + 4\pi\pi}{24\sqrt{\pi}}\mu\mu.$$

9 Sin autem angulus m ſit parumper minor angulo a, alter n parumper erit maior. Statuatur ergo $m = a - \mu$ et $n = a + \nu$; atque formula $\frac{m}{\sin. m^2}$ abit in

$$\frac{2(a - \mu)}{1 - \cos. 2(a - \mu)} = \frac{2(a - \mu)}{1 - \cos. 2a \cos. 2\mu - \sin. 2a \sin. 2\mu}$$

quae

quae ob angulum μ minimum in talem feriem euolvatur :

$$A - B\mu + C\mu^2 - D\mu^3 + E\mu^4 - \text{etc.}$$

vbi litterae A, B, C, D etc. hoc modo definiuntur

$$A\,\text{fin.}\,a^2 - a = 0 \quad \text{hinc} \quad A = \frac{a}{\text{fin.}\,a^2} = \frac{1}{\text{fin.}\,2\,a}$$

$$B\,\text{fin.}\,a^2 + A\,\text{fin.}\,2\,a - 1 = 0 \quad \text{hinc} \quad B = 0 \quad \text{ob} \quad A = \frac{1}{\text{fin.}\,2\,a}$$

$$C\,\text{fin.}\,a^2 + B\,\text{fin.}\,2\,a + A\,\text{cof.}\,2\,a = 0$$

$$D\,\text{fin.}\,a^2 + C\,\text{fin.}\,2\,a + B\,\text{cof.}\,2\,a - \tfrac{2}{3}A\,\text{fin.}\,2\,a = 0$$

$$E\,\text{fin.}\,a^2 + D\,\text{fin.}\,2\,a + C\,\text{cof.}\,2\,a - \tfrac{2}{3}B\,\text{fin}\,2\,a - \tfrac{1}{3}A\,\text{cof.}\,2a = 0$$

$$F\,\text{fin}\,a^2 + E\,\text{fin.}\,2\,a + D\,\text{cof.}\,2\,a - \tfrac{2}{3}C\,\text{fin.}\,2\,a - \tfrac{1}{3}B\,\text{cof.}\,2\,a + \tfrac{2}{15}A\,\text{fin.}\,2\,a = 0$$

etc.

vbi coefficientes numerici continuo per fractiones $\frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}$ etc. multiplicantur.

10. His litteris determinatis, erit

$$\frac{m}{\text{fin.}\,m^2} = A - B\mu + C\mu^2 - D\mu^3 + F\mu^4 - F\mu^5 \text{ etc. et}$$

$$\frac{n}{\text{fin.}\,n^2} = A + B\nu + C\nu^2 + D\nu^3 + E\nu^4 + F\nu^5 \text{ etc.}$$

quae feries cum inter fe aequari debeant, ex dato angulo μ, alter ν ita definitur, vt quia $B = 0$ pofito

$$\nu = \mu + P\mu^2 + Q\mu^3 + R\mu^4 + S\mu^5 \text{ etc.}$$

fit

$$P = \frac{-D}{C}; \quad Q = \frac{DD}{CC}; \quad R = \frac{-2D^3}{C^3} + \frac{2DE}{CC} - \frac{F}{C}$$

et

$$S = \frac{4D^4}{C^4} - \frac{6DDE}{C^3} + \frac{3DF}{CC}$$

Calculo autem ſubducto reperitur

$A = 1,380050$; $C = 1,126090$; $P = 0,265937$
$B = 0$, $D = -0,299469$; $Q = 0,070722$.

11. At ſumto vtcunque angulo m, alter angulus n per cognitam appropinquandi methodum proxime ſaltem definiri poteſt; veluti ſi ſumatur $m = 60°$, reperitur $n = 73°, 41', 32'' \frac{22}{155}$ ac poſito $m = 30°$, prodit $n = 108°, 14', 30'' \frac{18}{155}$ tum vero ſi $n = 135°$ fit $m = 12°, 20', 54'' \frac{82}{155}$ ſin autem angulus m ita accipiatur, vt ſit tang. $m = \sqrt{2}$, ideoque $m = 54°, 44', 8\frac{1}{5}''$, inuenitur $n = 79°, 14', 23'' \frac{36}{155}$ nullo autem horum caſuum angulum alterum geometrice aſſignare licet.

12. Talis autem inueſtigatio ad lunularum quadrabilium conſtructionem nihil iuuat, cum neceſſe ſit, vt vterque angulus m et n geometrice aſſignari poſſit, quod euenit, ſi vtriusque ſinum vel tangentem geometrice exhibere licuerit. Magna ergo hinc exoritur quaeſtio, quomodo binos eiusmodi angulos m et n geometrice aſſignabiles inueſtigari oporteat vt fiat

$$\frac{m}{\sin. m^2} = \frac{n}{\sin. n^2}. \text{ ſeu } m(1 - \cos. 2n) = n(1 - \cos. 2m).$$

13. Ad hoc problema ſoluendum vulgo aſſumi ſolet, binos angulos m et n inter ſe commenſurabiles eſſe debere; nondum autem eſt demonſtratum nullo alio caſu ſolutionem obtineri non poſſe. Sinus certe horum angulorum rationem algebraicam tenere oportet, quia alioquin anguli geometrice aſſignari

non

non possent, ex quo etiam ipsa angulorum ratio algebraice assignabilis esse debet; neque vero hinc conficitur, hanc rationem numeris integris contineri debere.

14. Infinitis certe modis anguli geometrice assignari possunt, qui inter se non sint commensurabiles, veluti anguli quorum sinus sunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$; num autem huiusmodi anguli non rationem quandam irrationalem tenere possint, neutiquam adhuc satis constat? Eximium autem foret inuentum si huiusmodi anguli quorum ratio esset exempli gratia vt $1 : \sqrt{2}$ geometrice exhiberi possent.

15. Quodsi inter angulos m et n ratio statuatur $= 1 : \sqrt{2}$ resolutio aequationis $\frac{m}{\sin. m^2} = \frac{n}{\sin. n^2}$ praebet hos valores.

$$m = 55°, 28', 18'' \text{ et } n = 78°, 27', 0''$$

qui autem anguli geometrice assignabiles non videntur. Cum autem hinc nihil concludi possit, methodum adhuc deesse cogimus fateri, cuius beneficio hoc problema per angulos etiam non commensurabiles resolui queat.

16. Videamus autem quot modis hos angulos inter se commensurabiles statuendo ista quaestio per circulum et normam resolui possit, ita vt problema pro plano haberi possit: Statuatur ergo $m = \frac{1}{2} \mu \omega$ et $n = \frac{1}{2} \nu \omega$, vt sit $m : n = \mu : \nu$, fierique debet

$$\mu (1 - \cos. \nu \omega) = \nu (1 - \cos. \mu \omega).$$

 Sit

Sit cos. $\omega = z$, ac notetur esse:

$$\cos. 2\omega = 2zz - 1$$
$$\cos. 3\omega = 4z^3 - 3z$$
$$\cos. 4\omega = 8z^4 - 8zz + 1$$
$$\cos. 5\omega = 16z^5 - 20z^3 + 5z$$
$$\cos. 6\omega = 32z^6 - 48z^4 + 18zz - 1$$
etc.

17. Hinc percurramus casus praecipuos aequationis inuentae

$$\nu - \mu = \nu \cos. \mu\omega - \mu \cos. \nu\omega$$

I. $\mu = 1$ et $\nu = 2$ hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \omega$ erit

$$1 = 2z - 2zz + 1, \text{ seu } zz - z = 0,$$

vnde per $z - 1$ diuidendo, id quod semper succedit, fit $z = 0$; ideoque $\omega = 90°$, et $m = 45°$ et $n = 90°$, qui est casus lunulae Hippocratis

II. $\mu = 1$, et $\nu = 3$, hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$

Erit ergo $2 = 3z - 4z^3 + 3z$ seu

$$1 - 3z + 2z^3 = 0,$$

quae aequatio per $1 - z$ diuisa dat

$$1 - 2z - 2zz = 0, \text{ hincque}$$

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = \cos. \omega \text{ et } \cos. 2\omega = 1 - \sqrt{3};$$

problema planum.

III.

III. Sit $\mu = 2$ et $\nu = 3$ hinc $m = \omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$. Erit ergo $1 = 6zz - 3 - 8z^3 + 6z$ seu $4 - 6z - 6zz + 8z^3 = 0$ quae aequatio per $2(1 - z)$ diuisa dat $2 - z - 4zz = 0$ vnde colligitur $z = \frac{-1+\sqrt{33}}{8} = \text{cos.}\,\omega$ et $\text{cos.}\,2\omega = \frac{1-\sqrt{33}}{16}$: problema planum.

IV. Sit $\mu = 1$ et $\nu = 4$ hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = 2\omega$ Erit ergo $3 = 4z - 8z^4 + 8zz - 1$ seu $1 - z - 2zz + 2z^4 = 0$ quae aequatio per $1 - z$ diuisa dat

$$1 - 2zz - 2z^3 = 0$$ problema solidum.

V. Sit $\mu = 3$ et $\nu = 4$ hinc $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = 2\omega$. Erit ergo $1 = 16z^3 - 12z - 24z^4 + 24zz - 3$ seu

$$1 + 3z - 6zz - 4z^3 + 6z^4 = 0$$

quae per $1 - z$ diuisa dat

$$1 + 4z - 2zz - 6z^3 = 0$$ problema solidum.

VI. Sit $\mu = 1$ et $\nu = 5$ hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$. Erit ergo $4 = 5z - 16z^5 + 20z^3 - 5z$ seu

$$1 - 5z^3 + 4z^5 = 0$$

quae per $1 - z$ diuisa praebet

$$1 + z + zz - 4z^3 - 4z^4 = 0$$

et in hanc formam transfunditur:

$$(2zz + z - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{5}{4} \text{ seu } 2zz + z - \tfrac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

hinc $z = -\frac{1+\sqrt{(5+4\sqrt{5})}}{4} = \text{cof.}\,\omega$ et $\text{cof.}\,2\omega = \frac{2\sqrt{5}-1-\sqrt{(5+4\sqrt{5})}}{4}$ ita vt hic prodeat problema planum.

VII.

VII. Sit $\mu = 2$ et $\nu = 5$ hinc $m = \omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$. Erit ergo $3 = 10zz - 5 - 32z^5 + 40z^3 - 10z$ seu

$$4 + 5z - 5zz - 20z^3 + 16z^5 = 0$$ et per $1 - z$ diuidendo

$$4 + 9z + 4zz - 16z^3 - 16z^4 = 0$$ problema solidum

VIII. Sit $\mu = 3$ et $\nu = 5$ hinc $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$. Ergo $2 = 20z^3 - 15z - 48z^5 + 60z^3 - 15z$ seu

$$1 + 15z - 40z^3 + 24z^5 = 0$$ et per $1 - z$ diuidendo

$$1 + 16z + 16zz - 24z^3 - 24z^4 = 0$$

quae reducitur ad hanc formam

$$(1 + 8z + 6zz)^2 = 60(z + zz)^2$$

vnde fit, $zz\sqrt{60} + z\sqrt{60} = 6zz + 8z + 1$ ideoque

$$z = \frac{4 - \sqrt{15} + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}}{2\sqrt{15} - 6}$$ seu $\frac{1}{z} = -4 + \sqrt{15} + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}$

vel $z = \frac{\sqrt{15} - 3 + \sqrt{(60 + 6\sqrt{15})}}{12} = \cos.\,\omega$ et $\cos.\,2\omega = \frac{1 + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}}{6}$

sicque etiam hoc casu problema est planum.

IX. Sit $\mu = 4$ et $\nu = 5$ hinc $m = 2\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$. Ergo $1 = 40z^4 - 40zz + 5 - 64z^5 + 80z^3 - 20z$ seu

$$1 - 5z - 10zz + 20z^3 + 10z^4 - 16z^5 = 0$$ et per $1 - z$ diuidendo

$$1 - 4z - 14zz + 6z^3 + 16z^4 = 0$$

at haec aequatio nonnisi constructionem solidam admittit.

18. Quinque ergo casus sumus adepti, quibus ope circuli et normae lunulas quadrabiles exhibere, vel hanc aequationem $\frac{m}{\sin. m^2} = \frac{n}{\sin. n^2}$ construere licet:

I.

I. Casus $m = 45^\circ$ et $n = 90^\circ$

II. Casus $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$ existente
$\cos.\,\omega = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ vel $\cos.\,2\omega = 1 - \sqrt{3}$

III. Casus $m = \omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$ existente
$\cos.\,\omega = \frac{\sqrt{33}-1}{8}$ vel $\cos.\,2\omega = \frac{1-\sqrt{33}}{16}$

IV. Casus $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$ existente
$\cos.\,\omega = \frac{\sqrt{(5+4\sqrt{5})}-1}{4}$

V. Casus $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$ existente
$\cos.\,\omega = \frac{\sqrt{15}-3+\sqrt{(60+6\sqrt{15})}}{12}$ vel $\cos.\,2\omega = \frac{1+\sqrt{(25-6\sqrt{15})}}{6}$.

19. Pro aliis rationibus inter arcus m et n assumtis constructio lunularum ad altiores locos geometricos assurgit, neque vero minus pro geometrica est habenda. Vtrum autem praeter hos casus nullae aliae lunulae geometrice assignari queant, nec ne? in dubio relinquendum videtur. Neque contra valeret argumentum afferri vulgo solitum, quod inde circuli quadratura consequeretur, etiamsi et id, nisi quadratura indefinita spectetur, parum roboris habere videatur. Etsi enim satis constet rationem peripheriae ad diametrum per numeros rationales exprimi non posse, minus tamen adhuc perspicitur, numeros etiam irrationales ad hunc scopum esse ineptos. Verum etiamsi esset euictum, hanc rationem ne surdis quidem numeris vllo modo exhiberi posse, tamen inde vix quicquam pro arcubus ad totam circumferentiam incommensurabilibus concludere liceret. Veluti si quis arcum circuli sinu ver-

bi gratia $= \frac{2}{3} = 0,6666666$ determinatum geometrice assignare docuerit, inde minime adhuc quantitas peripheriae colligi posset; ex quo huiusmodi rectificatio impossibilitati quadraturae circuli aduersari haud videatur; nisi forte ad ipsam methodum, qua quis ad valorem arcus, cuius sinus est $= \frac{2}{3}$ perueuenerit, respiciamus, cum enim eidem sinui innumeri arcus conueniant, ob legem continuitatis methodus simul omnes istos arcus complecti deberet, ideoque algebraica expressione contineri non posset; praeterquam quod differentia vel summa horum arcuum etiam integram peripheriam esset ostensura. Hac igitur ratione demum confirmata pronunciare licebit, nullius prorsus arcus circularis, geometrice assignabilis, quantitatem geometrice definiri posse.

DE
CRITERIIS INTEGRABILITATIS
FORMVLARVM DIFFERENTIALIVM, DISSERTATIO SECVNDA.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

In iis quae criteriis integrabilitatis, Tomo praecedenti horum Commentariorum perſcripſi, haud immerito deſiderari videtur, quod doctrina a me tunc expoſita, exemplis quibusdam illuſtretur, quorum ſcilicet vſus huiusmodi in re inſignis eſſe ſolet, ad ipſum argumentum non modo illuſtrandum, verum etiam confirmandum et ſtabiliendum. Et tunc temporis quidem, quamuis in animo haberem aliqua huiusmodi proponere exempla, a propoſito tamen deſiſtere coactus fui, ne in nimiam excreſceret molem diſſertatio ſupra commemorata; hac igitur occaſione, quod tum intermiſſum fuit, doctrinam ſcilicet traditam ſelectis quibusdam exemplis illuſtrare, leuiter adumbrare conſtitui, vbi tamen quaedam praemittere e re eſſe iudicaui, quibus ea, quae antea a me expoſita ſunt magis plana et perſpicua reddi poterunt.

2. Quod itaque *primum* demonſtrationem inſignis *Theorematis Euleriani* § 7. et ſeqq. diſſert. prioris allatam attinet, ingenue fateor eam adeo mihi non ſatisfeciſſe, ne aliqui adhuc in animo remanerent dubitationis ſcrupuli. Quum autem poſtmodum viam detexerim, qua hanc demonſtrationem ad ſummum certitudinis et euidentiae rigorem perducere mihi licuit, nonnulla ea de re monuiſſe haud pigebit.

Ex iis quae antea demonſtrata ſunt, ſequitur eſſe:

$$\mu = \int M\,dx;\quad \nu = \int N\,dx;\quad \pi = \int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx;\quad \varkappa = \int Q\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int^{(3)} N\,dx \text{ etc.}$$

vnde deducitur

$$d\mu = M\,dx = dx\left(\frac{d\mu}{dx}\right) + dy\left(\frac{d\mu}{dy}\right) + dp\left(\frac{d\mu}{dp}\right) + dq\left(\frac{d\mu}{dq}\right) \ldots\ldots dt\left(\frac{d\mu}{dt}\right)$$

hincque

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\mu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\mu}{dp}\right) + r\left(\frac{d\mu}{dq}\right) \ldots\ldots + u\left(\frac{d\mu}{dt}\right).$$

Simili ratione oſtenditur fore

$$N = \left(\frac{d\nu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + r\left(\frac{d\nu}{dq}\right) \ldots\ldots + u\left(\frac{d\nu}{dt}\right)$$

$$P = \left(\frac{d\pi}{dx}\right) + p\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + r\left(\frac{d\pi}{dq}\right) \ldots\ldots + u\left(\frac{d\pi}{dt}\right) + \nu$$

$$Q = \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) + p\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) + q\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dq}\right) \ldots\ldots + u\left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) + \pi$$

etc.

Atqui §. 7. Diſſert. 1. inuenimus

$$M = \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) \ldots\ldots + u\left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$

$$N = \left(\frac{d\mu}{dy}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + r\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) \ldots\ldots + u\left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$

etc.

Si

Si igitur hi valores ipſorum M, N, P etc. ita inter ſe comparentur, vt ſinguli termini ſingulis aequentur, inde ſequentes facile deducentur aequalitates:

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right)=\left(\frac{d\nu}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dp}\right)=\left(\frac{d\pi}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dq}\right)=\left(\frac{d\kappa}{dx}\right)\ldots\left(\frac{d\mu}{dt}\right)=\left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right)=\left(\frac{d\pi}{dy}\right);\ \left(\frac{d\nu}{dq}\right)=\left(\frac{d\kappa}{dy}\right)\ldots\left(\frac{d\nu}{dt}\right)=\left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right)=\left(\frac{d\kappa}{dp}\right)\ldots\left(\frac{d\pi}{dt}\right)=\left(\frac{d\tau}{dp}\right)\text{ etc.},$$

in quibus ipſum criterium integrabilitatis reſidere antea obſeruatum eſt. Verum quum excipere liceret ex aequalitate binorum valorum ex: gr. ipſius M non ſtatim ſequi in vtraque expreſſione ſingulos terminos, qui iisdem litteris p, q, r etc. afficiuntur, inter ſe eſſe aequandos, iam aliam adiiciamus demonſtrandi rationem huic obiectioni non obnoxiam.

3. Quum enim ſit:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right)=\left(\frac{dd\mu}{dxdy}\right)+p\left(\frac{dd\mu}{dydy}\right)+q\left(\frac{dd\mu}{dydp}\right)+r\left(\frac{dd\mu}{dydq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\mu}{dydt}\right)$$

$$\left(\frac{dM}{dp}\right)=\left(\frac{dd\mu}{dxdp}\right)+p\left(\frac{dd\mu}{dydp}\right)+q\left(\frac{dd\mu}{dpdp}\right)+r\left(\frac{dd\mu}{dpdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\mu}{dpdt}\right)+\left(\frac{d\mu}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dM}{dq}\right)=\left(\frac{dd\mu}{dxdq}\right)+p\left(\frac{dd\mu}{dydq}\right)+q\left(\frac{dd\mu}{dpdq}\right)+r\left(\frac{dd\mu}{dqdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\mu}{dqdt}\right)+\left(\frac{d\mu}{dp}\right)\text{ etc.}$$

tum vero

$$\left(\frac{dN}{dx}\right)=\left(\frac{dd\nu}{dxdx}\right)+p\left(\frac{dd\nu}{dxdy}\right)+q\left(\frac{dd\nu}{dxdp}\right)+r\left(\frac{dd\nu}{dxdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\nu}{dxdt}\right)$$

$$\left(\frac{dN}{dp}\right)=\left(\frac{dd\nu}{dxdp}\right)+p\left(\frac{dd\nu}{dydp}\right)+q\left(\frac{dd\nu}{dpdp}\right)+r\left(\frac{dd\nu}{dpdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\nu}{dpdt}\right)+\left(\frac{d\nu}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dN}{dq}\right)=\left(\frac{dd\nu}{dxdq}\right)+p\left(\frac{dd\nu}{dydq}\right)+q\left(\frac{dd\nu}{dpdq}\right)+r\left(\frac{dd\nu}{dqdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\nu}{dqdt}\right)+\left(\frac{d\nu}{dp}\right)\text{ etc.}$$

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)=\left(\frac{dd\pi}{dxdx}\right)+p\left(\frac{dd\pi}{dxdy}\right)+q\left(\frac{dd\pi}{dxdp}\right)+r\left(\frac{dd\pi}{dxdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\pi}{dxdt}\right)+\left(\frac{d\nu}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dd\pi}{dxdy}\right)+p\left(\frac{dd\pi}{dydy}\right)+q\left(\frac{dd\pi}{dydp}\right)+r\left(\frac{dd\pi}{dpdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\pi}{dydt}\right)+\left(\frac{d\nu}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dP}{dq}\right)=\left(\frac{dd\pi}{dxdq}\right)+p\left(\frac{dd\pi}{dydq}\right)+q\left(\frac{dd\pi}{dpdq}\right)+r\left(\frac{dd\pi}{dqdq}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\pi}{dqdt}\right)+\left(\frac{d\nu}{dq}\right)+\left(\frac{d\pi}{dt}\right)$$

etc. etc.

 prae-

praeterea autem habeatur

$$d.\left(\frac{d\mu}{dy}\right)=dx\left(\frac{dd\mu}{dx\,dy}\right)+dy\left(\frac{dd\mu}{dy\,dy}\right)+dp\left(\frac{dd\mu}{dy\,dp}\right)\ldots+dt\left(\frac{dd\mu}{dy\,dt}\right)$$
$$d.\left(\frac{d\mu}{dp}\right)=dx\left(\frac{dd\mu}{dx\,dp}\right)+dy\left(\frac{dd\mu}{dy\,dp}\right)+dp\left(\frac{dd\mu}{dp\,dp}\right)\ldots+dt\left(\frac{dd\mu}{dp\,dt}\right)$$
$$d.\left(\frac{d\mu}{dq}\right)=dx\left(\frac{dd\mu}{dx\,dq}\right)+dy\left(\frac{dd\mu}{dy\,dq}\right)+dp\left(\frac{dd\mu}{dp\,dq}\right)\ldots+dt\left(\frac{dd\mu}{dq\,dt}\right)\text{ etc.}$$

fiet necessum est

$$d.\left(\frac{d\mu}{dy}\right)=dx\left(\frac{dM}{dy}\right),\text{ seu }\left(\frac{d\mu}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dy}\right)$$
$$d.\left(\frac{d\mu}{dp}\right)=dx\left(\frac{dM}{dp}\right)-dx\left(\frac{d\mu}{dy}\right),\text{ vnde }\left(\frac{d\mu}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dp}\right)-\int dx\left(\frac{d\mu}{dy}\right)$$
$$d.\left(\frac{d\mu}{dq}\right)=dx\left(\frac{dN}{dq}\right)-dx\left(\frac{d\mu}{dp}\right),\text{ hinc }\left(\frac{d\mu}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dq}\right)-\int dx\left(\frac{d\mu}{dp}\right).$$

Porro ex valoribus ipsorum

$$\left(\frac{dN}{dx}\right);\ \left(\frac{dN}{dp}\right)\text{ etc. }\left(\frac{dP}{dx}\right);\ \left(\frac{dP}{dy}\right)\text{ etc.}$$

supra allatis, sequentes deducere licet aequationes:

$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dp}\right)-\int dx\left(\frac{d\nu}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\nu}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dq}\right)-\int dx\left(\frac{d\nu}{dp}\right)\text{ etc.}$$
$$\left(\frac{d\pi}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dx}\right)-\int dx\left(\frac{d\nu}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{d\pi}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)-\int dx\left(\frac{d\nu}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dq}\right)-\int dx\left(\frac{d\nu}{dq}\right)-\int dx\left(\frac{d\pi}{dp}\right)\text{ etc.}$$
$$\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)-\int dx\left(\frac{d\pi}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dQ}{dy}\right)-\int dx\left(\frac{d\pi}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\varkappa}{dt}\right)=\int dx\left(\frac{dQ}{dp}\right)-\int dx\left(\frac{d\pi}{dp}\right)-\int dx\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)\text{ etc.}$$

4. Ob

4. Ob integrabilitatem vero formulae:

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \ldots + U\,du$$

quum esse debeat

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right); \quad \left(\frac{dM}{dp}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right) \text{ etc.};$$

$$\left(\frac{dN}{dp}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right); \quad \left(\frac{dN}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right) \text{ etc. etc.}$$

liquet omnino esse

$$\int dx\left(\frac{dM}{dy}\right) = \int dx\left(\frac{dN}{dx}\right), \text{ ideoque } \left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right).$$

Simili modo ob

$$\int dx\left(\frac{dM}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dP}{dx}\right), \text{ nec non } \int dx\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \int dx\left(\frac{d\nu}{dx}\right), \text{ erit}$$

$\left(\frac{du}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dx}\right)$, tum vero ob $\int dx\left(\frac{du}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{d\pi}{dx}\right)$,

fiet $\left(\frac{d\mu}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right)$ etc.

Porro quoniam est

$\left(\frac{dN}{dp}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right); \left(\frac{dN}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$ etc. habebitur

$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dN}{dp}\right) - \int dx\left(\frac{d\nu}{dy}\right) = \int dx\left(\frac{dP}{dy}\right) - \int dx\left(\frac{d\nu}{dy}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\nu}{dq}\right) = \int dx\left(\frac{dN}{dq}\right) - \int dx\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dQ}{dy}\right) - \int dx\left(\frac{d\pi}{dy}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) \text{ etc.}$$

Denique ob $\left(\frac{dP}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dp}\right)$ etc.

$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right) = \int dx\left(\frac{dP}{dq}\right) - \int dx\left(\frac{d\nu}{dq}\right) - \int dx\left(\frac{d\pi}{dp}\right) = \int dx\left(\frac{dQ}{dp}\right) - \int dx\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)$$

$$- \int dx\left(\frac{d\pi}{dp}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) \text{ etc.}$$

Ex his igitur iam euidenter patet id, quod nobis demonstrandum proposuimus, esse nimirum

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right); \quad \left(\frac{du}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dx}\right) \ldots \left(\frac{d\mu}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right); \quad \left(\frac{d\nu}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) \ldots \left(\frac{d\nu}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dp}\right); \quad \ldots \left(\frac{d\pi}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dp}\right) \text{ etc. etc.}$$

Perspi-

Perſpicuum autem eſt, dum de aequalitate formu-mularum

$$\left(\frac{dM}{dy}\right),\ \left(\frac{dN}{dx}\right) \text{ vel } \left(\frac{dM}{dp}\right),\ \left(\frac{dP}{dx}\right) \text{ etc.}$$

ſermo fit, intelligendum eſſe has formulas fieri non ſolum aequales, ſed plane identicas, ex quo omnino quoque ſequitur formulas

$$\int dx\left(\frac{dM}{dy}\right),\ \int dx\left(\frac{dN}{dx}\right)$$

eſſe debere identicas, ideoque nec opus fore, vt vlla conſtans poſt integrationem introducatur. Quod vero valores ipſorum

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right),\ \left(\frac{d\mu}{dp}\right) \text{ etc.},\ \left(\frac{d\nu}{dx}\right),\ \left(\frac{d\nu}{dp}\right) \text{ etc.}$$

§. 8. Differt. I. allatos attinet, ex iis quae iam monuimus, euidenter comprobari poteſt eos rite ſe habere. Hoc cum pro ſingulis ſeorſim demonſtrare ſuperfluum foret, vno alteroue exemplo oſtendiſſe ſufficiat. Quum igitur ſit

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dy}\right) \text{ et } \left(\frac{dM}{dy}\right)=\left(\frac{dd\mu}{dx\,dy}\right)+p\left(\frac{dd\nu}{dx\,dy}\right)+q\left(\frac{dd\pi}{dx\,dy}\right)$$
$$+r\left(\frac{dd\varkappa}{dx\,dy}\right)\ldots+u\left(\frac{dd\tau}{dx\,dy}\right)$$

conf: §. 7. Differt: I., erit

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dd\mu}{dx\,dy}\right)+\int dy\left(\frac{dd\nu}{dx\,dy}\right)+\int dp\left(\frac{dd\pi}{dx\,dy}\right)+\int dq\left(\frac{dd\varkappa}{dx\,dy}\right)\ldots$$
$$+\int dt\left(\frac{dd\tau}{dx\,dy}\right).$$

Eodem modo ob

$$\left(\frac{d\mu}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dp}\right)-\int dx\left(\frac{d\mu}{dy}\right)$$

atque

$$\left(\frac{dM}{dp}\right)=\left(\frac{dd\mu}{dx\,dp}\right)+p\left(\frac{dd\nu}{dx\,dp}\right)+q\left(\frac{dd\pi}{dx\,dp}\right)+r\left(\frac{dd\varkappa}{dx\,dp}\right)\ldots\ldots$$
$$+u\left(\frac{dd\tau}{dx\,dp}\right)+\left(\frac{d\nu}{dx}\right)$$

fit

fit

$$\left(\frac{d\mu}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dd\mu}{dx\,dp}\right)+\int dy\left(\frac{dd\nu}{dx\,dp}\right)+\int dp\left(\frac{dd\pi}{dx\,dp}\right)+\int dq\left(\frac{dd\chi}{dx\,dp}\right)\ldots$$
$$+\int dt\left(\frac{dd\tau}{dx\,dp}\right)+\int dx\left(\frac{d\nu}{dx}\right)-\int dx\left(\frac{d\mu}{dy}\right)$$

quum igitur bini vltimi termini ob $\frac{d\nu}{dx})=(\frac{d\mu}{dy})$ se inuicem destruant, prodibit valor ipsius $(\frac{d\mu}{dp})$ talis, qualem antea §. 8. exhibuimus.

5. Valorum ipsius
$(\frac{d\mu}{dx})$, $(\frac{d\mu}{dy})$ etc. $(\frac{d\nu}{dx})$, $(\frac{d\nu}{dy})$ etc.

supra inuentorum egregiae transformationes atque omnino notatu dignae hinc eliciuntur sequentes:

$$\left(\frac{d\mu}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dx}\right);\ \left(\frac{d\mu}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\mu}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dp}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dM}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\mu}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dM}{dq}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dM}{dp}\right)+\int^{(3)}dx\left(\frac{dM}{dy}\right)\text{ etc.}$$
$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dx}\right);\ \left(\frac{d\nu}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\nu}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dp}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\nu}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dN}{dq}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dN}{dp}\right)+\int^{(3)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)\text{ etc.}$$
$$\left(\frac{d\pi}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dx}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dN}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{d\pi}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\pi}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dp}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$$
$$-\int^{(2)}dx\left(\frac{dN}{dp}\right)+2\int^{(3)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\pi}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dP}{dq}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dP}{dp}\right)+\int^{(3)}dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$$
$$-\int^{(2)}dx\left(\frac{dN}{dq}\right)+2\int^{(3)}dx\left(\frac{dN}{dp}\right)-3\int^{(4)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)\text{ etc.}$$

$$\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right)=\int dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dP}{dx}\right)+\int^{(3)}dx\left(\frac{dN}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right)=\int dx\left(\frac{dQ}{dy}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dP}{dy}\right)+\int^{(3)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right)=\int dx\left(\frac{dQ}{dp}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dQ}{dy}\right)$$
$$-\int^{(2)}dx\left(\frac{dP}{dp}\right)+2\int^{(3)}dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$$
$$+\int^{(3)}dx\left(\frac{dN}{dp}\right)-3\int^{(4)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$
$$\left(\frac{d\varkappa}{dq}\right)=\int dx\left(\frac{dQ}{dq}\right)-\int^{(2)}dx\left(\frac{dQ}{dp}\right)+\int^{(3)}dx\left(\frac{dQ}{dy}\right)$$
$$-\int^{(2)}dx\left(\frac{dP}{dq}\right)+2\int^{(3)}dx\left(\frac{dP}{dp}\right)-3\int^{(4)}dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$$
$$+\int^{(3)}dx\left(\frac{dN}{dq}\right)-3\int^{(4)}dx\left(\frac{dN}{dp}\right)+6\int^{(5)}dx\left(\frac{dN}{dy}\right)$$

etc. etc.

vbi quum progreſſionis lex iam ſit manifeſta, plures terminos accumulare inutile ducimus.

6. Quemadmodum § 10 prioris diſſertationis oſtendi, ad integrabilitatem formulae $V\,dx$, poſito

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp \;\ldots\ldots + U\,du$$

requiri, vt ſequentes formulae integrationem admittant

$$dx(Nx+P)$$
$$dx(Nx^2+2Px+2Q)$$
$$dx(Nx^3+3Px^2+3\cdot2(Qx+R))$$
$$\vdots$$
$$dx(Nx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-1)(m-2)Qx^{m-3}\ldots$$
$$+((m-1)(m-2)\ldots 1)(Sx+T))$$

ita nunc formulae quoque exhiberi poſſunt, ad quarum integrabilitatem reduci cenſenda eſt integrabilitas formu-

formulae $dx\int V\,dx$, pro qua valor ipsius dV idem est, quem modo attulimus. Primum enim quia $dx\int V\,dx$ integrationem admittere non possit, nisi $V\,dx$ sit integrabile, perspicuum est omnium primo requiri, vt formulae modo allatae integrabiles sint, iis tamen requisitis non omnia expleri quae pro integranda formula $dx\int V\,dx$ requiruntur. At vero quum § 11. Differt. I. demonstratum sit, posterius criterium, ex quo de integrabilitate formulae nostrae iudicium peti debet, hac aequatione contineri

$$P - \frac{2\,dQ}{dx} + \frac{3\,ddR}{dx^2} - \frac{4\,d^3S}{dx^3} \ldots\ldots \mp \frac{m.\,d^{m-1}U}{dx^{m-1}} = 0$$

nunc quidem plures hinc deriuare licet formulas, quas integrabiles esse oportet. Praeterquam enim quod iam euidens sit, ipsam formulam $P\,dx$ per se esse integrabilem, nec non $dx\,(Px + 2Q)$ integrationem admittere, omnino quoque patet his formulis:

$$dx\,(3R - 2\int Q\,dx + \int^{(2)} P\,dx)$$
$$dx\,(4S - 3\int R\,dx + 2\int^{(2)} Q\,dx - \int^{(3)} P\,dx) \text{ etc.}$$

certa competere integralia. Si vero nunc valores integrales euoluantur, quemadmodum § 10 Differt. I. docuimus, inde has obtinebimus formulas:

$$dx\,(Px + 2Q)$$
$$dx\,(Px^2 + 2.\,2.\,Qx + 3.\,2\,R)$$
$$dx\,(Px^3 + 2.\,3\,Qx^2 + 3.\,3.\,2\,Rx + 4.\,3.\,2\,S)$$
$$\vdots$$
$$dx\,(Px^{m-2} + 2(m-2)Qx^{m-3} + 3(m-2)(m-3)Rx^{m-4}$$
$$+ 4(m-2)(m-3)(m-4)Sx^{m-5} + \text{etc.})$$

 quibus

quibus omnibus, sua assignari poterunt integralia. Si iam vlterius progrediendo similes formulas exquirere velimus pro integrabilitate ipsius $dx\int^{(3)} V dx$, sequentes adipiscemur

$$dx(Qx + 3R)$$
$$dx(Qx^2 + 3.\,2Rx + 6.\,2S)$$
$$dx(Qx^3 + 3.\,3Rx^2 + 6.\,3.\,2Sx + 10.\,3.\,2T)$$
$$\vdots$$
$$dx(Qx^{m-3} + 3(m-3)Rx^{m-4} + 6(m-3)(m-4)Sx^{m-5} + 10(m-3)(m-4)(m-5)Tx^{m-6} + \text{etc.})$$

quae nunc quoque integrationem admittere debent. Neque obscurum est, quomodo longius progredi liceret, si hoc negotium vlterius persequi placuerit.

7. Quae de integrabilitate huiusmodi formularum $dx\int V dx$, $dx\int^{(2)} V dx$ etc. in medium a nobis allata sunt, imprimis tum vsui esse possunt, quando integralia inuestiganda sunt formularum, de quibus suspicari licet, quod per integrationem ad quantitates finitas perduci possint, hoc est ad expressiones quae solas x et y inuoluunt. Sic si formula integranda proponitur, vbi V praeter x et y sequentes per differentiationem inuectas p, q, r continet, hinc indicari potest ipsi expressionem respondere solas x et y inuoluentem, ex qua per differentiationem originem ducere concipienda est, si modo sequentibus conditionibus fuerit satisfactum:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} = 0;$$
$$P - \frac{2dQ}{dx} + \frac{3ddR}{dx^2} = 0;\quad Q - \frac{3dR}{dx} = 0.$$

Gene-

Generaliter vero si proposita fuerit formula differentialis $V\,dx$, in qua functio V praeter x et y etiam quantitates ex differentiatione ortas p, q, $r \ldots\ldots u$ inuoluat; certum est hanc formulam ad expressionem solas x et y continentem deducere, si sequentes impletae fuerint conditiones:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots \pm \frac{d^mU}{dx^m} = 0$$

$$P - \frac{2dQ}{dx} + \frac{3ddR}{dx^2} - \frac{4d^3S}{dx^3} \ldots \mp \frac{md^{m-1}U}{dx^{m-1}} = 0$$

$$Q - \frac{3dR}{dx} + \frac{6.ddS}{dx^2} \ldots\ldots \pm \frac{m(m-1)}{1.\ 2} \frac{d^{m-2}U}{dx^{m-2}} = 0$$

$$\vdots$$

$$T - \frac{m\,dU}{dx}.$$

Neque tamen hinc viciſſim inferri debet, ſi iſtis aequationibus ſatisfacere non liceat, formulam propoſitam Vdx nullo modo ad abſolutum integrale ſolas x et y complectens perduci poſſe, quum id per idoneos multiplicatores, in quos formulae integrales vti $\int V\,dx$, $\int^{(2)} V\,dx$ etc. ducendae ſunt, ſaepenumero praeſtare licet, de quo pluribus differendi infra dabitur locus.

8. In priori diſſertatione exhibuimus quidem aequationes, quibus criteria integrabilitatis pro formulis differentialibus duplicatis continentur, quas ſub hac forma $V\,dx\,dy$ repraeſentari diximus, deſignante ſcilicet V functionem quamcunque variabilium x, y, z et differentialium inde ortorum. Quamuis autem

 ea

ea quae tum a nobis allata fuere, generaliter locum habeant, qualiscunque quantitas V concipiatur esse functio ipsorum x, y, z et differentialium inde pendentium, tamen quum potissimum ad eos casus pertinere videantur, quibus V est functio algebraica, nullam scilicet formulam integralem ipsa inuoluens, hoc loco haud iniucundum fore arbitrati sumus fusius exponere, quae criteria integrabilitatis locum habere debeant pro casu formulae differentialis duplicatae $V' dx\,dy$, vbi V' statuitur $= \int V\,dx\,dy$, imprimis quum aequationes, quibus haec criteria continentur mirabili quadam concinnitate et praestantia se commendare videantur. Statuamus igitur vti antea § 21. Differt. I.

$$\begin{aligned} dV = L\,dx + N\,dz &+ P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.} \\ + M\,dy \quad &+ P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' \\ &\qquad\qquad + Q''\,dq'' + R''\,dr'' \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + R'''\,dr''' \end{aligned}$$

et tum quidem quia euidens est $V' dx\,dy$ integrale admittere non posse, nisi formula quoque $V\,dx\,dy$ sit integrabilis, facile intelligitur ante omnia requiri, vt aequationibus §. 33. Differt I satisfiat. Vt vero conditiones quoque inueniantur, quae pro integrabilitate formulae $V' dx\,dy$ speciatim praescribendae sunt, ponamus:

$$\begin{aligned} dV' = \lambda\,dx + \nu\,dz &+ \pi\,dp + \varkappa\,dq + \varrho\,dr + \text{etc.} \\ + \mu\,dy \quad &+ \pi'\,dp' + \varkappa'\,dq' + \varrho'\,dr' \\ &\qquad\qquad + \varkappa''\,dq'' + \varrho''\,dr'' \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \varrho'''\,dr''' \end{aligned}$$

tum

tum vero posito $\iint V' \, dx \, dy = Z$

$$\begin{aligned} dZ = \mathfrak{L}\,dx + \mathfrak{R}\,dp + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq \quad & \text{etc.} \\ + \mathfrak{M}\,dy \qquad + \mathfrak{P}'\,dp' + \mathfrak{Q}'\,dq' & \\ + \mathfrak{Q}''\,dq''. & \end{aligned}$$

Ne autem nimia multitudine formularum obruamur, ponamus in valore differentialis dZ vltimos terminos esse $\mathfrak{P}\,dp$ et $\mathfrak{P}'\,dp'$ ex natura enim aequationum vltimarum ad quas calculus perducet, facile apparebit enodationem specialis huius exempli, vim demonstrationis generalis habere. Rationibus autem subductis vti §. 28. Dissert. I. factum est, inuenimus criteria integrabilitatis formulae $V'\,dx\,dy$ sequentibus septem contineri aequationibus:

$\mathfrak{Q} = 0$; $\mathfrak{Q}' = 0$; $\mathfrak{Q}'' = 0$; $\mathfrak{R} = 0$; $\mathfrak{R}' = 0$; $\mathfrak{R}'' = 0$; $\mathfrak{R}''' = 0$.

Eadem criteria igitur sequentibus quoque aequationibus expressa esse, intelligi debet:

$$0 = \left(\frac{d^6\,\mathfrak{Q}}{dx^4\,dy^2}\right) = \left(\frac{d^4\,\varkappa}{dx^3\,dy}\right) - \left(\frac{d^3\,\pi}{dx^2\,dy}\right) + \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^5\,\mathfrak{Q}'}{dx^2\,dy^3}\right) = \left(\frac{d^4\,\varkappa'}{dx^2\,dy^2}\right) - \left(\frac{d^3\,\pi}{dx^2\,dy}\right) + \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^3\,\pi'}{dx\,dy^2}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^6\,\mathfrak{Q}''}{dx^2\,dy^4}\right) = \left(\frac{d^4\,\varkappa''}{dx\,dy^3}\right) - \left(\frac{d^3\,\pi'}{dx\,dy^2}\right) + \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^7\,\mathfrak{R}}{dx^5\,dy^2}\right) = \left(\frac{d^5\,\rho}{dx^4\,dy}\right) - \left(\frac{d^4\,\varkappa}{dx^3\,dy}\right) + \left(\frac{d^3\,\pi}{dx^2\,dy}\right) - \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^7\,\mathfrak{R}'}{dx^4\,dy^3}\right) = \left(\frac{d^5\,\rho'}{dx^3\,dy^2}\right) - \left(\frac{d^4\,\varkappa}{dx^3\,dy}\right) + \left(\frac{d^3\,\pi}{dx^2\,dy}\right) - \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^4\,\varkappa'}{dx^2\,dy^2}\right) + \left(\frac{dd\,\pi'}{dx\,dy^2}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^7\,\mathfrak{R}''}{dx^3\,dy^4}\right) = \left(\frac{d^5\,\rho''}{dx^2\,dy^3}\right) - \left(\frac{d^4\,\varkappa'}{dx^2\,dy^2}\right) + \left(\frac{d^3\,\pi}{dx^2\,dy}\right) - \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^4\,\varkappa''}{dx\,dy^3}\right) + \left(\frac{d^3\,\pi'}{dx\,dy^2}\right)$$

$$0 = \left(\frac{d^7\,\mathfrak{R}'''}{dx^2\,dy^6}\right) = \left(\frac{d^5\,\rho'''}{dx\,dy^4}\right) - \left(\frac{d^4\,\varkappa''}{dx\,dy^3}\right) + \left(\frac{d^3\,\pi'}{dx\,dy^2}\right) - \left(\frac{dd\,\nu}{dx\,dy}\right)$$

quarum

quarum aequationum ratio ex differtatione fuperiori perfpicua redditur.

9. In formulis differentialibus litteras Graecas inuoluentibus, earum valores §. 29. Differt. I. allatos introducamus, quo facto has feptem obtinebimus aequalitates, criteria integrabilitatis propofitae formulae $V' dx\, dy$ complectentes:

$$\text{I.}\quad 3N - 2\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) = 0$$

$$\text{II.}\quad 4N - 2\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) = 0$$
$$- 2\left(\frac{dP'}{dy}\right)$$

$$\text{III.}\quad 3N - 2\left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) = 0$$

$$\text{IV.}\quad 4N - 3\left(\frac{dP}{dx}\right) + 2\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) = 0$$

$$\text{V.}\quad 6N - 4\left(\frac{dP}{dx}\right) + 2\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) = 0$$
$$- 3\left(\frac{dP'}{dy}\right) + 2\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right)$$

$$\text{VI.}\quad 6N - 3\left(\frac{dP}{dx}\right) + 2\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) = 0$$
$$- 4\left(\frac{dP'}{dy}\right) + 2\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right)$$

$$\text{VII.}\quad 4N - 3\left(\frac{dP'}{dy}\right) + 2\left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) = 0.$$

Si vero fequentes iam inftituantur combinationes V − 2 I et VI − 2. III confequemur:

$$3\left(\frac{dP'}{dy}\right) - 2\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^3R'}{dx^2dy}\right) = 0$$

$$\text{et}\quad 3\left(\frac{dP}{dx}\right) - 2\left(\frac{ddQ'}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) = 0.$$

Vlte-

Vlterius ſumendo (III) + VI − V + I − II atque (III) + V − V I + III − II (vbi (III) ſignificat aequationem tertiam § 29. Differt: I.) prodibit:

$$3\left(\frac{d\,d\,Q''}{d\,y^2}\right) - 2\left(\frac{d^3\,R''}{d\,x\;d\,y^2}\right) + \left(\frac{d^4\,S''}{d\,x^2\,d\,y^2}\right) = 0 \text{ et}$$

$$3\left(\frac{d\,d\,Q}{d\,x^2}\right) - 2\left(\frac{d^3\,R'}{d\,x^2\;d\,y}\right) + \left(\frac{d^4\,S''}{d\,x^2\,d\,y^2}\right) = 0.$$

Denique capiendo (IV − IX) + VII et (II − VIII) + IV obtinebimus:

$$6N - 2\left(\frac{d\,P}{d\,x}\right) + \left(\frac{d\,d\,Q}{d\,x^2}\right) - \left(\frac{d^3\,R'}{d\,x^2\,d\,y}\right) + \left(\frac{d^4\,S''}{d\,x^2\,d\,y^2}\right) - \left(\frac{d^5\,T'''}{d\,x^2\,d\,y^3}\right) = 0$$
$$-5\left(\frac{d\,P'}{d\,y}\right) + 2\left(\frac{d\,d\,Q'}{d\,x\,d\,y}\right) - 2\left(\frac{d^3\,R''}{d\,x\;d\,y^2}\right) + 2\left(\frac{d^4\,S'''}{d\,x\;d\,y^3}\right)$$
$$+4\left(\frac{d\,d\,Q''}{d\,y^2}\right) - 3\left(\frac{d^3\,R'''}{d\,y^3}\right)$$

in qua aequatione ſi deleantur termini, qui propter aequationes modo allatas nihilo aequantur, tandem fiet:

$$3\left(\frac{d^3\,R'''}{d\,y^3}\right) - 2\left(\frac{d^4\,S'''}{d\,x\,d\,y^3}\right) + \left(\frac{d^5\,T'''}{d\,x^2\;d\,y^3}\right) = 0.$$

Simili vero prorſus modo demonſtrabitur eſſe

$$3\left(\frac{d^3\,R}{d\,x^3}\right) - \left(\frac{d^4\,S'}{d\,y\,d\,x^3}\right) + \left(\frac{d^5\,T''}{d\,y^2\,d\,x^3}\right) = 0.$$

Porro et hoc obſeruari meretur, eſſe tam $\left(\frac{d^4\,S}{d\,x^4}\right)$, quam $\left(\frac{d^4\,S'''}{d\,y^4}\right) = 0$, quod facile patet, ſi IV − I ſubtrahatur a (I) atque VII − III a (V). Aequationes vero modo inuentae ita comparatae ſunt, vt facillime combinari queant, cum iis quas §. 32. Diſſert. I. in medium attulimus, nihil autem attinet, de modo quo hae combinationes inſtituendae vberius diſſerere, quia ex formulis inde deductis, facile pateſcat qua ratione formandae ſint. Iſtae formulae autem per combinationem elicitae, vnica omnino hac formula comprehendi possunt:

$$\begin{aligned}
6N - 5\left(\tfrac{dP}{dx}\right) + 4\left(\tfrac{ddQ}{dx^2}\right) - 3\left(\tfrac{d^3R}{dx^3}\right) + 2\left(\tfrac{d^4S}{dx^4}\right) - \left(\tfrac{d^5T}{dx^5}\right)&\\
- 5\left(\tfrac{dP'}{dy}\right) + 4\left(\tfrac{ddQ'}{dx\,dy}\right) - 3\left(\tfrac{d^3R'}{dx^2\,dy}\right) + 2\left(\tfrac{d^4S'}{dx^3\,dy}\right) - \left(\tfrac{d^5T'}{dx^4\,dy}\right)&\\
+ 4\left(\tfrac{ddQ''}{dy^2}\right) - 3\left(\tfrac{d^3R''}{dx\,dy^2}\right) + 2\left(\tfrac{d^4S''}{dx^2\,dy^2}\right) - \left(\tfrac{d^5T''}{dx^3\,dy^2}\right)& = 0\\
- 3\left(\tfrac{d^3R'''}{dy^3}\right) + 2\left(\tfrac{d^4S'''}{dx\,dy^3}\right) - \left(\tfrac{d^5T'''}{dx^2\,dy^3}\right)&\\
+ 2\left(\tfrac{d^4S''''}{dy^4}\right) - \left(\tfrac{d^5T''''}{dx\,dy^4}\right)&\\
- \left(\tfrac{d^5T'''''}{dy^5}\right)&
\end{aligned}$$

de qua certe obseruari meretur, omnia membra in iisdem lineis siue horizontalibus, siue diagonalibus collocata, formulas praebere euanescentes.

10. Ex combinatione huius formulae cum illa §. 33. Differt. I. allata, sequentes demum binae eruentur aequationes, pro criteriis integrabilitatis formulae $V^{I}\,dx\,dy$

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad P - 2\left(\tfrac{dQ}{dx}\right) + 3\left(\tfrac{ddR}{dx^2}\right) - 4\left(\tfrac{d^3S}{dx^3}\right) + 5\left(\tfrac{d^4T}{dx^4}\right)&\\
- 2\left(\tfrac{dQ'}{dy}\right) + 3\left(\tfrac{ddR'}{dx\,dy}\right) - 4\left(\tfrac{d^3S'}{dx^2\,dy}\right) + 5\left(\tfrac{d^4T'}{dx^3\,dy}\right)&\\
+ 3\left(\tfrac{ddR''}{dy^2}\right) - 4\left(\tfrac{d^3S''}{dx\,dy^2}\right) + 5\left(\tfrac{d^4T''}{dx^2\,dy^2}\right)& = 0\\
- 4\left(\tfrac{d^3S'''}{dy^3}\right) + 5\left(\tfrac{d^4T'''}{dx\,dy^3}\right)&\\
+ 5\left(\tfrac{d^4T''''}{dy^4}\right)&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{II. } P &- 2\left(\frac{dQ''}{dy}\right) + 3\left(\frac{ddR'''}{dy^2}\right) - 4\left(\frac{d^3S''''}{dy^3}\right) + 5\left(\frac{d^4T'''''}{dy^4}\right)\\ &- 2\left(\frac{dQ'}{dx}\right) + 3\left(\frac{ddR''}{dx\,dy}\right) - 4\left(\frac{d^3S'''}{dx\,dy^2}\right) + 5\left(\frac{d^4T''''}{dx\,dy^3}\right)\\ &\qquad + 3\left(\frac{ddR'}{dx^2}\right) - 4\left(\frac{d^3S''}{dx^2dy}\right) + 5\left(\frac{d^4T'''}{dx^2dy^2}\right) = 0\\ &\qquad\qquad - 4\left(\frac{d^3S'}{dx^3}\right) + 5\left(\frac{d^4T''}{dx^3dy}\right)\\ &\qquad\qquad\qquad + 5\left(\frac{d^4T'}{dy^4}\right).\end{aligned}$$

Pro ambabus autem his aequationibus tenendum eſt, membra iisdem lineis horizontalibus et diagonalibus expreſſa formulas praebere euaneſcentes. Ex ipſa autem rei natura perſpicitur quantitates S, S'''', T, T', T'''', T''''' euaneſcere debere, de quo ea quae §. 34. Diſſert. I. occurrunt, conſuli poterunt.

11. Nunc vero et facili coniectura aſſequi poſſumus, qualia proditura forent criteria integrabilitatis pro huiusmodi formula $V''\,dx\,dy$ vbi $V'' = \iint V'\,dx\,dy$ et $V' = \iint V\,dx\,dy$, poſito vt ante

$$\begin{aligned} dV = L\,dx + N\,dz &+ P\,dp + Q\,dq + \text{etc.}\\ + M\,dy \qquad &+ P'\,dp' + Q'\,dq'\\ &\qquad\quad + Q''\,dq''.\end{aligned}$$

Euidens ſcilicet eſt eadem huiusmodi aequationibus exprimi:

$$\begin{aligned} Q &- 3\left(\frac{dR}{dx}\right) + 6\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - 10\left(\frac{d^3T}{dx^3}\right) + \text{etc.}\\ &- 3\left(\frac{dR'}{dy}\right) + 6\left(\frac{ddS'}{dx\,dy}\right) - 10\left(\frac{d^3T'}{dx^2dy}\right) \qquad = 0\\ &\qquad + 6\left(\frac{ddS''}{dy^2}\right) - 10\left(\frac{d^3T''}{dx\,dy^2}\right)\\ &\qquad\qquad - 10\left(\frac{d^3T'''}{dy^3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} Q' - 3\left(\frac{dR'}{dx}\right) + 6\left(\frac{ddS'}{dx^2}\right) - 10\left(\frac{d^3T'}{dx^3}\right) + \text{etc.} \\ \quad - 3\left(\frac{dR''}{dy}\right) + 6\left(\frac{ddS''}{dx\,dy}\right) - 10\left(\frac{d^3T''}{dx^2\,dy}\right) \qquad = 0 \\ \qquad\qquad + 6\left(\frac{ddS'''}{dy^2}\right) - 10\left(\frac{d^3T'''}{dx\,dy^2}\right) \\ \qquad\qquad\qquad - 10\left(\frac{d^3T''''}{dy^3}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Q'' - 3\left(\frac{dR''}{dx}\right) + 6\left(\frac{ddS''}{dx^2}\right) - 10\left(\frac{d^3T''}{dx^3}\right) + \text{etc.} \\ \quad - 3\left(\frac{dR'''}{dy}\right) + 6\left(\frac{ddS'''}{dx\,dy}\right) - 10\left(\frac{d^3T'''}{dx^2\,dy}\right) \qquad = 0 \\ \qquad\qquad + 6\left(\frac{ddS''''}{dy^2}\right) - 10\left(\frac{d^3T''''}{dx\,dy^2}\right) \\ \qquad\qquad\qquad - 10\left(\frac{d^3T'''''}{dy^3}\right). \end{array}$$

Inutile autem ducimus in demonſtrationem harum aequalitatum vlterius inquirere, praeſertim quia facile praeuidere licet, calculum eo perducentem, nimis euadere prolixum, nobis autem modum quendam tenendum eſſe iudicauimus, ne maiori prolixitate lectorum defatigemus attentionem. Quod quum ita ſit, etiam ea quae de formulis differentialibus triplicatis vel altiorum ordinum, ſimili ratione ac de duplicatis demonſtrari poſſent, plane praetermittenda eſſe cenſuimus.

12. Cum autem nunc doctrinam antea expoſitam exemplis quibusdam illuſtrare nobis proponimus, in genere praemonendum eſt, exempla iſta a nobis adducenda duplicis eſſe generis, prius enim eas complectetur formulas differentiales, quae per ſe integrationem admittunt, dum poſterius ad eiusmodi pertinet formulas, quae non quidem per ſe integrabiles

ſunt

ſunt, idoneo tamen multiplicatore adhibito in quem duci debent, reddi poſſunt integrabiles. In eo etenim praecipuus vſus doctrinae de criteriis integrabilitatis conſiſtit, quod anſam praebeat huiusmodi multiplicatores inueniendi; nam iis formulis differentialibus, quas per ſe integrabiles eſſe conſtat, ipſorum integralia aſſignare, minimum quidem hac in re faceſſit negotium. Praeterea et eam ordinis regulam obſeruandam nobis praeſcripſimus, quam ſupra quoque ſecuti ſumus, vt formulas primum differentiales ſimplices tractemus, tum vero ad duplicatas et altiorum generum progrediamur.

13. Sit igitur nunc propoſita haec aequatio

$$V = \frac{xq + p}{y} - \frac{xpp}{yy} + \frac{yr + pq}{p} - \frac{yqq}{pp}$$

de qua ad praeſcriptum regularum antea traditarum inquiri debet, an formula $V\,dx$ ſit integrabilis nec ne? Differentiali autem ſumto habemus:

$$dV = dx\left(\frac{q}{y} - \frac{pp}{yy}\right) + dy\left(-\frac{(p + xq)}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} + \frac{r}{p} - \frac{qq}{pp}\right)$$
$$+ dp\left(\frac{1}{y} - \frac{2px}{yy} - \frac{yr}{pp} + \frac{2yqq}{p^3}\right) + dq\left(\frac{x}{y} + 1 - \frac{2yq}{pp}\right) + \frac{ydr}{p}$$

vnde pro M, N, P etc. ſequentes obtinemus valores:

$$M = \frac{q}{y} - \frac{pp}{yy};\quad N = -\frac{(p + xq)}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} + \frac{r}{p} - \frac{qq}{pp}$$
$$P = \frac{1}{y} - \frac{2px}{yy} - \frac{yr}{pp} + \frac{2yqq}{p^3};\quad Q = \frac{x}{y} + 1 - \frac{2yq}{pp};\quad R = \frac{y}{p}.$$

Quum itaque eſſe debeat

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} = 0$$

primum inueniemus

$$Q-\frac{dR}{dx}=\frac{x}{y}-\frac{yq}{pp}, \text{ porro } P-\frac{dQ}{dx}+\frac{ddR}{dx^2}=\frac{-px}{yy}+\frac{q}{p}$$

et denique

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}=-\frac{(p+xq)}{yy}+\frac{2xpp}{y^3}+\frac{r}{p}-\frac{qq}{pp}$$
$$-\frac{1}{dx}d.\left(\frac{q}{p}-\frac{px}{yy}\right)=0.$$

Quum igitur conditio integrabilitatis impleatur, certi esse possumus, formulam propositam integrabilem esse, et liquet omnino eius integrale esse $\frac{xp}{y}+\frac{yq}{p}$. Videamus vero et nunc vtrum reliquae illae formulae integrabiles sint, ad quarum integrabilitatem ista formulae nostrae propositae quasi reducatur vid § 6 huius dissertationis. Necessum igitur est, vt sequentes formulae integrari queant:

$$M\,dx,\ N\,dx,\ dx(Nx+P);\ dx(Nx^2+2Px+2Q).$$

Liquet autem esse

$$\int M\,dx=\frac{p}{y};\ \int N\,dx=\frac{q}{p}-\frac{px}{yy}, \text{ vlterius}$$

$$dx(Nx+P)=dx\left(-\frac{(x^2q+px)}{yy}+\frac{2x^2pp}{y^3}+\frac{rx}{p}-\frac{qqx}{pp}+\frac{1}{y}-\frac{2px}{yy}-\frac{yr}{pp}+\frac{2yqq}{p^3}\right)$$
$$=-\frac{x^2dp-xpdx}{yy}+\frac{2x^2pdy}{y^3}+\frac{xdq}{p}-\frac{xqdp}{pp}+\frac{dx}{y}-\frac{xdy}{yy}-\frac{ydq}{pp}+\frac{2yqdp}{p^3}$$

vnde integrando fit

$$\int dx(Nx+P)=\frac{x}{y}-\frac{x^2p}{yy}-\frac{yq}{pp}.$$

Porro habetur

$$dx(Nx^2+2Px+2Q)=dx\left(-\frac{x^3q-x^2p}{yy}+\frac{2x^3pp}{y^3}+\frac{xxr}{p}-\frac{xxqq}{pp}+\frac{4x}{y}-\frac{4x^2p}{yy}\right)$$
$$+dx\left(-\frac{2xyr}{pp}+\frac{4xyqq}{p^3}+2-\frac{4yq}{pp}\right)$$
$$=-\frac{x^3dp-3x^2pdx}{yy}+\frac{2x^3pdy}{y^3}+\frac{4xdx}{y}-\frac{2x^2dy}{yy}+x^2\left(\frac{dq}{p}-\frac{qdp}{pp}\right)+\frac{2xqdx}{p}$$
$$-\frac{2xqdy}{pp}-\frac{2xydq}{pp}+\frac{4xyqdp}{p^3}-\frac{2yqdx}{pp}+2\frac{(pdy-ydp)}{pp}$$

cuius

cuius integrale manifesto est

$$\int dx(Nx^2+2Px+2Q) = -\frac{x^3p}{y^2}+\frac{2x^2}{y}+\frac{x^2q}{p}$$
$$-\frac{2xyq}{pp}+\frac{2y}{p}.$$

14. Proposita nunc esto formula

$$dx\left(\frac{xr+2q}{yy}-\frac{6xpq+4pp}{y^3}+\frac{6xp^3}{y^4}\right)=V\,dx$$

quam examinemus an bis sit integrabilis, hoc est an non solum $\int V\,dx$, verum etiam $\int dx\int V\,dx$ verum constituat integrale? Differentiali autem sumto prodit

$$dV=\frac{x\,dr+r\,dx+2\,dq}{yy}-\frac{2(xr+2q)dy}{y^3}-\frac{(6pq\,dx+6xq\,dp+6xp\,dq)}{y^3}$$
$$-\frac{8p\,dp}{y^3}+\frac{3(6xpq+4pp)dy}{y^4}+\frac{6p^3dx+18xp^2dp}{y^4}-\frac{24xp^3dy}{y^5}$$

vnde sequentes consequimur valores:

$$M=\frac{r}{yy}-\frac{6pq}{y^3}+\frac{6p^3}{y^4}$$
$$N=\frac{-2xr-4q}{y^3}+\frac{18xpq+12pp}{y^4}-\frac{24xp^3}{y^5}$$
$$P=\frac{-6xq-8p}{y^3}+\frac{18xp^2}{y^4}$$
$$Q=\frac{2}{yy}-\frac{6xp}{y^3}\ \text{et}\ R=\frac{x}{yy}.$$

Videndum igitur est, vtrum his duabus satisfiat aequationibus:

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}=0\ \text{et}$$
$$P-\frac{2\,dQ}{dx}+\frac{3\,ddR}{dx^2}=0\ ?$$

quod si euenerit, nullum est dubium, quin formula proposita sit integrabilis. Quum autem habeatur

$$Q-\frac{dR}{dx}=\frac{1}{yy}-\frac{4xp}{y^3}\ \text{et}$$
$$P-\frac{dQ}{dx}+\frac{ddR}{dx^2}=\frac{-2xq-2p}{y^3}+\frac{6xpp}{y^4}$$

certe

certe adipiſcimur

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} = 0.$$

Pro poſteriori criterio habemus

$$2Q - 3\frac{dR}{dx} = \frac{1}{yy} - \frac{6xp}{y^3}, \text{ ideoque } P - \frac{2dQ}{dx} + \frac{3ddR}{dx^2} = 0.$$

De reliquis formulis, quas integrabiles eſſe oportet, periculum nunc quoque facere lubet, habebimus a tem :

$$\int M\,dx = \int\left(\frac{dq}{yy} - \frac{2q\,dy}{y^3} - \frac{4p\,dp}{y^3} + \frac{6p^2\,dy}{y^4}\right) = \frac{q}{yy} - \frac{2p^2}{y^3},$$

$$\int dx \int M\,dx = \int\left(\frac{dp}{yy} - \frac{2p\,dy}{y^3}\right) = \frac{p}{yy},$$

$$\int N\,dx = \int\left(-\frac{2x\,dq - 2q\,dx}{y^3} + \frac{6xq\,dy}{y^4} - \frac{2dp}{y^3} + \frac{6p\,dy}{y^4} + \frac{12xp\,dp + 6pp\,dx}{y^4} - \frac{24xp^3}{y^5}dy\right)$$

$$= -\frac{2xq}{y^3} - \frac{2p}{y^3} + \frac{6xpp}{y^4}$$

$$\int dx \int N\,dx = \int\left(-\frac{2x\,dp - 2p\,dx}{y^3} + \frac{6xp\,dy}{y^4}\right) = -\frac{2xp}{y^3}.$$

Porro

$$\int P\,dx = \int\left(-\frac{6x\,dp - 6p\,dx}{y^3} + \frac{18xp\,dy}{y^4} - \frac{2dy}{y^3}\right) = -\frac{6xp}{y^3} + \frac{1}{yy}$$

ideoque

$$\int^{(2)} N\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int Q\,dx = \int\left(\frac{dx}{yy} - \frac{2x\,dy}{y^3}\right) = \frac{x}{yy} \text{ et}$$

$$\int^{(4)} N\,dx - \int^{(3)} P\,dx + \int^{(2)} Q\,dx - \int R\,dx = 0.$$

Vlterius erit

$$\int^{(2)} P\,dx - 2\int Q\,dx = \int\left(-\frac{3dx}{yy} + \frac{6x\,dy}{y^3}\right) = -\frac{3x}{yy} \text{ et denique}$$

$$\int^{(3)} P\,dx - 2\int^{(2)} Q\,dx + 3\int R\,dx = 0.$$

15. Dum exempla iam propoſituri erimus formularum differentialium, quae per ſe integrabiles non

non ſunt, at in certos multiplicatores ductae ad integrabilitatem perducantur, haud praeter rem erit, de indole horum multiplicatorum pauca praefari. Primum igitur licet concedendum ſit, vnamquamque formulam differentialem eius eſſe indolis, vt in certum multiplicatorem ducta integrabilis reddatur, minime tamen inde ſequitur huiusmodi multiplicatorem pro idoneo eſſe habendum, ſi differentialia altiorum ordinum inuoluat, quam quae in ipſa formula differentiali propoſita reperiuntur. Quum enim integratio in eo conſiſtat, vt formula differentialis propoſita, ad aliam gradus proxime inferioris deprimatur, facile liquet ineptum habendum eſſe multiplicatorem, qui differentialia ſuperioris gradus involueret, quam quae in ipſa formula ad integrandum propoſita occurrunt. Sic ſi quaeratur integrale formulae $\psi\, d\, x$ per ſe non integrabilis, in qua ψ quamcunque deſignat functionem ipſorum x, y, p, q, quiuis facile iudicare poteſt, multiplicatorem hunc in finem adhibendum non inuoluere debere valores differentiales vltra p aſſurgentes, quoniam ipſum integrale, quodcunque demum ſit, vt functio ipſorum x, y, p conſiderari debet. Deinde et id notari meretur quod ſi multiplicator aliquis idoneus formulae $\psi\, d\, x$ fuerit inuentus, quem littera Φ indigitemus, tum ex hoc infinitos alios elici poſſe, quorum ope eadem formula $\psi\, d\, x$ reddatur integrabilis. Si enim ponamus $\int \Phi\, \psi\, d\, x = z$, facile intelligitur huiusmodi formulam $d\, z\, \Gamma : z$ (deſignante $\Gamma : z$ quamcunque functionem ipſius z) pro integrabili esse habendam, siquidem huius formulae integratio referenda est ad primam calculi integralis partem, quae de integratione formularum differentialium vnicam variabilem inuoluentium agit, cuius omnes operationes hoc in negotio pro concessis haberi debent. Liquet igitur multiplicatores idoneos formulae propositae $\psi\, d\, x$, generaliter hac expressione contineri $\Phi\, \Gamma : z$ seu $\Phi\, \Gamma : (\int \Phi\, \psi\, d\, x)$ hincque ex vnico multiplicatore Φ inuento, infinitam multitudinem deduci posse. In inuestigando autem multiplicatore Φ, haec praescribenda videtur regula, vt semper simplicissimus qui fieri possit exquiratur, hoc est talis, qui minimum numerum variabilium x, y, p etc. inuoluit, sic si proposita fuerit formula $\psi\, d\, x$ in qua ψ functio habetur ipsorum x, y, p, q, simplicissimus erit multiplicator Φ, si ita comparatus sit, vt vnicam tantum variabilem x inuoluat. Quodsi autem talem inuenire non liceat, proxime inquirendum est, vtrum detur functio quaedam vel solius y vel ipsorum x et y per quam $\psi\, d\, x$ multiplicata reddatur integrabilis, cum autem neque hoc succedat, tum inquirendum erit, an pro Φ accipere liceat functionem quandam ipsorum x, y, p?

16. Proposita iam esto formula differentialis:

$$d\, y + y\, v\, d\, x + z\, d\, x$$

vbi v et z quaecunque functiones ipsius x designant, quum autem haec formula per se non sit integrabilis, quod examine instituto facile deprehendetur, quaeramus iam quantitatem per quam multiplicata,

ad

ad integrabilitatem perducatur. Sit igitur quantitas Φ talis multiplicator, quem nunc ſupponamus eſſe tantum functionem ipſius x, quo ſuppoſito, euidens fit formulam $\Phi\,(dy + yv\,dx)$ integrationem admittere debere, ſiquidem $\Phi\,z\,dx$ iam per ſe intelligitur eſſe integrabilis. Habemus vero tunc pro formula noſtra

$$V = \Phi(p+yv);\; dV = d\Phi(p+yv) + \Phi(dp+vdy+ydv)$$

vnde deducitur

$$M = \tfrac{d\Phi}{dx}(p+yv) + \Phi y \tfrac{dv}{dx};\;\; N = \Phi v \text{ et } P = \Phi,$$

itaque quum eſſe debeat $N - \frac{dP}{dx} = 0$, fiet $\Phi v - \frac{d\Phi}{dx} = 0$, ideoque $\frac{d\Phi}{\Phi} = v\,dx$, ſeu $\Phi = e^{\int v\,dx}$. Integrale autem ipſum iam erit $y\,e^{\int v\,dx}$, ideoque totius formulae propoſitae:

$$y\,e^{\int v\,dx} + \int e^{\int v\,dx}.\,z\,dx.$$

Enimuero operae pretium iam quoque erit inueſtigare multiplicatorem generaliorem, qui functio ſit vtriusque x et y, et de quo ex antea monitis quidem conſtat, eum huiusmodi exprimi forma:

$$e^{\int v\,dx}\,\Gamma : (y\,e^{\int v\,dx} + \int e^{\int v\,dx}.\,z\,dx).$$

Statuamus autem vt antea hunc multiplicatorem Φ, et quum nunc ſit

$$V = \Phi(p+yv+z), \text{ nec non } dV = d\Phi(p+yv+z) + \Phi(dp+ydv+vdy+dz)$$

erit

$$M = (\tfrac{d\Phi}{dx})(p+yv+z) + \Phi(\tfrac{ydv}{dx} + \tfrac{dz}{dx});$$
$$N = (\tfrac{d\Phi}{dy})(p+yv+z) + \Phi v$$

 $P = \Phi$,

$P = \Phi$, hinc autem ista iam deducitur aequatio:

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(p + yv + z) + \Phi v - \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) - p\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = 0, \text{ seu}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(yv + z) - \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi v = 0.$$

Ponamus nunc $\Phi = \Phi' \psi$, vbi Φ' denotat functionem solam x inuoluentem, ψ autem talem quae vtramque x et y continet, atque ob

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = \psi \frac{d\Phi'}{dx} + \Phi'\left(\frac{d\psi}{dx}\right);\ \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = \Phi'\left(\frac{d\psi}{dy}\right),$$

his valoribus in aequatione superiori substitutis consequimur:

$$\Phi'\left(\frac{d\psi}{dy}\right)(yv + z) - \psi\frac{d\Phi'}{dx} - \Phi'\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \Phi'\psi v = 0.$$

Nunc facile quidem apparet, hanc aequationem in duas dispesci posse partes, quarum vtraque euanescere debet, erit scilicet

$$\text{I. } \Phi' v - \frac{d\Phi'}{dx} = 0 \text{ et II. } \left(\frac{d\psi}{dy}\right)(yv + z) - \left(\frac{d\psi}{dx}\right) = 0,$$

ex priori statim deducitur $\Phi' = e^{\int v\, dx}$, quod autem posteriorem attinet, facile liquet ψ habere debere huiusmodi formam $\Gamma : (yS + T)$, designantibus S et T functiones quasdam solius variabilis x. Fiet vero inde

$$\left(\frac{d\psi}{dy}\right) = S\Gamma' : (yS + T) \text{ et } \left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \left(\frac{y\,dS}{dx} + \frac{dT}{dx}\right)\Gamma' : (yS + T)$$

hinc ergo prodibit

$$S(yv + z) - y\frac{dS}{dx} - \frac{dT}{dx} = 0,$$

ideoque $Sv - \frac{dS}{dx} = 0$ et $Sz - \frac{dT}{dx} = 0$,

vnde deducitur

$$S = e^{\int v\,dx} \text{ et } T = \int Sz\,dx = \int e^{\int v\,dx} z\,dx,$$

multi-

multiplicator quaesitus igitur erit

$$e^{\int v d x}\Gamma : (y e^{\int v d x} + \int e^{\int v d x} . z d x)$$

prorsus vti supra docuimus.

17. Pro formula differentiali:

$$\alpha x d y + \beta y d x + x^m y^n (\gamma x d y + \delta y d x)$$

quaeramus nunc multiplicatorem, quo integrabilis reddatur, posito igitur hoc multiplicatore $= \Phi$, habebimus

$$V = \Phi(\alpha x p + \beta y + x^m y^n (\gamma x p + \delta y))$$

ideoque differentiatione instituta, sequentes prodibunt valores:

$$M = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)(\alpha x p + \beta y + x^m y^n (\gamma x p + \delta y))$$
$$+ \Phi(\alpha p + x^{m-1} y^n ((m+1)\gamma x p + m \delta y))$$

$$N = \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(\alpha x p + \beta y + x^m y^n (\gamma x p + \delta y))$$
$$+ \Phi(\beta + x^m y^{n-1} (n \gamma x p + (n+1)\delta y))$$

$$P = \Phi(\alpha x + \gamma x^{m+1} y^n).$$

Quum igitur esse debeat $N - \frac{dP}{dx} = 0$, hinc deducetur:

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(\alpha x p + \beta y + x^m y^n (\gamma x p + \delta y)) - \frac{d\Phi}{dx}(\alpha x + \gamma x^{m+1} y^n)$$
$$+ \Phi(\beta + x^m y^{n-1} (n \gamma x p + (n+1)\delta y))$$
$$- \Phi(\alpha + (m+1)\gamma x^m y^n + n \gamma x^{m+1} y^{n-1} p) = 0$$

et quia

$$\frac{d\Phi}{dx} = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + p\left(\frac{d\Phi}{dy}\right), \text{ erit}$$

$$\Phi(\beta-\alpha+x^m y^n((n+1)\delta-(m+1)\gamma))+(\tfrac{d\Phi}{dy})(\beta y+\delta x^m y^{n+1})$$
$$-(\tfrac{d\Phi}{dx})(\alpha x+\gamma x^{m+1} y^n)=0.$$

Nunc vero euidens eſt, huic aequationi ſatisfieri, ſi ſtatuatur $\Phi=x^\varkappa y^\lambda$, quo facto erit

$$(\tfrac{d\Phi}{dx})=\varkappa x^{\varkappa-1}y^\lambda \text{ et } (\tfrac{d\Phi}{dy})=\lambda x^\varkappa y^{\lambda-1}$$

hisque valoribus introductis et tota aequatione per $x^\varkappa y^\lambda$ diuiſa, fiet

$$\beta-\alpha+x^m y^n((n+1)\delta-(m+1)\gamma)+\lambda\beta-\varkappa\alpha$$
$$+x^m y^n(\lambda\delta-\varkappa\gamma)=0.$$

Hinc autem obtinemus

I° $\beta-\alpha=\varkappa\alpha-\lambda\beta$; II° $(n+1)\delta-(m+1)\gamma=\varkappa\gamma-\lambda\delta$

ex priori fit $\beta(1+\lambda)=\alpha(1+\varkappa)$, ex poſteriori vero

$$\delta(1+n+\lambda)=\gamma(1+m+\varkappa), \text{ ſiue}$$
$$\tfrac{\alpha\delta}{\gamma}(1+n+\lambda)=\alpha m+\alpha(1+\varkappa)=\alpha m+\beta(1+\lambda),$$

erit igitur

$\alpha(\delta n-\gamma m)=(\beta\gamma-\alpha\delta)(1+\lambda)$, vnde $1+\lambda=\frac{\alpha(\delta n-\gamma m)}{\beta\gamma-\alpha\delta}$ ſimilique modo $1+\varkappa=\frac{\beta(\delta n-\gamma m)}{\beta\gamma-\alpha\delta}$.

Integrale autem aequationis propoſitae nunc inuenietur

$$\frac{\beta}{1+\varkappa}x^{1+\varkappa}y^{1+\lambda}+\frac{\delta}{1+m+\varkappa}x^{m+1+\varkappa}y^{n+1+\lambda}$$

Praeterea autem erit

$$\int M\,dx=\int\varkappa^{\varkappa-1}y^\lambda(\alpha x\,dy+\beta y\,dx+x^m y^n(\gamma x\,dy+\delta y\,dx))$$
$$+\int x^\varkappa y^\lambda(\alpha\,dy+x^{m-1}y^n((m+1)\gamma x\,dy+m\delta y))$$
$$=\beta x^\varkappa y^{\lambda+1}+\delta x^{\varkappa+m}y^{\lambda+n+1} \text{ et}$$

$\int N\,dx$

$$\int N\,dx = \int \lambda x^{\varkappa} y^{\lambda-1}(\alpha x\,dy + \beta y\,dx + x^m y^n(\gamma x\,dy + \delta y\,dx))$$
$$+ \int x^{\varkappa} y^{\lambda}(\beta\,dx + x^m y^{n-1}(n\gamma x\,dy + (n+1)\delta y\,dx))$$
$$= \alpha x^{\varkappa+1} y^{\lambda} + \gamma x^{\varkappa+m+1} y^{\lambda+n}.$$

18. Propofita aequatione differentiali homogenea $R\,dx + S\,dy$, pro qua R et S funt functiones homogeneae ipfarum x et y, inueftigemus multiplicatorem, qui eam integrabilem reddat. Si igitur ftatuatur hic multiplicator Φ, habebimus

$$V = \Phi(R + Sp), \text{ hinc}$$
$$M = \left(\tfrac{d\Phi}{dx}\right)(R + Sp) + \Phi\left(\left(\tfrac{dR}{dx}\right) + p\left(\tfrac{dS}{dx}\right)\right)$$
$$N = \left(\tfrac{d\Phi}{dy}\right)(R + Sp) + \Phi\left(\left(\tfrac{dR}{dy}\right) + p\left(\tfrac{dS}{dy}\right)\right)$$

et $P = \Phi S$, tum vero erit

$$N - \tfrac{dP}{dx} = R\left(\tfrac{d\Phi}{dy}\right) - S\left(\tfrac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi\left(\left(\tfrac{dR}{dy}\right) - \left(\tfrac{dS}{dx}\right)\right) = 0.$$

Dum igitur ex hac aequatione valor litterae Φ erui debet, primum obferuaffe iuuat, pro Φ affumi poffe functionem homogeneam ipfarum x et y. Ponamus autem Φ effe functionem homogeneam m dimenfionis et per ea quae in Tom. I. Calculi Different. Illuftris. *Euleri* §. 222. demonftrantur, habebimus

$$m\Phi = x\left(\tfrac{d\Phi}{dx}\right) + y\left(\tfrac{d\Phi}{dy}\right), \text{ hincque}$$
$$Ry\left(\tfrac{d\Phi}{dy}\right) = mR\Phi - Rx\left(\tfrac{d\Phi}{dx}\right)$$

hoc igitur valore in aequatione fuperiori introducto, fiet

$$mR\Phi - (Rx + Sy)\left(\tfrac{d\Phi}{dx}\right) = \Phi\left(y\left(\tfrac{dS}{dx}\right) - y\left(\tfrac{dR}{dy}\right)\right)$$

pro-

proinde

$$dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)=\frac{\Phi}{Rx+Sy}\left(mRdx+ydx\left(\frac{dR}{dy}\right)-ydx\left(\frac{dS}{dx}\right)\right).$$

Simili ratione probatur esse

$$Sx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)=mS\Phi-Sy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right),\text{ vnde}$$

$$(Rx+Sy)\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)-mS\Phi=\Phi\left(x\left(\frac{dS}{dx}\right)-x\left(\frac{dR}{dy}\right)\right)$$

hincque

$$dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)=\frac{\Phi}{Rx+Sy}\left(mSdy+xdy\left(\frac{dS}{dx}\right)-xdy\left(\frac{dR}{dy}\right)\right).$$

Consequenter nunc erit

$$d\Phi=dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)+dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)=$$

$$\frac{\Phi}{Rx+Sy}\left(mRdx+mSdy+(ydx-xdy)\left(\left(\frac{dR}{dy}\right)-\left(\frac{dS}{dx}\right)\right)\right).$$

At ob R et S functiones homogeneas, est

$$ydx\left(\frac{dR}{dy}\right)=nRdx-xdx\left(\frac{dR}{dx}\right)$$

$$xdy\left(\frac{dS}{dx}\right)=nSdy-ydy\left(\frac{dS}{dy}\right)$$

consequenter

$$\frac{d\Phi}{\Phi}=\frac{1}{Rx+Sy}\left(\begin{array}{l}(m+n)(Rdx+Sdy)-xdx\left(\frac{dR}{dx}\right)-xdy\left(\frac{dR}{dy}\right)\\ \qquad\qquad -ydx\left(\frac{dS}{dx}\right)-ydy\left(\frac{dS}{dy}\right)\end{array}\right).$$

$$=\frac{1}{Rx+Sy}((m+n)(Rdx+Sdy)-xdR-ydS).$$

Patet itaque si statuatur $m+n=-1$, fore

$$\frac{d\Phi}{\Phi}=-\frac{d.(Rx+Sy)}{Rx+Sy}\text{ et }\Phi=\frac{1}{Rx+Sy}.$$

Hoc loco autem praetereundum non est, demonstrationem modo allatam, locum habere non posse pro iis casibus, vbi R et S sunt functiones vel nullius

nullius dimenſionis, vel -1 dimenſionis ipſarum x et y, quum pro priori caſu ob $n=0$, ſit $m=-1$, quo caſu fieri nequit, vt iſtae aequalitates

$$nR = x\left(\frac{dR}{dx}\right) + y\left(\frac{dR}{dy}\right) \text{ et } nS = x\left(\frac{dS}{dx}\right) + y\left(\frac{dS}{dy}\right)$$

locum habeant, tum autem poſteriori caſu ob $m=0$, iſta aequalitas

$$m\Phi = x\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + y\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) \text{ plane corruat.}$$

Videndum igitur eſt, quomodo demonſtratio ad hos quoque caſus accommodari poſſit. Atqui quum nullum dubium ſit, noſtram demonſtrationem locum habere, ſi fuerint R et S functiones vnius dimenſionis, examinemus an inde duorum caſuum, quibus $n=0$ vel $n=-1$, ratio reddi queat? Sit itaque propoſita aequatio $R'dx + S'dy$, vbi R' et S' functiones ſunt nullius dimenſionis ipſarum x et y, poſito autem $R'x = R$ et $S'x = S$, quaeramus multiplicatorem formulae differentialis $Rdx + Sdy$, qui vti antea demonſtrauimus erit $\frac{1}{Rx+Sy}$, hinc ergo fiet formula

$$\frac{Rdx+Sdy}{Rx+Sy} = \frac{R'xdx+S'xdy}{R'x^2+S'xy} = \frac{R'dx+S'dy}{R'x+S'y}$$

integrabilis, ex quo nullum eſt dubium, quin $R'dx + S'dy$ reddatur integrabilis diuidendo eam per $R'x + S'y$. Si R' et S' fuerint functiones -1 dimenſionis, multiplicetur vtraque per xy et ſtatuatur $R'xy = R$ et $S'xy = S$, ſicque multiplicator formulae differentialis $Rdx + Sdy$, habebitur $\frac{1}{Rx+Sy}$, integrabilis igitur erit formula

$$\frac{R'xydx+S'xydy}{R'x^2y+S'xy^2} = \frac{R'dx+S'dy}{R'x+S'y}.$$

Per se autem patet esse

$$\int M\,dx = \Phi R \text{ et } \int N\,dx = \Phi S.$$

19. Nunc autem facile perspicitur, quomodo inuestigatio idonei multiplicatoris pro formula $R\,dx + S\,dy$ facilius institui possit. Si enim is multiplicator, vt antea supponatur $= \Phi$, tum vero ponatur $R\Phi = T$ et $S\Phi = U$, ex iis quae supra monuimus facile intelligitur, T et U pro functionibus homogeneis eiusdem dimensionis ipsarum x et y haberi posse. Erit igitur

$$mT = x\left(\frac{dT}{dx}\right) + y\left(\frac{dT}{dy}\right), \text{ nec non } mU = x\left(\frac{dU}{dx}\right) + y\left(\frac{dU}{dy}\right)$$

proinde

$$mT\,dx + mU\,dy = x\,dT + y\,dU + (y\,dx - x\,dy)\left(\left(\frac{dT}{dy}\right) - \left(\frac{dU}{dx}\right)\right)$$

et quandoquidem ob formulam $T\,dx + U\,dy$ integrabilem, fit $\left(\frac{dT}{dy}\right) = \left(\frac{dU}{dx}\right)$, erit nunc

$$mT\,dx + mU\,dy = x\,dT + y\,dU.$$

Introductis autem pro T et U eorum valoribus, consequemur

$$m\Phi(R\,dx + S\,dy) = \Phi(x\,dR + y\,dS) + d\Phi(Rx + Sy)$$

ex quo fit

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{mR\,dx - x\,dR + mS\,dy - y\,dS}{Rx + Sy},$$

si ergo statuatur $m = -1$, fiet

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -\frac{d.(Rx + Sy)}{Rx + Sy}$$

ideoque $\Phi = \frac{1}{Rx + Sy}$.

Patet

Patet autem eodem negotio multiplicatorem latius quoque patentem inueniri, quia enim eſt

$$\frac{d\Phi}{\Phi}+\frac{d.(Rx+Sy)}{Rx+Sy}=(m+1)\frac{(Rdx+Sdy)}{Rx+Sy}, \text{ erit}$$

$$l.\Phi(Rx+Sy)=(m+1)\int\frac{Rdx+Sdy}{Rx+Sy}$$

ideoque ſi ponatur $\frac{Rdx+Sdy}{Rx+Sy}=\frac{dZ}{Z}$, multiplicator idoneus formulae propoſitae, nunc quoque erit $\Phi=\frac{Z^{m+1}}{Rx+Sy}$, ipſum autem integrale inde oriundum eſt $\frac{1}{m+2}Z^{m+2}$.

20. Conſideremus iam formulam differentialem:

$$dx(\alpha+\beta x+\gamma y)+dy(\delta+\varepsilon x+\zeta y)$$

cuius factorem per quem multiplicata integrabilis fiat, inueſtigari oportet. Primum igitur liquet, ſi ſtatuatur

$$\alpha+\beta x+\gamma y=z \text{ et } \delta+\varepsilon x+\zeta y=u$$

inde fieri

$$\beta dx+\gamma dy=dz, \ \varepsilon dx+\zeta dy=du$$

hincque

$$dx=\frac{\zeta dz-\gamma du}{\beta\zeta-\varepsilon\gamma}; \ dy=\frac{\beta du-\varepsilon dz}{\beta\zeta-\varepsilon\gamma},$$

quibus valoribus ſubſtitutis noſtra formula in hanc transformatur

$$(\zeta z-\varepsilon u)dz+(\beta u-\gamma z)du$$

vbi quum iam quantitates, in quas dz et du ducuntur, ſint functiones homogeneae ipſarum z et u,

 per

per § antecedentem, multiplicator hanc formulam integrabilem reddens erit

$$\frac{1}{(\zeta z - \gamma u) z + (\beta u - \varepsilon z) u},$$

siue haec formula fiet integrabilis diuisa per

$$(\alpha + \beta x + \gamma y)((\beta\zeta - \gamma\varepsilon)x + \alpha\zeta - \delta\gamma)$$
$$+ (\delta + \varepsilon x + \zeta y)((\beta\zeta - \gamma\varepsilon)y + \beta\delta - \alpha\varepsilon).$$

Videamus vero nunc an et alio modo, hunc multiplicatorem detegere liceat, statuamus igitur eum $= \Phi$, quumque sit

$$V = \Phi(\alpha + \delta p + \beta x + \varepsilon x p + \gamma y + \zeta y p) \text{ erit}$$
$$M = \left(\tfrac{d\Phi}{dx}\right)(\alpha + \delta p + \beta x + \varepsilon x p + \gamma y + \zeta y p) + \Phi(\beta + \varepsilon p)$$
$$N = \left(\tfrac{d\Phi}{dy}\right)(\alpha + \delta p + \beta x + \varepsilon x p + \gamma y + \zeta y p) + \Phi(\gamma + \zeta p)$$
$$P = \Phi(\delta + \varepsilon x + \zeta y).$$

Hinc ob $N - \frac{dP}{dx} = 0$, fiet

$$\Phi(\gamma - \varepsilon) + \left(\tfrac{d\Phi}{dy}\right)(\alpha + \beta x + \gamma y) - \left(\tfrac{d\Phi}{dx}\right)(\delta + \varepsilon x + \zeta y) = 0$$

ex qua aequatione valorem ipsius Φ quaerere oportet. Verum enimuero quia infiniti valores pro Φ sine dubio dantur, qui huic aequationi satisfaciant, congruum erit pro Φ aliquem valorem assumere, eumque examinare, an conditioni nostrae satisfaciat. Quandoquidem vero casu $\alpha = 0$ et $\delta = 0$, multiplicator esse debeat

$$\frac{1}{(\beta x + \gamma y) x + (\varepsilon x + \zeta y) y},$$

inde rationem adipiscimur pro nostro casu supponendi

$$\Phi = \frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma y)(x + m) + (\delta + \varepsilon x + \zeta y)(y + n)}.$$

Hinc

Hinc vero fit

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = (-\beta(x+m) - (\alpha+\beta x+\gamma y) - \varepsilon(y+n))\Phi^2$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = (-\gamma(x+m) - (\delta+\varepsilon x+\zeta y) - \zeta(y+n))\Phi^2$$

vnde

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(\alpha+\beta x+\gamma y) - \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)(\delta+\varepsilon x+\zeta y) = \Phi(\varepsilon-\gamma) =$$

$$\Phi^2\left(\begin{array}{l}\varepsilon(y+n)(\delta+\varepsilon x+\zeta y)+\beta(x+m)(\delta+\varepsilon x+\zeta y)-\gamma(x+m)(\alpha+\beta x+\gamma y)\\ \qquad\qquad\qquad -\zeta(y+n)(\alpha+\beta x+\gamma y)\end{array}\right)$$

fieri igitur debet

$$\begin{array}{l}-(\alpha+\beta x+\gamma y)(\varepsilon(x+m)+\zeta(y+n))\\ \qquad +(\delta+\varepsilon x+\zeta y)(\gamma(y+n)+\beta(x+m)) = 0.\end{array}$$

seu

$$\begin{array}{l}(\delta+\varepsilon x+\zeta y)(\beta m+\gamma n+\beta x+\gamma y)\\ \qquad -(\alpha+\beta x+\gamma y)(\varepsilon m+\zeta n+\varepsilon x+\zeta y) = 0.\end{array}$$

Quae conditio manifeste impletur, statuendo

$$\beta m+\gamma n = \alpha \quad \text{et} \quad \varepsilon m+\zeta n = \delta,$$

vnde obtinemus

$$m = \frac{\alpha\zeta-\delta\gamma}{\beta\zeta-\varepsilon\gamma} \quad \text{et} \quad n = \frac{\beta\delta-\alpha\varepsilon}{\beta\zeta-\varepsilon\gamma}.$$

Per se autem euidens est, hunc multiplicatorem cum prius inuento prorsus coincidere. Vlterius vero ob

$$\int M dx = \int dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)(\alpha+\beta x+\gamma y)+\int dy\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)(\delta+\varepsilon x+\zeta y)+\int\Phi(\beta dx+\zeta dy)$$

$$= \int\left(dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)+dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)\right)(\alpha+\beta x+\gamma y)+\int\Phi(\beta dx+\gamma dy),$$

erit

$$\int M\, dx = \Phi(\alpha+\beta x+\gamma y),$$

 simili

ſimili vero modo probatur eſſe

$$\int N\, d\,x = \Phi\,(\delta + \varepsilon\, x + \zeta\, y).$$

21. Si propoſita fuerit ſequens aequatio differentialis:

$$X = A\,y + \frac{B\,dy}{d\,x} + \frac{C\,ddy}{d\,x^2} + \frac{D\,d^3 y}{d\,x^3} \ldots + \frac{L\,d^n y}{d\,x^n}$$

cuius integrale quaerendum ſit, quum iſta aequatio per ſe non ſit integrabilis, inueſtigandus eſt multiplicator eam integrabilem reddens. Hunc in finem, ante omnia obſeruare licet, ſi detur aliquis eiusmodi multiplicator, qui functio ſit ipſius x tantum, isque ſtatuatur $= \Phi$, totum negotium eo redire, vt formula

$$\Phi\, d\,x\,(A\,y + B\,p + C\,q + D\,r \ldots + L\,u)$$

ſit integrabilis, quia tum formula $\Phi\, X\, d\,x$ per ſe integrationem admittit. At pro litteris, M, N, P etc. ſequentes obtinebimus valores:

$$M = \tfrac{d\,\Phi}{d\,x}\,(A\,y + B\,p + C\,q \ldots + L\,u)$$

$$N = A\,\Phi;\ P = B\,\Phi;\ Q = C\,\Phi \text{ etc.}$$

quia igitur pro integrabilitate eſſe debet

$$N - \frac{d\,P}{d\,x} + \frac{d\,d\,Q}{d\,x^2} - \frac{d^3\,R}{d\,x^3} + \text{etc.} = 0$$

inde ſequitur fore

$$A\,\Phi - \frac{B\,d\,\Phi}{d\,x} + \frac{C\,d\,d\,\Phi}{d\,x^2} - \frac{D\,d^3\,\Phi}{d\,x^3} + \text{etc.} = 0.$$

Vt autem valorem idoneum pro Φ inueniamus, ſupponamus $\Phi = \int z\, d\,x$, adeo vt ſit z quoque functio

ctio ipſius x, et pro $\Phi, d\Phi$ etc. eorum valoribus ſuffectis, habebimus

$$A z - \frac{B d z}{d x} + \frac{C d d z}{d x^2} - \frac{D d^3 z}{d x^3} + \text{etc.} = 0$$

quae aequatio quum prorſus congruat cum prius allata, ſtatui omnino poteſt $z = \lambda \Phi$, deſignante λ numerum conſtantem, tum vero habebitur

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \lambda d x, \text{ ſeu } \Phi = e^{\lambda x},$$

conſtantem enim adiiciendum tuto negligere licet. Subſtituto autem hoc valore pro Φ in aequatione ſuperiori nihilo aequanda et tota aequatione per $e^{\lambda x}$ diuiſa, prodit

$$A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 \ldots \pm L\lambda^n = 0$$

ex cuius aequationis reſolutione, tot inueniri debent valores pro λ, quoti gradus fuerit aequatio differentialis propoſita. Multiplicator igitur quaeſitus noſtrae aequationis, erit $\Phi = e^{\lambda x}$ ipſum autem integrale habebitur

$$A' y + \frac{B' d y}{d x} + \frac{C' d d y}{d x^2} + \frac{D' d^3 y}{d x^3} \ldots + \frac{K' d^{n-1} y}{d x^{n-1}} = e^{-\lambda x} \int e^{\lambda x}. X d x$$

poſito nimirum

$$A' = \frac{A}{\lambda};\ B' = \frac{\lambda B - A}{\lambda^2};\ C' = \frac{\lambda^2 C - \lambda B + A}{\lambda^3} \text{ etc.}$$

Quum vero nunc integrale inuentum ſimilis ſit formae ac aequatio propoſita, facile apparet, quomodo integrationem vlterius proſequi liceat, cui negotio in praeſenti immorari neceſſe non eſt, quum haec

haec aequatio iam antea accurate sit pertractata. Notari autem meretur esse

$$\int M\,dx = \int d\Phi\,(Ay + Bp + Cq + Dr + \text{etc.})$$
$$= \int \lambda e^{\lambda x} dx (Ay + Bp + Cq + Dr + \text{etc.})$$
$$= \lambda e^{\lambda x}(A'y + B'p + C'q + D'r + \text{etc.})$$

atque

$$\int N\,dx = \int A\,\Phi\,dx = A'\,e^{\lambda x}$$
$$\int^{(2)} N\,dx - \int P\,dx = \int (A' - B) e^{\lambda x} dx = B' e^{\lambda x}$$
$$\int^{(3)} N\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int Q\,dx = \int (B' - C) e^{\lambda x} dx = C' e^{\lambda x}\ \text{etc.}$$

22. Operae autem pretium nunc quoque est, inuestigare multiplicatorem huius aequationis differentialis

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2\,ddy}{dx^2} + \frac{Dx^3\,d^3y}{dx^3} \ldots + \frac{Lx^m\,d^my}{dx^m}$$

qui si ponatur $= \Phi$ et consideretur vt functio ipsius x tantum, habebimus

$$V = \Phi(Ay + Bxp + Cx^2q + Dx^3r \ldots + Lx^m u)$$

vnde sequentes prodeunt valores:

$$M = \tfrac{d\Phi}{dx}(Ay + Bxp + Cx^2q + Dx^3r \ldots + Lx^m u)$$
$$+ \Phi(Bp + 2Cxq + 3Dx^2r + \ldots + mLx^{m-1}u)$$
$$N = A\Phi;\ P = B\Phi x;\ Q = C\Phi x^2;\ R = D\Phi x^3\ \text{etc.}$$

Quum nunc criterium integrabilitatis, hac exprimatur aequatione

$$N - \tfrac{dP}{dx} + \tfrac{ddQ}{dx^2} - \tfrac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

pro

pro N, P, Q etc. eorum valores ſubſtituendo, aequationem obtinebimus, ex qua valor multiplicatoris Φ determinari poterit. Quo autem hoc facilius procedat, notaſſe iuuabit, ſi in genere ponatur $U = \Phi x^m$, tum vero quoque $x^m = v$, eſſe

$$d^m U = v\, d^m\Phi + m\, dv\, d^{m-1}\Phi + \frac{m(m-1)}{1.\,2} ddv.\, d^{m-2}\Phi + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3} d^3 v.\, d^{m-3}\Phi + \text{etc.}$$

atque

$$d^n v = m(m-1)(m-2)\ldots(m+1-n)x^{m-n}dx^n,$$

quamobrem nunc erit

$$d^m U = x^m d^m\Phi + m^2 x^{m-1}dx\, d^{m-1}\Phi + \frac{m^2(m-1)^2}{1.\,2}x^{m-2}dx^2 d^{m-2}\Phi + \frac{m^2(m-1)^2(m-2)^2}{1.\,2.\,3}x^{m-3}dx^3 d^{m-3}\Phi + \text{etc.}$$

Huius igitur formulae ope, criterium integrabilitatis ſequentem nobis praebebit aequationem:

$$\begin{array}{llllll}
0 = A\Phi & -B\frac{x\,d\Phi}{dx} & +C\frac{x^2 dd\Phi}{dx^2} & -D\frac{x^3 d^3\Phi}{dx^3} & +E\frac{x^4 d^4\Phi}{dx^4} & -\text{etc.} \\
 & -B & +4C & -9D & +16.E & -25.F \\
 & +\frac{4.1}{1.2}C & -\frac{9.4}{1.2}D & +\frac{16.9}{1.2}E & -\frac{25.16}{1.2}F & +\frac{36.25}{1.2}G \\
 & -\frac{9.4.1}{1.2.3}D & +\frac{16.9.4}{1.2.3}E & -\frac{25.16.9}{1.2.3}F & +\frac{36.25.16}{1.2.3}G & -\frac{49.36.25}{1.2.3}H \\
 & +\frac{16.9.4.1}{1.2.3.4}E & -\frac{25.16.9.4}{1.2.3.4}F & +\text{etc.} & -\text{etc.} & +\text{etc.} \\
 & \text{etc.} & \text{etc.} & & &
\end{array}$$

vbi iam progreſſionis lex pro omnibus terminis ſatis eſt manifeſta. Verum ex hac aequatione nihil aliud concludi poteſt, niſi quod Φ per huiusmodi aequationem determinetur:

$$A' \Phi + B' \frac{x d\Phi}{dx} + C' \frac{x^2 dd\Phi}{dx^2} + \text{etc.} = 0$$

leui autem adhibita attentione liquet, statui posse $\Phi = x^\lambda$, hunc igitur valorem introducendo, in aequatione superiori ex criterio integrabilitatis deducta, consequemur

$$\begin{aligned} 0 = A - B(\lambda+1) + C\lambda(\lambda+1) + 4\lambda C + 2C - D\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \\ - 9D\lambda(\lambda-1) - 18D\lambda - 6D + E\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \\ + 16E\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 72E\lambda(\lambda-1) + 96E\lambda + 24E - \text{etc.} \end{aligned}$$

quae ad hanc reducitur

$$\begin{aligned} 0 = A - B(\lambda+1) + C(\lambda+1)(\lambda+2) - D(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) \\ + E(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4) \ldots \pm L(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m). \end{aligned}$$

Si igitur ex hac aequatione singuli valores ipsius λ inuestigentur, vnaquaeque huiusmodi expressio x^λ, pro multiplicatore idoneo formulae nostrae differentialis propositae habenda est, integratione autem actu instituta, habebimus:

$$x^{\lambda+1}\left(A'y + B'\frac{xdy}{dx} + C'\frac{x^2ddy}{dx^2} + D'\frac{x^3d^3y}{dx^3} \ldots + L\frac{x^{m-1}d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) = \int x^\lambda . Xdx$$

positis scilicet

$A = (\lambda+1)A'$	$A' = \frac{A}{\lambda+1}$
$B = (\lambda+2)B' + A'$	$B' = \frac{B}{\lambda+2} - \frac{A}{(\lambda+1)(\lambda+2)}$
$C = (\lambda+3)C' + B'$	$C' = \frac{C}{\lambda+3} - \frac{B}{(\lambda+3)(\lambda+2)} + \frac{A}{(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)}$
etc.	etc.

Quoniam vero nunc integrale emergens similis est formae, ac ipsa aequatio differentialis proposita,

mox

mox liquet quomodo integratio vlterius continuari possit, vbi quidem notari meretur, si ex aequatione vnde λ determinatur, illa tot sortiatur valores diuersos, quoti gradus aequatio differentialis proposita est, inde fieri vt pro singulis valoribus ipsius λ inueniantur aequationes differentiales gradus proxime inferioris, per quarum igitur debitam inter se combinationem, aequatio tandem eruetur, quae solas quantitates finitas x et y inuoluit. Verum huic rei explicandae diutius inhaerere minus necesse ducimus, praeprimis quod artificia in huius aequationis integratione adhibenda, iam accurate sint exposita. Vid. Illustr. *Euleri* Calcul. Integ. Vol. II. p. 483. et seqq.

23. Pro formula differentiali:

$$ddy + K\,dy\,dx + L\,y\,dx^2$$

vbi K et L quascunque functiones ipsius x designant, quaeratur iam multiplicator Φ eam integrabilem reddens. Quum vero sit

$$V = \Phi(q + Kp + Ly)\text{, erit}$$

$$M = \left(\tfrac{d\Phi}{dx}\right)(q + Kp + Ly) + \Phi\left(p\tfrac{dK}{dx} + y\tfrac{dL}{dx}\right)$$

$$N = \left(\tfrac{d\Phi}{dy}\right)(q + Kp + Ly) + \Phi L$$

$$P = \left(\tfrac{d\Phi}{dp}\right)(q + Kp + Ly) + \Phi K;\; Q = \Phi.$$

At pro integrabilitate formulae propositae habetur

$$N - \tfrac{dP}{dx} + \tfrac{ddQ}{dx^2} = 0$$

substitutis igitur valoribus supra inuentis, hanc consequemur aequationem:

$$\Phi\left(L-\frac{dK}{dx}\right)-K\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)+(Lr+2q)\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)-\left(\frac{y\,dL}{dx}+p\left(L+\frac{dK}{dx}\right)+2Mq\right)\left(\frac{d\Phi}{dp}\right)$$
$$+\left(\frac{dd\Phi}{dx^2}\right)+2p\left(\frac{dd\Phi}{dx\,dy}\right)-\left(\frac{dd\Phi}{dx\,dp}\right)(Lr+Kp-q)+pp\left(\frac{dd\Phi}{dy^2}\right)$$
$$-\left(\frac{dd\Phi}{dy\,dp}\right)(Lyp+Kpp-pq)-\left(\frac{dd\Phi}{dp^2}\right)(Lyq+Kpq)=0.$$

Huic aequationi quum variis modis satisfieri possit, casus nonnullos particulares contemplabimur pro Φ idoneos valores exhibentes. horum vero sine dubio simplicissimus est, quo Φ supponitur tantum esse functio ipsius x, pro quo igitur habebimus

$$\Phi\left(L-\frac{dK}{dx}\right)-\frac{K\,d\Phi}{dx}+\frac{dd\Phi}{dx^2}=0$$

cuius aequationis ope si Φ determinari possit, integrale formulae nostrae propositae inuenitur:

$$\Phi\,dy+y(\Phi\,K\,dx-d\Phi)$$

quae formula nunc facile quoque vlteriorem integrationem admittit. Si autem denuo quaeratur multiplicator aequationem

$$\frac{dd\Phi}{dx^2}-\frac{K\,d\Phi}{dx}+\Phi\left(L-\frac{dK}{dx}\right)=0$$

integrabilem reddens, mox patebit cum hac aequatione contineri

$$\frac{dd\psi}{dx^2}+\frac{K\,d\psi}{dx}+L\,\psi=0,$$

vnde si formula nostra proposita fuerit $=0$, nullum est dubium, quin vti Φ sit multiplicator integrabilem reddens formulam

$$ddy+K\,dy\,dx+Ly\,dx^2=0$$

ita vicissim quoque formula

$$dd\Phi-K\,d\Phi\,dx+\left(L-\frac{dK}{dx}\right)\Phi\,dx^2=0$$

inte-

integrabilis reddatur multiplicatore y. Si prior multiplicetur per Φ et posterior per y, sumta differentia prodibit

$\Phi\, ddy - y\, dd\Phi + K(\Phi dy + y d\Phi) dx + y\Phi dK dx = 0$, seu $d.(\Phi dy - y d\Phi) + dx\, d.K\Phi y = 0$, hincque integrando

$$\Phi dy - y d\Phi + K\Phi y\, dx = C dx$$

quod est ipsum integrale modo inuentum.

24. Statuatur nunc $\Phi = Sy + Tp$, vbi S et T sunt functiones ipsius x tantum, erit vero

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = y\frac{dS}{dx} + p\frac{dT}{dx};\ \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = S;\ \left(\frac{d\Phi}{dp}\right) = T$$

$$\left(\frac{dd\Phi}{dx^2}\right) = y\frac{ddS}{dx^2} + p\frac{ddT}{dx^2};\ \left(\frac{dd\Phi}{dx\,dy}\right) = \frac{dS}{dx};\ \left(\frac{dd\Phi}{dx\,dp}\right) = \frac{dT}{dx}$$

$$\left(\frac{dd\Phi}{dy^2}\right) = 0;\ \left(\frac{dd\Phi}{dy\,dp}\right) = 0;\ \left(\frac{dd\Phi}{dp^2}\right) = 0.$$

His autem valoribus in aequatione nostra criterium integrabilitatis exprimente substitutis, sequens orietur aequatio:

$$(Sy + Tp)\left(L - \frac{dK}{dx}\right) - K\left(y\frac{dS}{dx} + p\frac{dT}{dx}\right) + S(Ly + 2q)$$
$$-T\left(y\frac{dL}{dx} + p\left(L + \frac{dK}{dx}\right) + 2Kq\right) + y\frac{ddS}{dx^2} + p\frac{ddT}{dx^2} + 2p\frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dx}(q - Kp - Ly)$$
$$= 0$$

vbi si termini litteris y, p et q affecti seorsim nihilo aequentur, hae tres habebuntur aequationes:

$$\text{I.}\quad \left(L - \frac{dK}{dx}\right)S - K\frac{dS}{dx} + LS - T\frac{dL}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \frac{L\,dT}{dx} = 0$$

$$\text{II.}\quad \left(L - \frac{dK}{dx}\right)T - K\frac{dT}{dx} - \left(L + \frac{dK}{dx}\right)T + \frac{ddT}{dx^2} + \frac{2dS}{dx} - \frac{K\,dT}{dx} = 0$$

$$\text{III.}\quad 2S - 2KT + \frac{dT}{dx} = 0$$

 quae

quae in ſequentes contrahuntur:

$$\text{I. } \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d.(SK + LT)}{dx} + 2LS = 0$$

$$\text{II. } \frac{ddT}{dx^2} - \frac{2d.(KT - S)}{dx} = ; \quad \text{III. } \frac{dT}{dx} - 2KT + S = 0.$$

Sponte autem liquet, binas poſteriores prorſus congruere, adeo vt totum negotium nunc eo redeat, vt ex prima et tertia aequatione valores litterarum S et T inueſtigentur. At quum eliminando S vel T ad aequationem differentialem perueniatur tertii gradus, quae quam ipſa propoſita multo difficilius ſoluitur, tenendum eſt huiusmodi multiplicatorem $Sy + Tp$ non niſi pro certis valoribus litterarum K et L adhibendum eſſe. Primum vero erit

$$K = \frac{S}{T} + \frac{dT}{2Tdx}, \text{ proinde } SK = \frac{SS}{T} + \frac{SdT}{2Tdx},$$

hinc autem fiet

$$\frac{ddS}{dx^2} - \frac{2SdS}{Tdx} + \frac{SSdT}{TTdx} - \frac{SddT}{2Tdx^2} - \frac{dSdT}{2Tdx^2} + \frac{SdT^2}{2TTdx^2} - \frac{LdT - TdL}{dx}$$
$$+ 2LS = 0,$$

quae commodius ita exprimitur:

$$d.LT - 2LT.\frac{Sdx}{T} = \frac{ddS}{dx} - d.\left(\frac{SS}{T} + \frac{SdT}{2Tdx}\right).$$

Si haec aequatio multiplicetur per $e^{-2\int\frac{Sdx}{T}}$, integrale inde orietur:

$$TLe^{-2\int\frac{Sdx}{T}} = e^{-2\int\frac{Sdx}{T}}\left(\frac{dS}{dx} - \frac{SdT}{2Tdx}\right) + C, \text{ hincque}$$

$$L = \frac{C}{T}e^{2\int\frac{Sdx}{T}} + \frac{dS}{Tdx} - \frac{SdT}{2TTdx}.$$

Si igitur propoſita fuerit huiusmodi aequatio:

$$\frac{ddy}{dx^2} + \left(\frac{S}{T} + \frac{dT}{2Tdx}\right)\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{C}{T}e^{2\int\frac{Sdx}{T}} + \frac{dS}{Tdx} - \frac{SdT}{2TTdx}\right) = 0$$

certum

certum eſt eam integrabilem reddi per hunc multiplicatorem $Sy + Tp$ et ipſum quidem integrale tum erit:

$$\frac{T\,dy^2}{2\,dx^2} + \frac{S\,y\,dy}{dx} + \frac{1}{2}yy\left(C\,e^{2\int\frac{S\,dx}{T}} + \frac{SS}{T}\right) = \text{Conſt.}$$

quod poſito $C = 0$, in hanc ſatis concinnam abit formam:

$$TT\,dy^2 + 2\,TSy\,dy\,dx + yySS\,dx^2 = BT\,dx^2.$$

25. Tribuamus iam multiplicatori Φ huiusmodi formam:

$$\Phi = Ryy + Syp + Tpp, \text{ eritque}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = y^2\frac{dR}{dx} + yp\frac{dS}{dx} + p^2\frac{dT}{dx}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = 2yR + pS; \quad \left(\frac{d\Phi}{dp}\right) = 2pT + yS$$

$$\left(\frac{dd\Phi}{dx^2}\right) = y^2\frac{ddR}{dx^2} + yp\frac{ddS}{dx^2} + p^2\frac{ddT}{dx^2}$$

$$\left(\frac{dd\Phi}{dx\,dy}\right) = 2y\frac{dR}{dx} + p\frac{dS}{dx}; \quad \left(\frac{dd\Phi}{dx\,dp}\right) = 2p\frac{dT}{dx} + y\frac{dS}{dx}$$

$$\left(\frac{dd\Phi}{dy^2}\right) = 2R; \quad \left(\frac{dd\Phi}{dy\,dp}\right) = S; \quad \left(\frac{dd\Phi}{dp^2}\right) = 2T.$$

His valoribus in aequatione pro criterio integrabilitatis allata ſubſtitutis, iisque terminis ſeorſim nihilo aequatis, quae productis y^2, yp, p^2, yq, pq afficiuntur, ſequentes conſequemur aequationes:

I. $3.RL - d.\frac{(RK + SL)}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} = 0$

II. $4\frac{dR}{dx} - 2\,d.\frac{(SK + TL)}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} = 0$

III. $4R - 2(SK + TL) + \frac{dS}{dx} = 0$

IV. $2R - (SK + TL) + \frac{2\,dS}{dx} - \frac{3\,d.TK}{dx} + \frac{ddT}{dx^2} = 0$

V. $3S - 6TK + 2\frac{dT}{dx} = 0$

Harum

Harum II et III statim plane coincidentes habentur, deinde vero si ex 2. IV subtrahatur III, prodibit

$$\frac{3\,dS}{dx} - 6\,\frac{d.TK}{dx} + 2\,\frac{ddT}{dx^2} = 0$$

quae iam manifesto praebet differentiale aequationis quintae, quocirca determinatio quantitatum R, S, T ex his tribus aequationibus petenda est:

$$\text{I.}\quad 3RL - d.\frac{(RK + LL)}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} = 0$$

$$\text{II.}\quad 4R - 2(SK + TL) + \frac{dS}{dx} = 0$$

$$\text{III.}\quad 3S - 6TK + 2\frac{dT}{dx} = 0.$$

Si functiones R, S, T pro datis habentur, tum vero quaeratur, quales K et L sint functiones ipsius x vt formula

$$ddy + K\,dy\,dx + Ly\,dx^2, \text{ per}$$

$$Ry^2 + Syp + Tpp$$

fiat integrabilis, statim obtinebimus

$$K = \frac{S}{2T} + \frac{dT}{3T\,dx} \text{ et}$$

$$L = \frac{2R - SK}{T} + \frac{dS}{T\,dx} = \frac{2R}{T} - \frac{SS}{2TT} - \frac{S\,dT}{3TT\,dx} + \frac{dS}{T\,dx}$$

praeterea autem requiritur, vt huic quoque satisfiat aequationi;

$$\frac{ddR}{dx^2} - d.\frac{(RK + SL)}{dx} + 3RL = 0$$

adeo vt ipsa quantitas R, iam per S et T certa ratione determinetur. Plures casus multiplicatorum formulae

$$ddy + K\,dy\,dx + Ly\,dx^2$$

adferre

adferre ſuperuacaneum eſt, pro quacunque enim multiplicatoris forma, ope aequationis §. 23. allatae, tot aequationes inuenire licet, quot requiruntur ad ipſum multiplicatorem perfecte determinandum.

26. Transeamus nunc ad formulas differentiales $V\,dx$ ita comparatas, vt functio V praeter x, binas alias variabiles y et z cum earum differentialibus quibuscunque inuoluat, poſito differentiali dx conſtante. Sit vero ex huiusmodi formularum numero propoſita ſequens

$$dx\left(1 - \frac{yz}{xx} + \frac{yp' + zp}{x}\right),$$

quam examinare oportet, vtrum integrabilis ſit nec ne? Si igitur ſtatuamus $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{dp}{dx} = q$, atque $\frac{dz}{dx} = p'$; $\frac{dp'}{dx} = q'$ nec non

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp$$
$$\mathfrak{N}\,dz + \mathfrak{P}\,dp'$$

habebimus pro noſtro caſu,

$$M = \frac{2yz}{x^3} - \frac{(yp' + zp)}{x^2};\ N = \frac{p'}{x} - \frac{z}{xx};$$
$$\mathfrak{N} = \frac{p}{x} - \frac{y}{xx};\ P = \frac{z}{x};\ \mathfrak{P} = \frac{y}{x}.$$

Quocirca quum pro integrabilitate formulae propoſitae, binis ſequentibus aequationibus ſatisfaciendum ſit:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0;\ \mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} = 0$$

valoribus ſubſtitutis, omnino patet has conditiones perfecte impleri, vnde certo indicio conſtat formulam noſtram integrabilem eſſe. Erit ſcilicet

$$\frac{p'}{x} - \frac{z}{xx} - d.\frac{z}{x} = 0 \text{ et } \frac{p}{x} - \frac{y}{xx} - d.\frac{y}{x} = 0$$

 Ipſum

Ipfum autem integrale formulae propofitae vti cuivis conftat erit $x - \frac{yz}{x}$. Praeterea etiam liquet has formulas $\int M\,dx$, $\int N\,dx$, $\int \mathfrak{N}\,dx$ effe integrabiles, eorum integralibus exiftentibus

$$-\frac{yz}{x^2};\ \frac{z}{x}\ \text{et}\ \frac{y}{x}.$$

27. Propofita nunc efto haec formula differentialis

$$dx(2yp' + 2zp + 2xpp' + xzq + xyq') = V\,dx$$

pro qua igitur erit

$M = 2pp' + zq + yq'$; $N = 2p' + xq'$; $\mathfrak{N} = 2p + xq$
$P = 2z + 2xp'$; $\mathfrak{P} = 2y + 2xp$; $Q = xz$ et $\mathfrak{Q} = xy$.

Vt haec formula bis fit integrabilis, feu vt $\int dx \int V\,dx$ verum conftituat integrale, fequentibus quatuor aequationibus fatisfaciendum eft:

$$\text{I. } N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0;\ \text{II. } P - \frac{2\,dQ}{dx} = 0$$

$$\text{III. } \mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} = 0;\ \text{IV. } \mathfrak{P} - \frac{2\,d\mathfrak{Q}}{dx} = 0.$$

Quum vero fit

$$P - \frac{dQ}{dx} = z + xp';\ \text{erit}$$

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 2p' + xq' - \frac{d.(z + xp')}{dx} = 0$$

tum vero $P - \frac{2\,dQ}{dx} = 0$. Porro autem ob

$$\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} = y + xp,\ \text{fiet}$$

$$\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} = 2p + xq - \frac{d.(y + xp)}{dx} = 0\ \text{et}$$

$$\mathfrak{P} - \frac{2\,d\mathfrak{Q}}{dx} = 0.$$

Ex

Ex quibus igitur inferri debet formulam nostram bis esse integrabilem, et ipsum integrale reperietur esse xyz omissis constantibus adiiciendis. Constat autem nunc non solum formulas

$$\int M dx\,;\ \int N dx\,;\ \int \mathfrak{N} dx\,;\ \int P dx - \int^{(2)} N dx\,;\ \int \mathfrak{P} dx - \int^{(2)} \mathfrak{N} dx$$
$$\int Q dx - \int^{(2)} P dx + \int^{(3)} N dx\,;\ \int \mathfrak{Q} dx - \int^{(2)} \mathfrak{P} dx + \int^{(3)} \mathfrak{N} dx$$

fore integrabiles sed etiam has sequentes:

$$\int^{(2)} M dx\,;\ \int^{(2)} N dx\,;\ \int^{(2)} \mathfrak{N} dx\,;\ \int P dx\,;\ \int \mathfrak{P} dx$$
$$\int^{(2)} P dx - 2\int Q dx \text{ et } \int^{(2)} \mathfrak{P} dx - 2\int \mathfrak{Q} dx.$$

Erit enim

$$\int M dx = zp + yp'\,;\ \int^{(2)} M dx = zy$$
$$\int N dx = z + xp'\,;\ \int^{(2)} N dx = xz\,;\ \int P dx = 2zx$$
$$\int Q dx - \int^{(2)} P dx + \int^{(3)} N dx = 0\,;\ \int^{(2)} P dx - 2\int Q dx = 0$$
$$\int \mathfrak{N} dx = y + xp\,;\ \int^{(2)} \mathfrak{N} dx = xy\,;\ \int \mathfrak{P} dx = 2xy$$
$$\int \mathfrak{Q} dx - \int^{(2)} \mathfrak{P} dx + \int^{(3)} \mathfrak{N} dx = 0\,;\ \int^{(2)} \mathfrak{P} dx - 2\int \mathfrak{Q} dx = 0.$$

28. Quum exempla modo allata quam maxime sint obuia nonnulla adiungere placet eiusmodi formularum differentialium, quae non quidem per se integrabiles sunt, ope multiplicatorum tamen ad integrabilitatem perduci poterunt. Ponamus itaque propositam esse istam formulam differentialem:

$$dx\,(xz^2 + xy^2 - x^2 zp' - x^2 yp)$$

pro qua multiplicatorem Φ inuestigari oportet, ita comparatum, vt

$$\Phi\, dx\,(xz^2 + xy^2 - x^2 zp' - x^2 yp)$$

 inte-

integrationem admittat. At ex iis quae supra monuimus, nunc deducitur esse:

$$M = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)(xz^2 + xy^2 - x^2zp' - x^2yp) + \Phi(z^2 + y^2 - 2xzp' - 2xyp)$$

$$N = \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(xz^2 + xy^2 - x^2zp' - x^2yp) + \Phi(2xy - x^2p)$$

$$\mathfrak{N} = \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)(xz^2 + xy^2 - x^2zp' - x^2yp) + \Phi(2xz - x^2p')$$

$$P = -x^2y\Phi;\ \mathfrak{P} = -x^2z\Phi.$$

Hinc ob conditiones integrabilitatis:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0;\ \mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} = 0$$

sequentes duae deducuntur aequationes:

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)(z^2 + y^2 - xzp' - xyp) + 4\Phi y + xy\frac{d\Phi}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)(z^2 + y^2 - xzp' - xyp) + 4\Phi z + xz\frac{d\Phi}{dx} = 0.$$

Vnde obtinemus

$$dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + dz\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) = \frac{-4\Phi(ydy + zdz) - \frac{xd\Phi}{dx}(ydy + zdz)}{z^2 + y^2 - xzp' - xyp}$$

atque si supponatur Φ esse functionem ipsorum y et z tantum prodibit

$$d\Phi = -\frac{\left(4\Phi + \frac{xd\Phi}{dx}\right)(ydy + zdz)}{z^2 + y^2 - xzp' - xyp}$$

ex quo colligitur

$d\Phi(z^2 + y^2) = -4\Phi(ydy + zdz)$ seu $\frac{d\Phi}{2\Phi} = -\frac{2(ydy + zdz)}{yy + zz}$,

hincque integrando

$$\tfrac{1}{2}L\Phi = L\frac{1}{z^2 + y^2}, \text{ siue } \Phi = \frac{1}{(z^2 + y^2)^2}.$$

Euidens

Euidens vero eſt hunc multiplicatorem quaeſtioni ſatisfacere, quum integrale noſtrae formulae inde prodeat $\frac{x^2}{z^2+y^2}$. Quod reliquas formulas integrabiles attinet, obſeruare licet eſſe:

$$\int M\,dx = \frac{x}{z^2+y^2};\ \int N\,dx = \frac{-x^2 y}{(z^2+y^2)^2};\ \int \mathfrak{N}\,dx = \frac{-x^2 z}{(z^2+y^2)^2}.$$

Siquidem multiplicator iam inuentus ſit $\Phi = \frac{1}{(z^2+y^2)^2}$, integrali exiſtente $\frac{x^2}{z^2+y^2}$, inde quidem mox patet, generalem formam multiplicatorum hac expreſſione contineri $\Phi = \frac{1}{(z^2+y^2)^2}\,\Gamma:\left(\frac{x}{\sqrt{(z^2+y^2)}}\right)$. Periculum igitur faciamus hunc multiplicatorem immediate ex noſtris formulis eruendi. Et quia Φ nunc conſiderari debeat vt functio trium variabilium x, y, z ponamus $\Phi = \Phi'\psi$, vbi Φ' binas tantum variabiles y et z inuoluere concipitur, ψ autem omnes tres x, y, z. Tum vero erit

$$dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = \psi\, dy\left(\frac{d\Phi'}{dy}\right) + \Phi'\, dy\left(\frac{d\psi}{dy}\right)$$

$$dz\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) = \psi\, dz\left(\frac{d\Phi'}{dz}\right) + \Phi'\, dz\left(\frac{d\psi}{dz}\right) \text{ proinde}$$

$$dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + dz\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) = \psi\, d\Phi' + \Phi'\, d\psi - \Phi'\, dx\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$$

inde autem conſequimur

$$\psi d\Phi'(z^2+y^2-xzp'-xyp) + \Phi'\left(d\psi - dx\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\right)(z^2+y^2-xzp'-xyp)$$
$$= -4\Phi'\psi(y\,dy+z\,dz) - (\psi\, d\Phi' + \Phi'\, d\psi)(xyp+xzp'), \text{ ſiue}$$
$$\psi\, d\Phi'(z^2+y^2) + \Phi' d\psi(z^2+y^2) - \Phi' dx\left(\frac{d\psi}{dx}\right)(z^2+y^2-xyp-xzp')$$
$$= -4\Phi'\psi(y\,dy+z\,dz),$$

 quam

quam aequationem in binas sequentes dispertire licebit:

$$d\Phi'(z^2+y^2) = -4\Phi'(y\,dy + z\,dz)$$
$$d\psi(z^2+y^2) = dx(\tfrac{d\psi}{dx})(z^2+y^2-xzp'-xyp).$$

Ex priori statim habetur $\Phi' = \frac{1}{(z^2+y^2)^2}$ vt antea, posterior vero praebet

$$-x(\tfrac{d\psi}{dx})(\tfrac{z\,dz+y\,dy}{zz+yy}) = d\psi - dx(\tfrac{d\psi}{dx}) = dy(\tfrac{d\psi}{dy}) + dz(\tfrac{d\psi}{dz}).$$

Tentetur iam pro ψ huiusmodi forma $\psi = \Gamma : XV$, vbi X functionem incognitam ipsius x, V autem ipsorum y et z designat et differentiatione instituta, habebitur

$$-Vx\tfrac{dX}{dx}(\tfrac{z\,dz+y\,dy}{zz+yy}) = X\,dy(\tfrac{dV}{dy}) + X\,dz(\tfrac{dV}{dz}) = X\,dV$$

ex quo fit $\frac{x\,dX}{X\,dx} = -\frac{(z^2+y^2)\,dV}{(z\,dz+y\,dy)V}$

cui aequationi manifesto satisfit, ponendo $\frac{dx}{x} = \frac{dX}{X}$, seu $X = x$ et

$$\tfrac{dV}{V} = -\tfrac{(z\,dz+y\,dy)}{zz+yy},\ \text{seu}\ V = \tfrac{1}{\sqrt{(yy+zz)}},$$

ex quo forma generalis multiplicatoris nunc erit

$$\Phi = \tfrac{1}{(yy+zz)^2}\Gamma : (\tfrac{x}{\sqrt{(yy+zx)}}).$$

Praeterea etiam obseruasse iuuat, quantitatem ψ ex hac formula determinari

$$\tfrac{x\,d\Phi'}{4\Phi'}(\tfrac{d\psi}{dx}) = dy(\tfrac{d\psi}{dx}) + dz(\tfrac{d\psi}{dz}),$$

vbi si ponatur $\psi = \Gamma : X\Phi'$, hanc consequemur aequationem:

$$\tfrac{1}{4}x\frac{d\Phi' dX}{dx} = X\,dy\left(\frac{d\Phi'}{dy}\right) + X\,dz\left(\frac{d\Phi'}{dy}\right) = X\,d\Phi', \text{ vnde}$$

$$\frac{dX}{X} = \frac{4dx}{x},\; X = x^4 \text{ et } \psi = \Gamma : \frac{x^4}{(zz+yy)^2},$$

et multiplicator inuentus omnino ad priorem redit.

29. Propofita nunc fit formula differentialis:

$$dx(yy+yz+zz)+dy(zz+xz+xx)+dz(xx+xy+yy)$$

et quia conftat eam non effe integrabilem, operam dare oportet, vt inueniatur multiplicator, cuius ope integrabilis fiat. Sit hic multiplicator $= \Phi$, quapropter, fi breuitatis gratia ponatur

$$yy+yz+zz+p(zz+xz+xx)+p'(xx+xy+yy)=\psi$$

erit

$$M = \psi\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)+\Phi(pz+2xp+yp'+2xp')$$

$$N = \psi\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)+\Phi(2y(1+p')+xp'+z);\quad P=\Phi(xx+zz+xz)$$

$$\mathfrak{N} = \psi\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)+\Phi(2z(1+p)+xp+y);\quad \mathfrak{P}=\Phi(xx+xy+yy).$$

Criteria igitur integrabilitatis quum nunc praebeant:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} = 0$$

has binas adipifcemur aequationes:

$$\text{I. } \psi\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) - \frac{d\Phi}{dx}(xx+xz+zz)+2\Phi(y-x+p'(y-z))=0$$

$$\text{II. } \psi\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) - \frac{d\Phi}{dx}(xx+xy+yy)+2\Phi(z-x+p(z-y))=0$$

quarum differentia dat

$$\psi\left(\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)-\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)\right)-\frac{d\Phi}{dx}((z+y)(z-y)+x(z-y)) \\ +2\Phi(y-z)(1+p+p')=0$$

confeconsequenter

$$\frac{\Psi}{y-z}\left(\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)-\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)\right)+\frac{d\Phi}{dx}(x+y+z)+2\Phi(1+p+p')=0.$$

Hinc mox quidem innotescit, statui posse

$$\frac{d\Phi}{\Phi}=-\frac{2(dx+dy+dz)}{x+y+z}\text{, siue } \Phi=\frac{1}{(x+y+z)^2},$$

quum eo ipso quoque fiat $\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)=\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)$, nec non vtraque conditio supra praescripta impleatur. Integrale autem formulae propositae hunc adhibendo multiplicatorem prodibit:

$$\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}.$$

30. Quamuis multiplicator iam inuentus quaestioni satisfaciat, quum tamen et alii dentur, quibus idem perficere licet, inuestigationem huius multiplicatoris ita instruamus, vt ad reliquos quoque perduxisse, censeri queat. Ex natura igitur quaestionis quum facile perspiciatur pro multiplicatore Φ commode adhiberi posse functionem homogeneam ipsorum x, y, z, inde hanc elicimus aequationem:

$$n\Phi=x\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)+y\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)+z\left(\frac{d\Phi}{dz}\right).$$

Per aequationes vero nostras I et II consequimur

$$\Psi\left(y\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)+z\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)\right)=\frac{d\Phi}{dx}(xxy+xxz+yzz+yyz+2xyz)$$
$$-2\Phi(yy+zz-xy-xz+p(zz-zy)+p'(yy-zy))$$

similique modo

$$\frac{d\Psi}{dx}\left(dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)+dz\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)\right)=\Psi\left(\frac{d\Phi}{dx}-\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right)=\frac{d\Phi}{dx}(p(xx+zz+xz)+p'(xx+xy+yy))$$
$$-2\Phi((y-x)p+(z-x)p')$$

quae

quae in hanc transformatur

$$\psi x\left(\frac{d\,\Phi}{d\,x}\right)=\frac{d\,\Phi}{d\,x}(xyy+xyz+xzz)+2\Phi(p(yx-xx)+p'(xz-xx))$$

vnde nunc deducitur

$$n\Phi\psi=\psi\left(x\left(\frac{d\,\Phi}{d\,x}\right)+y\left(\frac{d\,\Phi}{d\,y}\right)+z\left(\frac{d\,\Phi}{d\,z}\right)\right)=\frac{d\,\Phi}{d\,x}(x+y+z)(xy+xz+yz)$$
$$-2\Phi(yy+zy+yy+p(zz+xx-zy-xy)+p'(xx+yy-xz-yz)).$$

Si nunc vtrinque addantur $3\,\Phi\,\psi$, prodibit:

$$(n+3)\Phi\psi=\frac{d\,\Phi}{d\,x}(x+y+z)(xy+xz+yz)+\Phi\frac{d\,x}{d\,x}(yy+zz+3yz+2xy+2xz)$$
$$+\Phi\frac{d\,y}{d\,x}(x^2+z^2+3xz+2xy+2yz)+\Phi\frac{d\,z}{d\,x}(x^2+y^2+3xy+2xz+2yz).$$

Leui autem adhibita attentione, quum deprehendatur esse

$$\psi\,dx=d.(x+y+z)(xy+xz+yz)-2(xy+xz+yz)(dx+dy+dz)$$

coefficiens autem ipsius $\frac{\Phi}{d\,x}$ fit

$$=d.(x+y+z)(xy+xz+yz),$$

nostra aequatio nunc concinnam hanc consequetur formam:

$$(n+2)d.(x+y+z)(xy+xz+yz)$$
$$-2(n+3)(xy+xz+yz)(dx+dy+dz)=\frac{d\,\Phi}{\Phi}(x+y+z)(xy+xz+yz)$$

ex quo denique deducimus:

$$\mathrm{L}.\Phi=(n+2)\mathrm{L}.(x+y+z)(xy+xz+yz)-2(n+3)\mathrm{L}(x+y+z),$$

siue

$$\Phi=\frac{(xy+xz+yz)^{n+2}}{(x+y+z)^{n+4}}.$$

 Hinc

Hinc quidem mox apparet, formas ſimpliciſſimas multiplicatorum obtineri, ſi ſtatuatur n vel $= -2$, vel $n = -4$, priori caſu fit

$$\Phi = \frac{1}{(x+y+z)^2},$$

poſteriori autem

$$\Phi = \frac{1}{(xy+xz+yz)^2}.$$

Praeterea etiam caſus notari meretur quo $n = -3$, quum tunc multiplicator fiat

$$\Phi = \frac{1}{(x+y+z)(xy+xz+yz)}$$

qui ex natura functionum homogenearum immediate deducitur, vti infra oſtendendi dabitur locus. Notandum autem eſt hunc vltimum multiplicatorem, integrale praebere Logarithmicum, quum ſit pro iſto caſu

$$\frac{\Psi dx}{\Phi} = \frac{d.(x+y+z)(xy+xz+yz)}{(x+y+z)(xy+xz+yz)} - \frac{2(dx+dy+dz)}{x+y+z},\ \text{hincque}$$

$$\int \frac{\Psi dx}{\Phi} = \mathrm{L}.\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}.$$

Denique etiam notari meretur, eſſe ob

$$\Psi\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = \frac{d\Phi}{dx}(yy+yz+zz) + 2\Phi((y-x)p+(z-x)p')$$

$$\mathrm{M}dx = \Psi dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi dx((2x+z)p+(2x+y)p')$$

$$= d\Phi(yy+yz+zz) + \Phi((2y+z)dy+(2z+y)dz)$$

ideoque

$$\int \mathrm{M}\,dx = \Phi(yy+yz+zz).$$

Simili ratione habebitur

$$\int \mathrm{N}dx = \Phi(xx+zz+xz) \text{ et } \int \mathfrak{N}dx = \Phi(xx+yy+xy).$$

31. Confideremus nunc formulam differentialem homogeneam

$$R\,dx + S\,dy + T\,dz$$

pro qua multiplicator idoneus eam integrabilem reddens exquiri debeat, adeo vt fi is ponatur Φ, fit formula

$$\Phi\,(R\,dx + S\,dy + T\,dz)$$

integrabilis. Ex natura autem quaeftionis intelligitur pro Φ affumi poffe functionem homogeneam ipfarum x, y, z, tunc vero fi ponatur

$$\Phi R = X,\ \Phi S = Y,\ \Phi T = Z$$

erunt quoque X, Y, Z functiones homogeneae eiusdem dimenfionis ipfarum x, y, z. Per naturam autem functionum homogenearum iam habebimus:

$$mX = x\left(\frac{dX}{dx}\right) + y\left(\frac{dX}{dy}\right) + z\left(\frac{dX}{dz}\right)$$
$$mY = x\left(\frac{dY}{dx}\right) + y\left(\frac{dY}{dy}\right) + z\left(\frac{dY}{dz}\right)$$
$$mZ = x\left(\frac{dZ}{dx}\right) + y\left(\frac{dZ}{dy}\right) + z\left(\frac{dZ}{dz}\right).$$

Atqui ob integrabilitatem formulae

$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ effe debet

$$\left(\frac{dX}{dy}\right) = \left(\frac{dY}{dx}\right);\ \left(\frac{dX}{dz}\right) = \left(\frac{dZ}{dx}\right);\ \left(\frac{dY}{dz}\right) = \left(\frac{dZ}{dy}\right)$$

his igitur aequalitatibus in vfum vocatis aequationes fuperiores in fequentes transformantur:

$$mX = x\left(\frac{dX}{dx}\right) + y\left(\frac{dY}{dx}\right) + z\left(\frac{dZ}{dx}\right)$$
$$mY = x\left(\frac{dX}{dy}\right) + y\left(\frac{dY}{dy}\right) + z\left(\frac{dZ}{dy}\right)$$
$$mZ = x\left(\frac{dX}{dz}\right) + y\left(\frac{dY}{dz}\right) + z\left(\frac{dZ}{dz}\right)$$

ex quibus deducitur

$$m(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = x\,dX + y\,dY + z\,dZ$$

cuius aequationis integrale posito $m = -1$, manifesto est $Xx + Yy + Zz = A$, vnde $\Phi = \frac{A}{Rx + Sy + Tz}$, vbi pro A tuto ponere licet 1. Pro formulis igitur differentialibus homogeneis tres variabiles inuolventibus, similem iam nacti sumus proprietatem, ac pro huiusmodi formulis, binas tantum variabiles inuoluentibus, ex indole autem demonstrationis nostrae haud obscure cognoscitur, eam ad formulas differentiales functiones homogeneas eiusdem dimensionis, quotcunque variabilium x, y, z, u, v etc. inuoluentes, patere. Si scilicet proponatur huiusmodi formula differentialis

$$U\,du + V\,dv + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

vbi U, V, X etc. sunt functiones homogeneae ipsarum u, v, x etc. certo constat hanc formulam integrabilem reddi, si diuidatur per

$$Uu + Vv + Xx + Yy + Zz.$$

32. Ex iis quae iam in medium adduximus exemplis formularum differentialium tres quantitates variabiles inuoluentium, facile perspicitur quomodo tractari debeant formulae differentiales in quibus functiones quatuor adeo vel adhuc plurium variabilium occurrunt. Pro formulis autem huiusmodi complicatioribus exempla heic adferre eo minus e re erit, quod rariores sint casus, quibus Analysis ad resolutionem

tionem huiusmodi formularum perducat. Praeterea vero animo quidem nobis proponebamus, aliis atque aliis exemplis ea breuiter illustrare, quae de criteriis integrabilitatis formularum differentialium duplicatarum disseruimus; quum vero praeter cogitationem opella nostra iam dum nimium excreuerit, quae hac de re monenda restant, in commodiorem differre cogimur occasionem.

DEMONSTRATIO THEOREMATIS ANALYTICI A CELEB. *LA GRANGE* INVENTI.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Theorema hoc elegantiſſimum et attentione quam maxime dignum, a Cel. *la Grange* in Tomo XXIV. Actorum Academiae Scientiarum Berolinenſis p. 275 propoſitum eſt. Occaſio autem qua in eius cognitionem peruenit, inde Ipſi ſubminiſtrata eſſe videtur, quod in modum inquiſiturus, quo cuiuscunque aequationis radices per ſeries exprimi poſſint, inuenerit, ſi pro aequatione generali:

$$o = a - b\,x + c\,x^2 - d\,x^3 + \text{etc. ponatur}$$

$$\xi = \frac{c\,x - d\,x^2 + e\,x^3}{b} - \text{etc.},$$

tum aequationis propoſitae radicem p hac exprimi formula:

$$p = x + \xi x + \frac{d.\,\xi^2 x}{1.\,2\,d\,x} + \frac{d\,d.\,\xi^3 x}{1.\,2.\,3\,d\,x^2} + \frac{d^3.\,\xi^4 x}{1.\,2.\,3.\,4\,d\,x^3} + \text{etc.},$$

quin etiam eſſe:

$$p^m = x^m + m(\xi x^{m-1} + \frac{d.\,\xi^2 x^{m-1}}{2.\,d\,x} + \frac{d\,d.\,\xi^3 x^{m-1}}{2.\,3\,d\,x^2} + \frac{d^3.\,\xi^4\,x^{m-1}}{2.\,3\,4\,d\,x^3} + \text{etc.})$$

ſubſtifubftituto nimirum poft peractas differentiationes $\frac{a}{b}$ loco x. Hinc autem hoc in genere deduxit Theorema: *propofita aequatione generali*

$$a - x + \Phi x = 0$$

fi p *fupponatur effe valor quicunque ipfius* x *praefenti aequationi fatisfaciens, femper erit*

$$\Psi p = \Psi x + \Phi x \, \Psi' x + \frac{d. \Phi x^2 . \Psi' x}{2 \, d \, x} + \frac{dd. \Phi x^3 . \Psi' x}{2.\, 3 \, d \, x^2} + \frac{d^3 . \Phi x^4 \Psi' x}{2.\, 3.\, 4 \, d \, x^3} + \text{etc.}$$

defignantibus $\Psi' p$ et $\Psi \, x$ functiones quascunque fimiles ipforum p et x, vbi autem differentiationibus abfolutis pro x debet fubftitui a. Quum igitur Celeb. huius Theorematis Auctor nullam loco allato eius attulerit demonftrationem, tanto magis operae pretium erat in eam inquirere, quanto certius eft hoc Theorema non folum fua elegantia, fed etiam vfu, quem per totam Analyfin habet fingulari, fe commendare. Veritate etenim huius Theorematis demonftrata, non folum ea quae a Cel. *la Grange* in differtatione modo laudata, allata funt de radicibus aequationum per feries exprimendis, fponte fequuntur; fed etiam plurimorum aliorum Problematum folutiones in poteftate erunt.

II. Priusquam vero nunc Theorematis propofiti demonftrationem adgrediamur, fequens praemittere neceffum eft Lemma, quippe cui demonftratio noftra praecipue innititur.

Lemma.

Lemma.

Si propositis duabus quibuscunque quantitatibus variabilibus y et z fuerit:

$$(A)\ y^m d^{m-1} z - m y^{m-1} d^{m-1}.\, yz + \frac{m(m-1)}{1.\,2} y^{m-2} d^{m-1}.\, y^2 z$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3} y^{m-3} d^{m-3}.\, y^3 z \dots \pm d^{m-1}.\, y^m z = 0$$

erit quoque

$$y^{m+1} d^m z - (m+1)\, y^m d^m.\, yz + \frac{(m+1)m}{1.\,2} y^{m-1} d^m.\, y^2 z$$
$$- \frac{(m+1)m(m-1)}{1.\,2.\,3} y^{m-2} d^m y^3 z \dots + d^m.\, y^{m+1} z = 0.$$

Demonstratio.

Si quantitatis propositae (A) per hypothesin nihilo aequalis, sumatur differentiale illudque in y ducatur prodibit:

$$(C)\ y^{m+1} d^m.\, z - m y^m d^m.\, yz + \frac{m(m-1)}{1.\,2} y^{m-1} d^m.\, y^2 z$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3} y^{m-2} d^m.\, y^3 z \dots \pm y d^m.\, y^m z$$
$$+ m\, dy\, (y^m d^{m-1} z - (m-1)\, y^{m-1} d^{m-1} yz)$$
$$+ m\, dy\, (\frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2} y^{m-2} d^{m-2}.\, y^2 z \dots \mp y d^{m-1}.\, y^{m-1} z = 0.$$

Deinde quum aequatio proposita (A) generaliter vera supponatur quicquid significet z, veritati quoque erit consentanea, si in locum ipsius z substituatur yz, adeo vt iam sit:

$$(B)\ y^m d^{m-1}.\, yz - m y^{m-1} d^{m-1}.\, y^2 z + \frac{m(m-1)}{1.\,2} y^{m-2} d^{m-1}.\, y^3 z$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3} y^{m-3} d^{m-1}.\, y^4 z \dots \pm d^{m-1} y^{m+1} z = 0$$

Si

Si vero nunc huius aequationis ſumatur differentiale orietur

$$(D)\; y^m d^m . yz - m y^{m-1} d^m . y^2 z + \frac{m(m-1)}{1.\,2} y^{m-2} d^m . y^3 z$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3} y^{m-3} d^m . y^4 z \ldots \pm d^m . y^{m+1} z$$
$$+ m\,dy(y^{m-1} d^{m-1} . yz - (m-1) y^{m-2} d^{m-1} . y^2 z)$$
$$+ m\,dy \left(\frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2} y^{m-3} d^{m-1} . y^3 z \ldots \mp d^{m-1} . y^m z\right) = 0$$

Facta nunc tali combinatione aequationis (D) cum ſuperiori (C), vt membrum prius aequationis (D) a priori ipſius (C), poſterius vero a poſteriori ſubtrahatur, prodibit:

$$y^{m+1} d^m . z - (m+1) y^m . d^m . yz + \frac{(m+1)m}{1.\,2} y^{m-1} . d^m . y^2 z$$
$$- \frac{(m+1)m(m-1)}{1.\,2.\,3} y^{m-2} . d^m . y^3 z \ldots \mp d^m . y^{m+1} z$$
$$+ m\,dy(y^m . d^{m-1} . z - m y^{m-1} d^{m-1} y z + \frac{m(m-1)}{1.\,2} y^{m-2} d^{m-1} . y^2 z)$$
$$+ m\,dy(- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3} y^{m-3} d^{m-1} . y^3 z \ldots \pm d^{m-1} . y^m z) = 0$$

poſterius autem aequationis inuentae membrum eſſe $= 0$, iam ſponte liquet, quum id nihil aliud ſit, quam ipſa formula (A) in $m\,dy$ ducta, conſequenter erit quoque

$$y^{m+1} d^m z - (m+1) y^m d^m . yz + \frac{(m+1)m}{1.\,2} y^{m-1} d^m . y^2 z$$
$$- \frac{(m+1)m(m-1)}{1.\,2.\,3} y^{m-2} d^m . y^3 z \ldots \mp d^m . y^{m+1} z = 0.$$

III. Simili ratione demonſtrari poteſt eſſe:

$$y^{m+2} d^{m+1} . z - (m+2) y^{m+1} d^{m+1} . yz + \frac{(m+2)(m+1)}{1.\,2} y^m d^{m+1} y^2 z$$
$$- \frac{(m+2)(m+1)m}{1.\,2.\,3} y^{m-1} d^{m+1} . y^3 z \ldots \pm d^{m+1} . y^{m+2} z = 0$$

atque adeo in genere

$$y^{m+n} d^{m+n-1}.z-(m+n)y^{m+n-1}.d^{m+n-1}.yz + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1.\ 2}y^{m+n-2}d^{m+n-2}.y^2 z\ldots \text{etc.} = 0$$

Si igitur formula (A) pro valore quocunque litterae m veritati fuerit consentanea, nullum est dubium, quin vera quoque sit, si in locum ipsius m substituatur $m+n$, designante n numerum quemcunque integrum positiuum. Quum autem posito $m=1$ oriatur aequatio identica $yd^0.z-d^0.yz=0$, liquet quoque hinc in genere esse pro numero quocunque m integro et positiuo:

$$y^m d^{m-1}.z-m.y^{m-1}d^{m-1}.yz+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}y^{m-2}d^{m-1}.y^2 z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}y^{m-3}d^{m-1}.y^3 z\ldots \pm d^m.y^m z = 0$$

vbi vltimum membrum signo $+$ afficietur, si m fuerit numerus par, contra vero si impar.

IV. Loco Lemmatis allati, aliud multo generalius proponi potuisset ita expressum: *Si fuerit*

$$y^\lambda d^m.z-\lambda y^{\lambda-1}d^m.yz+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.\ 2}y^{\lambda-2}d^m.y^2 z - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.\ 2.\ 3}y^{\lambda-3}d^m.y^3 z + \text{etc.} = 0$$

erit quoque

$$y^{\lambda+1}d^{m+1}.z-(\lambda+1)y^\lambda d^{m+1}.yz+\frac{(\lambda+1)\lambda}{1.\ 2}y^{\lambda-1}d^{m+1}.y^2 z - \frac{(\lambda+1)\lambda(\lambda-1)}{1.\ 2.\ 3}y^{\lambda-2}d^{m+1}.y^3 z + \text{etc.} = 0.$$

Patet vero demonstrationem huius Lemmatis, simili ratione adornari debere ac pro Lemmate praecedente, vt vero in genere liqueat esse:

$y^\lambda d^m$

$$y^\lambda d^m.\ z - \lambda y^{\lambda-1} d^m.\ y z + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.\ 2} y^{\lambda-2} d^m. y^2 z - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.\ 2.\ 3} y^{\lambda-3} d^m. y^3 z + \text{etc.} = 0$$

necessum est, vt posito $m = 0$ sit

$$y^n d^0.\ z - n y^{n-1}.\ d^0.\ y z + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} y^{n-2}.\ d^0.\ y^2 z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} y^{n-3}.\ d^0. y^3 z + \text{etc.} = 0$$

seu diuisa tota aequatione per $y^n z$

$$1 - n + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \text{etc.} = 0$$

de quo iam nullum est dubium, quum haec expressio sit $= (1-1)^n = 0$. Quum itaque sit

$$y^n d^0.\ z - n y^{n-1} d^0. y z + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} y^{n-2} d^0.\ y^2 z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} y^{n-3} d^0. y^3 z + \text{etc.} = 0$$

posito $\lambda = n + m$, inde iam tuto inferri potest esse:

$$y^\lambda d^m.\ z - \lambda y^{\lambda-1} d^m.\ y z + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.\ 2} y^{\lambda-2} d^m.\ y^2 z - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.\ 2.\ 3} y^{\lambda-3} d^m. y^3 z + \text{etc.} = 0$$

vbi obseruandum est, quod quum pro n numerus quicunque accipi queat, Lemma hoc posterius verum sit, quicunque demum fuerit valor numeri λ.

V. Hisce praemonitis ad demonstrationem Theorematis laudati progrediamur.

Theorema.

Si designante Φx *functionem quamcunque datam ipsius* x, *fuerit* $t - x + \Phi x = 0$, *tum si* ψx *et* ψt

 designent

designent functiones quascunque similes ipsorum x *et* t, *atque ponatur* $\psi' t = \frac{d.\psi t}{d t}$ *erit* :

$$\psi x = \psi t + \Phi t.\ \psi' t + \frac{d.\ \Phi t^2.\ \psi' t}{1.\ 2.\ d t} + \frac{d\ d.\ \Phi t^3\ \psi' t}{1.\ 2.\ 3\ d t^2} + \frac{d^3.\ \Phi t^4\ \psi' t}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ d t^3} + \text{etc.}$$

Demonstratio.

Quum sit $t = x - \Phi x$, si ψt significet functionem quamcunque ipsius t, erit $\psi t = \psi (x - \Phi x)$, est vero

$$\psi (x - \Phi x) = \psi x - \Phi x \psi' x + \frac{\Phi x^2.d.\psi' x}{1.\ 2.\ d x} - \frac{\Phi x^3.\ d d \psi' x}{1.\ 2.\ 3\ d x^2} + \text{etc.}$$

hinc ergo habetur

$$\psi t = \psi x - \Phi x\ \psi' x + \frac{\Phi x^2\ d.\ \psi' x}{1.\ 2.\ d x} - \frac{\Phi x^3\ d\ d.\ \psi' x}{1.\ 2.\ 3\ d x^2} + \text{etc.}$$

Tum vero si loco ipsius ψt successiue substituantur

$$\Phi t\ \psi' t,\ \frac{d.\ \Phi t^2\ \psi' t}{1.\ 2\ d t},\ \frac{d d\ \Phi t^3\ \psi' t}{1.\ 2.\ 3\ d t^2},\ \text{etc.}$$

habebimus quoque

$$\Phi t\ \psi' t = \Phi x\ \psi' x - \frac{\Phi x.\ d.\ \Phi x \psi' x}{d x} + \frac{\Phi x^2\ d d.\ \Phi x \psi' x}{1.\ 2\ d x^2} - \frac{\Phi x^3\ d^3.\ \Phi x \psi' x}{1.\ 2.\ 3\ d x^3} + \text{etc.}$$

$$\frac{d.\ \Phi t^2.\ \psi' t}{1.\ 2\ d t} = \frac{d.\ \Phi x^2.\ \psi' x}{1.\ 2\ d x} - \frac{\Phi x\, d d.\ \Phi x^2\ \psi' x}{1.\ 2\ d x^2} + \frac{\Phi x^2\ d^3.\ \Phi x^2\ \psi' x}{1.\ 2.\ 1.\ 2\ d x^3} - \text{etc.}$$

$$\frac{d\ d.\ \Phi t^3\ \psi' t}{1.\ 2.\ 3\ d t^2} = \frac{d d\ \Phi x^3 \psi' x}{1.\ 2.\ 3\ d x^2} - \frac{\Phi x\ d^3.\Phi x^3\ \psi' x}{1.\ 2.\ 3\ d x^3} + \frac{\Phi x^2.\ d^4.\ \Phi x^3\ \psi' x}{1.\ 2.\ 1.\ 2.\ 3\ d x^4} - \text{etc.}$$

etc.

Functionibus autem his ipsius t in vnam summam collectis obtinebimus:

$\psi' t +$

$$\psi t + \Phi t\, \psi' t + \frac{d.\, \Phi t^2 \psi' t}{1.2\, dt} + \frac{dd.\, \Phi t^3 .\, \psi' t}{1.2.3\, dt^2} + \frac{d^3 .\, \Phi t^4 \psi' t}{1.2.3.4\, dt^3} + \text{etc.} =$$

$$\psi x - \Phi x\, \psi' x + \frac{\Phi x^2 .\, d \psi x}{1.2\, dx} - \frac{\Phi x^3 .\, dd \psi' x}{1.2.3\, dx^2} + \frac{\Phi x^4\, d^3 \psi' x}{1.2.3.4\, dx^3} - \text{etc.}$$

$$+ \Phi x\, \psi' x - \frac{\Phi x\, d.\, \Phi x\, \psi' x}{dx} + \frac{\Phi x^2\, dd.\, \Phi x\, \psi' x}{1.2\, dx^2} - \frac{\Phi x^3\, d^3 .\, \Phi x\, \psi' x}{1.2.3\, dx^3} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{d.\, \Phi x^2 .\, \psi' x}{1.4\, dx} - \frac{\Phi x\, dd.\, \Phi x^2\, \psi' x}{1.2\, dx^2} + \frac{\Phi x^2 .\, d^3 .\, \Phi x^2\, \psi' x}{1.2.1.2\, dx^3} - \text{etc.}$$

$$+ \frac{dd.\, \Phi x^3\, \psi' x}{1.2.3\, dx^2} - \frac{\Phi x .\, d^3 .\, \Phi x^3\, \psi' x}{1.2.3\, dx^3} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{d^3 .\, \Phi x^4\, \psi' x}{1.2.3.4\, dx^3} - \text{etc.}$$

etc.

Si iam in Lemmate noſtro §. 11. loco y ſubſtituatur Φx et loco z, $\psi' x$ patet fore generatim

$$\Phi x^m d^{m-1} \psi' x - m \Phi x^{m-1} d^{m-1} .\Phi x \psi' x + \frac{m(m-1)}{1.2} \Phi x^{m-2} d^{m-1} \Phi x^2 \psi' x$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \Phi x^{m-3} d^{m-1} .\, \Phi x^3\, \psi' x + \text{etc.} = 0$$

adeoque a parte dextra aequationis inuentae, terminos qui in iisdem lineis verticalibus collocantur ſe mutuo deſtruere, adeo vt ſolus remaneat terminus primus ψx, ex quo iam conſequitur eſſe

$$\psi x = \psi t + \Phi t .\, \psi' t + \frac{d.\, \Phi t^2 \psi' t}{1.2\, dt} + \frac{dd.\, \Phi t^3 \psi' t}{1.2.3\, dt^2}$$
$$+ \frac{d^3 .\, \Phi t^4 \psi' t}{1.2.3.4\, dt^3} + \text{etc.}$$

VI. Si ſtatuatur $\psi x = x$, ideoque $\psi t = t$ et $\psi' t = 1$, habebitur

$$x = t + \Phi t + \frac{d \Phi t^2}{1.2\, dt} + \frac{dd.\, \Phi t^3}{1.2.3\, dt^2} + \frac{d^3 .\, \Phi t^4}{1.2.3.4\, dt^3} + \text{etc.}$$

ideoque

$$\Phi x = x - t = \Phi t + \frac{d.\, \Phi t^2}{2.\, dt} + \frac{dd.\, \Phi t^3}{6.\, dt^2} + \frac{d^3 .\, \Phi t^4}{24.\, dt^3} + \text{etc.}$$

 quod

quod etiam ex Theoremate nostro, statim deducitur, ponendo $\psi x = \Phi x$ atque $\psi t = \Phi t$, habebitur enim

$$\Phi x = \Phi t + \Phi t . \Phi' t + \frac{d . \Phi t^2 \Phi' t}{1 . 2\, d t} + \frac{d d . \Phi t^3 \Phi' t}{1 . 2 . 3\, d t^2} + \text{etc.}$$

aequatio quae priori perfecte congruit.

VII. Quamuis nullum quidem supersit dubium, quin demonstratione iam allata, veritas Theorematis plane sit euicta, quum tamen videri posset hanc demonstrationem ita esse comparatam, vt in eam vix quisquam incideret, nisi ipsum Theorema iam prius sibi haberet cognitum, haud inutile igitur erit ostendere, quali adhibito ratiocinio, ad inueniendum valorem functionis ψx perducti simus. Quum scilicet sit

$$\psi t = \psi x - \Phi x \psi' x + \frac{\Phi x^2 . d . \psi' x}{2 . d x} - \frac{\Phi x^3 . d d . \psi' x}{1 . 2 . 3\, d x^2} + \text{etc.}$$

vt hinc inueniatur valor ipsius ψx, in eo elaborandum est, vt membri posterioris ad hanc aequationem pertinentis, singuli termini praeter primum destruantur, quo autem $-\Phi x \psi' x$ destruatur, patet necessarium esse, vt ad ψt addatur eiusmodi functio ipsius t, cuius per x expressae primus terminus sit $+\Phi x \psi' x$, qualis igitur erit $\Phi t \psi' t$, hoc autem facto habebimus:

$$\psi t + \Phi t \psi' t = \psi x + \frac{\Phi x^2 . d \psi' x}{1 . 2\, d x} - \frac{\Phi x^3 . d d \psi' x}{1 . 2 . 3\, d x^3} + \text{etc.}$$
$$- \frac{\Phi x . d . \Phi x \psi' x}{d x} + \frac{\Phi x^2 . d d . \Phi x \psi' x}{1 . 2\, d x^2} - \text{etc.}$$

Quum

Quum vero nunc ex ſupra allatis §. III., conſtet eſſe

$$\frac{\Phi x^2\, d.\, \psi' x}{1.2\, d x} - \frac{\Phi x\, d.\, \Phi x\, \psi' x}{d x} = - \frac{d.\, \Phi x^2\, \psi' x}{1.2\, d x},$$

euidens eſt terminos

$$\frac{\Phi x^2\, d.\, \psi' x}{1.2\, d x} - \frac{\Phi x\, d.\, \Phi x\, \psi' x}{d x}$$

ex aequatione modo allata eliminari poſſe, ſi ad $\psi t + \Phi t\, \psi' t$ addatur talis functio ipſius t, cuius per x expreſſae primus terminus ſit $\frac{d.\, \Phi x^2\, \psi' x}{1.2\, d x}$, quae proprietas manifeſto competit ipſi $\frac{d.\, \Phi t^2\, \psi' t}{1.2\, d t}$, tum autem fiet

$$\psi t + \Phi t\, \psi' t + \frac{d.\, \Phi t^2\, \psi' t}{1.2\, dt} = \psi x - \frac{\Phi x^3\, d d.\, \psi' x}{1.2.3\, d x^2} + \frac{\Phi x^4\, d^3\, \psi x}{1.2.3.4\, d x^3} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{\Phi x^2\, dd.\, \Phi x\, \psi' x}{1.2\, d x^2} - \frac{\Phi x^3.\, d^3\, \Phi x\, \psi' x}{1.2.3\, d x^3} + \text{etc.}$$
$$- \frac{\Phi x.\, dd.\, \Phi x^2\, \psi' x}{1.2\, d x^2} + \frac{\Phi x^2\, d^3.\, \Phi x^2\, \psi' x}{1.2.1.2\, d x^3} - \text{etc.}$$

Iam autem liquet ad terminos

$$- \frac{\Phi x^3\, dd.\, \psi' x}{1.2.3.\, d x^2} + \frac{\Phi x^2\, dd.\, \Phi x\, \psi' x}{1.2\, d x^2} - \frac{\Phi x\, dd.\, \Phi x^2\, \psi' x}{1.2\, d x^2} = - \frac{dd.\, \Phi x^3\, \psi' x}{1.2.3\, d x^2}$$

eliminandos requiri, vt addatur $\frac{dd.\, \Phi t^3\, \psi' t}{1.2.3\, d t^2}$, atque ſimili ratione hoc ratiocinium vlterius proſequendo, etiam termini differentialia altiorum graduum inuoluentes eliminari poſſunt, adeo vt remaneat ſolus primus terminus

$$\psi x = \psi t + \Phi t\, \psi' t + \frac{d.\, \Phi t^2\, \psi' t}{1.2\, d t} + \frac{dd.\, \Phi t^3\, \psi' t}{1.2.3\, d t^2} + \frac{d^3\, \Phi t^4\, \psi' t}{1.2.3.4\, dt^3} + \text{etc.}$$

VIII. Si T deſignet functionem quamcunque ipſius t, ope Theorematis huius valor functionis

nis $\psi(x+T)$ facile determinari poterit. Quum enim fit

$$\psi(x+T)=\psi x+T\psi' x+\frac{T^2\, d.\psi' x}{1.2\, dx}+\frac{T^3\, d\, d.\psi' x}{1.2.3\, dx^2}+\text{etc.}$$

fi feorfim quaerantur valores functionum ψx, $T\psi' x$, $\frac{T^2 d\psi' x}{1.2\, dx}$ etc. per t expreffi, confequemur:

$$\begin{aligned}\psi(x+T)=\psi t+\Phi t\,\psi' t&+\frac{d.\Phi t^2\psi' t}{1.2\, dt}+\frac{d\,d.\Phi t^3\psi' t}{1.2.3\, dt^2}+\frac{d^3.\Phi t^4\,\psi' t}{1.2.3.4\, dt^3}+\text{etc.}\\ &+T\psi' t+T\Phi t\psi'' t+\frac{T\, d.\Phi t^2\psi'' t}{1.2\, dt}+\frac{T\, d\,d.\Phi t^3\psi'' t}{1.2.3\, dt^2}+\text{etc.}\\ &+\frac{T^2\psi'' t}{1.2}+\frac{T^2\Phi t\psi''' t}{1.2}+\frac{T^2 d.\Phi t^2\psi''' t}{1.2.1.2\, dt^2}+\text{etc.}\\ &+\frac{T^3\psi''' t}{1.2.3}+\frac{T^3\Phi t\,\psi'''' t}{1.2.}+\text{etc.}\\ &+\frac{T^4\psi'''' t}{1.2.3.4}+\text{etc.}\end{aligned}$$

vbi fupponimus

$$\psi'' t=\frac{d.\psi' t}{dt};\quad \psi''' t=\frac{d.\psi'' t}{dt}\ \text{etc.}$$

Valorem autem hunc ipfius $\psi(x+T)$ inuentum, vel leui adhibita attentione, facile quisque inueniet fic repraefentari poffe:

$$\psi(x+T)=\psi(t+T)+\Phi t\,\psi'(t+T)+\frac{d.\Phi t^2\psi'(t+T)}{1.2\, dt}+\frac{d\,d.\Phi t^3\psi'(t+T)}{1.2.3\, dt^2}+\text{etc.}$$

T fcilicet in fingulis differentiationibus pro conftante habita, nam fi haec expreffio euoluatur, prodibit

$$\begin{aligned}\psi(t+T)&=\psi t+T\psi' t+\frac{T^2\psi'' t}{1.2}+\frac{T^3\psi''' t}{1.2.3}+\frac{T^4\psi'''' t}{1.2.3.4}+\text{etc.}\\ \Phi t\,\psi'(t+T)&=\Phi t\psi' t+T\Phi t.\,\psi'' t+\frac{T^2\Phi t\,\psi''' t}{1.2}+\frac{T^3\Phi t\psi'''' t}{1.2.3}+\text{etc.}\\ \frac{d.\Phi t^2\psi'(t+T)}{1.2\, dt}&=+\frac{d.\Phi t^2\psi' t}{1.2\, dt}+\frac{T d.\Phi t^2\psi'' t}{1.2\, dt}+\frac{T^2 d\Phi t^2\psi''' t}{1.2.1.2\, dt}+\text{etc.}\\ \frac{dd.\Phi t^3\psi'(t+T)}{1.2.3\, dt^2}&=+\frac{dd.\Phi t^3\psi' t}{1.2.3\, dt^2}+\frac{T.dd.\Phi t^3\psi'' t}{1.2.3\, dt^2}+\text{etc.}\\ \frac{d^3\Phi t^4\psi'(t+T)}{1.2.3.4\, dt^3}&=+\frac{d^3\Phi t^4\psi' t}{1.2.3.4\, dt^3}+\text{etc.}\end{aligned}$$

quorum

quorum terminorum ſumma vt modo vidimus erat $= \psi(x + \mathrm{T})$.

IX. Hinc vero patet, quomodo praeſens Theorema ad caſum multo latius patentem adplicari debeat, quo nimirum quaeritur valor functionis cuiuscunque ambarum variabilium x et t. Si igitur propoſita fuerit functio $\psi(x, t)$ ex quantitatibus x et t, vtcunque compoſita, conſideremus primum t vt conſtantem, ſeu in hac functione loco ipſius x ſubſtituamus α, tum autem per Theorema noſtrum, quaeramus valorem ipſius $\psi(\alpha, x)$, qui erit

$$= \psi(\alpha, t) + \Phi t\, \psi'(\alpha, t) + \frac{d.\Phi t^2 \psi'(\alpha, t)}{1.2\, dt} + \frac{dd.\Phi t^3 \psi'(\alpha, t)}{1.2.3\, dt^2} + \text{etc.}$$

poſt peractas vero differentiationes loco α iterum introducatur t, atque iam expreſſio hinc oriunda definet quantitatem functionis $\psi(x, t)$. Quum enim $\psi(x, t)$ ſit ſimilis functio ipſorum x et t, ac $\psi(\alpha, x)$ ſit ipſorum α et x, liquet omnino, ſi in valore poſterioris functionis loco α introducatur t, eam in priorem abire, ratio autem cur demum poſt peractas differentiationes t loco α introduximus, haec eſt, quod in valoribus differentialibus occurrat quantitas $\psi'(\alpha, t)$, quae loco α introducto t migrat in $\psi'(t, t)$, in qua functione quum prius t, vt conſtans haberi debeat, poſterius vero pro variabili ſpectari, vt omnis euitetur confuſio, donec omnes differentiationes abſolutae fuerint, praeſtabit α in locum ipſius t ſubſtituere. Vt vero huius aſſerti veritatem eo melius ob oculos ponere liceat, facili quodam exemplo id illuſtrare placet. Sit igitur

 $t = x$

$t = x - n\,x$, atque ſupponamus hinc quaeri valorem ipſius $t\,x$ per ſolum t expreſſum. Quum itaque ſit

$$\phi\, x = n\,x\,;\ \phi\, t = n\,t\,;\ \psi\,(t,\,x) = t\,x$$

ideoque

$$\psi\,(\alpha,\,x) = \alpha\,x,\ \ \psi\,(\alpha,\,t) = \alpha\,t \ \text{ et } \ \psi'\,(\alpha,\,t) = \alpha,$$

hinc habebitur:

$$\alpha\,x = \alpha\,t + n\,\alpha\,t + n^2\,\alpha\,t + n^3\,\alpha\,t + \text{etc.} = \frac{\alpha\,t}{1-n}$$

vnde ſubſtituto iam t in locum ipſius α, orietur

$$t\,x = \frac{t\,t}{1-n},$$

vti per ſe quoque perſpicuum eſt.

X. Deinde vero et id praeprimis notari meretur, Theorema praeſens multo generalius quoque exprimi poſſe. *Si enim ſupponatur* $t = x - P$, *vbi* P *deſignat functionem quamcunque ambarum variabilium* x *et* t, P' *vero denotet eam functionem ipſius* t, *quae prodit ſi in* P *loco* x *ſubſtituatur* t, *atque tantiſper ii* t *qui antea ipſi* P *inerant per* t' *deſignentur*, erit

$$\psi\, x = \psi\, t + P'\,\psi'\,t + \frac{d.\,P'^2\,\psi'\,t}{1.\,2\,d\,t} + \frac{d\,d.\,P'^3\,\psi'\,t}{1.\,2.\,3\,d\,t^2} + \frac{d^3.\,P'^4\,\psi'\,t}{1.\,2.\,3.\,4\,d\,t^3} + \text{etc.}$$

in quibus differentiationibus, pro functione P', *ſola* t *variabilis haberi debet*, t' *autem pro conſtante ſpectari, tum vero captis differentialibus loco* t' *ſubſtitui poterit vbique* t. Facile autem patet, demonſtrationem ſupra (§. 5) allatam paucis tantum immutatis huc applicari poſſe. Primum enim quod ad Lemma noſtrum fundamenti loco poſitum attinet, ſi y deſignet functio-

functionem duarum variabilium, differentiatio autem tantum respectu vnius earum instituatur, euidens est hoc Lemma etiam pro eo casu cum veritate perfecte consentire. Iam igitur quum sit

$$\psi t = \psi x - P\psi' x + \frac{P^2\, d.\psi' x}{1.2\, dx} - \frac{P^3\, dd.\psi' x}{1.2.3\, dx^2} + \frac{P^4\, d^3 \psi' x}{1.2.3.4\, dx^3} - \text{etc.}$$

loco ψt substitutis

$$P' \psi' t, \quad \frac{d.P'^2 \psi' t}{1.2\, dt}, \quad \frac{dd.P'^3 \psi' t}{1.2.3\, dt^2}, \quad \text{etc.}$$

consequemur

$$P'\psi' t = P\psi' x - P\left(\frac{d.P\psi' x}{dx}\right) + \frac{P^2}{1.2}\left(\frac{dd.P\psi' x}{dx^2}\right) - \frac{P^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3 P\psi' x}{dx^3}\right) + \text{etc.}$$

$$\frac{d.P'^2\psi' t}{1.2\, dt} = \frac{1}{1.2}\left(\frac{d.P^2\psi' x}{dx}\right) - \frac{P}{1.2}\left(\frac{dd.P^2\psi' x}{dx^2}\right) + \frac{P^2}{1.2.1.2}\left(\frac{d^3 P^2\psi' x}{dx^3}\right) - \text{etc.}$$

Omnibus igitur his valoribus in vnam summam collectis, obtinebimus:

$$\begin{aligned}
&\psi t + P'\psi' t + \frac{d.P'^2\psi' t}{1.2\, dt} + \frac{dd.P'^3\psi' t}{1.2.3\, dt^2} + \frac{d^3 P'^4\psi' t}{1.2.3.4\, dt^3} + \text{etc.} \\
= {}& \psi x - P\psi' x + \frac{P^2\, d.\psi' x}{1.2\, dx} - \frac{P^3\, dd.\psi' x}{1.2.3\, dx^2} + \frac{P^4\, d^3\psi' x}{1.2.3.4\, dx^3} - \text{etc.} \\
&+ P\psi' x - P\left(\frac{d.P\psi' x}{dx}\right) + \frac{P^2}{1.2}\left(\frac{dd.P\psi' x}{dx^2}\right) - \frac{P^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3 P\psi' x}{dx^3}\right) + \text{etc.} \\
&+ \frac{1}{1.2}\left(\frac{d.P^2\psi' x}{dx}\right) - \frac{P}{1.2}\left(\frac{dd.P^2\psi' x}{dx^2}\right) + \frac{P^2}{1.2.1.2}\left(\frac{d^3 P^2\psi' x}{dx^3}\right) - \text{etc.} \\
&+ \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{dd.P^3\psi' x}{dx^2}\right) - \frac{P}{1.2.3}\left(\frac{d^3 P^3\psi' x}{dx^3}\right) + \text{etc.} \\
&+ \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{d^3 P^4\psi' x}{dx^3}\right) - \text{etc.} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Quum autem per Lemma nostrum in genere constet esse

$$P^m \frac{d^{m-1}\psi' x}{dx^{m-1}} - m P^{m-1}\left(\frac{d^{m-1} P\psi' x}{dx^{m-1}}\right) + \frac{m(m-1)}{1.2} P^{m-2}\left(\frac{d^{m-1} P^2\psi' x}{dx^{m-1}}\right)$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} P^{m-3}\left(\frac{d^{m-1} P^3\psi' x}{dx^{m-1}}\right) + \text{etc.}$$

 neces-

neceſſum eſt, vt a parte dextra aequationis, omnes termini, qui in iisdem lineis verticalibus diſpoſiti ſunt, ſeu qui differentialia eiusdem gradus inuoluunt, ſponte euaneſcant, vnde habebitur:

$$\psi x = \psi t + P' \psi' t + \frac{d.P'^2 \psi' t}{1.2\, dt} + \frac{dd.P'^3 \psi' t}{1.\,.\,3\, dt^2} + \frac{d^3.P'^4 \psi' t}{1.2.\,.\,4\, dt^3} + \text{etc.}$$

peractis autem differentiationibus loco t' iterum ſcribi poteſt t. Nunc vero perſpicua euadit ratio, cur differentiationibus inſtitutis, t' in P' pro conſtanti haberi debeat, quum enim ſit

$$\psi t = \psi x - P \psi' x + \frac{P^2\, d.\psi' x}{1.2\, dx} - \frac{P^3\, dd.\psi' x}{1.2.3\, dx^2} + \text{etc.}$$

conſtat valorem ipſius ψx hinc definiri poſſe, ſi ad ψt addantur eiusmodi functiones ipſius t, quibus per x expreſſis, non ſolum quantitas $P \psi' x$, ſed etiam termini qui differentialia ipſius $\psi' x$ inuoluunt, eliminari poſſunt, at pro $- P \psi' x$ eliminando ſtatim liquet, ad ψt, addi debere quantitatem, quae ſimilis eſt functio ipſius t ac $P \psi' x$ eſt ipſius x, ideoque dum in P loco t ſcribitur t', patet ad ψt addi debere terminum $P' \psi' t$, vbi P' eſt ſimilis functio ipſorum t' et t, ac P eſt ipſorum t et x, tum vero etiam perſpicuum eſt vtrinque t' vt conſtantem ſpectari debere. Similis autem res eſt cum reliquis terminis differentialia ipſius $\psi' x$ inuoluentibus.

XI. Perpenſis iis quae ſupra (§. 9) attulimus, iam euidens quoque eſt, qua ratione functio quaecunque ipſorum x et t $\psi(x, t)$, pro hypotheſi qua

$t = x$

$t = x - P$, per ſolam variabilem t determinari queat, primum enim patet eſſe

$$\psi(\alpha, x) = \psi(\alpha, t) + P' \psi'(\alpha, t) + \frac{d.\, P'^2 \psi'(\alpha, t)}{1 \cdot 2\, dt} + \frac{dd.\, P'^3 \psi'(\alpha, t)}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dt^2}$$
$$+ \frac{d^3 P'^4 \psi'(\alpha, t)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, dt^3} + \text{etc.}$$

deinde vero intelligitur quum $\psi(t, x)$ ſimilis ſit functio ipſorum t et x, ac $\psi(\alpha, x)$ eſt ipſorum α et x, poſteriorem functionis valorem in priorem abire, ſi vbique loco α introducatur t, praeterea vero ſemper notandum eſt, poſt peractas differentiationes vbique loco t' ſcribi debere t. Sic exempli cauſſa ſi fuerit $t = x - t x$, atque hinc inueſtigari debeat valor ipſius $t t x$ per t expreſſus, ſtatim fiet $P = t x$, $P' = t' t$, $\psi(t, x) = t t x$, $\psi(\alpha, t) = \alpha \alpha t$ et $\psi'(\alpha, t) = \alpha\alpha$, vnde prodibit

$$\alpha \alpha x = \alpha \alpha t + \alpha \alpha t' t + \alpha \alpha t'^2 t + \alpha \alpha t'^3 t + \text{etc.}$$

ideoque

$$t t x = t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + \text{etc.} = \frac{t^3}{1 - t},$$

qui valor omnino veritati eſt conſentaneus.

XII. Vt iam de ſingulari huius Theorematis vſu, breuiter quaedam adferamus, examinemus *primo*, quomodo eius ope radicem cuiuscunque aequationis algebraicae per ſeriem exprimere liceat, in quem vſum, ipſum Theorema a Celeb. *la Grange* inuentum eſſe conſtat. Si igitur propoſita fuerit haec aequatio algebraica ad rationalitatem perducta:

$$x = a + b x^2 + c x^3 + d x^4 + e x^5 + \text{etc.}$$

 quae-

quaeritur vt ex hac aequatione, valor ipſius x per ſeriem meras quantitates conſtantes inuoluentem exprimatur. Comparata autem hac aequatione cum illa generali:

$$x = t + \Phi x$$

euidens eſt, heic ſtatui debere $t = a$ et

$$\Phi x = b x^2 + c x^3 + d x^4 + e x^5 + \text{etc.}$$

ideoque

$$\Phi t = b t^2 + c t^3 + d t^4 + e t^5 + \text{etc.}$$

tum autem vi Theorematis habebitur

$$x = t + \Phi t + \frac{d.\Phi t^2}{2\, d t} + \frac{d d.\Phi t^3}{2.3\, d t^2} + \frac{d^3.\Phi t^4}{2.3.4\, d t^3} + \text{etc.}$$

vbi nimirum poſt peractas differentiationes loco t ſcribi debet a. Non vero ſolum valor ipſius radicis x, ſed etiam poteſtatis ipſius vel alius functionis cuiuscunque, hinc aſſignari poterit, ſic enim habebitur

$$x^m = t^m + m\left(\Phi t.t^{m-1} + \frac{d.\Phi t^2\, t^{m-1}}{2\, d t} + \frac{d d.\Phi t^3.t^{m-1}}{2.3\, d t^2} + \frac{d^3.\Phi t^4.t^{m-1}}{2.3.4\, d t^3} + \text{etc.}\right)$$

XII. Dum vero has expreſſiones actu euoluere conabimur, ante omnia neceſſum eſt, vt valor ipſius Φt^n per ſeriem expreſſus inueſtigetur, quum igitur ſit

$$\Phi t = t t (b + c t + d t^2 + e t^3 + \text{etc.}), \text{ erit}$$
$$\Phi t^n = t^{2n}(b + c t + d t^2 + e t^3 + \text{etc.})^n$$

ex quo totum negotium eo reducitur, vt polynomium

$$b + ct + dt^2 + et^3 + \text{etc.}$$

ad potestatem n euehatur, quum vero constet potestatem polynomii n huiusmodi habere debere formam:

$$b' + c't + d'tt + e't^3 + \text{etc.}$$

iam quaestio in eo versatur, vt valores coefficientium b', c', d' etc. determinentur. At quum sit $(b + ct + dt^2 + et^3 + \text{etc.})^n = b' + c't + d'tt + e't^3 + \text{etc.}$ erit quoque

$$\frac{n(c + 2dt + 3ett + 4ft^3 + \text{etc.})}{b + ct + dt^2 + et^3 + ft^4 + \text{etc.}} = \frac{c' + 2d't + 3e'tt + 4f't^3 + \text{etc.}}{b' + c't + d't^2 + e't^3 + f't^4 + \text{etc.}}$$

vnde iam facile deducuntur sequentes valores ipsorum b', c', d' etc.

$$b' = b^n$$

$$c' = \frac{nb'c}{b} = nb^{n-1}c$$

$$d' = \frac{nb'd}{b} + \frac{n-1}{2}\frac{c'c}{b} = nb^{n-1}d + \frac{n(n-1)}{1.2}b^{n-2}cc$$

$$e' = \frac{nb'e}{b} + \frac{2n-1}{3}\frac{c'd}{b} + \frac{n-2}{3}\frac{d'c}{b} = nb^{n-1}e + \frac{2n(n-1)}{1.2}b^{n-2}cd + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}b^{n-3}c^3$$

$$f' = nb^{n-1}f + \frac{n(n-1)}{1.2}b^{n-2}(2ce + dd) + \frac{3n(n-1)(n-2)}{1.2.3}b^{n-3}ccd + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}b^{n-4}c^4$$

etc.

XIV.

XIV. Inuenta igitur expreſſione ipſius Φt^n, iam ſupereſt, vt euoluatur quoque $d^{n-1}\,\Phi t^n . t^{m-1}$, quem in finem notetur eſſe

$$\Phi t^n\, t^{m-1} = t^{2n+m-1}(b' + c't + d'tt + e't^3 + f't^4 + \text{etc.})$$

vnde poſito breuitatis gratia $2n+m-1=\lambda$, invenietur

$$d^{\varkappa}\Phi t^n . t^{m-1} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-\varkappa)b't^{\lambda-\varkappa} + (\lambda+1)\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda+1-\varkappa)c't^{\lambda+1-\varkappa}$$
$$+(\lambda+2)(\lambda+1)\lambda\ldots(\lambda+2-\varkappa)d't^{\lambda+2-\varkappa} + (\lambda+3)(\lambda+2)\ldots(\lambda+3-\varkappa)e't^{\lambda+3-\varkappa} + \text{etc.}$$

ideoque ſi $\varkappa = n-1$, habebitur $\lambda - \varkappa = n+m$ et proinde

$$d^{n-1}.\Phi t^n\, t^{m-1} = \lambda(\lambda-1)\ldots(m+n)b't^{m+n} + (\lambda+1)\lambda\ldots(m+n+1)c't^{m+n+1}$$
$$+(\lambda+2)(\lambda+1)\ldots(m+n+2)d't^{m+n+2} + \text{etc.}$$

vbi obſeruari debet eſſe $\lambda = 2n+m-1$.

XV. Hinc pro x^m iam ſequens deducitur expreſſio:

$$x^m = a^m + m(a^{m+1}b + a^{m+2}c + a^{m+3}d + a^{m+4}e + \text{etc.})$$
$$+\tfrac{m}{2}((m+3)a^{m+2}b^2 + 2(m+4)a^{m+3}bc + (m+5)a^{m+4}(cc+2bd) + \text{etc.})$$
$$+\tfrac{m}{2\cdot 3}\left(\begin{array}{l}(m+5)(m+4)a^{m+3}b^3 + 3(m+6)(m+5)a^{m+4}b^2c\\ \qquad + (m+7)(m+6)a^{m+5}(3bbd+3bcc) + \text{etc.}\end{array}\right)$$
$$+\tfrac{m}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\begin{array}{l}(m+7)(m+6)(m+5)a^{m+4}b^4\\ \qquad +4(m+8)(m+7)(m+6)a^{m+5}b^3c + \text{etc.}\end{array}\right)$$
$$+\text{etc.}$$

quae

quae etiam ſequenti ratione repraeſentari poteſt

$$x^m = a^m + m a^{m+1} b\left(1 + \tfrac{m+3}{1.2} ab + \tfrac{(m+5)(m+4)}{1.2.3} a^2 b^2 + \tfrac{(m+7)(m+6)(m+5)}{1.2.3.4} a^3 b^3 + \text{etc.}\right)$$
$$+ m a^{m+2} c\left(1 + (m+4) ab + \tfrac{(m+6)(m+5)}{1.2} a^2 b^2 + \tfrac{(m+8)(m+7)(m+6)}{1.2.3} a^3 b^3 + \text{etc.}\right)$$
$$+ m a^{m+3} d\left(1 + (m+5) ab + \tfrac{(m+7)(m+6)}{1.2} a^2 b^2 + \tfrac{(m+9)(m+8)(m+7)}{1.2.3} a^3 b^3 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ \tfrac{m}{2} a^{m+4} cc\left((m+5) + \tfrac{(m+7)(m+6)}{1.2} ab + \tfrac{(m+9)(m+8)(m+7)}{1.2.3} a^2 b^2 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{m}{2} a^{m+6} dd\left((m+7) + (m+9)(m+8) ab + \tfrac{(m+11)(m+10)(m+9)}{1.2} a^2 b^2 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ m a^{m+5} cd\left((m+6) + (m+8)(m+7) ab + \tfrac{(m+10)(m+9)(m+8)}{1.2} a^2 b^2 + \text{etc.}\right)$$
$$+ m a^{m+7} ce\left((m+8) + (m+10)(m+9) ab + \tfrac{(m+12)(m+11)(m+10)}{1.2} a^2 b^2 + \text{etc.}\right)$$
$$+ \text{etc. etc.}$$

Poſito igitur $m = 1$ habebimus

$$x = a + a^2 b(1 + 2.ab + 5.a^2 b^2 + 14 a^3 b^3 + \text{etc.})$$
$$+ a^3 c(1 + 5.ab + 21.a^2 b^2 + 84 a^3 b^3 + \text{etc.})$$
$$+ a^4 d(1 + 6.ab + 28.a^2 b^2 + \text{etc.})$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ a^5 cc(3 + 14 ab + 60 a^2 6^2 + \text{etc.})$$
$$+ a^7 dd(4 + 45 ab + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ a^6 cd(7 + 72 ab + \text{etc.})$$
$$+ a^8 ce(9 + 110 ab + \text{etc.})$$
$$+ \text{etc.}$$

quae ſeries iam olim a *Newtono* inuenta eſt.

XVI. Si aequatio propofita diuidatur per $b\,x$, tum ea ita habebitur expreffa:

$$x = \frac{1}{b}\;\frac{-a - c\,x^3 - d\,x^4 - e\,x^5 - etc.}{b\,x}$$

quae cum hypothefi Theorematis $x = t + \Phi x$ comparata, praebet $t = \frac{1}{b}$ et

$$\Phi\,x = -\frac{(a + c\,x^3 + d\,x^4 + e\,x^5 + etc.)}{b\,x},$$

ideoque

$$\Phi\,t = -\frac{(a + c\,t^3 + d\,t^4 + etc.)}{b\,t}$$

hinc autem x per fequentem feriem exprimetur

$$x = t + \Phi t + \frac{d.\,\Phi\,t^2}{2.\,d\,t} + \frac{d\,d.\,\Phi\,t^3}{2.\,3.\,d\,t^2} + \frac{d^3.\,\Phi\,t^4}{2.\,3.\,4\,d\,t^3} + \text{etc.}$$

vbi poft differentiationem in locum ipfius t vbique fubftituatur $\frac{1}{b}$. Simili ratione, fi aequatio fub hac repraefentetur forma:

$$x = \frac{-b}{c} + \frac{x - a - d\,x^4 - e\,x^5 - etc.}{c\,x^2},$$

erit $t = \frac{-b}{c}$ et

$$\Phi\,x = \frac{x - a - d\,x^4 - e\,x^5 - etc.}{c\,x^2}$$

nec non

$$\Phi\,t = \frac{t - a - d\,t^4 - e\,t^5 - etc.}{c\,t^2},$$

ex quo fit

$$x = t + \Phi\,t + \frac{d.\,\Phi\,t^2}{2.\,d\,t} + \frac{d\,d.\,\Phi\,t^3}{2.\,3\,d\,t^2} + \text{etc.}$$

differentiationibus abfolutis, pro t fubftituto $\frac{-b}{c}$. Hinc fi aequatio fuerit gradus m atque omnes plane eius adfint termini, tum hoc modo, feries numero m inuenientur pro valoribus radicum aequationis propofitae, totidem fcilicet quot radicibus ipfa aequatio

prae-

praedita eſt, vtrum vero hiſce ſeriebus iſtae radices reuera exprimantur, quaeſtio eſt quae per ratiocinia Analytica vix dirimi poſſe videtur. Tutiſſima igitur via, hoc dubium dilui poſſe videtur, ſi pro ſpecialibus exemplis tentamen inſtituatur, an diuerſae hae ſeries, diuerſos quoque exhibeant radicum valores, et an dum aequationis radices omnes ſint reales, etiam omnes ſeries fiant conuergentes? Hunc in finem hanc mihi propoſui aequationem cubicam:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0,$$

cuius radices vti conſtat ſunt

$$x = 3,\ x = 2 \text{ et } x = -2,$$

examinaturus vtrum ſeries ad praeſcriptum Theorematis inuentae hos valores radicum reuera exhibeant. Quum igitur haec aequatio, iam triplici modo ad formam $x - t - \phi x = 0$ reduci queat, has formas ſimul cum reſpondentibus valoribus ipſorum t et ϕt vnica tabella heic complectemur:

I. $x - 3 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$	$t = 3$	$\phi t = \frac{4}{t} - \frac{12}{tt}$
II. $x + \frac{4}{3} - \frac{12}{x} - x^2 = 0$	$t = -\frac{4}{3}$	$\phi t = \frac{12}{t} + tt$
III. $x - 3 - \frac{x^3 + 2x^2}{4} = 0$	$t = 3$	$\phi t = \frac{t^3 - 3tt}{4}$

Pro I^{ma} et III^{a} forma liquet, ſi in ϕt loco t eius valor $+3$ ſubſtituatur, ϕt euaneſcere, pro I^{ma} ſcilicet eſt $\phi t = \frac{4}{3} - \frac{12}{9} = 0$, pro III^{a} vero $\phi t = \frac{27-27}{4} = 0$. Quum itaque in expreſſione ipſius x, omnes termini primum excipientes factorem habeant ϕt, ſequitur pro vtraque forma fore $x = t = 3$, ex quibus apparet fieri omnino poſſe, vt diuerſae ſeries eandem plane exhibeant radicem. Porro pro noſtro quidem exemplo, nullum eſt dubium, quin ſeries formae mediae reſpondens fiat diuergens, vnde ipſi nulla plane reſpondet radix. Deinde in genere notare iuuat, huiusmodi aequationem cubicam

$$x^3 + n x^2 + m x + m n = 0$$

ſi ſub his repraeſentetur formis

$$x + n + \frac{m}{x} + \frac{m n}{x^2} = 0 \text{ et } x + n + \frac{n x^2 + x^3}{m} = 0$$

ad praeſcriptum Theorematis reſolutam, vtroque caſu praebere $x = t = -n$, nam pro priori habetur $\Phi t = -\frac{m}{t} - \frac{m n}{t t}$, pro poſteriori autem $\Phi t = -\frac{n t t - t^3}{m}$, vtraque expreſſione in 0 abeunte, ſi pro t ſubſtituatur $-n$. Plurimis de caetero exemplis oſtendi poteſt, pro aequatione cubica.

$x^3 = a x^2 + b x + c$, ſeriem ex forma $x = a + \frac{b x + c}{x^2}$ deductam, ſaepius fieri diuergentem. Tantum igitur abeſt, vt per adplicationem Theorematis Cel. *La Grange*, omnes aequationum radices aſſignari queant, vt plane non conſtet, an quouis caſu, praeter vnicam hoc modo determinare liceat?

XVII. Si in expreſſione $t = x - \Phi x$, functio Φx quascunque quantitates tranſcendentes inuoluat, valor tamen ipſius x aequationi ſatisfaciens, Theoremate praeſenti in vſum vocato facile definiri poteſt, ſic ſi fuerit $t = x + n \sin. x$, quo caſu $\Phi x = -n \sin. x$ habebitur

$$\psi x = \psi t - n \sin. t\, \psi' t + \frac{n^2 . d \sin. t^2\, \psi' t}{1 . 2\, d t} - \frac{n^3\, d d. \sin. t^3\, \psi' t}{1 . 2 . 3\, d t^2} + \frac{n^4\, d^3. \sin. t^4\, \psi' t}{1 . 2 . 3 . 4\, d t^3} - \text{etc.}$$

Notum

Notum autem eſt reſolutionem memorabilis illius Problematis *Kepleriani*, quo quaeritur, vt pro data quacunque anomalia media planetae, inueniatur anomalia vera, ad huiusmodi reduci aequationem $t = x + n \sin. x$. Si enim anomalia media dicatur t, anomalia vera u et anomalia excentrica x, excentricitas autem per n deſignetur, in Aſtronomicis demonſtrari ſolet eſſe:

$$\text{Tang.}\, \tfrac{1}{2} u = \text{Tang.}\, \tfrac{1}{2} x \frac{\sqrt{1-n}}{\sqrt{1+n}}, \text{ tum vero } t = x + n \sin. x.$$

Ponamus igitur primum eſſe $\psi x = \sin. x$, vnde $\psi t = \sin. t$ et $\psi' t = \cos. t$ eritque iam

$$\sin. v = \sin. t - n \sin. t. \cos. t + \frac{n^2 d. \sin. t^2 \cos. t}{1.2\, dt} - \frac{n^3 dd. \sin. t^3 \cos. t}{1.2.3\, dt^2} + \text{etc.}$$

quae aequatio etiam ita exprimi poteſt

$$\sin. x = \sin. t - \tfrac{n}{2}. \sin. 2t + \frac{n^2\, d\, d. \sin. t^3}{1.2.3\, dt^2} - \frac{n^3\, d^3. \sin. t^4}{1.2.3.4\, dt^3} + \frac{n^4. d^4. \sin. t^5}{1.2.3.4.5\, dt^4} - \text{etc.}$$

Quum itaque ſit

$$2^{2m-1} \sin. t^{2m} = \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+1)}{2.2.3.4\ldots m} - \frac{2m(2m-1)\ldots(m+2)}{2.3.4\ldots(m-1)} \cos. 2t$$
$$+ \frac{2m(2m-1)\ldots(m+3)}{2.3\ldots(m-2)} \cos. 4t + \frac{2m(2m-1)\ldots(m+4)}{2.3\ldots(m-3)} \cos. 6t \ldots \pm \cos. 2mt$$

vbi vltimus terminus ſigno $+$ afficietur, ſi m ſit numerus par, negatiuo autem ſi impar. Deinde habebitur quoque

$$2^{2m} \sin. t^{2m+1} = \frac{(2m+1)2m(2m-1)\ldots(m+2)}{2.3.4\ldots m} \sin. t - \frac{(2m+1)2m(2m-1)\ldots(m+3)}{2.3.4\ldots(m-1)} \sin. 3t$$
$$+ \frac{(2m+1)2m(2m-1)\ldots(m+4)}{2.3.4\ldots(m-2)} \sin. 5t \ldots \pm \sin. (2m+1)t$$

vbi iterum vltimo termino ſignum $+$ tribui debet, ſi m ſit numerus par, contra ſi impar. Hiſce itaque notatis ſi iam differentiatio actu inſtituatur prodibit:

$$\sin. x = \sin. t + \frac{n}{2.1} 2 \sin. 2t - \frac{n^2}{4.1.2.3} (3 \sin. t - 3^2 \sin. 3t)$$
$$+ \frac{n^3}{8.2.3.4} (4.2^3. \sin. 2t - 4^3. \sin. 4t)$$
$$+ \frac{n^4}{16.2.3.4.5} (\tfrac{5.4}{2} \sin. t - 5.3^4 \sin. 3t + 5^4. \sin. 5t)$$
$$- \frac{n^5}{32.2.3.4.5.6} (\tfrac{6.5}{2}. 2^5 \sin. 2t - 6.4^5 \sin. 4t + 6^5 \sin. 6t)$$
$$- \frac{n^6}{64.2.3.4.5.6.7} (\tfrac{7.6.5}{1.2.3} \sin. t - \tfrac{7.6}{1.2} 3^6 \sin. 3t + 7.5^6. \sin. 5t - 7^6. \sin. 7t)$$
$$+ \text{ etc.}$$

XVIII Supponamus iterum esse $\psi x = \cos. x$, ideoque $\psi t = \cos. t$ et $\psi' t = - \sin. t$, eritque iam:

$$\cos x = \cos. t + n \sin t^2 - \frac{n^2. d. \sin. t^3}{1.2\, dt} + \frac{n^3\, dd. \sin. t^4}{1.2.3\, dt^2} - \frac{n^4\, d^3 \sin. t^5}{1.2.3.4\, dt^3} + \text{etc.}$$

quae euoluta praebet:

$$\cos. x = \cos t + \tfrac{n}{2}(1 - \cos. 2t) - \frac{n^2}{4.1.2}(3 \cos. t - 3. \cos. 3t) + \frac{n^3}{8.2.3}(4.2^2 \cos. 2t - 4^2. \cos. 4t)$$
$$+ \frac{n^4}{16.2.3.4} (\tfrac{5.4}{2} \cos. t - 5.3^3 \cos. 3t + 5^3 \cos. 5t)$$
$$- \frac{n^5}{32.2.3.4.5} (\tfrac{6.5}{2}. 2^4 \cos. 2t - 6.4^4 \cos. 4t + 6^4. \cos. 6t)$$
$$+ \text{ etc.}$$

Simili ratione aliae quaeuis functiones anguli x per t exprimi possunt, quin et adeo functiones vtcunque ex x et t compositae. In genere autem notasse meretur, has series non fieri conuergentes nisi excentricitas n sit satis parua, atque pro iis etiam casibus adeo lente conuergunt, vt vix vllo cum fructu ad quaerendas aequationes centrorum in Astronomia adhiberi possint.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE VIBRATIONIBVS CHORDARVM, EX DVABVS PARTIBVS, TAM LONGITVDINE QVAM CRASSITIE, AB INVICEM DIVERSIS, COMPOSITARVM.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Post fertilissimam, quam varii primi ordinis Geometrae messuerunt segetem de minimis motibus tremulis isochronis a quibus integra acustica, fortassis et ipsa optica, pendet, non vereor pro spicilegio intacta aliqua, vt vt leuiora videri possint, superaddere. Cupidus in perspicienda vibrationum natura, quas chorda, ex duabus partibus, longitudine aeque ac crassitie inaequalibus, composita atque tensa affectaret, in varias incidi formulas, quae aliqua indigere interpretatione atque commentatione visae sunt, vt omnes et singulae vibrationum species inde determinentur, simul ac valores sonorum singulis vibrationum speciebus debitorum: Huiusmodi soni, quod fateor, si ambae chordae partes nodo aliquo aliove modo simili inter se essent connexae, ob nimiam suam raucedinem inter ſonos muſicos referri non poſſent at alius fingi poteſt modus obiecto noſtro magis accommodatus: cum nempe fidibus ſaepe vtantur muſici, filo metallico circumducto inuolutis, eo fine vt quantum conuenit, ſufficienter tenſae ſonum tanto grauiorem edant: quidni liceat fides ſupponere pro parte tantum filo metallico inuolutas, nuda manente parte reliqua: nec enim hic video quid ſonum obtundere poſſit: huiusmodi autem fides dato pondere tenſae dabunt vtique ſonum acutiorem quam ſi totae eſſent ſuo filo metallico circumuolutae, grauiorem vero quam ſi tota ſua longitudine eſſent nudae. Igitur haud abs re erit, in verum ſoni valorem inquirere ſimulque *reliqua* huc pertinentia explorare.

§. 2. Ante omnia ad analyſin quaeſtionum noſtrarum conducit theoria communis, de chordis vibrantibus tota ſua longitudine vniformibus, paſſim demonſtrata, cuius praecipua theoremata haec ſunt.

Tab III. Fig. 1. Sit $a\,b\,c$ chorda tenſa tota ſua longitudine vniformis eaque inter vibrandum ad momentum aſſumere ponatur curuaturam $c\,d\,a$; cadet vtique maxima amplitudo $b\,d$ in punctum chordae medium b; ſit ſemilongitudo chordae $c\,b = L$, maxima amplitudo $b\,d = \alpha$; ſumto quocunque alio puncto g, ponatur $c\,g = x$, patuula applicata $g\,e = y$; pondus chordam tendens $= P$: ſumatur longitudo quaecunque chordae a atque ponduſculum eius longitudinis ponatur $= p$. Sit denique quadrans circuli vnitatem pro radio habentis $= q$ His factis denominationibus ſequentes habentur valores atque expreſſiones.

A. Pro

A. Pro aequatione ad curuam $c\,d\,a$ obtinetur $y = \alpha$ ſin. Arc. $\frac{x}{L}\,q$, quae aequatio ſiſtit curuam ſinuum, ita vt poſito ſemicirculo $=$ longitudini $c\,a$ et arcu quocunque $= c\,g$ ſit vbique $g\,e$ proportionalis ſinui huius arcus. Haec curuatura conuenit trochoidi veluti infinite elongatae.

B. Pro quouis puncto e ſit ſubtangens $g\,f$ $= \frac{L}{q} \times \frac{\text{ſin. Arc} \frac{x}{L} q}{\text{coſ. Arc.} \frac{x}{L} q}$ ſiue $g\,f = \frac{L}{q}$ tang. Arc. $\frac{x}{L}\,q$: nec ab hoc differre cenſenda eſt valore ipſa tangens $e\,f$, quoniam applicata $g\,e$ veluti infinite parua cenſetur. Notetur autem hanc tangentem modo affirmatiue modo negatiue ſumendam eſſe, prouti punctum g ad vnam vel alteram partem puncti b ſumtum fuerit: ſi itaque affirmatiue accipiatur pro ramo $c\,d$, erit negatiue ſumenda pro ramo $a\,d$ et viciſſim.

C. Longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum vibrationibus chordae $= \frac{p\,L\,L}{q\,q\,P\,a}$, vnde tempuſculum vnius vibrationis definitur: ſed et idem tempuſculum absque ſuppoſita circuli ad radium proportione indicatur hac formula $\frac{2p}{P} \times \frac{L\,L}{a}$ ſiue ſimplicius, poſita longitudine arbitraria $a = 2\,L$, formula $\frac{p}{P} \cdot \frac{L}{2}$, quae deſignat minimam altitudinem quam corpus libere cadendo deſcribit tempuſculo vnius vibrationis. Igitur poſito $t =$ tempori quo corpus delabitur per altitudinem L ſit tempuſculum vnius vibrationis $= t\sqrt{\frac{p}{2P}}$, vbi nunc per p intelligitur pondus integrae chordae $a\,c$.

 D. Si

D. Si longitudo *a c* diuidatur in quotcunque partes aequales n, vibrationes harmonicae fieri possunt simul super quauis parte, factis alternis chordae in partes contrarias incuruationibus veluti serpentinis atque tunc erit tempusculum singularum vibrationum $= \frac{1}{n} V \frac{p}{2P}$. Hinc oriuntur soni accessorii, qui dicuntur *harmonici* in progressione numerorum naturalium dum pro integra longitudine chordae formatur sonus *fundamentalis*, qui vnitati respondet. Imo omnes et singulas diuersi generis vibrationes simul coexistere in vna eademque chorda posse, demonstraui in Commentariis Academicis Berolinensibus.

Caeterum designabo, pro vibrationibus fundamentalibus, curuam *a d c* nomine curuae *vibratoriae primitiuae*.

§. 3. Notetur iam quod si pars chordae quaeuis *a g* ab chorda integra *a c* resecetur punctumque *g* connexum supponatur cum filo omnis grauitatis experte, cuius longitudo *f g* fuerit aequalis subtangenti pro puncto *e*, nulla plane inde oriri possit mutatio nec in curuaturam *e d c* nec in vibrationes chordae residuae *g c*, filo *f g* omni grauitate experti connexae, figura secunda hanc integram mutationem repraesentat nec differt a figura prima, nisi quod arcus curuae *a e* punctis sit notatus vt inde appareat quod nullo modo ad systema propositum pertineat atque vnice pro supplemento ideali curuae vibratoriae truncatae sumendus sit: sic in vtraque figura curua-

curuatura $aedc$ prorſus erit eadem. Tunc autem requiritur vt longitudo ac vel ſemilongitudo bc definiatur ex datis longitudinibus fg et gc: quo facto omnia innoteſcent; hocque modo facilis erit ſolutio ſequentis quaeſtionis.

§. 4. Sit fg filum grauitatis expers fixum in puncto f atque connexum cum chorda vniformiter grani ge: ponatur potentia tendens $=$ ponderi P dum chordae longitudo a ponduſculum habere ponitur, quod ſit $= p$, tum vtique fiet pro vibrationibus ſimpliciſſimis vel fundamentalibus, vt filum fe perpetuo poſitum ſit in directum dum chorda edc incuruatur, prorſus vt in figura prima, ſimulque vt tangens curuae in extremitate e ſit ipſa fe. Ponatur porro longitudo $fg = l$; longitudo $gc = \lambda$; his omnibus poſitis quaeritur natura vibrationum. Tab. III. Fig. 2.

Ex praemiſſis patet, nil aliud hic requiri quam vt determinetur longitudo ac, quia hac cognita chorda gc vibrationes ſuas prorſus eodem modo faciet, ac ſi longitudinem haberet ac eſſetque fixa in punctis a et c remoto filo fg, ſit igitur longitudo $ac = 2\,\mathrm{L}$ ſiue ſemilongitudo $bc = \mathrm{L}$, habebitur vi §. 2. art. B. haec aequatio $l = \frac{-\mathrm{L}}{q} \times$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{\mathrm{L}}\,q$, vbi ſignum ponitur negatiuum, quia hic punctum d ſemper cadit intra puncta d et c (§. 2. art. B): atque haec aequatio inſeruit ad determinandum valorem longitudinis ac pro *curua vibratoria primitiua*, quam per $2\,\mathrm{L}$ indicauimus: hanc nunc aequationem paulo accuratius proſequemur.

§. 5. Cum quantitas Arc. $\frac{\lambda}{L} q$ indicet quadrantem circuli, vnitatem pro radio habentis, multiplicatum per rationem $\frac{\lambda}{L}$, ponemus breuitatis causa $\frac{\lambda}{L} q = z$, vbi z denotat arcum circularem radio vnitate descriptum, atque sic aequatio nostra abit in hanc alteram $\frac{l}{\lambda} = - \frac{tang. Arc. z}{Arc. z}$, in qua signum negatiuum indicat esse arcum $\frac{\lambda}{L} q$, siue z semper quadrante circuli maiorem; mox autem videbimus huic aequationi infinitas conuenire radices: cum arcus z inter omnes possibiles minimus est inseruit vibrationibus fundamentalibus explicandis: De hoc casu ante omnia dicemus.

I. Sit longitudo l siue longitudo fili fg infinita, erit tangens in e parallela cum linea fc atque sic cadet punctum e in ipsum punctum d sic vt fiat $bc = gc$ siue $L = \lambda$ atque adeo $Z = q$: Casus iste per se obuius immediate aequatione nostra indicatur, ideo quod tangens quadrantis est infinita.

II. Si, e contrario, ponatur $l = 0$ ita vt filum fg euanescat, erit punctum e fixum in g et chorda gc vibrationes suas pro theoria communi faciet et punctum d cadet in medium chordae gc; sic igitur oportet vt fiat $L = \frac{1}{2}\lambda$, quod iterum aequatio nostra indicat, quandoquidem oritur $\frac{\lambda}{L} q = Z = 2q$, cuius tangens $= 0$.

III. Sic igitur, manentibus caeteris omnibus, sola variante longitudine fili, subsistent omnes *curuae vibratoriae primitiuae* intra limites $L = \lambda$ et $L = \frac{1}{2}\lambda$, atque adeo

adeo omnes foni, qui a diuerfa longitudine fili oriri poffunt, fubfiftent intra *octauam* funt enim foni longitudinibus L reciproce proportionales.

§. 6. Facile nunc erit longitudinem fili ea conditione determinare, vt fonus intermedius proueniat qualiscunque datus: etenim hoc dato innotefcit ratio $\frac{\lambda}{L}$; hinc valor Z atque valor $-\frac{tang.\ Arc.\ z}{Arc.\ z}$, qui pofterior multiplicatus per longitudinem chordae dabit defideratam longitudinem fili; totum proceffum vnico illuftrabo exemplo.

Fuerit longitudo fili fg determinanda ea conditione vt fonus a vibrationibus $fedc$ refultans interuallo vnius quintae fiue diapentes deprimatur infra fonum, quem chorda gc fola edit cum eft fixa in puncto g, pro quo fcilicet cafu inuenimus $L = \frac{1}{2}\lambda$.

Pro hoc exemplo oportet vt fiat

$bc = L = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\lambda = \frac{3}{4}\lambda$; vnde

$Z = \frac{\lambda}{L} q = \frac{4}{3} q =$ Arc. $120°$.

cuius valor proxime $= \frac{44}{21}$ fiue $2{,}095$ et cuius tangens $= -1{,}732$; vnde $fg = l = \frac{1732}{2095}\lambda$ fiue $= 0{,}827\lambda$ atque fic faciliime determinatur longitudo fili ex data longitudine chordae pro dato fono producendo; at taediofior fit calculus, quando ex datis longitudinibus fili atque chordae determinanda eft longitudo L; quod nunc faciam.

§. 7 Redeamus igitur ad aequationem paragraphi quarti fcilicet $l = -\frac{L}{q}$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L} q$, in qua

qua si longitudines l et λ datae fuerint, poterit longitudo quaesita L proxime inueniri tentando, quo facto variae sunt methodi, quibus longitudo haec *e a* qualibet accuratione determinatur. Cognita longitudine L, habetur $ac = 2\,L$, quod indicat, chordam gc filo fg connexam vibrationes facere isochronas cum vibrationibus chordae eiusdem speciei eodemque pondere tensae, quae longitudinem habeat ac et quae fixa sit in punctis a et c, similes olim obtinui aequationes, cum inquirerem in sonos tibiarum diuersimode constructarum, de quibus tractatum conscripsi, qui extat, *dans les memoires de l'Academie R. des sciences de Paris pour l'année* 1762. *pag.* 431. Praefatam aequationem exemplo aliquo illustrabo.

Fuerint longitudines fili fg et chordae gc inter se aequales atque sic habebitur $\lambda = -\frac{L}{q}\,\text{tang. Arc.}\,\frac{\lambda}{L}\,q$ siue $\frac{\lambda q}{L} = -\,\text{tang. Arc.}\,\frac{\lambda q}{L}$: siue simpliciter $\frac{\lambda q}{L} = -\,\text{tang.}\,\frac{\lambda q}{L}$; nam expressio Arc. $\frac{\lambda q}{L}$ nil aliud indicat, quam quod quantitas $\frac{\lambda q}{L}$ sit tanquam arcus circularis, radio vnitate descriptus, considerandus; igitur exemplum nostrum postulat vt quaeratur arcus circuli, cuius tangens negatiue sumta sit ipsi arcui aequalis: hunc arcum inuenio $116^\circ\ 15'$, cuius magnitudo $= 2.028$ et cuius tangens $= -\,2.028$. Est igitur $\frac{\lambda q}{L} = 2.028$ atque posito $q = \frac{11}{7}$ fit $L = \frac{11000}{14196}\lambda$; hinc $ac = 2\,L = \frac{11000}{7098}\lambda$: Ergo tandem est sonus chordae simplicis gc ad sonum eiusdem chordae aequali filo fg iunctae vt 11000 ad 7098; si prior indicetur per c erit alter

medius

medius inter c et f: interuallum eſt vnius quintae cum dimidio ſeu itonio.

Si ponatur generaliter $l = f\lambda$, fit $f.\frac{q\lambda}{L} = -\text{tang.}\frac{q\lambda}{L}$, quae aequatio nos docet arcum inueniendum eſſe, qui ſit ad tangentem ſuam negatiue ſumtam vt vnitas ad numerum f ſiue vt longitudo chordae ad longitudinem fili: ſi arcus iſte, quocunque modo inuentus, ponatur $= A$ erit $\frac{q\lambda}{L} = A$ atque adeo $L = \frac{q}{A}\lambda$. Intelligimus ex ſimplicitate harum formularum, huiusmodi quaeſtiones optime definiri quod fecimus, ex longitudine *curuae vibratoriae primitiuae*.

§. 8. Quae adhuc diximus, pertinent ad vibrationes primarias ſonosque *fundamentales* inde formatos, hae vibrationes dicuntur primi ordinis; notum autem eſt geometris, dari ſimul, in vno eodemque ſyſtemate, infinitas alias vibrationum ſpecies quae pertinent ad ordinem ſecundum, tertium, quartum etc.; hos omnes ordines demonſtraui in diuerſis ſchediasmatibus de chordis inaequaliter craſſis, de laminis elaſticis, quae innumeris modis in vſum adhiberi poſſunt, de tibiis ſeu fiſtulis muſicis etc. quibus Illuſtris *Eulerus* noſter addidit vibrationes in tympanis atque campanis.

In chordis tenſis ſimplicibus atque vniformibus omnes hi, varii ordinis, ſoni progrediuntur vt numeri naturales, quod idem valere demonſtraui pro tibiis cylindricis vtraque extremitate apertis; pro tibiis autem alterutra extremitate clauſis ſonos progredi oſtendi vt numeri naturales impares excluſis numeris paribus; in aliis ſyſtematibus alia lege, quae ſaepiſſime tranſcendentalis eſt, ſoni progrediuntur; tanta cum ſit hac de re varietas, non abs re erit etiam vibrationes, de quibus hic ſermo eſt, examini noſtro ſubiicere.

§. 9. Hunc in finem notemus aequationem noſtram $l = -\frac{L}{q}$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L} q$ infinitas habere radices, quae ſuceſſiue longitudinem L diminuunt. In prima radice, vbi L maxima eſt, Arcus $\frac{\lambda}{L} q$ ſemper maior eſt quadrante circuli et minor ſemicirculo; pro ſecunda radice Arcus idem continetur inter limites $3q$ et $4q$; pro tertia radice inter limites $5q$ et $6q$ et ſic porro; erit nempe ſucceſſiue Arcus $\frac{\lambda}{L} q = q + \alpha$; $3q + \beta$; $5q + \gamma$ etc.

In his valoribus arculi ſuperaddendi α, β, γ etc. continue decreſcunt, ita vt tandem negligi poſſint, praeſertim ſi longius filum chordae fuerit annexum, aut ſi illos negligere nolimus, poſſint ſaltem ſine vllo negocio proxime determinari ſecundum legem aequationis: cognito autem, verbi gratia pro tertio ordine arculo γ, erit $\frac{\lambda}{L} q = 5q + \gamma$, vnde $L = \frac{q}{5q + \gamma} \lambda$, hinc ſequitur fore pro primo ordine $L = \frac{q}{q + \alpha} \lambda$: pro ſecundo ordine $L = \frac{q}{3q + \beta} \lambda$: pro tertio ordine $L = \frac{q}{5q + \gamma} \lambda$ atque ſic porro: vbi, quod iam monui, arculi α, β, γ etc. ex aequatione noſtra paragraphi ſeptimi ſunt determinandi. Pro hoc procedendi modo idem, quod aſſumſimus para-

paragrapho septimo, exemplum prosequemur, in quo supposuimus longitudinem fili l aequalem longitudini chordae.

§. 10. In isto exemplo iam vidimus sumendum esse, pro vibrationibus fundamentalibus seu primi ordinis, arcum $116^{\circ}\frac{1}{4}$, cuius nempe valor aequalis est suae tangenti negatiue sumtae hic igitur est arculus $\alpha = 26\frac{1}{4}$ gradibus atque fit

$$L = \frac{q}{q+\alpha}\lambda = \frac{90}{116\frac{1}{4}}\lambda.$$

Pro vibrationibus secundi ordinis fit arcus suae tangenti aequalis si sumatur $281^{\circ}\frac{1}{4}$ atque adeo ponatur $\beta = 11\frac{1}{4}$ gradibus, vnde

$$L = \frac{q}{3q+\beta}\lambda = \frac{90}{281\frac{1}{4}}\lambda.$$

Pro tertio ordine iterum aequalitas oritur inter arcum et tangentem, si sumatur arcus $457\frac{1}{6}$ grad. atque adeo $\gamma = 7\frac{1}{6}$ gradibus, vnde nunc

$$L = \frac{q}{5q+\gamma}\lambda = \frac{90}{457\frac{1}{6}}\lambda.$$

§. 11. Caeterum, cum quaestio est, arculis α, β, γ etc valorem suum proxime assignare definita formula algebraica, dico fore proxime

$$\alpha = \frac{q}{qq+1} : \beta = \frac{3q}{9qq+1} : \gamma = \frac{5q}{25qq+1} \text{ etc.}$$

qui valores in gradus circuli conuersi parum a valoribus indicatis differunt: hoc modo absque vlla

 redu-

reductione praeuia fit proxime pro primo ordine $L = \frac{qq+1}{qq+2}\lambda$: pro secundo ordine $L = \frac{9qq+1}{27qq+6}\lambda$: pro tertio ordine $L = \frac{25qq+1}{125qq+10}\lambda$ atque pro n^{tesimo} ordine $L = \frac{(2n-1)^2 qq+1}{(2n-1)^3 q^2 + 2(2n-1)}\lambda$ atque hae formulae vix a vero aberrant, inseruiunt autem quam maxime ad legem variationum inspiciendam. Attamen haec methodus non foret ineunda si longitudo fili esset admodum parua, intelligimus hinc sonos, qui in variis ordinibus oriuntur, minime dici posse harmonicos, etiamsi a vibrationibus chordae vniformis proprie edantur; admitto quidem principia musica a D. *Rameau* adhibita; displicet autem fundamentum cui principia sua superstruit et quod a natura sonorum accessoriorum petit: Duo tamen casus sunt, quibus soni progressionem harmonicam formant. Primus est quando longitudo fili l tota euanescit; secundus quando haec longitudo ponitur infinita. Primus casus sistit theoriam chordarum communem, pro qua singuli arcus α, β, γ etc. fiunt aequales quadranti circuli atque longitudines L successiue fiunt aequales $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{6}\lambda$ etc. vnde soni progrediuntur in ratione numerorum naturalium. Secundus casus postulat vt singuli arcus α, β, γ etc. euanescant: hoc modo longitudines L successiue fiunt aequales λ, $\frac{1}{3}\lambda$, $\frac{1}{5}\lambda$ ipsique soni progrediuntur in ratione numerorum naturalium imparium. In vtroque casu soni sunt harmonici. Haec omnia quidem non aliter quam *in abstracto* sunt accipienda, quia fila grauitatis expertia vtique non dantur; attamen aliquid

aliquid conferre possunt ad pleniorem vibrationum notionem sibi comparandam, quicquid sit, non omittenda putaui, quia pro fundamento inseruiunt iis quae mihi dicenda supersunt, cum de vibrationibus chordae, ex duabus partibus compositae, acturus, filo fg grauitatis experti substituam alius chordae portionem cum altera chorda gc connexae ambasque data quauis grauitate donatas supponam.

§. 12. Sint nunc duae diuersae chordae bg et gc, quae inter vibrandum assumant situm be et ec atque propositum fuerit naturam et proprietates harum vibrationum inquirere. Hunc in finem notabimus ante omnia fieri non posse quin ambae chordae in puncto e, vbi sunt connexae, communem habeant tangentem fe: patet quoque vtramque chordam be et ec arcum fore alicuius *curuae vibratoriae primitiuae*, a cuius determinatione omnia pendent phaenomena: ambae vero hae curuae, quamuis ad idem pertineant genus, specie tamen differunt pro ratione diuersarum longitudinum et crassitierum quae in ambabus chordis supponuntur. Sit itaque pro chorda leuiori be *curua vibratoria primitiua* bed atque adeo arcus ed punctis notatis indicet complementum chordae be, pariterque aec repraesentet *curuam vibratoriam primitiuam* pro altera chorda grauiore ce, cuius sic complementum est arcus ae, haec ita sunt intelligenda, quod chorda be suas formet vibrationes eadem plane lege cum chorda simplici bed fixa in punctis b et d eodem Tab. III. Fig. 3.

 ponde-

pondere tenſa et tota ſua longitudine eiusdem craſſitiei cum chorda $b\,e$ ſimulque altera chorda $c\,e$ vibrationes ſuas faciat easdem quas faceret integra chorda $c\,e\,a$ fixa in punctis c et a aequaliter tenſa. Caeterum integra figura noſtra ita eſt delineata, vt chorda $b\,e$ minoris craſſitiei ſuppoſita fuerit quam chorda altera $c\,e$; hinc, pro priori, longitudo $b\,d$ maior repraeſentatur quam longitudo $c\,a$, vt ſynchroniſmo ſatisfiat. His ita praeparatis quaeſtionem noſtram eo, qui ſequitur modo aggredior.

§. 13. Sit longitudo chordae $c\,g = \lambda$ atque longitudo $c\,a = 2\,L$, fiet tangens curuae $c\,e\,a$ pro extremitate e ſiue $f\,e = -\frac{L}{q}$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L}\,q$. Eodem modo, poſita longitudine $b\,g = \lambda'$ atque longitudine $b\,d = 2\,L'$ fiet eadem tangens $f\,e = \frac{L'}{q}$ tang. Arc. $\frac{\lambda'}{L'}\,q$, quae hic affirmatiue ponenda eſt, quoniam haec tangens, vtrique chordae communis, modo contrario poſita eſt pro curua $c\,e$ et pro curua $b\,e$: Hinc oritur talis aequatio fundamentalis,

$$-\,L \text{ tang. Arc. } \frac{\lambda}{L}\,q = L' \text{ tang. Arc. } \frac{\lambda'}{L'}\,q.$$

Nunc vero diuerſam grauitatem vtriusque chordae vnice tribuamus diuerſae earum craſſitiei ſitque craſſities chordae $c\,g = p$ atque craſſities chordae $b\,g = p'$ ita vt aequales longitudines chordarum $c\,g$ et $b\,g$ pondera habeant quae ſint vt p ad p'; tunc erit, vt notum eſt, (ob ſynchroniſmum vibrationum $c\,e\,a$ et $b\,e\,d$) $p\,L\,L = p'\,L'\,L'$ atque adeo $L' = L\,\sqrt{\frac{p}{p'}}$;

hoc

hoc autem ſubſtituto valore, mutabitur praefata noſtra aequatio fundamentalis in hanc alteram

$$\frac{-\text{tang. Arc}\,\frac{\lambda}{L}\,q}{\sqrt{p}} = \frac{\text{tang. Arc.}\,\frac{\lambda'\sqrt{p'}}{L\sqrt{p}}\,q}{\sqrt{p'}}.$$

Ad normam huius aequationis vnica, quae ſupereſt, incognita L determinanda reſtat, quo facto erit 2 L ſiue longitudo ac aequalis longitudini chordae ſimplicis eiusdem craſſitiei cum chorda cg quae eodem pondere tenſa vibrationes iſochronas faciet cum ſyſtemate propoſito chordarum cg et bg.

§ 14. Quod ſi iam in aequatione noſtra §. 13. ponatur grauitas chordae bg ſiue $p' = 0$, oritur iterum problema §. 4. pro filo grauitatis experte longitudinis l vel λ': vidimus autem in eodem paragrapho quarto, eſſe tunc l vel nunc $\lambda' = -\frac{L}{q}$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L}\,q$: quaeritur itaque, quod non ſtatim apparet, quomodo haec aequatio ex noſtra aequatione § 13. deduci poſſit? hunc in finem conſideremus grauitatem p' tanquam infinite paruam atque ſic erit Arc $\frac{\lambda'\sqrt{p'}}{L\sqrt{p}}\,q$ infinite paruus et proinde arcus iſte non differt ab ſua tangente. Eſt itaque tang. Arc. $\frac{\lambda'\sqrt{p'}}{L\sqrt{p}}\,q = \frac{\lambda'\sqrt{p'}}{L\sqrt{p}}\,q$ Tab III. Fig. 2.

ſiue $\dfrac{\text{tang. Arc.}\,\frac{\lambda'\sqrt{p'}}{L\sqrt{p}}\,q}{\sqrt{p'}} = \frac{\lambda' q}{L\sqrt{p}}$. Subſtituto hoc valore pro poſteriori membro aequationis hacque multiplicata per $\sqrt{p}$ oritur $\frac{\lambda' q}{L} = -$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L}\,q$ ſiue tandem $\lambda' = -\frac{L}{q}$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L}\,q$. Sic itaque problema paragraphi quarti optime deducitur ex problemate paragraphi decimi tertii.

§. 15.

§. 15. Si porro ponatur longitudo bg vel $\lambda' = 0$, oportet vt fit $-$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L} q = 0$, vnde oritur $\frac{\lambda}{L} q = 2q$ vel $= 4q$ vel $= 6q$ etc. atque $L = \frac{1}{2}\lambda$ vel $= \frac{1}{4}\lambda$ vel $= \frac{1}{6}\lambda$, quae proprietas conuenit vtique chordae fimplici cg longitudinis λ fixae in punctis g et c. Sed fi ponatur $\lambda = 0$ oportet vt fit $\frac{\text{tang. Arc} \frac{\lambda' \sqrt{p'}}{L \sqrt{p}} q}{\sqrt{p'}} = 0$, fiue tang. Arc. $\frac{\lambda'}{L'} q = 0$, vnde nunc $\frac{\lambda'}{L'} q = 2q$, vel $= 4q$, vel $= 6q$ etc. atque $L' = \frac{1}{2}\lambda'$ vel $= \frac{1}{4}\lambda'$ vel $= \frac{1}{6}\lambda'$, quae proprietas competit nunc chordae fimplici bg longitudinis λ' fixae in punctis g et b.

§. 16. Quod fi praeterea ponatur $p = p'$ tunc ambae chordae bg et cg vnam eandemque conftituunt chordam bc atque erit etiam $L = L'$: aequatio autem noftra fimpliciter mutabitur in hanc $-$ tang. Arc. $\frac{\lambda}{L} q =$ tang. Arc. $\frac{\lambda'}{L} q$, quae nunc indicat effe fummam arcuum $\frac{\lambda}{L} q + \frac{\lambda'}{L} q = 2q$ vel $= 4q$ vel $= 6q$ etc. Ergo L fiue L' erit $= \frac{\lambda + \lambda'}{2}$ vel $= \frac{\lambda + \lambda'}{4}$ vel $= \frac{\lambda + \lambda'}{6}$ etc. haec autem proprietas competit chordae bc vniformiter craffae atque fixae in punctis b et c. Omnia haec corollaria per fe obuia ipfi rei naturae perfecte conueniunt; fimul autem ab aequatione noftra, fi debito modo tractetur, obtime indicantur.

§. 17. Progredior ad cafus, qui integrum poftulant calculum numericum aequatione noftra indicadicatum; hi vero ab initio non poſſunt aliter quam congruis poſitionibus pro arcu $\frac{\lambda}{L}q$ ſucceſſiue corrigendis euolui, quo facto verus valor huius arcus mox proxime innoteſcet, quod ex ſequenti apparebit exemplo.

Exemplum. Ponantur ambae chordae cg et bg longitudine inter ſe aequales, fuerit autem craſſities ſeu grauitas chordae bg quadrupla alterius chordae cg. Sic fiet $\lambda' = \lambda$ et $p' = 4p$ atque aequatio noſtra §. 13. erit -2 tang. Arc. $\frac{\lambda}{L}q =$ tang. Arc. $\frac{2\lambda}{L}q$. Si ponatur Arc. $\frac{\lambda}{L}q = 55$ graduum, oportet vt ſit -2 tang. $55^\circ =$ tang. 110°. ſiue $2.856 = 2\ 747$. Si vero idem arcus ponatur $= 54^\circ$. prodibit $2\ 752 = 3\ 077$: vnde iam liquet fore proxime Arc. $\frac{\lambda}{L}q = 54^\circ. 45'$, pro quo obtinetur $2.829 = 2.824$, quod mendacium tuto negligitur. Ergo erit proxime $\frac{\lambda}{L} = \frac{54\frac{3}{4}}{90} = \frac{219}{360}$; vnde $L = \frac{360}{219}\lambda$ atque $L' = \frac{180}{219}\lambda$; ſiue $2L = \frac{720}{219}\lambda$ atque $2L' = \frac{360}{219}\lambda$. Ergo vibrationes ambarum chordarum connexarum iſochronae erunt cum vibrationibus chordae ſimplicis eiusdem craſſitiei cum chorda cg atque eodem pondere tenſae, cuius longitudo ſit $= \frac{720}{219}\lambda$ ſiue etiam cum vibrationibus chordae ſimplicis eiusdem craſſitiei cum chorda bg eodemque pondere tenſae cuius longitudo foret $= \frac{360}{219}\lambda$. Si porro ſumatur ſonus chordae ſimplicis longitudinis bc ſeu 2λ, eiusdem craſſitiei cum chorda bg, pro ſono fundamentali, erit ſonus chordae eiusdem longitudinis sed aequaliter crassae cum chorda cg prioris octaua: sonus autem systematis propositi exprimetur per $\frac{448}{365}$ atque erit medius inter tertiam minorem et tertiam maiorem soni fundamentalis.

§. 18. Apparet ex allato exemplo ante omnia, repetitis tentaminibus, explorandum esse arcum siue angulum $\frac{\lambda}{L}q$ fundamentalem, qui aequationi paragraphi decimi tertii satisfaciat. Fuerit angulus iste $= \Phi$ habebitur

$$\frac{\lambda}{L}q = \Phi \text{ atque } L = \frac{q}{\Phi}\lambda.$$

At rursus patet aequationem paragraphi decimi tertii infinitas habere radices, quae longitudinem L successiue minorem atque minorem faciunt sonoque acutiori respondent, dum indicant vtramque chordam pluries posse axem intersecare atque inflexiones contrarias assumere prouti figura quinta et sequentes indicant. Sic omnes configurationes, quas chordae inter vibrandum assumere possunt, obtinebuntur, si nulla radix praetermittatur. De his configurationibus atque inflexionibus, quae ambas chordas in plures ramos siue concamerationes dispescunt, notandum est, quod vnica concameratio irregularis sit, illa scilicet quae punctum ambas chordas connectens continet: Reliquae concamerationes omnes in vtraque chorda erunt regulares instar chordarum simplicium tota sua longitudine vniformium vibrantium: quae in vna eademque chorda formantur sunt omnes inter

inter se aequales, longiores autem fiunt in chorda tenuiori, breuiores in crassiori; eritque longitudo concamerationum in vna chorda praecise $= 2\,L$ in altera $= 2\,L' = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{p'}}\,L$: haec omnia ex ipsa rei natura absque calculo per se patent.

Similes forent vibrationes aëreae in fistulis, si columna aërea fistulae inclusa in duas diuersas partes dispesceretur diuersa densitate praeditas aut etiam in aëre libero, in quo sonus propagatur, si aër a subita mutatione caloris densitatem suam aliquo in loco confestim mutare putetur; annon suspicari licet, simile aliquid contingere, quoties radius luminis ex vno medio in aliud incidit. Quicquid sit, operae pretium erit accuratius in vibrationes altiorum ordinum inquirere, quod exemplo aliquo nunc faciam.

§. 19 Sit iterum, vt §. 13 $\lambda' = \lambda$ atque $p' = 4\,p$, quibus suppositionibus conuenit aequatio $-$ 2 tang. Arc. $\frac{\lambda}{L}\,q =$ tang. Arc. $\frac{2\lambda}{L}\,q$, pro quo vidimus §. 17. esse arcum fundamentalem $\frac{\lambda}{L}\,q = 54^\circ.\,45'$: atque arcum

$\frac{2\lambda}{L}\,q = 109^\circ.\,30'$ fit $\Phi =$ ang. $54^\circ.\,45'$,

atque sumantur successiue anguli

$\Phi,\ 2q-\Phi,\ 2q+\Phi,\ 4q-\Phi,\ 4q+\Phi,\ 6q-\Phi,\ 6q+\Phi$ etc.
patet singulos hos arcus communem habere tangentem sed alternatim affirmatiuam aut negatiuam:

Deinde ſumantur horum angulorum dupli atque obtinebitur

$$2\Phi, 4q-2\Phi, 4q+2\Phi, 8q-2\Phi, 8q+2\Phi\ \ 12q-2\Phi, 12q+2\Phi \text{ etc.},$$

quorum iterum ſinguli communi gaudent tangente alternatim affirmatiue et negatiue ſumta: Igitur ſatisfaciente angulo Φ, ſatisfacient omnes reliqui

$$2q-\Phi, 2q+\Phi, 4q-\Phi, 4q+\Phi, 6q-\Phi, 6q+\Phi \text{ etc.}$$

vnde obtinentur ſucceſſiue pro $\frac{\lambda}{L}q$ ſequentes valores

$$\Phi, 2q-\Phi, 2q+\Phi, 4q-\Phi, 4q+\Phi, 6q-\Phi, 6q+\Phi, \text{ etc.}$$

atque adeo

$$L=\frac{q}{\Phi}\lambda;\ L=\frac{q}{2q-\Phi}\lambda;\ L=\frac{q}{2q+\Phi}\lambda;\ L=\frac{q}{4q-\Phi}\lambda;\ L=\frac{q}{4q+\Phi}\lambda;\ L=\frac{q}{6q-\Phi}\lambda;\ L=\frac{q}{6q+\Phi}\lambda; \text{etc.}$$

Subſtituantur pro q et Φ valores 90°. et $54^{\circ}\frac{3}{4}$, atque ſic pro longitudine L prodibunt ſucceſſiue ſequentes valores

$$\tfrac{360}{219}\lambda : \tfrac{360}{501}\lambda : \tfrac{360}{939}\lambda : \tfrac{360}{1221}\lambda : \tfrac{360}{1659}\lambda : \tfrac{360}{1941}\lambda : \tfrac{360}{2379}\lambda \text{ etc.}$$

Ita quoque pro altera chorda longitudo L', dimidiatis terminis, fit ſucceſſiue aequalis

$$\tfrac{180}{219}\lambda' : \tfrac{180}{501}\lambda' : \tfrac{180}{939}\lambda' : \tfrac{180}{1221}\lambda' : \tfrac{180}{1659}\lambda' : \tfrac{180}{1941}\lambda' : \tfrac{180}{2379}\lambda' : \text{etc.}$$

ſoni autem progrediuntur in ratione denominatorum 219 : 501 : 939 : 1221 etc.

Configurationes, quas ambae chordae inter vibrandum aſſumunt, ſiſtuntur pro quatuor caſibus ſimpli-

ſimpliciſſimis figuris 4. 5. 6. 7. quarum affectiones Tab. III. quisque propria ſua contemplatione conſpiciet. Determinatis longitudinibus L et L′ habetur 2 L = longitudini cuiusuis concamerationis in chorda tenuiori et 2 L′ = longitudini concamerationum in chorda craſſiore: Fiunt autem in vtraque chorda concamerationes replicandae donec proxime ad punctum *b*, in quo chordae vnitae ſunt, peruentum fuerit; tunc concameratio intermedia vtrobique reliqua ex duabus portionibus vtriusque chordae erit compoſita, ſimul tamen cum reliquis concamerationibus ſynchrona.

Interſectiones, quas curuae cum toto axe formant, fient omnes pro eadem chorda ſub angulis perfecte aequalibus: at vero maximae amplitudines concamerationum in chorda tenuiori, pro noſtro exemplo fiunt maiores quam in chorda craſſiori, quamuis axem ſub angulo minori interſecent, exceptis caſibus, qui figuris 8, 9 etc. reſpondent, de quibus nunc dicam.

§. 20. Notabile eſt, quod praememoratae vibrationum ſpecies diuerſae, quamuis infinitae ſint, nondum tamen omnes, quae oriri poſſunt, expleant. Id quidem non potui non animaduertere, poſtquam vidi tranſitum a configuratione figurae quintae ad ſextam, in qua poſteriori tres ſunt nodi, cum in praecedente vnicus eſſet; vnde intellexi, configurationem dari mediam duobus nodis donatam, qualem

 ſiſtit

fiftit figura octaua. Ita quoque deficere video configurationem figurae nonae, quae quinque fiftit nodos. In genere methodus praemiffa praetermittit configurationes pro quibus punctum connexionis b incidit in nodum et in quibus numerus nodorum fit $= 3n - 1$, fi per n intelligatur numerus qualiscunque integer. Alteram hanc vibrationum claffem ita definire licet.

In paragrapho praecedente monui, quod fi arcus $\frac{\lambda}{L}q = \Phi$ fatisfaciat aequationi -2 tang Arc. $\frac{\lambda}{L}q$ $=$ tang. Arc. $\frac{2\lambda}{L}q$, futurum fit vt fimul arcus $2q - \Phi$, $2q + \Phi$, $4q - \Phi$, $4q + \Phi$, $6q - \Phi$, $6q + \Phi$, etc. fatisfaciant. Iam vero patet praefatam aequationem admittere quoque fupofitionem $\Phi = 0$, indeque deduci arcus $2q - 0$, $2q + 0$, $4q - 0$, $4q + 0$, $6q - 0$, $6q + 0$ etc. quorum finguli bini, a fe non differunt ita vt fimpliciter enumerari debeant arcus $2q$, $4q$, $6q$ etc. Igitur pro hac vibrationum claffe, faciendum fucceffiue erit $\frac{\lambda}{L}q = 2q$; $\frac{\lambda}{L}q = 4q$; $\frac{\lambda}{L}q = 6q$ etc vnde pro L fucceffiue proueniunt valores $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{6}\lambda$ etc. atque pro L' valores $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{8}\lambda$, $\frac{1}{12}\lambda$ etc. qui nunc valores figuris 8 et 9 perfecte conueniunt; hae itaque nouae configurationes prioribus erunt ordine fuo intercalaneae, quo facto omnes ordines obtinentur et numerus nodorum cuiuis numero naturali poterit effe aequalis.

§. 21.

§ 21. Ad ductum praemissi exempli, singula alia pertractari atque computari poterunt: Conducet autem praeuio vti examine synthetico de proportione, quae intercedit inter $\sqrt{p}$ et $\sqrt{p'}$, quae inseruiet ad proportionem inter tangentes indicandam; tum et de proportione, quae ipsis arcubus competere debet; etenim si alterutra tangens multo maior debeat esse sua socia, indicium habemus angulum non multum a recto deficere atque si simul ipse angulus multum excedere debeat angulum socium, indicium quoque habebimus de paruitate posterioris anguli.

§ 22. Plurima forent superaddenda, veluti quaestiones de abbreuiatione alterutrius chordae requisita, vt sonus fundamentalis emergens datum inde formet interuallum musicum cum sono fundamentali qui editur absque ista abbreuiatione. In huiusmodi quaestionibus ante omnia, longitudo L vel L' per aequationem §. 13. est determinanda, quo facto ex interuallo musico dato innotescit valor nouae longitudinis L vel L', vnde determinatur longitudo chordae abbreuiandae. Sic pro exemplo §. 17. si chorda crassior apposito digito reducatur ad longitudinem $\frac{161}{433}$ longitudinis suae naturalis, inde obtinebitur octaua soni qui editur remoto digito.

Potest etiam alius considerari modus, quo lex continuitatis in chorda vibrante interrumpitur, geometrametrarum attentione non indignus, ſi ſcilicet chorda, tota ſua longitudine vniformis, in puncto aliquo annexum habere ponatur ponduſculum: Hic equidem ambo ſegmenta chordae in puncto, vbi ponduſculum ſuperadditum habent, neutiquam communem habent tangentem; ambae vero tangentes ſunt tanquam fila grauitatis expertia atque ponduſculo alligata conſideranda, ſimulque efficiendum, vt vibrationes ponduſculi fiant iſochronae, cum vibrationibus vtriusque chordae ſegmenti.

SECTIO

SECTIO QVARTA DE MOTV AERIS IN TVBIS.

Auctore

L. EVLERO.

CAPVT I.

DE AERIS AGITATIONIBVS MINIMIS IN TVBIS AEQVALITER AMPLIS.

Problema 67.

1.

Dum aer in tubo aequaliter amplo horizontaliter posito siue sit rectus siue curuus vtcunque agitatur, aequationes inuenire, quibus eius motus determinatur. Tab. IV. Fig. 70.

Solutio.

Sit A B tubus propositus, qui siue sit rectus siue curuus, tanquam rectus in figura repraesentatur, quoniam vidimus ab eius curuamine motum non perturbari. Sit ergo eius amplitudo constans $= ff$. Ad hoc autem problema resoluendum vti conueniet methodo posteriori, qua status aeris in tubo quicunque cum statu initiali comparatur. Solutionem ergo ex problemate 45 petamus quem in finem consideremus aëris particulam, quae initio, vbi erat tempus $t = 0$, fuerit in S, ac ponamus spatium $AS = S$, eius particulae vero densitatem $= Q$; at amplitudo tubi, quae ibi posita erat $= \Omega$ hic nobis est $= ff$. Iam elapso tempore $= t$ eadem particula peruenerit in s, statuaturque spatium $As = s$, eius densitas $= q$, pressio $= p$, et celeritas secundum directionem $sB = v = (\frac{ds}{dt})$ amplitudine tubi existente $\omega = ff$. His positis prima aequatio ibi inuenta praebet $q(\frac{ds}{dS}) = Q$; deinde quia ob tubum horizontaliter positum grauitas motum non afficit, altera aequatio ibi inuenta hanc induet formam $\frac{2g\,dp}{q} = -ds(\frac{dds}{dt^2})$, quae cum tempus hic vt constans spectetur, ita repraesentari potest

$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dS}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0;$$

vbi meminisse iuuabit quantitates p, q, s functiones esse duarum variabilium S et t quantitatem Q vero tantum functionem ipsius S. Aëris autem natura hic praeterea introducatur, qua nouimus pressionem p perpetuo densitati q esse proportionalem; vnde si densitati datae b conueniat pressio $= a$, erit $p = \frac{aq}{b}$, ex quo posterior aequatio fit

$$\frac{2ga}{bq}\left(\frac{dq}{dS}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0,$$

prima

prima existente $q\left(\frac{ds}{dS}\right)=Q$. Hinc igitur densitatem q elidere licet cum sit

$$\left(\frac{dq}{dS}\right)=\frac{dQ}{dS\left(\frac{ds}{dS}\right)}-\frac{Q\left(\frac{dds}{dS^2}\right)}{\left(\frac{ds}{dS}\right)^2} \text{ ob } q=\frac{Q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}$$

ideoque

$$\frac{1}{q}\left(\frac{dq}{dS}\right)=\frac{dQ}{QdS}-\frac{\left(\frac{dds}{dS^2}\right)}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}.$$

Quocirca habebimus hanc aequationem, qua motus determinatio continetur

$$\frac{2gadQ}{bQdS}\left(\frac{ds}{dS}\right)-\frac{2ga}{b}\left(\frac{dds}{dS^2}\right)+\left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=0$$

quam aequationem ita resolui oportet, vt posito $t=0$ fiat $s=S$, tum autem fiet $\left(\frac{ds}{dS}\right)=1$, ideoque $q=Q$ vt rei natura postulat.

Coroll. 1.

2. Si ergo hanc aequationem ita resoluere liceret, vt qualis futura sit functio quantitas s binarum variabilium S et t assignari posset, tum omnes motus, qui quidem in aërem tubo contentum cadere queant, definiri possent. Sicque totum negotium ad resolutionem huius aequationis est perductum.

Coroll 2.

3. Cum illa aequatio differentialia secundi gradus inuoluat, eius integrale completum duas

 functio-

functiones indefinitas continere debet, quas deinceps ex ſtatu initiali determinari oportet, et quoniam non ſolum cuiusque particulae locus initio ſumitur datus ſed etiam motus, ad hoc efficiendum vtique binis functionibus indeterminatis opus eſt.

Scholion 1.

4. Determinatio ergo motus aëris opus eſt longe difficilimum cum caſus ſimpliciſſimus quo aerem eodem caloris gradu praeditum in tubo aequaliter amplo, et grauitatis effectu remoto moueri ponimus, ad eiusmodi aequationem ſit perductus, cuius reſolutio nullo adhuc artificio cognito expediri poteſt: quod eo minus eſt mirandum quod ea Analyſis infinitorum pars, quorſum haec aequatio eſt referenda nuper demum excoli eſt coepta, neque in ea vltra prima elementa vix quicquam adhuc eſt praeſtitum. Maxime ergo arduae ſunt iudicandae omnes quaeſtiones, qua circa motum aëris inſtituuntur, etiamſi forte primo intuitu facillimae videantur veluti ſi aër in tubo ope emboli vel condenſetur vel rarefiat, cuius certe motus determinatio fruſtra ſuſciperetur. Quando enim ex vi aëris condenſati vulgo motus globuli in ſclopeto pneumatico definiri ſolet, nullo modo ad motum ipſius aëris reſpicitur ſed is potius quouis momento, quaſi eſſet in quiete ſpectatur, ex quo neglectu etiamſi in motu globuli vix vllus error gigni videatur, minime tamen hoc exemplum proferre licet, in quo circa motum aëris quic-

quicquam fuerit definitum: quin potius confiteri cogimur, nos circa hanc Theoriae motus fluidorum partem etiamnunc in maxima ignoratione versari.

Scholion 2.

5. Quoniam solutionem problematis methodo posteriori supra exposita sum aggressus, ne quis suspicetur methodum priorem feliciori successu forte adhiberi, solutionem inde petitam hic apponam. Secundum problema 44 igitur sine respectu ad statum initialem habito ad tempus $= t$ consideremus aëris particulam in s versantem vocato spatio $As = s$ sitque ibi densitas $= q$, pressio $= p$ et celeritas $= v$ in directione sB: et quoniam amplitudo tubi est constans seu $\omega = ff$ et nullae admittuntur vires sollicitantes, habebuntur hae duae aequationes:

$$\left(\frac{d.qv}{ds}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{2g\,dp}{q} = -v\,dv - ds\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

Cum autem ex natura aëris sit $p = \frac{aq}{b}$ posterior aequatio fiet

$$\frac{2ga\,dq}{bq} + v\,dv + ds\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0.$$

quae cum tempus t ponatur constans reducitur ad hanc formam:

$$\frac{2ga}{bq}\left(\frac{dq}{ds}\right) + v\left(\frac{dv}{ds}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$$

Quia igitur prior evoluta praebet,

$$v\left(\frac{dq}{ds}\right) + q\left(\frac{dv}{ds}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

ponamus $q = e^y$ inde fiet:

$$\upsilon\left(\frac{dy}{ds}\right) + \left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

ex altera vero

$$\frac{2ga}{b}\left(\frac{dy}{ds}\right) + \upsilon\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) + \left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) = 0$$

Hinc elicitur

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = -\frac{b\upsilon}{2ga}\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) - \frac{b}{2ga}\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$$

ex illa vero

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) + \frac{b\upsilon\upsilon}{2ga}\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) + \frac{b\upsilon}{2ga}\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$$

Quare cum fit $\left(\frac{ddy}{ds\,dt}\right) = \left(\frac{ddy}{dt\,ds}\right)$ concludimus.

$$\left(\upsilon\upsilon - \frac{2ga}{b}\right)\left(\frac{dd\upsilon}{ds^2}\right) + 2\upsilon\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)^2 + 2\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) + 2\upsilon\left(\frac{dd\upsilon}{dt\,ds}\right) + \left(\frac{dd\upsilon}{dt^2}\right) = 0$$

vnde nunc inuestigari oportet qualis sit υ functio binarum variabilium t et s. Haec autem aequatio ea, quam in solutione problematis dedimus, non solum non est tractatu facilior, sed illa etiam hoc commodo est praedita, vt felici successu ad aëris agitationes minimas accommodari possit quemadmodum in sequente problemate docebimus.

Problema 68.

6. In casu praecedentis problematis si motum aëris ita comparatum esse nouerimus vt singulae particulae non nisi quam minime a loco initiali recedant, istas aëris agitationes minimas determinare.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 70. Praecedentis problematis solutio ad hunc casum accommodabitur si spatium $S s$, quo aëris particulam

Iam s a situ suo initiali S remotam ponimus, in calculo tanquam minimum tractemus. In hunc finem ponamus $s = S + z$ ita vt z spectanda sit vt quantitas minima, atque aequatio, motum determinans hanc induet formam:

$$\frac{2ga\,dQ}{b\,Q\,dS}\left(1+\left(\frac{dz}{dS}\right)\right) - \frac{2ga}{b}\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) + \left(1+\left(\frac{dz}{dS}\right)\right)^2\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 0$$

quae cum formula $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ prae vnitate quasi euanescat contrahitur in hanc:

$$\frac{2ga\,dQ}{b\,Q\,dS} - \frac{2ga}{b}\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 0$$

cuius si modo primus terminus abesset, integrale ex iis, quae iam in hoc nouo calculi genere sunt comperta, dari posset; foret enim

$$z = \Gamma:\left(S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right) + \Delta:\left(S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right)$$

Cum autem primus terminus solam variabilem S contineat cuius Q est functio data, integratio eo non turbatur, eritque aequationis nostrae integrale completum:

$$z = \int dS\, l\frac{Q}{B} + \Gamma:\left(S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right) + \Delta:\left(S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right)$$

quo inuento vt reliquae motus conditiones eliciantur, ob $s = S + z$ erit

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + l\frac{Q}{B} + \Gamma':\left(S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right) + \Delta':\left(S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Gamma':\left(S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right) - \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Delta':\left(S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}\right)$$

ex quarum formarum illa colligitur densitas aëris in s elapso tempore t quae est $q = \dfrac{Q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}$; hincque porro ro pressio $p = \frac{aq}{b}$, ex hac vero celeritas in eodem loco $v = (\frac{ds}{dt})$, sicque ad quoduis tempus status in quo aer versabitur, perfecte assignari poterit, si modo binae functiones indefinitae Γ et Δ ex statu initiali dato debite determinentur: id quod sequenti modo fieri debet. Status initialis duabus conditionibus continetur quarum altera pro singulis locis S datur aëris densitas Q, altera vero motus ei in initio impressus, ponamus ergo tum particulae in S existentis celeritatem in plagam SB fuisse $= \Upsilon$, ita vt Q et Υ sint functiones ipsius S datae. Hinc in formulis generalibus inuentis ponendo tempus $t = 0$, primo fieri necesse est $s = S$ seu $z = 0$, vnde habetur

$$0 = \int dS\, l\frac{Q}{B} + \Gamma : S + \Delta : S$$

hocque modo simul illi conditioni satisfit, qua posito $t = 0$ prodire debet $q = Q$. Nam generatim si z eiusmodi fuerit functio ipsorum S et t, vt posito $t = 0$ fiat $z = 0$ tum etiam fieri $(\frac{dz}{dS}) = 0$, ideoque $(\frac{ds}{dS}) = 1$ necesse est. Deinde pro motu, qui aëri ab initio fuerit impressus, haec obtinebitur aequatio

$$\Upsilon = \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Gamma' : S - \frac{\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Delta' : S$$

ex quibus duabus ergo conditionibus indoles vtriusque functionis Γ et Δ determinatur. Quo facto deinceps ad quoduis tempus status motusque aëris in tubo definiri poterit.

Coroll.

Coroll. 1.

7. Quoniam per hypothefin quantitas z minima effe debet, vt ftatus initialis ad hunc cafum fit accommodatus denfitas aëris Q vbique quam minime a denfitate ad aequilibrium requifita, quam pofui B difcrepare debet; fi enim denfitas nimium alteraretur, quantitas z inde tantum valorem accipere poffet, qui hypothefi aduerfaretur.

Coroll. 2.

8. Deinde ne functiones Γ et Δ ipfi z nimis magnum valorem inducant, eas per fractionem quandam minimam α multiplicari conuenit, vt ftatuatur

$$z = s - S = \int dS\, l\tfrac{Q}{B} + \alpha\Gamma : (S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) + \alpha\Delta : (S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}})$$

hoc modo nil impedit quo minus ipfae functiones valores quantumuis magnos adipifcantur:

Coroll. 3.

9. Hoc multiplicatore minimo introducto pro ftatu initiali his duabus aequationibus fatisfieri oportebit:

$$0 = \int dS\, l\tfrac{Q}{B} + \alpha\Gamma : S + \alpha\Delta : S \text{ et}$$

$$\Upsilon = \frac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Gamma' : S - \frac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Delta' : S$$

vnde patet etiam in ftatu initiali non nifi celeritates minimas admitti poffe.

Coroll. 4.

10. Quod si tum ad quoduis tempus t status aeris definiri debeat, primo pro densitate $q = \frac{Q}{(\frac{ds}{dS})}$, habebitur:

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + l\frac{Q}{B} + \alpha\Gamma' : \left(S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right) + \alpha\,\Delta' : \left(S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)$$

tum vero pro celeritate $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$ erit

$$v = \frac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Gamma' : \left(S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right) - \frac{\alpha\sqrt{2ga}}{\sqrt{b}}\Delta' : \left(S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}\right)$$

vnde et haec celeritas semper erit minima.

Scholion 1.

11. Si rem accuratius perpendamus pro motus determinatione non absolute necessarium est, vt ipsa quantitas z posito $s = S + z$ sit minima, dummodo ea ita sit comparata, vt formula inde orta $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ fiat valde parua, id quod euenit si ad valorem ipsius z ante datum insuper adiiciamus terminum $\mathfrak{C}t$, existente $\mathfrak{C}$ quantitate quantumuis magna. Quoniam enim hinc neque formulae $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ neque huius $\left(\frac{dds}{dt^2}\right)$ valor immutatur, aequationi propositae perinde satisfit. Inde autem tantum celeritates Υ et v quantitate constante $\mathfrak{C}$ augebuntur, totumque negotium eo redibit, ac si totus tubus cum aëre incluso motu vniformi deferretur vel si toti massae aereae in tubo motus quidam vniformis ab initio esset impressus, qui deinceps perpetuo conseruaretur. Cum autem phaenomena hinc oriunda

oriunda per se sint perspicua, operae non est pretium huiusmodi casus seorsim pertractare.

Scholion 2.

12 Quod si ratio functionum Γ et Δ pro lubitu assumatur, inde status initialis facile definietur difficilius autem erit vicissim ex statu initiali dato indolem earum functionum elicere. Quoniam autem satisfieri oportet huic conditioni

$$o = \int dS\, l\tfrac{Q}{B} + \alpha\,\Gamma : S + \alpha\,\Delta : S$$

statim atque altera functio $\Gamma : S$ fuerit assumta hinc simul altera definitur, id quod ex illa ratione qua functiones per applicatas curuarum repraesentari solent clarissime hoc modo ostenditur. Referat recta AB tubi longitudinem in qua capiatur abscissa $AS = S$, super ea construatur linea curua DQE, cuius sit applicata $SQ = \int dS\, l\tfrac{Q}{B}$, tum vero pro lubitu alia curua $F\Gamma G$, cuius applicata sit $S\Gamma = \alpha\Gamma : S$. Iam infra axem AB construatur noua curua $H\Delta I$ hac lege vt vbique sit eius applicata $S\Delta = SQ + S\Gamma$, eritque $S\Delta = -\alpha\,\Delta : S$; sicque hoc modo ex binis prioribus curuis haec tertia functionem $\Delta : S$ referens construetur. Hinc autem porro celeritas aëris in statu initiali pro quouis loco S facile innotescet ex hac aequatione: Tab. IV. Fig. 71.

$$\Upsilon \sqrt{\tfrac{b}{2ga}} = \alpha\,\Gamma' : S - \alpha\,\Delta' : S$$

quandoquidem est

$$\alpha\,\Gamma' : S = \tfrac{d.\,S\Gamma}{d.\,AS} \quad\text{et}\quad \alpha\,\Delta' : S = \tfrac{-d.S\Delta}{d.\,AS}$$

 ita

ita vt ſit

$$\Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \frac{d.(S\Gamma + S\Delta)}{d.AS} = \frac{d.\Gamma\Delta}{d.AS},$$

ſicque tangentibus ducendis facile aſſignatur. Quando autem viciſſim celeritas Υ in ſingulis locis S pro ſtatu initiali datur, quomodo inde viciſſim ambas curuas $F\Gamma G$ et $H\Delta I$ definiri oporteat, in ſequente problemate inueſtigabimus.

Problema 69.

13. Datis in ſtatu initiali pro quouis tubi loco S tam aëris denſitate Q quam celeritate Υ in plagam SB directa, elapſo inde tempore t definire ſtatum et motum aëris in tubo, ſiquidem ſtatus initialis valde parum a ſtatu aequilibrii fuerit diuerſus.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 72. Totum negotium iam eo eſt perductum, vt indoles functionum Γ et Δ ex his duabus aequationibus determinetur:

$$0 = \int dS\, l\tfrac{Q}{B} + \alpha\Gamma : S + \alpha\Delta : S \text{ et}$$

$$\Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \alpha\Gamma' : S - \alpha\Delta' : S$$

Iam prior differentiata praebet

$$-\,l\tfrac{Q}{B} = \alpha\Gamma' : S + \alpha\Delta' : S$$

ex qua cum altera combinata deducimus:

$$\alpha\Gamma' : S = \tfrac{1}{2}\Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} - \tfrac{1}{2} l\tfrac{Q}{B} \text{ et}$$

$$\alpha\Delta' : S = -\tfrac{1}{2}\Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}} - \tfrac{1}{2} l\tfrac{Q}{B}.$$

quos

quos valores ſequenti modo conſtruere licebit. Ex data in puncto S denſitate Q valde parum a denſitate B quae in aequilibrio ſubſiſtit, diſcrepante, colligatur $l\frac{Q}{B}$ pro quo ſumſiſſe ſufficiet $\frac{Q-B}{B}$ hincque deſcribatur ſuper axe A B linea curua C Q D, et cuique abſciſſae $AS = S$ conueniat applicata $SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$. Deinde cum etiam detur celeritas in S, qua vno minuto ſecundo conficiatur ſpatium $= \Upsilon$, conſtituatur in S applicata $S\Upsilon = \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ſicque deſcribatur curua E Υ F. His iam duabus lineis conſtructis CQD et E Υ F ſuper eodem axe AB duae nouae lineae formentur primo ſcilicet linea G Γ H ſupra axem A B ſumendo applicatas $S\Gamma = \frac{1}{2}S\Upsilon - \frac{1}{2}SQ$, tum vero linea I Δ K infra axem ſumendo applicatas $S\Delta = \frac{1}{2}S\Upsilon + \frac{1}{2}SQ$; quo facto erit $\alpha\Gamma' : S = S\Gamma$ et $\alpha\Delta' : S = -S\Delta$, hinque integralia per areas exhibendo: Tab IV. Fig. 71.

$$\alpha\Gamma : S = AGS\Gamma \text{ et } \alpha\Delta : S = -AIS\Delta$$

Per binas autem ſolas ſuperiores curuas (fig. 72) habebimus:

$$\alpha\Gamma' : S = \tfrac{1}{2}(S\Upsilon - SQ);\ \alpha\Delta' : S = -\tfrac{1}{2}(S\Upsilon + SQ)$$

$$\alpha\Gamma : S = \tfrac{1}{2}(AES\Upsilon - ACSQ);\ \alpha\Delta : S = -\tfrac{1}{2}(AES\Upsilon + ACSQ)$$

Iam elapſo tempore quocunque t minutorum ſecundorum in axe AB vtrinque a puncto S capiatur ſpatium $ST = St = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, vt ſit $AT = S + t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ et $At = S - t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ hincque euidens eſt fore Tab. IV. Fig. 72.

$$\alpha\,\Gamma' : (S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) = \tfrac{1}{2}(TN - TM)$$

$$\alpha\,\Delta' : (S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) = -\tfrac{1}{2}(tn + tm)$$

$$\alpha\,\Gamma : (S + t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) = \tfrac{1}{2}(AETN - ACTM)$$

$$\alpha\,\Delta : (S - t\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}) = -\tfrac{1}{2}(AEtn + ACtm)$$

His inuentis post hoc tempus $= t$ particula aëris, quae initio erat in S nunc erit translata in tubi locum s vt sit

$$Ss = ACSQ + \tfrac{1}{2}AETN - \tfrac{1}{2}ACTM - \tfrac{1}{2}AEtn - \tfrac{1}{2}ACtm$$

quae spatia rediguntur ad hanc formam:

$$Ss = \tfrac{1}{2}TNtn - \tfrac{1}{2}SQTM + \tfrac{1}{2}SQtm$$

Deinde aëris particulae, quae nunc in s versatur densitas inuenta $q = \frac{Q}{(\frac{ds}{dS})}$, formulis autem supra erutis ad figuram relatis fit

$$(\tfrac{ds}{dS}) = 1 + SQ + \tfrac{1}{2}TN - \tfrac{1}{2}TM - \tfrac{1}{2}tn - \tfrac{1}{2}tm$$

cuius expressionis membra posteriora cum prae vnitate sint minima erit proxime

$$q = Q(1 - SQ - \tfrac{1}{2}TN + \tfrac{1}{2}TM + \tfrac{1}{2}tn + \tfrac{1}{2}tm).$$

Denique pro motu quo haec particula iam agitabitur, eius celeritas secundum directionem sB erit

$$\mathfrak{v} = \tfrac{1}{2}(TN - TM + tn + tm)\sqrt{\tfrac{2ga}{b}}.$$

Coroll 1.

14. Data ergo agitatione, qua aër in tubo contentus ab initio de statu aequilibrii fuerit perturbatus,

batus, et quae per binas lineas C Q D et E Υ F repraesentatur, deinceps ad quoduis tempus translatio, densitas et motus cuiusque aëris particulae in tubo assignari poterit

Coroll. 2.

15. Si initio aëris aequilibrium prorsus non fuerit turbatum, vt vbique fuerit $Q = B$ et motus nullus seu $\Upsilon = 0$, tum binae lineae CQD et EΥF fient rectae et in ipsum axem A B incident. Cum igitur tam omnes areae quam applicatae euanescant nulla mutatio neque in loco neque densitate singularum particularum orietur, ideoque aequilibrium perseuerabit.

Coroll 3.

16. Si initio densitati naturali tantum mutatio quaedam sine vllo motu fuerit inducta, linea E Υ F in rectam A B incidet, indeque fiet:

$Ss = -\frac{1}{2}SQTM + \frac{1}{2}SQtm$; tum vero

$q = Q(1 - SQ + \frac{1}{2}TM + \frac{1}{2}tm)$ et $\upsilon = \frac{1}{2}(tm - TM)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$.

Coroll. 4.

17. Si initio aëri in tubo motus quicunque fuerit impressus neque simul densitas primo saltem instanti vllam mutationem fuerit passa, linea CQD cum axe congruet, et pro agitatione sequente ad quoduis tempus t habebitur:

$Ss = \frac{1}{2}TNtn$; $q = Q(1 - \frac{1}{2}TN + \frac{1}{2}tn)$ et $\upsilon = \frac{1}{2}(TN + tn)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$.

Scho-

Scholion. 1.

18. Obseruari hic oportet binarum nostrarum curuarum CQD et EΥF applicatas non quantitatibus linearibus sed numeris absolutis exponi, ex quo earum constructio postulat, vt linea quaedam recta ad libitum assumta pro vnitate accipiatur; ex qua deinceps quantitas singularum applicatarum debite determinetur; eam ergo rectam tantam statui conueniet, vt mutationes etiam minimae aëri inductae satis sensibiliter in figura referantur. Hinc meminisse iuuabit, quaenam literae in calculum introductae numeros absolutos, et quaenam quantitates lineares significent. Primum autem tempus t vtpote in minutis secundis exprimendum numerum denotat absolutum tum vero etiam litterae b, B, Q et q, quibus densitates indicamus, quoniam referuntur ad certam quandam densitatem vnitate signatam, qua in pressionibus definiendis vtor, sunt numeri absoluti. Reliquae litterae in calculum ingredientes sunt quantitates lineares; primo namque littera g denotat altitudinem qua grauia vno minuto secundo delabuntur, quae aestimatur 15,625 ped. Rhen. litterae vero Υ et $υ$ pro celeritatibus vsurpatae spatia denotant linearia, quae his celeritatibus vno minuto secundo percurrerentur: litterae denique pro pressionibus introductae a et p altitudines sicque etiam quantitates lineares significant. Iis enim denotatur altitudo columnae materia vniformi, cuius densitas ponitur $=1$, constantis, cuius pondus aequale est pres-

pressioni parem basin vrgenti. Cum igitur nostrarum curuarum, quarum alteram CQD scalam densitatum, alteram EΥF scalam celeritatum appellare licet, applicatae sint numeri absoluti, abscissae vero quantitates lineares, areae iis comprehensae quoque erunt quantitates lineares. His animaduersis perspicuum est formulam ex tempore formatam $t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ esse quantitatem linearem, vt abscissae AS=S addi ab eaque subtrahi possit; tum vero expressionem pro translatione Ss inuentam esse quantitatem linearem perinde atque eam, quae pro celeritate v est exhibita; rationem denique densitatum q et Q numero absoluto exprimi vti rei natura postulat. Postremo probe teneatur vtramque scalam ita construi debere vt si initio ad s fuerit densitas $=$ Q et celeritas $=$ Υ pro scala densitatum capi debeat applicata

$$SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$$

pro scala celeritatum vero applicata

$$S\Upsilon = \Upsilon\sqrt{\frac{b}{2ga}}.$$

Scholion 2.

19. Commodissime hic vsu venisse mirandum est, quod ex datis binis scalis densitatum et celeritatum ad statum initialem relatis tam expedite ad quoduis tempus elapsum aëris agitatio inde orta assignari possit, cum tamen quaestio haec primo intuitu vires analyseos superare sit visa, atque etiam

certo ſuperaret, niſi agitationes quam minimae eſſent aſſumtae; praeterea vero etiam hypotheſis, qua tubo vbique eandem amplitudinem tribuimus, plurimum ad hanc commodam ſolutionem contuliſſe eſt cenſenda, quandoquidem pro tubis inaequaliter amplis grauiſſima adhuc obſtacula occurrunt. Quanquam autem haec ſolutio ad motus ſpeciem maxime ſpecialem reſtringitur, in inueſtigationibus tamen phyſicis ampliſſimum praeſtat vſum, indeque iam feliciſſimo ſucceſſu duo phaenomena, quae adhuc maxime fuerunt abſcondita fruſtraque a naturae ſcrutatoribus tractata, ſi ſolum Geometram acutiſſimum Taurinenſem *Ludouicum la Grange* excipiamus, explicari poſſunt. Alterum phaenomenon conſiſtit in propagatione ſoni, vbi explicari oportet quomodo, dum aëri vno in loco quaedam agitatio minima inducitur, inde ſimiles agitationes ſucceſſiue ad maximas diſtantias proferantur. Alterum vero phaenomenon, in quo multo adhuc minus ab auctoribus eſt praeſtitum verſatur in explicatione ſoni, quem tibiae edunt inflatae, cuius quidem olim pulcra a me ſimilitudo cum cordis vibrantibus eſt obſeruata; nullo autem modo ipſam aëris agitationem, qua hi ſoni producuntur, definire licuit. Vtrumque igitur phaenomenon, quatenus in tubis aequaliter amplis producitur, deinceps omni cura ſum perſecuturus.

Scholion 3.

20. Antequam autem hoc opus aggrediar circa ambas ſcalas denſitatum et celeritatum, earumque

que continuationem, quaedam circumſtantiae maximi momenti ſunt euoluendae. Primo quidem obſeruo ſi tubus vtrinque in infinitum extendatur, ſolutionis noſtrae applicationem nulli difficultati eſſe ſubiectam; quia enim tum pro ſtatu initiali ambae ſcalae per ſe vtrinque in infinitum continuantur; elapſo quantumuis magno tempore t, ſi a quouis axis puncto S vtrinque abſcindantur interualla $ST = St = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, his punctis T et t in vtraque ſcala determinatae ſemper reſpondebunt applicatae, ex quibus ſtatus aëris vbique in tubo ad hoc tempus definiri poterit. Sin autem tubus vel vtrinque vel ex altera ſaltem parte fuerit terminatus, ibique ſiue clauſus ſiue apertus, ibidem quoque ambae ſcalae ad ſtatum aëris initialem extractae terminentur neceſſe eſt; hinc neceſſario eueniet vt tempore labente interualla ST et St vel alterum ſaltem vltra ſcalarum terminum cadat, ita vt tum ipſae ſcalae nullas plane ſuppeditent applicatas, ex quibus aëris ſtatus ad haec tempora definiri queat. Cum igitur ſolutionis datae natura ſemper poſtulet, vt ſcalae vtrinque in infinitum ſint continuatae, etiamſi tubus finitam habeat longitudinem maximum ſolutionis momentum in eo verſatur, vt definiamus, qua lege his caſibus vtramque ſcalam continuari oporteat, vt inde vera ſolutio eliciatur. Atque idem quoque praeſtari debebit, quando tubus habet figuram in ſe redeuntem; quanquam enim hic tubi directricem vt lineam rectam repraeſento, tamen iam

Pp 2 ſatis

ſatis eſt oſtenſum curuaturam ideo non excludi, quoniam hinc motus non alteratur.

Problema 70.

21. Si tubus aequaliter amplus in puncto B terminetur, ibique ſit apertus, vtramque ſcalam tum denſitatum quam celeritatum quae ex ſtatu initiali ſuper eo fuerit extructa, vltra punctum B ſuper axe AB producto continuare.

Solutio.

Quia tubus in B eſt apertus ideoque aër in tubo contentus cum aëre externo communicatur, in ipſa tubi extremitate B preſſio aëris interni a preſſione externi diuerſa eſſe nequit, quamobrem etiam denſitas aëris interni in hoc loco conuenire debet cum denſitate externi, quae ſi vocetur $= B$, erit non ſolum initio ſed etiam perpetuo pro hac tubi extremitate B tam denſitas initialis $Q = B$ quam
Tab. V. Fig. 74. elapſo tempore quocunque $q = B$. Pro ſcala ergo denſitatum CQD ex ſtatu initiali formata in extremitate B, ob $Q = B$ fit applicata $BD = 0$. Sit igitur AB tubus propoſitus in B terminatus et apertus vltra A autem vtcunque extenſus, atque ex ſtatu initiali formata ſit ſcala denſitatum CmB in B cum axe AB concurrens; ſcala autem celeritatum ſit EnF. Quia iam elapſo tempore quocunque $= t$ denſitas aëris ad B perpetuo debet eſſe eadem $= B$, primum obſeruo hanc conditionem perinde locum habere

habere debere, quaecunque fuerit ſcala celeritatum; hoc eſt ſiue aëri in tubo impreſſus fuerit initio quispiam motus, ſiue tota agitatio tantum in perturbatione celeritatis ſubſtiterit. Quanquam autem haec proprietas illi aëris elemento, quod quouis tempore in orificio B B verſatur, conuenit, tamen quia translatio ſingulorum elementorum eſt quam minima, etiam illi elemento, quod initio orificium B B occupauerat, conſtanter tribui poteſt. Effluxerit ergo tempus quodcunque $= t$ at a puncto B ſumto vtrinque interuallo $Bt = BT = t\sqrt{\frac{2ag}{b}}$, continuatio ſcalarum ita eſſe debet comparata, vt fiat $q = Q = B$, quare ob $SQ = 0$ hoc caſu fieri oportet

$$-\tfrac{1}{2}TN + \tfrac{1}{2}TM + \tfrac{1}{2}tn + \tfrac{1}{2}tm = 0$$

ſeu $TM + tm - TN + tn = 0$,

quod cum euenire neceſſe ſit quaecunque fuerit ſcala celeritatum ſeorſim debet eſſe

$$\text{et } TM + tm = 0 \text{ et } TN - tn = 0.$$

Ex priori conditione patet ſcalam denſitatum CmB ita vltra B continuari debere vt curua BMc ſimilis fiat et aequalis curuae BmC, ſed ad partem axis contrariam diſponatur. Deinde pro ſcala celeritatum continuatio FNe pariter ſimilis et aequalis ſtatuatur curuae FnE ſimulque ad eandem axis partem poſita, hacque lege vtramque ſcalam denſitatum et celeritatum vltra terminum B continuari conuenit.

Coroll. 1.

22. Si tubus ex parte A in infinitum extendatur, hac constructione vtraque scala B in infinitum continuabitur. At si tubus in A quoque sit terminatus, tum hoc modo scalas non vltra terminum a existente $Ba = AB$ continuari licebit. Quia vero similis continuatio vltra A institui debet hac ratione vtrinque in infinitum progredi poterimus.

Coroll. 2.

23. In hac ergo scalarum continuatione neutiquam earum indoles interna spectatur, neque si eae fuerint curuae algebraicae vel aequatione quadam comprehensae continuatio ex hac aequatione est petenda, sed sola figura externa eiusue ductus continuationem, qua hic opus est suppeditat. Atque regula hic data perinde est obseruanda, siue scalae illae sint in se lineae continuae, siue irregulares cuiusmodi libero manus ductu describuntur.

Scholion.

24. Haec circumstantia eo maiore est attentione digna, quod vulgo in analysi nullae aliae lineae curuae, nisi quae certa quadam aequatione earum naturam exprimente contineantur, admitti, lineaeque discontinuae nulla huiusmodi lege comprehensae inde penitus excludi solent. Analysis enim tam finitorum, quam ea pars infinitorum quae adhuc potissimum est exculta, vtique ad nullas alias

lineas

lineas curuas, nisi quae certa continuitatis lege sint complexae, applicari potest, quandoquidem his casibus aequatio earum naturam exprimens semper in calculum introduci debet; neque ante lineis discontinuis, nulla certa lege ductis locus in Analysi concedi potuit, quam sublimior Analyseos infinitorum pars, quae circa functiones duarum pluriumue variabilium versatur excoli est coepta, cuius equidem naturam primus ita comparatam esse obseruaui, vt huiusmodi lineae discontinuae ad eam aeque referri debeant, atque lineae curuae regulares certa quadam aequatione expressae, neque adeo his posterioribus vlla praerogatiua sit tribuenda; cum hic earum quasi interna natura neutiquam spectetur. Quare si forte linea C *m* B fuerit arcus circuli in nostro instituto ad circuli naturam plane non respicitur, sed in continuatione illi alius arcus aequalis B M *c* inuerso situ adiungitur, prorsus vti fieri deberet, si linea C *m* B nulla certa ratione esset ducta, quod etiam de altera scala E *n* F est tenendum, cuius continuatio F N *e* illi semper similis et aequalis statui debet, etiamsi forte illius natura longe aliam continuationem inuoluat. Quoniam haec linearum curvarum consideratio prorsus est noua, iisque qui huic calculi generi nondum sunt assueti, a receptis Analyseos principiis maxime abhorrere videri solet, hanc circumstantiam saepius inculcasse minime superfluum est iudicandum.

Pro-

Problema 71.

Tab. V. Fig. 75. 25. Si tubus aequaliter amplus in B terminetur, ibique sit clausus, vtramque scalam tam densitatum quam celeritatum ad statum initialem constructum, vltra terminum B super axe A B producto continuare.

Solutio.

Quia tubus A B in B est clausus in hac ipsa extremitate aëri in tubo contento nullus plane motus inesse potest, aërisque vltimum stratum operculo B B adiacens perpetuo in quiete persenerare debet, ex quo non solum in initio sed etiam omni tempore celeritas aëris in puncto B nihilo debet esse aequalis. Hinc scalae celeritatum E Y F (fig. 72.) extremum punctum F in axis punctum B incidat, necesse est; habeatque propterea haec scala figuram E n B scala vero densitatum sit C m D. Cum nunc elapso tempore quocunque t formula pro celeritate supra inuenta, si ad punctum B applicetur, semper euanescere debeat; idque pro omni scala densitatum, continuationem vtriusque scalae ad hoc requisitum accommodari oportet. Super axe ergo vtrinque a termino B capiantur interualla aequalia $Bt = BT = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, et quia celeritas in puncto B supra ita exprimi est inuenta, vt esset:

$$v = \tfrac{1}{2}(TN + tn - TM + tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$$

hinc

hinc duplicem aequationem elicimus, alteram pro ſcala celeritatum $TN + tn = 0$ alteram pro ſcala denſitatum $TM = tm$; vnde diſcimus ſcalam celeritatum EnB ita continuari debere vt ſit $TN = -tn$, ideoque partem continuatam BNe ſimilem fore et aequalem ſcalae BnE, ad contrariam autem axis partem diſpoſitam. Cum autem pro ſcala denſitatum ſit $TM = tm$, eius continuatio DMc omnino ſimilis et aequalis erit lineae DmC, ad easdem axis partes diſpoſita. Vtraque ſcilicet ſimilitudo refertur ad punctum B ita vt inde ſumtis vtrinque abſciſſis aequalibus $BT = Bt$, in vtraque ſcala etiam applicatae fiant aequales $TN = tn$ et $TM = tm$, illa quidem ad contrariam haec vero eandem axis partem ſita.

Coroll. 1.

26. Prout ergo tubus in B fuerit vel apertus vel clauſus vtriusque ſcalae continuatio diuerſo quidem ratione axis ſed pari modo reſpectu ipſarum applicatarum inſtitui debet. Illo ſcilicet caſu ſcalae denſitatum, hoc vero ſcalae celeritatum continuatio ad contrariam axis partem eſt diſponenda.

Coroll. 2.

27. Quoniam caſu quo tubus in BB eſt clauſus, aeris ad B ſiti celeritas ſemper eſt nulla, hinc ſponte ſequitur eum nunquam de loco ſuo recedere: vnde translationis ſpatium Ss ſupra in genere defini-

 tum

tum hic quoque euanescere debet. Puncto autem S in B translato fit vtique.

$$Ss = \tfrac{1}{2}TNtn - \tfrac{1}{2}BDTM + \tfrac{1}{2}BDtm + = \tfrac{1}{2}TNtn = o$$

quia est $TNtn = Btn - BTN = o$, area enim BTN in contrariam axis partem cadens negatiue capi debet.

Problema 72.

28. Si tubus aequaliter amplus fuerit in se rediens, quamcunque habuerit figuram, vtramque scalam densitatum et celeritatum ad statum initialem extructam vtrinque in infinitum continuare.

Solutio.

Tab. V. Fig. 76. Longitudo tubi in directum extensa in tabula repraesentetur linea recta ASA', ita vt punctum A' tota perimetro percursa in punctum A recidere sit concipiendum. Exstructa ergo super hac linea ASA' tam scala densitatum CQC' quam scala celeritatum $E\Upsilon E'$ ita vt si in S initio fuerit densitas $= Q$ et celeritas secundum directionem $SA' = \Upsilon$ sint applicatae $SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ et $S\Upsilon = \Upsilon\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, euidens est in puncto A' esse debere $A'C' = AC$ et $A'E' = AE$ quandoquidem punctum A' cum puncto A conuenit. Simili modo tubum pluries percurrendo pro singulis reuolutionibus repetitis in axe capiantur interualla $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A''''$ etc. tubi longitudini AA' aequalia, et quia singula puncta A, A', A'', A''', A'''' etc. reuera idem tubi punctum

A re-

A repraesentant, continuatio ambarum scalarum ita debet esse comparata, vt applicatae in omnibus his punctis sint eaedem. Idem quoque tenendum est de omnibus punctis S, S', S'', S''' etc. sumtis interuallis $AS = A'S' = A''S'' = A'''S'''$ etc. quae omnia cum vnicum tubi punctum exhibere sint censenda, in omnibus quoque ambae applicatae congruere debent. Quare quaecunque fuerint ambae curuae CQC' et EYE' eaedem continuo super axe prolongato repetitae repraesententur, quod pariter super altera axis prolongatione in infinitum fieri est concipiendum. Cum autem hoc modo ambae scalae vtrinque in infinitum fuerint continuatae, manifestum est si pro quouis tempore elapso aëris elementi, quod initio fuerat in S secundum praecepta supra data tam translatio Ss quam eius densitas et celeritas Y definiatur eosdem prodituros esse valores, ac si eadem inuestigatio pro punctis S', S'', S''' etc. institueretur.

Coroll. 1.

29. Neque ergo hoc casu ad naturalem vtriusque scalae CQC' et EYE' continuationem, quam ex sua propria indole essent habiturae, est respiciendum, sed vtraque continuo eadem super axe AA' vtrinque producto construi debet.

Coroll. 2.

30. Haec autem vtriusque scalae continuatio vtrinque in infinitum facta tam hoc casu quam praeceden-

cedentibus ideo eſt neceſſaria vt elapſo tempore quantumuis magno t a quouis puncto S vtrinque tanta ſpatia $t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ abſcindi queant, in iisque punctis applicatae reſpondentes reperiantur.

CAPVT II.

DE PROPAGATIONE PVLSVVM AERIS IN TVBIS AEQVALITER AMPLIS AD SONI GENERATIONEM ET PROPAGATIONEM ILLVSTRANDAM.

Problema 73.

31. In tubo vtrinque in infinitum extenſo ſi alicubi in ſpatio minimo excitetur pulſus, quo aër vtcunque de ſtatu aequilibrii deturbetur, huius agitationis propagationem ad quoduis tempus definire.

Solutio.

Tab. V. Fig. 77. Sit A B tubi directrix in directum extenſa et in ſpatiolo G H $= b$ aëri in tubo contento eiusmodi agitatio inducta ſit, vt linea G M' m H exhibeat ſcalam denſitatum, linea vero G N' n H ſcalam celeritatum, cuius applicatae $t\,n$, quatenus in figura ſupra axem A B cadunt motum verſus B indicent illius

lius vero curuae applicatae $t\,m$ ſupra axem cadentes maiorem ſolito denſitatem, contrariae vero $T'M'$ minorem ſolito denſitatem oſtendant, quam ſcilicet ſtatus aequ librii poſtulat vtrinque autem vltra hoc interuallum GH aër etiam nunc in quiete verſetur; ita vt ibi ambae ſcalae in ipſum axem incidant, earumque applicatae euaneſcant, quam ob cauſam etiam vtramque ſcalam in terminis G et H cum axe conuenientes feci. Hoc ſtatu initiali conſtituto conſideremus locum tubi quemcunque S verſus B ſitum, et quia ad aeris hoc loco contenti agitationem inueniendam pro tempore quouis t ab initio elapſi vtrinque a puncto S in axe abſcindi oportet interualla $= t\,V\frac{2ga}{b}$; ante omnia obſeruo quamdiu fuerit $t\,V\frac{2ga}{b} < HS$ nullam agitationem ad punctum S peruenire, ibique adeo aequilibrium eſſe futurum donec tempus ab initio elapſum euadat $= HS\,V\frac{b}{2ga}$, ac tum demum aërem in S agitationem eſſe ſenſurum. Elapſum ergo iam ſit maius tempus t capiaturque interuallum $St = t\,V\frac{2ga}{b}$, ad alteram enim partem non opus eſt aequale ſpatium S T abſcindi, quia ibi ſcalae in axem incidunt. Nunc igitur aeris elementum ex S translatum erit in s, vt ſit ſpatiolum $Ss = \frac{1}{2}Htn + \frac{1}{2}Htm$, tum vero denſitas huius elementi erit $q = B(1 + \frac{1}{2}tm + \frac{1}{2}tn)$ et celeritas verſus B tendens $u = \frac{1}{2}(tm + tn)\,V\frac{2ga}{b}$, poſtquam autem elapſum fuerit tempus $t = SG\,V\frac{b}{2ga}$, ob $tm = 0$, et $tn = 0$ eius motus iterum extinguitur densitasque naturalis B restituitur, in quo statu deinceps perpetuo perseuerabit.

Simili modo in altera tubi parte res se habebit, punctumque S′ quiescet donec elapsum fuerit tempus $t = S' G \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, deinceps autem elapso tempore $t = S' T' \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, translatio fiet per spatiolum $S' s'$ $= \frac{1}{2} G T' N' + \frac{1}{2} G T' M'$ quia in figura applicata $T' M'$ infra axem cadit; tum autem densitas erit $q = B(1 - \frac{1}{2} T' N' - \frac{1}{2} T' M')$ et celeritas versus B directa $v = \frac{1}{2}(T' N' + T' M') \sqrt{\frac{2ga}{b}}$. Statim autem ac tempus $t = S' H \sqrt{\frac{b}{2ga}}$ effluxerit aer in S' in aequilibrium restituetur, omniaque aeris elementa non diutius agitationi erunt subiecta quam durante tempore $= G H \sqrt{\frac{b}{2ga}} = \frac{b \sqrt{b}}{\sqrt{2ga}}$ min. sec. Manifestum ergo est, quomodo pulsus initio in internallo G H excitatus labente tempore vtrinque in tubo propagetur.

Coroll. 1.

32. Posita ergo distantia $HS = s$, pulsus initio in spatio G H excitatus ad S vsque propagatur tempore $= \frac{s \sqrt{b}}{\sqrt{2ga}}$ min. sec. vnde patet propagationem esse vniformem et tempore vnius minuti secundi fieri per spatium $= \sqrt{\frac{2ga}{b}}$: quod si densitas mercurii sumatur pro vnitate, vt sit a altitudo barometri quasi $2\frac{1}{2}$ ped. lond. erit densitas aeris $b = \frac{1}{14.750} = \frac{1}{10500}$, ob $g = 16$ ped. lond. fiet circiter 916 ped.

Coroll.

Coroll. 2.

33. Ex solutione etiam intelligitur, cuiusmodi agitatione particula aeris S concitetur, primo nempe propellitur per spatiolum $S s = \frac{1}{2} H t n + \frac{1}{2} H t m$ deinde densitatem obtinebit $q = B(1 + \frac{1}{2} t m + \frac{1}{2} t n)$ ac tertio celeritatem versus B acquiret $\mathfrak{v} = \frac{1}{2}(t n + t m) V \frac{2ga}{b}$, vnde patet celeritatem hanc excessui densitatis supra densitatem naturalem esse proportionalem; quandoquidem est $\frac{q - B}{B} = \mathfrak{v} V \frac{b}{2ga}$.

Coroll. 3.

34. Imprimis autem hic notari meretur pulsus in spatio G H excitati propagationem in plagam A non necessario aeque esse fortem atque in plagam B. Si enim in pulsu initiali scala densitatum congrueret cum scala celeritatum vt esset $T'M' = -T'N'$ et $t m = t n$, tum propagatio versus A prorsus euanesceret, altera vero versus A maxime vigeret.

Scholion 1.

35. Hac pulsuum promotione soni propagatio pulcerrime illustratur; quocunque enim modo sonus producatur, semper copia quaedam aëris in spatio G H contenta de statu aequilibrii deturbatur, siue in sola densitate siue sola celeritate siue vtraque coniunctim ipsi mutatio inducatur. Quocunque autem modo hoc eueniat propagatio huius pulsus vtrinque in tubo pari absoluitur celeritate, etiamsi forte in alteram tubi plagam multo sit vehementior quam

quam in alteram. Id autem tantum hic obiici, poteſt, quod experientia ſpatium per quod ſonus interuallo vnius minuti ſecundi propagatur multo maius, ſcilicet 1040 ped. lond. exhibeat; quam noſtra Theoria oſtendit. Cuius phaenomeni cauſa vel in eo eſt poſita quod hic in calculo pulſus tantum minimos admittimus, ii autem ſoni, quorum propagatio per experimenta eſt definita, tam fuerint vehementes, vt calculus noſter ad eos non debeat accommodari; ideoque adhuc in dubio relinquatur annon ſoni maxime debiles ea ipſa celeritate quam inuenimus, reuera progrediantur. Vel ſi etiam hic experientia refragetur, ſuſpicari liceret, accelerationem hanc ingenti particularum ſolidarum in aëre volitantium copiae tribui debere, dum enim agitatio ad vnum terminum huiusmodi particulae pertingit, eodem inſtanti etiam terminus oppoſitus impellitur neque tempore opus foret ad ſonum per ſubſtantiam harum particularum propulſandum. Huic certe circumſtantiae, quod hic ſonum in tubo includimus hic diſſenſus ab experientia tribui nequit, quoniam infra videbimus etiam in aëre vndique aperto eandem celeritatem pro ſoni propagatione inveniri. Interim tamen hic diſſenſus non obſtat, quo minus hinc tam productio quam propagatio ſoni recte explicari ſit cenſenda. Fortaſſe etiam rationem huius diſſenſus in eo quaeri licebit quod aërem tantum 750 vicibus rariorem ſtatuimus aqua; ſi enim ei raritatem 966 vicibus maiorem tribuamus, calculus cum experientia pulcre conſentiet.

Scho-

Scholion 2.

36. Quoniam elapſo tempore $t = S\,t\,V\frac{b}{2ga}$ agitatio puncti S ita per ambas applicatas $t\,m$ et $t\,n$ ſcalarum definitur, vt ſit ibi denſitas $q = B(1 + \frac{1}{2}t\,m + \frac{1}{2}t\,n)$ et celeritas $v = \frac{1}{2}(t\,m + t\,n)\,V\frac{2ga}{b}$ euidens eſt totum pulſum initialem G H hoc tempore transferri in ſpatium Y X = G H vt ſit H X $= t\,V\frac{2ga}{b}$, reliquo aëre in aequilibrio exiſtente praeterquam in ſimili ſpatio ad alteram partem in tubo ſumto. In hoc autem ſpatio Y X agitatio per vnicam ſcalam Y Z X ita formatam vt applicata S Z ſit ſemiſummae illarum $t\,m + t\,n$ aequalis, repraeſentabitur quippe quae eadem ſimili modo quo in pulſu initiali et denſitatem et celeritatem in S exhibebit, cum iam pro puncto S ſit $q = B(1 + S\,Z)$ ſeu $l\frac{q}{B} = S\,Z$, et $v = S\,Z\,V\frac{2ga}{b}$, hincque translatio elementi S ita determinetur vt ſit $S\,s$ = areae XSZ. Haec ergo noua ſcala ſimplex Y Z X ex binis initialibus formata indolem pulſuum verſus B propagatorum declarat vnde etiam diuerſae ſonorum qualitates explicari debebunt. Primum autem hic diſtinguitur latitudo pulſuum Y X = H G quae prout fuerit maior minorue, ſonus inde certam indolem habebit: Deinde ex ipſa curuae Y Z X figura prout vel maiorem minoremue habuerit amplitudinem S Z, vel tota ad eandem axis partem vel partim ſupra axem partim infra eum fuerit ſita, vel alia quacunque ratione fuerit affecta, ſonus quoque diverſo modo ſenſum auditus afficiet. Ab amplitudine

quidem S Z fortitudo seu vehementia soni pendere videtur quales autem qualitates reliquis proprietatibus figurae Y Z X respondeant haud satis liquet; id saltem perspicuum est infinitam fere sonorum varietatem hinc explicari debere; cuiusmodi sunt soni diuersas litteras vocales *a*, *e*, *i*, *o*, *u* exprimentes, aliaeque innumerae differentiae. Deinde etiam ratio singularis phaenomeni adhuc non explicati hinc intelligitur, quomodo fiat, vt si agitatio Y Z X tanquam initialis consideretur, ea tantum in vnam plagam B vlterius propagetur, neque vllos nouos pulsus retro versus A excitet. Videmus enim si ipse pulsus initialis G H iam ita esset comparatus, vt binae scalae inter se conuenirent, quemadmodum fit in pulsibus propagatis, tum etiam nullam propagationem in plagam A esse secuturam. Imprimis etiam hic notandum est, eosdem pulsus propagatos ex infinitis pulsibus initialibus oriri posse, quoniam infinitis modis ex binis scalis diuersis pulsus initialis G H, eadem scala pro pulsibus propagatis Y X produci potest, vnde non mirum si saepe diuersae causae similes sonos efficiunt.

Scholion 3.

Tab. V. Fig. 78. 37. Hactenus vnicum tantum pulsum sum contemplatus neque propterea ad eas sonorum affectiones respexi, quae ex successione et ordine plurium pulsuum nascuntur, quales sunt grauitas et acumen; ex quo fonte soni etiam infinitam varietatem adipiscuntur. Quoniam vero hic non vniuer-

sam

ſam ſonorum doctrinam tradere eſt propoſitum, tantum obſeruo ſi initio non vnus ſed plures pulſus α, β, γ in aëre ſint excitati quemlibet eorum perinde propagari ac ſi reliqui plane abeſſent, neque propterea plures ſonos ſimul excitatos inter ſe confundi. Quod phaenomenon cum alias ſolutu perquam difficile ſit viſum, ex principiis ſtabilitis ſponte ſequitur. Cum enim ſuper directrice A B ambae ſcalae vbique praeterquam in locis α, β, γ cum ipſo axe congruant, ſi locum quemcunque S conſideremus, ad eum elapſo tempore $t = S\gamma V \frac{b}{2ga}$ ſolus pulſus γ cum ſuis affectionibus propagatur, neque reliqui pulſus α et β quicquam turbant; elapſo autem tempore $t = S\beta V \frac{b}{2ga}$, quo ille pulſus iam vltra eſt promotus, ad locum S pulſus β cum ſuis affectionibus perfertur, ac deinceps poſt tempus $t = S\alpha V \frac{b}{2ga}$ pulſus α. Ex quo clariſſime intelligitur, quemadmodum plures ſoni vel ſimul vel ſucceſſiue excitati ita ſtatis temporibus ad quemuis locum S proferantur, vt nullus eorum reliquis ſit impedimento, ſed quilibet aeque aërem in S excitet, ac ſi reliqui plane abeſſent. Ceterum quatenus hic pulſus tubo aequaliter amplo incluſos conſideramus; huic cauſae eſt tribuendum, quod ſinguli pulſus propagati perpetuo eandem vim retineant, quantumuis enim punctum S a pulſibus primitiuis diſtans accipiatur, pulſus propagati ſemper per ſimilem ſcalam repraeſentantur vnde non ſolum eandem vim ſed etiam easdem affectiones retineant neceſſe eſt. Quando autem tales pulsus in libero aere quaquauersus propagantur, tum vtique videbimus eos in maioribus distantiis continuo magis debilitari.

Problema 74.

Tab. V. Fig. 79. 38. Si tubus in B sit apertus ex altera parte vero A in infinitum extensus, in eoque alicubi GH pulsus quicunque excitetur, eius propagationem in tubo definire.

Solutio.

Pro pulsu in spatio GH excitato sit GmH scala densitatum et GnH scala celeritatum, quarum ergo vtraque extra spatium GH per totum tubum cum axe confundatur. Quia vero tubus in BB est terminatus et apertus, vtriusque scalae continuatio vti in fig. 74. institui debet: hinc scala densitatum $BHmGA$ in partem oppositam inuersa fiet $BbMga$ scala celeritatum vero $BHnGA$ ad eandem axis partem circa B inuersa dabit continuationem $BbNga$. Vnde in tubo pulsus GH propagatio perinde fiet, ac si extra tubum ad parem ab orificio BB distantiam similis pulsus gb existeret, scala densitatum tantum ad alteram axis partem conuersa ita vt sumta abscissa $BT = Bt$, sint applicatae $TN = tn$ et $TM = tm$. Nunc igitur videamus quando et quomodo pulsus in quemuis tubi locum sit peruenturus, ac primo quidem in orificio BB aer quiescet, quoad ab initio effluxerit tempus $t = BH\sqrt{\frac{b}{2ga}}$; deinceps

deinceps vero ita agitari incipiet, vt elapso tempore $t = \mathrm{B}\,t\,V\frac{b}{2ga}$ ibi futura sit densitas

$$q = \mathrm{B}(1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{T\,N} - \tfrac{1}{2}\mathrm{T\,M} + \tfrac{1}{2}t\,n + \tfrac{1}{2}t\,m) = \mathrm{B}$$

et celeritas

$$v = \tfrac{1}{2}(\mathrm{T\,N} + \mathrm{T\,M} + t\,n + t\,m)\,V\tfrac{2ga}{b} = (t\,n + t\,m)\,V\tfrac{2ga}{b}$$

densitas scilicet ibi nullam mutationem patietur, celeritas vero versus a eo maior erit, quo maior fuerit summa applicatarum $t\,n$ et $t\,m$, quarum $t\,n$ denotat celeritatem versus B directam $t\,m$ vero densitatem naturali maiorem in pulsu initiali. Agitatio haec aeris in ipso orificio BB durabit per tempus $= \mathrm{G\,H}\,V\frac{b}{2ga}$. Intra tubum autem in S successiue duae generabuntur agitationes, prior scilicet quando pulsus GH eo appellit, indeque elapso tempore $t = \mathrm{S}\,t\,V\frac{b}{2ga}$ ibi erit densitas $q = \mathrm{B}(1 + \tfrac{1}{2}t\,n + \tfrac{1}{2}t\,m)$ et celeritas $v = \tfrac{1}{2}(t\,n + t\,m)\,V\frac{2ga}{b}$: Deinde vero de nouo agitabitur, quando pulsus secundarius hg eo transferetur; tempore enim elapso $t = \mathrm{S\,T}\,V\frac{b}{2ga}$ ibi fiet densitas

$$q = \mathrm{B}(1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{T\,N} - \tfrac{1}{2}\mathrm{T\,M}) = \mathrm{B}(1 - \tfrac{1}{2}t\,n - \tfrac{1}{2}t\,m)$$

et celeritas $v = \tfrac{1}{2}(t\,n + t\,m)\,V\frac{2ga}{b}$: in agitatione scilicet posteriori densitas eo minor erit naturali, quando priori fuerat maior, celeritate existente eadem. In ipso autem loco GH postquam pulsus primarius cessauerit elapso tempore $t = \mathrm{H}\,b\,V\frac{b}{2ga} = 2\,\mathrm{B\,H}\,V\frac{b}{2ga}$ denuo agitari incipiet, ibique quasi echo prioris percipietur. In quouis autem tubi loco A pone pulsum

 pri-

primarium G H eiusmodi duplex agitatio sentietur, vt pro priori elapso tempore $= A t \sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ibi sit densitas $q = B(1 - \frac{1}{2} t n + \frac{1}{2} t m)$ celeritas vero $v = \frac{1}{2}(t n - t m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$; pro posteriori vero elapso tempore $= A T \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, futura sit densitas $q = B(1 + \frac{1}{2} t n - \frac{1}{2} t m)$ et celeritas $v = \frac{1}{2}(t n - t m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$. Tardius autem pulsus hic posterior ad A pertinget tempore $= 2 B H \sqrt{\frac{b}{2ga}}$. Vnde patet si in pulsu principali vbique esset $t n = t m$ tum versus A nullas plane agitationes excitatum iri, contra vero nullas versus B si fuerit $t n = - t m$.

Coroll. 1.

39. In ipso ergo orificio B B tubi pulsus simplex excitabitur, ibique vnicus sonus exaudietur; in tubo autem ad pulsus locum accedendo duo soni successiue se excipient, quorum posteriorem vt resonantiam prioris spectare licebit; eorumque interuallum eo maius euadet, quo magis ad pulsum principalem G H appropinquemus.

Coroll. 2.

40 In ipso autem pulsus principalis loco GH et post eum versus A binae agitationes eo perlatae interuallo temporis $= 2 B H \sqrt{\frac{b}{2ga}}$ a se inuicem distabunt, quod si fuerit satis notabile posterior prioris quasi *echo* exhibebit.

Coroll.

Coroll. 3.

41. Si initio plures in tubo excitati fuerint pulſus eodem modo atque in praecedente problemate oſtendi poteſt, ſingulorum propagationem a reliquis minime perturbari, ſicque etiam hic plures ſonos inuicem non confundi.

Scholion 1.

42. Solutio huius problematis nos praeter expectationem ad explicationem duorum phaenomenorum imprimis memorabilium manuducit, reſonantiae ſcilicet et *echo*. Primum autem videmus horum phaenomenorum cauſam vulgo perperam repercuſſioni cuipiam eſſe adſcriptam; cum enim in tubo ad B B aperto, in altera vero parte ad A A quaſi in infinitum extenſo ſi vspiam in L pulſus ſeu ſonus excitetur, is nonniſi in orificio B B ſimplex exaudiatur; inde vero ad L recedendo ita duplicetur, vt interuallum continuo fiat maius primo hic reſonantia oritur, tum vero in L et vltra hunc locum verſus A, ſi modo interuallum LB ſatis ſit magnum vt tempus, quo a ſono eius duplum percurreretur, ſentiri queat, repetitio illius ſoni exaudietur, cum tamen hic nulla reflexio cernatur, niſi forte dicere velimus repercuſionem hic in B B fieri ab aere externo quod tamen ab opinione vulgari plurimum abhorret. Ita ſi interuallum BL eſſet 1040 pedum ſonus in L editus poſt duo minuta ſecunda ibi iterum audiretur, et quod hic de tubis eſt dictum, quo- Tab. V. Fig. 80.

quodammodo etiam ad ambulacra et vicos angustos praecipue si superne fuerint tecti, transferri licet, vnde plurium phaenomenorum in huiusmodi locis obseruatorum ratio reddi poterit.

Scholion 2.

43. Deinde etiam hinc rationem tubarum stentorearum iam quodammodo colligere poterimus, si enim in tubo ad L sonus fuerit excitatus, pulsus inde per orificium B B pari propemodum vi in liberum aërem expellitur, et quia hic non amplius indolem habet pulsuum propagatorum, qua tantum in vnam plagam proferantur etiam quaqua versus expanditur. Quia vero orificium B B non est maius quam pulsus initialis, e longinquo sonus non fortior sed cum quadam resonantia coniunctus audietur. Sin autem tubus vt vulgo fieri solet circa orificium magis dilatetur, nullum est dubium, quin scopo proposito magis satisfiat: quoniam in B B multo maior aëris copia agitatur, ideoque in aëre externo fortiores pulsus generat. Nunc autem etiam propagationem pulsuum in tubis ex altera parte clausis scrutemur.

Problema 75.

Tab VI. Fig. 81. 44. Si Tubus aequaliter amplus ad B B sit clausus, ad alteram vero partem A A in infinitum extensus, in eoque alicubi veluti in spatiolo G H pulsus quicunque excitetur, huius pulsus propagationem per totum tubum inuestigare.

Solutio.

Solutio.

Si in ſpatii GH quo pulſus excitatur puncto t fuerit denſitas $= Q$ naturali exiſtente $= B$, et celeritas verſus B directa $= \Upsilon$ ſtatuantur applicatae $t\,m = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ et $t\,n = \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, vt obtineantur ſcalae denſitatum et celeritatum $G m H$ et $G n H$, quae per reliquam tubi extenſionem cum ipſo axe conuenire ſunt cenſendae. Axe iam A B extra tubum in infinitum prolongato, ſumtoque interuallo $BT = Bt$ ſtatuatur applicata $TM = t\,m$ ad eandem axis partem, ad contrariam vero $TN = t\,n$, vt ſic ſcalae quaſi pulſus ſecundarii $b M g$ et $b N g$ extruantur. Hinc in ipſo termino B B aer tamdiu quieſcet, quoad vterque pulſus eo propagetur, quod ſimul continget elapſo tempore $= BH \sqrt{\frac{b}{2ga}}$ elapſo autem tempore maiore $t = Bt \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, eiusmodi in B B agitatio excitabitur, vt futura ſit denſitas $q = B(1 + \frac{1}{2}TN + \frac{1}{2}TM + \frac{1}{2}t\,n + \frac{1}{2}t\,m) = B(1 + t\,n + t\,m)$, celeritas vero υ nulla quia aër in B B non poteſt non eſſe quieſcens. In alio vero quouis tubi loco S intra terminum B et locum primi pulſus G H accepto ad eum hic primus pulſus prius appellet, et elapſo tempore $t = St \sqrt{\frac{b}{2ga}}$ denſitas ibi erit $q = B(1 + \frac{1}{2}t\,n + \frac{1}{2}t\,m)$ celeritas vero $\upsilon = \frac{1}{2}(t\,n + t\,m) \sqrt{\frac{2ga}{b}}$. Deinde vero etiam alter pulſus ſecundarius $g\,b$ eo perferetur, et elapſo tempore $t = ST \sqrt{\frac{b}{2ga}} = (Bt + BS)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ibi erit denſitas $q = B(1 + \frac{1}{2}t\,n + \frac{1}{2}t\,m)$ vt ante celeritas vero $\upsilon = -\frac{1}{2}(t\,n + t\,m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$,

 illi

illi contraria. In ipſo autem pulſus G H loco et pone eum verſus A ambo pulſus ſe excipient elapſo tempore $= 2$ B H $\sqrt{\frac{b}{2ga}}$; atque in A pro pulſu principali elapſo tempore $t =$ A $t \sqrt{\frac{b}{2ga}}$ erit denſitas $q = B(1 - \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ et celeritas $v = \frac{1}{2}(tn - tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, qua agitatione finita pro pulſu ſecundario elapſo tempore $t =$ A T $\sqrt{\frac{b}{2ga}} = (At + 2Bt)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ reperietur ad A denſitas $q = B(1 - \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$ et celeritas $v = -\frac{1}{2}(tn - tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$. Sicque propagatio pulſus primum excitati G H per totum tubum innoteſcit.

Coroll. 1.

45. Perinde ergo atque in caſu praecedente per ſpatium B H quaedam ſoni repetitio percipietur, quae niſi temporis interuallum ſentiri queat, pro reſonantia erit habenda, in ipſo autem loco G H et poſt eum in A echo eo magis erit diſtinctum, quo maius fuerit ſpatium B H.

Coroll. 2.

46. Pulſus autem in ſpatio G A pone pulſum principalem excitati alius erunt indolis, ac pulſus ante eum in ſpatio B H producti, fierique adeo poteſt vt in alterutram plagam nulla propagatio contingat, quoniam altero caſu agitatio definitur ſumma applicatarum $tn + tm$, altero vero earum differentia $tn - tm$.

Scho-

Scholion.

47. Diſſimilitudini pulſuum in tubo vtrinque propagatorum experientia neutiquam aduerſari eſt putanda, ſi in ſonis nullum diſcrimen animaduertitur. Etiamſi enim binae ſcalae G *m* H et G *n* H ita ſint comparatae, vt prouti vel ſumma vel differentia applicatarum *t m* et *t n* capi debeat, maximum discrimen oriri debeat, tamen perpendendum eſt, quoniam omnes ſoni pluribus pulſibus ſucceſſiue productis conſtant; qui a motu quodam reciproco naſcuntur, eos ſemper ita eſſe comparatos, vt alternatim ſcalas illas contrario modo diſpoſitas praebeant, ideoque ſi vnus pulſus in vnam plagam fuerit fortior quam in alteram, contrarium in ſequente eueniet, et quoniam ſenſus noſtri ſingulos diſcernere non valent, etiam illud discrimen in ſenſus non cadit. Quodſi alterni pulſus in alteram plagam prorſus non propagentur, ſonus percipietur vna *octaua* grauior, etiamſi corpus ſonorum duplo plures edat vibrationes. An autem huiusmodi caſus vnquam eueniant, in dubio eſt relinquendum.

Problema 76.

48. Si in tubo aequaliter amplo et vtrinque aperto A A B B alicubi in *t* pulſus quicunque excitetur, eius propagationem per totum tubum determinare. Tab. VI. Fig. 82.

Solutio.

Etſi agitatio ſemper in quodam ſpatio, vti hactenus aſſumſimus fieri debet, tamen nunc a latitudine pulſus animum abſtrahamus, quandoquidem ex praecedentibus effectus inde oriundus ſatis intelligitur, et agitationem in vnico puncto t factam hic contemplemur, vbi ſi fuerit denſitus $= Q$ naturali exiſtente $= B$, et celeritas in plagam A B directa $= \Upsilon$ capiatur $t\,m = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ et $t\,n = \Upsilon\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, in reliquis autem tubi punctis hae binae applicatae euaneſcant. Producto iam axe A B vtrinque in infinitum, ſumtisque ſpatiis B A′, A′ B′′ etc. A B′, B′ A′′ longitudini tubi aequalibus, ex praeceptis ſupra datis continuatio ambarum ſcalarum ita inſtitui debet. Primo ſumto interuallo B T B t, quia tubus in B eſt apertus capiatur T M $= t\,m$ infra, at T N $= t\,n$ ſupra axem: tum ſimili modo ad alteram partem ſumto A T′ $=$ A t, quia tubus in A etiam eſt apertus capiatur T′ M′ $= t\,m$ infra et T′ N′ $= t\,n$ ſupra axem. Iam hac ſcala T′ M′ N′ cum orificio B B collato, ſumatur B t' $=$ B T′, $t'\,m' =$ T′ M′ et $t'\,n' =$ T′ N′ vtrumque ſupra axem, ſicque vtrinque in infinitum progrediendo applicatae T N et $t\,n$ omnes ſupra axem, alterae vero T M et $t\,m$ alternatim ſupra et infra axem erunt diſpoſitae, et in quouis ſpatio interualla A T et A t primo A t, vti et interualla B T, B t etiam primo B t erunt aequalia. His poſitis ad quoduis tubi punctum S ſucceſſiue plures adeoque infiniti pulſus per-

perferentur, primo nempe pulsus principalis $t\,m\,n$ post tempus $= S\,t\,\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, tum pulsus T M N post tempus $= S\,T\,\sqrt{\frac{b}{2ga}} = (B\,t + B\,S)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, tertio pulsus T′M′N′ post tempus $= S\,T'\sqrt{\frac{b}{2ga}} = (A\,t + A\,S)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ et ita porro, quorum pulsuum successiuorum indoles in sequente tabella exhibetur:

Elapso tempore ab initio:	In tubi puncto S erit densitas	celeritas sec. A B
$S\,t\,\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1 + \frac{1}{2}t\,n + \frac{1}{2}t\,m)$	$+\frac{1}{2}(t\,n + t\,m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2\,B\,t - S\,t)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1 - \frac{1}{2}t\,n - \frac{1}{2}t\,m)$	$+\frac{1}{2}(t\,n + t\,m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2\,A\,t + S\,t)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1 + \frac{1}{2}t\,n - \frac{1}{2}t\,m)$	$+\frac{1}{2}(t\,n - t\,m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2\,A\,t + 2\,B\,t - S\,t)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1 - \frac{1}{2}t\,n + \frac{1}{2}t\,m)$	$+\frac{1}{2}(t\,n - t\,m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2\,A\,t + 2\,B\,t + S\,t)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1 + \frac{1}{2}t\,n + \frac{1}{2}t\,m)$	$+\frac{1}{2}(t\,n + t\,m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2\,A\,t + 4\,B\,t - S\,t)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1 - \frac{1}{2}t\,n - \frac{1}{2}t\,m)$	$+\frac{1}{2}(t\,n + t\,m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(4\,A\,t + 2\,B\,t + S\,t)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1 + \frac{1}{2}t\,n - \frac{1}{2}t\,m)$	$+\frac{1}{2}(t\,n - t\,m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(4\,A\,t + 4\,B\,t - S\,t)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1 - \frac{1}{2}t\,n + \frac{1}{2}t\,m)$	$+\frac{1}{2}(t\,n - t\,m)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
etc.	etc.	etc.

Coroll. 1.

49. Pulsus ergo successiue aërem in S concitantes ratione indolis sunt quadruplices, quartus enim quisque eadem indole est praeditus, tempore autem $= 2\,A\,B\,\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ quaterni pulsus in eundem tubi locum appellunt, hique paribus interuallis se insequentur, si fuerit $B\,t = A\,t$ et $S\,t = \frac{1}{2}B\,t$.

Coroll. 2.

50. Cum tempore $2 AB \surd \frac{b}{2ga}$ quatuor pulſus edantur, ſingulis minutis ſecundis euenient $\frac{2}{AB} \surd \frac{2ga}{b}$ pulſus, qui numerus ſi AB in pedibus Lond. exprimatur fit $= \frac{1032}{AB}$. Si hi pulſus ſint ſatis fortes ſonum referent, qui ergo ab vnico aëris pulſu ortus eſt cenſendus.

Coroll. 3.

51. Si primus pulſus in ipſo orificio BB excitetur, ibidemque quaſi auris teneatur, ob $St = 0$, $Bt = 0$ et $At = AB$, omnes pulſus erunt geminati, ſeque ſequentur temporibus $2 AB \surd \frac{b}{2ga} = \frac{AB}{450}$ ſec. ſiquidem AB in pedibus exprimatur. Hinc ſi longitudo AB ſit quaſi 500 ped. plures eiusdem ſoni repetitiones ſingulis minutis ſecundis ſe excipient et exaudientur.

Scholion.

52. Hinc intelligere licet quomodo echo plurium repetitionum generetur, cum tubus ſatis longus tale phaenomenum exhibere poſſit, neque tamen vlla ſoni repercuſſio eueniat. Secundum calculum quidem ſingulae repetitiones aeque deberent eſſe fortes verum tamen facile intelligitur plures eſſe cauſas quibus ſequentes repetitiones continuo debilitentur quoniam conditionibus in calculo aſſumtis, in praxi neutiquam ſatisfieri poteſt. Cum tamen exempla non defi-

deficiant, quibus eiusdem vocis plures repetitiones satis distincte eduntur, nullum est dubium, quin earum causa in simili aëris agitatione qualem hic sumus contemplati, sit quaerenda. Deinde etiam resonantiae ratio hinc potissimum explicari debere videtur etiamsi laterum tubi natura, quatenus ab aëre interno simul motum vibratorium recipiunt, eo non parum conferat. Praeterea ex praecedentibus satis est manifestum ' his similia phaenomena prodire debere, si tubus vtrinque clausus accipiatur, pulsus enim deriuati super axe eodem plane modo erunt dispositi, hoc tantum discrimine, quod hic applicatae $t\,n$ ex celeritatibus natae alternatim infra et supra axem collocari debeant: neque ergo opus esse arbitror vt hunc casum seorsim euoluam. Inde autem non contemnendae dilucidationes pro motu tympanorum deriuari poterunt; etsi enim membranae quibus tympana teguntur, eorumque latera sonum potissimum moderantur, tamen in aëre incluso quoque ratio repetionis pulsuum quaerenda videtur. Superest igitur in hoc capite tantum, vt agitationem aëris in tubis ex altera parte clausis, ex altera vero apertis inuestigemus.

Problema 77.

53. Si tubus aequaliter amplus A A B B fuerit in altero termino A A apertus, in altero vero B B clausus atque in eo ad t pulsus quicunque fuerit excitatus, eius propagationem in tubo inuestigare. Tab. VI. Fig. 83.

Solutio.

Solutio.

In aere ad t agitato ſit denſitas $= Q$ naturali exiſtente $= B$, et celeritas ſecundum directionem A A $= \Upsilon$, inde capiatur $tm = l\frac{Q}{B}$ et $tn = \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, ita vt punctum m referat ſcalam denſitatum, punctum n vero ſcalam celeritatum ſiquidem reliqua vtriusque ſcalae puncta in ipſum axem incidunt. Iam eo vtrinque producto ſumtoque interuallo B T $=$ B t, quia tubus in B B eſt clauſus, applicata T M $= t\,m$ ſupra, altera vero T N $= t\,n$ infra axem eſt ponenda. Ad alteram vero partem quia tubus in A A eſt apertus, ſumto ſpatio A T$'$ $=$ A t, applicata T$'$M$' = tm$ infra, altera vero T$'$N$' = tn$ ſupra axem ſtatuatur, ſimilique modo ſumto A t'' $=$ A T, fieri oportet $t''m'' = -$ T M $= -t\,m$ et $t''n'' = +$ T N $= -t\,n$. Tum iterum vltra B progrediendo ſumto interuallo B $t' =$ B T$'$ capi debet $t'm' = +$ T$'$ M$' = -t\,m$ et $t'n' = -$ T$'$ N$'$ $= -t\,n$, ſic porro vtrinque in infinitum. Nunc videamus quomodo omnes iſti pulſus ſucceſſiue ad tubi punctum quodcunque S perueniant, id quod ex adiuncta tabella perſpicietur:

Elapſo

Elapſo ab initio tempore	In tubi puncto S erit Denſitas	Celeritas ſec. A B
$St\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2Bt-St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$-\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2At+St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn-\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn-tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2At+2Bt-St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn-\frac{1}{2}tm)$	$-\frac{1}{2}(tn-tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2At+2Bt+St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1-\frac{1}{2}tn-\frac{1}{2}tm)$	$-\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(2At+4Bt-St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1-\frac{1}{2}tn-\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(4At+2Bt+St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1-\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$-\frac{1}{2}(tn-tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(4At+4Bt-St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1-\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn-tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$(4At+4Bt+St)\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1+\frac{1}{2}tn+\frac{1}{2}tm)$	$+\frac{1}{2}(tn+tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
etc.	etc.	etc.

Coroll. 1.

54. Hoc ergo caſu maior diſparitas in pulſibus ſucceſſiuis ad eundem locum appellentibus cernitur, quoniam hic demum octauus quisque ad eandem indolem reuertitur. Temporis autem interualla eandem legem tenent vt ante.

Coroll. 2.

55. Si ſit $St = 0$ et $At = 0$, ita vt ſonus in A edatur ibique auris conſtituatur, ordo et indoles pulſuum ad aurem ſucceſſiue delatorum ita ſe habebit:

Elapſo tempore	denſitas	celeritas
$2\,AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1)$	$-2tn\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$4\,AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1)$	$+2tn\sqrt{\frac{2ga}{b}}$
$6\,AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$	$B(1)$	$-2tn\sqrt{\frac{2ga}{b}}$

denſitas ergo hic nullam ſubit mutationem, vnde ſi primus pulſus nullam habuerit celeritatem, ſequentes omnes ſe mutuo deſtruunt.

Coroll. 3.

56. Sin autem ſonus in BB excitetur, ibique a ſenſu auditus pulſus ſequentes excipiantur, vt ſit $St = 0$, $Bt = 0$ et $At = AB$ tum celeritas in pulſibus appellentibus erit nulla, denſitas ſola alternatim erit $= B(1 - 2tm)$ et $B(1 + 2tm)$ hique pulſus temporis interuallis $2\,AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ ſe inſequentur. His autem duobus caſibus quaterni pulſus in vnum vniuntur quam ob cauſam etiam hi pulſus complexi alia proprietate praediti ſunt ac pulſus ſimplices propagati.

Scholion 1.

57. Quae hactenus hic ſunt tradita de pulſuum indole et propagatione, Phyſicis occaſionem praebere poſſunt in naturam tam ſonorum quam auditus
Tab. VI. accuratius inquirendi. In quo negotio imprimis erit
Fig. 34. perpendendum, ſi pulſus a quacunque cauſa excitatus ſecundum directionem AB in aere propagetur, et nunc quidem ſpatium YX occupet; eius naturam ſemper

ſemper vna quadam linea curua XZY repraeſentari poſſe, quae ſimul ſit ſcala denſitatum et celeritatum etiamſi in pulſu principali hae duae ſcalae maxime fuerint diuerſae; hoc autem de pulſibus ſimplicibus eſt intelligendum, non vero de complexis, qui ex pluribus ſimplicibus a contrariis plagis in eundem locum venientibus coaleſcunt, cuiusmodi ſunt ii, quos in coroll. 2 et 3 deſcripſi. Dum igitur pulſus ille ſimplex in ſpatio XY verſatur, primum eius latitudo XY conſiderari debet intra quam aër de ſtatu aequilibrii eſt deturbatus, extra eam vero vbique quieſcit: quo enim haec latitudo fuerit maior eo plenior quaſi erit ſonus. Deinde curua illa XZY hoc modo aeris agitationem declarat: ea ſcilicet aeris particula quae ante pulſus aduentum erat in S nunc erit translata in s, vt ſit ſpatiolum $Ss =$ areae XSZ ad lineam illam rectam, qua vnitas deſignatur, applicatae: tum vero eius denſitas q ita erit comparata, vt ſit $q = B(1 + SZ)$ denotante B denſitatem naturalem ſeu erit $SZ = l\frac{q}{B}$, motu autem ſimul verſus B feretur, cuius celeritas erit $= SZ\sqrt{\frac{2ga}{b}}$. Eadem autem hic recta pro vnitate aſſumta eſt intelligenda, qua in ſcalis pulſus principalis conſtruendis fuerimus vſi. Quodſi ergo aër hac agitatione ad aurem perferatur, hinc erit colligendum, quomodo auditus organum afficiatur.

Scholion 2.

58. In figura totam curuam XZY ſupra axem deſcriptam exhibeo; id quod euenit, cum in

toto pulſus interuallo denſitas aeris naturali eſt maior , ſimulque ſingulae aeris particulae motu verſus B directo ſint praeditae: quod ſi eueniat poſtrema pulſus particula ex Y in y erit translata vt ſit ſpatiolum $Yy =$ areae X Z Y , hoc ſcilicet caſu vniuerſus aër poſt pulſum ab agitatione praecedente per tantum ſpatiolum ſucceſſiſſe eſt intelligendus. Quod ſi talis ſucceſſio non contingat vt
Tab. VI. Fig. 85. poſtrema pulſus particula Y in loco ſuo naturali perſiſtat, curua X Z Y agitationem exhibens ita erit comparata vt partim ſupra partim infra axem ſit diſpoſita , eiusque area negatiua Y Z' O poſitiuae X Z O fiat aequalis. Tum igitur ſi pars ſuperior antecedat , ad aurem prius perferentur aëris particulae naturali denſiores et in plagam B motae, poſt vero ſequentur particulae rariores , motum retro directum habentes. Ex quo concludendum videtur , eſſentiale ſonorum diſcrimen in hoc eſſe conſtituendum , prout pars ſuperior X Z O vel praecedat vel ſequatur. Si eueniret vt haec curua ter vel quinquies axem X Y ſecaret , inde ſine dubio peculiares affectiones in ſonum redundarent. Semper autem figura huius curuae XZY, maxime eſſentiale diſcrimen ſonorum repraeſentare eſt cenſenda; eo nimirum diſcrimine remoto quod a ſucceſſione plurium pulſuum proficiſcitur. Quanquam autem haec ex ſola conſideratione tuborum aeque amplorum ſunt deducta , tamen multo latius patent , et per ea quae circa tubos inaequaliter amplos perſcrutari licebit confirmabuntur.

CAPVT

CAPVT III.

DE MOTV OSCILLATORIO AERIS IN TVBIS AEQVALITER AMPLIS AD SONOS TIBIARVM EXPLICANDOS.

Problema 78.

59. Si tubus A A.B B vtrinque fuerit apertus, aerque in eo contentus quomodocunque de ſtatu aequilibrii deturbetur, motum oſcillatorium, quo aer in tubo deinceps agitabitur, determinare. Tab. VI. Fig. 86.

Solutio.

Aequilibrii primam perturbationem ad calculum reuocaturi ponamus in loco tubi quocunque S denſitatem eſſe $= Q$ naturali exiſtente $= B$, et celeritatem ſecundum directionem A B ibi eſſe $= \Upsilon$; hinc ſupra axem A B in puncto S erigantur duae applicatae $S Q = l\frac{Q}{B}$ et $S \Upsilon = \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, certa quadam linea recta pro vnitate aſſumta, quo facto punctum Q erit in ſcala denſitatum, Υ vero in ſcala celeritatum. Quia autem tubus in A et B eſt apertus, neceſſe eſt vt ſcala denſitatum in vtroque termino A et B in axem incidat, vti A Q B tota autem ſcala celeritatum ſit E Υ F. Nunc pro motu ſequente definiendo vtramque ſcalam ſecundum praecepta ſupra data vtrinque in infinitum continua-

 ri

ri oportet. Hunc in finem axe vtrinque producto, in eoque abscissis interuallis $B A'$, $A' B'$, $A B''$, $B'' A''$ etc. longitudi tubi aequalibus scala primo densitatum $A Q B$ alternatim infra et supra axem applicetur, scala vero celeritatum ad eandem axis partem repetatur $F E'$, $E' F'$, etc. $E F''$, $F'' E''$ etc. eo ordine quem figurae inspectio ostendit, singulas partes alternatim dextrorsum et sinistrorsum disponendo. His ita praeparatis si ad tempus quodcunque elapsum $= t$ statum aëris qui initio erat in S, cognoscere velimus a puncto S vtrinque in axe abscindamus interualla $S T = S t = t \sqrt{\frac{2 g a}{b}}$, atque in punctis T et t ad vtramque scalam ductis applicatis supra ostendimus fore (13)

densitatem $q = Q(1 - SQ - \frac{1}{2} TN + \frac{1}{2} TM + \frac{1}{2} tn + \frac{1}{2} tm)$
et celeritatem $v = \frac{1}{2}(TN - TM + tn + tm)\sqrt{\frac{2 g a}{b}}$

quo motu aër in S versus B promotus erit interuallo

$$= \tfrac{1}{2} TNtn - \tfrac{1}{2} SQTM + \tfrac{1}{2} SQtm,$$

quod ergo si tota scala celeritatum supra axem sit sita quantumuis magnum euadere potest, id quod euenit, dum aër continuo per tubum $A B$ transfluit, eoque continuo nouus aer intrat, locum egressi occupans; cuius autem status binis prioribus formulis pro q et v datis definitur. Iam obseruo, si tempus t tantum capiatur vt fiat $t \sqrt{\frac{2 g a}{b}} = 2 A B$, tum puncta T et t in s et s' cadere, quae puncta ipsi S sunt analoga, indeque fieri $q = Q$ et

$v =$

$\gamma = S\Upsilon \sqrt{\frac{2ga}{b}} = \Upsilon$ ita vt nunc punctum S ſimulque omnis aër in tubo contentus in eundem ſtatum ſit reductus, in quo initio verſabatur Interea ergo hic aer duas oſcillationes abſoluiſſe eſt cenſendus, ex quo ſingularum oſcillationum tempora erunt $= AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ perſpicuum enim eſt omnia haec tempora inter ſe eſſe aequalia, quia ſiue capiatur $t\sqrt{\frac{2ga}{b}} = 2AB$ ſiue $= 4AB$ ſiue $= 6AB$ ſemper prodit $q = Q$ et $\gamma = \Upsilon$, notandum autem eſt formulam $\sqrt{\frac{2ga}{b}}$ exprimere diſtantiam, per quam ſonus vno minuto propagatur. Ponamus hoc ſpatium breuitatis gratia $= k$ quod eſt circiter 1000 pedum, et quia tempus cuiusque oſcillationis eſt $= \frac{AB}{k}$, vno minuto ſecundo abſoluentur $\frac{k}{AB}$ oſcillationes, cui numero ſonus inde editus proportionalis ſtatuitur.

Coroll 1.

60. Si igitur tubi vtrinque aperti et aequaliter ampli longitudo ſit $AB = d$, aerque in eo contentus de ſtatu aequilibrii deturbetur, motum oſcillatorium recipiet, quo ſingulis minutis ſecundis $\frac{k}{d}$ oſcillationes abſoluentur, denotante k ſpatium, per quod ſonus vno minuto ſecundo propagatur: hincque auditus percipiet ſonum numero $\frac{k}{d}$ repraeſentatum.

Coroll. 2.

61. Quia autem eſt $k = \sqrt{\frac{2ga}{b}}$, vbi a denotare poteſt altitudinem mercurii in barometro, ſi denſi-

densitas mercurii vnitate exhibeatur, et pro b densitas aëris scribatur, inde patet hos sonos partim ab elasticitate aëris pendere partim ab eius densitate: ita vt maior elasticitas sonum acutiorem reddat, maior vero densitas grauiorem.

Coroll 3.

62. Si tubi longitudo sit vnius pedis, ob $k = 1000$ ped. singulis minutis secundis edentur 1000 oscillationes; et a tubo longitudinis 8 pedum 125 oscillationes, cui numero respondet sonus in instrumentis musicis littera C indicari solitus. Hinc pro quouis sono musico longitudo tubi aperti consoni assignari potest.

Scholion 1.

63. Quaecunque ergo agitatio aëri in tubo A B contento fuerit inducta, siue motus impressione siue densitatis immutatione, eiusmodi motus oscillatorius in eo generabitur qualis est inuentus. Interim tamen euenire potest, vt numerus oscillationum vel duplo vel triplo, vel quadruplo vel in ratione quacunque multipla fiat maior; id quod a certa indole primae agitationis pendet. Si enim ambae scalae agitationem determinantes A Q B et E Y F ita formentur, vt similes fiant scalis per duplum spatium A A′ continuatis, vel per triplum A B′, vel per quadruplum A′ A″ etc. motus oscillatorius perinde se habebit ac si tubus A B esset vel duplo vel triplo vel quadruplo breuior, sicque numerus

merus oscillationum vno minuto secundo editarum fiet vel duplo vel triplo vel quadruplo maior; vnde soni continuo acutiores secundum numeros 1, 2, 3, 4 etc. orientur. Cum autem ad hos sonos acutiores singularis proprietas primae agitationis requiratur, ii pro secundariis sunt habendi, dum sonus primarius est is qui formula $\frac{k}{AB}$ indicatur, quia hic nullam huiusmodi conditionem singularem postulat. Existente ergo sono principali $= \frac{k}{AB}$ soni secundarii erunt $\frac{2k}{AB}$, $\frac{3k}{AB}$, $\frac{4k}{AB}$ etc.

Scholion 2.

64. Haec sonorum proprietas tam pulcre conuenit cum iis, quos tibiae inflatae edunt, vt nullum sit dubium, quin soni tibiarum ex hoc principio explicari debeant. Dum enim tibia inflatur, aer in tubo contentus non solum ratione densitatis de statu aequilibrii deturbatur, sed etiam ad motum quendam concitatur quo per tubum A B propellitur; vnde nascetur scala quaedam densitatum A Q B et celeritatum E Y F, cuius applicatae erunt positiuae motum secundum directionem A B indicantes. Ex huiusmodi igitur agitatione eiusmodi motus oscillatorius indeque sonus nascitur, qualem definiuimus; omnesque circumstantiae obseruatae cum nostra Theoria egregie conueniunt; dum etiam eadem tibia omnes illos sonos secundarios praeter primarium edere posse deprehenditur. Imprimis autem hic notandum est, continua inflatione aërem in tubo con-

tentum etiam motu oſcillatorio imbutum continuo ex tubo expelli, ſicque eo facilius propagationem in aëre externo effici; huicque cauſae eſſe tribuendum, quod ceſſante inflatione ſonus ſubito quoque extinguatur cum tamen ſecundum Theoriam motus oſcillatorius in ipſo tubo diu durare deberet.

Scholion 3.

65. Sic quidem intelligitur, cur inflatione ceſſante tibiae nullum amplius ſonum edant, verumtamen in genere, quando idem aer in tubo manet, ratio minus eſt perſpicua, cur motus oſcillatorius in eo mox extinguatur? et cur in caſibus praecedentis capitis neutiquam tot vocis repetitiones percipiantur, quot Theoria indicat, in quo Theoria plurimum ab experientia diſſentit. In praeſente enim caſu elapſo tempore quantumuis magno calculus etiam nunc aeque vehementem aeris agitationem in tubo oſtendit ac ſtatim ab initio, interim tamen experientia nouimus totam agitationem initio productam mox penitus interire, niſi continuo de nouo inſtauretur, vnde certe grauiſſimum argumentum contra noſtram Theoriam peti poſſe videtur. Verum praeter plurima alia motus impedimenta ipſa tubi indoles ad hanc obiectionem diluendum potiſſimum ſpectari debet etiamſi enim tubus ex duriſſima materia ſit confectus tamen ea aëris agitationibus ſemper aliquantillum cedit, cum tamen in calculo latera tubi tanto rigore praedita aſſumantur, vt nullius plane impreſſionis et agitationis ſint capacia;

cui

cui conditioni cum praxis maxime aduerſetur, minime mirum eſt, quando huiusmodi aëris agitationes tam cito pereunt. Pleraeque autem materiae, ex quibus tales tubi confici ſolent, manifeſto eo rigoris gradu deſtituuntur, qui ad perennitatem motus oſcillatorii requireretur, ob eamque ſolam cauſam, etiamſi alia impedimenta non adeſſent, is motus diu durare non poſſet. Interim tamen quo fortior et durior fuerit tubi materia, eo minus experientia a Theoria recedere deprehenditur.

Problema 79.

66. Si tubus aequaliter amplus in altero termino A A fuerit apertus, in altero vero B B clauſus, aerque in eo contentus vtcunque de ſtatu aequilibrii deturbetur, motum oſcillatorium quo aer in tubo deinceps agitabitur, determinare. Tab. VII. Fig. 87.

Solutio.

Primo agitationis momento aëri in tubo circa S verſanti ſit inducta denſitas $= Q$ naturali exiſtente $= B$ ſimulque celeritas $= \Upsilon$ ſecundum directionem A B, inde binae ſcalae ita formentur, vt pro ſcala denſitatum A D ſit applicata $SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$, pro ſcala vero celeritatum E B applicata $S\Upsilon = \Upsilon V\frac{b}{2ga}$, quarum illa ſcala, quia tubus ad A A eſt apertus per punctum A, haec vero quia tubus ad B B eſt clauſus per punctum B tranſire debet. Has iam ſcalas vtrinque ita continuari oportet, vt ſumtis in

 axe

axe A B producto interuallis B A', A' B', B' A' etc. item A B'', B'' A'' etc. ipsi A B aequalibus B D fit diameter scalae densitatum vnde ea per A' ita transibit, vt rami circa A' sint alternatim aequales, ita vt ramus A' D' aequalis sit et similis arcui A' D sed ad axis partes contrarias positus, quod idem de puncto A valet, tum vero rectae B' D' et B'' D'' iterum erunt diametri, punctaque A'' et A''' centra ramorum alternatim aequalium vt puncta A, et A', sicque porro vtrinque in infinitum. Pro scalae celeritatum E B continuatione autem recta A E est eius diameter puncta vero B et B' centra ramorum alternatim aequalium, vnde rectae A' E', A'' E'' iterum erunt diametri sicque ambae scalae facile in infinitum continuantur. Quodsi iam a prima agitatione elapsum sit tempus $= t$, a puncto S vtrinque super axe abscindantur spatia $ST = St = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, ibique ductis ad vtramque scalam applicatis T M, T N, $t\,m$, $t\,n$, quia eae hic contra cadunt ac supra assumsimus, particulae aëris quae initio erat in S nunc erit

densitas $q = Q(1 - SQ + \frac{1}{2}TN - \frac{1}{2}TM - \frac{1}{2}tn - \frac{1}{2}tm)$
et celeritas

$$v = -\tfrac{1}{2}(TN - TM + tn + tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$$

secundum A B, ipsa vero haec particula translata erit in s vt sit spatiolum

$$Ss = \tfrac{1}{2}TNtn - \tfrac{1}{2}SQTM + \tfrac{1}{2}SQtm$$

quatenus

quatenus scilicet hae areae supra axem cadunt, quae partes enim infra axem cadunt negatiuae sunt censendae.

Ponamus autem tantum elapsum esse tempus t, vt sit $ST = St = 2AB$ ideoque $t = 2AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, et manifestum est puncta T et t in interuallis $A'B'$ et $A''B''$ similiter esse sita ac punctum S in interuallo AB, ideoque fore $TM = tm = SQ$ et $TN = tn = S\Upsilon$; vnde post hoc tempus erit densitas in S nempe $q = Q(1 - 2SQ)$ et celeritas $\upsilon = -S\Upsilon\sqrt{\frac{2ga}{b}} = -\Upsilon$. Hinc si initio fuerit in S densitas $Q = B + O$ naturali scilicet B tantillo maior, ob $SQ = \frac{O}{B}$ erit nunc $q = B - O$, tantundem minor naturali, tum vero etiam celeritas υ primae est aequalis sed in plagam oppositam directa; ex quo statu, qui primo directe est contrarius, intelligitur iam aërem vnam oscillationem absoluisse, quia nonnisi post tempus duplo maius in statum initialem reuertetur, ita vt tempus cuiusque oscillationis sit censendum $= 2AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$. Quod autem ad translationis spatiolum Ss attinet, ob

$$TNtn = -AE\Upsilon S - ABE + BS\Upsilon + AE\Upsilon S + AEB - BS\Upsilon = 0$$

$$SQTM = SQDB + ABD - ASQ \text{ et}$$

$$SQtm = ASQ - ABD - SQDB = SQTM$$

vnde patet hanc translationem euanescere. Concludimus ergo si spatium a sono vno minuto secundo percursum ponatur $\sqrt{\frac{2ga}{b}} = k$, tempus vnius oscillationis fore $= \frac{2AB}{k}$, et singulis minutis secundis ab-

 solui

folui ofcillationes $\frac{k}{2AB}$, qui numerus fimul naturam foni hinc editi exhibet.

Coroll. 1.

67 Quando ergo tubus ex altera parte eft claufus fingulae ofcillationes duplo longius durant, quam fi idem tubus vtrinque effet apertus, eodemque propterea tempore dimidium tantum ofcillationum numerum abfoluit. Seu tubus ex altera parte claufus fonum vna octaua edit grauiorem, quam fi effet vtrinque apertus.

Coroll. 2.

68. Soni autem hic aeque atque in tubis vtrinque apertis inter fe tenent rationem reciprocam longitudinum, ita vt quo tubus fuerit longior, eius fonus eo futurus fit grauior; vnde fi tubi longitudo fonum C edentis fit cognita, quae hoc cafu quafi 4 erit pedum, pro omnibus reliquis fonis muficis longitudo facile affignabitur.

Scholion. 1.

69. Hic autem primam agitationem non ita accommodare licet, vt ofcillationes duplo fiant frequentiores, quemadmodnm in cafu tuborum vtrinque apertorum vfu venit, fi enim hic iisdem manentibus fcalis tubo longitudinem duplam A A′ tribuamus eumque in A′ claufum ponamus, figura fcalae celeritatum, quae in punctum A′ incidere deberet

beret huic hypothefi aduerfatur, eademque repugnantia deprehenditur, fi longitudinem tubi quater vel fexies vel octies vel fecundum quemuis numerum parem, multiplicare vellemus, ita vt huiusmodi tubus nullo modo ad fonum, qui ad principalem teneat rationem vt $2:1, 4:1, 6:1$ feu $2i:1$ edendum fit aptus. Secundum numeros impares autem haec reductio egregie fuccedit: concipiamus enim tubum triplo longiorem A B′ in A apertum in B vero claufum, in quo aeri eiusmodi fit agitatio inducta, vt fcala denfitatum fit A D A′ D′ et fcala celeritatum E B E′ B′, quarum forma conditionibus praefcriptis vtique conuenit; et cum continuatio ambarum fcalarum fe quoque habeat vt ante ofcillationes etiam eaedem inde nafcentur, ex quo intelligitur in huiusmodi tubo primam agitationem ita comparatam effe poffe, vt motus ofcillatorius inde genitus prorfus conueniat cum tubo triplo breviori, quod etiam de quintuplo, feptuplo etc. brevioribus valet. Cum igitur tubi A B in altera parte claufi fonus principalis fit $= \frac{k}{2\,AB}$ idem tubus quoque fub certis circumftantiis edere poterit hos fonos $\frac{3k}{2\,AB}$; $\frac{5k}{2\,AB}$; $\frac{7k}{2\,AB}$ etc.

Scholion 2.

70. Cum ex praecedente problematae naturam tibiarum fuperne apertarum tam dilucide explicaverimus, multo minus hic dubitare licet, quin motus ofcillatorius hic definitus rationem contineat tibiarum fuperne

ſuperne clauſarum. Experimenta autem conſulentes omnia egregie cum hac theoria conſentire deprehendimus cum conſtet eandem tibiam, ſi ſuperne claudatur, ſonum vna octaua grauiorem eſſe edituram: deinde etiam iam obſeruatum eſt, ſi huiusmodi tibiae ſuperne clauſae certo modo inflentur, fieri poſſe vt ſonus edatur triplo vel quintuplo altior, nunquam autem duplo altior, qui ſcilicet principali foret vna octaua altior. In huiusmodi autem tibiis iam videmus aerem alternis vicibus in eas intrare iterumque expelli, qui aer expulſus et iam deſcripto motu oſcillatorio praeditus, cum externo aëre hunc motum eo facilius communicabit, in eoque propagabit, interim tamen ob hanc ipſam cauſam diſcrimen aliquod inerit inter ſonos tibiarum apertarum et clauſarum, vnde eos dignoſcere liceat. Deinde etiam mirum non eſt, quod tibiarum ſoni haud parum a materia, ex qua tibiae ſunt confectae pendeant, indeque notam quandam manifeſtam ſecum gerant. Iam enim animaduertimus materiam tuborum motum oſcillatorium plurimum impedire poſſe, et nunc addere licet, ab aëre etiam quendam motum gyratorium cum ipſo tubo communicari a quo deinceps ſonus tibiae viciſſim afficitur. At ſi grauitatem et acumen ſonorum tantum ſpectemus, ſolius longitudinis ratio eſt habenda, neque materia vel forma tubi quicquam eo confert, dummodo ſint tubi aequaliter ampli. Cuiusmodi tamen ſonos ſint editurae tibiae inaequaliter amplae quaeſtio eſt altioris indaginis, cuius ſolutionem vix adhuc ſperare licet.

Pro-

Problema 80.

71. Si tubus aequaliter amplus in vtroque termino AA et BB fuerit clausus, et aer in eo contentus vtcunque de statu aequilibrii deturbetur, motum oscillatorium aëris inde oriundum determinare. Tab. VII. Fig. 88.

Solutio.

Sit densitas aëris initio in tubi loco S inducta $= Q$, naturali existente $= B$ celeritas vero in plagam $AB = \Upsilon$, capiaturque $SQ = l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ et $S\Upsilon = \Upsilon \sqrt{\frac{b}{2ga}}$, vnde vtraque scala densitatum CD, et celeritatum $A\Upsilon B$ construatur, quarum haec necessario per puncta A et B transire debet. Tum secundum praecepta data vtraque scala vtrinque super axe producto per continuam replicationem, vti ex figura videre licet continuetur. Quo facto si post tempus quodcunque elapsum $= t$ a puncto S vtrinque capiantur interualla $ST = St = t\sqrt{\frac{2ga}{b}}$, ex vtriusque scalae applicatis in punctis T et t definitur nunc aëris, qui initio fuerat ad S

I. densitas $q = Q(1 - SQ - \frac{1}{2}TN + \frac{1}{2}TM + \frac{1}{2}tn + \frac{1}{2}tm)$

II. celeritas $\Upsilon = \frac{1}{2}(TN - TM + tn + tm)\sqrt{\frac{2ga}{b}}$

ac praeterea spatium, quo is versus B erit promotus nempe

III. spatiolum $S\sigma = \frac{1}{2}TNtn - \frac{1}{2}SQTM + \frac{1}{2}SQtm$

hincque ergo status aëris in tubo ad quoduis tempus t definietur. Ponamus nunc tempus elapsum

 esse

esse $t = 2\,AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$, vt puncta T et t cadant in S′ et S″ puncta ipsi S homologa, eritque tum in loco S

I. densitas $q = Q(1 - SQ - \tfrac{1}{2}S\Upsilon + \tfrac{1}{2}SQ + \tfrac{1}{2}S\Upsilon + \tfrac{1}{2}SQ) = Q$

II. celeritas $\vartheta = \tfrac{1}{2}(S\Upsilon - SQ + S\Upsilon + SQ)\sqrt{\frac{2ga}{b}} = S\Upsilon\sqrt{\frac{2ga}{b}} = \Upsilon$

III. spatiolum $S\sigma = 0$

ita vt nunc aër in ipsum statum primitiuum sit reductus, cum elapso tantum tempore dimidio $t = AB\sqrt{\frac{b}{2ga}}$ statum fere contrarium habuisset. Cum igitur illo tempore duas oscillationes absoluisse sit censendus, tempus singularum oscillationum erit $= AB\sqrt{\frac{b}{2ga}} = \frac{AB}{k}$, denotante $k = \sqrt{\frac{2ga}{b}}$ spatium, per quod aër vno minuto secundo propagatur; vnde numerus oscillationum singulis minutis secundis editarum erit $= \frac{k}{AB}$, qui simul pro mensura soni hoc motu producti habetur.

Coroll. 1.

72. Si tubus esset duplo longior $= AA'$ iisdem manentibus scalis, quippe quae huic tubo vtrinque clauso conuenire possunt, motus oscillatorius idem oriretur, vnde fieri potest, vt tubus vtrinque clausus eundem edat sonum, ac tubus duplo breuior quod idem valet si tubus triplo, vel quadruplo etc. longior acciperetur.

Coroll.

Coroll. 2.

73. Cum igitur fonus principalis fit $= \frac{k}{AB}$, idem tubus vtrinque claufus, fi prima agitatio certo quodam modo temperetur, hos quoque fonos $\frac{2k}{AB}$, $\frac{3k}{AB}$, $\frac{4k}{AB}$ etc. edere poterit: omninoque horum tuborum eadem erit ratio ac tuborum vtrinque apertorum, dum contra ii, qui ex altera parte funt aperti, ex altera vero claufi fonos vna octaua grauiores edunt.

Scholion 1.

74. Quemadmodum autem aeri huiusmodi tubo inclufo agitatio induci poffit, haud liquet vnde etiam nulla exempla fonorum hac ratione genitorum proferre licet: quin etiam quamuis ibi quaedam agitatio excitaretur, tamen quia tubus vndique eft claufus, motus ofcillatorius neque cum aere externo communicari neque fonus exaudiri poffet. Si enim tubi latera fimul contremifcant, eorum fonus proprius potius quam aeris inclufi per aerem externum propagabitur: ftatim autem atque ipfa tubi materia motum vibratorium concipit, aeris inclufi motus maxime turbatur, neque amplius leges per calculum inuentas fequitur: fi enim aeri vbi eft magis compreffus ipfa tubi latera aliquantillum cedant, eo debilius inde aer vicinus concitabitur, haecque praecipua caufa effe videtur, cur talis aeris motus tam cito extinguatur, cum tamen fecundum Theoriam

 peren-

perennis esse deberet; quod non solum de his tubis vtrinque clausis sed etiam reliquis omnibus est intelligendum. Quomodocunque autem haec motus debilitatio ob tubi materiam eueniat inde tamen duratio singularum oscillationum non afficitur, quarum tempora cum calculo semper consentire deprehenduntur etsi ob illam causam motus oscillationum continuo debilitetur, et mox prorsus extinguatur.

Scholion 2.

75. Quanquam autem in his tubis singulae oscillationes certis temporibus absoluuntur, atque in eodem tubo soni ratione grauitatis et acuminis discrepare non possunt tamen in iis ratione reliquarum qualitatum maximum discrimen inesse potest, a diversa indole pulsuum in aere excitatorum oriundum. Cum enim aer in huiusmodi tubis infinitis modis de statu aequilibrii deturbari possit, dum vel sola densitas in singulis aëris elementis alteratur, vel iis tantum motus quidam inducitur, vel vtrumque simul euenit, hinc maxima diuersitas in motu singularum oscillationum oriri poterit, vnde mirum videbitur quod eadem tibia inflata sonum semper eiusdem indolis edat; non loquor autem hic de grauitate, quae nullam variationem patitur, sed de ea qualitate, qua sonos tibiarum a sonis cordarum aliorumque instrumentorum distinguimus. Quia autem tibiae inflatione ad sonos edendos excitantur, facile intelligitur, hinc ambas scalas densitatum et celeritatum non in infinitum variari posse, sed semper ab aëre inflato

tam

tam certam condenſationem quam certum motum produci debere, ita vt hic non amplius infinita varietas locum inuenire queat: huicque cauſae qualitas illa qua ſoni tibiarum a reliquis inſtrumentis diſcrepant, ſine dubio eſt tribuenda. Vnde ſi forte quocunque modo aeri in tubis vtrinque clauſis agitatio induci poſſet, ſonus quidem ratione grauitatis et acuminis calculo foret conſentaneus, ſed a ſono tibiarum maxime differre poſſet.

CAPVT IV.

DE AGITATIONE MINIMA AERIS IN TVBIS INAEQVALITER AMPLIS.

Problema 81.

76. Dum aer quomodocunque in tubo inaequaliter amplo mouetur, eius motum ad formulas analyticas reuocare, quibus eius determinatio ad quoduis tempus contineatur.

Solutio.

Initio ſtatum aeris tanquam cognitum ſpectamus; tum igitur pro loco tubi quocunque S vocata diſtantia $AS = S$ ponamus fuiſſe denſitatem $= Q$, et celeritatem ſecundum tubi directionem $AB = \Upsilon$, ita vt Q et Υ sint functiones datae quantitatis S; cuius etiam functio erit amplitudo tubi in hoc loco, quae sit $= \Omega$, perinde atque eius altitudo super plano quodam horizontali fixo, quae sit $= Z$, siquidem et grauitatis rationem in motu aeris habere velimus. Iam elapso tempore $= t$ illam aeris particulam ponamus peruenisse in s, vt sit spatium $A s = s$, et tubi amplitudo $= \omega$, eiusque altitudo super illo plano horizontali $= z$, quae quantitates ω et z sunt functiones datae ipsius s, ipsa vero haec quantitas s est functio duarum variabilium S et t; nunc vero in hoc loco s sit aeris densitas $= q$, celeritas versus B $= \Upsilon$, quae est $= (\frac{d s}{d t})$, et pressio $= p$, quam per densitatem q ita determinari nouimus, vt sit $p = \frac{a q}{b}$; densitas q est quoque functio binarum variabilium S et t. His positis principia supra stabilita pro hoc casu praebent has duas aequationes:

$$q \omega (\frac{d s}{d S}) = Q \Omega \text{ et } \frac{2 g d p}{q} = - 2 g d z - d s (\frac{d d s}{d t^2}) = \frac{2 g a d q}{b q}$$

in qua posteriori tempus t vt constans spectatur, quae propterea ita exhiberi potest

$$\frac{2 g a}{b q} (\frac{d q}{d S}) + 2 g (\frac{d z}{d S}) + (\frac{d s}{d S}) (\frac{d d s}{d t^2}) = 0.$$

Ex priori autem habemus $l q = l Q + l \Omega - l \omega - l (\frac{d s}{d S})$ vnde solam S variabilem sumendo colligimus:

$$\frac{1}{q} (\frac{d q}{d S}) = \frac{d Q}{Q d S} + \frac{d \Omega}{\Omega d S} - \frac{1}{\omega} (\frac{d \omega}{d S}) - \frac{(\frac{d d s}{d S^2})}{(\frac{d s}{d S})}.$$

Quo

Quo valore fubftituto aequationem habebimus a q liberam hanc :

$$\frac{2ga}{b}\left(\frac{dQ}{Q\,dS}+\frac{d\Omega}{\Omega\,dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)-\frac{2ga}{b\omega}\left(\frac{d\omega}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)-\frac{2ga}{b}\left(\frac{dds}{dS^2}\right)$$
$$+2g\left(\frac{dz}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)+\left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=0$$

vbi Q et Ω funt functiones datae ipfius S, quantitates vero ω et z functiones ipfius s, quae ipfa eft functio binarum variabilium S et t, eiusque natura hinc determinari debet. Quodfi ergo ponatur $d\omega = u\,ds$ et $dz = r\,ds$, vt u et r fint functiones ipfius s datae, aequatio noftra hanc induet formam :

$$\frac{2ga}{b}\left(\frac{dQ}{Q\,dS}+\frac{d\Omega}{\Omega\,dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)+2g\left(r-\frac{au}{b\omega}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)^2-\frac{2ga}{b}\left(\frac{dds}{dS^2}\right)$$
$$+\left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=0$$

vnde qualis s fit functio ipfarum S et s inueftigari oportet, ea autem inuenta ftatim cognofcitur celeritas $\upsilon = \left(\frac{ds}{dt}\right)$, tum vero denfitas

$$q=\frac{Q\,\Omega}{\omega\left(\frac{ds}{dS}\right)},$$

fimulque preffio $p=\frac{aq}{b}$.

Scholion.

77. Ex hac aequatione generali, quae omnes motus, qui in aerem in tubis quibuscunque cadere poffunt, in fe complectitur, fatis liquet quantopere etiamnunc ab eius folutione perfecta fimus remoti, idque ob folum Analyfeos defectum. Cum enim functio s quae quaeritur praeter formulas differentia-

rentiales etiam in litteris ω, u et r inuoluatur, haec tanta complexio in caussa est, quod generalem nostri problematis solutionem nullo modo sperare queamus. Quare vt supra iam obseruauimus, omnia quae hic praestare licet, ad solos motus minimos restringuntur, cuiusmodi sunt generatio et propagatio soni, dum interea casus, qui alias simplicissimi videantur, veluti si aer in tubo comprimitur vel relaxatur, prorsus intactos relinquere cogimur. Mirum igitur est quod ii casus, qui primo intuitu maxime ardui sunt visi, et ab Auctoribus vix suscepti, nunc soli nostrae inuestigationi permittuntur, reliquis omnibus exclusis. Quocirca aequationem generalem hic inuentam ad eum casum accommodabo, quo agitatio aeris vt minima spectari potest.

Problema 82.

78. Si aeris agitatio in tubo inaequaliter amplo excitata fuerit quam minima, aequationem inuenire qua huius motus continuatio continetur.

Solutio.

Maneant omnes denominationes, vti in praecedente problemate sunt constitutae, et quia ibi erat $u = \frac{d\omega}{ds}$ et $r = \frac{dz}{ds}$ restituantur hi valores, insuperque breuitatis gratia ponatur $\frac{2ga}{b} = cc$ vt c denotet spatium, per quod sonus vno minuto secundo propagatur; quo facto aequatio inuenta hanc induet formam:

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \left(\frac{dds}{dS^2}\right) + \frac{d\omega}{\omega dS}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2 - \frac{d\Omega}{\omega dS}\left(\frac{ds}{dS}\right) - \frac{b\,dz}{a\,dS}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2 - \frac{dQ}{Q\,dS}\left(\frac{ds}{dS}\right)$$

qua

qua resoluta porro habebitur pro tempore elapso $= t$:

$$\text{densitas } q = \frac{Q\Omega}{\omega\left(\frac{ds}{dS}\right)}; \text{ celeritas } \upsilon = \left(\frac{ds}{dt}\right) \text{ et pressio } p = \frac{aq}{b}.$$

Iam ponamus $s = S + v$ vt v sit eiusmodi functio ipsarum S et t quae euanescat posito tempore $t = o$, quandoquidem tum fieri debet $s = S$; $q = Q$; $\omega = \Omega$ et $\upsilon = \Upsilon$, hicque spectamus v vt quantitatem valde paruam prae S, vel saltem talem vt $\left(\frac{dv}{dS}\right)$ prae vnitate negligi queat. Cum igitur sit

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right); \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dt^2}\right); \left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dv}{dS}\right) \text{ et } \left(\frac{dds}{dS^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dS^2}\right);$$

vbi in nostra aequatione occurrit $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ eius loco vnitatem scribere licet praeterquam in duobus terminis

$$\frac{d\omega}{\omega ds}\left(\frac{ds}{dS}\right)^2 - \frac{d\Omega}{\Omega dS}\left(\frac{ds}{dS}\right),$$

quia hic ob differentiam inter s et S minimam fere est

$$\frac{d\omega}{\omega ds} = \frac{d\Omega}{\Omega dS},$$

ideoque prae differentia non amplius particula $\left(\frac{dv}{dS}\right)$ vt euanescens spectari potest. Qua circumstantia obseruata habebimus

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dS^2}\right) + \frac{d\omega}{\omega ds} - \frac{d\Omega}{\Omega dS} + \frac{d\Omega}{\Omega dS}\left(\frac{dv}{dS}\right) - \frac{bdz}{ads} - \frac{dQ}{Qds}$$

vbi cum puncta S et s sibi sint proxima, loco $\frac{dz}{ds}$ scribere licet $\frac{dZ}{dS}$ functionem ipsius S tantum. Deinde ob eandem rationem quia formula $\frac{d\omega}{\omega ds}$ nasci-

 tur

tur ex formula $\frac{d\Omega}{\Omega ds}$ si hic loco S scribatur $S + v$, erit

$$\frac{d\omega}{\omega ds} = \frac{d\Omega}{\Omega ds} + \frac{v}{ds} d. \frac{d\Omega}{\Omega ds}.$$

Ponamus ergo breuitatis gratia $\frac{d\Omega}{\Omega ds} = U$, quae erit functio data ipsius S, vnde fit amplitudo $\Omega = Ae^{\int U ds}$; fietque nostra aequatio:

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{ds^2}\right) + U\left(\frac{dv}{ds}\right) + \frac{v\, dU}{ds} - \frac{b\, dZ}{a\, ds} - \frac{dQ}{Q\, ds}$$

qua resoluta erit pro motus determinatione:

$$q = \frac{Q\Omega}{\omega\left(1+\left(\frac{dv}{ds}\right)\right)} = \frac{Q}{(1+Uv)\left(1+\left(\frac{dv}{ds}\right)\right)} = Q\left(1-Uv-\left(\frac{dv}{ds}\right)\right)$$

quia est $\omega = \Omega + \frac{v\, d\Omega}{ds} = Ae^{\int U ds}(1 + Uv)$

deinde celeritas $u = \left(\frac{dv}{dt}\right)$ et pressio $p = \frac{aq}{q}$.

Coroll. 1.

79. Totum ergo negotium huc redit vt ex aequatione differentiali secundi gradus inuenta inuestigetur, qualis functio sit quantitas v binarum variabilium S et t, vbi quidem obseruo binos terminos postremos $-\frac{b\, dZ}{a\, ds} - \frac{dQ}{Q\, ds}$ resolutionem non impedire quoniam functionem solius variabilis S continent.

Coroll. 2.

80. Conditiones autem, sub quibus aequationis inuentae integrale completum eruere licet ope methodorum quidem adhuc cognitarum, ab indole functionis U, qua ea per variabilem S definitur pendent.

Pro

Pro eiusque natura fieri potest, vt integratio modo succedat modo calculi vires superet.

Scholion.

81. Hic igitur confugiendum est ad ea analyseos sublimioris, quae circa functiones duarum variabilium versatur artificia, quibus huiusmodi aequationes

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dS^2}\right) + U\left(\frac{dv}{dS}\right) + vT$$

tractare docui; vbi in eos casus functionum U et T, quae solam variabilem S inuoluere assumuntur, inquiri oportet quibus integrale completum exhibere licet. Ante omnia autem hic obseruari oportet, quoties haec integratio succedit per methodos quidem cognitas, integrale semper huiusmodi forma exprimi vt sit

$$v = Lf:(S \pm ct) + Mf':(S \pm ct) + Nf'':(S \pm ct) \text{ etc.}$$

vbi circa haec functionum signa tenendum est; si fuerit

$$f:u = V \text{ esse } f':u = \frac{dV}{du};\ f'':u = \frac{ddV}{du^2}, \text{ etc.}$$

Hinc patet infinitas solutiones locum habere posse, prout huius formae progressio vlterius continuetur. Primam ergo solutionem seu primos integrabilitatis casus ex solo primo termino huius progressionis inuestigabo, deinde duos eius terminos in subsidium vocando secundos integrabilitatis casus eliciam, sicque porro ad altiores ascendere licebit, plures continuo terminos accipiendo.

Problema 83.

82. Inuenire rationem amplitudinis tubi, in quo aer minimas peragit agitationes, vt motus determinatio per primam soluendi methodum succedat.

Solutio.

Cum posita tubi amplitudine $\Omega = A\,e^{\int U\,dS}$ haec aequatio integrari debeat:

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dS^2}\right) + U\left(\frac{dv}{dS}\right) + \frac{v\,dU}{dS} - \frac{b\,dZ}{a\,dS} - \frac{dQ}{Q\,dS}$$

statuamus $v = L f:(S + ct) + O$ vbi L et O tantum sint functiones ipsius S, et facta substitutione obtinebimus:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ddv}{dS^2}\right) &= L f'':(S+ct) + \frac{2\,dL}{dS} f':(S+ct) + \frac{ddL}{dS^2} f:(S+ct) + \frac{ddO}{dS^2}\\
U\left(\frac{dv}{dS}\right) &= \qquad UL f':(S+ct) + \frac{U\,dL}{dS} f:(S+ct) + \frac{U\,dO}{dS}\\
\frac{v\,dU}{dS} &= \qquad + \frac{L\,dU}{dS} f:(S+ct) + \frac{O\,dU}{dS}\\
-\frac{b\,dZ}{a\,dS} - \frac{dQ}{Q\,dS} & \qquad\qquad - \frac{b\,dZ}{a\,dS} - \frac{dQ}{Q\,dS}
\end{aligned}$$

quae iunctim sumta ipsi $\frac{1}{cc}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = L f'':(S + ct)$ aequari oportet: vnde nascuntur hae aequationes:

I. $\frac{2\,dL}{dS} + LU = 0$

II. $\frac{ddL}{dS^2} + \frac{U\,dL + L\,dU}{dS} = 0$

III. $\frac{ddO}{dS^2} + \frac{U\,dO + O\,dU}{dS} - \frac{b\,dZ}{a\,dS} - \frac{dQ}{Q\,dS} = 0$

quarum secunda integrata dat $\frac{dL}{dS} + LU = C$, quae cum prima collata praebet $-\frac{dL}{dS} = C$, hincque $L = \alpha S + \mathfrak{C}$ et $U = \frac{-2\alpha}{\alpha S + \mathfrak{C}} = \frac{d\Omega}{\Omega\,dS}$. Quare cum

sit

fit $\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{-2\alpha\, dS}{\alpha S + \beta}$ fiet amplitudo tubi $\Omega = \frac{ff}{(\alpha S + \beta)^2}$, solutionem ope primae methodi admittens. Tertia vero aequatio integrata dat:

$$\frac{dO}{dS} + UO - \frac{b}{a}Z - lQ = C \text{ seu ob } U = \frac{-2\alpha}{\alpha S + \beta}$$

$$dO - \frac{2\alpha O\, dS}{\alpha S + \beta} - \frac{b}{a} Z\, dS - dS\, lQ = C\, dS$$

quae per $(\alpha S + \beta)^2$ diuisa et integrata producit

$$\frac{O}{(\alpha S + \beta)^2} = \int \frac{dS\left(\frac{b}{a}Z + lQ + C\right)}{(\alpha S + \beta)^2}.$$

Quare si amplitudo tubi ita sit variabilis, vt longitudini $AS = S$ respondeat amplitudo $\Omega = \frac{ff}{(\alpha S + \beta)^2}$, tum aequationis motum determinantis integrale completum erit

$$v = (\alpha S + \beta)^2 \int \frac{dS(C + \frac{b}{a}Z + lQ)}{(\alpha S + \beta)^2} + (\alpha S + \beta)\Gamma : (S + ct)$$
$$+ (\alpha S + \beta)\Delta : (S - ct)$$

quandoquidem functionem assumtam $f : (S + ct)$ geminare licet introducendo tam $-c$ quam $+c$.

Coroll. 1.

83. In hac solutione statim continetur casus tuborum aeque amplorum constantes ita definiendo vt sit $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Haec autem solutio multo latius patet, cum eius ope agitationes aeris in tubis eiusmodi inaequaliter amplis quoque definiri queant, quorum amplitudo in hac formula continetur $\Omega = \frac{ff}{(\alpha S + \beta)^2}$.

Coroll. 2.

84. Inuenta autem hac functione v elapso tempore t aer qui initio erat ad S translatus erit per interuallum $Ss = v$ tum vero eius densitas ob $U = \frac{-2\alpha}{\alpha S + \beta}$ erit

$$q = Q\left(+\frac{2\alpha v}{\alpha S + \beta} - \left(\frac{dv}{dS}\right)\right) \text{ et celeritas } u = \left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Coroll. 3.

85. Cum autem differentiando sit:

$$\left(\frac{dv}{dS}\right) = 2\alpha(\alpha S+\beta)\int\frac{dS(C+\frac{b}{a}Z+lQ)}{(\alpha S+\beta)^2} + C+\frac{b}{a}Z+lQ+\alpha\Gamma:(S+ct)+\alpha\Delta:(S-ct)$$
$$+(\alpha S+\beta)\Gamma':(S+ct)+(\alpha S+\beta)\Delta':(S-ct)$$

habebitur pro densitate:

$$\frac{q}{Q} = 1 - C - \frac{b}{a}Z - lQ + \alpha\Gamma:(S+ct) + \alpha\Delta:(S-ct)$$
$$-(\alpha S+\beta)\Gamma':(S+ct) - (\alpha S+\beta)\Delta':(S-ct)$$

et pro celeritate:

$$u = c(\alpha S+\beta)\Gamma':(S+ct) - c(\alpha S+\beta)\Delta':(S-et).$$

Scholion.

85. Si tubos, ad quos haec solutio est accommodata, rotundos statuamus, vt omnes sectiones ad eius directionem normaliter factae sint circuli, eorum figura est conoidica hyperbolica conuersione hyper-
Tab. VII. bolae aequilaterae KCM circa alteram assymtotam
Fig. 80. IB nata. Cum enim in hac hyperbola sit SM. $IS = aa$, erit amplitudo in $S = \pi SM^2 = \frac{\pi aa}{IS}$, sumto

ſumto ergo interuallo $IA = \frac{\mathfrak{C}}{\alpha}$, et poſito $AS = S$ ob $IS = \frac{\alpha S + \mathfrak{C}}{\alpha}$, fiet amplitudo $\Omega = \frac{\pi \alpha \alpha a a}{(\alpha S + \mathfrak{C})^2}$, ideoque $ff = \pi \alpha \alpha a a$. Quoties ergo tubus habuerit huiusmodi figuram conoidicam hyperbolicam, aeris agitationes in huiusmodi tubis, dummodo ſint minimae, perinde definiri poterunt, atque in tubis aequaliter amplis. Interim tamen ipſa motus determinatio aliquanto erit operoſior. Ceterum hic obſeruari conuenit aeris grauitatem, quam in ſuperioribus capitibus neglexímus, inueſtigationem plane non turbare: id quod etiam de aliis viribus, quae forte aerem ſollicitarent eſt tenendum.

Problema 84.

86. Inueſtigare rationem qua tubi amplitudo debet eſſe comparata vt aequationis differentiodifferentialis integrale completum per ſecundam formam exhiberi poſſit.

Solutio.

Hic ſcilicet quaeritur indoles functionis U a ſola variabili S pendentis, vt aequationis noſtrae integrale completum huiusmodi forma exprimi queat:

$$v = O + Mf' : (S + ct) + Lf : (S + ct)$$

vbi L, M, O ſint functiones ſolius variabilis S. Faciamus ergo ſubſtitutionem in noſtra aequatione, ac reperiemus:

o =

$$
\begin{array}{llll}
0=\frac{ddO}{dS^2} & +Mf''':(S+ct) & +\frac{2dM}{dS}f'':(S+ct) & +\frac{ddM}{dS^2}f':(S+ct) \\
+\frac{UdO}{dS} & +L & +\frac{2dL}{dS} & +\frac{ddL}{dS^2}f:(S+ct) \\
+\frac{OdU}{dS} & +UM & +\frac{UdM}{dS} & \\
-\frac{bdZ}{adS} & & +UL & +\frac{UdL}{dS} \\
-\frac{dQ}{QdS} & -Mf''':(S+ct) & -Lf'':(S+ct)+\frac{MdU}{dS} & +\frac{LdU}{dS}
\end{array}
$$

cuius ſingula membra, quatenus diuerſas functiones complectuntur ſeorſim ad nihilum redigi oportet: ex quo ſequentes quatuor aequationes naſcuntur.

I. $\frac{2dM}{dS}+UM=0$

II. $\frac{ddM}{dS^2}+\frac{2dL}{dS}+\frac{UdM+MdU}{dS}+UL=0$

III. $\frac{ddL}{dS^2}+\frac{UdL+LdU}{dS}=0$

IV. $\frac{ddO}{dS}+UdO+OdU-\frac{b}{a}dZ-\frac{dQ}{Q}=0$

Tertia integrata dat $\frac{dL}{dS}+UL=A$, quae cum prima combinata eliminando U praebet $MdL-2LdM=AMdS$, vnde colligitur $L=AMM\int\frac{dS}{MM}$, et $U=-\frac{2dM}{MdS}$. His valoribus in ſecunda aequatione ſubſtitutis peruenitur ad hanc aequationem,

$$-\frac{ddM}{dS^2}+2A+\frac{2AMdM}{dS}\int\frac{dS}{MM}=0$$

Ad hanc reſoluendam ſit $\int\frac{dS}{MM}=R$, hincque $dS=MMdR$, et quia eſt $\frac{ddM}{dS}=d.\frac{dM}{dS}=d.\frac{dM}{MMdR}$, illa aequatio per dS multiplicata praebet

$$-d.\frac{dM}{MMdR}+2AMMdR+2AMRdM=0$$

qua

qua resoluta habebitur $dS = MM\,dR$; $L = AMMR$ et $U = -\frac{2\,dM}{M^2\,dR}$. Verum ista aequatio per R multiplicata integrabilis redditur cum sit

$$\int R\,d\,\frac{dM}{MM\,dR} = \frac{R\,dM}{MM\,dR} + \frac{1}{M},$$ ideoque habebimus:

$$\frac{R\,dM}{MM\,dR} + \frac{1}{M} = AMMRR + B = \frac{M\,dR + R\,dM}{MM\,dR}$$

Ponatur denique $MR = x$, seu $M = \frac{x}{R}$ erit $Axx + B = \frac{RR\,dx}{xx\,dR}$ hincque $\frac{dR}{RR} = \frac{dx}{xx(Axx+B)}$ seu $\frac{B\,dR}{RR} = \frac{dx}{xx} - \frac{A\,dx}{Axx+B}$; ideoque $\frac{B}{R} = \frac{1}{x} + \int\frac{A\,dx}{Axx+B}$.

vnde R datur per x, tum ob $M = \frac{x}{R}$ reliquae quantitates omnes per x dabuntur: fit autem $dS = \frac{xx\,dR}{RR} = \frac{dx}{Axx+B}$ et $U\,dS = \frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{2\,dM}{M}$ ita vt fit amplitudo $\Omega = \frac{C}{MM} = \frac{CRR}{xx}$. Euoluamus hinc casus quibus amplitudo Ω per variabilem S algebraice definitur, quod fit si constans $B = 0$, tum enim erit $\frac{dR}{RR} = \frac{dx}{Ax^4}$, ideoque $\frac{1}{R} = \frac{1+Dx^3}{3Ax^3}$, et $R = \frac{3Ax^3}{1+Dx^3}$, atque $M = \frac{1+Dx^3}{3Axx}$. Cum autem sit $dS = \frac{dx}{Axx}$ erit $\frac{1}{x} = -AS - E$, seu $x = -\frac{1}{AS+E}$ hincque

$$M = \frac{(AS+E)^3 - D}{3A(AS+E)}, \text{ et } R = -\frac{3A}{(AS+E)^3 - D};$$

vnde porro colligimus

$$\Omega = \frac{9AAC(AS+E)^2}{((AS+E)^3 - D)^2}, \text{ et } L = -\frac{(AS+E)^3 + D}{3(AS+E)^2}$$

Denique pro quantitate O obtinemus:

$$\frac{dO}{dS} + UO - \frac{b}{a}Z - lQ + lF = 0 \text{ seu}$$

$$dO + \frac{O\,d\Omega}{\Omega} - \frac{b}{a}Z\,dS - dS\,l\frac{Q}{F} = 0. \text{ Ergo}$$

$$O = \frac{1}{\Omega}\int\Omega\,dS\left(\frac{b}{a}Z + l\frac{Q}{F}\right)$$

 Im-

Immutemus parumper constantes, et quando amplitudo tubi Ω pro abscissa $AS = S$ ita fuerit comparata, vt sit $\Omega = \frac{ff(\alpha S + \beta)^2}{((\alpha S + \beta)^3 - \gamma)^2}$, tum sumtis

$$O = \tfrac{1}{\Omega} \int \Omega \, dS \left(\tfrac{b}{a} Z + l \tfrac{Q}{B}\right)$$

$$M = \frac{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma}{3\alpha(\alpha S + \beta)} \text{ et } L = -\frac{(\alpha S + \beta)^3 + \gamma}{3(\alpha S + \beta)^2}$$

erit nostrae aequationis integrale completum,

$$v = O + M\Gamma' : (S + ct) + L\Gamma : (S + ct)$$
$$+ M\Delta' : (S - ct) + L\Delta : (S - ct)$$

vnde porro definitur densitas $q = Q\left(1 - \frac{v\,d\Omega}{\Omega\,dS} - \left(\frac{dv}{dS}\right)\right)$ et celeritas $u = \left(\frac{dv}{dt}\right)$.

Coroll. 1.

87. Hic primum obseruandum est quantitates pro L et M inuentas per quantitatem quamcunque constantem multiplicari posse, quam functiones indefinitae complecti sunt censendae, hinc sumi poterit

$$M = \frac{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma}{\alpha\delta(\alpha S + \beta)} \text{ et } L = -\frac{(\alpha S + \beta)^3 + \gamma}{\delta(\alpha S + \beta)^2}$$

quod tenendum est si forte illi valores fiant infiniti.

Coroll. 2.

88. Si enim capiatur $\gamma = \infty$, et $f = n\gamma$, vt amplitudo fiat $\Omega = nn(\alpha S + \beta)^2$, sumatur quoque $\delta = \gamma$, eritque

$$M = \frac{-1}{\alpha(\alpha S + \beta)} \text{ et } L = \frac{1}{(\alpha S + \beta)^2}.$$

Hoc

Hoc autem casu tubi habebuntur conici vel pyramidici, in quibus ergo pariter agitationes aeris minimas definire licebit.

Coroll. 3.

89. Si sumatur $\gamma = o$, tubus ita erit formatus vt sit $\Omega = \frac{ff}{(\alpha S + \beta)^4}$ seu amplitudines erunt reciproce vt biquadrata abscissarum: tum autem fit

$$M = \tfrac{1}{\alpha}(\alpha S + \beta)^2 \text{ et } L = -(\alpha S + \beta).$$

Coroll. 4.

90. In genere autem haec solutio ad eiusmodi tubos conoidicos applicari potest qui oriuntur ex conversione huiusmodi curuae hyperbolicae circa axem IB, pro qua posita abscissa $AS = x$, et applicata $SM = y$, fit $y = \frac{a^3 x}{x^3 + b^3}$: quae curua axem in A secans duas habet asymtotas GH et KL inter se normales. Tab. VII. Fig. 90.

Scholion 1.

91. Si etiam figuras tubi transcendentes cognoscere velimus faciamus $B = Amm$ et $A = \frac{\alpha}{m}$ et aequatio $dS = \frac{dx}{Axx + B}$ seu $\alpha dS = \frac{m\,dx}{xx + mm}$ dabit $x = m$ tang. $(\alpha S + \beta)$, vnde porro colligitur $\frac{\alpha mm}{R} = \alpha S + \gamma + \text{cot.}(\alpha S + \beta)$ seu $R = \frac{\alpha mm}{\alpha S + \gamma + \text{cot.}(\alpha S + \beta)}$ hincque

$$M = \frac{1 + (\alpha S + \gamma)\,\text{tang.}(\alpha S + \beta)}{\alpha m} \text{ et } L = \frac{1 + (\alpha S + \gamma)\,\text{tang.}(\alpha S + \beta)}{m\,\text{cot.}(\alpha S + \beta)}$$

Deinde fit amplitudo $\Omega = \frac{C}{(1+(\alpha S+\gamma)\,tang.(\alpha S+\beta))^2}$,
quantitas vero O hinc definitur vt ante

$$O = \tfrac{1}{\Omega}\int \Omega\, dS\,(\tfrac{b}{a} Z + l\tfrac{Q}{B}).$$

Ex his autem formis colligimus methodum aequationes primum erutas multo facilius resoluendi. Cum enim prima det $U = -\frac{2\,dM}{M\,dS}$, tertia vero integrata $\frac{dL}{dS} + UL = A$, erit $dL - \frac{2\,L\,dM}{M} = A\,dS$, ponamus $L = My$, fietque $M\,dy - y\,dM = A\,dS$. Nunc secunda quod fieri potest integrata praebet

$$\frac{dM}{dS} + 2L + UM + \int UL\,dS = 0$$

quae ob

$$UM = -\frac{2\,dM}{dS} \text{ et } \int UL\,dS = -2\int \frac{L\,dM}{M} = -2\int y\,dM$$

transit in:

$$\frac{dM}{dS} + 2My - \frac{2\,dM}{dS} - 2\int y\,dM = 0,$$

quae contrahitur in hanc $2\int M\,dy - \frac{dM}{dS} = 0$. Ex illa autem fit

$$2M\,dy = A\,dS + y\,dM + M\,dy \text{ ita vt fit}$$
$$2\int M\,dy = AS + My + B = \frac{dM}{dS}$$

vnde cum parum colligere liceat, consideremus has duas aequationes:

$$M\,dy - y\,dM = A\,dS \text{ et } 2\int M\,dy = \frac{dM}{dS}$$

quas ambas differentiemus sumto elemento dS constante

$$M\,ddy - y\,ddM = 0 \text{ et } 2M\,dy = \frac{ddM}{dS}$$

vnde

vnde fit

$$\frac{d\, d\, M}{M} = \frac{d\, d\, y}{y} = 2\, dy\, dS \text{ seu } d\, dy = 2\, y\, dy\, dS$$

cuius integrale est $dy = dS\,(yy + mm)$, hincque porro Ang. tang. $\frac{y}{m} = mS + n$ et conuertendo $y = m$ tang. $(mS + n)$. Iam ex aequatione

$$\frac{M\, dy - y\, dM}{yy} = \frac{A\, dS}{yy} = \frac{A\, dS}{mm\, tang.\,(mS + n)^2} \text{ fit}$$

$$-\frac{M}{y} = -\frac{M}{m\, tang.\,(mS + n)} = \frac{A}{mm} \int \frac{dS\, cos.\,(mS + n)^2}{sin.\,(mS + n)^2}$$

$$= \frac{A}{mm} \int \frac{dS}{sin.\,(mS + n)^2} - \frac{AS}{mm} = -\frac{A}{m^3\, tang.\,(mS + n)} - \frac{AS}{mm} - \frac{Ak}{m^3}$$

vnde fit

$$M = \frac{A}{mm}\,(1 + (mS + k)\, tang.\,(mS + n)),$$

hincque porro

$$L = \frac{A\,(1 + (mS + k)\, tang.\,(mS + n))}{m\, cos.\,(mS + n)}$$

ac denique prodit amplitudo $\Omega = \frac{Const.}{MM}$ seu

$$\Omega = \frac{ff}{(1 + (mS + k)\, tang.\,(mS + n))^2}.$$

Scholion 2.

92. Adhuc facilius hanc resolutionem instituere licet hoc modo: cum ex prima aequatione sit $U = -\frac{2\, d\, M}{M\, dS}$ ponatur statim $L = My$, eritque

$$MU = -\frac{2\, dM}{dS} \text{ et } LU = -\frac{2\, y\, dM}{dS},$$

ex quo secunda aequatio fiet

$$\frac{d\, d\, M}{dS} + 2\, d.\, My - 2\, d.\, \frac{dM}{dS} - 2\, y\, dM = 0 \text{ seu}$$

$$-\frac{d\, d\, M}{dS} + 2\, M\, dy = 0 \text{ seu } \frac{d\, dM}{M} = 2\, dy\, dS$$

 simili

fimili modo tertia abit in hanc formam:

$$\frac{dd.My}{dS} - 2d.\frac{ydM}{dS} = 0.$$

factaque euolutione

$$Mddy + 2dMdy + yddM - 2dydM - 2yddM = 0$$

hoc eft

$$Mddy - yddM = 0 \text{ feu } \frac{ddM}{M} = \frac{ddy}{y}$$

Ex his coniunctis fit vt ante $ddy = 2ydydS$. Quod fi hinc ftatim tubi formas algebraicas elicere velimus fumatur fuperior conftans $m = 0$, vt fit $dy = yydS$ ideoque $\frac{1}{y} = -S - \frac{\beta}{\alpha}$, feu $y = \frac{-\alpha}{\alpha S + \beta}$. Tum aequatio $Mdy - ydM = AdS$ dat

$$-\frac{M}{y} = \frac{A}{\alpha\alpha}\int dS(\alpha S + \beta)^2 = \frac{A}{3\alpha^3}((\alpha S + \beta)^3 - \gamma),$$

ideoque

$$M = \frac{A((\alpha S + \beta)^3 - \gamma)}{3\alpha\alpha(\alpha S + \beta)} \text{ et } L = -\frac{A((\alpha S + \beta)^3 - \gamma)}{3\alpha(\alpha S + \beta)^2},$$

ac denique amplitudo $\Omega = \frac{C(\alpha S + \beta)^2}{((\alpha S + \beta)^3 - \gamma)^2}$ prorfus vt ante.

Scholion 3.

93. Praeter hos duos cafus autem, quibus forma tubi vel eft algebraica, vel a circulo pendet, tertium non omitti conuenit, quo ea per quantitates exponentiales determinatur. Pro eo autem aequationis $ddy = 2ydydS$ integrale fumitur $dy = dS(yy - mm)$ vnde fit $2mS + 2n = l\frac{y - m}{y + m}$ vnde fit

$$y = \frac{1 + e^{2mS + 2n}}{1 - e^{2mS + 2n}}m,$$

tum

tum vero porro

$$-\frac{M}{y}=\frac{A}{mm}\int\frac{dS(1-e^{2mS+2n})^2}{(1+e^{2mS+2n})^2}=\frac{A}{m^3}\cdot\frac{e^{2mS+2n}(mS+k-1)+mS+k+1}{1+e^{2mS+2n}}$$

ideoque

$$M=-\frac{A}{mm}\cdot\frac{e^{2mS+2n}(mS+k-1)+mS+k+1}{1-e^{2mS+2n}}$$

et

$$L=-\frac{A}{m}\cdot\frac{e^{2mS+2n}(mS+k-1)+mS+k+1}{(1-e^{2mS+2n})^2}(1+e^{2mS+2n})$$

atque amplitudo

$$\Omega=\frac{C(1-e^{2mS+2n})^2}{(e^{2mS+2n}(mS+k-1)+mS+k+1)^2}.$$

Certum eſt ex hoc caſu perinde atque ex priori a circulo pendente caſum algebraicum prodire debere, ſi ſtatuatur $m=0$ quae tamen euolutio minus eſt obuia, et haud exiguam induſtriam Analyſtae poſtulat.

Problema 85.

92. Inueſtigare caſus pro tubi amplitudine, vt aequatio differentio-differentialis inuenta per operationes tertii ordinis integrari queat, vel eius integrale completum per tertiam formam ſupra explicatam exhiberi queat.

Solutio.

Hoc ergo caſu integrale quaeſitum talem formam habere debebit:

$$v=O+Nf'':(S+ct)+Mf':(S+ct)+Lf:(S+ct)$$

et

et quia iam patet quantitatem O vt ante definitum iri, tantum diuersas functionum species notemus:

$f^{IIII}:(S+ct)$	$f^{III}:(S+ct)$	$f^{II}:(S+ct)$	$f^{I}:(S+ct)$	$f:(S+ct)$
$+N$	$+\frac{2dN}{dS}$	$+\frac{ddN}{dS^2}$		
	$+M$	$+\frac{2dM}{dS}$	$+\frac{ddM}{dS^2}$	
		$+L$	$+\frac{2dL}{dS}$	$+\frac{ddL}{dS^2}$
	$+UN$	$+\frac{UdN}{dS}$		
		$+UM$	$+\frac{UdM}{dS}$	
			$+UL$	$+\frac{UdL}{dS}$
		$+\frac{NdU}{dS}$	$+\frac{MdU}{dS}$	$+\frac{LdU}{dS}$
$-N$	$-M$	$-L$		

vnde deducimus quatuor sequentes aequationes:

I. $\frac{2dN}{dS} + UN = 0$

II. $\frac{ddN}{dS^2} + \frac{2dM}{dS} + \frac{UdN + NdU}{dS} + UM = 0$

III. $\frac{ddM}{dS^2} + \frac{2dL}{dS} + \frac{UdM + MdU}{dS} + UL = 0$

IV. $\frac{ddL}{dS^2} + \frac{UdL + LdU}{dS} = 0.$

Cum nunc ex prima sit $U = \frac{-2dN}{NdS}$, ponamus $M = Ny$ et $L = Nz$, vt fiat

$$UN = \frac{-2dN}{dS};\ UM = \frac{-2ydN}{dS};\ \text{et}\ UL = \frac{-2zdN}{dS};$$

quibus valoribus substituendis aequatio II. fit

$$\frac{ddN}{dS^2} + \frac{2Ndy + 2ydN}{dS} - \frac{2ddN}{dS^2} - \frac{2ydN}{dS} = 0$$

quae contrahitur in hanc formam:

II. $-\frac{ddN}{dS} + 2Ndy = 0$

Tertia

Tertia aequatio vero hinc euadit:

$$\frac{Nddy + 2dNdy + yddN}{dS^2} + \frac{2Ndz + 2zdN}{dS} - \frac{2yddN - 2dydN}{dS^2} - \frac{2zdN}{dS} = 0$$

quae contrahitur in hanc formam:

III. $\frac{Nddy - yddN}{dS} + 2Ndz = 0.$

Quarta denique ita euoluitur:

$$\frac{Nddz + 2dNdz + zddN}{dS^2} - \frac{2zddN - 2dzdN}{dS^2} = 0$$

quae ergo praebet hanc formam:

IV. $\frac{Nddz - zddN}{dS} = 0.$

Ex his triplici modo fit:

$$\frac{ddN}{N} = 2\,dy\,dS = \frac{ddy + 2dzdS}{y} = \frac{ddz}{z}$$

vnde hae duae aequationes resoluendae proponuntur:

$$2y\,dy\,dS = ddy + 2dz\,dS \quad \text{et} \quad yddz - zddy = 2z\,dz\,dS$$

quarum posterior integrata statim dat

$$y\,dz - z\,dy = dS\,(zz + A)$$

prior vero pariter integrata praebet:

$$dy + 2z\,dS = dS\,(yy + B)$$

seu $dy = dS\,(yy - 2z + B).$

Iam illa per hanc diuisa suppeditat hanc aequationem ab elemento dS liberam

$$\frac{y\,dz - z\,dy}{dy} = \frac{zz + A}{yy - 2z + B}$$

fit $z = uy$ et haec aequatio fit

$$\frac{yy\,du}{dy} = \frac{uuyy + A}{yy - 2uy + B}$$

seu $y^4 du - 2uy^3 du + Byy\,du - uuyy\,dy - A\,dy = 0.$

Neceſſitas hic vrget, vt faciamus $A = 0$ et $B = 0$; quo facto habebimus:

$$yydu - 2uydu - uudy = 0 \text{ ſeu } yydu = d.uuy$$

diuidamus per $u^4 y^2$ erit $\frac{du}{u^4} = \frac{d.uuy}{u^4 yy}$, eiusque integrale:

$$\frac{1}{3u^3} = \frac{1}{uuy} - \frac{1}{3m^3} \text{ ſeu } y = \frac{3m^3 u}{m^3 + u^3} \text{ et } z = \frac{3m^3 uu}{m^3 + u^3},$$

vnde fit

$$dS = \frac{dy}{yy - 2uy} = \frac{ydz - zdy}{zz}, \text{ ſiue}$$

$$dS = \frac{du}{uu} = -d.\frac{y}{z}, \text{ ita vt ſit } \frac{1}{u} = -S - \frac{\beta}{\alpha} \text{ et } u = \frac{-\alpha}{\alpha S + \beta}.$$

Ergo iam per S habebimus hos valores:

$$y = \frac{-3\alpha m^3 (\alpha S + \beta)^2}{m^3 (\alpha S + \beta)^3 - \alpha^3} \text{ et } z = \frac{3\alpha^2 m^3 (\alpha S + \beta)}{m^3 (\alpha S + \beta)^3 - \alpha^3}.$$

Ponamus breuitatis gratia $\frac{\alpha^3}{m^3} = \gamma^3$ vt fiat

$$y = \frac{-3\alpha(\alpha S + \beta)^2}{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma^3} \text{ et } z = \frac{3\alpha\alpha(\alpha S + \beta)}{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma^3}.$$

Nunc porro ex aequatione IV colligimus:

$$N\,dz - z\,dN = A\,dS = \frac{A\,du}{uu}$$

quae ob $z = \frac{3\alpha^3 uu}{\alpha^3 + \gamma^3 u^3}$ diuiſa per zz dat

$$-d.\frac{N}{z} = \frac{B\,du}{u^6}(\alpha^3 + \gamma^3 u^3)^2 \text{ et integrando}$$

$$-\frac{N}{z} = C + B\left(\gamma^6 u - \frac{\alpha^3\gamma^3}{u^2} - \frac{\alpha^6}{5u^5}\right)$$

hinc $N = \frac{Bz}{5u^5}(\alpha^6 + 5\alpha^3\gamma^3 u^3 - 5\gamma^6 u^6) - Cz$ et euoluendo

$$N = \frac{A(\alpha S + \beta)^6 - 5A\gamma^3(\alpha S + \beta)^3 - 5A\gamma^6 + B(\alpha S + \beta)}{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma^3}$$

mutatis ſcilicet conſtantibus, vnde ſtatim definitur amplitudo tubi $\Omega = \frac{C}{NN}$, tum vero erit

$$M = \frac{-3\alpha(\alpha S + \beta)^2}{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma^3} N \text{ et } L = \frac{3\alpha\alpha(\alpha S + \beta)}{(\alpha S + \beta)^3 - \gamma^3} N.$$

Pro

Pro quantitate autem O vt ante eſt

$$O = \frac{1}{\Omega} \int \Omega\, dS \left(\frac{b}{a} Z + l \frac{\Omega}{B}\right).$$

Quoties ergo amplitudo Ω hoc modo definitur, ſolutio completa noſtri problematis ita ſe habebit vt ſit:

$$v = O + N\Gamma'' : (S + ct) + M\Gamma' : (S + ct) + L\Gamma : (S + ct)$$
$$+ N\Delta'' : (S - ct) + M\Delta' : (S - ct) + L\Delta : (S - ct).$$

Deinde vero eſt denſitas $q = Q\left(1 - \frac{v\, d\Omega}{\Omega\, dS} - \left(\frac{dv}{dS}\right)\right)$ et celeritas $u = \left(\frac{dv}{dt}\right)$.

Coroll. 1.

95. Determinatio haec amplitudinis tubi reſolutionem propoſitam admittens duplici modo eſt particularis, dum duas conſtantes arbitrarias in aequatione inter y et z inuenta nihilo aequales poſuimus; interim tamen forma pro Ω eruta plures adhuc conſtantes arbitrarias complectitur, ideoque latius patet quam caſus praecedens in omni extenſione acceptus.

Coroll. 2.

96. Caſus ſimpliciores in hac ſolutione contenti oriuntur ſi fiat $\gamma = 0$, tum enim erit:

$$N = \frac{A(\alpha S + \beta)^6 + B(\alpha S + \beta)}{(\alpha S + \beta)^4}$$

prout igitur fuerit vel $A = 0$ vel $B = 0$, reperitur vel

$$N = (\alpha S + \beta)^{-3} \text{ vel } N = (\alpha S + \beta)^2;$$

 illo

illo igitur casu amplitudo ita definitur vt sit

$$\Omega = C(\alpha S + \beta)^4, \text{ hoc vero } \Omega = C(\alpha S + \beta)^{-6}.$$

Coroll. 3.

97. Solutio per operationem primi ordinis inuenta etiam duos casus simpliciores dederat hos:

$$\Omega = C(\alpha S + \beta)^0 \text{ et } \Omega = C(\alpha S + \beta)^{-2}$$

operatio vero secundi ordinis praebuerat hos duos

$$\Omega = C(\alpha S + \beta)^2 \quad \text{et } \Omega = C(\alpha S + \beta)^{-4}$$

nunc haec tertii ordinis suppeditat:

$$\Omega = C(\alpha S + \beta)^4 \quad \text{et } \Omega = C(\alpha S + \beta)^{-6},$$

vnde concludere licet hanc methodum ad omnes tubos applicari posse hac formula $\Omega = C(\alpha S + \beta)^{\pm 2i}$ contentos; exclusis exponentibus imparibus.

Scholion 1.

98. Omnes plane tuborum formae hoc modo resolutionem admittentes repeti debent ex hac aequatione

$$y^4 du - 2uy^3 du - uuyy dy + Byy du - A dy = 0$$

vbi A et B constantes ab arbitrio nostro pendentes denotant, quas tamen ambas in praecedente solutione euanescentes facere sum coactus, vt integratio succederet. Nunc autem obseruo dummodo sit $A = 0$ ideoque

$$dS = \frac{2dz - zdy}{zz} = \frac{du}{uu},$$

inte-

integrationem etiamnunc administrari posse, quaecunque constans pro B assumatur. Cum enim tum sit

$$yydu - 2uydu - uudy + Bdu = 0$$

ponamus $uuy = x$ seu $y = \frac{x}{uu}$ erit

$$\frac{xxdu}{u^4} - dx + Bdu = 0 \text{ seu } d.\frac{1}{x} + Bdu(\frac{1}{x})^2 + \frac{du}{u^4} = 0$$

qui est casus integrabilis aequationis Riccatianae, cui satisfacit forma $\frac{1}{x} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{uu}$; fit enim

$$\frac{-\alpha}{uu} - \frac{2\beta}{u^3} + \frac{B\alpha\alpha}{uu} + \frac{2B\alpha\beta}{u^3} + \frac{B\beta\beta}{u^4} + \frac{1}{u^4} = 0$$

vnde sumi debet

$$B = -\frac{1}{\beta\beta} \text{ et } \alpha = \frac{1}{B} = -\beta\beta,$$

ita vt sit

$$\frac{1}{x} = \frac{-\beta\beta}{u} + \frac{\beta}{uu}.$$

Ponatur ergo

$$\frac{1}{x} = \frac{-\beta\beta}{u} + \frac{\beta}{uu} + \frac{1}{p},$$

vt aequationis

$$d\frac{1}{x} - \frac{du}{\beta\beta}(\frac{1}{x})^2 + \frac{du}{u^4} = 0$$

integrale completum eruamus, orieturque:

$$dp - \frac{2pdu}{u} + \frac{2pdu}{\beta uu} + \frac{du}{\beta\beta} = 0$$

quae per $\frac{e^{\frac{-2}{\beta u}}}{uu}$ multiplicata et integrata praebet:

$$\frac{e^{-\frac{2}{\beta u}}p}{uu} + \frac{e^{-\frac{2}{\beta u}}}{2\beta} = \frac{C}{2\beta} \text{ seu } p = \frac{Ce^{\frac{2}{\beta u}}uu}{2\beta} - \frac{uu}{2\beta}$$

 ita

ita vt fit $\frac{1}{x} = -\frac{\beta\beta}{u} + \frac{\beta}{uu} + \frac{2\beta}{uu\,(C\,e^{\frac{2}{\beta u}} - 1)}$

hincque $x = \frac{uu\,(C\,e^{\frac{2}{\beta u}} - 1)}{\beta\,(1 + \beta u) + C\,\beta\,e^{\frac{2}{\beta u}}(1 - \beta u)} = uuy.$

$$\text{Ergo } y = \frac{C\,e^{\frac{2}{\beta u}} - 1}{\beta(1 + \beta u) + C\beta e^{\frac{2}{\beta u}}(1 - \beta u)} \text{ et } z = \frac{u(C\,e^{\frac{2}{\beta u}} - 1)}{\beta(1 + \beta u) + C\,\beta\,e^{\frac{2}{\beta u}}(1 - \beta u)}$$

existente $u = \frac{-m}{mS + n}$; tum vero est $N\,dz - z\,dN = D\,dS = \frac{D\,du}{uu}$ ex qua per zz diuisa reperitur N indeque reliqua.

Si hic faceremus $\beta = \infty$ praecedens solutio resultaret.

Scholion 2.

Si hoc modo vlterius progredi placeat, calculus quidem fit laboriosior, sed tamen artificio hic vsitato praecipuas difficultates superare licebit. Veluti si pro integralis forma quarti ordinis ponamus:

$$v = O + Nf''' : (S + ct) + Mf'' : (S + ct) + Lf' : (S + ct) + Kf : (S + ct)$$

et ob

$U\,dS = \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{-2\,dN}{N}$ ideoque $\Omega = \frac{ff}{NN}$ ponatur $M = N\,x$, $L = N\,y$ et $K = N\,z$;

perueniturque ad has aequationes:

$$\frac{ddN}{N} = 2\,dx\,dS = \frac{ddx + 2\,dy\,dS}{x} = \frac{ddy + 2\,dz\,dS}{y} = \frac{ddz}{z}$$

vnde

vnde deducimus:

$$\text{I.}\quad 2xdxdS = ddx + 2dydS$$

$$\text{II.}\quad yddx - xddy + 2ydydS - 2xdzdS = 0$$

$$\text{III.}\quad ddz - 2zdxdS = 0$$

$$\text{IV.}\quad zddy - yddz + 2zdzdS = 0$$

hincque integrando

$$\text{I.}\quad xxdS = dx + 2ydS + \text{Conft.}\,dS$$

$$\text{II+III.}\quad ydx - xdy + dz + yydS - 2xzdS = \text{Conft.}\,dS$$

$$\text{IV.}\quad zdy - ydz + zzdS = \text{Conft.}\,dS.$$

Omnes has tres conftantes nihilo fumamus aequales, et vltima praebet $\frac{y}{z} = -S$, ita vt fit $y = -zS$, vbi conftantis additione non eft opus, quia loco S fcriptum concipere licet $S + \frac{6}{\alpha}$ vti fupra. Pofito igitur $y = -zS$ ex prima fit $dx = dS(xx + 2zS)$, et ex fecunda

$$-Szdx + Sxdz - xzdS + dz + SSzzdS = 0$$

quae per zz diuifa et integrata edit

$$-\frac{Sx}{z} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3}S^3 + \frac{1}{3}A = 0 \quad \text{ideoque} \quad z = \frac{3(1+Sx)}{A+S^3}$$

hocque valore in prima fubftituto fit

$$dx = dS\left(xx + \frac{6S(1+Sx)}{A+S^3}\right)$$

cui cum fatisfaciat $x = -\frac{1}{S}$, ponatur $x = -\frac{1}{S} + \frac{1}{v}$ eritque $0 = dv - \frac{2vdS}{S} + \frac{6vSSdS}{A+S^3} + dS$, cuius integrale,

$$v = \frac{BSS + AAS - AS^4 - \frac{1}{5}S^7}{(A+S^3)^2} \quad \text{fuppeditat}$$

$x =$

$$x = \frac{-B + 3ASS + \frac{6}{5}S^5}{BS + AA - AS^3 - \frac{1}{5}S^6}, \text{ hincque porro}$$

$$z = \frac{3(A + S^3)}{BS + AA - AS^3 - \frac{1}{5}S^6} \text{ et } y = \frac{-3S(A + S^3)}{BS + AA - AS^3 - \frac{1}{5}S^6}.$$

Supereſt $z\,dN - N\,dz = C\,dS$, ideoque $\frac{N}{z} = C\int \frac{dS}{zz}$ vnde reliqua facile expediuntur.

Scholion 3.

100. Hoc modo progrediendo continuo plures reperiuntur tuborum figurae, in quibus aeris agitationes minimas definire licebit, et quaelibet adeo operatio infinities maiorem multitudinem ſuppeditat, quam praecedens. Interim tamen infinitae tuborum figurae manent excluſae, pro quibus etiamnum aeris motum determinari non licet. Poſt figuram ergo cylindricam, quam felici ſucceſſu expediuimus, ſequitur conoidica hyperbolica, vix difficiliorem ſolutionem poſtulans quam illa, cum ab eadem operatione prima ſit ſuppeditata, ita vt hae duae figurae ad primum ordinem ſint referendae. Ex ordine ſecundo imprimis notatu eſt digna figura conica aequatione $\Omega = Ass$ contenta, tum vero etiam hyperbolica $\Omega = \frac{A}{s^4}$, nec non haec algebraica multo latius patens $\Omega = \frac{Ass}{(s^3 + B)^2}$, praeter quas innumerabiles aliae tranſcendentes ſunt erutae; pro altioribus autem ordinibus motus determinatio continuo fit operoſior, vt operae non ſit pretium tantos labores ſuſcipere. Species itaque tantum ſimpliciſſimas examini ſum ſubiecturus.

CAPVT

CAPVT V.

DE MINIMIS AERIS AGITATIONIBVS IN TVBIS FIGVRAM CONOIDICAM HYPERBOLICAM HABENTIBVS.

Problema 86.

101. Si tubi figura oriatur ex conuerſione arcus hyperbolae aequilaterae A B circa aſymtotam I L facta, et aer in eo contentus initio quomodocunque de ſtatu aequilibrii fuerit deturbatus, agitationes eius ſequentes ad quoduis tempus inueſtigare. Tab. VII. Fig. 91.

Solutio.

Sit I interſectio aſymtotarum, ſumtoque ſpatio I S $=$ S amplitudo tubi ibi ponatur $\Omega = \frac{c}{ss}$, agitatio autem aeri primum inducta ita ſe habeat, vt in tubi loco S fuerit denſitas $=$ Q et celeritas ſecundum I B $=$ Υ. Elapſo iam tempore quocunque t, ex ſolutione ſupra (82 et 84) exhibita, vbi ob $\alpha = 1$, $\mathfrak{G} = 0$, negligamus grauitatis effectum aer ex S per ſpatiolum $Ss = v$ erit translatus vt ſit

$$v = SS\int \tfrac{dS}{SS} \, l\tfrac{Q}{B} + S\Gamma:(S+ct) + S\Delta:(S-ct)$$

poſito $\sqrt{\frac{2ga}{b}} = c$, tum vero erit mutata conſtante denſitas

$$q = Q(1 - l\tfrac{Q}{B} + \Gamma:(S+ct) + \Delta:(S-ct) - S\Gamma':(S+ct) - S\Delta'.(S-ct))$$

 et

et celeritas

$$\upsilon = c\,S\,(\Gamma' : (S + c\,t) - \Delta' : (S - c\,t)).$$

Quaeſtio autem nunc huc redit: vt ad ſtatum initialem natura functionum Γ et Δ accommodetur: poſito ergo $t = 0$, fieri debet $v = 0$, $q = Q$ et $\upsilon = \Upsilon$, vnde colligimus has aequationes:

$$\text{I. } S\,S \int \tfrac{d\,S}{S\,S}\, l\,\tfrac{Q}{B} + S\,\Gamma : S + S\,\Delta : S = 0$$

$$\text{II. } - l\,\tfrac{Q}{B} + \Gamma : S + \Delta : S - S\,\Gamma' : S - S\,\Delta' : S = 0$$

$$\text{III. } \Upsilon = c\,S\,(\Gamma' : S - \Delta' : S)$$

quarum quidem duae priores inter ſe conueniunt, vt tam ex rei natura quam differentiatione prioris intelligitur. Ponamus breuitatis gratia $\Gamma : S + \Delta : S = x$ et $\Gamma : S - \Delta : S = y$, vt prodeat

II. aequatio $- l\,\frac{Q}{B} + x - \frac{S\,d\,x}{d\,S} = 0$ et

III. aequatio $\Upsilon = \frac{c\,S\,d\,y}{d\,S}$, atque

I. $S\,S \int \frac{d\,S}{S\,S}\, l\,\frac{Q}{B} + S\,x = 0$.

quae quidem illam in ſe complectitur. Hinc ergo eſt $x = - S \int \frac{d\,S}{S\,S}\, l\,\frac{Q}{B}$, inde vero $y = \frac{1}{c} \int \frac{\Upsilon\,d\,S}{S}$, ita vt obtineamus:

$$\Gamma : S = - \tfrac{1}{2} S \int \tfrac{d\,S}{S\,S}\, l\,\tfrac{Q}{B} + \tfrac{1}{2\,c} \int \tfrac{\Upsilon\,d\,S}{S} \quad \text{et}$$

$$\Delta : S = - \tfrac{1}{2} S \int \tfrac{d\,S}{S\,S}\, l\,\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2\,c} \int \tfrac{\Upsilon\,d\,S}{S}$$

vnde fit

$$\Gamma' : S = - \tfrac{1}{2} \int \tfrac{d\,S}{S\,S}\, l\,\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2\,S}\, l\,\tfrac{Q}{B} + \tfrac{\Upsilon}{2\,c\,S} \quad \text{et}$$

$$\Delta' : S = - \tfrac{1}{2} \int \tfrac{d\,S}{S\,S}\, l\,\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2\,S}\, l\,\tfrac{Q}{B} - \tfrac{\Upsilon}{2\,c\,S}.$$

Cum

Cum igitur pro fingulis axis punctis S ex ftatu initiali dentur quantitates $l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$ proxime et Υ hinc conftruantur duae curuae $C\Gamma c$ et $D\Delta d$, vt fint earum applicatae $S\Gamma = \Gamma' : S$ et $S\Delta = \Delta' : S$, quae curuae autem non vltra tubi longitudinem AB extendantur eritque tum per quadraturas harum curuarum:

$$\Gamma : S = AC S\Gamma \text{ et } \Delta : S = AD S\Delta.$$

His curuis conftructis elapfo tempore $= t$, in axe a puncto S vtrinque capiantur interualla $ST = St = ct$ eritque tum

translatio $Ss = SS\int\frac{dS}{SS}l\frac{Q}{B} + S(ACTM + ADtn)$

denfitas $q = Q(1 - l\frac{Q}{B} + ACTM + ADtn - S.TM - S.tn)$

celeritas $\upsilon = cS(TM - tn)$

quae determinationes valent quamdiu puncta T et t non extra tubum AB cadunt.

Coroll 1.

102. Si fuper axe IL intra tubi extenfionem AB, in cuius loco S pofito interuallo $IS = S$, eft amplitudo $\Omega = \frac{ff}{SS}$, aliae duae conftruantur lineae curuae EQe et $F\Upsilon f$, quarum applicatae fint Tab. VII. Fig. 92.

$$SQ = \int\frac{dS}{SS}l\frac{Q}{B} + \frac{1}{S}l\frac{Q}{B} = \int\frac{dQ}{SQ} \text{ et } S\Upsilon = \frac{\Upsilon}{cS}$$

illae functiones hinc ita determinantur, vt fit

$$\Gamma' : S = -\tfrac{1}{2}SQ + \tfrac{1}{2}S\Upsilon \text{ et } \Delta'. S = -\tfrac{1}{2}SQ - \tfrac{1}{2}S\Upsilon$$

hincque porro

$$\Gamma : S = -\tfrac{1}{2}AESQ + \tfrac{1}{2}AFS\Upsilon \text{ et } \Delta : S = -\tfrac{1}{2}AESQ - \tfrac{1}{2}AFS\Upsilon.$$

Coroll. 2.

103. Hinc autem elapso tempore t sumtisque a puncto S interuallis $ST = St = ct$ reperitur aëris qui initio ad S versabatur:

densitas

$$q = Q\left(1 - l\frac{Q}{B} - \tfrac{1}{2}AETM - \tfrac{1}{2}AEtm + \tfrac{1}{2}AFTN - \tfrac{1}{2}AFtn + \tfrac{1}{2}S(TM + tm - TN + tn)\right)$$

celeritas

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}cS(-TM + TN + tm + tn) \text{ et}$$

translatio

$$Sv = SS\int\frac{dS}{SS}\,l\frac{Q}{B} - \tfrac{1}{2}S(AETM - AFTN + AEtm + AFtn)$$

vnde cum posito $t = 0$ fiat $Sv = 0$, patet esse

$$SS\int\frac{dS}{SS}\,l\frac{Q}{B} = S.\,AESQ$$

ita vt sit

$$Sv = \tfrac{1}{2}S(2AESQ - AETM - AEtm + AFTN - AFtn).$$

Scholion 1.

103. Constructio in corollariis data, etsi plures terminos comprehendit quam prior, tamen ad calculum quouis casu oblato euoluendum multo magis est accommodata quoniam in ea agitationes, quae vel ob turbatam initio densitatem vel ob motum impressum oriuntur, seorsim exhibentur. Haec autem distinctio maxime est necessaria si continuationem vtriusque scalae extructae EQe et $F\Upsilon f$ explorare velimus; quod quidem ad perfectam motus cognitionem omnino est necessarium. Commodius autem hae expressiones exhiberi possunt, vt non pendeant a tubi

a tubi termino A: cum enim ex ipsa constructione pateat esse:

$$\int \frac{dS}{SS} l \frac{Q}{B} = \frac{AESQ}{S}, \text{ ex positione}$$

$$SQ = \int \frac{dS}{SS} l \frac{Q}{B} + \frac{1}{S} l \frac{Q}{B} \text{ colligimus}$$

$$l \frac{Q}{B} = S. SQ - AESQ,$$

quibus valoribus indroductis, obtinebimus has determinationes:

$$\frac{q}{Q} = 1 + \tfrac{1}{2}S(TM + tm - 2SQ) - \tfrac{1}{2}S(TN - tn)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(SQtm - SQTM) + \tfrac{1}{2}TNtn$$

$$v = \tfrac{1}{2}cS(tm - TM + TN + tn)$$

$$Sv = \tfrac{1}{2}S(SQtm - SQTM) + \tfrac{1}{2}S.TNtn$$

quae formulae ideo ad calculum magis sunt accommodatae quod a neutro tubi termino pendent. Id autem hic imprimis notari conuenit, distantiam cuiusque puncti S ab assymtorae initio I scilicet I S = S in computum venire.

Scholion 2.

105. Antequam autem hic vlterius progredi liceat, accuratius scalas, quibus ad motum definiendum vtor, perpendi conuenit. Vtraque scilicet ex statu qui aeri in tubo contento initio fuerit inductus construi debet, hunc autem statum ita determinari assumo, vt aeris ad S versa tus densitas fuerit $= Q$ naturali existente $= B$, celeritas vero secundum directionem $AB = \Upsilon$. His positis constructio scalae $F\Upsilon$ nulla laborat difficultate cum eius sit applicata $S\Upsilon = \frac{\Upsilon}{cS}$, altera vero scala EQe, quae

 for-

formulam integralem inuoluit, quandam dilucidationem ob constantem implexam postulat. Primo igitur cum in singulis punctis S densitas datur Q ita construatur curua C V, vt vocato interuallo $CSV = S$, sit eius applicata $SV = \frac{1}{SS} l \frac{Q}{B}$, sumta scilicet recta quacunque pro vnitate. Tum vero hac curua descripta scala EQe, qua opus est, ita construi debet, vt capiatur vbique eius applicata $SQ = S.SV + ACSV$, sicque huius scalae singulae applicatae, qua tubus extenditur, ex curua data C V assignari poterunt. Cum deinde etiam area scalae $AESQ$ in nostras formulas ingrediatur, notari conuenit esse $AESQ = S.SQ - SS.SV$ ideoque $AESQ = S.ACSV$.

Tab. VII. Fig. 93.

Scholion 3.

Tab. VII. Fig. 94.

106. Operae pretium erit hanc curuam C V, quae proprie scala densitatum vocari potest, loco illius scalae EQe ad vsum adhibere. Sit igitur CQc ista scala densitatum, in qua posito interuallo $IS = S$ sit applicata $SQ = \frac{1}{SS} l \frac{Q}{B}$, in scala celeritatum vero $F\Upsilon f$ sit vt ante applicata $S\Upsilon = \frac{T}{cS}$ Quod si igitur istam scalam CQc loco praecedentis EQe substituere velimus, in formulis inuentis loco SQ scribi oportet $S.SQ + ACSQ$ et $S.ACSQ$ loco illius areae $AESQ$. Cum nunc sit $l \frac{Q}{B} = SS.SQ$ ex §. 103 obtinebimus pro tempore quocunque elapso t sumtis interuallis $ST = St = ct$.

densi-

densitatem $q = Q \left\{ \begin{array}{l} 1 - SS.SQ - \frac{1}{2}S.ACTM - \frac{1}{2}S.ACtm \\ + \frac{1}{2}TNtn + \frac{1}{2}SS(TM + tm) - \frac{1}{2}S(TN - tn) \\ \qquad + \frac{1}{2}S(ACTM + ACtm) \end{array} \right\}$

quae expressio contrahitur in hanc:

$q = Q(1 + \frac{1}{2}SS(TM + tm - 2SQ) - \frac{1}{2}S(TN - tn) + \frac{1}{2}TNtn)$.

Deinde erit celeritas

$\mathfrak{v} = \frac{1}{2}cS(-S.TM + S.tm - ACTM + ACtm + TN + tn)$

seu

$\mathfrak{v} = -\frac{1}{2}cSS(TM - tm) - \frac{1}{2}cS.TMtm + \frac{1}{2}cS(TN + tn)$.

Denique vero spatium translationis Sv reperitur:

$Sv = \frac{1}{2}S(2S.ACSQ - S.ACTM - S.ACtm + TNtn)$

seu

$Sv = \frac{1}{2}SS(SQtm - SQTM) + \frac{1}{2}S.TNtn$.

His ergo formulis vtpote ad calculum maxime accommodatis in sequentibus vtar.

Problema 87.

107. Si tubus in A fuerit terminatus ibique siue apertus siue clausus, vtriusque scalae densitatum et celeritatum prouti in scholio praecedente (106) sunt constitutae, continuationem super axe vltra A producto inuestigare.

Solutio.

Sit distantia $IA = a$, ac primo consideremus casum, quo tubus in A est apertus; ibi ergo densitas Tab. VIII. Fig. 95.

ſitas ſemper naturali erit aequalis ideoque $Q = B$, vnde ſcala denſitatum $A M$ per punctum A tranſibit, ſcala vero celeritatum ſit $F N$. Cum iam perperpetuo eſſe debeat $q = Q = B$, elapſo tempore quocunque t ſumtisque a puncto A vtrinque intervallis $A T = A t = c t$ formula, quae tum denſitatem in A exprimere eſt inuenta, praebere debet $q = Q$. Quare illa formula ſumendo punctum indefinitum S in ipſo puncto A huc transferatur: fiet ergo

$$S Q = o, \; S Y = A F, \text{ et } S = a;$$

vnde continuationem vtriusque ſcalae ita comparatam eſſe oportet, vt fiat

$$S S (T M + t m) - S (T N - t n) + T N t n = o$$

idque ita vt neutrius continuatio ab altera pendeat. Seorſim ergo eſſe debet $t m = - T M$, ex quo intelligitur ſcalam denſitatum $A M$ ita continuari oportere, vt pars continuata $A m$ ipſi ſcalae $A M$ ſimilis ſit ſed ad axis partem contrariam relata. Pro continuatione vero ſcalae celeritatum inuenienda ſtatuamus

$$A T = A t = x, \; T N = y \text{ et } t n = z,$$

et cum eſſe debeat

$$T N t n - a (T N - t n) = o$$

fiet

$$\int y \, d x + \int z \, d x - a y + a z = o;$$

hinc differentiando

$$y \, d x + z \, d x - a \, d y + a \, d z = o,$$

quae

quae per $e^{\frac{x}{a}}$ multiplicata dat

integrale $e^{\frac{x}{a}}\, a\, z = \int e^{\frac{x}{a}}(a\,dy - y\,dx) = e^{\frac{x}{a}}\, ay - 2\int e^{\frac{x}{a}}\, y\, dx$

ideoque $z = y - \frac{2}{a}\, e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}}\, y\, dx$

integrali hoc ita capto vt euanefcat pofito $x = 0$.

Sit iam tubus in A claufus, ibique celeritas s femper effe debet nulla vnde fcala celeritatum A N per punctum A tranfeat neceffe eft. Cum igitur elapfo tempore t, pro quo fumantur interualla $A\,T = A\,t = c\,t = x$, celeritas s quoque nulla prodire debeat, quaecunque fuerit fcala denfitatum C M primo effe oportet $T\,N + t\,n = 0$, feu fcalae celeritatum A N continuatio A n ipfi eft fimilis in contrariam axis partem difpofita: Pro continuatione autem fcalae denfitatum effe debet Tab. VIII. Fig. 96.

$$-a\,a\,(T\,M - t\,m) - a\,T\,M\,t\,m = 0.$$

Ponamus in hunc finem

$$A\,T = A\,t = x,\quad T\,M = y \text{ et } t\,m = z$$

haecque conditio ad iftam deducit aequationem:

$$a(y - z) + \int y\,dx + \int z\,dx = 0 \text{ feu } ady - adz + ydx + zdx = 0$$

cuius integrale eft

$$e^{\frac{-x}{a}}\, a\, z = \int e^{\frac{-x}{a}}(a\,dy + y\,dx) = e^{\frac{-x}{a}}\, ay + 2\int e^{\frac{-x}{a}}\, y\, dx$$

ita vt pro hac continuatione habeamus:

$$z = y + \frac{2}{a}\, e^{\frac{x}{a}} \int e^{\frac{-x}{a}}\, y\, dx.$$

Coroll 1.

108. Casu ergo priori, quo tubus in A est apertus, continuatio scalae celeritatum ita est comparata, vt sit

$$AFTN + AFtn = a(TN - tn)$$

ideoque inuenta applicata tn, habebitur area curuae continuatae

$$AFtn = IA(TN - tn) - AFTN.$$

Coroll. 2.

109. Simili modo pro casu posteriori, quo tubus in A est clausus, continuatio scalae densitatum CM ita est comparata vt sit

$$ACTM + ACtm = a(tm - TM).$$

Quare inuenta eius applicata tm, eius area ita se habebit

$$ACtm = IA(tm - TM) - ACTM.$$

Coroll. 3.

110. Si priori casu aer in tubo nullum habuerit motum initialem, solaque densitas fuerit perturbata; tum quia scala celeritatum in axem incidit, ob $y = 0$, etiam eius continuatio in axem incidet. Posteriori vero casu, si aeris densitas initio per totum tubum fuerit naturalis, tum scala densitatum simulque eius continuatio in axem incidit. His autem casibus exceptis continuationes inuentae maxi-

maxime discrepant a scalis principalibus; earumque constructio nonnisi per quadraturas, quantitatem exponentialem insuper in subsidium vocando perfici potest.

Problema 88.

111. Si tubus in B fuerit terminatus ibique vel apertus vel clausus, vtriusque scalae densitatum et celeritatum secundum praecepta (106) formatae, continuationem super axe vltra B producto definire.

Solutio.

Posita distantia I B $= b$, examinemus primo casum quo tubus in B est apertus, ideoque densitas in B tam initio quam semper eadem $=$ B, vnde scala densitatum m B per ipsum punctum B transibit, nf vero sit scala celeritatum. Capiantur vtrinque a B spatia aequalia B $t =$ B T $= x$, existente $x = ct$, atque cum post tempus t futura sit densitas in B ex §. 106. Tab. VIII. Fig. 97.

$$q = Q(1 + \tfrac{1}{2}bb(TM + tm) - \tfrac{1}{2}b(TN - tn) + \tfrac{1}{2}TNtn)$$

necesse est vt primo fiat $TM + tm = 0$, ideoque scala densitatum Bm in formam similem BM ad alteram axis partem describendam continuetur. Pro scalae vero celeritatum nf continuatione fN inueniendae vocentur $tn = y$ et $TN = z$ estque debebit $\int y\,dx + \int z\,dx = b(z - y)$ vnde colligitur:

$$e^{-\frac{x}{b}} bz = \int e^{-\frac{x}{b}}(b\,dy + y\,dx) = e^{-\frac{x}{b}} by + 2\int e^{-\frac{x}{b}} y\,dx$$

$$= -e^{-\frac{x}{b}} by + 2\int e^{-\frac{x}{b}} b\,dy$$

 ideo-

ideoque

$$z = y + \frac{2}{b} e^{\frac{x}{b}} \int e^{\frac{-x}{b}} y\, dx = -y + 2 e^{\frac{x}{b}} \int e^{\frac{-x}{b}} dy.$$

Tab. VII Fig. 98. Sit nunc tubus in B clausus, et altera scala celeritatum n B ita per B transibit, vt semper ibi fiat celeritas $\upsilon = o$, ideoque

$$o = -bb(\mathrm{TM} - tm) - b.\,\mathrm{TM}\,tm + b(\mathrm{TN} + tn).$$

Primo ergo esse oportet $\mathrm{TN} + tn = o$, et scalae nB continuatio erit BN ipsi aequalis et contrarie sita; pro alterius vero scalae densitatum cm continuatione inuenienda vocatis spatiis $\mathrm{BT} = \mathrm{B}t = x$, applicata cognita $tm = y$ et incognita

$\mathrm{TM} = z$, fieri debet $\int y\,dx + \int z\,dx + b(z - y) = o$,

vnde reperitur

$$z = y - \frac{2}{b} e^{\frac{-x}{b}} \int e^{\frac{x}{b}} y\, dx = -y + 2 e^{\frac{-x}{b}} \int e^{\frac{x}{b}} dy.$$

Coroll. I.

Fig. 97. 112. Casu quo tubus in B est apertus, postquam ex formula inuenta singulae applicatae TN fuerint definitae, non opus est aream huius continuationis seorsim quaeri, cum ex conditione praescripta sit area

$$\mathrm{B}\int \mathrm{TN} = \mathrm{IB}(\mathrm{TN} - tn) - \mathrm{B}\int tm.$$

Coroll.

Coroll. 2.

113. Simili modo pro casu quo tubus in B est clausus continuationis scalae densitatum c M area hac ratione definitur Tab. VIII Fig. 98.

$$B c T M = I B (t m - T M) - B c t m$$

ex quo sufficit eius applicatas T M assignauisse.

Coroll. 3.

114. Si distantia $IB = b$ prae interuallis BT $= Bt = x$ fuerit valde magna, vt sit $e^{\frac{\pm x}{b}} = 1$; vel si fractio $\frac{x}{b}$ vt constans spectari possit, erit $2 e^{\frac{\pm x}{b}} \int e^{\frac{\mp x}{b}} dy = 2y$; ex quo pro vtroque casu sit $z = y$, hincque continuatio perinde se habebit, ac si tubus esset cylindricus.

Problema 89.

115. Si tubus hyperbolicus in termino A fuerit apertus, et aer in eo contentus per spatium minimum G H de aequilibrio vtcunque turbetur, huius pulsus propagationem determinare. Tab. VIII Fig. 99.

Solutio.

Super interuallo G H describatur vtraque scala densitatum G M H et celeritatum G N H, ita vt si in T posita distantia $I T = S$, initio fuerit densitas $= Q$ et celeritas in plagam A H $= \Upsilon$ sint applicatae $T M = \frac{1}{S} l \frac{Q}{k}$ et $T N = \frac{\Upsilon}{c S}$. His scalis constitutis

tutis per praecepta ante tradita continuatio earum vltra A versus I ita institui debet: Primo scilicet quia ambae scalae ab A ad G in ipsum axem A G incidunt, per tantumdem spatium $A g = A G$ vtraque scala pariter in axem $A g$ cadet; tum vero quia tubus ad A est apertus scala densitatum continuabitur in $g m h$ curua simili ipsi G M H ad contrariam axis partem sita. Pro continuatione vero scalae celeritatum sumta abscissa $A t = A T = x$, et vocata applicata $T M = y$, existente interuallo $I A = a$; quantitas $e^{\frac{x}{a}}$, quia x tantum per spatiolum minimum G H variatur, vt constans spectari poterit ita vt sit ex (107) $z = y$ seu $t n = T N$, totaque curva $g n b$ similis scalae G N H et ad eandem axis partem dispofita. Hoc modo tota vtriusque scalae continuatio haberetur, si tubus ad alteram partem in infinitum esset extensus; sin autem alicubi in B terminaretur, prout ibi foret apertus vel clausus, nouae repetitiones vtriusque scalae inde orirentur prorsus vt in tubis cylindricis. Hic autem tantum agitationem quae in ipso orificio $A a$ gignetur, perscrutari est propositum, quoniam ea cum aere libero communicatur, in eoque vlterius propagatur; quae autem deinceps adhuc nascerentur repetitiones, eas hic vtpote meras resonantias non persequar, siquidem earum ratio ex superioribus satis est manifesta. In A ergo aer erit tranquillus donec effluxerit tempus $= \frac{AG}{c}$; ac tum simul vterque pulsus eo appellet. Sumamus vtrinque interuallum $A T = A t$

$= c t$,

$= ct$, et quia puncti A diſtantia a centro hyperbolae I eſt $IA = a$, in formulis §. 106 datis erit $S = a$ et $SQ = o$, vnde tum colligitur pro aere in hoc loco:

denſitas $q = B(1 + \frac{1}{2}aa(TM - tm) - \frac{1}{2}a(TN - tn) - \text{area } GTN)$

et quia haec area pro euaneſcente eſt habenda fit $q = B$ vti rei natura pro aere aperto poſtulat. Deinde vero ibidem erit

celeritas $v = -\frac{1}{2}aac(TM + tm) + \frac{1}{2}ac(TN + tn)$

ſeu $v = -aac.TM + ac.TN = \frac{-a\,?}{SS}.\,c.\,l\frac{Q}{B} + \frac{a}{S}\Upsilon$

ſpatium vero translationis $= -aa.GTM + a.GTN$, quod quidem erit minimum.

Coroll. 1.

116. Ex ipſa ſolutione ſatis liquet in huiusmodi tubis pulſus eadem plane celeritate propagati, atque in tubis cylindricis; ex quo concludere licet, figuram tubi nihil plane conferre ad celeritatem propagationis pulſuum; etiamſi id ex Theoria pro omnibus tubi figuris oſtendere non valeamus.

Coroll. 2.

117. Deinde etiam perſpicitur, omnia quae ſupra de pulſuum propagatione in tubis aequaliter amplis, eorumque repetitione demonſtrauimus, etiam hic locum habere cum pulſus in interuallo minimo excitati easdem exhibeant vtriusque ſcalae continuationes, ſuperfluum

fluum ergo foret, quae ante de eiusdem soni resonantia sunt dicta hic repetere.

Scholion 1.

Tab. VIII. Fig. 100. 118. Problema hoc ideo attuli vt explicationi effectus a tubis stentoreis editi inseruiret, quandoquidem harum tubarum figura parum discrepat a conoidica hyperbolica quam hic tractamus. Sit ergo kab hyperbola aequilatera intra asymtotas IB et IK descripta cuius portio ab circa axem AB gyrata generet tubam stentoream, in cuius orificio Bb vox quaecunque edatur. Hac voce aeri ad Bb proximo densitas imprimatur Q maior naturali, simulque celeritas secundum $BA = \Upsilon$, cuius ergo directio illi, quam in solutionem problematis introduximus est contraria. Tum vero ponatur distantia $IA = a$ et $IB = b$, quae in problemate erat S atque inde patet aeri in orificio ampliori Aa imprimi celeritatem versus I, quae sit $= \frac{a}{b}.\ \Upsilon + \frac{aac}{bb} l \frac{Q}{B}$; quae cum distantia $IA = a$ multo sit minor distantia $IB = b$, etiam multo foret minor celeritate Υ in primo pulsu genita, nisi ob densitatem naturali B maiorem Q haud mediocriter augeretur, propterea quod c denotat distantiam quasi 1000 pedum. Neque tamen huic pulsus in Aa translati celeritati effectum tribuere licet, sed praecipua causa quaerenda est in amplitudine orificii Aa, per quod is pulsus pari velocitate praeditus est extensus idemque praestat, ac si tot voces ibi simul ederentur, quoties haec aper-

apertura ſuperat aperturam oris clamantis. Si enim remota tuba vox in liberum aerem ederetur, ea quaquauerſus diffuſa in diſtantia B A vehementer diminueretur; nunc autem dum in tuba cohibetur, totumque ſpatium Aa multo maiore celeritate implet, quam fieret ſi tubus abeſſet, mirum non eſt quod eius effectus tam ſit fortis. De cetero facile intelligitur figuram ipſam tubi haud multum ad hunc effectum conferre, dum ab vſitata non admodum abhorreat.

Scholion 2.

119. Hinc etiam ratio petenda videtur eorum ſonorum, quos tubae, buccina cornua, aliaque inſtrumenta ſimilia edunt, quae in hoc a tibiis diſcrepant, quod in his vti vidimus, totus aer in tubo contentus per noui aeris inflationem ſimul concitatur hincque motum oſcillatorium conſequitur, quo ſonus producitur. In illis vero inſtrumentis iam ſonus quidam per orificium inflatur, vel ex ore inflantis vel dum in eo termino elaſtrum quodpiam ad motum vibratorium excitatur. Vtroque autem modo in illo termino tantum eiusmodi pulſus excitatur quales hic ſumus contemplati, qui deinceps per totam tubi longitudinem propagantur, et dum a diffuſione ad latera coercentur, eo maiorem vim acquirunt, ſicque grauitas ſoni editi potiſſimum a pulſibus ſucceſſiue in orificio productis pendent, quam ob cauſam etiam ſoni horum inſtrumentorum a ſonis tibiarum maxime differunt. Interim tamen etiam in iſtis in-

ſtrumentis longitudo et figura tubi plurimum ad ſoni grauitatem conferunt, ita vt hic vtraque ſoni cauſa ſimul concurrere videatur, quandoquidem horum inſtrumentorum ope non omnes ſed tantum certi ſoni ratione grauitatis edi poſſunt, qui plerumque rationem numerorum 1, 2, 3, 4, 5 etc. naturali ordine progredientium inter ſe tenent. Quod phaenomenon cum etiam in tibiis obſeruauerimus, hinc potius concludendum videtur ſonorum a tubis, buccinis, cornibus etc. editorum cauſam eſſe mixtam, et partim in ſonitu primum inflato, partim in agitatione totius aeris in his tubis contenti quaeri debere. Verum quia Theoriam motus aeris vix adhuc libavimus, plurimum adhuc abeſt, quominus perfectam horum ſonorum explicationem ſperare queamus. Quin potius in iis, quae prima huius nouae ſcientiae principia nobis largiuntur, acquieſcere debemus, vberiorem cognitionem tum demum expectaturi, quando eam ſcientiam magis excolere licuerit.

Problema 90.

Tab. IX. Fig. 101 120 Si in huiusmodi tubo hyperbolico $AaBb$ vtrinque aperto aer ita de ſtatu aequilibrii deturbetur, vt eius ſola denſitas ſine vllo motu varietur, motum oſcillatorium, qui deinceps in tubo generabitur, definire.

Solutio.

Sit I centrum hyperbolae, ex qua tubus eſt formatus, et poſita puncti in tubo vtcunque aſſumti S diſtan-

S diſtantia $IS = S$, inducta ſit ibi aeri initio denſitas $= Q$ naturali exiſtente $= B$, capiaturque applicata $SQ = \frac{1}{SS} l \frac{Q}{B}$, erit punctum Q in ſcala denſitatum AQB, quam quia tubus vtrinque eſt apertus per, ambos terminos A et B tranſire oportet. Scala autem celeritatum hac hypotheſi in axem incidit. Iam per praecepta ante tradita facile haec ſcala denſitatum vtrinque continuatur, eandem alternatim ad contrarias axis partes deſcribendo, vt puncta A, B, A', B', A'', B'' etc. interuallis $= AB$ inter ſe diſſita ſint centra arcuum vtrinque alternatim aequalium. Hinc ad quoduis tempus ab initio elapſum $= t$ ſtatus aeris qui initio circa S verſabatur ſequenti modo definietur: a puncto S vtrinque in axe abſcindantur ſpatia $ST = St = ct$, denotante c ſpatium per quod ſonus vno minuto ſecundo propagatur ex applicatis ſcalae denſitatum in his punctis T et t per §. 106 erit

I. Denſitas $q = Q(1 + \frac{1}{2}SS(TM + tm - 2SQ))$

II. Celeritas $\mathfrak{v} = -\frac{1}{2}SS(TM - tm) - \frac{1}{2}cS.\, TMtm$

III. Spatiolum $Ss = \frac{1}{2}SS(SQtm - SQTM)$

Vnde patet ſumto $ST = St = 2\,AB$ ſeu poſt tempus $t = \frac{2\,AB}{c}$, fieri $TM = tm = SQ$, hincque denſitatem $q = Q$ celeritatem $\mathfrak{v} = 0$, et pariter $Ss = 0$, ob $SQtm = 0$ et $SQTM = 0$.

Coroll. 1.

121 Aer igitur in tubo tempore $t = \frac{2\,AB}{c}$ duas oſcillationes peregiſſe eſt cenſendus; vnde cum

 tem-

tempora ſingularum oſcillationum ſint $= \frac{AB}{c}$, ſingulis minutis ſecundis edentur $\frac{c}{AB}$ oſcillationes, qui numerus ſimul ſoni grauitatem exprimit.

Coroll. 2.

122. Tubus igitur hyperbolicus eundem plane edet ſonum ac tubus cylindricus eiusdem longitudinis, ſi quidem vterque vtrinque ſit apertus; et in hyperbolico aeri primum nullus motus fuerit impreſſus.

Scholion.

123. Inuenimus quidem tempore $t = \frac{2AB}{c}$, quo aer perfecte in priſtinum ſtatum reſtituitur, duas oſcillationes peragi, ad ſimilitudinem cordarum vibrantium, ita vt ſi nunc aer in excurſione maxima verſetur, elapſo hoc tempore iterum in eandem reuertatur. Verum hinc non ſequitur, elapſo tempore dimidio $t = \frac{AB}{c}$ aerem ad alteram excurſionem contrariam pertingere: tum enim tantum hoc eueniret ſi curua AQB duabus conſtaret partibus ſimilibus, ſeu diametrum haberet per medium punctum rectae AB normaliter transeuntem. Quod niſi eueniat ſingulae oſcillationes ita ſe inuicem excipient vt alternatim interualla ſint maiora et minora vnde ſonum minus purum oriri neceſſe eſt, quam ſi omnia interualla eſſent aequalia. Atque haec fortaſſe praecipua eſt cauſa, quod tibiae cylindricae puriores ſonos edant, quam vel conuergentes vel diuergentes; huc autem accedit,

accedit, quod hic primam aëris agitationem cum nullo motu coniunctam assumsimus, quippe quo accedente continuatio scalae celeritatum pro tubis hyperbolicis longe aliam sequitur legem, ac si tubus vbique esset aequaliter amplus. Quomodocunque autem scala celeritatum fuerit comparata, ex formulis §. 106. datis liquet, agitationes sequentes ita ex vtraque scala determinari, vt componantur ex effectu vtriusque seorsim producto. Cum igitur in hoc problemate effectum ex sola scala densitatum oriundum assignauerimus, nunc scalam celeritatum seorsim examini subiiciamus, vt deinceps vtrumque effectum coniungendo agitationes ex duabus quibuscunque scalis simul oriundae definiri queant.

Problema 91.

124. Si prima aequilibrii perturbatio in solo motu constet, densitate vbique naturali relicta, seu si detur scala celeritatum, ex ea agitationes aeris sequentes in tubo hyperbolico $AaBb$ vtrinque aperto definire. Tab. IX. Fig. 102.

Solutio.

Sit ergo $F\Upsilon G$ scala celeritatum data, cuius applicatae ex celeritatibus initio impressis ita definiuntur, vt si in S cuius distantia a centro hyperbolae sit $IS = S$, celeritas in plagam AB fuerit $\mathfrak{T}$ fiat $S\Upsilon = \frac{\mathfrak{T}}{cS}$. Hanc igitur curuam vtrinque continuari oportet secundum praecepta in probl. 87 et 88 tradita. Statuantur in hunc finem distantiae $IA = a$

et $IB = b$, et pro continuatione vltra A inuenienda capiatur $AS' = AS = x$, vt fit $x = S - a$ et ponatur applicata $ST = y$, eritque applicata in S' conſtituenda

$$S'T' = z = y - \tfrac{2}{a} e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} y\,dx$$

integrali hoc ita ſumto vt euaneſcat poſito $x = 0$. Ergo ob $x = S - a$ erit

$$S'T' = ST - \tfrac{2}{a} e^{\frac{-S}{a}} \int e^{\frac{S}{a}} dS.\,ST$$

et area

$$AFS'T' = a(ST - S'T') - AFST$$

Iam vltra B progrediamur, ſumtisque $BS'' = BS = x = b - S$, manente $ST = y$, applicata in S'' erigenda ex Pr. 88 reperitur

$$z = y + \tfrac{2}{b} e^{\frac{x}{b}} \int e^{\frac{-x}{b}} y\,dx \text{ ſeu}$$

$$S''T'' = ST - \tfrac{2}{b} e^{\frac{-S}{b}} \int e^{\frac{S}{b}} dS.\,ST$$

et area

$$BGS''T'' = b(S''T'' - ST) - BGST.$$

Nunc ad aperturam A reuertamur et ſumto ſpatio $AS''' = AS'' = x = 2b - a - S$, fit $S''T'' = y$ et applicata in S''' erigenda erit

$$z = y - \tfrac{2}{a} e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} y\,dx \text{ ſeu}$$

$$S'''T''' = S''T'' + \tfrac{2}{a} e^{\frac{S}{a}} \int e^{\frac{-S}{a}} d.S.\,S''T''$$

quae

quae facta reductione transit in hanc formam:

$$S'''\Upsilon''' = S\Upsilon + \tfrac{2(b-a)}{a(a+b)} e^{\frac{S}{a}} \int e^{\frac{-S}{a}} dS.S\Upsilon + \tfrac{2(b-a)}{b(a+b)} e^{\frac{-S}{b}} \int e^{\frac{S}{b}} dS.S\Upsilon$$

Redeamus ad aperturam B b sumamusque

$$BS^{IV} = BS' = x = b - 2a + S,$$

et posito $S'\Upsilon' = y$, applicata in S^{IV} statuenda erit

$$z = y + \tfrac{2}{b} e^{\frac{x}{b}} \int e^{\frac{-x}{b}} y\,dx \text{ seu}$$

$$S^{IV}\Upsilon^{IV} = S'\Upsilon' + \tfrac{2}{b} e^{\frac{S}{b}} \int e^{\frac{-S}{b}} dS.\,S'\Upsilon'$$

quae loco $S'\Upsilon'$ supra inuentum valorem substituendo reducitur ad hanc formam:

$$S^{IV}\Upsilon^{IV} = S\Upsilon - \tfrac{2(b-a)}{a(a+b)} e^{\frac{-S}{a}} \int e^{\frac{S}{a}} dS.S\Upsilon - \tfrac{2(b-a)}{b(a+b)} e^{\frac{S}{b}} \int e^{\frac{-S}{b}} dS.S\Upsilon$$

sicque vlterius progredi licet, quousque libuerit.

Verum hic potissimum videamus, in quo statu futurus sit aer, qui initio erat ad S post tempus $t = \frac{2AB}{c}$, quo casu abscissae vtrinque abscindendae cadent in S^{IV} et S''' ita vt in solutione generali §. 106 fiat

$$TN = S^{IV}\Upsilon^{IV} \text{ et } tn = S'''\Upsilon''',$$

tum igitur colligetur,

densitas $q = Q(1 - \tfrac{1}{2}S(S^{IV}\Upsilon^{IV} - S'''\Upsilon''') + \tfrac{1}{2}S'''\Upsilon'''S^{IV}\Upsilon^{IV})$

celeritas $v = \tfrac{1}{2}cS(S^{IV}\Upsilon^{IV} + S'''\Upsilon''')$

translatio $Ss = \tfrac{1}{2}S.\,S'''\Upsilon'''S^{IV}\Upsilon^{IV}$.

Area autem haec $S'''\Upsilon'''S^{IV}\Upsilon^{IV}$ ita per meras applicaplicatas exprimi poteſt; cum ex continuationis indole ſit

I. $SYS'Y' = a(SY - S'Y')$

II. $S''Y''S'''Y''' = a(S''Y'' - S'''Y''')$

III. $SYS''Y'' = b(S''Y'' - SY)$

IV. $S'Y'S^{IV}Y^{IV} = b(S^{IV}Y^{IV} - S'Y')$

erit combinando:

IV−I. $SYS^{IV}Y^{IV} = b(S^{IV}Y^{IV} - S'Y') - a(SY - S'Y')$

II−III. $SYS'''Y''' = a(S''Y'' - S'''Y''') - b(S''Y'' - SY)$

vnde colligimus aream

$$S'''Y'''S^{IV}Y^{IV} = (b-a)(SY - S'Y' - S''Y'') + bS^{IV}Y^{IV} - aS'''Y'''.$$

In qua ſi valores pro his applicatis inuentos ſubſtituamus reperitur iſta area ponendo $SY = y$

$$\frac{2(b-a)}{a+b}\left(e^{\frac{-S}{a}}\int e^{\frac{S}{a}}y\,dS - e^{\frac{S}{a}}\int e^{\frac{-S}{a}}y\,dS + e^{\frac{-S}{b}}\int e^{\frac{S}{b}}y\,dS - e^{\frac{S}{b}}\int e^{\frac{-S}{b}}y\,dS\right)$$

vbi integralia ita capi debent vt ea, quae inuoluunt a euaneſcant poſito $S = a$, altera vero poſito $S = b$. Haec ergo expreſſio pro area inuenta in $\frac{1}{2}S$ ducta praebet ſpatium translationis Ss. Deinde pro reliquis elementis habebimus:

$$S^{IV}Y^{IV} - S'''Y''' = \frac{-2(b-a)}{a+b}\left(\tfrac{1}{a}e^{\frac{-S}{a}}\int e^{\frac{S}{a}}y\,dS + \tfrac{1}{a}e^{\frac{S}{a}}\int e^{\frac{-S}{a}}y\,dS + \tfrac{1}{b}e^{\frac{-S}{b}}\int e^{\frac{S}{b}}y\,dS + \tfrac{1}{b}e^{\frac{S}{b}}\int e^{\frac{-S}{b}}y\,dS\right)$$

et

$$S^{IV}Y^{IV} + S'''Y''' = 2y - \frac{2(b-a)}{a+b}\left(\tfrac{1}{a}e^{\frac{-S}{a}}\int e^{\frac{S}{a}}y\,dS - \tfrac{1}{a}e^{\frac{S}{a}}\int e^{\frac{-S}{a}}y\,dS + \tfrac{1}{b}e^{\frac{-S}{b}}\int e^{\frac{S}{b}}y\,dS - \tfrac{1}{b}e^{\frac{S}{b}}\int e^{\frac{-S}{b}}y\,dS\right)$$

Coroll.

Coroll. 1.

125. Hinc ergo patet ob ſcalam celeritatum poſt tempus $= \frac{2AB}{c}$ ſtatum aeris in tubo multum ab initiali diſcrepare poſſe quod diſcrimen eo minus euadet, quo minor fuerit fractio $\frac{2(b-a)}{a+b}$, et quo propius ſcala principalis F T G ad axem acceſſerit.

Coroll. 2.

126. Quodſi ergo aeri in tubo hyperbolico ſimul motus fuerit impreſſus, poſt tempus $\frac{2AB}{c}$ aer in tubo non duas oſcillationes perfeciſſe cenſebitur; multo minus ad aliud quodpiam tempus oſcillationes reuocari poterunt, ſed potius ſonus inde perceptus valde erit rudis et ad harmoniam ineptus.

Scholion.

127. Tibiae ergo ad figuram hyperbolicam formatae hoc inſigni vitio laborabunt, vt ſonos neutiquam puros atque ad harmoniam idoneos edant, propterea quod motum non in oſcillationes diſtinctas reſoluere licet. Hocque vitium eo erit maius, quo fortius huiusmodi tibia inflatur, quoniam tum multo minus oſcillationes diſtingui poterunt, inflatione autem leniſſima ſonus etiamnunc tolerabilis edetur. Facile autem intelligitur hoc vitium tibiis hyperbolicis non eſſe proprium, ſed ad omnes alias formas eo magis extendi, quo magis ab amplitudine aequabili differant. Ratio igitur hinc perſpicitur, cur

 omnis

omnis generis tibiae, quae Organis pneumaticis inferi solent, figuram habeant vel cylindricam vel prismaticam, vt amplitudo vbique sit eadem, haecque sola figura ad Musicam accommoda videtur; quod quidem duplici modo fieri licet, dum eae superne vel apertae sunt, vel clauduntur. At si tibias hyperbolicas claudere velimus, soni multo rudiores edentur, quia tum neutra scala seorsim considerata motum oscillatorium regularem producere valet; ex quo operae pretium haud erit casum, quo tubus hyperbolicus in altero termino apertus in altero vero clausus sumeretur, euolui.

CAPVT VI.

DE

MINIMIS AERIS AGITATIONIBVS IN TVBIS CONICIS.

Problema 92.

128. Si tubus habuerit figuram conicam, aerque in eo contentus vtcunque de statu aequilibrii deturbetur, describere ambas scalas, ex quibus deinceps status aeris ad quoduis tempus definiri queat.

Solutio.

Solutio.

Sit vertex coni in A et recta AB eius axis, in quo sumto puncto quocunque S, positoque intervallo AS = S, aëri in S initio eiusmodi inductus sit status, vt densitas fuerit = Q naturali existente = B celeritas vero in directione AB = Υ. Cum nunc tubi amplitudo in S sit $\Omega = nnSS$ ex (88) ad hunc casum accommodato habebimus $\alpha = 1, \beta = 0$, hincque $M = -\frac{1}{S}$ et $L = \frac{1}{SS}$. Quodsi iam solutionem probl. 84. huc transferamus, et grauitatis actionem negligamus, obtinebimus primo Tab. IX. Fig. 103.

$$O = \frac{1}{SS} \int SS\, dS\, l \frac{Q}{B},$$

tum vero elapso tempore quocunque t status aeris, qui initio fuerat in S ita definitur vt sit spatium translationis

$$Ss = \frac{1}{SS} \int SS\, dS\, l \frac{Q}{B} - \frac{1}{S} \Gamma' : (S+ct) + \frac{1}{SS} \Gamma : (S+ct) = v$$
$$- \frac{1}{S} \Delta' : (S-ct) + \frac{1}{SS} \Delta : (S-ct)$$

vnde pro densitate q et celeritate u deducimus:

$$\left(\frac{dv}{dS}\right) = -\frac{2}{S^3} \int SS\, dS\, l \frac{Q}{B} - \frac{1}{S} \Gamma'' : (S+ct) + \frac{2}{SS} \Gamma' : (S+ct) - \frac{2}{S^3} \Gamma : (S+ct)$$
$$+ l \frac{Q}{B} \qquad - \frac{1}{S} \Delta'' : (S-ct) + \frac{2}{SS} \Delta' : (S-ct) - \frac{2}{S^3} \Delta : (S-ct)$$

ab ob $\frac{d\Omega}{\Omega dS} = \frac{2}{S}$ est

$$\frac{v\, d\Omega}{\Omega\, dS} = \frac{2}{S^3} \int SS\, dS\, l \frac{Q}{B} - \frac{2}{SS} \Gamma' : (S+ct) + \frac{2}{S^3} \Gamma : (S+ct)$$
$$- \frac{2}{SS} \Delta' : (S-ct) + \frac{2}{S^3} \Delta : (S-ct)$$

quare cum sit $q = Q\left(1 - \frac{v\, d\Omega}{\Omega\, dS} - \left(\frac{dv}{dS}\right)\right)$ colligimus

$$q = Q\left(1 - l \frac{Q}{B} + \frac{1}{S} \Gamma'' : (S+ct) + \frac{1}{S} \Delta'' : (S-ct)\right)$$

ac denique ob $\mho = \left(\frac{dv}{dt}\right)$ erit

$$\mho = \frac{-c}{S}\Gamma'':(S+ct) + \frac{c}{SS}\Gamma':(S+ct)$$
$$+ \frac{c}{S}\Delta'':(S-ct) - \frac{c}{SS}\Delta':(S-ct).$$

Hinc ergo pro ſtatu initiali ponendo $t = 0$ adipiſcimur:

$$v = \frac{1}{SS}\int SSdSl\frac{Q}{B} - \frac{1}{S}(\Gamma':S + \Delta':S) + \frac{1}{SS}(\Gamma:S + \Delta:S)$$
$$q = Q\left(1 - l\frac{Q}{B} + \frac{1}{S}(\Gamma'':S + \Delta'':S)\right)$$
$$\mho = -\frac{c}{S}(\Gamma'':S - \Delta'':S) + \frac{c}{SS}(\Gamma':S - \Delta':S).$$

Cum igitur tum fuerit $v = 0$, $q = Q$ et $\mho = \Upsilon$, ſequentes nanciſcimur aequationes ex quibus naturam binarum functionum Γ et Δ definiri oportet

I. $\int SSdSl\frac{Q}{B} - S(\Gamma':S + \Delta':S) + \Gamma:S + \Delta:S = 0$

II. $Sl\frac{Q}{B} = \Gamma'':S + \Delta'':S$

III. $\frac{1}{c}SS\Upsilon = -S(\Gamma'':S - \Delta'':S) + \Gamma':S - \Delta':S$

quarum prima differentiata cum ſecunda conuenit, vti quidem rei natura poſtulat, ita vt duabus tantum conditionibus ſit ſatisfaciendum. Ponamus breuitatis gratia:

$\Gamma':S + \Delta':S = y$ et $\Gamma':S - \Delta':S = z$ vt fiat

II. $SdSl\frac{Q}{B} = dy$ et III. $\frac{1}{c}SS\Upsilon dS = -Sdz + zdS$

hincque

$y = \int SdSl\frac{Q}{B}$ et $-\frac{z}{S} = \frac{1}{c}\int \Upsilon dS$ ſeu $z = -\frac{S}{c}\int \Upsilon dS$

vnde

vnde functiones ita definiuntur, vt sit:

$$\Gamma' : S = \tfrac{1}{2} \int S\, dS\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{S}{2c} \int \Upsilon\, dS \text{ et}$$

$$\Delta' : S = \tfrac{1}{2} \int S\, dS\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{S}{2c} \int \Upsilon\, dS$$

hincque porro differentiando

$$\Gamma'' : S = \tfrac{1}{2} S\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2c} \int \Upsilon\, dS - \tfrac{1}{2c} S\, \Upsilon$$

$$\Delta'' : S = \tfrac{1}{2} S\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{1}{2c} \int \Upsilon\, dS + \tfrac{1}{2c} S\, \Upsilon$$

integrando vero reperitur:

$$\Gamma : S = \tfrac{1}{2} S \int S\, dS\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2} \int S\, S\, dS\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{4c} S\, S \int \Upsilon\, dS + \tfrac{1}{4c} \int S\, S\, \Upsilon\, dS$$

$$\Delta : S = \tfrac{1}{2} S \int S\, dS\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2} \int S\, S\, dS\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{1}{4c} S\, S \int \Upsilon\, dS - \tfrac{1}{4c} \int S\, S\, \Upsilon\, dS.$$

Construantur ergo super axe ex dato statu initiali duae lineae curuae AQD et AΥF sumendo applicatas

$$S\,Q = S\, l\tfrac{Q}{B} \text{ et } S\,\Upsilon = \tfrac{1}{c} \int \Upsilon\, dS + \tfrac{1}{c} S\, \Upsilon$$

et functionum Γ et Δ natura inde ita determinabitur vt sit

$$\Gamma'' : S = \tfrac{1}{2} SQ - \tfrac{1}{2} S\Upsilon\,;\quad \Delta'' : S = \tfrac{1}{2} SQ + \tfrac{1}{2} S\Upsilon$$

hincque porro per areas

$$\Gamma' : S = \tfrac{1}{2} ASQ - \tfrac{1}{2} AS\Upsilon\,;\quad \Delta' : S = \tfrac{1}{2} ASQ + \tfrac{1}{2} AS\Upsilon$$

tum vero si haec forma M : ASQ denotet eam quantitatem quae exprimit integrale $\int dS.\, ASQ$ habebitur:

$$\Gamma : S = + \tfrac{1}{2} M : ASQ - \tfrac{1}{2} M : AS\Upsilon$$

$$\Delta : S = + \tfrac{1}{2} M : ASQ + \tfrac{1}{2} M : AS\Upsilon.$$

 His

His curuis descriptis post tempus elapsum $= t$, a puncto S vtrinque abscindantur interualla $ST = St = ct$ et ex applicatis his punctis respondentibus status aeris qui initio ad S versabatur nunc ita definitur, vt sit

$$q = Q\left(1 - \frac{SQ}{S} + \frac{1}{2S}(TM - TN + tm + tn)\right)$$

$$u = \frac{c}{2S}(tm + tn - TM + TN) + \frac{c}{2SS}(ATM - ATN - Atm - Atn)$$

at spatiolum translationis $Ss = v$ ita exprimetur:

$$Ss = \frac{1}{SS}\int SS\,dS\,l\frac{Q}{B} - \frac{1}{2S}(ATM - ATN + Atm + Atn)$$
$$+ \frac{1}{2SS}(M:ATM - M:ATN)$$
$$+ \frac{1}{2SS}(M:Atm + M:Atn) \quad \text{seu}$$

$$Ss = \frac{1}{SS}\int SS\,dS\,l\frac{Q}{B} - \frac{1}{2S}(ATM - ATN + Atm + Atn) + \frac{1}{2SS}(M:ATM - M:ATN + M:Atm + M:Atn)$$

vbi est $\int SS\,dS\,l\frac{Q}{B} = \int S.SQ.\,dS = S.ASQ - M:ASQ.$

Coroll 1.

128. Ad quoduis ergo tempus t sumtis interuallis $ST = St = ct$ aeris qui initio erat in S status ita definitur vt sit

I. densitas $q = Q\left(1 + \frac{1}{2S}(TM + tm - 2SQ) - \frac{1}{2S}(TN - tn)\right)$

II. celeritas $u = \frac{c}{2S}(tm - TM) + \frac{c}{2S}(TN + tn) + \frac{c}{2SS}.tmTM - \frac{c}{2SS}(ATN + Atn)$

III. spatiolum $Ss = \frac{1}{2S}(2ASQ - ATM - Atm) + \frac{1}{2S}.tnTN)$

$- \frac{1}{2SS}(2M:ASQ - M:ATM - M:Atm) - \frac{1}{2SS}(M:ATN - M:Atn).$

Coroll.

Coroll. 2.

129. Si diſtantia A S conſideretur vt infinita, tubus conicus abibit in cylindricum; et quia tum fit

$$\tfrac{1}{S}.\ SQ = l\tfrac{Q}{B},\ \tfrac{1}{S}.\ S\Upsilon = \tfrac{T}{c};\ \tfrac{1}{S}.\ ASQ = \int dS\, l\tfrac{Q}{B},$$

ideoque

$$\tfrac{1}{SS}.\ ASQ = 0;\ \text{at}\ \tfrac{1}{SS}\ M: ASQ = \int dS\, l\tfrac{Q}{B}$$

tum vero $\tfrac{1}{S}.\ AS\Upsilon = \tfrac{1}{c}\int \Upsilon\, dS$ hinc

$$\tfrac{1}{SS}\ AS\Upsilon = 0\ \text{et}\ \tfrac{1}{SS}\ M: AS\Upsilon = \tfrac{1}{c}\int \Upsilon\, dS,$$

hae formulae cum illis, quae ſupra pro tubus cylindricis ſunt inuentae, conueuient.

Scholion 1.

130. Conſtructio prioris ſcalae A Q D, ex denſitate initiali formatae nulli eſt ſubiecta difficultati, at altera ſcala A Υ F non ſimpliciter ex celeritatibus initialibus Υ conſtruitur, ſed inſuper formulam quandam integralem inuoluit, quemadmodum ergo hinc eam conſtrui oporteat, perpendamus. Deſcripta ergo linea curua A v C cuius applicatae S v ipſam celeritatem initialem Υ in loco S exhibeant, ex ea ſcala illa A Υ F ita conſtruitur, vt ſit eius applicata $S\Upsilon = \tfrac{1}{c} AS.Sv + \tfrac{1}{c} ASv$ tum vero erit huius curuae area $AS\Upsilon = \tfrac{1}{c} AS.ASv$, cum ſit vt vidimus $\int dS(\Upsilon S + \int \Upsilon\, dS) = S\int \Upsilon\, dS$. Hanc ergo curuam A v C loco illius indroducendo, habebimus

T N =

$$TN = \tfrac{1}{c} AT. TL + \tfrac{1}{c} ATL;$$
$$tn = \tfrac{1}{c} At.\ tl + \tfrac{1}{c}. Atl$$
$$ATN = \tfrac{1}{c}. AT. ATL;\ Atn = \tfrac{1}{c} At. Atl$$

vnde fit pro formula celeritatum

$$\mathfrak{v} = \tfrac{c}{2S}(tm - TM) + \tfrac{c}{2SS}.\ tm\, TM + \tfrac{1}{2S}(AT.\ TL + At.\ tl) - \tfrac{ct}{2SS}.\ TL\, tl$$

ob $ST = St = ct$

Atque hinc iam perfpicitur, fi per totum fpatium Tt tam denfitas initialis fuerit naturalis, quam celeritas nulla, tum etiam fore $q = Q$ et $\mathfrak{v} = 0$, quod pofterius ex formula priori minus perfpicitur. Si enim intra fpatium At initio fuerit motus, et curua $A\,v\,C$ ibi incluferit aream quandam, etiamfi deinceps haec curua tota in axem incidat, haec area praebebit applicatas pro curua $A\Upsilon F$ etiam per totum axem fequentem tT, vnde neque areae ATN et Atn neque applicatae TN et tn euanefcent: ficque dubium foret, vtrum forma

$$\tfrac{c}{2S}(TN + tn) - \tfrac{c}{2SS}(ATN + Atn)$$

hoc cafu euanefceret; quod autem nunc quidem fcala $A\,v\,C$ in calculum introducta neceffario euenire debere intelligitur.

Scholion 2.

131. Loco indicis M, quem fupra arcis praefiximus, vt fcriptio $M: ASQ$ denotet integrale $\int dS.\ ASQ$ commodius figno fummatorio $\int$ vtemur, vt

vt $\int ASQ$ idem denotet, quod $\int dS.ASQ$, quoniam differentiale abſciſſae dS facile mente ſuppletur Hoc praemiſſo etiam pro ſcala $A\Upsilon F$ loco $M:AS\Upsilon$ ſcribam $\int AS\Upsilon$ quae forma autem ex ſcala celeritatum naturali AvC ita determinatur vt ſit

$$\int AS\Upsilon = \tfrac{1}{c}(AS\int ASv - \int\int ASv)$$

ideoque

$$M: AT\dot{N} = \tfrac{1}{c}(AT\int ATL - \int\int ATL)$$
$$M: Atn = \tfrac{1}{c}(At\int Atl - \int\int Atl)$$

Quare per ſcalam denſitatum AQD et celeritatum AvC noſtrae determinationes ita ſe habebunt

$$q = Q(1 + \tfrac{1}{2S}(TM + tm - 2SQ) - \tfrac{1}{2cS}(AT.TL - At.tl + tl\,TL)$$
$$\vartheta = \tfrac{c}{2S}(tm - TM) + \tfrac{c}{2SS}TMtm + \tfrac{1}{2S}(AT.TL + At.tl) - \tfrac{ST}{2SS}.tlTL$$
$$Ss = \tfrac{1}{2S}(SQtm - SQTM) - \tfrac{1}{2SS}(\int SQtm - \int SQTM)$$
$$+ \tfrac{1}{2cS}(AT.ATL - At.Atl) - \tfrac{1}{2cSS}(AT.\int ATL - At.\int Atl - \int\int tlTL)$$

quae ad vſum magis videntur accommodatae.

Problema 93.

132. Si in tubo conico ABb in infinitum extenſo alicubi per ſpatiolum minimum GH pulſus excitetur, propagationem huius pulſus in tubo verſus Bb ortam determinare. Tab. IX. Fig. 104.

Solutio.

Cum pulſus in ſpatiolo GH contineatur, in vtroque termino G et H denſitatem naturalem et celeritatem nullam esse oportet. Sit igitur $G\,l\,H$ scala celeritatum, cuius applicata $t\,l$ celeritatem ipsam initialem in loco t exprimat vt sit $t\,l = \Upsilon$ directione ad B versa: pro scala densitatum $G\,m\,H$ vero applicata $t\,m = A\,t.\,l\frac{Q}{B}$ denotante Q densitatem in t initialem, et B naturalem. His positis consideremus locum tubi quemcunque S; existente $AS = S$ et quia ambae scalae extra spatium GH in axem incidunt, aër in S tam diu in aequilibrio perseuerabit, quoad ab initio effluxerit tempus $= \frac{SH}{c}$ min. sec. elapso autem tempore $\frac{SG}{c}$ pulsus iterum cessasse est existimandus ita vt totus pulsus ibi nonnisi per tempus $\frac{GH}{c}$ sit duraturus. Ponamus ergo ab initio elapsum esse tempus $t = \frac{St}{c}$, et quia ad alteram partem B versus aequali spatio $ST = St$ abscisso ibi ambae applicatae TL et TM euanescunt, densitas aeris q et celeritas υ versus B tendens in loco S ita exprimentur:

$$q = B\left(1 + \frac{tm}{2S} + \frac{At.\,tl}{2cS} - \frac{Htl}{2cS}\right)$$

quia initio densitas in S erat $= B$, tum vero erit:

$$\upsilon = \frac{c.\,tm}{2S} + \frac{c.\,Htm}{2SS} + \frac{At.\,tl}{2S} - \frac{St.\,Htl}{2SS}.$$

Cum autem interuallum GH minimum assumatur, areae Htl et Htm pro euanescentibus haberi possunt; quare ob $t\,l = \Upsilon$ et

$$t\,m = A\,t\,l\frac{Q}{B} = A\,t\left(\frac{Q}{B} - 1\right) \text{ habebimus:}$$

$$q = B\left(1 + \frac{At}{2AS}\left(\frac{Q}{B} - 1\right) + \frac{At.\,\Upsilon}{2c.\,AS}\right) \text{ seu } l\frac{q}{B} = \frac{At}{2AS}\left(l\frac{Q}{B} + \frac{\Upsilon}{c}\right)$$

$$\upsilon = \frac{c.\,At}{2AS}\left(\frac{Q}{B} - 1\right) + \frac{At.\,\Upsilon}{2AS} = \frac{c.\,At}{2AS}\left(l\frac{Q}{B} + \frac{\Upsilon}{c}\right).$$

Coroll.

Coroll. 1.

133. Si areolas H $t\,l$ et H $t\,m$ negligere nolimus, habebimus

$$l\tfrac{q}{B} = \tfrac{A\,t}{2\,A\,S}\left(l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{T}{c}\right) - \tfrac{ar.\,H\,t\,l}{2\,c.\,A\,S} \text{ et}$$

$$\mho = \tfrac{c.\,A\,t}{2\,A\,S}\left(l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{T}{c}\right) + \tfrac{c}{2\,AS^2}\left(\text{Ar.}\,H\,t\,m - \tfrac{S\,t}{c}\,\text{Ar.}\,H\,t\,l\right)$$

vbi $\frac{S\,t}{c}$ denotat tempus ab initio elapſum t in min. ſec. expreſſum.

Coroll. 2.

134. Areas autem has eo minus negligere licet, quo maius ſpatiolum G H, et quo propius fuerit vertici coni A quoniam tum ob $t\,l = T$, area H $t\,l$ prae rectangulo A $t.\,t\,l$ neutiquam pro euaneſcente haberi poteſt.

Coroll. 3.

135. Si tempus elapſum t maius fuerit quam $\frac{S\,G}{c}$, ita vt punctum t vltra G verſus A cadat, vbi initio erat $l\frac{Q}{B} = 0$ et $T = 0$; pro loco S adhuc erit:

$$l\tfrac{q}{B} = -\tfrac{Ar.\,G\,l\,H}{2.\,c\,A\,S} \text{ et } \mho = \tfrac{c}{2\,A\,S^2}(\text{Ar.}\,G\,m\,H - t.\,G\,l\,H)$$

tum ergo neque denſitas eſt naturalis neque motus penitus extinctus.

Scholion.

136. Omnino ſingulare eſt hoc phaenomenon, quod etiamſi pulſus in S iam ceſſauiſſe eſt aeſtimandus

dus tamen aeris aequilibrium nondum prorsus sit restitutum, sed fieri possit vt etiamnum tam densitas q a naturali B discrepet, quam aer ipse motu quocam proferatur. Discrimen quidem hoc in valde magnis distantiis A S vt nullum spectari potest; in minoribus vero eo magis est notatu dignum, quod perpetuo durare videatur. cum calculus nullam porro mutationem indicet. Verum hic obseruari oportet, nostras scalas hic non vltra verticem A porrigi, earumque continuationem ex altera parte ipsius A similem pulsum G H ad parem distantiam implicare, quo si tempus S t pertigerit in S nouus pulsus secundarius excitetur, quo finito demum aer ad S prorsus in aequilibrium restituatur. Hic enim similis repetitio oriri debet ac si tubus esset cylindricus et in A clausus: nunc autem videmus hoc discrimen intercedere, quod in casu tubi conici interea dum pulsus secundarius ad S appellit, aerem ibi quandam adhuc agitationem retinere secus ac fit in cylindricis. Quare quemadmodum ambae scalae vltra coni verticem continuari debeant in sequente Problemate inuestigabimus.

Problema 94.

Tab. IX Fig. 105. 137. Si circa verticem coni A aer vtcunque de statu aequilibrii deturbetur seu pulsus ibi quicunque excitetur scalas ambas quibus ad propagationem definiendam opus est, retro vltra verticem A continuare, indeque propagationem in tubo pro quouis loco S determinare.

Solutio.

Solutio.

Extendatur pulsus primo excitatus per spatium A D, et in loco quocunque T posito interuallo A T $=$ S, fuerit densitas aeris $=$ Q naturali existente $=$ B, celeritas vero $=$ Υ secundum directionem A B hinc construatur primo curua A M D sumendo applicatas T M $= S\, l \frac{Q}{B}$, quae ergo vltra D in ipsum axem D B incidit. Deinde construatur etiam curua A N F sumendo applicatas T N $= \frac{S\Upsilon + \int \Upsilon dS}{c}$, cuius quidem primum membrum in D vbi $\Upsilon = o$ euanescit, alterum vero $\frac{1}{c}\int \Upsilon\, dS$ ibi certum valorem adipiscetur, cui sequentes applicatae omnes versus B erunt aequales, ita vt haec scala A N F vltra F abeat in rectam F G ipsi axi A B parallelam; at area huius curuae ita definietur vt sit A T N $= \frac{S}{c}$ $\int \Upsilon\, dS$: vnde cum puncto T in D promoto fiat applicata D F $= \frac{1}{c}\int \Upsilon\, dS$, erit area A D F $=$ A D. D F perinde ac si tota scala A N F G esset recta G F ipsi axi parallela et supra verticem A vsque continuata. His positis primo quaeritur quomodo has scalas vltra A continuari oporteat, vbi ante omnia est obseruandum aerem in ipso vertice A nullum plane motum concipere posse. Quare si tubi punctum S, in quo supra generatim celeritatem 𝔳 definiuimus, in A transferamus, formula ibi pro celeritate exhibita

$$\mathfrak{v} = \frac{c}{2S}(tm - TM + TN + tn) + \frac{c}{2SS}(ATM - Atm - ATN - Atn)$$

hoc casu nulla esse debet. At hoc casu habebimus S $=$ o, quia in hac formula posuimus A S $=$ S, ex quo necesse est continuationem quaesitam ita esse

 com-

comparatam vt ſit $t\,m = \mathrm{T\,M}$ et $t\,n = -\mathrm{T\,N}$. Quamobrem in noſtra figura ſcalam A M D ſine vlla variatione ſuper axe A d deſcribi conuenit vt ſit ea A $m\,d$ altera vero ſcala A N F G ibi ad contrariam axis partem deſcribi debet vt ſit A $n\,f\,g$. His iam ambabus ſcalis vltra A continuatis conſideremus in tubo locum quemcunque S, ſtatuendo nunc diſtantiam a vertice $\mathrm{A\,S} = \mathrm{S}$, vbi cum aer initio fuerit in aequilibrio, ideoque $\mathrm{T} = 0$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{B}$ hincque $\mathrm{S\,Q} = 0$, elapſo tempore $= t$, capiamus vtrinque ab S interualla $\mathrm{S\,T'} = \mathrm{S}\,t' = c\,t$, ſintque in punctis T′ et t' applicatae ambarum ſcalarum T′ M′, T′ N′ et $t'\,m'\;t'\,n'$; atque ex his ſtatus aeris in S ita definietur vt ſit ibi

denſitas $q = \mathrm{B}\left(1 + \frac{1}{2\,\mathrm{S}}(\mathrm{T'M'} + t'm') - \frac{1}{2\,\mathrm{S}}(\mathrm{T'N'} - t'n')\right)$ et

celeritas $$v = \frac{c}{2\,\mathrm{S}}(t'm' - \mathrm{T'M'}) + \frac{c}{2\,\mathrm{S}}(\mathrm{T'N'} + t'n')$$
$$- \frac{c}{2\,\mathrm{SS}}(\mathrm{A}\,t'm' - \mathrm{A\,T'M'}) - \frac{c}{2\,\mathrm{SS}}(\mathrm{A\,T'N'} + \mathrm{A}\,t'n')$$

vnde primo patet, quamdiu tempus ab initio elapſum t minus fuerit quam $\frac{\mathrm{S\,D}}{c}$, tum ob

$$\mathrm{T'M'} = 0,\; t'm' = 0, \text{ et } \mathrm{T'N'} = t'n' = \mathrm{DF}$$

fore $q = \mathrm{B}$ et ob

$$\mathrm{A}\,t'm' = \mathrm{A\,T'M'} \text{ et } \mathrm{A\,T'N'} = \mathrm{A\,T'}.\,\mathrm{DF}$$

atque $\mathrm{A}\,t'n' = \mathrm{A}\,t'.\,\mathrm{DF}$ prodire

$$v = \frac{c}{\mathrm{S}}.\,\mathrm{DF} - \frac{c.\,\mathrm{DF}}{2\,\mathrm{S\,S}}(\mathrm{AT'} + \mathrm{A}t') = 0 \text{ ob } \mathrm{AT'} + \mathrm{A}t' = 2\,\mathrm{AS} = 2\,\mathrm{S},$$

tamdiu ergo aer ibi in aequilibrio manebit. Statim autem ac tempus elapſum t maius fit quam $\frac{\mathrm{S\,D}}{c}$,

aer

aer in S agitari incipiet; ponamus ergo elapſum iam eſſe tempus $t = \frac{AS}{c}$, et quia nunc eſt

$T'M' = o$, $t'm' = o$, $T'N' = DF$, $t'n' = o$,
$AT'M' = AMD$ $At'm' = o$, $AT'N' = AT'.DF = 2S.DF$ et $At'n' = o$
erit tum in loco S

densitas $q = B(1 - \frac{DF}{2S})$ et

celeritas $\upsilon = \frac{c.DF}{2S} + \frac{c.AMD}{2SS} - \frac{c.DF}{S} = \frac{c.AMD}{2SS} - \frac{c.DF}{2S}$.

Pro tempore autem quouis medio elapſo $t = \frac{ST}{c}$ elicitur

denſitas $q = B(1 + \frac{TM + TN - DF}{2S})$ et

celeritas $\upsilon = \frac{c}{2S}(TM + TN - DF) + \frac{c}{2SS}(DTM + DFTN - DT.DF)$.

Videamus denique etiam quomodo ſtatus aeris in S ſe ſit habiturus cum effluxerit tempus

$$t = \frac{Sd}{c} = \frac{AS + AD}{c};$$

tum vero erit

$T'M' = o$, $AT'M' = AMD : T'N' = DF : AT'N' = AT'.DF = 2S.DF + AD.DF$:

porro

$t'm' = o$, $At'm' = Amd = AMD$, $t'n' = -df = -DF$, $At'n' = -Adf = -AD.DF$,

ideoque

denſitas $q = B(1 - \frac{DF}{S})$ et

celeritas $\upsilon = -\frac{c.DF}{S}$.

Coroll.

Coroll. 1.

138. Celeritas ergo pulſus, cum ad locum quemuis S peruenerit duabus conſtat partibus, quarum prior decreſcit in ratione diſtantiae $AS = S$, poſterior vero in ratione duplicata diſtantiae, quae autem poſterior pars prae priori euaneſcit ſtatim ac diſtantia $AS = S$ ſit modica.

Coroll. 2.

139. Cum impulſio in organo auditus facta pendeat ſine dubio a celeritate agitationis in quouis pulſu, hinc patet quomodo ſonus aucta diſtantia continuo diminuatur; et quia vis impulſionis quadrato celeritatis proportionalis ſtatuenda videtur, ſoni debilitatio ſequetur rationem duplicatam diſtantiarum.

Scholion. 1.

140. Inſignis hic difficultas occurrit, quod poſtquam pulſus penitus per locum S tranſierit, aer tamen ibi non in aequilibrium reſtituatur, niſi pulſus initialis ita fuerit comparatus, vt interuallum DF euaneſcat. Talis certe commotio poſt tranſitum pulſus nullo modo admitti poteſt, ideoque calculus noſter defectus potius cuiuspiam arguendus videtur, niſi dicere velimus, omnem agitationem aeri primum inductam neceſſario ita ſemper eſſe comparatam, vt interuallum DF inde prodeat euaneſcens. Quoniam vero hoc nulla ratione probari poteſt, ergo

go huius incommodi in eo quaerenda videtur, quod cum interuallum D F ex valore integrali $\frac{1}{c}\int \Upsilon\, dS$ sit natum, in hac ipsa integratione iusta constans sit neglecta: dummodo ergo talem constantem introduxissemus, qua hoc integrale per totam scalam celeritatum extensam ad nihilum fuisset reductum, omnis haec difficultas penitus euanuisset, cum inde etiam curua A N F vltra D tota in axem D B incidisset. Nullum ergo est dubium quin hic origo istius defectus calculi sit sita, totumque calculum hoc modo expediri conueniat. Talia autem incommoda in argumento prorsus nouo minime sunt miranda, et sperare licet, cum id diligentius fuerit excultum, tum omnia sponte dissipatum iri. Hic autem continuatio scalarum vltra verticem A merito suspecta videtur, propterea quod in hoc loco fit $S = 0$, iique termini quos destrui oportet infiniti; cui incommodo in sequenti problemate medelam afferre conabor.

Scholion 2.

141. Ex hoc problemate colligere licet, quemadmodum pulsus quicunque in libero aere quaqua versus propagetur; si enim quasi centrum pulsus propagati sit in A, vniuersus aer circumfusus in infinitos conos, quorum vertices in A concurrant distributus concipi potest; et manifestum est per quemlibet eorum pulsum perinde propagatum iri, ac per liberum aerem quoniam qua duo huiusmodi tubi se mutuo tangunt, ibi densitas ac propterea etiam

 pressio

pressio est eadem, ita vt etiam tubis remotis propagatio eandem legem sit secutura. Nunc ergo intelligimus pulsus in libero aere eadem prorsus celeritate propagari atque in tubis cylindricis; at vero ob tuborum amplificationem pulsus continuo debilitari, ita vt celeritas cuiusque agitationis diminuatur in ratione distantiarum a pulsu initiali A; latitudinem vero pulsuum, ceterasque soni qualitates in propagatione non alterari.

Problema 95.

Tab. IX. Fig. 106. 142. Si tubus conicus citra verticem I in A a sit terminatus ibique siue apertus siue clausus, ex agitatione initiali aeri in tubo A a B b contento inducta formulas pro motu sequente definiendo exhibere.

Solutio.

Posita termini A a vertice coni I distantia I A $= a$, sumatur in cono locus quicunque S vocata distantia A S $= s$, vt distantia quam ante posuimus S hic sit $= a + s$, initio autem in S fuerit densitas $=$ Q naturali existente $=$ B et celeritas secundum S B $=$ T. Elapso autem tempore quocunque t eiusdem aeris, qui initio fuerat in S, sit densitas $= q$, celeritas $= v$ et translationis spatiolum S $s = v$. Cum iam amplitudo tubi in S sit $\Omega = nn(a+s)^2$, erit $\frac{d\Omega}{\Omega ds} = \frac{2}{a+s}$, hincque ex formulis supra inuentis obtinebimus:

$v =$

$$v = \frac{1}{(a+s)^2}\int (a+s)^2 ds\, l\tfrac{Q}{B} - \frac{1}{a+s}\Gamma' : (s+ct) + \frac{1}{(a+s)^2}\Gamma : (s+ct)$$
$$- \frac{1}{a+s}\Delta' : (s-ct) + \frac{1}{(a+s)^2}\Delta : (s+ct)$$

$$q = Q\,(1 - l\tfrac{Q}{B} + \frac{1}{a+s}\Gamma'' : (s+ct) + \frac{1}{a+s}\Delta'' : (s-ct) \text{ et}$$

$$\mathfrak{s} = \frac{-c}{a+s}\Gamma'' : (s+ct) + \frac{c}{a+s}\Delta'' : (s-ct) + \frac{c}{(a+s)^2}\Gamma' : (s+ct)$$
$$- \frac{c}{(a+s)^2}\Delta' : (s-ct)$$

vnde pro ſtatu initiali cognito colligimus:

$$0 = \frac{1}{(a+s)^2}\int (a+s)^2\, ds\, l\tfrac{Q}{B} - \frac{1}{a+s}(\Gamma' : s + \Delta' : s)$$
$$+ \frac{1}{(a+s)^2}(\Gamma : s + \Delta : s)$$

$$0 = - l\tfrac{Q}{B} + \frac{1}{a+s}(\Gamma'' : s + \Delta'' : s)$$

$$\mathfrak{s} = \frac{-c}{a+s}(\Gamma'' : s - \Delta'' : s) + \frac{c}{(a+s)^2}(\Gamma' : s - \Delta' : s).$$

Ex illa fit

$$\Gamma'' : s + \Delta'' : s = (a+s)\, l\tfrac{Q}{B} \quad \text{et} \quad \Gamma' : s + \Delta' : s = \int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B}$$

atque

$$\Gamma : s + \Delta : s = \int ds \int (a+s)\; ds\, l\tfrac{Q}{B}$$

ex iſta vero

$$\int \Upsilon ds = \frac{-c}{a+s}(\Gamma' : s - \Delta' : s), \text{ ſeu } c(\Gamma' : s - \Delta' : s) = -(a+s)\int \Upsilon ds$$

hincque

$$c\,(\Gamma'' : s - \Delta'' : s) = -\int \Upsilon\, ds - (a+s)\Upsilon \quad \text{et} \quad c\,(\Gamma : s - \Delta : s)$$
$$= -\int (a+s)\, ds \int \Upsilon\, ds.$$

Qui valores in prima aequatione ſubſtituti praebent:

$$0 = \int (a+s)^2 ds\, l\tfrac{Q}{B} - (a+s)\int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} + \int ds \int (a+s) ds\, l\tfrac{Q}{B}$$

 vnde

vnde ambiguitas ob constantem per integrationem ingressam oriunda tollitur, cum debeat esse:

$$\int ds \int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} = (a+s)\int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} - \int (a+s)^2\, ds\, l\tfrac{Q}{B}$$

quae duo integralia simplicia ita capiantur, vt posito $s = 0$ euanescant. Functiones ergo Γ et Δ ita definiuntur vt sit

$$\Gamma'' : s = \tfrac{1}{2}(a+s)\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{(a+s)T - \int T ds}{2c}$$

$$\Delta'' : s = \tfrac{1}{2}(a+s)\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{(a+s)T + \int T ds}{2c}$$

tum vero $\Gamma' : s = \tfrac{1}{2}\int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{(a+s)\int T ds}{2c}$

$$\Delta' : s = \tfrac{1}{2}\int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{(a+s)\int T ds}{2c} \text{ et}$$

$$\Gamma : s = \tfrac{1}{2}(a+s)\int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{1}{2}\int (a+s)^2\, ds\, l\tfrac{Q}{B} - \tfrac{\int (a+s) ds \int T ds}{2c}$$

$$\Delta : s = \tfrac{1}{2}(a+s)\int (a+s)\, ds\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{1}{2}\int (a+s)^2\, ds\, l\tfrac{Q}{B} + \tfrac{\int (a+s) ds \int T ds}{2c}$$

Statuamus ergo in S duas applicatas

$$SQ = (a+s)\, l\tfrac{Q}{B} \quad \text{et} \quad SV = \tfrac{(a+s)T + \int T ds}{c}$$

descriptisque binis scalis CQc et DVd, erit

$$\Gamma'' : s = \tfrac{1}{2}SQ - \tfrac{1}{2}SV; \qquad \Delta'' : s = \tfrac{1}{2}SQ + \tfrac{1}{2}SV$$

$$\Gamma' : s = \tfrac{1}{2}ACSQ - \tfrac{1}{2}ADSV; \quad \Delta' : s = \tfrac{1}{2}ACSQ + \tfrac{1}{2}ADSQ$$

Pro tempore ergo elapso t sumtis interuallis $ST = St = c.t$ densitas q et celeritas υ ita definiuntur vt sit:

$$q = Q\left(1 + \tfrac{1}{2(a+s)}(TM - TN + tm + tn - 2SQ)\right)$$

$$\upsilon = \tfrac{c}{2(a+s)}(tm + tn - TM + TN) + \tfrac{c}{2(a+s)^2}(ACTM - ADTN - ACtm - ADtn)$$

quae

quae duo elementa nosse sufficit, cum inde tertium, nempe spatiolum $S s$ facile concludatur.

Vt iam inuestigemus quomodo vtramque scalam vltra A continuari oporteat, sumamus punctum S in ipso termino A, vt sit $s = o$, et abscissis vtrinque $A T' = A t' = c t$, quoniam areas curvarum a puncto A dextrorsum computauimus, quae nunc sinistrorsum cadunt, negatiue capi debent, eritque pro hoc puncto A

$$q = Q\left(1 + \frac{1}{2a}(T'M' + t'm' - 2AC) - \frac{1}{2a}(T'N' - t'n')\right)$$

$$v = \frac{c}{2a}(t'm' - T'M') + \frac{c}{2a}(T'N' + t'n') + \frac{c}{2aa}(ACT'M' + ACt'm') - \frac{c}{2a^2}(ADT'N' - ADt'n').$$

Nunc duo casus sunt expediendi prout tubus in termino A fuerit apertus vel clausus:

I. Sit tubus in $A a$ apertus et quia ibi densitas perpetuo manet naturalis, vt sit $Q = B$ et $q = B$, erit $AC = o$; fierique necesse est

$$T'M' + t'm' = o \quad \text{et} \quad T'N' = t'n'$$

hoc ergo casu vtraque scala prorsus vt in tubis cylindricis continuatur; scala scilicet densitatum $C Q c$ ad alteram axis partem, celeritatum vero $D V d$ ad eandem describitur.

II. Sit tubus in $A a$ clausus, et quia ibi celeritas perpetuo manet nulla, pro scala densitatum primo esse debet:

$$a(t'm' - T'M') + ACT'M' + ACt'm' = o$$

 statua-

ſtatuamus

$$A T' = A t' = x,\ T' M' = y \text{ et } t' m' = z,$$

vt habeamus:

$$a(z-y)+\int(y+z)dx=0 \text{ ſeu } adz+zdx-ady+ydx=0$$

quae integrata dat:

$$e^{\frac{x}{a}} a z = \int e^{\frac{x}{a}}(a dy - y dx) = e^{\frac{x}{a}} ay - 2\int e^{\frac{x}{a}} y dx = - e^{\frac{x}{a}} ay + 2 a \int e^{\frac{x}{a}} dy$$

hincque

$$z = t'm' = y - \tfrac{2}{a} e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} y dx = -y + 2 e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} dy.$$

Deinde pro ſcala celeritatum oportet ſit:

$$a(T'N' + t'n') - A D T'N' + A D t'n' = 0$$

faciamus

$$A T' = A t' = x,\ T' N' = y,\ t' n' = z,$$

et aequatio

$$a(y+z) - \int y dx + \int z dx = 0 \text{ ſeu } adz + zdx + ady - ydx = 0$$

integrata praebet:

$$e^{\frac{x}{a}} a z = \int e^{\frac{x}{a}}(y dx - a dy) = - e^{\frac{x}{a}} ay + 2\int e^{\frac{x}{a}} y dx = e^{\frac{x}{a}} ay - 2 a \int e^{\frac{x}{a}} dy$$

hincque

$$z = t'n' = -y + \tfrac{2}{a} e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} y dx = y - 2 e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} dy$$

vtroque caſu integralia ita definiri debent, vt poſito $x = 0$ fiat $z = y$.

Coroll. I.

143. Cum caſu, quo tubus in A a eſt apertus

tus ambae ſcalae eodem modo continuentur quo in tubis cylindricis, eadem quoque lex continuationis locum habebit ſi tubus conicus etiam in altero termino B b fuerit apertus, vnde ſequitur in tubo conico vtrinque aperto agitationes aeris prorſus conuenire cum iis, quas ſupra pro tubis cylindricis definiuimus.

Coroll. 2.

144. Quae igitur ſupra de ſonis, quos tibiae apertae edunt annotauimus, eadem quoque locum habent ſi tibiis figura conica tribuatur. Neque tamen figura nimis diuergens admitti poteſt, quia tum agitationes per vnamquamque ſectionem non amplius forent aequabiles, vti Theoria noſtra poſtulat.

Coroll. 3.

145. Ex hoc problemate theoria tuborum cylindricorum deducitur ſi diſtantia $\mathrm{IA} = a$ ſtatuatur infinita Tum autem pro caſu quo tubus in A a eſt clauſus eadem lex pro vtriusque ſcalae continuatione colligitur, quia ob $a = \infty$ erit $t'm' = \mathrm{T'M'}$ et $t'n' = -\mathrm{T'N'}$.

Scholion 1.

146. Nunc dubia quae ſupra circa propagationem pulſus in ipſo vertice coni excitati ſupererant, perfecte tolluntur, cum enim totum negotium eo redeat, quomodo vtramque ſcalam vltra verticem coni oporteat continuari, ad hunc caſum noſtrum

ſtrum problema accommodabimus, ſi diſtantiam $IA = a$ euaneſcentem ſimulque tubum in Aa clauſum ſtatuamus quoniam enim conus in vertice per ſe clauditur ibi certe aer nullum motum concipere poteſt. Ex quo primum pro continuatione ſcalae denſitatum quaeſtio huc redit, vt ex hac aequatione

$$z = -y + 2 e^{\frac{-x}{a}} \int e^{\frac{x}{a}} dy$$

valor ipſius z definiatur caſu quo $a = 0$, quod cum ob exponentem $\frac{x}{a}$ infinitum minus pateat ad aequationem differentialem

$$a\,dz + z\,dx - a\,dy + y\,dx = 0$$

confugiamus, vnde ob $a = 0$ manifeſto ſequitur $z = -y$, ita vt ſcala denſitatum axi ad partem contrariam applicari debeat, ſecus ac ſupra per euaneſcentiam interualli $S = 0$ decepti fecimus. Deinde vero pro ſcala celeritatum ex aequatione differentiali

$$a\,dz + z\,dx + a\,dy - y\,dx = 0 \text{ ob } a = 0$$

deducimus $z = y$, ita vt haec ſcala ad eandem axis partem conſtitui debeat vtraque ſcilicet continuatio eadem lege peragitur ac ſi tubus eſſet apertus. Hinc
Tab. IX. Fig. 105. ergo poſtrema euolutio in probl. 94 ita emendabitur vt cum ſcalae in contrarias plagas cadant atque in figura ſunt repraeſentatae elapſo tempore $t = \frac{Sd}{c}$, fiat $t'm' = 0$, $t'n' = + DF$ area $At'm' = + Amd = AMD$ quia hic duplex ſigni mutatio fieri debet altera quatenus haec area vltra A, altera quatenus infra

infra axem cadit. Denique vero fit area $At'n' = -Adf = -AD.DF$; vnde consequimur:

$$T'M' + t'm' = 0;\quad T'N' - t'n' = 0;\quad At'm' - AT'M' = 0$$
$$t'm' - T'M' = 0;\quad T'N' + t'n' = 2DF;\quad AT'N' + At'n' = 2S.DF$$

hincque porro

densitatem $q = B$ et celeritatem

$$v = \frac{c}{2S}.0 + \frac{c}{2S}.2DF - \frac{c}{2SS}.0 - \frac{c}{2SS}.2S.DF \text{ seu}$$
$$v = \frac{c}{S}.DF - \frac{c}{S}.DF = 0$$

ex quo manifestum est elapso tempore $t = \frac{Sd}{c}$ aerem in S penitus in aequilibrium restitui, sicque veritatem egregie saluari.

Scholion 2.

147. Quoniam vidimus tibias conicas pro longitudine eosdem edere sonos atque cylindricos siquidem sint apertae, probe notandum est hanc conuenientiam neutiquam in tibiis clausis locum habere. Cum enim si tubus conicus ad A a fuerit clausus, ambae scalae in lineas ipsis maxime dissimiles continuari debeant, hinc nullae oscillationes regulares oriri poterunt; sed sonus iis editus admodum erit rudis et inconditus minimeque ad harmoniam efficiendam accommodatus.

DE PERTVRBATIONE MOTVS TERRAE AB ACTIONE VENERIS ORIVNDA.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quamquam orbita Veneris a plano eclipticae declinat, tamen in praesenti inuestigatione, ab hac declinatione mentem abstrahamus, quandoquidem perturbatio, qua terra a plano eclipticae dimoueretur quam minima esset futura, quamobrem Venerem in ipso plano eclipticae motum suum absoluere assumamus, sicque tota nostra inuestigatio ad binas coordinatas reducetur.

2. Reperiantur ergo certo quodam tempore centra Solis, Terrae et Veneris in punctis ☉, ♁ et ♀ in plano eclipticae, in quo recta ☉♈ dirigatur ad punctum aequinoctiale vernum, massae autem horum trium corporum iisdem signis ☉, ♁, ♀ indi-
Tab. X centur. Pro loco terrae autem vocentur coordinatae
Fig. 1. ☉X $= x$ et X♁ $= y$, ipsa vero a Sole distantia dicatur ☉♁ $= u$, Veneris vero a Sole distantia ☉♀ $= v$, eiusque a terra distantia ♀♁ $= w$, tum vero vocentur anguli Longitudinem exhibentes ♈☉♁

♈ ☉ ♁ $= \theta$ et ♈ ☉ ♀ $= \Phi$, ac manifeſtum eſt fore $x = u \operatorname{cof.} \theta$ et $y = u \operatorname{fin.} \theta$, ideoque $uu = xx + yy$, tum vero erit $ww = uu + vv - 2uv \operatorname{cof.}(\Phi - \theta)$.

3. Iam ob actionem Solis terra vrgetur in directione ♁ ☉ vi $= \frac{☉}{uu}$, ob actionem Veneris autem, terra vrgetur in directione ♁ ♀ vi $= \frac{♀}{ww}$, praeterea vero quia Solem in quiete ſpectamus, vires quibus ipſe Sol ſollicitatur contrario modo in terram transferri oportet, a terra autem Sol vrgetur in directione ☉ ♁ vi $= \frac{♁}{uu}$, ex quo eadem vis ipſi terrae in directione ♁ ☉ applicata eſt cenſenda. Deinde quia Sol a Venere vrgetur ſecundum ☉ ♀ vi $= \frac{♀}{vv}$, ducta recta ♁ V ipſi ♀ ☉ parallela, terra quoque cenſenda eſt vrgeri in directione ♁ V, vi $\frac{♀}{vv}$ quocirca terra omnino his tribus viribus ſollicitari eſt concipienda, *primo* in directione ♁ ☉ adeſt vis $= \frac{☉ + ♁}{uu}$. *Secunda* vis agit in directione ♁ V eſt que $= \frac{♀}{vv}$. *Tertia* vero vis agit in directione ♁ ♀, quae eſt $= \frac{♀}{ww}$.

4. Quo iam has vires ſecundum directiones coordinatarum noſtrarum reſoluamus, demittatur ex ♀ in ☉ ♈ perpendiculum ♀ P, ad quod ex ♁ rectae ☉ ♈ parallela agatur ♁ Q, eritque ☉ P $= v. \operatorname{cof.} \Phi$ et P ♀ $=$ V fin. Φ, vnde colligitur ♁ Q $= x - v \operatorname{cof.} \Phi$, et ♀ Q $= v \operatorname{fin.} \Phi - y$, atque hinc pro directione abſciſſae X ☉ reſultant iſtae vires

$$= \frac{☉ + ♁}{uu} \cdot \frac{x}{u} + \frac{♀}{vv} \operatorname{cof.} \Phi + \frac{♀}{ww} \cdot \frac{x - v \operatorname{cof.} \Phi}{w} = \frac{(☉ + ♁)x}{u^3} + \frac{♀ \operatorname{cof.} \Phi}{vv} + \frac{♀ (x - v \operatorname{cof.} \Phi)}{w^3}.$$

 Tum

Tum vero pro directione applicatae ♁ X, colliguntur hae vires

$$\frac{\odot + ♁}{uu} \cdot \frac{v}{u} + \frac{♀}{vv} \text{ fin. } \Phi - \frac{♀(v \text{ fin. } \Phi - y)}{w^3}.$$

Denotet nunc $d\tau$ elementum temporis pro constante habendum, fitque α quantitas constans naturae huius temporis conueniens ac principia motus nobis binas sequentes suppeditant aequationes:

$$\text{I.} \quad \frac{ddx}{\alpha d\tau^2} + \frac{(\odot + ♁)x}{u^3} + \frac{♀ \text{ cof. } \Phi}{vv} + \frac{♀(x - v \text{ cof. } \Phi)}{w^3} = 0$$

$$\text{II.} \quad \frac{ddy}{\alpha d\tau^2} + \frac{(\odot + ♁)y}{u^3} + \frac{♀ \text{ fin. } \Phi}{vv} + \frac{♀(y - v \text{ fin. } \Phi)}{w^3} = 0.$$

5. Calculum autem ab his coordinatis, ad alias traduci conuenit, quae ad longitudinem terrae mediam referantur. Ducatur ergo recta $\odot$ M longitudinem terrae mediam repraesentans, ad quam ex terra demittatur perpendicularis ♁ x, vt habeantur nouae coordinatae, $\odot x = X$ et x ♁ $= Y$, tum vero vocetur angulus ♈ $\odot$ M $= t$, qui ipsam longitudinem terrae mediam exprimit cuius differentiale dt vtique illi elemento temporis $d\tau$ est proportionale, ideoque eius loco vsurpari poterit, vti mox videbimus, hinc autem coordinatae praecedentes ita determinantur, vt fit

$$x = X \text{ cof. } t - Y \text{ fin. } t, \quad y = Y \text{ cof. } t + X \text{ fin. } t,$$

manebit autem vt ante

$$uu = X^2 + Y^2, \quad \text{et} \quad ww = uu + vv - 2uv \text{ cof. } (\Phi - \theta).$$

6.

6. Per differentiationem igitur elicimus:

$$dx = dX\cos t - dY.\sin t. - dt\,(X\sin t + Y\cos t)$$
$$= dX\cos t - dY.\sin t - y\,dt \quad \text{et}$$
$$dy = dY.\cos t + dX\sin t + dt\,(X\cos t - Y\sin t)$$
$$= dX\sin t + dY.\cos t + x\,dt.$$

Denuoque differentiando

$$ddx = ddX\cos t - ddY\sin t - dX.dt\sin t - dY\,dt\cos t - dy\,dt$$
$$= ddX.\cos t - ddY\sin t - 2dt(dX\sin t + dY\cos t) - dt^2(X\cos t - Y\sin t)$$
$$ddy = ddX\sin t + ddY.\cos t + 2dt(dX\cos t - dY\sin t) - dt^2(X\sin t + \cos t)$$

vnde aequationes noftrae ita erunt comparatae:

$$\text{I.}\quad \frac{ddX\cos t - ddY\sin t - 2dt(dX\sin t + dY\cos t) - dt^2(X\cos t - Y\sin t)}{\alpha\,d\tau^2}$$
$$+ \frac{(\odot + \delta)(X\cos t - Y\sin t)}{u^3} + \frac{\text{♀}\cos\Phi}{vv} + \frac{\text{♀}(X\cos t - Y\sin t - v\cos\Phi)}{w^3} = 0$$
$$\text{II.}\quad \frac{ddX.\sin t + ddY\cos t + 2dt(dX\cos t - dY\sin t) - dt^2(X\sin t + Y\cos t)}{\alpha\,d\tau^2}$$
$$+ \frac{(\odot + \delta)(X\sin t + Y\cos t)}{u^3} + \frac{\text{♀}\sin\Phi}{vv} + \frac{\text{♀}(X\sin t + Y\cos t - v\sin\Phi)}{w^3} = 0.$$

7. Quo autem hinc formas fimpliciores eruamus, duplici combinatione vtemur, prima fcilicet combinatio. I. cof. t + II. fin. t fuppeditat:

$$\frac{ddX - 2dt\,dY - X\,dt^2.}{\alpha\,d\tau^2} + \frac{(\odot + \delta)X}{u^3} + \frac{\text{♀}\cos(\Phi - t)}{vv} + \frac{\text{♀}(X - v.\cos(\Phi - t))}{w^3} = 0$$

altera vero combinatio efto

I. − fin. t + II. cof. t quae praebet:

$$\frac{ddY + 2dt.dX - Y\,dt^2}{\alpha\,d\tau^2} + \frac{(\odot + \text{♀})Y}{u^3} + \frac{\text{♀}\sin(\Phi - t)}{vv} + \frac{\text{♀}(Y - v.\sin(\Phi - t))}{w^3} = 0.$$

 Quo

Quo has aequationes adhuc tractabiliores reddamus, mentem primo abſtrahamus ab actione Veneris, ſeu ponamus $♀ = 0$, vt habeamus iſtas aequationes

$$\frac{ddX - 2dt\,dY - X\,dt^2}{\alpha\, d\tau^2} + \frac{(☉ + ♁)X}{u^3} = 0$$

$$\frac{ddY + 2dt.\,dX - Y\,dt^2}{\alpha\, d\tau^2} + \frac{(☉ + ♁)Y}{u^3} = 0$$

nunc autem terram ſecundum ipſum motum medium ferri aſſumamus, ita vt poſita diſtantia media terrae a Sole $= a$, pro hoc caſu habituri ſimus $X = a$; $Y = 0$ et $u = a$, qui valores in noſtris aequationibus producunt

$$-\frac{dt^2}{\alpha\, d\tau^2} + \frac{☉ + ♁}{a^3} = 0,$$

altera vero ſponte euaneſcit, vnde intelligimus loco elementi $d\tau$ differentiale motus medii dt introductum iri, ſi modo loco $\alpha\, d\tau^2$ ſcribatur $\frac{a^3\, dt^2}{☉ + ♁}$, haecque adeo ſubſtitutione in genere vti licebit, quo pacto non ſolum formula indefinita $\alpha d\tau^2$, ſed etiam notio maſſarum $☉ + ♁$ e calculo euaneſcit. Multiplicemus ſcilicet noſtras aequationes per $\frac{a^3}{☉ + ♁}$, tum vero ponatur fractio $\frac{♀}{☉ + ♁} = \lambda$, atque noſtrae expreſſiones ita ſatis concinnae expreſſae prodibunt:

$$\text{I.}\ \frac{ddX}{dt^2} - \frac{2dY}{dt} - X + \frac{a^3.X}{u^3} + \frac{\lambda a^3 \cos.(\Phi - t)}{vv} + \frac{\lambda a^3 (X - v\cos.(\Phi - t))}{w^3} = 0$$

$$\text{II.}\ \frac{ddY}{dt^2} + \frac{2dX}{dt} - Y + \frac{a^3.Y}{u^3} + \frac{\lambda a^3.\sin.(\Phi - t)}{vv} + \frac{\lambda a^3 (Y - v.\sin.(\Phi - t))}{w^3} = 0.$$

8. Poſtremam nunc transformationem adhibeamus inde deductam, quod ob excentricitatem terrae ſatis paruam locus ♁ a puncto x nunquam, admodum ſit diſcrepaturus; hunc in finem ſtatuamus

$X = a$

$X = a(1+x)$ et $Y = ay$, vnde fit $u = a\sqrt{((1+x)^2+yy)}$ et aequationes noſtrae per a diuiſae euadent

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} - (1+x) + \frac{(1+x)}{((1+x)^2+yy)^{3:2}} + \frac{\lambda aa}{vv}\operatorname{coſ.}(\Phi - t) + \frac{\lambda a^3(1+x-\frac{v}{a}\operatorname{coſ.}\Phi - t)}{w^3} = 0$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2dx}{dt} - y + \frac{y}{((1+x)^2+yy)^{3:2}} + \frac{\lambda aa}{vv}\operatorname{fin.}(\Phi - t) + \frac{\lambda aa}{w^3}(ay - v\operatorname{fin.}(\Phi - t)) = 0$$

vbi notandum ambas has nouas coordinatas x et y prae vnitate ſemper fore ſatis exiguas, quam ob cauſſam formulam u^3 facile in ſeriem valde conuergentem euoluere licet. Eſt autem *B. Lector* monendus, ne has litteras x et y confundat cum ſuperioribus, quas iam penitus obliuiſci oportet.

Euolutio harum formularum remota actione Veneris.

9. Antequam Veneris rationem habeamus, vtique neceſſe eſt, pro binis noſtris incognitis x et y eos valores inueſtigari, qui ex ſola actione Solis et Terrae oriuntur, hancobrem nobis iſtae duae aequationes ſint propoſitae:

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} - (1+x) + \frac{1+x}{((1+x)^2+yy)^{3:2}}$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2dx}{dt} \quad - y \quad + \frac{y}{((1+x)^2+yy)^{3:2}}$$

ex

ex quibus valores vtriusque incognitae x et y definiri oportet. Hunc in finem formulam irrationalem $((1+x)^2+yy)^{\frac{-3}{2}}$ in seriem conuergentem resoluamus, quae est

$$\frac{1}{(1+x)^3} - \frac{3.yy}{2(1+x)^5} + \frac{15.y^4.}{8(1+x)^7},$$

et quum porro sit

$$\frac{1}{(1+x)^n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{1.2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}x^4 - \text{etc.}$$

facta euolutione binae nostrae aequationes sequentes induent formas:

$$\text{I.}\ \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} - 3x, + 3xx - \tfrac{3}{2}y^2, + 6xy^2 - 4x^3,$$
$$+ 5x^4 - 15xxyy + \tfrac{15}{8}y^4 = 0$$

$$\text{II.}\ \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2dx}{dt} \quad , - 3xy \quad , + 6xxy - \tfrac{3}{2}y^3,$$
$$- 10.x^3y + \tfrac{15}{2}xy^3 = 0$$

quae series quum x et y sint fractiones satis paruae vehementer conuergunt, quod quo clarius appareat, has aequationes in membra dispescuimus secundum dimensionum numerum, quas binae litterae x et y adimplent. Ac prima quidem membra vocabimus principalia, sequentia vero annexa.

10. Facile hic perspicere licet quantitatem x per certam seriem cosinuum exprimi debere, alteram vero y per similem seriem sinuum, hinc in subsidium solutionis obseruasse iuuabit, si membra annexa prioris aequationis contineant $\mathfrak{M}$ cos. μt, posterioris vero

vero aequationis hunc terminum M fin. μt, tum in in ipfis feriebus ipfarum x et y, fimiles terminos occurrere debere. Pro x igitur occurrere fumamus terminum $\mathfrak{N}$ cof. μt, pro y vero N fin. μt, qui valores in partes principales inducti praebent:

$$\mathfrak{M} = \mu^2 . \mathfrak{N} + 2 \mu N + 3 \mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\mu^2 + 3) + 2 \mu N$$

$$M = \mu^2 . N + 2 \mu \mathfrak{N},$$

vnde colligimus

$$\mathfrak{N} = \frac{\mu \mathfrak{M} - 2 M}{\mu(\mu\mu - 1)}; \quad N = \frac{(\mu^2 + 3) M - 2 \mu \mathfrak{M}}{\mu\mu(\mu\mu - 1)}$$

fiue quatenus $\mathfrak{N}$ iam eft inuentum erit

$$N = \frac{M}{\mu\mu} - \frac{2 \mathfrak{N}}{\mu}.$$

Hinc notari conuenit cafu quo $\mu = 0$, fore $\mathfrak{M} = 3 \mathfrak{N}$; $\mathfrak{N} = \frac{1}{3} \mathfrak{M}$ fiquidem fuerit $M = 0$, id quod femper eueniet, tum vero cafu quo $\mu = 1$, neceffario fiet $\mathfrak{M} = 2 M$, tum vero valor $\mathfrak{N}$ manet indefinitus, ex eoque prodibit $N = M - 2 \mathfrak{N}$.

11. Quoniam iam vidimus pro motu terrae medio fiue circulari, fieri tam $x = 0$, quam $y = 0$, vnde eatenus tantum quantitates x et y certos fortientur valores, quatenus orbita terrae excentricitate eft praedita, denotet igitur K excentricitatem orbitae terreftris, et pro vtraque quantitate x et y fequentes ordines conftitui conueniet

$$x = K \mathfrak{P} + K^2 \mathfrak{Q} + K^3 \mathfrak{R} + K^4 \mathfrak{S};$$

$$y = K P + K^2 . Q + K^3 . R + K^4 . S$$

quos fingulos ordines fucceffiue euolui neceffe eft.

 Pro

Pro primo igitur ordine, qui excentricitate ſimplici K eſt affectus, habebimus has duas aequationes:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.}\ \frac{dd\mathfrak{P}}{dt^2} - \frac{2dP}{dt} - 3\mathfrak{P} = 0 \\ &\text{II.}\ \frac{ddP}{dt^2} + \frac{2d\mathfrak{P}}{dt} \qquad\quad = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{I.}$$

Pro *ſecundo ordine* qui quadrato K K eſt affectus:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.}\ \frac{dd\mathfrak{Q}}{dt^2} - \frac{2dQ}{dt} - 3\mathfrak{Q}, + 3\mathfrak{P}^2 - \tfrac{3}{2}P^2 = 0 \\ &\text{II.}\ \frac{ddQ}{dt^2} + \frac{2d\mathfrak{Q}}{dt} \qquad , - 3\mathfrak{P}P \qquad = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{II.}$$

Pro *tertio ordine* qui cubo K^3 eſt affectus, aequationes noſtrae erunt

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.}\ \frac{dd\mathfrak{R}}{dt^2} - \frac{2dR}{dt} - 3.\mathfrak{R}, + 6\mathfrak{P}\mathfrak{Q} - 3.PQ; + 6\mathfrak{P}P^2 - 4\mathfrak{P}^3 = 0 \\ &\text{II.}\ \frac{ddR}{dt^2} + \frac{2d\mathfrak{R}}{dt} \qquad , - 3\mathfrak{P}Q - 3P\mathfrak{Q}; + 6\mathfrak{P}^2.P - \tfrac{3}{2}P^3 = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{III.}$$

Pro *quarto* denique *ordine* biquadrato K^4 affecto, aequationes erunt

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.}\ \frac{dd\mathfrak{S}}{dt^2} - \frac{2dS}{dt} - 3\mathfrak{S}; + 6\mathfrak{P}\mathfrak{R} + 3.\mathfrak{Q}^2; + 6\mathfrak{Q}P^2 + 12.\mathfrak{P}PQ \\ &\qquad\qquad - 3PR - \tfrac{3}{2}.Q^2 \qquad - 12\mathfrak{P}^2.\mathfrak{Q}; \\ &\qquad\qquad + 5\mathfrak{P}^4 - 15\mathfrak{P}^2.P^2 + \tfrac{15}{8}P^4 = 0 \\ &\text{II.}\ \frac{ddS}{dt^2} + \frac{2d\mathfrak{S}}{dt}; - 3\mathfrak{P}R - 3P\mathfrak{R} - 3\mathfrak{Q}Q; + 6\mathfrak{P}^2Q + 12P\mathfrak{P}\mathfrak{Q} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad - \tfrac{5}{2}P^2Q; \\ &\qquad\qquad - 10\mathfrak{P}^3.P + \tfrac{15}{2}\mathfrak{P}P^3 = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{IV.}$$

12. Euolutio primi ordinis omnino eſt facillima, quia membra annexa deſunt, quare pro angulo quocunque μt ſemper erit $\mathfrak{M} = 0$ et $M = 0$, vnde etiam $\mathfrak{N}$ et N euaneſcerent, ſolo excepto caſu $\mu = 1$, quo caſu littera $\mathfrak{N}$ manet indeterminata pro qua igitur vnitatem ſcribere licet, quia iam habet

habet indefinitum coefficientem K, inde autem colligitur $N = -2$. Quocirca pro primo ordine hanc habemus solutionem: $\mathfrak{P} = \cos. t$; $P = -2 \sin. t$. Hic euidens est angulum t simul anomaliam mediam terrae designare, quae vtique pari passu cum longitudine procederet, si terra a sola vi Solari sollicitaretur, quemadmodum hic assumimus, hac scilicet hypothesi aphelium quiesceret, quippe quod nonnisi ob perturbationes motum adipiscitur. Supra quidem hunc angulum t ab initio arietis computauimus et hanc ob rem, hic isti angulo t constantem adiici oportebat, quae quum facile subintelligatur, eam breuitatis caussa omisimus.

13. Progrediamur ergo ad ordinem secundum litteris $\mathfrak{Q}$ et Q contentum ac pro priore aequatione membrum annexum

$$3\,\mathfrak{P}^2 - \tfrac{3}{2} P^2 \text{ praebet } -\tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{2} \cos. 2t$$

pro altera vero aequatione membrum annexum

$$-3\,\mathfrak{P} P \text{ praebet } + 3 \sin. 2t.$$

Hic ergo pro parte constante seu angulo $\mu t = 0$, est $\mathfrak{M} = -\frac{3}{2}$ et $M = 0$, vnde definitur $\mathfrak{N} = -\frac{1}{2}$, tum vero $N = 0$, pro angulo autem $2t$, vbi $\mu = 2$ habemus $\mathfrak{M} = +\frac{9}{2}$ et $M = +3$, vnde colligimus $\mathfrak{N} = \frac{1}{2}$; $N = \frac{1}{4}$, pro ordine ergo secundo nacti sumus

$$\mathfrak{Q} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos. 2t; \quad Q = +\tfrac{1}{4}\sin. 2t.$$

14. Hinc pro ordine tertio membra annexa prioris aequationis praebent vt sequitur:

pro $\mathfrak{M}$

$$\begin{array}{rcl}
+6\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q} & = & -\tfrac{3}{2}\,\text{cof.}\,t + \tfrac{3}{2}\,\text{cof.}\,3\,t \\
-3\,P\,Q & = & +\tfrac{3}{4}\,\text{cof.}\,t - \tfrac{3}{4}\,\text{cof.}\,3\,t \\
+6\,\mathfrak{P}\,P^2 & = & +6.\,\text{cof.}\,t - 6.\,\text{cof.}\,3\,t \\
-4\,\mathfrak{P}^3 & = & -3.\,\text{cof.}\,t - 1.\,\text{cof.}\,3\,t \\
\hline
 & & \tfrac{9}{4}\,\text{cof.}\,t - \tfrac{25}{4}\,\text{cof.}\,3\,t.
\end{array}$$

Simili modo ex altera aequatione huius ordinis colligimus:

$$\begin{array}{rcl}
-3\,\mathfrak{P}\,Q & = & -\tfrac{3}{8}\,\text{fin.}\,t - \tfrac{3}{8}\,\text{fin.}\,3\,t \\
-3\,P\,\mathfrak{Q} & = & -\tfrac{9}{2}\,\text{fin.}\,t + \tfrac{3}{2}\,\text{fin.}\,3\,t \\
+6.\,\mathfrak{P}^2 P & = & -3.\,\text{fin.}\,t - 3\,\text{fin.}\,3\,t \\
-\tfrac{3}{2}.\,P^3 & = & +9.\,\text{fin.}\,t - 3\,\text{fin.}\,3\,t \\
\hline
 & & +\tfrac{9}{8}.\,\text{fin.}\,t - \tfrac{39}{8}.\,\text{fin.}\,3\,t.
\end{array}$$

ergo pro M

Hinc igitur pro priore angulo t, eſt $\mu = 1$, $\mathfrak{M} = \frac{9}{4}$ et $M = \frac{9}{8}$ vnde fit $\mathfrak{N} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{2 \cdot 9}{8}}{0} = \frac{0}{0}$ ficque hic valor foret indefinitus, quia autem iam ſupra termino cof. t debitus coefficiens eſt tributus, hic poni oportet $\mathfrak{N} = 0$, ex quo fit $N = + \frac{9}{8}$. Pro altero autem angulo $3\,t$ ſeu $\mu = 3$, habemus $\mathfrak{M} = -\frac{25}{4}$ et $M = -\frac{39}{8}$ vnde deducimus $\mathfrak{N} = -\frac{3}{8}$ et $N = -\frac{7}{24}$ quocirca pro tertio ordine eruimus

$$\mathfrak{N} = +0.\,\text{cof.}\,t - \tfrac{3}{8}.\,\text{cof.}\,3\,t;\quad R = +\tfrac{9}{8}\,\text{fin.}\,t - \tfrac{7}{24}.\,\text{fin.}\,3\,t.$$

15. Ordini quarto hic non immoramur quoniam hanc inueſtigationem iam alibi fuſius docuimus atque ad praeſens inſtitutum ſufficit, motum regularem

rem proxime tantum nouisse, cui quidem instituto solus primus ordo abunde sufficeret, collectis autem his tribus ordinibus, binae coordinatae nostrae x et y pro motu regulari ita sunt expressae

$$x = -\tfrac{1}{2}K^2 + K \operatorname{cos}. t + \tfrac{1}{2}K^2. \operatorname{cos}. 2t - \tfrac{3}{8}. K^3. \operatorname{cos}. 3t$$

$$y = \qquad -(2K - \tfrac{9}{8}K^3) \operatorname{sin}. 2t + \tfrac{1}{4}K^2. \operatorname{sin}. 2t - \tfrac{7}{24}K^3. \operatorname{sin}. 3t.$$

Euolutio nostrarum formularum accedente actione Veneris.

16. Propter actionem Veneris valores isti pro x et y inuenti exigua quaedam incrementa accipient coefficiente minimo λ affecta, quo igitur haec incrementa inueniamus, veros valores coordinatarum x et y sequenti modo repraesentemus.

$$x = X + \lambda X' \text{ et } y = Y + \lambda Y'$$

ipsae autem coordinatae pro loco terrae erunt

$$\odot x = a(1 + x) = a(1 + X + \lambda X') \text{ et}$$

$$♁ x = ay = aY + a\lambda Y'$$

vbi X et Y denotant valores modo ante inuentos scilicet

$$X = -\tfrac{1}{2}K^2 + K \operatorname{cos}. t + \tfrac{1}{2}K^2. \operatorname{cos}. 2t - \tfrac{3}{8}K^3. \operatorname{cos}. 3t$$

$$Y = -(2K - \tfrac{9}{8}K^3) \operatorname{sin}. t + \tfrac{1}{4}K^2. \operatorname{sin}. 2t - \tfrac{7}{24}. K^3. \operatorname{sin}. 3t$$

partes autem annexae $\lambda X'$ et $\lambda Y'$ sunt eae ipsae quantitates, quas inuestigari oportet, et quas manifestum est fore quam minimas, ita vt prae X et Y quasi pro euanescentibus haberi queant. Ceterum hic

 monen-

monendum has litteras X et Y non esse confundendas cum iis quibus supra sumus vsi.

17. Binae autem aequationes ex quibus hae determinationes elici debent, ita sunt expressae

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} - 3x, + 3xx - \tfrac{3}{2}yy, \ldots + \frac{\lambda aa}{vv}\text{cof.}(\Phi - t) + \frac{\lambda a^3(1 + x - \frac{v}{a}\text{cof.}(\Phi - t))}{w^3} = 0$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2dx}{dt}, \; -3xy \ldots + \frac{\lambda aa}{vv}.\text{fin.}(\Phi - t) + \frac{\lambda aa}{w^3}(ay - v.\text{fin.}(\Phi - t)) = 0$$

vbi vltimi termini littera λ affecti prae reliquis manifesto sunt quam minimi, deinde vero etiam membra quae supra annexa vocauimus prae membris principalibus etiam pro valde paruis sunt habenda, quandoquidem ipsae quantitates x et y prae vnitate sunt satis exiguae, hanc ob caussam si hic velimus loco x et y valores modo indicatos $X + \lambda X'$ et $Y + \lambda Y'$ substituere, in membris annexis atque multo magis in postremis sufficiet tantum partes principales X et Y adhibere, vnde quum per hypothesin membra annexa destruantur a valoribus X et Y loco x et y substitutis aequationes quas adhuc resolui oportet diuisione per λ facta ita erunt comparatae:

$$\text{I. } \frac{ddX'}{dt^2} - \frac{2dY'}{dt} - 3X', + \frac{aa}{vv}\text{cof.}(\Phi - t) + \frac{aa}{w^3}(a(1 + X) - v\,\text{cof.}(\Phi - t)) = 0.$$

$$\text{II. } \frac{ddY'}{dt^2} + \frac{2dX'}{dt}, \qquad + \frac{aa}{vv}\text{fin.}(\Phi - t) + \frac{aa}{w^3}(aY - v\;\text{fin.}(\Phi - t)) = 0$$

18. Quia hic termini postremi solas quantitates cognitas complectuntur, quas ad quoduis tempus facile assignare licet, statuamus breuitatis gratia

$$U = \frac{aa}{vv}\text{cof.}(\Phi - t) + \frac{aa}{w^3}(a(1 + X) - v\,\text{cof.}(\Phi - t))$$

et

et

$$V = \frac{aa}{vv} \text{ſin.}(\Phi - t) + \frac{aa}{v^3}{}'a\, Y - v\,\text{ſin.}(\Phi - t))$$

et poſterior aequatio ducta in dt et integrata ſtatim praebet:

$$\frac{dY'}{dt} + 2X' + \int V\, dt = 0$$

vnde fit

$$\frac{dY'}{dt} = -2X' - \int V\, dt$$

qui valor in priori ſubſtitutus dat

$$\frac{ddX'}{dt^2} + X' + 2\int V\, dt + U = 0$$

quam igitur integrari oportet.

19. Euadet autem haec aequatio integrabilis, multiplicando eam per $dt\,\text{coſ}\,t$, quippe integrale reperitur:

$$\frac{dX'}{dt}\text{coſ.}\,t + X'\,\text{ſin.}\,t + 2\int dt.\text{coſ.}\,t \int V\,dt + \int U\,dt.\,\text{coſ.}\,t = 0$$

quae expreſſio facile reducitur ad hanc:

$$\frac{dX'}{dt}.\,\text{coſ.}\,t + X'.\,\text{ſin.}\,t + 2\,\text{ſin.}\,t \int V\,dt - 2\int V\,dt\,\text{ſin.}\,t$$
$$+ \int U\,dt\,\text{coſ.}\,t = 0$$

quae diuiſa per $\text{coſ.}\,t^2$ denuo redditur integrabilis. Sed multo facilius ſcopum attingemus ſi ipſam aequationem differentialem ſecundi gradus in $dt\,\text{ſin.}\,t$ ducamus, tum enim integrale deprehenditur fore

$$\frac{dX'}{dt}\text{ſin.}\,t - X'.\text{coſ.}\,t + 2\int dt\,\text{ſin.}\,t \int V\,dt + \int U\,dt.\,\text{ſin.}\,t = 0$$

quae pari modo reducitur ad hanc formam:

$$\frac{dX'}{dt}\,\text{ſin.}\,t - X'.\,\text{coſ.}\,t - 2\,\text{coſ.}\,t \int V\,dt + 2\int V\,dt\,\text{coſ.}\,t$$
$$+ \int U\,dt\,\text{ſin.}\,t = 0$$

20.

20. Ex his duabus aequationibus differentialibus primi gradus elidamus differentiale $d\,X'$, quod fit dum prima in fin. t altera vero in $-$ cof t ducitur, tum enim prodit

$$\begin{aligned} X' + 2\int V\,dt - 2\,\text{fin.}\,t\int V\,dt.\,\text{fin.}\,t + \text{fin.}\,t\int U\,dt\;\text{cof.}\,t \\ - 2\,\text{cof.}\,t\int V\,dt.\text{cof.}\,t - \text{cof.}\,t\int U\,dt.\,\text{fin.}\,t \end{aligned} = 0$$

ficque hinc impetramus

$$X' = -2\int V\,dt \begin{aligned} &+ 2\,\text{fin.}\,t\int V\,dt.\,\text{fin.}\,t - \text{fin.}\,t\int U\,dt.\text{cof.}\,t \\ &+ 2\,\text{cof.}\,t\int V\,dt.\text{cof.}\,t + \text{cof.}\,t\int U\,dt.\,\text{fin.}\,t \end{aligned}$$

Quo autem hinc facilius etiam alteram coordinatam y eruamus, vtamur formula iam fupra inuenta

$$d\,Y' = -2\,X'\,d\,t - d\,t\int V\,d\,t\,,$$ hoc eft

$$\begin{aligned} dY' = +3\,dt\int V\,dt - 4.dt.\,\text{fin.}\,t\int V\,dt\,\text{fin.}\,t + 2\,dt\,\text{fin.}\,t\int U\,dt.\text{cof.}\,t \\ - 4.dt.\text{cof.}\,t\int V\,dt.\text{cof.}\,t - 2\,dt.\,\text{cof.}\,t\int U\,dt.\text{fin.}\,t \end{aligned}$$

quas fingulas partes fequenti modo integramus

$$\int d\,t\int V\,d\,t = t\int V\,d\,t - \int V\,t\,d\,t$$

quae reductio autem nihil iuuat:

$$\int dt\,\text{fin.}\,t\int V\,dt\,\text{fin.}\,t = -\text{cof.}\,t\int V\,dt.\,\text{fin.}\,t + \int V\,dt.\text{fin.}\,t\,\text{cof.}\,t$$

$$\int dt\,\text{cof.}\,t\int V\,dt\,\text{cof.}\,t = +\,\text{fin.}\,t\int V\,dt\;\text{cof.}\,t - \int V\,dt\;\text{fin.}\,t.\text{cof.}\,t$$

$$\int dt\,\text{fin.}\,t\int U\,dt\,\text{cof.}\,t = -\,\text{cof.}\,t\int U\,dt\,\text{cof.}\,t + \int U\,dt.\,\text{cof.}\,t^2$$

$$\int dt\,\text{cof.}\,t\int U\,dt\,\text{fin.}\,t = +\,\text{fin.}\,t\int U\,dt.\,\text{fin.}\,t - \int U\,dt.\text{fin.}\,t^2$$

vnde colligimus fequentem valorem:

$$\begin{aligned} Y' = +3\int dt\int V\,dt + 4\,\text{cof.}\,t\int V\,dt.\text{fin.}\,t - 2\,\text{cof.}\,t\int U\,dt\,\text{cof.}\,t + 2\int U\,dt \\ - 4\,\text{fin.}\,t\int V\,dt.\,\text{cof.}\,t - 2\,\text{fin.}\,t\int U\,dt.\,\text{fin.}\,t. \end{aligned}$$

21.

21. Ad quoduis ergo tempus valores vtriusque quantitatis X' et Y' eliciumus, quos concinnius adhuc sequenti modo repraesentare licet

$$X' = -2\int V\,dt + \operatorname{cof.} t\left(\int dt\,(2V\operatorname{cof.} t + U\operatorname{fin} t)\right)$$
$$+\operatorname{fin.} t\left(\int dt\,(2V\operatorname{fin} t - U\operatorname{cof.} t)\right)$$
$$Y' = +3\int dt\int V dt + 2\int U dt + 2\operatorname{cof.} t\left(\int dt\,(2V\operatorname{fin.} t - U\operatorname{cof.} t)\right)$$
$$-2\operatorname{fin.} t\left(\int dt\,(2V\operatorname{cof.} t + U\operatorname{fin} t)\right)$$

quemadmodum autem quouis casu has formulas tractari conueniat, in sequentibus fusius sumus explicaturi.

22. Quod autem ad constantes attinet, quae his integrationibus inuehuntur, eas his quatuor formis complecti licet:

I°. A; II°. Bt; III°. $C\operatorname{cof.} t$ et IV°. $D\operatorname{fin.} t$

quarum prima locum medium respicit, secunda ad ipsum motum medium pertinet, duae autem postremae formulae ad locum aphelii reducuntur. Quare si iam supra haec elementa rite constituta esse assumimus, has quoque constantes in sequentibus praetermittere poterimus. Verum quo melius has formulas expedire queamus, imprimis attendi oportet, actionem Veneris duabus contineri partibus, quarum prior denominatorem habet $v\,v$, posterior vero w^3, illam quoniam ad Solem refertur partem Solarem vocemus, alteram vero qua Venus immediate in terram agit partem terrestrem atque omnino conueniet has duas partes a se inuicem distingui.

23. Denique circa formulas cof. t et fin. t, quae in haec integralia funt ingreffae obferuandum eft, angulum t catenus tantum effe introductum, quatenus eius differentiale eft dt, neque idcirco terminum a quo iftum angulum computari oportet, effe praefcriptum, fiquidem eadem integralia prodire deberent, fi loco t fcriberetur $t + \alpha$, fcilicet ifta conftans α in ipfa euolutione iterum ex calculo elidetur, quemadmodum mox clarius apparebit. Hoc ideo monendum duximus, ne quis putet hunc angulum t perinde atque illum qui fupra eft introductus a loco Aphelii effe computandum.

De parte priore actionis Veneris Solari dicta.

24. Hic igitur littera U denotabit formulam:

$$\frac{a\,a}{v\,v} \text{ cof. } (\Phi - t)$$

pro priori aequatione, littera autem

$$V = \frac{a\,a}{v\,v} \text{ fin. } (\Phi - t)$$

pro aequatione pofteriori. Hasque formulas iterum fubdiuidere licet, quatenus vel ad folum motum medium fpectamus, vel etiam excentricitatis Veneris rationem habere velimus, quod pofterius fuperfluum videri poteft, quum orbita Veneris minimam habeat excentricitatem, vnde vix vllus effectus in perturbationem Terrae oriri poteft.

25. Denotet igitur b diftantiam mediam Veneris a Sole et quia excentricitatem negligimus, habebimus $v = b$, tum vero angulus Φ longitudinem Vene-

Veneris mediam designabit, ideoque angulus $\Phi - \mathfrak{v}$ elongationem mediam Veneris a Terra e Sole spectatam. Designemus igitur hanc elongationem angulo $= p$, qui quum tempori sit proportionalis, ponamus $\frac{dp}{dt} = m$ hinc igitur erit

$$\mathrm{U} = \frac{aa}{bb} \operatorname{cof.} p \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \frac{aa}{bb} \operatorname{fin.} p.$$

Vnde colligimus

$$2\,\mathrm{V} \operatorname{cof.} t + \mathrm{U} \operatorname{fin.} t = \frac{aa}{bb}\left(\tfrac{1}{2} \operatorname{fin.}(p-t) + \tfrac{3}{2} \operatorname{fin.}(p+t)\right)$$

$$2\,\mathrm{V} \operatorname{fin.} t - \mathrm{U} \operatorname{cof.} t = \frac{aa}{bb}\left(+\tfrac{1}{2} \operatorname{cof.}(p-t) - \tfrac{3}{2} \operatorname{cof.}(p+t)\right).$$

26. His igitur notatis singulae formulae integrales, quae valores X' et Y' constituunt sequenti modo se habebunt:

$$\int \mathrm{V}\, dt = \frac{aa}{bb} \int \operatorname{fin.} p . dt = -\frac{aa}{bb} \cdot \frac{\operatorname{cof.} p}{m}$$

$$\int dt (2\,\mathrm{V} \operatorname{cof.} t + \mathrm{U} \operatorname{fin.} t) = \frac{aa}{bb} \int dt \left(\tfrac{1}{2} \operatorname{fin.}(p-t) + \tfrac{3}{2} \operatorname{fin.}(p+t)\right)$$
$$= -\frac{aa}{bb}\left(\frac{\operatorname{cof.}(p-t)}{2(m-1)} + \frac{3 \operatorname{cof.}(p+t)}{2(m+1)}\right)$$

$$\int dt (2\,\mathrm{V} \operatorname{fin.} t - \mathrm{U} \operatorname{cof.} t) = \frac{aa}{bb} \int dt \left(\tfrac{1}{2} \operatorname{cof.}(p-t) - \tfrac{3}{2} \operatorname{cof.}(p+t)\right)$$
$$= \frac{aa}{bb}\left(\frac{\operatorname{fin.}(p-t)}{2(m-1)} - \frac{3 \operatorname{fin.}(p+t)}{2(m+1)}\right)$$

$$\int dt \int \mathrm{V}\, dt = -\frac{aa}{bb} \cdot \frac{\operatorname{fin.} p}{mm} ; \quad \int \mathrm{U}\, dt = \frac{aa}{bb} \cdot \frac{\operatorname{fin.} p}{m}$$

vnde colligimus ipsas quantitates X' et Y'

$$X' = \frac{aa}{bb}\left(\frac{2 \operatorname{cof.} p}{m} - \frac{\operatorname{cof.} p}{2(m-1)} - \frac{3 \operatorname{cof.} p}{2(m+1)}\right) = \frac{aa}{bb} \cdot \frac{m-2 . \operatorname{cof.} p}{m(mm-1)}$$

$$Y' = \frac{aa}{bb}\left(-\frac{3 \operatorname{fin.} p}{mm} + \frac{2 \operatorname{fin.} p}{m} + \frac{\operatorname{fin.} p}{(m-1)} - \frac{3 \operatorname{fin.} p}{m+1}\right) = \frac{aa}{bb}\left(\frac{(m^2 - 2m + 3) \operatorname{fin.} p}{mm(m^2-1)}\right).$$

27. Omnino hic insigne dubium occurrit, quod casu $m = 1$ vtraque haec quantitas abeat in infinitum,

tum, quod vtique maxime esset absurdum, verum perpendendum est, hoc casu angulum p, abire in t et quia iam supra vidimus ob constantes integrationum, ingredi talem formam indefinitam $A + Bt + C\,\text{cos}.\,t + D\,\text{fin}.\,t$, manifestum est illud infinitum constantibus C vel D tolli posse. Ceterum hic ipse casus $m = 1$ peculiarem meretur resolutionem, tum enim erit angulus $p - t$ constans qui sit α, vnde integrando erit

$$\int dt(2V\,\text{cof}.\,t + U\,\text{fin}.\,t) = \tfrac{aa}{bb}(\tfrac{1}{2}t\,\text{fin}.\,\alpha - \tfrac{3}{4}\text{cof}.(p+t))$$

$$\int dt(2V\,\text{fin}.\,t - U\,\text{cof}.\,t) = \tfrac{aa}{bb}(\tfrac{1}{2}t\,\text{cof}.\,\alpha - \tfrac{3}{4}\text{fin}.(p+t))$$

quamobrem hoc casu consequimur

$$X' = \tfrac{aa}{bb}(2\,\text{cof}\,p + \tfrac{1}{2}t.\,\text{fin}.(t+\alpha) - \tfrac{3}{4}\text{cof}\,p) = \tfrac{aa}{bb}(\tfrac{5}{4}\text{cof}.p + \tfrac{1}{2}t.\text{fin}.(t+\alpha))$$

$$Y' = \tfrac{aa}{bb}(-\text{fin}.p + t\,\text{cof}.(t+\alpha) - \tfrac{3}{2}\text{fin}.p) = \tfrac{aa}{bb}(-\tfrac{5}{2}\text{fin}.p + t\,\text{cof}.(t+\alpha)).$$

Vbi notandum his formulis

$$\tfrac{1}{2}t\,\text{fin}.(t+\alpha) \quad \text{et} \quad t\,\text{cof}.(t+\alpha)$$

motum aphelii terrae innui.

28. Hactenus tantum ad motum medium Veneris respeximus neglecta excentricitate, interim tamen operae pretium est etiam huius rationem habere, sit igitur $\varkappa$ ista excentricitas et angulus q anomalia media Veneris fiatque $dq = n\,dt$, quo posito habebimus vti constat

$$v = b(1 + \varkappa\,\text{cof}.\,q) \quad \text{et} \quad \Phi = \zeta - 2\varkappa\,\text{fin}.\,q,$$

denotante ζ longitudinem mediam, ita vt sit $\zeta - t = p$, quum ergo iam sit

$$\Phi - t = p - 2\varkappa\,\text{fin}.\,q$$

erit

erit

$$\sin.(\Phi-t)=\sin.p-2\varkappa\sin.q\cos.p \quad \text{et} \quad \cos.(\Phi-t)=\cos.p+2\varkappa\sin.p.\sin.q.$$

Ergo quia

$$\frac{1}{vv}=\frac{1}{bb}(1-2\varkappa\cos.q),$$

hinc colligemus:

$$U=\frac{aa}{bb}(\cos.p-2\varkappa\cos.(p+q)) \text{ et } V=\frac{aa}{bb}(\sin.p-2\varkappa\sin.(p+q)).$$

29. Quoniam autem ea quae a partibus potioribus oriuntur iam expidiuimus, sumamus tantum

$$U=+\frac{\varkappa aa}{bb}(-2\cos.(p+q)) \quad \text{et} \quad V=\frac{\varkappa aa}{bb}(-2\sin.(p+q))$$

hincque porro

$$2V\cos.t+U\sin.t=\frac{\varkappa aa}{bb}(-\sin.(p+q-t)-3.\sin.(p+q+t))$$

$$2V\sin.t-U\cos.t=\frac{\varkappa aa}{bb}(-\cos.(p+q-t)+3\cos.(p+q+t))$$

atque hinc deducimus integralia nostra

$$\int V\,dt=\frac{\varkappa aa}{bb}\left(\frac{2\cos.(p+q)}{m+n}\right)$$

$$\int dt(2V\cos.t+U\sin.t)=\frac{\varkappa aa}{bb}\left(+\frac{\cos.(p+q-t)}{m+n-1}+\frac{3\cos.(p+q+t)}{m+n+1}\right)$$

$$\int dt(2V\sin.t-U\cos.t)=\frac{\varkappa aa}{bb}\left(-\frac{\sin.(p+q-t)}{m+n-1}+\frac{3\sin.(p+q+t)}{m+n+1}\right)$$

$$\int dt\int V\,dt=\frac{\varkappa aa}{bb}\left(\frac{2\sin.(p+q)}{(m+n)^2}\right);\ \int U\,dt=\frac{\varkappa aa}{bb}\left(-\frac{2\sin.(p+q)}{m+n}\right).$$

30. Ex his itaque colligimus quaesitos valores pro X' et Y' vti sequuntur:

$$X'=\frac{\varkappa aa}{bb}\left(-\frac{4\cos.(p+q)}{m+n}+\frac{\cos.(p+q)}{m+n-1}+\frac{3\cos.(p+q)}{m+n+1}\right)$$

$$=\frac{\varkappa aa}{bb}\left(\frac{-2(m+n-2)}{(m+n)((m+n)^2-1)}\right).\cos.(p+q)$$

$$Y'=\frac{\varkappa aa}{bb}\left(+\frac{6.\sin.(p+q)}{(m+n)^2}-\frac{4\sin.(p+q)}{m+n}-\frac{2\sin.(p+q)}{m+n-1}+\frac{6.\sin.(p+q)}{m+n+1}\right)$$

$$=\frac{2\varkappa aa}{bb}\frac{((m+n)^2-2(m+n+2))}{(m+n)^2((m+n)^2-1)}\sin.(p+q).$$

 Omnino

Omnino igitur ex parte Solari actionis Veneris oriuntur sequentes valores pro nostris X' et Y'

$$X' = \frac{aa}{bb} \cdot \frac{m-2}{m(m^2-1)} \operatorname{cos}. p - \frac{2\varkappa aa}{bb} \cdot \frac{m+n-2}{(m+n)((m+n)^2-1)} \operatorname{cos}.(p+q)$$

$$Y' = \frac{aa}{bb} \cdot \frac{(m^2-2m+3)}{mm(m^2-1)} \operatorname{sin}. p - \frac{2\varkappa aa}{bb} \left(\frac{(m+n)^2-2(m+n)+3}{(m+n)^2((m+n)^2-1)} \right) \operatorname{sin}.(p+q)$$

quas formulas quum in genere euoluere licuerit, manifestum est easdem etiam ad actionem, cuiusuis alius Planetae in terram agentis accommodari posse, quin etiam loco Terrae quemlibet alium Planetam primarium substituere licebit, ita vt ea quae hactenus sunt tradita ad motum cuiusuis Planetae ab alio quocunque perturbatum transferri queant.

De parte altera terrestri actionis Veneris.

31. Hic igitur habemus:

$$U = \frac{aa}{w^3}(a(1+X) - v \operatorname{cos}.(\Phi - t)) \text{ et } V = \frac{aa}{w^3}(aY - v \operatorname{sin}.(\Phi - t))$$

quas formulas gemino modo tractari conueniet, primo scilicet tam pro terra, quam pro Venere ad solum motum medium respiciemus, quae tractatio tamquam fundamentum constituet perturbationis totalis, quandoquidem perturbatio hinc enata, neque ab excentricitate terrae neque Veneris pendebit, sed pro omnibus reuolutionibus easdem inaequalitates exhibebit a sola elongatione Veneris a terra pendentes, dum contra si excentricitatis ratio habeatur, quaelibet reuolutio peculiarem euolutionem requireret, prouti scilicet rectae ⊙♁ et ⊙♀ respectu vtriusque lineae apsidum fuerint dispositae.

32. Primum igitur ad motum medium tantum attendentes, habebimus 1°. $X = 0$ et $Y = 0$, tum vero erit $v = b$ et angulus $\Phi - t = p$, cui respondet numerus $m = \frac{dp}{dt}$ hinc autem deducitur distantia

$$♀♁ = w = \sqrt{(aa - 2bb \operatorname{cos}. p + bb)}$$

atque hinc pro nostris formulis integrandis, fiet

$$U = \frac{a^2 (a - b \operatorname{cos}. p)}{(aa - 2ab. \operatorname{cos}. p + bb)^{3:2}} \text{ et } V = -\frac{aa}{w^3} b. \operatorname{sin}. p$$

vnde porro deducimus

$$2V \operatorname{cos}. t + U \operatorname{sin}. t = \frac{aa}{w^3} (a \operatorname{sin}. t - \tfrac{1}{2} b. \operatorname{sin}. (p-t) - \tfrac{3}{2} b \operatorname{sin}. (p+t))$$

$$2V \operatorname{sin}. t - U \operatorname{cos}. t = \frac{aa}{w^3} (-a \operatorname{cos}. t - \tfrac{1}{2} b \operatorname{cos}. (p-t) + \tfrac{3}{2}. b \operatorname{cos}. (p+t))$$

vbi in subsidium calculi notasse iuuabit fore

$$w^2 = (a - b \operatorname{cos}. p)^2 + bb \operatorname{sin}. p^2.$$

33. Tabulas autem Astronomicas motuum terrae et Veneris consulentes, sumta distantia terrae media $= 1$, reperimus distantiam mediam Veneris $b = 0,72340$, deinde quum motus medius Solis per 30 dies $29°. 34'. 10'' = 106450''$, Veneris autem per idem interuallum $48°. 3'. 54'' = 173034$ erit motus Veneris a terra $= 18°. 29'. 44'' = 66584$ hincque definitur numerus noster $m = \frac{dp}{dt} = \frac{66584}{106450} = 0,62549$, sicque angulo $t = 10°$, respondet angulus $p = 6°. 15'. 18''$ ideoque angulo $t = 5°$, respondebit $p = 3°. 7'. 39''$.

34. Hic autem ſtatim maxima difficultas occurrit in formula irrationali

$$w = V(aa - 2ab\,\text{coſ.}\,p + bb)$$

quam nullo modo in ſeriem conuergentem reſoluere licet, id quod integratio more praecedente inſtituenda requireret, quam ob cauſſam integralia noſtra, mechanice tantum definire cogimur, id quod ſequenti modo praeſtari poterit. Incipiamus ab eiusmodi ſitu, quo terra et Venus erant in coniunctione veluti terra in T et Venus in V, a quo ſitu motum vtrinque per exigua interualla vsque ad coniunctionem ſequentem proſequamur. Haec autem interualla aequalia faciamus, quibus angulus $p = 5^\circ$ reſpondeat, ita vt integra reuolutio in 72 momenta diuidatur, pro ſingulis autem fiet angulus $t = \frac{1}{m}.\,5^\circ = 7^\circ.\,59'.\,37''$ pro quo commode 8° vſurpare liceret.

Tab. X. Fig. 2.

Pro ipſo ergo hoc initio ob $a = 1$, et $b = 0{,}72340$ et $p = 0$ reperitur $w = a - b = 0{,}27660$, hincque

$$\text{U} = 13{,}07060\,; \quad \text{et V} = 0$$

hinc ob $t = 0$

$$2\,\text{V coſ.}\,t + \text{U ſin.}\,t = 0 \text{ et}$$

$$2\,\text{V ſin.}\,t - \text{U coſ.}\,t = -13{,}07060.$$

Pro ſequentibus momentis calculus ita commodiſſime inſtituetur: ſumtis valoribus $a - b\,\text{coſ.}\,p$ et $b\,\text{ſin.}\,p$, quaeratur angulus A vt ſit tang. $\text{A} = \frac{b\,\text{ſin.}\,p}{a - b\,\text{coſ.}\,p}$ ſcilicet erit $\text{A} = \odot\,♁\,♀$, vnde ſtatim deducitur

$$♀\,♁ = \frac{b\,\text{ſin.}\,p}{\text{ſin.}\,\text{A}} = (a - b\,\text{coſ.}\,p)\,\text{ſec. A}$$

Deinde

Deinde inuentis U et V, quaeratur angulus B vt fit tang. $B = \frac{2V}{U}$, tum enim reperietur

$$2V\cos t + U\sin t = \frac{U.\sin.(B+t)}{\cos.B} = U\sin.(B+t)\,\mathrm{Sec}.B$$

$$2V\sin.t - U\cos t = -U.\,\mathrm{Sec}.B.\cos.(B+t).$$

Quare fecundum haec praecepta, fingula illa momenta euoluantur.

35. Secundum haec praecepta computata eft fequens tabula quae pro fingulis momentis exhibet valores quantitatum p, t, Log. w, Log. U, Log. V, L(2 V cof. t + U fin. t), Log. (2 V fin. t − U cof. t).

p	$t.$	Log. w	Log. U
0	0.	9, 4418522	1, 1162956
5	7°. 59′. 37″	9, 4569345	1, 0753452
10	15. 59.	9, 4967064	0, 9686546
15	23. 59.	9, 5498767	0, 8292970
20	31. 58.	9, 6070652	0, 6842664
25	39. 58.	9, 6632535	0, 5472774
30	47. 58.	9, 7159907	0, 4243418
35	55. 57.	9, 7645091	0, 3165150
40	63. 57.	9, 8089831	0, 2222297
45	71. 56.	9, 8495749	0, 1402221
50	79. 56.	9, 8865906	0, 0685901
55	87 56.	9, 9205273	0, 0056333
60	95. 55.	9, 9515346	9, 9504210
65	103. 55.	9, 9800156	9, 9014878
70	111. 55.	0, 0060488	9, 8584063
75	119. 54.	0, 0301129	9, 8196290
80	127. 54.	0, 0522237	9, 7850291
85	135. 53.	0, 0726427	9, 7537930
90	143. 53.	0, 0914012	9, 7257964
95	151. 53.	0, 1086588	9, 7005732
100	159. 52.	0, 1245604	9, 6777106
105	167. 52.	0, 1391401	9, 6571146
110	175. 52.	0, 1524578	9, 6386393
115	183. 51.	0, 1646910	9, 6217770
120	191. 51.	0, 1757526	9, 6068236

Log. V.	L. P. I.	Log. P. II.
− ∞	− ∞	−1,1162956
0,4288710	+0,8434623	−1,0426259
0,6089295	1,0159197	−0,8264993
0,6227446	1,0174272	−0,4404008
0,5722346	0,9490722	−9,1687130
0,4955663	0,8490539	+0,1205327
0,4103764	0,7337769	+0,3099703
0,3244425	0,6107520	+0,3686832
0,2404967	0,4809425	+0,3789528
0,1602388	0,3444499	+0,3659349
0,0838607	0,1978678	+0,3392659
0,0111601	0,0359778	+0,3039294
9,9423053	9,8493453	+0,2632829
9,8766074	9,6144753	+0,2182427
9,8142179	9,2622612	+0,1699952
9,7539836	+7,8124342	+0,1182556
9,6960589	−9,1114274	+0,0638452
9,6397946	9,3644290	+0,0062803
9,5851749	9,4887634	+9,9460757
9,5317463	9,5604947	+9,8826492
9,4790488	9,6043823	+9,8159294
9,4269020	9,6305167	+9,7452747
9,3749909	9,6451575	+9,6704380
9,3225812	9,6507382	+9,5904115
9,2696513	−9,6505104	+9,5043127

p	t	Log. ϖ	Log. U
125	199. 50.	0,1858533	9,5931719
130	207. 50.	0,1948645	9,5812410
135	215. 50.	0,2029675	9,5705114
140	223. 49.	0,2100971	9,5612044
145	231. 49.	0,2163564	9,5530321
150	239. 49.	0,2217224	9,5460806
155	247. 48.	0,2260475	9,5408179
160	255. 48.	0,2299155	9,5355035
165	263. 47.	0,2327592	9,5318509
170	271. 47.	0,2347756	9,5292808
175	279. 47.	0,2359843	9,5277396
180	287. 46.	0,2363861	9,5272278

Log. V.	I. P. I.	Log. P. II.
9,2151831	−9,6451785	+9,4104024
9,1590389	−9,6366590	+9,3063203
9,0999610	−9,6246553	+9,1915869
9,0371547	−9,6120469	+9,0486173
8,9689026	−9,5975991	+8,8725635
8,8931813	−9,5827465	+8,6187154
8,8071843	−9,5683258	+8,0966748
8,7036837	−9,5532548	−8,1410493
8,5740971	−9,5395963	−8,5767402
8,3948218	−9,5270811	−8,7792723
8,0917220	−9,5158652	−8,9115587
−∞	−9,5060048	−9,0117288

36. Repraesententur haec momenta more Geometrico, super axe A O per interualla aequalia A B, B C, C D etc. et in his singulis punctis applicatae erigantur A a, B b, C c etc. referentes eas quantitates U vel V, vel 2 V cos. t + U sin. t vel 2 V sin. t − U cos. t quas integrari oportet, ita vt areae huius lineae curuae exhibeant integralia quaesita, atque iam manifestum est, si inuenta fuerit area AakK, sequentem AalL facile inueniri si ad illam addatur trapezium KklL, cuius area proxime est $\frac{1}{2}$K L (Kk+Ll), verum quia hoc interuallum K L quasi esset $= dt$ est $= 7^\circ. 59'. 37''$ eius valor in partibus radii expressus erit 0, 1394835 cuius log. est 9, 1438047 singula autem integralia ita capiamus, vt in ipso initio A euanescant, hos igitur calculos sequens Tabula exhibebit : Tab. X. Fig. 3.

p	$\int U\,dt$	$\int V\,dt$
0	+ 0	+ 0
Incr.	1,7383	0,1869
5.	1,7383	0,1869
Incr.	1,4760	0,4698
10.	3,2143	0,6567
Incr.	1,1178	0,5750
15.	4,3321	1,2317
Incr.	0,8066	0,5522
20.	5,1387	1,7839
Incr.	0,5815	0,4780
25.	5,7202	2,2619
Incr.	0,4299	0,3970
30.	6,1501	2,6589
Incr.	0,3292	0,3260
35.	6,4793	2,9849
Incr.	0,2604	0,2680
40.	6,7397	3,2529
Incr.	0,2122	0,2218
45.	6,9519	3,4847
Incr.	0,1776	0,1852
50.	7,1295	3,6699
Incr.	0,1520	0,1559
55.	7,2815	3,8258
Incr:	0,1324	0,1324
60.	7,4139	3,9582
Incr.	0,1176	0,1134
65.	+ 7,5315	+ 4,0716

$\int dt \int V\,dt$	$\int dt(2V\cos t + U\sin t)$	$\int dt(2V\sin t - U\cos t)$
+ 0	+ 0	− 0
0,0130	0,4855	− 1,6782
0,0130	0,4855	− 1,6782
0,0588	1,2077	− 1,2351
0,0718	1,6932	− 2,9133
0,1317	1,4470	− 0,6589
0,2035	3,1402	− 3,5722
0,2101	1,3440	− 0,2022
0,4136	4,4842	− 3,7744
0,2817	1,1110	+ 0,0816
0,6953	5,5952	− 3,6928
0,3426	0,8690	+ 0,2340
1,0379	6,4642	− 3,4588
0,3937	0,6612	+ 0,3048
1,4316	7,1254	− 3,1540
0,4390	0,4948	+ 0,3293
1,8706	7,6202	− 2,8247
0,4701	0,3646	+ 0,3283
2,3407	7,9848	− 2,4964
0,4991	0,2637	+ 0,3137
2,8398	8,2485	− 2,1827
0,5214	0,1854	+ 0,2922
3,3612	8,4339	− 1,8905
0,5454	0,1249	+ 0,2678
3,9066	8,5588	− 1,6227
0,5591	+ 0,0780	+ 0,2427
+ 4,4657	+ 8,6368	− 1,3800

p

p	$\int V\,dt$	$\int V\,dt$
65.	+7,5315	+4,0716
Incr.	0,1058	0,0977
70.	7,6373	4,1693
Incr.	0,0963	0,0848
75.	7,7336	4,2541
Incr.	0,0884	0,0741
80.	7,8220	4,3282
Incr.	0,0819	0,0650
85.	7,9039	4,3932
Incr.	0,0765	0,0572
90.	7,9804	4,4504
Incr.	0,0719	0,0505
95.	8,0523	4,5009
Incr.	0,0680	0,0447
100.	8,1203	4,5456
Incr.	0,0647	0,0396
105.	8,1850	4,5852
Incr.	0,0619	0,0351
110.	8,2469	4,6203
Incr.	0,0595	0,0311
115.	8,3064	4,6514
Incr.	0,0574	0,0270
120.	8,3638	4,6784
Incr.	0,0556	0,0244
125.	8,4194	4,7028
Incr.	0,0541	0,0214
130.	+8,4635	+4,7242

$\int V\,dt$

$\int V\,dt$	$\int dt\,(2V\cos. + U\sin. t)$	$\int dt\,(2V\sin. t - U\cos. t)$
+ 4,4657	+ 8,6368	− 1,3800
0,5738	+ 0,0415	+ 0,2181
5,0395	+ 8,6783	− 1,1619
0,5865	+ 0,0132	+ 0,1944
5,6260	+ 8,6915	− 0,9[illegible]75
0,5976	− 0,0086	+ 0,1721
6,[illegible]230	+ 8,6829	− 0,7954
0,6073	− 0,0251	+ 0,1514
6,8309	+ 8,6578	− 0,6440
0,6158	− 0,0376	+ 0,1322
7,4467	+ 8,6202	− 0,5118
0,6232	− 0,0467	+ 0,1146
8,0699	+ 8,5735	− 0,3972
0,[illegible]299	− 0,0533	+ 0,0987
8,6998	+ 8,5202	− 0,2985
0,6357	− 0,0578	+ 0,0843
9,3355	+ 8,4624	− 0,2142
0,6409	− 0,0605	+ 0,0713
9,9764	+ 8,4019	− 0,1429
0,6456	− 0,0618	+ 0,0598
10,6220	+ 8,3401	− 0,0831
0,6497	− 0,0622	+ 0,0495
11,2717	+ 8,2779	− 0,0326
0,6531	− 0,0618	+ 0,0401
11,9248	+ 8,2161	+ 0,0075
0,6563	− 0,0608	+ 0,0320
+ 12,5811	+ 8,1553	+ 0,0395

p	$\int U\,dt$	$\int V\,dt$
130.	+ 8,4635	+ 4,7242
Incr.	0,0525	0,0188
135.	8,5160	4,7430
Incr.	0,0512	0,0163
140.	8,5672	4,7593
Incr.	0,0501	0,0140
145.	8,6173	4,7733
Incr.	0,0493	0,0119
150.	8,6666	4,7852
Incr.	0,0487	0,0099
155.	8,7153	4,7951
Incr.	0,0481	0,0080
160.	8,7634	4,8031
Incr.	0,0476	0,0061
165.	8,8110	4,8092
Incr.	0,0473	0,0043
170.	8,8583	4,8135
Incr.	0,0471	0,0026
175.	8,9054	4,8161
Incr.	0,0469	0,0009
180.	+ 8,9523	+ 4,8170

37. Hinc iam facile colligentur valores tam ipsius X' quam Y', ope formularum traditarum §. 21. quos in sequente Tabula exhibebimus, iis autem insuper adiungemus, perturbationis priores illas partes ex actione Solari oriundas, neglecta scilicet excen-

$\int dt \int V dt$	$\int dt(2V\cos.t + U\sin.t)$	$\int dt(2V\sin.t - U\cos.t)$
+12,5811	+8,1553	+0,0395
+0,6591	−0,0594	+0,0249
+13,2402	+8,0959	+0,0644
+0,6616	−0,0578	+0,0186
+13,9018	+8,0381	+0,0830
+0,6638	−0,0560	+0,0130
+14,5656	+7,9821	+0,0960
+0,6656	−0,0541	+0,0082
+15,2312	+7,9280	+0,1042
+0,6670	−0,0524	+0,0038
+15,8982	+7,8756	+0,1080
+0,6682	−0,0507	+0,0000
+16,5664	+7,8249	+0,1080
+0,6692	−0,0490	−0,0035
+17,2356	+7,7759	+0,1045
+0,6699	−0,0475	−0,0068
+17,9055	+7,7284	+0,0977
+0,6704	−0,0462	−0,0099
+18,5759	+7,6822	+0,0888
+0,6707	−0,0451	−0,0130
+19,2466	+7,6371	+0,0758

excentricitate Veneris, inuenimus autem fupra iftam partem priorem pro angulo p

$$X' = \frac{aa}{bb'} \cdot \frac{m-2}{m.(m^2-1)} \text{cof.}\, p = +6,8980.\ \text{cof.}\, p$$

coefficientis Logarithmo exiftente +0,8387228

$$Y' = \frac{aa}{bb'} \cdot \frac{m^2-2m+3}{mm(mm-1)} \text{fin.}\, p = -17,17201.\ \text{fin.}\, p$$

coefficientis Logarithmo exiftente = −1,2348211.

 Tabu-

Tabula pro X et Y

pro X

	pars I.	pars II.	totum
$p = 0$	+ 6, 8980	0	+ 6, 8980
5°	+ 6, 8717	− 0, 1266	+ 6, 7451
10	+ 6, 7932	− 0, 4879	+ 6, 3053
15	+ 6, 6629	− 1, 0463	+ 5, 6166
20	+ 6, 4820	− 1, 7619	+ 4, 7201
25	+ 6, 2517	− 2, 6075	+ 3, 6442
30	+ 5, 9738	− 3, 5586	+ 2, 4152
35	+ 5, 6505	− 4, 5935	+ 1, 0570
40	+ 5, 2841	− 5, 6971	− 0, 4130
45	+ 4, 8776	− 6, 8664	− 1, 9888
50	+ 4, 4339	− 8, 0471	− 3, 6132
55	+ 3, 9565	− 9, 2368	− 5, 2803
60	+ 3, 4490	− 10, 4127	− 6, 9637
65	+ 2, 9152	− 11, 5599	− 8, 6447
70	+ 2, 3593	− 12, 6624	− 10, 3031
75	+ 1, 7853	− 13, 6795	− 11, 8942
80	+ 1, 1978	− 14, 6178	− 13, 4200
85	+ 0, 6012	− 15, 4503	− 14, 8491
90	+ 0, 0000	− 16, 1661	− 16, 1661
95	− 0, 6012	− 16, 7507	− 17, 3519
100	− 1, 1978	− 17, 1934	− 18, 3912
105	− 1, 7853	− 17, 4888	− 19, 2741
110	− 2, 3593	− 17, 6309	− 19, 9902
115	− 2, 9152	− 17, 6185	− 20, 5337
120	− 3, 4490	− 17, 4516	− 20, 9006
125	− 3, 9565	− 17, 1369	− 21, 0934

Tabula pro X et Y

pro Y

pars I.	pro II.	totum
°	°	°
− 1,4966	+ 0,0570	− 1,4396
− 2,9819	+ 0,1104	− 2,8715
− 4,4444	+ 0,1943	− 4,2501
− 5,8732	+ 0,3650	− 5,5082
− 7,2571	+ 0,6679	− 6,5892
− 8,5861	+ 1,1795	− 7,4066
− 9,8495	+ 1,1940	− 7,9355
− 11,0379	+ 2,9180	− 8,1199
− 12,1424	+ 4,1953	− 7,9471
− 13,1545	+ 5,7724	− 7,3821
− 14,0665	+ 7,6534	− 6,4131
− 14,8716	+ 9,8556	− 5,0160
− 15,5631	+ 12,3567	− 3,2064
− 16,1364	+ 15,1637	− 0,9727
− 16,5869	+ 18,2406	+ 1,6537
− 16,9111	+ 21,4890	+ 4,5779
− 17,1067	+ 25,1991	+ 8,0924
− 17,1720	+ 28,9657	+ 11,7937
− 17,1067	+ 32,9341	+ 15,8274
− 16,9111	+ 37,0350	+ 20,1239
− 16,5869	+ 41,2379	+ 24,6510
− 16,1364	+ 45,4968	+ 29,3604
− 15,5631	+ 49,7646	+ 34,2015
− 14,8716	+ 54,0061	+ 39,1345
− 14,0665	+ 58,1742	+ 44,1077

Tabula pro X et Y

pro X

$p = 0$	pars I.	pars II.	totum
130	−4, 4339	−16, 6785	−21, 1124
135	−4, 8776	−15, 9972	−20, 8748
140	−5, 2841	−15, 3761	−20, 6602
145	−5, 6505	−14, 5564	−20, 2069
150	−5, 9738	−13, 6464	−19, 6202
155	−6, 2517	−12, 6658	−18, 9175
160	−6, 4820	−11, 6304	−18, 1124
165	−6, 6629	−10, 5642	−17, 2271
170	−6, 7932	− 9, 4742	−16, 2674
175	−6, 8717	− 8, 4145	−15, 2862
180	−6, 8980	− 7, 3758	−14, 2738

Tabula pro X et Y

pro Y

pars I.	pars II.	totum
− 13, 1545	+6[illegible], 2157	+ 49, 0612
− 12, 1424	+ 66, 1272	+ 53, 9040
− 11, 0379	+ 69, 8504	+ 58, 8125
− 9, 8495	+ 73, 3614	+ 63, 5119
− 8, 5861	+ 76, 6282	+ 68, 0421
− 7, 2571	+ 69, 6272	+ 72, 3701
− 5, 8732	+ 82, 344[illegible]	[illegible]
− 4, 4444	+ 84, 7664	+ 80, 3220
− 2, 9819	+ 86, 8883	+ 83, 9064
− 1, 4966	+ 88, 7097	+ 87, 2131
− 0	+ 90, 2364	+ 90, 2364

38. Quo autem facilius has determinationes ad vſum Aſtronomicum accommodemus, notandum eſt totum negotium ad valorem littterae Y' redire, ex quo facile ſtatim effectum perturbationis cognoſcere licet, quippe qui angulo perexiguo conſtat quem ad locum terrae ex Tabulis ſolitis deſumtum ſiue addere ſiue inde auferre oportet. Quum enim definiri debeat angulus $M \odot \male$ ad longitudinem terrae mediam addendus eius tangens eſt $\frac{y}{1+x} = \frac{Y + \lambda Y'}{1 + X + \lambda X'}$ quem ergo angulum hic in duas partes diſtribui conuenit, quarum altera principalis ex ſolo motu regulari eſt petenda, cuius ergo tangens eſt $= \frac{Y}{1+X}$, quem angulum Tabulae Solares conſuetae exhibent, quem littera η indicemus, altera vero pars, ipſam perturbationem continens notetur littera ω, ita vt ad locum Terrae medium addi oporteat angulum $\eta + \omega$.

39. Quum igitur habeamus Tang. $(\eta + \omega) = \frac{Y + \lambda Y'}{1 + X + \lambda X'} = \text{Tang}\, \eta + \frac{\omega}{\cos.\, \eta^2}$; quoniam angulus ω prae η eſt vehementer paruus; tum vero fit Tang. $\eta = \frac{Y}{1+X}$, hinc colligimus $\frac{\omega}{\cos.\, \eta^2} = \frac{\lambda Y'}{(1+X)^2}$ propterea quod quantitates $\lambda X'$ et $\lambda X'^2$ ſunt quaſi euaneſcentes. Praeterea vero quia angulus η eſt valde paruus eiusque coſinus vix ab vnitate differt tum vero etiam loco $1 + X$ tuto ſcribere licet 1, habebimus ſimpliciter $\omega = \lambda Y'$. Interim ſi etiam harum poſtremarum conditionum rationem habere velimus, reperitur $\omega = \frac{\lambda Y'}{(1+X)^2 + YY'}$,

quae

quae expreſſio a praecedente vix particula ſenſibili diſcrepabit.

40. Quoniam igitur tota perturbatio ω, quam hic quaerimus per ſolam quantitatem Y' determinatur, cuius valores modo ante vsque ad 180° exhibuimus, nunc accuratius nobis oſtendere incumbit, quemadmodum hi valores ad praxin accommodari queant. Supra autem iam innuimus, conſtantes per integrationes ingreſſas, ita capi debere vt poſt ſingulas reuolutiones, hae perturbationes iterum euaneſcant, quod etiam de dimidiis reuolutionibus eſt tenendum. Quare quum pro 180° valor ipſius Y' prodierit + 90, 0264, ob conſtantes illas memoratas a quolibet valore ipſius Y' pro angulo ♀ ⊙ ♁ ſubtrahi debet numerus proportionalis, ſcilicet

$$\frac{♀ ⊙ ♁}{180} \cdot 90,0264 = ♀ ⊙ ♁ \cdot 0,50014$$

vnde facile erit has correctiones in Tabulam ſuperiorem introducere.

41. Denique ſupereſt, vt valorem litterae λ conſideremus qui a ratione maſſae Veneris ad maſſam ſolarem pendet quae autem ratio adhuc plane eſt ignota. Satis probabile autem videtur Veneris maſſam vix a maſſa terrae diſcrepare propterea quod eius magnitudo non multum a terrae deficit, denſitas vero aliquanto maior cenſetur, quandoquidem planetae quo Soli ſunt propiores eo etiam denſiores aeſtimantur. Statuamus ergo Veneris maſſam ipſi maſſae terrae aequalem quam ex nouiſſimis paral-

laxis Solis obferuationibus, colligimus $= \frac{3}{1383556}$ dum maffa Solis vnitate referatur, hinc igitur habebimus $\lambda = \frac{3}{1553383}$ atque ex hoc valore fingulos angulos ω, qui perturbationem continent fupputemus: Si forte maffa Veneris aliquanto maior vel minor effet, quantitates in fequenti Tabula occurrentes in eadem ratione funt augendae vel minuendae. Praeterea notandum eft argumentum p aequari angulo $\Phi - t$ feu defignare elongationem mediam Veneris a Terra e Sole fpectatam.

Tabula

Tabula ostendens perturbationes motus terrae, ab actione Veneris ortas:

p	Sig. —	I. Sig. —	II. Sig. —	III. Sig. —	IV. Sig. —	V. Sig. —	p
0	0, 0	13, 8	21, 6	20, 6	13, 0	4, 4	30
1	0, 5	14, 2	21, 7	20, 4	12, 7	4, 1	29
2	1, 0	14, 6	21, 8	20, 2	12, 4	3, 9	28
3	1, 5	15, 0	21, 9	20, 0	12, 1	3, 7	27
4	2, 0	15, 4	22, 0	19, 8	11, 8	3, 5	26
5	2, 4	15, 7	22, 1	19, 6	11, 5	3, 3	25
6	2, 9	16, 1	22, 2	19, 4	11, 2	3, 1	24
7	3, 4	16, 5	22, 2	19, 2	10, 9	2, 9	23
8	3, 9	16, 8	22, 3	19, 0	10, 6	2, 7	22
9	4, 4	17, 1	22, 3	18, 8	10, 3	2, 5	21
10	4, 8	17, 4	22, 3	18, 5	10, 0	2, 3	20
11	5, 3	17, 8	22, 3	18, 3	9, 7	2, 1	19
12	5, 8	18, 1	22, 3	18, 1	9, 4	1, 9	18
13	6, 3	18, 4	22, 3	17, 9	9, 1	1, 7	17
14	6, 8	18, 7	22, 2	17, 6	8, 8	1, 6	16
15	7, 3	18, 9	22, 2	17, 3	8, 5	1, 5	15
16	7, 8	19, 2	22, 2	17, 1	8, 2	1, 3	14
17	8, 3	19, 5	22, 1	16, 8	7, 9	1, 1	13
18	8, 8	19, 7	22, 1	16, 5	7, 6	1, 0	12
19	9, 2	19, 9	22, 0	16, 2	7, 3	0, 9	11
20	9, 6	20, 1	21, 9	15, 9	7, 0	0, 8	10
21	10, 1	20, 3	21, 8	15, 7	6, 7	0, 6	9
22	10, 6	20, 5	21, 7	15, 4	6, 4	0, 5	8
23	11, 0	20, 7	21, 6	15, 1	6, 1	0, 4	7
24	11, 4	20, 9	21, 5	14, 8	5, 9	0, 3	6
25	11, 8	21, 0	21, 3	14, 5	5, 7	0, 2	5
26	12, 2	21, 2	21, 2	14, 2	5, 4	0, 2	4
27	12, 6	21, 3	21, 1	13, 9	5, 1	0, 1	3
28	13, 0	21, 4	21, 0	13, 6	4, 8	0, 1	2
29	13, 4	21, 5	20, 8	13, 3	4, 6	0, 0	1
30	13, 8	21, 6	20, 6	13, 0	4, 4	0, 0	0
	+	+	+	+	+	+	
p	XI. Sig.	X. Sig.	IX. Sig.	VIII. Sig.	VII. Sig.	VI. Sig.	p

PHYSICA.

DE CORDE LEONIS.

Auctore

C. F. WOLFF.

Quae circa mufculos et neruos in leone fingularia reperi, in praecedenti Commentariorum tomo expofui. Inter vifcera maxime cor notabile eft ob multa fingularia attributa. Eius itaque defcriptionem nunc tradam, poftquam effectus cuiusdam morbofi mentionem fecerim, quem caufam mortis huius animalis fuiffe exiftimo.

Quum venae axillaris ortum ex thorace rimarem, laefa fortuito pleura, magna copia fanguinis ex thorace effluxit. Deinde quum hunc aperuiffem, multum non modo itidem fanguinis, tum fluidi, tum etiam coagulati in cauitate thoracis reperi, fed pericardium quoque miro modo diftentum et renitens inueniebatur, adeo, vt totam fere thoracis cauitatem repleret, pulmonibus ad poftremam partem repulfis. Pericardio incifo, fanguis cum vi erupit coagulatus et niger; fruftaque cruoris ad oui gallinacei magnitudinem exprimebantur. Cor, quod ex enormi volumine pericardii maximum fore iudicaueram, nihil, quoad magnitudinem in foliti habebat,

Caufa mortis huius animalis.

bebat, et decimam vix partem pericardii occupabat, reliqua cauitate cruore nigro repleta. Caeterum cor flaccidum, ventriculis auriculis que collapsis, et sanguine plane vacuis, facie anteriori, quae in aliis animalibus gibba esse solet, plana, rugis que minimis transuersalibus notatu. Sanguinem cordis omnem et vasorum in pericardio et thorace fuisse, vnde illa vacua essent, facile intelligebatur. Rupturam autem vasis cuiusdam nuspiam reperi. In superficie cordis quidem prope basin, tum maxime in aorta, qua parte intra pericardium continetur excrescentiae obseruabantur figurae fere conicae, quarum maiores pollicem et vltra ad basin latae et aeque longae erant. At hae in sola tunica externa, quae a lamina interna pericardii continuatur, existebant, a materia quadam tenaci, ibi deposita, productae, nec vllam communicationem cum cauitate interna harum partium habebant. Verisimile igitur est, sanguinem per vasa exhalantia pleurae et pericardij penetrasse, quae, praecipue in pericardio, naturaliter etiam, ita comparata esse constat, vt serum, notabili rubedine tinctum, permittant, cuius semper aliqua portio in pericardio post mortem reperiri solet. An etiam ex ipsis ventriculis, tempore systoles, per parietes cordis, quos in leone mire tenues esse in subsequentibus dicam, sanguis transsudauit? Exemplum in vesicula fellea habemus, quae, nullis vasis, viam praebentibus, bilem perspirare finit. Caeterum hanc ipsam extrauasationem sanguinis causam proximam mortis fuisse, dubium non

non eſt, ſiquidem cor non modo in ſua actione adeo impeditum inde fuit, vt dilatari non potuerit, ſed vaſa quoque et cor ipſum ſanguine omni priuata, cerebro nihil ſuppeditare potuerunt, vnde debilitatem primo, tandemque lipothymiam perpetuam, vel, ſi mauis, apoplexiae ſpeciem, oriri neceſſe fuit.

Pericardium, pro ſitu cordis, aliter atque in homine, figura, ouo gallinaceo ſimili, gaudet, cuius vertex inferior, verſus diaphragma reſpiciens, acutior, ſuperior magis obtuſus eſt. In vertice inferiori pericardium diaphragmati non adhaeret, ſed mobile eſt, membraniſque longis (*g. g*) a mediaſtino productis, tenuiſſimis, pellucidis et reticularibus, omento ſimilibus, ad diaphragma modo adligatur. Ad verticem ſuperiorem in parte anteriori proceſſus notabilis (*e*) a pericardio producitur, quo aorta eiusque rami complectuntur. Vena autem caua ſuperior, arteriae venaeque pulmonales et caua inferior ſeorſim ſingulae prodeunt lateraliter et verſus partem poſteriorem, pericardium ſimpliciter perforando. Pericardium. Tab. XI. Fig. 1. *a. b. c. d. e.*

In hoc pericardio, in media fere eius parte, cor ſitum erat, adeo, vt proceſſum (Fig. 1. *e.*) arteria innominata, ſubclauia ſiniſtra et ſuperior arcus aortae pars (fig. 2.) qua verſus dorſum curvari incipit, aliamque longitudinis pericardii partem, proceſſui dicto aequalem, bulbus aortae adſcendens (fig. 2. *i.*) occuparet, et in ea regione, Situs cordis. Tab. XI. Fig. 1. 2.

vbi vena pulmonalis (fig. 1. *u.*) pericardio exit, cor sua basi inciperet et quantum longum est, (fig. 2 *e. b.*) deorsum se extenderet in parte pericardii posteriori; vnde locus cordis in pericardio ex comparatione figurarum 1 et 2 facile intelligi poterit. Situs autem cordis in eo pericardii loco talis est, qualis in animalibus esse solet. Basi nempe sursum et apice recta deorsum respicit. Superficies, quae in homine superior est, anterior ob hunc situm, et quae inferior in homine, posterior in leone, vt in reliquis animalibus quadrupedibus, euadit.

Figura cordis. Tab. XI. Fig. 2.

Sed figurae respectu cor leonis tam ab humano quam ab aliorum animalium cordibus differt. Et haec figura, non modo, quod singularis est, sed ideo maxime notari meretur, quia ab interiori structura cordis pendet, quae itidem in leone a reliquis animalibus differt, et in oeconomiam vitalem influxum sibi vindicat. Vti in homine superior cordis facies, ita in animalibus anterior eiusdem, quae illi respondet, semper notabili conuexitate gaudet. In homine quidem haec facies maxime prominet versus basin, in eo loco, vbi arteria pulmonalis exoritur, et in media sui parte. Inde versus anteriora maxime, paulo minus versus posteriora, decliuis in margines abit, quorum anterior acutior tenuiorque, posterior obtusior et crassius est. In animalibus ea maxime differentia est, vt nullibi peculiariter haec facies promineat, sed aequali modo conuexa sit, neque margines proprie producat sed cor potius teres seu conoideum efficiat, eo magis, cum

cum facies poſterior, cuius reſpondens inferior in homine plana eſt, itidem aliqua conuexitate gaudeat. Praeterea in ipſa hac ſuperficie ventriculi cordis in animalibus aeque ac in homine manifeſto diſtinguuntur, et ventriculus dexter ſiniſtro notabili parte altior ſitus eſt, adeo vt ſiniſter deorſum prominens ſolus apicem cordis efficiat, dexterque ad eundem nil conferat. Hinc apex cordis acutus et tota figura conoidea, vel in homine ſemiconoidea, oritur; cum, ſi ambo ventriculi aequali iure ad extremitatem vsque cordis producerentur, nullus apex anguſtior inde, nec figura conoidea cordi, ſed ouata, vel ſubrotunda potius ſuboriretur. In fele ventriculus dexter vix ad dimidiam longitudinem cordis deſcendit; dimidia huius pars inferior vna cum apice a ſolo ſiniſtro efficitur. Apex in illa multo quam in homine acutior eſt, et figura cordis longe maiori iure conoidea vocari poteſt. Horum omnium in leone nihil obſeruatur. Superficies anterior plana eſt aeque ac poſterior, et margines vtrinque formantur aequales, obtuſi, ſed minus craſſi. Ventriculi in exteriori ſuperficie cordis nullo modo diſtinguuntur. Fibrae enim, quae parietem ventriculi dextri exteriorem conſtituunt, quaeque in homine, in fele, in cane, in vitulo a parte ſepti anteriori oriuntur, ibique a fibris ſiniſtri ventriculi per rimam adipe et vaſis repletam, diſtinguuntur; hae fibrae in leone potius continuationes eſſe videntur fibrarum transverſalium ventriculi ſiniſtri, adeo, vt vterque ventriculus vno communi ſtrato fibrarum, transuerſalium in ſuperficie exteriori tegatur; vnde ſingularis habitus cordi leonis conciliatur. Porro autem ventriculus dexter aeque ac ſiniſter ad extremitatem vsque inferiorem cordis ſe extendit. Inde apex anguſtior et acutior deficit, et totum cor leonis figuram nanciſcitur ſubrotundam et planam, cum in reliquis, quantum ſcio, animalibus quadrupedibus, ſaltim in vitulo, cane et fele aeque ac in homine, cor craſſum teres et conoideum exiſtat.

Auriculae Tab. XI. Fig. 2. *e. d.*

Auriculae minimae ſunt in corde leonis, in ſpecie dextra (*e.*) quae tanquam tuberculum crenatum baſi venae cauae ſuperioris adſidet, nec niſi ob analogiam cum aliis animalibus tanquam peculiaris pars cordis in hoc animali conſiderari poteſt. Hoc certum eſt, ſanguinis portiunculam, quae tempore ſyſtoles cordis in ea recipi poteſt, nullius plane momenti eſſe. Idemque valet de auricula ſiniſtra (*d.*).

Vaſorum maiorum diſtributio. Fig. 2.

Vaſorum maiorum diſtributio parum a ſtructura felina differt. Subclauia arteria ſiniſtra in fele non quidem ex eodem trunci communis apice, vnde carotides et dextra ſubclauia exſurgunt, ſed neque tamen ſeorſim ex arcu aortae, ſed potius ex facie poſteriori huius trunci communis prope baſin eiusdem oritur. Eadem in leone diſtincta ex arcu aortae prodit (*o.*) cum in homine ſolam dextram cum carotide dextra ex trunco communi, carotidem ſiniſtram vero et ſubclauiam ſiniſtram ſeorſim ex arcu aortae prodire notum ſit.

Inter

Inter omnia vero, quae in corde leonis et in systemate vasorum sanguineorum notaui, maxime, et quasi sola, memorabilis mihi visa est magna inter ventriculos et reliqua vasa, et porro inter truncos vasorum et ramos ratio luminum, quae ita comparata est, vt neque anxia mensura neque subtiliori acumine ad eam obseruandam opus sit. Iam, quum neruos extremitatis superioris euoluerem, insignem mirabar paruitatem vasorum brachialium proportione musculorum et animalis (vid. Diss. priorem fig. 3. *e*.) Suspicabar, totum systema vasorum ad similitudinem neruorum in hoc animali exiguum esse. Quo magis autem in detegendis vasis ad cor accedebam, eo magis quoque haec vasa increscere videbam, donec ventriculi cordis aperti veram proprietatem systematis sanguinei huius animalis docerent. Hi enim, vti vasa extremitatum et carotides, earumque rami proportione animalis omnino parua putanda sunt, respectu eodem merito magni dici possunt.

De magnitudine ventriculorum cordis.

Neque haec magnitudo ventriculorum in corde leonis alios obseruatores fugit. Parisinos enim apud *Valentinum* in theatro Zootomico sequentia verba de illis tradidisse lego: "*Substantia ipsius* (cordis) *mollis apparuit, priusquam aperiretur, cognitum* „*vero est postea, ex eo id esse, quod parum haberet* „*carnis, et contra potius totum esset cauum. Ventri-* „*culi enim tam erant ampli, vt sinister, qui ad cu-* „*spidem vsque protenditur*, (monui vero idem valere „de dextro,) *latitudinem pro carne haud maiorem re-*

Aliorum Auctorum de ventriculis cordis et de corde leonis sententiae.

„linqueret, quae eo in loco ipſum tegit, quam duarum „linearum. Verſus baſin non plures habebat quam „ſeptem, quot etiam praeditum erat ſeptum fere. „ Ex his igitur patet, in aliis leonum ſubiectis reſpectu ventriculorum cordis eadem, quae propoſui, obſervata eſſe. Aliqua tamen ſunt, in quibus hi auctores a meis obſeruatis diſſentiunt. Figuram nempe cordi attribuunt oblongam, et "*cuſpidem valde acuminatam*„. In meo certe ſubiecto cor et planum fuit ob ipſam carnis tenuitatem et ventriculorum amplitudinem, et ſubrotundum, cuſpideque potius priuatum, cuius rei quoque ipſius cauſam adſignaui. Denique cor leonis "*multo maius* quoque *iuxta pro-„portionem*„ laudatis Auctoribus viſum eſt, "*quam „in vllo alio animali.*„ Sed de magnitudine huius viſceris in ſubſequentibus ex inſtituto dicam.

Ventriculi dextri figura. Tab. XII. Fig. 3.

Ventriculus dexter in leone primo intuitu oblongior quam in aliis animalibus eſſe videtur. Accuratiori tamen examine inſtituto patet, latitudine illum multo magis, quam longitudine ſuperare ventriculum felinum, humanum et vitulinum. Totus enim ventriculus in duas quaſi partes ſecundum longitudinem in leone diuiſus eſt, in anteriorem, quae ante ſeptum ſita eſt, et in poſteriorem, quae retro ſeptum abſconditur et anteriori magnitudine vix cedit. Aperto igitur ventriculo ſola anterior eius pars apparet, quae totam ventriculi longitudinem, dimidiam vero tantummodo latitudinem refert, vnde primo intuitu iſte ventriculus omnino multo quam

quam in homine aliisque animalibus oblongior videri debet. Si vero ventriculus vna cum fepto in planitiem extenderetur, haud multo ille minorem, quam cor ipfum, latitudinem haberet, eandemque fere figuram exprimeret.

Septum fcilicet in ventriculo dextro valde conuexum eft, fed alio modo, quam effe folet in aliis animalibus et in homine. In his enim conuexitas haec fepti maxime a craffitie carnis pendet; facies fiquidem fepti in ventriculum finiftrum refpiciens haud tanta concauitate praedita eft, quantum conuexa eft in ventriculo dextro, fed potius plana eft. In leone contra concauitas fepti in ventriculo finiftro conuexitati qua in dextrum fpectat aequalis eft, et tota haec conuexitas a fepti complicatione pendet; neque in plurimis locis hoc feptum craffitiem 5 vel 6 linearum excedit. In fola parte infima vbi cum parietibus ventriculorum coniungitur craffitie 10 linearum eft. Adeoque feptum in corde leonis nonnifi lamina carnea eft, ita complicata, vt concaua facies verfus finiftrum, conuexa verfus dextrum ventriculum refpiciat. In aliis animalibus vti in homine, denfa maffa carnea vtrique ventriculo cordis recta interpofita eft. Caeterum haec fepti facies dextra aequalis eft, neque lacertis carneis, neque fiffuris aut foueis, vt effe folet in aliis animalibus, praedita eft; vnde omnino aliquod augmentum capacitati ventriculi accedit. In parte inferiori aliquot foramin ula coeca exigua dantur. In parte fuperiori filamentum exoritur (*o*. B.) in valuulae venofae partem

Septum. Tab. XII. Fig. 3. *m*.

partem anteriorem infertum, quod ipfum in fele non modo fed etiam in homine inueniri folet.

Paries ventriculi dextri. Tab. XII. Fig. 3. *a. b. c. a e. d.*

Paries ventriculi dextri externus, tenuis eft et laxus et amplior, quam qui requiritur ad feptum tegendum; adeo, vt notabile fpatium inter concavitatem huius parietis et fepti conuexitatem intercedat. Firmior duriorque contra in aliis animalibus caro, quae hunc parietem conftituit, contigua fepto incumbere folet. Craffities carnis huius parietis in parte fuperiori propo bafin remota adipe, quae illam in hoc loco tegit, 4 lineis aequalis eft. Verfus apicem fenfim tenuior illa euadit. In corde humano in quo ventriculus longe minor eft, eandem craffitiem inueni. In fele et in vitulo proportione cordis craffities etiam quam in homine multo maior eft.

Lacerti mufculofi Tab. XII. Fig. 3. *p. q. r.*

Neque huic parieti multi lacerti mufculofi, quibus ventriculi cauitas occuparetur, adnati funt. Maximus eorum eft, qui parti parietis anteriori adhaeret (*p. q. r.*). Ille bifurcatus eft et apice fuo in extremitatem dextram valuulae tricuspidalis dictae anterioris inferitur, quam totam folus hic fafciculus fuftinet. Alter, priori vicinus, (*p f.*) cum eiusque crure altero connexus fimplicior eft, et in valuulam pofteriorem inferitur. Praeter hos in parte huius parietis fuprema quaedam columnae ramificatae dantur (*s*). Valuulae venofae pars finifterior, quae fepti faciei pofteriori adhaeret, meris filamentis fuftinetur. Generatim omnes hi fafciculi, quos enumeraui, adeo plani et tenues funt vt vix quid-

quidquam in imminuenda cauitate ventriculi poſſint; neque vllo modo comparari poſſunt cum validis craſſis columnis, papillis lacertisque, quibus ventriculi, longe minores, in corde humano et in aliorum animalium cordibus fere repleti ſunt.

In valuulis orificiorum nihil occurrit, quod notatu dignum ſit, vel quod aliquem influxum in oeconomiam vitalem leonis habere poſſet.

Magnitudinem vero huius ventriculi vt recte aeſtimemus, neceſſe eſt, vt comparetur non modo cum ventriculo cordis humani et felini, ſed magnitudo quoque cordis totius horum animalium in conſiderationem venire debet, vt non modo quantum ventriculus ille in vno animali maior quam in altero, ſed etiam, quantum proportione cordis maior ſit appareat. Longitudo igitur cordis in leone a principio aortae vsque ad apicem cordis in ſuperficie anteriori, quae plana eſt, inuenitur 5 poll. 3 lin. Circumferentia eiusdem in parte media inter baſin et apicem, vbi cor leonis maximam latitudinem habet, aequalis inuenta fuit 11 poll. 4 lin. Ad determinandam magnitudinem cordis humani menſuras cepi ex duobus ſubiectis diuerſis adultis, virilibus, mediocris ſtaturae et habitus. In altero horum hominum, qui vitam ſibi ſclopeto ſuſtulerat, cor mediocris magnitudinis erat aſpectu, et veluti in adultis eſſe ſolet. Id tamen habebat ſingulare vt ad baſin latius quam in parte media eſſet, indeque latera continuo et ſub rectis lineis fere in

Magnitudo ventriculi dextri cum eodem ventriculo cordis humani comparati.

apicem paulo acutiorem conuergerent, adeoque figuram efficerent, paulo magis triangularem quam solitum est. In altero, qui mortem laqueo sibi intulerat, cor aeque ac vasa paulo magis dilatata videbantur, adeo, vt cor hoc inter maiora referri posset, figurae caeterum frequentissimae. In priori igitur homine longitudo cordis, simili modo vti in leone, in superficie superiori sumta, ab ortu arteriae aortae et pulmonalis vsque ad apicem aequalis fuit 4 poll. 10 lin. Circumferentia autem in eo loco, vbi cor maximam latitudinem et crassitiem habebat, i. e. in hoc subiecto circa ipsam basin, aequalis erat 10 poll. 1 lin. In homine posteriori longitudo cordis, simili modo sumta, 5 poll. circumferentia autem in parte, inter basin et apicem sita, basi propiori, vbi cor hoc maximam latitudinem habuit, 9 poll. 10 lin. aequalis erat. Ex his, et iis, quae prius monui, longitudinem cordis humani mediam sumendam esse colligo 4 poll. 10 lin. vel 58 lin. Circumferentiam autem 10 poll. vel 120 lin. Adeoque longitudo cordis humani ad longitudinem cordis leonis erit, vt 58:63. circumferentia autem vt 120:136 vel 15:17. Vnde nunc porro constabit, qua ratione inter se ventriculi cordis esse deberent, si leoni ventriculi cordis essent, humanis proportionati, et quantum maiores leonini humanis censendi sunt, id est, quantum proportione cordis maiores sunt. In homine priori longitudo ventriculi dextri a basi valuularum semilunarium vsque in apicem ventriculi, quae nempe

nempe longitudo ventriculi maxima eſt, filo ſuper ſeptum conuexum ducto, aequalis inuenta fuit 3 poll. 8 lin. In homine poſteriori eadem longitudo ſimili modo ſumta, aequalis erat 3 poll. 9 lin. Adeoque longitudo ventriculi dextri hominis media putari poteſt 3 poll. 8 lin. vel 44 lin. Circumferentia transuerſalis eiusdem ventriculi interna vel ambitus internus in eo loco, vbi ventriculus ampliſſimus eſt, filo vbique ſuper parietes internos ventriculi, adeoque et ſuper ſeptum conuexum, et retro lacertos muſculoſos ducto, in homine priori 5 poll. $1\frac{1}{2}$ lin. in poſteriori 5 poll. 6 lin. inuenitur; quorum ambituum internorum menſuram mediam ſumendam eſſe puto 5 poll. 4 lin. vel 64 lin. Quodſi igitur magnitudo ventriculi cordis in Icone ad magnitudinem cordis totius in eadem ratione eſſet, vti eſt in homine, longitudinem eiusdem eſſe oporteret 3 poll. $10\frac{1}{5}$ lin. ambitum autem 6 poll. $\frac{1}{2}$ lin. Iam vero longitudo ventriculi dextri in corde leonis ſimili prorſus modo ſumta vt in hominibus 4 poll. 7 lin. et ambitus eiusdem 9 poll. 6 lin. aequalis eſt. Ad iuſtam igitur proportionem, quam in homine obſeruamus, longitudo ventriculi leonis erit vt 55 : $46\frac{1}{5}$. ambitus autem eiusdem vt 114 : $72\frac{1}{2}$. Proinde *ventriculus ille fere* (non prorſus) *vna quinta parte iuſto longior, et multo plus quam vna tertia parte iuſto amplior eſt.*

Ne vero haec differentia, quae inter magnitudinem ventriculi dextri cordis leonini et humani intereſt, paruitati potius ventriculi humani, quam magni- Magnitudo ventriculi dextri cordis humani ad cor felinum et vitulinum comparati.

magnitudini leonini adſcribenda eſſe videatur, felinum quoque et vitulinum cor metitus ſum. Illud quidem in catulo iuniori. Longitudo cordis felini, (hac ita, vt omnibus reliquis menſuris ſimili modo ſumta, vti in hominibus et in leone ſumſi), aequalis erat $15\frac{3}{4}$ lin. Circumferentia eiusdem maxima $29\frac{1}{6}$. lin. Pro hac magnitudine cordis ventriculus dexter, ſi eius magnitudo ad magnitudinem cordis in eadem ratione, vti in homine, eſſet, (longitudine nempe ventriculi ad longitudinem cordis, amplitudine eiusdem ad circumferentiam cordis relata,) eſſe deberet longitudine 12 linearum, non penitus quidem, ſed nonniſi minus vigeſima lineae parte quae nullius momenti eſt. Amplitudo autem huius ventriculi eſſe deberet $15\frac{1}{2}$ lin. Iam vero ſumma longitudo ventriculi dextri in hoc corculo felino nonniſi 10 lin. examuſſim et amplitudo $11\frac{1}{3}$ lin. inventa fuit. Vnde patet ventriculum dextrum cordis felini multo etiam humano ventriculo proportione cordis minorem eſſe. Cor vitulinum longitudine erat 4 poll. Circumferentia maxima prope baſin 8 poll. Ventriculus dexter igitur ſecundum proportionem humanam eſſe deberet 3 poll. et $\frac{3}{7}$ lin. Circumferentia autem 4 poll. $3\frac{1}{7}$ lin. Iam vero longitudo huius ventriculi nonniſi 2 poll. 1 lin. et circumferentia 3 poll. 10 lin. fuit. Vnde patet, etiam in vitulino corde ventriculum dextrum proportione totius cordis multo quam in humano minorem eſſe. Differentia igitur, quae inter humanum et leoninum ventriculum inuenta fuit, non paruitati humani, ſed ſin-

ſingulari magnitudini ventriculi leonis adſcribenda erit; ſiquidem et feli et vitulo ventriculus humano potius minor exiſtit, nec veriſimile adeo eſt, vel caeteris praeter leonem quadrupedibus ventriculum hunc dextrum cordis multo maiorem humano facile inventum iri.

Ventriculus ſiniſter, qui, vti in homine, ita in reliquis quoque quadrupedibus non modo anguſtior et figurae oblongae, ſed apice quoque valde acuto terminatus eſſe ſolet, in leone multo latior eſt et fine inferiori gaudet valde obtuſo et dilatato. Adeoque figura eiusdem aeque ac dextri ventriculi ſubrotunda eſt et figuram cordis imitatur. Ventriculi ſiniſtri figura. Tab. XIII. Fig. 4.

Septum, qua parte in hunc ventriculum ſpectat, concauum eſt et laeue, excepta eius parte inferiori, quae foueis nonnullis maioribus (*m. m.*) iisque ſatis profundis praedita eſt. Lacertis autem muſculoſis fere caret, qui in aliis animalibus totam internam huius ventriculi ſuperficiem occupare ventriculumque fere replere ſolent. Ad eum locum, vbi paries ventriculi cum ſepto coniungitur, faſciculus ramificatus eſt (*i. k.*) ſed planus et parieti adglutinatus. Notabilis autem eſt ſimilis eiusmodi faſciculus (*l.*) qui proxime ſub valuulis ſemilunaribus orificium arterioſum circumdat, cuiusque adeo officium eſſe videtur, tempore ſyſtoles ſphincteris modo hoc orificium conſtringere. Septum Fig. 4. *h.*

Paries externus huius ventriculi latus, mollis et proportione aliorum animalium, certe tenui ſubſtantia carnea compoſitus eſt. Siquidem in parte ſupe- Paries externus Fig. 4. *a. b. B.* et lacerti musculosi. ſuperiori, non computata adipe nonniſi lineas quinque in inferiori nonniſi tres lineas craſſus eſt. Sed lacertis carneis, non multis quidem, ſed eo validioribus hic paries omnino inſtructus eſt. Omnes tamen filamentis ſuis tendineis in valuulam orificii venoſi inſeruntur; nec vlla datur, vt in homine et in aliis animalibus, eiusmodi columnarum, quae ortae ex vno loco ventriculi in alterum ſe inſerunt vel papillarum, quae tendinibus ſuis in parietes ventriculi inſeruntur. Et praeterea plani ſunt illi lacerti et dimidia ſui parte parieti cordis adnati. Quatuor eiusmodi lacertos muſculoſos numeraui, quorum alter (*o. p.*) ob magnitudinem ſuam praecipue notabilis eſt. Iſte ex variis quaſi, ſed plane in vnum concretis componitur, maximamque partem parietis externi occupat. Ortus a parte parietis infima, indeque porro vsque ad mediam fere partem eidem adnatus verſus valuulam venoſam adſcendit, diſperſusque in filamenta, minus longe numeroſa, quam in homine, in eam valuulam, maxime in partem eius poſteriorem, ſe inſerit, excepto filamentulo vnico, quod ramoſe in ſeptum diſpergitur. Prope hunc alius minor, nec debilis tamen faſciculus eſt (*w*) qui filamenta ſua in eandem valuulam, in eius partem anteriorem mittit. Deinde duo minores dantur, a prioribus tecti, qui filamenta ſua partibus valuulae anteriori et poſteriori promiſcue reddunt.

Valuulae ventriculi ſiniſtri. Tab. XIII. Fig. 4. Caeterum valuula venoſa ventriculi ſiniſtri integra membrana eſt et minus etiam quam in homine in duas valuulas diuiſa. Filamenta recipit pau-

pauciora ſed craſſiora a lacertis carneis, nec vllum eorum, vt fieri ſolet in homine, in ſuperficiem eius exteriorem inſeritur, ſed omnia in ipſum eius marginem fluitantem ſe immittunt; vnde valuulae alienus habitus oritur. In ſemilunaribus nihil eſt, quod notari meretur. E. G. H. I

De magnitudine ventriculi ſiniſtri.

Quod magnitudinem autem attinet ventriculi ſiniſtri, ea tantundem non modo, quantum dextri ventriculi magnitudo, ſed magis etiam magnitudinem humani et felini ventriculi ſuperat, adeo, vt ſingularitas haec in ventriculo ſiniſtro magis eluceat, quam in dextro. Sed vna tamen in eo ordine procedendi, quo vſus ſum in aeſtimando ventriculo dextro, et quem ad ſiniſtrum nunc applicabo, occurrit obſeruatio, quam forte vna mecum haud exſpectaſſes. Ea eſt ventriculi cordis vitulini circumferentia interna, quae quidem nullo modo aequalis eſt circumferentiae ventriculi leonis, neque comparari cum ea poteſt; ſed tamen humani ventriculi circumferentiam proportione ſuperat, quod eo magis miratus ſum, cum craſſities parietis huius ventriculi in vitulo enormis ſit et illam in homine multo ſuperet. Exponam autem obſeruationes ipſas et comparationes, quo ordine easdem de ventriculo dextro propoſui.

Magnitudo huius ventriculi ad cor humanum comparati.

In homine priori igitur longitudo ventriculi ſiniſtri eodem huc vsque vſitato modo ſumta a baſi valuularum ſemilunarium vsque ad apicem ventriculi aequalis inuenta fuit 3 poll. 4 lin. In homine ne posteriori 3 poll. 5 lin. Mediam igitur longitudinem ventriculi humani aequalem supposui 3 poll. 4 lin. vel 40 lin. Secundum hanc normam ventriculus sinister in corde leonis proportione totius cordis esse deberet longitudine 3 poll. 7 et fere $\frac{1}{2}$ lin. Est autem longitudine 5 poll. Circumferentia ventriculi sinistri in homine priori 3 poll. 6 lin. in posteriori, cuius cor magnum et dilatatum videbatur, 4 poll. 2 lin. fuit. Mediam circumferentiam tamen 3 poll. 10 lin. vel 46 lin. posui. Ergo circumferentia ventriculi sinistri in corde leonis secundum proportionem humanam esse deberet 4 poll. $4\frac{1}{8}$ lin. et inuenitur 8 poll. 2 lin.

Magnitudo ventriculi sinistri cordis humani ad cor felinum et vitulinum comparati.

Secundum eandem proportionem humanam longitudo ventriculi sinistri in corculo illo felino, in quo dextrum ventriculum metitus sum, esse deberet $10\frac{3}{4}$ lin. et inuenta est 9 linearum. Circumferentia eiusdem esse deberet 11 et fere $\frac{1}{5}$ linearum et aequalis fuit $10\frac{3}{4}$ lineis. In corde vitulino ventriculus sinister longus esse deberet 2 poll. $9\frac{1}{15}$ lin. Longus est 2 poll. 9 lin. Circumferentia huius ventriculi esse deberet 3 poll. $\frac{4}{5}$ lin. quae aequalis inventa fuit 3 poll. 6 lin.

Magnitudo ventriculorum cordis leonis determinata.

Excepta igitur sola hac posteriori mensura, reliquae omnes in fele et vitulo tam pro dextro, quam pro sinistro ventriculo institutae, ostendunt ventriculos cordis humani non paruos censendos, sed inter maiores potius referendos esse; proinde magnitudinem ventriculorum cordis in leone non plus, quam

quam aequum est, extendi, si ventriculi cordis humani iustae magnitudinis et solitae plerisque animalibus censentur, et tanquam norma considerantur, ad quam leonis ventriculos comparare et diiudicare oporteat. Quodsi igitur ventriculus in leone sinister cuius longitudo secundum proportionem humanam 3 poll. $7\frac{1}{2}$ lin. et circumferentia 4 poll. $4\frac{1}{8}$ lin. esse deberet, longitudine gaudeat 5 poll. et circumferentia 8. poll. 2 lin. et ventriculus dexter, qui secundum humanam proportionem 3 poll. $10\frac{1}{5}$ lin. longus et in ambitu suo 6 poll. $\frac{1}{2}$ lin. esse deberet, longus sit 4 poll. 7 lin. et ambitu gaudeat 9 poll. 6 lin.; *longitudo ventriculi sinistri in leone ad iustam et solitam plerisque animalibus longitudinem erit vt* $60 : 43\frac{1}{2}$ *et maior quam* $4 : 3$. *Circumferentia vt* $98 : 52\frac{1}{8}$ *vel* $24\frac{1}{2} : 13\frac{1}{32}$ *et fere vt* $2 : 1$. *Longitudo ventriculi dextri fere vt* $11 : 9$ *eiusdemque circumferentia vt* $114 : 72\frac{1}{2}$. *Proinde ventriculus sinister plus quam quarta parte solito longior et duplo fere amplior, dexter quinta fere longior et plus quam tertia amplior est. Ventriculus dexter multo solito maior, sed sinister ipso dextro multo maior est.*

De crassitie carnis, qua ventriculi cordis componuntur.

Extremam quoque tenuitatem carnis, qua ventriculi et cor totum efficiuntur, ad diiudicandam ventriculorum magnitudinem paucis expendere iuuabit. Sufficiet autem solam crassitiem parietis ventriculi sinistri, cuius mensura ob molem maiorem facilior et certior est, exempli loco producere, ex qua cognita etiam tenuiorum partium dimensiones diiudicari aliqua ratione poterunt. In homine priori craſſities parietis ventriculi ſiniſtri maxima, quae prope baſin eſt, aequalis erat $8\frac{1}{2}$ lin. In poſteriori craſſitiem parietum non metitus ſum. Proportione illius craſſitiei, ad circumferentiam cordis relatae, eadem in vitulo $6\frac{3}{4}$ lin. in fele $2\frac{1}{7}$ lin. eſſe deberet. Eſt in vitulo pollicis totius vel 12 lin. in fele $3\frac{3}{4}$ lin. Vnde patet, vel enormis craſſitiei hos parietes ventriculorum ſiniſtrorum cordis vitulini et felini dicendos eſſe, qui quippe duplo fere humano craſſiores ſunt, vel valde tenuem putandum illum in corde humano. Et ſecundum hanc tenuem normam humanam, qui eſſe deberet 9 et fere $\frac{2}{3}$ lin. paries ventriculi ſiniſtri in corde leonis, vbi maximam craſſitiem habet, nonniſi 5 linearum eſt. Si igitur cor leonis cum cordibus felis et vituli compararetur, parum abeſſet, quin caro, qua haec efficiuntur, quadruplo craſſior ſit illa, qua cor leonis efficitur.

De ſtructura cordis generatim. Vnde paulo aliter, quam in reliquis animalibus cor leonis conſtructum et comparatum eſſe videtur. Si enim ſingularem hanc tenuitatem parietum cordis et ſepti, et mollitiem, ſimulque enormem magnitudinem ventriculorum conſideraueris, cor leonis marſupio ſimile videtur, ſepto tenui, molli, complicabili in duas partes diuiſo. Sed eiusmodi idea minime conuenit vel humano vel reliquorum animalium cordibus, quae tanquam durae craſſaeque maſſae carneae potius conſiderari debent, paruis, pro mole carnis, cauitatibus intus inſtructae.

Magni-

Magnitudo autem cordis, quam determinare in superioribus pollicitus sum, pro mole corporis parua esse videtur. Longitudinem cordis vidimus esse 5 poll. 3 lin. Longitudo corporis a symphysi maxillae inferioris, capite erecto, vsque ad symphysin ossium pubis, vel etiam a naribus vsque ad principium caudae erat pedum 5 et 11 poll. Mediocre cor humanum longitudine gaudet 4 poll. et 10 lin. ergo homo mediocris staturae, si cor leonis proportionatum esset cordi humano, mensura sumta a vertice capitis vsque ad ossa pubis, vel ad principium ossis coccygis esse deberet 5 pedum et 5 pollicum. Iam pars corporis humani a vertice capitis vsque ad ossa pubis dimidiam circiter totius hominis longitudinem efficit. Ergo homo mediocris si cor leonis humano proportionatum esset, longitudine esse deberet 10 pedum et 10 poll. quam gyganteam magnitudinem, cum vix quisquam mortalium habeat, patet, cor leonis pro mole corporis insigniter paruum esse. De magnitudine cordis.

Verum enim quantumuis magni sint ventriculi cordis in leone, si lumina vasorum tum inter se tum ad ventriculos cordis in eadem ratione essent, vti sunt in homine vel in aliis animalibus; nihil esset in his, quod vllam mutationem in functionibus cordis et vasorum efficere posset. Sed aliter haec se habent omnino, et vti magni sunt ventriculi respectu cordis, ita magni iidem quoque sunt respectu vasorum et magni porro in his trunci sunt respectu ramorum. De ratione arteriarum ad ventriculos cordis.

Aortae ratio ad ventriculum finiftrum, vti fe habeat ad eandem rationem in homine.

Aorta, vbi primum ex corde emergit, ambitu gaudet externo (nam tunicas vaforum fine errore proportionatas fupponi poffe exiftimo,) in homine priori 3 poll. $1\frac{1}{2}$ lin. in pofteriori, cui ambitus ventriculi finiftri maior, 3 poll. 5 lin. Medium ponamus 3 poll. 3 lin. Ambitus igitur radicis aortae in leone proportione ambitus ventriculi finiftri fecundum hanc normam effe deberet 6 poll. $11\frac{1}{12}$ lin. ergo fere 7 poll. fed inuenitur $3\frac{1}{2}$ poll. Duplo ergo fere aorta in homine proportione ventriculi fui ex quo oritur, quam in leone amplior eft.

Rationes vaforum ad ventriculos cordis in vitulo et in fele, vti fe habeant ad rationem humanam. Scholion.

Nunc verum quidem eft, rationem aortae ad ventriculum fuum in vitulo ob infignem huius ventriculi circumferentiam, quam notaui, itidem minorem effe quam in homine, fed multo tamen magis haec ratio vitulina maior leonina eft, quam minor humana. Nimirum ambitus aortae orientis in vitulo eft 2 poll. 5 lin. et effe deberet, fi aequalis homini et vitulo ratio effet, 2 poll. $11\frac{1}{5}$ lin. Sexta igitur parte vna quam in homine minor eft, fed tribus quintis partibus quam in leone maior. In fele eadem fere quam in homine eft. Secundum humanam proportionem ambitus aortae effe deberet $9\frac{1}{8}$ lin. et inuenitur 9 lin. Similique modo comparatum effe reperi, cum continuatione aortae eiusque ramis. Nimirum vbique hi rami proportione ventriculi fui paulo anguftiores funt in vitulo quam in homine, vt tamen cum mira illa anguftia, quae in ramis fimilibus leonis obferuatur, nullo modo comparari

parari possint, et vbique iidem aequales fere proportione ventriculi humanis inueniuntur in fele.

Subclauia dextra in homine priori 1 poll. 3 lin. in posteriori 1 poll. $6\frac{1}{2}$ lin. erat. Medium summus 1 poll. 5 lin. Subclauia dextra igitur in leone proportione ventriculi sinistri esse deberet 3 poll. $\frac{5}{23}$ lin. Est autem 1 poll. 5 lin. Ratio subclauiae dextrae.

Carotidum, quarum dextram sinistrae, in hominibus aeque ac in leone, aequalem reperi, circumferentia in homine vtroque prope basin erat 1 poll. Adeoque carotides in leone proportione ventriculi sinistri esse deberent 1 poll. $11\frac{9}{23}$ lin. ergo fere 2 poll. vel 24 lin. Sunt autem circumferentia 8 linearum, et triplo igitur humanae ampliores sunt. Carotidum.

Subclauia sinistra in homine priori 1 poll. 1 lin. in posteriori 1 poll. 2 lin. Medium igitur 1 poll. $1\frac{1}{2}$ lin. Subclauia sinistra ergo in leone esse deberet 2 poll. $3\frac{2}{3}$ lin. Est tantummodo 1 poll. Subclauiae sinistrae.

Aorta, postquam ramos maiores edidit, proxime post subclauiam sinistram in homine priori est 2 poll. 8 lin. in posteriori 2 poll. 11 lin Medium 2 poll $9\frac{1}{2}$ lin. In leone igitur aorta in hoc loco esse deberet 5 poll. $11\frac{1}{3}$ lin. ergo fere 6 poll. Est tantummodo 3 poll. 1 lin. Aortae post ramos maiores.

Aorta vbi perfecto arcu ad corpora vertebrarum dorsi se applicat et verticaliter descendere incipit, in homine priori 2 poll. 8 lin. in posteriori Aortae descendentis.

 2 poll.

2 poll. 6 lin. et circumferentia media igitur 2 poll. 7 lin est. In leone igitur proportione ventriculi esse deberet 5 poll. $6\frac{1}{23}$ lin. Est 2 poll.

Aortae prope diaphragma. Aorta denique thoracica prope transitum per diaphragma in homine priori 2 poll. 6 lin. in posteriori nonnisi 2 poll. 2 lin. et circumferentia media 2 poll 4 lin. est. Eadem ergo in leone esse deberet 4 poll. $11\frac{15}{23}$ lin. Ergo fere 5 poll. Et nonnisi 1 poll. 9 lin. inuenitur.

Et partis prioris arcus aortae ad ventr. sin. rationes vti sint ad humanas. Caeterum Aortae in media parte inter cor et egressum maiorum ramorum, vbi in leone, vti in homine, amplior est, nec non proxime ante egressum eorundem, vbi iterum angustior redditur eandem fere erga ventriculum rationem habet, quam in ipso principio et proxime post edita vasa maiora. Nimirum in parte media inter cor et egressum vasorum circumferentiam aortae mediam in hominibus reperi 3 poll. 4 lin. In leone igitur esse deberet 7 poll. $1\frac{5}{23}$ lin. et inuenitur 3 poll. 10 lin. Proxime autem ante vasa maiora in hominibus circumferentia aortae est 3 poll. 1 lin. In leone esse deberet 6 poll. $6\frac{11}{23}$ lin. et inuenitur 3 poll $6\frac{1}{2}$ lin.

Arteriae pulmonalis trunci. Denique arteria pulmonalis in homine priori 2 poll. 10 lin. est. In leone igitur, si in eadem, quam in homine priori erga ventriculum dextrum ratione esset, esse deberet 5 poll. $3\frac{1}{41}$ lin. Est 3 poll. 4 lin.

Arteriae pul. dextrae. Arteria pulmonalis dextra in homine priori 2 poll. 2 lin. In leone proportione ventriculi dextri esse deberet 4 poll. $\frac{1}{3}$ lin. Est 2 poll.

Arte-

Arteria pulmonalis ſiniſtra in homine priori 2 poll. 4 lin. In leone ad hanc normam eſſe deberet 4 poll. 3 $\frac{1}{12}$ lin. Eſt 1 poll. 10. lin.

Ex his igitur patet, truncos arteriarum, in comparatione ad humanam ſtructuram, proportione ventriculorum ſuorum valde paruos, ſed ramos ipſis truncis tamen minores eſſe reſpectu eodem, et ſic continuo decreſcere. Aorta in leone primo quidem, et eo vſque, donec maiores ramos dedit, in eadem fere continuo ratione manet erga aortam humanam. Nimirum dimidio fere illa proportione ventriculi ſui, quam in homine minor eſt. Tum vero ab hoc termino eius ratio erga humanam aortam euidenter decreſcit, tam in ſui ipſius continuatione, quam etiam in ramis a ſe editis. Quum enim hactenus aorta leonis ad humanam proportione ventriculi ſui fuerit paulo maior quam $1:2$; nimirum in primo principio vt $1:(2-\frac{1}{84})$ in media inter principium et ramos maiores parte vt $1:(2-\frac{1}{7})$ proxime ante ramos maiores vt $1:(2-\frac{1}{7})$ et proxime poſt ramos maiores editos vt $1:(2-\frac{1}{14})$; nunc incipit plus quam dimidio aortâ humanâ minor eſſe. Nam vbi ad columnam vertebrarum primum ſe applicat, eſt vti $1:2\frac{3}{4}$. prope diaphragma autem vt $1:2\frac{5}{6}$. Atque idem de ramis aortae proximis quoque valet, qui itidem dimidio humanorum minores ſunt. Nam ſubclauia dextra ad eandem arteriam hominis eſt vt $1:2\frac{1}{3}$; ſubclauia ſiniſtra vt $1:2\frac{1}{3}$; et carotides adeo fere ſunt vt $1:3$. Arteria autem pulmo-

et ſiniſtrae ad ventricul. dextr. rationes vti ſint ad humanas.

Arteriae proportione ventriculorum et rami proportione truncorum in leone minores ſunt quam in homine.

pulmonalis truncus, ad eandem arteriam in homine proportione ventriculi ſui dextri eſt vti $1 : 1\frac{3}{5}$. Sed eius ramus dexter vt $1 : 2$ et ſiniſter adeo vt $1 : 2\frac{1}{3}$. Probabile igitur eſt, idem vaſorum decrementum continuatum iri porro per ſuccedentes ramificationes adeo, vt in ordinibus vltimis, in decimo quinto, decimo ſexto vel ſeptimo, nam vsque ad viginti et triginta eiusmodi ramorum diuiſiones in homine numerari ſolent, vaſcula decuplo quoque, vel partibus decimis nouem quam in homine proportione ventriculi ſiniſtri minora ſint. Quum autem vltima vaſcula in animalibus nonniſi vnius globuli ſanguinis capacia eſſe ſoleant; neceſſe eſt, vt pauciores in leone, quam in homine et in aliis animalibus, ramorum diuiſiones dentur, et citius itaque a corde ad vltima vaſa perueniatur.

Celeritas motus ſanguinis in leone comparata cum celeritate, qua ſanguis in homine mouetur.

Si ita igitur arteriae in leone inter ſe et ad ventriculos ſuos ſe habent, neceſſe eſt, vt celeritas, qua ſanguis per arterias mouetur, longe maior ſit in leone quam in homine et in aliis animalibus. Nam ſi ad ſolam circumferentiam ventriculi ſiniſtri reſpicias cuius proportione circumferentia primae aortae in leone dimidio fere quam in homine minor eſt; lumen primae aortae proportione luminis ventriculi quadruplo in leone minus erit quam in homine. Conſequenter eadem ſanguinis, quem ventriculus continet, portio, quae certam aortae partem occupat in homine, quatuor eiusmodi partes occupabit in leone, adeoque per ſpatium quadruplo longius mouebitur tempore eodem, et quadruplo igitur celerius moue-

mouebitur. Iam vero longitudo quoque ventriculi in conſiderationem venire debet, quae aeque ac circumferentia in leone maior quam in homine eſt. Nam ventriculus qualibet ſui contractione ſyſtaltica, quae quidem momentanea eſt, et in leone igitur, quamuis ventriculus longior ſit non plus temporis requirit, quam in homine, omnem ſuum ſanguinem in aortam expellit. Adeoque ad celeritatem ſanguinis in leone comparandam cum celeritate ſanguinis in homine requiretur, vt lumina vaſorum non ex ſui ad lumen ventriculi, ſed ad capacitatem eiusdem ratione aeſtimentur. Et celeritates in vtroque animali erunt in ratione inuerſa luminum arteriarum, diviſorum per capacitates ventriculorum ſuorum. Quibus pro his celeritatibus ratio efficitur $5\frac{28}{29} : 1$, et ſextuplo igitur fere celerius ſanguis in leone quam in homine mouebitur per priorem aortam. Vnde haec modo colligo, non nimium eſſe, ſi dixerim, quadruplo celerius in leone quam in homine et in aliis animalibus ſanguinem moueri in aorta priori, in ea nempe eius parte, quae citra ramos eſt; noncuplo vero celerius in ramis ſecundi vel tertii ordinis, quorum, veluti carotidum peripheriae triplo et lumina igitur noncuplo quam in homine minora ſunt; denique centuplo celerius ſanguinem meare, vbi ad ramos decimos quintos peruenerit, quorum peripheriae decuplo et lumina centuplo in leone quam in homine minora ſunt, et quos vltimos eſſe poſuimus, quamuis in homine ad viginti et triginta vsque eiusmodi diuiſiones facile numerentur.

 Hinc

Motus sanguinis qui in arteriis continuo retardatur in homine, in leone potius accelerari videtur.

Hinc ſequitur porro, cum ſanguis in homine quo magis in ſyſtemate vaſorum progreditur, eo magis quoque in ſuo motu retardetur, ob lumina ramorum, qui ex trunco quouis oriuntur, coniuncta, ſemper maiora lumine trunci; in leone hanc, retardationem vel longe minorem, vel plane nullam eſſe. Prius quam menſuram inſtituimus, monere oportet, aortam proxime poſt ramos maiores editos, vbi incipit vna cum ſubclauiis et carotidibus ramum aortae prioris referre primo ampliorem eſſe deinde ſucceſſiue anguſtiorem fieri ſine nouis ramis productis; veluti ex menſuris ſupra datis apparet, quae docent, prope ſubclauiam hanc aortam eſſe in ambitu ſuo 3 poll 1 lin. prope vertebras autem ante editam primam intercoſtalem 2 poll. Non oportet in colligendis luminibus ramorum metiri hanc aortam prope ſubclauiam, vt facere ſolent in homine, vbi arteriae plerumque cylindricae, vel vix tamen conoideae ſunt, ſed prope intercoſtalem primam, vbi anguſtiſſima eſt. Nam quantum ſub ſingulis diuiſionibus vel poſt ſingulas diuiſiones arteriae vel dilatentur vel anguſtentur, id ſcire noſtra intereſt; ſiue hoc fiat ilico in ipſo ramorum principio, ſiue ſenſim et ad finem eorundem vsque, vbi in alios ramos diuidi incipiunt, hoc nihil refert. His itaque praemonitis, aortae primae, trunci, peripheria cum ſit 3 poll. 6 lin. lumen erit 147 lin. Lumen ſubclauiae dextrae eſt $24\frac{1}{4}$ lin. carotidis dextrae $5\frac{1}{4}$, carotidis ſiniſtrae $5\frac{1}{4}$, ſubclauiae ſiniſtrae 12, et aortae dorſalis priusquam inter coſtalem primam edit 48 lin.

Summa

Summa igitur luminum horum ramorum omnium $94\frac{3}{4}$ ad lumen aortae primae erit vt $94\frac{3}{4} : 147$, id eſt vt $1 : (1\frac{1}{2} + \frac{1}{19})$. Vnde patet, non modo nullam retardationem, ſed accelerationem potius in motu ſanguinis obtinere in leone, prout ille per vaſa progreditur. Frequentiſſima, quae in homine inter ſummam luminum ramorum et lumen trunci inueniri ſolet, ratio eſt $3 : 2$ vel $1\frac{1}{2} : 1$. Eamque PERILL. L. B. v. HALLER ex multis operoſis arteriarum menſuris quaſi mediam elicuit. Simili ergo fere modo ſangius in leone acceleratur, vti retardatur in homine, ſiquidem nempe in aliis diviſionum exemplis eadem ramorum coniunctorum ad truncum ratio obtinet quam in prima aortae diviſione inuenimus. Quare, vt hoc experiamur, etiam arterias pulmonales, quarum menſuras habemus, aeſtimare conueniet. Lumen trunci arteriae pulmonalis igitur eſt $133\frac{1}{3}$ lin. Rami pulmonalis dextri lumen 48, et ſiniſtri $40\frac{1}{3}$ lin. erit; et ſumma igitur luminum ramorum $88\frac{1}{3}$. Ergo ratio ſummae luminum ramorum ad lumen trunci in hoc exemplo erit $88\frac{1}{3} : 133\frac{1}{7}$ quae eſt $1 : (1\frac{1}{2} +$ circiter $\frac{1}{93})$. Haec parum differt a priori, indicatque retardationem fere aequalem, et probat, variationem reſpectu rationis ramorum ad truncos in variis diuiſionum exemplis minorem eſſe quam exſpectari poterat. Si in exemplo priori aortae cum ramis ſuis, loco ſubclauiae dextrae et carotidum, arteriam innominatam poſueris, qua mediante illi rami ex aorta oriuntur; ratio ramorum inde eueniet adhuc minor. Nam circumferentia arteriae innominatae nonniſi 18 lin. eſt. Lumen igitur 27 lin. idemque coniunctum cum luminibus ſubclauiae ſiniſtrae et aortae dorſalis 87 lin. ad lumen trunci aortae erit vt 87 : 147. vel $1 : (1\frac{1}{2} + \frac{2}{11})$ Ergo neque hoc exemplum prioribus contrarium eſt. Quodſi eadem igitur ramorum ad truncos ratio in ſequentibus quoque arteriarum diviſionibus, quas non metitus ſum, obtineret, quod autem non probabile, quin potius impoſſibile videtur, acceleratio inde enormis eueniret, et celeritas vix imaginabilis in vltimis ramis. Interim hoc modo colligamus ſanguinem in leone non retardari ſed accelerari potius, ſaltim in ramis, qui non ad minimos pertinent. Quod variationes attinet, quae in variis leonum ſubiectis obtinere poſſunt, vti in ſubiectis humanis obtinent, eas non negauerim. Sed eo vsque ſe extendere poſſe has variationes, vt qui rami in vno leone ad ſuum truncum ſunt vti $1 : 1\frac{1}{2}$ in altero maiores ſint hoc trunco, id minime credibile eſt; cum eiusmodi variationes in homine, vbi experimenta reiterata exſtant, nunquam inuentae ſint, neque natura animalis eadem maneret, ſi ſtructura corporis adeo vsque variaret. Neque quidquam contra hanc accelerationem poſſe, quae inter cauſas retardantes a phyſiologis numerari ſolent, affrictum ſanguinis, reſiſtentiam arteriarum etc. facile intelligitur. Nam dummodo rami coniuncti ſuo trunco minores ſunt, abſolute neceſſarium eſt, vt, quanto minores ſunt, tanto in iis fluidum celerius moueatur, aut omnis motus plane ſupprimatur.

Cae-

Caeterum nullum dubium eſt, quin enormis celeritas, qua ſanguis in leone mouetur, magnum influxum ſibi vindicet in oeconomiam vitalem huius animalis, in eiusque naturam et attributa. Inter multos effectus, qui motui ſanguinis debentur, paucorum tantummodo mentionem faciam, qui magis ad ſcopum noſtrum ſpectant.

De effectibus, quos haec celeritas ſanguinis in leone producit.

Communis experientia docet, tempore aeſtiuo, quum vaſa corporis noſtri, praecipue quae exteriorem eius ſuperficiem occupant, a calore dilatantur, adeoque motus ſanguinis retardatur, laſſitudinem non modo in corpore et ineptitudinem ad motus exercendos, ſed veram quoque debilitatem ſentiri; cum contra vel modico frigore conſtrictis cute et vaſis, vel ſpirituoſis aſſumtis, vel alia quacunque cauſa, qua ſanguinis motus expeditior et celerior redditur, admiſſa, agilitas in corpore oritur et alacritas. Denique vinculo arteria artus conſtricta, quominus ſanguis ad artum affluere poſſit, artus primum debilitatur, deinde vera paralyſis eiusdem conſequitur. Patet igitur, a celeriori et expeditiori affluxu ſanguinis robur partibus et agilitatem, alacritatemque toti corpori conciliari. Haec agilitas in leone, vti in fele obſeruatur. Simili cum impetu ille in praedam inſilit, et dum incedit, dum ſe mouet, facilitas in motibus producendis vbique elucet.

Robur corporis, agilitas, alacritas.

Deinde in ipſas animi virtutes haec celeritas ſanguinis influxum habere videtur. Praeterquam quod

Audacia et atrocitas leonis.

quod agilitatem illam et leuitatem corporis confidentiam aliquam in nobis producere experiamur, immo quandoque audaciam; in febribus acutis quoque deliria, furores et saepe immensum robur oriuntur a nulla alia causa, nisi a nimia rapiditate, qua sanguis in partes corporis, praecipue in cerebrum impellitur. Nam coercito sanguinis impetu per venae sectionem, vel deriuato tantummodo sanguine a cerebro, diliria et furores cessant. Audaciam itaque leonis, qua non mediocri gaudet, et ferocitatem atrocitatemque ex parte a celeri hoc sanguinis motu pendere existimo; et memorabile omnino est, ipsas carotides, primarias arterias cerebri, adeo insigniter et prae aliis arteriis angustas esse.

Tab. XI.

Fig. I.

a. b. c. d. e. Pericardium sanguine distentum.

a. Vertex inferior acutior.

b. Vertex superior obtusior.

c. Pars anterior, sterno contigua.

d. Pars posterior, vertebris incumbens.

e. Appendix pericardii, qua prima aorta et pars arteriae innominatae inuoluuntur.

f. f. Adeps sub tunica exteriori laxa collectus.

g. g. Membrana tenuis, reticularis, qua pericardium diaphragmati adnectitur.

h. Arteria innominata.

i. Arteria subclauia dextra.

k. Carotis dextra. *l.* Sinistra.

m. Sub-

m. Subclauia finiſtra.

n. Aorta dorſalis, ab inflato pericardio antrorſum protracta.

o. Vena caua ſuperior.

p. Vena ſubclauia dextra. *q*. Siniſtra.

r. Iugularis ſiniſtra.

s. Axillaris ſiniſtra.

t. Arteria pulmonalis ſiniſtra.

u. Vena pulmonalis ſiniſtra.

v. *w*. Rami arteriae pulmonalis ſiniſtrae.

x. *z*. Rami venae pulmonalis ſiniſtrae.

A. *B* *C*. Pulmo ſiniſter. *A*. Lobus medius.

B. Pars lobi ſuperioris, deorſum flexi.

C. Lobus inferior.

D. Pulmo dexter. *E*. Diuiſio carotidis ſiniſtrae.

F – *N*. Larynx. *F*. *G*. *H*. *I*. *K*. Cartilago thyreoidea.

F. Pars, quae refert alam ſiniſtram cartilaginis humanae.

G. Pars, quae refert cornu inferius, cricoideam complectens.

H. Alae dextrae pars.

I. Cornu ſuperius ſiniſtrum.

K. Apex huius cartilaginis

L. *L*. Interſtitia repleta a muſculis cricothyreoideis.

M. Ligamentum cricothyreoideum.

N. Cartilago cricoidea.

O. *P*. *Q*. Aſpera arteria.

O. Annuli cartilaginei, (qui non integri ſunt) exteriores.

P. In-

P. Interiores, quibus exteriores squamatim incumbunt, vt vix inter annulos interstitium membranaceum in parte tracheae anteriori detegatur.

Q. Extremitates annulorum latiores, et quae saepe connatae sunt

Tab. XII.

Fig. 2.

a. Cor. Eius superficies anterior plana rugis transversalibus; distinctione ventriculorum nulla conspicua.

b. Apex obtusus.

c. Excrescentia praeternaturalis.

d. Auricula sinistra. *e.* Dextra. Vtraque minima.

f. Vena caua superior.

g. Vena subclauia dextra. *h.* Sinistra.

i. Aorta prima, quae bulbum efficit.

k. Arteria innominata. s. truncus communis.

l. Arteria subclauia dextra.

m Carotis dextra. *n.* Sinistra.

o. Subclauia sinistra.

p. Aorta descendens.

q. Aorta prope diaphragma resecta.

r. Lobus pulmonis dextri superior.

s. t. Medius in duos subdiuisus. *v.* Inferior.

w. Pulmonis sinistri lobus superior.

x. Medius. *y.* Inferior.

z. Truncus arteriae pulmonalis.

A. Arteria pulmonalis sinistra.

B. C. Eius rami.

D. Ar-

D. Arteria pulmonalis dextra. *E. F.* Eius rami.
G. H Venae pulmonales dextri lateris.
I. Vena pulmonalis finiftra.
K. vsque ad *Q.* Larynx. *K. N.* Cartilago thyreoidea.
K. Pars, quae alae finiftrae refpondet.
L. Eadem pars dextri lateris.
M. Apex, in quo partes laterales coniunguntur.
N. Pars, quae cornu inferius refert.
O. Cornu fuperius finiftri lateris.
P. Foraminulum pro vafis nutrientibus.
Q. Cartilago cricoidea.
R. Ligamentum cricothyreoideum.
S. S. Interftitia a mufculis cricothyreoideis in ftatu integro repleta.
T. T. Annuli afperae arteriae cartilaginei exteriores, qui aliis interioribus, praecipue in extremitatibus fuis incumbunt.
V. Interiores femitecti.
W. Extremitates annulorum latiores.
X. Eaedem concretae.
Z. Diuifio carotidis.

Fig. 3. Tab. XII.

Ventriculus cordis dexter apertus.

a. b. c. d. e. Ventriculus apertus. *a. b. c.* Pars parietis, ventriculi dextri, diffecti anterior reflexa.
a. d. e. Huius parietis diffecti pars pofterior reflexa.

a. c. Linea, qua paries in parte anteriori fepto adhaeret.

f. Ventriculus cordis finifter integer.

g. g. Adeps, parieti, verfus bafin cordis externe adhaerens, vna cum pariete diffectus.

h. h. Paries carnofus ventriculi dextri diffectus, vbi craffior eft.

i. i. a. Idem paries, vbi tenuior eft.

k. l. Fafciculi mufculares, a fepto in parietem tranfeuntes.

m. Septum, eiusque pars anterior.

n. Foraminula caeca.

o. Papilla carnea fepti, ex qua filamentum in valuulam venofam ducitur.

p. Lacertus carneus, qui in partem valuulae anteriorem tranfit, totumque huius partis latus dextrum occupat.

p. p. Alter eiusmodi fafciculus carnofus, qui in partem valuulae venofae pofteriorem tranfit.

q. q q. Radices horum fafciculorum, quibus ex pariete ventriculi oriuntur.

r. Anaftomofis horum fafciculorum.

s. s. s. Columnae carnofae planiores et debiliores.

t. t. Foueolae.

v. Pars valuulae orificii venofi anterior, furfum flexa, vt orificium venofum et pars pofterior huius valuulae *D.* appareat. Pars eiusdem valuulae finifterior retro feptum latet.

w. w. Filamenta huius partis valuulae, a mufculo *p.* producta.

x. In-

x. Interftitia inter haec filamenta, quafi foramina valuulae.
z. Minora eiusmodi foraminula.
A. Foraminula triangularia.
B. Filamentum a papilla *o*. productum.
C. *C*. Filamenta retro feptum orta.
D. Pars valuulae venofae pofterior.
E. Pars valuulae huius, fere annularis, media inter portionem anteriorem et pofteriorem.
F. Filamenta huius partis pofterioris a mufculo *p p*. producta.
G. Pars valuulae venofae, quae carni cordis adhaeret, et orificium venofum inueftit.
G. *H*. Orificium venofum. *H*. Aditus in auriculam dextram.
I. K. Valuula femilunaris anterior diffecta.
L. Valuula femilunaris in orificii arteriofi parte dextra fita.
M. Valuula parti finiftrae huius orificii adhaerens.
N. *N*. *N*. Bafes harum valuularum vel latera convexa, quibus parieti orificii adhaerent.
O. *O*. Margines earum liberi.
P. *P*. Sinus inter valuulas et arteriae parietem intercepti, quo loco arteria etiam paulo amplior eft, vnde finus augentur.
Q. *Q*. In hoc loco arteria paulo conftrictior eft, et externe primum ex corde emergit.
R. *R*. *R*. Tubercula fiue noduli callofi, in quibus extremitates valuularum conueniunt.
S. Truncus arteriae pulmonalis diffectus.

 T. Ar-

T. Arteria pulmonalis dextra.

V. Sinistra.

Tab. XIII.

Fig. 4.

Ventriculus cordis sinister apertus.

a. b. Linea, qua paries ventriculi sinistri cum septe coniungitur.

a. b. d Paries cordis posterior seu ventriculi sinistri.

a. b. c. Septum vna cum ventriculo dextro reflexum.

c. d. Adeps, qui parieti ventriculi sinistri versus basin externe incumbit, dissectus.

e. e. Carnosa substantia ventriculi sinistri, vbi minus crassa.

f. f. Eadem vbi crassior est.

g. g. Eadem vbi tenuior.

h. Septum cordis concauum.

i. k. Fasciculi musculosi planiores, septo adnati.

l. Crassior fasciculus musculosus, sed planior itidem, quo ventriculi orificium arteriosum, tanquam sphinctere constringi potest.

m. n. Foramina caeca.

o. p. p. Crassus musculus, qui solus fere totam partem posteriorem valuulae venosae suis filamentis occupat, compositus ex duabus partibus *o* et *p p*, connatis.

q. q.

q. q. Faſciculi, parieti ventriculi immiſſi.

r. Filamentum ſingulare huius muſculi ramoſum ſepto immiſſum.

s. s. t. v. Filamenta huius muſculi in partem poſteriorem valuulae venoſae inſerta.

w. Alius muſculus valuulae venoſae.

x. z. Eius filamenta in partem anteriorem valuulae inſerta.

A. B. Tertius valuulae muſculus filamentis ſuis partim in anteriorem partim in poſteriorem valuulae partem inſertus.

C. C. Filamenta eius in partem anteriorem.

D. Filamenta in partem poſteriorem.

E. Valuula orificii venoſi, eius quidem pars anterior.

F. Pars poſterior; quae partes valuulae mitrales vocari ſolent.

G. G. Valuula ſemilunaris ſiniſterior diſſecta.

H. Valuula ſemilunaris, quae anterior et dexteterior eſt.

I. Valuula ſemilunaris poſterior.

K. K. K. Baſes valuularum ſemilunarium, quibus cordi adhaerent.

L. L. Margines earundem liberi.

M. M. Sinus inter valuulas et parietem aortae intercepti.

 N. Ori-

N. Orificium arteriae coronariae dextrae.

O. Orificium arteriae caronariae finiſtrum.

P. P. Locus, vbi aorta intus prominet, et quaſi paulum conſtricta eſt.

Q. Tubercula, in quibus extremitates valuularum coniunguntur.

R. Cauitas aortae apertae.

S. Truncus aortae.

T. Arteria innominata.

V. Subclauia ſiniſtra.

W. Aorta deſcendens.

Adiunxi pollicem, quo in menſuris vſus ſum.

OBSER-

OBSERVATIONES SPLANCHNOLOGICAE, AD ACIPENSERIS RVTHENI *LINN.* ANATOMEN SPECTANTES.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Cum Petropoli olim in Acipenſeris Ruſſici anatomia eſſem occupatus, ſtructuram variorum eius organorum ac viſcerum non modo plane ſingularem ac mirabilem, ſed non paucis etiam momentis a conſueta aliorum piſcium conformatione multum diuerſam eſſe, euidenter cognoui; quae, cum digna mihi viſa fuerint, vt orbi literato communicentur, in praeſenti diſſertatione obſeruationes iſtas ſplanchnologicas qualescunque, Anatomiae, quam comparatam vocant, amplificandae cauſa potiſſimum inſtitutas, *Illuſtriſſimae* offerre *Academiae*, easque partim copioſiori ſermone, partim mera ac ſuccincta figuram explicatione, proſequi, nunc mihi conſtitutum eſt.

Anatome

Acipenſeris Rutheni, die 15 Ian. MDCCLIX, Petropoli inſtituta.

Hepar griſeum, punctis obſcurioribus conſperſum, in duodecim lobos erat diuiſum quorum ſeptem dextra quinque finiſtram eius portionem conſtituebant. Illorum primus infra ſummitatem dextrae portionis oblongam et ſubacutam occurrit parallelogramus fere, planiuſculus, latere exteriore, quo fellis veſiculam lambit, concauo carinatus, ac, quamuis eidem nullibi adhaereat, flauo tamen bilis colore tinctus. Continuatur vlterius infra hunc hepatis ſubſtantia, ac incumbentem ventriculi ſummitatem excipit. Facie exteriore eadem portio lateri veſiculae interno arcte adnata eſt, cum e contrario continuata pariter, illique aduerſa hepatis ſubſtantiae portio externum eius latus interna ſeu concaua ſua facie, absque omni nexu, cingat, colore flauo pariter imbuta. Secundus lobus, ſubtriangularis, ſuperficie ſua interna in duas quaſi laminas diuiſus, quarum ſuperior, anguſtior, inferum veſiculae latus tangit, flauedine inde etiam tincta, inferior autem, latior, exterioris ventriculi lateris partem lambit, coloris hepati naturalis. Tertius planiuſculus, anticae pylori regioni libere incumbit, ipſumque inferius excipit. Quartus ſubulatus, tenuis, duodeni principio, et quidem lateri eius externo, absque nexu, applicatus. Quintus et infimus ſitu, ſatis magnus, longus, ſubtriquetrus ac leuiter acuminatus, partim ſub externo, partim ſub poſtico duodeni latere collocatus. Duo adhuc ſuperſunt dextrae portionis lobi, piſcis dorſum reſpicientes, ac oeſophago ſubſtrati; quorum inferior ſextus, maior, tenuis, figura irregularis; ſeptimus denique, ſub ſexto fere totus reconditur, eodemque ſitu parum ſuperior, minimus, ac fere ſubulatus eſt.

eſt. Inter eos lobos, qui ad ſiniſtram hepatis portionem pertinent, primus, ſummitatis huius viſceris oblongae pariter et ſubacutae continuatio, e lato ſenſim anguſtior factus, illorumque primo, ſibi adverſo ex altero latere, longe maior, ſuper oeſophagi ventriculum ſubeuntis, portionem ſuperiorem, ipſamque ventriculi ſummitatem in tranſuerſum maxime extenditur. Secundus, longe infra hunc, acuminatus, extremitate ſua pancreas ſic dictum attingit. Tertius et quartus ſub ſecundo, oeſophagi curuaturae interpoſiti, paruuli: ille quidem acutus, planiuſculus et breuis, hic vero planus, fere circularis, obtuſus, iſtoque maior. Quintus tandem, ac omnium vltimus, duplex, irregularis formae, anterius inter pancreas, ventriculi latus internum et oeſophagi finem, in tranſuerſum ſitus eſt. Sunt equidem praeter hos omnes pauci adhuc lobuli, inter poſt eam ſummitatis duodeni faciem et oeſophagi curuaturam reconditi, quos vero, quia minores ſunt momenti, ſicco pede nunc tranſibimus. Id tamen praeterire nolumus, quod eosdem curuaturae huic membrana mediante duplicata, qua plurima vaſa ſanguine turgida, tam ex infimis hepatis lobis, quam ex oeſophagi, lienis, pancreatis, ventriculique ſuperficie prouenientia, ſuſtentantur, annexos viderimus. Aperto horum communi maiori, interno duodeni lateri, infra pancreas, adnato, experti ſumus, aere ſurſum inflato non tantum omnia mox dicta vaſa, ſed ipſum etiam hepar intumuiſſe. Vaſa haec, pro arteriis procul dubio hab nda, per paria

 fere

fere femper incedunt, venulaeque ramulum, ex lienali vena ortum, fingula eorum includunt. Latus ventriculi internum, conuexaque inprimis pancreatis facies vtroque horum vaforum genere fatis copiofe inftruuntur, eorumque ope arctiffimo cum hepate nexu coniunguntur.

Vesicula fellis oblonga, bile repleta, fubftantiae folito craffioris, *ductum cyfticum* manifeftum ex inferiore fua extremitate oblique deorfum ac finiftrorfum emittit, in concaua feu interna hepatis fuperficie, et quidem inter ipfum huius vifceris corpus ac fecundum dextri lateris lobum, nudum fere decurrentem, et ventriculi faciei pofticae obuerfum. Oefophagi tractus adfcendens, ventriculum tandem fubiens, ligamenti lati ope, e diaphragmate ac concaua, eaque media hepatis fuperficie producti, ipfi hepati adhaeret, ventriculus vero nusquam, nifi circa pofticam et lateralem pylori faciem, eidem arcte, affigitur.

Si *oefophagum* quoad externam faciem a ventriculo, qui ouatus, craffus, ac auium granìuorarum ventriculo fimilis eft, dignofcere velimus: omnem illum tractum, tam a diaphragmate, pone hepatis pofticam, eamque conuexam partem, defcendentem, quam etiam afcendentem, qui iuxta duodenum et pancreas eft, illius nomine infignire debemus. Sin vero eius limites ex interna facie, eosque ad aliorum pifcium analogiam, determinare nobis placeat: eiusdem tractus, et quidem defcendentis

dentis superiorem et plusquam dimidiam partem, ob diuersam omnino tam a reliqua ipsius portione, quam ab ascendente structuram, priorem oesophagum posteriorem vero ventriculum vocare oportet. Illius enim, superioris sc. partis interior superficies papillis planiusculis, subtriangularibus, magnis, deorsumque dependentibus, vndique instructa, huius vero omnis glaberrima, rugisque longitudinalibus, plus minusue euidentibus notata est; qua in re cum aliorum piscium ventriculo conuenire quodammodo videtur, cum ista, oesophagi sc. proprie sic dicti portio, terminis suis ab insequente optime distinguenda, ob papillas partim etiam, quod prior et ab altera diversae omnino sit structurae, oesophagi nomen potius mereatur. At enim vero, si quis hanc admittere velit distinctionem, non videmus, quo nomine ouata ista et musculosa valde pars, quam ventriculum supra diximus, vocari possit. Mallemus itaque omnem illum a faucibus inde ad ouatam vsque et carnosam partem protensum canalem, structura quamlibet diuersum, oesophagum, ouatam vero ventriculum nuncupare. Posset etiam papillata et albida huius canalis pars ingluuies, laeuis vero proprie oesophagus dici. Papillae istae, e lata basi in acumen abeuntus, quo summitati propiores, eo minores sunt interdum etiam, praesertim maiores, vno alteroue denticulo quasi incisas et auctas vidimus. Infimas earum, ad quinque circiter lineas vsque, rugae comitantur longitudinales, illis alterius portionis longe minores ac copiosiores. Laeuis oesophagi descendentis

 portio,

portio, fere in medio, fummitatem tamen fuam propius aliquantum, quam curuaturam, *ductum aereum* patulo ore recipit. Longitudo oefophagi defcendentis tractus 6'' erat, eorumque papillata portio 3½'' laeuis 2½'' abfoluebat; tractus afcendens, laeuis vero 4'' exaequabat. Interior huius fuperficies exalbida eft, rugisque prominentioribus, inprimis curuaturam verfus, minusque interruptis, longitudinalibus diftincta anguftior quoque parum defcendente tractu. Ceterum annotari meretur, externam oefophagi, ventriculi, duodeni ac pancreatis fuperficiem colore e pallide purpureo nigricante, qualem etiam in Polypo octopodio Arift. olim vidimus, fuiffe tinctam.

Ventriculus tactu durus, mufculofus valde, tam quoad formam, quam quoad fubftantiam, vt fupra iam monuimus, cum auium granivorarum ventriculo fatis conuenit. Hoc fecundum longitudinem, mediamque conuexae faciei partem diffecto, craffitiem fubftantiae eius mufculofae maximam, fc. in medio, feptem circiter exaequare lineas, ac oefophagum verfus magis, duodenum verfus minus decrefcere fenfim, ipfamque fubftantiam fibrillis tendinofis, albicantibus, tenuiffimis, ac vtplurimum longitudinalibus, vndique pertextam effe vidimus. Interior ventriculi tunica, mufculofae fubftrata, albicans, ⅓''' craffa et laeuis, finus tres notabiles longitudinales, duosque aggeres quafi, fuperius diuifos, inferius coniunctos, eiusdemque cum finubus directionis, alternatim efformat. Ipfa ventriculi cauitas valde

valde mediocris. Pylorum interior eius tunica parum prolongata conſtituit.

Duodenum teres atque durum, ſi ſecundum longitudinem diſſecetur, duplicem potiſſimum ſubſtantiam exhibet, exteriorem muſculoſam (an vaſculoſam potius vocare conuenit?) diametri $2\frac{1}{2}'''$, fibrillisque tendinoſis, minus licet, quam in ventriculo, manifeſtis, tenuiſſimis, albicantibus, hinc et inde varioque modo in transuerſum excurrentibus diſtinctam; interiorem glanduloſam, craſſitie paulo inferiorem et ex ruffo albicantem. Ipſa autem interior huius inteſtini ſuperficies innumeris foueis, quarum maiores reliquis proxime ſub pyloro occurrunt, expreſſa et reticulata veluti apparet. Foueae hae in ſubſtantiae glanduloſae profundum ducunt, ac perflatu ſingulae, cellularum ſub ſpecie, intumeſcunt.

Pancreatis glandula, figurae quodammodo reniformis, antica facie plana, poſtica conuexa, margine arcuato libero, octo circiter crenis inaequalibus, obtuſis, leuiter inciſo, interiore rectiore, ad dimidiam, eamque inferiorem partem, libero, ad alteram ſuperiorem duodeni ſummitati, eiusdemque ſiniſtro lateri arcte adnato. Longitudo eius $1''$, $8'''$, latitudo $1''$, $1'''$, craſſities autem maxima, ab exteriore, ſc. crenato margine interiorem verſus ſenſim aucta, $7\frac{1}{2}'''$ aequabat. Ad detegendam interiorem huius glandulae conformationem, ſectione per arcuati marginis medium facta, eam in duo quaſi hemiſphaeria diuidebamus, eodem modo, quo alias, ad

 mon-

monſtrandos ductus vrinarios, renes ſolent incidere anatomici, et ecce, comparuit quoque ſtructura, praeter opinionem renum ſimillima. Subſtantia enim exterior, quaſi corticalis, firma, vaſculoſa, coloris e furuo cineritii, a duodeni exteriore non multum abludens, ac ad ſingulos crenarum angulos, e peripheria centrum verſus, in clauos quaſi alternatim longiores, linea in medio albicante notatos, ac inferius inter ſe inuicem conuergentes producta; interior autem, omnisque ea, quae inter clauos erat interpoſita, arcuatum pancreatis marginem verſus compreſſior, rectiorem verſus ſpongioſa magis, reticulata, foueolisque ac cellulis eiusmodi, quales in duodeno vidimus, praedita erat. In conſpectum inſimul quoque veniebant inter craſſiores clauorum extremitates *ductus* ſex ſeptemue *pancreatici* partiales, ſuccum ipſorum breuiſſima via in receptaculum commune, ſatis anguſtum, quod proxime iis ſubiacet, effundentes. Tota autem tam receptaculi, quam ductuum horum, qui non niſi illius veluti latibula ſunt, interior ſuperficies reticulata pariter, foueolisque ac cellulis apertis, inſtructa. Inde tandem liquor pancreaticus, a ductu excretorio communi breuiſſimo ac ampliſſimo exceptus, ad pylori valvulam, in ſiniſtrum principii duodeni latus prono alueo effluit. Ex modo data pancreatis huius deſcriptione patebit, falli eos vehementer, qui illud pro glandula conglomerata velint agnoſcere; nec conglobata melius diceretur, quod plures vno habeat ductus in cauitate ſua excretorios. Glandulae vero

vero vicibus illud fungi, nemo inficiabitur, licet ſtructuram eius aliarum glandularum ſtructurae minus conuenientem videat. Pari etiam ratione de ſturionis duodeno iudicandum eſſe cenſemus, cuius interior ſubſtantia humorem quendam, pancreatico analogum ſecernit, quamuis glandulae diſtinctae in ea nusquam appareant. Non admodum rara eſt haec ſtructura, ſed pluribus certe piſcibus communis.

Quod ad *vaſa biliaria* attinet; ductus notabilis hepaticus, ſubſtantia hepatis vndique obtectus, ſub lobi dextri primi baſi, verſus poſticam, eamque mediam, felleae veſiculae faciem flectitur, inde vero cum eadem tunicarum ope arcte coniunctus, curſu deſcendit parallelo, tandemque trium linearum diſtantia ab eiusdem collo cyſtico ductui inſeritur. Iunguntur eidem, proxime ad ipſius inſertionem, duo alii, directe fere ſibi inuicem oppoſiti, alter, e continuata ſub primo dextri lateris lobo ſubſtantia ortus, deſcendens, alter ex imo aſcendens, anguloque acutiſſimo ac communi cum priori oſtio cyſticum ſubeunt. Praeter hos duo alii adhuc adſunt hepatici ductus, quorum vnus, e dextrae hepatis portionis ſummitate ortus, ſatis amplus, et hepatica ſubſtantia vndique pariter obtectus, mediantibus tunicis, cholidocho communi ſub angulo valde acuto adnectitur, eique decem linearum diſtantia a pyloro immittitur; alter vero, praecedenti brevior et anguſtior, e ſiniſtra hepatis portione proveniens, cholidocho, iuxta ingreſſum eius in inteſtinum, inſeritur. Ductus hic ipſe communis mox

infra

infra quinti huius hepatici infertionem, facta prius aliqua inflexione, inter pylori valuulam fummumque duodeni marginem, idem intrat, illiusque ad oram pofticam fub papillae albicantis fpecie, orificioque anguftiffimo, intus prominet. Ceterum internam omnem vaforum horum biliariorum fuperficiem laeuem atque politam, nec nifi ad ductus hepatici quinti oftium foraminula nonnulla caeca, quae valuularum forte vices gerere poffunt, obferuauimus. Ductus hepatico-cyftici omnino nulli. Reliqua, quae ad aliorum organorum ftructuram fpectant, ex fequenti figurarum explicatione petenda.

Explicatio Figurarum naturali magnitudine delineatarum.

Tab. XIV. Fig. 1.

Cor, cum annexis fibi partibus, poftica facie expofitum.

A. Cor.

B. Bulbus Aortae, obfcure rubens, non albicans vt alias effe folet, nec aortae continuatus, fed propriis limitibus circumfcriptus, ac tam fubftantia, quam colore cordi fuccenturiato externe fimilis.

C. C. C. Auricula cordis triloba.

D. Trun-

D. Truncus venofus, ex venae cauae fuperioris ac inferioris coniunctione ortus. *d.* Auriculae fpecies, ei adnexa; an fanguinis receffus aut diuerticulum?

E. Oftium canalis, diaphragma perforantis, venofum, trunci venofi oftio anguftius.

F. Oftium canalis venofi, diaphragma perforantis, maius.

G. Sinus venofus, fiue receptaculum Verneianum, confluxu trunci D, canaliumque venoforum E et F oriundum.

H. Aorta.

α. Lobulus oblongus, membranaceus, tenuior, bulbo adnatus.

β. Lobulus duriufculus, ex altero latere bulbi bafi affixus, minor, bulbo ipfo parum pallidior.

γ. Lobulus duriufculus, alterius lateris, bulbi bafi affixus, maior, eiusdem coloris, ac prior.

δ. Sacculus auriculae trilobae.

$\varepsilon-\varepsilon$. Lobuli vel prominentiores, vel cordi profundius immerfi.

$\zeta.\ \zeta.\ \zeta.$ Venulae, diaphragmate in cor abeuntes.

Obf. Aere, fiue per aortam, fiue per venarum antrium impulfo, tam auricula et cor, quam aorta etiam, femper fimul intumefcunt; valularum itaque praefentia effectum hunc impedire nequit.

Fig. 2.

Truncus venosus (Fig. 1. D.) cum auricula sua (Fig. 1. *d.*) et canalis venosus, angustior (Fig. 1. E) diaphragmaticus, dissecti, vt Receptaculi Verneiani interiora appareant.

A. Ostium in Auriculam cordis patens.

B. B. B. Trunci venosi et canalis diaphragmatici partes dissectae.

C. Auriculae minoris, trunco venoso, sub sacculi specie, appensae, facies interior, reticulata, tendinosisque trabeculis instructa.

E. F. G Auricula cordis triloba; vbi G sacculum Fig. 1. sub lit. δ insignitum, denotat.

Obs. Ad venae cauae superioris coniunctionem cum inferiore valuulae duae, sibi inuicem oppositae, conspicuae occurrunt.

Fig. 3.

Trium auriculae cordis loborum facies interior.

A. A. Ostium amplum, ex Auricula in cor.

B. Vnus auriculae lobus (vid. Fig. 2. E.).

C. Alter lobus sacciformis.

D. Tertius lobus.

Fig. 4.

Cor secundum longitudinem dissectum, vt ventriculi interiora in conspectum veniant.

A. Pars

A. Pars auriculae inferior, refecta.

B. Cordis (quod inter corda vnius duorumque ventriculorum ambigit) cauitas f. ventriculi

C. C. Subftantiae cordis fectiones.

D. Valuula cordis maior.

E. Minor.

F. Minima.

G. G. Lobuli cordis diffecti facies interior, mufculofa, reticulis hinc et inde lacertofis, lacunisque cordis inftar, diftincta.

H. Locus, ad quem aditus e cordis cauitate anteriore in pofteriorem patet.

Fig. 5.

Cor (iterata fectione longitudinali, per alterum ipfius latus, fub angulo cum priore fectione acuto, et quidem fecundum viam, e ventriculo in bulbum ducentem, facta) vna cum aortae bulbo et ipfa aorta apertum.

A. Pars ventriculi alterius lateris, in Fig. 4. potiffimum vifa.

B. Pars ventriculi huius lateris.

C. C. Septum cordis dimidiatum, e columnis carneis conftans.

D. E. Subftantiae cordis fectiones.

F. Sectio fubftantiae cordis mediae ad E pertinentis.

G. G. G. Lobulorum cordis diffectorum facies interior.

H. Lobulus bulbi aortae minor (vid. Fig. 1. β.).
I. Valuularum quatuor, primaeque magnitudinis, ad bulbi infertionem fiue bafin occurrentium, infima feries.
K. Valuularum quatuor, fecundae magnitudinis, media feries.
L. Valuularum quinque, tertiae magnitudinis,
M. Bulbi aortae facies interior, laeuis.
N. Valuulae tres femilunares, ad aortae initium.
O. Aortae facies interior.

Obf. Ex apparatu omnium harum valuularum tam fingulari, quam artificiofo euidenter patet, cor et aortam, non, vt in quadrupedibus vel aliis etiam pifcibus alias fieri folet, contractione alterna, fed fimultanea âgi, ita, vt, fi v. g. auricula et bulbus aortae in diaftole verfentur, fyftolem exerceant fynchronam, et vice verfa.

DE HERMAPHRODITO AD SEXVM VIRILEM PERTINENTE.

Auctore

I. LEPECHIN.

Casus obtulit, Illustres Academici obseruationem, quamuis non omnino nouam, omni tamen attentione, vt mihi videtur, dignam: addit enim momentum ad supplendas quasdam obseruationes, et ad euertenda exinde deducta erronea placita *(a)*.

Inter militiae designatos colonos venit iuuenis xx. annorum ex districtu Werchowaschescoy (верховажеской уѣздъ) qui lubenter conscribi cupiebat. Erat ille facie formosa, corpore procero et bene constituto. Ast dum ex institutis milites conscribendi nudus inspiciebatur, primo feriebant oculos mammae muliebres sat turgidae et duriusculae, papillae magis protuberantes, quam constitutio virilis postulabat et areola amplior rubella. Hae notae, facies imberbis et vox feminea iam aliquid inconsueti portendebant. Bene reliquis partibus corporis consideratis, partes genitales producuntur in scoenam. Coles curtus, imperforatus, scrotum supra basin membri

(a) Vid. Ephemerid. N. C. Au. 3. Obseruat. 97.

firmatum, et perinaeum quodammodo cauum facile persuadent chirurgis, virum illum et feminam esse. Ipsorum testimonio absoluitur sorte militiam exercendi et remittitur ad penates.

Interim Illustrissimus *Georgius Andreades de Golossyn*, Praetor militaris, Eques St. Annae et gubernator Archangelopolitanus, audita hac minus solita partium conformatione, iussit iuuenem ad me adduci, quam ego occasionem nactus, paucis externam partium descriptionem, addita ad viuum depicta icone absoluo.

Regio pubis erat turgida et eleuata vt in sexu feminco fieri solet; coles flaccidus duos pollices et tres lineas longus, fine cocco terminatus; praeputium ob defectum frenuli glandem non tegebat. Orificium vrethrae (A A) imperuium et incisura quasi notatum (*a*) inde secundum totam longitudinem colis inferiorem, vbi Natura vrethrae designauit locum, exaratus erat sulcus vsque ad basin colis. Hunc viae vrinariae defectum, adimplebat foraminulum, quo vrina emitti possit, loco prorsus inconsueto, nimirum ad superiorem perinaci partem (B), quod rimulae instar hiabat. Totus perinaci decursus erat cauus, quae cauitas adhaerente parte laterali scroti (*d d*) augebatur, ita vt obiter spectata imaginem partium naturalium foeminearum prae se ferret. Scrotum ipsum supra basin colis firmatum, nulloque septo intermedio distinctum duos sacculos efformabat, qui praesentibus testiculis homineque

Tab. XV.

erecto

erecto anteriora ſpectabant et ad latera diſpoſita videbantur. Hic teſticulorum lateralis ſitus aberrantis quoque Naturae induſtriam commonſtrat; ſi enim ſcrotum ſaccum ad perpendiculum dependentem et continuum formaret, ſubiaceret omnino effluenti vrinae, et ab ipſius acrimonia arroderetur.

Praemiſſa hac ſuccincta partium naturalium enarratione non incommode, vt mihi videtur, tangi poteſt illa multoties agitata Philoſophorum quaeſtio, *vnde primordia noui animalis proueniant? num ſcil. ab vtroque parente? an omnia ad patrem, an ad matrem referenda?* Ardua ſane haec eſt quaeſtio, et an vsquam liquido demonſtrari poſſit dubito; quamuis non eſt inficiendum probabilius videri veritatem a partibus prioris ſtare: nullum enim animal perfectum ſine vtriusque ſexus commercio productum, et ſemper foetum mox patri, mox matri, mox vtrique parenti ſimilem procreatum conſtat; perpendamus interim et reliquarum ſententiarum quaedam pondera. Ex illo tempore, quo vermiculi ſeminales per microſcopiorum auxilia in ſemine maſculo innotuerunt, omnia ad patrem referebantur; ſed lepidam hanc obſeruationem vermiculorum, et exinde deductam ſententiam, multis argumentis euerſam eſſe aliunde conſtat. Qui vero praerogatiuam hanc ſoli matri tribuunt ſententiam ſuam propugnant praeprimis iſtis viarum anguſtiis, quae ab vtero per tubas fallopianas ad ouaria ducunt, et per quas ſemen maſculinum vtpote pigrum peruenire haud valet. Non

minus

minus ponderis quoque se habere in exemplis a paruitate penis prauaque ipsius conformatione desumtis confidunt, quorsum et noster casus referendus esse videtur; impediretur enim iter semini ob aperturam loco minus idoneo factam, et in coitu per attritum ad parietes vaginae obturaretur omnino, nisi Natura in aberrationibus suis miraculum faceret, quod non sine magna animi voluptate hoc in casu cognoui. Non enim huic soli partium genitalium prauam formam induit Natura, sed et duo ipsius fratres pari passu cum *ipso* ambularunt.

Hi itidem iussu Excellentissimi Domini Gubernatoris de *Golloffzin* adducuntur in orbem. Alter ipsorum erat XXX. annos natus, et per decennium iam matrimonio iunctus, alter vero annum XXII agebat, et ante quinque annos vxorem duxit. Maior natu quatuor iam genuit perfectos liberos, quorum duo inter viuos, duo inter mortuos numerantur. Ex lumbis vero natu minoris, ob vxorem decrepitam nulli prodierunt liberi. Ceterum vterque erat simillimus fratri minimo natu. Nulla ipsis aderat barba, vbera, vox et facies muliebres. Partes genitales ad assem referebant iconem adpositam, hoc solo cum discrimine, quod omnia fuerunt flaccidiora prouti in castris veneris exercitatis contingere solet. Ex his iam miram illam ad procreandos liberos intellexi potentiam; illis enim dum erigitur coles, intumescit simul et apertura vrethrae (B), expandit que se secundum sulcum colis inferiorem vsque ad inci-

incifuram glandis (*a*), fic libera et commoda aperitur via femini eiaculato, quod eo fortius erumpit, quo magis per hanc elongationem orificium vrethrae ad extremitatem anguftatur. His fub conditionibus facile attingit, orificium vteri, in coituque foecundo fua peragit officia. Vana igitur mihi videntur argumenta a mala conformatione penis depromta, quibus fententiam fuam defendere conantur illi, quibus omnia patri in formatione foetus denegare placet. Nullus enim dubito huius generis obferuationes non ex amuffim enarratas, mirumque illum in obferuationibus Naturae mechanismum neglectum effe. Noftra porro obferuatione fretus et a paruitate penis deducta argumenta non magni momenti exiftimo; quid enim vetat et in his fupponere validioris conftitutionis mufculos, quibus eiaculatio feminis adiuuatur, et vrethram ad orificium magis anguftatam, vt mirum illum vteri defcenfum claris viris obferuatum taceam.

Seminis eruptio noftris non fine voluptate contingit, et cum quadam amoena pulfatione in glande. Praeterea funt valde falaces et celerius ipfis excitatur voluptas; aft tempore pluuiofo et lurido friget Venus; tefticuli enim tunc retrahuntur in inguina, dolent et totum fatigant corpus, tempore vero fereno iterum in facculos fcroti delabuntur, priftinumque corpori reddunt vigorem. Vrina cito colligitur, citoque ob breuitatem vrethrae elabitur. Vires ipfis non femineae, fed mafculae et ad exercendos colonorum labores aptae.

 Haec

Haec ſunt illa, quae de noſtris volui, potui. Non enim mihi introſpicere licet internam partium ſtructuram, mirumque illum in coitu mechanismum. Neque diuinare poſſum vnde vox, facies ac mammae muliebres, defectusque barbae proueniant. Non caſu haec fiunt, ſed ex praeternaturali partium genitalium conformatione deriuanda. Illam denique quaeſtionem, vnde tanta in tribus fratribus partium genitalium a via conſueta aberratio, non meam facio; ſuppleant ipſam, ſi lubet, illi, quibus imaginatio felix omnia diuinare permittit. Id tandem monendum habeo parentes ipſorum bene formatos eſſe, produxiſſeque alios liberos vtriusque ſexus, nullo defectu, nullaque peruerſa conformatione laborantes.

SALMO

SALMO LEVCICHTHYS ET CYPRINVS CHALCOIDES. DESCRIPTI.

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Mare Caspium piscium quantitate omnino abundans, magis indiuiduorum copia, quam specierum varietate superbit; haec enim ad decades quatuor vix accedunt. Plurimae harum *Europaeae* et aquarum dulcium sunt. Ex *Cyprinorum* genere inueniuntur: *Barbus*, *Carpio*, *Gobio*, *Tinca*, *Carassius*, *Rutilus*, *Idus*, *Orfus*, *Erythrophthalmus*, *Ieses*, *Nasus*, *Aspius*, *Alburnus*, *Vimba*, *Brama*, *Cultratus*, *Bioerkna*, *Farenus*, *Ballerus*; quibus accedunt *Esox Lucius*, *Salmo Salar*, *Silurus Glanis*, *Cobitis Taenia* et *Barbatula*, *Perca Cernua*, et *Fluuiatilis* et *Lucioperca*, *Gadus Lota* (quae nomina ex *Edit. XII. Syst. Nat. Illustr. Equ. avr. a LINNE* intelligenda) Agmini huic iungitur generosa *Acipenserum* gens, cum vulgo piscibus adnumeranda, corporis mole speciosa, indiuiduorum copia immensa, specierum numero minus nota.

Nam praeter *Husonem*, *Sturionem* et *Sterletam Russorum*, quae *Acipenser ruthenus LINNAEI*, occurrunt duae ab his diuerſae ſpecies, quarum vna *Seuruga*, altera *Schypa*, et a *Ruſſis* et a nobis trivialiter appellatur; quae certe omnes inter ſe valde affines et aegre, a numero partium vix vnquam, diſtinguendae. Numerus enim radiorum pinnarum vix differt in huius generis naturaliſſimi ſpeciebus, et, ſi differat, nunquam cum certitudine determines; et cirrorum numerus in omnibus quaternus; numerus autem ſquamarum maiorum tuberculoſarum in lineis ordinatarum equidem diuerſus, ſed minime conſtans eſt, quae inſuper in omnibus aetate profectis obſoletae euadunt, ita vt nec praeſentia vel abſentia tuberculorum ſpecies diſtinguat. Capitis partes notas differentiales haud infrequentes et conſtantiſſimas largiuntur. Quaeſiuimus igitur, *Ill KRAMERI*, de animalibus *Auſtriacis* meritiſſimi, veſtigia prementes, notas ſpecificas. Primarias ex roſtri figura, eiusdemque ad oris diametrum proportione, ſecundarias ex labiorum figura et ſitu cirrorum ad roſtri apicem et oris rictum relatiuo; exinde nobis.

Huſo: *Acipenſer* roſtro obtuſiſſimo, oris diametro longitudine cedente; cirris ori propioribus; labiis integris.

Sturio: *Acipenſer* roſtro obtuſo, oris diametro transuerſo longitudine aequali; cirris roſtri apici propioribus; labiis bifidis.

Schuba:

Schypa: *Acipenser* roſtro obtuſo, oris diametro quoad vnam tertiam partem longiore; cirris roſtri apici propioribus; labiis bifidis.

Sterleta: *Acipenser* roſtro ſubulato, recto, diametro oris quadruplo longiore; cirris vix ori propioribus; labiis integris.

• *Seuruga*: *Acipenser* roſtro ſpatulato, ſub recuruo, diametro oris trans-verſo ſextuplo longiore; cirris ori propioribus; labiis integris.

Quorum magnitudine *Huſo* primus, non raro nouempedalis; *Sturio* ſecundus, plerumque ſexpedalis; *Schypa* et *Seuruga* ſubaequales, vix quinque pedales; *Sterleta* tandem raro tripedalis Sufficiant ſpecifica haec *Acipenſerum* nomina, donec plenariam horum hiſtoriam loco opportuniori communicauerimus.

Denominandi reſtant duo Maris *Caſpii* ciues, plane indigeni et Ichthyologis minus noti, qui nobis, altero *Salmonibus*, altero *Cyprinis*, ſecundum principia *Illuſtr. Equitis aurati a LINNE in ſyſtemate Naturae* ſtabilita, adſociato, audiunt: *Salmo Leucichthys* et *Cyprinus Chalcoides*; vtrumque rite deſcribamus.

SALMO LEVCICHTHYS.

Statura et *Magnitudo Salmonis Salaris LINNEI* ſeu *Salmonis primi ARTEDII*, qui *Salmo vulgaris*

garis omnium auctorum, ita vt huius icones etiam *Leucichthydis* ideam sat claram sistant.

Caput et *Corpus* oblongum, parum compressum, extensione ab apice rostri ad caudam vsque recta, plane non adscendente; hinc omnis latitudo piscis ab abdomine modice deorsum arcuato; *habitus* squamosus et malacopteryeiius.

Rostrum obtusissimum: *mandibula superior* latissima, integra, recta; *inferior* adscendens, subconica, apice tuberculoso ante superiorem prominens; vtraque edentula, *rictus* terminalis, amplissimus, quadratus; *lingua* triangularis, soluta, subaspera; *oris cauitas* alba immaculata; *palatum* latum, planum, antrorsum vtrinque subasperum *denticulis* minimis, tactu, non visu, percipiendis; *nares* medium inter rostrum et oculum occupantes, apertura vtrinque gemina, angusta; *oculi* laterales, liberi, ampli, iride argentea, punctulis nigris irrorata.

Vertex fornicatus, nudus, glaberrimus, subdiaphanus, hyalino-fuscus et nigro punctatus.

Branchiarum opercula ex quatuor laminis osseis conflata, compressa, argentea et punctis nigris irrorata; *Membrana branchiostega* alba, decem radiata, ossiculis distinctissimis, latis, parum arcuatis.

Branchiae vtrinque quinque; *radii* in angulum valde acutum geniculati; in parte conuexa quatuor anteriorum *plumae* duplices et laxissimae, quinto in ipsis faucibus obuio, nudo; in parte concaua primus secunfecundus et quintus *apophyſium* laeuium longiſſimarum vnico, tertius et quartus duplici ordine inſtructi, poſterioribus in tertio obſoletiſſimis, in quarto ſat eminentibus.

Dorſum latiſſimum, vbique conuexum; *venter* a branchiarum foramine ad pinnas ventrales planiuſculus, ab hinc ad eandem ſat conuexus; *latera* plano conuexa, *linea lateralis* recta, dorſo aliquantum propior quam ventri, dorſoque parallela; *ſquamae* pro mole piſcis haud adeo magnae, ſubrotundae, imbricatae, laeues, vbique argenteo ſplendore nitentes, in dorſo a muco cutaneo ſub ſquamis nigro caneſcentes, punctis nigris vbique irroratae, ſed in ventre immaculatae; *anus* caudae multo propior, quam capiti, proxime ante pinnam ani, apertura duplici.

Pinnae dorſales duae, *prima* vera in medio corporis ſita, pinnis ventralibus tantillum anterior, ex albicanti punctis nigris fuſceſcens, radiis quindecim, quorum quatuor primi integri, reliqui apice ramoſi, primus minimus; *ſecunda* ſpuria, adipoſa, craſſa, ſubdiaphana, hyalina, punctis nigris adſperſa, integra, parua, pinnae ani oppoſita.

Pinnae pectorales acuminatae, albae, pone branchiarum foramen ſitae, radiis quatuordecim, primo integro, reliquis ramoſis.

Pinnae ventrales in medio abdomine, pone pectorales ſitae, rotundatae, albae antrorſum fuſco punctatae, radiis vndecim, primo integro; accedit ſupra fupra bafin harum pinnarum *apophyfis* triquetra acuminata, cartilaginea.

Pinna ani decrefcens, rubicunda, fufco-maculata, radiis quatuordecim, primo breui, fubadipofo, fimul cum fecundo, longiffimo et integro, reliquis ramofis.

Cauda perpendicularis, femilunata, fubadipofa hinc radii aegerrime numerandi, qui infuper ramofiffimi ad bafin fere vsque, ni fallimur, viginti feptem, a longiffimis extimis numerandi.

Magnitudo tripedalis vulgo, non raro vltra.

Dimenfiones partium externarum fecundum pedem *Londinenfem* ita:

	poll	lin.
Longitudo ab apice maxillae inferioris ad fuperiorem	—	4.
—— ab apice maxillae fuperioris ad nares	1.	—
—— —— —— —— —— ad oculum	2.	—
—— —— —— ad foramen branchiarum	6.	—
—— —— ad pinnae dorf. 1^{ae} initium	19.	6.
—— —— ad pinnae dorf. 1^{ae} extremum	23	6.
—— —— ad pinnae dorf. 2^{ae} initium	32.	8.
—— —— ad pinnae dorf. 2^{ae} extremum	34.	—
—— —— —— —— ad caudae radicem	37.	6.
—— —— ad caudae cruris fuper. apicem	43	9.
—— ab apice maxillae inferioris ad pinnarum pectoral. radicem	9.	—
—— —— ad pinnarum pector. apicem	14.	—
—— —— ad pinnarum ventral. radicem	20.	6.

Longi-

	poll.	lin.
Longitudo ad pinnarum ventr. apicem	25.	—
—— —— ad anum - - - - - -	31.	—
—— —— —— ad pinnae ani initium	31	4.
—— —— —— ad pinnae ani extremum	35	10
—— —— —— —— ad caudae radicem	39.	4.
—— ad cruris inferior. caudae apicem	45.	—
Diameter rictus oris aperti perpendicularis	3	4.
—— —— —— —— transuerſalis - -	2.	8.
—— inter nares - - - - - -	1.	4.
—— capitis perpendicularis inter nares -	2.	—
—— inter oculos - - - - - -	2.	—
—— capitis perpendicularis inter oculos -	3.	—
—— oculorum - - - - - -	—	10.
—— inter lineas laterales ad branchiarum foramen	3.	6.
—— corporis perpendicularis ibidem - -	5.	6.
—— inter lineas laterales ad pinnas ventrales	3.	—
—— corporis perpendicularis ibidem - -	6.	—
—— inter lineas laterales ad anum - -	2	8
—— corporis perpendicularis ibidem - -	4	8.
—— inter lineas laterales ad caudam - -	1	2.
—— corporis perpendicularis ibidem - -	2.	6.
—— corporis perpend. maximus inter pinnas Pect. et Ventr.	6	6.
—— —— transuerſalis maximus ibidem -	4.	—

Pondus Piſcis dimenſi adaequat octodecim libras medicinales.

Cor ſat magnum, exacte pyramidem triquetram referens, carnoſum et ſtrictum, baſi antrorſum feu furfum fpectante, finiftrorfum aorta Bullata, dextrorfum auricula ampliffima aucta.

Diaphragma membranaceo-tendineum, *peritoneum* album.

Hepar latum, quadrangulum, integrum, brunneo-lutefcens, diaphragmati adiacens, angulo finiftro aliquantum defcendens; *vefícula fellea* ampliffima, fuperficiei inferiori hepatis adhaerens et ad marginem anteriorem prominens, bile atro-virente fcatens, vifcera adiacentia inquinans.

Lien triangularis, latus, vix hepati minor, aterrimus, in medio fere ventre, ventriculi flexurae adnexus, extremitate fuperiore fubbifida.

Oefophagus fat amplus diaphragmate perforato continuat in ventriculum nec cardia diftinctum, nec ampliorem, qui recta per 9. pollices ad medium fere abdominis defcenfus recuruatur, et per 5. pollices iterum adfcenfus fpinctere pylori conftringitur et abit in *inteftinum*, quod dum longitudine 5. pollicum abfoluta ad hepar peruenerit iterum reflectitur et per 16. pollices ad anum vsque recta procedit, diametro vbique aequali, ventriculo dimidio anguftiore *proceffus vermiculares* caeci, numerofiffimi, adipe intricati, omnem inteftini peripheriam a pyloro vsque ad flexuram obfidentes, poft flexuram in parte defcendente rariores et in vno tantum latere inteftini nec vltra regionem pyloro refpondentem obuii, interne in inteftinum hiantes; quod interne a luminibus hifce approximatis quafi cribrofum et muco tenuis-

tenuiſſimo albido ſcatens, abhinc obſolete longitudinaliter et tandem aliquot pollices ante anum transverſaliter rugoſum; ventriculus interne longitudinaliter rugoſus, valuulis eminentiſſimis rectis atque annulo parum eminenti ad pylorum terminatus.

Ouaria duo, ſimplicia, per totum abdomen ad latera veſicae aëreae vtrinque decurrentia, obſcure rubra; *veſiculae ſpermaticae* his analogae, albae.

Veſica aërea oblonga, ampliſſima, ſimplex, per totum abdomen ad ſpinam dorſi decurrens; *ductu pneumatico* breui, ſed amplo ab oeſophago ad extremitatem ſuperiorem veſicae abeunte.

Renale viſcus ſanguinolentum, ad ſpinam dorſi latiſſimum.

Caro cruda rubicunda, cocta alba omnino, oleoſo-pinguis, ſapidiſſima, praeſertim fumo indurata et tunc *ſalmonem* vulgarem et gratitudine et dulcedine multoties exſuperans, hinc merito in ſummis per *Ruſſiam* deliciis, menſis principum dicatis.

Coitum celebraturus adſcendit e Mare *Caſpio Wolgam* menſibus hiemalibus, reliqua mare hoc petentium fluuiorum oſtia omnino praetereuns, excepto Iaico ſeu Rhymno.

Per *Ruſſiam* appellatur Belaia Rybyza (белая рыбица) i. e. albus piſcis; inde nomen triuiale noſtrum, naturae piſcis conuenientiſſimum.

Neminem dubitaturum fore confidimus, quod piſcis nunc ſat fuſe deſcriptus *Salmonibus* LINNAEI iure adſociatus ſit, qui ad *Coregonos* ARTEDII pertinet, atque propter maxillas edentulas et inferiorem pro *Coregono primo* ARTEDII et *Salmone Albula* LINNAEI haberi poſſet, niſi magnitudo et reliqua non pauca aduerſarentur. Ad remouendam hanc ambiguitatem notis hiſce ſpecificis, radiorum membranae branchioſtegae numerus addendus eſt; ſit igitur.

Leucichthys: *Salmo* maxillis edentulis, inferiore longiore; radiis membranae branchioſtegae decem.

Albula: *Salmo* maxillis edentulis, inferiore longiore; radiis membranae branchioſtegae ſeptem.

Synonyma cum veri ſpecie nulla ex ARTEDIO, qui vnicus Ichthyologorum inſtar omnium in peregrinatione ad manus eſt, *Leucichthydi* vindicare poſſumus: hinc pro piſce nouo Mari *Caſpio* proprio habemus.

Accedamus ad ſocium, qui.

CYPRINVS CHALCOIDES.

Statura Clupeae Harengi, cuius clariorem ideam icon magnitudinem naturalem exprimens ſiſtit.

Corpus compreſſo-oblongum, ſquamoſum et malacopterygium.

Caput compreſſum, acuminatum; *mandibula ſuperior* ſubrecta, obſolete emarginata, vaginata; *inferior*

inferior ante ſuperiorem prominens apice tuberculoſo, ſurſum eleuato, ſinui mandibulae ſuper oris reſpondente; vtraque edentula; *rictus* terminalis, rotundatus, vix indicis apicem recipiens; *Lingua* oblonga adnata, cartilaginea, alba, laeuis, *Oris* cauitas alba, ſpatio apicem mandibulae inferioris inter et linguam punctulis fuſcis irrorato, *palatum* ſubconcauum, laeue; *fauces oſſiculo* plano, albo, exaſpero munitae; *nares* verticales, medium roſtrum et oculos inter occupantes, apertura vtrinque gemina, valuula inter media poſticam obtegente diſtincta; *oculi* laterales, liberi, ori propiores, quam branchiarum foramini; iride argentea, ſuperne ſubaurata et punctulis nigris irrorata, inferne plerumque macula ſanguinea notata; pupilla circulari, atra.

Frons et *Vertex*, fuſco-virens, rotundato-planus, linea recta a roſtro procedens; *gula* deorſum arcuata.

Branchiarum opercula plana, laeuia, nitidiſſime argentea; *membrana branchioſtega* triradiata, alba; *branchiae* vtrinque quinque; radii arcuati; in parte conuexa quatuor anteriorum plumae duplices, quinto in ipſis faucibus obuio nudo; in parte concaua apophyſes dentiformes, laeues, in quatuor anterioribus duplici ordine, quorum exterior primi radii reliquis ſub aequalibus multo longiori, in quinto ſimpliciter diſpoſitae.

Dorſum parum conuexum, modice adſcendens; *venter* deorſum arcuatus, vt exinde latitudo piſcis,

 a gula

a gula ad pinnas ventrales planiusculus, ab hinc ad anum in carinam acutam contractus, caudam versus rotundatus; *latera* conuexo-plana; *linea lateralis* deorsum arcuata, ventri propior et parallela, punctis eleuatis albidis circiter 70. *Squamae* omne corpus obtegentes, rotundatae, imbricatae, striatae, in dorso ex canescenti et virescenti argenteae et punctis fuscis irroratae, ad latera splendide argenteae, in ventre lacteae; *anus* caudae multo propior, quam capiti, proxime ante pinnam ani, apertura duplici.

Pinna dorsalis medium fere dorsi occupans, subquadratica, fuscescens, radiis duodecim, quorum primus secundo dimidio breuior, secundus longissimus, ambo integri, reliqui decrescentes et ramosi.

Pinnae Pectorales pone branchiarum foramen, oblongo-acuminatae, albae, radiis vulgo sexdecim, rarius quindecim vel septemdecim, quorum primus maximus, reliquis robustior, fuscus et simplex, reliqui subramosi, vltimi minimi et proximi.

Pinnae ventrales pone pectorales, parum ante dorsalem, in medio abdomine sitae, rotundatae, albae, radiis nouem, quorum primus longior et simplex, reliqui decrescentes et valde ramosi; accedit superius ad pinnarum harum radicem apophysis squamosa, lanceolata, alba.

Pinna ani medium inter pinnas ventrales et caudam occupans, decrescens, radiis vulgo nouemdecim, variantibus inter 17 vsque ad 20, quorum primus breuissimus, secundus duplo longior, tertius lon-

longiſſimus, omnes tres ſimplices, reliqui decreſcentes et ramoſi.

Cauda perpendicularis, bifurca, fuſca, radiis nouemdecim, exceptis quatuor vtrinque breuiſſimis extimis, quorum longiſſimi exteriores ſimplices, reliqui ramoſi.

Magnitudo vix pedalis.

Dimenſiones partium externarum ſecundum pedem londinenſem ita:

	poll.	lin.
Longitudo ab apice maxillae inferioris ad ſuperiorem	—	2.
—— ab apice maxillae ſuperioris ad nares	—	5.
—— —— —— —— ad oculum - - -	—	7.
—— —— —— —— ad branchiarum foram.	1.	10.
—— —— —— —— ad pinnae dorſalis initium	4.	9.
—— —— —— —— ad pinnae dorſalis extremum	5.	11.
—— —— —— —— ad caudae radicem -	9.	3.
—— —— —— —— ad caudae cruris ſup. apicem	11.	6.
—— ab apice maxillae inferioris ad radicem P. pectoralis	2.	2.
—— —— —— —— ad pinnae pector. apic.	3.	6.
—— —— —— —— ad P. ventralium radicem	4.	8.
—— —— —— —— ad anum - - -	6.	6.
—— —— —— —— ad P. ani initium	6.	7.
—— —— —— —— ad P. ani extremum	8.	2.

Lon-

	poll	lin.
Longitudo ad caudae radicem - - -	5.	7.
—— —— —— —— ad caudae cruris inf. apicem	11.	10.
Diameter rictus oris aperti perpendicularis	—	8.
—— —— —— —— —— transuerfalis -	—	6
—— inter nares - - - - - - -	—	5
—— capitis perpendicularis inter oculos -	1	1.
—— inter oculos - - - - - -	—	11
—— oculorum - - - - - - -	—	6
—— inter lineas laterales ad branchias - -	1.	1
—— corporis perpendicularis ibidem - -	1.	1
—— inter lineas laterales ad pinnas ventrales	1.	1
—— corporis perpendicularis ibidem - -	2	4.
—— corporis perpendicularis ad anum - -	2	—
—— inter lineas laterales ad caudam - -	—	3
—— corporis perpendicularis ibidem - -	1.	—
—— corporis perpendicularis maximus ad P. dorfalem	2.	5.
—— corporis transuerfalis maximus ibidem	1.	3.

Cor fubrotundum, pifo vix maius, corpore dextrorfum, auricula finiftrorfum fpectante, pericardio argenteo, tendineo, diaphragmati adnexo inclufum.

Diaphragma tendineum, ftrictum; *peritoneum* argenteum, punctis nigris irroratum.

Hepar corpore lato, plano, diaphragmati fuccumbente, e quo procedunt lobi tres, tenuiffimi, longi; quorum medius reliquis longior, ad pinnas ventra-

ventrales vsque extenſus, abdomini parallelus; dexter longitudine medius, in hypochondrio dextro ſpinam dorſi verſus ſitus et *veſicula fellea* parua auctus; ſiniſter breuiſſimus; omnes inteſtino arctiſſime adnexi et adipe inuoluti.

Lien atro-rubens, tenuis, linearis, extremitati lobi ſiniſtri hepatis adnexus et inter hunc et ventriculum proceſſum longum diaphragma verſus emittens.

Ventriculus ab inteſtino non diſtinctus, niſi quod aliquantum amplior ſit; *inteſtinum* primo ad anum deſcendit, tunc iterum ad diaphragma retrograditur et tandem ad anum redit; latitudinis vbique aequalis, pennam anſerinam vix excedentis; longitudinis a gula ad anum eiusdem cum piſce toto; interne laeue, muco albido repletum et *Faſciolas inteſtinales* fouens.

Ouaria duo, linearia, ad latera veſicae aereae ſita, per totum abdomen decurrentia, albida, ouulis minimis focta, hinc *veſiculis ſpermaticis* his analogis aegre diſtinguenda.

Veſica aerea a diaphragmate ad anum extenſa, ſpinae adiacens, medio conſtricta; *ductu pneumatico* longo, tenui, ex faucibus ad partem inferiorem veſicae procedente.

Renale viſcus ſanguinolentum, ſpinae dorſi pone veſicam aeream adhaerens.

Caro cruda et cocta alba; adeps oleoſa, inter abdominis tunicas et viſcerum plexum abundans.

 Coſtae

Coſtae vtrinque quindecim; vertebrae quadraginta quatuor; oſſicula ſetacea muſculis interpoſita plurima.

Coitum celebraturus adſcendit gregatim e mare *Caſpio* per Nouembrem, Decembrem et Ianuarium *Terek* fluuium et *Cyrum* ſeu *Kur* Perſarum, a *Wolga* et *Iaico* omnino abhorrens, nec non *Sulak* fluuii oſtium, vix ſemigradum a *Terek* fluuio diſtans, et huic maximopere analogum, praetereuns.

A Perſis et Tataris appellatur noſter *Schamahi* ſeu contracte *Schamai* i. e. princeps piſcium, quia caro omnium ſapidiſſima, praeſertim aſſata ſeu fumo cocta; a Coſacis Terekienſibus ruſſice *dſchirnaia ryba* (жирная рыб) i. e. pinguis piſcis, ob adipem largiſſimam; a Germanis in Ruſſiam obuiis propter locum natalem et corporis habitum *Harengo* non abſimilem, *Kuzlariſcher Hering*, i. e. Kislarienſis Harengus; inde etiam noſtrum triuiale nomen a Graecis, quibus Harengus chalcois audiebat, mutuatum.

Nominis generici ratio ex deſcriptione nunc tradita ſatis ſuperque patet. Inter congeneres proxime accedit ad *Aſpium*, a quo attamen plurimis et euidenter magnitudine diuerſiſſimus; nomine ſpecifico igitur *Chalcoides* optime denominandus.

Cyprinus pedalis; radiis pinnae ani nouemdecim; maxilla inferiore longiore, incurua.

Synonyma pro chalcoide nulla inuenimus; nam *cyprinum americanum* LINNAEI, quanquam huic quaedam

dam cum *Chalcoide* communia ſint, huc referre nequimus, quia ea, quae de hoc piſce ex *Syſtemate Naturae* nota ſunt, nimis laconica, vt exinde aliquid certi concludi poſſit; nec corpus noſtri ſat latum eſt, vt cum *Rutilo* conferri poſſit, hinc eo magis dubitamus.

Hi ſunt igitur noti, cum minus notis, maris *Caſpii* ciues e piſcium gente; quibus adſociantur *Phoca vitulina* et *muſtela lutra* ad ripas maris et inſularum ſat frequentes. Ex *Cetaceorum*, *Molluſcorum*, *Conchyliorum* et *Piſcium Chondropterygiorum*, Acipenſeribus exceptis, familiis, nemo, quantum nobis equidem conſtat, mare hocce inhabitat, cuius maturiorem et conſummatam deſcriptionem ab *Illuſtr.* GMELINO noſtro, totas quantas haſce aquas a ſeptentrione ad meridiem vsque induſtria et ſagacitate ſumma inueſtigante, exſpectat orbis litteratus. Liceat interim ichthyologis per *vos* ACADEMICI, ſpoliis huſce maris *Caſpii*, ad *Wolgae* et *Terek* fluuii oſtia iuſſu IMPERATRICIS et ACADEMIAE ad inquirendum concredita, collectis vti.

KRASCHENINNIKOVIA,
NOVVM PLANTARVM GENVS.

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Corpora omnia viua et organica arctiſſimo affinitatis vinculo inter ſe coniunxiſſe ſummum rerum conditorem, ſatis ſuperque patet naturae conſultis, omne in eo conuertentibus, vt ſingula elegantiſſimae huius concatenationis membra perſpiciant. Horum induſtria, quae intermediam Zoophytorum naturam rite determinauit, factum eſt, vt alieniſſima, animalia nimirum et plantae, fratres germani euaſerint. Sed dantur adhuc hiatus ſat ampli inter ordines claſſium et ampliores inter genera ordinum, non culpa naturae, ſaltum facere neſciae, ſed cognitionis noſtrae, temporis beneficio amplificandae, tenuitate, qua in tanta rerum naturalium copia et inueſtigatorum inopia non poſſumus non hucusque laborare. Hinc Hiſtorici naturales, praeſertim Botanici, ſyſtemati naturali indulgentes, nonniſi fragmenta ordinum propoſuerunt, quae ſaepius manca ſunt, ſaepius nimis diuerſa coniungunt, ob deficientem ſpecierum notitiam; quarum ſi plures notae euadunt, ordines ſaepe coaleſcunt et genera, quae antea fere diuerſi ordinis dixiſſes, intermediis nouis ſat arcte combinantur.

Veritas

Veritas dicti elucet, si, vt reliqua taceamus, ad ordinem XII. systematis naturalis, quod *Ill. Eques auratus a* LINNE in *Editione sexta Generum plantarum* proposuit, attendere velis. Conuenies equidem nobiscum *Laurum* et *Callitrichen* toto coelo, vt aiunt, differre; attamen quaedam communia habent, vt non absque ratione eidem ordini inferantur, et forsan dies sero veniens, plantis intermediis detectis, maiorem affinitatem reuelabit. *Chenopodii*, *Atriplicis* et *Ceratocarpi* facies externa vix repugnat, quo minus eiusdem ordinis naturalis haec genera habeas, quibus *Vrtica* non inepte adsociari possit. Sed eadem haec facies et partium structura indicat gnaris, plantas alias adhuc latere, quae ad integritatem affinitatis scalae requiruntur.

Ad hiatum hunc aliquomodo implendum inseruit planta hucusque minus cognita, quae nobis per campos *Tanaicenses* et *Wolgenses* peregrinantibus obuiam iuit; *Ceratoidem orientalem fruticosam*, *Elaeagni folio* TOVRNEFORTII (vid. *corollar.* p. 52.) volumus, cuius partium fructificationis cognitione et descriptione omnino carent Botanici; hinc factum est, vt ab illis vage huc inde relata sit.

TOVRNEFORTIVS, qui omnium primus plantam in *Oriente* lectam proposuit, cum *Ceratoidi orientali maiori* et *minori*, *annua*, *Psyllii folio*, seu cum *Ceratocarpo* BVXBAVMII et LINNEI eiusdem generis esse putauit; STELLERVS, qui eam in campis *Sibiricis* inuenit, nunc ad *Blitum*, nunc ad *Campbora-*

phoratam retulit; LINNEVS prius *Vrticae*, nunc *Axyridi* adnumerauit; GMELINVS tandem, monitis *Linneanis* sequens, pariter *Axyridi* adsociauit in *Florae Sibiricae* Tom. III. p. 18. est semper dubitanter; hinc *l. c.* ait: 'quouis modo in structuram partium ad florum et fructuum formationem spectantium, diligenter inquisiuimus, sed, quod candide fatemur, nihil distincti, oculis licet armatis vtentes, eliciumus, vt de charactere generico certi quid proferre nondum liceat. B. STELLERVS nihil quidquam feminum detexit, tria tantum stamina in singulis floribus sibi vidisse visus est; dubitat autem, an non imaginatione tantum eiusmodi illi sors contigerit,,.

Planta viua in solo natali florente a nobis examinata, certo certius constat, quod non solum STELLERVS, sed et omnes reliqui Botanici, huius plantae mentionem facientes, errauerint, cui cum *Axyride* vix vlla, cum *Atriplice* et *Vrtica* haud pauca et cum *Ceratocarpo* adhuc plura communia sunt. Flores plantae nostrae cum characteribus horum generum, quos *Ill. Eques a* LINNE in *editione sexta generum plantarum* dedit, conferenti, statim patet, quod nullam horum intrare possit, sed potius genus proprium constituat, omnino intermedium inter *Atriplicem*, *Vrticam* et *Ceratocarpum*, cum his simul in ordine supra citato naturali *Holoracearum* militandum.

Genus

Genus hocce nouum falutatur a nobis: *Krafcheninnikouia.* Sacrum enim effe optamus manibus STEPHANI KRASCHENINNIKOVII, membri *Illuftriffimae Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* quondam digniffimi, Botanici e *Ruffica* gente primi, improbo itinere *Kamtfchatico*, quod hiftoriae naturalis gratia iniit, fedula *Florae ingricae* confcriptione, quam *Perill. de* GORTER, ceu opus pofthumum edidit, atque eruditis variis differtationibus quas *Commentarii Petropolitani* continent, orbi litterato fatis fuperque noti atque de nobiliffima noftra fcientia, quam profeffus eft et egregie auxit, merentiffimi; aequum igitur effe putauimus, vt haec ipfa memoriae *Viri optimi*, praecaci fato deflorati, monumenta ponat, licet non aerea, fed lignea, iis tamen perenniora.

Krafckeninnikouiae characterem genericum ad naturae nutum concinnauimus fequentem:

Mafculi flores fubamentacei;

CALYX: *Perianthium* tetraphyllum, perfiftens; *foliolis* aequalibus, obtufis, concauis, in globulum conniuentibus.

COROLL: nulla.

STAMINA: *filamenta* quatuor, capillaria, thalamo inferta, foliolis calycinis oppofita, eorumque longitudine; *antherae* fubrotundae, didymae.

Feminei flores in eadem cum mafculis planta;

CALYX:

CALYX: *Perianthium* monophyllum, vrceolato-compreſſum, ſulco vtrinque carinatum, ſubbifidum; *laciniis* cornuto-erectis, parallelis, tubuloſo-concauis; *fauce* inter laciniarum ſinum anguſtiſſima, perforata.

COROLLA nulla.

PISTILLVM: *germen* ouatum, ſuperum; *ſtylus* ſimplex, per faucem perianthii transeuns; *ſtigmata* duo, capillaria, reflexa.

PERICARPIVM: *Calyx* dilatatus, amplificatus, ſemen in ſinu fouens et vndique tegens.

SEMEN vnicum, ouato-compreſſum, *arillo* laxiusculo veſtitum, quo defracto extremitates duae deorſum flexae et approximatae ſeceduntur, vna acuminata et integra, altera obtuſa in duo labia dehiſcente.

Kraſcheninnikouia igitur ſyſtematis *Linneani* Monoeciae Tetrandriae, poſt *Vrticam*; ſyſtematis *Gleditſchiani* Thalamoſtemonibus Tetrantheris, floribus ſimplicibus, apetalis, hypocarpiis, poſt *Vrticam*; ſyſtematis *Ludwigiani* Relatiuis Monophytis, apetalis, poſt *Ceratocarpum*, ſyſtematis *Tournefortiani* herbis et ſuffruticibus ſtamineis, quorum piſtillum abit in ſemen calyce obuolutum, poſt *Atriplicem*; et ſic reliquis auctorum ſyſtematibus plantarum inſerenda eſt.

Mirabuntur forſan lectores, quod tanta inter *Kraſcheninnikouiam* et *Ceratocarpum* antea praedicata ſit

ſit affinitas, quam vix inuenient conferentes characterem *Ceratocarpi*, ab *Ill. Equite a* LINNE *l. c.* traditum, cum *Kraſcheninnikouiae* charactere nunc exhibito; ſed deſinent mirari certiores facti, characterem *Ceratocarpi* huc vsque notum minus naturae conſentaneum eſſe. En! reformatum:

Ceratocarpi maſculi flores ſolitarii, ſparſi;

CALYX: *perianthium* monophyllum, cordato-tubuloſum; *limbo* poſtice acuminato, antice ſemilunato, integerrimo.

COROLLA nulla.

STAMEN: *filamentum* vnicum, capillare, vix tubo perianthii longius, thalamo inſertum et fundo calycis adglutinatum; *anthera* didyma, erecta, vltra calycis limbum prominens.

Feminei flores in eadem cum maſculis planta;

CALYX: *Perianthium* monophyllum, cordato-compreſſum, neruo vtrinque eminenti carinatum, ſubbifidum; laciniis ſubulatis, diuergentibus; *fauce* inter laciniarum ſinum anguſtiſſima, rimam referente.

COROLLA nulla.

PISTILLVM: *germen* oblongum, ſuperum; *ſtyli* et *ſtigmata* duo, capillaria, per faucem calycis tranſeuntia, patentia.

PERICARPIVM: *Calyx* maior, figura immutata, ſemen in ſinu fouens et vndique tegens.

SEMEN oblongo-compreſſum, inferne anguſtius, fundo calycis adhaerens, alias liberum, *arillo* laxiuſculo veſtitum; quo detracto extremitates duae deorſum flexae et approximatae ſecedunt, vna acuminata et integra, altera obtuſa in duo labia dehiſcente.

Ita partes fructificationis *Ceratocarpi* BVXBAVMII in ſolo natali arenoſo-argilloſo camporum apricorum *tanaicenſium*, *wolgenſium* et *terekienſium* a 54 ad 43. gradum latitudinis frequeter creſcentem et laete per aeſtatem florentem vidimus, multoties examinauimus, ſedulo deſcripſimus et pingere curauimus.

Patet nunc ſole meridiano clarius ex hoc genuino *Ceratocarpi* charactere, ſumma affinitas *Kraſcheninnikouiae*, propter partes femineas ſimillimas. Floribus autem maſculis genera haec duo diuerſiſſima ſunt; his enim accedit *Kraſcheninnikouia* ad *Atriplicem* et propter numeri partium conuenientiam magis adhuc ad *Vrticam*, a quibus attamen propter florum femineorum ſtructuram neceſſario ſeparanda.

Planta,

Planta, quae nouum nunc ſat ample determinatum genus conſtituit, nobis audit triuialiter:

Kraſcheninnikouia Ceratoides; cuius ſynonyma ſunt ſequentia:

Ceratoides orientalis, fruticoſa, Elaeagni folio TOVRNEFORTII *coroll. p.* 52.

Vrtica foliis lanceolatis, femininis hirſutis ROYENI *Lugdb.* 210.

Axyris foliis lanceolatis tomentoſis, floribus femineis lanatis LINNEI *Spec. Plant. edit.* 2. *p.* 1389.

Axyris fruticoſa, floribus femineis lanatis GMELINI *Flor. Sibir. Tom. III. p.* 17.

Blitum arboreſcens incanum, Lauendulae folio STELLERI *Flor. Ircut.* 767. ſecundum GMELINVM *l. c.*

Camphorata, ſpecies alia hirſuta et lanuginoſa Id. l. c. 1150. ſecundum GMEL. *l. c.*

Reſtat, vt tradatur conciſa *Kraſcheninnikouiae Ceratoidis*

DESCRIPTIO.

RADIX lignoſa, ramoſa, pollice craſſior, pede profundius deſcendens, perennis, pro plantae ratione ſat magna.

CAVLES plures, diffuſi, ſubprocumbentes, ſuffruticoſi, teretes, penna anſerina tenuiores, vix tripedales; ſeniores corticae ſordide cinereo et fiſſo obducti, ramoſi, ramis virgatis; iuniores ſimplices, inferne glabri, pallide nitentes, a foliorum lapſu cicatriſati, ſuperne ſubuilloſo - incani.

FOLIA alternatim conferta, lanceolata, vtrinque attenuata, floralia fere linearia, integra, margine ſubreflexa, nonnunquam leuiter vndulata, ſupra obſolete trineruia, infra a coſta prominente parum carinata, vtrinque, ſed inferne magis, incana, ſubpetiolata; *petiolo* baſi dilatato faſciculum foliorum axillarem ſaepius amplexante.

FLORES axillares, ſeſſiles, in ſpica interrupta terminali, vel ſimplici, vel ſpiculis breuibus lateralibus ſubracemoſa diſpoſiti, monoici.

MASCVLI flores in caulis et ſpicularum extremo confertiſſimi, minimi, fere granulati, quorum *perianthium* tetraphyllum, perſiſtens, emarcidum, foliolis minimis, concauis, obtuſis, in globulum conniuentibus, externe interneque tomento breviſſimo

viſſimo ſubſtellato ſeu radiato obſitis; *filamenta* quatuor, capillaria, breuiſſima, vix vltra calycem prominentia, thalamo foliolis calycinis oppoſita inſerta; *antherae* ſubrotundae, didymae, luteſcentes, polline globuloſo factae; *piſtilli* rudimentum nullum.

FEMINEI flores infra maſculos, rariores et maiuſculi; horum *perianthium* monophyllum, vrceolato-compreſſum, ſubbifidum; laciniis cornuto-erectis, parallelis, tubuloſo-concauis; fauce inter laciniarum ſinum anguſtiſſima, perforata; ſuperficie interna laeui, externa tota tomento breuiſſimo, ſtellato obſita et praeterea ad fundum villis capillaribus, quadrifarie ad angulos poſitis et perianthio longitudine aequalibus ornata; ſutura vtrimque ad plana perianthii conſpicua, ſulcata, duo quaſi foliola calycis mutuo coniungente, ſed adeo firmiter, vt neutiquam absque dilaceratione ſecedant, hinc calyx omnino monophyllus; germen ouatum, villoſum, ſuperum, et totum a perianthio tectum, ſed vndiquaque liberum et non niſi fundo ſeu potius thalamo adhaerens; *ſtylus* vnicus, rubens, per faucem perianthii tranſeuns; *ſtigmata* duo, capillaria, reflexa, rubentia, ipſo apice lutea et pubeſcentia; *pericarpii* vicibus fungitur calyx quadruplo maior, ſubinflatus, fauce vix peruia et villis fundi valde elongatis; hinc ſpicae in planta fructificante villoſiſſimae, ſericeonitentes; *ſemen* ouato-compreſſum, extremitate tenuiore thalamo adhaerens, ceterum in calyce omnino liberum nec vllibi adnatum, *arillo* laxiusculo et villoso vestitum, quo detracto extremitates duae, quae deorsum flexae et approximatae erant, secedunt, vna acuminata et integra, altera obtusa in duo labia dehiscente. [Structura seminis accedit ad *Salsolam*; tunica enim communis, quae semen spiraliter contortum continet et inuoluit, rectius pro arillo, ac pro capsula habetur in *Salsola*, qua detracta tunica, amplius nulla et extremitas altera obtusiuscula pariter in duo labia, ceu in duos cotyledones, dehiscit; et dantur praeterea *Salsolae* species, quarum semen semel tantummodo inflexum et *Krascheninnikouiae* et *Ceratocarpi* semini simillimum est].

ODOR florum et foliorum plane nullus.

SAPOR foliorum subausterus, herbaceus; radicis ligneus, iners.

FLORET per Augustum ad medium vsque Septembris; per Septembrem et Octobrem fructificans; semina vento calycem villosissimum apprehendente disperguntur.

HABITAT in solo arenoso-argilloso, loca elata aprica amans; ad *Tanain* ante ostia fluuii *Busulae* et ad *Wolgam* ante ostia riuuli *Meschotnae* circa vrbem *Zarizyn* a nobis; in *Sibiria* ad *Ieniseam* et *Baicalem* lacum a GMELINO et STELLERO; in *oriente* a TOVRNEFORTIO lecta.

Suffi-

Sufficiant haec de *Kraſcheninnikouia* Ceratoide, quibus ea, quae in *Florae Sibiricae* Tom. III. pag. 17. ſeqq. de planta noſtra praedicata ſunt, conferre non iniucundum erit.

Addamus coronidis loco *iconum* explicationem:

Fig. 1. Flos maſculus *Kraſcheninnikouiae.* Tab. XVII.

Fig. 2. Flos femineus *Kraſcheninnikouiae.*

Fig. 3. Piſtillum eiusdem e calyce exemtum.

Fig. 4. Calyx *Kraſcheninnikouiae* fructum maturum continens, villis ad fundum quadrifarie poſitis et elongatis.

Fig. 5. Semen maturum *Kraſcheninnikouiae*, e calyce exemtum, arillo villoſo veſtitum.

Fig. 6 Semen idem nudum, arillo detracto in duas extremitates et ad harum alteram in duo labia ſeceſſum.

Fig. 7. Flos maſculus *Ceratocarpi* a parte antica, vt pateat, quod limbus ſit ſemilunatus et filamentum vltra tubum promineat.

Fig. 8. Flos idem a parte poſtica, vt pateat, quod limbus ibidem acuminatus ſit et anthera promineat.

Fig. 9. Flos femineus *Ceratocarpi.*

Fig.

Fig. 10. Calyx *Ceratocarpi* ſemen maturum continens.

Fig. 11. Semen *Ceratocarpi* e calyce exemtum, arillo veſtitum.

Fig. 12. Semen idem nudum, arillo detracto in duas extremitates et ad harum alteram in duo labia ſeceſſum.

Fig. 13. *Kraſcheninnikouia Ceratoides* florens et fructificans.

Figurae omnes naturalem partium, quas referunt, magnitudinem ſiſtunt, exceptis 7 et 8. quae aliquoties microſcopio auctae ſunt, quia flos maſculus *Ceratocarpi* adeo exiguus eſt, vt vix nudis oculis eum perſpicere, multo minus diſtincte pingere liceat.

KOEL-

KOELREVTERIA PANICVLATA

NOVVM PLANTARVM GENVS.

Auctore

E. LAXMANN.

Etiamſi iam per vicennium et quod excurrit in hybernaculis horti academici haec viget arbuſcula, attamen ad amuſſim illam determinare hucvsque nemini licuit deficiens quotannis fructificatio. Prior pars proxime praeterlapſae aeſtatis, menſes dico Maium Iuniumque, qui adeo ſudi erant adeoque florae fauebant, vt Arachis hypogaea aliique Zonae torridae proprii ſtirpes in feneſtris muſei mei non tantum laete floruerint ſed et fructus maturauerint, hanc quoque arbuſculam, cuius lectum genialem, per plures annos fruſtra exoptare noſtri botanici, in area horti, floribus ornarunt Contigit itaque mihi, nec ſine delectatione perquam eximia, rariſſimarum harum nuptiarum ſpectatorem eſſe, qui viſis floribus, arbuſculam hanc proprium genus conſtituentem, ad viuum delineare curaui, et vt Viro, et de re herbaria et de horto noſtro botanico, optime merito Celeberrimo *Koelreutero*, qualecunque pignus exiſtimationis meae, regnique vegetabilis cultorum, erga ipſum darem, KOEL-

REVTERIAM nominaui, cuius characterem genericum et deſcriptionem ſequentibus trado.

CALYCIS *perianthium* pentaphyllum, inferum, foliolis ouatis, obtuſis, concauis, membranaceis, inaequalibus, verſus latus ſuperius adſcendentibus, verſus inferius vero apperturam relinquentibus.

COROLLA tetrapetala, petalis flauis, aequalibus, verſus ſuperius latus adſcendentibus; *vnguibus* linearibus, teretiuſculis, piloſis, erectis, longitudine foliorum perianthii illorumque baſi affixis; *laminis* ouato lanceolatis, planis, apicibus reuolutis, ab vnguibus ad angulum rectum diſtantibus.

NECTARIVM ſquama vndulata, erecta, purpureo cinnabarina, ad baſin ſingulae laminae vnica, faucem coronatam quaſi ſiſtens antherasque cingens.

STAMINVM *filamenta* octo, ſubulata, erecta, vnguibus petalorum paulo breuiora, corpuſculo cylindrico, quod eſt receptaculum genitalium, affixa: *Antherae* oblongae, obtuſae biualues.

PISTILLI *germen* oblongum, triquetrum, *Stylus* ſimplex, adſcendens, longitudine laminarum, *Stigma* trifidum, paruum, laciniis patentibus.

PERICARPII *capſula* trilocularis, oblonga, corpuſculo cylindrico receptaculi analogo affixa.

SEMINA nulla ob continuas pluuias per totum Iulium maturauere.

Con-

Confiftit itaque character *Koelreuterae* noftrae cuius mihi nomen triuiale, ob flores paniculatos, *paniculata* audit, in *calyce* penthaphyllo, infero, foliolis inaequalibus; in *corolla* tetrapetala petalis aequalibus, verfus latus fuperius adfcendentibus; in *nectariis* petaloideis fquama fcilicet vndulata ad bafin fingulae laminae vnica; inque demum corpufculo receptaculi analogo, genitalia tantum fuftinente.

Examinatis fic quae ad characterem genericum pertinent, fequatur defcriptio reliquarum partium.

RADIX ramofa, ob anguftiam forte vafis varie tortuofa et in fibras plurimas capillares diuifa.

TRVNCVS arboreus, erectus, teres, tunicatus, laeuis, ramofus, altitudinem humanam fuperans.

RAMI fparfi, patentes, tortuofi, aetate provectiores trunciformes, iuniores glandulis punctatis adfperfi, foliati.

GEMMAE ex axillis foliorum valde refinofae, fquamis imbricatis coniformes.

PETIOLI fparfi, patentiffimi, bafi clauati, verfus apicem canaliculati, longiffimi.

FOLIA pinnata, pinnis plerumque fexiugis cum impari, ouatis, laciniatis, ferratis, acutis, glabris, planis.

PEDVNCVLI terminales, fparfi, patentes, plurimis pedicellis ramofi.

FLORES paniculati in ſingulo pedicello tres vel plures.

De loco natali nihil certi conſtat. Hoſpitatur in tepidario.

Floruit circa initium Iulii.

T. XVIII.

Explicatio Figurarum.

Fig. 1. Icon KOELREVTERAE *paniculatae* florentis magnitudine naturali.

Reliquae figurae per Microſcopium delineatae ſunt.

Fig. 2. flos.

Fig. 3. calyx.

Fig. 4. piſtillum.

Fig. 5. ſtamen.

Fig. 6. petalum cum nectario.

Fig. 7. Receptaculum cum ſtaminibus, piſtillo et vno petalo.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

EXPERIMENTA
CIRCA LONGITVDINEM PENDVLI SIMPLICIS MINVTA SECVNDA KOLAE ET ARCHANGELOPOLI OSCILLANTIS.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKI.

In diſſertatione, in qua expoſui obſeruationem Tranſitus Veneris per diſcum Solis Kolae inſtitutam, mentionem inieci experimentorum, circa Longitudinem penduli ibidem a me habitorum. Rationem igitur eorum, pro vt promiſi, Academiae Scientiarum redditurus, ordiar a tentaminibus authomato, pendulo inuariabili inſtructo, inſtitutis.

Authomaton hoc idem ipſum fuit, quo vſus eſt *Griſchouius* ad definiendam Longitudinem penduli ſimplicis Petropoli, Oeſeliae aliisque in locis, et cuius deſcriptio legi poteſt in Nov. Comm. Tom. VII.

Quo ſecurius iudicium de experimentis his lectores ferre queant, maioremque fiduciam conſequentiae inde deductae mereantur, longior, aliquantum ero in referendis circumſtantiis, quae illa concomitabantur; in primis igitur ſiſto obſeruationes, ex quibus perſpiciatur motus horologii aſtronomici

mici a *le Paute* elaborati, cum quo motum authomati pendulo inuariabili instructi comparaui.

	Merid. verus ex altit. ☉lis correspondentibus	*Retardatio Horologii*
Die $\frac{30.\ April}{11.\ Maii}$	11^h. 59$'$. 1$''$, 4	
$\frac{7}{18}$ Maii	11. 58. 15, 8	.... 6$''$, 7
$\frac{14}{25}$. Maii	11. 57. 57, 0	.... 6, 5
$\frac{15}{26}$. Maii	11. 57. 55, 4	.... 6, 4
$\frac{19}{30}$. Maii	11. 57. 57, 8	.... 6, 4
$\frac{20}{31}$. Maii	11. 57. 56, 5	... 9, 8
$\frac{21.\ Maii}{1.\ Iunii}$	11. 57. 54, 3	.... 11, 1
$\frac{22.\ Maii}{2.\ Iunii}$	11. 57. 52, 5	.... 11, 0
$\frac{23.\ Maii}{3.\ Iunii}$	11. 57. 21, 0	.... 11, 0
$\frac{25.\ Maii}{5.\ Iunii}$	11. 57. 45, 3	.... 12, 8.

Conferenti obseruationes meteorogicas Kolae hoc mense habitas, in Comm. Tom. XIV. relatas, patebit temperiem aeris fuisse in causa, quod horologium astronomicum a die 30. April ad 19 Maii diuerso motu ac sequentibus incesserit.

Primum tentamen comparationum penduli astronomici cum authomato pendulo inuariabili gaudente institui die $\frac{4}{15}$. Maii Quoniam vero in hoc experimento non contentus fui statu authomati, supersedeo referendis hoc die institutis comparationibus; id solum addo, numerum oscillationum spatio diei solaris medii in temperie 2° supra o therm. Reaum.

Reaum. a pendulo inuariabili confectarum ex iis ſequi 98995 quam proxime. Die ſequenti nullum non moui lapidem, vt authomaton hoc in talem ſtatum, qui mihi optimus videretur, redigerem, et poſtquam id multiplicibus tentaminibus fuerim aſſecutus, die $\frac{6}{1}$. Maii ſequentes inſtitui obſeruationes.

EXPERIMENTVM I.

	Horologium Aſtronom.	Thermom. Reaum.	Pendul. Inuariab.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med.	confectar.
I.	$10^h.57'.\ 7''$m.	$4\frac{1}{2}$ ſupra 0	73 oſc.	I. V.	98994,0
II.	54. 55		128	II. VI.	98994,0
III.	56. 24		230	III. XII.	98993,0
IV.	10. 59. 43		450	IV. XIV.	98992,8
V.	11. 31. 29	$4\frac{3}{4}$	2642	V. XIII.	98992,8
VI.	33. 5		2752	VI. XII.	98992,9
VII.	0. 2. 28. v.	5	4772	VII. XI.	98993,2
VIII.	3. 9		4819	VIII. XIII.	98993,0
IX.	0. 4. 52		4937	IX. X.	98993,3
X.	4. 43. 49	6	24115	X. I.	98992,9
XI.	4. 45. 32		24223	XI. XIV.	98963,0
XII.	7. 46. 26	$4\frac{3}{4}$	36670	XII. X.	98993,2
XIII.	— 40. 52		36906	XIII. II.	98992,8
XIV.	8. 10. 33		38328	XIV. I.	98992,9
			Medium		98993,1

In comparatione harum et ſequentium obſervationum id ſolum pro norma habui, ne combinandae obſeruationes minori quam vnius horae interuallo a ſe inuicem diſtarent: caeterum promiſcue in computum ductae ſunt.

Abbas *de la Caille* Pariſi's inſtitutis experimentis reperit idem ipſum authomaton in temperie aeris $6\frac{1}{2}^{\circ}$ ſupra o therm. Reaum. ſpatio diei Solaris medii conficere 98908 oſcill. at cum per experimenta *Griſchouii* eodem authomato Petropoli inſtituta conſtet variationem vnius gradus thermometri Reaumuriani producere variationem vnius quam proxime oſcillationis in motu penduli inuariabilis, numerus oſcillationum ſupra inuentus minuendus erit vna oſcillatione, vt experimenta noſtra ad eandem temperiem, in qua Pariſiis inſtituta ſunt, reducantur. Quare numerus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii Kolae confectorum ſtatui poterit rotunde 98692.

EXPERIMENTVM II.

Die $\frac{2}{14}$. Maii retardatione horologii aſtronomici exiſtente $6\frac{1}{2}''$ concurſus illius cum pendulo inuariabili ſequentes ſunt obſeruati.

	Horolog. Aſtronom.	Thermom. Reaum.	Pendulum Inuariab.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med. confectar.
I.	$9^{h}.32'.\ 9''$ m.		295 oſc.	I. XI. 98995,8
II.	— 33. 52	$5\frac{1}{2}$ ſupra o	413	II. X. 98995,9
III.	9. 35. 35		531	III. V. 98997,0
IV.	10. 59. 13	6.	6281	IV. VI. 98995,7
V.	11. 1. 16		6422	V. II. 98996,6
VI.	0. 5. 36 v.		10845	VI. II. 98995,7
VII.	— 7. 5	$7\frac{1}{2}$.	10947	VII. V. 98994,8
VIII.	0. 8. 27		11041	VIII. X. 98995,9
IX.	8. 29. 21		45479	IX. III. 98995,9
X.	— 30. 57	6.	45589	X. IV. 98996,0
XI.	8. 32. 33		45699	XI. VI. 98995,9

Hinc ſumendo medium prodit 98995,9 ſiue rotunde 98996. Numerus hic nulla correctione indigere videtur, quippe qui in experimento hoc eadem quam proxime fuit temperies, quae et Pariſiis.

EXPERIMENTVM III.

Die $\frac{10}{15}$ Maii retardatione horologii a die Solari medio poſita $9''$, 8 ſiue $10''$ concurſus illius cum pendulo inuariabili obſeruati ſunt, vt ſequitur.

	Horolog. Aſtronom.	Therm Reaum.	Pendul. Inuariab.	Num. oſcil. ſpat. diei Sol. med. confectar.
I.	$0^h. 9'. 16''$		78080	I. XVII. 98991,9
II.	— 10. 18	$10\frac{3}{4}$ ſupr. 0	78151	II. XVI. 98992,0
III.	— 12. 8		78277	III. XVII. 98992,3
IV.	1. 44. 6		84600	IV. X. 98992,2
V.	— 45. 8	13.	84671	V. XI. 98993,0
VI.	1. 46. 30		84765	VI. XII. 98992,4
VII.	2. 31. 31		87860	VII. XII. 98992,5
VIII.	— 33. 14	12.	87978	VIII. XIII. 98992,0
IX	2. 34. 29		88064	IX. XI. 98992,0
X.	3. 28. 59	$13\frac{1}{3}$.	91811	X. I. 98992,0
XI.	3. 30. 28		91913	XI. XV. 98991,3
XII.	4. 15. 29		95008	XII. X. 98992,4
XIII.	— 16. 38	14.	95087	XIII. VII. 98991,8
XIV.	4. 18 0		95181	XIV. I. 98991,7
XV.	6. 5. 38		102581	XV. IV. 98991,7
XVI.	— 9. 24	$13\frac{1}{2}$.	102840	XVI. VI. 98992,0
XVII.	6 20. 22		103594	XVII. VI. 98992,0

Medium 98992,1

Vt reducatur ad temperiem Pariſinam + 6,0

Numerus oſcillationum quaeſitus 98998,1.

EXPERIMENTVM IV.

Retardatione horologii Aſtronomici diurna exiſtente $11''$ pro vt patet ex ſupra relatis obſeruationibus, die $\frac{20}{31}$. Maii ſequentes comparationes inſtitutae ſunt.

Horolog.

	Horolog. Aſtronom.	Therm. Reaum.	Pendulum Inuarib.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med. conſectar.
I.	$9^h.51'.25''$. m		103 oſc.	I. XV. 98990,6
II.	54. 9.	14. ſupr. 0	291	II. XI. 98989,5
III.	9. 56. 6.		425	III. X. 98989,7
IV.	10. 32. 33.	$14\frac{1}{4}$.	2931	IV. VIII. 98991,2
V.	— 37 14.		3253	V. X. 98989,7
VI.	11. 3. 17.	$15\frac{1}{4}$.	5044	VI. I. 98990,7
VII.	— 5. 41.		5209	VII. XIV. 98991,0
VIII.	11. 34. 49.	$15\frac{1}{2}$.	7212	VIII. I. 98991,0
IX.	— 39. 3.		7503	IX. V. 98991,1
X.	0. 15. 37. v.	16.	10017	X. XV. 98991,3
XI.	— 18. 35.		10221	XI. IV. 98991,8
XII.	1. 42. 54.	17.	16018	XII. X. 98991,8
XIII.	— 48. 50.		16426	XIII. II. 98990,5
XIV.	3. 7. 47.	$16\frac{1}{2}$.	21854	XIV. II. 98990,6
XV.	— 10. 32.		22043	XV. VIII. 98990,5

Sumto hinc medio prodit $98990\frac{1}{3}$ et pro ratione temperiei aucto $8\frac{1}{2}$ oſcil. fit numerus oſcillationum quaeſitus 98999.

EXPERIMENTVM V.

Die $\frac{22 \text{ Maii}}{2 \text{ Iunii}}$ poſita eadem retardatione horologii diurna poſt meridiem ſequentes comparationes inſtitui

	Horolog. Aftronom.	Therm. Reaum.	Pendul. Inuariab.	Num. ofcil. fpat. diei Sol. med. confectar.
I.	$2^h. 22'. 30''$		155 ofc.	I. XI. 98990,3
II.	— 24. 27	$12\frac{1}{4}$ fupr. o	289	II. XIII 98990,5
III.	2. 25. 42		375	III. XII. 98990,4
IV.	4. 49. 40		10273	IV. XI. 98990,5
V.	— 51. 50	$12\frac{1}{2}$	10422	V. XIV. 98990,2
VI.	4. 53. 33		10540	VI. XII. 98990,5
VII.	5. 26. 7	$14\frac{1}{2}$	12779	VII. I. 98990,2
VIII.	27. 43		12889	VIII. II. 98990,6
IX.	5. 54. 41		14743	IX. III. 98990,1
X.	56. 3	$14\frac{1}{2}$	14837	X. XIII. 98990,0
XI.	5. 57. 39		14947	XI. IV. 98990.4
XII.	7. 16. 36		20375	XII. VII. 98990,9
XIII.	— 18. 26	$13\frac{1}{2}$	20501	XIII. VIII. 98990,4
XIV.	7. 19. 48		20595	XIV. IX. 98991,2
			Medium	98990,5

Id quod pro ratione temperiei $7\frac{1}{2}$ ofc. auctum dat numerum ofcillationum quefitum 98998.

Ex obferuationibus itaque die 6 Maii inftitutiis numerus ofcillationum fpatio diei Solaris medii in temperie aëris $6\frac{1}{2}^\circ$ fupra o Therm. Reaum. a pendulo inuariabili Kolae confectarum eft - - - - 98992.

Die 13. Maii - - - - - - - - - 98996,
— 19. —— - - - - - - - - 98998,
— 20. —— - - - - - - - - 68999,
— 22. —— - - - - - - - - 98998.

Omnium

Omnium medium dat $98996\frac{1}{2}$. Idem vero pendulum in eadem temperie aëris eodemque temporis ſpatio Pariſiis conficit 98908. Quare vis grauitatis Pariſiis ad vim grauitatis Kolae erit $= 100000 : 100179$, et cum Longitudo penduli ſimplicis Pariſiis per Experimenta abbatis *de la Caille* ſit 440, 55 lin. Longitudo penduli oſcillationibus ſuis minuta ſecunda Kolae ſub Latitudine $68^\circ\ 52\frac{1}{2}$ indicantis erit $= \frac{440,55 \times (98996\frac{1}{2})^2}{(98908)^2} = 441,34$ lin.

Cl. *Malletus* in Ponoi ſub latitudine $67^\circ, 4\frac{1}{2}'$ Longitudinem penduli ſimplicis minuta ſecunda oſcillantis reperit 441, 22 lin. poſita Longitudine penduli Pariſina 441, 57, qualis a de *Mairan* inuenta eſt; quodſi nos eandem in calculo adhibere velimus, prodibit Longitudo penduli minuta ſecunda Kolae oſcillantis 441, 36 lin.

In eandem rem alio modo beneficio ſc. penduli ſimplicis inquiſiturus, aliud horologium ab eodem artifice elaboratum data opera ita adaptabam, vt a tempore medio retardaret $4\frac{2}{3}'$ circiter. Apparatus ad haec experimenta adhibitus idem ipſe fuit, quali Selenginski vſus ſum, et qui deſcriptus a *Griſchouio* legitur in Tom. VII. Nov. Comm. ſc. virga ferrea et ponduſculum biconicum ab abbate *de la Caille* ad *Griſchouium* transmiſſa, filum aloes, forceps cui filum ponduſculo onuſtum inferitur, et machina ad ſuſtinendam virgam ferream a *Griſchouio* exco-

excogitata , qua virga prehenſa ope cochlearum furſum et deorſum, prorſum et antrorſum, dextrorſum et ſiniſtrorſum mouetur, ita vt mediante hoc triplici motu commodiſſime virga pendulo applicari, et num longitudo fili aequalis ſit longitudini illius microſcopio examinari poſſit.

EXPERIMENTVM I.

Die $\frac{16}{17}$. Maii retardatione diurna horologii Aſtronomici a die Solari medio exiſtente 4′. 39″, barometro monſtrante 29 dig. 4 lin. menſ. Lond. in temperie aeris thermometri Reaumuriani 3° ſupra o, comparando oſcillationes penduli ſimplicis cum motu horologii Aſtronomici primus pendulorum concurſus ad eandem partem obſeruatus eſt horologio monſtante 5^h. 27′. 0″, dein pendulum ſimplex prae horologio Aſtronomico lucrari videbatur concurrendo.

	ad eandem partem		ad diuerſas
0. oſc	5^h. 17′. 0″.	1. oſc.	5^h. 20′. 17″.
2.	5. 23. 55.	3.	5. 27. 18.
4.	5. 30. 45.	5.	5. 33. 50.
6.	5. 37. 27.	7.	5. 40. 40.
8.	5. 43. 51.	—	— — —
10.	5. 50. 48.	11.	5. 53. 59.
12.	5. 57. 27.	13.	6. 0. 34.
14.	6. 3. 52.		

In

In difficultate concurſus obſeruandi origo ſita eſt, quod concurſibus aeque a ſe inuicem diſtantibus raro reſpondeant aequalia temporis interualla. Diſparitatem hanc cum cernerem in reliquis quoque experimentis, et in certus haererem, quibusnam concurſibus maior fides habenda ſit, cum omnes pari cura obſeruati eſſe viderentur, in computando interuallo temporis, quo pendulum ſimplex lucretur vnam oſcillationem ad ſequentem methodum confugi.

Sit momentum horologii, quo primus pendulorum concurſus obſeruatus eſt $= t$, et interuallum temporis, quo pendulum ſimplex prae horologio Aſtronomico lucratur vnam oſcillationem $= x$, horologio monſtrante $t + x$ pendula concurrent, et ſimplex prae pendulo horologii lucrabitur vnam oſcillationem. Poſt modum horologio indicante

$t + 2x$	pendulum ſimplex lucrabitur	2. oſcill.
$t + 3x$	- - - - - -	3. oſcill.
$t + 4x$	- - - - - -	4. oſcill.

et ita porro vsque dum pendulum ſimplex ad quietem fuerit redactum aut experimentum fuerit continuatum. Ponamus illud fintum fuiſſe poſtquam pendulum ſimplex lucratum fuerit n oſcillationes et obſeruatos eſſe m concurſus, ſumma omnium momentorum, quibus concurſus: euenire debebant, erit $m\,t + (1 + 2 + 3 \ldots . + n)\,x$, et cum ſumma momentorum, quibus concurſus actu ſunt obſeruati,

 detur

detur ex ipſo experimento, quae ſit $= s$, habebitur $mt + (1 + 2 + 3 \ldots + n)\, x = s$. Hinc $x = \frac{s - mt}{1 + 2 + 3 \ldots + n}$ vel ſi continuo omnes concurſus fuerint obſeruati erit $m = n + 1$, et $x = \frac{s - (n + 1)\, t}{\frac{1}{2} n (n + 1)}$.

Facta applicatione ad experimentum fit $s = 79^h. 21'. 43''$, $m = 14$, $mt = 73^h. 58'. 0''$ et diuiſor, quia nonus concurſus deficit, hoc modo exprimi poterit $\frac{1}{2} n (n + 1) - 9$, ac erit ille $= 96$; vnde interuallum temporis, quo pendulum ſimplex prae horologio Aſtronomico lucratur vnam oſcillationem, prodit $= 3'. 22'', 3$, et numerus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii in temperie aeris $3°$ ſupra 0 a pendulo ſimplici Kolae confectarum 86546, 7.

Per multiplicia vero *Griſchouii* experimenta conſtat variationem trium graduum thermometri Reaumuriani producere variationem vnius quam proxime oſcillationis in motu penduli ſimplicis ſpatio diei Solaris medii; quare vt experimenta noſtra ad eandem temperiem, in qua Pariſiis eodem pendulo ab abbate *de la Caille* inſtituta ſunt nempe $12°$ ſupra 0, reducantur, a numero inuento ſubtrahi debent 3 oſcillationes, et prodit numerus oſcillationum quaeſitus 86543, 7.

EXPERIMENTVM II.

Die $\frac{6}{17}$. Iulii retardatione horologii Aſtronomici a die ſolari medio exiſtente $4'. 41'', 2$ in temperie

rie aeris 13° ſupra 0, barometro monſtrante 29 dig. 7 lin. menſurae Lond. incitabam ad motum pendulum ſimplex; peractis aliquot oſcillationibus pendula concurrendo ad eandem partem concordare viſa ſunt horologio monſtrante $4^h. 46'. 20''$, ſequentes vero concurſus ſequentem in modum ſunt obſeruati.

	ad eandem partem		ad diuerſas
0. oſcil.	$4^h. 46'. 20''.$	1. oſc.	$4^h. 49'. 45''.$
2 —	4. 53. 22.	3.	4. 56. 36.
4 —	5. 0. 0.	5.	5. 3. 23.
6.	5. 6. 56.	7.	5. 10. 26.
8.	5. 13. 40.	9.	5. 16. 55.
10.	5. 20 20.	11.	5. 23. 27.
12.	5. 26. 56.	13.	5. 30. 21.
14.	5. 33. 36.	15.	5. 37. 0.
16.	5. 40. 16.	—	

Vnde fit $s = 88^h. 48'. 49''$, $(n+1)t = 81^h. 7'. 40''$ et $\frac{1}{2}n(n+1) = 136$; quare interuallum temporis, quo pendulum ſimplex prae horologio Aſtronomico lucrabatur vnam oſcillationem, eſt $3'. 23'', 4$, et numerus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii a pendulo ſimplici confectarum erit $= 86542, 2$. Numerus hic nulla correctione indigere videtur, quippe qui temperies aeris in hoc experimento eadem fere fuit, in qua Pariſiis experimenta eodem pendulo ſunt capta.

EXPERIMENTVM III.

Die $\frac{10}{21}$. Iulii retardatione horologii Aſtronomici diurna exſtente 4'. 43", barometro monſtrante 29 dig. 9 lin. menſ. Lond. in temperie aeris 12° ſupra o ante meridiem incitato ad motum pendulo ſimplici primus pendulorum concurſus ad eandem partem euenire viſus eſt horologio monſtrante 10^h. 19'. 40", dein pendulum ſimplex prae horologio Aſtronomico lucratum eſt concurrendo.

	ad eandem partem		ad diuerſas
0. oſc.	0^h. 19'. 40".	1. oſc.	10^h. 23' 8".
2.	10. 26. 34.	3.	10. 29. 52.
4.	10. 33. 12.	5.	10. 36. 34.
6.	10. 39. 58.	—	— — —
8.	10. 46. 22.	9.	10. 49. 26.
10.	10. 52. 48.	11.	10. 55. 42
12.	10. 59. 26.	—	— — —

In hoc experimento concurſus ad eandem partem praecipue ſunt obſeruati, quare ſi illorum tantum in computo ratio habeatur, prodibit $x = 3'. 20\frac{1}{2}''$, et numerus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii in temperie aeris 12° ſupra o a pendulo ſimplici confectarum prodibit 86546.

EXPERIMENTVM IV.

Die $\frac{14}{25}$. Iulii retardatione horologii diurna exiſtente 4'. 43½", barometro monſtrante 29 dig. 5 lin. menſ, menf. Lond. in temperie aeris 17° fupra o poft meridiem pendula concurrebant ad eandem partem horologio monftrante $3^h. 18'. 20''$. Deim reliqui concurfus fequentem in modum fuere obferuati.

	ad eandem partem		ad diuerfas
o. ofc.	$3^h. 18'. 20''$.	1. ofc.	$3^h. 21'. 32''$.
2.	3. 25. 5.	3.	3. 28. 21.
4.	3. 31. 35.	5.	3. 34. 57.
6.	3. 38. 30.	7.	3. 41. 36.
8.	3. 45. 20.	9.	3. 48. 35.
10.	3. 52. 2.	11.	3. 55. 18.
12.	3. 58. 43.	13.	3. 2. 0.
14.	4. 5. 28.	15.	4. 8. 57.
16.	4. 12. 12.	—	— — —

Hinc obtinebitur $s = 63^h. 48'. 21''$, $(n+1)t = 56^h. 11'. 40''$ et $\frac{1}{2}n(n+1) = 136$, quare $x = 3'. 21\frac{1}{2}''$ et numerus ofcillationum a pendulo fimplici fpatio diei Solaris medii confectarum $= 86543, 8$, qui pro ratione temperiei auctus 1, 7 ofcill. prodit $86545\frac{1}{2}$.

EXPERIMENTVM V.

Die $\frac{16}{27}$. Iulii retardatio horologii Aftronomici a die Solari medio inuenta eft $4', 41''$, barometro monftrante 29 dig. 2 lin. menf. Lond. in temperie aeris 8° fupra o poft meridiem incitabam ad motum pendulum fimplex, ac fequentes concurfus obferuabam.

	ad eandem partem		ad diuerſas
0.	$4^h. 57'. 58''.$	1.	$5^h. 1'. 15''.$
2.	5. 4. 42.	3.	5. 7. 57.
4.	5. 11. 40.	5.	5. 14. 59.
6.	5. 18. 27.	7.	5. 21. 47.
8.	5. 25. 8.	9.	5. 28. 22.
10.	5. 31. 50.	—	— — —
12.	5. 38. 38.	13.	5. 42. 0.
14.	5. 45. 26.	15.	5. 48. 54.
16.	5. 52. 10.	17.	5. 55. 37.
18.	5. 58. 52.	—	— — —

Facta applicatione methodi ſupra memoratae fit $m = 18$, $s = 98^h. 25'. 52''.$ $mt = 89^h. 23'. 24''$, et quia vndecimus concurſus deficit $\frac{1}{2}n(n+1) - 11 = 160$; hinc $x = 3'. 23'', 4$ et numerus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii in temperie aeris 8° ſupra 0 a pendulo ſimplici confectarum prodit $86541\frac{1}{3}$ vel demta $1\frac{1}{3}$ oſcill. pro ratione temperiei fit 86540.

Numerus itaque oſcillationum Kolae in temperie aeris 12 ſupra 0 ſpatio diei Solaris medii a pendulo ſimplici confectarum eſt per

Exper. I. - - - - - - - - - -	86543, 7
II. - - - - - - - - - -	86542, 2
III. - - - - - - - - - -	86546, 0
IV. - - - - - - - - - -	86545, 5
V. - - - - - - - - - -	86540, 0
Medium	86543, 5

Idem

Idem vero pendulum in eadem temperie aeris Parisiis iuxta experimenta abbatis *de la Caille* ſpatio diei Solaris medii conficit 86454 oſc. et longitudo penduli ibidem eſt 440, 55 lin. Quare Longitudo penduli Kolae minuta ſecunda indicantis erit $\frac{440,55 \times (86543\frac{1}{2})^2}{(86454)^2} = 441,46$ lin. quae a prius inuenta differt $\frac{12}{155}$ lin. Cum vero experimenta pendulo ſimplici inſtituenda maioribus difficultatibus ſint obnoxia, quam quae pendulo inuariabili peraguntur, longitudinem penduli ſupra inuentam veritati magis eſſe conſentaneam exiſtimo.

Kola naui vectus Archangelopolin perueni die 15 Auguſti. Animus ibi fuit a *De l'Islio de la Croyere* Longitudinem penduli ſimplicis anno 1728 inuentam propriis experimentis comprobare; verum negotium hoc ea qua par eſt certitudine perficere non potui. Motum horologii aſtronomici cognoſcere cupiens, ſpatio duarum hebdomadum nullum praetermiſi diem, quin caperem ante meridiem altitudines Solis, verum poſt meridiem die 28 Aug. tantum correſpondentes, et ſequenti mane easdem capere licuit, ita vt ex iis meridiem verum et mediam noctem elicere, indeque motum horologii ſtabilire fuerit in poteſtate. En ipſas altitudinum obſeruationes.

Die

Die $\frac{28.\ Aug.}{8.\ Sept.}$

ante meridiem	altit. ☉lis	Post. merid.	Meridies
$8^h.\ 45'.\ 24''$	$24^\circ.\ 20'$	$2^h.\ 22'.\ 8''$	$11^h.\ 34'.\ 16''$
— 46. 21		— 21. 13	— — 17
— 50. 45	$24.\ 40$	— 17. $50\frac{1}{2}$	— — $17\frac{3}{4}$
— 51. 40		— 16. 50	— — 15
— 55. $7\frac{1}{2}$	$25.\ 0$	— 13. 28	— — $17\frac{3}{4}$
— 56. 4		— 12. 31	— — $17\frac{1}{2}$
8. 59. $34\frac{1}{2}$	$25.\ 20$	— 9. 0	— — $17\frac{1}{4}$
9. 0. 37.		2: 7. 58	11. 34. $17\frac{1}{2}$

Meridies medius 11 34. 16,7
Correctio meridiei + 31,8

Meridies verus 11. 34. 48, 5.

Die $\frac{28.\ Aug.}{8.\ Sept.}$ Post. merid.	Altit. ☉lis	Die $\frac{29.\ Aug.}{9.\ Sept.}$ Ante merid.	Media nox	Correctio med. noctis	Mediam nox vera
$2^h.\ 22'.\ 8''$	$24^\circ.\ 20'$	$8^h.\ 50'.\ 14''$	$11^h.36'.11''$	$-\ 1'.\ 47'',2$	$11^h.34'\ 23'',8$
— 21. 13		51. 7	— — $10\frac{1}{4}$	— 1. 47, 7	— — 22, 5
— 17. $50\frac{1}{2}$	$24.\ 40$	54. 38	— — $14\frac{1}{4}$	— 1. 50, 4	— — 23, 2
— 16. 50		55. 37	— — $13\frac{1}{2}$	— 1. 50, 1	— — 22,4
— 13. 28	$25\ \ 0$	8. 59. $7\frac{1}{2}$	— — $17\frac{3}{4}$	— 1. 53, 7	— — 24,0
— 12. 31		9. 0. 7	— — 19	— 1. 54, 5	— — 24,5
— 9. 0	$25.\ 20$	— 3. 46	— — 22	— 1. 57, 4	— — 24,6
2. 7. 58		9. 4. 48	11. 36. 23	— 1. 58, 4	11. 34. 24,6

Media nox vera 11. 34. 23, 8.

Vnde colligitur retardatio horologii spatio dimidii diei solaris medii $14\frac{1}{2}''$ et retardatio diurna $29''$.

Tem-

Temperies aëris intra hos binos dies iuxta thermometrum Reaumurianum ante meridiem 9 graduum poſt meridiem vero ad 13 vsque gradus aſcendere eſt obſeruata, eadem ſcilicet quam proxime fuit quae et Kolae, dum idem horologium ſpatio diei ſolaris medii retardaret 10″. Et cum longitudo penduli minuta ſecunda Kolae indicantis par praecedentia experimenta ſit 441, 34 lin. habebitur longitudo penduli ſingula minuta ſecunda Archangelopoli ſub latitudine 64°. 33′ oſcillantis $= \frac{441,34 \times (86371)^2}{(86350)^2}$ $= 441,15$ lin. pariſ.

De l'Islius ibidem diuerſam ab hac reperit penduli longitudinem nempe 440, 70 lin. pariſ. Penes lectores iudicium ſit, vtra determinatio veritati magis ſit conſentanea. Comparatio vero longitudinum penduli Kolae 441, 35; in Ponoi 441, 22; in Pello 441, 17 et Petropoli 441, 02 inuentarum monſtrare videtur determinationem *De l'Islianam* huic eſſe poſtponendam.

DE PARALLAXI SOLIS

CONCLVSA EX TRANSITV VENERIS PER SOLEM A. 1769. IN INSVLA REGIS GEORGII OBSERVATO.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

Dum ex obſeruationibus Tranſitus Veneris per Solem, quantitas parallaxeos Solaris inueſtigari debet, maxime e re eſt, vt eiusmodi obſeruationum inter ſe fiat comparatio, pro quibus effectus Parallaxis inſigni afficitur diuerſitate, ne alioquin ipſi errores in obſeruationibus commiſſi omnem effectum Parallaxis vel plane abſorbeant, vel ſaltem qua potiorem partem imminuant. Hinc igitur liquet ex obſeruationibus nouiſſimi Tranſitus A. 1769. in variis Europae regionibus inſtitutis, dum inter ſe comparantur, nihil certi de Parallaxi Solis ſtatui poſſe; contra vero harum obſeruationum comparationem cum iis quae in America inſtitutae fuerunt, eo certiores pro Parallaxi Solis praebere concluſiones, quo magis fuerit diuerſus effectus Parallaxeos pro obſeruationibus Americanis, ab eo qui pro Europeicis

ropeicis obtinuit. In Parte II^{da} Tom. XIV. horum Commentariorum fuſe iam explicatum eſt, qualem praebeant Parallaxin obſeruationes ad Sinum Hudſonis et in fortalitio St. Ioſephi Californiae inſtitutae ſi cum Europeicis comparentur; quum igitur valores pro Parallaxi tum inuenti egregie inter ſe conſenſerint, iisdem omnino acquieſcere liceret, praeſertim quia certiſſime nobis habemus perſuaſum, quantitatem Parallaxis tum inuentam vitra partem quintam vnius minuti ſecundi a veritate discrepaturam non fore. Verum enim vero quum obſeruationes in inſula Regis Georgii ab Aſtronomis Anglis inſtitutae, ita ſint comparatae, vt pro iis effectus Parallaxeos non modo ſit inſignis, ſed etiam plane contrarius illi, quo obſeruationes in Europae factae erant affectae, facile perſpicitur iſtas obſeruationes ad parallaxin Solis determinandam cenſeri debere aptiſſimas, ideoque omnino operae pretium fuiſſe, vt inquireretur quaenam prodeat quantitas parallaxeos Solis, ſi harum obſeruationum inſtituatur comparatio cum iis, quae in variis Europae regionibus fuerunt factae. Certiſſimam enim nobis facere poſſumus ſpem, valorem Parallaxeos inde inuentum, vix vltra partem decimam vnius minuti ſecundi a iuſto aberraturum eſſe. Huiusmodi igitur disquiſitionem dum hac occaſione ſuſcipere in animum induxi, id tantum praemonere neceſſum duco, methodum a me hoc in negotio adhibitam, eandem eſſe, quam Illuſtr. *Eulerus* in ſupra memorata Part. II. Tom. XIV. Nouor. Comment. tradidit ad cuius praecepta, reli-

 quae

quae huius Tranſitus obſeruationes a me computatae fuerunt.

2. Antequam ipſum computum obſeruationum in Inſula Regis Georgii inſtitutarum adgrediamur, haud abs re eſſe indicauimus, breuem heic adponere recenſionem harum obſeruationum, talem ſcilicet, qualis ab Illuſtr. Societate Scientiarum Londinenſi cum Illuſtr. Academia Scientiarum noſtra communicata fuit:

Obſeruationes contactuum Veneris cum Sole.

Nomen Obſeruat	pro ingreſſu cont. extern	cont intern.	pro egreſſu cont. intern.	cont extern.	Temp. vero
Green	$21^h. 25'. 40''$	$21^h. 43'. 55\frac{1}{2}''$	$3^h. 14'. 3''$	$3^h. 32'. 14''$	
Cook	25. 45	44. 15½	14. 13	32. 2	
Solander	- - - -	44. 2½	- - - -	32. 13	

Diſtantia minima centrorum Solis et Veneris $10'. 25'', 4$. Latitudo ſtationis vbi obſeruatio peracta $17°. 28'. 55''$ Auſtr. Longitudo huius loci Occident. a Grenouico $149°. 20'. 0''$, ſeu in tempore $9^h. 57'. 44''$ adeoque a Lutetia Pariſiorum $10^h. 7'. 0''$.

Circa has obſeruationes annotaſſe iuuabit, momenta contactuum a Cel. *Green* aſſignata a nobis in vſum vocata fuiſſe, obſeruatione tantum contactus interni pro ingreſſu excepta, vbi quum momenta huius contactus a binis obſeruatoribus Dnis *Green* et *Cook* aſſignata $20''$ inter ſe diſcrepent, proxime nos ad veritatem acceſſuros exiſtimauimus, ſi momenmentum a Dno Doct. *Solander* pro hoc contactu assignatum seligeremus, siquidem medium quasi teneat inter bina reliqua. Postmodum autem occasio dabitur inquirendi, qualem ipsa Parallaxis patiatur mutationem, ex discrepantia horum momentorum.

Calculus obseruationum in Insula Regis Georgii institutarum.

3. Quum eleuatio Poli pro loco vbi obseruatio peracta, inuenta sit $17^\circ. 28'. 55''$ Austr., erit distantia Poli Australis a Zenith huius loci apparente $72^\circ. 31'. 5''$, ideoque distantia inter Zenith verum et apparens $9'. 41''$, ita vt sit distantia Zenith veri a Polo Australi $= Pz = 72^\circ. 40'. 50''$ circiter. Porro quum longitudo huius loci a meridiano Parisino assignata sit $10^h. 7'. 0''$ statuamus eam reuera esse $10^h. 7' - \theta''$.

I. Obseruatio contactus externi circa ingressum.

Facta est d. 2. Iunii $21^h. 25'. 40''$ Temp. vero, vnde habetur angulus $\odot Pz = 38^\circ. 35'. 0''$. Quum vero tempus Parisinum huius obseruationis sit d. 3. Iunii 7^h $32'. 40''$, erit $t = 2^h. 37'. 13'' = 2, 620277$; ex quo sequens instituatur calculus:

Tab. XIX. Fig. 1.

$L.\, t =$	$0,4183473$		
$L.(\alpha+\beta) =$	$2,3756636$		
$L\, \gamma =$	$1,5492486$	$\gamma\, t =$	$92,8$
$L.\odot V =$	$2,7940109$	$l =$	$613,4$
$L.\, \gamma\, t =$	$1,9675959$	$♀ V =$	$706,2$
$L.Tang.\sigma =$	$2,8489277$	$L.♀ V =$	$2,8489277$
$L.\odot V =$	$2,7940109$	$L.fin.\sigma =$	$9,8752128$
$L.Tang.\sigma =$	$10,0549168$	$L\, s =$	$2,9737149$
$\sigma =$	$48^\circ\, 36'.\, 47''$	$s =$	$941,27.$

Pro tempore autem obſeruationis habetur angulus $A \odot P = 82^\circ.54'.30''$ et $\odot P = 112^\circ.25'.50''$ circiter, vnde triangulum $\odot P z$ ſic reſoluetur.

Fig. 2.

$L.\, fin.\, P z =$	$9,9798486$	$L.tang\, P z =$	$10,5060715$
$L.fin.\odot P z =$	$9,7949425$	$L.cof.\odot P z =$	$9,8930412$
$L.\, fin.\, z\, Q =$	$9,7747911$	$L.tang.P Q =$	$10,3991127$
		$P Q =$	$68^\circ.15'.10''$
		$\odot P =$	$112.\, 25.\, 50$
		$\odot Q =$	$44.\, 10.\, 40$
$L.\, cof.\, z\, Q =$	$9,9049604$	$L.tang.z Q =$	$9,8698252$
$L.\, cof.\, \odot Q =$	$9,8556287$	$L.fin.\odot Q =$	$9,8431624$
$L.\, cof.\, \odot z =$	$9,7605891$	$L.tang.P\odot z =$	$10,0266628$
$\odot z =$	$54^\circ.48'.50''$	$P\odot z =$	$46^\circ.45'.30''$
		$A\odot P =$	$82.\, 54.\, 30$
		$A\odot z =$	$36.\, 9.\, 0$
		$A\odot ♀ =$	$131.23.10$ circ.
		$z\odot ♀ =$	$167.32.10$

Quum

Quum igitur ſit $\odot♀ v = z\odot♀ + \frac{7}{5}\omega$ habebimus:

$$
\begin{array}{ll}
L\, s = 2,9737149 & L\, s = 2,9737149 \\
L.\,\text{coſ.}\, z\odot♀ = 9,9896421\,(-) & L.\,\text{ſin.}\, z\odot♀ = 9,3341002 \\
\hline
L.\odot R = 2,9633570 & L.\,\text{cot.}\,\odot z = 9,8482257 \\
\hline
\odot R = 919'' = 15'.\,19'' & L.\,\omega = 2,1560408\,. \\
z♀ = 55^\circ.\ 4'.\,10'' & \omega = 143'';\ \frac{7}{5}\omega = 3'.\,20'' \\
 & \odot♀ v = 167^\circ.\,35'.\,30''
\end{array}
$$

Pro calculo parallactico erit:

$$
\begin{array}{ll}
L.\,\text{ſin.}\, z♀ = 9,9137326 & L.\,\frac{♀v}{\Pi} = 0,3135793 \\
L\left(\frac{a}{b} - 1\right) = 0,3998467 & L.\,\text{ſin.}\,\odot♀ v = 9,3321907 \\
\hline
L.\,\frac{♀v}{\Pi} = 0,3135793 & L.\,\frac{v\omega}{\Pi} = 9,6457700 \\
L.\,\text{coſ.}\,\odot♀ v = 9,9897350\,(-) & L.\, v\omega = 0,6457700 \\
\hline
L.\,\frac{♀\omega}{\Pi} = 0,3033143 & L.\, s = 2,9737149 \\
\hline
♀\omega = -2,0105.\pi \text{ hinc} & L.\,T.\,♀\odot v = 7,6720551 \\
\odot v = 941,27 + 2,0105.\pi & \odot♀ v = 0^\circ.\ 16'.\,9'' \\
 & B\odot♀ = 48.\,36.\,47 \\
\hline
 & B\odot v = 48.\,20.\,38
\end{array}
$$

Tab. XIX. Fig. 3.

Iam propter augmentum ex vX oriundum habebitur correctio $+0,6647.\,x + 0,0443\,\theta$, augmentum autem vY dabit correctionem $+0,7472.\,y + 0,0071.\,\theta$, vnde coniunctim prodibit correctio $+0,6647.\,x + 0,7472.\,y + 0,0514\,\theta$, valor igitur correctus diſtantiae centrorum Solis et Veneris erit: Fig. 4.

$$941,27 + 2,0105.\pi + 0,6647.\,x + 0,7472.\,y + 0,0514.\theta$$

qui

qui quum aequalis esse debeat $9764 \cdot \mu''$, inde haec elicietur aequatio:

$$\mu = -34,73 + 2,0105.\pi + 0,6647.x + 0,7472.y + 0,0514.\theta.$$

II. Contactus internus pro ingressu.

Contigit $21^h. 44'. 2''\frac{1}{2}$ vnde deducitur ang. $\odot P z = 33^\circ. 59'. 22''\frac{1}{2}$. Tempus autem Parisinum huius obseruationis est $7^h. 51'. 2''\frac{1}{2}$ ex quo habetur $t = 2^h. 18'. 50''\frac{1}{2} = 2,314027$.

$$
\begin{array}{rlrl}
L.\,t = & 0,3643686 & & \\
L.(\alpha+\beta) = & 2,3756636 & & \\
L.\,\gamma = & 1,5492486 & \gamma t = & 82,0 \\
 & & l = & 613,4 \\
L.\odot V = & 2,7400322 & & \\
L.\,\gamma t = & 1,9136172 & ♀V = & 695,4 \\
L.\,♀V = & 2,8422347 & L.\,♀V = & 2,8422347 \\
L.\odot V = & 2,7400322 & L.\,\sin.\sigma = & 9,8946278 \\
L.\,\mathrm{tang}.\sigma = & 10,1022025 & L.\,s = & 2,9476069 \\
\sigma = & 51^\circ.40'.49'' & s = & 886,35.
\end{array}
$$

Tab. XIX. Fig. 1.

Pro tempore obseruationis est $A \odot P = 82^\circ. 54'. 50''$ et $\odot P = 112^\circ. 25'. 50''$.

Fig. 2.

$$
\begin{array}{rlrl}
L.\,\sin.\,Pz = & 9,9798486 & L\,\mathrm{tang}.Pz = & 10,5060715 \\
L.\,\sin.\odot Pz = & 9,7474445 & L.\,\mathrm{cos}\odot Pz = & 9,9186275 \\
L.\,\sin.\,zQ = & 9,7272931 & L.\,\mathrm{tang}.\,PQ = & 10,4246990 \\
 & & PQ = & 69^\circ.23'.20'' \\
 & & \odot P = & 112.\ 25.\ 50 \\
 & & \odot Q = & 43.\ \ 2.\ 30
\end{array}
$$

L. cos.

L. cof. $z\,Q = 9{,}9272040$	L. tang. $z\,Q = 9{,}800^{\wedge}903$
L. cof. $\odot Q = 9{,}8638327$	L. fin. $\odot Q = 9{,}8341218$
L. cof. $\odot z = 9{,}7910367$	L tang. $P \odot z = 9{,}9659685$
$\odot z = 51^\circ.\, 49'.\, 30''$	$P \odot z = 42^\circ.45'.30''$
	$A \odot P = 82.\ 54.\ 50$
	$A \odot z = 40.\ \ 9.\ 20$
	$A \odot ♀ = 128.\ 19.\ 10$
	$z \odot ♀ = 168.\ 28.\ 30$

Ob $\odot ♀ v = z \odot ♀ + \frac{7}{5}\omega$ fiet:

L. $s = 2{,}9476069$	L. $s = 2{,}9476069$
L. cof. $z \odot ♀ = 9{,}9911541$ (-)	L. fin. $z \odot ♀ = 9{,}3005857$
L. $\odot R = 2{,}9387610$	L cot. $\odot z = 9{,}8955419$
$\odot R = 868'' = 14''.\, 28''$	L. $\omega = 2{,}1437345$
$z ♀ = 52^\circ.\ 4'.\ 0''$	$\omega = 139''$, $\frac{7}{5}\omega = 3'.\,15''$
	$\odot ♀ v = 168^\circ.\ 31'.\ 40''$

Sequitur calculus parallacticus Tab. XIX. Fig. 3.

L. fin. $z ♀ = 9{,}8969265$	L. $\frac{♀ v}{\Pi} = 0{,}2967732$
L. $(\frac{a}{b} - 1) = 0{,}3998467$	L. fin. $\odot ♀ v = 9{,}2986191$
L. $\frac{♀ v}{\Pi} = 0{,}2967732$	L. $\frac{v\,\omega}{\Pi} = 9{,}5953923$
L. cof. $\odot ♀ v = 9{,}9912355$ (-)	L. $v\,\omega = 0{,}5953923$
L. $\frac{♀ \omega}{\Pi} = 0{,}2880087$	L. $s = 2{,}9476069$
	L. T. $♀ \odot v = 7{,}6477854$
	$♀ \odot v = 0^\circ.15'.17''$
$♀\,\omega = -\,1{,}9409.\,\pi$ hinc	$B \odot ♀ = 51.\ 40.\ 49$
$\odot v = 886{,}35 + 1{,}9409.\,\pi$	$B \odot v = 51.\ 25.\ 32$

 Hinc

Hinc ergo deducetur diſtantia centrorum correcta:
$886,35+1,9409.\pi+0,6235.x+0,7818.y+0,0490\theta$
$=918+\nu$

ex quo ſequens emergit aequatio:
$\nu=-31,65+1,9409.\pi+0,6235.x+0,7818.y+0,0490.\theta.$

III. Contactus internus pro egreſſu.

5. Obſeruatus eſt d. 3 Iun. $3^h. 14'. 3''$, vnde habetur ang. $\odot P z = 48°. 30'. 45''$, atque ob tempus Pariſinum huius obſeruationis $= 13^h. 21'. 3''$ erit $t = 3^h. 11'. 10'' = 3, 186111.$

Tab. XIX. Fig. 1.

$$\begin{array}{rlrl}
L. t & = 0,5032609 & & \\
L. (\alpha+\beta) & = 2,3756636 & & \\
L. \gamma & = 1,5492486 & \gamma t & = 112,8 \\
 & & l & = 613,4 \\
L. \odot V. & = 2,8789245 & & \\
L. \gamma t & = 2,0525095 & ♀ V & = 500,6 \\
L. ♀ V & = 2,6994908 & L. \odot V & = 2,8789245 \\
L. \odot V & = 2,8789245 & L. cof. \sigma & = 9,9211721 \\
L. tang. \sigma & = 9,8205663 & L. s & = 2,9577524 \\
\sigma & = 33°. 29'. 13'' & s & = 907,30
\end{array}$$

Pro momento obſeruationis eſt $A \odot P = 83°. 0'. 10''$ et $P \odot = 112°. 27'. 30''$.

Tab XIX. Fig 5.

$$\begin{array}{rlrl}
L. fin. P z & = 9,9798486 & L. tang P z & = 10,5060715 \\
L. fin. \odot P z & = 9,8745399 & L. cof. \odot P z & = 9,8211575 \\
L. fin\ z Q & = 9,8543885 & L. tang. PQ & = 10,3272290 \\
 & & PQ & = 64°. 47'. 30'' \\
 & & \odot P & = 112. 27. 30 \\
 & & \odot Q & = 47. 40. 0
\end{array}$$

L. cof.

L. cof. ☊Q = 9,8444587   L. tang. ☊Q = 10,0099389
L. cof. ⊙Q = 9,8283006   L. fin. ⊙Q = 9,8687851

L. cof. ⊙☊ = 9,6727593   L. tang. P⊙☊ = 10,1411538
⊙☊ = 61°. 55′. 10″   P⊙☊ = 54°. 9′. 0″
A⊙P = 83. 0. 10

A⊙☊ = 137. 9, 10
A⊙♀ = 33. 29. 10

☊⊙♀ = 170. 38. 20

Ob ⊙♀υ = ☊⊙♀ + $\frac{7}{5}$ω erit:

L. *s* = 2,9577524   L. *s* = 2,9577524
L. cof. ☊⊙♀ = 9,9941776 (-)   L. fin. ☊⊙♀ = 9,2112709

L. ⊙R = 2,9519300   L. cot. ⊙☊ = 9,7271460

⊙R = 895″ = 14′. 55″   L. ω = 1,8961693
☊♀ = 62°. 10′. 0″   ω = 79″; $\frac{7}{5}$ω = 1′. 50″
⊙♀υ = 170°. 40′. 10″

Pro calculo parallactico habebimus   Tab. XIX. Fig. 6.

L. fin. ☊♀ = 9,9466043   L. $\frac{♀υ}{\Pi}$ = 0,3464510
L. $(\frac{a}{b}-1)$ = 0,3998467   L. fin. ⊙♀υ = 9,2098636

L. $\frac{♀υ}{\Pi}$ = 0,3464510   L. $\frac{υω}{\Pi}$ = 9,5563146
L. cof. ⊙♀υ = 9,9942157 (-)   L. υω = 0,5563146

L. $\frac{♀ω}{\Pi}$ = 0,3406667   L. *s* = 2,9577524

♀ω = − 2,1911. π hinc   L. tang. ♀⊙υ = 7,5985622
⊙υ = 907,30 + 2,1911. π   ♀⊙υ = 0. 13′. 38″
A⊙♀ = 33. 29. 13

A⊙υ = 33. 42. 51

   Ex

Tab. XIX. Fig. 7. Ex particula vX iam nascitur decrementum $-0,8318.x-0,0554.\theta$ et ex particula vY incrementum $+0,5550.y+0,0053.\theta$, consequenter erit distantia centrorum correcta:

$$907,30+2,1911.\pi-0,8318.x+0,5550.y-0,0501.\theta = 918+\nu$$

ex quo haec deducitur aequatio finalis:

$$\nu=-10,70+2,1911.\pi-0,8318.x+0,5550.y-0,0501.\theta$$

At contactus internus circa ingressum praebuit

$$\nu=-31,65+1,9409.\pi+0,6235.x+0,7818.y+0,0490\,\theta$$

multiplicata igitur hac posteriori aequatione per $\frac{501}{493}$ obtinebimus:

$$1,022\,\nu=-32,36+1,9845.\pi+0,6375.x+0,7994.y+0,0501.\theta.$$

Ex hac autem aequatione cum superiori comparata deducitur sequens valor ipsius ν, incognitam θ non inuoluens:

$$\nu=-21,29+2,0647.\pi-0,0961.x+0,6697.y$$

IV. Contactus externus pro egressu.

6. Obseruatus est $3^h.32'.14''$ ex quo fit ang. $\odot P z = 53°.3'.30''$. Quum vero tempus Parisinum huius obseruationis sit $13^h.39'.14''$, habebitur $t = 3^h.29'.21'' = 3,489166$:

Tab. XIX. Fig. 1.

$$\begin{aligned} L.\,t &= 0,5427217 \\ L.\,(\alpha+\beta) &= 2,3756636 \\ L.\,\gamma &= 1,5492486 \\ \hline L.\,\odot V &= 2,9183853 \\ L.\,\gamma\,t &= 2,0919703 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma\,t &= 123,6 \\ l &= 613,4 \\ \hline ♀ V &= 489,8 \end{aligned}$$

L. ♀ V

L. ♀ V = 2, 6900188	L. ⊙ V = 2, 9183853
L. ⊙ V = 2, 9183853	L. cof. σ = 9, 9349365
L. Tang. σ = 9, 7716335	L. s = 2, 9834488
σ = 30°. 35′. 9″	s = 962, 61.

Pro tempore obferuationis eft A⊙P = 83°. 0′. 30″ et ⊙P = 112°. 27′. 30″.

Tab. XIX. Fig. 5.

L. fin. P z = 9, 9798486	L. Tang. P z = 10, 5060715
L. fin. ⊙ P z = 9, 9026815	L. cof. ⊙ P z = 9, 7788756
L. fin. z Q = 9, 8825301	L. Tang. PQ = 10, 2849471
	P Q = 62°. 34′. 40″
	⊙ P = 112. 27. 30
	⊙ Q = 49. 52. 50
L. cof. z Q = 9, 8104899	L. Tang. z Q = 10, 0720421
L. cof. ⊙ Q = 9, 8091442	L. fin. ⊙ Q = 9, 8834927
L. cof. ⊙ z = 9, 6196341	L. Tang. P⊙z = 10, 1885494
⊙ z = 65°. 23′. 10″	P ⊙ z = 57°. 3′. 50″
	A ⊙ P = 83. 0. 30
	A ⊙ z = 140. 4. 20
	A ⊙ ♀ = 30. 35. 10
	z ⊙ ♀ = 170 39. 30
L. s = 2, 9834488	L. s = 2, 9834488
L. cof. z ⊙ ♀ = 9, 9942018	L. fin. z ⊙ ♀ = 9, 2103759
	L. cot. ⊙ z = 9, 6609878
L. ⊙ R = 2, 9776506	L. ω = 1, 8548125
⊙ R = 950″ = 15′. 50″	ω = 72″; $\frac{7}{5}\omega$ = 1′. 40″
z ♀ = 65°. 39′ 0″	⊙ ♀ v = 170°. 41′. 10″.

 Pro

Pro calculo Parallactico habemus:

Tab. XIX Fig. 6.

$L. \sin. z♀ = 9,9595393$	$L. \frac{♀ v}{\pi} = 0,3593860$
$L. (\frac{a}{b} - 1) = 0,3998467$	$L. \sin. ⊙ ♀ v = 9,2090940$
$L. \frac{♀ v}{\pi} = 0,3593860$	$L. \frac{v \omega}{\pi} = 9,5684800$
$L \cos. ⊙ ♀ v = 9,9942364$ (−)	$L. v \omega = 0,5684800$
$L. \frac{♀ \omega}{\pi} = 0,3536224$	$L. s = 2,9834488$
$♀ \omega = -2,2575. \pi$	$L. Tang. ♀ ⊙ v = 7,5850312$
$⊙ v = 962,61 + 2,2575. \pi$	$♀ ⊙ v = 0°. 13'. 14''$
	$A ⊙ ♀ = 30. 35. 9$
	$A ⊙ v = 30. 48. 23.$

Hinc fit diſtantia centrorum correcta.

$$962,61 + 2,2575. \pi - 0,8589. x + 0,5121. y - 0,0523\, \theta = 976 + \mu$$

vnde deducitur

$$\mu = -13,39 + 2,2575. \pi - 0,8589. x + 0,5121. y - 0,0523. \theta.$$

Contactus vero externus pro ingreſſu quum praebuerit:

$$\mu = -34,73 + 2,0105. \pi + 0,6647. x + 0,7472. y + 0,0514. \theta$$

multiplicando poſteriorem hanc aequationem per $\frac{523}{514}$ prodibit

$$1,017. \mu = -35,34 + 2,0457. \pi + 0,6763. x + 0,7602. y + 0,0523. \theta$$

quam

quam aequationem cum fuperiori combinando, eliciemus fequentem valorem ipfius μ a θ liberum:

$$\mu = -24,15 + 2,1329.\pi - 0,0905.x + 0,6306.y$$

quum vero effet

$$\nu = -21,29 + 2,0647.\pi - 0,0961.x + 0,6697.y$$

hinc quoque deducitur

$$\mu + \nu = -45,44 + 4,1976.\pi - 0,1866.x + 1,3003.y \text{ et}$$

$$\mu - \nu = -2,86 + 0,0682.\pi + 0,0056.x - 0,0391.y.$$

Comparatio formularum pro infula Regis Georgii inuentarum, cum iis quae ex obferuationibus in Europa inftitutis deducuntur.

7. Si valores ipforum μ et ν modo inuenti, iis aequentur qui ex obferuationibus in Europa factis eliciti funt, et qui in P. II. Tom. XIV. Nov. Comment. p.p. 531 et 534. recenfentur, inde valores ipfius x facili negotio deduci poterunt, qui in duas claffes diftribui debent, quarum prima eos complectetur, qui ex obferuationibus circa ingreffum Veneris inftitutis eruuntur, pofterior vero illos, quos obferuationes circa egreffum Veneris fuppeditarunt.

Claffis I.

ex contactu externo circa ingreffum

$x = -36,09 + 5,957.\pi - 0,125.y$ pro Grenouico

ex

ex contactu interno circa ingressum

$x = -35{,}42 + 6{,}138\ \pi - 0{,}124\ y$ pro Grenouico

$x = -34{,}17 + 6{,}066.\pi - 0{,}119\ y$ Holmia

$x = -33{,}57 + 5{,}956.\pi - 0{,}119.y$ Caianeburg

$x = -33{,}22 + 5{,}838.\pi - 0{,}115.y$ Wardhus

$x = -33{,}03 + 5{,}852.\pi - 0{,}115.y$ Kola

Classis II.

ex contactu interno circa egressum

$x = 63{,}12 - 5{,}115.\pi - 0{,}214.y$ pro Petropoli

$x = 59{,}36 - 4{,}787.\pi - 0{,}212.y$ Wardhus

$x = 58{,}78 - 4{,}860.\pi - 0{,}211.y$ Kola

$x = 65{,}92 - 5{,}685.\pi - 0{,}208.y$ Gurjef

ex contactu externo circa egressum

$x = 59{,}34 - 4{,}816.\pi - 0{,}206.$ pro Caianeburg

$x = 65{,}88 - 5{,}518.\pi - 0{,}202.y$ Gurjef

$x = 52{,}96 - 4{,}064.\pi - 0{,}197.y$ Iakutsk.

8. Iam si omnes valores ipsius x ex obseruationibus ingressus deducti in vnam colligantur summam, habebimus:

$$6x = -205{,}50 + 35{,}807.\pi - 0{,}717.y.$$

Simili ratione omnes valores ipsius x ex obseruationibus circa egressum inuentos addendo, obtinebimus:

$$7x = +425{,}36 - 34{,}845.\pi - 1{,}450.y.$$

Ex priori aequatione medium sumendo deducitur:

$$x = -34{,}25 + 5{,}968.\pi - 0{,}119\ y$$

ex

ex posteriori autem

$$x = +60,77 - 4,978.\pi - 0,207.y$$

hos igitur valores iam inter se aequando, sequens resultabit aequatio

$$0 = 95,02 - 10,946.\pi - 0,088.y$$

ex qua colligitur $\pi = 8,68 - 0,0080.y$, qui valor ipsius π praeter numerum absolutum, aliquantulam partem ipsius y inuoluit. Quum autem certo constet, tum valorem ipsius y esse positiuum, cum infra $10''$ subsistere, maxima incertitudo, quae propter hunc terminum coefficiente y affectum in determinationem Parallaxeos redundare posset, nequidem ad decimam partem vnius minuti secundi assurget. Si valor pro π inuentus in alterutro valorum ipsius x introducatur, prodibit

$$x = 17,56 - 0,167.y.$$

9. Valor ipsius π modo inuentus, cum iis quos obseruationes ad Sinum Hudsonis et in California factae, praebuerunt, adeo egregie consentit, vt nullum sit dubium, quin idem valor ad veritatem quam proxime accedat. Quum enim obseruationes ad Sinum Hudsonis factae dedissent $\pi = 8,69 - 0,0034.y$, Californienses autem $\pi = 8,70 - 0,0070.y$, tantilla discrepantia, quae inter has conclusiones adhuc superest, ex minutissimis erroribus obseruationum facile deriuari potest. Nihilo minus infra operam dabimus, vt si fieri possit adhuc exactiores valores

pro Parallaxi ex singulis obseruationibus Americanis deducamus.

10. Quamuis ex formulis nostris valor ipsius y deduci non posit, nisi semidiametrum Solis tamquam perfecte cognitam consideremus; hoc tamen loco multum conducet, examinare quinam valores pro correctionibus semidiametrorum tam Solis quam Veneris ex obseruationibus in Insula Regis Georgii factis prodire debeant, siquidem hinc infallibile deduci potest criterium, ex quo de exactitudine harum obseruationum iudicare licebit. Si igitur in valore ipsius $\mu + \nu$ §. 6 inuento, loco π et x valores ipsorum supra traditi introducantur, prodibit

$$\mu + \nu = 12,29 + 1,2976.y,$$

hincque posito

$$\mu + \nu = 2\lambda, \text{ erit } y = 9,47 + 1,541.\lambda.$$

Valor autem hic ipsius λ, iam satis differre videtur ab eo, quem obseruationes pro Sinu Hudsonis dedissent, ex iis enim inuenimus

$$2\lambda = -11,51 + 1,2788.y.$$

Grauis igitur hinc suboritur suspicio in obseruationes insulae Regis Georgii haud leues irrepsisse errores, ad quam suspicionem vlterius confirmandam, quaeramus quoque valorem ipsius

$$\mu - \nu = -2,86, + 0,0682.\pi + 0,0056.x - 0,0391.y.$$

Si nimirum heic pro π et x valores inuenti substituantur, prodibit

$$\mu - \nu = -2,18 - 0,0406.y,$$

de

de qua expreſſione iam nullum quidem eſt dubium, quin eadem a veritate multum aberret. Praeterquam enim quod obſeruationes ad Sinum Hudſonis dederint

$$\mu - \nu = - 0,328 - 0,0388 . y,$$

menſurae diametri Veneris exactiſſimae, vnanimi fere conſenſu probant eandem $57''$ non multo maiorem eſſe. Hinc igitur iam liquet, non modo, quod ex obſeruationibus ſuper inſula Regis Georgii inſtitutis dum ſeorſim conſid rantur, nulla deduci queat certa determinatio latitudinis Veneris Geocentricae vel ſemidiametri huius planetae, ſed etiam quod in his obſeruatio ibus inſignes lateant errores. Infra autem euidenter probabimus momenta contactuum externorum ad minimum $30''$ erroribus obnoxia eſſe, contactum ſcilicet externum in ingreſſu iuſto tardius eſſe obſeruatum, contactum vero externum pro egreſſu multo citius, quam reapſe contigit.

11. Quoniam itaque in contactibus externis adeo inſignes deprehenduntur errores, videtur inde haud ſine veriſimilitudine inferri poſſe, valorem ipſius μ ex his contactibus concluſum ad erroneos quoque valores Parallaxeos perducere, adeo vt noſtra determinatio ſupra allata pro ſatis certa haberi non deberet. Quod autem erroribus obſeruationum modo memoratis non obſtantibus, valor Parallaxeos prodierit veritati ſatis conformis; ratio eſt, partim quod valores ipſius x ex contactibus externis deducti, cum iis quos ex internis eruimus, in vnam

 fuerint

fuerint collecti fummam, partim quoque quod coefficiens ipfius π adeo fit infignis, vt nifi errores obferuationum fuerint enormes, conclufiones pro Parallaxi inde vix fenfibilem patiantur mutationem. Quo autem euidentius haec pateant, exclufis valoribus ipfius x ex contactibus externis deductis, in vnam fummam colligamus valores x vtriusque claffis ex contactibus tantum internis deriuatos, vnde inueniemus:

$$5x = -169,41 + 29,850.\pi - 0,592.y \text{ et}$$

$$4x = +247,18 - 20,447.\pi - 0,845.y$$

vnde mediis fumtis, fit

$$x = -33,88 + 5,970.\pi - 0,118.y \text{ et}$$

$$x = +61,79 - 5,112.\pi - 0,211.y.$$

Hinc autem deducitur

$$0 = 95,67 - 11,082.\pi - 0,093.y$$

ideoque

$$\pi = 8'',63 - 0,0084.y,$$

qui valor ipfius π a prius inuento non nifi vicefima parte minuti fecundi differt, valor autem ipfius x hinc refultans eft

$$x = 17,66 - 0,168.y.$$

Accuratior determinatio Parallaxeos et Elementorum Aftronomicorum.

12. Quoniam vis Methodi a nobis adhibitae, in eo imprimis confiftit, quod valores ipforum μ

et

et ν ex obferuationibus Americanis eliciti aequentur iis harum quantitatum valoribus, quos obferuationes in Europa factae praebuerunt, indeque duplicis generis aequationes eruantur pro valore ipfius x determinando, quarum aequationum dum medium fumitur, bini oriuntur valores ipfius x, qui inter fe aequati, aequationem fuppeditant ex qua quantitas Parallaxis definiri poteft; hinc facile perfpicitur conclufionem ex huiusmodi operatione deductam eo maiorem fibi vindicare certitudinis gradum, quo maior fuerit numerus obferuationum, cum quibus illae in America inftitutae hoc modo combinantur, fiquidem ea ratione erroribus in obferuando commiffis tutiffima adfertur medela. Quum vero praeter eas obferuationes, ex quibus valores ipforum μ et ν eliciti fuerunt in Part. II. Tom. XIV. Nou. Comment. plures quoque aliae calculo fubiectae fuerunt, operae omnino pretium effe iudicauimus ex iisdem valores ipforum μ et ν inueftigare, vt deinceps harum obferuationum comparatio cum Americanis inftitui quoque poffet. Enimuero quia in calculo harum obferuationum, non folum certus valor parallaxis iam pro vero affumtus fit, fed etiam correctionum quibus reliqua elementa Aftronomica indigent ratio fit habita; pro hifce correctionibus valores ipforum tum adhibitos reftituendo, inueftigandum erat quomodo numeri abfoluti valores ipfius μ vel ν ingredientes fe effent habituri, tum vero quia ob elementa Aftronomica correcta ipfi quoque coefficientes correctionum x et y fuerint immutati, ne-

 ceffum

ceſſum quoque fuit inquirere, quid his coefficientibus addi deberet, vt ad eam redirent formam, quae locum habet pro hypotheſi, qua hae correctiones x et y plane ſupponuntur incognitae. Denique et id non reticendum eſt, pro nonnullis harum obſeruationum, numeros abſolutos valores ipſorum μ et ν ingredientes ex eo capite inſignem ſubiiſſe mutationem, quod Longitudinibus Geographicis Locorum, vbi hae obſeruationes erant factae, eae applicatae ſint correctiones, quae in P. II. Tom. XIV. pag. 520. et ſequ. fuerunt ſtabilitae. Neque tamen hoc pro circulo vitioſo in argumentando habendum eſt, quod hae Longitudines quaſi ex ipſa determinatione Parallaxis fuerint deriuatae, vt enim taceam valorem Parallaxis tum inuentum, ad veritatem proxime accedere, pleraeque harum Longitudinum ex obſeruatis contactibus Veneris cum Sole alia ratione confirmari poſſunt, qua omnino perinde erit, quam quis adhibere voluerit parallaxin, ne modo in eius valore aſſumendo enormis committatur error. Sic ex. gratia nulla habita ratione correctae Longitudinis Geographicae, contactus internus pro ingreſſu ad Promontorium Lezard obſeruatus hanc praebet aequationem:

$$\nu = 3,70 - 2,484.\pi + 0,644\,x + 0,764.\,y + 0,051\,\theta$$

quae ſi ſubtrahatur a Grenouicenſi etiam ex obſeruato contactu interno circa ingreſſum deducta:

$$\nu = 5,06 - 2,501.\pi + 0.648.\,x + 0,\ ,62.\,y \text{ remanebit}$$

$$0 = 1,36 - 0,017.\pi + 0,004.\,x - 0,002.\,y - 0,051.\,\theta.$$

Haec

Haec autem aequatio ſubſtituendo pro $x, + 16$ et $y, + 8$, quod ſaltem ſine ſenſibili errore fieri poteſt, transmutabitur in ſequentem:

$$0 = 1,40 - 0,017. \pi - 0,051. \theta.$$

Supponamus iam primo parallaxin $8''$, atque habebimus $0,051. \theta = 1,26$ ideoque $\theta = 25''$, deinde ſtatuamus $\pi = 9$ eritque $0,051 \theta = 1,25$ vnde $\theta = 25''$ perinde vt antea In Parte II. Tom. XIV. Comment. autem ſuppoſita erat $\theta = 21''$, qui valor a modo inuento quam minimum diſcrepat. Caeterum de Longitudine Promontorii Lezard conſuli quoque poteſt Tom. XV. Nou. Comment. p. 638.

13. Hac igitur ratione ſequentes adepti ſumus valores ipſorum μ et ν, quos more recepto in binas diſpeſcere licebit claſſes, prouti ſcilicet obſeruationes vel circa ingreſſum Veneris, vel circa eiusdem egreſſum in computum venerunt:

Claſſis I.

ex contactu externo circa ingreſſum.

I. $\mu = 2,82 - 2,449. \pi + 0,684. x + 0,729. y$ Caua
II. $\mu = 3,01 - 2,471. \pi + 0,683. x + 0,729. y$ Promont. Lezard
III. $\mu = 1,31 - 2,455. \pi + 0,687. x + 0,726. y$ Holmia
IV. $\mu = 1,68 - 2,278. \pi + 0,690\ x + 0,723. y$ Ponoi

ex contactu interno circa ingreſſum.

I. $\nu = 4,76 - 2,505. \pi + 0,647, x + 0,762. y$ Lutetia Pariſior.
II. $\nu = 4,72 - 2,470. \pi + 0,645. + 0,764. y$ Caua
III. $\nu = 4,71 - 2,484. \pi + 0,644. x + 0,764\ y$ Promont. Lezard
IV. $\nu = 2,79 - 2,307. \pi + 0,654. x + 0,756. y$ Ponoi.

Claſſis

Classis II.

ex contactu interno circa ingressum.

I. $\nu = 28,10 - 2,209.\pi - 0,859.x + 0,512.y$ Orenburg

II. $\nu = 27,70 - 2,223.\pi - 0,859.x + 0,512.y$ Orsk

ex contactu externo circa egressum.

I. $\mu = 22,52 - 1,567.\pi - 0,883.x + 0,469.y$ Wardhus

II. $\mu = 25,88 - 1,845.\pi - 0,883\ x + 0,469.y$ Petropolis

III. $\mu = 27,96\ \ 2,157.\pi - 0,881.x + 0,471.y$ Orenburg

IV. $\mu = 27,71 - 2,278.\pi - 0,881.x + 0,471.y$ Orsk.

Numerum autem huiusmodi aequationum, facile adhuc augere potuissemus, si non solum obseruationes in aliis locis pro ingressu institutas, de quibus in P. II. Tom. XIV. nulla facta est mentio, calculo subiicere voluissemus, sed etiam pro singulis locis ad momenta a singulis obseruatoribus assignata attentionem fecissemus. Existimauimus autem nos eo tutius huic labori supersedere posse, quod valor Parallaxis infra stabiliendus vix vltra partem vicesimam minuti secundi a veritate discrepare possit, an vero maior exactitudo hoc in negotio sperari queat, plures sane adsunt dubitandi rationes.

14. Valoribus ipsorum μ et ν iam allatis, aequales ponantur ii, quos pro insula Regis Georgii inuenimus, atque ex aequationibus inde resultantibus quaerantur valores pro x, qui ita se habebunt:

Classis

Classis I.

ex contactu externo circa ingressum

I. $x = -34,80 + 5,912.\pi - 0.126.y$

II. $x = -35,09 + 5.948.\pi - 0,127.y$

III. $x = -32,72 + 5,897.\pi - 0,122.y$

IV. $x = -33,06 + 5,648.\pi - 0,118.y$

ex contactu interno circa ingressum

I. $x = -35,06 + 6.151.\pi - 0,123.y$

II. $x = -35,10 + 6,120.\pi - 0,127.y$

III. $x = -35,13 + 6,147.\pi - 0,127.y$

IV. $x = -32,10 + 5,829.\pi - 0,115.y.$

Classis II.

ex contactu interno circa egressum

I. $x = +64,73 - 5,601.\pi - 0,207.y$

II. $x = +64,20 - 5,620.\pi - 0,207.y$

ex contactu externo circa egressum

I. $x = +58,92 - 4.671.\pi - 0,205.y$

II. $x = +63,17 - 5,022.\pi - 0,205.y$

III. $x = +65,96 - 5,430.\pi - 0,203.y$

IV. $x = +65,65 - 5,584.\pi - 0,203.y.$

15. Si iam omnes valores ipsius x ex obseruationibus introitus conclusi addantur, prodibit:

$8x = -273,06 + 47,652.\pi - 0,985.y$

coniunctim igitur cum aequatione §. 8. inuenta:

$$6x = -205,50 + 35,807.\pi - 0,717.y\text{, erit}$$

$$14x = -478,56 + 83,459.\pi - 1,702.y$$

ex quo medio sumto colligitur

$$x = -34,18 + 5,961.\pi - 0,121.y.$$

Eodem modo omnibus valoribus ipsius x ad posteriorem classem pertinentibus, in vnam summam collectis, fiet

$$6x = +382,63 - 31,928.\pi - 1,230.y$$

et huic addendo aequationem §. 8. inuentam

$$7x = +425,36 - 34,845.\pi - 1,450.y\text{ prodibit}$$

$$13x = +807,99 - 66,773.\pi - 2,680.y$$

ex quo medio sumto deducitur

$$x = 62,15 - 5,136.\pi - 0,206.y.$$

Valores igitur ipsius x medios inter se aequando, obtinebimus

$$0 = 96,33 - 11,097.\pi - 0,085.y$$

ex qua deducitur:

$$\pi = 8'',68 - 0,0077.y \text{ et } x = 17'',57 - 0,167.y.$$

16. Quoniam vt supra obseruauimus, momenta contactuum externorum super insula Regis Georgii obseruata pro vsque adeo certis haberi nequeant; haud inutile erit examinare, qui valor prodeat pro parallaxi, si sola momenta contactuum internorum in computum ducantur, collectis igitur valoribus x prioris

prioris claſſis ex contactu interno deductis, habebimus:

$$4x = -137,39 + 24,247.\pi - 0,492.y$$

At ſupra §. 11. inuenimus

$$5x = -169,41 + 29,850.\pi - 0,592.y$$

quorum ſumma dat

$$9x = -306,80 + 54,097.\pi - 1,084.y$$

vnde medium ſumendo prodit

$$x = -34,09 + 6,011.\pi - 0,120.y$$

Porro ſi valores x poſterioris claſſis ex contactu interno deriuati inuicem addantur prodit:

$$2x = +128,93 - 11,221.\pi - 0,414.y$$

quum igitur §. 11. haberemus:

$$4x = +247,18 - 20,447.\pi - 0,845.y, \text{ inde fiet}$$

$$6x = +376,11 - 31,668.\pi - 1,259.y$$

ideoque medio capto

$$x = 62,69 - 5,278.\pi - 0,210.y$$

Binos igitur valores medios quantitatis x inter ſe aequando obtinebimus

$$0 = 96,78 - 11,289.\pi - 0,090.y,$$

ex qua aequatione deducitur

$$\pi = 8,58 - 0,0080.y$$

tum vero hunc valorem in alterutra aequatione valorem ipſius x exhibente ſubſtituendo, fiet

$$x = 17,44 - 0,168.y.$$

 17.

17. De valore parallaxis iam inuento omnino certiſſimam fouere licet ſpem, quod a veritate non admodum diſcrepaturus ſit, quia coefficiens ipſius π, in aequationibus parallaxi determinandae inſeruientibus ſit praemagnus, quippe qui ad 11 vsque vnitates aſſurgit. Qui autem ſingulos valores ipſius x vtriusque claſſis ſeorſim inter ſe comparare voluerit, inueniet valores pro parallaxi inde orituros ſat arctis limitibus contineri, imprimis autem ſi rationem tantum habere voluerit contactuum internorum, deprehendet in expreſſione pro Parallaxi numerum abſolutum nec vltra 8, 80 aſſurgere, neque intra 8, 41 deprimi, medium autem horum numerorum 8, 60 vix differt a numero abſoluto expreſſionem parallaxis ſupra inuentam ingrediente. Quum itaque quantitas parallaxis ex huiusmodi comparatione inueſtiganda tam arctis includatur limitibus, nullum eſt dubium, quin hac ratione errores obſeruationum, cum quibus eae ſuper inſula Regis Georgii factae comparantur, quam proxime deſtructae ſint, vnicum igitur dubium quo praecedens determinatio premitur, originem repetit ex iis erroribus, quibus ipſae obſeruationes inſulae Regis Georgii affectae eſſe poſſint. De contactibus externis iam quidem quid ſentiamus, diximus, quod vero internos attinet, infra inquiremus, quid tantilli errores circa ipſos commiſſi, ad valorem parallaxis immutandum valeant. In anteceſſum tamen monere iuuabit, incertitudinem hinc oriundam ad ſextam partem minuti ſecundi non aſſurgere.

18.

18. Quo certiores quoque euadamus de valoribus parallaxis, quos obſeruationes ad ſinum Hudſonis et in California factae praebent, valores ipſorum μ et ν pro his locis inuentos, iam aequemus iis, quos §. 13 adduximus, hinc autem pro priori quidem loco ſequentes obtinebimus valores ipſius x.

Claſſis I.

ex contactu externo circa ingreſſum.

I. $x = -3,13 + 2,455.\pi - 0,163.y$

II. $x = -3,38 + 2,487\ \pi - 0,163.y$

III. $x = -1,17 + 2,453.\pi - 0,158.y$

IV. $x = -1,64 + 2,216.\pi - 0,154.y$

ex contactu interno circa ingreſſum

I. $x = -4,30 + 2,519.\pi - 0,163.y$

II. $x = -4,26 + 2,478.\pi - 0,166.y$

III. $x = -4,26 + 2,507.\pi - 0,167.y$

IV. $x = -1,63 + 2,231.\pi - 0,154.y.$

Claſſis II.

ex contactu interno circa egreſſum

I. $x = +34,49 - 2,045.\pi - 0,168.y$

II. $x = +33,97 - 2,063.\pi - 0,168.y$

ex contactu externo circa egreſſum

I. $x = +27,90 - 1,284.\pi - 0,169\ y$

II. $x = +32,13 - 1,634.\pi - 0,169.y$

III. $x = +34,84 - 2,032.\pi - 0,167.y$

IV. $x = +34,53 - 2,186.\pi - 0,167.y.$

19. Omnes valores ipſius x prioris claſſis in vnam colligendo ſummam obtinebimus:

$$8x = -23,77 + 19,346.\pi - 1,288.y$$

cui aequationi ſi addatur iſta p. 477. P. II. Tom. XIV. Nov. Comment. tradita

$$6x = -21,23 + 14,331.\pi - 0,942.y$$

prodit

$$14x = -45,00 + 33,677.\pi - 2,230.y$$

hincque medium ſumendo

$$x = -3,21 + 2,405.\pi - 0.160.y$$

Addantur nunc quoque ſinguli valores x e poſteriori claſſe, quo facto habebitur:

$$6x = 197,86 - 11,244.\pi - 1,008.y$$

at loco citato Tom. XIV. Comment. erat

$$7x = 212,27 - 10,544.\pi - 1,193.y$$

horum igitur ſumma praebet:

$$13x = 410,13 - 21,788.\pi - 2,201.y$$

hincque medio capto

$$x = 31,55 - 1,676.\pi - 0.170\,y.$$

His valoribus ipſius x inter ſe aequatis, erit

$$0 = 34,76 - 4,081.\pi - 0,010.y$$

ex qua deducitur

$$\pi = 8,52 - 0,0019.y, \text{ hincque } x = 17,62 - 0,167.y$$

Si valores ipſius x ex contactibus internis deriuatos ſelige-

ſeligere vellemus, ii prioris claſſis collectim ſumti dabunt

$$9x = -31,22 + 21,563.\pi - 1,432.y$$

vnde valor medius

$$x = -3,47 + 2,396.\pi - 0,159.y$$

valores autem poſterioris claſſis coniunctim praebent

$$6x = +195,92 - 10,424.\pi - 1,029.y$$

ex qua fit

$$x = 32,65 - 1,737.\pi - 0,171.y$$

priorem autem valorem a poſteriori ſubtrahendo oritur:

$$0 = 36,12 - 4,133.\pi - 0,012.y$$

ex qua aequatione colligitur

$$\pi = 8,74 - 0,0029y \text{ et } x = 17,47 - 0,166.y.$$

20. Eodem modo ex valore ipſius y pro fortalitio *Sti Ioſephi* in California inuento, ſequentes deriuantur valores quantitatis x.

Claſſis I.

ex contactu interno circa ingreſſum

I. $x = -20,32 + 4,413.\pi - 0,145.y$

II. $x = -20,32 + 4,378.\pi - 0,148.y$

III. $x = -20,34 + 4,403.\pi - 0,148.y$

IV. $x = -17,51 + 4,109.\pi - 0,136.y$.

Claſſis

Claſſis II.

ex contactu interno circa egreſſum

I. $x = +50,57 - 3,932.\pi - 0,186.y$

II. $x = +50,04 - 3,950.\pi - 0,186.y$

Dum hi valores coniunctim ſumuntur cum iis, qui p. 533 P. II. Tom. XIV. Nouor. Comment. occurrunt, pro priori claſſe conſequemur:

$$9x = -174,86 + 38,538.\pi - 1,266.y$$

pro poſteriori autem

$$6x = +291,25 - 21,666.\pi - 1,138.y$$

hincque mediis ſumtis

$x = -19,43 + 4,282.\pi - 0,141.y$ et

$x = +48,54 - 3,611.\pi - 0,190.y$ vnde

$0 = 67,97 - 7,893.\pi - 0,049.y$

ex qua aequatione deducitur

$\pi = 8,61 - 0,0062.y$ hincque $x = 17,44 - 0.168.y$.

31. Nunc igitur determinationem verae parallaxeos Solis tuto ſuſcipere poterimus, dum nimirum ex valoribus modo inuentis, medium quendam eligamus. Quum vero ſingulae aequationes ex quibus parallaxis determinatur, quoad certitudinem eodem loco haberi nequeant, ſiquidem illis ſine dubio maior tribui debeat fides, pro quibus coefficiens ipſius π maiorem habuerit valorem; tutiſſimum nobis viſum eſt, vnicuique concluſioni eam aſſignare probabilitatem, quae coefficienti ipſius π proportionalis eſt.

Pro-

Proinde probabilitas valoris pro π ex obferuationibus fuper infula Regis Georgii deducti numero 11 haberi debet proportionalis, probabilitas vero valoris ipfius π ex obferuationibus ad finum Hudfonis eliciti, numero 4 ftatuendus eft proportionalis et denique probabilitas determationis, quam obferuationes in California inftitutae praebent, numero 8 proportionalis cenfenda eft. Breuitatis autem gratia valores ipfius π pro tribus locis Americanis inuentos, refpectiue litteris A, B, C defignemus, vbi fedulo obferuandum eft valores duarum priorum litterarum, duplices haberi, prouti fcilicet vel momenta omnium contactuum adhibentur, vel tantum ea contactuum internorum in vfum vocantur.

22. Quodfi nunc fine difcrimine tam contactuum externorum quam internorum rationem habere velimus, valor ipfius π medius inuenietur, fi multiplicetur A per 11, B per 4 et C itidem per 4, tum vero fumma productorum diuidatur per 19, quum enim in Califormia binos tantum contactus internos obferuare licuit, determinationi C dimidius tantum valor refpectu reliquarum A et B tribuendus eft. Hinc igitur obtinebimus:

$$19\pi = 11(8,68 - 0,0077.y) + 4(8,52 - 0,0019.y) + 4(8,61 - 0,0062.y)$$

ideoque

$$\pi = 8,63 - 0,0062.y.$$

Porro fi pro infula Regis Georgii, tantum contactuum internorum refpectum habere velimus, inuenietur valor ipſius π medius, multiplicando A per 11, B per 8 et C per 8 et diuidendo ſummam productorum per 27, tum ſcilicet erit

$$27\pi = 11(8,58 - 0,0080.y) + 8(8,52 - 0,0019.y) + 8(8,61 - 0,0062.y)$$

vnde

$$\pi = 8,57 - 0,0057.y.$$

Denique ſi pro ſinu Hudſonis quoque momenta contactuum externorum penitus excludantur, valor medius ipſius π habebitur multiplicando A per 11, B per 4 et C per 8 ſummamque productorum diuidendo per 23, erit enim

$$23.\pi = 11(8,58 - 0,0080.y) + 4(8,74 - 0,0029.y) + 8(8,61 - 0,0062.y)$$

proinde

$$\pi = 8,62 - 0,0065.y,$$

qui valor ab illo pro prima hypotheſi inuento vix differt, ex quo medio quaſi ſumto inter binas vltimas determinationes, tuto ſtatuere licebit valorem Parallaxis eſſe

$$\pi = 8,60 - 0,006.y$$

nulla enim ſufficiens adeſſe videtur ratio, cur obſeruationes contactuum externorum ad ſinum Hudſonis factae in dubium reuocari deberent. Hoc valore autem pro π aſſumto reperietur

$$x = 17,47 - 0,168.y.$$

13. Quoniam dum obſeruationes Americanas, cum iis in Europa inſtitutis comparauimus, certas ſuppo-

ſuppoſuimus longitudines locorum, vbi hae obſeruationes fuerunt factae, quae ſi multum eſſent erroneae, nullum ſane eſt dubium, quin ipſa Parallaxeos determinatio inde maxime redderetur dubia; vt igitur pleniorem nobis acquiramus conuictionem, valorem parallaxis iam inuentum veritati conſentaneum eſſe, eas obſeruationes ſeorſim conſiderare placet, quas in eodem loco tam circa egreſſum, quam ingreſſum inſtituere licuit, quales ſunt illae Wardhuſii, Caianeburgi et Kolae factae. Si enim huiusmodi obſeruationum inſtituatur comparatio, cum obſeruationibus totius tranſitus in America factis, valor Parallaxis inde deducendus ob errores in Longitudinibus horum locorum commiſſos ſenſibili non adficietur variatione. Modo autem conſueto valores ipſius x in binas diſtribuamus claſſes, ſicque ex comparatione obſeruationum in Lapponia habitarum, cum illis ad inſulam Regis Georgii, ſequentes obtinebimus valores ipſius x:

Claſſis I.

ex contactu interno circa ingreſſum

$x = -33,57 + 5,956 . \pi - 0,119\, y$ Caianeburg

$x = -33,22 + 5,838 . \pi - 0,115 . y$ Wardhus

$x = -33,03 + 5,852 . \pi - 0,115 . y$ Kola

Claſſis II.

ex contactu interno circa egreſſum

$x = +59,36 - 4,787 . \pi - 0,212 . y$ Wardhus

$x = \quad 58,78 - 4,860 . \pi - 0,211 . y$ Kola ex contactu externo circa egressum

$x = 58, 92 - 4, 671.\ \pi - 0, 207.\ y$ Wardhus

$x = 59, 34 - 4, 816.\ \pi - 0, 206.\ y$ Caianeburg.

Summa omnium valorum x prioris classis est

$3x = -99, 82 + 17, 646.\ \pi - 0, 349.\ y$

ex quo medio sumto fit

$x = -33, 27 + 5, 882.\ \pi - 0, 116.\ y$

omnes autem valores x posterioris classis in vnam summam collecti praebent

$4x = 236, 40 - 19, 134.\ \pi - 0, 836.\ y$ ideoque

$x = 59, 10 - 4, 784.\ \pi - 0, 209.\ y$

ex quibus valoribus ipsius x inter se aequatis colligitur

$\pi = 8, 66 - 0, 0087.\ y$ et $x = 17, 67 - 0, 167.\ y.$

Sin pro egressu tantum contactus internos adhibere placuerit, fiet

$x = 59, 07 - 4, 823.\ \pi - 0, 211.\ y$

vnde deducitur

$\pi = 8, 62 - 0, 0089.\ y$ et $x = 17, 47 - 0, 168.\ y.$

24. Ex comparatione obseruationum ad Sinum Hudsonis cum Lapponicis sequentes deducuntur valores ipsius x:

Classis I.

ex contactu interno

$x = -3, 08 + 2, 356.\ \pi - 0, 155.\ y$ Caianeburg

$x = -2, 79 + 2, 245.\ \pi - 0, 153.\ y$ Wardhus

$x = -2, 61 + 2, 259.\ \pi - 0, 153.\ y$ Kola

Classis

Classis II.

ex contactu interno

$x = +29,45 - 1,257.\pi - 0,174.y$ Wardhus

$x = 28,86 - 1,329.\pi - 0,174.y$ Kola

ex contactu externo

$x = 28,39 - 1,434.\pi - 0,171.y$ Caianeburg

$x = 27,90 - 1,284.\pi - 0,169.y$ Wardhus.

Si ex valoribus prioris classis medium sumatur, prodit

$x = -2,83 + 2,287.\pi - 0,154.y$

ex valoribus vero posterioris classis deducitur

$x = 28,65 - 1,326.\pi - 0,172.y$

et contactus externis exclusis

$x = 28,14 - 1,359.\pi - 0,170.y.$

Prior suppositio praebet

$\pi = 8,71 - 0,0050.y$ et $x = 17,10 - 0,166.y$

posterior autem

$\pi = 8,50 - 0,0044\,y$ et $x = 16,60 - 0,166.y.$

25. Denique comparatione facta obseruationum in California institutarum cum Lapponicis, sequentes prodeunt valores ipsius x.

I. Classis.

$x = -18,97 + 4,235.\pi - 0,136.y$ Caianeburg

$x = -18,66 + 4,121.\pi - 0,135.y$ Wardhus

$x = -18,47 + 4,135\ \pi - 0,135.y$ Kola

 II.

vnde medium

$$x = -18,69 + 4,164.\pi - 0,135.y.$$

II. Claſſis.

$$x = 45,23 - 3,122.\pi - 0,192.y \text{ Wardhus}$$

$$x = 44,64 - 3,194.\pi - 0,192.y \text{ Kola}$$

hincque medio ſumto

$$x = 44,93 - 3,158.\pi - 0,192.y.$$

Valoribus ipſius x iam inter ſe aequatis, ex aequatione inde reſultante deducitur

$$\pi = 8,69 - 0,0078.y \text{ et } x = 17,49 - 0,167.y.$$

26. Si nunc tres valores pro parallaxi ex ſingulis obſeruationibus Americanis deducti, litteris A, B, C deſignentur, tumque tres vt ſupra formentur hypotheſes, quarum

I. $19.\pi = 11\,A + 4\,B + 4\,C$

II. $27.\pi = 11.\,A + 8\,B + 8\,C$

III. $23.\pi = 11.\,A + 4\,B + 8\,C$

ſequentes inde deducentur valores medii ipſius π

I. $\pi = 8,68 - 0,0076.y$

II. $\pi = 8,67 - 0,0074.y$

III. $\pi = 8,62 - 0,0077.y$

qui valores certe non magis differunt ab iis, quos ſupra inuenimus, quam vt huius diſcrepantiae ratio a leuibus obſeruationum erroribus facile deduci poſſit.

27.

27. Nunc quoque iniucundum non fore arbitramur, inquirere quales inueniantur pro parallaxi valores, si obseruationum Americanarum inter se instituatur comparatio. Quum igitur obseruationes ad sinum Hudsonis factae praebuerint

$$\nu = 1,57 - 0,636.\pi - 0,095.x + 0,641.y$$

ex obseruationibus autem in insula Regis Georgii factis prodeat:

$$\nu = -21,29 + 2,065.\pi - 0,096.x + 0,670.y$$

horum valorum differentia dat:

$$0 = 22,86 - 2,701.\pi + 0,001.x - 0,029.y$$

ex qua deducitur

$$\pi = 8,46 + 0,0004.x - 0,011.y$$

seu pro x substituto eius valore

$$x = 17,47 - 0,168.y,$$

$$\pi = 8,47 - 0,011.y.$$

Simili modo ex contactibus externis habetur pro Sinu Hudsonis

$$\mu = +0,40 - 0,549.\pi - 0,090.x + 0,603.x$$

et pro insula Regis Georgii

$$\mu = -24,15 + 2,133.\pi - 0,091.x + 0,631.x.$$

ex quibus fit

$$0 = 24,55 - 2,682.\pi + 0,001\,x - 0,028\,y$$

vnde

$$\pi = 9,15 + 0,0004\,x - 0,011.y$$

seu

feu pro x eius valore fubftituto

$$\pi = 9,16 - 0,011.y.$$

Porro quia obferuationes contactuum internorum pro California dederunt

$$\nu = -10,38 + 0,783.\pi - 0,098.x + 0,654.y$$

hoc valore ifti aequato, qui pro infula Regis Georgii inuentus eft, habebitur

$$0 = 10,91 - 1,282.\pi - 0,002.x - 0,016.y$$

hincque

$$\pi = 8,51 - 0,0016.x - 0,0125.y$$

et pro x valore fubftituto

$$\pi = 8,48 - 0,012.y$$

Demum fi valores ipfius ν ex obferuationibus ad Sinum Hudfonis et Californiae inftitutis deductae inter fe aequentur, obtinebitur haec aequatio:

$$0 = 11,95 - 1,419.\pi + 0,003x - 0,013\ y$$

vnde

$$\pi = 8,42 + 0,0021.x - 0,0092.y$$

et pro x valore eius introducto

$$\pi = 8,46 - 0.0096.y.$$

Medium autem ex his quatuor determinationibus $\pi = 8,64 - 0,11.y$, cum fupra inuentis fatis bene conuenit. Nihilo minus tamen nullum eft dubium, quin determinatio ex contactibus externis deducta plus iufto a veritate difcrepet Quod autem e contra com-

comparatio contactuum internorum iusto minores praebeant valores Parallaxis, propter leuissimos errores obseruationum fieri potest, quum in aequationibus vnde π inuestigari debet, eius coefficiens sit admodum exiguus. Sic ex. gratia si supponatur durationem transitus inter binos contactus internos pro insula Regis Georgii $10''$ esse minuendam, pro Fortalitio autem Principis Walliae tantundem augendam, inde numerus absolutus in aequatione ex qua π eruitur, $+0,50$ augebitur, ita vt habeatur

$$0 = 23,36 - 2,701.\pi + 0,001.x - 0,029.y,$$

ex quo fiet

$$\pi = 8,66 - 0,011.y.$$

28. Propter incertitudinem contactuum externorum in Insula Regis Georgii obseruatorum, ex istis obseruationibus de vera quantitate diametrorum Solis et Veneris, nec non de correctione y, vix quicquam certi iudicare licebit, interim notasse iuvabit, si in aequationibus ipsorum $\mu+\nu$ et $\mu-\nu$ valores pro hoc loco exhibentibus, substituantur valores pro π et x inuenti prodire:

$$\mu+\nu = 2\lambda = -12,60 + 1,3065.y \text{ et}$$
$$\mu-\nu = -2,17 - 0,0404.y.$$

Combinemus vero potius valorem ipsius μ pro Sinu Hudsonis inuentum, cum valore ipsius ν pro Insula Regis Georgii, ex quo emerget:

$$\mu+\nu = -20,89 + 1,5154.\pi - 0,1861.x + 1,2729.y$$
$$\mu-\nu = +21,69 - 2,6140.\pi + 0,0061.x - 0,0665.y$$

 quae

quae expreſſiones introductis pro π et x ipſorum valoribus in ſequentes transformantur:

$$\mu + \nu = - 11,11 + 1,2951 . y$$
$$\mu - \nu = - 0,68 - 0,0518 . y$$

ex priori fit

$$y = 8,58 + 1,55 . \lambda$$

ex poſteriori autem

$$\mu - \nu = - 1,12 - \tfrac{1}{13} \lambda.$$

Quum autem ex obſeruationibus ad Sinum Hudſonis et Californiae inuentum ſit eſſe:

$$y = 9,00 + 1,56 . \lambda; \ \mu - \nu = - 0,68 - \tfrac{1}{13} \lambda$$
$$y = 8,71 + 1,55 . \lambda; \ \mu - \nu = - 0,94 - \tfrac{1}{13} \lambda$$

medio inter has tres determinationes ſumto, ſtatui poterit

$$y = 8,76 + 1.55 . \lambda \text{ et } \mu - \nu = - 0,91 - \tfrac{1}{13} \lambda.$$

29. Hinc quidem adhuc de vera latitudine Veneris Geocentrica nec non diametro Veneris, nihil concludi poſſe videtur, niſi valor litterae λ, ſeu correctionis, qua ſemidiameter Solis indiget, fuerit determinatus. Quum autem inter menſuras exactiſſimas diametri Solis in apogeo a Celeb. Viris *de la Lande* et *Short* inſtitutas, nonniſi $2\frac{1}{2}''$ diſcrepantia ſit, medio inter vtriusque menſuras capto, diametrum Solis $1\frac{1}{4}''$ diminuere licebit, ex quo habebitur $\lambda = - 0,62$. Hoc autem valore pro λ in aequationibus ſupra allatis ſubſtituto, prodit $y = 7'',8$ et

$\frac{\mu - \nu}{2}$

$\frac{\mu - \nu}{2} = - 0'', 43$, tum vero fiet $\mu = - 1, 05$ et $\nu = - 0, 19$. Quum igitur femidiameter Veneris fit $= 29'', 0 + \frac{\mu - \nu}{2}$ verus valor huius femidiametri erit $= 28'', 57$ ideoque totius diametri $= 57'', 14$ quod omnino concordare deprehenditur, cum menfuris huius diametri Micrometro obiectiuo a variis obferuatoribus inftitutis.

30. Quod autem correctionem attinet, quam pro latitudine Veneris inuenimus, non reticendum eft, eam multo magis dubiam videri, quum variae obferuationes ad diftantiam minimam centrorum Solis et Veneris determinandam inftitutae, probare videantur, correctionem latitudinis aliquanto minorem ftatuendam effe. Ad Sinum fcilicet Hudfonis haec diftantia inuenta eft $9'$, $54''$, vnde prodit vera diftantia minima $10'. 5'', 7$, ideoque correctio latitudinis $+ 1'', 4$. Noritoni in Penfyluania eadem diftantia inuenta fuit $10'. 3'', 1$, vnde vera diftantia minima $10'. 10'', 4$ et correctio latitudinis $+ 6'', 1$. Nouae Angliae a Celeb. *Winthorp* obferuata fuit diftantia minima $9'. 59'', 7$; vnde colligitur vera diftantia minima $10'. 7'', 8$ et correctio Latitudinis $+ 3'', 5$. Denique fuper Infula Regis Georgii diftantia minima inuenta eft $10'\ 25'', 4$, quae effectu Parallaxis correcta praebet veram diftantiam minimam $10'. 11'', 6$ ideoque correctionem Latitudinis $+ 7'', 3$. Caeterum infignis difcrepantia harum determinationum, ad earum certitudinem infringendam non parum valet, praeprimis quum aliae obferuationes ad diftantias centro-

rum Solis et Veneris explorandas institutae, indicare videantur distantiam minimam centrorum proxime statui posse $10'. 11''$, ideoque correctionem Latitudinis fere $7''$, quae tantum vnico secundo differt ab ea, quam obseruationes contactuum praebent. Hoc saltem audacter affirmare non dubitamus, nequaquam fieri posse, vt correctio Latitudinis infra $5''$ deprimatur.

31. Si iam in formula pro parallaxi inuenta $\pi = 8,60 - 0,00.6.y$ loco y eius valor $+ 7,8$ introducatur, prodibit verus valor *Parallaxeos Solis horizontalis* tempore Transitus Veneris per Solem $= 8'', 55$, correctio autem Longitudinis geocentricae hinc deducetur $= 16'', 15$, ex quo sequitur tempus coniunctionis Solis et Veneris $4'. 5''$ tardius incidere, quam in calculis nostris suppositum fuit.

Elementa igitur Astronomica correcta iam ita se habebunt:

Coniunctio vera Solis et Veneris contigit

1769. d. 3. Iunii $10^h. 11'. 44''$ Temp. Paris. medio
seu 10. 13. 57 Temp. vero

pro quo momento erat:

I. Longitudo Solis et Veneris	$2^s. 13°. 27'. 20''$
II. Latitudo Veneris Borealis	$10'. 18'', 8$
III. Parallaxis Solis horizontalis	$8'', 55$

pro distantia igitur Solis media habetur parallaxis eius horizontalis $= 8'', 68$, vnde distantia Solis media

dia 23753 ſemidiametris aequatoris terreſtris, proxime aequalis haberi poteſt. Notandum denique eſt, ſi correctio Latitudinis ſtatuatur tantum 5″ parallaxin Solis inueniri 8″, 57, id eſt $\frac{1}{7}$ ſec. diuerſam ab ea, quam adoptauimus, vnde tanto magis credere fas eſt, noſtram determinationem pro parallaxi vix viceſima parte vnius minuti ſecundi a veritate alienam eſſe.

32. Vnicum elementum, cuius verificationem adhuc ſuſcipere licet, eſt ipſa longitudo geographica loci ſuper inſula Regis Georgii, vbi obſeruatio peracta eſt, ſi enim ea qualis a nobis aſſumta fuit, multum a vera aberraret, ipſa quoque determinatio parallaxis ipſi ſuperſtructa aliquantum dubia redderetur. Vt autem veram longitudinem eruamus, valores ipſius ν pro hoc loco inuentos a ſe inuicem ſubtrahamus, quo facto prodibit haec aequatio:

$$0 = -20,95 - 0,2502.\pi + 1,4553.x + 0,2268.y + 0,0991.\theta.$$

In hac aequatione iam quidem ſtatim pro π, x et y valores abſolutos in §. praecedenti ſtabilitos introducere liceret, conſultius tamen duximus pro π et x valores ipſorum quantitate y adhuc adfectos ſubſtituere, vt appareat incertitudinem veri valoris pro y hoc negotium minime turbare. Hoc autem facto prodibit

$$0 = 2,32 - 0,0162.y + 0,0991.\theta$$

quum vero iam ſine vllo errandi periculo pro y

 ſub-

ſubſtituere liceat $+7'', 8$, fiet: $0 = 2, 19 + 0, 0991\,\theta$, vnde habetur $\theta = -22''$, ideoque vera Longitudo loci ſuper inſula Regis Georgii in quo obſeruatio facta, ſtatuenda eſt a meridiano Pariſino $10^h.\ 7'\ 22''$ ſeu in Gradibus $151°.\ 50'\ 30''$ Occid. Si valores ipſorum μ ſimili ratione a ſe inuicem ſubtrahantur, ſequens oritur aequatio:

$$0 = -21, 34 - 0, 2470.\,\pi + 1, 5236\,x + 0, 2351.\,y + 0, 1037\,\theta$$

Vnde pro π et x ſubſtituendo valores §. 22, fiet

$$0 = 3, 15 - 0, 0193.\,y + 0, 1037.\,y,$$

atque poſito iam $y = +7'', 8$; $0 = 3, 00 + 0, 1037.\,\theta$, vnde $\theta = -29''$. Medio igitur inter vtramque determinationem aſſumto ſtatuere liceret $\theta = -25''$, quum vero obſeruationes contactuum externorum, iis internorum multo incertiores ſint, priori concluſioni merito acquieſcimus cuius facti rationem, intra pluribus argumentis confirmare licebit.

Examen vlterius et verificatio concluſionum ſupra inuentarum.

33. Quum inter momenta contactuum internorum ſuper inſula Regis Georgii a tribus obſeruatoribus aſſignata, inſignis ſe prodat differentia, haud abs re erit diſquirere, quomodo parallaxis fuiſſet immutanda, ſi alia momenta contactuum internorum, quam quae in calculo adhibuimus; adoptare voluiſſemus. Quoniam vero momentum contactus

tactus interni a nobis in vſum vocatum ſit illud a Cel. *Solander* aſſignatum, quod medium quaſi tenet locum inter bina reliqua, dum momentum a Cel. *Green* notantum illud 7″ praecedere, momentum vero Cl. *Cook* 13″ ſequi inuenitur, liquet numerum abſolutum in aequatione pro ν, hinc eas ſubire mutationes, vt dum obſeruationi D. *Green* ſatisfaciendum ſit, is numerus $-31,31$ ſtatui debeat, pro obſervatione autem D. *Cook*. $-32,29$. Pro contactu interno circa egreſſum obſeruatio Cel. *Green* ab ea Cl. *Cook* 10″ differt, vt igitur poſteriori ſatisfiat, numerus abſolutus in aequatione pro ν ſtatui debet $-10,20$. Conſtituamus iam duas hypotheſes, quarum prima erit, ſi obſeruatio contactus interni D. *Green* pro ingreſſu combinetur, cum obſeruatione ſimilis contactus D. *Cook* pro egreſſu, altera vero ſi vice mutata obſeruatio D. *Cook* pro ingreſſu, cum obſeruatione D. *Green* pro egreſſu comparetur. Ex priori igitur fiet.

$$\nu = -20,87 + 2,0647.\pi - 0,0961.x + 0,6697.y$$

ex poſteriori autem

$$\nu = -21,62 + 2,0647.\pi - 0,0961.x + 0,6697.y$$

leues enim variationes, quae hinc in coefficientem ipſius y redundant omnino negligere licet. Si iam modo conſueto, hinc quaerantur valores ipſius x, facile patet pro priori hypotheſi omnes valores x I. Claſſis numero $-0,56$, claſſis audem II^{dae} numero $+0,55$ diminuendos eſſe, contra vero pro poſteriori hypotheſi valores x I. Claſſis numero $-0,41$ et II^{dae}

II^{dae} Classis numero $+ 0,43$ augendos esse, vnde hae resultabunt aequationes finales:

$$0 = 95,67 - 11,289.\pi - 0,090.y$$

$$0 = 97,65 - 11,289.\pi - 0,090.y$$

ex quibus deducuntur

$$\pi = 8,48 - 0,0050.y \text{ et } \pi = 8,65 - 0,0080.y$$

quarum determinationum media

$$\pi = 8,57 - 0,0080$$

bene conuenit cum ea, quae ex obseruationibus a nobis in vsum vocatis sequitur. Hinc iam tuto inferri posse videtur, nostrum valorem pro parallaxi inuentum eo magis pro certo habendum esse, quo certius liquet, quod dissensus obseruationum ad insulam Regis Georgii vix incertitudinem $\frac{1}{5}$ min. sec. pro parallaxi producere valeat.

24. Proximum iam est, vt in certitudinem momentorum pro contactibus externis assignatorum inquiramus, de quibus iam supra monuimus, quod erroribus haud contemnendis videantur obnoxia. Enimvero generatim quidem patet, si moram inter binos contactus internum et externum, tam pro ingressu quam egressu super insula Regis Georgii obseruatam consideremus eam, iusto minorem esse, quoniam non solum calculus ostendat, sed omnes quoque melioris notae obseruationes comprobent, durationem inter binos contactus pro ipso centro telluris 18'. 40'' minorem statui non debere. Quum igitur pro insula modo dicta effectus parallaxeos fuerit negatiuus, ideoque totus

totus tranfitus propius ad coniunctionem ibi fit obfervatus quam ad centrum telluris, manifeftum redditur pro hoc loco moram Veneris inter duos contactus internum et externum, faltem $18', 40''$ fuiffe debere aequalem, quum tamen pro egreffu non nifi ad $18'. 11''$ affurgat. Ex hoc tamen ratiocinio nondum inferre licet, vtrum principalis error in obfervationibus contactuum externorum, an forfan potius internorum lateat? Quum vero obferuationes contactuum internorum, egregie conueniant cum illis ad finum Hudfonis inftitutis, fufpicandi omnino rationem habemus, in contactibus externis errorum fontem potiffimum quaeri debere.

35. Vt id ipfum nunc magis directe oftendamus, comparationem inftituamus, binorum valorum pro ν ex contactibus internis inuentorum, cum iis, quos pro binis aliis locis ex obferuatione ingreffus et egreffus elicuimus, et inde quaeramus valorem ipfius θ, quodfi enim ifte valor ex fingulis his comparationibus proxime idem prodierit, id manifefto haberi debet indicio, momentis contactuum internorum, graues errores ineffe non poffe. Ex obferuatione contactus interni Grenouici a Cel. *Maskelyne* facta, hanc elicuimus aequationem:

$$\nu = 5,06 - 2,5008.\pi + 0,6477.x + 0,7619.y$$

cum qua fi valores ipfius ν pro infula Regis Georgii inuenti combinentur, hae duae prodibunt aequationes:

$$0 = +36,71 - 4,4417.\pi + 0,0242.x - 0,0259.y - 0,0490.\theta$$

 o = +

$$0 = +15,76 - 4,6919.\pi + 1,4795.x + 0,2069.y + 0,0501\ \theta.$$

In vtraque pro π et x introducantur valores §. 22. assignati, vnde in has transformabuntur:

$$0 = -1,07 - 0,0034.y - 0,0490.\theta$$

$$0 = +1,35 - 0,0136.y + 0,0501.\theta$$

tum vero posito $y = +8''$, erit

$$0 = -1,10 - 0,049\theta \text{ et } 0 = +1,24 + 0,050\theta$$

ex priori fit $\theta = -22''$, ex posteriori autem $\theta = -25''$, adeo vt vix maior consensus exspectari potuerit. Obseruatio contactus interni pro egressu a Cel. Prof. *Lowitz* in Gurief facta hanc praebet aequationem:

$$\nu = 29,29 - 2,2752.\pi - 0,8595.x + 0,5110.y$$

vbi notandum est, numerum absolutum huius aequationis p. 442. P. II. Tom. XIV. Nov. Comment. allatum, in praecedentem esse immutatum, quum probabile sit Longitudinem oppidi Gurief a Parisiis esse paulo minorem ea, quae ibi assumta fuit. conf. Tom. XV. Nov. Comment. p. 638. Combinatis nunc valoribus ν pro insula Regis Georgii cum Guriefuensi, hae prodibunt aequationes:

$$0 = 60,94 - 4,2161.\pi - 1,4830.x - 0,2768.y - 0,0490.\theta$$

$$0 = 39,99 - 4,4663.\pi - 0,0277.x - 0,0440.y + 0,0501.\theta$$

ex quibus dum pro π et x valores substituuntur, prodit:

0 = −

$o = -1,23 - 0,0008.y - 0,049.\theta$ ſeu
$0,049\,\theta = -1,24$ et
$o = +1,10 - 0,0126.y + 0,050.\theta$ ideoque
$0,050\,\theta = -1,00$

ex priori deducitur $\theta = -25''$ ex poſteriori vero $\theta = -20''$, quae concluſiones optime quoque inter ſe conſentiunt. Hoc autem ratiocinio, non ſolum certitudo obſeruationum in inſula Regis Georgii factarum comprobatur, ſed valor quoque parallaxis a nobis aſſumtus haud mediocriter ſtabilitur, vt taceam correctionem Longitudinis Geographicae pro hoc loco inuentam eodem argumento quaſi extra omne dubium poni.

36. Ad ſimile examen obſeruationes contactuum externorum iam quoque reuocaturi ſumus, quum autem ex iisdem ſi veritati ſupponantur congruae aliquanto maior ſequatur parallaxis ea, quam pro vera aſſumſimus; ne proinde nobis obiici queat vim ratiocinii noſtri plane corruere, ſi alia ſupponatur parallaxis, inter valores ipſius x ex contactibus externis §. 7 et 14. deductos, deſtinato conſilio binos elegimus, qui inter ſe combinati maximum praeberent valorem parallaxis. Tum vero inuenimus pro parallaxi

$\pi = 9,04 - 0,0073.y$ indeque
$x = 17,77 - 0,168.y.$

His igitur valoribus tantisper pro veris aſſumtis, quaeramus qualis ſtatui debeat correctio Longitudinis

Geographicae pro insula Regis Georgii, quum vero ex contactibus externis supra §. 32. inuenerimus

$$o = -21,34 - 0,2470.\pi + 1.5236.x + 0,2351.y + 0,1037.\theta$$

si heic pro π et x valores supra traditi substituantur, prodibit:

$$o = +3,50 - 0,0191.y + 0,1037.\theta,$$

ideoque pro y ponendo $+8;3,35 = -0,1037.\theta$, vnde habetur $\theta = -32''$.

Facta iam combinatione valorum μ pro insula saepius dicta inuentorum cum eo, quem ex obseruatione Grenouicensi deduximus, vtroque modo obtinebimus $\theta = -32''$, quod autem eam imprimis ob caussam fieri debet, quia valor x prioris classis, vnde quantitatem parallaxeos determinauimus ex ipsa obseruatione Grenouicensi erat deductus. Combinemus igitur valores μ pro insula Regis Georgii cum valore huius litterae deducto ex contactu externo Wardhusii obseruato, quoniam longitudo Geographica pro Wardhus satis exacte videtur esse determinata. Quum igitur obseruatio R. Pat. Hell praebuerit:

$$\mu = 22,52 - 1,567.\pi - 0,883.x + 0,469.y$$

inde hae binae eliciuntur aequationes:

$$o = 57,25 - 3,578.\pi - 1,548.x - 0,278.y - 0,0514\,\theta \text{ et}$$

$$o = 35,91 - 3,824.\pi - 0,024\,x - 0,043.y + 0,0523\,\theta$$

ex priori fit

$$0 = -2,60 + 0,009 . y - 0,0514 . \theta \text{, seu}$$

$$0 = -2,53 - 0,0514 . \theta$$

ex posteriori autem

$$0 = +0,91 - 0,011 , y + 0,0523 \, \theta \text{ siue}$$

$$0 = +0,82 + 0,0523 \, \theta$$

prior igitur dabit $\theta = -49''$, posterior vero $\theta = -16''$, quorum valorum dissensus omnino tantus est, vt eius rationem nullo modo reddere valeamus, nisi supponere velimus in momentis contactuum ad insulam Regis Georgii obseruatis, insignes latere errores.

27. Nunc itaque quum elementa a nobis §. 31 stabilita, satis extra dubium collocata esse videantur, si eorum fiat substitutio in valoribus pro μ et ν inuentis, singularum obseruationum aberrationes, saltem quam maxime probabiles assignare poterimus. Si enim verum tempus vniuscuiusque contactus ponatur aequale momento obseruato $- \tau''$, valor ipsius τ facile determinari potest, quippe quum litteris θ et τ idem conueniat coefficiens. Quadruplicis autem generis obseruationes, numeris maioribus I. II. III. IV. inter se distinguentes, quemadmodum in P. II. Tom. XIV. Nov. Comment: p. 483 factum est, sequentes adepti sumus valores ipsorum τ.

I. Pro Insula Regis Georgii longitudine supposita $10^h. 7'. 22''$ versus Occid. a Parisiis.

	Moment. obseru.	Moment. ver.
I. $\tau = +21$	$21^h. 25'. 40''$	$21^h. 25'. 19''$
II $\tau = -\ 5$	44. 2	44. 7
III. $\tau = +\ 4$	$3^h.$ 14. 3	$3^h.$ 13. 59
IV. $\tau = -34$	32. 14	32. 48

II. Pro arce Principis Walliae ad Sinum Hudsonis longitudine supposita $6^h. 26'. 20''$

	Moment. obseru	Moment. ver.
I. $\tau = +1$	$0^h. 57'. 3''$	$0^h. 57'. 12''$
II. $\tau = +7$	1. 15. 24	1. 15. 17
III. $\tau = -2$	7. 0. 47	7. 0. 49
IV. $\tau = -1$	19. 21	19. 22

III. Pro castello Sti Iosephi in California supposita Longitudine $7^h. 28'. 8''$.

	Moment. obseru.	Moment. ver.
I. $\tau = +1$	$0^h. 17'. 27''$	$0^h. 17'. 26''$
II. $\tau = -4$	5. 54. 50	5. 54. 54

38. Vt de exactitudine et praecisione valoris, quem pro parallaxi Solis adoptauimus, eo accuratius ferri queat iudicium, inquirendum erit quales errores in variis obseruationibus supponi deberent, vt parallaxis data aliqua quantitate fieret maior. Si enim

enim hi errores euadant praegrandes, inde certo inferre licebit, parallaxin ad eum valorem increſcere non poſſe. Quum igitur aequatio ex qua pro inſula Regis Georgii contactibus internis adhibitis, valorem ipſius π deriuauimus ita ſe haberet:

$$0 = 96,78 - 11,289.\pi - 0,090.y$$

liquet pro parallaxi $9''$, numero abſoluto huius aequationis augmentum circiter 4, 86 tribuendum eſſe, vnde ſi haec correctio per valores x vtriusque claſſis aequaliter diſtribuatur, patet numeris abſolutis prioris claſſis addi debere $-2,43$ poſterioris vero $+2,43$. Quodſi nunc rationem errorum ſolum in obſeruationibus inſulae Regis Georgii quaerere vallemus, numerus abſolutus in aequatione valorem littarae ν pro hoc loco exhibente, augeri deberet in ratione $\frac{3}{4}$ numeri $-2,43$, id eſt incrementum caperet $= -1,82$, quam ob rem ſi denuo hic error aequaliter per vtrumque contactum internum diſtribuatur, habebimus pro contactu interno in ingreſſu $-1,82 = 0,049.\tau$ ſeu $\tau = -37''$, pro contactu vero interno in egreſſu $+1,82 = +0,050.\tau$ ſeu $\tau = +36''$, qui errores omni deſtituuntur veriſimilitudine. Sin vero parallaxis adeo ſupponeretur eſſe $10''$, vnde correctio numeri abſoluti prodiret $= 16,11$, ſi ea correctio tantum ex erroribus obſeruationum ſuper inſula Regis Georgii deriuanda eſſet, ad valorem litterae ν addi deberet $-6,04$, ex quo haberentur pro erroribus obſeruationum hi valores II. $\tau = -2'.5''$ et III. $\tau = +2'$, quod

non

non ſolum non probabile, ſed ne poſſibile quidem eſſe quiuis facile agnoſcet. Si vero ſub hypotheſi parallaxis $9''$, errorum diſtributio aequaliter fieri deberet, per omnes obſeruationes, tum pro obſeruationibus quidem in Europa factis, hos ſtatuere neceſſum eſt errores II. $\tau = +18''$ et III. $\tau = -18''$ pro obſeruationibus autem inſulae Regis Georgii II. $\tau = -18''$ et III. $\tau = +18''$. Senſus autem huius noſtri aſſerti non is eſt, quaſi inde ſequeretur, ſingulis obſeruationibus Europeicis tales errores tribuendos eſſe, quum ex ipſa rei natura perſpicuum ſit, alias plus alias vero minus a veritate deflectere poſſe, ſed ita interpretandus eſt, quod ſumma omnium errorum, quibus hae obſeruationes afficiuntur, tanta ſit, vt ſi omnes aeque aberraſſent, ſingula momenta contactuum internorum pro ingreſſu $18''$ accelerari debuiſſent, momenta autem contactuum internorum pro egreſſu tantundem retardari. Quum autem obſeruationum Europeicarum inſignem ſatis numerum conſuluerimus, in omnes probabilitatis regulas impingeret, qui credere vellet tantam aberrationem harum obſeruationum poſſibilem eſſe. Maxima vero abſurda quae ex hypotheſi parallaxis $10''$ ſequerentur, inutile eſt vt commemorem.

39. Id quod iam generatim quidem oſtendi, exemplis quoque ſpecialibus confirmare haud pigebit. Supra vidimus ex combinatione valorum ν pro Grenouico et inſula Regis Georgii, hanc deduci aequationem:

$o = 36,$

$$0 = 36,71 - 4,4417.\pi + 0,0242.x - 0,0259.y - 0,049 (\tau + \theta)$$

vbi ſi pro θ ſubſtituatur valor inuentus $-22''$, aequationi inde reſultanti

$$0 = 37,79 - 4,4417.\pi + 0,0242.x - 0,0259.y - 0,049.\tau$$

proxime ſatisfiet adhibitis pro π, x et y valoribus a nobis ſtabilitis, ita vt ſit τ quam proxime $= 0$. Si nunc ſupponamus parallaxin ſtatuendam eſſe $9''$, inuenietur correctionem numeri abſoluti poni debere $= 2,00$, ita vt prodeat $-0,049.\tau = 2,00$, ideoque $\tau = -41''$, deſignat autem τ ſummam correctionum pro binis momentis obſeruatis. Pro parallaxi vero $10''$ numerus abſolutus aequationi noſtrae addendus, eſſet $= 6,44$ vnde $\tau = -132'' = -2'.12''$. Similis combinatio ſi inſtituatur cum valore ν deducto ex obſeruatione Cel. *Meſſier* Pariſiis facta, haec orietur aequatio:

$$0 = 37,49 - 4,446.\pi + 0,024.x - 0,020.y - 0,049.\tau$$

pro qua valores noſtros litterarum π, x et y in vſum vocando inueniemus $\tau = -6''$. Poſita nunc parallaxi $9''$, euidens eſt numero abſoluto adhuc addi debere $2,00$ ideoque ex hoc capite prodire $\tau = -41''$, vnde totus valor ipſius τ ad $-47''$ aſſurget, pro parallaxi autem $10''$, ſumma errorum vsque ad $-2'.18''$ increſceret. Conſideremus nunc etiam obſeruationem quandam contactus interni pro egreſſu et Gurjeſuenſi in vſum vocata habebimus vt ſupra §. 35.

 $0 =$

$$0 = 39,99 - 4,4663.\pi - 0,0277.x - 0,0440.y + 0,0501 \, (\theta + \tau)$$

vel poſito $\theta = -22''$

$$0 = 38,89 - 4,4663.\pi - 0,0277.x - 0,0440.y + 0,0501.\tau$$

cui aequationi valores noſtri pro π, x et y certe ſatisfacient, ſuppoſito tantum $\tau = -3$; at ſi parallaxis eſſet $9''$, ad numerum abſolutum denuo 2, 01 eſſent addenda, ex quo iam fieret $\tau = +40''$, ideoque iunctim $\tau = +37''$. Sed quid opus eſt plura huiusmodi exempla cumulare, quum haec abunde ſufficere queant, ad euincendum, quod quantitas parallaxis Solaris nullo modo vsque ad $9''$ augeri poſſit.

40. Quum vti ſupra notauimus Aſtronomi Angli ſuper inſula Regis Georgii, diſtantiam quoque minimam centrorum Solis et Veneris obſeruauerint, occaſio hinc nobis datur examinandi, quo in pretio huiusmodi obſeruationes haberi debeant ad parallaxin Solis determinandam. Primum igitur videamus qualem obſeruatio modo memorata praebeat parallaxin, ſi cum diſtantiis minimis, ad Sinum Hudſonis, Noritoni et nouae Angliae captis conferatur. Expreſſiones autem verae diſtantiae minimae pro his locis ita erunt comparatae:

Diſtantia minima	pro
$9' \; 54'' + 1,361.\pi$	Hudſons Bay
$10'. \; 3'' 1 + 0,857.\pi$	Noriton
$9. \; 59,7 + 0,946.\pi$	Neu-England
$10. \; 25,4 - 1,627.\pi$	King Georg Eyland.

Ex

Ex comparatione autem vltimae cum reliquis deducitur $\pi = 10, 51$ vel $\pi = 8, 98$ vel $\pi = 9, 97$. Infignis diffenfus, qui inter has determinationes fe prodit, eas iam admodum quidem dubias reddit, ne autem nimis praecipitanter iudicium tuliffe videamur, confiderare tantum placet, quid error vnius minuti fecundi, ad has conclufiones immutandas valeat. Supponamus igitur pro vltimo loco diftantiam minimam obferuatam vno minuto fecundo imminui debere, inueniemus autem tum pro π fequentes valores $+ 10, 17$, $+ 8, 58$ et $+ 9, 57$. Quid autem fi haec diftantia duobus vel tribus fecundis diminuenda fit vel potius quod probabilius videtur eae pro Hudfons Bay et noua Anglia tantundem augendae? Huiusmodi autem errores dum de menfuris diftantiarum quaeftio eft, vix euitari poffe contendo, quamuis lubenter concedam micrometris obiectiuis, omnem quae defiderari poteft tribuendam effe exactitudinem. Hoc enim in negotio, quum difficillimum omnino effet, inftrumento eam conciliare pofitionem, in qua recta per centra Veneris et Solis tranfiens etiam per contactum imaginum tranfiret, fieri omnino potuit vt diftantia limbi Veneris a limbo Solis iufto maior fit inuenta. Hoc faltem ex pluribus obferuationibus fuper diftantiis marginum Solis et Veneris factis edoctus fum, in iisdem capiendis, errores 3, 4 quin et adeo $5''$ committi poffe, cur autem huiusmodi operatio pro diftantia minima marginum menfuranda ab omni errandi periculo effe deberet immunis nullam per-

Mmmm 2 fpiceſpicere valeo rationem. De his autem alia occaſione fuſius agere forſan licebit, poſtquam plures diſtantiarum menſuras calculo ſubieccrimus. Interim ſi fuerint, qui ex obſeruationibus diſtantiarum minimarum, parallaxin 9″ maiorem deriuare ſategerint, ab illis merito poſtulare licebit, vt ſufficientem ſequentis quaeſtionis ſolutionem reddant: *cur probabilius ſit in obſeruationibus contactuum internorum a quinquaginta vel pluribus obſeruatoribus inſtitutis, errores ad 20″ vel adeo ad 30″ aſſurgentes ſtatuendos eſſe, quam in binis obſeruationibus diſtantiarum minimarum micrometro captis errores 3 vel 4 ſecundorum ineſſe poſſe?*

41. Quoniam compertum habemus plurimos in ea eſſe ſententia, atmoſphaeram Veneris, aliquid efficere valuiſſe, ad durationem tranſitus imminuendam, neceſſum quoque duximus, quid ea de re cogitemus breuiter exponere. Primum vero obſeruamus de hoc effectu nihil tuto iudicari poſſe, niſi tam correctio latitudinis pro Venere quam Semidiametri Solis exacte fuerit determinata. Vt autem hypotheſin eligamus effectui atmoſphaerae fauentem, ponamus correctionem latitudinis eſſe tantum 5″, adeo vt ſit valor litterae $y = 5$, quum igitur inventum ſit eſſe

$$y = 8,76 + 1,55 . \lambda \text{ et } \mu - \nu = -0,91 - \tfrac{1}{13}\lambda,$$

hinc

hinc deducitur

$$\lambda = \frac{\mu + \nu}{2} = -2,43 \text{ et } \frac{\mu - \nu}{2} = -0,37,$$

vnde

$$\mu = -2,80 \quad \text{et } \nu = -2,06.$$

Ponamus iam ſemidiametrum Solis eſſe $= 947''$ vt ex menſuris Cel. *de la Lande* ſequitur, ſemidiametrum autem Veneris $= 28'', 6$ et pro contactu externo habebimus diſtantiam centrorum $975'', 6$, pro contactu autem interno $= 918'', 4$, quum autem ex calculis noſtris pro contactu externo ſit $= 976'' + \mu = 973'', 20$, et pro interno $918'' + \nu = 915'', 94$; euidens hinc fit effectum refractionis ſub hac hypotheſi pro contactu externo eſſe $-2,4$ et pro interno $-2,5$ circiter. Hinc autem deduceretur, ob effectum refractionis, contactum externum $46''$, internum vero $50''$ ad tempus coniunctionis appropinquari. Si vero magis placuerit cum Aſtronomis Anglis diametrum Solis ſtatuere tantum $= 945'', 5$ effectus refractionis pro contactu externo erit $= -0,90$ et pro contactu interno $= -0,96$, ideoque contactus externus hinc $17''$, internus vero $19''$ verſus tempus coniunctionis promouebitur. Ex his igitur liquet adhuc dum nihil certi de effectu atmoſphaerae Veneris pronuntiari poſſe, imprimis quum nondum ſufficientes praeſto ſint rationes, ex quibus concludere poſſemus valorem litterae y multum infra $7', 8$ deprimi debere. Per ſe autem patet valores a nobis aſſumtos litterarum y, μ et ν ita eſſe

Mmmm 3 compa-

comparatos, vt effectui ex atmosphaera Veneris orituro nullus relinquatur locus, nisi forsan valor semidiametri Solis aliquantum immutandus esset. Negare quidem non volumus Venerem atmosphaera praeditam esse, vtrum vero haec atmosphaera sensibilem exserere valeat effectum, ad ipsam durationem transitus imminuendam, quaestio est, de qua nimis praeceps fertur iudicium, antequam certissimis rationibus euictum sit, quinam valores latitudini Veneris Geocentricae atque diametris Solis et Veneris reapse competerunt.

42. Quisquis argumenta nostra, quibus inducti parallaxin Solis horizontalem pro tempore transitus A. 1769, 8″, 55 esse collegimus, rite examinare et ponderare voluerit, facile nobis concedet hanc determinationem a veritate multum deflectere non posse. Quamuis igitur diffiteri nolim, hunc valorem correctionem vnius vel alterius partis centesimae secundi admittere posse, pro certo tamen persuasum mihi habeo, veram quantitatem parallaxeos Solis horizontalis pro tempore transitus, intra limites 8″, 4 et 8″, 6 contineri, adeo vt vtcunque res ceciderit, nostra determinatio vltra partem decimam minuti secundi a veritate aberrare nequeat. Quicquid vero de hac incertitudine sit, euidenter satis patet, eam vllis defectibus Methodi a nobis in vsum vocatae adscribi non posse, quum in excellentissima hac Methodo, ad omnes correctiones latitudinis et longitudinis Veneris Geocentricae, nec non diame-

diametrorum vtriusque aſtri, ſcrupuloſe attentio facta ſit, ſecus omnino ac fieri ſolet in Methodis ab Aſtronomis communiter receptis, dum ex duarum eiusdem nominis obſeruationum comparatione parallaxin Solis eruere conantur, correctionibus modo dictis plane neglectis. Ne autem haec gratis affeꝛuiſſe videamur, combinemus inter ſe valores pro ν deductos ex contactu interno pro ingreſſu Stockholmiae et ſuper inſula Regis Georgii obſeruato.

Pro priori loco habetur

$$\nu = 4,25 - 2,4700.\pi + 0,6514.x + 0,7587.y$$

pro poſteriori autem

$$\nu = -32,73 + 1,9409.\pi + 0,6235.x + 0,7818.y$$

ſubtracto igitur hoc ab illo oritur

$$0 = 36,98 - 4,4109.\pi + 0,0279.x - 0,0231.y.$$

Si nunc methodo apud Aſtronomos conſueta, valores correctionibus x et y affectos plane negligamus, habebitur $\pi = 8'', 38$, quum tamen valoribus ipſorum x et y in vſum vocatis prodire deberet $= 8'',45$. Multo autem maiores diſſenſus metuendi ſunt, cum coefficiens ipſius π non adeo fuerit inſignis ac in exemplo allato. Sic facta comparatione valorum ν ex contactu interno circa egreſſum ad ſinum Hudſonis et ſuper dicta inſula Regis Georgii obſeruato, haec inuenietur aequatio:

$$0 = 17,13 - 1,9496.\pi - 0,0267.x - 0,0423.y$$

vnde

vnde neglectis x et y oritur $\pi = 8'', 79$, iis vero in computum ductis $\pi = 8'', 40$. Quamuis vero neuter horum valorum veritati exacte congruat, inde minime tamen inferre licebit, ſine vllo errore quantitates correctionibus x et y affectos negligi poſſe, quum errores obſeruationum in cauſſa ſint, cur genuina etiam Methodo adhibita valor inueniatur parallaxeos, a veritate nonnihil diſcrepans.

ELEMEN-

ELEMENTA ASTRONOMICA THEORIAE VENERIS DEDVCTA EX OBSERVATIONE TRANSITVS VENERIS SVB SOLE AD SINVM HVDSONIS, CALIFORNIAE ET IN INSVLA REGIS GEORGII INSTITVTA.

Auctore

W. L. KRAFFT.

§. 1.

Obſeruationes coniunctionum eclipticarum Veneris cum Sole, praeter principalem ſuum in definienda parallaxi Solis horizontali vſum, etiam cognitionem motuum huius planetae inſigniter perficiunt. Summi enim in Veneris theoria momenti elementa aſtronomica, tempus verum coniunctionis, longitudo et latitudo Veneris geocentrica, diſtantia centrorum minima, locus nodi lineaeque nodorum motus annuus, ex iis ſumma cum praeciſione deriuantur, diametri quoque Veneris adparentis vera quantitas per ingreſſus in diſcum ſolarem vel ex eodem egreſſus moram tanta cum exactitudine poteſt definiri, quantam ex dimenſionibus micrometro vulgari captis obtinere vix licet. Inprimis autem his diſquiſitionibus idoneae ſunt obſeruationes illorum locorum, vbi totam tranſitus durationem conſpicere licuit, ex quibus quippe subtensae a Venere in Solis disco percursae tota longitudo immediate innotescit. Cum itaque Veneris anno 1769 in Sole visae tres istiusmodi completae obseruationes ad Academiam sint transmissae; eas pro stabiliendis istis elementis hic ad examen reuocare placuit.

§ 2. Ante omnia haec inuestigatio summam in assignandis motibus Veneris horariis praecisionem postulat, quandoquidem ex iis orbitae apparentis inclinatio definitur. Cum itaque ad tempus coniunctionis sit Veneris anomalia media $10^s. 4^\circ. 42'. 15''$; excentrica $10^s\ 5^\circ\ 1'. 54''$; vera $10^s. 5^\circ. 21'. 30''$; motus Veneris horarius medius ex eius reuolutionibus cognitus $4'. 0''. 32$; motus denique horarius Solis $2'. 23''. 50$; isti motus secundum methodum a Cel. *La Lande* in Comment. Acad. Parisinae anni 1761. expositam computati ita deprehenduntur expressi:

Motus Veneris horarius heliocentricus.

in orbita . . .	$3'. 58''. 40.$	Inclinatio orbitae Veneris relatuae $8^\circ\ 28'. 54''$ Motus ♀ horar. in orbita apparente $95''. 52.$
in ecliptica . .	$3'\ 57''. 98$	
in latitud.	$14''\ 09.$	
a Sole	$94''. 48.$	

Ex his motibus in ratione distantiarum Veneris a terra et sole auctis colliguntur

Motus horarii geocentrici.

in ecliptica	$3'. 57''. 54$
in orbita relatua . . .	$4'. 0''. 16$
in latitudinem	$35''. 42.$

§. 3.

§. 3. Conſtitutis his, pro ſingulis obſervationum momentis effectus parallaxis ſolis in accelerando vel retardando contactu viſo ab eo, qui pro ſpectatore in centro telluris conſtituto locum haberet, ſunt indagandi; quos in hypotheſi parallaxis ſolis horizontalis = 8″. 55 vna cum temporibus veris ſingularum obſeruationum ſubiuncta tabula repraeſentat.

I. Ad Sinum Hudſonis.

	Temp. ver.	Effectus parall.	ergo pro centro terrae
Cont. I.	$0^h. 57'. 1''$	$3'. 46''. 8$ Accel.	mora ingreſſus $18'. 50''$
.... II.	$1^h. 15'. 25''$	$4'. 12''. 9$ — —	— — egreſſus $18'. 43''$
... III	$7^h. 0'. 49''$	$0'. 39''. 4$ — —	duratio totius tranſitus
... IV.	$7^h. 19'. 21''$	$0'. 50''. 9$ — —	inter contactus internos
			$5^h. 41' 50''$.

II Pro California.

Cont. II.	$0^h. 17'. 27''$	$0'. 17''$ 2 Accel.	duratio tranſitus
... III.	$5^h. 54'. 50''$	$4' 49''. 9$ — —	$5^h. 41'. 55'', 7$

III. Pro Inſula Regis Georgii.

Cont I.	$21^h. 25'. 40''$	$5'. 33''$ 4 Retard.	mora ingreſſus $18' 19''$
... II.	$21^h. 44'. 2''$	$5'. 36''. 4$ — —	— — egreſſus $18'. 5''$
... III.	$3^h. 14'. 3''$	$6'. 17''. 5.$ Accel	duratio tranſitus
... IV.	$3^h. 32'. 14''$	$6'. 11''. 7.$ — —	$5^h. 41'. 58''$

§. 4. Principio igitur vt ex his obſeruationibus ſemidiameter Veneris adparens, in ſequentibus viui futura, innoteſcat; ſtatuatur centrorum Veneris et Solis diſtantia minima $= 607''$, qualis ex tabulis Hallejanis reperitur. Hac aſſumta, et poſita Veneris ſemidiametro $= 32''$, quae eſt maxima eius quantitas, quam aliquot Cel. Abbatis de *Chappe* obſeruationes anno 1761 Tobolski inſtitutae dederunt, mora ingreſſus vel egreſſus geocentrica deprehenditur $20'. 51''$; quae ſi cum mora ex ſingulis obſeruationibus deducta comparetur, prodit

ex obſeruatione		ſemidiam Veneris
Ad ſinum Hudſonis	per ingreſſum . . .	$28''.90$
	per egreſſum	$28''.73$
In inſula Reg. Georgii	per ingreſſum . . .	$28''.11$
	per egreſſum . . .	$27''.75$
	Medium	$28''.39.$

Verumtamen cum in vltima hac obſeruatione mora egreſſus $18'. 5''$ nimis parua ſit; ea errorem in alterutro contactu obſeruato arguere videtur; et cum inſuper etiam de contactu externo in ingreſſu non leuis ſit dubitandi ratio, aliunde ſeſe manifeſtans; ſumto ex duabus prioribus determinationibus medio, ſemidiameter Veneris tutius ſtatuitur $28''\ 8$; quae inſuper, quando diſtantia centrorum minima adcuratius innotuerit, etiam maiori cum praeciſione poterit definiri.

§. 5. Cum igitur ſolis ſit ſemidiameter $= 15'\ 47''\ 0$ erit ſemidiametrorum differentia $918''. 2$. Dimidia autem duratio tranſitus geocentrici inter contactus internos in prima obſeruatione $2^h. 50'. 55''$ ope

ope motus horarii Veneris in orbita relatiua in partes circuli conuersa praebet semichordae a Venere in disco Solis descriptae longitudinem seu idiametro Veneris minutam 11'. 24''. 1, vnde colligitur longitudo perpendiculi ex centro ☉ in istam subtensam ducti seu distantia centrorum minima

Ex obseru I. per contact. internos . . . 10'. 12''.4

et simili calculo

Ex obseru. I. per contact. externos . . . 10'. 13''.0
Ex obseru. II. . . . . intern. . . . . 10'. 12''.3
Ex obseru. III. . . . . intern. . . . 10' 12''.2
- - - - III. . . . . extern. . . . 10'. 15''.9

quae vltima determinatio cum a ceteris 3'' discrepet, in contactu alterutro externo obseruato errorem arguit; vnde statuere licet distantiam centrorum minimam = 10'. 12''. 5. Hac igitur posita, reperitur, si semidiameter Veneris foret 32'', mora ingressus vel egressus geocentrica = 20'. 58''; vnde ex his obseruationibus colligitur, sumto medio, Veneris semidiameter apparens = 28''. 6. hincque diameter eius in distantia aequali distantiae mediae Solis a terra = 16''. 5. Posita ergo parallaxi Solis horizontali pro tempore harum obseruationum = 8''. 55 adeoque pro distantia Solis media = 8''. 68; qualis quippe ex calculis tam in praecedenti, quam in hoc Tomo Commentariorum summa cum praecisione est definita; colligitur ratio voluminum Veneris et terrae 8586 : 10000; de qua quantum inter se dissenserint Astronomi, videre licet

 cet

cet in Comment. Acad. Parisinae anni 1762. pag. 261 et 491.

§ 6. Per hanc distantiam centrorum minimam et angulum inclinationis orbitae apparentis $= 8°. 28'. 54''$ statim reperitur pro ipso coniunctionis momento Latitudo Veneris geocentrica $10'. 19''. 4$; et distantia inter punctum coniunctionis et medii transitus $1'. 31''. 3$ siue in tempore $22'. 49''\ 5$; quibus a tempore vero medii transitus geocentrici subtractis colligitur

Tempus verum coniunctionis sub meridiano obseruatorii.

Ad sinum Hudsonis . . . . . . $3^h. 47'. 44''$

In California . . . . $2^h. 45'. 51''$

In Insula Regis Georgii . . $0^h. 6'. 35''$.

Obseruatorii Cel. *Abbatis de Chappe* in California Longitudo a Lutetiis Parisiorum in nouellis publicis assignata est $7^h. 28'. 17''$ versus occidentem; Non quidem constat, ex qualibus obseruationibus ea sit deducta; supposito tamen, eam, ne circulus committatur, non esse ex ipsa Veneris obseruatione computatum eamque tantisper pro vera assumendo, colligitur coniunctionis ♀ cum ☉ 1769. Iun. 3.

Tempus verum Parisinum . . . . $10^h. 14'. 8''$

Temp. med. . . . . $10^h. 11'. 55''$

atque hinc differentia meridianorum a Parisiis

Arcis

Arcis Principis Walliae . . . . . $6^h. 26'. 24''$
Obſeruatorii in inſ. Georgii . . . $10^h. 7'. 33''$.

§. 7. Reperitur iam, his conſtitutis, ex tabulis Cel. *de la Caille* pro ipſo coniunctionis momento longitudo Veneris geocentrica $= 2^s. 13^\circ 27'. 21''$. Latitudo vero geocentrica ſupra inuente $= 10' 19''. 4$ Latitudinem praebet heliocentricam $= 4'. 6''$ hinc ob inclinationem orbitae ad eclipticam $= 3^\circ. 23' 20''$ concluditur arcus heliocentricus inter punctum Nodi et coniunctionis $= 1^\circ. 9'. 20''$; ex quo pro tempore coniunctionis prodit Longitudo heliocentrica Nodi deſcendentis $8^s. 14^\circ. 36'. 41''$, per quem Venus tranſiit Iun. $4^d. 3^h. 40'. 55''$ temp. Pariſino medio.

§ 8. Ex Latitudine Veneris geocentrica $9'. 37''$, in tranſitu eius per Solem anno 1761. obſeruata inueni eius a Nodo diſtantiam $1^\circ. 3'. 46''$; hinc cum ſecundum calculos Cel. *de la Lande* (Mem. de Paris 1761. pag. 336.) momento coniunctionis fuerit Veneris Longitudo heliocentrica $8^s. 15^\circ. 36'. 11''$, concluditur Longitudo Nodi deſcendentis $8^s. 14^\circ. 32'. 25''$. Hoc ergo temporis interuallo, quod eſt $7^{an.\,comm.} + 362^d. 16^h. 22'$, motus lineae Nodorum Veneris deprehenditur $4'. 16''$; vnde prodit motus annuus reſpectu aequinoctiorum $32''. 03$; ſiue $- 18''. 30$ reſpectu fixarum, poſita nempe aequinoctiorum praeceſſione annua $= 50''. 33$. Haec determinatio $- 18''. 3$ ab ea, quam Cel. *la Lande* ex theoria attractionis vniuerſalis deduxit, differt quantitate $2''. 1$.

§. 9.

§. 9. Si elementa hactenus inuestigata cum iis, quae in praecedenti Tomo Commentariorum pag. 556. sunt exposita, conferantur; non nisi in tempore coniunctionis discrimen 16″ deprehendetur, quod vero potissimum a praecisione pendet, qua Longitudo Castelli St. Iosephi in California est determinata.

Interim igitur ista elementa heic in conspectu ita exhiberi conuenit:

Temp. Parisino medio 1769. Iun. $3^d. 10^h. 11'. 55''$		Differentia a tabulis Halleianis	Cassinianis
Longit. ♀ helioc.	$8^s. 13^\circ. 27'. 21''$	$+ 1'. 3''$	$+ 0'. 4''$
Lat. helioc.	$4'. 6''$		
Dist. centr. min.	$10'\ 12''.6$	$+ 6''$	$- 7''$
Long. Nodi ascend.	$2^s. 14^\circ. 36'\ 41''$	$+ 2'. 56''$	$- 1'. 54''$
Mot. Nodi secul.	$53'. 23''$	$+ 1'. 43''$	$- 3'. 17''$
Diameter ♀ in dist ☉ media	$16''.5$		
Ratio voluminum Veneris et terrae	8586 : 10000.		

Venus per Nodum descendentem transiit temp. Parisino medio 1769. Iun. $4^d. 3^h. 40'. 55''$.

§. 9. Ad semidiametrum Veneris quod attinet; mensurae aliquot micrometris obiectiuis captae cum determinatione §. 5. tradita optime consentiunt. Est enim ea ex obseruationibus *Noritoni* in Pensyl-

Penſyluania factis; ſumto medio 28″. 5; Petropoli 28″. 5; Ponoi 28″. 6.

Diſtantia vero centrorum minima, quam ſupra §. 5. inueni 10′. 12″. 5, per micrometra obiectiua non maior, quam 10′. 10″ vel ad ſummam 10′. 11″ eſt deprehenſa, poſita ſemidiametro Solis 15′. 47″. Cel. *La Lande* vt conſenſum inter concluſiones ex duratione deductas et immediatas menſuras obtineat, diametrum Solis aliquot minutis ſecundis minuendam cenſet: vnde prodiret diſtantia centrorum minima 10′. 7″ vel 10′. 8″. Fortaſſis vero ratio diſſenſus inter geminas iſtas determinationes potius in atmoſphaera Veneris quaerenda videtur.

TENTAMEN ORBITAE VENERIS EXCENTRICITATEM ET APHELIVM, HVIVSQVE MOTVM ANNVVM DEFINIENDI.

Auctore

W. L. KRAFFT.

§. 1.

Orbitarum, in quibus feruntur planetae, excentricitatibus, locis apheliorum, horumque annuis motibus definiendis eae prae ceteris accommodatae funt obferuationes, quae in principalibus orbitarum punctis, apfidibus et diftantiis mediis, funt inftitutae. Ex tribus huiuscemodi obferuationibus inter fe combinandis excentricitatem et aphelii pofitionem determinandi, ea inter reliquas eminet methodus, quam in Comment. Acad. Parifinae theoriae Solis et Martis a Celeb. Aftronomis *La Caillio* et *La Landio* legimus adplicatam; quae vero praeter motum planetae medium annuam quoque apheliorum praeceffionem tanquam calculi elementa fumma cum praecifione fupponit cognita. Motuum quidem mediorum fatis exactam cognitionem Aftronomorum debemus vigiliis, qui contra in affignandis

dis apheliorum motibus notabiliter a ſe inuicem diſcrepant. Id intuens operae pretium duxi periculum facere, annon modo laudata methodus eo vsque poſſit perfici, vt motus quoque apheliorum annui quantitatem patefaciat, quod tentamen Veneris theoriae adplicatum leuiter hic adumbrare conſtitui.

§. 2. Obſeruationes, quibus in hac disquiſitione vſus ſum, ſequenti tabula complector:

	1715. Ian.	1716. Aug.
Temp Pariſ. med.	$26^d. 8^h. 34'. 0''$	$28^d. 16^h\ 36'\ 42''$
Loc. ♀ helioc. in eclipt.	$4^s. 6°. 22'. 58''$	$11^s.\ 5°. 49'. 2''$
Reduct. ad orbit.	$+ 2'. 55''$	$+ 0'\ 51''$
Loc. ♀ in orbit.	$4^s. 6°. 25'. 53''$	$11^s.\ 5°\ 49'. 53''$
	♀ prope perih.	♀ prope aphel.

	1718. April	1769. Iun.
Temp. Pariſ. med.	$8^d. 10^h. 15'. 11''$	$3^d. 10^h. 11'. 39''$
Loc. ♀ helioc. in eclipt.	$6^s. 18°. 42'. 13''$	$8^s. 13°. 27'. 20''$
Reduct. ad orbit.	$- 2'. 49''$	$+ 0'. 7''$
Loc. ♀ in orbit.	$6^s. 18°. 39'\ 24''$	$8^s. 13°. 27'. 27''$
	♀ prope diſt. med.	♀ prope diſt. med.

§ 3. Statuto iam motu Veneris annuo medio $7^s. 14°. 47'. 29''$; pro ſingulis harum obſeruationum interuallis motus Longitudinis mediae poſſunt computari, qui vna cum motibus Longitudinis verae ex obſeruationibus deductis ita ſe habere deprehenduntur:

 Motus

Pro Interuallo

	I^{mo} 1715-1716.	II^{do} 1715-1718.	III^{tio} 1715-1769
Motus long. med.	$6^s.29°.47'.41'',8$	$2^s.11°.26'.42'',5$	$4^s.6°.20'.50'',6$
- - - long. verae	$6^s.29°.24'.0''$	$2^s.12°.13'.31''$	$4^s.7°.1'.34''$.

§ 4. Pro tempore primae nostrae obseruationis colligitur:

ex tabul. Halleianis	reuera vero
Longit. aphelii $= L = 10^s.6°.45'.39''.5$	$= L + dL$
Mot. aphel. annuus $= \mu = 56''.53$	$= \mu + d\mu$
Excentricitas $= \varepsilon = 0,00698$	$= \varepsilon + d\varepsilon$
posita distantia med. $= 1$.	

vbi iam negotium in eo versatur, vt valores harum correctionum dL, $d\mu$ et $d\varepsilon$ ex obseruationibus definiantur.

§. 5. Hunc in finem pro singulis interuallis quatuor fingantur hypotheses, in quarum prima elementa Halleiana modo allata assumuntur, in secunda vero tertia et quarta vel longitudini aphelii vel excentricitati vel motui aphelii annuo arbitraria augmenta tribuuntur; quo fit, vt ex errorum variationibus inde oriundis aequationes analyticae incognitas illas dL, $d\varepsilon$ et $d\mu$ inuoluentes formari queant, quibus satisfieri debet, vt errores illi penitus destruantur. Non immoror hic demonstrationi duorum theorematum, quibus calculi sequentes superstruuntur; nempe positis anomaliis vera $= v$, excencentrica $= e$; media $= m$; diſtantia aphelii $= a$; perihelii $= p$; excentricitate $= \varepsilon$; fore

$$\sqrt{\tfrac{a}{p}}.\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}v = \text{tang.}\tfrac{1}{2}e;\ \text{et}\ m = e + \varepsilon\,\text{ſin.}\,e.$$

§. 6. Calculus ergo interualli primi ita ſe habet:

Hypotheſis I^{ma} Aſſumantur elementa Halleiana L; ε; μ; quibus poſitis huic interuallo competit motus aphelii $= 1'. 28''. 2$ adeoque ex §. 3. motus anomaliae verae $= 6^s. 29^\circ. 22'. 31''. 8$ et motus anomaliae mediae $= 6^s. 29^\circ. 46'. 13''. 6$. Erit porro ob $L = 10^s. 6^\circ. 45'. 39''. 5$, in obſeruatione

	Anom. vera
I^{ma}	$5^s. 29^\circ. 40'. 13''. 5$
adeoque in II^{da}	$0^s. 29^\circ. 2'. 45''. 3.$

Quodſi iam per aequationes § praecedente allatas, pro quibus in hac hypotheſi habetur

$$\text{Log.}\sqrt{\tfrac{a}{p}} = 0,0030314;\ \text{et Log.}\ \varepsilon = 3,1582805,$$

computentur reſpondentes his anomaliis veris anomaliae excentricae et mediae; eae ita reperiuntur expreſſae

	Anom. excentr.	Anom. med.
I.	$5^s. 29^\circ. 40'. 21''. 2$	$5^s. 29^\circ. 40'. 29''. 4$
II.	$0^s. 29^\circ. 14'. 26''. 2$	$0^s\ 29^\circ. 26'. 9''. 4$
	Adeoque mot anom med. =	6 29. 45. 40. 0
	qui cum debebat eſſe =	6. 29. 46. 13. 6

prodit error huius hypotheſeos $= -0'. 33''. 6$.

 Hypo-

Hypothesis IIda. Statuantur nunc elementa $L + 1^\circ\ 0'.\ 0''$; ϵ; μ; quibus positis erit

	Anom. vera	respondens Anom. med.
I.	$5^s.\ 28^\circ.\ 40'.\ 13''.\ 5$	$5^s.\ 28^\circ.\ 41'.\ 19''.\ 6$
II.	$0^s.\ 28^\circ.\ 2'.\ 45''.\ 3$	$0^s.\ 28^\circ.\ 25'.\ 25''.\ 1$

ergo mot. anom. med. $= 6^s.\ 29^\circ.\ 44'.\ 5''.\ 5$
atque error secundae hypotheseos $= -\ 2'.\ 8''.\ 1$.

Hypothesis IIItia. Augeatur nunc, retentis L et μ, excentricitas particulis 0, 00017; vt ea sit 0, 00715, qualis in tabulis Cassinianis statuitur; eritque in hac hypothesi

$\mathrm{Log.}\ V\frac{a}{p} = 0,0031035$; et $\mathrm{Log.}\ \epsilon = 3,1687311$

et in obseruatione

	Anom. vera	respond. Anom. med.
I.	$5^s.\ 29^\circ.\ 40'.\ 13''.\ 5$	$5^s.\ 29^\circ.\ 40'.\ 29''.\ 8$
II.	$0^s.\ 29^\circ.\ 2'.\ 45''.\ 3$	$0^s.\ 29^\circ.\ 26'.\ 43''.\ 5$

motus anom. med. $= 6^s.\ 29^\circ.\ 46'.\ 13''.\ 7$
adeoque error hypotheseos $= +\ 0'.\ 0''.\ 1$.

Hypothesis IVta. Retentis L et ϵ; ad motum aphelii annuum $56''.\ 53$, addantur $29''.\ 47$ vt sit $1'.\ 26''$, qualis a Cel. Cassini statuitur; quo posito huic interuallo competit motus aphelii $= 2'.\ 16''.\ 3$ adeoque ex §. 3. motus anomaliae verae $= 6^s.\ 29^\circ.\ 21'.\ 43''.\ 7$ et mediae $= 6^s.\ 29^\circ.\ 45'.\ 25''.\ 5$. Est porro in obseruatione

Imo

	Anom. vera	respondens Anom. med.
I^{ma}	$5^s. 29^\circ. 40'. 13''. 5$	$5^s. 29^\circ. 40'. 29''. 4$
II^{do}	$0^s. 29^\circ. 1'. 57''. 2$	$0^s. 29^\circ. 25'. 21''. 0$

ergo motus anom. med. $= 6^s. 29^\circ. 44'. 51''. 6$
atque error hypotheseos $= \quad - 0'. 33''. 9.$

§. 7. Cum igitur error primae hypotheseos $= - 0'. 33''\ 6$, addito ad epocham aphelii vno gradu abierit in hunc $- 2'. 8''. 1$ adeoque auctus sit quantitate $94''. 5$, idem error, si epocha aphelii augeatur quantitate dL variationem patietur $=$, $0{,}02625. dL$. Simili modo colligitur

ob incrementum	variatio erroris
excentricitatis $= d\varepsilon$	$- 1{,}9823.\ d\varepsilon$
motus aphelii $= d\mu$	$+ 0{,}0102.\ d\mu$

quae variationes cum iunctim sumtae totum istum errorem $- 0'. 33''. 6$ destruere debeant; primum interuallum hanc nobis suppeditat aequationem

$$-33''. 6 = +0{,}02625. dL - 1{,}9823. d\varepsilon + 0{,}0102. d\mu.$$

§. 8. Calculi pro interuallo II^{do} inter obseruationem primam et tertiam potiora elementa succincte ita exhibeo.

Hypo-

Hypothesis	I^{ma} L ; ε ; μ ;	II^{da} L + 1°; ε ; μ
Mot. aph. intervallo competens	3′. 0″	3′. 0″
Mot. anom. med ex obferu.	2ˢ. 11°. 23′. 42″. 5	2ˢ. 11°. 23′. 42″. 5
ex calc.	2ˢ. 11°. 24′. 43″. 8	2ˢ. 11°. 24′. 10″. 2
Error	+ 1′. 1″. 3	+ 0′. 27″. 7

Hypothesis	III^{tia} L ; ε + 17 ; μ	IV^{ta} L , ε ; μ + 30″
Mot. aph. intervallo competens	3′. 0″	4′. 34″. 8
Mot. anom. med. ex obferu.	2ˢ. 11°. 23′. 42″. 5	2ˢ. 11°. 22′. 7″. 7
ex calc.	2ˢ. 11°. 23′. 37″. 5	2ˢ. 11°. 23′ 9″ 6
Error	− 0′. 5″. 0	+ 1′. 1″. 9

quare ex fecundo hoc interuallo hanc adipifcimur aequationem:

$$+61''.3 = +0,00933 \cdot dL + 3,9000 \cdot d\varepsilon - 0,0204 \cdot d\mu.$$

§. 9. Eodem modo calculum pro tertio intervallo inter obferuationem primam et quartam ita in compendio exhibeo:

Hypo-

Hypothefis.	I^{ma} $L;\ \varepsilon;\ \mu$	II^{da} $L+1;\ \varepsilon;\ \mu$
Mot. aphelii pro hoc interuallo	$51'.\ 10''.0$	$51'.\ 10''.0$
Mot. anom. med. ex obferu.	$4^s.\ 5^\circ.\ 29'.\ 40''.6$	$4^s.\ 5^\circ.\ 29'.\ 40''.6$
ex calc.	$4^s.\ 5^\circ.\ 31'.\ 6''.9$	$4^s.\ 5^\circ.\ 29'.\ 47''.9$
Error	$+\ 1'.\ 26''.3$	$+\ 7''.3$

Hypothefis.	III^{tia} $L;\ \varepsilon+17;\ \mu$	$\mathrm{IV}^{ta}.$ $L;\ \varepsilon;\ \mu+30''$
Mot. aphelii pro hoc interuallo	$51'.\ 10''.0$	$1^\circ.\ 17'.\ 54''.3$
Mot. anom. med. ex obferu.	$4^s.\ 5^\circ.\ 29'.\ 40''.6$	$4^s.\ 5^\circ.\ 2'.\ 56''.3$
ex calc.	$4^s.\ 5^\circ.\ 30'.\ 9''.4$	$4^s.\ 5^\circ.\ 4'.\ 9''.7$
Error	$+\ 0'.\ 28''.8$	$+\ 1'.\ 13''.4$

ex tertio itaque interuallo fequens refultat aequatio:

$$+86''.\ 3 = +0,02194.\ dL + 3,3823.\ d\varepsilon + 0,4377.\ d\mu.$$

ex quarum trium aequationum refolutione correctiones dL, $d\varepsilon$, $d\mu$ epochae aphelii excentricitati et motui aphelii Halleianis adplicandas determinabimus.

§. 10. Statim ergo colligitur ex aequatione

I^{ma}. $dL = -1280 + 75,518.\ d\varepsilon - 0,338.\ d\mu$

II^{da}. $dL = +6568 - 417,857.\ d\varepsilon + 2,181.\ d\mu$

III^{tia}. $dL = +3932 - 154,140.\ d\varepsilon - 19,947.\ d\mu$

 at-

atque hinc porro

$$0 = +7848 - 493,375 \cdot d\varepsilon + 2,519 \cdot d\mu \quad \text{et}$$
$$0 = +5212 - 229,658 \cdot d\varepsilon - 19,559 \cdot d\mu$$

quae vlterius resolutae praebent

$$d\varepsilon = +15,907 + 0,0051 \cdot d\mu \quad \text{et}$$
$$d\varepsilon = +22,694 - 0,0852 \cdot d\mu$$

vnde perspicitur, motum aphelii annuum Halleianum notabili correctione indigere; proditque

$$d\mu = +75''.16;\; d\varepsilon = +16;\; dL = -1'.15''$$

quibus correctionibus admissis habetur

1715. Ian. 26^d. Loc. aphelii $10^s.6^\circ.44'.24''$
Motus aph. annuus $2'.11''.69$
Excentricitas orbitae 0,00714.
posita distantia media = 1.

§. 11. Haec vero elementa quatuor nostris obseruationibus exacte satisfacere, ex sequenti calculo patet: Posito motu aphelii annuo $= 2'.11''.69$, colligitur per §. 3. pro interuallo

	Mot. aphelii	Mot. anom. verae	Mot. anom. med.
I^{mo}.	$3'.35''.4$	$6^s.29^\circ.20'.34''.6$	$6^s.29^\circ.44'.15''.3$
II^{do}.	$6'.59''.3$	$2^s.12^\circ.\ 6'.31''.7$	$2^s.11^\circ.19'.43''.3$
III^{tio}.	$1^\circ.59'.11''.7$	$4^s.\ 5^\circ.\ 2'.22''.3$	$4^s.\ 4^\circ.21'.38''.9$

Hinc ergo, cum tempore primae obseruationis inventus sit locus aphelii $10^s.6^\circ.44'.24''$ sequentes formabuntur anomaliae verae, quibus respondentes ano-

anomalias medias secundum formulas §. 5. computatas adiungo:

	Anom. verae	Anom. med.	Mot. anom. med. ex calculo	Error
I.	$5^s. 29^\circ. 41'. 29''.$	$5^s. 29^\circ. 41'. 45''$	$6^s. 29^\circ. 44'. 15''$	$-0''.4$
II.	$0^s. 29^\circ. 2'. 3''.6$	$0^s. 29^\circ. 26'. 0''$	$2^s. 11^\circ. 19'. 43''$	$-0''.3$
III.	$8^s. 11^\circ. 48'. 0''.7$	$8^s. 11^\circ. 1'. 28''$	$4^s. 4^\circ. 21'. 39''$	$-0''.0$
IV.	$10^s. 4^\circ. 43'. 51''.3$	$10^s. 4^\circ. 3'. 24''$		

qui consensus praecisionem horum elementorum, quatenus his quatuor obseruationibus satisfaciunt, abvnde probat.

§ 12. Incrementa ista anomaliae mediae minimo anomaliae verae vel excentricitatis augmento respondentia etiam generaliter ope differentiationis aequationum §. 5. traditarum exprimere licet. Positis enim augmentis anomaliae verae $= dv$; excentricitatis $= d\varepsilon$ et anomaliae mediae $= dm$, colligitur

$$dm = dv. \frac{(1 - \varepsilon^2)\sqrt{(1 - \varepsilon^2)}}{(1 - \varepsilon. \text{co}. v)^2} \text{ et}$$

$$dm = d\varepsilon. \sqrt{(1 - \varepsilon^2)}. \frac{\text{sin}. v(2 - \varepsilon. \text{cos}. v)}{(1 - \varepsilon. \text{cos}. v)^2}$$

Ita si statuatur excentricitas Halleiana 0, 00698, et augmentum epochae aphelii $= 3600''$; erit $dv = - 3600''$; adeoque $dm = - \frac{3500''.7}{(1 - \varepsilon. \text{cos}. v)^2}$. Cum igitur verbi caussa in hypothesi prima interualli primi fuerit $v = 5^s. 29^\circ. 40'. 13''.5$ erit $1 - \varepsilon. \text{cos } v = 1, 0069798$ et $dm = - 3549''. 9$, vti actu facto calculo fuit inuentum.

§. 13. Anomaliam veram, cui aequatio centri maxima respondet, sequenti modo facillime deter-

 mino.

mino. Aequationum §. 5. expoſitarum ſumtis differentialibus, habetur

$$dm = de(1 + \varepsilon \operatorname{coſ.} e) \text{ et } dv = \frac{d\,e\,(1 + \operatorname{coſ.} v)}{f\,(1 + \operatorname{coſ.} e)}$$

poſito

$$f = \sqrt{\tfrac{a}{p}} = \sqrt{\tfrac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}.$$

Cum vero ſit

$$\operatorname{coſ.} e = \frac{\varepsilon - \operatorname{coſ.} v}{\varepsilon . \operatorname{coſ.} v - 1}, \text{ erit}$$

$$d\,v = \frac{1 - \varepsilon . \operatorname{coſ.} v}{f\,(1 - \varepsilon)}\,d\,e \text{ et } d\,m = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon . \operatorname{coſ.} v}\,d\,e;$$

quibus, cum pro aequatione centri maxima ſit $d\,v = d\,m$, inter ſe aequatis, prodit

$$(1 - \varepsilon^2)\sqrt{(1 - \varepsilon)} = (1 - \varepsilon . \operatorname{coſ.} v)^2$$

ſiue cum hic poteſtates altiores excentricitatis negligere liceat, $1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 = (1 - \varepsilon . \operatorname{coſ.} v)^2$ ſeu $\operatorname{coſ.} v = +\frac{3}{4}\varepsilon$. Subſtituta itaque excentricitate modo inuenta, prodit anomalia vera, cui reſpondet aequatio centri maxima $2^s. 29^\circ. 41'. 34''$; huic competit anomalia media $3^s. 0^\circ. 30'. 40''$; ita, vt quaeſita aequatio maxima ſit $49'. 6''$.

DE

DE
LATITVDINE VENERIS
GEOCENTRICA TEMPORE TRANSITVS A. 1769.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

In diſſertatione de Parallaxi Solis cum Illuſtr. Acad. Scientiarum nuper communicata, oſtenſum a me fuit, obſeruationes contactuum internorum pro tranſitu Veneris A. 1769. facto, praebere latitudinem Veneris geocentricam tempore coniunctionis 10′. 19″, quum tamen menſurae diſtantiarum minimarum inter centra Solis et Veneris, variis in locis captae, probare videantur hanc latitudinem aliquanto minorem fuiſſe. Licet vero diſſenſus qui inter valores latitudinis vtroque modo elicitos, vix duo aut tria minuta ſecunda ſuperet, adeoque determinationem Parallaxis nullo modo dubiam reddere queat; haud inutile tamen erit fuſius explicare, quaenam prodeat latitudo Geocentrica ex obſeruatis diſtantiis marginum Solis et Veneris, nec non aliis obſeruationibus ad eam inquirendam inſtitutis, quia ſic facile diiudicare licebit, cuinam concluſioni potior habenda ſit fides?

2. Quum plerisque Americae incolis iucundo ſpectaculo totius fere tranſitus frui licuerit, factum quoque eſt, vt in iſtis regionibus, plurimae et exactiſſimae obſeruationes, ad diſtantiam breuiſſimam centrorum Solis et Venoris explorandam inſtitutae ſint, inter quas autem praeprimis nominari merentur, quae Noritoni in Penſylnania, et numero plurimae et accuratione inſignes captae ſunt menſurae diſtantiarum proximarum inter limbos Solis et Veneris, quarum obſeruationum, vt et reliquorum phaenomenorum circa tranſitum Veneris ibi obſervatorum expoſitionem, Illuſtr. Societas Scientiarum Londinenſis ſubmittere dignata eſt. Quamuis autem a Cl. *Rittenhouſe* operatione graphica ſingulas has menſuras examinatas eſſe viderimus eumque inueniſſe tantum non omnibus ſatisfieri, ſi diſtantia vera minima centrorum Solis et Veneris ponatur $10'. 10''$, ſemidiameter Solis $15'. 47''$ atque ſemidiameter Veneris $28'', 56$; vt tamen maiorem hac de re acquireremus certitudinem, ſingulas fere obſeruationes ſeorſim computare placuit, tumque ex earum debita inter ſe combinatione valores pro diſtantia minima exquirere.

3. Dum autem concluſiones ex his calculis deductas breuiter expoſituri erimus, primum quaedam monenda videntur de Methodo quam hoc in Tab. XX. Fig. 1. negotio nobis ſequendam elegimus. Repraeſentet igitur A B orbitam Veneris, ☉ L eclipticam, ſit locus Solis in ☉ qui tamquam inuariabilis ſpectatur, dum Venus

Venus motu relatiuo orbitam describere concipitur, sint A et B duo loca Veneris in orbita, quorum ille tempus medii transitus anteuertit, hic autem insequitur, his autem locis respondeant loca apparentia seu obseruata a, b pro quibus etiam distantiae ⊙ a et ⊙ b per obseruationes dantur. Centro ⊙ et radiis ⊙ b, ⊙ a descripti concipiantur arcus am, bn, rectis ⊙ A et ⊙ B in m et n occurrentes, eruntque partes resectae A m et B n eae quantitates, quibus distantiae verae ⊙ A et ⊙ B ob effectum Parallaxis, siue imminui, siue augeri debeant, vt in apparentes ⊙ a, ⊙ b transformentur. Quum igitur pro datis obseruationum temporibus hi effectus Parallaxis determinari possint, dabuntur etiam valores linearum ⊙ A et ⊙ B, porro quum ipsum tempus binas huiusmodi obseruationes interiacens quoque detur, innotescet valor lineae A B per datum motum horarium Veneris in orbita facile determinandus. Inuentis igitur tribus trianguli ⊙ A B lateribus, quaestio eo reuoluitur, vt inde eliciatur valor lineae perpendicularis ⊙ M, nec non segmentorum A M et B M, quibus datis etiam tempus medii transitus cognoscetur. Breuitatis gratia dicamus latus ⊙ A $= a$, ⊙ B $= b$ et A B $= c$ semisummam autem laterum s, tumque ex Geometria constabit aream totius trianguli A ⊙ B hac exprimi formula:

$$\triangle \text{A} \odot \text{B} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

eadem autem area, quum aequalis quoque sit ½ A B. ⊙ M, inde sequens deducitur valor distantiae minimae ⊙ M

$$\odot M = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

quam formulam per Logarithmos facile computare licet. Inuenta autem $\odot M$, erit

$$A M = \sqrt{(\odot A q - \odot M q)} = \sqrt{(\odot A + \odot M)(\odot A - \odot M)}$$

ſimilique modo

$$B M = \sqrt{(\odot B + \odot M)(\odot B - \odot M)}.$$

Caeterum et alia via hoc negotium exſequi licet, quaerendo primum ſegmenta A M et B M, tumque inde $\odot M$, ſi enim differentia ſegmentorum A M et B M dicatur p, habebitur ob

$$\odot A q - \odot B q = A M q - B M q, \ (a+b)(a-b) = c p$$

ideoque

$$p = \frac{(a+b)(a-b)}{c},$$

tum vero erit

$$A M = \tfrac{1}{2} c + \tfrac{1}{2} p \text{ et } B M = \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{2} p,$$

et denique fiet

$$\odot M = \sqrt{(\odot A + A M)(\odot A - A M)} = \sqrt{(\odot B + B M)(\odot B - B M)}.$$

Quamuis autem poſterior Methodus, priore aliquanto videatur facilior, hanc tamen praeferendam eſſe cenſuimus, quia verificationem quandam calculi ſecum ferre cenſenda eſt, dum vtraque obſeruatio pro tempore medii tranſitus eundem valorem exhibere debet, quod commodum poſteriori operatione obtineri nequit, niſi valor lineae $\odot M$ duplici modo quaeratur, quo autem facto, prior operandi modus huic breuitate nihil cedere videtur. Caeterum facile intelli-

intelligitur prius allata aeque valere, si ambae obſeruationes ante vel poſt tempus medii tranſitus cadant, quae tamen ad valorem latitudinis ſtabiliendum, non aeque haberi poſſunt aptae, ac iſtae, quarum vna tempus medii tranſitus praecedit, altera vero inſequitur, praeſertim ſi temporis interuallum ſatis adhibeatur notabile, quo enim maior eſt baſis trianguli A ☉ B, eo minus errandi periculum pro determinatione lineae ☉ M orietur ex errore commiſſo in valore lineae A B aeſtimando.

4. Valores diſtantiarum apparentium inter centra Solis et Veneris ex obſeruationibus Noritoni factis deducti, ſequenti repraeſentantur Tabella, adiectis ſimul valoribus diſtantiarum verarum inter eadem centra

	Temp vero	Diſt. cent. appar.	Diſt. cent. vera.
I.	$3^h. 7'. 19''$	$813'',0$	$825'',83$
II.	11. 39	800, 8	813, 70
III.	17. 42	784, 9	797, 86
IV.	32. 3	745, 7	758, 71
V.	40. 4	729, 8	742, 77
VI.	4. 35. 5	631, 7	642, 80
VII.	57. 9	607, 7	617, 27
VIII.	5. 7. 49	603, 9	612, 55
IX.	21. 40	603, 1	610, 43
X.	31. 46	605, 2	611, 54
XI.	42. 38	609, 5	614, 72
XII.	51. 10	613, 7	617, 93

Temp. vero		Diſt. cent. appar.	Diſt. cent. vera.
XIII.	$6^h.22'.14''$	$648'',7$	$649'',90$
XIV.	31. 5	659, 8	660, 26
XV.	41. 24	681, 0	680, 49
XVI.	48. 12	693, 7	692, 66
XVII.	53. 30	705, 9	704, 55
XVIII.	56. 22	709, 6	707, 93

vbi notaſſe iuuabit nos pro ſemidiametro Solis eum retinuiſſe valorem, quem auctores ex ſuis obſeruationibus concluſerunt, nimirum $15'.47''$, nam ſi haec ſemidiameter aliquanto minor ſtatui deberet, facile erit diiudicatu, quantam diſtantia minima inde patiatur diminutionem.

5. Ne nimis prolixum et inutilem ſuſciperemus laborem, circa combinationem harum obſeruationum, eam nobis praeſcripſimus regulam, vt ſex priorum obſeruationum cum ſex vltimis inſtitueremus comparationem, pro reliquis autem ſex obſeruationibus intermediis proxime circa ipſum tempus medii tranſitus factis, inquireremus qualem ſingulae diſtantiae obſeruatae praebeant valorem pro diſtantia minima, ſi ad epocham medii tranſitus, reducantur, quod ob datos motus horarios facile perficere licuit. Sequens autem tabella, non ſolum valores trium laterum ⊙A, ⊙B et AB trianguli A⊙B ſed etiam diſtantiae minimae ⊙M inde eliciendae et temporis pro medio tranſitu, exhibet, vltimum vero momentum ideo potiſſimum adiiciendum eſſe exiſti-

existimauimus, vt inde diiudicari possit quaenam obseruationes reliquis suspectiores haberi debeant:

Comparat. inter		⊙ A	⊙ B	A B	⊙ M	Tempus medii transitus
I. et	XVIII.	825″,83	707″,93	916″,20	10′. 9″,91	5h. 26′. 31″
	XVII.	- - - -	704, 45	904, 73	11, 50	25. 44
	XVI.	- - - -	692, 66	883, 53	10, 44	26. 20
	XV.	- - - -	680, 49	856, 33	10, 60	26. 19
	XIV.	- - - -	660, 26	815, 07	8, 36	26. 56
	XIII.	- - - -	649, 90	779, 67	10, 31	26. 24
II. et	XVIII.	813, 70	767, 93	898, 87	9, 61	26. 23
	XVII.	- - - -	vt supra	887, 40	11, 20	25. 56
	XVI.	- - - -	- - - -	866, 20	10, 16	26. 14
	XV.	- - - -	- - - -	839, 00	10, 34	26. 9
	XIV.	- - - -	- - - -	797, 73	8, 13	26. 48
	XIII.	- - - -	- - - -	762, 33	10, 09	26. 15
III. et	XVIII.	797, 86	- - - -	874, 67	9, 60	26. 23
	XVII.	- - - -	- - - -	863, 20	11, 16	25. 56
	XVI.	- - - -	- - - -	842, 00	10, 14	26. 14
	XV.	- - - -	- - - -	814, 80	10, 35	26. 10
	XIV.	- - - -	- - - -	773, 53	8, 14	26. 49
	XIII.	- - - -	- - - -	738, 13	10, 08	26. 15
IV. et	XVIII.	758, 71	- - - -	817, 27	7, 74	25. 36
	XVII.	- - - -	- - - -	805, 80	9, 25	25. 5
	XVI.	- - - -	- - - -	784, 60	8, 33	25. 24
	XV.	- - - -	- - - -	757, 40	8, 62	25. 18
	XIV.	- - - -	- - - -	716, 13	6, 69	25. 57
	XIII.	- - - -	- - - -	680, 73	8, 67	25. 17
V. et	XVIII.	742, 77	- - - -	785, 20	9, 32	26. 16
	XVII.	- - - -	- - - -	773, 73	10, 75	25. 44
	XVI.	- - - -	- - - -	752, 53	9, 82	26. 5
	XV.	- - - -	- - - -	725, 33	10, 01	26. 1
	XIV.	- - - -	- - - -	684, 07	8, 01	26. 44
	XIII.	- - - -	- - - -	648, 67	9, 84	26. 5

Comparat. inte		⊙ A	⊙ A	A B	⊙ M	Tempus medii transitus
VI. et	XVIII.	642, 80	707, 93	565, 12	10′ 9,″ 31	$5^{h.}$ 6. 21
	XVII.	- - -	704, 45	553, 67	10, 9	25. 32
	XVI.	- - -	692, 66	532, 47	9, 66	26. 1
	XV.	- - -	680, 49	505, 27	9, 84	25. 53
	XIV	- - -	660, 26	464, 00	8, 40	26. 57
	XIII.	- - -	649, 90	428, 60	9, 71	25. 59.

Numerum harum comparationum facile augere potuissemus, quandoquidem obseruationes quinque priores cum IX, X, XI et XII commode combinari posse videntur, similique ratione quinque vltimae cum VII et VIII; verum hunc laborem suscipere superfluum duximus, siquidem valores pro distantia minima iam inuenti, tam arctis circumscribantur limitibus, vt nullum sit dubium, quin medio ipsorum sumto, valor huius distantiae vero proximus obtineatur. Maxima scilicet discrepantia horum valorum non nisi ad 5″ assurgit, quae si combinatio obseruationis IV cum XIV excludatur, ad 3.″ deprimitur, sin vero adeo omnes combinationes cum IV et XIV excludantur, eadem 2″ vix superabit, ex inuentis autem valoribus pro tempore medii transitus euidenter patet, obseruationes IVtam et XIVtam, reliquis incertiores esse habendas. Deinde pro sex obseruationibus intermediis notasse satis erit valores, qui ex earum reductione ad epocham medii transitus pro distantia minima oriuntur, hi autem ita se habent:

VII.

	Diſtant. cent. act.	Diſt. minim.
VII.	10′. 17″. 27	10′. 6″, 87
VIII.	12, 55	8, 53
IX.	10, 43	10, 28
X.	11, 54	11, 10
XI.	14, 72	10, 97
XII.	17, 93	8, 53

vbi iterum liquet obſeruationem ſeptimam excludi poſſe, quippe quae a reliquis plus iuſto diſcrepat.

6. In ſuperioribus calculis, eam correctionem quam diſtantiae centrorum Solis et Veneris ſubeunt, propter diuerſam iſtorum centrorum refractionem, negleximus plane, quia certo nobis habebamus compertum, diſtantias iſtas hac de cauſſa ne ſemiſſe quidem ſecundi immutari. Id autem ſequenti ratiocinio planius fiet. Sit ☉ A linea horizontalis per centrum Solis ducta, ☉ ♀ M recta per centra Solis et Veneris tranſiens et limbo Solis in M occurrens, demittantur ex ♀ et M in ☉ A perpendiculares ♀ C et M B tumque capta M *m* aequali differentiae refractionum inter centrum Solis et punctum limbi M, ſi iungantur ☉ *m* recta ipſi ♀ C in V occurrente, erit locus centri Veneris apparens in puncto V, quum enim differentiae refractionum ſint differentiis altitudinum quam proxime proportionales, erit ♀ V : M *m* : : ♀ C : M B, ideoque puncta ☉, V et *m* quam proxime in directum iacebunt. Quum igitur ex obſeruationibus deduxerimus diſtantiam centrorum veram = ☉ M − V *m*, quae tamen aequalis eſſe deberet

 beret

beret ipſi ⊙ M − ♀ M, correctio huic diſtantiae adiicienda erit = V *m* − ♀ M, hinc ſi centro ⊙ radiis ⊙ V, ⊙ *m* deſcribantur arcus circuli V *v* et *mp* rectae ⊙ M in *v* et *p* occurrentes, habebitur iſta correctio = ♀ *v* − M *p* = − (M *m* − ♀ V) coſ. ⊙ M B, quae quantitas pro ſingulis noſtris aequationibus minimum adipiſcitur valorem. Pro obſeruatione ex. gr. VI^{ta} habemus ⊙ ♀ = 632″; ♀ C = 390″; ♀ V = 0′, 4 et M *m* = 0″, 6 vnde deducitur correctio = − 0, 2 coſ. ⊙ M B = − 0, 2 $\frac{♀ C}{⊙ ♀}$, ideoque vix − 0″, 1 maior.

7. Si nunc ex omnibus 36 valoribus, quos combinationes ſupra allatae ſuppeditant, medium ſumatur, prodibit valor diſtantiae minimae 10′. 9″, 4, ſi vero comparationes cum obſeruatione IV excludantur, medio ſumto inuenietur = 10′. 9″, 8 et denique comparationibus cum obſeruatione XIV^{ta} etiam excluſis, valor huius diſtantiae prodibit = 10′. 10″. Ex ſex obſeruationibus intermediis, medium ſumendo colligitur diſtantia minima 10′. 9″, 4 et ſeptima excluſa 10′. 9″, 9. Hinc itaque medio ſumto inter omnes concluſiones accuratiores, quae non niſi 2″ inter ſe diſcrepant, exacte omnino inuenietur diſtantia centrorum Solis et Veneris minima 10′. 10″, aſſumto ſcilicet pro ſemidiametro Solis valore 15′ et 47″, inde autem liquet, ſi haec ſemidiameter ſtatuatur 15′. 45″, 5, diſtantiam iſtam minimam prodire debere 10′. 9″. Quod tempus medii tranſitus attinet, ex concluſionibus optime inter ſe conſentien-

tientibus, quae remanent IVtam et XIVtam obſervationem excludendo, medio capto idem inuenitur $5^b. 26'. 7''$, quum igitur idem tempus pro Pariſiis incidat in $10^b. 36'. 40''$ circiter, differentia meridianorum inter Lutetias Pariſiorum et Noritonum habebitur $5^b. 10'. 33''$ optime conueniens cum iſta, quam ex obſeruationibus circa eclipſes Satellitum Iouis Noritoni factis deducere licuit.

8. Quamuis valor diſtantiae minimae iam inventus, ex concluſionibus egregie inter ſe conſentientibus elicitus ſit, adeo vt hoc ex capite pro exactiſſimo haberi deberet, diffiteri tamen nolumus nobis multum probabile videri, eundem vno ſaltem ſecundo augendum eſſe. Indolem enim obſeruationum pro diſtantiis marginum Solis et Veneris micrometro obiectiuo capiendis, inſtitutarum qui rite perpenderit, facile concedet multo maiorem eſſe probabilitatem, vt harum diſtantiarum menſurae iuſto prodeant maiores, quam vt in defectu peccarent. Ad inueniendam ſcilicet diſtantiam marginum minimam ea inſtrumento tribui debet poſitio, qua recta per centra Solis et Veneris tranſiens cum ipſa ſectione lentium in Micrometro exacte congruit, in alio vero quocunque inſtrumenti ſitu, diſtantia marginum vera maior inueniri debet. Quum igitur pro vnaquaque obſeruatione non niſi vnica poſitione inſtrumenti diſtantia marginum vera inueniri queat, liquet omnino maxime probabile eſſe, vt harum diſtantiarum menſurae veris aliquanto inueniantur maiores,

maiores, vnde viciſſim probabile quoque redditur diſtantias centrorum veris aliquanto minores inuentas eſſe. Neque tamen hunc valorem diſtantiae minimae plus quam vno minuto ſecundo augere auſim, quoniam alias ſtatuendum eſſet, omnes menſuras circa diſtantias marginum captas in exceſſu peccare, quod tamen in tanto praeſertim obſeruationum numero haud credibile videtur. Quodſi igitur ex ratione ſupra allata, ſingulis diſtantiis centrorum obſeruatis vnius ſecundi tribuatur augmentum, inde colligetur diſtantiam minimam centrorum fuiſſe 10′. 11″, ſuppoſita ſemidiametro Solis 15′. 47″, quae autem diſtantia inuenietur 10′. 10″ dum ſemidiameter Solis ſtatuitur 15′. 45″, 5. Caeterum ſi cui viſum fuerit hoc augmentum nulla vrgente neceſſitate, diſtantiae minimae fuiſſe tributum, tantum abeſt vt ſententiae a nobis propoſitae moroſe inhaerere velimus, vt potius vnicuique liberum relinquamus, valores pro diſtantia minima ex obſeruationibus immediate concluſos vid. §. 7. adoptare, ſi ita placuerit.

9. Vt concluſiones ex obſeruationibus Noritoni factis deductae tanto magis confirmentur, haud abs re erit nonnullas heic adiicere obſeruationes circa diſtantias marginum Solis et Veneris Philadelphiae inſtitutas, quae ita ſe habent:

Temp.

Temp. vero	Diſtantia appar.	Diſt. vera
I. $2^h. 55'. 59''$	$848''$, 19	$859''$, 85
II. 3. 16. 33	786, 25	799, 22
III. 3. 46. 46	717, 89	730, 80
IV. 4. 12. 24	662, 80	674, 94
V. 6. 28. 27	660, 84	660, 98
VI. 6. 55. 31	708, 01	705, 92.

Nunc modo ſupra expoſito binarum vltimarum fiat combinatio cum quatuor primis, ex quo pro ⊙ M ſequentes conſequemur valores:

Compar. inter		⊙ A	⊙ B	A B	⊙ M
VI et	I.	$859''$, 85	$705''$, 92	$958''$; 13	$10'. 11''$, 13
	II.	799, 22	- - -	875, 87	8, 55
	III.	730, 82	- - -	755, 00	13, 29
	IV.	674, 64	- - -	652, 47	9, 88
V. et	I.	859, 85	660, 98	849, 87	13, 09
	II.	vt ſup.	- - -	767, 60	10, 93
	III.	- - -	- - -	646, 74	12, 60
	IV.	- - -	- - -	544, 20	9, 83

medium vero ex his octo valoribus praebet diſtantiam minimam centrorum $10'. 11''$ circiter.

10. Inter alias Methodos, quibus Aſtronomi vſi ſunt, ad determinandam Longitudinem et Latitudinem Veneris geocentricam tempore tranſitus per Solem, quum inſigni loco haberi conſueuerit ea, qua momenta appulſus limborum Solis et Veneris

ad fila horizontalia et verticalia Quadrantis notantur; e re esse duximus quasdam huius generis obseruationes calculo subiicere, eum in finem vt saltem diiudicare liceret, quo in pretio tales obseruationes habendae sunt, ad verum valorem Latitudinis geocentricae definiendum. Momenta igitur appulsuum Orenburgi a Celeb. *Krafftio* obseruata pro hoc instituto seligere constitui, quoniam eadem satis exacta et bene inter se concordantia mihi visa sunt. Antequam vero conclusiones ex his obseruationibus pro Latitudine deductas heic adferre licet, necesse est nonnulla breuiter praefari de methodo, quam hoc in negotio mihi sequendam proposui. Primum igitur ita mihi persuasum habui, conclusiones eo certiores inueniri, quo pauciora momenta obseruata consulere necesse fuit, quamuis enim interdum fieri soleat, vt errores obseruationum se mutuo corrigant, tamen nullum est dubium, quin dum errores in eundem sensum cadant, tanto maior aberratio sit metuenda. Dum igitur heic quaestio tantum est de inuestiganda Latitudine Veneris, pro scopo sufficere iudicaui, si ad bina momenta appulsuum limbi Solis et centri Veneris ad filum horizontale attentio fieret; Longitudo enim Veneris per obseruationes contactuum adeo exacte determinata habetur, vt ea in ipsa Latitudinis inuestigatione omnino pro cognita spectari queat.

11. Ex modo memorata differentia appulsuum et data altitudine vera centri Solis pro momento, quo

quo limbus ad filum horizontale appellit, facile colligitur altitudo vera centri Veneris illi momento respondens, quo hoc centrum per filum horizontale Quadrantis transiisse obseruatum est. Si enim distantia vera centri Solis a Zenith dicatur D, semidiameter Solis Δ et parallaxis altitudinis pro Sole π, tum vero pro Venere statuatur distantia eius vera a Zenith tempore appulsus $= d$ et parallaxis $= \alpha\,\pi$, refractio autem altitudini apparenti obseruatae respondens ponatur $= r$, omnino liquet distantiam apparentem limbi Solis a Zenith esse pro tempore sui appulsus $= D - \Delta - r + \pi$, similique ratione distantiam apparentem centri Veneris a Zenith tempore transitus per filum horizontale $= d - r + \alpha\,\pi$, quum igitur hae distantiae plane congruant, consequimur $d = D - \Delta - (\alpha - 1)\,\pi$, sicque ex data altitudine vera centri Solis, eiusdem diametro et differentia inter parallaxes altitudinum Veneris et Solis cognita, facile inuenitur altitudo vera centri Veneris, pro tempore quo per filum horizontale transiisse obseruatum est. Iam igitur totum negotium eo redit, vt ex data longitudine et altitudine Veneris pro dato tempore Orenburgensi, inuestigetur eius Latitudo. Ad huius Problematis resolutionem sufficiet modo consueto, pro dato hoc tempore quaerere longitudinem et altitudinem Nonagesimi; si enim N ♈ M fuerit ecliptica, N punctum Nonagesimi, Π Z N circulus Latitudinis per Zenith Z et Nonagesimum transiens, itemque Π ♀ M similis circulus per locum Veneris ♀ transiens et Tab. XX. Fig. 3.

Rrrr 2 eclipti-

eclipticae in M occurrens, ductus autem concipiatur circulus verticalis Z ♀; patet in triangulo ΠZ♀ data esse bina latera Π Z et Z ♀, tum vero etiam angulum Π, qui scilicet ex datis longitudinibus Nonagesimi et Veneris facile inuenitur, his autem datis, iam latus trianguli tertium Π♀ quaeri potest, cuius complementum ad 90° est ♀ M aequalis latitudini Veneris ipso tempore obseruationis. Idem vero et hoc modo facilius perfici posse videtur: pro tempore quo Venus per filum horizontale transiit computetur altitudo vera centri Solis, vt habeatur differentia altitudinum vera, deinde inuestigetur angulus, quem ecliptica tunc temporis facit cum linea horizontali per centrum Solis ducta, tunc enim ex datis differentiis altitudinum et Longitudinum pro centris Solis et Veneris, ipsae quoque latitudines Veneris determinari possunt. Si enim fuerit ☉ H linea horizontalis per centrum Solis ducta, ☉ L ecliptica et ♀ locus Veneris, ex quo demittantur in ☉ H et ☉ L perpendiculares ♀ M et ♀ N quarum haec producta si opus sit occurrat horizontali in puncto P, erit ♀ P = ♀ M. cos. L ☉ H et N P = ☉ N Tang. L ☉ H, ideoque dabitur ♀ N = ♀ P — N P. Hanc autem procedendi viam alteri praeferendam esse iudicauimus, quia in hoc computo incertitudo quae circa Eleuationem Poli adesse poterit, negotium minime turbare valet.

Tab. XX. Fig. 4.

12. Vt autem rem in compendium redigamus, sequenti Tabula conclusiones a nobis inuentas exponere licebit, de qua monendum est, quod I et II. colu-

columna complectatur momenta appulsuum obseruata limbi Solis superioris et centri Veneris ad filum horizontale, III^{tia} et IV^{ta} differentias altitudinum et longitudinum inter centra Solis et Veneris pro momentis transitus Veneris per filum horizontale, V^{ta} Latitudines Veneris iisdem temporibus respondentes et denique VI^{ta} valores pro latitudine tempore coniunctionis inde deductos:

$16^h. 10'. 10\frac{1}{2}''$	$16^h. 10'. 42''$	$728''$	$576''$	$8'. 47''$	$10'. 13''$
15. 26	15. 56	738	597	46	15
19. 16	19. 44	751	612	51	22
20. 22	20. 49	757	616	54	26
22. 11	22. 37	763, 5	624	56	29
23. 14	23. 41	757	628	46	20
25. 25	25. 51	763, 5	637	48	23
27. 29	27. 54	770	645	50	26.

Medium ex conclusionibus inuentis dabit latitudinem geocentricam tempore coniunctionis $10'. 22''$ circiter quae sine dubio veram aliquanto excedit.

12. Quum in huiusmodi obseruationibus vtcunque accurate institutae fuerint, vix euitari queat, quin in notandis momentis appulsuum vnius secundi error committatur, intelligitur inter conclusiones ex illis deductas frustra talem desiderari consensum, qui se prodit inter obseruationes distantiarum pro limbis Solis et Veneris Micrometro institutas. Neque igitur obseruationes hae appulsuum vtiles censeri debent, ad valorem Latitudinis exacte definiendum, quum

vnius fecundi error in appulfu, altitudinem Veneris 7″ immutet pro noftro cafu, adeoque in latitudine variationem fere 8″ producat, quae autem multo fenfibilior euaderet, fi angulus L ☉ H maior effet. Quodfi igitur in vtroque appulfu tam limbi Solis quam centri Veneris error tantum vnius fecundi commiffus fit, atque hi duo errores confpirare concipiantur ad differentiam altitudinum vel augendam, vel minuendam, inde in latitudinem error vltra 16″ affurgens redundabit. Quod demum attinet modum procedendi a nobis adhibitum, exiftimamus eum fine dubio illi praeferendum effe, quo ex differentiis altitudinum et azimuthorum per ipfa appulfuum momenta exquifitorum, differentiae longitudinum et latitudinum inueftigantur. De longitudine enim Veneris quum ex aliis obferuationibus tam certi fimus, vt vix error vnius fecundi metuendus fit, eam hoc in calculo vt cognitam fpectare licuit, ne obligati effemus momenta quoque appulfuum ad fila verticalia confiderare, fiquidem errores in his appulfibus commiffi, conclufiones pro latitudine nimium turbaturi effent. Differentias autem altitudinum potius calculi ope, quam ex obferuationibus eruendas effe cenfuimus, ne incertitudo refractionum negotium turbaret, quae imprimis pro exiguis Solis altitudinibus fenfibilem habere poteft influxum, et pro noftro quidem cafu quo altitudo Solis vera 3 vel 4 gradus vix fuperauit, dubitari nequit, quin refractio actualis ab ea quam in Tabulis affignatam effe invenimus, quam maxime effe potuerit diuerfa.

13.

13. Quamuis obſeruationes Cel. *Krafſti* ſupra allatae, tam bene inter ſe conſentiant, ac de huiusmodi obſeruationibus ſperari poſſit, tamen haud iniucundum eſſe exiſtimauimus, ſi inquireremus quomodo ad perfectum fere conſenſum redigi queant. Quicquid autem hac de re monebimus, tantum vt coniecturam proponemus. Differentias igitur temporum inter momenta appulſuum ad filum horizontale conſiderantes inuenimus eas non aequabili lege procedere, ſimul autem vidimus leui correctione adhibita, huic incommodo medelam adferri poſſe. Differentiam ſcilicet inter momenta appulſuum tam pro prima, quam vltima obſeruatione ſemiſſe ſecundi auximus, ita tamen vt pro priori altitudo Veneris inde augeatur, pro vltima autem imminuatur, prior igitur differentia hinc inueniretur 32″, poſterior vero 25″½. Subtracta hac ab illa reſiduum eſt 6″½, quod per reliquas ſex obſeruationes proportionaliter diſtribuimus, eoque facto differentias appulſuum vt et valores pro latitudine inde deductos tales inuenimus quales ſequens Tabula refert:

	Different. obſeruat.	Diff. corr.	Latit. Geoc.
I.	31″,5	32″,0	10′. 16″
II.	30	30, 0	15
III.	28	28, 5	19
IV.	27	28	19
V.	26	27, 5	18
VI.	27	27	20
VII.	26	26, 3	21
VIII.	25	25, 5	22

ex

ex quibus medio sumto prodiret latitudo 10′. 18″,7, sed haec vti iam supra monui coniecturae loco tantum propono.

14. Quum momenta contactuum Veneris internorum variis in locis obseruata, vnanimi consensu pro distantia centrorum minima praebeant 10′. 13″, supposita nimirum semidiametro Solis 15′. 47″, merito iam disquirendum est, quomodo hae obseruationes, quae nulli suspicioni videntur obnoxiae conciliari queant, cum mensuris distantiarum inter centra Solis et Veneris, quas ex aduersa parte in eo consentire vidimus, quod haec distantia statui debeat 10′. 11″. Ex tribus vero caussis fieri potest, vt distantia minima ex momentis contactuum elicita aliquantum imminui debeat, quarum duae etiam pro conclusionibus ex mensuris Micrometricis deductis aliquam inuoluunt diminutionem, tertia autem prioris generis obseruationes solas afficere videtur. *Primo* scilicet si motus horarius Veneris in orbita quam assumsimus, aliquantilla sui parte augeri debeat, necessum quoque est, vt distantia minima ex contactibus conclusa imminuenda sit; *deinde* si semidiameter Solis imminutionem patiatur, hoc quoque valebit ad distantiam centrorum minimam minuendam, et *demum* si vel propter refractionem radiorum Solis in atmosphaera Veneris factam, vel aliam quamcunque rationem physicam, momenta contactuum propius ad epocham medii transitus contigerint, quam caeteroquin fieri debuisset, inde quoque contingere potest, vt ex momentis con-

contactuum maior colligatur valor pro diſtantia minima, quam vt cum reliquis obſeruationibus conſentiens deprehendatur.

16 Quod igitur motum horarium Veneris in orbita attinet, quum hoc in negotio maximi momenti ſit, eum accurate exprimi, haud incongruum iudicauimus hoc loco formulam tradere concinnam, cuius ope motus horarii Planetarum heliocentrici in ipſorum orbitis, cum ſumma exactitudine computari poſſunt. Sit igitur $C c$ ſpatium a Planeta in orbita circa Solem ⊙ interuallo vnius horae deſcriptum, ductis itaque C ⊙, c ⊙ exprimet angulus $C \odot c$ motum horarium Planetae heliocentricum in orbita, tum autem ducatur arcus $c D$ perpendicularis ad ⊙ C. Porro ſi linea $E S$ capiatur media proportionalis inter ſemiaxem maiorem et minorem orbitae, eaque pro radio aſſumta deſcribatur centro S arcus $E e$ ita vt ſector $E S e =$ ſectori $C \odot c$, dabit angulus $E S e$ motum horarium Planetae heliocentricum medium. Quum itaque ſit Sect. $C \odot c =$ Sect. $E S e$, erit $D c . \odot C = E e . S E$, ideoque ob ang. $C \odot c$: ang. $E S e :: \frac{D c}{\odot C} : \frac{E e}{S E}$, erit ang. $C \odot c$: ang. $E S e :: S E^2 : \odot C^2$. Dicatur iam anomalia Planetae vera ab aphelio computata Φ, anomalia media t, diſtantia media a et excentricitas e, eritque $d\Phi : dt :: S E^2 : \odot C^2$, per proprietatem autem Ellipſis eſt $S E^2 = a a \sqrt{(1 - e e)}$ et $\odot C^2 = \frac{a a (1 - e e)^2}{(1 - e \operatorname{coſ.} \Phi)^2}$, proinde his valoribus ſubſtitutis fiet $d\Phi : dt :: \sqrt{(1 - e e)} : \frac{(1 - e e)^2}{(1 - e \operatorname{coſ.} \Phi)^2}$, ſeu Tab. XX. Fig. 5.

 $d\Phi$

$d\,\Phi = d\,t \frac{(1 - e \text{ cof. } \Phi)^2}{(1 - e\,e)^{3:2}}$. Facta applicatione huius formulae ad casum praesentem, inuenimus motum horarium heliocentricum Veneris in orbita $238''$, 38, in longitudinem vero $237''$, 96 et in latitudinem $14''$, 088. Quum autem motus horarius terrae heliocentricus pro eo tempore fuerit $143''$, 50, habebitur motus relatiuus Veneris a terra in Sole visus $= 94''$; 46 secundum longitudinem, ideoque motus relatiuus in orbita $95''$, 50, ex quo deducitur motus relatiuus Veneris in orbita e terra visus $240''$, 12 fere vt Celeb de la *Lande* inuenit, tum vero quoque habebitur motus Veneris geocentricus in longitudinem $237''$,49 et in latitudinem $35''$,52. Quum itaque hinc pateat motus horarios a nobis assumtos rite se habere, nullum quidem est dubium, quin ex momentis contactuum deduci debeat distantia minima $10'$. $13''$.

17. Examinemus autem nunc, quantus censeri debeat effectus, per quem momenta contactus pro ingressu fuerunt retardata, pro egressu autem accelerata, siue hic effectus refractioni radiorum Solis in atmosphaera Veneris, siue alii cuidam caussae physicae sit adscribendus. Quum igitur in Dissertatione de Parallaxi huic Tomo Comment. inserta ad has peruentum sit aequationes:

$y = 8,76 + 1,55 \cdot \lambda$ et $\mu - \nu = -0,91 - \frac{1}{15}\lambda$, duas heic statuamus hypotheses, priorem qua semidiameter Solis $947''$ et distantia minima centrorum

Solis

Solis et Veneris 10'. 11'', posteriorem qua semidiameter Solis 945'', 5 et distantia minima 10'. 10''. Pro priori habemus $y = 6, 44$, ideoque

$$\lambda = \frac{\mu + \nu}{2} = -1, 52 \text{ et } \frac{\mu - \nu}{2} = -0, 40,$$

vnde $\mu = -1, 92$ et $\nu = -1, 12$, porro erit summa semidiametrorum $= 975, 6$ et differentia earum 918'', 4. Diminutio igitur distantiae centrorum, tam pro contactibus externis, quam internis erit $= 1, 52$, ex quo hi contactus fere 30'' versus tempus coniunctionis promouebuntur. Pro posteriori hypothesi est $y = 5, 4$;

$$\lambda = \frac{\mu + \nu}{2} = -2, 17 \text{ et } \frac{\mu - \nu}{2} = -0, 38,$$

hinc $\mu = -2, 55$ et $\nu = -1, 79$, tum autem ob summam semidiametrorum 974'', 1 et differentiam $=$ 916'', 9 erit diminutio distantiae centrorum pro contactibus externis 0'',65, pro internis vero 0'',69, vnde priores contactus 13'' posteriores autem 14'', versus tempus coniunctionis appropinquantur. Quicquid autem hac de re iam demonstrauimus, id tantum hypothetice assertum esse quiuis facile videt, ea nimirum sub conditione, quod valores pro distantia minima, tam ex obseruationibus Micrometricis quam obseruatis contactibus deducti rite se habeant, de quo quidem nulla suspicandi ratio nobis oborta est, quum consensus obseruationum vtriusque classis tantus sit, vt eum temere exstitisse credere non liceat. Sin autem huiusmodi quaedam adsu rit caussa, quae ad moram Veneris in Sole minuendam aliquid efficere

 valuit,

valuit, pro certo tamen pronuntiare non audeo, eam in refractione quadam radiorum Solis per atmosphaeram Veneris facta, quaeri debere, totam hanc quaestionem aliis dirimendam libenter permittens. Quicquid igitur hac de re sit, quum posteriori adhibita hypothesi conclusiones non multum inter se discrepantes inueniantur, tuto assumere licebit semidiametrum Solis pro tempore transitus A. 1769 fuisse $15'. 45'', 5$ et distantiam minimam centrorum Solis et Veneris $10'. 10''$, ex quo colligitur Latitudinem Veneris geocentricam fuisse $10'. 17''$. Deinde correctio longitudinis pro Venere inuenietur $16'', 56$, adeo vt tempus coniunctionis cum Sole inciderit Parisiis in 3 Iunii $10^h. 14'. 3''$, ideoque tempus medii transitus in $10^h. 36'. 38''$ tempore vero. De parallaxi autem iam monuimus eam, ex tantilla diminutione latitudinis non nisi $\frac{1}{53}$ parte secundi augeri.

EPITO-

EPITOME

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM, QVAS ANNO MDCCLXXI. SECVNDVM CALENDARIVM IVLIANVM PETROPOLI INSTITVIT

Auctor

IOANNES ALBERTVS EVLER.

Enarrabo hic more consueto altitudines praecipuas tam Barometri quam Thermometri vna cum phaenomenis potioribus atmosphaerae, a me primis quinque mensibus vsque ad diem 23^{am} Maii huius 1771. anni annotatas; qua scilicet die series harum obseruationum, domicilio meo incendio conflagrato, abrupta fuit. Ne autem hoc modo lacuna insit nostris commentariis, explebo eam exscribendo pro mensibus sequentibus earum obseruationum meteorologicarum momenta primaria, quae sedulus ac exactissimus huius vrbis obseruator, D. *Schröter*, mecum communicare voluit.

En ergo statim summarium mearum obseruationum, de quibus ante omnia monendum est, me eadem instrumenta et eandem methodum adhibuisse, quibus annis praeteritis vsus sum, de qua re fusius in Tomi XIV. parte posteriori horum Commentariorum locutus sum.

Menſe Ianuarii.

Barometri altitudo maxima 28. 67. d. 27. h. IX. p m.
altitudo minima 26. 96. d. 13. h. V. a. m.

variatio 1. 71
medium 27 81
Altitudo media inter omnes 27. 83.

Hic et in ſequentibus binae cyphrae poſteriores partes centeſimas pollicis, priores vero pollices integros denotant, quorum duodecim pedem Pariſinum regium conſtituunt.

Thermometri altitudo minima 192. d. 19. h IX. p m.
altitudo maxima 151 d 12. h. IX. p. m.

differentia 41 grad. Deslisl.

Mercurius in Thermometro deſcendebat infra

gradum	diebus	die ſcilicet huius menſis
190	2	18. 19.
180	8	1 15. 16. 17. 21. 24. 25. 27.
170	9	2. 4. 7. 14. 20. 23. 26. 28. 29.
160	8	3. 5. 8. 9. 13 22. 30. 31.
150	4	6. 10. 11. 12.

Mercurius vero aſcendebat ſupra

gradum	diebus	die ſcilicet
160	11	2. 3. 5. 6. 8 9 10. 11. 12. 13 31.
170	7	4. 7. 14 15. 22 29. 30.
180	10	1. 16. 17. 20. 21. 23. 25. 26. 27. 28
190	3	18. 19 24.

Ventus

Ventus vehementer ſpirabat diebus 17; die ſcilicet 2. 3. 7. 8 10. 11. 13. 14. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 28. 29. 31.

Dies procelloſi fuerunt 5; ſcilicet dies 4. 6. 12. 25. 26.

Flabat ventus

E regione	die	ſumma dierum
Nord	4. 7. 11 16. 18. 19. 29	7
N—O	1 9. 17. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28	10
Oſt	5. 10. 15	3
S—O	nullo	0
Süd	2. 6. 12 21	4
S—W	nullo	0
Weſt	8. 31	2
N—W	3 13. 14. 20. 30.	5

Coelum ſerenum fuit diebus 9; et quidem d. 1. 7. 15. 16. 18. 19. 21. 24. 27.

Nebulae 5, die ſcilicet 15. 17. 18. 21. 29.

Nix parca cecidit diebus 10, nempe d. 2. 3. 5. 6. 11. 13. 22. 25. 26. 29.

Nix copioſa vero die 12ma.

Parhelion nitidum obſeruatum fuit die 21ma, et duo alia debiliora die 24 et 25ta.

Aurorae boreales debiles fuerunt tres, d. 15. 27. et 28.

Menſe

Menſe Februarii.

Barometri altitudo maxima 28. 77. d. 7. h. VII. a. m.
altitudo minima 27. 50. d. 1. h. VII. a. m.

variatio 1. 27.
medium 28. 14.
altitudo media inter omnes 28. 21.

Thermometri altitudo minima 198. d. 21. h. VII. a. m.
altitudo maxima 153. d. 28. h. II. p. m.

differentia 45. grad. Deslisl.

Mercurius in Thermometro deſcendebat infra

gradum	diebus	die ſcilicet
190	4	12. 19. 20. 21.
180	6	6. 7. 14. 18. 22. 23.
170	10	2. 3. 4. 5. 8. 9. 11. 13. 15. 24.
160	7	1. 10. 16. 17. 25. 26. 27.
150	1	28.

Aſcendebat vero Mercurius ſupra

gradum	diebus	die ſcilicet
160	9	1. 10. 15. 16. 24. 25. 26 27 28.
170	10	2. 4. 5. 8. 9. 13. 14. 17. 22. 23.
180	9	3. 6. 7. 11. 12. 18. 19. 20. 21.

Malacia fuit die 21 et 23.

Dies ventoſi 11 et quidem dies 1. 3. 6. 7. 8. 9. 19. 24. 25. 26. 28.

Dies procelloſi 4. dies ſcilicet 2. 4. 5. 27.

Venus

Ventus ſpirabat

ex plaga	die	ſumma dierum
Nord	1. 7. 13. 17. 19. 20.	6.
N – O	2. 3. 10. 11. 16. 18. 21. 25. 26.	9.
Oſt	12. 14. 15. 23. 24. 27. 28.	7.
S – O	8.	1.
Süd	4. 9.	2.
S – W	22.	1.
Weſt	nullo	0.
N – W	5. 6.	2.

Coelum fuit ſerenum per 14. dies, ſcilicet d. 3. 5. 6. 7. 11. 12. 13. 14. 18. 19. 20. 21. 22. 24.

Nebulae 12. die ſcilicet 9. 10. 12. 15. 16. 17. 20. 21. 22. 23. 24.

Nix parca d. 1. 2. 8. 10. 17. 28, diebus 6.

Nix copioſa d. 9. 27: diebus 2.

Grando d. 27.

Aurorae boreales obſeruatae fuerunt duae, die 8 et 19.

Menſe Martii.

Barometri altitudo maxima 28. 53. { d. 4. h. XI. p. m.
d. 5. h. III. p. m. et
d. 6. h. I. p. m.

altitudo minima 27. 62. d. 1. h. VI. a. m.

Variatio 0. 91.
Medium 28. 07.

altitudo media 28. 10.

Thermometri altitudo minima 195. d. 14. h. V. a m.
altitudo maxima 144. d. 31. h. II. p. m.

differentia 51. Gr. Deslisl.

Mercurius in Thermometro defcendebat infra

gradum	diebus	die fcilicet
190	1	14.
180	4	3. 13. 27. 28.
170	11	4. 5. 6. 7. 12. 15. 19. 20. 21. 22. 26.
160	10	1. 2. 11. 16. 17. 18. 23. 24. 25. 29.
150	5	8. 9. 10. 30. 31.

Afcendebat autem fupra

gradum	diebus	die
150	5	7. 8. 25. 30. 31.
160	17	1. 2. 5. 6. 9. 10. 11. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 23. 24. 29.
170	8	3. 4. 12. 14. 22. 26. 27. 28.
180	1	13.

Malacia 5 diebus fuit; d. 3. 5. 6. 28. 29.

Dies ventofi 8. dies fcilicet 7. 8. 9. 15. 16 18. 21. 22.

Dies procellofus vnus fuit 23.

Ventus fpirabat ex

plaga

plaga	die	summa dierum
Nord	2. 3. 4. 10. 11. 20. 26.	7
N—O	12. 13. 14. 17. 18. 22. 27.	7
Ost	15. 16. 24. 28.	4
S—O	5. 6. 31.	3
Süd	23.	1
S—W	nullo	0
West	1. 8 9. 19.	4
N—W	7. 21. 25. 30.	4
ventus variabil.	29.	1

Dies sereni fuerunt 12; dies scilicet 3. 4. 5. 6. 11. 12. 13. 14. 22. 26. 27. 28.

Nebulae 8. d. 3. 4. 5. 6. 7. 14. 19. 28.

Nix parca diebus 10, die scilicet 1. 2. 8. 9. 10. 17. 18. 25. 30. 31.

Nix copiosa diebus 4. d. 16. 19. 23. 29.

Aurorae boreales numerabantur septem. die 2. 3 et 12^{ma} tres praelucidae et die 4, 5, 6 et 22^{a}, quatuor debiliores; praesertim postrema, quae admodum exilis et incompleta fuit.

Mense Aprilis.

Barometri altitudo maxima 28.61. d. 8. h. II. p. m.
altitudo minima 27 80. d. 3 et 14. h. VII. a. m.

variatio 0 81.
medium 28. 21.

altitudo media 28. 15.

Thermometri altitudo minima 161. d. 1. h. XI p. m.
altitudo maxima 129. d. 27 h. II. p. m.

differentia 32. grad. Deslisl.

Mercurius in Thermometro defcendebat infra

gradum	diebus	die fcilicet
160	1	1.
150	22	2. 3. 4. 6. 7. 8. 9. 12. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22 23. 24. 25. 26. 27. 30.
140	7	5. 10. 11. 13. 14. 28. 29.

Afcendebat vero fupra

gradum	diebus	die fcilicet
130	1	27.
140	13	5. 9. 10. 11. 12. 15. 19. 21. 22. 23. 24. 28. 29.
150	15	2. 3. 4. 6. 7. 8. 13. 14. 16. 17. 18. 20. 25. 26. 30.
160	1	1.

Malacia per dies 10 obferuata fuit, die fcilicet 4. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 17. 18. 21.

Dies ventofi fuerunt 9; d. 3. 5. 16. 19. 20. 24. 25. 28. 30.

Dies procellofi 2; d. 1 et 22.

Flabat ventus

e regio-

e regione	die	ſumma dierum
Nord	8. 11. 12. 18. 22. 28. 29.	7.
N—O	16. 17. 20. 21. 25. 30.	6.
Oſt	9. 10. 26.	3.
S—O	5.	1.
Süd	7. 14.	2.
S—W	2. 4.	2.
Weſt	3. 13.	2.
N—W	1. 6. 23. 24.	4.
ventus variabilis	15. 19. 27.	3.

Dies ſereni fuerunt 16; ſcilicet d. 1. 3. 5. 7. 8. 9. 15. 17. 18. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26.

Nebulae 4; d. 4. 5. 8. 12.

Nix parca die 2 et 30; copioſa die 6.

Pluit quinquies; die 10. 11. 27. 28. 30.

Hoc menſe flumen Neva liberabatur a glacie et quidem die 19, poſtquam per dies 159 glacie obductum fuit.

Menſe Maii vsque ad diem 23^{am}.

Barometri altitudo maxima 28. 52. d. 2. h. VII. a. m.
altitudo minima 27. 90. d. 13. h. II. p. m.

variatio 62.
medium 28. 21.
altitudo media inter omnes 28. 13.

 Ther-

Thermometri altitudo minima 161. d. 1. h. VI. a.m.
altitudo maxima 113. d. 21. h. II. p. m.

differentia 48. grad. Deslil.

Mercurius in Thermometro defcendebat infra

gradum	diebus	die fcilicet
160	1	1.
150	3	2. 3. 9.
140	10	4. 5. 6. 7. 8. 10. 11. 12. 13. 14.
130	7	15. 16. 18. 19. 20. 22. 23.
120	2	17. 21.

Afcendebat autem fupra

gradum	diebus	die fcilicet
120	6	17. 18. 20. 21. 22. 23.
130	7	6. 10. 11. 12. 15. 16. 19.
140	8	3. 4. 5. 7. 8. 9. 13. 14.
150	1	2.
160	1	1.

Malacia die 4. 5. 11. 16. 17. 18 (mane) 20. 21.

Ventus vehemens die 2. 6. 7. 8. 12. 14. 18 (vefperi) 22. 23.

Procella die 1. 13.

Flabat ventus

e regio-

e regione	die	summa dierum
Nord	5 7. 11. 15. 16. 17. 19.	7.
N–O	1. 2. 6. 8. 9. 10. 20. 21. 22. 23.	10.
Ost	3. 4.	2.
West	13. 14.	2.
N–W	18.	1.
variabilis	12.	1.

Dies sereni d. 1. 2. 8. 10. 11. 16. 17. 19. 20. 21. 23.
Summa 11 dies.

Nebulae 5, die scilicet 10. 11. 16. 17. 20.

Pluuia parca d. 3. 4. 12. 13. 18.

Pluuia copiosa cecidit d. 14.

Aurorae boreales d. 1 et 2.

Progrediar nunc ad obseruationes D. *Schröter* et quo melius eae cum nostris comparari possint, exordiar ab ipsa prima die huius mensis Maii. Obseruauit autem

Barometri altitudinem maximam 28. 52 d. 2.
altitudinem minimam 27. 85 d. 13.

vnde et ex obseruationibus eius, praecedentibus mensibus institutis, concludere licet, altitudines Barometri quo D. *Schröter* vsus est, non multum differre ab eis, quas nos annotauimus.

Thermometri altitudo minima 160 d. 1.
altitudo maxima 112 die 28 et 29.
in radiis Solis 66 d. 8.

Dies

Dies sereni XVIII. die scilicet 2. 5. 6 10. 11. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29.

Pluit d. 3 4 12. 14. 30. 31.

Tonuit d. 30.

Aurorae boreales d. 1 et 2.

Venti vehementiores d. 1 ex Nord. d. 2 et 3 ex N—O: d. 8 ex Ost d 12. ex West. d. 22 ex N—O; d. 24 ex Nord et d. 30 ex West.

Procellae d. 18 ex West et d. 23 ex N—O.

Mense Iunii.

Barometri altitudo maxima 28. 37 die 12.
altitudo minima 27. 71 die 9.

Variatio 0. 66; medium 28. 04.

Thermometri altitudo minima 138 die 1.
altitudo maxima 111 die 11 et 12
in radiis Solis 65 die 11 et 12

Dies sereni VI. dies scilicet 3. 11. 12. 15. 16. 17.

Nebula d. 8.

Pluit d. 1. 4. 6. 8. 9 13. 18. 19. 20. 21. 23. 24. 25. 26. 30. per dies ergo XV.

Venti vehementiores spirabant ex Nord d. 1. 3. 4. 22 et 26; ex N—O d. 5 et 14; ex Ost. d. 2. 8; ex Sud. d. 9; ex S—W d. 17 et ex West. d. 27. 29. 30.

Tonuit quater, die scilicet 9. 19. 25 et 26.

Mense

Menſe Iulii.

Barometri altitudo maxima 28. 75 d. 6 et 7
altitudo minima 27. 52 d. 1.

Vatiatio 1. 23 et medium 28. 13.

Thermometri altitudo minima 132 d. 1.
altitudo maxima 109 d. 8 et 9.
et in radiis Solis 69 d. 7.

Dies ſereni numerabantur XI. ſcilicet d. 4. 5. 7. 8. 9. 10. 21. 24. 25. 27. 30.

Pluit diebus XVII; die ſcilicet 2. 3. 6. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 19. 20. 23. 28.

Grando cecidit die 29 et 31.

Tonuit octies et quidem die 10. 11 et 29 valde vehementer; die vero 13. 23. 24. 26. 30. minus forte.

Aurora borealis obſeruata fuit die 21.

Ventus vehementer flabat ex Sud d. 16 ex S – W d. 2. 4 et 6 ex Weſt die 18 et 21.

Menſe Auguſti.

Barometri altitudo maxima 28. 33 die 23 et 24
altitudo minima 27. 08 die 8.

Variatio 1. 25 et medium 27. 70.

Thermometri altitudo minima 141 d. 11 et 12
altitudo maxima 120 d. 2 et 31
et in radiis Solis 76 d. 13 et 27.

 Dies

Dies ſereni fuerunt ſex ſcilicet d. 22. 23. 27. 28. 29 et 31.

Pluit diebus XVIII. et quidem die 1. 2. 3 5. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 15. 16. 17. 18. 20. 21. 27. 29.

Nebula fuit d. 31.

Aurorae boreales III. d. 1. 26 et 31.

Venti vehementes flabant ex N—O d. 15; ex Oſt d. 10; ex S—W d. 3. ex Weſt. d. 19. 23 et 24; ex N—W denique d. 7. 11. 12. 24.

Procellae ex Oſt d. 2 et 16; ex S—W d. 4; ex Weſt d. 8. 20. 21 et 26.

Menſe Septembris.

Barometri altitudo maxima 28. 54 d. 12 et 13
altitudo minima 27. 37 d. 30.

Variatio 1. 17 medium 27. 95

Thermometri altitudo minima 152 d. 27 et 28
altitudo maxima 114 d. 1.

et eodem die Thermometrum radiis Solis expoſitum aſcendebat ad gradum 68.

Dies ſereni numerabantur ſex et fuerunt 1. 3. 4. 13 14. 15.

Nebulae IV, die ſcilicet 2. 3. 8. 16.

Pluit per dies XV et quidem die 1. 4. 5. 6. 10. 11. 17. 18. 19. 20. 21. 23. 26. 29. 30.

Nix

Nix cecidit die 26. 27 et 28 et grandinauit die 26 et 28.

Venti vehementes Nord d. 27, Oſt d. 6. Weſt d. 17 et N – W d. 19.

Procellae Weſt d. 25 et 26.

Aurorae boreales numerabantur IV. ſcilicet d. 9. 18. 25 et 27.

Menſe Octobris.

Barometri altitudo maxima 28. 40 d. 11
altitudo minima 27. 25 d. 19

Variatio 1. 15, medium 27. 83

Thermometri altitudo minima 156 d. 29
altitudo maxima 131 d. 4
et die 15 in radiis Solis 104.

Dies ſereni tantum quatuor fuerunt d. ſcilicet 11. 16. 20. 26: nebula die 9.

Pluuia decidit diebus XVI et quidem d. 2. 3. 5. 6. 7. 8. 10. 17. 18. 19. 21. 23. 24. 25. 30. 31.

Nix vero diebus VII ſcilicet d. 1. 20. 21. 22. 27. 28. 30.

Venti vehementes Sud d. 3. 15 et 27; S – W d. 4. 7. 8 et 31; Weſt d. 9 et 18; N – W d. 29.

Procellae Nord d. 19; S – W d. 24. 25 et 30; Weſt d. 17.

Menſe Nouembris.

Barometri altitudo maxima 28. 33 d. 17
altitudo minima 27. 33 d. 8 et 9

Variatio 1. 00, medium 27. 83.

Thermometri altitudo minima 178 d. 22
altitudo maxima 144 d. 1 et 2

Dies ſereni VII fuerunt, ſcilicet d. 1. 2. 13. 14. 15. 22. 25.

Nebula die 26.

Pluit duobus diebus et quidem d. 19 et 29.

Nix decidit XI diebus, ſcilicet d. 5. 6. 7. 8. 9. 16. 18. 21. 26. 27. 29.

Venti vehementiores Nord d. 17, S – W d. 2. 3. 18 et 27, Weſt d. 10 et 24; N – W d. 9.

Procellae Sud d. 1 et 8; S – W d. 5 et 6.

Aurorae boreales obſeruabantur IV. die ſcilicet 1. 17. 20. 22 et 24.

Halo Solis cum tribus parheliis d. 1. et duae paraſelenae d. 7 et 12.

Flumen Neva denique hoc menſe obductum fuit glacie die 13; conſequenter hoc anno per dies 208 nauigabile fuit.

Menſe Decembris.

Barometri altitudo maxima 28. 28 d. 15.
altitudo minima 27. 08 d 2.

Variatio

Variatio 1. 20, medium 27. 68.

Thermometri altitudo minima 191 d. 27.
altitudo maxima 145 d. 1 et 2

Dies ſereni numerabantur VII, et quidem d. 21. 23. 25. 26. 27. 28. 29.

Nebula d. 26.

Pluit die 2 et 11 et nix decidit diebus XV, ſcilicet d. 3. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 18. 19. 20. 24. 29. 30.

Venti vehementes Nord d. 24, N—O d. 5, Oſt d. 8, S-O d. 9. 17 et 29, Sud d. 2, S-W d. 1, Weſt d. 19; N—W d. 22.

Procellae Nord d. 26, N—O d. 25, Oſt d. 27 et 28, S—O d. 30, Sud d. 14, Weſt d. 20, N — W d. 21.

Aurorae boreales apparebant tres, die 20. 26 et 27.

Die 26 denique tres parhelii obſeruati fuerunt.

Vnde patet hoc 1771 anno fuiſſe

Barometri altitudinem maximam 28. 77
menſe Februarii die 7.
altitudinem minimam 26. 96
menſe Ianuarii die 13.

Variatio igitur maxima fuit 1. 81 vel $1\frac{87}{135}$ dig.

Medium 27. 86, et altitudo media pro primis quinque menſibus 28. 08.

Frigus

Frigus maximum 198 menſe Februarii die 21.
Calor maximus 109 menſe Iulii die 8 et 9

differentia maxima 89 grad. Deslil.

Status frigoris.

Mercurius in Thermometro deſcendebat infra punctum congelationis naturalis vel infra gradum 150 ſecundum D. *Deslisle*, menſe Ianuarii per dies 31, Februarii per dies 28, Martii per dies 31 Aprilis per dies 23, Maii per dies 4, Septembris per dies 6, Octobris per dies 4, Nouembris per dies 27 et Decembris per dies 29; in toto anno ergo per dies 183.

Deinde dies ſereni numerabantur 116; nebulae 43; ventoſi 115, et procelloſi 40.

Pluit diebus 96 et nix decidit diebus 72.

Porro aurorae boreales fuerunt 29, tonitrua 13, parhelii 5, et paraſelenae 2.


V
V
Fig. 2.
O
T
Y
Fig. 4.
U
Z


Fig. 1

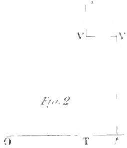


Fig. 2

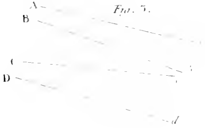


Fig. 3.


Fig. 4


Fig. 5.

Fig. 2.

d

m

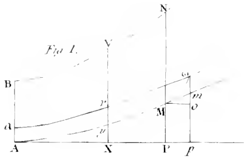


Fig. 1.
B
a
A
V
v
u
X
N
M
P
ω
m
o
p

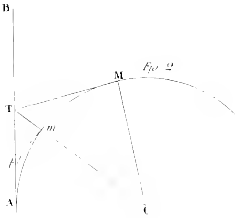


Fig. 2
B
T
M
m
A
C

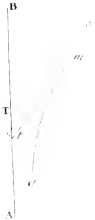


Fig. 3.
B
T
θ
t
m
a
A

Fig. 1.

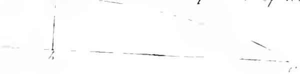


Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 8.

Fig. 1.

Fig. 2.

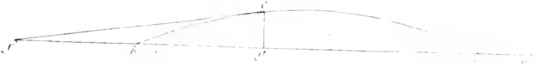


Fig. 3.

Fig. 4.

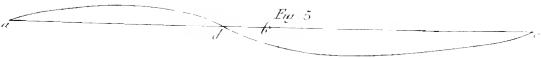


Fig. 5.

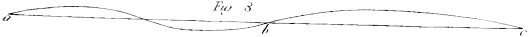


Fig. 8.

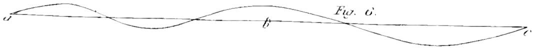


Fig. 6.

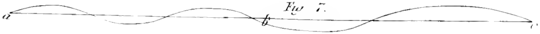


Fig. 7.

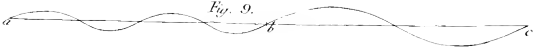


Fig. 9.

Fig. 70.

Fig. 71.

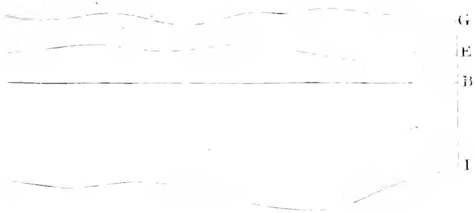


Fig. 72.

Fig. 73.

Fig. 70.

Fig. 71.

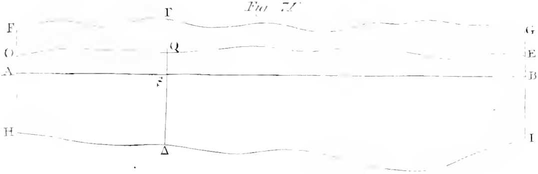


Fig. 72.

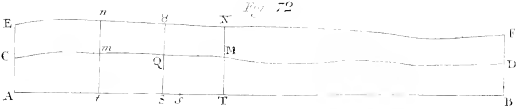


Fig. 73.

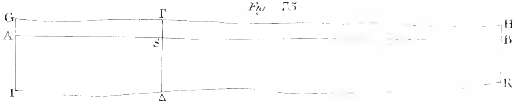


Fig. 74.

Fig. 75.

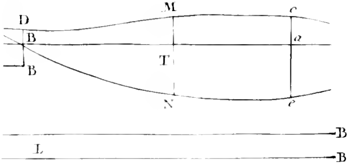


Fig. 76.

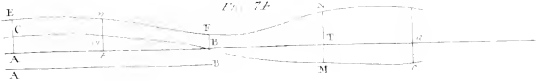


Fig. 74

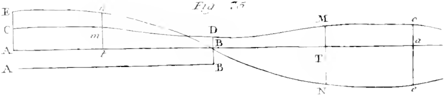


Fig. 75

Fig. 80

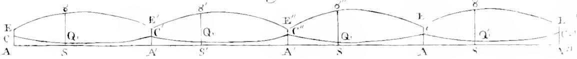


Fig. 76

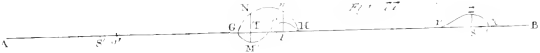


Fig. 77

Fig. 78

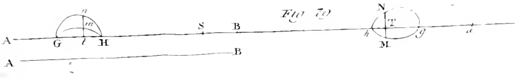


Fig. 79

Fig. 81

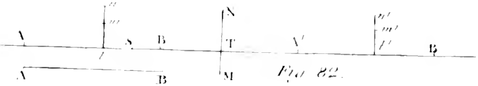


Fig. 82.

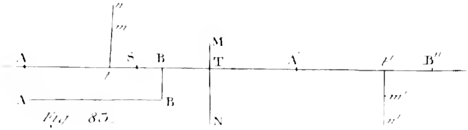


Fig. 83.

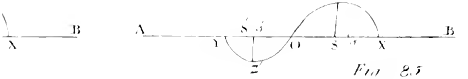


Fig. 85

E Fig. 86 F

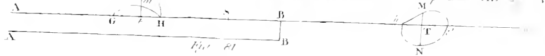


Fig. 81

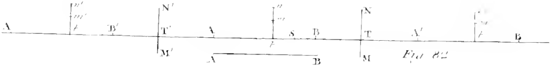


Fig. 82

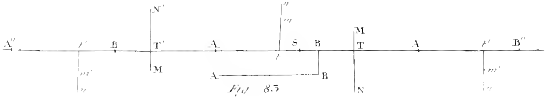


Fig. 83

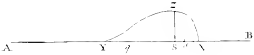


Fig. 84

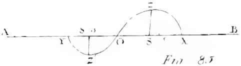


Fig. 85

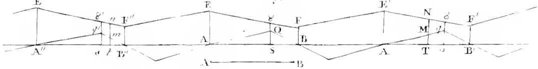


Fig. 86

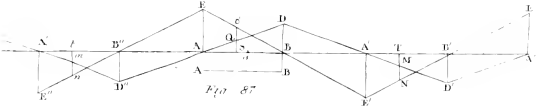
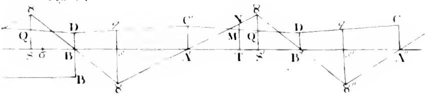


Fig. 87

Fig. 88



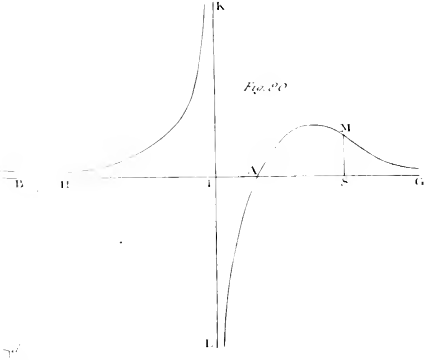
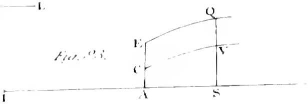


Fig. 93.



92

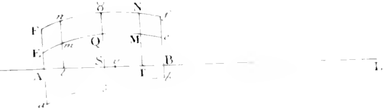


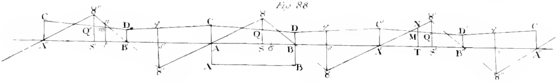
Fig. 88


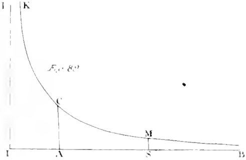
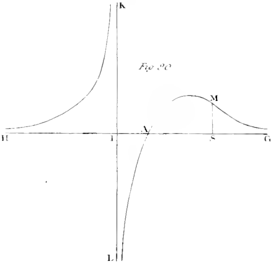
Fig. 89


Fig. 90


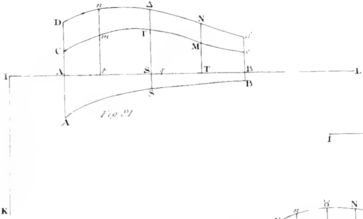


Fig. 91

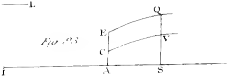
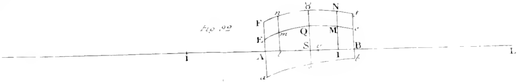
Fig. 93


Fig. 92


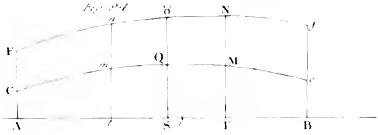
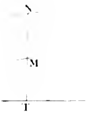


Fig. 94
n
o
N
F
Q
m
M
C
A
t
S
P
B


N
M
T

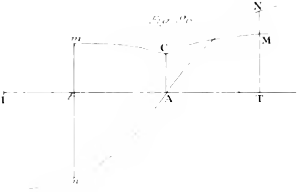
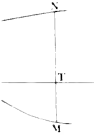


Fig. 96
N
m
C
M
I
t
A
T
n


N
T
M

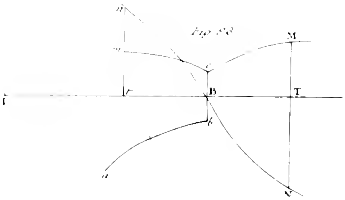

n
Fig. 98
M
m
c
I
t
B
T
b
a
N

Fig. 94

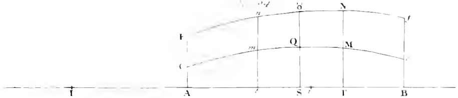


Fig. 95

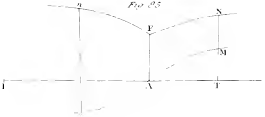


Fig. 96

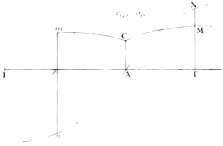


Fig. 97

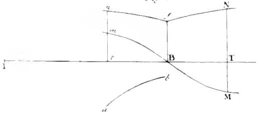


Fig. 98

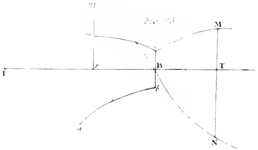
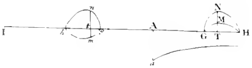


Fig. 99



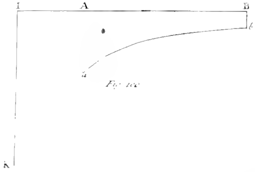


Fig. 100

Fig. 101

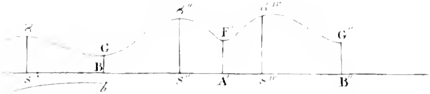


Fig. 102.

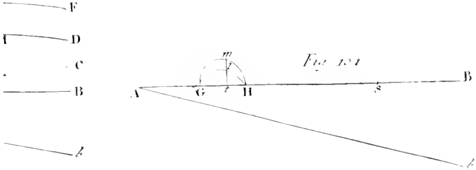
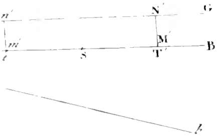
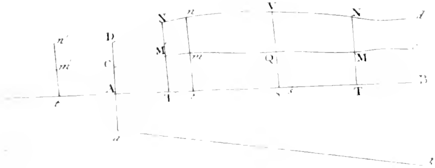


Fig. 104





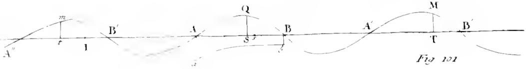


Fig. 101

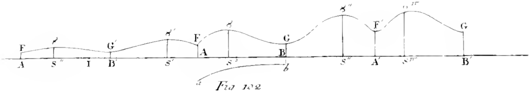


Fig. 102

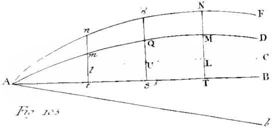


Fig. 103

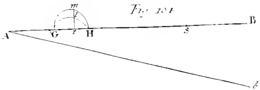


Fig. 104

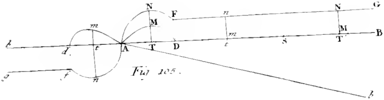


Fig. 105.

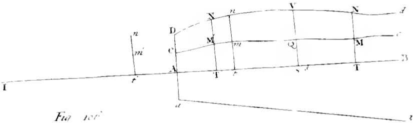


Fig. 106

Fig. 1.

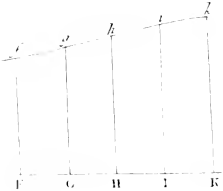


Fig. 1

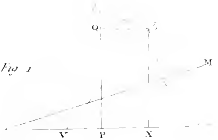


Fig. 2

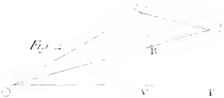
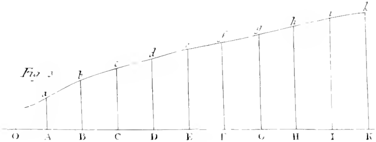


Fig. 3



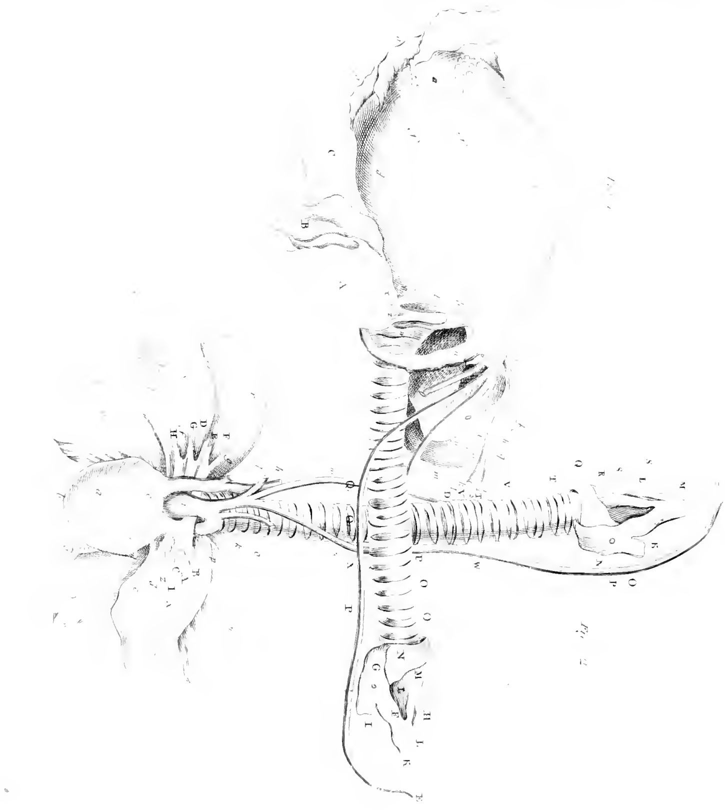


Fig. 3

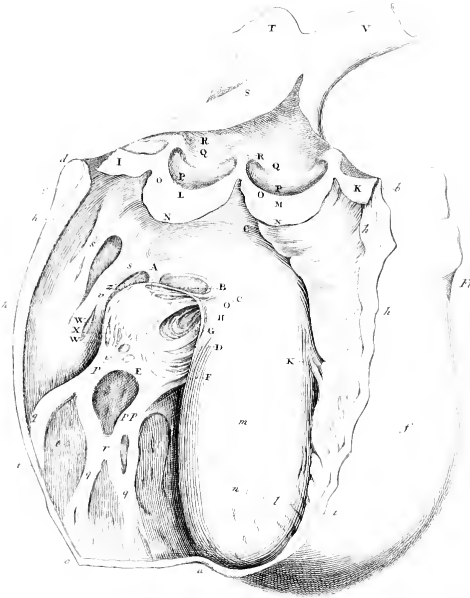
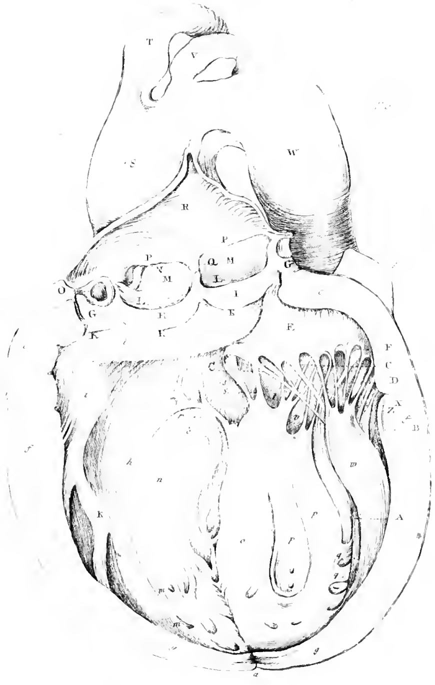


Fig. 3

Fig.
V
W
P
Ω
M
L
G
I
K
c
d
E
F
C
C
D
X
Z
B
m
p
p
A
o
q
q
g
a


T
V
S
W
R
P
P
N
Q
M
M
L
L
O
G
G
I
H
H
E
K
K
E
F
C
C
D
X
Z
B
h
n
w
K
p
A
o
q
q
m
m
g
a

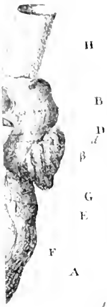


Fig. 2

Fig. 3.

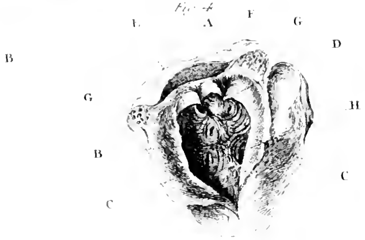
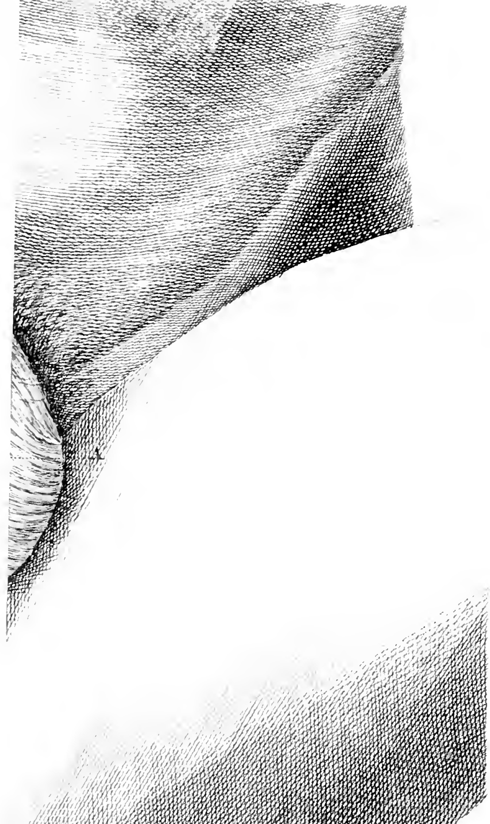
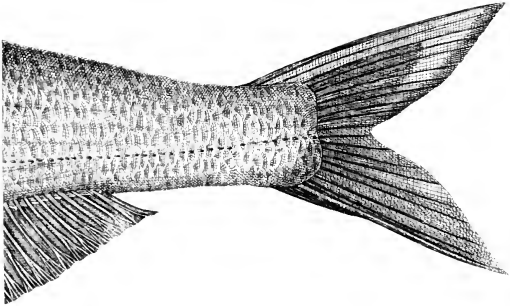
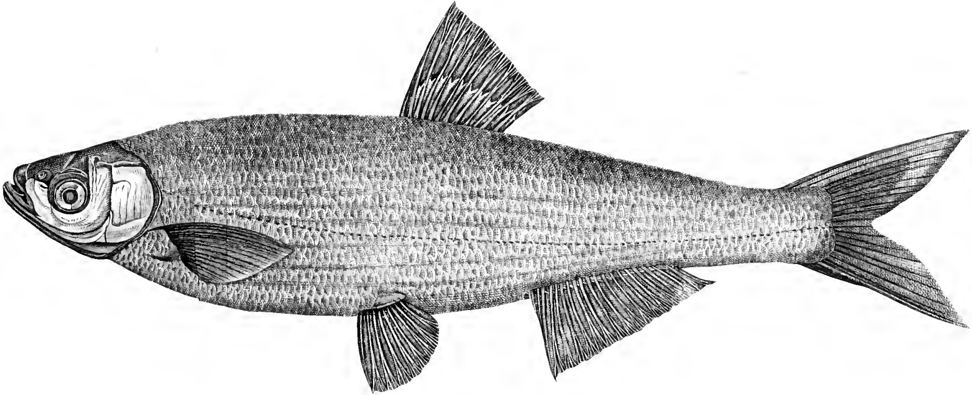


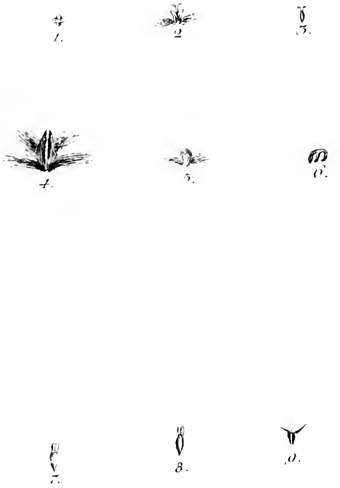
Fig. 4

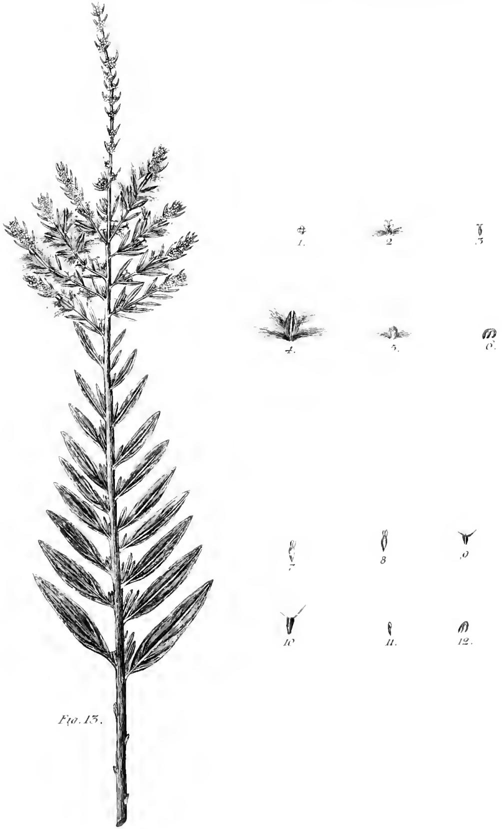

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5








1.
2
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.


1.
2
3
4.
5.
6.
7
8
9
10
11.
12.
Fig. 13.

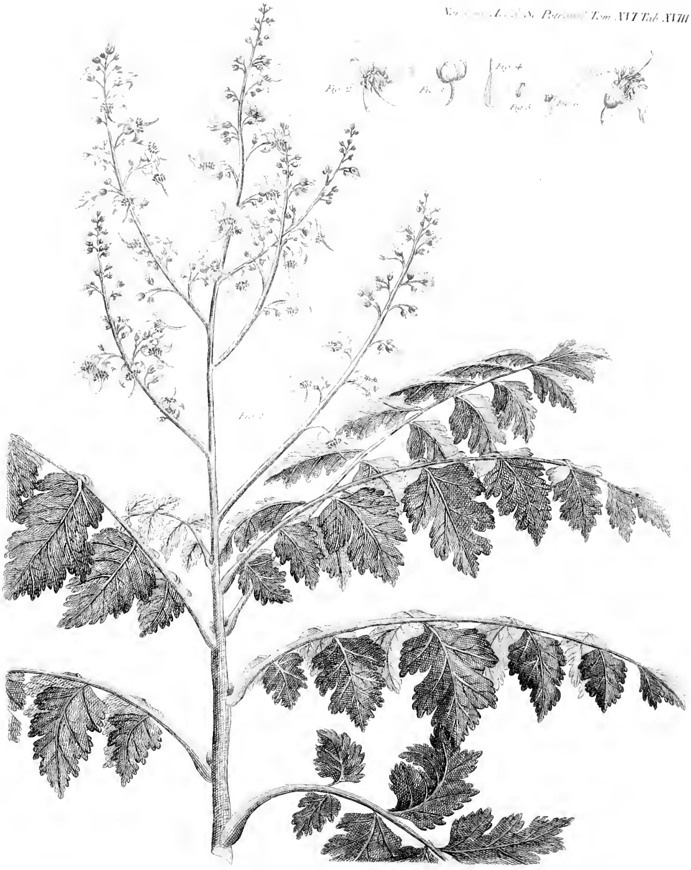


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6

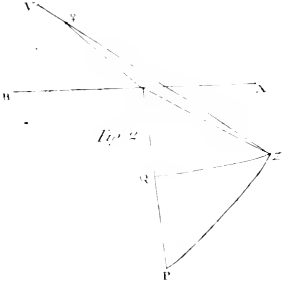
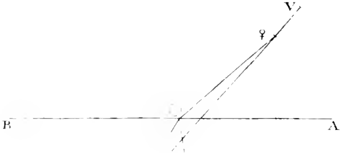


Fig. 2



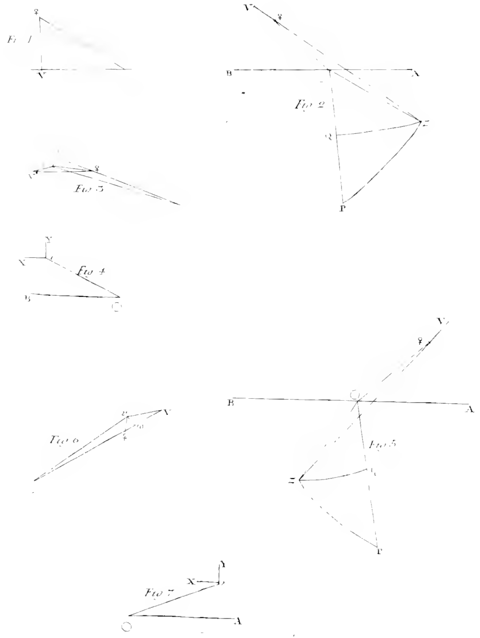
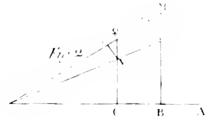
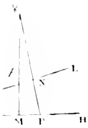
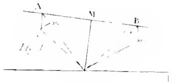


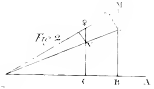
Fig. 1
Fig. 2
B
A
Z
Q
P
Fig. 3
Fig. 4
Y
X
B
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
A


M
Ω
Fig. 2
C
B
A


L
N
M
P
H


D
S


A
M
B
Fig. 1


M
Fig. 2
C
B
A

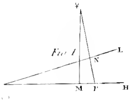
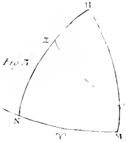


Fig. 4
L
N
M
P
H


H
Z
Fig. 3
N
M


C
D
S