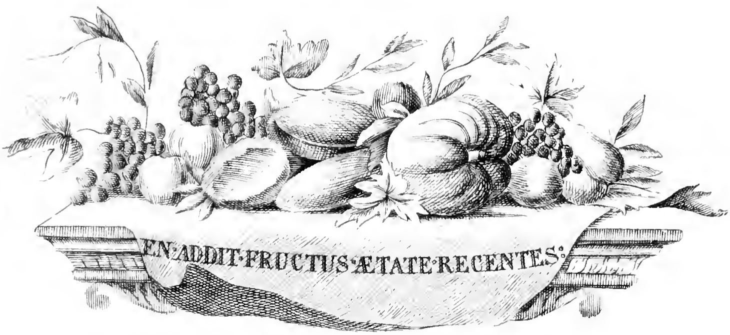
NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. IX.

pro Annis MDCCLXII. et MDCCLXIII.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXIV.

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS IX.

MATHEMATICA.

I.

De Resolutione Formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros.

Auctore Leon. Eulero pag. 3.

Consideratio numerorum, quamuis plerisque omni vsu carere videatur, tamen per se non solum admodum est iucunda, sed etiam animum ad veritatis indagationem non mediocriter acuit, eiusque vires quasi magis intendit. Maxime enim abundat doctrina numerorum veritatibus abstrusissimis, quarum inuestigatio et demonstratio tantam ingenii penetrationem postulat, vt nunquam cuncta, quae inuoluit, mysteria erui et explicari posse videantur. Quod certe eo magis mirum videri debet, quod numeri nusquam per se re vera existant, sed per solam abstractionem in mente formentur, qua primo quidem series numerorum naturalium ab vnitate in infinitum progredientium constituitur, tum vero ad interualla implenda numeri fracti et surdi, atque adeo transcendentes, introducuntur. Quorum generum tractatio etsi ad Arithmeticam referri solet, tamen in hac scientia insignes proprietates, quibus numeri sunt affecti, vix attinguntur, quippe quae vulgo tantum ad vſitatas numerorum operationes explicandas reſtringitur. Accuratius autem numerorum natura inueſtigatur in ea Analyſeos parte, quae ab antiquiſſimo auctore methodus Diophantea vocari ſolet, vbi eiusmodi problemata perpenduntur, quae in ſe ſunt indeterminata, atque infinitas ſolutiones admittunt, ex quibus autem eas elici oportet, quae numeris vel ſaltem rationalibus, vel integris tantum contineantur. Cuius methodi vis per exemplum clariſſime perſpicietur: Sumamus eiusmodi numeros quaeri debere, quorum quadrata duplicata vnitate aucta iterum fiant quadrata, ſeu vt forma $2xx-11$ extractionem radicis quadratae admittat. Quodſi fractiones non excludantur, huic quaeſtioni facillime ſatisfit, aequando formulam $2xx-11$ huic quadrato $(xy-1)^2$. Quia enim aequatio $2xx-11=xxyy-2xy-11$, vnitate vtrinque deleta, per x diuiſionem admittit, prodit $2x=xyy-2y$, hincque $x=\frac{2y}{yy-2}$, vbi quicunque numeri pro y accipiantur, ſiue integri, ſiue fracti, pro x ſemper eiusmodi numeri rationales reſultant, quibus formula $2xx-11$ euadit quadratum, quippe cuius radix quadrata futura $xy-1$. Qui numeri, quo facilius obtineantur, loco y ſcribi poteſt fractio $+\frac{p}{q}$, vnde prodit vel $x=\frac{2pq}{pp-2qq}$, vel $x=\frac{2pq}{2qq-pp}$. Hic igitur ſufficit, pro p et q numeros quoscunque integros accipi, veluti ſi capiatur $p=5$ et $q=3$, prodit $x=\frac{30}{7}$ qui eſt huiusmodi numerus, vt eius quadratum $\frac{900}{49}$ ſi duplicetur $\frac{1800}{49}$, et vnitas adiiciatur $\frac{1849}{49}$, ſumma haec ſit quadratum radice exiſtente $\frac{43}{7}$. Verum ſi pro x tantum nume-

numeri integri desiderentur, qui hac proprietate gaudeant, solutio modo data nihil vtilitatis affert, cum pro p et q eiusmodi numeri assumi deberent, vt $2pq$ diuisibile fieret per $pp-2qq$, quod non minus est difficile, quam ipsum problema, de quo agitur. Interim tamen hac conditione adiecta problema etiamnum recipit innumeras solutiones, et numeri pro x assumendi hac lege procedunt: 0, 2, 12, 70, 408, 2378, 13860, etc. vbi continuo sequens aequatur sextuplo vltimi demto penultimo, cuiusmodi series vocari solent recurrentes, vnde euidens est, harum solutionum multitudinem esse infinitam, etiamsi continuo rarius occurrant. Ideoque facile intelligitur, earum inuentionem multo magis esse arduam.

Cel. Auctor huius dissertationis methodum peculiarem exponit huiusmodi problemata facile resoluendi, quibus in genere omnis numeri integri pro x assumendi quaeruntur, vt haec formula $\alpha xx+\beta x-\gamma$ euadat numerus quadratus, dum α, β, γ denotant numeros quoscunque datos. Vbi primo quidem obseruat, solutionem non succedere, nisi α sit numerus positiuus non quadratus, tum vero necesse esse, vt vna saltem solutio iam aliunde sit cognita, cuiusmodi solutio vnica statim ac si praesto fuerit, quemadmodum inde omnes reliquae in infinitum inueniri queant, perspicue docet. Cum autem hoc problema iam alibi sit pertractatum, etsi methodo minus commoda, Auctor hic inprimis naturam huiusmodi problematum accuratius perscrutatur, et criteria elicit, quibus problemata huius generis impossibilia a possibilibus distingui possunt. Denotante scilicet α

nume-

numerum quemcunque positiuum non quadratum, quia expressionem superiorem semper ad hanc formam $\alpha xx + \gamma$ reuocare licet, ostendit, quinam numeri pro γ assumti problema reddant possibile, nec ne. Veluti si sit $\alpha = 3$, notum est, has formulas $3xx + 2$, $3xx + 5$, $3xx + 8$ etc. nunquam fieri posse quadratas. In maioribus autem numeris pro α sumtis hoc iudicium multo magis fit arduum; verum tamen Auctor criteria certissima indicat, quibus in omnibus casibus expedite vti licet, vbi multa, quibus miranda numerorum natura non mediocriter illustratur, occurrunt, et quae in aliis quaestionibus vsum insignem habitura videntur.

II.

De progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt.

Auctore L. Eulero pag. 40.

Plurimae iam passim traditae sunt methodi progressionum, in infinitum excurrentium, summas inuestigandi, in quo Analyseos genere cum ab aliis tum a Cel. *Eulero* insignia specimina sunt edita. Seriem autem fractionum continuo decrescentium, etiamsi in infinitum continuentur, summam habere posse finitam assignabilem, aduersus difficultates e principiis methaphysicis perperam intellectis petitas, nemo nunc quidem amplius in in dubium vocare fustinet, veluti ex primis adeo elementis oftendi poteft, huius feriei geometricae: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$ etc. in infinitum fummam binario effe aequalem. Quanquam autem haud difficulter iudicare licet, vtrum huiusmodi feriecum, quarum termini continuo fiunt minores, dummodo certa lege progrediantur, fummae fint finitae, nec ne? tamen faepe numero accidit, vt fumma, etiamfi certo fit finita, nihilo minus affignari nequeat, quemadmodum vfu venit in hac ferie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \frac{1}{33} +$ etc. cuius denominatores, quia vnitate fuperant praecedentes, fumma fine omni dubio minor eft, quam illius, neque vero eius verus valor vllo modo adhuc inueftigari potuit, ita vt is non folum non rationaliter, fed etiam non per numeros furdos, quin ne per tranfcendentes quidem vfu fatis tritas, cuiusmodi funt, quae vel a quadratura circuli, vel logarithmis pendent, exprimi poffe videatur. Simili modo haec fractionum feries: $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{43} +$ etc. cuius lex denominatorum differentiis fumendis, quae funt 4. 6. 8. 10. 12 etc. per fe eft perfpicua, etfi certe eft finita, nullo tamen quantitatum genere cognito exhiberi poteft: ex quo eo magis mirum videri debet, quod fi in circulo, cuius radius $= 1$, arcus capiuntur, quorum tangentes fint fucceffiue $\frac{1}{3}. \frac{1}{7}. \frac{1}{13}. \frac{1}{21}$ etc. horum omnium arcuum in infinitum continuatorum fumma affignari poffit, atque adeo quartae peripheriae parti fit aequalis.

In hac igitur differtatione Cel. Auctor plura huiusmodi ferierum genera perpendit, quarum termini finguli funt arcus circulares, quorum tangentes certo modo

modo progrediuntur, et quemadmodum ſummae earum pariter ad arcus circulares deduci queant, oſtendit. Methodum autem perfacilem proponit, innumerabiles huiusmodi ſeries ſummabiles inueſtigandi, in quo negotio ne calculus formulis nimis intricatis perturbetur, in ſubſidium vocat algorithmum quendam nouum ac peculiarem, cuius indoles in ſequentibus exponetur. Tum vero etiam theoriam fractionum continuarum in ſuperioribus voluminibus prolixius expoſitam ad has inueſtigationes felici ſucceſſu accommodat, ita vt iam huius generis ſeries perinde tractari poſſint, atque eae, quae per ſimplices fractiones progrediuntur, dum arcus illius, cui ſeriei ſumma aequatur, tangens ſatis concinne per fractionem continuam exprimi poteſt.

III.

Specimen algorithmi ſingularis.

Auct. L. Eulero pag. 53.

Accuratius inquirenti cur Analyſis mathematica aliis ſcientiis, quae in veritatis inueſtigatione verſantur, tantopere antecellat, mox patebit cauſam in idoneo et ſuccincto ſignorum vſu potiſſimum eſſe quaerendam. Cum enim in omni ratiocinatione ſermo atque vſus vocabulorum, quibus ideae plerumque ſatis complicatae deſignari ſolent, maximum affert ſubſidium, vt ſermone ſublato vix vllus rationis vſus nobis relinqui videatur; vtilitas horum ſigno-

ſignorum manifeſto in eo eſt poſita, quod eorum beneficio menti ideae valde compoſitae vno quaſi intuitu ſimul ita repraeſentantur, vt, ſi vim cuiusque ſigni, quantumuis eius ſignificatus fuerit complexus, ſemel intellexerit, id deinceps in mente vicem omnium idearum, quas comprehendit, gerat. Atque hoc idem per vniuerſam Analyſin mathematicam multo clarius cernitur, vbi omnes formulae in calculo receptae nihil aliud ſunt, niſi ſigna idonea, quibus ideae et operationes tantopere compoſitae menti vno quaſi ictu offeruntur, vt earum explicatio plerumque maximam verborum ambagem requireret; vbi hoc imprimis eſt obſeruandum, huiusmodi ſignum, cum eius vis ſemel fuerit percepta, menti deinceps perpetuo inſigni compendio vniuerſam rem ſignificatam repraeſentare. Quemadmodum ergo in communi ſermone ſingula verba ideas ſimpliciores in animo excitant, ita in Analyſi mathematica eiusmodi ſigna vſurpantur, quae ideas multo magis compoſitas animo ſimul exhibent, eundemque effectum praeſtant, ac ſi omnia verba eius ſignificatum explicantia ordine recitarentur; quae prolixitas, cum animum maxime eſſet diſtractura, vires etiam ingenii in comparatione plurium huiusmodi repraeſentationum plurimum eſſet perturbatura. Ex quo perſpicuum eſt, praeſtantiam Analyſeos vſui potiſſimum idoneorum ſignorum, quibus res maxime complicatae deſignantur, acceptam eſſe referendam. Veluti quoties in calculo analytico hanc formulam $\sqrt{(aa+bb)}$ conſpicimus, hoc ſigno menti oblato intelligimus, litteris a et b certas quantitates deſignari, quarum quadrata per addi-

 tionem

tionem coniungi, et ex ſumma radicem quadratam extrahi oportere; hancque radicem quadratam iſta formula indicari. Statim autem atque hunc ſignificatum probe percepimus, nobisque familiarem reddidimus, ſolus aſpectus huius formulae $V(aa+bb)$ vno quaſi ictu menti totam illam deſcriptionem repraeſentat, ita vt ea tanquam idea ſimplici in vlteriori inueſtigatione vti poſſit. Similis eſt ratio omnium reliquorum ſignorum in Analyſi receptorum, quae omnia ita ſunt comparata, vt iis quantitates, per certas ſaepiusque repetitas operationes natae, vno quaſi aſpectu menti diſtincte repraeſententur. Quodſi ergo eueniat, vt in Analyſi nouae quaedam operationes in vſum vocentur, nouoque modo inter ſe combinentur, ad calculi ſubſidium plurimum interea quantitates inde natas nouis iisque idoneis ſignis deſignari, vt iis deinceps ſimili ſucceſſu in calculo vti liceat. Cum igitur Cel. Auctor obſeruaſſet, in euolutione fractionum continuarum, quarum vſus in Analyſi eſt ampliſſimus, quantitates certo quodam modo per varias operationes inter ſe combinari, quantitates hinc ortas ſignis peculiaribus denotare ſtatuit, ſimulque ſpecimen noui algorithmi circa has quantitates exhibere decreuit, cuius vſum inſignem adeo iam in praecedente diſſertatione oſtendit, et in ſequentibus fortaſſe adhuc vberius eſt declaraturus. Propoſitis nimirum quotcunque numeris a, b, c, d, e, formula hoc ſigno expreſſa $(a, b, c, d, e,)$ numerum denotat per certas quasdam operationes inde oriundum, cuius valor per pauciores continuo procedendo ita ſe habet, vt, ſi nulla littera vncinulis includatur, veluti $()$ valor ſit perpe-

perpetuo vnitas; deinde ſi vnica littera ſit incluſa, vt (a), valor ſit hic ipſe numerus a. Hinc autem ſi plures litterae includantur, valores per praecedentes ſequenti modo definiuntur:

$$()=1$$
$$(a)=a$$
$$(a,b)=b(a)+()$$
$$(a,b,c)=c(a,b)+(a)$$
$$(a,b,c,d)=d(a,b,c)+(a,b)$$
$$(a,b,c,d,e)=(a,b,c,d)+(a,b,c)$$
etc.

circa numeros autem hoc modo natos plures eximias proprietates demonſtrat, veluti quod indicum ordine inuerſo idem valor ſemper reſultet, ſitque $(a,b,c,d,e)=(e,d,c,b,a)$ vnde plures aliae inſignes affectiones concluduntur.

IV.

De Reſolutione aequationum cuiusuis gradus.

Auct. L. Eulero pag. 70.

Quaeſtio hic verſatur circa aequationes algebraicas, quorum gradus aeſtimatur ex poteſtate ſumma quantitatis incognitae, cuius valorem inde determinari oportet, ita poſtquam huiusmodi aequationes ad debitam formam fuerint perductae, secundum gradus ita in genere repraesentari possunt:

gradus	aequationes
I.	$x + A = 0$
II.	$x^2 + Ax + B = 0$
III.	$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$
IV.	$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$
V.	$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$
VI.	$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$

etc.

Iam notum est, harum aequationum resolutionem in genere non vltra quartum gradum adhuc esse inuestigatam, quod eo magis mirandum videtur, quod cum secundus gradus iam ab antiquissimis Geometris Graecis et Arabibus, tertius vero et quartus iam pridem a Scipione ferreo et Bombello in ipsa quasi Analyseos infantia sint expediti, ab illo tempore, postquam Analysis summo studio est exculta, nondum vltra hos limites propredi licuerit. Cum autem constet, resolutionem cuiusque gradus ab omnibus gradibus inferioribus pendere, et quantitatem incognitam tot valores recipere, quoti gradus fuerit aequatio. Cel. Auctor huius dissertationis iam olim coniecturam proposuit, quod pro quouis gradu, veluti quinto $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$, detur aequatio vno gradu inferior, vti $y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta = 0$, quam vocat illius resoluentem, ita vt si huius radix fuerit p, q, r, s, illius radix ita se sit habitura $x = f + \sqrt[5]{p} + \sqrt[5]{q} + \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{s}$, vbi quidem perspicuum est, fore $f = -\frac{1}{5}A$, quae coniectura eo minus

minus ratione destituta videtur, quod non solum cum resolutione cognita aequationum secundi, tertii et quarti gradus egregie consentiat, sed etiam casus illos resolubiles particulares altiorum graduum a *Moivraeo* olim detectos in se complectatur. Nunc autem Cel. Auctor animaduertit istius coniecturae formam, qua verbi gratia aequationis quinti gradus radix ita exprimitur: $x = f + \sqrt[5]{p} + \sqrt[5]{q} + \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{s}$, nondum satis esse limitatam. Cum enim singulae hae formulae radicales quinos diuersos valores natura sua inuoluant, facile intelligitur, non omnes combinationes eorum locum habere posse, quia alioquin numerus diuersorum valorum ipsius x in immensum excresceret, quem tamen quinarium superare non posse certum est. Formam igitur illam nimis vagam nunc ita restringit, vt statuat aequationis quinti gradus radicem ita in genere exprimi: $x = f + \mathfrak{A}\sqrt[5]{p} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{p^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{p^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{p^4}$, similique modo de reliquis gradibus; vbi iam perspicuum est, plures, quam quinque diuersos valores, pro x locum habere non posse. Statim enim ac significatus partis $\sqrt[5]{p}$ definitur, quod quinque modis fieri potest, simul etiam reliquae partes determinantur. Deinde etiam patet, expressionem pro casu allato non plures, quam quinque partes, complecti posse, quoniam formulae vlteriores $\sqrt[5]{p^5}$, $\sqrt[5]{p^6}$ etc. sponte ad praecedentes redirent, neque nouam irrationalitatem implicarent. Hanc igitur nouam coniecturam quam pulcre cum resolutionibus iam cognitis consentiat, ostendit, et quamuis ex hoc fonte minime adhuc aequationum quartum gradum superantium

tium reſolutionem in genere perficere liceat, tamen hinc pro ſuperioribus gradibus alios inſuper caſus reſolubiles praeter *Moivreanos* deducit, vnde non parum luminis in hanc maxime abſconditam Analyſeos partem redundare videtur.

V.

De numeris primis valde magnis.

Auctore L. Eulero pag. 99.

Cum primum a *Pellio*, ac deinceps ab aliis, tabula numerorum primorum ad centena millia vsque ſit conſtructa, nunc quidem propoſito quocunque numero hunc limitem non ſuperante facillime iudicare licet, vtrum is ſit primus, nec ne? atque adeo ex iſta tabula pro lubitu numeri primi excerpi poſſunt, ſi forte vſus exigat, qui quidem centena millia non excedant. Verum ſi quis deſideret numeros primos hoc termino maiores, nonniſi exantlato immenſo fere labore, voti ſui compos reddi poterit, quandoquidem alia methodus numeros primos inueſtigandi vix patet, niſi vt ſucceſſiue omnes numeri per alios minores diuiſibiles expungantur, quippe quo facto numeri primi ſoli relinquentur. Quin etiam propoſito numero praegrandi, vtrum is ſit primus, nec ne? ante pronunciare non licet, quam eius diuiſio per omnes numeros primos, eius radice quadrata minores, fuerit tentata. Ita ſi quis quaerat, vtrum

hic

hic numerus 2237791 primus ſit, nec ne? diuiſionem per omnes numeros primos vsque ad 1496 tentare cogitur, hocque labore maxime taedioſo ſuſcepto tandem diuiſionem per 1481 ſuccedere deprehendet. Ex quo patet problema olim inter *Fermatium* et *Wallisium* tractatum, quo methodus certa requiritur, numeros primos dato quouis maiores inueſtigandi, maxime eſſe arduum, atque adeo vires ingenii humani ſuperare, poſtquam ſolutio a *Fermatio* tradita iam olim ab Auctore huius diſſertationis eſt profligata. Quin etiam quaeſtio iam maxime difficilis eſt reputanda, ſi numeri primi centenis millibus vel adeo vno millione maiores deſiderentur. Interim tamen in hac diſſertatione methodus ſatis expedita traditur hoc praeſtandi, dum Auctor alios numeros non contemplatur, niſi qui vnitate ſuperent quadratos, ſeu in hac forma $aa+1$ ſint contenti. Cum enim huiusmodi numeri alios diuiſores non recipiant, niſi qui ipſi ſint duorum quadratorum aggregata, atque adeo in hac forma $4m+1$ contineantur, ex ſerie numerorum formae $aa+1$ quamuis longe continuata, quae quidem ſeries mox ad maximos numeros excreſcit, facili negotio numeri compoſiti expunguntur, ita vt de relictis certi ſimus, eos eſſe primos. Huius igitur artificii beneficio labore non nimis operoſo omnes numeros primos formae $aa+1$ vltra binos milliones eſt adeptus, quos in tabula peculiari complexus eſt; vnde iam certo conſtat, hunc v. gr. numerum praegrandem 2232037 eſſe primum, quae veritas ſi more conſueto eſſet exploranda, diuiſionem per omnes numeros primos vsque ad 1494 tentari oporteret. Quo autem multitudo huius modi grandium numerorum primorum magis augeatur, etiam eos caſus indicat, quibus formulae $\frac{aa+1}{2}$ et $\frac{aa+1}{5}$ praebent numeros primos.

VI.

De Reſolutione aequationis $dy + ayydx = bx^m dx$.

Auctore L. Eulero pag. 154.

Aequatio haec, iam dudum a Comite *Riccati* Geometris propoſita, tanto ſtudio a ſummis ingeniis eſt pertractata, vt vix quicquam noui circa eius reſolutionem proferri poſſe videatur. Statim quidem infiniti valores pro exponente m aſſumendi ſunt obſeruati, quibus integrale exhibere liceat, qui valores hac ſerie progrediuntur: $0 - 4 - \frac{3}{4}, - \frac{8}{3} - \frac{8}{5} - \frac{12}{5}, - \frac{12}{7}, - \frac{16}{7} - \frac{16}{9}$ etc. ac methodus, qua hi caſus ſunt euoluti, ita erat comparata, vt ex cognito cuiusque caſus integrali, integrale ſequentis definiretur, neque adeo caſuum poſteriorum integralia exhiberi poſſent, niſi iam omnes antecedentes fuerint expediti. In hac autem diſſertatione id praeſtatur, vt vnica operatione omnium illorum caſuum integralia ſimul eruantur, indeque ſtatim vel centeſimi caſus integrale aſſignari poſſit. Methodus, qua hoc commodi eſt aſſecutus, omnino eſt ſingularis, dum primo aequationem

nem propoſitam, ope certae ſubſtitutionis, in aliam, quae adeo differentialia ſecundi gradus inuoluit, transformat, eamque deinceps per ſeriem infinitam integrat, quae autem ſeries ita eſt comparata, vt ſupra memoratis caſibus alicubi abrumpatur, expreſſionemque finitam ſuppeditet, vnde integrale quaeſitum facillime colligatur. Verum tamen omnia haec integralia non niſi ſunt particularia, neque totam vim aequationis differentialis propoſitae exhauriunt, deinde etiam, quoties quantitas b eſt negatiua, imaginariis ita inquinantur, vt omni plane vſu deſtituantur. Vtrique incommodo Cel. Auctor ita medetur, vt primo methodum exponat, ex cognito huiusmodi aequationum integrali quopiam particulari integrale completum eliciendi, quod ſi quantitas b fuerit poſitiua, quantitates exponentiales implicat: deinde vero oſtendit, quomodo iſtae quantitates exponentiales, quae, exiſtente b negatiuo, fiunt imaginariae, per tangentes arcuum circularium realiter exprimi queant. Denique cum methodus illa, ex integrali particulari completum eliciendi, certam quandam integrationem exigat, quae moram faceſſere queat, etiam huic incommodo occurrit, dum obſerua, tpro quouis caſu primam euolutionem non vnum, ſed adeo duo integralia particularia, praebere, quoniam ibi formula radicalis $\sqrt{b}$ ingreditur, quam aeque negatiue, ac poſitiue, accipere licet. Alia igitur methodo vtitur, cuius ope ex cognitis duobus integralibus particularibus integrale completum, ſine vlla noua integratione, concludi queat. Quod cum ab eo, quod priori methodo erat erutum, diſcrepare nequeat, ex vtriusque collatione integrationem priori implicatam efficere licet, vnde poſtremo hanc integrationem maxime memorabilem deducit, quod ſit

$$\int \frac{e^{\frac{2ac}{n}x^n}\, dx}{uu} = \frac{Ce^{\frac{2ac}{n}x^n} z - u}{Cu(2acx^{n-1}uz + \frac{udz}{dx} - \frac{zdu}{dx})}$$

vbi quantitates z et u per x ita definiuntur, vt ſit:

$$z = x^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8nac}.x^{\frac{-3n+1}{2}} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n\,16na^2c^2}x^{\frac{-5n+1}{2}} + \text{etc.}$$

$$u = x^{\frac{-n+1}{2}} - \frac{(nn-1)}{8nac}x^{\frac{-3n+1}{2}} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n\,16na^2c^2}x^{\frac{-5n+1}{2}} - \text{etc.}$$

Cum igitur hae formae z et u adeo in infinitum excurrere queant, eo magis eſt mirandum, quod formula $e^{\frac{2ac}{n}x^n}\frac{dx}{uu}$ integrale, idque per expreſſionem ſatis ſimplicem, exhiberi poſſit. Tum vero etiam hoc conſuetae integralium formae aduerſari videtur, quod quantitas conſtans arbitraria C, per integrationem ingreſſa, quae alioquin nude adiicitur, hic ipſi formae integrali ſit implicata. Quod ſingulare phaenomenon ſi attentius perpendatur, mox patebit, integrationem illam veritati conſentaneam eſſe non poſſe, niſi denominatoris pars

$$2acx^{n-1}uz + \frac{udz - zdu}{dx}$$

fuerit quantitas conſtans, puta A; tum enim iſtud integrale in formam naturalem abit:

$$e^{\frac{2ac}{n}x^n}\frac{z}{Au} - \frac{1}{AC}.$$

Num autem res ita ſe habeat, hoc modo explicari poteſt: Quoniam quantitates z et u per ſeries exprimuntur, easque ipſas, quae initio ex euolutione aequationis

nis differentialis secundi gradus sunt eruta, vicissim patet, eas ita pendere ab x, vt sit:

$ddz + 2acx^{n-1}dxdz + (n-1)acx^{n-2}zdx^2 = 0$ et

$ddu - 2acx^{n-1}dxdu - (n-1)acx^{n-2}udx^2 = 0$.

Nunc prior aequatio per u, posterior vero per z, multiplicetur, ac productorum differentia dabit

$uddz - zddu + 2acx^{n-1}dx(udz + zdu) + 2(n-1)acx^{n-2}uzdx^2 = 0$,

cuius integrale manifesto est

$$udz - zdu + 2acx^{n-1}uzdx = A dx.$$

Cum autem, facto $ac = \infty$, fiat $u = z = x^{\frac{-n+1}{2}}$ et $uz = x^{-n+1}$, euidens est, statui debere $A = 2ac$, sicque integratio superior abit in hanc formam:

$$\int e^{\frac{2ac}{n}x^n}\frac{dx}{uu} = e^{\frac{2ac}{n}x^n}\frac{z}{2acu} - \text{Const.}$$

quae non solum principiis est conformis, sed etiam, facta differentiatione, ob

$$udz - zdu = 2acdx(1 - x^{n-1}ux)$$

eius veritas egregie confirmatur. Hinc autem iam aequationis $dy + ayydx = accx^m dx$, posito $m = 2n-2$, et quantitatis z valore per superiorem seriem expresso, integrale multo succinctius ita exhiberi poterit, vt sit:

$$y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} + \frac{2Cce^{\frac{-2ac}{n}x^n}}{z(Cz - Ce^{\frac{-2ac}{n}x^n}u)} \quad \text{seu}$$

$$y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} + \frac{2c}{z(De^{\frac{2ac}{n}x^n}z - u)}$$

vbi D est illa constans arbitraria per integrationem iniecta ad integrale completum constituendum.

VII.

Inueſtigatio functionum ex data differentialium conditione.

Auctore L. Eulero pag. 110.

In ſuperiori volumine a Cel. Auctore huius diſſertationis iam nouus quaſi campus Analyſeos infinitorum eſt detectus, in quo colendo Geometrae vires ſuas ad ſummum vniuerſae matheſeos ſublimioris incrementum exercere queant. Poſtquam enim obſeruaſſet omnia praecepta, quae vulgo circa differentiationem et integrationem tradi ſolent, ad functiones tantum vnicae variabilis referri, ita vt etiamſi plures variabiles in calculo occurrant, tamen ſemper per eliminationem negotium eo perduci debeat, vt tandem ad aequationem duas tantum variabiles complectentem perueniatur, ex qua, qualis altera alterius ſit functio, definiri oporteat. Hinc iſtam Analyſeos partem, quae adhuc fere ſola eſt exculta, ita definiuit Auctor, vt ſit methodus functionem vnius variabilis ex data eius differentialium cuiusque gradus conditione inueſtigandi, ex quo ſecunda Analyſeos pars circa functiones binarum variabilium verſari eſt cenſenda, ita vt ex data quapiam relatione inter eius differentialia eius vera indoles inueſtigari debeat, quae inueſtigatio denuo in partes ſubdiuidetur, prout in relationem illam differentialia, vel tantum primi, vel etiam ſecundi, altiorumue ordinum ingrediantur.

diantur. Iam in hac dissertatione prima istius subdiuisionis elementa stabiliuntur, atque variae methodi proferuntur, functiones binarum variabilium indagandi, ex data quacunque differentialium primi gradus relatione. Quodsi nimirum littera V denotet functionem quamcunque binarum variabilium x et y, quas a se inuicem prorsus independentes intelligi oportet, ita vt vtramque seorsim per omnes valores variare liceat, geminas inde formulas differentiales nasci, est manifestum, hoc modo indicari solitas $(\frac{dV}{dx})$ et $(\frac{dV}{dy})$, quarum illa ex variatione solius x, haec vero solius y oritur, vtraque autem est quantitas finita, et more solito ita per differentiationem reperitur, vt, si differentiatio praebeat $dV = Pdx + Qdy$, vbi sine dubio litterae P et Q iterum erunt certae functiones ipsarum x et y, futurum sit $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$. Nunc igitur omnes quaestiones huc pertinentes ita sunt comparatae, vt data quacunque relatione inter quantitates x, y, V, et P, Q, inde litterae P et Q eliminentur, et aequatio ab illis libera tantum inter x et y et V indagetur, quippe qua indoles functionis V, quemadmodum a binis x et y pendet, declarabitur. Cum autem, quando de functionibus vnicae variabilis agitur, plurimae quaestiones adhuc calculi vires superent, tum hoc idem multo magis in his quaestionibus circa duas variabiles vsu venit, vt numerus earum, quas quidem resoluere licet, admodum sit limitatus, praesertim hoc tempore, quo ista noua Analyseos pars demum tractari est coepta. Interim tamen methodi, quas Auctor hunc in finem excogitauit, mox vberiorem tractationem polliceri videntur.

PHYSICO-

PHYSICO - MATHEMATICA.

I.

De motu vibratorio fili flexilis corpusculis quotcunque onusti.

Auctore L. Eulero pag. 215.

Problema hoc, iam ab aliis solutum, Cel. Auctor hic ita tractat, vt id ad solutionem generalem problematis de cordis vibrantibus accommodet. Postquam enim motus omnes, cuius corda tensa et aequaliter crassa est capax, facili constructione determinasset, plures obiectiones contra hanc solutionem, a more Analyseos solito recedentem, est expertus, quarum vis eo potissimum erat directa, vt, nisi cordae initio certa quaedam figura fuerit inducta, eius motus nullo plane modo per Analysin definiri posse asseueraretur, quamvis negari non posset, ad quamcunque figuram corda initio fuerit detrusa, ea demissa certum quendam motum necessario subsequi debere. Controuersia igitur non tam in hoc agitabatur, quod Auctoris solutio sit, erronea, sed quod problema ipsum ita sit comparatum, vt nullam plane solutionem admittat, atque adeo nefas sit, solutionem a quoquam tentari. Facile quidem Auctor concedebat, solutionem a se datam a consueto more huiusmodi problemata resoluendi discrepare, atque adeo vires Analyseos adhuc plerumque excultae superare, scilicet ideo

ideo ista Analyseos pars huiusmodi quaestionibus soluendis non sufficit, quia in functionum tantum vnicae variabilis inuestigatione versatur; indeque enim certe nunquam eiusmodi solutionem obtinere licet, quae curuam quamcumque, pro lubitu ductam, nullaque certa lege contentam, qualis forte cordae initio fuerit impressa, in se complecteretur. Verum vel hoc exemplo alterius illius Analyseos partis supra laudatae vis maxime eluceti, ex qua sola huius problematis solutio est petenda. Durante enim cordae motu, interuallum, quo punctum eius quoduis a situ naturali distat, re vera, vt functio duarum variabilium, debet tractari, quoniam id non solum a loco puncti in corda, sed etiam a tempore iam elapso, pendet. Docuit vero Cel. Auctor, quoties per integrationes ad huiusmodi functiones deducimur, tum non, vti in integrationibus vulgaribus, quantitatem constantem arbitrariam in calculum inuehi, sed eius loco adeo functionem arbitrariam cuiuspiam variabilis, quam deinceps hoc casu chordarum ita determinari oporteat, vt ad figuram illam prorsus arbitrariam, quae cordae initio fuerit inducta, accommodetur. Quam insignem obseruationem cum Auctor postmodum demum clarissime illustrasset, in hac disquisitione, loco cordae, filum perfecte flexile ponduscculis quotcunque onustum, dataque vi tensum, considerat, et postquam singula ponduscula a situ naturali pro lubitu vtcunque fuerint diducta, subitoque dimissa, motum eorum secuturum determinat; quod cum sine subsidio sublimioris illius Analyseos partis praestari queat, siquidem singulorum corpusculorum motus seorsim indagare licet, ex ipsa so-

 lutio-

lutione luculenter apparet, motum huiusmodi fili, quotcunque ponduſculis onuſti, ſemper analytice aſſignari poſſe, quomodocunque ſingula ponduſcula initio a ſitu naturali fuerint deducta. Nunc igitur, tam ponduſcula, quam eorum interualla, in infinitum diminuantur, vt hoc modo corda continua craſſitie praedita exoriatur, quo facto nulli quoque dubio relinquetur locus, quin huiusmodi cordae motus, poſtquam ipſi initio figura quaecunque fuerit inducta, per Analyſin determinari poſſit. Ad hoc vero neceſſario altera illa Analyſeos pars, circa functiones binarum variabilium occupata, requiritur, neque iam amplius de ſolutione generali, quam Auctor pro motu cordarum vibrantium inuenit, dubitare licebit. Caeterum inter infinitos motus, quos tale filum ponduſculis onuſtum recipere poteſt, et qui plerumque maxime ſunt irregulares, imprimis notaſſe iuuabit, dari quoque motus ſpecies regulares, aequalibus vibrationum interuallis diſtinctas, quae propterea ſonos determinatos edant. Si tam interualla, quam ponduſcula, ſint aequalia, filum duobus onuſtum duos ſonos edere poteſt, qui ſunt inter ſe, vt ſinus angulorum 30° et 60°, hoc eſt, vt 1 ad $\sqrt{3}$; filum autem tribus onuſtum tres ſonos edere poteſt, qui ſunt inter ſe, vt ſeries angulorum $22\frac{1}{2}^\circ$ 45°. et $67\frac{1}{2}^\circ$; quatuor vero ponduſculis onuſtum quatuor ſonos, qui ſunt, vt ſinus angulorum $18^\circ.36^\circ$ $54^\circ 72^\circ$. et ita porro, qui ergo ſoni plerumque ſunt irrationales inter ſe, ac propterea maxime diſſoni.

II.

II.

De motu cordarum inaequaliter crassarum.

Auctore L. Eulero pag. 246.

Notum est inter musicos, cordas, quibus in instrumentis musicis vti solent, sonos harmoniae aptos non edere, nisi eae per totam longitudinem eandem vbique habeant crassitiem, atque a cordis inaequaliter crassis sonos rudes et maxime ingratos produci, ex quo huiusmodi cordae falsae appellantur. Quod autem cordae aequaliter crassae sonos ad musicam idoneos edant, id non solum inde venit, quod earum vibrationes aequalibus temporis interuallis absoluantur, sicque sonum certi tenoris exhibeant, sed etiam potissimum eam ob causam, quod eadem corda pulsata, praeter sonum principalem, simul alios sonos acutiores auditui percipiendo offerat, qui cum principali gratissimam harmoniam constituant. Huiusmodi scilicet corda pulsa, praeter sonum principalem, alii soni, cum octaua, tum duodecima, porro duplici octaua, seu decima quinta, ac denique decima septima altiores, debiliter quidem, sed satis distincte, percipiuntur, qui soni, cum ad principalem sint, vt numeri 2, 3, 4, 5, ad vnitatem, egregia harmonia sensum auditus permulcent. Quomodo autem hi soni ab eadem corda simul producantur, quo phaenomeno plerisque vniuersa motus vibratorii theoria

 euerti

euerti eſt viſa, primum ab acutiſſimo Geometra *Daniele Bernoulli* feliciſſime eſt explicatum. Qui autem hanc rationem minus perſpexerunt, mira myſteria in his ſonis ab eadem corda ſimul editis quaeſiuerunt, inter quos adeo peritiſſimus rei muſicae artifex Gallus *de Rameau* principium vniuerſae harmoniae in hoc phaenomeno ſe feliciter detexiſſe gloriatur. Non ideo ſcilicet plures ſonos ſuauem harmoniam auribus exhibere arbitratur, quod vibrationum eodem tempore editarum numeri ſimplicem ac perceptu facilem inter ſe teneant rationem, quemadmodum omnes ſcriptores muſici adhuc ſtatuerunt, ſed potius, euerſo hoc principio indoli vibrationum innixo, ideo plures ſonos nobis placere, ſi ab eodem corpore ſonoro ſimul excitari queant: hoc modo putat verum harmoniae principium nobis ab ipſa natura declarari, neque id alibi quaeri oportere. Verum praeterquam quod ſententia recepta circa harmoniae principium ſolidiſſimis rationibus ſit confirmata, neque ea tali phaenomeno, quod ab eodem corpore plures ſoni harmonici ſimul edi queant, infringatur; haec noua opinio, omni ratione deſtituta, penitus refelletur, ſtatim atque eiusmodi corpora ſonora in natura exiſtere oſtendentur, quae ſimul plures ſonos minime harmonicos edant. Huiusmodi autem exempla iam in ſuperiori diſſertatione ſunt prolata, vbi a filo pluribus corpuſculis onuſto eiusmodi ſoni diuerſi edi poſſunt, qui, dum ne rationalem quidem rationem inter ſe tenent, maxime ab harmonia abhorrent, cuiusmodi plurima alia exempla in corporibus ſonoris, veluti campanis, laminis elaſticis, aliisque, in medium proferri poſſent. Idem

quoque

quoque in cordis inaequaliter craſſis plerumque vſu venit, quarum motum vibratorium Auctor in hac diſſertatione definire eſt aggreſſus. Verum haec inueſtigatio tantis implicatur difficultatibus, vt non niſi pro certis inaequalitatis legibus expediri poſſit, idque euenit ob defectum illius alterius Analyſeos partis iam ſaepius memoratae, quae circa integrationem functionum duas variabiles inuoluentium occupatur, et quae minime adhuc eousque eſt exculta, vt cordae, vtcunque inaequaliter craſſae, motus vibratorius inde definiri poſſit. Duos igitur tantum caſus Auctor expediuit, alterum, quo cordae craſſities ſecundum certam figuram conicam varíatur, alterum vero, quo corda ex duabus partibus diſparibus eſt compoſita, cuiusmodi oritur, ſi duae cordae ordinariae, altera craſſior, altera tenuior, connectantur. Talium cordarum motum ſemper fore maxime irregularem, neque idcirco vlli ſono muſico edendo aptum, obſeruat Auctor, niſi partium longitudo reciprocam teneat rationem diametri craſſitiei, quo ſolo caſu corda perinde ſonabit, atque corda vbique aequaliter craſſa. Praeterea vero quoque ſub certis tantum conditionibus vibrationes iſochronae naſci poſſunt, quas Auctor accurate inueſtigat, ad quod cum calculus ſatis prolixus requiratur, quem in genere expedire haud licet, caſum euoluit, quo ambae partes paris ſint longitudinis, pondus autem alterius altero quadruplo ſit maius; calculoque abſoluto inuenit, talem cordam plures ſonos ſimul edere, qui ſint inter ſe, vt hi numeri 0,30408; 0,69591; 1,30408; 1,69591; 2,30408 etc. qui cum ſint incommenſurabiles, maxime quoque erunt diſſoni, etiam ſi ab eodem corpore ſonoro ſimul edantur. Denique Auctor iterum ad cordas vtcunque inaequaliter craſſas reuertitur, atque in eos caſus inquirit, quibus ſaltem vibrationes iſochronae produci queant, poſtquam ſcilicet corda initio certo quodam modo fuerit impulſa, hocque ſimilibus caſibus euenire obſeruat, quibus aequationem *Riccatianam*, de qua ſupra eſt actum, reſoluere licet.

III.

Thermometri metallici deſcriptio.

Auctore I. E. Zeihero p. 305.

Omnium thermometrorum ratio huic innititur phaenomeno vniuerſali, quod omnia corpora calore in maius volumen expanduntur, frigore autem in minus contrahuntur. Quodſi ergo cuiusque corporis verum volumen quauis tempeſtate exactiſſime dimetiri liceret, mutatio in caloris gradu facta inde commode diiudicari poſſet, nihilque referret, ſiue corpus illud foret ſolidum, ſiue liquidum; etiamſi forte vera caloris quantitas perperam incremento voluminis proportionalis cenſeatur. Quantumuis autem iſtud thermometrorum principium firmum videatur, et ad ſcopum egregie accommodatum, id tamen in ſe ſpectatum omni plane vſu deſtitueretur, niſi ſingularis conditio ei eſſet adiuncta, qua fit, vt ab eodem caloris gradu in diuerſis corporum generibus omnino diſpares voluminis expanſiones

ſiones producantur, quam circumſtantiam auctores non ſemper ſatis ſollicite perpendiſſe videntur. Quodſi enim omnia corpora pro ratione magnitudinis ab eodem gradu caloris aequalia voluminis incrementa acciperent, nullo plane modo, nobis quidem, has mutationes, quantumuis fuerint magnae, obſeruare liceret, quandoquidem etiam menſurae, quibus vti conſueuimus, parem mutationem ſubirent, ſicque perpetuo ad corpora menſuranda eandem rationem conſeruarent. Neque ergo thermometra vulgaria, etiam in maxima tempeſtatis commutatione, vllam variationem eſſent indicatura, ſi vitrum pari expanſioni a calore oriundae eſſet obnoxium, atque liquor in eo contentus. Ex quo haec thermometra eatenus tantum variationi caloris ac frigoris indicandae ſunt apta, quatenus liquor, quo tubi vitrei cum bulla ſubnexa impleri ſolent minorem mutationem a calore patitur, quam ipſum vitrum; quin etiam neceſſe eſt, vt mutatio vitri multo ſit minor, quam liquoris, quia alioquin effectus parum eſſet ſenſibilis. Hoc idem ergo quoque de corporibus ſolidis, quae ad ſimilem effectum producendum fuerint adhibenda, erit tenendum, vt ſcilicet parietes, vel alius generis ſuſtentacula, iuxta quae menſura inſtitui debet, multo minus a calore afficiantur, quam virgae illae, vel bacilli, ex quorum expanſione gradum caloris diiudicari oportet. Pluribus igitur experimentis edoctus obſeruauit ſolertiſſimus Auctor, in hunc finem optimo ſucceſſu bacillos, ſeu cylindros, metallicos adhiberi poſſe, inter quos argenteos, ſeu ſaltem cupreos, eligendos potiſſimum arbitratur, quod non ſolum a caloris mutatione inſignem variationem accipiant, ſed etiam prae-

praegrandem caloris gradum ſine fuſione ſuſtinere queant. Tum vero modum excogitauit, plures huiusmod cylindros ita inter ſe adaptandi, vt mutationes ope vectium indicandae tandem quantumuis magnae reddantur, neque vero et hunc effectum expectari poſſe euidens eſt, niſi paries, vel fulcrum, in quo, tanquam corpore fixo, hypomochlia illorum vectium conſtituuntur, multo minorem expanſionem ab aucto calore patiantur. His circumſtantiis probe perpenſis nullum eſt dubium, quin huiusmodi noua thermometra metallica aeque commode ad tempeſtatis mutationes indicandas vſurpari queant, atque vulgaria, ſiue ſpiritu vini, ſiue mercurio, impleri ſolita.

IV.

Thermometrorum punctis conſtantibus gaudentium emendatio.

Auctore I. E. Zeihero p. 314.

Nimis ſaepe euenire ſolet, vt cum thermometra omni cura fuerint conſtructa, ac praecipue ſcalae diviſionum, in tabulis metallicis nitidiſſime elaboratae, tum, diffracto forte tubo vitreo, omnis opera pereat, neque eadem ſcala deinceps iterum ad ſimilem ſcopum adhiberi poſſit. Graduum enim in ſcala exſculptorum magnitudo ita pendet a ratione, quam tubi amplitudo tenet, ad bulbi capacitatem, vt niſi in duobus huiusmodi inſtruftrumentis haec ratio exactiſſime fuerit eadem, quod certe rariſſime contingit, eadem iis inſeruire nequeat. Hinc Cl. Auctor remedium ingenioſe excogitatum proponit, quod in hoc conſiſtit, vt tubo thermometrico loco bulbi vitrei capſula ferrea adaptetur, quae ope cochleae ipſi inſertae facile ita parari poteſt, vt eius cauitas pro lubitu ampliari et coarctari queat. Sic enim paucis experimentis inſtitutis haud difficulter ea capacitas capſulae definietur, quae ad tubi amplitudinem relata praeciſe eandem graduum magnitudinem exigat, quae deſideratur, eique proinde ſcala iam confecta optimo ſucceſſu adiungi queat, ſi modo tantum liquoris infundatur, vt vnicus temperiei gradus recte deſignetur.

V.

Emendatio Microſcopii Solaris.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 316.

Obiectorum minimorum per microſcopia ſolaria, qualia adhuc ab artificibus ſunt conſtructa, repraeſentationem pluribus vitiis eſſe inquinatam, vel inde intelligitur, quod cum radii lucidi per ipſa obiecta transmittantur, horum forma eatenus tantum in imagine exprimatur, quatenus ipſa ſunt pellucida, ita vt, ſi hac proprietate carerent, nulla prorſus repraeſentatio efficeretur.

retur. Deinde ob eandem rationem, quod radii ſolares, qui ad illuminationem adhiberi ſolent, per ipſam quaſi ſubſtantiam obiectorum tranſire debent, inſignes refractiones patiuntur, quibus fit, vt imagines intolerabilibus iridis coloribus circumfuſae exhibeantur. Hoc ſcilicet vitio microſcopia ob ingentem ſpeciei multiplicationem multo magis premuntur, quam laternae magicae, quarum conſtructio certam rationem ſequi ſolet. Vtrumque autem horum inſtrumentorum genus Cel. *Eulerus* ab hoc ingenti vitio feliciter liberauit, dum eiusmodi ſtructuram docuit, qua obiectorum maxime opacorum imagines, tam per microſcopia ſolaria, quam per laternas magicas, ſine vlla confuſione nitidiſſime repraeſentantur, dummodo ſufficienti luminis copia illuſtrentur, quod egregium inuentum in Tom. III. Nou. Comment. Academiae noſtrae ita accurate extat explicatum, vt huiusmodi inſtrumenta a ſolerti artifice haud difficulter confici poſſint. Maximum autem ad hunc ſcopum adiumentum Cel. huius diſſertationis Auctor attuliſſe merito eſt cenſendus, dum vulgaria microſcopia ſolaria, ope leuis mutationis in eorum ſtructura faciendae, ad hunc nouum vſum transferre docuit, neque vllum eſt dubium, quin duabus pluribusue lentibus adhibendis repraeſentatio adhuc praeſtantior obtineri poſſit, quem ſummum perfectionis gradum Auctor pollicetur.

VI.

VI.

Dissertatio de Experimento quodam magnetico.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 326.

Additamentum ad praecedentem Dissertationem auctore eodem p. 340.

Virtute magnetica impraegnatur filum ferreum nonsolum, cum ad polos magnetis affricatur, sed etiam dum quodam interuallo remotum super ambos polos traducitur. Quod cum olim diligentissimus naturae scrutator Gallus *Du Fay* plurimis experimentis esset prosecutus, insigne ac maxime mirandum phaenomenum obseruauit, quod poli magnetici, qui filo ferreo in minori distantia super polos magnetis traducto imprimuntur, iidem in maiori distantia ita inter se permutentur, vt qui terminus in minori distantia naturam poli borealis esset nactus, idem in maiori distantia ad polum australem dirigeretur. Quod phaenomenum cum omni Theoriae, quae quidem ad magneticos effectus explicandos excogitari queat, maxime aduersari videatur, Cel. Auctor in eo est occupatus, vt eius egregium consensum cum ea Theoria, quam nuper circa vires magneticas et electricas protulit, dilucide demonstret. Quem in finem supponit, vires attrahentes et repellentes amborum cuiusque magnetis po-

 lorum

lorum in vnicum punctum coactas esse, et rationem sequi inuersam distantiarum, indeque euenire posse per calculum omni rigore geometrico institutum ostendit, vt ab istis viribus coniunctis in maiori distantia omnino ei contrarius producatur effectus, qui alias in distantia minori exeratur. Deinde animaduertit, quod etsi adsumtae hypotheses naturae minus sint consentaneae, et etiamsi verae vires magneticae ab hac lege discrepent, similem tamen effectum inde resultare debere, in quo haud debile Theoriae suae firmamentum situm esse contendit. Iungit tum huic dissertationi supplementum eximium, in quo multa alia experimenta noua, *Fayano* non absimilia, a priori ex theoria sua praeuisa, et experientiae penitus consona, recenset et explicat.

VII.

Cogitationes de aggeribus construendis. Auctore L. Eulero pag. 352.

In prouinciis maritimis haec quaestio maximi est momenti, vbi littora aduersus fluctuum impetum aggeribus muniri oportet, quorum tam exstructio, quam conseruatio, ingentes sumtus postulat. Antequam igitur huiusmodi opus suscipiatur, sollicite est disquirendum, vtrum reditus ex terris hoc modo munitis percipiendi expensus ad aggeres requisitas superent, nec ne? Nisi enim cultura terrae plus fructuum afferret, de aggerum ex-

extructione cogitandum ne quidem foret. Tum vero etiam imprimis est perpendendum, si littorum ora fuerit valde irregularis et sinuosa, minime esse consultum, aggeres iuxta ipsam littoris figuram duci, sed potius praestare, vt aggeribus a littore reductis forma commodior tribuatur. Quanquam enim hoc modo minor terrae tractus includitur, vnde propterea minores fructus percipiantur, tamen fieri potest, vt haec iactura aggeris contractione ob multo minores sumtus in eius extructionem requisitos largiter compensentur. Semper igitur haec quaestio diligentissime euolui meretur, qua quaeritur: quomodo data littoris cuiuspiam figura aggeres in eo sint construendi, vt fructus ex terra percipiendi maximo lucro excedant sumtus in aggerum tam extructionem, quam conseruationem, impendendos, in qua disquisitione facile intelligitur saepius euenire posse, vt maxime expediat minorem terrae portionem hoc modo muniri, lucrumque inde expectandum ob aggeris diminutionem multo maius esse aestimandum. Ad huiusmodi ergo quaestiones enodandas ante omnia expendi oportet: primo, quantas expensas exstructio aggeris datae longitudinis, veluti vnius perticae, postulet; secundo, quantum ad conseruationem talis portionis aggeris quotannis requiratur, quos annuos sumtus, tanquam vsuram, ad sortem fixam reuocari conuenit, quibus coniunctis totum pretium vnius perticae aggeris habebitur; tertio vero ad fertilitatem et vsum terrae muniendae est spectandum, vt pateat, quantos fructus a qualibet pertica quadrata quotannis expectari liceat, quos pariter ad sortem fixam reduci conueniet. His rebus accurate de-

determinatis quaeſtio ad meram Geometriam et Analyſin reuocatur, cuius tamen reſolutio ingentem circumſpectionem poſtulat, ideo neceſſariam, quod aggeres quidem quantumuis intra continentem reduci, neutiquam vero vltra extremam littoris oram extendi licet. In prouinciis etiam aggeribus iam munitis haec eadem quaeſtio ſaepius occurrere ſolet, quando ſcilicet fluctus marini ſenſim tantum terrae vltra aggeres alluunt, vt operae pretium videatur, hanc nouam terram nouo aggere cingi, et in vſum conuerti. Quod cum non ita pridem in prouincia Germaniae maritima contigerit, atque haud leuis controuerſia circa noui aggeris extructionem fuerit orta, et ad Auctorem delata, anſam ei praebuit, hoc argumentum, quod ſaepius ſummum vſum habere poteſt, accurate pertractandi.

PHYSICA.

PHYSICA.

I.

Ad Obſeruationes et Experimenta de Mercurio ex ſcriptis *Hermanni Boerhaue.* Supplementum I. recenſente *Carolo Friderico Kruſe* p. 381.

Si quis Chemicorum naturam mirabilis metalli Mercurii (quidni enim metallum dicamus, quod noſtra aetate a frigore ambiente condenſari, et iterum ab augmento caloris fluidum fieri experti ſumus?) intelligenter ac indefeſſo ſtudio explorauit, is certe eſt vir ſummus, in arte ſalutari et hermetica communis Medicorum praeceptor, immortalis *Hermannus Boerhaue.* Fidem faciunt huius aſſerti ſcripta eius cum Regia Scientiarum Academia Pariſienſi, et cum Societate Regia Londinenſi communicata. Stupendo labore, conſtantia Herculea, per XV. annos, vno igne, Mercurium torſit, naturam variis artificiis ſollicitauit, immo coegit, vt vel inuita ſecreta ipſi ſua reuelaret. Superaddidit praeterea IV. annorum labores. Perrexit enim in hac opera, quoad vixit, ita vt nil dici poſſit, quod ipſius experimentis et obſeruationibus aequiparari queat. Felici Chemicae artis, imo vniuerſae ſalutaris doctrinae, fato, factum eſt, vt ſcripta viri immortalis, typis nondum exſcripta, poſtquam ab *Hermanno* et *Abrahamo Kaau*, fratribus, *Boerhauiis*, in Ruſſiam perlata eſſent, haere-

haereditaria possessione cesserint Viro Illustri *Carolo Friderico Kruse*, AVGVSTAE omnium Russiarum IMPERATRICIS Archiatro ac Consiliario Status actuali, Academiae Imperialis Scientiarum Socio, *Hermanni Kaau Boerhauii* genero, qui, quod *Abrahamus* animo conceperat, at immatura morte facere prohibitus est, scripta *Boerhauiana*, publico emolumento studens, singillatim edet. Primum hoc, quod praedicamus, specimen ostendit, quid inposterum expectare debeamus. Academia non potest non lubenter recipere et in publicum vsum emittere scripta viri, quem inter Collegas quondam suos numerasse honori sibi ducit. Scopus tantorum Mercurio impensorum laborum hic fuit, vt constaret, quid de promissis Alchemistarum, fixationem, solidationem, transformationem, Mercurii iactantium, sperare fas sit. Si, quod nonnullis placet, primum fauorabiliter sensit de via, Mercurii ope, ad magnum, quod vocant, opus ducente, procul dubio ad mirabiles huius metalli qualitates respexit, quae quo difficiliores essent explicatu, eo magis inducere debuerunt sincerum atque veritatis amantem virum, vt non omnem prorsus fidem denegaret exemplis, de metallo hermetica arte parato afferri solitis. Philosophi est in dubium vocare, quae non intelligit, aut quae explicare nescit; negare non item. Ad hoc requiritur, vt impossibilitatem demonstrare valeat. Id autem est, quod millies et nouies repetita experimenta Philosophum docuerunt. Obseruauit namque, Mercurium, varias licet induentem personas, ast re ipsa immutabilem, vehementiore nimirum ignis actione, in pristinam semper formam redire.

Ergo

Ergo non inutiliter operam ſuam collocaſſe eſt cenſendus magnus *Boerhauius*; in periculoſo mari ſyrtes, ad quas multi bonorum ſuorum naufragia fecerunt, euitare docuit: vtilius ſane, quam ſi poſſibilitatem transmutationis Mercurii in aurum oſtendiſſet, aut ſi ipſum aurum, in perniciem aliorum et ſui, conficere docuiſſet.

II. et III.

Obſeruationes meteorologicae annis 1757 et 1758. Petropoli factae, cum animaduerſionibus et conſectariis.

Auctore I. A. Braun p. 392. et 440.

De ipſis obſeruationibus, vt quae eadem methodo, iisdemque ac praecedentes inſtrumentis, ſunt inſtitutae, nil dicere attinet. Operae autem pretium eſt, ſingularia quaedam notatu digna huc transferre.

Anno 1757.

Altitudo Barometrica, maxima ex omnibus, quae Petropoli obſeruatae fuerunt, hoc anno fuit,

29. 12 poll. Pariſ.
30. 35 — Lond.

Calor maximus 97 grad. therm. Delisliani hoc aeque ac ſequente anno obſeruatus eſt, qui aequalis eſt calori hominis

hominis naturali et ſanguinis in homine ſano. Calor fere perpetuus per totam aeſtatem ac intolerabilis. Serenitas dierum per totum annum extraordinaria.

Anno 1758.

Calor maximus, etiamſi calori praecedentis anni aequalis fuit, minus tamen frequenter accidit. Menſe Iulio nullum tonitru, quod ſatis inſolitum. Copia pluviae per omnem aeſtatem 16 poll. Pariſ. quod etiam inſolitum, quare a nimia humiditate annona multa et foenum periere. Declinatio magnetis, vt fere ſemper ſolet $4\frac{1}{2}°$ W. Maculae in ſole copioſiſſimae.

Tempus medium, quo glacies Neuae fluuii ſolui ſolet, eſt circa d 8 Aprilis, congelationis terminus medius circa 20 Nouembris, monſtrante thermometro Delisliano 166 gradus, ſi quidem hoc frigus per aliquod dies durat.

IV.

Deſcriptionis Piſcium rariorum e Muſeo Petropolitano exceptorum continuatio.

Auctore I. T. Koelreuter p. 420.

Sex piſces ſunt, eadem methodo, ac iſti in praecedente volumine, deſcripti, nempe:

Cyprinus pinna caudae horizontali, ſubtrifida; dorſuali faſtigata, paruula.

Gobio

Gobio pinna ventrali ſubrotunda, acetabuliformi, e duobus pedunculis, octoque radiis, valde ramoſis, compoſita.

Gobio pinna dorſuali vnica, longa; pectoralibus latiſſimis, acetabulum planiuſculum includentibus.

Sparus duabus vtrinque maculis notatus; primo pinnarum ventralium radio longiſſimo, aſtaci antennam referente.

Labrus valde oblongus, taeniis tribus candidis, diuerſae longitudinis, inſignitus, cauda integra.

Scomber dorſi anique pinna continua, aculeis ad vtriusque initium acceſſoriis.

ASTRONOMICA.

I.

Obſeruationes aliquot aſtronomicae et meteorologicae, Lipſiae habitae a Godofr. Heinſio p. 473.

Varias continet hoc a Cl. *Heinſio* ad nos transmiſſum ſcriptum Obſeruationes, ſeparatim hic indicandas.

D. 24. Ian. ſtyl. nou. An. 1758. Eclipſin Lunae totalem obſeruabat Cl. Vir, quae vero Obſeruatio per intercurrentes nubes, et male terminatam, praeſertim ſub initium, vmbram telluris, turbata quodammodo fuit.

D. 26. Ian. eiusd. anni poſt merid. hora circ. $2\frac{5}{8}$ occupatus erat in capiendis altitudinibus Solis correſpondentibus, atque direxerat quadrantem ita, vt linea fiduciae $11°. 40\frac{3}{4}'$. reſponderet. Pronus ad contactum iam erat cum filo tubi horizontali Solis nubi denſiori inuoluti ſuperior limbus, cuius admodum exigua portio infra filum horizontale adhuc perſiſtere videbatur, fruſtra vero per aliquod tempus ipſius contactus celebrationem exſpectabat. Per 20 enim minuta ſecunda nulla ſenſibilis huius portionis imminutio, nullus ſenſibilis acceſſus limbi ad filum, obſeruari poterat, vsque dum tandem $17''$ ſerius, quam fieri debuiſſet, contactus conſe-

consequeretur. Inusitata haec a nube interposita producta irregularis refractio (pro huius enim effectu sine dubio hoc phaenomenon habendum est) cautos reddere debet Astronomos, ne per nubes captis altitudinibus astrorum coecam habeant fidem.

Cum Anno 1753. d. 17. Apr. st. nou. Lunae partialis obscuratio contingeret, ob varia incommoda non nisi finem Eclipseos annotare potuit Cl. Auctor, quem consequutum esse $8^h\ 35\frac{1}{4}'$. sufficiente cum certitudine statuere se posse putat.

D. 21 Iun. Anno 1757. $8^h.57'.55''$. emergentem post Lunae discum stellam, primae magnitudinis, *Cor Leonis* vocatam, vidit Cl. *Heinsius*, et d. 10. Iulii eiusdem anni $9^h.31'.20''$. secundi Satellitis Iouis emersionem totalem annotauit.

Indicauit etiam Cl. Auctor, visam a se An. 1756. vltimis Septembr. primisque Octobr. diebus Venerem interdiu oculis nudis, per duas tres ve horas, post Solis ortum, vt anno 1748. in Obseruationibus ad Academiam missis, et in Tom. III. Comm. nostrorum euulgatis, praedixerat, ac denique obseruationes quasdam meteorologicas communicauit, ex quibus patet, maximum calorem aestiuum, barometrique altitudinem mediam Lipsiensem, Petropolitanis fere aequari, Petropoli vero barometrum ab hoc termino vtrinque notabiliter longius excurrere, quam Lipsiae fieri solet.

II.

Obſeruatio Eclipſeos Solaris, quae contigit Anno 1758. d. $\frac{19}{30}$. Decemb. habita Petropoli

a b

A. N. Griſchow pag. 486.

Poſt indicatas obſeruationes, pro examinando motu horologii penduli inſtitutas, finem huius Eclipſeos contigiſſe $9^h. 36'. 45''$ - - - - $9^h. 37'. 0''$. ſtatuit Cl. Auctor. In limite $15''$. dubiam reddiderunt hanc obſeruationem, fumus focorum atque vapores vndantes, qui aerem inquinabant.

III.

Inſtrumentorum Aſtronomicorum, Reticulo, aut Micrometro, inſtructorum, noua emendatio.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 428.

Commoditati obſeruatoris, vt in imaginanda inſtrumentorum aſtronomicorum conſtructione, proſpiciatur, res eſt maioris momenti, quam ad primum intuitum videri poſſit, cum obſeruationum fides atque acumen

acumen manifesto inde patiantur, si assumere aut diu seruare incommodum corporis situm cogitur Astronomus.

Laborant incommodo tali instrumenta astronomica micrometro praedita, consueto more constructa, quod obseruator ipsis vtens, si ad obiectum super horizontem valde eleuatum ipsa dirigit, reclinare caput atque corpus, immo supinum interdum situm assumere debeat. Conatur ipsa ab hoc defectu liberare Cl. Auctor, ope speculi metallici plani, quod tubo non longe a foco vitri obiectiui inclinato ad axem visionis situ, ita inserendum est, vt radii per axin tubi incecentes, in directione horizonti parallela ab ipso resiliant. Imponit autem prouti auctor monet, nouum hoc instrumentorum additamentum, nouae verificationis necessitatem Astronomo, quae, qua ratione commode perfici queat, sub finem exponit.

IV.

Obseruatio Eclipseos Lunae d. 18. Maii st. v. Anno 1760. Petropoli habita. Auctore N. Popow, Andr. Krasilnikow et Nic. Kurganow pag. 492.

Obseruatum est initium huius Eclipseos $11^h.18'.47''$. circiter, finis vero $12^h.4'.42''$. cum aliquibus momentis aliis, quorum tamen nullum praeter finem, satis securum est, vti obseruatores declarant.

Ad-

Adiunxerunt Cl. *Popow* et *Krasilnikow* obseruationem initii Eclipseos Solaris eod. anno d. 2. Iunii st. v. visae, quod $9^h. 1'. 44''$. accidisse statuitur.

V.

Eclipsis Solis Lipsiae visa hor. mat. d. 13. Iunii stil. nou. Anno 1760.

Auctore G. Heinsio pag. 494.

Eiusdem huius Eclipseos similiter non nisi initium vidit Clar. *Heinsius*, quod statuit cecidisse in $7^h. 25' 34''$. tam exacte, vt ingressus Solis in discum Lunae ad instans quasi, in oculos incurreret.

VI.

Obseruatio Eclipseos Lunaris d. $\frac{7}{18}$. Maii 1761. habita in Obseruatorio Imper. Petropolitano.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 496.

Praeter initium et finem Eclipseos, discique Lunae immersionem totalem, atque emersionis initium, praecipuarum quoque macularum immersionem et emersionem ex vmbra, annotauit Cl. Auctor, qui monet, ob ob vapores denſos, ac forte crepuſculum, de immerſione et emerſione macularum ſe ipſum per minutum dimidium immo vlterius inter obſeruandum dubium haeſiſſe, reliquis vero momentis maiorem fidem adſcribit.

Tam denſa erat vmbra terreſtris, vt per ſat longum tempus penitus quaſi Luna ex coelo euaneſceret, neque vllum ipſius veſtigium ſupereſſet.

VII.

Ad Noua Acta Petropolitana Acad. Scient. Tom. III. Additamentum ex Sinis P. *Antonii Gaubil* S. I. p. 499.

Obſeruationes ſatellitum Iouis pro determinanda locorum poſitione Geographica ſedulo ac ſollerter inſtituere, ſuprema Obſeruatoribus Aſtronomis, qui Sibiriam et Kamtſchatkam peragrarunt, lex fuit. Dolendum autem, non valde multas obſeruationes huius generis, et publica luce dignas, ad Academiam perueniſſe, quod vtrum praematurae morti Viri Cl. *Ludouici De l'Isle de la Croyere* d. x. Octobris 1741 in Kamtſchatka extincti, an aliis cauſis, adſcribendum ſit, non inquirimus. Palmam reliquis praeripere viſae ſunt obſeruationes a ſollertiſſimo obſeruatore *Kraſilnikouio* habitae, quare in Vol. III. Nou. Comment. typis exſcriptae ſunt, addita collatione cum ſimilibus in ſpecula Aſtronomica Petropolitana inſtitutis obſeruationibus, vnde differentia temporis Petropolin inter et varia Sibiriae et Kamtſchatkae loca patefcit.

Aſt dices, ipſius Petropoleos Longitudo adhuc quidem dubia videri poteſt, quia trifariam notata reperitur, et vtra determinatio reliquis praeferenda ſit, non liquet. Tom. I. Comment. pag. 480. habetur $47^{\circ}. 57'. 30''$. in Syllabo Long et Latit. Atlanti Ruſſico praefixo extat $47^{\circ}. 49'$. et ex Ephemeridibus Aſtronomicis Pariſienſibus colligitur, eſſe $47^{\circ}.53'.45''$. Hic occaſione notare iuuabit, vltimam determinationem, ſecundum obſeruationes b. *Griſchouii* factam eſſe videri, quia in diſſertatione Tom. VIII. Nou. Comm. inſerta p. 434. differentiam temporis Petropolin inter et Pariſios eandem, quam Ephemerides Pariſienſes nobis exhibent, aſſumſit, nimirum: $1^{h}. 52'$. Dum autem *Griſchouium* nominamus, cuius obſeruationes quanta accuratione ſe commendare ſoleant, nemo ignorat, maximam ſimul conciliamus huic determinationi auctoritatem. Ideoque, interea dum Obſeruatores noſtri Aſtronomi certius quid hac de re ſtatuent, non dubitamus, longitudines locorum ex obſeruationibus *Kraſilnikouii* poſita long. Petrop. $47^{\circ}.53'.45''$. ſequentem in modum ſtabilire:

Kirenskoi oſtrog - - -	$125^{\circ}.36'.30''$.
Iakuzk - - - - - - -	147. 14. 45.
Portus Petri Pauli - - -	176. 8. 45.
Bolſcherezkoi oſtrog - -	174. 52. 0.
Ochozkoi oſtrog - - -	160. 47. 15.
Iudomskoi kreſt - - -	157. 27. 15.
Tomsk - - - - - -	102. 33. 15.

Addi-

Addimus longitudinem Caſtelli Iamyſchewskaia, quae, cum differentia meridianorum eiusdem et Petropoleos, ſecundum obſeruationes *Kraſilnikouii* a b. *Griſchouio* quondam ſtatuta ſit 43°. 47'. erit 91°. 40'. 45''.

His praemonitis, diſpiciamus nouas locorum determinationes, quas R. P. *Gaubil* in hoc additamento nobis offert. Comparauit obſeruationes *Kraſilnikouii* cum aliis eodem tempore Pekini et in ſtatione Gallica Chandernagor, quae ad Gangetis fluuii oſtium in India orientali exſtat, inſtitutis, differentiamque temporis annotauit, quae quidem opera ſuperuacanea videri nequit, tum quod confirmantur inde poſitiones ſupra determinatae, tum quod duorum locorum determinationes adduntur, quorum obſeruationibus correſpondente ante non extabant. Sciendum autem, quod ex Ephemeridibus Pariſienſibus conſtat, Pekinum et Pariſios differentiam temporis $7^h. 36'. 10''$. intercedere, Chandernagor Pariſiis $5^h. 44'. 37''$. diſtare. Iam poſita longitudine obſeruatorii Pariſienſis, vt ex nouiſſimis obſeruationibus ſtabilita eſt 19°. 53'. 45''. emergunt inde longitudines pro

Ilginskoi oſtrog - -	122°. 30'. 0''.
Olecminskoi oſtrog -	137. 4 45.
Iakuzk - - - -	146. 13. 7.
Portus Petri Pauli	
ex obſ. Pekin. -	176. 4. 15.
ex obſ. Chandern. -	176. 28. 31.
Bolſcherezkoi oſtrog -	174. 12. 0.

Vbi obſeruationes, ſi illas, quae vrbem Iakuzk concernunt, excipias, ſic ſatis cum ſuperioribus conſentiunt.

 Lati-

Latitudines recenſitorum hactenus locorum ſecundum eiusdem *Kraſilnik uii* obſeruationes hae ſunt:

Ilginskoi oſtrog - -	54°.42′.
Kirenskoi oſtrog - -	57. 47.
Olecminskoi oſtrog -	60. 22.
Iakuzk - - - -	62. 2.
Iudomskoi kreſt - -	60. 5. 3½″.
Ochozkoi oſtrog - -	59. 20. 10.
Bolſcherezkoi oſtrog -	52. 54. 30.
Portus Petri Pauli -	53°. 1. 20.
Tomsk - - - -	56. 29. 58.
Iamyſchewskaia Caſtellum	51. 53. 10.

Notari meretur altitudo Poli a R. P. *Gaubil* Pekini in Collegio Gallico obſeruata, quae eſt 39°.55′.21″. Ephemerides Pariſienſes habent 39°.54′.0″. quae quidem latitudo competit Collegio Ieſuitarum Luſitanorum et Germanorum, vt infra adparebit.

Finit R. P. *Gaubil* additamentum ſuum obſervatione de ſitu vrbis Aigun, qua error circa poſitionem huius vrbis in Atlante Ruſſico commiſſus corrigitur. Ex re ſane. Attamen diffitendum non eſt, eundem errorem nos quoque animaduertiſſe, et in Tabula acceſſiones Geographicas in vltima Expeditione Kamtſchatkienſi detectas repraeſentante, ratione habita Atlantis Sinici a Celeb. *Danville* euulgati, correxiſſe. Eſt autem Aigun, vel Aiiunchun, vetus nomen caſtri cuiusdam deſerti, vallo ex terra congeſto muniti, et dimidio fere milliari a Seiae, vel Dſiae, fluuii in Amurem oſtio, ſecundis aquis, diſſiti. Hoc cum Sinenſes

nenses saeculi superioris octogesimo tertio anno, feruente cum Russis bello, insederint, duobus annis postea ex opposito illius, aut paullo infra, ad ripam Amuris meridionalem, vrbem Sagalin - Ula - Choton, vti in Cel. *Danvilli* Tabula Geographica videre est, exaedificarunt. In nostra Tabula nomen Aigun adscriptum est, quia ita quoque vrbs Sinica communiter adpellari solet. Ipse quoque R. P. *Gaubil* non vetus castrum desertum, sed vrbem a Sinis inhabitatam, sub nomine Aigun intellexisse videtur.

VIII.

Mercurius in Sole obseruatus Pekini Sinarum Anno 1756. d. 7. Nouemb. a P. *Augustino Hallerstein* S. I. p. 503.

Non haec prima est, quam ex Sinis habemus, Mercurii in Sole visi obseruatio; namque iam annis superioris saeculi 90 et 97 eundem transitum Cantoni et in vrbe Tschaotscheu contemplatus est P. *Fontenay* S. I. cuius obseruata in Memoriis Academiae Parisiensis extant; ast prima est atque palmaria haec obseruatio, si indefessum Auctoris studium, si instrumentorum aptitudinem, si laborum successus spectes; prima, quam doctissimus Auctor ex ditissima penu obseruationum suarum astronomicarum, quam praelo parat, excerpsit, et cum Academia communicauit. Pergunt nimirum eodem semper studio Iesuitae in Sinis astrorum scientiam obſeruationibus ſuis locupletare, cognitionem ſyſtematis noſtri Solaris, terreſtrisque globi, amplificare, et perfectiorem reddere. Quod niſi eſſet, multa ſane incognita nobis manſiſſent, quae illorum ope comperta habemus atque explorata. Vnum dicam, quod vtilitatem obſeruationum Sinenſium clare oſtendit. Innumera phaenomena coeleſtia contingunt, dum atra nox tegit Europam, eadem autem in extremitate Aſiae, in Sinis, expertum ac ſedulum obſeruatorem non effugiunt. Huc quoque pertinet obſeruatus in Sinis Mercurii ſub Sole tranſitus, qui 7. Nouembris 1756. accidit. Hunc in Europa totum conſpicere non licuit, quoniam, cum inciperet, Sol adhuc ſub horizonte morabatur. Perfectiorem autem, quam, quae hoc loco exhibetur, obſeruationem, vix Aſtronomi deſiderabunt. Praeter initium atque finem huius phaenomeni exacte notata, Mercurii ſub Sole incedentis 58 loca determinauit R. Auctor, capiendo Micrometri ope differentias declinationum, et ex appulſibus ad horarium differentias aſcenſionum rectarum deducendo. Eſt autem R. Pater *Auguſtinus Hallerſtein* Tribunalis mathematici in Sinis Praeſes, PP. *Adami Schall*, *Ferdinandi Verbieſtii* et *Ignatii Koegleri* dignus ſucceſſor, vir, cuius ſingularem eruditionem, humanitatem et ardorem in bonas artes, ex commercio epiſtolico, quod nobis cum ipſo intercedit, hac occaſione data, encomio celebrare, officii ratio poſtulat.

INDEX

INDEX
COMMENTARIORVM.

Mathematica.

Phyſico - Mathematica.

Phyſica.

Physica.

Astronomica.

* * *

MATHE-

MATHEMATICA.

DE
RESOLVTIONE FORMVLARVM
QVADRATICARVM INDETERMINATARVM
PER NVMEROS INTEGROS.

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

1.

Propoſita formula irrationali $\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)}$ inuenire numeros pro x ſubſtituendos, qui eam rationalem reddant.

Solutio.

Ante omnia notantum eſt, hanc inueſtigationem fruſtra ſuſcipi, niſi vnus ſaltem caſus conſtet, quo ea fiat rationalis. Ponamus ergo hoc euenire caſu $x = a$, eoque eſſe:

$$\sqrt{(\alpha aa + \beta a + \gamma)} = b$$

ita vt b ſit numerus rationalis. Huiusmodi autem caſus, vnico cognito, innumerabiles alios ex eo deriuare licet. Ponatur in hunc finem

$$x = a + mz \text{ et } \sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)} = b + nz$$

et hac aequatione quadrata fit:

$$\begin{aligned}&+\alpha aa+2\alpha maz+\alpha mmzz=bb+2nbz+nnzz\\&+\beta a+\beta mz\\&+\gamma.\end{aligned}$$

Cum iam per hypothesin sit $bb=\alpha aa+\beta a+\gamma$, reliqua aequatio per z diuisa dabit:

$$2\alpha ma+\beta m+\alpha mmz=2nb+nnz$$

ex qua elicitur:

$$z=\frac{2\alpha ma-2nb+\beta m}{nn-\alpha mm}$$

Quo valore substituto concludimus:

si ponatur $x=\frac{(nn+\alpha mm)a-2mnb+\beta mm}{nn-\alpha mm}$

fore $\sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}=\frac{2\alpha mna-(nn+\alpha mm)b+\beta mn}{nn-\alpha mm}$

Quicunque ergo numeri pro m et n accipiantur, ex casu cognito: $\sqrt{(\alpha aa+\beta a+\gamma)}=b$, infinitis aliis modis formula $\sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}$ rationalis effici potest, et quia numerum b tam negatiue, quam affirmatiue, assumere licet, exploratis numeris a et b, ac pro ubitu assumtis numeris m et n, capiatur

$$x=\frac{(nn+\alpha mm)a\pm 2mnb+\beta mm}{nn-\alpha mm}$$

eritque:

$$\sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}=\frac{2\alpha mna\pm(nn+\alpha mm)b+\beta mn}{nn-\alpha mm}.$$

Scholion.

2. Ad hoc ergo problema soluendum necesse est, vt aliunde vnus saltem casus sit cognitus, quo formula proposita fiat rationalis. Neque vero, pro huiusmodi casu explorando vlla certa regula praescribi potest, cum etiam

etiam dentur eiusmodi formulae, quas nullo plane casu rationales fieri posse demonstratum est. Si enim verbi gratia haec formula $\sqrt{(3xx+2)}$ proponeretur, certum est, nullum numerum rationalem pro x inueniri posse, quo ea fieret rationalis. Quanquam autem satis noti sunt casus, quibus formula $\alpha xx+\beta x+\gamma$ talis reductionis est capax, quippe quod euenit, quoties in hac formula generali $(px+q)^2+(rx+s)(tx+u)$ continetur: tamen hic non curo, vnde casus ille, quem cognitum assumo, sit haustus, siue certa quadam ratione, siue diuinatione innotuerit. Verum cum cognito vno casu inuentio infinitorum aliorum nulla laboret difficultate, hic potissimum ad solutiones, quae numeris integris absoluuntur, respicio. Cum enim valores pro x inuenti per fractionem exprimantur, noua iam oritur quaestio, quomodo numeros m et n assumi oporteat, vt inde numeri integri pro x obtineantur.

Problema II.

3. Si α, β, γ sint numeri integri dati, inuenire numeros integros pro x sumendos, qui formulam $\alpha xx+\beta x+\gamma$ quadratam reddant.

Solutio.

Iterum assumo vnum numerum integrum a constare, qui quaesito satisfaciat, ita vt sit:

$$\sqrt{(\alpha aa+\beta a+\gamma)}=b$$

ac modo vidimus,

si sumatur $x=\frac{(nn+\alpha mm)a\pm 2mnb+\beta mm}{nn-\alpha mm}$

 fore

fore $V(\alpha xx+\beta x+\gamma)=\frac{2\alpha mna\pm(nn+\alpha mm)b+\beta mn}{nn-\alpha mm}$ Supereſt ergo tantum, vt videamus, cuiusmodi numeros pro m et n aſſumi oporteat, vt hae formulae integrae euadant. Quod quidem ſtatim fieri perſpicuum eſt, ſi vtriusque denominator $nn-\alpha mm$ ſtatuatur vnitati aequalis. Sit igitur $nn-\alpha mm=1$, ſeu

$$nn=\alpha mm+1\text{, ideoque } n=V(\alpha mm+1)$$

niſi autem ſit α vel numerus quadratus, vel negatiuus, huic formulae ſemper ſatisfieri poteſt; ſin autem ſit vel quadratus, vel negatiuus, ne problema quidem propoſitum reſoluere licet. Etſi enim quandoque duo pluresue caſus aſſignari queant, tamen infiniti non dantur, cuiusmodi tamen hic euolui conuenit. Sit ergo α numerus integer poſitiuus non quadratus, ac ſemper numeri m et n aſſignari poſſunt, vt fiat $n=V(\alpha mm+1)$, quod etſi infinitis modis fieri poteſt, tamen ſufficit minimos ſolos noſſe. Erit ergo

$$x=(nn+\alpha mm)a\pm 2mnb+\beta mm \text{ et}$$

$$V(\alpha xx+\beta x+\gamma)=2\alpha mna\pm(nn+\alpha mm)b+\beta mn,$$

ſicque habetur nouus caſus quaeſtioni ſatisfaciens. Ex hoc vero ſimili modo, quo is ex a et b prodiit, nouus deriuabitur, hincque porro continuo alii in infinitum. Ponantur enim valores hoc modo pro x oriundi ſucceſſiue: a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, etc. reſpondentes vero valores formulae $V(\alpha xx+\beta x+\gamma)$ ſint b, b^{I}, b^{II}, b^{III} etc. ac ſequenti modo bini quique poſteriores ex binis antecedentibus definientur,

$a^{I} = (nn + \alpha mm)a \pm 2mnb + \beta mm$; $b^{I} = 2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn$

$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} \pm 2mnb^{I} + \beta mm$; $b^{II} = 2\alpha mna^{I} \pm (nn + \alpha mm)b^{I} + \beta mn$

$a^{III} = (nn + \alpha mm)a^{II} \pm 2mnb^{II} + \beta mm$; $b^{III} = 2\alpha mna^{II} \pm (nn + \alpha mm)b^{II} + \beta mn$

etc.

Hac igitur ratione continuo vlterius progredi licet, ficque ex vna folutione, in numeris integris cognita, innumerabiles aliae in numeris integris quoque elicientur.

Coroll. 1.

4. Vt igitur formula $\alpha xx + \beta x + \gamma$ infinitis modis in numeris integris quadratum effici poffit, necesse eft, vt α neque fit numerus quadratus, neque negatiuus, ac praeterea, vt vnus cafus, quo ea fit quadratum, vndecunque fit cognitus.

Coroll. 2.

5. At fi α fuerit numerus pofitiuus non quadratus, tum primum quaerantur duo numeri m et n, vt fit $n = \sqrt{(\alpha mm + 1)}$, id quod femper fieri poteft. Quibus inuentis, fi ponatur:

$$\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)} = y$$

atque iam cognitus fuerit cafus quaeftioni fatisfaciens, qui fit $x = a$ et $y = b$, ex eo per primam operationem non folum vnus, fed duo noui, inuenientur ob figni ambiguitatem. Erit quippe:

$$x = (nn + \alpha mm)a \pm 2mnb + \beta mm \text{ et}$$
$$y = 2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn.$$

Coroll. 3.

Coroll. 3.

6. Si ſumantur tantum ſignorum ambiguorum ſuperiora, vt continuo ad maiores numeros ſatisfacientes perueniamus, atque valores pro x hoc modo ſucceſſiue prodeuntes deſignentur per $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$ etc valores autem pro y reſpondentes per $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}$ etc. erit:

$$a^{I} = (nn + \alpha mm)a + 2mnb + \beta mm; \quad b^{I} = 2\alpha mna + (nn + \alpha mm)b + \beta mn$$

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} + 2mnb^{I} + \beta mm; \quad b^{II} = 2\alpha mna^{I} + (nn + \alpha mm)b^{I} + \beta mn$$

$$a^{III} = (nn + \alpha mm)a^{II} + 2mnb^{II} + \beta mm; \quad b^{III} = 2\alpha mna^{II} + (nn + \alpha mm)b^{II} + \beta mn$$

etc.

Coroll. 4.

7. Duplicem ergo hinc progreſſionem numerorum $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$ etc. et b $b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}$ etc. adipiſcimur, quarum vtriusque continuatio ab vtraque pendet, vtraque tamen ab altera iſta ſeiungi poteſt, vt termini vtriusque ſenſim ſine adminiculo alterius continuari queant; formabitur autem tum in vtraque ſerie quilibet terminus ex binis praecedentibus.

Coroll. 5.

8. Si enim in valore a^{II} pro b^{I} eius valor ſubſtituatur, habebitur:

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} + 4\alpha m^2 n^2 a + 2mn(nn + \alpha mm)b + 2\beta mmnn + \beta mm$$

Verum

Verum ex valore ipſius a^{I} eſt:

$$2mnb = a^{I} - (nn + \alpha mm)a - \beta mm$$

quo valore ipſius $2mnb$ ibi ſubſtituto prodibit:

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} + 4\alpha mmnna$$
$$+ (nn + \alpha mm)a^{I} - (nn + \alpha mm)^{2}a - \beta mm(nn + \alpha mm)$$
$$+ 2\beta mmnn$$
$$+ \beta mm.$$

At ob $nn = \alpha mm + 1$, eſt $4\alpha mmnn - (nn + \alpha mm)^{2} = -(nn - \alpha mm)^{2} = -1$, et $2\beta mmnn - \beta mm(nn + \alpha mm) = \beta mm(nn - \alpha mm) = \beta mm$, vnde fit:

$$a^{II} = 2(nn + \alpha mm)a^{I} - a + 2\beta mm.$$

Coroll. 6.

9. Cum igitur ſimili modo ſit:

$$a^{III} = 2(nn + \alpha mm)a^{II} - a^{I} + 2\beta mm \text{ etc.}$$

Statim atque in ſerie a, a^{I}, a^{II}, a^{III} etc. duo primi termini habentur, primus ſcilicet a vndecunque, et ſecundus ex formula $a^{I} = (nn + \alpha mm)a + 2mnb + \beta mm$, ex his ſequentes omnes per has formulas definientur:

$$a^{II} = 2(nn + \alpha mm)a^{I} - a + 2\beta mm$$
$$a^{III} = 2(nn + \alpha mm)a^{II} - a^{I} + 2\beta mm$$
$$a^{IV} = 2(nn + \alpha mm)a^{III} - a^{II} + 2\beta mm.$$

Coroll. 7.

10. Pari autem modo progreſſio numerorum b, b^{I}, b^{II}, b^{III} etc. eſt comparata. Primo enim eius termino aliunde cognito, et ſecundo per formulam

$b^{\mathrm{I}} = 2\alpha mna + (nn + \alpha mm)b + \beta mn$, si in b^{II} pro a^{I} valor substituatur, erit:

$$b^{\mathrm{II}} = 2\alpha mn(nn + \alpha mm)a + 4\alpha mmnnb + 2\alpha\beta m^3 n$$
$$+ (nn + \alpha mm)b^{\mathrm{I}} + \beta mn$$

at ex valore ipsius b^{I} est $2\alpha mna = b^{\mathrm{I}} - (nn+\alpha mm)b - \beta mn$ quo substituto fit ob $nn - \alpha mm = 1$

$$b^{\mathrm{II}} = 2(nn + \alpha mm)b^{\mathrm{I}} - b \text{ similiterque}$$
$$b^{\mathrm{III}} = 2(nn + \alpha mm)b^{\mathrm{II}} - b^{\mathrm{I}}$$
$$b^{\mathrm{IV}} = 2(nn + \alpha mm)b^{\mathrm{III}} - b^{\mathrm{II}}$$
etc.

Coroll. 8.

11. Cum igitur vtraque series ita sit comparata, vt quilibet terminus ex binis praecedentibus secundum certam legem definiatur; vtraque series erit recurrens, scala relationis existente $2(nn + \alpha mm), -1$. Hinc ergo, formata aequatione $zz = 2(nn + \alpha mm)z - 1$, eius radices erunt:

$$z = 2nn - 1 \pm 2n\sqrt{(nn-1)} = (n \pm m\sqrt{\alpha})^2.$$

Coroll. 9.

12. Hinc ergo ex doctrina serierum recurrentium progressionis $a, a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{IV}}$ etc. terminus quicunque indefinite per sequentem formulam exprimetur:

$$\left(\tfrac{a}{2} + \tfrac{\beta}{4\alpha} + \tfrac{b}{2\sqrt{\alpha}}\right)(n+m\sqrt{\alpha})^{2\nu} + \left(\tfrac{a}{2} + \tfrac{\beta}{4\alpha} - \tfrac{b}{2\sqrt{\alpha}}\right)(n-m\sqrt{\alpha})^{2\nu} - \tfrac{\beta}{2\alpha} = x$$

alterius vero seriei $b, b^{\mathrm{I}}, b^{\mathrm{II}}, b^{\mathrm{III}}$ etc. terminus quicunque per hanc:

$$\left(\tfrac{b}{2} + \tfrac{a\sqrt{\alpha}}{2} + \tfrac{\beta}{4\sqrt{\alpha}}\right)(n+m\sqrt{\alpha})^{2\nu} + \left(\tfrac{b}{2} - \tfrac{a\sqrt{\alpha}}{2} - \tfrac{\beta}{4\sqrt{\alpha}}\right)(n-m\sqrt{\alpha})^{2\nu} = y$$

sumto pro ν numero quocunque integro.

Scholion.

Scholion.

13. Si hic pro 2ν ſubſtituamus ſucceſſiue omnes numeros integros 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc. vtraque progreſſio prodibit interpolata, cuius termini medii quaeſito aeque ſatisfacient, dummodo fuerint integri. At reperiemus: poſito

$$2\nu = 0;\quad x = a;$$
$$2\nu = 1;\quad x = na + mb + \frac{\beta(n-1)}{2\alpha};$$
$$2\nu = 2;\quad x = (nn + \alpha mm)a + 2mmb + \beta mm;$$
$$y = b$$
$$y = nb + \alpha ma + \frac{\beta m}{2}$$
$$y = (nn + \alpha mm)b + 2\alpha mna + \beta mn.$$

Quae vtraque ſeries eſt recurrens, ſcalam relationis habens $2n$, -1; ac pro priori quidem valorum ipſius x, ſi terni termini conſecutiui ſint P, Q, R, erit

$$R = 2nQ - P + \frac{\beta(n-1)}{\alpha};$$

at ſi in progreſſione valorum ipſius y terni termini ſe ordine ſequentes ſint P, Q et R, erit

$$R = 2nQ - P:$$

Quodſi ergo fuerit $\frac{\beta(n-1)}{2\alpha}$ numerus integer, omnes hi termini problema aeque reſoluent, ſicque duplo plures obtinebimus ſolutiones, quam methodus adhibita ſuppeditauerat. Quod autem plures locum habere poſſint ſolutiones, quam inuenimus, inde facile colligitur, quod praeter neceſſitatem primum erutarum formularum $nn - \alpha mm$ vnitati aequalem poſuimus, cum tamen ſine dubio ſaepe etiam numerator per denominatorem diuidi possit, etiamsi hic vnitate sit maior. Quemadmodum igitur omnes plane solutiones in numeris integris inueniri queant, sequenti problemate accuratius examinemus.

Problema 3.

14. Si α sit numerus integer positiuus non quadratus, dato vno numero integro a, qui pro x positus reddat formulam $\alpha xx+\beta x+\gamma$ quadratam, inuenire infinitos alios numeros integros, qui pro x sumti idem sint praestituri.

Solutio.

Ponatur in genere $\sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}=y$, casu autem cognito, quo $x=a$, esse $\sqrt{(\alpha aa+\beta a+\gamma)}=b$, atque hinc in genere fractionibus non exclusis fore vidimus:

$$x=\frac{(nn+\alpha mm)a+2mnb+\beta mm}{nn-\alpha mm}$$
$$y=\frac{(nn+\alpha mm)b+2\alpha mna+\beta mn}{nn-\alpha mm}$$

Iam quidem, vt hi numeri fiant integri, non absolute necesse est, vt denominator $nn-\alpha mm$ ad vnitatem reuocetur, verum sufficit, vt fractiones $\frac{nn+\alpha mm}{nn-\alpha mm}$ et $\frac{2mn}{nn-\alpha mm}$ in numeros integros abeant. Ponamus ergo esse

$$\frac{nn+\alpha mm}{nn-\alpha mm}=p, \text{ et } \frac{2mn}{nn-\alpha mm}=q$$

vnde fit $p-1=\frac{2\alpha mm}{nn-\alpha mm}$; ideoque

$$\frac{\beta mm}{nn-\alpha mm}=\frac{\beta}{2\alpha}(p-1) \text{ et } \frac{\beta mn}{nn-\alpha mm}=\tfrac{1}{2}\beta q.$$

Deinde

Deinde autem ex formulis affumtis fiet

$$pp-\alpha qq=\frac{(nn+\alpha mm)^2-4\alpha m^2n^2}{(nn-\alpha mm)^2}=1$$

ita vt fit $pp=\alpha qq+1$ et $p=\sqrt{(\alpha qq+1)}$.
Iterum igitur vt ante ex numero α binos numeros p et q affignari oportet, vt fit $p=\sqrt{(\alpha qq+1)}$, quibus inuentis habebitur:

$$x=pa+qb+\frac{\beta}{2\alpha}(p-1) \text{ et } y=pb+\alpha qa+\tfrac{1}{2}\beta q.$$

Dummodo ergo fuerit $\frac{\beta}{3\alpha}(p-1)$ numerus integer, hi valores fatisfaciunt. Quia autem numeros p et q tam negatiue, quam pofitiue, fumere licet, hae formulae infuper tres alias folutiones fuppeditant:

$$x=pa-qb+\frac{\beta}{2\alpha}(p-1); \text{ et } y=pb-\alpha qa-\tfrac{1}{2}\beta q$$

$$x=-pa+qb-\frac{\beta}{3\alpha}(p+1); \text{ et } y=-pb+\alpha qa+\tfrac{1}{2}\beta q$$

$$x=-pa-qb-\frac{\beta}{2\alpha}(p+1); \text{ et } y=-pb-\alpha qa-\tfrac{1}{2}\beta q$$

Quod fi porro horum bini quicunque pro a et b affumantur, ex quolibet quatuor nouae folutiones orientur. Hinc tamen non 61, fed tantum fex diuerfae oriuntur, inter quas adeo prima cognita $x=a$ et $y=b$, et quae huic eft affinis $x=-a-\frac{\beta}{\alpha}$, et $y=b$ continentur; reliquae vero quatuor funt

$$x=(pp+\alpha qq)a\pm 2pqb+\beta qq;$$
$$y=(pp+\alpha qq)b\pm 2\alpha pqa\pm\beta pq$$

$$x=-(pp+\alpha qq)a\pm 2pqb-\frac{\beta}{\alpha}pp;$$
$$y=(pp+\alpha qq)b\mp 2\alpha pqa\mp\beta pq$$

ex quibus deinceps nouae aliae in infinitum inueniri poffunt.

 Coroll.

Coroll. 1.

15. Quodſi ergo fuerit vel $\beta = 0$, vel eiusmodi numerus, vt $\beta(p-1)$, vel etiam $\beta(p+1)$ per 2α diuiſibile exiſtat, tum hoc modo plures ſolutiones in integris obtinentur, quam modo ante expoſito.

Coroll. 2.

16. In genere autem obſeruandum eſt, ſi ſatisfecerit caſus quicunque $x = v$, tum etiam ſatisfacturum eſſe caſum $x = -v - \frac{\beta}{\alpha}$, ex vtroque enim y eundem valorem nanciſcitur. Quare cum hi caſus ex illis tam facile eliciantur, his omiſſis inueſtigatio ſolutionum conuenientium ad dimidium reducitur.

Coroll. 3.

17. Reiectis ergo caſibus $x = -v - \frac{\beta}{\alpha}$, quippe qui ſponte ſe produnt inuentis caſibus $x = v$, ex caſu $x = a$ et $y = b$ ſtatim bini reperiuntur:

$$x = pa \pm qb + \frac{\beta}{2\alpha}(p-1);\; y = \alpha qa \pm pb + \tfrac{1}{2}\beta q$$

hincque porro per operationem ſecundam bini:

$$x = (pp + \alpha qq)a \pm 2pqb + \beta qq;\; y = 2\alpha pqa \pm (pp + \alpha qq)b + \beta pb$$

quae duplicitas ex ſigno ambiguo numeri b naſcitur.

Coroll. 4.

18. Si haec cum §. §. 12 et 13 conferantur, patebit omnes has formulas in ſequentibus expreſſionibus generalibus contineri, ſiquidem pro μ ſucceſſiue omnes numeri integri ſubſtituantur.

I.

$$\text{I}\begin{cases} x=\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}+\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{\beta}{2\alpha} \\ y=\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}\end{cases}$$

et

$$\text{II}\begin{cases} x=\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}+\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{\beta}{2\alpha} \\ y=\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}\end{cases}$$

Coroll. 5.

19. Hinc igitur duplices ſeries pro valoribus numerorum x et y reperiuntur, quae eandem progreſſionis legem tenebunt. Si enim ponamus:

$$x=a;\ a^{I};\ a^{II};\ a^{III};\ a^{IV};\ a^{V};\ \text{etc. P, Q, R}$$
$$y=b;\ b^{I};\ b^{II};\ b^{III};\ b^{IV};\ b^{V};\ \text{etc. S, T, V}$$

erit pro altera: $a^{I}=pa+qb+\frac{\beta}{2\alpha}(p-1)$ et $b^{I}=\alpha qa+pb+\frac{1}{2}\beta q$

et pro altera: $a^{I}=pa-qb+\frac{\beta}{2\alpha}(p-1)$ et $b^{I}=\alpha qa-pb+\frac{1}{2}\beta q$

pro vtraque vero haec communis progreſſionis lex valebit, vt ſit:

$$R=2pQ-P+\frac{\beta}{\alpha}(p-1) \text{ et } V=2pT-S.$$

Coroll. 6.

20. Cum ſit $pp-\alpha qq=1$, erit $(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}=(p-q\sqrt{\alpha})^{-\mu}$ et $(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}=(p+q\sqrt{\alpha})^{-\mu}$, hincque, ſi alterae ſeries retrorſum continuentur, prodibunt alterae. Sufficit ergo pro altero caſu has ſeries inſtruxiſſe, quae tam antrorſum, quam retrorſum, continuatae omnes ſolutiones, ex ambiguitate numeri b oriundas, in ſe continebunt.

Scholion.

Scholion.

21. Si ergo fuerit $\beta = 0$, vt habeatur haec formula: $V(\alpha xx + \gamma) = y$, rationalis reddenda, casusque constet, quo sit $V(\alpha aa + \gamma) = b$, sumtis numeris p et q ita, vt sit $p = V(\alpha qq + 1)$, innumerabiles alii valores satisfacientes continebuntur in his seriebus:

$$x = a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, \ldots \; P, Q, R$$
$$y = b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, \ldots \; S, T, V$$

vbi secundi termini ita debent accipi, vt sit

$$a^{I} = pa + qb; \; b^{I} = \alpha qa + pb$$

deinde vtraque series est recurrens, scala relationis existente $2p, -1$. Erit scilicet:

$$a^{II} = 2pa^{I} - a; \text{ et in genere } R = 2pQ - P$$
$$b^{II} = 2pb^{I} - b; \ldots \; V = 2pT - S$$

ambae vero series etiam retrorsum continuari debent, sicque duplo plures prodibunt solutiones, nisi sit vel $a = 0$, vel $b = 0$. Neque autem hic in censum veniunt solutiones negatiuae, quibus si satisfecerit $x = v$, etiam satisfacit $x = -v$. Omnes porro istae solutiones continentur in his formulis generalibus,

$$x = \tfrac{1}{2V\alpha}(aV\alpha + b)(p + qV\alpha)^{\mu} + \tfrac{1}{2V\alpha}(aV\alpha - b)(p - qV\alpha)^{\mu}$$
$$y = \tfrac{1}{2}(aV\alpha + b)(p + qV\alpha)_{\mu} - \tfrac{1}{2}(aV\alpha - b)(p - qV\alpha)^{\mu}$$

Pro variis igitur numeris, qui coefficientem α constituunt, sequentia exempla euoluamus, et quidem generalius, vt etiam coefficientis β ratio habeatur, pro casibus scilicet, quibus forte $\frac{\beta}{2\alpha}(p-1)$ fuerit numerus integer.

Exem-

Exemplum I

22. *Proposita formula* $\sqrt{(2xx+\beta x+\gamma)}=y$, *inuenire infinitos valores integros ipsius* x, *quibus haec formula rationalis euadit, siquidem vna solutio constet.*

Sit solutio cognita $x=a$ et $y=b$, et ob $\alpha=2$, habebimus $p=\sqrt{(2qq+1)}$, ideoque $q=2$ et $p=3$. Hinc secundi valores erunt:

$$a^{\mathrm{I}}=3a\pm 2b+\tfrac{\beta}{2};\ b^{\mathrm{I}}=4a\pm 3b+\beta.$$

Cum igitur in §. 19. sit $R=6Q-P+\beta$ et $V=6T-S$, habebimus sequentes series valorum satisfacientium et quidem integrorum, si β fuerit numerus par:

Valores ipsius x	Valores ipsius y
a	$\pm b$
$3a\pm 2b+\frac{\beta}{2}$	$4a\pm 3b+\beta$
$17a\pm 12b+4\beta$	$24a\pm 17b+6\beta$
$99a\pm 70b+\frac{49}{2}\beta$;	$140a\pm 99b+35\beta$
$577a\pm 408b+144\beta$,	$816a\pm 577b+204\beta$
$3363a\pm 2378b+\frac{1681}{2}\beta$;	$4756a\pm 3363b+1189\beta$
etc.	etc.

Tum vero cum y eosdem retineat valores, si pro x scribatur $-x-\frac{\beta}{2}$, etiam hae solutiones locum habebunt:

Valores ipsius x	Valores ipsius y
$-a-\frac{1}{2}\beta$	$\pm b$
$-3a\mp 2b-\beta$	$4a\pm 3b+\beta$
$-17a\mp 12b-\frac{9}{2}\beta$	$34a\pm 17b+6\beta$
$-99a\mp 706b-25\beta$	$140a\pm 99b+35\beta$
$-577a\mp 408b-\frac{289}{2}\beta$	$816a\pm 577b+204\beta$
$-3363a\mp 2378b-841\beta$	$4756a\pm 3363b+1189\beta$
etc.	etc.

Etiamsi ergo β non fuerit numerus par, tamen in vtroque ordine semissis valorum ipsius x fuerit numeri integri.

Exemplum 2.

23. *Proposita formula* $\sqrt{(3xx + \beta x + \gamma)} = y$, *inuenire infinitos valores integros ipsius* x, *quibus haec formula rationalis euadit, siquidem vnus casus constet.*

Praebeat casus cognitus $x = a$ et $y = b$, tum vero ob $\alpha = 3$ capiatur $p = \sqrt{(3qq + 1)}$, eritque $q = 1$ et $p = 2$. Hinc pro secundo casu habebimus:

$$a^{\mathrm{I}} = 2a \pm b + \tfrac{\beta}{6};\quad b^{\mathrm{I}} = 3a \pm 2b + \tfrac{1}{2}\beta,$$

ex quibus formentur binae series recurrentes, secundum has scalas relationis:

$$R = 4Q - P + \tfrac{\beta}{3};\quad V = 4T - S,$$

vnde obtinentur:

Valores ipsius x	Valores ipsius y
a	$\pm b$
$2a \pm b + \frac{1}{6}\beta$	$3a \pm 2b + \frac{1}{2}\beta$
$7a \pm b + \beta$	$12a \pm 7b + 2\beta$
$26a \pm 15b + \frac{25}{6}\beta$	$45a \pm 26b + \frac{15}{2}\beta$
$97a \pm 56b + 16\beta$	$168a \pm 97b + 28\beta$
$362a \pm 209b + \frac{361}{6}\beta$	$627a \pm 362b + \frac{209}{2}\beta$
$1351a \pm 780b + 225\beta$	$2340a \pm 1351b + 390\beta$
etc.	etc.

Praete-

Praeterea vero ſcribendo $-x-\frac{\beta}{3}$ pro x prodibunt

valores ipſius x	valores ipſius y
$-a-\frac{1}{3}\beta$	$\pm b$
$-2a\mp b-\frac{1}{2}\beta$	$3a\pm 2b+\frac{1}{2}\beta$
$-7a\mp 4b-\frac{4}{3}\beta$	$12a\pm 7b+2\beta$
$-26a\mp 15b\frac{9}{2}\beta$	$45a\pm 26b+\frac{15}{2}\beta$
$-97a\mp 56b-\frac{49}{3}\beta$	$168a\pm 97b+28\beta$
$-362a\mp 209b-\frac{121}{2}\beta$	$627a\pm 362b+\frac{209}{2}\beta$
$-1351a\mp 780b-\frac{676}{3}\beta$	$2340a\pm 1351b+390\beta$
etc.	etc.

Prout ergo numerus β diuiſibilis fuerit per 2, vel 3, vel vtrumque, hinc eo plures ſolutiones in integris eliciuntur.

Exemplum 3.

24. *Propoſita formula* $\sqrt{(5xx+\beta x+\gamma)}=y$, *inuenire infinitos valores integros ipſius* x, *quibus haec formula rationalis euadat, ſiquidem vnus caſus fuerit cognitus.*

Pro caſu cognito ſit $x=a$ et $y=b$, et ob $\alpha=5$, quaerantur numeri p et q, vt ſit $p=\sqrt{(5qq+1)}$. Fiet ergo $q=4$ et $p=9$; et hinc ſecunda ſolutio prodibit:

$$a^{\mathrm{I}}=9a\pm 4b+\tfrac{4}{5}\beta;\quad b^{\mathrm{I}}=20a\pm 9b+2\beta.$$

Cum ergo ſit $a^{\mathrm{II}}=18a^{\mathrm{I}}-a+\frac{8}{5}\beta$ et $b^{\mathrm{II}}=18b^{\mathrm{I}}-b$, ſequentes ſolutiones habebuntur:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
a	$\pm b$
$9a\pm 4b+\frac{4}{5}\beta$	$20a\pm 9b+2\beta$
$161a\pm 72b+16\beta$	$360a\pm 161b+36\beta$
$2889a\pm 1292b+\frac{1444}{5}\beta$	$6460a\pm 2839b+646\beta$
etc.	etc.

vbi pro quolibet valore ipſius x etiam poni poteſt $-x-\frac{\beta}{\varsigma}$.

Scholion 1.

25. Cum hoc modo ex vna ſolutione in integris cognita, infinitae aliae ſolutiones etiam in integris eliciantur, quaeſtio naſcitur, an hoc modo omnes plane ſolutiones integrae obtineantur, nec ne? Ac in exemplis quidem primo et ſecundo nullum erit dubium, quin hac methodo omnes ſolutiones integrae obtineantur. Verum in exemplo tertio vtique dantur caſus, quibus multo plures ſolutiones in integris exhiberi poſſunt, quam quidem hac methodo reperiuntur. Veluti ſi propoſita fuerit formula $\sqrt{(5xx+4)}=y$, quae pro caſu cognito praebet $a=0$ et $b=2$, noſtra ſolutio dat:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
0	2
8	18
144	322
2584	5778
etc.	etc.

Verum hanc formulam diligentius ſcrutanti patebit, non ſolum his caſibus $\sqrt{(5xx+4)}$ fieri rationalem, ſed etiam iſtis numeris pro x ſubſtituendis

$$x=0,\ 1,\ 3,\ 8,\ 21,\ 55,\ 144,\ 377,\ 987,\ \text{etc.}$$

vnde ſolutionum numerus triplicatur. Cuius rei ratio eſt, quod ad formulam $p=\sqrt{(5qq+1)}$ reſoluendam poſuimus $q=4$; vnde fit $p=9$, quae quidem eſt ſimpliciſſima ſolutio in numeris integris. At quoniam in ſcala

ſcala relationis ineſt $2p$, ea numeris integris conſtabit, etiamſi p ſit fractio denominatorem habens 2. Hanc ob rem iſtas ſimpliciores ſolutiones nanciſcemur, ſi ponamus $q = \frac{1}{2}$, vnde fit $p = \frac{3}{2}$; ſicque, ob $\alpha = 5$, ſecundi valores erunt:

$$a^{\mathrm{I}} = \tfrac{3}{2}a \pm \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{20}\beta;\ b^{\mathrm{I}} = \tfrac{5}{2}a \pm \tfrac{3}{2}b + \tfrac{1}{4}\beta$$

ac tertii cum ſequentibus per hanc legem ſuppeditabuntur:

$$a^{\mathrm{II}} = 3a^{\mathrm{I}} - a + \tfrac{1}{10}\beta, \quad b^{\mathrm{II}} = 3b^{\mathrm{I}} - b,$$

vnde nanciſcimur hos valores:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
a	$\pm b$
$\frac{3}{2}a \pm \frac{1}{2}b + \frac{1}{20}\beta$	$\frac{5}{2}a \pm \frac{3}{2}b + \frac{1}{4}\beta$
$\frac{7}{2}a \pm \frac{3}{2}b + \frac{1}{4}\beta$	$\frac{15}{2}a \pm \frac{7}{2}b + \frac{3}{4}\beta$
$9a \pm 4b + \frac{4}{5}\beta$	$20a \pm 9b + 2\beta$
$\frac{47}{2}a \pm \frac{21}{2}b + \frac{9}{4}\beta$	$\frac{105}{2}a \pm \frac{47}{2}b + \frac{21}{4}\beta$
$\frac{123}{2}a \pm \frac{55}{2}b + \frac{121}{20}\beta$	$\frac{275}{2}a \pm \frac{123}{2}b + \frac{55}{4}\beta$
$161a \pm 72b + 16\beta$	$360a \pm 161b + 36\beta$
etc.	etc.

Atque hinc illae triplo plures ſolutiones oriuntur, quoties fuerit $a \pm b$ numerus par, ac β vel $= 0$, vel per 20 diuiſibile.

Scholion 2.

26. Quandoque ergo plures ſolutiones in numeris integris reperiuntur, ſi pro p et q fractiones cum denominatore 2 aſſumuntur, quod quando in genere eueniat, operae pretium erit inueſtigaſſe. Plerumque autem hi caſus locum non habent, niſi ſit vel $\beta = 0$,

 vel

vel formula ad talem formam reduci poſſit. Sit ergo propoſita formula $V(\alpha xx+\gamma)=y$, cui ſatisfaciat caſus $x=a$ et $y=b$; tum ſtatuatur $p=\frac{m}{2}$ et $\frac{n}{2}$, ſeu quaerantur numeri m et n, vt ſit $mm=\alpha nn+4$ et $m=V(\alpha nn+4)$. Tum vero ſolutio prima ſtatim dat ſecundam:

$$a^{I}=\frac{ma+nb}{2} \quad \text{et} \quad b^{I}=\frac{\alpha na+mb}{2},$$

vbi quidem numeri m et n tam negatiue, quam affirmatiue, accipi poſſunt. Denique his binis primis inventis, ſequentes per hanc regulam reperientur:

$$a^{II}=ma^{I}-a \quad \text{et} \quad b^{II}=mb^{I}-b.$$

In genere autem quilibet numerus pro x ſatisfaciens continetur hac formula:

$$x=\frac{1}{2V\alpha}(aV\alpha+b)\left(\frac{m+nV\alpha}{2}\right)^{\mu}+\frac{1}{2V\alpha}(aV\alpha-b)\left(\frac{m-nV\alpha}{2}\right)^{\mu},$$

ex qua fit:

$$y=\tfrac{1}{2}(aV\alpha+b)\left(\frac{m+nV\alpha}{2}\right)^{\mu}-\tfrac{1}{2}(aV\alpha-b)\left(\frac{m-nV\alpha}{2}\right)^{\mu}.$$

Quoties igitur $ma+nb$ prodierit numerus par, neque tamen m et n ſint pares, toties triplo plures ſolutiones in integris prodeunt, quam methodo praecedente. Hae vero ſolutiones ita ſe habebunt:

$= a$	$b = b$
$a^{I}=\frac{ma+nb}{2}$	$b^{I}=\frac{mb+\alpha na}{2}$
$a^{II}=\frac{(mm-2)a+mnb}{2}$	$b^{II}=\frac{(mm-2)b+\alpha mna}{2}$
$a^{III}=\frac{(m^{3}-3m)a+(mm-1)nb}{2}$	$b^{III}=\frac{(m^{3}-3m)b+\alpha(mm-1)na}{2}$
$a^{IV}=\frac{(m^{4}-4mm+2)a+(m^{3}-2m)nb}{2}$	$b^{IV}=\frac{(m^{4}-4m^{2}+2)b+\alpha(m^{3}\ 2m)na}{2}$
$a^{V}=\frac{(m^{5}-5m^{3}+5m)a+(m^{4}-3m^{2}+1)nb}{2}$	$b^{V}=\frac{(m^{5}-5m^{3}+5m)b+\alpha(m^{4}-3m^{2}+1)na}{2}$

etc.

Obſer-

Obseruatio I.

27. Haec altera methodus tum demum plures solutiones in numeris integris suppeditat, quam prior, cum m et n fuerint numeri impares, simulque a et b ambo vel pares, vel impares. Si enim m et n sint numeri pares, p et q erunt integri, et formula $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$, easdem solutiones praebebit, ac formula $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$. Deinde si $ma + nb$ non fuerit numerus par, valores a^{I}, a^{II} non euadent integri, neque propterea plures solutiones reperiuntur, quam priore methodo, dum adhibetur formula $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$. Distingui ergo oportet eos casus, quibus formulae $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$, numeris imparibus pro m et n accipiendis, satisfieri potest, id quod statim patet fieri non posse, si α fuerit numerus formae $4z - 1$, vel etiam huius $8z + 1$. Quare pro α alii numeri impares non relinquuntur, nisi qui sint formae $4z + 5$. Pro his ergo casibus minimos valores, formulae $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$ satisfacientes, sequens tabella exhibet:

Si fuerit	capiatur	eritque
$\alpha = 5$	$n = 1$	$m = 3$
$\alpha = 13$	$n = 3$	$m = 11$
$\alpha = 21$	$n = 1$	$m = 5$
$\alpha = 29$	$n = 5$	$m = 27$
$\alpha = 37$	$n = -$	$m = -$
$\alpha = 45$	$n = 1$	$m = 7$
$\alpha = 53$	$n = 7$	$m = 51$

Si fuerit	capiatur	eritque
$\alpha = 61$	$n = 195$	$m = 1523$
$\alpha = 69$	$n = 75$	$m = 623$
$\alpha = 77$	$n = 1$	$m = 9$
$\alpha = 85$	$n = 9$	$m = 83$
$\alpha = 93$	$n = 57$	$m = 839$

quaeritur hic ratio, cur casus $\alpha = 37$ non recipiat valores impares pro m et n?

Hic

Hic igitur patet, ſi ſit $\alpha = 37$, non dari numeros impares pro m et n, pro reliquis autem caſibus reſolutio ſuccedit. Ita ſi proponatur haec formula $\sqrt{(53xx+28)} = y$, habetur ſtatim $a = 1$ et $b = 9$. Deinde ob $n = 7$ et $m = 51$, erit $a^{I} = \frac{51+63}{2} = 57$ et $b^{I} = \frac{371+459}{2} = 415$, ſeu etiam $a^{I} = -6$; et $b^{I} = -44$; et ſeries recurrentes pro x et y, quarum ſcala relationis eſt $51, -1$, erunt:

$$x = \text{etc.} -307; -6; 1; 57; 2906; \text{etc.}$$
$$y = \text{etc.} +2235; +44; 9; 415; 21156; \text{etc.}$$

Obſeruatio 2.

28. Sufficit autem caſus euoluiſſe, quibus in formula generali $\alpha xx + \beta x + \gamma$ ſecundus terminus deeſt, quoniam haec ad talem formam ſalua numerorum integritate reuocari poteſt. Vulgaris quidem modus, quo ex aequationibus ſecundus terminus tolli ſolet, ponendo $x = y - \frac{\beta}{2\alpha}$, hic locum habere nequit, niſi β ſit numerus per 2α diuiſibilis. Verum ſi $\alpha xx + \beta x + \gamma$ debeat eſſe quadratum, ponatur $\alpha xx + \beta x + \gamma = yy$, ac multiplicando per 4α prodibit $4\alpha\alpha xx + 4\alpha\beta x + 4\alpha\gamma = 4\alpha yy$,

ideoque $4\alpha yy + \beta\beta - 4\alpha\gamma = (2\alpha x + \beta)^2$

Quaerantur ergo caſus, quibus formula $4\alpha yy + \beta\beta - 4\alpha\gamma$ fit quadratum, indeque habebuntur valores pro x ſubſtituendi, qui formulam $\alpha xx + \beta x + \gamma$ reddant quadratam, ſcilicet ſi fuerit $\sqrt{(4\alpha yy + \beta\beta - 4\alpha\gamma)} = z$, erit $2\alpha x + \beta = z$, hincque $x = \frac{z-\beta}{2\alpha}$.

Quodſi

Quodsi β fuerit numerus par, puta 2δ, posito: $\alpha xx + 2\delta x + \gamma = yy$, erit $(\alpha x + \delta)^2 = \alpha yy + \delta\delta - \alpha\gamma$ sicque formula $\alpha yy + \delta\delta - \alpha\gamma$ ad quadratum est revocanda; ac si inuenimus $\sqrt{(\alpha yy + \delta\delta - \alpha\gamma)} = z$, erit $\alpha x + \delta = z$, et $x = \frac{z - \delta}{\alpha}$, vnde plerumque pro x numeri integri reperiuntur; etsi enim forte $\frac{z - \delta}{\alpha}$ non fuerit integer, tamen ex vno valore z cognito, si modo supra tradito alii eliciantur in infinitum, alterni saltem erunt numeri integri. Ex quo perspicuum est, resolutionem formularum quadraticarum radicalium $\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)}$ nulla limitatione affici, etiamsi terminus βx plane omittatur, sicque totum negotium huc redit, vt formulae huiusmodi $\sqrt{(\alpha xx + \gamma)}$ rationales, et quidem in numeris integris reddantur.

Obseruatio 5.

29. Iam annotaui, formulam $\alpha xx + \gamma$ in numeris integris saltem pluribus ac infinitis modis quadratum effici non posse, nisi α sit numerus positiuus non quadratus. Existente autem α tali numero, problema non ita resolui potest, vt pro quocunque numero pro γ assumto, solutio succedat: possent enim vtique eiusmodi numeri pro γ dari, vt problema nullam plane solutionem admitteret, atque hanc ob rem postulari vnam saltem solutionem cognitam esse debere, quo ipso casus insolubiles exclusi. Verum dato α characteres exhiberi possunt, ex quibus dignosci liceat, vtrum numerus γ sit eiusmodi, qui solutionem admittat, nec ne? Ac primo quidem perspicuum est, nullam solu-

 tionem

tionem locum habere posse, nisi γ sit numerus in tali formula $bb-\alpha aa$ contentus. Dato ergo numero α, formetur series omnium numerorum, tam positiuorum, quam negatiuorum, qui quidem in formula $bb-\alpha aa$ sint contenti; ac nisi γ in hac serie reperiatur, certo pronunciare licet, formulam $\sqrt{(\alpha xx+\gamma)}$ nullo modo rationalem reddi posse: vicissim autem, quoties γ in hac serie comprehenditur, quia tum est $\gamma=bb-\alpha aa$, formula $\alpha xx+\gamma$ fit quadratum, ponendo $x=a$, eritque $\sqrt{(\alpha xx+\gamma)}=b$. Haec igitur series, cuius quasi terminus generalis est $bb-\alpha aa$, primo continebit, sumto $a=0$, omnes numeros quadratos 1, 4, 9, 16, 25, etc. tum vero omnes quadratos per $-\alpha$ multiplicatos nempe: $-\alpha$, -4α, $-\alpha 9$, $-\alpha 16$, etc. Praeterea si p et q fuerint numeri in hac serie contenti, in ea quoque reperietur eorum productum pq; nam cum sit $p=bb-\alpha aa$ et $q=dd-\alpha cc$, erit $pq=(bd\pm\alpha ac)-\alpha(bc\pm ad)^2$, et ob ambiguitatem signi hoc productum duplici modo est numerus formae $bb-\alpha aa$, ideoque statim habentur duae solutiones $x=bc+ad$ et $x=bc-ad$.

Obseruatio 4.

30. Hinc ergo consecuti sumus hoc Theorema eximium, quod fundamentum superiorum solutionum in se complectitur:

„ Si fuerit $\alpha xx+p=yy$ casu $x=a$ et $y=b$ tum
„ vero etiam $\alpha xx+q=yy$ casu $x=c$ et $y=d$; haec
„ formula $\alpha xx+pq=yy$ adimplebitur capiendo

$$x=bc\pm ad \text{ et } y=bd\pm\alpha ac$$

Si

Si enim ſit $q=1$ et $dd=\alpha cc+1$, praeterea vero formulae $\alpha xx+p=yy$ ſatisfiat caſu $x=a$ et $y=b$; qui eſt caſus ſupra pro cognito aſſumtus; tum eidem formulae ſatisfacient valores:

$$x=bc\pm ad \text{ et } y=bd\pm\alpha ac$$

vnde eadem omnino ſolutio conficitur, quam ſupra exhibuimus, atque ex longe diuerſis principiis elicuimus: quocirca haec poſtrema inueſtigationis ratio ob concinnitatem et perſpicuitatem eo magis eſt notatu digna. Hic vero accedit, quod haec ratio multo latius pateat, quam praecedens, quippe quae ad caſum $q=1$ fuerat adſtricta. Demonſtratio autem iſtius Theorematis elegantiſſimi ita breuiſſime ſe habebit:

„ Cum ſit $\alpha aa+p=bb$, erit $p=bb-\alpha aa$
„ et ob $\alpha cc+q=dd$, erit $q=dd-\alpha cc$
„ hinc erit $pq=(bb-\alpha aa)(dd-\alpha cc)$, quae expres-
„ ſio reducitur ad hanc:

$$pq=(bd\pm\alpha ac)^2-\alpha(bc\pm ad)^2$$

„ Quodſi ergo fuerit $x=bc\pm ad$ et $y=bd\pm\alpha ac$,
„ erit $pq=yy-\alpha xx$, ideoque $\alpha xx+pq=yy$.

Q. E. D.

Obſeruatio. 5.

31. Cum igitur pro quolibet numero α formulae $\alpha xx+\gamma=yy$ numerus γ debeat eſſe formae $bb-\alpha aa$, numeri in hac forma contenti diligentius examinari merentur; et quoniam, ſi inter eos occurrunt numeri p et q, ſimul quoque eorum productum pq

 occur-

occurrit, praeter numeros quadratos 1, 4, 9, 16, 25 etc. eorumque multipla negatiua $-\alpha$, -4α, -9α, -16α, -25α etc. imprimis numeri primi in hac forma contenti sunt spectandi, quippe ex quibus deinceps per multiplicationem compositi nascuntur.

I. Sit $\alpha = 2$ et numeri primi formae $bb - 2aa$ sunt:

positiui: $+1$, $+2$, $+7$, $+17$, $+23$, $+31$, $+41$, $+47$, $+71$, $+73$, $+79$, $+89$, $+97$ etc.

negatiui: -1, -2, -7, -17, -23, -31, -41, -47, -71, -73, -79, -89, -97 etc.

qui praeter $+2$ et -2 omnes in forma $\pm(8n \pm 1)$ continentur.

II. Sit $\alpha = 3$ et numeri primi formae $bb - 3aa$ sunt:

positiui: $+1$, $+13$, $+37$, $+61$, $+73$, $+97$, $+109$, etc.

negatiui: -2, -3, -11, -23, -47, -59, -71, -83, -107, etc.

qui praeter -2 et -3 omnes continentur in forma $12n + 1$, siquidem pro n tam numeri positiui, quam negatiui, capiantur.

III. Sit $\alpha = 5$ et numeri primi formae $bb - 5aa$ sunt:

positiui: $+1$, $+5$, $+11$, $+19$, $+29$, $+31$, $+41$, $+59$, $+61$, $+71$, $+79$, $+89$, $+101$, etc.

negatiui: -1, -5, -11, -19, -29, -31, -41, -59, -61, -71, -79, -89, -101 etc.

qui praeter $+5$ et -5, omnes in forma $10n \pm 1$ continentur.

IV. Sit $\alpha = 6$ et numeri primi formae $bb - 6aa$ ſunt:
poſitiui: $+1, +3, +19, +43, +67, +73, +97$, etc.
negatiui: $-2, -23, -29, -47, -53, -71, -101$, etc.
qui, praeter -2 et $+3$, omnes in alterutra harum formarum: $24n+1$ et $24n-5$ continentur, ſumendo pro n numeros tam negatiuos, quam poſitiuos.
V. Sit $\alpha = 7$ et numeri primi formae $bb - 7aa$ ſunt:
poſitiui: $+1, +2, +29, +37, +53, +109$ etc.
negatiui: $-7, -3, -19, -31, -47, -59, -83$ etc.
qui praeter $+2$ et -7 omnes in vna harum formarum continentur: $28n+1$; $28n+9$; $28n+25$

Obſeruatio 6.

32. Hinc colligimus, omnes numeros primos in formula $bb - \alpha aa$ contentos ſimul in quibusdam huiusmodi formulis $-4\alpha n + A$ contineri, dum pro A certi quidam numeri ſubſtituuntur. Quod idem etiam hoc modo oſtendi poteſt: ponatur $b = 2\alpha p + r$ et $a = 2q + s$ ac formula $bb - \alpha aa$ tranſit in hanc:

$$4\alpha\alpha pp + 4\alpha pr + rr - 4\alpha qq - 4\alpha qs - \alpha ss$$

ſtatuatur $\alpha pp + pr - qq - qs = n$ et habebimus:

$$bb - \alpha aa = 4\alpha n + rr - \alpha ss$$

omnes ergo numeri primi formae $bb - \alpha aa$ quoque in hac forma $4\alpha n + rr - \alpha ss$ continentur; atque vt hi numeri ſint primi, r et s ita accipi oportet, vt numerus $rr-\alpha ss$ ſit vel ipſe primus, vel ſaltem ad 4α primus. Primo ergo ſumto $s=0$, pro r ſucceſſiue accipi poſſunt numeri impares ad α primi, ac ſi rr fuerit maius quam 4α, inde 4α toties ſubtrahatur, quoties fieri poteſt, vt reſiduum ſit minus quam 4α, et quot hoc modo diuerſi numeri reſultant, ii in formula $4\alpha n+A$ loco A collocentur. Deinde etiam ſimili modo colligantur numeri ex formulis $rr-\alpha$, qui quatenus ſunt diuerſi, ad illos inſuper adiiciantur. Non autem opus eſt, pro s alios numeros praeter vnitatem aſſumere; ſi enim s eſſet numerus par, numerus $-\alpha ss$ iam in forma $4\alpha n$ contineretur, et ſi s eſſet impar, numerus $-\alpha ss$ haberet formam $-4\alpha N-\alpha$, cuius pars $-4\alpha N$ iam in $4\alpha n$ continetur, ſicque ſufficit pro formulis $4\alpha n+A$, quouis caſu has $4\alpha n+rr$ et $4\alpha n+rr-\alpha$ euoluere, eaeque iam omnes numeros primos, qui quidem in formula $bb-\alpha aa$ comprehenduntur, in ſe complectentur. Num autem viciſſim omnes numeri primi, in his formulis $4\alpha n+rr$ et $4\alpha n+rr-\alpha$ contenti, ſimul ſint numeri formae $bb-\alpha aa$? quaeſtio eſt altioris indaginis, quae tamen affirmanda videtur.

Obſeruatio 7.

33. Quo haec exemplo illuſtremus, ſit $\alpha=13$, et ex $4\alpha n+rr$ et $4\alpha n+rr-\alpha$ orientur hae formulae pro numeris primis:

ex

ex $4an+rr$	ex $4a+rr-a$
$52n+1$	$52n-9$
$52n+9$	$52n+3$
$52n+25$	$52n+23$
$52n+49=52n-3$	$52n+51=52n-1$
$52n+81=52n-23$	$52n+87=52n-17$
$52n+121=52n+17$	$52n+131=52n-25$

quae formulae reducuntur ad has:

$52n\pm 1$; $52n\pm 3$; $52n\pm 9$; $52n\pm 17$; $52n\pm 23$; $52n\pm 25$.

ac numeri primi in his contenti sunt:

± 1; ± 3; ± 17; ± 23; ± 29; ± 43; ± 53; ± 61; ± 79; ± 101; ± 103;

quibus addi debet ± 13; tum vero omnes numeri quadrati; atque si insuper adiiciantur producta ex binis pluribusque horum numerorum, obtinebuntur hoc quidem casu omnes numeri, qui pro γ substituti producunt formulam $13xx+\gamma=yy$ in numeris integris resolubilem; seu quicunque illorum numerorum pro γ accipiatur, vnus primo deinde infiniti numeri integri pro x inueniri possunt, quibus formula $13xx+\gamma$ quadratum reddatur. Omnes enim isti numeri simul in forma $bb-13aa$ continentur; qui enim huc difficiliores reductu videntur, sunt: $-1=18^2-13.5^2$

$+13=65^2-13.18^2$; $-3=7^2-13.2^2$; $17=15^2-13.4^2$; $-17=10^2-13.3^2$

$-23=43^2-13.12^2$; $+29=9^2-13.2^2$; $-29=32^2-13.9^2$; $+43=76^2-13.21^2$

-43,

$-43=3^2-13.2^2; +53=51^2-13.14^2; -53=8^2-13.3^2;$
$+61=23^2-13.6^2$
$-61=24^2-13.7^2; +79=14^2-13.3^2; -79=16^2-13.5^2;$
etc.

Cum ergo ſit $-1=18^2-13.5^2$, ſi fuerit $+\gamma=bb-13aa$, erit $-\gamma=(18b\pm65a)^2-13(18a\pm5b)^2$, vnde caſus difficiliores reſoluuntur.

Propoſita ergo reſoluenda hac aequatione $13xx+43.79=yy$, cum ſit $\gamma=43.79=-43.-79.$ habebitur per compoſitionem:

I. $\gamma=(14.76\pm13.63)^2-13(14.21\pm3.76)^2$
ergo $x=294\pm228$ et $y=1064\pm819$

II. $\gamma=(3.16\pm13\ 10)^2-13(2.16\pm3.\ 5)^2$
ergo $x=32\pm15$ et $y=130\pm48$

vnde ſtatim 4 ſolutiones obtinentur.

Obſeruatio 8.

34. Verum non ſemper ex his numeris primis, quos modo inueſtigare docuimus, cum quadratis omnes plane numeri, qui pro γ aſſumi poſſunt, reperiuntur, cuius rei exemplum eſt caſus $\alpha=10$, pro quo valores ipſius γ in hac forma $bb-10aa$ continentur; iique ſunt, tam negatiue, quam poſitiue, ſumti:

1, 4, 6, 9, 10, 15, 16, 24, 25, 26, 31, 36, 39, 40, 41, 49, 54, 60, 64, 65, 71, 74, 79, 81, 86, 89, 90, 96, 100, 104, 106, 111, 121, 124, 129, 134, 135, 144, 150, 151, 156, 159, 160, 164, 166, 169, 185, 186, 191, 196, 199, 201, etc.

inter

inter quos numeros occurrunt primo omnes quadrati: 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196, etc. deinde numeri primi 31,41,71,79,89,151,191,199, etc. qui in his formulis continentur $40n+1$ et $40n+9$. insuperque accedunt producta ex binis pluribusue horum numerorum. Tertio vero praeter hos adsunt numeri ex binis numeris primis compositi, qui sunt:

2.3; 2.5; 2.13; 2.37; 2.43; 2.53; 2.67; 2.83; etc.
3.5; 3.13; 3.37; 3.43; 3.53; 3.67; etc.
5.13, 5.37, etc.

At hi numeri primi, quorum semper bini sunt in se multiplicandi, sunt primo 2 et 5, reliqui vero in his formulis continentur $40n+3$ et $40n+13$. Denique etiam secundum regulam generalem adiici debent producta ex binis pluribusue numeris, qui per se satisfaciunt. Ita resolui poterit haec aequatio $10xx+13.53.151=yy$ nam est $13.53=bb-10aa$ existente $b=27$ et $a=2$ et $151=dd-10cc$; existente $d=31$ et $c=9$. hincque

$$13.53.151=(bd\pm 10ac)^2-10(ad\pm bc)^2$$

et $x=ad\pm bc$ et $y=bd\pm 10ac$.

Deinde cum etiam sit $-13.53=BB-10AA$ et $-151=DD-10CC$, hinc duae aliae solutiones reperiuntur. Cum autem sit $-1=3^2-10.1^2$, si fuerit $\gamma=bb-10aa$, erit $-\gamma=(3a+b)^2-10(3a+b)^2$. Solutiones autem hinc oriundae sunt:

$x=181$; $x=305$; $x=307$;
$y=657$; $y=1017$; $y=1023$;

duae enim inter se conueniunt, ita vt hinc tres tantum reperiantur.

Obferuatio 9.

35. Hoc ergo cafu $\alpha = 10$ pro γ triplicis generis numeros primitiuos inuenimus, primo fcilicet numeros quadratos omnes, deinde certos numeros primos in formulis $40n + 1$ et $40n + 9$ contentos, tertio autem producta ex binis certis numeris primis, qui funt 2, 5 et reliqui ex his formulis $40n + 3$ et $40n + 13$ petendi, atque ex hoc demum triplici ordine omnes numeri pro γ idonei formantur, vt huic aequationi $10xx + \gamma = yy$ fatisfieri poffit. Ipfi autem numeri primi in formulis $40n + 3$ et $40n + 13$ contenti non conueniunt, quia non funt formae $bb - 10aa$, fed tamen hi numeri omnes funt formae $2bb - 5aa$; vti etiam duo iis iungendi 2 et 5. Manifeftum autem eft, fi habeantur duo numeri huiusmodi $2bb - 5aa$ et $2dd - 5cc$, eorum productum fore $= (2bd + 5ac)^2 - 10(bc + ad)^2$, ideoque pro γ adhiberi poffe. Huiusmodi igitur producta binorum numerorum primorum, qui ipfi non fatisfaciunt, occurrere nequeunt, fi α fuerit numerus primus, fed tantum, vti hic vfu venit, fi α fuerit numerus compofitus; quod tamen etiam non femper locum habet, vti vidimus cafu $\alpha = 6 = 2 \cdot 3$, quo numeri formae $3bb - 2aa$ conueniunt cum numeris formae $bb - 6aa$. Quodfi ergo in genere fuerit $\alpha = pq$, et aequatio $pqxx + \gamma = yy$ refolui debeat, numerus γ vel effe debet numerus quadratus, vel primus formae $bb - pqaa$, vel productum ex duobus numeris primis formae $pbb - qaa$, propterea quod huiusmodi productum eft:

$$(pbb - qaa)(pdd - qcc) = (pbd + qac)^2 - pq(bc + ad)^2$$

Nifi

Nisi ergo tales numeri primi iam ipsi $pbb-qaa$ in forma $bb-pqaa$ contineantur, tertius ille ordo numerorum ex binis numeris primis conflatorum accedit. Quemadmodum deinde numeri primi solitarii continentur in formulis

$$4pqn+rr \quad \text{et} \quad 4pqn+rr-pq$$

ita numeri primi alteri combinandi ex formula hac:

$$4pqn+prr-qss$$

deriuari debent.

Exemplum I.

36. Inuestigentur omnes valores idonei ipsius γ, vt haec aequatio $30xx+\gamma=yy$ resolutionem admittat.

Primo quidem pro γ assumi possunt omnes numeri quadrati, deinde omnes numeri primi in his formis $120n+rr$ et $12\ n+n-30$ contenti, quae reducuntur ad has:

$120n+1$; $120n+49$; $120n+19$; $120n-29$, cum -5

vnde oriuntur hi numeri primi infra 200

positiui: $+19, +139$

et negatiui: $-5, -29, -71, -101, -149, -191$

Tertio ob $\alpha=2\ 3.\ 5$, sumi possunt producta trinorum primorum, qui contineantur vel ambo in vna harum formularum:

I. $120n+2rr-15ss$, II. $120n+3rr-10ss$;
III. $120n+5rr-6ss$

harum autem binae priores eosdem numeros primos dant, qui sunt $+2. +3$, et reliqui in his formulis

 conti-

continentur:

$120n-7$; $120n-13$; $120n+17$; $120n-37$

vnde nafcuntur hi numeri primi infra 200

pofitiui: $+2$; $+3$; $+17$; $+83$; $+107$; $+113$; $+137$

negatiui: -7; -13; -37; -103; -127

quorum binorum producta pro γ capienda funt;

$+6, +34, +51, +91, +166$

$-14, -21, -26, -39, -74, -111, -119$

Tertia autem formula continet numerum primum $+5$, cum his formis:

$120n-1$; $120n-19$; $120n+29$; $120n-49$

vnde nafcuntur hi numeri primi infra 200

pofitiui: $5, +29, +71, +101, +149, +191$

negatiui: $-1, -19, -139$

At ex horum combinatione iidem nafcuntur numeri, qui iam ex numeris primis primitiuis oriuntur. Quocirca omnes numeri, qui pro γ fubftitui poffunt, erunt infra 200:

$+1, +4, +9, +16, +25, +36, +49, +64, +81, +100, +121, +144, +169, +196,$

$-5, +19, -29, -71, -101, +139, -149, -191$

$+6, -14, -21, -26, -34, -39, +51, -74, +91, -111, -119, +166$

$-20, +24, -30, -45, +54, -56, +70, +76, -80, -84, -95, +96, -104, +105$

$+114, -116, -125, -126, +130, +136, +145, +150, -156, -170, +171, -189, +195$

reliqui

reliqui autem numeri omnes pro γ assumti reddent problema impossibile.

Exemplum 2.

37. *Resoluere in numeris integris aequationem*

$$5xx + 11.\,19.\,29 = yy$$

Quia est $\alpha = 5$ et $\gamma = 11.\,19.\,29$, factores hi cum forma $bb - 5aa$ conueniunt, et singuli in ea contineri deprehenduntur: nam

pro 11 est $b = 4$, $a = 1$ vnde etiam producta ex
19 -- $b = 8$, $a = 3$ binis in eadem forma
29 -- $b = 7$, $a = 2$ continentur

pro 11. 19 est $\left\{\begin{matrix} b = 17; & a = 4 \\ b = 47; & a = 20 \end{matrix}\right\}$ ergo tertium adiungendo

pro 11. 19. 29 est $\left\{\begin{matrix} b = 79; & a = 6 \\ b = 159; & a = 62 \\ b = 129; & a = 46 \\ b = 529; & a = 234 \end{matrix}\right\}$

Cum iam sit $1 = 9^2 - 5.4^2$, seu $b = 9$ et $a = 4$ pro 1, hae formulae insuper per 1 multiplicatae duplicabuntur, fietque pro 11. 19. 29

$b = 591$;	$a = 262$	$b = 241$;	$a = 102$
$b = 831$;	$a = 370$	$b = 2081$;	$a = 930$
$b = 191$;	$a = 78$	$b = 81$;	$a = 10$
$b = 2671$;	$a = 1194$	$b = 9441$;	$a = 4222$

Hinc ergo iam duodecim solutiones problematis sumus nacti, quae sunt:

I. $x = 6$; $y = 79$	VII. $x = 234$; $y = 529$
II. $x = 10$; $y = 81$	VIII. $x = 262$; $y = 591$
III $x = 46$; $y = 129$	IX. $x = 370$; $y = 831$
IV. $x = 62$; $y = 159$	X. $x = 930$; $y = 2081$
V. $x = 78$; $y = 191$	XI. $x = 1194$; $y = 2671$
VI. $x = 102$; $y = 241$	XII. $x = 4222$; $y = 9441$

ex quibus porro cum formula $1 = 9^2 - 5 \cdot 4^2$ coniungendis infinite nouae eaeque omnes elicientur: ex secunda scilicet prodit

$x = 414$; $y = 929$; et ex sexta $x = 1882$; $y = 4209$ ex quinta $x = 1466$; $y = 3279$; ex octaua $x = 4722$; $y = 10559$; sicque iam sedecim solutiones sumus adepti.

Conclusio.

38. His expositis non amplius coacti sumus, proposita huiusmodi aequatione $axx + \gamma = yy$, primum quasi diuinando vnum casum satisfacientem anquirere, sed numerum γ examinando secundum formulas modo traditas statim pronunciare possumus, vtrum aequatio resolutionem admittat, nec ne? ac si admittit, per eadem principia vnam saltem solutionem elicere licebit, quod quidem promte fieri poterit, si numerus γ fuerit resolubilis in factores non nimis magnos. Verum si numerus γ sit primus ac praegrandis, iudicium quidem solubilitatis aeque est facile, at inuentio vnius solutionis maiorem laborem requirit. Veluti si proponatur $30xx + 1459 = yy$, quia 1459 est numerus primus formae $120n + 19$, aequatio est resolubilis; verum ei satisfieri sumendo $x = 39$ et $y = 217$ non

non tam facile inueſtigatur. Inueſtigatio tamen ſubleuatur, ſi ſtatuamus $y = 30z \pm 7$, vnde fit $xx = 30zz \pm 14z - 47$, et iam citius reperiemus $z = 7$, et $x = 39$ vnde prodit $y = 217$. At ſi ponamus $y = 30z \pm 13$, fit $xx = 30zz \pm 26z - 43$, promtiusque inuenitur $x = 5$ et $y = 47$. Verum in numeris multo maioribus labor euadit inſuperabilis, methodusque certa adhuc deſideratur negotium conficiendi: deinde etiam quod omnes numeri primi, in ſupra allatis formulis $4\alpha n + A$ contenti, ſimul ſint numeri huius formae $bb - \alpha aa$, ad eas propoſitiones pertinet, quas veras credimus, etiamſi demonſtrare non valeamus. In quo cum eximia pars Theoriae numerorum verſetur, qui huius generis problemata diligentius perſcrutari voluerit, nullum eſt dubium, quin non contemnendas veritates ſit eruturus; ob eandemque cauſam confido haec ipſa, quae hic attuli, vſu non eſſe caritura: ea ipſa enim quae adhuc ſunt incognita accuratius expoſuiſſe non parum iuuabit.

DE

DE PROGRESSIONIBVS ARCVVM CIRCVLARIVM QVORVM TANGENTES SECVNDVM CERTAM LEGEM PROCEDVNT.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Infinitas huiusmodi progreſſiones exhiberi poſſe vel ex his exemplis liquet, quae olim propoſui, ſcilicet denotante π arcum duos angulos rectos metientem inueni, eſſe $\frac{\pi}{4} = A\,\text{tang}\,\frac{1}{2} + A\,\text{tang}\,\frac{1}{8} + A\,\text{tang}.\frac{1}{18} + A\,\text{tang}.\frac{1}{32} + A\,\text{tang}.\frac{1}{50} + \text{etc.}$ quae ſeries arcuum in infinitum progreditur, tangente cuiusque indefinite exiſtente $= \frac{1}{2xx}$, ſimili modo eſt $\frac{\pi}{4} = A\,\text{tang}\,\frac{1}{3} + A\,\text{tang}.\frac{1}{7} + A\,\text{tang}.\frac{1}{13} + A\,\text{tang}\,\frac{1}{21} + A\,\text{tang}\,\frac{1}{31} + \text{etc.}$ hac arcuum ſerie pariter in infinitum continuata, cuius quisque terminus indefinite eſt $A\,\text{tang}.\frac{1}{xx+x+1}$. Tales autem ſeries eo magis videntur omni attentione dignae, quod nulla adhuc conſtet methodus earum ſummam a priori inueniendi, atque etiam ipſi arcus omnes inter ſe ſint incommenſurabiles. Quin etiam ne expectare quidem licet methodum, cuius ope in genere huiusmodi ſerierum, quamcunque legem tangentes ſequantur, ſumma inueſtigari queat; ſed potius, niſi haec

haec lex certis conditionibus ſit adſtricta, nullo modo eae ad ſummam reuocari poſſe videntur, quae quidem arcu circulari exprimatur. Quam ob rem in hoc negotio alia via non patet, niſi vt a poſteriori huiusmodi ſeries inueſtigemus, quarum deinceps contemplatio fortaſſe viam quandam directam patefaciet; hincque modum exponam facilem ad quotcunque huiusmodi ſeries perueniendi, qui cum, ſimpliciſſimis principiis innixus, ad tam ardua perducat, omnino mereri videtur, vt diligentius euoluatur.

2. Non ſolum autem hoc modo ad ſeries infinitas deducimur, ſed pro lubitu progreſſiones dato terminorum numero conſtantes conſequi poſſumus. Fundamentum enim totius inueſtigationis in eo conſiſtit, vt pro lubitu numeros quotcunque aſſumamus, qui ſint:

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon,$$

qui vt tangentes angulorum ſpectentur. Cum enim manifeſto ſit

$$\left.\begin{array}{l} +\text{A tang.}\alpha+\text{A tang.}\beta+\text{A tang.}\gamma+\text{A tang.}\delta \\ -\text{A tang.}\beta-\text{A tang.}\gamma-\text{A tang.}\delta-\text{A tang.}\varepsilon \end{array}\right\}=\text{A tang.}\alpha-\text{A tang.}\varepsilon$$

binis arcubus ſubſcriptis colligendis ob A tang. p - A tang. q $=$ A tang. $\frac{p-q}{pq+1}$ habebimus

$$\text{A tang.}\,\alpha-\text{A tang.}\,\varepsilon=\text{A tang.}\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta+1}+\text{A tang.}\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma+1}$$
$$+\text{A tang.}\frac{\gamma-\gamma}{\gamma\delta+1}+\text{A tang.}\frac{\delta-\varepsilon}{\delta\varepsilon+1}=\text{A tang.}\frac{\alpha-\varepsilon}{\alpha\varepsilon+1}.$$

En ergo formam maxime generalem, vnde omnes huiusmodi ſeries arcuum originem ducunt, ſiue in infinitum excurrant, siue finito terminorum numero constent:

$$\text{A tang.}\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta+1}+\text{A tang.}\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma+1}+\text{A tang}\frac{\gamma-\delta}{\gamma\delta+1}+\text{A tang.}\frac{\delta-\varepsilon}{\delta\varepsilon+1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\text{A tang.}\frac{\psi-\omega}{\psi\omega+1}=\text{A tang.}\frac{\alpha-\omega}{\alpha\omega+1}.$$

3. Casui, quo numerus terminorum est finitus, hic non immorans, statim in series infinitas inquiram. Primo ergo pro α, β, γ etc. seriem harmonicam assumam in genere:

Hypothesis I. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+2b}$, $\frac{1}{a+3b}$, $\frac{1}{a+4b}$, $\frac{1}{a+5b}$ etc.

vnde cum sit $\omega=0$ habebimus:

$$\text{A tang.}\frac{1}{a}=\text{A tang.}\frac{b}{aa+ab+1}+\text{A tang}\frac{b}{aa+3ab+2bb+1}+\text{A tang.}\frac{b}{aa+5ab+6bb+1}+\text{A tang.}\frac{b}{aa+7ab+12bb+1}+\text{etc.}$$

in infinitum.

Ac si singulis illis fractionibus communem tribuamus numeratorem c, erit simili modo

$$\text{A tang}\frac{c}{a}=\text{A tang.}\frac{bc}{a(a+b)+cc}+\text{A tang.}\frac{bc}{(a+b)(a+2b)+cc}+\text{A tang.}\frac{bc}{(a+2b)(a+3b)+cc}+\text{A tang.}\frac{bc}{(a+3b)(a+4b)+cc}+\text{etc.}$$

in infinitum.

Hinc praecipue notari merentur casus, quibus numerator horum tangentium fit vnitas, quod euenit, si fuerit vel $bc=1$, vel si denominatores singuli per bc fiant diuisibiles.

4. Vtroque casu capi oportet vel $c=1$, vel $c=2$; ac si pro priori sumatur $b=1$, prodibit

$$\text{A tang.}\frac{1}{a}=\text{A tang.}\frac{1}{aa+a+1}+\text{A tang.}\frac{1}{aa+3a+3}+\text{A tang.}\frac{1}{aa+5a+7}+\text{A tang.}\frac{1}{aa+7a+13}$$

cuius

cuius terminus in genere eſt A tang. $\frac{1}{aa+(2x-1)a+xx-x+1}$ vnde pro ſimplicioribus valoribus ipſius a naſcuntur hae ſeries :

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{0} = \text{A tang.}\,1 + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{5} + \text{A tang}\,\tfrac{1}{7} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{13} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{31} + \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\,1 = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{3} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{7} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{13} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{31} + \text{etc.}$$

$$\text{A tang}\,\tfrac{1}{2} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{7} + \text{A tang}\,\tfrac{1}{13} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{31} + \text{A tang}\,\tfrac{1}{43} + \text{etc.}$$

$$\text{A tang}\,\tfrac{1}{3} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{13} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{31} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{43} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{57} + \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{4} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{31} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{43} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{57} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{73} + \text{etc.}$$

etc.

5. Pro b alios numeros capere non licet, niſi qui ſint diuiſores ipſius $aa+1$, vnde ſi $b=2$, neceſſe eſt ſit a numerus impar : hincque ſequentes naſcuntur ſeries :

$$\text{A tang.}\,1 = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{2} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{8} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{18} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{32} + \text{A tang}\,\tfrac{1}{50} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{72}\ \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{3} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{8} + \text{A tang}\,\tfrac{1}{18} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{32} + \text{A tang}\,\tfrac{1}{50} + \text{A tang}\,\tfrac{1}{72} + \text{A tang}\,\tfrac{1}{98}\ \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{5} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{18} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{32} + \text{A tang}\,\tfrac{1}{50} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{72} + \text{A tang}\,\tfrac{1}{98}\ \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{7} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{32} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{50} + \text{A tang.}\,\tfrac{2}{72} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{98}\ \text{etc.}$$

etc.

6. Si

6. Si ſtatuatur $b = 5$, ſumi debet $u = 5n \pm 2$; hinc fit:

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{2} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{3} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{17} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{41} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{75} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{119} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{174} + \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{3} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{5} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{47} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{83} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{129} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{185} + \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{7} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{17} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{41} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{75} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{119} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{174}\ \text{etc.}$$

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{8} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{21} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{47} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{83} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{129} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{185}\ \text{etc.}$$

Primae terminus generalis eſt $\text{A tang.}\,\frac{1}{5xx - x - 1}$, ſecundae $\text{A tang.}\,\frac{1}{5xx + x - 1}$, ſequentes autem ex prioribus facile deducuntur, quas ideo poſthac omittemus.

7. Si $b = 10$, ſumi debet $a = 10n \pm 3$, vnde oriuntur hae duae ſeries:

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{3} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{4} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{30} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{76} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{142} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{228} + \text{etc.}$$

termino generali exiſtente $\text{A tang.}\,\frac{1}{10xx - 4x - 2}$

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{7} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{12} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{46} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{100} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{174} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{268} + \text{etc.}$$

termino generali exiſtente $\text{A tang.}\,\frac{1}{10xx + 4x - 2}$.

8. Simili modo poſito $b = 13$, et $a = 13n \pm 5$, prodibunt

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{3} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{7} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{43} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{105} + \text{A tang.}\,\tfrac{1}{193} + \text{etc.}$$

termi-

termino generali existente $A\,tang.\frac{1}{13xx-3x-3}$

$A\,tang.\frac{1}{8} = A\,tang.\frac{1}{13} + A\,tang.\frac{1}{55} + A\,tang.\frac{1}{123} + A\,tang.\frac{1}{217} + \text{etc.}$

termino generali existente $A\,tang.\frac{1}{13xx+3x-3}$.

9. Sit $b=17$, capiaturque $a=17n\pm4$, ac prodibunt

$A\,tang.\frac{1}{4} = A\,tang.\frac{1}{5} + A\,tang.\frac{1}{47} + A\,tang.\frac{1}{123} + A\,tang.\frac{1}{233} + A\,tang.\frac{1}{377}\ \text{etc.}$

termino generali existente $A\,tang.\frac{1}{17xx-9x-3}$

$A\,tang.\frac{1}{13} = A\,tang.\frac{1}{23} + A\,tang.\frac{1}{83} + A\,tang.\frac{1}{177} + A\,tang.\frac{1}{305} + A\,tang.\frac{1}{467}\ \text{etc.}$

termino generali existente $A\,tang.\frac{1}{17xx+9x-3}$.

10. Sit $b=25$, captoque $a=25n\pm7$, erit

$A\,tang.\frac{1}{7} = A\,tang.\frac{1}{9} + A\,tang.\frac{1}{73} + A\,tang.\frac{1}{187} + A\,tang.\frac{1}{351} + A\,tang.\frac{1}{565} + \text{etc.}$

termino generali existente $A\,tang.\frac{1}{25xx-11x-5}$

$A\,tang.\frac{1}{18} = A\,tang.\frac{1}{31} + A\,tang.\frac{1}{117} + A\,tang.\frac{1}{253} + A\,tang.\frac{1}{439} + A\,tang.\frac{1}{675}\ \text{etc.}$

termino generali existente $A\,tang.\frac{1}{25xx+11x-5}$.

11. Hinc iam in genere colligere poterimus, si fuerit a numerus quicunque, sitque $aa+1=mn$, fore

$A\,tang.\frac{1}{a} = A\,tang.\frac{1}{a+m} + A\,tang.\frac{1}{3a+m+2n} + A\,tang.\frac{1}{5a+m+6n} + A\,tang.\frac{1}{7a+m+12n}\ \text{etc.}$

 termi-

termino generali existente A tang. $\frac{1}{nxx+(2a-n)x-a+m}$

seu hoc modo: A tang. $\frac{1}{nx(x-1)+a(2x-1)+m}$

Si ergo summam huius seriei infinitae per $\int$A tang. $\frac{1}{nxx+(2a-n)x-a+m}$ indicemus, consequemur hoc Theorema:

$$\int \text{A tang.} \frac{1}{nxx+(2a-n)x-a+m} = \text{A tang.} \frac{1}{a}, \text{existente } aa+1=mn.$$

12. Videamus ergo, quibus casibus series, cuius terminus generalis est A tang. $\frac{1}{Lxx+Mx+N}$, summari queat; et comparatione instituta deprehendemus, hoc fieri posse, quoties fuerit $MM+4=LL+4LN$; ideoque

vel $L=-2N+\sqrt{(MM+4NN+4)}$, vel $M=\sqrt{(LL+4LN-4)}$

vel $N=\frac{MM-LL+4}{4L}$.

Atque si haec relatio inter coefficientes L, M N locum habuerit, erit $\int$A tang. $\frac{1}{Lxx+Mx+N}=$ A tang. $\frac{2}{L+M}$ siue erit

$$\text{A tang.} \frac{2}{L+M} = \text{A tang.} \frac{1}{L+M+N} + \text{A tang.} \frac{1}{4L+2M+N}$$
$$+ \text{A tang.} \frac{1}{9L+3M+N} + \text{A tang.} \frac{1}{16L+4M+N} + \text{etc.}$$

Hypothesis II. 13. Cum haec ex progressione harmonica sequantur, pro α, β, γ, δ etc. sumamus hanc seriem:

$\frac{c}{a}$; $\frac{c+d}{a+b}$; $\frac{c+2d}{a+2b}$; $\frac{c+3d}{a+3b}$; $\frac{c+4d}{a+4b}$; etc.

vnde cum sit $\alpha=\frac{c}{a}$ et $\omega=\frac{d}{b}$, hanc adipiscemur summationem:

$$\text{Atang.} \frac{bc-ad}{ab+cd} = \text{Atang.} \frac{bc-ad}{a(a+b)+c(c+d)} + \text{Atang.} \frac{bc-ad}{(a+b)(a+2b)+(c+d)(c+2a)} + \text{etc.}$$

cuius

cuius terminus generalis eſt A tang. $\frac{bc-ad}{(a+b(x-1))(a+bx)+(c+d(x-1))(c+dx)}$.

14. Vt iam numerator huius tangentis vnitati fiat aequalis, vel eſſe debet $bc-ad=1$, vel denominator per numeratorem $bc-ad$ diuiſibilis, quod poſterius euenit ſumendo:

$$a=pr+qs;\ c=ps-qr;\ b=pt+qu;\ d=pu-qt$$

dum ſit $st-ru=1$.

tum enim fiet:

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{rt+su}=\int \text{A tang.}\,\frac{1}{rr+ss+(rt+su)(2x-1)+(tt+uu)x(x-1)}.$$

Verum haec formula cum praecedente ita conuenit, vt hinc nullae nouae ſeries eliciantur.

15. Fractiones autem continuae admodum idoneos praebent valores pro numeris α, β, γ, δ, etc. aſſumendos. Si enim fuerit: *Hypotheſis III.*

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\cfrac{1}{g+\text{etc.}}}}}}}$$

hinc ſequens ſeries fractionum conſtituitur, pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. capiendarum:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+c+a}{bc+1}; & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}; \text{ etc.} \end{array}$$

qua-

quarum vltima ipsi valori ipsius z est aequalis.

16. Quodsi hic eam notandi formam, quam in Algorithmi singularis specimine tradidi, introducamus, hae fractiones ita exprimentur:

$$\overset{\alpha}{\tfrac{1}{0}};\quad \overset{\beta}{\tfrac{(a)}{1}};\quad \overset{\gamma}{\tfrac{(a,b)}{(b)}};\quad \overset{\delta}{\tfrac{(a,b,c)}{(b,c)}};\quad \overset{\varepsilon}{\tfrac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}};\quad \overset{\zeta}{\tfrac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)}}\ \text{etc.}$$

vti notari oportet, esse

$$(a,b) = a(b) + 1 = b(a) + 1$$
$$(a,b,c) = a(b,c) + (c) = c(a,b) + (a)$$
$$(a,b,c,d) = a(b,c,d) + (c,d) = d(a,b,c) + (a,b)$$
$$(a,b,c,d,e) = a(b,c,d,e) + (c,d,e) = e(a,b,c,d) + (a,b,c)$$
etc.

17. Cum igitur sit $\alpha = \frac{1}{0}$, et $\omega = z$, erit

$$\text{A tang.} \tfrac{1}{z} = \text{A tang.} \tfrac{1}{\beta} + \text{A tang.} \tfrac{\beta - \gamma}{\beta\gamma + 1} + \text{A tang.} \tfrac{\gamma - \delta}{\gamma\delta + 1} + \text{A tang.} \tfrac{\delta - \varepsilon}{\delta\varepsilon + 1} + \text{etc.}$$

vbi est $\beta = a$; et $\frac{\beta - \gamma}{\beta\gamma + 1} = \frac{-1}{(a)(a,b) + (b)}$; tum vero

$$\frac{\gamma - \delta}{\gamma\delta + 1} = \frac{+1}{(a,b)(a,b,c) + (b)(b,c)}$$
$$\frac{\delta - \varepsilon}{\delta\varepsilon + 1} = \frac{-1}{(a,b,c)(a,b,c,d) + (b,c)(b,c,d)}$$
$$\frac{\varepsilon - \zeta}{\varepsilon\zeta + 1} = \frac{-1}{(a,b,c,d)(c,b,c,d,e) + (b,c,d)(b,c,d,e)}$$
etc.

ita vt omnes numeratores iam sint, vel $+1$, vel -1.

18. Quodsi breuitatis gratia loco illius seriei scribamus

$$\overset{a}{\tfrac{1}{0}};\quad \overset{b}{\tfrac{a}{1}};\quad \overset{c}{\tfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}};\quad \overset{d}{\tfrac{C}{\mathfrak{C}}};\quad \overset{e}{\tfrac{D}{\mathfrak{D}}};\quad \overset{f}{\tfrac{E}{\mathfrak{E}}};\quad \overset{g}{\tfrac{F}{\mathfrak{F}}};\ \text{etc}$$

vt

vt fit:

$$\begin{array}{ll} B = ab + 1 & \mathfrak{B} = b \\ C = cB + a & \mathfrak{C} = c\mathfrak{B} + 1 \\ D = dC + B & \mathfrak{D} = d\mathfrak{C} + \mathfrak{B} \\ E = eD + C & \mathfrak{E} = e\mathfrak{D} + \mathfrak{C} \\ F = fE + D & \mathfrak{F} = f\mathfrak{E} + \mathfrak{D} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

erit

$$\text{Atang.}\frac{1}{z} = \text{Atang.}\frac{1}{a} - \text{Atang.}\frac{1}{a+b(aa+1)} + \text{Atang.}\frac{1}{a+b(aa+1)+c(BB+\mathfrak{B}\mathfrak{B})}$$
$$- \text{A tang.}\frac{1}{a+b(aa+1)+c(BB+\mathfrak{B}\mathfrak{B})+d(CC+\mathfrak{C}\mathfrak{C})}$$
$$+ \text{A tang.}\frac{1}{a+b(aa+1)+c(BB+\mathfrak{B}\mathfrak{B})+d(CC+\mathfrak{C}\mathfrak{C})+e(DD+\mathfrak{D}\mathfrak{D})}$$
etc.

19. Consideremus fractionem continuam definitam hanc:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \text{ etc.}}}}}$$
cuius valor est $= \sqrt{2}$

vnde fractiones, quarum vltima est $= \sqrt{2}$, sunt

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{0}; & \frac{1}{1}; & \frac{3}{2}; & \frac{7}{5}; & \frac{17}{12}; & \frac{41}{29}; & \frac{99}{70}; & \frac{239}{169} \text{ etc.} \end{array}$$

Cum iam fit $\alpha = \infty$, et $\omega = \sqrt{2}$, erit

$$\text{A tang.}\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{A tang.}\,1 - \text{A tang.}\frac{1}{5} + \text{A tang.}\frac{1}{31} - \text{A tang.}\frac{1}{179}$$
$$+ \text{A tang.}\frac{1}{1045} - \text{etc.}$$

 cuius

cuius ſeriei lex non ſatis eſt perſpicua, propterea quod in fractione continua ordo indicum eſt interruptus, qui ſi obſeruatur, vt ſit

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}} = 1+\sqrt{2}$$ vnde oriuntur hae fractiones

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{12}{5}, & \frac{29}{12}, & \frac{70}{29}, & \frac{169}{70}, & \frac{408}{169} \text{ etc.} \end{array}$$

$$A\text{ tang.}\frac{1}{1+\sqrt{2}} = A\text{ tang.}\tfrac{1}{2} - A\text{ tang.}\tfrac{1}{12} + A\text{ tang}\tfrac{1}{70} - A\text{ tang.}\tfrac{1}{408} + A\text{ tang.}\tfrac{1}{2378} - \text{etc.}$$

vbi eſt $70 = 6.12 - 2$; $408 = 6.70 - 12$; $2378 = 6.408 - 70$ etc.

et $A\text{ tang.}\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8}$.

20. Hoc modo quaecunque alia fractio continua tractari poteſt; veluti cum ſit

$$\sqrt{3} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2\text{ etc.}}}}}}}$$

hinc oriuntur ſequentes ex indicibus fractiones:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{3}, & \frac{7}{4}, & \frac{19}{11}, & \frac{26}{15}, & \frac{71}{41}, & \frac{97}{56} \text{ etc.} \end{array}$$

vbi ob $\alpha = \infty$, et $\omega = \sqrt{3}$, erit

$$A\text{ tang.}\frac{1}{\sqrt{3}} = A\text{ tang.}1 - A\text{ tang.}\tfrac{1}{3} + A\text{ tang.}\tfrac{1}{15} - A\text{ tang.}\tfrac{1}{41} + A\text{ tang.}\tfrac{1}{571} - A\text{ tang.}\tfrac{1}{780} + \text{etc.}$$

ſin

sin autem tantum fractiones alternae sumantur

$$\frac{1}{0},\ \frac{2}{1},\ \frac{7}{4},\ \frac{26}{15},\ \frac{97}{56},\ \frac{362}{209}\ \text{etc.}$$

obtinebimus:

$$A\,\text{tang.}\frac{1}{\sqrt{3}}=A\,\text{tang.}\frac{1}{2}+A\,\text{tang.}\frac{1}{18}+A\,\text{tang.}\frac{1}{242}+A\,\text{tang.}\frac{1}{3362}+\text{etc.}$$

cuius denominatores omnes sunt duplicata quadrata; scilicet

$$A\,\text{tang.}\frac{1}{\sqrt{3}}=A\,\text{tang.}\frac{1}{2.1^2}+A\,\text{tang.}\frac{1}{2.3^2}+A\,\text{tang.}\frac{1}{2.11^2}$$
$$+A\,\text{tang.}\frac{1}{2.41^2}+A\,\text{tang.}\frac{1}{2.153^2}+\text{etc.}$$

Sumtis autem alteris alternis, prodit ob $A\,\text{tang.}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$ et $A\,\text{tang.}\,1=\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{12}=A\,\text{tang.}\frac{1}{4}+A\,\text{tang.}\frac{1}{64}+A\,\text{tang.}\frac{1}{900}$ $+A\,\text{tang.}\frac{1}{12544}+\text{etc.}$

qui denominatores sunt quadrata, quorum radices hanc progressionem constituunt:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & x \\ 2, & 8, & 30, & 112, & 418, & \ldots\ldots & & \frac{(2+\sqrt{3})^x-(2-\sqrt{3})^x}{\sqrt{3}} \end{array}$$

21. Cum autem fractiones continuae ad huiusmodi series arcuum deduxerint, vicissim summa talis seriei ope fractionis continuae exhiberi poterit, quod commodissime sequenti modo praestabitur.

$$\text{Sit } A\,\text{tang.}\frac{1}{z}=A\,\text{tang.}\frac{1}{a}-A\,\text{tang.}\frac{1}{b}+A\,\text{tang.}\frac{1}{c}-A\,\text{tang}\frac{1}{d}$$
$$+A\,\text{tang.}\frac{1}{e}-A\,\text{tang.}\frac{1}{f}\ \text{etc.}$$

ac ponatur

$$A\,\text{tang.}\tfrac{1}{z}=A\,\text{tang.}\tfrac{1}{a}-A\,\text{tang.}\tfrac{1}{B}\ \text{erit}\ z=\frac{aB+1}{B-a}=a+\frac{aa+1}{-a+B}$$
$$A\,\text{tang.}\tfrac{1}{B}=A\,\text{tang.}\tfrac{1}{b}-A\,\text{tang.}\tfrac{1}{C}\ \text{erit}\ B=\frac{bC+1}{C-b}=b+\frac{bb+1}{-b+C}$$
$$A\,\text{tang.}\tfrac{1}{C}=A\,\text{tang.}\tfrac{1}{c}-A\,\text{tang.}\tfrac{1}{D}\ \text{erit}\ C=\frac{cD+1}{D-c}=c+\frac{cc+1}{-c+D}$$
$$A\,\text{tang.}\tfrac{1}{D}=A\,\text{tang.}\tfrac{1}{d}-A\,\text{tang.}\tfrac{1}{E}\ \text{erit}\ D=\frac{dE+1}{E-d}=d+\frac{dd+1}{-d+E}$$

etc. etc.

 hinc

hinc ergo colligendo habebitur per fractionem continuam:

$$z = a + \cfrac{aa+1}{-a+b+\cfrac{bb+1}{-b+c+\cfrac{cc+1}{-c+d+\cfrac{dd+1}{-d+e+\cfrac{ee+1}{-e+f+\text{etc.}}}}}}$$

vnde valor ipsius z definitur.

SPECIMEN
ALGORITHMI SINGVLARIS.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Conſideratio fractionum continuarum, quarum vſum vberrimum per totam Analyſin iam aliquoties oſtendi, deduxit me ad quantitates certo quodam modo ex indicibus formatas, quarum natura ita eſt comparata, vt ſingularem algorithmum requirat. Cum igitur ſumma Analyſeos inuenta maximam partem algorithmo ad certas quasdam quantitates accommodato innitantur, non immerito ſuſpicari licet, et hunc algorithmum ſingularem non exigui vſus in Analyſi eſſe futurum, ſi quidem diligentius excolatur: etiamſi ei tantum non tribuendum cenſeam, vt cum receptis algorithmis comparari mereatur.

2. Sequenti autem modo ad eas quantitates, de quibus hic agere conſtitui, ſum deductus: ſi habeatur fractio continua

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$$

cuius valor ſit inveſtigandus, ex numeris a, b, c, d, tanquam indicibus aſſumtis, ſequenti modo fractiones formantur:

$$\begin{array}{ccccc} & a & b & c & d \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+1}{b}, & \frac{abc+c+a}{bc+1}, & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b} \end{array}$$

Primum ſcilicet locum obtinet ſemper fractio $\frac{1}{0}$, ſecundum $\frac{a}{1}$, cuius numerator eſt primus indicum a, denominator vero vnitas. Sequentis cuiusque fractionis tam numerator, quam denominator, inuenitur, ſi praecedentium vltimus per indicem ſupra ſcriptum multiplicetur, et ad productum penultimus addatur.

3. Conſtat autem harum fractionum poſtremam ipſi fractioni continuae propoſitae eſſe aequalem, praecedentes autem tam prope ad hunc ipſum valorem accedere, vt nulla fractio numeris non maioribus contenta exhiberi queat, quae ad illum propius accedat. Atque ex hoc fonte problema illud a Walliſio olim tractatum facile reſoluitur, quo propoſita quacunque fractione ex ingentibus numeris conſtante, aliae quaeruntur fractiones ex minoribus numeris conſtantes, quae tam parum a propoſita diſcrepent, vt minus diſcrepantes exhiberi plane nequeant, niſi maiores numeros adhibere velimus.

4. Hoc autem aliisque vſibus, quos fractiones continuae ſuppeditant, praetermiſſis, hic inprimis obſeruo, in ſerie illa fractionum ex indicibus formatarum, tam numeratores, quam denominatores, eandem, progreſſionis legem ſequi, et ſeorſim efformari poſſe. In vtraque enim ſerie, ſiue numeratorum, ſiue denominatorum, quilibet terminus per indicem ſupra ſcriptum multiplicatus, et termino antecedente auctus, praebet terminum ſequentem. Vltimus autem numerus ſuperioris ſeriei componitur ex omnibus quatuor indicibus a, b, c, d, penultimus tantum ex tribus a, b, c, antepenultimus

tantum

tantum ex duobus a, et b. Inferiores autem numeri primum indicem a plane non inuoluunt, ſed ex reliquis b, c, d aequali lege formantur.

5. Quoniam igitur ratio formationis ex indicibus, tam pro numeratoribus, quam pro denominatoribus, eſt eadem, ac datis indicibus numerus inde formatus innoteſcit, hos ipſos numeros, quatenus ex indicibus ſunt formati, hic ſum contemplaturus, eorumque algorithmum traditurus. Propoſitis autem indicibus quibuscunque et quotcunque a, b, c, d, numerum ex iis formatum hoc modo (a, b, c, d) denotabo, eritque ergo euolutione inſtituta:

$$(a, b, c, d) = abcd + cd + ad + ab + 1$$

ſimilique modo pro denominatoribus indicem primum a omittendo

$$(b, c, d) = bcd + d + b.$$

6. Haec ergo teneatur definitio ſignorum ( ), inter quae indices ordine a ſiniſtra ad dextram ſcribere conſtitui; atque indices hoc modo clauſulis incluſi inpoſterum denotabunt numerum ex iſtis indicibus formatum. Ita a ſimpliciſſimis caſibus inchoando, habebimus:

$$(a) = a$$
$$(a,b) = ab + 1$$
$$(a,b,c) = abc + c + a$$
$$(a,b,c,d) = abcd + cd + ad + ab + 1$$
$$(a,b,c,d,e) = abcde + cde + ade + abe + abc + e + c + a$$

etc.

ex

ex qua progreſſione patet, vnitatem tenere locum huius ſigni ( ) ſi ſcilicet nullus adſit index.

7. Quemadmodum hae expreſſiones creſcente indicum numero vlterius ſint continuandae ex formationis lege, qua quilibet ex duobus antecedentibus componitur, ſponte liquet. Eſt ſcilicet:

$$
\begin{aligned}
(a, b) &= b(a) + 1 = b(a) + (\,) \\
(a, b, c) &= c(a, b) + (a) \\
(a, b, c, d) &= d(a, b, c) + (a, b) \\
(a, b, c, d, e) &= e(a, b, c, d) + (a, b, c)
\end{aligned}
$$

In genere ergo habebitur:

$$(a, b, c \ldots p, q, r) = r(a, b, c \ldots p, q) + (a, b, c \ldots p)$$

quae connexio, tanquam corollarium definitionis numerorum, quos hic contemplamur, ſpectari debet.

8. In euolutione horum valorum, vti ante §. 6 ſunt exhibiti, difficulter ratio compoſitionis cernitur. Poſſunt autem ii quoque hoc modo repraeſentari:

$$
\begin{aligned}
(a) &= a(1) \\
(a, b) &= ab\left(1 + \tfrac{1}{ab}\right) \\
(a, b, c) &= abc\left(1 + \tfrac{1}{ab} + \tfrac{1}{bc}\right) \\
(a, b, c, d) &= abcd\left(1 + \tfrac{1}{ab} + \tfrac{1}{bc} + \tfrac{1}{cd} + \tfrac{1}{abcd}\right) \\
(a, b, c, d, e) &= abcde\left(1 + \tfrac{1}{ab} + \tfrac{1}{bc} + \tfrac{1}{cd} + \tfrac{1}{de} + \tfrac{1}{abcd} + \tfrac{1}{abde} + \tfrac{1}{bcde}\right)
\end{aligned}
$$

In his autem denominatoribus occurrunt primo facta ex binis indicibus contiguis, tum vero producta ex binis illorum factorum, qui nullum indicem communem inuoluunt, tum ſequentur producta ex ternis, quaternis

nis etc. combinationibus, quae nullum implicant indicem communem; vnde ratio compoſitionis iam fit perſpicua.

9. Ex hac euolutione iam manifeſtum eſt, ſi indices ordine retrogrado diſponantur, eosdem plane prodire numeros inde formatos. Erit ſcilicet

$$(a, b) = (b, a)$$
$$(a, b, c) = (c, b, a)$$
$$(a, b, c, d) = (d, c, b, a)$$
$$(a, b, c, d, e) = (e, d, c, b, a).$$

Dummodo ergo ordo indicum detur, ſiue ſit directus, ſiue retrogradus, perinde eſt; vtroque enim modo idem numerus inde formatus obtinetur.

10. Hinc ergo ſequitur, fore formulas §. 7 hoc modo inuertendo:

$$(a, b) = a\,(b) + 1$$
$$(a, b, c) = a\,(b, c) + (c)$$
$$(a, b, c, d) = a\,(b, c, d) + (c, d)$$
$$(a, b, c, d, e) = a\,(b, c, d, e) + (c, d, e)$$

atque in genere erit pro quotcunque indicibus:

$$(a, b, c, d, \text{etc.}) = a\,(b, c, d, \text{etc}) + (c, d, \text{etc.})$$

11. Si ergo ponatur:

$$(a, b, c, d, e, \text{etc.}) = \mathrm{A}$$
$$(b, c, d, e, \text{etc.}) = \mathrm{B}$$
$$(c, d, e, \text{etc.}) = \mathrm{C}$$
$$(d, e, \text{etc.}) = \mathrm{D}$$
$$(e, \text{etc.}) = \mathrm{E}$$

 habe-

habebimus has aequalitates:

$$A = aB + C \text{ seu } \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$$
$$B = bC + D \text{ seu } \frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}$$
$$C = cD + E \text{ seu } \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D}$$
etc. etc.

12. Cum igitur sit

$$\frac{C}{B} = \frac{1}{b + \frac{D}{C}};\quad \frac{D}{C} = \frac{1}{c + \frac{E}{D}};\quad \frac{E}{D} = \frac{1}{d + \frac{F}{E}} \text{ etc.}$$

erit his valoribus substituendis:

$$\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{D}{C}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{E}{D}}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{F}{E}}}}.$$

Vnde si e sit indicum vltimus, ita vt sit $E = e$ et $F = 1$, erit

$$\frac{A}{B} = \frac{(a, b, c, d, e)}{(b, c, d, e)} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$$

sicque patet, quemadmodum per huiusmodi numeros valores fractionum continuarum commode exprimi queant.

13. Si ergo indicum numerus fuerit infinitus, etiam fractio continua in infinitum excurret, eiusque valor erit $= \frac{(a, b, c, d, e, \text{etc.})}{(b, c, d, e \text{ etc.})}$. Viciſſim autem fractionum continuarum proprietates cognitae nobis insignes affectiones huiusmodi numerorum ex indicibus formatorum manifesta-

nifeſtabunt, quas diligentius euoluere operae erit pretium. Sit igitur fractio continua, ſiue in infinitum excurrens, ſiue ſecus propoſita:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f\text{ etc.}}}}}}$$

cuius valor indicetur littera V

et ſumendis omnibus indicibus a, b, c, d, e, f etc. erit, vti demonſtrauimus:

$$V=\frac{(a,b,c,d,e,f\text{ etc.})}{(b,c,d,e,f,\text{ etc.})}.$$

14. Si quispiam horum indicum fiat infinite magnus, is in hac expreſſione cum omnibus ſequentibus poterit omitti, et valor fractionis continuae tantum per indices, qui infinitum praecedunt, exprimetur.

Ita ſi ſit $b=\infty$ erit $V=\frac{(a)}{1}$

ſi ſit $c=\infty$ erit $V=\frac{(a,b)}{(b)}$

ſi ſit $d=\infty$ erit $V=\frac{(a,b,c)}{(b,c)}$

ſi ſit $e=\infty$ erit $V=\frac{(a,b,c,d)}{b,c,d}$.

Vti ergo his caſibus fractio continua abrumpitur, ita etiam valor V alios indices non implicat, niſi qui indicem infinitum antecedunt.

15. Sin autem nullus indicum in infinitum excreſcit, hi ipſi valores continuo propius ad verum va-

 lorem

lorem V accedunt. Scilicet si fuerit $V = \frac{(a, b, c, d, e \text{ etc.})}{(b, c, d, e, \text{etc.})}$ fractiones in sequenti serie expositae:

$$\frac{(a)}{1};\ \frac{(a, b)}{(b)},\ \frac{(a, b, c)}{(b, c)};\ \frac{(a, b, c, d)}{(b, c, d)};\ \frac{(a, b, c, d, e)}{(b, c, d, e)};\ \text{etc.}$$

continuo proprius ad valorem V accedunt, earumque vltima demum eius valorem verum exhibebit; siquidem indices a, b, c, d etc. fuerint numeri vnitate maiores. Prima quidem $\frac{a}{1}$ notabiliter ab V discrepare poterit; secunda autem propius accedet, tertia adhuc propius, et ita porro, donec tandem vltima verum valorem V sit praebitura.

16. Necesse ergo est, vt differentiae inter binas huiusmodi fractiones contiguas continuo fiant minores; quod quo clarius perspiciatur, has differentias inuestigemus, quae erunt:

$$\frac{(a)}{1} - \frac{(a, b)}{(b)} = \frac{(a)(b) - 1(a, b)}{1(b)}$$

$$\frac{(a, b)}{(b)} - \frac{(a, b, c)}{(b, c)} = \frac{(a, b)(b, c) - (b)(a, b, c)}{(b)(b, c)}$$

$$\frac{(a, b, c)}{(b, c)} - \frac{(a, b, c, d)}{(b, c, d)} = \frac{(a, b, c)(b, c, d) - (b, c)(a, b, c, d)}{(b, c)(b, c, d)}$$

$$\frac{(a, b, c, d)}{(b, c, d)} - \frac{(a, b, c, d, e)}{(b, c, d, e)} = \frac{(a, b, c, d)(b, c, d, e) - (b, c, d)(a, b, c, d, e)}{(b, c, d)(b, c, d, e)}.$$

17. De harum differentiarum denominatoribus, qui ex binis factoribus sunt conflati, primum obseruo, hos factores inter se esse numeros primos, quod quidem ex antecedentibus est satis manifestum. Cum enim pro denominatore $(b, c, d\ (b, c, d, e)$ sit $(b, c, d, e) = e(b, c, d) + (b, c)$ erit $\frac{(b, c, d, c)}{(b, c, d)} = e + \frac{(b, c)}{(b, c, d)}$, vnde factores (b, c, d) et (b, c, d, e) communem diuisorem non habebunt, nisi qui simul sit communis diuisor numerorum (b, c) et (b, c, d); verum ob eandem rationem horum numerorum communis

nis divisor esse deberet. Sed qui simul sit communis divisor horum b, et $a.b$, is denique unitati aequa-lis, cum nullum habeant communem divisorem. Ergo illi habebunt, eruntque propterea numeri primi. Hinc vero etiam inter se primi, numeri $a.b.c.d$, etc. et b,c,d, etc. esse inter se primos.

18. Differentiae ergo hae minimae esse deprehenduntur, quum si continuentur in vinculum, hae differentiae alternatim negativae et positivae, id quod ex ante allatis exemplis constat. Conueniet ergo idem ex natura horum numerorum per ipsas formulas demonstrari. Pro primo quidem manifestum, cum sit $(a,b) = b(a) + 1$ per § 7 erit:

$$a(b) - 1(a,b) = ab - (ba + 1) = -1.$$

Tum vero pro secundo, cum $(b,c) = c(b) + 1$ et $(a,b,c) = c(a,b) + a$ erit:

$$(a,b)(b,c) - (b)(a,b,c) = (a,b)c(b) + (a,b) - (b)c(a,b) - (b)a$$

quae propter terminos $(a,b)c(b) - (b)c(a,b)$ se tollentes abit in

$$(a,b) - (b)a = +1.$$ Ita vt sit secundus numerus

$$(a,b)(b,c) - (b)(a,b,c) = +1.$$

19. Quemadmodum hic numerus secundus ad primum negatiue sumtum est reductus, ita tertius ostendi potest secundo negatiue sumto esse aequalis. Nam quia $(b,c,d) = d(b,c) + (b)$ et

$$(a,b,c,d) = d(a,b,c) + (a,b)$$ erit:

$$(a,b,c)(b,c,d) - (b,c)(a,b,c,d) = (a,b,c)d(b,c) + (a,b,c)(b) - (b,c)d(a,b,c) - (b,c)(a,b)$$

Haec ergo expreſſio tranſit in $-(a,b)(b,c)+(b)(a,b,c)=-1$, quia eſt denominator ſecundus negatiue ſumtus. Eodem autem modo numerator quartus aequabitur tertio negatiue ſumto, et in genere quilibet ſequens praecedenti negatiue ſumto.

20. Hinc ergo conſequimur ſequentes reductiones non parum notatu dignas:

$$(a)(b) - 1(a,b) = -1$$
$$(a,b)(b,c) - (b)(a,b,c) = +1$$
$$(a,b,c)(b,c,d) - (b,c)(a,b,c,d) = -1$$
$$(a,b,c,d(b,c,d,e) - (b,c,d)(a,b,c,d,e) = +1$$

et in genere

$$(a,b,c,d \ldots\ldots m)(b,c,d,\ldots\ldots m,n) - (b,c,d \ldots\ldots m)(a,b,c,d \ldots\ldots m,n) = \pm 1$$

vbi $+1$ valet, ſi in primis vinculis numerus indicum fuerit par, contra vero -1.

21. Ipſae ergo differentiae ſupra expoſitae erunt:

$$\frac{(a)}{1} - \frac{(a,b)}{(b)} = \frac{-1}{1(b)}$$
$$\frac{(a,b)}{(b)} - \frac{(a,b,c)}{(b,c)} = \frac{+1}{(b)(b,c)}$$
$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)} - \frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d} = \frac{-1}{(b,c)(b,c,d)}$$
$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} - \frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} = + \frac{1}{(b,c,d)(b,c,d,e)}$$
$$\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} - \frac{(a,b,c,d,e,f)}{(b,c,d,e,f)} = - \frac{1}{(b,c,d,e)(b,c,d,e,f)}$$

etc.

vnde, cum hae differentiae minores eſſe nequeant, ipſae fractiones tam prope ad ſe inuicem accedunt, quam fieri poteſt.

22. Cum ſit ex §. 7. $(b,c)-1=c(b)$; $(b,c,d)-(b)=d(b,c)$; $(b,c,d,e)-(b,c)=e(b,c,d)$ etc. erit binis illarum differentiarum addendis

$$\frac{(a)}{1}-\frac{(a,b,c)}{(b,c)}=-\frac{c}{1(b,c)}$$
$$\frac{(a,b)}{(b)}-\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}=+\frac{d}{(b)(b,c,d)}$$
$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)}-\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)}=-\frac{e}{(b,c)(b,c,d,e)}$$
$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}-\frac{(a,b,c,d,e,f)}{(b,c,d,e,f)}=+\frac{f}{(b,c,d)(b,c,d,e,f)}$$

etc.

eritque hic $\frac{(a)}{1}=a$, et $\frac{(a,b)}{(b)}=a+\frac{1}{b}$; vnde reliquae formulae concinne poterunt exhiberi.

23. Ex formulis ergo §. 21. habebimus ſequentes fractionum continuarum valores:

$$\frac{(a)}{1}=a$$
$$\frac{(a,b)}{(b)}=a+\frac{1}{1(b)}$$
$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)}=a+\frac{1}{1(b)}-\frac{1}{(b)(b,c)}$$
$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}=a+\frac{1}{1(b)}-\frac{1}{(b)(b,c)}+\frac{1}{(b,c)(b,c,d)}$$

etc.

vnde in genere erit, ſi etiam indices in infinitum excurrant,

$$\frac{(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ etc.)}{(b,\ c,\ d,\ e,\ etc.)}=a+\frac{1}{1(b)}-\frac{1}{(b)(b,c)}+\frac{1}{(b,c)(b,c,d)}$$
$$-\frac{1}{(b,c,d)(b,c,d,e)}+\text{etc.}$$

24. Ex formulis autem §. 22. obtinebimus:

$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)}=a+\frac{c}{1(b,c)}$$
$$\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)}=a+\frac{c}{1(b,c)}+\frac{e}{(b,c)(b,c,d,e)}$$

vnde

vnde generaliter:

$$\frac{(a,b,c,d,e,etc.)}{(b,c,d,e,etc.)}=a+\frac{1}{1(b,c)}+\frac{e}{(b,c)(b,c,d,e)}+\frac{g}{(b,c,d,e)(b,c,d,e,f,g)}\text{ etc.}$$

Tum vero etiam:

$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}=a+\frac{1}{b}-\frac{d}{(b)(b,c,d)}$$

$$\frac{(a,b,c,d,e,f)}{(b,c,d,e,f)}=a+\frac{1}{b}-\frac{d}{(b)(b,c,d)}-\frac{f}{(b,c,d)(b,c,d,e,f)}$$

ideoque generaliter:

$$\frac{(a,b,c,d,e,etc.)}{(b,c,d,e\ etc.)}=a+\frac{1}{b}-\frac{d}{(b)(b,c,d)}-\frac{f}{(b,c,d)(b,c,d,e,f)}$$
$$-\frac{h}{(b,c,d,e,f)(b,c,d,e,f,g,h)}-\text{etc.}$$

25. Sed missis his, quae ad series spectant, quoniam ea iam fusius sum persecutus, perpendamus ea, quae ad singularem harum quantitatum algorithmum pertinent. Et formulas quidem iis similes, quae in §. 20. sunt inuentae, suppeditabit nobis §. 22. ex quo patet esse:

$$(a)(b,c)-1(a,b,c)=-c$$
$$(a,b)(b,c,d)-(b)(a,b,c,d)=+d$$
$$(a,b,c)(b,c,d,e)-(b,c)(a,b,c,d,e)=-e$$
$$(a,b,c,d)(b,c,d,e,f)-(b,c,d)(a,b,c,d,e,f)=+1$$

ideoque generaliter:

$$(a,b\ldots\ldots l)(b\ldots\ldots l,m,n)-(b\ldots\ldots l)(a,b\ldots\ldots l,m,n)=\pm n$$

vbi signum + valet, si in primo vinculo numerus indicum sit par; contra signum −.

26. Per similes autem reductiones intelligitur fore,

$$(a)(b,c,d)-1(a,b,c,d)=-(c,d)$$
$$(a,b)(b,c,d,e)-(b)(a,b,c,d,e)=+(d,e)$$
$$(a,b,c)(b,c,d,e,f)-(b,c)(a,b,c,d,e,f)=-(e,f)$$

et

et generaliter :

$$(a,b\ldots k)(b\ldots k,l,m,n) - (b\ldots k)(a,b\ldots k,l,m,n)$$
$$= \pm (m,n)$$

vbi ſignorum, vel ſuperius, vel inferius, valet, prout in primo vinculo numerus indicum fuerit, vel par, vel impar.

27. Ratio autem huius formulae ex ſupra repertis facile deriuatur. Si enim ponatur :

$$(a,b\ldots k,l,m)(b\ldots k,l,m,n) - (b\ldots k,l,m)(a,b\ldots k,l,m,n) = A$$
$$(a,b\ldots\ldots k,l)(b\ldots k,l,m,n) - (b\ldots k,l)(a,b\ldots k,l,m,n) = B$$
$$(a,b\ldots\ldots\ldots k)(b\ldots k,l,m,n) - (b\ldots k)(a,b\ldots k,l,m,n) = C$$

manifeſtum eſt, eſſe $A = mB + C$. At eſt $A = \pm 1$; et $B = \mp n$; ideoque $C = \pm 1 \pm mn = \pm (m,n)$, vbi de ambiguitate ſignorum tenenda ſunt praecepta ſuperiora.

28 Si ordo indicum in his formulis inuertatur, eae fient :

$$(a\ldots\ldots y)(a,b\ldots y,z) - (a,b\ldots y,z)(a,b\ldots y) = 0$$
$$(a,b\ldots y)(b,c\ldots y,z) - (a,b\ldots y,z)(b,c\ldots y) = \pm 1$$
$$(a,b,c\ldots y)(c,d\ldots y,z) - (a,b\ldots y,z)(c,d\ldots y) = \pm (a)$$
$$(a,b,c,d\ldots y)(d,e\ldots y,z) - (a,b\ldots y,z)(d,e\ldots y) = \pm (a,b)$$
$$(a,b,c,d,e\ldots y)(e,f\ldots y,z) - (a,b\ldots y,z)(e,f\ldots y) = \pm (a,b,c)$$
$$(a,b\ldots y)(f,g\ldots y,z) - (a,b\ldots y,z)(f,g\ldots y) = \pm (a,b,c,d)$$

vbi ſigna valent ſuperiora, ſi numerus indicum in ſecundo vinculo fuerit par, contra autem valent inferiora.

 29. Si

29. Si haec indicum feries in fine duobus truncetur, orietur fimili modo:

$$(a \ldots x)(a \ldots z)-(a \ldots z)(a \,.\,.\, x)=0$$
$$(a \ldots x\,(b \ldots z)-(a \ldots z)(b \,.\,.\, x)=\pm(z)$$
$$(a \ldots x)(c \ldots z)-(a \ldots z)(c \,.\,.\, x)=\pm(a)(z)$$
$$(a \ldots x)(d \ldots z)-(a \ldots z)(d \,.\,.\, x)=\pm(a,b,)(z)$$
$$(a \ldots x)(e \ldots z)-(a \ldots z)(e \,.\,.\, x)=\pm(a,b,c)(z)$$

atque hinc tandem colligitur fore generaliter:

$$(a \ldots\ldots l, m, n \ldots\ldots p)\ (n \ldots\ldots p, q, r \ldots\ldots z)$$
$$-(a \ldots l, m, n \ldots\ldots p, q, r \ldots\ldots z)\ (n \ldots\ldots p)$$
$$=\pm(a \ldots\ldots l)\ (r \ldots\ldots z).$$

30. Quo ratio ambiguitatis fignorum pateat, notandum eft, fi fit $m=a$, fore $(a \ldots\ldots l)=1$, et fi fit $q=z$, fore $(r \ldots\ldots z)=1$, vnde cafus fpeciales, in quibus ratio fignorum eft cognita, erunt

$$(a)\,(b)-\ (a,b)\ 1=-1$$
$$(a)\,(b,c)-(a,b,c)\ 1=-(c)$$
$$(a,b)\,(c)-(a,b,c)\ 1=-(a)$$
$$(a,b)(b,c,d)-(a,b,c,d)(b)=+(d)$$
$$(a)\,(b,c,d)-(a,b,c,d)\,(1)=-(c,d)$$

vnde concluditur, valorem fore affirmatiuum, fi in extremo quaternorum vinculorum numerus indicum fit impar, fin autem fuerit par, valor erit negatiuus. Ita in exemplis fubiunctis erit

$$(a,b,c,d)(e,f,g,h)-(a,b,c,d,e,f,g,h)\,1=-(a,b,c)(f,g,h)$$
$$(a,b,c,d,e)\,(c,d,e,f,g,h)-(a,b,c,d,e,f,g,h)\,(c,d,e)$$
$$=+(a)\,(g,h).$$

31. Hu-

31. Huiusmodi autem formulae, quot lubuerit, facile sequenti modo exhiberi possunt; sumatur tertium vinculum, quod est completum, et omnes indices continet, abscindantur ab initio superne ii indices, qui primum vinculum constituant, tum inferne a fine ii, qui vinculum secundum constituant; ita tamen, vt in duobus primis vinculis omnes indices occurrant. Tum qui locis abscissis vtrinque sunt vicini puncto notentur, indeque facile huiusmodi formulae exhibentur:

vt $\overline{a,\ b,\ \overline{\underline{c,\ d,}}\ \underline{e,\ f,}}$ dabit

$$(a,b,c,d)(c,d,e,f)-(a,b,c,d,e,f)(c,d)=-(a)(f)$$

vt $\overline{a,\ b,\ c,}\ \underline{d,\ e,\ f,}$ dat

$$(a,b,c)(d,e,f)-(a,b,c,d,e,f)\,1=-(a,b)(e,f)$$

vt $\overline{a,\ b,\ c,\ \overline{\underline{d,}}}\ \underline{e,\ f}$ dat

$$(a,b,c,d)(d,e,f)-(a,b,c,d,e,f)(d)=+(a,b)(f).$$

32. Quodsi ergo in duobus vinculis nulla littera bis occurrat, quartum vinculum erit vnitas, vnde sequentes formulae nascuntur:

$$\begin{cases}(a,b,c)=(a,b)(c)+(a)\\(a,b,c)=(a)(b,c)+(c)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a,b,c,d)=(a,b,c)(d)+(a,b)\\(a,b,c,d)=(a,b)(c,d)+(a)(d)\\(a,b,c,d)=(a)(b,c,d)+(c,d)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a,b,c,d,e)=(a,b,c,d)(e)+(a,b,c)\\(a,b,c,d,e)=(a,b,c)(d,e)+(a,b)(e)\\(a,b,c,d,e)=(a,b)(c,d,e)+(a)(d,e)\\(a,b,c,d,e)=(a)(b,c,d,e)+(e,d,e)\end{cases}$$

$$\begin{cases} (a,b,c,d,e,f) = (a,b,c,d,e)(f) + (a,b,c,d) \\ (a,b,c,d,e,f) = (a,b,c,d)(e,f) + (a,b,c)(f) \\ (a,b,c,d,e,f) = (a,b,c)(d,e,f) + (a,b)(e,f) \\ (a,b,c,d,e,f) = (a,b)(c,d,e,f) + (a)(d,e,f) \\ (a,b,c,d,e,f) = (a)(b,c,d,e,f) + (c,d,e,f) \end{cases}$$

etc.

33. Si ordo indicum inuertatur, sequentes formulae hinc facile elicientur:

$$(\alpha)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,a,b,c,d\ldots) - (b,c,d\ldots)$$

$$(\alpha,\beta)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,\beta,a,b,c,d\ldots) - (\alpha)(b,c,d\ldots)$$

$$(\alpha,\beta,\gamma)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d\ldots) - (\alpha,\beta)(b,c,d\ldots)$$

etc.

vnde producto ex duobus huius generis numeris ad eiusmodi numeros simplices reuocari poterunt:

$$(\alpha)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,a,b,c,d\ldots) - (b,c,d\ldots)$$

$$(\alpha,\beta)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,\beta,a,b,c,d\ldots) - (\alpha,b,c,d\ldots) + (c,d\ldots)$$

$$(\alpha,\beta,\gamma)(a,b,c,d\ldots) = \begin{cases} +(\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d\ldots) \\ -(\alpha,\beta,b,c,d\ldots) \\ +(\alpha,c,d\ldots) \\ -(d\ldots) \end{cases}$$

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)(a,b,c,d,e\ldots) = \begin{cases} +(\alpha,\beta,\gamma,\delta,a,b,c,d,e\ldots) \\ -(\alpha,\beta,\gamma,b,c,d,e\ldots) \\ +(\alpha,\beta,c,d,e\ldots) \\ -(\alpha,d,e\ldots) \\ +(e\ldots) \end{cases}$$

etc.

quia ergo in vtroque factore ordo indicum inuerti potest, hae formae pluribus modis variari poterunt.

34. Re-

34 Reuertamur autem ad fractiones continuas, vnde haec funt nata, fitque valor huius

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \text{etc.}}}}}} = S$$

atque fupra iam inuenimus hos valores

$$A = \frac{(a)}{1};\quad B = \frac{(a,b)}{(b)};\quad C = \frac{(a,b,c)}{(b,c)};\quad D = \frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)};$$
$$E = \frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} \text{ etc.}$$

continuo propius ad valorem S accedere. Horum terminorum igitur fingulas differentias perpendamus:

$A-B=-\frac{1}{1(b)}$	$B-C=+\frac{1}{(b)(b,c)}$	$C-D=-\frac{1}{(b,c)(b,c,d)}$
$A-C=-\frac{(c)}{1(b,c)}$	$B-D=+\frac{(d)}{(b)(b,c,d)}$	$C-E=-\frac{(e)}{(b,c,)(b,c,d,e)}$
$A-D=-\frac{(c,d)}{1(b,c,d)}$	$B-E=+\frac{(d,e)}{(b)(b,c,d,e)}$	$C-F=-\frac{(e,f)}{(b,c)(b,c,d,e,f)}$
$A-E=-\frac{(c,d,e)}{1(b,c,d,e)}$	$B-F=+\frac{(d,e,f)}{(b)(b,c,d,e,f)}$	$C-G=-\frac{(e,f,g)}{(b,c)(b,c,d,e,f,g)}$.

35. Quoniam igitur in doctrina de fractionibus continuis, cuius iam aliquot fpecimina edidi, huius generis numeri per indices formati totum negotium conficiunt: algorithmi eorum fpecies, quam hic expofui, nec non infignes comparationes inuentae, non exiguum praeftabunt vfum in hoc argumento vberius excolendo, vnde has animaduerfiones vfu non cariturus effe confido.

DE RESOLVTIONE AEQVATIONVM CVIVSVIS GRADVS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae in Algebra adhuc de reſolutione aequationum ſunt tradita, ea, ſi ad regulas generales ſpectemus, tantum ad aequationes, quae quartum gradum non ſuperant, patent, neque etiamnum regulae ſunt inuentae, quarum ope aequationes quinti altiorisue cuiuspiam gradus reſolui queant: ita vt vniuerſa Algebra ad aequationes quatuor primorum ordinum reſtringatur. Hoc autem de regulis generalibus eſt tenendum, quae ad omnes aequationes eiusdem gradus ſint accommodatae; nam in quouis gradu dantur infinitae aequationes, quae per diuiſionem in duas pluresue aequationes graduum inferiorum reſolui poſſunt, quarum idcirco radices iunctim ſumtae praebent omnes radices illarum aequationum altiorum graduum. Tum vero a Cel. *Moiuraeo* obſeruatae ſunt in quouis gradu quaedam aequationes ſpeciales, quae etſi per diuiſionem in factores reſolui nequeunt, tamen earum radices aſſignare liceat.

2. Ex cognita autem reſolutione generali aequationum primi, ſecundi, tertii et quarti gradus, conſtat

ſtat quidem, aequationes primi gradus ſine vlla radicis extractione reſolui poſſe: at aequationum ſecundi gradus reſolutio iam extractionem radicis quadratae poſtulat. Reſolutio autem aequationum tertii gradus tam extractionem radicis quadratae, quam cubicae, implicat, et quarti gradus reſolutio inſuper extractionem radicis biquadratae exigit. Ex his autem tuto concludere licet, reſolutionem aequationis quinti gradus generalem extractionem radicis ſurdeſolidae praeter omnes radices inferiores poſtulare, atque in genere radix aequationis cuiusuis gradus n exprimetur per formam, quae ex omnibus ſignis radicalibus, tam gradus n, quam graduum inferiorum, erit compoſita.

3. Haec perpendens olim in Comment. Acad. Imper. Petrop Tomi VI. coniecturam auſus ſum proferre circa formas radicum cuiuscunque aequationis. Propoſita namque aequatione gradus cuiusuis

$$x^n + A x^{n-2} + B x^{n-3} + C x^{n-4} + \text{etc.} = 0.$$

in qua ſecundum terminum deeſſe aſſumſi, quod quidem ſemper ponere licet, ſuſpicatus ſum, ſemper dari aequationem vno gradu inferioris, veluti

$$y^{n-1} + \mathfrak{A} y^{n-2} + \mathfrak{C} y^{n-3} + \mathfrak{B} y^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

quam illius reſoluentem appellaui, ita vt, ſi huius conſtent omnes radices, quae ſint α, β, γ, δ, ε etc. quarum numerus eſt $n-1$; ex iis radix illius aequationis ita exprimatur, vt ſit:

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \text{etc.}$$

Quam

Quam coniecturam confirmaui, ostendens, resolutionem aequationum inferiorum reuera ex hac forma generali deduci: neque etiam nunc dubito, quin haec coniectura veritati sit consentanea.

4. Praeterquam autem quod inuentio aequationis resoluentis, si proposita quartum gradum transcendit, fit difficillima, atque adeo in genere vires nostras aeque superare videtur, atque ipsa propositae aequationis resolutio; ita vt praeter formas speciales casibus Moivreanis similes nobis nihil admodum suppeditet: alia insuper incommoda in illa forma obseruaui, quae me eo induxerunt, vt arbitrarer, aliam forte dari formam illi non admodum dissimilem, quae istis incommodis non esset subiecta, ideoque maiorem spem nobis faceret, in hoc arduo Algebrae opere tandem vlterius penetrandi Non parum autem in hoc negotio proderit, veram formam radicum cuiusque aequationis accuratius perspexisse.

5. In forma autem per superiorem coniecturam eruta hoc imprimis desidero, quod omnes aequationis propositae radices non satis distincte exprimantur. Etsi enim quoduis signum radicale $\sqrt[n]{\alpha}$ tot valores diuersos complectitur, quot numerus n continet vnitates, ita vt, si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ etc. omnes valores formulae $\sqrt[n]{1}$ denotent, pro $\sqrt[n]{\alpha}$ scribere liceat quamlibet harum formularum $\mathfrak{a}\sqrt[n]{\alpha}$, $\mathfrak{b}\sqrt[n]{\alpha}$, $\mathfrak{c}\sqrt[n]{\alpha}$, $\mathfrak{d}\sqrt[n]{\alpha}$ etc. tamen manifestum

ſtum, hanc variationem in ſingulis terminis $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$ etc. non pro lubitu conſtitui poſſe. Si enim combinatio horum terminorum cum litteris 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡, 𝔢 etc. arbitrio noſtro relinqueretur, tum multo plures combinationes reſultarent, quam aequatio continet radices, quarum numerus eſt $= n$.

6. Quo igitur forma radicis x ſupra exhibita omnes aequationis radices ſimul complectatur, neceſſe eſt, vt combinationes terminorum $\sqrt[n]{\alpha}, \sqrt[n]{\beta}, \sqrt[n]{\gamma}, \sqrt[n]{\delta}$ etc. cum litteris 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 etc. certo quodam modo circumſcribantur, atque combinationes, quae ad aequationes radices repraeſentandas ſunt ineptae, excludantur. Ex reſolutione quidem aequationum tertii et quarti gradus vidimus inter radices vnitatis eiusdem nominis 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡, certum quendam ordinem conſtitui debere, ſecundum quem etiam combinationes ſint perficiendae. Hunc in finem autem ſimilis ordo in ipſis radicis membris $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$ etc. erit tenendus, quo combinatio dirigatur. Verum quia non conſtat quemadmodum in radicibus ſuperiorum graduum talis ordo ſit conſtituendus, hoc ſine dubio inſigne eſt incommodum, quo forma coniecturae meae innixa laborat, quod igitur remouere in hac diſſertatione mihi eſt propoſitum.

7. Primum autem conueniet, ordinem certum in radicibus cuiusuis poteſtatis ex vnitate conſtituere, quo ſumma plerumque varietas combinationum reſtringatur.

Quem in finem obſeruo, ſi praeter vnitatem alius quicunque valor ipſius $\sqrt[n]{1}$ ſit $=\mathfrak{a}$, tum etiam $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{a}^3$, $\mathfrak{a}^4$, etc idoneos valores ipſius $\sqrt[n]{1}$ exhibere: nam ſi ſit $\mathfrak{a}^n=1$, erit quoque $(\mathfrak{a}^2)^n=1$, $(\mathfrak{a}^3)^n=1$, $(\mathfrak{a}^4)^n=1$, etc. Hinc ſi reliquae radices ponantur $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. quoniam in iis reperiuntur $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{a}^3$, $\mathfrak{a}^4$, etc. iam certus quidam ordo perſpicitur, quo hae litterae inter ſe diſponi debent. Ita ſi poſt vnitatem, quae ſemper primum locum tenere cenſenda eſt, a littera $\mathfrak{a}$ incipiamus, valores formulae $\sqrt[n]{1}$ erunt $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \mathfrak{a}^4 \ldots . \mathfrak{a}^{n-1}$ quorum numerus eſt n; plures enim occurrere nequevnt, cum ſit $\mathfrak{a}^n=1$, $\mathfrak{a}^{n+1}=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^{n+2}=\mathfrak{a}^2$ etc. ſimilique modo res ſe habebit, ſi poſt vnitatem a quauis alia littera $\mathfrak{b}$, vel $\mathfrak{c}$, vel $\mathfrak{d}$ etc. incipiamus.

8. Hinc ergo merito ſuſpicor, talem quoque ordinem in ipſis terminis radicem aequationis x exprimentibus ineſſe; ſeu ſingula membra radicalia ita eſſe comparata, vt reſpectu vniuscuiusque reliquae ſint eius poteſtates: ſingulis autem membris nunc neceſſe erit, coefficientes indefinitos tribuere. Quare ſi aequatio, termino ſecundo deſtituta, fuerit:

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + Dx^{n-5} \ldots = 0$$

maxime probabile videtur radicem quamlibet huius aequationis ita exprimi, vt ſit:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^4} + \ldots . + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

vbi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. ſint quantitates, vel rationales, vel ſaltem non ſignum radicale $\sqrt[n]{}$ inuoluant, quippe pe quod tantum quantitatem v eiusque poteſtates afficiat, multo minus ipſa quantitas v tale ſignam inuoluat.

9 Ex hac forma primum patet, eam non plura membra, quam quorum numerus ſit $n-1$, continere poſſe: nam etiam ſi ſeriem illam ex ſua indole vlterius continuemus, termini ſequentes iam in praecedentibus contenti deprehendentur: erit enim $\sqrt[n]{v^{n+1}} = v\sqrt[n]{v}$; $\sqrt[n]{v^{n+2}} = v\sqrt[n]{v^4}$ etc. ita vt irrationalitas ſignum radicale $\sqrt[n]{}$ inuoluens, plures diuerſas ſpecies non admittat, quam quarum numerus eſt $= n-1$. Etiamſi ergo illa ſeries in infinitum continuetur, tamen terminos eiusdem ſpeciei ratione irrationalitatis addendo omnes ad terminos numero $n-1$ redigentur. Cum igitur iam ante viderimus, plures terminos in radicis expreſſionem non ingredi; hinc non leue argumentum habetur, hanc nouam formam veritati plane eſſe conſentaneam: eius autem veritas per ſequentia argumenta multo magis confirmabitur.

10. Haec expreſſio quoque ſponte ſe extendit ad aequationes, in quibus ſecundus terminus non deeſt, dum ſuperior remotionem ſecundi termini exigebat, ex quo ipſo haec noua magis naturalis eſt aeſtimanda. Continuatio enim terminorum irrationalium $\sqrt[n]{v}$, $\sqrt[n]{v^2}$, $\sqrt[n]{v^3}$ etc. etiam terminos rationales $\sqrt[n]{v^0}$, $\sqrt[n]{v^n}$ inuoluit, qui ob aequationis terminum ſecundum adiici debent. Hinc generalius pronunciare poterimus, ſi aequatio completa ordinis cuiusque n fuerit propoſita:

$$x^n + \Delta x^{n-1} + A x^{n-2} + B x^{n-3} + C x^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

 eius

eius radicem exprimi huiusmodi forma:

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^4} \ldots\ldots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

vbi ω partem radicis rationalem exhibet, quam constat esse $= -\frac{1}{n}\Delta$ Reliqui autem termini continent partes irrationales radicem potestatis n inuoluentes, quarum, quatenus sunt diuersae, numerus excedere nequit $n-1$, omnino vti per formam superiorem intelligitur.

11. Hinc porro videmus, si v fuerit eiusmodi quantitas, vt ex ea radix potestatis n actu extrahi, seu $\sqrt[n]{v}$ vel rationaliter, vel per signa radicalia inferiorum potestatum exprimi queat, tum irrationalitatem gradus n prorsus ex forma radicis egredi. Hoc autem necessario vsu venire debet, quoties aequatio proposita in factores est resolubilis, tum enim nulla radix signum radicale $\sqrt[n]{}$ continebit. Quare cum natura rei postulet, vt his casibus omnia signa radicalia $\sqrt[n]{}$ euanescant, et ad signa simpliciora reducantur: ex forma autem superiori non pateat, quomodo euanescente vno huiusmodi signo $\sqrt[n]{\alpha}$ reliqua $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, etc. euanescant, ista expressio ob hanc rationem multo magis ad aequationum naturam accommodata est censenda.

12. Praeterea vero haec forma, in quo cardo totius negotii versatur, etiam omnes aequationis radices sine vlla ambiguitate ostendit: neque enim amplius haeremus, quomodo cum omnibus signis radicalibus $\sqrt[n]{}$ totidem valores radicis $\sqrt[n]{1}$ combinandi sint. Si enim omnes

omnes radices potestatis n ex vnitate sint $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc. ac $\sqrt[n]{v}$ cum earum quacunque $\mathfrak{a}$ combinauerimus, propterea quod $\sqrt[n]{v}$ vtique est $\mathfrak{a}\sqrt[n]{v}$, tum pro $\sqrt[n]{v^2}$, $\sqrt[n]{v^3}$, $\sqrt[n]{v^4}$ etc. scribere oportebit $\mathfrak{a}^2\sqrt[n]{v^2}$, $\mathfrak{a}^3\sqrt[n]{v^3}$, $\mathfrak{a}^4\sqrt[n]{v^4}$, etc. Terminus autem constans ω, quia formam $\omega\sqrt[n]{v^0}$ repraesentat, abibit in $\mathfrak{a}^0\omega\sqrt[n]{v^0} = 1$ ob $\mathfrak{a}^0 = 1$, ideoque in omnibus radicibus nullam mutationem subit, quemadmodum reliqua membra. Quod cum ex resolutione omnium aequationum per se sit manifestum, hinc nouum ac satis luculentum habemus criterium veritatis huius nouae formae, quae omnium aequationum radices in se complecti videtur.

13. Hinc autem porro manifestum est, quomodo vna cuiusque aequationis radice cognita, reliquae radices omnes exhiberi queant: ad hoc tantum nosse oportet omnes radices eiusdem potestatis ex vnitate, seu omnes valores ipsius $\sqrt[n]{1}$, quorum numerus $= n$. Ac si istae vnitatis radices fuerint $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc. aequationisque vna radix inuenta sit

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \ldots \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

radices reliquae erunt:

$$x = \omega + \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}^3\sqrt[n]{v^3} + \ldots \mathfrak{D}\mathfrak{a}^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

$$x = \omega + \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^3\sqrt[n]{v^3} + \ldots \mathfrak{D}\mathfrak{b}^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

$$x = \omega + \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{c}^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}^3\sqrt[n]{v^3} + \ldots \mathfrak{D}\mathfrak{c}^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

ſicque ſemper tot obtinentur radices, quot exponens n, qui aequationis gradum deſignat, continet vnitates.

14. His igitur argumentis noua haec radicum forma iam ad ſummum probabilitatis eſt euecta; atque ad plenam certitudinem oſtendendam nihil aliud requiritur, niſi vt regula inueniatur, cuius ope pro quauis aequatione propoſita iſta forma definiri, et coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. cum quantitate v aſſignari queant, quod ſi praeſtare poſſemus, haberemus ſine dubio generalem omnium aequationum reſolutionem, irrito adhuc omnium Geometrarum labore requiſitam. Neque igitur equidem tantum mihi tribuo, vt hanc regulam me inuenire poſſe credam; ſed contentus ero plene demonſtraſſe, omnium aequationum radices certo in hac forma eſſe contentas. Hoc autem ſine dubio plurimum luminis foenerabitur ad reſolutionem aequationum, cum cognita radicum vera forma via inueſtigationis non mediocriter facilior reddatur, quam ne ingredi quidem licet, quam diu forma radicum fuerit incognita.

15. Quanquam autem ex ipſa aequatione propoſita nobis adhuc non licet radicem eius, ſeu coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. cum quantitate v aſſignare, tamen demonſtratio veritatis aeque ſuccedet, ſi viciſſim ex aſſumta radice illam aequationem, cuius eſt radix, eliciamus. Haec autem aequatio libera eſſe debet a ſignis radicalibus $\sqrt[n]{\ }$, quoniam aequationes, quarum radices inveſtigantur, ex terminis rationalibus conſtare aſſumi ſolent.

lent.

lent. Quaeſtio ergo huc reducitur, vt huiusmodi aequatio $x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \ldots\ldots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}}$ ab irrationalitate, ſeu ſignis radicalibus $\sqrt[n]{}$, liberetur, atque aequatio rationalis inde deducatur, de qua deinceps certo affirmare poterimus, eius radicem eſſe ipſam expreſſionem aſſumtam; ſimulque inde reliquas radices, quae eidem aequationi aeque conueniunt, aſſignare valebimus. Hoc ergo modo ſaltem infinitas aequationes exhibere poterimus, quarum radices nobis erunt cognitae, atque ſi hae aequationes in ſe complectantur omnium graduum aequationes generales, etiam harum reſolutio in noſtra erit poteſtate.

16. Parum quidem a nobis praeſtitum iri videbitur, ſi tantum plures aequationes, quarum radices asſignari queant, exhibuerimus; cum ex primis elementis conſtet, quomodo cuiusuis gradus aequatio formari debeat, quae datas habeat radices: ſi enim quotcunque huiusmodi formulae $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc. in ſe inuicem multiplicentur, obtinebitur vtique aequatio, cuius radices futurae ſunt $x=a$, $x=b$, $x=c$, etc. ſed talis aequationis formatio parum lucri affert ad reſolutionem aequationum. Primum autem obſeruo, hoc modo alias aequationes non naſci, niſi quae ſint habiturae factores; aequationum autem, quae in factores reſolui poſſunt, reſolutio, nulla laborat difficultate. Haud maioris quoque momenti ſunt in hoc negotio aequationes, quae ex multiplicatione duarum pluriumue inferiorum aequationum producuntur, quarum reſolutio nihil plane prodeſt ad reſolutionem generalem perficiendam.

17.

17. Quodsi autem ex nostra forma $x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} +$ etc. ad aequationem rationalem perueniamus, ea certo factores rationales non habebit: si enim haberet, eius radices, quae simul essent radices aequationum inferiorum graduum, signum radicale $\sqrt[n]{}$ non implicarent. Plurimum is praestare censendus est, qui aequationis cuiuspiam altioris gradus, quae in factores resolui nequeat, radices assignauerit: quam ob rem etiam Cel. *Moivreo* ingentes debentur gratiae, quod ex singulis aequationum gradibus vnam exhibuerit in factores irresolubilem, cuius radices assignari possunt; atque si eius formulae latius paterent, multo maiorem sine dubio essent habiturae vtilitatem, dum contra aequationibus in factores resolubilibus in hoc negotio nihil plane emolumenti attribui potest.

18. Verum reuertamur ad illam formam ab irrationalitate signi $\sqrt[n]{}$ liberandam, ac si consuetas methodos signa radicalia eliminandi consulamus, aequatio resultans ad plurimas dimensiones plerumque ascendere videatur. Si enim vnicum adesset signum radicale, puta $x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v}$, aequatio rationalis ad n dimensiones ipsius x ascenderet, vnde ea ad multo plures dimensiones ascensura videtur, si plura eiusmodi adsint signa radicalia; id quod sine dubio euenire deberet, si illa signa radicalia a se inuicem prorsus non penderent. Sed quia omnia sunt potestates primi, ostendam, perfectam rationalitatem obtineri posse, non vltra potestatem exponentis n ascendendo. Ita scilicet docebo formam

$x =$

$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^{n-1}}$
ita ab irrationalitate liberari posse, vt aequatio rationalis inde resultans potestatem x^n non superet. Prodibit ergo aequatio huius formae:

$$x^n + \Delta x^{n-1} + A x^{n-2} + B x^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

cuius radix erit illa forma assumta: et quia radicum huius aequationis numerus est $= n$, ex eadem forma omnes huius aequationis radices assignare poterimus.

19. Cum hoc iam sit eximium criterium veritatis huius formae, tum etiam annotasse iuuabit, quoniam forma radicis $n-1$ quantitates arbitrarias continet, totidem quoque quantitates arbitrarias in aequationem rationalem ingredi, vnde perspicuum est, istas quantitates ita determinari posse, vt aequatio rationalis inde datos coefficientes Δ, A, B, C etc. obtineat, hoc est: vt aequatio generalis huius gradus obtineatur. Quae determinatio si actu institui queat, nanciscemur inde resolutionem generalem aequationum cuiuscunque gradus; ex quo saltem possibilitas resolutionis hoc modo perficiendae elucet. Difficultates quidem insignes in hoc negotio occurrent, quas eo clarius agnoscemus, si nostram formam ad quemuis gradum a simplicissimis incipiendo, accommodemus. Simplicitati autem et concinnitati calculi consulentes, partem radicis rationalem ω omittamus, vt in quouis gradu ad eiusmodi aequationes rationales pertingamus, in quibus secundus terminus desit, quo ipso amplitudo resolutionis non restringi est censenda.

I. Reſolutio aequationum ſecundi gradus.

20. Vt igitur ab aequationibus ſecundi gradus incipiamus, ſit $n=2$, et poſito $\omega=0$, forma noſtra radicis erit:

$$x=\mathfrak{A}\sqrt{v}$$

quae rationalis facta dat $xx=\mathfrak{A}\mathfrak{A}v$. Comparetur haec aequatio cum forma generali ſecundi gradus $xx=A$, deficiente ſecundo termino, ſitque $\mathfrak{A}\mathfrak{A}v=A$: cui vt ſatisfiat, ſtatuatur $\mathfrak{A}=1$, eritque $v=A$; vnde propoſita aequatione $xx=A$, ſi ſumatur $\mathfrak{A}=1$, et $v=A$, eius radix vna erit $x=\mathfrak{A}\sqrt{v}=\sqrt{A}$, et quia $\sqrt{1}$ duos habet valores 1 et -1, altera radix erit $x=-\mathfrak{A}\sqrt{v}=-\sqrt{A}$: quod quidem per ſe eſt perſpicuum.

II. Reſolutio aequationum tertii gradus.

21. Poſito iam $n=3$, forma radicis pro hoc caſu erit:

$$x=\mathfrak{A}\sqrt[3]{v}+\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}$$

vnde vt aequatio rationalis eruatur, ſumatur primo cubus:

$$x^3=\mathfrak{A}^3v+3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}v\sqrt[3]{v}+3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}v\sqrt[3]{v^2}+\mathfrak{B}^3v^2$$

Fingatur iam haec aequatio cubica:

$$x^3=Ax+B$$

vnde

vnde, pro x valorem assumtum substituendo, orietur quoque

$$x^3 = A\mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + A\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2} + B$$

quae forma illi aequalis est reddenda, aequandis inter se tam partibus rationalibus, quam irrationalibus, vtriusque speciei $\sqrt[3]{v}$ et $\sqrt[3]{v^2}$.

22. Comparatio autem terminorum rationalium praebet:

$$B = \mathfrak{A}^3 v + \mathfrak{B}^3 v^2$$

et ex collatione irrationalium fit:

$$A\mathfrak{A} = 3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}v \text{ et } A\mathfrak{B} = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}v$$

quarum vtraque dat $A = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}v$.
Hinc si ista aequatio cubica fuerit proposita:

$$x^3 = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}vx + \mathfrak{A}^3 v^2 + \mathfrak{B}^3 v^2$$

eius radix vna erit:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}$$

et si 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sint tres radices cubicae vnitatis, duae reliquae radices erunt:

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[3]{v^2}; \quad x = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[3]{v^2}$$

est autem $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

23. Possunt autem vicissim, si aequatio cubica proponatur

$$x^3 = Ax + B$$

ex coefficientibus A et B quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et v determinari, vt inde omnes tres huius aequationis radices obtineantur. Hunc autem in finem, quia tantum duae aequationes adimplendae habentur, vna litterarum

$\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ pro lubitu assumi potest. Sit igitur $\mathfrak{A}=1$, et aequatio
$A=3\mathfrak{A}\mathfrak{B}v=3\mathfrak{B}v$ praebet $\mathfrak{B}=\frac{A}{3v}$; vnde fit $\mathfrak{B}^3=\frac{A^3}{27v^3}$ qui valor in prima aquatione $B=v+\mathfrak{B}^3v^2$ substitutus dat:

$$B=v+\frac{A^3}{27v} \text{ seu } vv=Bv-\frac{1}{27}A^3$$

vnde fit $v=\frac{1}{2}B\pm\sqrt{(\frac{1}{4}BB-\frac{1}{27}A^3)}$: perinde autem est vter horum duorum valorum assumatur.

24. Inuento autem valore ipsius $v=\frac{1}{2}B\pm\sqrt{(\frac{1}{4}BB-\frac{1}{27}A^3)}$ erit $\mathfrak{B}=\frac{A}{3v}$ et $\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}=\frac{A}{3\sqrt[3]{v}}$ hincque tres aequationes propositae:

$$x^3=Ax+B$$

erunt radices:

$$\text{I. } x=\sqrt[3]{v}+\frac{A}{3\sqrt[3]{v}}:\ \text{II. } x=\mathfrak{a}\sqrt[3]{v}+\frac{\mathfrak{b}A}{3\sqrt[3]{v}}:\ \text{III. } x=\mathfrak{b}\sqrt[3]{v}+\frac{\mathfrak{a}A}{3\sqrt[3]{v}}$$

Cum autem sit $\frac{1}{v}=\frac{\frac{1}{2}B\mp\sqrt{(\frac{1}{4}BB-\frac{1}{27}A^3)}}{\frac{1}{27}A^3}$ erit

$$\sqrt[3]{v}=\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}BB-\tfrac{1}{27}A^3)})} \text{ et}$$

$$\frac{A}{3\sqrt[3]{v}}=\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}BB-\tfrac{1}{27}A^3)})}$$

hincque nascuntur formulae vulgares pro resolutione aequationum cubicarum.

III. Resolutio aequationum quarti gradus.

25. Posito $n=4$, consideremus hanc radicis formam:

$$x=\mathfrak{A}\sqrt[4]{v}+\mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2}+\mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

et

et quaeramus aequationem quarti gradus, cuius haec forma sit radix. Atque hoc quidem casu calculus facile instituitur, quo irrationalitates tolluntur; nam ob $\sqrt[4]{v^2}=\sqrt{v}$, sumatur haec aequatio:

$$x - \mathfrak{B}\sqrt{v} = \mathfrak{A}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

quae quadrata dat:

$$xx - 2\mathfrak{B}x\sqrt{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}v = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\sqrt{v} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}v + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v\sqrt{v}$$

quae partibus irrationalibus ad eandem partem translatis fit:

$$xx + (\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v = 2\mathfrak{B}x\sqrt{v} + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\sqrt{v}$$

et sumtis denuo quadratis prodibit haec aequatio rationalis:

$$\begin{aligned} x^4 + 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})vxx + (\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2 vv = {} & 4\mathfrak{B}\mathfrak{B}vxx \\ & + 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}vx + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)^2 v \end{aligned}$$

quae ordinata abit in hanc formam;

$$\begin{aligned} x^4 = {} & 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})vxx + 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}vx + \mathfrak{A}^4 v \\ & - \mathfrak{B}^4 vv + \mathfrak{C}^4 v^3 + 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv - \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C}vv \end{aligned}$$

26. Huius igitur aequationis biquadraticae radix vna est:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

ac si radices biquadratae vnitatis ponantur 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ita vt sit:

$$\mathfrak{a} = +\sqrt{-1}; \quad \mathfrak{b} = -1; \quad \text{et} \quad \mathfrak{c} = -\sqrt{-1}$$

erit

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^2 &= -1 = \mathfrak{b}; & \mathfrak{a}^3 &= -\sqrt{-1} = \mathfrak{c}; \\ \mathfrak{b}^2 &= +1; & \mathfrak{b}^3 &= -1 = \mathfrak{b}; \\ \mathfrak{c}^2 &= -1 = \mathfrak{b}; & \mathfrak{c}^3 &= +\sqrt{-1} = \mathfrak{a}; \end{aligned}$$

 vnde

vnde tres reliquae radices eiusdem aequationis erunt:

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}\sqrt[4]{v^3}$$
$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v^3}$$
$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}\sqrt[4]{v^3}$$

27. Hinc autem vicissim aequatio biquadrata quaecunque ad illam formam reduci, eiusque radices assignari poterunt. Sit enim proposita haec aequatio:

$$x^4 = Axx + Bx + C$$

et quaeri opportet valores coefficientium $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ cum quantitate v, quibus inuentis simul huius aequationis radices innotescent. Erit autem:

$A = 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v$; $\quad B = 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}v$

$C = \mathfrak{A}^4 v \;\; \mathfrak{B}^4 vv + \mathfrak{C}^4 v^3 + 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv - 2\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C}vv$ seu

$C = (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)^2 v - (\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2 vv + 8\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv$

Illinc autem est $(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v = \frac{1}{2}A$; et $\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v = \frac{B}{4\mathfrak{B}v}$; qui valores hic substituti dant:

$C = \frac{BB}{16\mathfrak{B}\mathfrak{B}v} - \frac{1}{4}AA + 8\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv$

Prima autem formula praebet $4\mathfrak{A}\mathfrak{C}v = A - 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}v$, qui valor denuo substitutus dat:

$C = \frac{BB}{16\mathfrak{B}\mathfrak{B}v} - \frac{1}{4}AA + 2A\mathfrak{B}\mathfrak{B}v - 4\mathfrak{B}^4 vv$

ita vt iam duae litterae $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ sint eliminatae.

28. Quia hic adhuc duae incognitae $\mathfrak{B}$ et v supersunt, valor ipsius $\mathfrak{B}$ arbitrio nostro relinquitur. Sit igitur $\mathfrak{B} = 1$, et quantitas v ex sequenti aequatione cubica determinari debebit:

$$v^3 - \tfrac{1}{2}Av^2 + \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{1}{4}AA)v - \tfrac{1}{64}BB = 0$$

In-

Inuenta antem hinc radice v, ex prioribus aequationibus quaeri debent litterae $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$. Cum igitur ſit:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v = \frac{B}{4v} \text{ et } 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}\sqrt{v} = \frac{A-2v}{2\sqrt{v}}$$

erit tam addendo, quam ſubtrahendo, et radicem quadratam extrahendo

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\sqrt{v} = \sqrt{\left(\frac{B}{4v} + \frac{A}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}\right)} \text{ et}$$

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{C}\sqrt{v} = \sqrt{\left(\frac{B}{4v} - \frac{A}{2\sqrt{v}} + \sqrt{v}\right)} \text{ vnde reperietur;}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\sqrt{v}}\sqrt{(B + 2A\sqrt{v} - 4v\sqrt{v})} + \frac{1}{4\sqrt{v}}\sqrt{(B - 2A\sqrt{v} + 4v\sqrt{v})} \text{ et}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{4v}\sqrt{(B + 2A\sqrt{v} - 4v\sqrt{v})} - \frac{1}{4v}\sqrt{(B - 2A\sqrt{v} + 4v\sqrt{v})}.$$

29. Cum ſit $\mathfrak{A}\sqrt[4]{v} \pm \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3} = (\mathfrak{A} \pm \mathfrak{C}\sqrt{v})\sqrt[4]{v}$ erunt aequationis propoſitae:

$$x^4 = Axx + Bx + C$$

poſtquam valor v inuentus fuerit ex aequatione:

$$v^3 - \tfrac{1}{2}Av^2 + \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{1}{4}AA)v - \tfrac{1}{64}BB = 0$$

quatuor radices:

I. $x = \sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$

II. $x = \sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$

III. $x = -\sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(-B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$

IV. $x = -\sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(-B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$

Hocque modo, vt conſtat, reſolutio aequationis biquadraticae ad reſolutionem aequationis cubicae reducitur.

IV. Reſolutio aequationum quinti gradus.

30. Poſito $n = 5$, erit forma noſtra radicis:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{vv} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$$

ac

ac primo quaeri debet aequatio quinti gradus, cuius haec futura sit radix, seu quod eodem redit, ex hac forma signa radicalia eliminari oportet. In hoc autem ipso summa occurrit difficultas, cum operatio haec eliminationis neutiquam eo modo, quo in aequationibus quarti gradus sum vsus, institui queat. Manifestum quidem est, quia omnes potestates ipsius x eadem signa radicalia inuoluunt, si aequatio quaesita fingatur:

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

tum substituendo pro x valorem assumtum, quatuor obtineri aequationes, quarum ope quaterna signa radicalia eliminari liceat; sed tum litterae hae assumtae A, B, C, et D singulae difficillime determinabuntur.

31. His difficultatibus perpensis in alium incidi modum hanc operationem instituendi, qui ita est comparatus, vt ad omnes radicum formas, cuiuscunque sint gradus, aeque pateat, et ex quo simul perspicietur, aequationem rationalem nunquam vltra gradum, qui exponente n indicatur, esse ascensuram. Hic autem modus innititur ipsi naturae aequationum, qua singulorum terminorum coefficientes ex omnibus radicibus definiuntur. Cum igitur omnes quinque radices aequationis, quam quaerimus, constent, ex iis quoque coefficientes singulorum terminorum eius formari possunt per regulas cognitas. Sint igitur 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, quinque radices surdesolidae vnitatis, seu radices huius aequationis $z^5 - 1 = 0$, ac ponendo α, β, γ, δ, ε pro radicibus aequationis, quam quaerimus, erit:

$\alpha = \mathfrak{A}$

$$\alpha = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$$

$$\beta = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{a}^4\sqrt[5]{v^4}$$

$$\gamma = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^4\sqrt[5]{v^4}$$

$$\delta = \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{c}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{c}^4\sqrt[5]{v^4}$$

$$\varepsilon = \mathfrak{A}\mathfrak{d}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{d}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{d}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{d}^4\sqrt[5]{v^4}.$$

32. His quinque radicibus expoſitis, ſi aequatio quinti gradus has radices habens ſtatuatur:

$$x^5 - \Delta x^4 + A x^3 - B x^2 + C x - D = 0$$

hi coefficientes ex radicibus α, β, γ, δ, ε ita definiuntur, vt ſit

$\Delta =$ ſummae radicum

$A =$ ſummae productorum ex binis

$B =$ ſummae productorum ex termis

$C =$ ſummae productorum ex quaternis

$D =$ producto ex omnibus quinis.

Quo autem hos valores facilius colligere queamus, eos ex ſummis poteſtatum radicum concludamus. Sit igitur:

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$$

$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2$$

$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3$$

$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4$$

$$T = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5.$$

His enim valoribus definitis erit, vti nouimus:

$$\Delta = P$$
$$A = \frac{\Delta P - Q}{2}$$
$$B = \frac{AP - \Delta Q + R}{3}$$
$$C = \frac{BP - AQ + \Delta R - S}{4}$$
$$D = \frac{CP - BQ + AR - \Delta S + T}{5}.$$

33. Iam ad valores P, Q, R, S, T inueſtigandos, debemus prius radicum vnitatis $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ omnes poteſtates in vnam ſummam redigere; quae cum ſint radices aequationis $z^5 - 1 = 0$, erit

$$1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = 0$$
$$1 + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{d}^2 = 0$$
$$1 + \mathfrak{a}^3 + \mathfrak{b}^3 + \mathfrak{c}^3 + \mathfrak{d}^3 = 0$$
$$1 + \mathfrak{a}^4 + \mathfrak{b}^4 + \mathfrak{c}^4 + \mathfrak{d}^4 = 0$$
$$1 + \mathfrak{a}^5 + \mathfrak{b}^5 + \mathfrak{c}^5 + \mathfrak{d}^5 = 5.$$

Summae poteſtatum ſextarum, ſeptimarum, etc. vsque ad decimas, iterum euaneſcunt, at decimarum ſumma iterum fit $= 5$, cum ſit $\mathfrak{a}^5 = 1$, $\mathfrak{b}^5 = 1$, $\mathfrak{c}^5 = 1$ et $\mathfrak{d}^5 = 1$. Breuitatis gratia in hoc calculo poterimus ſigna radicalia plane omittere, dummodo deinceps recordemur, cum literis $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ coniungenda eſſe $\sqrt[5]{v}, \sqrt[5]{v^2}, \sqrt[5]{v^3}, \sqrt[5]{v^4}$.

34. Nunc igitur addendis radicibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ habebimus:

$$P = \mathfrak{A}(1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}) + \mathfrak{B}(1 + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{d}^2) + \text{etc.} = 0.$$

reliquis autem poteſtatibus ſumendis, eliciemus inſuper

P =

$$\begin{aligned}
P &= 0 \\
Q &= 10(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}) \\
R &= 15(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D}) \\
S &= 20(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3) + 30(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{D} \\
&\qquad + \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}) + 120\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \\
T &= 5(\mathfrak{A}^3 + \mathfrak{B}^5 + \mathfrak{C}^5 + \mathfrak{D}^5) + 100(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} \\
&\qquad + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3) + 150(\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 \\
&\qquad + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}).
\end{aligned}$$

Hic alia producta non occurrunt, nisi quae adiungendis signis radicalibus potestatem ipsius v rationalem producunt: seu si litterae $\mathfrak{A}$ vnam dimensionem tribuamus, litterae $\mathfrak{B}$ duas, litterae $\mathfrak{C}$ tres et litterae $\mathfrak{D}$ quatuor, in omnibus his productis numerus dimensionum est per 5 diuisibilis, coefficiens autem cuiusuis producti est quintuplum eius coefficientis, qui eidem producto ex lege conbinationum competit.

35. Cum igitur sit $P = 0$, erit quoque $\Delta = 0$, et pro reliquis coefficientibus habebimus:

$A = -\frac{1}{2}Q$; $B = -\frac{2}{3}R$; $C = -\frac{1}{4}AQ - \frac{1}{4}S$; et $D = -\frac{1}{5}BQ + \frac{1}{5}AR + \frac{1}{5}T$.

Hinc ergo erit:

$$\begin{aligned}
A &= -5(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}) \\
B &= 5(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D}) \\
C &= -5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3) + 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 \\
&\qquad + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2) - 5\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \\
D &= \mathfrak{A}^5 + \mathfrak{B}^5 + \mathfrak{C}^5 + \mathfrak{D}^5) - 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} \\
&\qquad + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3) + 5(\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 \\
&\qquad + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D})
\end{aligned}$$

cum quibus terminis iam debitae poteſtates ipſius v coniungi debent, vt obtineantur eorum iuſti valores.

36. Quodſi ergo mutatis ſignis coefficientium A et C proponatur haec aequatio:

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

cuius coefficientes hos teneant valores:

$$A = 5(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})v$$

$$B = 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 v + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D}v)v$$

$$C = 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D}v + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 v + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3 vv)v - 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 \\ + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2)vv + 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}v^2$$

$$D = \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{B}^5 v^2 + \mathfrak{C}^5 v^3 + \mathfrak{D}^5 v^4 - 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} \\ + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D}v + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3 v)v^2 + 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D} + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 \\ + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2 v + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 v)v^2$$

erunt eius quinque radices:

I. $x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$

II. $x = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{a}^4\sqrt[5]{v^4}$

III. $x = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^4\sqrt[5]{v^4}$

IV. $x = \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{c}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{c}^4\sqrt[5]{v^4}$

V. $x = \mathfrak{A}\mathfrak{d}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{d}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{d}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{d}^4\sqrt[5]{v^4}$.

exiſtentibus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ praeter vnitatem reliquis quatuor radicibus ſurdeſolidis vnitatis, quarum valores imaginarii conſtant.

37. Si nunc viciſſim ex datis coefficientibus A, B, C, D definiri poſſent quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ cum littera v, haberetur reſolutio generalis omnium aequationum

tionum quinti gradus. Verum in hoc ipſo ſumma difficultas conſiſtit, cum nulla via pateat, litteras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, quarum quidem vnam pro lubitu aſſumere licet, ſucceſſiue ita eliminandi, vt aequatio ſolum incognitam v cum datis A, B, C, D inuoluens reſultet, quae quidem nullas radices ſuperfluas complectatur. Satis tuto autem ſuſpicari licet, ſi haec eliminatio rite adminiſtretur, tandem ad aequationem quarti gradus perueniri poſſe, qua valor ipſius v definiatur. Si enim aequatio altioris gradus prodiret, tum quoque valor ipſius v ſigna radicalia eiusdem gradus implicaret, quod abſurdum videtur. Quoniam autem multitudo terminorum hunc laborem tam difficilem reddit, vt ne tentari quidem cum aliquo ſucceſſu queat, haud abs re erit, caſus quosdam minus generales euoluere, qui non ad formulas tantopere complicatas deducant.

38. Ad caſus ergo particulares deſcenſuri, tribuamus litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ eiusmodi valores, quibus calculus in compendium reducatur; ac primo quidem ſint $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, et $\mathfrak{D} = 0$, vnde nanciſcemur:

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0 \text{ et } D = \mathfrak{A}^5 v.$$

Hinc igitur fit $\mathfrak{A}\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{v}$. Quare ſi haec propoſita fuerit aequatio:

$$x^5 = D$$

erunt huius aequationis quinque radices:

$$\text{I. } x = \sqrt[5]{D};\ \text{II. } x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{D};\ \text{III. } x = \mathfrak{b}\sqrt[5]{D};\ \text{IV. } x = \mathfrak{c}\sqrt[5]{D};$$
$$\text{V } x = \mathfrak{d}\sqrt[5]{D}$$

 qui

qui caſus cum per ſe ſit manifeſtus, ab eo exordium capere viſum eſt, vt pateat quomodo noſtra methodus caſus cognitos in ſe complectatur.

39. Euaneſcant iam duae litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$, ſi enim tres euaneſcentes ponantur, quaecunque eae ſumantur, ſemper ad caſum praecedentem deducimur. Sint igitur $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ nihilo aequales, ſeu aequatio quaeratur, cuius radix ſit futura $x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2}$, atque obtinebimus:

$$A = 0;\ B = 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v;\ C = 5\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}v;\ D = \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{B}^5 v^2$$

vnde propoſita radix conueniet huic aequationi:

$$x^5 = 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v x^2 + 5\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} v x + \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{B}^5 v^2$$

Quae aequatio ſi comparetur cum hac forma:

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + R$$

erit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v = P$; $\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}v = Q$, vnde deducitnr $\mathfrak{A}^5 v = \frac{QQ}{P}$ et $\mathfrak{B}^5 v^2 = \frac{P^3}{Q}$, ita vt ſit $R = \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$.

40. Hinc ergo deducimur ad reſolutionem huius aequationis ſpecialis quinti gradus:

$$x^5 - 5Pxx + 5Qx + \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$$

cuius ob $\mathfrak{A}\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}}$ et $\mathfrak{B}\sqrt[5]{vv} = \sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$ quinque radices erunt:

I. $x = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$

II. $x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$

III. $x = \mathfrak{b}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{b}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$

IV. $x = \mathfrak{c}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{c}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$

V. $x = \mathfrak{d}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{d}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$.

Aequa-

Aequatio autem haec non multum abſimilis eſt formulae Moivreanae, et quia ſe in factores reſolui non patitur, eius reſolutio hic tradita eo magis notari meretur.

41. Hanc aequationem a fractionibus liberare poterimus, ſi ponamus $P = MN$ et $Q = M^2N$, tum enim habebitur:

$$x^5 = 5MNxx + 5M^2Nx + M^3N + MN^2.$$

cuius radix erit $x = \sqrt[5]{M^3N} + \sqrt[5]{MN^2}$, et ſi $\mathfrak{a}$ quamlibet aliam radicem ſurdeſolidam vnitatis denotet, erit huius aequationis quaelibet alia radix:

$$x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{M^3N} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{MN^2}.$$

Ita ſi exempli gratia ſtatuatur $M = 1$; et $N = 2$, huius aequationis:

$$x^5 = 10xx + 10x + 6$$

radix quaecunque eſt $x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{2} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{4}$; haecque aequatio ita eſt comparata, vt per nullam methodum cognitam reſolui poſſe videatur.

42. Si $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{D}$ ſint nihilo aequales, ad eundem caſum reuoluimur. Fiet enim

$A = 0$; $B = 5\mathfrak{A}^2\mathfrak{C}v$; $C = 5\mathfrak{A}\mathfrak{C}^3vv$ et $D = \mathfrak{A}^5v + \mathfrak{C}^5v^3$ vnde ſi ſtatuatur haec aequatio:

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + R$$

vt ſit $P = \mathfrak{A}^2\mathfrak{C}v$ et $Q = \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3vv$, erit $\frac{QQ}{P} = \mathfrak{C}^5v^3$ et $\frac{P^3}{Q} = \mathfrak{A}^5v$: hincque fit, vt ante, $R = \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$, atque etiam eaedem reperiuntur radices. Eadem porro etiam aequatio reperitur, ſiue ponatur $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{B} = 0$; ſiue $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{C} = 0$. Sin autem vel $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{D}$, vel $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ euaneſcere euanefcere affumantur, vtrinque quidem eadem prodit aequatio, fed diuerfa a praecedentibus cafibus, quam ideo euoluere conueniet.

43. Sit igitur et $\mathfrak{B}=0$ et $\mathfrak{C}=0$, atque hinc confequemur fequentes valores:

$A=5\mathfrak{A}\mathfrak{D}v$; $B=0$, $C=-5\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{D}vv$; et $D=\mathfrak{A}^5v+\mathfrak{D}^5v^4$

Vnde fi ftatuamus $\mathfrak{A}\mathfrak{D}v=P$; erit $A=5P$ et $C=-5PP$ tum vero erit:

$DD\ 4P^5=(\mathfrak{A}^5v-\mathfrak{D}^5v^4)^2$ et $\mathfrak{A}^5v-\mathfrak{D}^5v^4=\sqrt{(DD-4P^5)}$, ideoque

$$\mathfrak{A}^5v=\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{2}\sqrt{(DD-4P^5)} \text{ et}$$
$$\mathfrak{D}^5v^4=\tfrac{1}{2}D-\tfrac{1}{2}\sqrt{(DD-4P^5)}$$

Hinc fi propofita fit haec aequatio:

$$x^5=5Px^3-5PPx+D$$

quaelibet eius radicum eft:

$$x=\mathfrak{a}\sqrt[5]{(\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{2}\sqrt{(DD-4P^5)})}+\mathfrak{a}^4\sqrt[5]{(\tfrac{1}{2}D-\tfrac{1}{2}\sqrt{(DD-4P^5)})}$$

atque haec eft ipfa illa aequatio cuius refolutionem Cel. Moivraeus docuit.

44. Poffunt autem ex forma generali innumerabiles deduci aequationes quinti ordinis, quarum radices affignare licet, etiamfi ipfae illae aequationes in factores refolui nequeant. Propofita enim aequatione quinti gradus:

$$x^5=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

cuius coefficientes habeant fequentes valores:

A=

$$A = \frac{5}{gk}(g^3 + k^3)$$

$$B = \frac{5}{2mnrr}((m+n)(m^2g^3 - n^2k^3) - (m-n)rr)$$

$$C = \frac{5}{mnggkkrr}(g^3(m^2g^3 - n^2k^3)^2 - (m(m+n)g^6 - (m^2+mn-n^2)g^3k^3 + n(m-n)k^6)rr - k^3r^4)$$

$$D = \frac{gg}{mmnk^4g^3}((m^2g^3 - nnk^3)^3 - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + rn^2k^3) - n^2k^3r^4) + \frac{kk}{mnng^4r^3}(m^2g^3r^2(m^2g^3 - n^2k^3) - (2m^2g^3 + n^2k^3)r^4 + r^6) + \frac{5(m-n)(g^3-k^3)(m^2g^3-n^2k^3)}{2mngkrr} - \frac{5(m+n)(g^3k^3)}{2mngk}$$

eius radices ſemper aſſignari poſſunt.

45. Ponatur enim breuitatis gratia:

$$T = (m^2g^3 - n^2k^3)^2 - 2(m^2g^3 + n^2k^3)rr + r^6$$

ſitque:

$$\left.\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}\right\} = \frac{(m^2g^3-n^2k^3)^3 - (m^2g^3-n^2k^3)(m^2g^3+2n^2k^3)rr - n^2k^3r^4 \pm ((m^2g^3-n^2k^3)^2 - n^2k^3rr)\sqrt{T}}{2mnnr}$$

$$\left.\begin{matrix} R \\ S \end{matrix}\right\} = \frac{(m^2g^3-n^2k^3)m^2g^3 - (2m^2g^3+n^2k^3)rr + r^4 \pm (m^2g^3 - rr)\sqrt{T}}{2mnnr}$$

vbi ſigna ſuperiora pro valoribus P et R, inferiora pro Q et S valent, ac quaelibet radix aequationis erit:

$$x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{\frac{gg}{k^4}P} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{\frac{kk}{g^4}R} + \mathfrak{a}^3\sqrt[5]{\frac{kk}{g^4}S} + \mathfrak{a}^4\sqrt[5]{\frac{gg}{k^4}Q}.$$

46. Vt rem exemplis illuſtremus, ex his formis ſequentia formari poſſunt:

I. Aequationis $x^5 = 40x^3 + 70xx - 50x - 98$ radix eſt

$$x = \sqrt[5]{(-31-3\sqrt{-7})} + \sqrt[5]{(-18+10\sqrt{-7})} + \sqrt[6]{(-18-\sqrt{-7})} + \sqrt[5]{(-31-3\sqrt{-7})}$$

II. Aequationis $x^5 = 2625x + 16600$ radix eſt

$$x = \sqrt[5]{75(5+4\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35+11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35-11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{75(5-4\sqrt{10})}$$

quae eo magis ſunt notatu digna, quod hae aequationes nullo alio modo reſolui poſſunt. Simili autem modo huiusmodi inueſtigationes ad aequationes altiorum graduum extendi poſſunt: facileque erit, ex quouis gradu innumerabiles aequationes per alias methodos irreſolubiles exhibere, quarum huius methodi ope non ſolum vna, ſed omnes plane radices exhiberi queant.

DE

DE NVMERIS PRIMIS VALDE MAGNIS

Auctore

L. EVLERO.

Vix vllus reperietur Geometra, qui non, ordinem numerorum primorum inueſtigando, haud parum temporis inutiliter conſumſerit: videtur enim lex, qua numeri primi progrediuntur, in Arithmetica aeque abſtruſae eſſe indaginis, atque in Geometria circuli quadratura: ac ſi huius indagatio pro deſperata eſt habenda, non leuiores adſunt rationes, quae et ordinis, quo numeri primi ſe inuicem ſequuntur, cognitionem nos in perpetuum fugere perſuadent. Cum deinde etiam circuli quadratura, quamuis innoteſceret, vix quicquam vtilitatis allatura perhibeatur, eodem iure negare licebit, ex ordine numerorum primorum perſpecto vllum vſum eſſe redundaturum. Verum tamen nemo facile dubitabit, quin methodus ipſa, quae nos vel ad circuli quadraturam, vel ad legem progreſſionis numerorum primorum manuduceret, quoniam hae res tam diu fruſtra ſunt anquiſitae, eximium vſum ſit praeſtatura, propterea quod maxima impedimenta, quibus hae inueſtigationes adhuc fuerunt implicatae, feliciter ſuperauerit; ita vt inde omni iure ſumma ſubſidia per totam Matheſin nobis polliceri poſſemus. Haec ideo monenda duxi, ne quis eos, qui forte in hoc ſtudio deſudauerint, etiamſi operam perdiderint, reprehendendos cenſeat. Ac profecto natura numerorum primorum, cum ex iis modo tam admirabili omnes numeri componantur, per ſe praeclariſſima videtur, et quo magis adhuc in proprietates, quibus ſunt praeditae, penetrare licuit, eo magis haec doctrina digna cenſeri debet, cui excolendae plus operae tribuatur, quam nunc quidem plerumque fieri ſolet. In hoc autem ſtudii genere inprimis excelluit acutiſſimus quondam *Fermatius*, cui plurimae inſignes numerorum proprietates acceptae ſunt referendae; neque parum eſt dolendum, quod eius ſcripta poſt mortem ita interciderint, vt plurimorum theorematum demonſtrationes, quas ſe adinueniſſe aſſeuerauerat, adhuc nobis ſint ignotae. Hic perſpicaciſſimus vir in doctrina numerorum primorum etiam non mediocriter laborauit, atque problema ſe digniſſimum olim *Walliſio* propoſuerat, quo modum requirebat, numerum primum dato quouis numero maiorem aſſignandi. Credebat quidem *Fermatius*, ſe huius problematis ſolutionem in poteſtate habere, dum affirmauerat, omnes numeros in hac forma $2^n + 1$ contentos, ſi quidem exponens n ipſe fuerit poteſtas binarii, eſſe numeros primos. Verum tamen eo erat candore, vt negaret, ſe huius aſſerti demonſtrationem habere, etiamſi de eius veritate minime dubitaret. Perſpicuum autem eſt, ſi haec forma $2^n + 1$, ſumendo pro n quasvis binarii poteſtates, ſemper numeros primos exhiberet, problema propoſitum perfecte fore ſolutum. Quocunque enim numero propoſito, non ſolum vna, ſed innumerabiles poteſtates bina-

binarii assignari poterunt, quae loco exponentis n positae praebiturae sint potestates 2^n dato illo numero maiores, ad quas si vnitas adiiceretur, haberentur vtique totidem numeri primi dato illo numero maiores. Hanc autem regulam a *Fermatio* prolatam veritati non esse consentaneam, iam ante plures annos animaduerti. Cum enim pro omnibus casibus inter centena millia subsistentibus satisfaceret, qui sunt:

$$2^1+1=3;\ 2^2+1=5;\ 2^4+1=17;\ 2^8+1=257;\ 2^{16}+1=65537$$

statim sequentem casum $2^{32}+1=4294967297$ non esse primum inueni, sed diuisibilem per numerum 641. Quare cum etiam de sequentibus maioribus numeris, ex hac formula natis, incerti simus, vtrum sint primi, nec nec? hinc nihil plane adiumenti consequimur ad problema memoratum soluendum. Ac primo quidem nullum est dubium, quin proposito numero quantumuis magno, infiniti adeo existant numeri primi illo maiores; postquam iam ab Euclide est demonstratum, omnium numerorum primorum multitudinem esse infinitam, etiamsi, vt ego ostendi, haec numerorum primorum multitudo se habeat ad multitudinem omnium prorsus numerorum, vt vnitas ad infinitum, seu potius, vt logarithmus numeri infiniti ad ipsum hunc numerum infinitum, quod posterius infinitum maius est, quam potestas quantumuis magna illius infiniti Solutionis quidem huius problematis compotes fieremus, si loco formulae 2^n+1 aliam formulam indefinitam detegere liceret, quae nonnisi numeros primos complecteretur; sed etiamsi fortasse talis reperiatur, quae vel centum numeros primos sup-

N 3 pe-

peditaret, tamen ei aeque parum confidere possemus pro sequentibus, nisi forte, quod autem vix est expectandum, firma demonstratio exhiberi queat. Nulla certe progressio algebraica datur, cuius omnes plane termini in infinitum crescentes futuri sint numeri primi. Sumto enim termino quocunque, inter sequentes semper infiniti termini eiusdem seriei assignari poterunt, quae omnes per illum diuidi queant, quod Theorema ita demonstro:

Theorema.

Nulla datur progressio algebraica, cuius omnes termini sint numeri primi.

Demonstratio.

Cum progressio sit algebraica, posito eius termino indici x respondente $= X$, erit:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \text{etc.}$$

Posito ergo termino indici a respondente $= A$, vt sit

$$A = \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4 + \zeta a^5 + \eta a^6 + \text{etc.}$$

si capiatur $x = nA + a$, fiet terminus isti indici respondens X vtique per A diuisibilis. Omnes ergo progressionis propositae termini, qui indicibus in hac forma $nA + a$ contentis respondent, non erunt numeri primi, neque ergo vlla huiusmodi progressio meros numeros primos complectetur. Q. E. D.

Verum etiamsi non omnes termini huiusmodi progressionis sint numeri primi, problemati tamen satisfieri possit, si modo inter eos infiniti dentur numeri primi, quorum indices certo quodam modo dignoscere lice-

liceret; veluti si eiusmodi daretur progressio, cuius omnes termini, quorum indices sunt numeri primi, ipsi essent numeri primi. Sed hoc modo quaerenda esset eiusmodi functio ipsius x, quae, quoties x fuerit numerus primus, ipsa quoque foret numerus primus, vel, quod eodem redit, regula desideraretur, cuius ope ex quouis numero primo proposito inueniri posset nouus numerus primus. At huius modi regulam profundissimae esse indaginis, quilibet in huius modi inuestigationibus vel leuiter versatus facile agnoscet, ita vt hinc nulla plane spes affulgeat, vnquam ad solutionem allati problematis *Fermatiani* perueniendi.

Certum igitur est, in hoc problemate nihil adhuc esse praestitum, postquam ipsius *Fermatii* conatus successu sint destituti. Atque adeo, cum tabula numerorum primorum nondum vltra centena millia habeatur extensa, problema sane iam non parum foret difficile, si modo numeri primi quaerantur, qui sint centenis millibus maiores; vel cum nuper prodierit tabula numerorum primorum vsque ad 101000 excurrens, si numeri primi quaerantur hunc terminum superantes. Neque enim ad hoc saltem problema soluendum alia via patere videtur, nisi vt more solito ex numeris vltra 101000 notatis omnes compositi expungantur, hoc est: omnes, qui per vllum numerum primum, radice quadrata minorem, diuisibiles deprehendentur; qui numeri enim his expunctis relinquentur, erunt numeri primi. Haec autem operatio instituenda plane foret eadem ratione, ac si ipsam tabulam numerorum primorum ad vlteriores limites continuare vellemus; quod opus propterea esset im-

immenſi laboris. Quodſi autem quis forte hunc laborem ſuſciperet, certe non eſſet expectandum, vt vltra millionem a quoquam produceretur, eoque exantlato omnino impoſſibile videretur, vllum numerum primum exhibere, qui eſſet millione maior.

Occurrit autem mihi methodus peculiaris, ex qua per calculum non admodum taedioſum plures ſum adeptus numeros, non ſolum centies millibus, ſed etiam millione maiores, quos eſſe primos certo aſſeuerare poſſum. Quoniam igitur in tam ardua inueſtigatione leuiores ſucceſſus non ſunt contemnendi, haud inutile fore ſpero, ſi iſthanc methodum meam expoſuero, praeſertim cum ipſa ex proprietatibus numerorum non ſpernendis ſit deriuata, quae etiam in aliis inueſtigationibus vſum inſignem habere poſſe videntur.

Deductus autem ſum ad hanc methodum per conſiderationem numerorum quadratorum vnitate auctorum, ſeu in hac formula $aa+1$ contentorum, in quibus, ſiquidem a ſit numerus par, plures numeros primos occurrere manifeſtum eſt, ſin autem a ſit numerus impar, ſemiſſis illius formulae $\frac{1}{2}(aa+1)$ plurimos quoque ſuppeditat numeros primos. Quaeſiui ergo omnes diuiſores numerorum in hac forma $aa+1$ contentorum, qui labor non adeo erat taedioſus, cum non opus eſſet diuiſionem per omnes numeros primos radice a minores tentare, propterea quod demonſtraui, atque id quidem poſt *Fermatium*, cuius autem demonſtratio pro deperdita eſt habenda, huiusmodi numeros $aa+1$ alios diuiſores non admittere, niſi qui ipſi ſint

ſint ſummae duorum quadratorum. Quare ſi numerus in hac forma $aa+1$ contentus habeat diuiſores, certo ſcio, hos diuiſores ſingulos in forma $pp+qq$ eſſe contentos. Cum deinde omnes numeri primi formae $4n+1$ ſint ſummae duorum quadratorum, numerorum autem primorum formae $4n-1$ nullus ſit duorum quadratorum ſumma, nullus certe numerus formae $4n-1$ erit diuiſor formae $aa+1$; ſed ſi ea habeat diuiſores primos, eos in hac forma $4n+1$ contineri neceſſe eſt. Conſideraui itaque omnes numeros primos formae $4n+1$, et ea quadrata primum inueſtigaui, quae vnitate aucta eſſent per quemuis horum numerorum primorum diuiſibilia, quo pacto omnes numeros formae $aa+1$ ſum adeptus, qui non ſunt numeri primi, reliquos ergo neceſſario primos eſſe oportet. Primum autem manifeſtum eſt, per binarium, qui eſt etiam ſumma duorum quadratorum, formam $aa+1$ eſſe diuiſibilem, quoties a fuerit numerus impar. Supereſt ergo, vt ii ipſius a valores indagentur, qui reddant formam $aa+1$ diuiſibilem per quemquam horum numerorum primorum 5, 13, 17, 29, 37, 41, etc. qui ipſi ſunt duorum quadratorum ſummae; quem in finem praemitto ſequens problema:

Problema I.

Propoſito numero primo formae $4n+1$, inuenire omnia quadrata, quae vnitate aucta per illum ſunt diuiſibilia.

Solutio.

Cum iſte numerus primus ſit ſumma duorum quadratorum, ſit $4n+1=p^2+q^2$, quadratum vero

 vnita-

vnitate auctum per illum diuisibile sit $aa+1$. Demonstraui autem, quando summa duorum quadratorum, veluti $aa+bb$, diuisibilis est per numerum primum $pp+qq$, semper dari duos huiusmodi numeros r et s, vt sit $a=pr+qs$ et $b=ps-qr$. Nostro casu ergo cum sit $bb=1$, necesse est, vt sit $ps-qr=\pm 1$: vnde perspicitur fractiones $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ proxime inter se convenire, ita vt earum differentia $\frac{ps-qr}{qs}$ minorem numeratorem, vnitati quippe aequalem, habere nequeat. Quare cum numeri p et q ex aequalitate $4n+1=pp+qq$ sint cogniti, formetur fractio $\frac{p}{q}$, quaeraturque in numeris minoribus fractio $\frac{r}{s}$ illi proxime aequalis, vt partibus per crucem multiplicatis productorum ps et qr differentia sit $=1$, id quod methodo a me alibi exposita facile fiet; tum ad fractionem $\frac{p}{q}$ inuenta hac fractione $\frac{r}{s}$, erit quadrati vnius quaesiti radix $a=pr+qs$, vel etiam $a=-pr-qs$. Tum vero si multiplum quodcunque diuisoris $4n+1$ addatur, habebitur quoque valor idoneus pro a. Generatim ergo erit $a=m(4n+1)$ $\pm(pr+qs)$, in qua forma continentur radices omnium quadratorum, quae vnitate aucta per numerum primum propositum $4n+1$ sunt diuisibilia. Q. E. I.

Scholion.

Quemadmodum autem data fractione $\frac{p}{q}$ aliam fractionem $\frac{r}{s}$ inueniri conueniat, quae ab illa tam parum discrepet, vt producta per crucem orta ps et qr vnitate tantum differant, alio loco ostendi. Scilicet pro numeris p et q eadem operatio institui debet, quae

vulgo

vulgo ad eorum maximum communem diuiforem inueniendum inftitui folet, tum ex quotis ordine fcriptis formentur fractiones, quales ex fractionibus continuis prodeunt, earumque vltima erit ipfa fractio $\frac{p}{q}$, penultima autem pro $\frac{r}{s}$ affumi poterit, eritque differentia inter producta ps et qr vnitati aequalis; propterea quod numeri p et q erunt inter fe primi, quoniam alias numerus $4n+1=pp+qq$ non foret primus. Inventa autem fractione $\frac{r}{s}$, manifeftum eft, eius loco quoque affumi poffe has fractiones $\frac{p+r}{q+s}$, $\frac{2p+r}{2q+s}$ et ingenere $\frac{mp+r}{mq+s}$; nam et haec fractio cum fractione $\frac{p}{q}$ comparata dat producta per crucem $mpq+qr$ et $mpq+ps$ vnitate differentia. Quod fi autem fractioni $\frac{p}{q}$ haec $\frac{mp+r}{mq+s}$ adiungatur, ex iis pro radice quadrati quaefiti obtinetur $a=mpp+pr+mqq+qs=m(4n+1)$ $+pr+qs$ ob $pp+qq=4n+1$. Seu cum numeri r et s quoque negatiue accipi queant, $a=m(4n+1)$ $\pm(pr+qs)$, quae eft ipfa forma generalis in folutione inuenta. Verum haec operatio commodiffime per exempla docebitur.

Exemplum 1.

Inuenire omnia quadrata, quae vnitate aucta fint per numerum primum 29 diuifibilia.

Sit a radix quadrata ex quadratis quaefitis, et cum 29 fit numerus primus formae $4n+1$, erit certe fumma duorum quadratorum, quae funt 25 et 4, ita vt ob $29=pp+qq=5^2+2^2$, fit $p=5$ et $q=2$,

O 2 vnde

vnde formatur iſta fractio $\frac{p}{q} = \frac{5}{2}$. Nunc inter numeros 5 et 2 inſtituatur operatio ad maximum communem diuiſorem inueſtigandum, quae ita ſe habebit:

$$\begin{array}{l} 2)\ 5\ (2 \\ \quad\underline{4} \\ \quad 1)\ 2\ (2 \\ \qquad\underline{2} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Sunt ergo quoti 2 et 2, ex quibus formantur fractiones ſequenti modo:

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2} \end{array}$$

eritque penultima $\frac{2}{1} = \frac{r}{s}$, ex his autem duabus vltimis fractionibus $\frac{2}{1}$ et $\frac{5}{2}$ valor idoneus pro a erit productum numeratorum $2 \cdot 5 = 10$ aucta producto denominatorum $1 \cdot 2 = 2$; vnde erit $a = 10 + 2 = 12$, et in genere $a = 29m \pm 12$; omniumque horum numerorum quadrata vnitate aucta per 29 erunt diuiſibilia. Quare omnes valores ipſius a in his duabus progreſſionibus arithmeticis continebuntur:

12, 41, 70, 99, 128, 157, 186, 215, 244, 273, etc.
17, 46, 75, 104, 133, 162, 191, 220, 249, 278, etc.

Exemplum 2.

Inuenire omnia quadrata, quae vnitate aucta fiant per numerum primum 617 diuiſibilia.

Cum

Cum sit $617 = 16^2 + 19^2$, statuatur $p = 19$ et $q = 16$, fiatque inter numeros 16 et 19 haec operatio:

$$\begin{array}{l}
16)\,19\,(1 \\
\quad\;\underline{16} \\
\quad\;\;3)\,16\,(5 \\
\qquad\;\;\underline{15} \\
\qquad\;\;\;1)\,3\,(3 \\
\qquad\qquad\underline{3} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Ex quotis 1, 5, 3 sequentes formentur fractiones:

$$\begin{array}{cccc} 1. & 5. & 3 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{6}{5}, & \frac{19}{16} \end{array}$$

quarum binae postremae dant numeratorum productum $= 114$

. . . . . at denominatorum productum $= 80$ vnde idoneus isque minimus valor ipsius a erit $= 194$ et generatim $a = 617m + 194$. Omnes ergo ipsius a valores in duabus sequentibus progressionibus arithmeticis comprehenduntur:

194, 811, 1428, 2045, 2662, 3279 etc.
423, 1040, 1657, 2274, 2891, 3508 etc.

Exemplum 3.

Inuenire omnia quadrata, quae vnitate aucta sint per numerum primum 1709 *diuisibilia.*

Cum ſit $1709 = 22^2 + 35^2$, inter numeros 22 et 35 ſequens inſtituatur operatio:

22) 35 (1
22
―
13) 22 (1
13
―
9) 13 (1
9
―
4) 9 (2
8
―
1) 4 (4
4
―
0

et ex quotis 1, 1, 1, 2, 4 formentur ſequentes fractiones.

$$\begin{array}{cccccc} & 1. & 1. & 1. & 2. & 4 \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{8}{5}, & \frac{35}{22} \end{array}$$

quarum duae vltimae dabunt pro vno ipſius a valore:

$$a = 8 . 35 + 5 . 22 = 390$$

ita vt omnes ipſius a valores ſatisfacientes ſint:

$$a = 1709m \pm 390$$

Coroll. 1.

Si numerus primus $4n+1$ fuerit ipſe quadratum vnitate auctum, veluti $4n+1 = p^2+1$, tum ob $q = 1$, ſequens operatio erit inſtituenda:

1) p (p
p

vni-

vnicus ergo habetur quotus p, ex quo naſcentur fractiones

$$\begin{array}{cc} & p \\ \frac{1}{0}, & \frac{p}{1} \end{array}$$

vnde fit $a = 1\, p + 0.\, 1 = p$, et generatim $a = m(4n+1) \pm p$.

Coroll. 2.

Si amborum quadratorum, quorum ſummae numerus primus $4n+1$ aequatur, radices vnitate differant, vt ſit $4n+1 = pp + (p-1)^2$, tum ob $q = p-1$ ſequens habebitur operatio:

$$\begin{array}{l} p-1)\ p\ \ (1 \\ \quad\ \underline{p-1} \\ \qquad\quad 1)\ p-1\ (p-1 \\ \qquad\qquad\ \underline{p-1} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Quoti ergo 1 et $p-1$ has dabunt fractiones:

$$\begin{array}{ccc} 1 & p-1 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{p}{p-1} \end{array}$$

vnde fit $a = 1.\, p + 1.\,(p-1) = 2p-1$, et in genere

$$a = (4n+1)\, m \pm (2p-1).$$

Coroll. 3.

Si quaerantur omnia quadrata, quae vnitate aucta ſint per numerum primum $2 = 1+1$ diuiſibilia, etſi 2 non eſt formae $4n+1$, tamen, quia $p = 1$, et $q = 1$, erit primo $a = 1$ per coroll. 1, hincque in genere $a = 2m \pm 1$. Vnde ſequitur, quod per ſe eſt manifeſtum, omnia

qua-

quadrata numerorum imparium, si vnitas addatur, fore per 2 diuisibilia.

Scholion 2.

Secundum hanc ergo regulam omnes numeros primos formae $4n+1$ tractaui, et postquam singulos in summam duorum quadratorum conuerti, quod semper et quidem vnico modo fieri potest, cuique formam generalem ipsius a, in qua radices omnium quadratorum, quae vnitate aucta per quemque numerum primum sint diuisibilia, adscripsi, vnde sequens nata est tabula:

Tabula omnium numerorum a

quorum quadrata vnitate aucta $aa+1$ sunt per quemlibet numerum primum formae $4n+1$ diuisibilia.

Numeri primi	Valor ipsius a
$2 = 1^2 + 2^2$	$a = 2m + 1$
$5 = 1^2 + 2^2$	$a = 5m + 2$
$13 = 2^2 + 3^2$	$a = 13m + 5$
$17 = 1^2 + 4^2$	$a = 17m + 4$
$29 = 2^2 + 5^2$	$a = 29m + 12$
$37 = 1^2 + 6^2$	$a = 37m + 6$
$41 = 4^2 + 5^2$	$a = 41m + 9$
$53 = 2^2 + 7^2$	$a = 53m + 23$
$61 = 5^2 + 6^2$	$a = 61m + 11$
$73 = 3^2 + 8^2$	$a = 73m + 27$
$89 = 5^2 + 8^2$	$a = 89m + 34$
$97 = 4^2 + 9^2$	$a = 97m + 22$

Numeri

Numeri primi	Valor ipsius a
$101 = 1^2 + 10^2$	$a = 101\,m \pm 10$
$109 = 3^2 + 10^2$	$a = 109\,m \pm 33$
$113 = 7^2 + 8^2$	$a = 113\,m \pm 15$
$137 = 4^2 + 11^2$	$a = 137\,m \pm 37$
$149 = 7^2 + 10^2$	$a = 149\,m \pm 44$
$157 = 6^2 + 11^2$	$a = 157\,m \pm 28$
$173 = 2^2 + 13^2$	$a = 173\,m \pm 80$
$181 = 9^2 + 10^2$	$a = 181\,m \pm 19$
$193 = 7^2 + 12^2$	$a = 193\,m \pm 81$
$197 = 1^2 + 14^2$	$a = 197\,m \pm 14$
$229 = 2^2 + 15^2$	$a = 229\,m \pm 107$
$233 = 8^2 + 13^2$	$a = 233\,m \pm 89$
$241 = 4^2 + 15^2$	$a = 241\,m \pm 64$
$257 = 1^2 + 16^2$	$a = 257\,m \pm 16$
$269 = 10^2 + 13^2$	$a = 269\,m \pm 82$
$277 = 9^2 + 14^2$	$a = 277\,m \pm 60$
$281 = 5^2 + 16^2$	$a = 281\,m \pm 53$
$293 = 2^2 + 17^2$	$a = 293\,m \pm 138$
$313 = 12^2 + 13^2$	$a = 313\,m \pm 25$
$317 = 11^2 + 14^2$	$a = 317\,m \pm 114$
$337 = 9^2 + 16^2$	$a = 337\,m \pm 148$
$349 = 5^2 + 18^2$	$a = 349\,m \pm 136$
$353 = 8^2 + 17^2$	$a = 353\,m \pm 42$
$373 = 7^2 + 18^2$	$a = 373\,m \pm 104$
$389 = 10^2 + 17^2$	$a = 389\,m \pm 115$
$397 = 6^2 + 19^2$	$a = 397\,m \pm 63$
$401 = 1^2 + 20^2$	$a = 401\,m \pm 20$
$409 = 3^2 + 20^2$	$a = 409\,m \pm 143$
$421 = 14^2 + 15^2$	$a = 421\,m \pm 29$

Numeri primi	Valor ipsius a
$433 = 12^2 + 17^2$	$a = 433\,m + 179$
$449 = 7^2 + 20^2$	$a = 449\,m \pm 67$
$457 = 4^2 + 21^2$	$a = 457\,m \pm 109$
$461 = 10^2 + 19^2$	$a = 461\,m \pm 48$
$509 = 5^2 + 22^2$	$a = 509\,m \pm 208$
$521 = 11^2 + 20^2$	$a = 521\,m \pm 235$
$541 = 10^2 + 21^2$	$a = 541\,m \pm 52$
$557 = 14^2 + 19^2$	$a = 557\,m \pm 118$
$569 = 13^2 + 20^2$	$a = 569\,m \pm 86$
$577 = 1^2 + 24^2$	$a = 577\,m \pm 24$
$593 = 8^2 + 23^2$	$a = 593\,m \pm 77$
$601 = 5^2 + 24^2$	$a = 601\,m \pm 125$
$613 = 17^2 + 18^2$	$a = 613\,m \pm 35$
$617 = 16^2 + 19^2$	$a = 617\,m \pm 194$
$641 = 4^2 + 25^2$	$a = 641\,m \pm 159$
$653 = 13^2 + 22^2$	$a = 653\,m \pm 144$
$661 = 6^2 + 25^2$	$a = 661\,m \pm 106$
$673 = 12^2 + 23^2$	$a = 673\,m \pm 58$
$677 = 1^2 + 26^2$	$a = 677\,m \pm 26$
$701 = 5^2 + 26^2$	$a = 701\,m \pm 135$
$709 = 15^2 + 22^2$	$a = 709\,m \pm 96$
$733 = 2^2 + 27^2$	$a = 733\,m \pm 353$
$757 = 9^2 + 26^2$	$a = 757\,m \pm 87$
$761 = 19^2 + 20^2$	$a = 761\,m \pm 39$
$769 = 12^2 + 25^2$	$a = 769\,m \pm 62$
$773 = 17^2 + 22^2$	$a = 773\,m \pm 317$
$797 = 11^2 + 26^2$	$a = 797\,m \pm 215$
$809 = 5^2 + 28^2$	$a = 809\,m \pm 318$
$821 = 14^2 + 25^2$	$a = 821\,m \pm 295$

Numeri

Numeris primi	Valor ipsius a
$829 = 10^2 + 27^2$	$a = 829\,m + 240$
$853 = 18^2 + 23^2$	$a = 853\,m + 333$
$857 = 4^2 + 29^2$	$a = 857\,m + 207$
$877 = 6^2 + 29^2$	$a = 877\,m + 151$
$881 = 16^2 + 25^2$	$a = 881\,m + 387$
$929 = 20^2 + 23^2$	$a = 929\,m + 324$
$937 = 19^2 + 24^2$	$a = 937\,m + 196$
$941 = 10^2 + 29^2$	$a = 941\,m + 97$
$953 = 13^2 + 28^2$	$a = 953\,m + 442$
$977 = 4^2 + 31^2$	$a = 977\,m + 252$
$997 = 6^2 + 31^2$	$a = 997\,m + 161$
$1009 = 15^2 + 28^2$	$a = 1009\,m + 469$
$1013 = 22^2 + 23^2$	$a = 1013\,m + 45$
$1021 = 11^2 + 30^2$	$a = 1021\,m + 255$
$1043 = 3^2 + 32^2$	$a = 1033\,m + 347$
$1039 = 5^2 + 32^2$	$a = 1049\,m + 426$
$1061 = 10^2 + 31^2$	$a = 1061\,m + 103$
$1069 = 13^2 + 30^2$	$a = 1069\,m + 249$
$1093 = 2^2 + 33^2$	$a = 1093\,m + 530$
$1097 = 16^2 + 29^2$	$a = 1097\,m + 341$
$1109 = 22^2 + 25^2$	$a = 1109\,m + 354$
$1117 = 21^2 + 26^2$	$a = 1117\,m + 214$
$1129 = 20^2 + 27^2$	$a = 1129\,m + 168$
$1153 = 8^2 + 33^2$	$a = 1153\,m + 140$
$1181 = 5^2 + 34^2$	$a = 1181\,m + 243$
$1193 = 13^2 + 32^2$	$a = 1193\,m + 186$
$1201 = 24^2 + 25^2$	$a = 1201\,m + 49$
$1213 = 22^2 + 27^2$	$a = 1223\,m + 495$
$1217 = 16^2 + 31^2$	$a = 1217\,m + 78$

Numeri primi	Valor ipſius a
$1229 = 2^2 + 35^2$	$a = 1229\,m + 597$
$1237 = 9^2 + 34^2$	$a = 1237\,m + 546$
$1249 = 15^2 + 32^2$	$a = 1249\,m + 585$
$1277 = 11^2 + 34^2$	$a = 1277\,m + 113$
$1289 = 8^2 + 35^2$	$a = 1289\,m + 479$
$1297 = 1^2 + 36^2$	$a = 1297\,m + 36$
$1301 = 25^2 + 26^2$	$a = 1301\,m + 51$
$1321 = 5^2 + 36^2$	$a = 1321\,m + 257$
$1361 = 20^2 + 31^2$	$a = 1361\,m + 614$
$1373 = 2^2 + 37^2$	$a = 1373\,m + 668$
$1381 = 15^2 + 33^2$	$a = 1381\,m + 366$
$1409 = 25^2 + 28^2$	$a = 1409\,m + 452$
$1429 = 23^2 + 30^2$	$a = 1429\,m + 620$
$1433 = 8^2 + 37^2$	$a = 1433\,m + 542$
$1453 = 3^2 + 38^2$	$a = 1453\,m + 497$
$1431 = 16^2 + 35^2$	$a = 1481\,m + 465$
$1489 = 20^2 + 33^2$	$a = 1389\,m + 225$
$1493 = 7^2 + 38^2$	$a = 1493\,m + 432$
$1549 = 18^2 + 35^2$	$a = 1549\,m + 88$
$1553 = 23^2 + 32^2$	$a = 1553\,m + 339$
$1597 = 21^2 + 34^2$	$a = 1597\,m + 610$
$1601 = 1^2 + 40^2$	$a = 1601\,m + 40$
$1609 = 3^2 + 40^2$	$a = 1609\,m + 523$
$1613 = 13^2 + 38^2$	$a = 1613\,m + 127$
$1621 = 10^2 + 39^2$	$a = 1621\,m + 166$
$1637 = 26^2 + 31^2$	$a = 1637\,m + 316$
$1657 = 19^2 + 36^2$	$a = 1657\,m + 783$
$1669 = 15^2 + 38^2$	$a = 1669\,m + 220$
$1693 = 18^2 + 37^2$	$a = 1693\,m + 92$

Numeri

Numeri primi	Valor ipſius a
$1697 = 4^2 + 41^2$	$a = 1097\,m \pm 414$
$1709 = 22^2 + 35^2$	$a = 1709\,m \pm 390$
$1721 = 11^2 + 40^2$	$a = 1721\,m \pm 473$
$1733 = 17^2 + 38^2$	$a = 1733\,m \pm 410$
$1741 = 29^2 + 30^2$	$a = 1741\,m \pm 59$
$1753 = 27^2 + 32^2$	$a = 1753\,m \pm 713$
$1777 = 16^2 + 39^2$	$a = 1777\,m \pm 775$
$1789 = 5^2 + 42^2$	$a = 1789\,m \pm 724$
$1801 = 24^2 + 35^2$	$a = 1801\,m \pm 824$
$1861 = 30^2 + 21^2$	$a = 1861\,m \pm 61$
$1873 = 28^2 + 33^2$	$a = 1873\,m \pm 737$
$1877 = 14^2 + 41^2$	$a = 1877\,m \pm 137$
$1889 = 17^2 + 40^2$	$a = 1889\,m \pm 331$
$1901 = 26^2 + 35^2$	$a = 1901\,m \pm 218$
$1913 = 8^2 + 43^2$	$a = 1913\,m \pm 712$
$1933 = 13^2 + 42^2$	$a = 1933\,m \pm 598$
$1949 = 10^2 + 43^2$	$a = 1949\,m \pm 589$
$1973 = 23^2 + 38^2$	$a = 1973\,m \pm 259$
$1993 = 12^2 + 43^2$	$a = 1993\,m \pm 834$
$1997 = 29^2 + 34^2$	$a = 1997\,m \pm 412$

Tabula ergo haec in ſe complectitur omnes numeros primos formae $4n + 1$ infra 2000 exiſtentes, eiusque ergo ope omnes numeri inueniri poſſunt, quorum quadrata vnitate aucta per vllum horum numerorum primorum ſint diuiſibilia. Eius ergo beneficio ſequens ſolui poterit problema:

Problema.

Omnium numerorum, qui vnitate excedunt numeros quadratos, aſſignare omnes diuiſores radicibus ipſorum quadratis minores.

Solutio.

Scribantur ordine omnes numeri ab vnitate ad 2000, quandoquidem praecedens tabula ad hunc terminum eſt producta, qui littera a deſignentur, ita pro quouis numeri inde nati $aa+1$ diuiſores ſint aſſignandi. Conſtat autem, hos numeros alios non eſſe habituros diuiſores primos, niſi formae $4n+1$, praecedens vero tabula omnes numeros a exhibet, quorum quadrata vnitate aucta fiunt per quemque numerum primum huius formae diuiſibilia. Verum pro quolibet numero $aa+1$ ſufficit notaſſe diuiſores primos radice a minores: quoniam his cognitis etiam diuiſores radice a maiores ſponte innoteſcunt. Quam ob rem ſingulis numeris a formae $2m+1$ adſcribatur binarius: quia eorum quadrata vnitate aucta ſunt per 2 diuiſibilia; tum numeris $a=5m+2$ adſcribatur 5, numeris $a=13m+5$ adſcribatur 13, numeris $a=17m+4$ adſcribatur 17, et ita porro; vbi quidem valores ipſius a minores ipſo numero primo propoſito omittuntur, quia tantum de diuiſoribus ipſo numero a minoribus quaeritur. Hoc ergo modo ſi ope tabulae praecedentis cuique numero a diuiſores conuenientes adſcribantur, obtinebuntur omnes diuiſores numeri $aa+1$ ipſa radice a minores. Q. E. I.

Coroll.

Coroll. 1.

Si ergo hoc modo numeri a relinquentur, quibus nullus diuiſor fuerit adſcriptus, hoc indicio erit, numeros $aa+1$ inde natos eſſe primos, nullos quippe diuiſores admittentes praeter vnitatem et ſe ipſos. Quibus igitur numeris a in tabula hoc modo condita nullus diuiſor fuerit adſcriptus, de iis certo affirmare poterimus, eorum quadrata vnitate aucta eſſe numeros primos.

Coroll. 2.

Quoniam igitur haec tabula pro numeris a faciſe ad 2000 extenditur, numeri inde nati $aa+1$ ad 4000000 exſurgent; vnde iſta tabula omnes numeros primos formae $aa+1$ exhibebit, qui 4 milliones non ſuperant, ſicque ex ea numeri primi non ſolum centenis millibus ſed etiam vno millione maiores depromi poterunt.

Coroll. 3.

Quibus autem numeris a vnicus diuiſor α fuerit adſcriptus, numeri inde nati $aa+1$ praeter vnitatem vnicum habebunt hunc diuiſorem α, radice a minorem; ideoque $\frac{aa+1}{\alpha}$ erit numerus primus. Ita quibus numeris a ſoles binarius fuerit adſcriptus, ex iis certo hos obtinemus numeros primos $\frac{aa+1}{2}$; atque adeo ex iſta tabula omnes numeri primi formae $\frac{aa+1}{2}$ limite 2000000 non maiores aſſignari poterunt.

Coroll.

Coroll. 4.

Simili modo omnes numeri a, quibus ſolus quinarius eſt adſcriptus, praebebunt omnes numeros primos formae $\frac{aa+1}{5}$, qui infra limitem 800000 continentur. Atque omnes numeri a, qui tantum diuiſorem 13 habebunt adſcriptum, praebebunt omnes numeros primos formae $\frac{aa+1}{13}$, infra limitem 307692 contentos.

Coroll. 5.

Qui autem numeri a duos tantum diuiſores α et β habebunt adſcriptos, id indicio erit, numeros $\frac{aa+1}{\alpha\beta}$ fore primos. Hinc quibus numeris a tantum duo diuiſores 2 et 5 fuerint adſcripti, ex iis reperientur omnes numeri primi formae $\frac{aa+1}{10}$, qui quidem limitem 400000 non ſuperabunt.

Scholion 1.

Verum vt hae concluſiones ſint certae, probe notandum eſt, inter numeros $aa+1$, qui ſunt per numerum primum $4n+1$ diuiſibiles, etiam eiusmodi numeros contineri, qui ſint per quadratum $(4n+1)^2$, vel etiam per cubum $(4n+1)^3$, altioresue poteſtates $(4n+1)^4$, $(4n+1)^5$ etc. diuiſibiles. Qnod quoties accidit, numero a non ſolum diuiſor $4n+1$, ſed eius ſumma poteſtas, per quam numerus $aa+1$ fuerit diviſibilis, adſcribi debebit, vt hoc modo omnes diuiſores primi numerorum $aa+1$ ipſa radice a minores obtineantur.. Si quidem diuiſor fuerit $=2$, nulla eius altior

altior poteſtas, veluti 4, 8, 16 etc. vnquam numeri $aa+1$ diuiſor eſſe poterit, id quod per ſe eſt manifeſtum, cum exiſtente a numero impari, forma $aa+1$ ſit numerus impariter par. At de numeris primis formae $4n+1$ dantur vtique eiusmodi quadrata, quae vnitate aucta ſint per quamuis eorum poteſtatem diuiſibilia, quos idcirco inueſtigari conueniet.

Scholion 2.

Cum autem ſit $4n+1=pp+qq$, erunt omnes quoque ipſius $4n+1$ poteſtates ſummae duorum quadratorum, et quidem pluribus modis, ex quibus vero id quadratorum par ſumi conueniet, quorum radices ſunt numeri primi inter ſe. Sic cum ſit in genere $(pp+qq)(rr+ss)=(pr+qs)^2+(ps-qr)^2$, erit

$$(4n+1)^2=(pp+qq)^2=4ppqq+(pp-qq)^2$$

$$(4n+1)^3=(pp+qq)^3=(p^3-3pqq)^2+(3ppq-q^3)^2$$

$$(4n+1)^4=(pp+qq)^4=(p^4-6ppqq+q^4)^2+(4p^3q-4pq^3)^2$$

Si ſimili modo, quo ante, valores ipſius a inueſtigentur, conficietur pro poteſtatibus numerorum primorum, quae infra terminum 2000 continentur, ſequens tabula:

Tabula omnium numerorum a,

quorum quadrata vnitate aucta $aa+1$ ſint per poteſtates numerorum primorum $4n+1$ diuiſibilia.

Poteſt. num. primor.	Valor ipſius a
$5^2 = 3^2 + 4^2$	$a = 25\,m + 7$
$5^3 = 2^2 + 11^2$	$a = 125\,m + 57$
$5^4 = 7^2 + 24^2$	$a = 625\,m + 182$
$5^5 = 38^2 + 41^2$	$a = 3125\,m + 1068$
$13^2 = 5^2 + 12^2$	$a = 169\,m + 70$
$13^3 = 9^2 + 46^2$	$a = 2197\,m + 239$
$13^4 = 119^2 + 120^2$	$a = 13^4 m + 239$
$17^2 = 8^2 + 15^2$	$a = 289\,m + 38$
$17^3 = 47^2 + 52^2$	$a = 17^3 m + 1985$
$29^2 = 20^2 + 21^2$	$a = 841\,m + 41$
$37^2 = 12^2 + 35^2$	$a = 1369\,m + 117$
$41^2 = 9^2 + 40^2$	$a = 1681\,m + 378$
$53^2 = 28^2 + 45^2$	$a = 53^2 m + 500$
$61^2 = 11^2 + 60^2$	$a = 61^2 m + 682$
$73^2 = 48^2 + 55^2$	$a = 73^2 m + 776$
$89^2 = 39^2 + 80^2$	$a = 89^2 m + 3861$
$97^2 = 65^2 + 72^2$	$a = 97^2 m + 4052$
$101^2 = 20^2 + 99^2$	$a = 101^2 m + 515$
$109^2 = 60^2 + 91^2$	$a = 109^2 m + 5744$
$113^2 = 15^2 + 112^2$	$a = 113^2 m + 1710$
$137^2 = 88^2 + 105^2$	$a = 137^2 m + 6613$
$149^2 = 51^2 + 140^2$	$a = 149^2 m + 1744$
$197^2 = 28^2 + 95^2$	$a = 197^2 m + 1393$
$257^2 = 32^2 + 255^2$	$a = 257^2 m + 2072$

Hic

His itaque ſubſidiis hic ſubiunctam conſtruxi tabulam, ex qua ſtatim pro ſingulis numeris a omnes diuiſores formae $aa+1$ habentur. Hanc quidem tabulam non vltra 1500 in radicibus continuaui, ſed ope harum formularum facile ad 2000 vsque progredi licebit.

Ex hac autem tabula iam plures numeri primi formae $aa+1$ deſumi poterunt, qui non ſolum centenis millibus, ſed etiam vno millione ſint maiores: deinde etiam numeri primi formae $\frac{aa+1}{2}$ et $\frac{aa+1}{6}$ item $\frac{aa+1}{10}$ quos in ſequentibus tabellis exhibebo.

Numeri primi formae $aa+1$.

Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$
1	2	66	4357	156	24337
2	5	74	5477	160	25601
4	17	84	7057	170	28901
6	37	90	8101	176	30977
10	101	94	8837	180	32401
14	197	110	12101	184	33857
16	257	116	13457	204	41617
20	401	120	14401	206	42437
24	577	124	15377	210	44101
26	677	126	15877	224	50177
36	1297	130	16901	230	52901
40	1601	134	17957	236	55697
54	2917	146	21317	240	57601
56	3137	150	22501	250	62501

Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$
256	65537	536	287297	826	682277
260	67601	544	295937	860	739601
264	69697	556	309137	864	746497
270	72901	570	324901	890	792101
280	78401	576	331777	906	820837
284	80657	584	341057	910	828101
300	90001	594	352837	920	846401
306	93637	634	401957	930	864901
314	98597	636	404497	936	876097
326	106277	644	414737	946	894917
340	115601	646	417317	950	902501
350	122501	654	427717	960	921601
384	147457	674	454277	966	933157
386	148997	680	462401	986	972197
396	156817	686	470597	1004	1008017
400	160001	690	476101	1010	1020101
406	164837	696	484417	1036	1073297
420	176401	700	490001	1054	1110917
430	184901	704	495617	1060	1123601
436	190097	714	509797	1066	1136357
440	193601	716	512657	1070	1144901
444	197137	740	547601	1094	1196837
464	215297	750	562501	1096	1201217
466	217157	760	577601	1106	1223237
470	220901	764	583697	1124	1263377
474	224677	780	608401	1140	1299601
490	240101	784	614657	1144	1308737
496	246017	816	665857	1146	1313317

Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$
1150	1322501	1294	1674437	1394	1943237
1156	1336337	1306	1705637	1406	1976837
1174	1378277	1314	1726597	1410	1988101
1176	1382977	1316	1731857	1416	2005057
1184	1401857	1320	1742401	1420	2016401
1210	1464101	1324	1752977	1430	2044901
1234	1522757	1340	1795601	1434	2056351
1244	1547537	1350	1822501	1440	2073601
1246	1552517	1354	1833317	1456	2119937
1274	1623077	1366	1865957	1460	2131601
1276	1628177	1374	1887877	1494	2232037
1290	1664101	1376	1893377		

Habentur ergo hic 112 numeri primi maiores quam 100000 et 49 numeri primi millionem ſuperantes.

Praeterea autem plures numeri primi formarum $\frac{aa+1}{2}$, $\frac{aa+1}{5}$, $\frac{aa+1}{10}$ aſſignari poſſunt, qui etiam centena millia ſuperant; vt ex ſequentibus perſpicere licet:

Valores numeri a, quibus forma $\frac{aa+1}{2}$ fit numerus primus.

1, 3, 5, 9, 11, 15, 19, 25, 29, 35, 39, 45, 49, 51, 59, 61, 65, 69, 71, 79, 85, 95

101, 121, 131, 139, 141, 145, 159, 165, 169, 171, 175, 181, 195, 199

201, 205, 209, 219, 221, 231, 245, 261, 271, 275, 279, 289, 299

309, 315, 321, 325, 329, 335, 345, 349, 371, 375, 379, 391, 399
405, 409, 415, 425, 435, 441, 445, 449, 451, 459, 461, 471
519, 521, 529, 535, 545, 559, 569, 571, 575, 579, 581, 595
609, 631, 639, 641, 649, 661, 669, 685, 689, 695, 699
711, 715, 739, 745, 751, 779, 781, 791, 799
815, 819, 821, 841, 855, 861, 869, 875, 881, 885
901, 909, 921, 925, 929, 935, 949, 951, 955, 959, 979, 981, 985, 989, 991
1001, 1011, 1025, 1029, 1031, 1039, 1051, 1055, 1069, 1081, 1091, 1095, 1099
1111, 1125, 1129, 1151, 1155, 1161, 1171, 1179, 1181, 1185, 1199
1205, 1219, 1225, 1241, 1251, 1255, 1265, 1281, 1285, 1299
1311, 1315, 1329, 1345, 1349, 1359, 1361, 1389, 1391
1405, 1411, 1419, 1421, 1439, 1459, 1465, 1469, 1489, 1495, 1499

Valores numeri a, quibus forma $\frac{aa+1}{5}$ fit numerus primus.

2, 8, 12, 22, 28, 42, 48, 52, 58, 62, 78, 88, 92
102, 108, 152, 158, 178, 188, 198
202, 222, 238, 248, 258, 262, 272, 292, 298
308, 312, 328, 352, 358, 362, 388
402, 422, 428, 458, 462, 478, 488, 492
508, 522, 558, 572, 588

602

602, 622, 628, 638, 652, 662, 692, 698
702, 728, 738. 758, 792
828, 838, 842, 848, 862, 872, 898
908, 912 942, 962, 972, 978, 988
1008, 1062, 1072, 1078, 1088
1108, 1112, 1138, 1192
1208, 1238, 1272, 1278, 1298
1312, 1342, 1358, 1372, 1378
1402, 1442, 1452, 1472, 1488, 1498

Valores numeri a, quibus forma $\frac{aa+1}{10}$ fit numerus primus.

3, 7, 13, 17, 23, 27, 33, 37, 53, 63, 67, 77, 87, 97
103, 113, 127, 137, 147, 153, 163, 167, 197
223, 227, 247, 263 267, 277, 283, 287, 297
303, 323, 347, 363, 367, 373, 383, 397
417, 427, 433, 453
503, 513, 517, 527, 533, 537, 547, 553, 573, 587
617, 627, 637, 653 673, 677, 683
753, 763, 773, 777, 797
817, 823, 833, 847, 867, 873, 877, 883
913, 917, 923 927, 933, 937, 947, 953, 963, 997
1047, 1053, 1063, 1073
1103, 1117, 1137, 1147, 1163, 1167, 1173, 1187, 1197
1213, 1233, 1247, 1273
1337, 1367, 1377, 1387, 1397
1413, 1417, 1423, 1447, 1473, 1497

Hinc autem iterum 9 numeri primi supra 1000000 obtinentur, ex forma scilicet $\frac{aa+1}{2}$, quando $a > 1414$.

a

a	Diuisores ipsius $aa+1$	a	Diuisores ipsius $aa+1$
1	2	30	17. 53
2	5	31	2. 13. 37
3	2. 5	32	5^2. 41
4	17	33	2. 5. 109
5	2 13	34	13. 89
6	37	35	2. 613
7	2. 5^2	36	1297
8	5. 13	37	2. 5. 137
9	2. 41	38	5. 17^2
10	101	39	2. 761
11	2. 61	40	1601
12	5. 29	41	2. 29^2
13	2. 5. 17	42	5. 353
14	197.	43	2. 5^2. 37
15	2. 113	44	13. 149
16	257	45	2. 1013
17	2. 5. 29	46	29. 73
18	5^2. 13	47	2. 5 13 17
19	2. 181	48	5. 461
20	401	49	2. 1201
21	2. 13. 17	50	41 61
22	5. 97	51	2. 1301
23	2. 5 53	52	5 541
24	577	53	2. 5 281
25	2. 313	54	2917
26	677	55	2. 17 89
27	2 5. 73	56	3137
28	5 157	57	2. 5^3. 13
29	2. 421	58	5. 673

	Diuisores ipsius $aa+1$
59	2. 1741
60	13. 277
61	2. 1861
62	5. 769
63	2. 5. 397
64	17. 241
65	2. 2113
66	4357
67	2. 5. 449
68	5^3. 37
69	2. 2381
70	13^2. 29
71	2. 2521
72	5. 17. 61
73	2. 5. 13. 41
74	
75	2. 29. 97
76	53. 109
77	2. 5 593
78	5
79	2
80	37. 173
81	2. 17
82	5^2. 193. 269
83	2. 5. 13. 53
84	
85	2
86	13. 569
87	2. 5

	Diuisores ipsius $aa+1$
88	5
89	2. 17. 233
90	
91	2. 41. 101
92	5
93	2. 5^2. 173
94	
95	2
96	13. 709
97	2. 5
98	5. 17. 113
99	2. $13^2$29
100	73. 137
101	2
102	5
103	2. 5
104	29
105	2. 37
106	17
107	2. 5^2
108	5
109	2. 13
110	
111	2. 61. 101
112	5. 13
113	2. 5
114	41
115	2. 17
116	

	Diuisores ipsius $aa+1$
117	2. 5. 37^2
118	5^2
119	2. 73. 97
120	
121	2
122	5. 13
123	2. 5. 17. 89
124	
125	2. 13
126	
127	2. 5.
128	5. 29. 113
129	2. 53
130	
131	2
132	5^2. 17. 41
133	2. 5. 29. 61
134	
135	2. 13
136	53
137	2. 5
138	5. 13
139	2
140	17
141	2
142	5. 37. 109
143	2 5^2
144	89
145	2

	Diuisores ipsius $aa+1$
146	
147	2. 5
148	5. 13
149	2. 17
150	
151	2. 13
152	5
153	2. 5
154	37
155	2. 41
156	
157	2. 5^2. 17. 29
158	5
159	2
160	
161	2. 13
162	5. 29
163	2 5
164	13
165	2
166	17
167	2. 5
168	5^2
169	2
170	
171	2
172	5. 61. 97
173	2. 5. 41. 73
174	13. 17. 137

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
175	2	203	2. 5. 13
176		204	
177	2. 5. 13	205	2
178	5	206	
179	2. 37	207	2. 5^2
180		208	5. 17
181	2	209	2
182	5^4. 53	210	
183	2. 5. 17	211	2. 113. 197
184		212	5. 89. 101
185	2. 109. 157	213	2. 5. 13
186	29	214	41
187	2. 5. 13	215	2. 29
188	5	216	13. 37. 97
189	2. 53	217	2. 5. 17
190	13	218	5^2
191	2. 17. 29. 37	219	2
192	5. 73. 101	220	29
193	2. 5^2. 149	221	2
194	61	222	5
195	2	223	2. 5
196	41	224	
197	2. 5	225	2. 17
198	5	226	13
199	2	227	2. 5
200	13. 17. 181	228	5. 37
201	2	229	2. 13
202	5	230	
		231	2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
232	5^2	261	2
233	2. 5. 61. 89	262	5
234	17	263	2. 5
235	2. 53	264	
236		265	2. 13. 37. 73
237	2. 5. 41. 137	266	173
238	5	267	2. 5
239	2. 13^4	268	5^2. 13^2. 17
240		269	2. 97
241	2. 113	270	
242	5. 13. 17. 53	271	2
243	2. 5^2	272	5
244	29	273	2. 5. 29. 257
245	2	274	193
246	73	275	2
247	2. 5	276	17
248	5	277	2. 5
249	2. 29	278	5. 13. 29. 41
250		279	2
251	2. 17^2. 109	280	
252	5. 13	281	2. 13
253	2. 5. 37. 173	282	5^2
254	149	283	2. 5
255	2. 13. 41. 61	284	
256		285	2. 17
257	2. 5^2	286	157
258	5	287	2. 5
259	2. 17	288	5. 53
260		289	2

	Diuisores ipsius $aa+1$
290	37
291	2. 13
292	5
293	2. 5^2. 17. 101
294	13. 61. 109
295	2. 53
296	41
297	2. 5
298	5
299	2
300	
301	2. 89
302	5. 17. 37. 29
303	2. 5
304	13
305	2. 193. 241
306	
307	2. 5^3. 13. 29
308	5
309	2
310	17
311	2. 137
312	5
313	2. 5. 97. 101
314	
315	2
316	61
317	2. 5. 13
318	5^3

	Diuisores ipsius $aa+1$
319	2. 17. 41. 73
320	13
321	2
322	5. 89. 233
323	2. 5
324	113
325	2
326	
327	2. 5. 17^2. 37
328	5
329	2
330	13
331	2. 29
332	5^2
333	2. 5. 13
334	281
335	2
336	17. 229. 29
337	2. 5. 41. 277
338	5. 73. 313
339	2. 37
340	
341	2. 53
342	5. 149. 157
343	2. 5^2. 13. 181
344	17
345	2
346	13
347	2. 5

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
348	5. 53	377	2. 5. 61. 233
349	2	378	5. 17. 41^2
350		379	2
351	2. 229. 269	380	197
352	5.	381	2. 181
353	2. 5. 17	382	5^2. 13
354	113	383	2. 5
355	2. 61	384	
356	13	385	2. 13
357	2. 5^2	386	
358	5	387	2 5. 17
359	2. 13	388	5
360	41. 109. 29	389	2. 29
361	2. 17	390	89
362	5	391	2
363	2. 5	392	5. 73
364	37	393	2. 5^2
365	2. 29	394	53 101. 29
366	97	395	2. 13. 17. 353
367	2. 5	396	
368	5^2	397	2. 5
369	2. 13	398	5. 13
370	17	399	2
371	2	400	
372	5. 13	401	2. 37. 41. 53
373	2. 5	402	5
374	137	403	2. 5. 109. 149
375	2	404	17
376	37	405	2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
406		435	2
407	$2.\ 5^2$	436	
408	$5.\ 13^2.\ 197$	437	$2.\ 5.\ 13^2.\ 113$
409	2	438	5. 17. 37. 61
410	97	439	2. 173
411	2. 13. 73. 89	440	
412	5. 17	441	2
413	2. 5. 37	442	5. 41
414	101	443	$2.\ 5^4.\ 157$
415	2	444	
416	61	445	2
417	2. 5	446	17
418	$5^2.\ 29.\ 241$	447	2. 5. 13. 53. 29
419	2. 41	448	5. 137. 293
420		449	2
421	2. 13. 17. 401	450	13. 37. 421
422	5	451	2
423	2. 5. 29	452	5. 29
424	13	453	2: 5
425	2	454	53
426	173	455	2. 17
427	2. 5	456	269
428	5	457	$3.\ 5^2$
429	2. 17	458	5
430		459	2
431	2. 293. 317	460	13. 41. 397
432	5^3	461	2
433	2. 5	462	5
434	13	463	2. 5. 13. 17. 97

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
464		493	2. 5^2
465	2. 73	494	277
466		495	2. 101
467	2. 5. 113. 193	496	
468	5^2	497	2. 5. 17
469	2. 109	498	5. 193. 257
470		499	2. 13. 61. 157
471	2	500	53^2. 89
472	5. 17	501	2. 41
473	2. 5. 13	502	5. 13
474		503	2. 5
475	2. 37	504	389
476	13. 29	505	2. 29
477	2. 5. 61. 373	506	17
478	5	507	2. 5^2. 97
479	2. 89	508	5.
480	17	509	2. 281. 461
481	2. 29	510	29
482	5^2	511	2. 137
483	2. 5. 41	512	5. 13. 37. 109
484	73	513	2. 5
485	2. 337 349	514	17
486	13	515	2. 13. 101^2
487	2. 5. 37	516	449
488	5	517	2. 5
489	2. 13. 17	518	5^2
490		519	2
491	2. 149	520	317
492	5	521	2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
522	5.	551	2. 13
523	2. 5. 17	552	5. 149. 409
524	37. 41. 181	553	2. 5
525	2. 13	554	13
526	337	555	2. 233
527	2. 5	556	
528	5. 13	557	2. 5^3. 17. 73
529	2	558	5
530	257	559	2
531	2. 17	560	61. 97
532	5^2	561	2. 37
533	2. 5	562	5. 181 349
534	29	563	2. 5. 29
535	2	564	13
536		565	2. 17. 41. 229
537	2. 5	566	457
538	5. 13. 61. 73	567	2. 5. 13
539	2. 29	568	5^3. 89. 29
540	17^2	569	2
541	2. 13	570	
542	5. 41	571	2
543	2. 5^2	572	5
544		573	2. 5
545	2	574	17
546	241	575	2
547	2. 5	576	
548	5. 17	577	2. 5. 13^2. 197
549	2. 37	578	5. 109
550	113	579	2

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
580	13. 113 229	609	2
581	2	610	233
582	5^2. 17	611	2. 73
583	2. 5. 41	612	5. 173. 433
584		613	2. 5. 53
585	2. 137	614	277
586	37	615	2. 281
587	2. 5	616	13. 17^2. 101
588	5	617	2. 5
589	2. 89	618	5^2
590	13	619	2. 13
591	2. 17	620	269
592	5. 29	621	2. 61. 109. 29
593	2. 5^2. 13. 541.	622	5
594		623	2. 5. 37
595	2	624	41
596	101	625	2. 17
597	2. 5. 29	626	29
598	5. 37	627	2. 5
599	2. 17. 61. 173	628	5
600	157	629	2. 13
601	2. 313. 577	630	73
602	5	631	2
603	2. 5. 13	632	5^2. 13
604	97	633	2. 5. 17
605	2. 197	634	
606	13^2. 41. 53	635	2. 37
607	2 5^2	636	
608	5. 17	637	2. 5

	Diuisores ipsius $aa+1$
638	5
639	2
640	149
641	2
642	5. 13. 17. 373
643	$2. 5^2$
644	
645	2. 13
646	
647	2. 5. 41
648	5. 137. 613
649	2
650	17. 29
651	2. 313
652	5
653	2. 5
654	
655	2. 13. 569. 29
656	157
657	$2. 5^2. 89. 97$
658	5. 13
659	2. 17. 53. 241
660	37. 61, 193
661	2
662	5
663	2. 5. 113. 389
664	353
665	2. 41
666	53

	Diuisores ipsius $aa+1$
667	2. 5. 17
668	$5^2. 13$
669	2
670	593
671	2. 13
672	5. 37
673	2. 5
674	
675	2. 409. 557
676	17
677	2. 5
678	5. 89
679	2. 29
680	
681	2. 13
682	$5^3. 61^2$
683	2. 5
684	13. 17. 73. 29
685	2
686	
687	2. 5. 109. 433
688	5. 41
689	2
690	
691	2. 193
692	5
693	$2. 5^3. 12. 113$
694	13
695	2

	Diuifores ipfius $aa+1$		Diuifores ipfius $aa+1$
696		725	2. 269
697	2. 5. 13. 37. 101	726	601
698	5	727	2. 5. 17
699	2	728	5
700		729	2. 41
701	2. 17. 97. 149	730	109
702	5	731	2. 397. 673
703	2. 5. 73. 677	732	5^2
704		733	2. 5. 29
705	2. 181	734	37
706	41	735	2. 17
707	2. 5^2. 13	736	13
708	5. 29	737	2. 5. 13
709	2. 37	738	5
710	13. 17	739	2
711	2	740	
712	5. 53	741	2. 293
713	2. 5. 29	742	5. 29
714		743	2. 5^2. 61. 181
715	2	744	17
716		745	2
717	2. 5. 101 509	746	13^2. 37. 89
718	5^2. 17	747	2. 5. 41
719	2. 53	748	5. 317. 353
720	13	749	2. 13
721	2. 61	750	
722	5. 137	751	2
723	2. 5. 13	752	5. 17
724	293	753	2. 5

	Diuisores ipsius $aa+1$
754	97
755	2. 257
756	521
757	2. 5^2. 73. 157
758	5
759	2. 13
760	
761	2. 17
762	5. 13
763	2. 5
764	
765	2. 53
766	29
767	2. 5. 89. 661
768	5^2
769	2. 17
770	41
771	2. 37. 277. 29
772	5. 13. 53. 173
773	2. 5
774	197
775	2. 13^3
776	73^2. 113
777	2. 5
778	5. 17
779	2
780	
781	2.
782	5^2. 61. 401

	Diuisores ipsius $aa+1$
783	2. 5. 37
784	
785	2. 13. 137 173
786	17
787	2. 5. 241. 257
788	5. 13. 41. 233
789	2. 149
790	281
791	2
792	5
793	2. 5^2
794	229
795	2. 17. 29. 641
796	109
797	2. 5
798	5. 13. 97. 101
799	2
800	29^2. 761
801	2. 13
802	5. 197. 653
803	2. 5. 17
804	61
805	2. 457. 709
806	113
807	2. 5^4. 521
808	5. 37
809	2. 229
810	509
811	2. 13. 41. 617

	Diuisores ipsius $aa+1$
812	5. 17
813	2. 5. 157. 421
814	13
815	2
816	
817	2. 5
818	5^3. 53. 101
819	2
820	17. 37
821	2
822	5. 337. 401
823	2. 5
824	13 29
825	2. 53
826	
827	2. 5. 13
828	5
829	2. 17^2. 29. 41
830	73
831	2. 449. 769
832	5^2
833	2. 5
834	349
835	2. 89
836	701
837	2. 5. 13. 17. 317
838	5
839	2. 109
840	13

	Diuisores ipsius $aa+1$
841	2
842	5
843	2. 5^2. 61. 233
844	757
845	2. 37
846	17
847	2. 5
848	5
849	2. 73
850	13. 149. 373
851	2. 97
852	5. 41
853	2. 5. 13. 29. 193
854	17
855	2
856	89
857	2. 5^2. 37. 397
858	5. 29
859	2. 137
860	
861	2
862	5
863	2. 5. 13. 17. 337
864	
865	2. 61
866	13
867	2. 5
868	5^2
869	2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
870	41	899	2. 101
871	2. 17. 53. 421	900	241
872	5	901	2
873	2. 5	902	5. 13
874	461	903	2. 5. 73
875	2	904	61
876	13	905	2. 13. 17^2. 109
877	2. 5	906	
878	5. 53	907	2. 5^2
879	2. 13	908	5
880	17	909	2
881	2	910	
882	5^2. 29^2. 37	911	2. 41. 349. 29
883	2. 5	912	5
884	193	913	2. 5
885	2	914	17. 157. 331
886	181	915	2. 13^2
887	2. 5. 29	916	29
888	5. 17	917	2. 5
889	2. 13. 113. 269	918	5^2. 13.
890		919	2. 37. 101. 113
891	2. 277	920	
892	5. 13	921	2
893	2. 5^2. 41. 389	922	5. 17. 73. 137
894	37	923	2. 5
895	2. 97	924	53. 89. 181
896	281	925	2
897	2. 5. 17	926	61
898	5	927	2. 5

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
928	5. 13	957	2. 5^2. 13
929	2	958	5. 173
930		959	2
931	2. 13. 17. 37. 53	960	
932	5^3	961	2. 409
933	2. 5	962	5
934	41	963	2. 5
935	2	964	313
936		965	2. 17. 61. 449
937	2. 5	966	
938	5. 149	967	2. 5. 13
939	2. 17	968	5^2. 37
940	29	969	2. 29
941	2. 13	970	13. 157. 461
942	5	971	2. 197
943	2. 5^3	972	5
944	13^2	973	2. 5. 17
945	2. 89. 173. 29	974	29
946		975	2. 41
947	2. 5	976	73
948	5. 17. 97. 109	977	2. 5. 53
949	2	978	5
950		979	2
951	2	980	13
952	5. 41	981	2
953	2. 5	982	5^2. 17
954	13	983	2. 5. 13
955	2	984	53
956	17. 37	985	2

986

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
986		1015	2. 373
987	2. 5. 61	1016	17. 41
988	5	1017	2. 5. 293. 353
989	2	1018	5^2
990	17	1019	2. 13
991	2	1020	101
992	5. 97	1021	2. 233
993	2. 5^2. 13. 37. 41	1022	5. 13
994	269	1023	2. 5. 229. 457
995	2. 73	1024	17
996	13 137. 557	1025	2
997	2. 5	1026	61
998	5. 29	1027	2. 5. 29
999	2. 17. 149. 197	1028	5 241. 877
1000	101	1029	2
1001	2	1030	37. 53. 541
1002	5. 113	1031	2
1003	2. 5. 29	1032	5^2. 13 29. 113
1004		1033	2. 5. 17
1005	2. 37	1034	41. 89. 293
1006	13	1035	2. 13
1007	2. 5^2. 17	1036	
1008	5	1037	2 5 53
1009	2. 13	1038	5. 229. 941
1010		1039	2
1011	2	1040	617
1012	5. 257. 797	1041	2. 17
1013	2. 5. 89	1042	5. 37
1014	109	1043	2. 5^2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
1044	257	1073	2. 5
1045	2. 13. 97. 433	1074	13
1046	193	1075	2. 17. 41. 829
1047	2. 5	1076	233
1048	5. 13. 61. 277	1077	2. 5. 193. 601
1049	2. 73	1078	5
1050	17	1079	2. 37
1051	2	1080	773
1052	5. 389. 569	1081	2
1053	2. 5	1082	5^2
1054		1083	2. 5. 53
1055	2	1084	13^2. 17. 409
1056	29	1085	2. 29
1057	2. 5^3. 41. 109	1086	733
1058	5. 13. 17. 1013	1087	2. 5. 13. 61. 149
1059	2. 137	1088	5
1060		1089	2. 97
1061	2. 13. 29	1090	29. 53
1062	5	1091	2
1063	2. 5	1092	5 17
1064	857	1093	2. 5^2
1065	2. 317	1094	
1066		1095	2
1067	2. 5. 17. 37. 181	1096	
1068	5^5. 73	1097	2. 5. 13
1069	2	1098	5. 41
1070		1099	2
1071	2. 13. 157. 281	1100	13
1072	5	1101	2. 17. 101. 353

1102

	Diuifores ipfius $aa+1$		Diuifores ipfius $aa+1$
1102	5. 89	1131	2. 173
3	2. 5	32	5^2
4	37	33	2. 5. 137. 937
5	2. 181	34	541
6		35	2. 17
7	2. 5^2	36	13. 53
8	5	37	2. 5
9	2. 17. 61. 593	38	5
1110	13	39	2. 13. 41
11	2	1140	
12	5	41	2. 37 73. 241
13	2. 5. 13^2. 733	42	5. 97
14	29	43	2. 5^2. 17. 29. 53
15	2. 113	44	
16	37. 41. 821	45	2. 113
17	2. 5	46	
18	5^2. 17^2. 173	47	2. 5
19	2. 29	48	5. 29. 61. 149
1120	433	49	2. 13
21	2. 101	1150	
22	5. 73	51	2
23	2. 5. 13. 89. 109	52	5. 13. 17
24		53	2. 5. 37
25	2	54	317
26	13. 17	55	2
27	2. 5. 157 809	56	
28	5. 397. 641	57	2. 5^2. 41. 653
29	2	58	5. 269 997
1130	577	59	2. 337

	Diuisores ipsius $aa+1$
1160	17
61	2
62	5. 13
63	2. 5
64	1061
65	2. 13
66	109
67	2. 5
68	5^2. 197. 277
69	2. 17
1170	61
71	2
72	5. 29
73	2. 5
74	
75	2. 13
76	
77	2. 5. 17 29. 281
78	5. 13. 37. 577
79	2.
1180	41
81	2
82	5^3
83	2. 5. 349. 401
84	
85	2
86	17. 97. 853
87	2. 5
88	5. 13

	Diuisores ipsius $aa+1$
89	2. 53
1190	37
91	2. 13. 89. 613
92	5
93	2. 5^3
94	17^2
95	2. 73
96	53. 137. 197
97	2. 5
98	5. 41
99	2.
1200	337
1	2. 13. 29
2	5. 101
3	2. 5. 17
4	13
5	2
6	29
7	2. 5^2
8	5
9	2. 61
1210	
11	2. 17
12	5 89
13	2. 5
14	13. 73
15	2. 37
16	661
17	2. 5. 13

a	Diuisores ipsius $aa+1$	a	Diuisores ipsius $aa+1$
18	5^2	47	2. 5
19	2	48	5. 181
1220	17	49	2. 53
21	2. 41	1250	1201
22	5. 101	51	2
23	2. 5. 373. 401	52	5. 37^2. 229
24	569	53	2. 5. 13^2 929
25	2	54	17. 233. 397
26	509	55	2
27	2. 5. 13. 37. 313	56	13
28	5. 17. 113. 157	57	2. 5^2
29	2. 773. 977	58	5. 113
1230	13. 29	59	2. 29
31	2. 61	1260	349
32	5^2. 109. 557	61	2. 613
33	2. 5	62	5. 17. 41. 457
34		63	2. 5. 269. 593
35	2. 29	64	29. 37
36	149	65	2
37	2. 5. 17	66	13
38	5	67	2. 5. 229. 701
39	2. 41. 97. 193	68	5^2. 73. 881
1240	13	69	2. 13. 241. 257
41	2	1270	61. 137. 193
42	5. 53	71	2. 17
43	2. 5^2. 13	72	5
44		73	2. 5
45	2. 17	74	
46		75	2. 109

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
1276		5	2. 13. 17
77	2. 5. 313 521	6	
78	5	7	2. 5^3
79	2. 13. 17	8	5. 13
1280	41. 89. 449	9	2. 233
81	2	1310	293
82	5^2. 13^2. 389	11	2
83	2. 5. 97	12	5
84	157	13	2. 5. 17
85	2	14	
86	181	15	2
87	2. 5. 73	16	
88	5. 17. 29. 673. 1033	17	2. 5. 29
89	2. 37	18	5^3. 13
1290		19	2. 509
91	2. 173	1320	
92	5. 13. 61	21	2. 13. 41
93	2. 5^2. 29. 1153	22	5. 17 29. 709
94		23	2. 5. 101
95	2. 13. 53. 1217	24	
96	17	25	2. 277
97	2. 5. 149. 1129	26	37
98	5	27	2 5. 293. 601
99	2	28	5. 521. 677
1300	809	29	2
1	2. 37 89. 257	1330	17
2	5 53	31	2 13 61. 1117.
3	2. 5 41^2. 101	32	5^2
4	173	33	2. 5. 137. 1297

	Diuisores ipsius $aa+1$
34	13
35	2. 461
36	97
37	2. 5
38	5. 37
39	2. 17
1340	
41	2. 73. 109. 113
42	5
43	2. 5^2
44	13. 41
45	2
46	29
47	2. 5. 13. 17. 821
48	5. 53
49	2
1350	
51	2. 29
52	5. 281. 1301
53	2. 5. 61
54	
55	2. 53
56	17
57	2. 5^2. 13
58	5
59	2
1360	13. 73
61	2
92	5. 41

	Diuisores ipsius $aa+1$
63	2. 5. 37
64	17
65	2. 197
66	
67	2. 5
68	5^2
69	2. 89
1370	13 353 409
71	2. 113
72	5
73	2. 5. 13. 17. 853
74	
75	2. 29. 37. 881
76	
77	2. 5
78	5
79	2. 797 1193
1380	29. 97. 677
81	2. 17
82	5^2. 241. 317
83	2. 5. 13
84	109
85	2 41. 149. 157
86	13
87	2. 5
88	5. 373
89	2
1390	17. 89. 1277
91	2

	Diuisores ipsius $aa+1$		Diuisores ipsius $aa+1$
1392	5. 61	1421	2
93	2. 5^2. 197^2	22	5. 13^2
94		23	2. 5
95	2. 953	24	17. 101. 1181
96	13	25	2. 13
97	2. 5	26	41
98	5. 17	27	2. 5. 269. 757
99	2. 13	28	5. 617. 661
1400	37	29	2. 181
1	2. 53	1430	
2	5	31	2. 461
3	2. 5. 41	32	5^4. 17. 193
4	29. 101. 673	33	2. 5. 29. 73. 97
5	2	34	
6		35	2. 13
7	2. 5^2. 17^2. 137	36	641
8	5. 53	37	2. 5. 37
9	2. 13. 29	38	5. 13. 29. 1097
1410		29	2
11	2	1440	
12	5. 13. 37. 829	41	2. 17. 157. 389
13	2. 5	42	5
14	61. 73. 449	43	2. 5^3
15	2. 17	44	41
16		45	2. 277
17	2. 5	46	149
18	5^2	47	2. 5
19	2	48	5. 13
1420		49	2. 17. 37

	Diuisores ipsius *aa* + 1
1450	109
1	2. 13^2
2	5
3	2. 5. 61
4	53. 113. 353
1455	2. 653
6	
7	2. 5^2
8	5. 17. 89. 281
9	2
1560	
1	2. 13. 53
2	5. 29
3	2. 5. 193. 1109
4	13. 173. 953.
1465	2
6	17
7	2. 5. 29. 41. 181
8	5^2
9	2
1470	137
1	2. 317
2	5
3	2. 5
4	13. 37
1475	2. 17. 61. 1049

	Diuisores ipsius *aa* + 1
6	769
7	2 5. 13. 97. 173
8	5. 433. 1009
9	2. 89
1480	457
1	2. 229
2	5^2
3	2. 5. 17^2. 761
4	113
1485	2. 41
6	37^2
7	2. 5. 13. 73. 233
8	5
9	2
1490	13. 313
1	2. 29
2	5. 17
3	2. 5^2. 109. 409
4	
1495	2
6	29. 229. 337
7	2. 5
8	5
9	2
1500	13. 17

DE RESOLVTIONE AEQVATIONIS

$$dy + ayydx = bx^m dx.$$

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

I.

Inuenire numeros loco exponentis indefiniti m ſubſtituendos, vt valor ipſius y algebraice per x definiri queat.

Solutio.

Ponatur $y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx}$, ac poſito dx conſtante, erit $dy = (n-1)cx^{n-2}dx + \frac{ddz}{azdx} - \frac{dz^2}{azzdx^2}$. Cum vero ſit $yy = ccx^{2n-2} + \frac{2cx^{n-1}dz}{azdx} + \frac{dz^2}{a^2z^2dx^2}$ facta ſubſtitutione tranſibit aequatio propoſita in hanc:

$$\frac{ddz}{azdx} + (n-1)cx^{n-2}dx + accx^{2n-2}dx + \frac{2cx^{n-1}dz}{z} = bx^m dx.$$

Fiat $m = 2n-2$ et $b = acc$, habebiturque:

$$ddz + (n-1)acx^{n-2}zdx^2 + 2acx^{n-1}dxdz = 0$$

quae

quae ergo resultat ex hac aequatione propositae aequivalente

$$dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$$

facta substitutione $y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx}$. Fingatur iam haec aequatio:

$$z = Ax^{\frac{-n+1}{2}} + Bx^{\frac{-3n+1}{2}} + Cx^{\frac{-5n+1}{2}} + Dx^{\frac{-7n+1}{2}} + \text{etc.}$$

eritque differentiando:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{(n-1)}{2}Ax^{\frac{-n-1}{2}} - \frac{(3n-1)}{2}Bx^{\frac{-3n-1}{2}} - \frac{(5n-1)}{2}Cx^{\frac{-5n-1}{2}} - \text{etc.}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = +\frac{(nn-1)}{4}Ax^{\frac{-n-3}{2}} + \frac{(9nn-1)}{4}Bx^{\frac{-3n-3}{2}} + \frac{(25nn-1)}{4}Cx^{\frac{-5n-3}{2}} - \text{etc.}$$

Cum vero ex superiori aequatione per dx^2 diuisa sit:

$$\frac{ddz}{dx^2} + \frac{2acx^{n-1}dz}{dx} + (n-1)acx^{n-1}z = 0$$

si series assumta substituatur, prodibit sequens aequatio:

$$0 = \left\{ \begin{array}{r} +\frac{(nn-1)}{4}Ax^{\frac{-n-3}{2}} + \frac{(9nn-1)}{4}Bx^{\frac{-3n-3}{2}} + \frac{(25nn-1)}{4}Cx^{\frac{-5n-3}{2}} \\ +\frac{(49nn-1)}{4}Dx^{\frac{-7n-3}{2}} + \text{etc.} \\ -(n-1)acAx^{\frac{n-3}{2}} - (3n-1)acBx^{\frac{-n-3}{2}} - (5n-1)acCx^{\frac{-3n-3}{2}} \\ -(7n-1)acDx^{\frac{-5n-3}{2}} - (9n-1)acEx^{\frac{-7n-3}{2}} - \text{etc.} \\ +(n-1)acAx^{\frac{n-3}{2}} + (n-1)acBx^{\frac{-n-3}{2}} + (n-1)acCx^{\frac{-3n-3}{2}} \\ +(n-1)acDx^{\frac{-5n-3}{2}} + (n-1)acEx^{\frac{-7n-3}{2}} - \text{etc.} \end{array} \right.$$

 Ponan-

Ponantur termini homogenei iunctim sumti nihilo aequales, vt determinentur coefficientes A, B, C, D, E, etc. eritque

$$B = \frac{(nn-1)A}{2n.4ac} = \frac{(nn-1)}{2}.\frac{A}{4nac}$$

$$C = \frac{(9nn-1)}{4n}.\frac{B}{4ac} = \frac{(nn-1)(9nn-1)}{2.\quad 4}.\frac{A}{4^2 n^2 a^2 c^2}$$

$$D = \frac{(25nn-1)}{6n}.\frac{C}{4ac} = \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{2.\quad 4.\quad 6}.\frac{A}{4^3.n^3 a^3 c^3}$$

$$E = \frac{(49nn-1)}{8n}.\frac{D}{4ac} = \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)(49nn-1)}{2.\quad 4.\quad 6.\quad 8}.\frac{A}{4^4 n^4 a^4 c^4}$$

etc.

Determinabitur ergo z per x sequenti modo: $z =$

$$Ax^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8}\frac{A}{nac}x^{\frac{-3n+1}{2}} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8.\quad 16}\frac{A}{n^2a^2c^2}x^{\frac{-5n+1}{2}} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8.\quad 16.\quad 24}\frac{A}{n^3a^3c^3}x^{\frac{-7n+1}{2}} + \text{etc.}$$

Valore hoc substituto resultabit valor quaesitus: $y = cx^{n-1}$

$$-\frac{1}{a}\left\{\frac{\frac{(n-1)}{2}Ax^{\frac{-n-1}{2}} + \frac{(3n-1)(nn-1)}{2.\quad 8}\frac{A}{nac}x^{\frac{-3n-1}{2}} + \frac{(5n-1)}{2}.\frac{(nn-1)(9nn-1)}{8.\quad 16}.\frac{A}{n^2a^2c^2}x^{\frac{-5n-1}{2}} + \text{etc.}}{Ax^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8}.\frac{A}{nac}x^{\frac{-3n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8}.\frac{(9nn-1)}{16}\frac{A}{n^2a^2c^2}x^{\frac{-5n+1}{2}} + \text{etc.}}\right\}$$

siue numeratore ac denominatore per $Ax^{\frac{-n-1}{2}}$ diuiso:

$y = cx^{n-1}$

$$-\frac{1}{ax}\left\{\frac{\frac{(n-1)}{2} + \frac{(3n-1)(nn-1)}{2.\quad 8}\frac{x^{-n}}{nac} + \frac{(5n-1}{2}.\frac{(nn-1)(9nn-1)}{8.\quad 16}\frac{x^{-2n}}{n^2a^2c^2} + \frac{(7n-1)}{2}.\frac{(nn-1)(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8\quad 8.\quad 16\quad 24}\frac{x^{-3n}}{n^3a^3c^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{(nn-1)}{8}.\frac{x^{-n}}{nac} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8.\quad 16}.\frac{x^{-2n}}{n^2a^2c^2} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8.\quad 16.\quad 24}.\frac{x^{-3n}}{n^3a^3c^3} + \text{etc.}}\right\}$$

Haec

Haec ergo expreſſio generaliter in infinitum excurrens fit finita, ſi fuerit $(2i+1)^2 nn - 1 = 0$, denotante i numerum quemcunque integrum, hoc eſt, ſi fuerit $n = \frac{\pm 1}{2i+1}$; et $m = 2n - 2 = \frac{-4i - 2 \pm 2}{2i+1}$. Huius ergo aequationis, quoties i fuerit numerus integer:

$$dy + ayydx = accx^{\frac{-4i-2\pm 2}{2i+1}} dx$$

integrale ſemper in terminis finitis poterit exhiberi, ſeu valor ipſius y per x algebraice exponi.

Sit primo $n = \frac{+1}{2i+1}$, vt ſit $m = 2n - 2 = \frac{-4i}{2i+1}$, erit huius aequationis:

$$dy + ayydx = accx^{\frac{-4i}{2i+1}} dx$$

integrale in terminis algebraicis expreſſum:

$$ayx = acx^{\frac{1}{2i+1}}$$

$$\frac{+\frac{i}{2i+1} - \frac{i(i^2-1)}{2(2i+1)^2} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)}{2\cdot 4(2i+1)^3} \cdot \frac{x^{\frac{-2}{2i+1}}}{a^2c^2} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^4} \cdot \frac{x^{\frac{-3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}{1 - \frac{i(i+1)}{2(2i+1)} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot 4(2i+1)^2} \cdot \frac{x^{\frac{-2}{2i+1}}}{a^2c^2} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^3} \cdot \frac{x^{\frac{-3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

ſeu facta ad communem denominatorem reductione erit: $ayx =$

$$\frac{acx^{\frac{+1}{2i+1}} - \frac{ii-i}{2(2i+1)} + \frac{i(i^2-1)(i-2)}{2\cdot 4(2i+1)^2} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2i+1}}}{ac} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^3} \cdot \frac{x^{\frac{-2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \text{etc.}}{1 - \frac{i(i+1)}{2(2i+1)} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot 4(2i+1)^2} \cdot \frac{x^{\frac{-2}{2i+1}}}{a^2c^2} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^3} \cdot \frac{x^{\frac{-3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

 Sit

Sit deinde $n = \frac{-1}{2i+1}$, vt sit $m = \frac{-4i-4}{2i+1}$, erit huius aequationis

$$dy + ayydx = accx^{\frac{-4i-4}{2i+1}}dx$$

integrale in terminis algebraicis expressum:

$$ayx = acx^{\frac{-1}{2i+1}} +$$

$$\frac{\frac{i+1}{2i+1} + \frac{i(i+1)(i+2)}{2(2i+1)^2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)(i+3)}{2\cdot4(2i+1)^3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)(i+4)}{2\cdot4\cdot6(2i+1)^4}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{i(i+1)}{2(2i+1)}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot4(2i+1)^2}\cdot\frac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot4\cdot6(2i+1)^3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

seu facta ad communem denominatorem reductione, erit $ayx =$

$$\frac{acx^{\frac{-1}{2i+1}} + \frac{(i+1)(i+2)}{2(2i+1)} + \frac{i(i+1)(i+2)(i+3)}{2\cdot4(2i+1)^2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)(i+3)(i+4)}{2\cdot4\cdot6(2i+1)^3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \text{etc.}}{1 + \frac{i(i+1)}{2(2i+1)}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot4(2i+1)^2}\cdot\frac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot4\cdot6(2i+1)^3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

Quotiescunque igitur fuerit i numerus integer, toties huius aequationis:

$$dy + ayydx = accx^{\frac{-4i-2\pm2}{2i+1}}dx$$

integrale in terminis algebraicis potest exprimi. Q. E. I.

Coroll. 1.

Coroll. 1.

2. Aequatio ergo propoſita $dy + ayydx = accx^m dx$ integrationem algebraicam admittit, ſi fuerit exponens m, vel terminus huius ſeriei:

$$-0;\ -\tfrac{4}{3};\ -\tfrac{8}{5};\ -\tfrac{12}{7};\ -\tfrac{16}{9};\ -\tfrac{20}{11};\ -\tfrac{24}{13};\ \text{etc.}$$

vel ſi fuerit m terminus ex hac fractionum ſerie:

$$-\tfrac{4}{1};\ -\tfrac{8}{3};\ -\tfrac{12}{5};\ -\tfrac{16}{7};\ -\tfrac{20}{9};\ -\tfrac{24}{11};\ -\tfrac{28}{13};\ \text{etc.}$$

Coroll. 2.

3. Subſtituamus in priori integrabilitatis claſſe loco i ſucceſſiue numeros 0, 1, 2, 3, 4, etc. atque reperietur, vt ſequitur.

Si $i = 0$; huius aequationis:

I. $dy + ayydx = accdx$, integrale erit:

$ayx = acx$; ſiue $y = c$.

Si $i = 1$; huius aequationis:

II. $dy + ayydx = accx^{-\frac{4}{3}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{3}}}{1 - \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{ac}} \text{ ſeu } y = \frac{cx^{-\frac{2}{3}}}{1 - \frac{1x^{-\frac{1}{3}}}{3ac}} = \frac{3acc}{3acx^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}$$

Si $i = 2$; huius aequationis:

III. $dy + ayydx = accx^{-\frac{8}{5}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{5}} - \frac{2\cdot 1}{2\cdot 5}}{1 - \frac{2\cdot 3}{2\cdot 5}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{5}}}{ac} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 5^2}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{5}}}{a^2c^2}} = \frac{acx^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}}{1 - \frac{3x^{-\frac{1}{5}}}{5ac} + \frac{3x^{-\frac{2}{5}}}{5^2a^2c^2}}$$

Si

Si $i = 3$ huius aequationis:

IV. $dy + ayydx = accx^{-\frac{12}{7}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{7}} - \frac{3\cdot 2}{2\cdot 7} + \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 7^2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{7}}}{ac}}{1 - \frac{3\cdot 4}{2\cdot 7}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{7}}}{ac} + \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 2}{2\cdot 4\cdot 7^2}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{7}}}{a^2c^2} - \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 21}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7^3}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{7}}}{a^3c^3}}$$ siue

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{7}} - \frac{3}{7} + \frac{3\cdot 7}{7^2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{7}}}{ac}}{1 - \frac{6}{7}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{7}}}{ac} + \frac{3\cdot 5}{7^2}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{7}}}{a^2c^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{7^3}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{7}}}{a^3c^3}}.$$

Si $i = 4$, huius aequationis:

V. $dy + ayydx = accx^{-\frac{16}{9}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{9}} - \frac{4\cdot 3}{2\cdot 9} + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 9^2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{9}}}{ac} - \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9^3}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{9}}}{a^2c^2}}{1 - \frac{4\cdot 5}{2\cdot 9}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{9}}}{ac} + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9^2}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{9}}}{a^2c^2} - \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9^3}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{9}}}{a^3c^3} + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9^4}\cdot\frac{x^{-\frac{4}{9}}}{a^4c^4}}$$

Si $i = 5$; huius aequationis

VI. $dy + ayydx = accx^{-\frac{20}{11}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{11}} - \frac{5\cdot 4}{2\cdot 11} + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 11^2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{11}}}{ac} - \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 11^3}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{11}}}{a^2c^2} + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 11^4}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{11}}}{a^3c^3} -}{1 - \frac{5\cdot 6}{2\cdot 11}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{11}}}{ac} + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 11^2}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{11}}}{a^2c^2} - \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 11^3}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{11}}}{a^3c^3} + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 11^4}\cdot\frac{x^{-\frac{4}{11}}}{a^4c^4} - \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 11^5}\cdot\frac{x^{-\frac{5}{11}}}{a^5c^5}}$$

Coroll. 3.

3. In posteriori integrabilitatis ordine substituamus pariter loco i numeros 0, 1, 2, 3, 4, etc. ac reperietur, vt sequitur.

Si

Si $i=0$; huius aequationis:

I. $dy+ayydx=accx^{-4}dx$, integrale erit:

$$ayx=\frac{acx^{-1}+\frac{1.2}{2.1}}{1}=1+\frac{ac}{x} \text{ seu } y=\frac{1}{ax}+\frac{c}{xx}$$

Si $i=1$; huius aequationis:

II. $dy+ayydx=accx^{-\frac{8}{3}}dx$, integrale erit:

$$ayx=\frac{acx^{-\frac{1}{3}}+\frac{2.3}{2.3}+\frac{2.3.4.1}{2.4.3^2}.\frac{x^{\frac{1}{3}}}{ac}}{1+\frac{1.2}{2.3}.\frac{x^{\frac{1}{3}}}{ac}}=\frac{acx^{-\frac{1}{3}}+1+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{3ac}}{1+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{3ac}}$$

Si $i=2$ huius aequationis:

III. $dy+ayydx=accx^{-\frac{12}{5}}dx$, integrale erit:

$$ayx=\frac{acx^{-\frac{1}{5}}+\frac{3.4}{2.5}+\frac{2.3.4.5}{2.4.5^2}.\frac{x^{\frac{1}{5}}}{ac}+\frac{1.2.3.4.5.6}{2.4.6.5^3}.\frac{x^{\frac{2}{5}}}{a^2c^2}}{1+\frac{2.3}{2.5}.\frac{x^{\frac{1}{5}}}{ac}+\frac{1.2.3.4}{2.4.5^2}\frac{x^{\frac{2}{5}}}{a^2c^2}}$$

Si $i=3$; huius aequationis:

IV. $dy+ayydx=accx^{-\frac{16}{7}}dx$, integrale erit:

$$ayx=\frac{acx^{-\frac{1}{7}}+\frac{4.5}{2.7}+\frac{3.4.5.6}{2.4.7^2}.\frac{x^{\frac{1}{7}}}{ac}+\frac{2.3.4.5.6.7}{2.4.6.7^3}\frac{x^{\frac{2}{7}}}{a^2c^2}+\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{2.4.6.8.7^4}.\frac{x^{\frac{3}{7}}}{a^3c^3}}{1+\frac{3.4}{2.7}\frac{x^{\frac{1}{7}}}{ac}+\frac{2.3.4.5}{2.4.7^2}.\frac{x^{\frac{2}{7}}}{a^2c^2}+\frac{1.2.3.4.5.6}{2.4.6.7^3}.\frac{x^{\frac{3}{7}}}{a^3c^3}}$$

Atque ex his casibus analogia patet, cuius ope omnium casuum, qui quidem integrationem admittunt, integralia algebraica expedite formari poterunt.

Scholion.

5. De his integralibus autem probe notandum est, ea non esse completa, neque ideo aeque late patere, ac

ac aequationem differentialem; id quod vel ex primo casu $dy + ayydx = accdx$ patet, cui etsi satisfacit $y = c$, tamen facile intelligitur, logarithmos insuper in ea comprehendi. Manifestum autem hoc est quoque hinc, quod in his integralibus non contineatur noua constans arbitraria, quae in differentiali non inerat; in quo criterium integrationis completae versatur. Caeterum vero hinc duplicia integralia cuiusuis casus obtinentur, eo quod c tam affirmatiue, quam negatiue, accipere licet, aequatione differentiali, quae tantum cc continet non mutata.

Problema 2.

6. Inuento ope praecedentis methodi integrali particulari pro casibus assignatis aequationis $dy + ayydx = accx^m dx$, inuenire integrale completum pro iisdem casibus.

Solutio.

Posito $m = 2n - 2$, integrale particulare aequationis propositae inuentum est esse $ayx = acx^n -$

$$\frac{\frac{(n-1)}{2} - \frac{(3n-1)}{2}\frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{-n}}{ac} - \frac{(5n-1)}{2}\frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}\cdot\frac{x^{-2n}}{a^2c^2} - \frac{(7n-1)}{2}\frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}\frac{(25nn-1)}{24n}\cdot\frac{x^{-3n}}{a^3c^3} - \text{etc.}}{1 + \frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{-n}}{ac} + \frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}\cdot\frac{x^{-2n}}{a^2c^2} + \frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}\frac{(25nn-1)}{24n}\cdot\frac{x^{-3n}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

cuius loco scribamus breuitatis gratia $y = P$. Cum igitur P sit eiusmodi valor, per variabilem x datus, qui satisfaciat aequationi $dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$, erit vtique $dP + aP^2dx = accx^{2n-2}dx$. Ponamus iam, integrale completum aequationis propositae $dy + ayydx$ =

$= accx^{2n-2}dx$ esse $y = \mathrm{P} + v$, quo valore loco y substituto habebimus hanc aequationem $d\mathrm{P} + dv + a\mathrm{P}^2 dx + 2a\mathrm{P}v dx + avv dx = accx^{2n-2}dx$. Cum vero sit $d\mathrm{P} + a\mathrm{P}^2 dx = accx^{2n-2}dx$, erit $dv + 2a\mathrm{P}v dx + avv dx = 0$. Sit $v = \frac{1}{u}$, erit $du - 2a\mathrm{P}u dx = + a dx$, quae multiplicata per $e^{-2a\int \mathrm{P}dx}$ denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, fit integrabilis; erit scilicet aequationis $e^{-2a\int \mathrm{P}dx}(du - 2a\mathrm{P}u dx) = e^{-2a\int \mathrm{P}dx} a dx$, integrale $e^{-2a\int \mathrm{P}dx} u = \int e^{-2a\int \mathrm{P}dx} a dx$: ideoque $u = e^{2a\int \mathrm{P}dx} \int e^{-2a\int \mathrm{P}dx} a dx$. Quo valore cum sit $v = \frac{1}{u}$ substituto, erit integrale completum aequationis propositae $y = \mathrm{P} + \frac{e^{-2a\int \mathrm{P}dx}}{\int e^{-2a\int \mathrm{P}dx} a dx}$. At ex problemate primo est valor ipsius y particularis, quem hic ponimus $\mathrm{P} = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx}$; existente

$$z = x^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8n} \cdot \frac{x^{\frac{-3n+3}{2}}}{ac} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n \cdot 16n} \cdot \frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2 c^2} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8n \cdot 16n \cdot 24n} \cdot \frac{x^{\frac{-7n+1}{2}}}{a^3 c^3} + \text{etc.}$$

Hinc erit $\int \mathrm{P}dx = \frac{cx^n}{n} + \frac{1}{a} lz$, et $e^{-2a\int \mathrm{P}dx} = e^{\frac{-2acx^n}{n}} : zz$. Quo valore substituto habebitur integrale completum:

$$y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} + \frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}}{zz \int e^{\frac{-2acx^n}{n}} adx : zz}. \quad \text{Q. E. I.}$$

Aliter.

Quemadmodum hac ratione ex vno integrali particulari inuenitur integrale completum, ita ex duobus integralibus particularibus expeditius integrale comple-

 tum

tum indagabitur, neque in hoc modo peruenitur ad formulam integralem, cuiusmodi est ea $\int e^{\frac{-2acx^n}{n}} a\,dx:zz$, quae integrali completo, quod inuenimus, inuoluitur. Cum enim aequatio $dy+ayy\,dx=accx^{2n-2}dx$ maneat inuariata, siue c affirmatiue, siue negatiue, accipiatur, habemus vtique duo integralia particularia, quorum prius est $y=P=cx^{n-1}+\frac{dz}{az\,dx}$, existente $z=x^{\frac{-n+1}{2}}$ $+\frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{\frac{-3n+1}{2}}}{ac}+\frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n\cdot16n}\cdot\frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2}+$ etc. Posterius vero simili modo inuestigandum erit $y=Q$ $=-cx^{n-1}+\frac{du}{au\,dx}$; fietque $u=x^{\frac{-n+1}{2}}-\frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{\frac{-3n+1}{2}}}{ac}$ $+\frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n\cdot16n}\cdot\frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2}-$ etc. qui duo valores z et u tantum signis inter se differunt. Erit ergo tam $dP+aP^2dx=accx^{2n-2}dx$, quam $dQ+aQ^2dx$ $=accx^{2n-2}dx$. Ponamus iam $R=\frac{P-y}{Q-y}$, quae aequatio sit integralis completa propositae differentialis; quam formam ideo assumimus, quia in ea vtraque particularium $y=P$ et $y=Q$ continetur, illa nempe si fiat $R=0$, haec si $R=\infty$. Fiet ergo $QR-Ry=P-y$, hincque $y=\frac{QR-P}{R-1}$, quae dat $dy=\frac{RRdQ-QdR-RdQ-RdP+dP+PdR}{(R-1)^2}$ substituantur hic valores supra inuenti $dP=-aP^2dx$ $+accx^{2n-2}dx$ et $dQ=-aQQdx+accx^{2n-2}dx$, eritque $dy=accx^{2n-2}dx+\frac{aP^2dx}{R-1}-\frac{aQ^2R\,dx}{R-1}+\frac{(P-Q)dR}{(R-1)^2}$ $=-a\frac{(QR-P)^2dx}{(R-1)^2}+accx^{2n-2}dx$. Ex hac aequatione resultat haec $(P-Q)dR=-aR\,dx(P-Q)^2$, quae diuisa per $R(P-Q)$ dat $\frac{dR}{R}=a(Q-P)dx=-2acx^{n-1}dx$

+

$+\frac{du}{u}-\frac{dz}{z}$. Haec iam aequatio integrabilis exiſtit, eritque integrale $lR - lC = -\frac{2acx^n}{n} + lu - lz$. Cum vero ſit $R = \frac{P-y}{Q-y}$, erit $\frac{P-y}{Q-y} = \frac{(acx^{n-1}zdx+dz-ayzdx):z}{(-acx^{n-1}udx+du\ ayudx):u}$ $= \frac{Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}u}{z}$. Hinc ita, quia valores ipſarum u et z per x conſtant, habebitur aequatio integralis completa

$$Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} = \frac{dz+acx^{n-1}zdx-ayzdx}{du-acx^{n-1}udx-ayudx} = \frac{(P-y)z}{(Q-y)u}$$

Q. E. I.

Coroll. I.

7. Valor particularis, quem ſupra pro y inuenimus, ita erat comparatus, vt eſſet $y = cx^{n-1} - \frac{(K+L)}{ax(M+N)}$; exiſtente

$$K = \frac{(n-1)}{2} + \frac{(5n-1)(nn-1)}{2\quad 8n}\cdot\frac{(9nn-1)}{16n}\cdot\frac{x^{-2n}}{a^2c^2} + \frac{(9n-1)}{2}\cdot\frac{(n^2-1)(9n^2-1)(25n^2-1)(49n^2-1)}{8n\quad 16n\quad 24n\quad 32n}\cdot\frac{x^{-4n}}{a^4c^4} + \text{etc.}$$

$$L = \frac{(3n-1)(nn-1)}{2\quad 8n}\cdot\frac{x^{-n}}{ac} + \frac{(7n-1)(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{2\quad 8n\quad 16n\quad 24n}\cdot\frac{x^{-3n}}{a^3c^3} + \text{etc.}$$

$$M = 1 + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n\quad 16n}\cdot\frac{x^{-2n}}{a^2c^2} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)(49nn-1)}{8n.\quad 16n.\quad 24n.\quad 32n}\cdot\frac{x^{-4n}}{a^4c^4} + \text{etc.}$$

$$N = \frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{-n}}{ac} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8n.\quad 16n.\quad 24n}\cdot\frac{x^{-3n}}{a^3c^3} + \text{etc.}$$

Facto autem c negatiuo, erit alter valor particularis $y = -cx^{n-1} - \frac{(K-L)}{ax(M-N)}$. Erit ergo $P = \frac{acx^n(M+N)\ K-L}{ax(M+N)}$;

$$Q = \frac{-acx^n(M-N)-K+L}{ax(M-N)};$$ et $z:u = M+N:M-N$.

Ex quibus colligitur, aequationis propositae: $dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$ integrale completum fore:

$$Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} = \frac{(acx^n - axy)(M+N) - K - L}{-(acx^n + axy)M - N) - K + L}$$ siue $-C$ posito loco C

$$Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} = \frac{ax(cx^{n-1} - y)(M+N) - K - L}{ax(cx^{n-1} + y)(M-N) + K - L}.$$

Coroll. 2.

8. Si cc est numerus negatiuus, fiet c hincque L et N quantitates imaginariae, at $c\sqrt{-1}$; $L\sqrt{-1}$; et $N\sqrt{-1}$ quantitates reales: Tum autem integrale completum realiter expressum erit:

$$C + \frac{acx^n}{n}\sqrt{-1} = \text{A tang.} \frac{acx^n N - axyM - K}{acx^n M\sqrt{-1} - axyN\sqrt{-1} - L\sqrt{-1}}.$$

Coroll. 3.

9. Sit $c = b\sqrt{-1}$, vt habeatur haec aequatio integranda:

$$dy + ayydx + abbx^{2n-2}dx = 0.$$

Huius ergo aequationis integrale completum erit:

$$C - \frac{abx^n}{n} = \text{A tang.} \frac{abx^n N - axyM - K}{-abx^n M - axyN - L}$$ siue

$$C - \frac{abx^n}{n} = \text{A tang.} \frac{K - abx^n N + axyM}{L + abx^n M + axyN};$$ existente

$$K = \frac{(n-1)}{2} - \frac{(5n-1)(nn-1)(9nn-1)}{2 \cdot 8n \cdot 16n} \cdot \frac{x^{-2n}}{a^2b^2} + \frac{(9n-1)(nn-1)(9nn-)(25nn-1)(49nn-1)}{2 \cdot 8n \cdot 16n \cdot 24n \cdot 32n} \cdot \frac{x^{-4n}}{a^4b^4} - \text{etc.}$$

$$L = \frac{(3n-1)(nn-1)}{2 \cdot 8n} \cdot \frac{x^{-n}}{ab} - \frac{(7n-1)(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{2 \cdot 8n \cdot 16n \cdot 24n} \cdot \frac{x^{-3n}}{a^3b^3} + \text{etc.}$$

M =

$$M = 1 - \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n \cdot 16n} \cdot \frac{x^{-2n}}{a^2 b^2} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)(49nn-1)}{8n \cdot 16n \cdot 24n \cdot 32n} \cdot \frac{x^{-4n}}{a^4 b^4} - \text{etc.}$$

$$N = \frac{(nn-1)}{8n} \cdot \frac{x^{-n}}{ab} - \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8n \cdot 16n \cdot 24n} \cdot \frac{x^{-3n}}{a^3 b^3} + \text{etc.}$$

His igitur casibus integralia particularia, quae simul sint algebraica, non dantur.

Coroll. 4.

10. Quoties ergo fuerit $n = \frac{\pm 1}{2i \pm 1}$, denotante i numerum quemcunque integrum, expressiones finitae algebraicae pro litteris K, L, M et N reperiuntur. His igitur casibus integratio aequationis huius $dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$ ope logarithmorum, huius vero aequationis $dy + ayydx + abbx^{2n-2}dx = 0$ ope quadraturae circuli absoluitur.

Scholion.

11. Quoniam aequationis differentialis propositae $dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$ integrale completum duplici modo expressimus, poterimus formulae integralis $\int \frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}dx}{zz}$, quae in priori inest, valorem ex posteriori assignare, huiusque adeo integrationem, quae saepe numero maximopere difficilis videatur, exhibere. Posteriori modo autem inuenimus $y = \frac{QR - P}{R - 1} = \frac{P - QR}{1 - R} = P + \frac{(P-Q)R}{1-R}$, at est $R = \frac{Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}u}{z}$; $P = cx^{n-1}$

+

$+\frac{dz}{azdx}$ et $Q = -cx^{n-1} + \frac{du}{audx}$. Consequenter habebitur $y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} + \frac{(2cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} - \frac{du}{audx})Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}u}{z - Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}u}$.

Per priorem vero integrationem est $y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx}$ $+ \frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}}{zz\int e^{\frac{-2acx^n}{n}}adx : zz}$ ex quorum comparatione oritur $\frac{z - Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}u}{Czzu(2cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} - \frac{du}{audx})} = \frac{\int e^{\frac{-2acx^n}{n}}adx}{zz}$.

Quae transmutatur in hanc aequationem:

$$\frac{zdx - Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}udx}{Cz(2acx^{n-1}uzdx + udz - zdu)} = \int \frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}}{zz}dx.$$

Quodsi ergo fuerit:

$$z = x^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8n}.\frac{x^{\frac{-3n+1}{2}}}{ac} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n.\ 16n}.\frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2} + \text{etc.}$$

$$u = x^{\frac{-n+1}{2}} - \frac{(nn-1)}{8n}.\frac{x^{\frac{-3n+1}{2}}}{ac} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n\ \ 16n}.\frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2} - \text{etc.}$$

haec formula differentialis $\frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}dx}{zz}$ integrari poterit eritque integrale $= \frac{zdx - Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}udx}{Cz(2acx^{n-1}uzdx + udz - zdu)}$.

Simili

Simili vero modo facto c negatiuo, quo z et u inter se permutantur, erit formulae differentialis $\frac{e^{\frac{+2acx^n}{n}}dx}{uu}$ integrale $= \frac{udx - Ce^{\frac{+2acx^n}{n}}zdx}{Cu(-2acx^{n-1}uzdx + zdu - udz)}$ $= \frac{Ce^{\frac{2acx^n}{n}}zdx - udx}{Cu(2acx^{n-1}uzdx + udz - zdu)}$ in quibus integrationibus C denotat eam constantem arbitrariam, quae per integrationem more solito ingreditur.

INVESTIGATIO FVNCTIONVM EX DATA DIFFERENTIALIVM CONDITIONE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si V denotet functionem quamcunque binarum variabilium x et y, eaque differentietur, vt prodeat eius differentiale:

$$dV = P dx + Q dy$$

tum vero hae duae quantitates P et Q denuo differentientur, sicque proueniat:

$$dP = p dx + r dy \text{ et } dq = s dx + q dy$$

notum est, semper fore $r = s$. Quam proprietatem quoque ita exprimere soleo, vt dicam, esse:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Huiusmodi scilicet expressione $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ indico, functionem P ita differentiari, vt sola quantitas y pro variabili habeatur, et differentiale resultans per dy diuidi, quo pacto, quantitas finita a differentialibus libera proueniat, necesse est.

2. Quodsi ergo formula $P dx + Q dy$ ita fuerit comparata, vt secundum hanc scribendi rationem in ea sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, hinc vicissim concludimus, istam formulam

mulam $P\,dx + Q\,dy$ re vera oriri ex differentiatione cuiuspiam functionis V ipſarum x et y. Cum autem haec proprietas latiſſime pateat, plus inde concludere non licet, quam formulam $P\,dx + Q\,dy$ eſſe integrabilem, neque quicquam per hanc ſolam conditionem in genere definitur, vnde vlla peculiaris proprietas eius functionis, ex cuius differentiatione eſt nata, colligi poſſet.

3. Quando autem functio V ad certum quoddam genus refertur, tum poſito $dV = P\,dx + Q\,dy$, inter quantitates P et Q, praeter illam generalem affectionem, alia quaedam particularis relatio intercedit. Ita nouimus, ſi V ſit functio nullius dimenſionis binarum variabilium x et y, tum praeter illam generalem proprietatem, qua eſt $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, inſuper hanc particularem locum ſemper habere, vt ſit: $Px + Qy = 0$. Deinde ſimili modo demonſtratum extat, ſi V ſit functio homogenea binarum variabilium x et y, cuius dimenſionum numerus ſit $= n$, eius differentiale $dV = P\,dx + Q\,dy$ ſemper ita eſſe comparatum, vt ſit

$$nV = Px + Qy.$$

Quo ergo caſu hoc inprimis notatu dignum occurrit, quod formulae differentialis $P\,dx + Q\,dy$ integrale ſtatim aſſignari poſſit, cum ſit $V = \frac{1}{n}(Px + Qy)$.

4. Quae cum ſint demonſtrata, iam pridem in mentem mihi venit, huiusmodi quaeſtiones inuerſo modo tractare, atque in methodum inquirere, cuius ope, ſi

 poſito

posito $dV = Pdx + Qdy$, compertum sit, esse vel $Px + Qy = 0$, vel $Px + Qy = nV$, vicissim inueniri possit, functionem V vel esse nullius dimensionis, vel esse functionem homogeneam, in qua binae variabiles x et y vbique n dimensiones adimpleant. Scilicet nullo respectu, ad illas proprietates iam cognitas habito, ex hoc solo, quod sit vel $Px + Qy = 0$, vel $Px + Qy = nV$, per legitima analyseos ratiocinia elici oportet, functionem finitam V hac proprietate praeditam esse, vt vel sit nullius dimensionis, vel homogenea n dimensionum. Intelligendum autem est, proprietatem generalem $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ semper locum habere debere, sine qua aequatio $dV = Pdx + Qdy$ adeo esset absurda.

5. Hae quaestiones, quae vix adhuc tactae videntur, amplissimum aperiunt campum, fines analyseos vlterius extendendi. Proposita namque aequatione $dV = Pdx + Qdy$, quaeri potest indoles functionis V, si relatio quaecunque inter binas quantitates P et Q vel adeo inter ternas P, Q et V proponatur. Huiusmodi autem quaestiones etiamsi pene nouae videantur, tamen nullum est dubium, quin methodus eas rite resoluendi maximam per totam mathesin allatura sit vtilitatem. In problemate enim de cordis vibrantibus tota vis solutionis ad hoc genus est referenda, cum certa quadam relatione inter quantitates P et Q contineatur. Deinde etiam vniuersam motus fluidorum scientiam in huiusmodi formulis differentialibus sum complexus, vbi certa quaedam relatio inter partes differentialium praescribitur, ex qua autem ob defectum talis methodi vix quicquam concludere licet.

6.

6. Huiusmodi autem quaestiones etiam alio modo proponi possunt, vt solius functionis V, cuius natura quaeritur, mentio occurrat. Cum enim, posito $dV = Pdx + Qdy$, sit $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$, prior quaestio ita enunciari poterit:

Inuenire indolem functionis V, *vt sit*:

$$x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy}) = 0$$

posterior vero hoc modo;

Inuenire indolem functionis V, *vt sit*:

$$x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy}) = nV$$

ac priori quidem ostendi debet, V esse functionem nullius dimensionis ipsarum x et y; posteriori vero, esse earumdem functionem homogeneam n dimensionum. Hoc scribendi autem modo in genere tenendum est, esse:

$$dV = dx(\frac{dV}{dx}) + dy(\frac{dV}{dy})$$

7. Problema igitur latius patens ita se habebit, vt proposita quacunque relatione inter quantitates V, $(\frac{dV}{dx})$ et $(\frac{dV}{dy})$ definiri debeat, qualis functio sit V ipsarum x et y. Deinde etiam huiusmodi quaestiones ad functiones trium pluriumue variabilium extendi possunt; quin etiam quantitates ex duplici vel triplici differentiatione oriundae introduci possunt; cuiusmodi sunt $(\frac{ddV}{dx^2})$; $(\frac{ddV}{dxdy})$; $(\frac{ddV}{dy^2})$; $(\frac{d^3V}{dx^3})$; $(\frac{d^3V}{dx^2dy})$ etc. quarum significatus ita se habet, vt verbi gratia $(\frac{d^3V}{dx^2dy})$ oriatur, si primo V differentietur sola x variabili sumta, et differentiale per dx diuidatur, vt prodeat $(\frac{dV}{dx})$; tum vero haec quantitas denuo differentietur, sola x variabili

 sumta

ſumta, vt eius differentiale per dx diuiſum praebeat $\left(\frac{d^2 V}{dx^2}\right)$, quod denique rurſus differentiatum, ſumta ſola y variabili, et per dy diuiſum, dabit $\left(\frac{d^3 V}{dx^2 dy}\right)$.

8 Dum autem hunc ſignandi modum recipimus, notandum eſt, eſſe:

$$\left(\frac{ddV}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{ddV}{dy\,dx}\right) \text{ et}$$
$$\left(\frac{d^3 V}{dx^2 dy}\right) = \left(\frac{d^3 V}{dx\,dy\,dx}\right) = \left(\frac{d^3 V}{dy\,dx^2}\right)$$

Perinde ſcilicet eſt, quonam ordine quantitates x et y, quarum alterutra in qualibet differentiatione ſola variabilis aſſumitur, diſponantur, dummodo praeſcriptus differentiationum numerus inſtituatur. Quin etiam ſi V ſit functio trium variabilium x, y, z, ſimilis conuenientia locum habet; erit enim:

$$\left(\frac{d^3 V}{dx\,dy\,dz}\right) = \left(\frac{d^3 V}{dx\,dz\,dy}\right) = \left(\frac{d^3 V}{dy\,dx\,dz}\right) = \left(\frac{d^3 V}{dy\,dz\,dx}\right) = \left(\frac{d^3 V}{dz\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3 V}{dz\,dy\,dx}\right)$$

hic autem meas inueſtigationes tantum ad functiones duarum variabilium reſtringam.

9. Hoc modo deducimur non ſolum ad inſolitas et etiamnum vix tractatas quaeſtiones, ſed etiam ad noua ſigna, quibus adhuc parum ſumus adſueti; vnde haec methodus, cuius culturam tantopere expetere debemus, non immerito tanquam noua plane Analyſeos pars eſt ſpectanda. Non parum igitur mihi praeſtitiſſe videbor, ſi prima tantum iſtius methodi fundamenta conſtituero, neque ob rei nouitatem vix minimam aedificii iis ſuperſtruendi partem polliceri audeo. Tempore ſine dubio haud exiguo et indefeſſo labore opus erit, antequam iſtam Analyſeos partem, in ſe

certe

certe difficillimam, non dicam perficere, ſed tantum ad vberiorem vſum accommodare liceat. Quam ob rem ea, quae mihi adhuc in hoc genere ſunt reperta, ordine ac dilucide exponere conſtitui, quo aliis, quos dignitas argumenti ad eundem laborem ſuſcipiendum alliciet, prima quaſi obſtacula de via remoueam, animosque ad nouum hoc inueſtigationum genus praeparem.

10. Antequam autem hoc munere fungar, principia quaedam per ſe perſpicua praemittenda ſentio. Primo ſcilicet, ſi fuerit $(\frac{dV}{dx}) = 0$, intelligitur, functionem V prorſus non ab x pendere, ſed ex ſola altera variabili y cum conſtantibus eſſe conflatam, ſicque etiam formam $(\frac{dV}{dy})$ fore functionem ipſius y tantum. Viciſſim autem ſi $(\frac{dV}{dy})$ fuerit functio ipſius y tantum, ipſa quantitas V erit aggregatum ex functione ipſius y tantum, et ex functione ipſius x tantum; quo ergo caſu forma $(\frac{dV}{dx})$ erit functio ipſius x tantum. Deinde ſi fuerit $dV = R\,ds$, neceſſe eſt, vt R ſit functio ipſius S, vel S ipſius R, vnde et V erit functio ipſius S, vel ipſius R; quia alioquin integrale $\int R\,ds$ non determinaretur. His igitur poſitis principiis primum binas quaeſtiones initio memoratas, quae huic inueſtigationi anſam praebuerunt, reſoluam, deinceps ad alias progreſſurus.

Problema I.

11. Exiſtente $dV = P\,dx + Q\,dy$, ſi fuerit $Px + Qy = 0$, inuenire, qualis V ſit functio ipſarum x et y, vt huic conditioni ſatisfiat.

Solutio.

Solutio.

Cum igitur inter quantitates P et Q haec conditio praescribatur, vt sit $Px+Qy=0$, erit $Q=-P\frac{x}{y}$, qui valor in aequalitate $dV=Pdx+Qdy$ substitutus dabit:

$$dV=P\left(dx-\frac{xdy}{y}\right)=\frac{P(ydx-xdy)}{y}$$

necesse igitur est, vt formula $\frac{P(ydx-xdy)}{y}$ sit integrabilis. Quae vt ad formam RdS perducatur, ita repraesentetur:

$$dV=Py.\frac{ydx-xdy}{yy}$$

Sumto enim $\frac{ydx-xdy}{yy}=dS$ et $S=\frac{x}{y}$, cum sit $dV=PydS$, necesse est, vt Py sit functio ipsius S, ideoque et V erit functio ipsius S, hoc est, ipsius $\frac{x}{y}$. Proprietas igitur praescripta, qua est $Px+Qy=0$, huiusmodi indolem functionis V declarat, vt sit V functio quaecunque ipsius $\frac{x}{y}$; hinc autem manifestum est, pro V prodire functionem nullius dimensionis ipsarum x et y.

Coroll. 1.

12. Quodsi ergo ob $P=\left(\frac{dV}{dx}\right)$ et $Q=\left(\frac{dV}{dy}\right)$ haec proprietas functionis V proponitur, vt sit $x\left(\frac{dV}{dx}\right)+y\left(\frac{dV}{dy}\right)=0$ inde certo concludimus, V esse functionem formulae $\frac{x}{y}$ seu, quod eodem redit, esse functionem nullius dimensionis ipsarum x et y.

Coroll. 2.

13. Vicissim ergo hinc id, quod quidem iam dudum constat, confirmatur, vt, quoties fuerit V functio

ctio nullius dimensionis ipsarum x et y, toties quoque fore $x(\frac{dV}{dx})+y(\frac{dV}{dy})=0$. Verum vti hoc facillime ostenditur, ita eius inuersum singulari demonstratione indigebat.

Scholion.

14. Vis huius solutionis in eo est posita, quod differentiale functionis V ad istam formam $dV=R\,dS$ reduxerim, ex qua, cum vnicum differentiale dS contineat, liquido sequebatur, V esse functionem quantitatis S tantum; erat autem $S=\frac{x}{y}$, et notum est, omnes functiones ipsius $\frac{x}{y}$ simul esse functiones nullius dimensionis et vicissim. Eodem ergo principio in solutione sequentium problematum vtendum esse intelligetur. Caeterum sine litteris P et Q problema tam proponi, quam resolui, potuisset: si scilicet quaeri debeat indoles functionis V, vt sit $x(\frac{dV}{dx})+y(\frac{dV}{dy})=0$, cum sit $dV=dx(\frac{dV}{dx})+dy(\frac{dV}{dy})$, ob $(\frac{dV}{dy})=-\frac{x}{y}(\frac{dV}{dx})$, erit

$$dV=(dx-\frac{x\,dy}{y}).(\frac{dV}{dx})=y(\frac{dV}{dx}).\,d.\frac{x}{y}$$

manifestum est, V necessario esse debere huius vnius quantitatis $\frac{x}{y}$. Quemadmodum autem, si fuerit $dV=R\,dr$, recte concluditur, esse V functionem ipsius r tantum, ita porro, si fuerit $dV=R\,dr+S\,ds$, concludere debemus, V esse functionem binarum variabilium r et s; quod principium vtilitatem habebit, in indaganda indole functionum trium variabilium, dum quaepiam conditio differentialium proponitur.

Problema 2.

15. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $Px + Qy = nV$, denotante n numerum quemcunque.

Solutio.

Ex conditione praescripta $Px + Qy = nV$ eliciatur altera quantitatum P et Q, puta $Q = \frac{nQ}{y} - \frac{Px}{y}$, qui valor in aequalitate differentiali substitutus dabit:

$$dV = Pdx + \frac{nVdy}{y} - \frac{Pxdy}{y}$$

cui statim ista forma inducatur:

$$dV - \frac{nVdy}{y} = Py\frac{(ydx - xdy)}{yy} = Pyd\frac{x}{y}$$

quae, vt prius membrum integrabile reddatur, per y^{-n} multiplicetur, sicque prodibit:

$$d.y^{-n}V = Py^{1-n}d.\frac{x}{y}$$

vnde concludimus, esse $y^{-n}V$ functionem quantitatis $\frac{x}{y}$, seu functionem nullius dimensionis binarum variabilium x et y. Denotet ergo Z huiusmodi functionem quamcunque nullius dimensionis, et cum sit $y^{-n}V = Z$, erit $V = y^nZ$; talis autem expressio continet omnes functiones homogeneas ipsarum x et y, quarum dimensionum numerus est $= n$.

Coroll. 1.

16. Quando ergo nouerimus, functionem V eius esse indolis, vt sit $nV = x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy})$, pro certo affirmare poterimus, V esse functionem homogeneam, in

in qua binae variabiles vbique n dimensiones adimpleant.

Coroll. 2.

17. Quodsi ergo ponatur $dV = Pdx + Qdy$, erunt etiam P et Q functiones homogeneae ipsarum x et y, sed quarum dimensionum numerus est $n-1$, scilicet vno ordine inferior.

Coroll. 3.

18. Quare si P et Q fuerint functiones homogeneae binarum variabilium x et y, quarum numerus dimensionum sit idem, puta $= n-1$; ac si praeterea fuerit $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$, ita vt $Pdx + Qdy$ sit formula differentialis completa; tum eius integrale facillime assignatur. Erit quippe:

$$\int (Pdx + Qdy) = \frac{Px + Qy}{n}.$$

Dummodo ergo n non euanescat, integrale huiusmodi formularum sine vlla alia operatione exhiberi potest.

Scholion.

19. En ergo solutionem ambarum quaestionum, quas initio commemoraui; quae cum iam contineat specimen methodi, qua in hoc genere est vtendum, eandem ad solutionem aliorum similium problematum adhibere licebit. Cum igitur hic proponatur certa quaedam relatio inter functionem V et quantitates inde deriuatas $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$, ex qua indolem functionis V definiri oportet, vt ordinem quendam in huiusmodi quaestionibus seruem, quoniam tam P et Q, quam V, sunt functiones ipsarum x et y; primum in-

 dolem

dolem alterius litterarum P et Q dari assumam; deinde ad eiusmodi problemata progrediar, in quibus relatio quaedam inter P et Q praescribitur; tum vero ad talia, vbi vel inter P et V, vel inter Q et V, relatio quaedam intercedere debet. Denique vero relationem datam ad omnes tres quantitates V, P et Q extendi assumam, quemadmodum in problemate secundo est factum. Cum autem hic tantum ad quantitates V, $(\frac{dV}{dx})$, $(\frac{dV}{dy})$ respiciamus, euidens est, huiusmodi inuestigationes multo latius extendi posse, dum relatio praescripta alias quantitates ex V deriuatas, veluti $(\frac{ddV}{dx^2})$, $(\frac{ddV}{dxdy})$, et $(\frac{ddV}{dy^2})$, complectitur. Verum tantum abest, vt omnium istiusmodi problematum solutiones promittere audeam, vt potius ea tantum, quae sunt faciliora, sim euoluturus. Mox enim patebit, innumerabilia eiusmodi problemata proponi posse, quorum solutiones primos hos conatus longe superent, neque antequam haec quasi noua Analyseos pars penitius fuerit exculta, sperari queant.

Problema 3.

20. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si P fuerit functio ipsius x tantum, definire indolem functionis V.

Solutio.

Ex parte differentialis Pdx iam functionem V inuenire posse notum est, dum spectata y vt constante, differentiale Pdx integratur, constans arbitraria autem adiicienda alteram variabilem y vtcunque inuoluere assumi-

assumitur. Cum igitur P sit functio ipsius x tantum, erit $\int P dx$ etiam eiusmodi functio, quae sit $=X$, et constans addenda per Y functionem quamcunque ipsius y tantum repraesentetur. Hinc ergo prodibit $V=X+Y$, seu indoles quaesita functionis V in hoc consistet, vt sit V aggregatum duarum functionum, alterius ipsius x tantum, alterius vero ipsius y tantum.

Corollarium.

21. Cum ergo hinc fiat $dV = dX + dY$, manifestum est, si P fuerit functio ipsius x tantum, tum Q fore functionem ipsius y tantum, quae quidem proprietas per se est notissima.

Problema 4.

22. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si P fuerit functio ipsius y tantum, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum P sit functio ipsius y tantum, ex sola parte differentialis Pdx, spectata y vt constante, functio V ita definitur, vt sit $V = Px + Y$, denotante Y functionem quamcunque ipsius y. Quare indoles quaesita functionis V in hoc consistet, vt designantibus P et Y functiones quascunque ipsius y, forma functionis V semper sit huiusmodi $V = Px + Y$.

Coroll. 1.

23. Si ergo $P = \left(\frac{dV}{dx}\right)$ sit functio ipsius y tantum, cum fiat $dV = Pdx + xdP + dY$, erit $Q = \frac{xdP + dY}{dy}$, seu ob $\frac{dP}{dy} = \left(\frac{ddV}{dxdy}\right)$, fiet $Q = x\left(\frac{ddV}{dxdy}\right) + \frac{dY}{dy}$.

Coroll. 2.

24. Quoties igitur fuerit $(\frac{dV}{dx})$ functio ipsius y tantum, toties necesse est, vt sit $(\frac{dV}{dy}) = x(\frac{ddV}{dxdy}) + \frac{dY}{dy}$, vbi $\frac{dY}{dy}$ denotare potest functionem quamcunque ipsius y tantum. Vnde vicissim colligere licet, si fuerit $(\frac{dV}{dy}) = x(\frac{ddV}{dxdy}) + f.y$, fore $(\frac{dV}{dx})$ functionem ipsius y tantum.

Coroll. 3.

25. Simili modo ostendetur, si $Q = (\frac{dV}{dy})$ fuerit functio ipsius x tantum, fore $V = Qy + X$, denotante X functionem quamcunque ipsius x tantum: tum vero etiam, si fuerit $(\frac{dV}{dx}) = y(\frac{ddV}{dxdy}) + f.x$, fore $(\frac{dV}{dy})$ functionem ipsius x tantum.

Problema 5.

26. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si fuerit P functio homogenea ipsarum x et y, cuius dimensionum numerus sit $= n$, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum P sit functio homogenea n dimensionum, si pars differentialis Pdx integretur, spectata y vt constante, integrale erit functio homogenea $n+1$ dimensionum, sit Z talis functio homogenea quaecunque, eritque $V = Z + Y$, denotante Y functionem quamcunque ipsius y tantum, in quo consistit indoles quaesita functionis V.

Coroll.

Coroll.

27. Simili ergo modo oſtendetur, ſi fuerit Q functio homogenea n dimenſionum, fore $V = Z + X$, denotante, vt ante, Z functionem homogeneam quamcunque $n+1$ dimenſionum, et X ipſius x tantum.

Problema 6.

28. Exiſtente $dV = P\,dx + Q\,dy$, ſi fuerit $Q = nP$, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum ſit $Q = nP$, erit $dV = P(dx + n\,dy)$: quare, poſito $x + ny = s$, fiet $dV = P\,ds$. Ex V valorem certum habere nequit, niſi ſit P functio ipſius s, ex qua etiam V erit functio ipſius s. Conſequenter ſi fuerit $Q = nP$, indoles quantitatis V in hoc conſiſtet, vt ſit V functio quaecunque formulae $x + ny$; ſeu ſi character Φ adhibeatur ad functionem quamcunque quantitatis, cui praefigitur, deſignandam, erit $V = \Phi : (x + ny)$.

Problema 7.

29. Exiſtente $dV = P\,dx + Q\,dy$, ſi fuerit $Py + Qx = 0$, inuenire indolem functionis V.

Solutio.

Cum ſit $Py + Qx = 0$, erit $Q = -\frac{Py}{x}$, atque hinc $dV = P\,dx - \frac{Py\,dy}{dx} = \frac{P}{x}(x\,dx - y\,dy)$ Poſito ergo $xx - yy = s$, ob $x\,dx - y\,dy = \frac{1}{2}ds$, fit $dV = \frac{P}{2x}ds$. Quae formu-

formula cum per hypothesin sit integrabilis, necesse est, vt sit $\frac{P}{2x}$ functio ipsius s, vnde etiam V prodibit functio ipsius $s = xx - yy$. Quocirca indoles quaesita in hoc consistet, vt V sit functio quaecunque quantitatis $xx - yy$.

Problema 8.

30. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si fuerit $Q = Pp$, dum p exprimit functionem quamcunque datam ipsarum x et y, definire indolem functionis V.

Solutio.

Habebimus ergo $dV = Pdx + Ppdy = P(dx + pdy)$. Iam consideretur formula $ax + pdy$, quae si non fuerit per se integrabilis, dabitur multiplicator q, qui eam reddat integrabilem. Sit ergo $qdx + pqdy = ds$, eritque s functio quoque data ipsarum x et y, et ob $dv + pdy = \frac{ds}{q}$, habebitur $dV = \frac{P}{q} ds$. Necesse igitur est, vt haec formula sit integrabilis, ideoque indoles quaesita in hoc consistet, vt sit V functio quaecunque quantitatis s, quae quomodo ex x et y sit composita, ex conditione quantitatis datae p colligi debet.

Coroll. 1.

31. Problema hoc satis late patet, cum in eo ratio quaecunque inter quantitates P et Q, seu $(\frac{dV}{dx})$ et $(\frac{dV}{dy})$ proponatur. Si enim sit $P : Q = 1 : p$, quaecunque functio ipsarum x et y pro p fuerit data, qualis futura sit functio V, definiri potest.

Coroll.

Coroll. 2.

32. Quanquam autem ſemper multiplicator q exiſtit, qui formulam $dx + pdy$ integrabilem reddit, tamen ſaepe euenire poteſt, vt ob defectum analyſeos hic multiplicator aſſignari nequeat. Atque his caſibus ſolutio problematis impeditur.

Coroll. 3.

33. Alio autem loco oſtendi, huiusmodi multiplicatores ſemper exhiberi poſſe, ſi aequatio $dx + pdy = 0$ reſolui queat. Quare niſi p eiusmodi fuerit functio ipſarum x et y, vt aequatio $dx + pdy$ reſolui poſſit, huic analyſeos defectui tribui debet, ſi problema reſolui nequeat.

Problema 9.

34. Si ſint X et Y functiones datae, illa ipſius x tantum, haec vero ipſius y tantum, tum vero p ſit functio etiam data ipſarum x et y: definire indolem functionis V, vt poſito $dV = Pdx + Qdy$, ſit $Q = (P + X)p + Y$.

Solutio.

Cum igitur ſit $Q = (P + X)p + Y$, erit aequatio differentialis $dV = Pdx + Ppdy + Xpdy + Ydy$, quae ad hanc reducitur formam:

$$dV = (P + X)(dx + pdy) - Xdx + Ydy$$

vbi partes Xdx et Ydy per ſe ſunt integrabiles. Quaeratur ergo iterum multiplicator q formulam $dx + pdy$

 inte-

integrabilem reddens; fitque $q(dx+pdy)=ds$, atque erit:

$$dV=\frac{P+X}{q}ds-Xdx+Ydy$$

quae forma cum per hypothefin fit integrabilis, necesse eft, vt $\frac{P+X}{q}$ fit functio ipfius s tantum, quae fi ponatur $=S$, prodibit $V=\int Sds-\int Xdx+\int Ydy$; quae eft indoles defideratae functionis V.

Coroll. 1.

35. Cum igitur ex data functione p definiatur functio s, fi pro Σ capiatur functio quaecunque huius quantitatis s, functio quaefita V ita debet effe comparata, vt fit

$$V=\Sigma-\int Xdx+\int Ydy.$$

Coroll. 2.

36. Haec igitur adiectio functionum X et Y folutionem problematis non reddidit difficiliorem; dummodo X fit functio ipfius x tantum, et Y ipfius y tantum. Verum folutio, vt ante, pendet a refolutione aequationis differentialis $dx+pdy=0$, quae fi vires noftras fuperet, etiam problema refoluere non valemus.

Coroll. 3.

37. Poffunt etiam loco X et Y aliae functiones binarum variabilium x et y, puta M et N, affumi, dummodo formula $Mdx+Ndy$ integrationem admittat. Si enim haec conditio proponatur, vt fit $Q-N=(P-M)p$, functio quaefita V ita prodibit expreffa:

$$V=\Sigma+\int(Mdx+Ndy).$$

Problema

Problema 10.

38. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, inuenire, qualis ſit V functio ipſarum x et y, vt fiat $Q = \frac{Py}{x} + nx$.

Solutio.

Cum ſit $Q = \frac{Py}{x} + nx$, erit $dV = \frac{P}{x}(xdx + ydy) + nxdy$. Statuatur $xx + yy = ss$, vt ſit $x = \sqrt{(ss - yy)}$, ac fiet

$$dV = \frac{Ps}{x}ds + nxdy = \frac{Ps}{x}ds + ndy\sqrt{(ss - yy)}$$

vnde patet, V eſſe functionem ipſarum y et s, et quidem talem, vt poſita s conſtante ea differentiata praebeat $ndy\sqrt{(ss - yy)}$. Quare viciſſim functio V reperietur, ſi formula $ndy\sqrt{(ss - yy)}$, ſpectato s vt conſtante, integretur, et inſuper functio quaecunque ipſius s adiiciatur. Cum igitur ſit $\int ndy\sqrt{(ss - yy)} = \frac{1}{2}ny\sqrt{(ss - yy)} + \frac{1}{2}nss\,\text{A}\,\text{ſin.}\,\frac{y}{s}$, erit Φ pro ſigno functionis cuiuscunque aſſumendo:

$$V = \frac{1}{2}nxy + \frac{1}{2}n(xx + yy)\,\text{A}\,\text{tang.}\,\frac{y}{x} + \Phi:(xx + yy)$$

in qua forma functio quaeſita V ſemper debet contineri.

Scholion.

39. Hoc exemplum, vtut valde particulare, tamen non continetur in problemate praecedente, neque in eius amplificatione ipſi in coroll. poſtremo illata, quoniam in formula reducta membrum $nxdy = ndy\sqrt{(ss - yy)}$ non eſt integrabile. Quare probe notetur artificium, quo hic ſum vſus, et quod in hoc

consistit, quod valorem differentialis dV ad duas alias variabiles s et y, scilicet $dV = R ds + T dy$, reuocaui, cuius alterum membrum $T dy$ absolute datur, vnde problema ad primum genus pertinet, in quo binarum quantitatum P et Q alterutra est cognita. Huiusque artificii ope problema sequens multo latius patens resolui poterit.

Problema II.

40. Si sint p et t functiones datae quaecunque binarum variabilium x et y, definire indolem functionis V, vt posito $dV = P dx + Q dy$ sit $Q = Pp + t$.

Solutio.

Habebitur ergo, substituto pro Q isto valore:

$$dV = P(dx + p dy) + t dy$$

vbi pro formula differentiali $dx + p dy$ iterum idoneus multiplicator q quaeratur, qui eam integrabilem reddat. Sit ergo $q(dx + p dy) = ds$, et iam quantitas s tanquam noua variabilis introducatur, per quam et y altera variabilis x definiatur. Hoc modo x aequabitur cuipiam functioni datae ipsarum s et y, quae in t vbique loco x scribatur, sicque fiet t functio quoque data ipsarum s et y Cum ergo ob $dx + p dy = \frac{ds}{q}$ sit $dV = \frac{P}{q} ds + t dy$, erit V eiusmodi functio ipsarum s et y, quae spectata s vt constante differentiata praebeat $t dy$, quare viciffim pro functione V inuenienda integretur formula differentialis $t dy$, spectata s vt constante, sit integrale hoc modo proueniens $\int t dy = T$, quod igitur etiam datur, tum quia quantitas P non datur,

datur, erit $V = T + \Phi . s$. Denique hic pro s et in T restituatur valor ipsius s vi x et y, atque patebit, quomodo functio V ex x et y sit composita.

Exemplum.

41. *Quaeratur indoles functionis* V, *vt posita* $\surd V = P dx + Q dy$, *sit* $Px + Qy = n(xx + yy)$

Cum ergo sit $Q = -\frac{Px}{y} + \frac{n(xx+yy)}{y}$, erit $p = -\frac{x}{y}$ et $t = \frac{n(xx+yy)}{y}$, vnde $dx + p\,dy = dx - \frac{x\,dy}{y}$. Capiatur $q = \frac{1}{y}$, erit $ds = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{yy}$ et $s = \frac{x}{y}$; hincque $x = sy$ et $t = ny(ss+1)$. Quare spectata s vt constante, habebitur $\int t\,dy = \frac{1}{2}nyy(ss+1) = \frac{1}{2}n(xx+yy) = T$; sicque tandem prodit:

$$V = \tfrac{1}{2}n(xx+yy) + \Phi . \tfrac{x}{y}$$

vbi notandum est, $\Phi : \frac{x}{y}$ exprimere functionem quamcunque nullius dimensionis binarum variabilium x et y.

Scholion.

42. Feliciter igitur expediuimus casum, quo relatio inter P et Q per aequationem quamcunque primi gradus exprimitur, in qua scilicet quantitates P et Q non vltra primam dimensionem assurgunt Ex tali enim aequatione Q semper ita definietur, vt sit $Q = Pp + t$, existentibus p et t functionibus quibuscunque datis ipsarum x et y. Verum hic iterum aqua haeret, quoties aequationem $dx + p\,dy = 0$ resoluere non licet, quia tum quantitas s inueniri nequit. Tum vero etiamsi haec quantitas s sit inuenta, cum fuerit imprimis transcen-

 dens,

dens, ex ea plerumque difficillimum erit, variabilem x definire, ita vt tantum binae s et y in calculo superſint. Poterunt quidem ſubſidia excogitari, quibus tametſi ex functione data t variabilis x non eliminetur, tamen formulae tdy id integrale T erui queat, quod prodire debet, ſpectata quantitate s vt conſtante. Verum quantaecunque ſint iſtae difficultates, eae non huic methodo, quam adumbrare coepi, ſunt imputandae. Videamus ergo quousque nobis progredi liceat, ſi relatio inter P et Q per aequationem vel ſecundi, vel ſuperiorum graduum detur.

Problema 12.

43 Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $PQ = \alpha$.

Solutio.

Cum ſit $Q = \frac{\alpha}{P}$, erit $dV = Pdx + \frac{\alpha dy}{P}$, quaeriturque, qualis functio debeat eſſe P, vt iſta formula differentialis $Pdx + \frac{\alpha dy}{P}$ fiat integrabilis. Adhibeamus hic transformationem integralium obuiam, qua eſt $\int z du = zu - \int u dz$, ac reperietur:

$$V = Px + \frac{\alpha y}{P} - \int x dP + \int \frac{\alpha y dP}{PP}.$$

Quare neceſſe eſt, vt haec formula differentialis $dP(\frac{\alpha y}{PP} - x)$ integrabilis exiſtat; id quod fieri nequit, niſi $\frac{\alpha y}{PP} - x$ ſit functio ipſius P; quo caſu etiam integrale $\int dP(\frac{\alpha y}{PP} - x)$ fiet functio ipſius P. Denotet ergo Π functionem quamcunque ipſius P, ac ponatur $\frac{\alpha y}{PP} - x = \Pi$, ex cuius

ius aequationis resolutione quantitas P per x et y definiri intelligitur. Inuenta autem hac functione P habebimus:

$$V = Px + \frac{\alpha y}{P} + \int \Pi\, dP.$$

Coroll. 1.

44. Casus ergo simplicissimus, quo huic problemati satisfit, est si $\Pi = 0$, quo fit $P = \sqrt{\frac{\alpha y}{x}}$, et $\int \Pi\, dP =$ const. Habebimus ergo

$$V = 2\sqrt{\alpha x y} + \text{Const.}$$

nam ob $dV = \frac{dx\sqrt{\alpha y}}{\sqrt{x}} + \frac{dy\sqrt{\alpha x}}{\sqrt{y}}$ erit vtique $PQ = \alpha$.

Coroll. 2.

45. Tum sumto $\Pi = \beta$, erit $P = \frac{\alpha y}{x+\beta}$ et $\int \Pi\, dP = \beta P$. Hoc ergo casu consequemur sequentem functionem satisfacientem:

$$V = x\sqrt{\frac{\alpha y}{x+\beta}} + \sqrt{\alpha y(x+\beta)} + \beta\sqrt{\frac{\alpha y}{x+\beta}} = 2\sqrt{\alpha y(x+\beta)}$$

et generalius satisfacere manifestum est

$$V = 2\sqrt{\alpha(x+\beta)(y+\gamma)}.$$

Coroll. 3.

46. Si velimus functiones magis compositas, quae tamen exhiberi queant, sit $\Pi = \beta PP$, ideoque $\int \Pi\, dP = \frac{1}{3}\beta P^3$. At cum habeamus:

$$\frac{\alpha y}{PP} - x = \beta PP \text{ seu } P^4 = \frac{-xPP + \alpha y}{\beta}, \text{ fiet}$$

$$PP = \frac{-x + \sqrt{(xx + 4\alpha\beta y)}}{2\beta}, \text{ vnde ob}$$

$$V = \frac{PPx + \alpha y + \frac{1}{3}\beta P^4}{P} = \frac{2PPx + 4\alpha y}{3P}$$

et

et ſubſtitutione abſoluta:

$$V = \sqrt{\tfrac{2}{9\beta}}((xx + 4\alpha\beta y)^{\frac{3}{2}} + x(12\alpha\beta y - x^2)).$$

Scholion 1.

47. Eodem modo reſolui poſſe patet problema, ſi Q debeat eſſe functio quaecunque ipſius P. Ponatur enim $dQ = R\,dP$, et fiet $V = Px + Qy - \int (x + Ry)\,dP$. Oportet ergo eſſe $x + Ry$ functionem ipſius P, cuius etiam R eſt functio data. Quare ſi ponatur, vt ante, $x + Ry = \Pi$, ex hac aequatione P per x et y definietur; quo valore deinceps in Q, R et Π ſubſtituto obtinebitur functio $V = Px + Qy - \int \Pi\,dP$ per ſolas binas variabiles x et y expreſſa.

Exemplum.

48. Quaeratur functio V, vt poſito $dV = P\,dx + Q\,dy$, ſit $PP + QQ = aa$, ſeu $Q = \sqrt{(aa - PP)}$: hincque $R = \frac{-P}{\sqrt{(aa - PP)}}$, et $x - \frac{Py}{\sqrt{(aa - PP)}} = \Pi$, vnde P debet definiri. Sumatur autem $\Pi = 0$, fiet $P = \frac{ax}{\sqrt{(xx + yy)}}$, et $Q = \frac{ay}{\sqrt{(xx + yy)}}$, et $V = a\sqrt{(xx + yy)}$.

Scholion 2.

49. At ſi Q non ſolum per P detur, ſed etiam variabiles x et y vtcunque in eius determinationem ingrediantur, tum hoc modo negotium non expedire licet. Verum his caſibus perpendendum eſt, quemadmodum P et Q vt functiones ipſarum x et y conſiderantur, ita quaternarum P, Q, x et y binas quasque

vt

vt functiones binarum reliquarum confiderari poffe. Quare quouis cafu oblato non ad hanc formulam $Pdx+Qdy$ fumus adftricti, quam integrabilem reddi oporteat, fed negotium pariter conficiemus, fi vel hanc $-xdP+Qdy$, vel hanc $Pdx-ydQ$, vel hanc $-xdP-ydQ$ integrabilem reddamus; quin etiam per fubftitutiones nouae variabiles introduci poffunt, quo pacto methodus foluendi vehementer amplificabitur; cuius rei aliquot fpecimina attuliffe iuuabit.

Problema 13.

50. Exiftente $dV=Pdx+Qdy$, fi Q detur vtcunque per x et P, inuenire indolem functionis V.

Solutio.

Cum Q ponatur dari per x et P, habebitur aequatio inter ternas quantitates x, P et Q, ex quo etiam P definiri poterit per x et Q, ita vt P aequetur certae cuipiam functioni ipfarum x et Q. Sumantur ergo x et Q pro binis variabilibus, ex quibus reliqua omnia fint determinanda, et cum fit:

$$V=Qy+\int(Pdx-ydQ)$$

neceffe eft, vt formula differentialis $Pdx-ydQ$ fit integrabilis, cuius integrale fpectetur tanquam functio ipfarum x et Q. Cum igitur P per x et Q detur, quarta autem variabilis y indefinita relinquatur, hoc integrale $\int(Pdx-ydQ)$ inuenietur, fi fpectata Q vt conftante formula Pdx integretur, et ad integrale functio quaecunque ipfius Q adiiciatur. Sit igitur integrale hoc modo ſumtum $\int P\,dx = R$, eritque R functio data ipſarum x et Q, vnde fiat $dR = P\,dx + S\,dQ$, vtraque ſcilicet quantitate x et Q pro variabili ſumta. Quo poſito habebimus $\int (P\,dx - y\,dQ) = R + \Phi.\,Q$, et $V = Qy + R + \Phi.\,Q$. Deſignetur iam differentiale ipſius $\Phi:Q$ per $dQ.\,\Phi':Q$, eritque

$$P\,dx - y\,dQ = P\,dx + S\,dQ + dQ.\,\Phi':Q$$

vnde fit $y = -S - \Phi':Q$. Denique ex hac aequatione $y = -S - \Phi':Q$ vna cum relatione, quae inter Q, P et x intercedit, definiantur per binas variabiles x et y alterae binae P et Q, earumque valores reſtituti oſtendent, qualis functio V debeat eſſe ipſarum x et y; in quo id ipſum, quod quaeritur, conſiſtit.

Coroll. 1.

51. Simili modo, ſi Q detur per y et P, ita, vt x non ingrediatur in hanc relationem, vtendum erit hac forma $V = Px + \int (Q\,dy - x\,dP)$, quae, cum Q conſiderari debeat tanquam functio data ipſarum x et P, paribus operationibus ad integrabilitatem perducetur.

Coroll. 2.

52. Quodſi autem, vel P, vel Q, per x et y determinantur, quaeſtio nihil habet difficultatis. Si enim ſit P functio data ipſarum x et y, quaeratur integrale $\int P\,dx$, ſpectata y vt conſtante, poſitoque $\int P\,dx = R$, erit $V = R + \Phi:y$.

Coroll. 3.

Coroll. 3.

53. Quoties ergo relatio inter quantitates P, Q, x et y per huiusmodi aequationem datur, in quam tantum ternae harum quantitatum ingrediantur, indoles functionis V per problemata iam tractata definiri poteſt.

Scholion.

54. Ex hoc ergo genere ſuperſunt caſus, quibus relatio data omnes quatuor litteras P, Q, x et y continet. At pro hoc iam eum caſum euoluimus, quo erat $Q = Pp + t$, exiſtentibus p et t functionibus quibuscunque ipſarum x et y, cuius ſolutio in Probl. 11 eſt exhibita. Quia vero loco binarum variabilium x et y, ſequentia paria ſimili modo tractari poſſunt:

I. Si ſit $Q = xM + N$,

exiſtentibns M et N functionibus quibuscunque ipſarum P et y.

II. Si ſit $P = yM + N$,

exiſtentibus M et N functionibus quibuscunque ipſarum Q et x.

III. Si ſit $y = xM + N$,

exiſtentibus M et N functionibus quibuscunque ipſarum P et Q. His ſcilicet quoque caſibus ſolutio per praecepta §. 40 tradita inueniri poterit.

Exemplum.

55. *Exiſtente* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat definire functionem* V, *vt ſit* $xyPQ = a$.

 Cum

Cum ergo ſit $Q=\frac{\alpha}{Pxy}$, erit

$$dV=Pdx+\frac{\alpha\,dy}{Pxy}$$

qui caſus in nullo tractatorum continetur. Verum poſito $ly=u$, cum ſit $dV=Pdx+\frac{\alpha\,du}{Px}$, ſi u loco y ſpectemus, hancque formam cum $Pdx+Qdy$ comparemus, erit iſtud $Q=\frac{\alpha}{Px}$, ideoque per x et P tantum datur; ita vt hoc exemplum reductum ſit ad praeſens problema. Ne igitur hoc Q cum principali confundatur, cum ſit $P=\frac{\alpha}{Qx}$, habebimus ſcribendo u loco y:

$$V=Qy+\int\left(\frac{\alpha\,dx}{Qx}-y\,dQ\right)$$

ſumta ergo Q conſtante, erit $\int\frac{\alpha\,dx}{Qx}=R=\frac{\alpha}{Q}lx$, hincque $S=\frac{-\alpha\,lx}{QQ}$: vnde fit $u=ly=\frac{\alpha\,lx}{QQ}-\Phi':Q$, et

$$V=Qly+\frac{\alpha\,lx}{Q}+\Phi:Q$$

exiſtente $\Phi:Q=\int dQ\,\Phi':Q$, vbi pro $\Phi':Q$ ſumi poteſt functio quaecunque ipſius Q.

Sit ergo pro caſu ſimpliciſſimo $\Phi':Q=0$, eritque $Q=\sqrt{\frac{\alpha\,lx}{ly}}$, et $V=2\sqrt{\alpha lx.ly}+$ Conſt.
Ac ſi ſumatur $\Phi':Q=n-\frac{\alpha\,m}{QQ}$, fiet $\Phi:Q=nQ+\frac{\alpha\,m}{Q}+C$ et $ly+n=\frac{\alpha(lx+m)}{QQ}$, hincque $Q=\sqrt{\alpha\frac{lx+m}{ly+n}}$, et

$$V=2\sqrt{\alpha(lx+m)(ly+n)}+\text{Conſt.}$$

Problema 14.

56. Exiſtente $dV=Pdx+Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $PP+QQ=xx+yy$.

Solutio.

Hoc problema in nullo casuum hactenus tractatorum continetur; verumtamen idonea transformatione ad casum facillimum reduci potest. Ponatur enim $PP + QQ = xx + yy = tt$, sitque angulis duobus indefinitis Φ et θ introducendis:

$P = t\,\text{sin.}\,\Phi$; $Q = t\,\text{cos.}\,\Phi$; $x = t\,\text{sin.}\,\theta$ et $y = t\,\text{cos.}\,\theta$ ob $dx = dt\,\text{sin.}\,\theta + td\theta\,\text{cos.}\,\theta$, et $dy = dt\,\text{cos.}\,\theta - td\theta\,\text{sin.}\,\theta$, erit:
$dV - tdt(\text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,\theta + \text{cos.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\theta) - ttd\theta(\text{cos.}\,\Phi\,\text{sin.}\,\theta - \text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\theta)$
seu $dV = tdt\,\text{cos.}\,(\theta - \Phi) - ttd\theta\,\text{sin.}\,(\theta - \Phi)$.
At est $\int tdt\,\text{cos.}\,(\theta - \Phi) = \frac{1}{2}tt\,\text{cos.}\,(\theta - \Phi) + \frac{1}{2}\int tt\,(d - \theta\Phi)\,\text{sin.}\,(\theta - \Phi)$ vnde fit:

$$V = \tfrac{1}{2}tt\,\text{cos.}\,(\theta - \Phi) - \tfrac{1}{2}\int tt\,(d\theta + d\Phi)\,\text{sin.}\,(\theta - \Phi).$$

Cum igitur haec formula integrabilis esse debeat, necesse est, vt sit $tt\,\text{sin.}\,(\theta - \Phi) = \text{funct.}\,(\theta + \Phi)$.
Quare cum sit $tt = xx + yy$ et $\text{tang.}\,\theta = \frac{x}{y}$, hinc angulus Φ per x et y determinabitur, cuius valor substitutus dabit functionem V, per x et y expressam.
Sit, vt functiones algebraicas simpliciores eliciamus,
$tt\,\text{sin.}\,(\theta - \Phi) = \alpha\,\text{sin.}\,(\theta + \Phi) + \beta\,\text{cos.}\,(\theta + \Phi)$, eritque

$$V = \tfrac{1}{2}tt\,\text{cos.}\,(\theta - \Phi) + \tfrac{1}{2}\alpha\,\text{cos.}\,(\theta + \Phi) - \tfrac{1}{2}\beta\,\text{sin.}\,(\theta + \Phi)$$

vnde, si eliminetur tt, prodit:

$$2V\,\text{sin.}\,(\theta - \Phi) = \alpha\,\text{sin.}\,2\theta + \beta\,\text{cos.}\,2\theta = \frac{2\alpha xy - \beta(xx - yy)}{xx + yy}.$$

At euolutis illis angulis, fit:
$ttx\,\text{cos.}\,\Phi - tty\,\text{sin.}\,\Phi = \alpha x\,\text{cos.}\,\Phi + \alpha y\,\text{sin.}\,\Phi + \beta y\,\text{cos.}\,\Phi - \beta x\,\text{sin.}\,\Phi$
ideoque $\text{tang.}\,\Phi = \frac{ttx - \alpha x - \beta y}{tty + \alpha y - \beta x}$ et

sec. $\Phi = \frac{\sqrt{(t^6 - 2\alpha tt(xx-yy) - 4\beta ttxy + \alpha\alpha tt + \beta\beta tt)}}{tty + \alpha y - \beta x}$
sit $T = t\sqrt{(t^4 - 2\alpha(xx-yy) - 4\beta xy + \alpha\alpha + \beta\beta)}$
erit si $\Phi = \frac{ttx - \alpha x - \beta y}{T}$ et cos $\Phi = \frac{tty + \alpha y - \beta x}{T}$
hincque sin. $(\theta - \Phi) = \frac{2\alpha xy - \beta(xx-yy)}{Tt}$, quo valore substituto, orietur $V = \frac{T}{2t}$ ideoque

$$V = \tfrac{1}{2}\sqrt{((xx+yy)^2 - 2\alpha(xx-yy) - 4\beta xy + \alpha\alpha + \beta\beta)}$$

quae functio etiam hoc modo repraesentari potest:

$$V = \tfrac{1}{2}\sqrt{((\alpha - xx + yy)^2 + (\beta - 2xy)^2)}.$$

Casus simplicissimus prodit sumendo $\alpha = 0$, et $\beta = 0$, quo fit $V = \frac{1}{2}(xx+yy)$, et $dV = xdx + ydy$.

Scholion.

57. Ex hoc problemate intelligitur, quomodo huiusmodi quaestiones, quae dum omnes quatuor litterae in relationem praescriptam ingrediuntur, solutu difficillimae videntur, idonea tamen substitutione interdum ad casus iam tractatos reduci queant. Neque vero adhuc modum perspicio, quo in genere, vtcunque relatio inter quatuor quantitates P, Q, x et y fuerit comparata, solutio obtineri possit; plurima autem alia huiusmodi exempla afferre possem, in quibus reductio ad casus iam tractatos perfici queat; sed quia hoc argumentum minime exhaurire confido, ad sequentia capita progredior, quando relatio praescripta praeter quantitates P, Q, x et y etiam ipsam functionem quaesitam V complectitur: vbi quidem per se est perspicuum, si relatio inter V, x et y tantum proponeretur, ne quaestionem quidem fore, cum functio V immedia-

mediate per x et y daretur. Quare ab eiusmodi problematibus exordiar, vbi relatio praescripta praeter functionem V alterutram quantitatum P et Q vel etiam ambas implicat; dum variabiles x et y ipsae vel simul ingrediuntur, vel secus. Facile autem intelligitur, haec problemata multo esse difficiliora praecedentibus.

Problema 15.

58. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $P = nV$.

Solutio.

Cum sit $P = nV$, erit $dV = nVdx + Qdy$, seu $dV - nVdx = Qdy$. Multiplicetur prius membrum per e^{-nx}, vt fiat integrabile, eiusque integrale $e^{-nx}V = \int e^{-nx}Qdy$ aequari debebit functioni cuicunque ipsius y, quae sit $= Y$. Vnde functio quaesita erit $V = e^{nx}Y$.

Aliter.

Cum V debeat esse eiusmodi functio ipsarum x et y, vt eius differentiale sit $dV = nVdx + Qdy$; perspicuum est, si functio V differentietur posita y constante, proditurum esse $dV = nVdx$. Quare vicissim ex integratione formulae $dV = nVdx$ functio V inuenietur, si y vt constans spectetur; tum vero constans per integrationem ingressa quantitatem y vtcunque inuoluere poterit. At aequatio $dV = nVdx$ integrata praebet $lV = nx + lY$, seu $V = e^{nx}Y$ vt ante.

Coroll.

Coroll. 1.

59. Eodem modo resolui poterit quaestio latius patens, si P debeat esse functio quaecunque ipsius V. Consideretur enim, spectata y vt constante, haec aequatio differentialis $dV = P dx$, quae cum duas tantum variabiles contineat V et x integretur, constanti autem ingressa quantitas y vtcunque inuoluatur.

Coroll. 2.

60. Quia binae variabiles x et y sunt inter se permutabiles, eodem modo resoluitur problema, si Q debeat esse functio quaecunque ipsius V.

Problema 16.

61. Existente $dV = P dx + Q dy$, definire indolem functionis V, vt P fiat functio quaecunque ipsarum V et x.

Solutio.

Cum igitur P detur per V et x, si y vt constantem spectemus, habebimus hanc aequationem $dV = P dx$ inter duas variabiles x et V. Integretur itaque ea, et loco constantis in aequationem integralem introducatur functio quaecunque ipsius y; hoc modo obtinebitur aequatio inter V, x et y, qua indoles functionis V per x et y definietur.

Coroll. 1.

62. Quaecunque igitur relatio inter ternas quantitates V, P et x proponatur, siue ex ea V per x

et

et P, siue P per V et x, siue x per V et P definiatur, solutio problematis semper erit in promtu.

Coroll. 2.

63. Ob permutabilitatem variabilium x et y, eodem modo problema soluetur, si relatio quaecunque inter Q, V et y proponatur: neque opus est, vt hunc casum seorsim euoluamus.

Exemplum 1.

64. *Posito* $dV = Pdx + Qdy$ *oporteat esse* $P = \frac{mV}{x} + nx$; spectata ergo y vt constante, erit $dV = \frac{mVdx}{x} + nxdx$ seu $dV - \frac{mVdx}{x} = nxdx$, cuius integralis est

$$\frac{V}{x^m} = \frac{nx^{2-m}}{2-m} + Y$$

existente Y functione quacunque ipsius y. Quare erit

$$V = x^m Y + \frac{n}{2-m} xx$$

si esset $m = 2$, foret $V = xxY + nxxlx$

Exemplum 2.

65. *Posito* $dV = Pdx + Qdy$ *oporteat esse* $aV = P(aa - xx)$.

Cum ergo sit $P = \frac{aV}{aa-xx}$ erit, sumta y constante:

$$dV = \frac{aVdx}{aa-xx} \text{ seu } \frac{dV}{V} = \frac{adx}{aa-xx},$$

cuius integrale est $lV = \frac{1}{2} l \frac{a+x}{a-x} lY$, vnde habebitur $V = Y \surd \frac{a+x}{a-x}$, denotante Y functionem quamcunque ipsius y.

Problema 17.

65 Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, ſi P fiat functio quaecunque data ipſarum x, y et V.

Solutio.

Aſſumo hic, relationem propoſitam contineri aequatione quacunque inter quatuor quantitates x, y, V et P; ex qua idcirco P per x, y et V definire liceat. Spectetur igitur y vt quantitas conſtans, et cum ſit $dV = Pdx$, haec aequatio iam duas tantum variabiles x et V inuoluet. Integretur igitur ea, et loco conſtantis introducatur functio quaecunque ipſius y, hocque modo prodibit aequatio, naturam functionis V oſtendens.

Corollarium.

67. Simili ergo modo problema ſoluetur, ſi proponatur relatio quacunque inter quatuor quantitates x, y, Q et V, quo caſu hoc tantum diſcrimen obſeruetur, vt primum quantitas x tanquam conſtans ſpectetur.

Exemplum.

68. *Poſito* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat eſſe* $V = \frac{Px}{y}$. Cum igitur ſit $P = \frac{Vy}{x}$, erit, ſumta y conſtante:

$$dV = \frac{Vydx}{x}, \text{ ideoque } lV = ylx + lY$$

vnde prodit functio quaeſita $V = x^y Y$.

Scholion.

Scholion.

69. Quodsi ergo in relationem propositam altetrutra tantum quantitatum P et Q ingrediatur, problemata sunt solutu facilia. Verum si vtraque quantitas P et Q insit, maior difficultas occurrit, quae quandoque tanta est, vt superari nullo modo queat. Quoniam igitur hoc casu solutionem generalem expectare non licet, nonnulla exempla, quae quidem satis late pateant, percurramus.

Problema 18.

70. Existente $dV = Pdx + Qdy$, inuenire indolem functionis V, vt fiat $V = mPx + nQy$.

Solutio.

Cum hinc sit $Q = \frac{V - mPx}{ny}$, erit:

$$dV - \frac{Vdy}{ny} = Pdx - \frac{mPxdy}{ny} = \frac{P}{ny}(nydx - mxdy).$$

Quaeratur multiplicator, qui formulam $nydx - mxdy$ reddat integrabilem, qui cum sit $\frac{1}{xy}$, ideoque

$$dV - \frac{Vdy}{ny} = \frac{Px}{n}\left(\frac{ndx}{x} - \frac{mdy}{y}\right)$$

ponatur $nlx - mly = lz$ seu $z = \frac{x^n}{y^m}$; vnde fit $x = y^{\frac{m}{n}} z^{\frac{1}{n}}$, qui valor loco x substitui concipiatur. Quare cum sit $dV = \frac{Vdy}{ny} + \frac{Pxdz}{nz}$; quantitas V spectari poterit tanquam functio binarum quantitatum y et z: quae igitur talis esse debet, vt sumta z constante fiat $dV = \frac{Vdy}{ny}$. Hinc ergo integrando prodibit:

$$lV = \tfrac{1}{n}ly + lZ \text{ seu } V = y^{\frac{1}{n}}Z$$

 sumta

sumta pro Z functione quacunque ipsius $z = \frac{x^n}{y^m}$: sicque habebitur $V = y^{\frac{1}{n}} \Phi : \frac{x^n}{y^m}$.

Coroll. 1.

71. Cum sit $\frac{x^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{1}{n}}}$ functio ipsius $\frac{x^n}{y^m}$, erit etiam $V = x^{\frac{1}{m}} \Phi \frac{x^n}{y^m}$. Tum vero etiam ita exhiberi potest: $V = x^{\frac{1}{m}} \Phi . \frac{x^{\lambda n}}{y^{\lambda m}}$; vel $V = y^{\frac{1}{n}} \Phi : \frac{x^{\lambda n}}{y^{\lambda m}}$, sumto pro n numero quocunque.

Coroll. 2.

72. Si sit $m = n$, casus habebitur functionum homogenearum supra tractatus. Sumto enim $\lambda = \frac{1}{n}$, denotabit $\Phi : \frac{x}{y}$ functionem quamcunque nullius dimensionis ipsarum x et y: et V fiet earundem functio homogenea, cuius dimensionum numerus est $= \frac{1}{n}$.

Coroll. 3.

73. Si ponamus in genere $x^{\frac{1}{m}} = t$ et $y^{\frac{1}{n}} = u$; tum vero capiamus $\lambda = \frac{1}{mn}$, habebimus $V = t \Phi . \frac{t}{u}$, seu V erit functio homogenea vnius dimensionis binarum quantitatum t et u.

Scholion.

74. Si desideretur, vt sit $V = mP + nQ$, solutio aeque parum habebit difficultatis. Nam ob $Q = \frac{V}{n} - \frac{mP}{n}$ erit

erit $dV-\frac{Vdy}{n}=P(dx-\frac{mdy}{n})$. Statuatur $x-\frac{my}{n}=z$, vt fit $dV=\frac{Vdy}{n}+Pdz$: iam fpectata z vt conftante, erit $lV=\frac{y}{n}+\Phi:z$, ideoque

$$V=e^{\frac{y}{n}}\Phi:(nx-my).$$

At fi debeat effe $V=mPy+nQx$, ob $Q=\frac{V-mPy}{nx}$, erit $dV=P(dx-\frac{mydy}{nx})+\frac{Vdy}{nx}$. Statuatur $nxx-myy=zz$, vt fit $x=\sqrt{\frac{zz+myy}{n}}$, et cum fiat:

$$dV=\frac{Vdy}{\sqrt{n(zz+myy)}}+\frac{P}{nx}zdz,$$

fpectetur quantitas z vt conftans, et ob $\frac{dV}{nV}=\frac{dy}{\sqrt{(nzz+mnyy)}}$ erit $lV=\frac{1}{\sqrt{mn}}l(y\sqrt{mn}+\sqrt{n(zz+myy)})+lZ$, ideoque ob $\sqrt{n(zz+myy)}=nx$, prodibit:

$$V=(y\sqrt{m}+x\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{mn}}}\Phi:(nxx-myy).$$

Quare fi effe debeat $V=Py+Qx$, erit:

$$V=(x+y)\Phi:(xx-yy).$$

Problema autem fequens omnes huiusmodi cafus in fe complectetur.

Problema 19.

75. Si p fit functio quaecunque data ipfarum x et y, at M functio quaecunque etiam data ipfarum x, y et V, definire indolem functionis V, vt, pofito $dV=Pdx+Qdy$, fiat $Q=Pp+M$.

Solutio.

Subftituto hoc loco Q valore, habemus:

$$dV=Mdy+P(dx+pdy).$$

 Quae-

Quaeratur multiplicator q, formulam $dx+pdy$ integrabilem reddens, sitque $\int q(dx+pdy)=z$: vnde valor ipsius x definiatur per y et z, isque in M, quatenus x inest, loco x substituatur, quo facto erit:

$$dV = M\,dy + \frac{P\,dz}{q}$$

sicque V considerari poterit vt functio ipsarum y et z. Spectetur nunc z vt quantitas constans, et cum sit $dV = M\,dy$, vbi duae tantum variabiles y et V inesse sunt intelligendae, integretur haec aequatio et loco constantis introducatur functio quaecunque ipsius z: in qua si loco z valor in x et y, scilicet: $\int q(dx+pdy)$ restituatur, illa aequatio $dV = M\,dy$ integrata exhibebit naturam functionis V, quemadmodum ea a binis variabilibus x et y pendere debet.

Exemplum.

76. *Posito* $dV = P\,dx + Q\,dy$, *oportet esse* $V = Pyy + Qxx$. Est ergo $Q = -\frac{Pyy}{xx} + \frac{V}{nx}$, vnde fit

$$dV = \frac{V\,dy}{xx} + P\left(dx - \frac{yy\,dy}{xx}\right)$$

Sumatur $q = xx$, erit $\int(xx\,dx - yy\,dy) = z = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3$ seu $x^3 = y^3 + 3z$, ideoque $xx = (y^3+3z)^{\frac{2}{3}}$. Sumto igitur z constante, habetur

$$\frac{dV}{V} = \frac{dy}{(y^3+3z)^{\frac{2}{3}}}$$

Sit itaque S integrale formulae $\frac{dy}{(y^3+3z)^{\frac{2}{3}}}$, dum z constans assumitur, et obtinebitur:

V =

$$V = e^S \phi : z = e^S \Phi : (x^3 - y^3),$$

scilicet in S loco z vbique eius valor $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3$ substitui debet.

Problema 20.

77. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt sit $V = nPQ$.

Solutio.

Ergo ob $Q = \frac{V}{nP}$ erit

$$dV = Pdx + \frac{Vdy}{nP}.$$

Quo iam V ex posteriori membro possit separari, ponatur $P = R\sqrt{V}$, prodibitque:

$$\frac{dV}{\sqrt{V}} = Rdx + \frac{dy}{nR},$$

vnde conuertendo obtinetur:

$$2\sqrt{V} = Rx + \frac{y}{nR} - \int dR\left(x - \frac{y}{nRR}\right).$$

Quare necesse est, vt $x - \frac{y}{nRR}$ sit functio ipsius R tantum; ac tali functione assumta definiri poterit R per x et y, vnde etiam functio quaesita V per x et y expressa reperietur.

Aliter.

Cum sit $V = nPQ$, eliminetur V, vt habeatur haec aequatio:

$$nPdQ + nQdP = Pdx + Qdy$$

ex qua fit $dy = -\frac{Pdx}{Q} + \frac{nPdQ}{Q} + ndP$,

hincque $y = nP + \int \frac{P}{Q}(ndQ - dx)$.

Necesse ergo est, vt $\frac{P}{Q}$ sit functio quantitatis $nQ - x$.

Pona-

Ponatur $nQ - x = z$; sitque $\int \frac{P}{Q} dz = \Phi : z$ erit $\frac{P}{Q} = \Phi' : z$ et $y = nP + \Phi \cdot z = nQ\Phi' : z + \Phi : z$. At est $V = nQQ\Phi' : z$, vnde $Q = \sqrt{\frac{V}{n\Phi' : z}}$; sicque habebuntur hae aequationes:

$$\sqrt{\frac{nV}{\Phi' : z}} = x + z \quad \text{et} \quad y = \Phi z + \sqrt{nV\Phi' : z},$$

ex quibus conficitur $nV = (x+z)(y - \Phi z)$: ac si eliminetur quantitas z, orietur functio V per x et y expressa.

Coroll. 1.

78 Capiatur z constans, seu $ndQ - dx = 0$, fiet $Q = \frac{x+a}{n}$ et $y = nP - b$, seu $P = \frac{y+b}{n}$; vnde oritur $V = \frac{(x+a)(y+b)}{n}$ qui est casus simplicissimus.

Coroll. 2.

79 Si statuatur $\Phi' : z = a$, erit $\Phi z = az + b$, vnde fit:

$$\sqrt{\frac{nV}{a}} = x + z \quad \text{et} \quad nV = (y - az - b)\sqrt{\frac{nV}{a}} \quad \text{seu} \quad \sqrt{naV} = y - b - az,$$

ex quibus coniunctis nanciscimur: $2\sqrt{naV} = ax + y - b$, hincque $V = \frac{(ax + y - b)^2}{4na}$; qui est alter casus simplicissimus.

Coroll. 3.

80. Sit $\Phi' : z = \frac{1}{(az+b)^2}$; vt sit $\Phi : z = -\frac{1}{a(az+b)} + c$ et fiet:

$(az+b)\sqrt{nV} = x + z$ et $y - c + \frac{1}{a(az+b)} = \frac{\sqrt{nV}}{az+b}$ seu $a(az+b)(y-c) = a\sqrt{nV} - 1$: at inde est $z = \frac{x - b\sqrt{nV}}{a\sqrt{nV} - 1}$, ideoque $az + b = \frac{ax - b}{a\sqrt{nV} - 1}$; hocque valore substituto:

a

$a(ax-b)(y-c)=(a\sqrt{n}V-1)^2$, quae euolutio praebet:

$$V=\frac{1+a(ax-b)(y-c)+2\sqrt{a(ax-b)(y-c)}}{naa}.$$

Problema 21.

81. Existente $dV=Pdx+Qdy$, si detur V vtcunque per P et Q, definire indolem functionis V, seu quemadmodum V per x et y determinetur.

Solutio.

Cum igitur sit V functio binarum quantitatum P et Q, ponatur eius differentiale $dV=MdP+NdQ$, eruntque etiam M et N functiones datae ipsarum P et Q. Quare cum sit

$MdP+NdQ=Pdx+Qdy$, erit

$dy=-\frac{Pdx}{Q}+\frac{MdP+NdQ}{Q}$, ideoque

$y=-\frac{Px}{Q}+\int(xd.\frac{P}{Q}+\frac{MdP}{Q}+\frac{NdQ}{Q})$.

Ponatur $P=QS$, qui valor in M et N loco P substitui intelligatur, ita vt iam variabiles Q et S considerandae occurrant, fietque:

$$y=-Sx+\int(dS(x+M)+\frac{dQ}{Q}(N+MS)).$$

Cum hic M et N sint functiones datae ipsarum Q et S, sumatur S pro constante, ac ponatur integrale:

$\int\frac{dQ}{Q}(N+MS)=R+\Phi:S$

erit ergo $x+M=(\frac{dR}{dS})+\Phi':S$, existente $\Phi S=\int dS\Phi':S$ et $y=MS-S(\frac{dR}{dS})-S\Phi'S+R+\Phi:S$.

Quia nunc R et M dantur per Q et S, et ob $P=QS$ etiam V detur per Q et S. Si haec relatio cum his binis coniungatur:

$$x=-M+\left(\frac{dR}{dS}\right)+\Phi':S, \text{ et } y=-Sx+R+\Phi:S$$

poterunt hinc eliminari binae quantitates S et Q, quo facto prodibit aequatio, qua V determinabitur per x et y.

Exemplum I.

82. *Existente* $dV=Pdx+Qdy$, *oporteat esse* $V=mPP+nQQ$.

Cum ergo sit $dV-2mPdP+2nQdQ$, erit $M=2mP$, et $N=2nQ$, seu $M=2mQS$ ob $P=QS$, ita vt sit $V=QQ(mSS+n)$.

Habebimus ergo $N+MS=2Q(mSS+n)$, ideoque spectata S vt constante:

$$R=\int\frac{dQ}{Q}(N+MS)=2Q(mSS+n),$$

ac proinde $\left(\frac{dR}{dS}\right)=4mQS$,

Vnde has tres aequationes adipiscimur:

I. $V=QQ(mSS+n)$

II $x+2mQS=4mQS+\Phi':S$ seu $x=2mQS+\Phi':S$

III. $y+Sx=2Q(mSS+n)+\Phi:S$

seu $y=2nQ+\Phi:S-S\Phi':S$.

Quodsi ex II et III eliminetur Q, erit:

IV. $nx-mSy=(mSS+n)\Phi':S-mS\Phi:S$

ex iisdem vero coniunctis fit $Q=\frac{Sx+y-\Phi S}{2(mSS+n)}$, quae cum prima dat $\sqrt{}:2\sqrt{}V(mSS+n)=Sx+y-\Phi:S$.

Quare

Quare superest, vt ex IV et V eliminetur S, sicque prodibit functio V per x et y expressa.

Sit $\Phi':S = a$, erit $\Phi:S = aS + b$, et

$$\text{IV. } nx - mSy = na - mbS$$

$$\text{V. } 2\sqrt{V(mSS + n)} = Sx + y - aS - b.$$

Inde est $S = \frac{n(x-a)}{m(y-b)}$, quo valore substituto, erit:

$$2\sqrt{mnV} = \sqrt{(n(x-a)^2 + m(y-b)^2)}$$

hincque $V = \frac{n(x-a)^2 + m(y-b)^2}{4mn}$.

Exemplum 2.

83. *Existente* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat esse* $V = \frac{P}{Q}$.

Erit ergo $M = \frac{1}{Q}$; $N = -\frac{P}{QQ} = -\frac{S}{Q}$ ob $P = QS$ et $V = S$ atque $N + MS = 0$, vnde fit $R = 0$. Quare prodit:

$$x + \frac{1}{Q} = \Phi':S \text{ et } y + Sx = \Phi:S$$

et quia est $S = V$, ita functio V per x et y determinatur, vt sit $y + Vx = \Phi:V$.

Ponatur $\Phi:V = \frac{\alpha + 2\beta V + \gamma VV}{2\delta + 2\varepsilon V}$, vt fiat:

$$2\delta y + 2\varepsilon Vy + 2\delta Vx + 2\varepsilon VVx = \alpha + 2\beta V + \gamma VV$$

hincque $VV = \frac{2V(\delta x + \varepsilon y - \beta) + 2\delta y - \alpha}{\gamma - 2\varepsilon x}$ et

$$V = \frac{\delta x + \varepsilon y - \beta \pm \sqrt{((\delta x - \varepsilon y)^2 + 2(\alpha\varepsilon - \beta\delta)x + 2(\gamma\delta - \beta\varepsilon)y + \beta\beta - \alpha\gamma)}}{\gamma - 2\varepsilon x}$$

si sit γ et $\varepsilon = 0$, erit $V = \frac{2\delta y - \alpha}{2\beta - 2\delta x}$ seu $V = \frac{y - m}{n - x}$.

Scholion.

84. Plures aliae huiusmodi quaeſtiones proponi ac reſolui poſſent, ſed quia earum ſolutio iisdem principiis, quibus hactenus ſum vſus, innititur, iis multiplicandis non immoror, cum allatae iam ſufficere videantur, ad elementa huius nouae methodi condenda. Nonnulla adhuc adiici poſſent pro caſibus, quibus huiusmodi etiam formulae $(\frac{ddV}{dx^2})$, $(\frac{ddV}{dxdy})$, $(\frac{ddV}{dy^2})$ in relationem propoſitam ingrediuntur, item quando functio quaerenda per tres pluresue variabiles definire debet; verum ne haec tractatio nimis fiat longa, ea in aliam occaſionem reſeruabo.

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE MOTV VIBRATORIO FILI FLEXILIS, CORPVSCVLIS QVOTCVNQVE ONVSTI,

Auctore

L. EVLERO.

I.

Considero hic filum perfecte flexile, simulque omni inertia destitutum, quod in datis interuallis sit oneratum ponduscùlis quibuscunque A, B, C, D, etc. concipio autem filum hoc in terminis I et O firmiter fixum, et extensum data quadam vi; ita vt in statu naturali situm teneat rectilineum IO, in quo acquiescat. Quodsi autem a causa quacunque de hoc situ deturbetur, ita vt singula pondușcula A, B, C, D etc. ad datas distantias a recto IO depellantur, subitoque dimittantur, totum filum certo quodam motu agitabitur, quem hic inuestigare constitui. Ne autem solutio huius quaestionis vires analyseos penitus superet, tam ponduscula, quam interualla, ad quae a recta IO fuerint depulsa, tanquam infinite parua spectabo, vnde hoc commodum sum assecuturus, vt viae, quas singula ponduscula motu suo percurrent, sint rectae ad IO normales, ac tensio in omnibus fili partibus mansura sit perpetuo eadem. Tab. I. Fig. I.

2.

2. Facta hac hypotheſi, interualla ponduſculorum etiam durante motu nullam mutationem recipient, quae cum ſint data et conſtantia vocentur:

$IA = a$; $AB = b$; $BC = c$; $CD = d$; $DE = e$; $EF = f$ etc.

eritque etiam

$IP = a$; $PQ = b$; $QR = c$; $RS = d$; $ST = e$; $TV = f$; etc.

maiusculae autem litterae A, B, C, D, etc. ipſas maſſas ſingulorum corpuſculorum exprimant. Deinde ſit vis, qua filum tenditur $= K$; et graecae litterae α, β, γ, δ, etc. denotent interualla, ad quae initio ſingula corpuscula A, B, C, D etc. a linea recta IO fuerint diducta. Quibus poſitis, quaeſtio huc redit, vt elapſo ab iſto initio tempore quocunque, quod ſit ω min. ſec. ſtatus et motus fili determinetur.

3. Ponamus ergo, hoc tempore filum cum corpuſculis in eum ſitum perueniſſe, quem figura oſtendit, et deſignemus iam ſingulorum corpuſculorum ab axe IO diſtantias:

$AP = p$; $BQ = q$; $CR = r$; $DS = s$; $ET = t$; etc.

quas prae interuallis a, b, c, d, tanquam minimas ſpectare licebit. Cum igitur tenſio in ſingulis fili partibus ſit eadem $= K$, quodlibet corpuſculum a tanta vi vtrinque ſollicitabitur, et quatenus hae vires ſibi non ſunt e diametro oppoſitae, eatenus inde vis naſcetur, qua vnumquodque corpuſculum recta ad axem pelletur, vel ab eo repelletur. In has ergo ſingulas vires ante omnia erit inquirendum, quoniam ab iis corpuſcula motus ſui determinationem, hoc eſt, ſiue accele-

accelerationem, siue retardationem, nanciscuntur, quandoquidem per hypothesin certum est, singula corpuscula A, B, C, D etc. perpetuo per rectas AP, BQ, CR etc. ad axem normales agitari.

4. Si igitur secundum regulas cognitas has vires colligamus, deprehendemus:

Corpusculum	Vrgeri in directione	Vi
A	AP	$K\left(\frac{p}{a}+\frac{p-q}{b}\right)$
B	BQ	$K\left(\frac{q-p}{b}+\frac{q-r}{c}\right)$
C	CR	$K\left(\frac{r-q}{c}+\frac{r-s}{d}\right)$
D	DS	$K\left(\frac{s-r}{d}+\frac{s-t}{e}\right)$
E	ET	$K\left(\frac{t-s}{e}+\frac{t-v}{f}\right)$
F	FV	$K\left(\frac{v-t}{f}+\frac{v-x}{g}\right)$
G	GX	$K\left(\frac{v-x}{g}+\frac{x}{h}\right)$.

Hic scilicet posui, corpusculum septimum G esse vltimum; manifestum autem est, quotcunque fuerint ponduscula, quomodo has formulas construi oporteat.

5. Exprimunt autem hae formulae vires motrices, quibus singula corpuscula axem IO versus incitantur; earum ergo quaelibet per massam ponduscuIi diuisa praebebit accelerationem eius. Verum ex distantia cuiusque corpusculi ab axe, quae in genere sit $=z$, cum tempore generatim expresso t collata, oritur quoque per regulas mechanicas acceleratio $=-\frac{2ddz}{dt^2}$, sumto elemento temporis constante. Sed haec formula non est ad mensuram temporis in minutis secundis exprimendi,

mendi, quam hic assumsimus, accommodata; sed petita est ex ea ratione, qua tempus per spatium ad celeritatem applicatum, celeritas autem per radicem quadratam altitudinis debitae, exhiberi solet. Quare si k denotet altitudinem, ex qua graue vno minuto secundo libere descendit, referet expressio $2\sqrt{k}$ vnum minutum secundum, eritque propterea $t : \omega = 2\sqrt{k} : 1$, sicque $t = 2\omega\sqrt{k}$ et $dt^2 = 4kd\omega^2$, vnde acceleratio ad nostrum scopum accommodata prodit $= \frac{-ddz}{2kd\omega^2}$.

6. Quodsi iam has singulas accelerationes cum iis, quae ex sollicitationibus sunt erutae, conferamus, obtinebimus sequentes aequationes: siue

$$\begin{array}{l|l}
\frac{K}{A}\left(\frac{p}{a} + \frac{p-q}{b}\right) = \frac{-ddp}{2kd\omega^2} & \frac{p}{a} + \frac{p-q}{b} + \frac{A\,ddp}{2Kkd\omega^2} = 0 \\
\frac{K}{B}\left(\frac{q-p}{b} + \frac{q-r}{c}\right) = \frac{-ddq}{2kd\omega^2} & \frac{q-p}{b} + \frac{q-r}{c} + \frac{B\,ddq}{2Kkd\omega^2} = 0 \\
\frac{K}{C}\left(\frac{r-q}{c} + \frac{r-s}{d}\right) = \frac{-ddr}{2kd\omega^2} & \frac{r-q}{c} + \frac{r-s}{d} + \frac{C\,ddr}{2Kkd\omega^2} = 0 \\
\frac{K}{D}\left(\frac{s-r}{d} + \frac{s-t}{e}\right) = \frac{-dds}{2kd\omega^2} & \frac{s-r}{d} + \frac{s-t}{e} + \frac{D\,dds}{2Kkd\omega^2} = 0 \\
\frac{K}{E}\left(\frac{t-s}{e} + \frac{t-v}{f}\right) = \frac{-ddt}{2kd\omega^2} & \frac{t-s}{e} + \frac{t-v}{f} + \frac{E\,ddt}{2Kkd\omega^2} = 0 \\
\frac{K}{F}\left(\frac{v-t}{f} + \frac{v-x}{g}\right) = \frac{-ddv}{2kd\omega^2} & \frac{v-t}{f} + \frac{v-x}{g} + \frac{F\,ddv}{2Kkd\omega^2} = 0 \\
\frac{K}{G}\left(\frac{x-v}{g} + \frac{x}{h}\right) = \frac{-ddx}{2kd\omega^2} & \frac{x-v}{g} + \frac{x}{h} + \frac{G\,ddx}{2Kkd\omega^2} = 0.
\end{array}$$

6. Totidem igitur quouis casu impetramus huiusmodi aequationes differentio-differentiales, quod ponduscculis filum intra terminos I et O fuerit oneratum, quarum resolutio, ob variabilium permixtionem, summopere difficilis primo intuitu videatur. Quoniam vero in omnibus his aequationibus variabiles vnicam tantum dimensionem obtinent, manifestum est, singulas istas

aequa-

aequationes per eiusmodi constantes multiplicari posse, vt si omnes in vnam summam colligantur, prodeat huiusmodi aequatio:

$$\mathfrak{A}p+\mathfrak{B}q+\mathfrak{C}r+\mathfrak{D}s+\mathfrak{E}t+\mathfrak{F}v+\mathfrak{G}x+\frac{n}{d\omega^2}(\mathfrak{A}ddp+\mathfrak{B}ddq+\mathfrak{C}ddr+\mathfrak{D}dds+\mathfrak{E}ddt+\mathfrak{F}ddv+\mathfrak{G}ddx)=0,$$

cuius integratio iam nulli amplius difficultati est obnoxia, cum sit:

$$\mathfrak{A}p+\mathfrak{B}q+\mathfrak{C}r+\mathfrak{D}s+\mathfrak{E}t+\mathfrak{F}v+\mathfrak{G}x=\text{Const}\ \text{cos}.\omega n.$$

8. At si hos multiplicatores, qui ad huiusmodi aequationem integrabilem perducant, inuestigemus, eos non vno modo, sed adeo semper tot modis, quot fuerint corpuscula, definiri deprehendemus; sicque tandem etiam totidem aequationes integrales diuersas adipiscemur. Ex tot autem aequationibus deinceps valores singularum applicatarum p, q, r, s etc. elicere poterimus, quorum quilibet huiusmodi formam sortietur:

$$\mathfrak{A}\,\text{cos}\,\mathfrak{a}\omega+\mathfrak{B}\,\text{cos}\,\mathfrak{b}\omega+\mathfrak{C}\,\text{cos}\,\mathfrak{c}\omega+\mathfrak{D}\,\text{cos}.\,\mathfrak{d}\omega+\text{etc.}$$

vbi $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc. sunt constantes arbitrariae, ex statu fili initiali, quando ponitur tempus $\omega=0$, definiendae, et pro singulis applicatis p, q, r etc. peculiares obtinebunt valores. At vero litterae $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc in omnibus erunt eaedem, ac per totidem radices aequationis cuiuspiam tot dimensionum, quot fuerint pondufcula, exhibebuntur.

9 Hinc aliam eumque multo faciliorem nanciscimur methodum, cunctas superiores aequationes differentia-

rentiales secundi gradus quasi vno actu resoluendi. Cum enim, si omnes coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. praeter vnum in vna forma integrali euanescant, iidem in reliquis omnibus euanescere debeant, statuamus statim mutata harum litterarum significatione:

$$p = \mathfrak{A} \operatorname{cos}. n\,\omega; \quad q = \mathfrak{B} \operatorname{cos}. n\,\omega; \quad r = \mathfrak{C} \operatorname{cos}. n\,\omega; \quad s = \mathfrak{D} \operatorname{cos}. n\,\omega; \text{ etc.}$$

quibus valoribus substitutis, non solum relatio inter hos coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. determinabitur, sed etiam valor litterae n per aequationem tot dimensionum, quot fuerint corpuscula, definietur, vnde etiam totidem valores diuersos recipiet. His autem inuentis singulae expressiones completae reddentur, et huiusmodi formas induent:

$$p = \mathfrak{A} \operatorname{cos}. n\,\omega + \mathfrak{A}' \operatorname{cos}. n'\,\omega + \mathfrak{A}'' \operatorname{cos}. n''\,\omega + \mathfrak{A}''' \operatorname{cos} n'''\,\omega + \text{ect.}$$

$$q = \mathfrak{B} \operatorname{cos}. n\,\omega + \mathfrak{B}' \operatorname{cos}. n'\,\omega + \mathfrak{B}'' \operatorname{cos} n''\,\omega + \mathfrak{B}'' \operatorname{cos}. n'''\,\omega + \text{etc.}$$

etc.

10. Pro quouis enim alio valore litterae n, alios quoque valores litterae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. sortientur, qui si debito modo in has aequationes introducantur, obtinebimus valores integrales completos pro singulis applicatis p, q, r, s, etc. qui propterea ad quoduis tempus statum fili praebebunt, ex cuius variatione instantanea simul eius motus innotescet. Praeterea vero totidem adhuc manebunt coefficientes arbitrarii, quot fuerint corpuscula, quos denique ita definire licebit, vt initio $\omega = 0$ distantiae singulorum corpusculorum

lorum ab axe fint, ftatui filo inducto confentaneae: tum vero hae formulae iam ita funt comparatae, vt initio motus fingulorum corpufculorum euanefcat; feu motus tum a quiete incipiat, alioquin enim etiam finus angulorum $n\omega$, $n'\omega$ etc. introduci potuiffent. Expofita autem methodo folutionis in genere, conueniet eam pro quolibet corpufculorum numero accuratius euolui.

Problema 1.

11. Si filum in terminis I et O fixum, et a data vi $=K$ tenfum, vnico corpufculo A fit oneratum, determinare eius motum, poftquam de ftatu naturali vtcunque fuerit deturbatum. Fig. 2.

Solutio.

Cum igitur fit $IA=IP=a$; $AO=PO=b$; et elapfo tempore ω min. fec. ponatur diftantia $PA=p$, quae initio fuerat $=\alpha$; habebimus hanc vnicam aequationem differentio differentialem:

$$\frac{p}{a}+\frac{p}{b}+\frac{A\,ddp}{2Kk\,d\omega^2}=0$$

Statuamus ergo $p=\mathfrak{A}\,\text{cof.}\,n\omega$, eritque $\frac{ddp}{d\omega^2}=-nn\mathfrak{A}\,\text{cof.}\,np$ vnde fit $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{Ann}{2Kk}$, et $n=\sqrt{\frac{2Kk}{A}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$. Quare aequatio integralis quaefita habebitur:

$$p=\mathfrak{A}\,\text{cof.}\,\omega\sqrt{\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

quae vt praebeat $p=\alpha$, pofito $\omega=0$, poni oportet $\mathfrak{A}=\alpha$, ficque erit pro cafu propofito:

$$p=\alpha\,\text{cof.}\,\omega\sqrt{\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

 vnde

vnde ad quoduis tempus ω min. ſec. ab initio elapſum locus corpuſculi A cognoſcitur.

Coroll. 1.

12. Hinc ſtatim innoteſcit tempus, quo corpuſculum A ab initio motus primum in rectam I O perueniet, quod eueniet, quando fit $p = 0 = \alpha \cos. \frac{1}{2}\pi$, denotante π ſemiperipheriam circuli, cuius radius eſt 1, vt $\frac{1}{2}\pi$ ſit menſura anguli recti: erit ergo hoc tempus:

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}} \text{ min. ſec.}$$

quod ſimul eſt tempus dimidiae vibrationis fili.

Coroll. 2.

13. Si enim tempus capiatur duplo maius, corpus A perueniet ad parem diſtantiam α ab axe in altera parte, integramque vibrationem confeciſſe eſt cenſendum. Quare tempus ſingularum vibrationum, quae inter ſe erunt iſochronae, erit:

$$\frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)\right)}} = \frac{\pi\sqrt{Aab}}{\sqrt{2Kk(a+b)}} \text{ min. ſecund.}$$

Coroll. 3.

14. Hoc ergo tempus erit maximum, ſi corpuſculum A medium locum in filo I O tenuerit. Si enim ponamus totam longitudinem $IO = a + b = l$, et $a = \frac{l+u}{2}$; $b = \frac{l-u}{2}$, erit tempus vibrationis $\frac{\pi\sqrt{A(ll-uu)}}{2\sqrt{2Kkl}}$, vnde

vnde patet, quo magis corpusculum a fili puncto medio remoueatur, eo rapidiores fore vibrationes; ipsum autem tempus maximum, quo $u = 0$ fit $= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{Al}{2Kk}}$ min. secund.

Problema 2.

15. Si filum in terminis I et O fixum, et data vi K tensum, duobus ponduſculis A et B fuerit oneratum, determinare eius motum, postquam de statu suo naturali recto IO vtcunque fuerit deturbatum. Fig. 3.

Solutio.

Hic igitur habemus $IA = a$; $AB = b$; $BO = c$, et si elapso tempore ω min. secund. ponamus distantias $PA = p$, et $QB = q$, quae initio fuerant α et β, sequentes duae aequationes differentio-differentiales resoluendae occurrunt:

$$\frac{p}{a} + \frac{p-q}{b} + \frac{A\,ddp}{2Kk\,d\omega^2} = 0$$

$$\frac{q-p}{b} + \frac{q}{c} + \frac{B\,ddq}{2Kk\,d\omega^2} = 0$$

Statuamus ergo:

$$p = \mathfrak{A} \text{ cos. } n\omega \quad \text{et} \quad q = \mathfrak{B} \text{ cos. } n\omega \text{, eritque}$$

$$\frac{ddp}{d\omega^2} = -nn\mathfrak{A} \text{ cos. } n\omega \quad \text{et} \quad \frac{ddq}{d\omega^2} = -nn\mathfrak{B} \text{ cos. } n\omega.$$

Hi valores substituti praebent:

$$\frac{\mathfrak{A}}{a} + \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}{b} = \frac{nnA\mathfrak{A}}{2Kk} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}{b} + \frac{\mathfrak{B}}{c} = \frac{nnB\mathfrak{B}}{2Kk}$$

ideoque

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = 1 + \frac{b}{a} - \frac{nnAb}{2Kk} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = 1 + \frac{b}{c} - \frac{nnBb}{2Kk}$$

vnde

vnde per multiplicationem oritur, ponendo $\frac{nn}{2Kk}=z$:

$$1=(1+\tfrac{b}{a}-Abz)(1+\tfrac{b}{c}-Bbz) \text{ seu}$$

$$0=\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{c}+\tfrac{b}{ac}-A\,z)\,(1+\tfrac{b}{c})-Bz(1+\tfrac{b}{a})+ABbzz,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$zz-\tfrac{z}{A}(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b})-\tfrac{z}{B}(\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})+\tfrac{1}{AB}(\tfrac{1}{ab}+\tfrac{1}{ac}+\tfrac{1}{bc})=0,$$

vnde elicitur:

$$z=\tfrac{1}{2A}(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b})+\tfrac{1}{2B}(\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}))\pm$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4AA})\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b})^2+\tfrac{1}{4BB}(\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})^2+\tfrac{1}{2AB}(\tfrac{1}{bb}-\tfrac{1}{ab}-\tfrac{1}{ac}-\tfrac{1}{bc}))},$$

quo valore inuento, est $n=\sqrt{2Kkz}$. Tum vero habebitur

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{b}{2a}-\tfrac{Ab}{2B}(\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})\mp$$

$$Ab\sqrt{(\tfrac{1}{4AA}(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b})^2+\tfrac{1}{4BB}(\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})^2-\tfrac{1}{2Ab}(\tfrac{1}{ab}+\tfrac{1}{ac}+\tfrac{1}{bc}-\tfrac{1}{bb}))}.$$

Cum igitur hoc modo duo inueniantur valores ipsius n, qui sint n et n', et pro vtroque relatio inter $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ definiatur, vnde prodeant valores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, obtinebimus hinc sequentes valores completos pro applicatis p et q:

$$p=\mathfrak{A}\cos.n\omega+\mathfrak{A}'\cos.n'\omega$$

$$q=\mathfrak{B}\cos.n\omega+\mathfrak{B}'\cos.n'\omega$$

ob statum autem initialem esse oportet:

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'=\alpha, \text{ et } \mathfrak{B}+\mathfrak{B}'=\beta$$

alter autem tam valorum $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, quam $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$, erat indefinitus, vnde ii hinc determinabuntur.

Coroll. 1.

Coroll. 1.

16. Si ponamus breuitatis gratia:

$$\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=P;\ \frac{1}{2B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=Q;\ \frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)=R$$

vt fit $zz-2(P+Q)z+R=0$; et geminus ipfius z valor:

$$z=P+Q\pm\sqrt{((P+Q)^2-R)},$$

erit $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}Ab(2P-z)$ feu $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}Bb(2Q-z)$.

Coroll. 2.

17. Verum cum fit $4PQ=\frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bb}\right)$ $=R+\frac{1}{ABbb}$, ideoque $R=4PQ-\frac{1}{ABbb}$, habebitur:

$$z=P+Q\pm\sqrt{((P-Q)^2+\frac{1}{ABbb})},$$

ex qua forma patet, ambos valores ipfius z femper effe reales, ex priori autem effe pofitiuos; vnde vterque valor ipfius $n=\sqrt{2Kkz}$ erit realis.

Coroll. 3.

18. Ponamus porro ad abbreuiandum $\sqrt{((P-Q)^2+\frac{1}{ABbb})}=S$, ac diftinguendo geminos valores, obtinebimus:

$$z=P+Q+S;\qquad z'=P+Q-S$$
$$n=\sqrt{2Kk(P+Q+S)};\qquad n'=\sqrt{2Kk(P+Q-S)}$$
$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}Ab(P-Q-S);\qquad \mathfrak{B}'=\mathfrak{A}'Ab(P-Q+S)$$

ac motus fili his duabus aequationibus continebitur:

$$p=\mathfrak{A}\operatorname{cof}.n\omega+\mathfrak{A}'\operatorname{cof}.n'\omega$$
$$q=\mathfrak{B}\operatorname{cof}.n\omega+\mathfrak{B}'\operatorname{cof}.n'\omega.$$

Coroll. 4.

19. Vt autem motus ad ſtatum initialem datum accommodetur, fieri debet $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' = \alpha$ et $\alpha A b (P - Q) + (\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}) A b S = \beta$, vnde erit $\mathfrak{A}' - \mathfrak{A} = \frac{\beta}{A\beta S} - \frac{\alpha(P-Q)}{S}$. Quare hinc nanciſcimur vtriusque conſtantis $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ determinationem:

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{\alpha(P-Q)}{2S} - \frac{\beta}{2AbS} \text{ et } \mathfrak{A}' = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\alpha(P-Q)}{2S} + \frac{\beta}{2AbS}, \text{ item}$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\beta(P-Q)}{2S} - \frac{\alpha}{2BbS} \text{ et } \mathfrak{B}' = \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\beta(P-Q)}{2S} + \frac{\alpha}{2BbS}.$$

Coroll. 5.

20. Si ſtatus initialis ita fuerit comparatus, vt vel $\mathfrak{A}$ vel $\mathfrak{A}'$ fuerit $= 0$, tum etiam vel $\mathfrak{B}$ vel $\mathfrak{B}'$ euaneſcet, motusque continebitur

vel in his formulis:	vel in his formulis:
$p = \mathfrak{A} \operatorname{coſ}. n\omega$	$p = \mathfrak{A}' \operatorname{coſ}. n'\omega$
$q = \mathfrak{B} \operatorname{coſ}. n\omega$	$q = \mathfrak{B}' \operatorname{coſ}. n'\omega$

vtroque ergo caſu vibrationes orientur regulares oſcillationibus penduli ſimplicis conformes, ac tempus vnius vibrationis erit

Caſu priori $= \frac{\pi}{n}$ min. ſecund.; poſteriori $= \frac{\pi}{n'}$ min. ſec.

Coroll. 6.

21. Sin autem ſtatus initialis fuerit eiusmodi, vt neque $\mathfrak{A}$ neque $\mathfrak{A}'$ euaneſcat, vibrationes orientur irregulares, et quaſi ex vtroque genere ſimplici mixtae; neque filum vnquam ad eundem ſitum reuertetur, niſi numeri n et n' rationem inter ſe teneant rationa-

tionalem. Ponatur huiusmodi ratio $n:n'=\mu:\nu$, ac fiet $\frac{P+Q+S}{P+Q-S}=\frac{\mu\mu}{\nu\nu}$; seu $(\mu\mu-\nu\nu)(P+Q)=(\mu\mu+\nu\nu)S$, ideoque $4(\mu^4+\nu^4)PQ-4\mu\mu\nu\nu(PP+QQ)=\frac{(\mu\mu+\nu\nu)^2}{ABbb}$, hincque

$$P=\frac{\mu^4+\nu^4}{2\mu\mu\nu\nu}Q\pm\frac{(\mu\mu+\nu\nu)}{2\mu\mu\nu\nu}\sqrt{((\mu\mu-\nu\nu)^2QQ-\frac{\mu\mu\nu\nu}{ABbb})}.$$

Coroll. 7.

22. Vt ergo vibrationes euadant regulares, status initialis ita debet esse comparatus, vt sit

$$\text{vel } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{-1}{Ab(S-P+Q)}=-Bb(S+P-Q)$$

$$\text{vel } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{Ab(S+P-Q)}=+Bb(S-P-Q)$$

est enim $SS-(P-Q)^2=\frac{1}{ABbb}$, ideoque $S>(P-Q)$.

Coroll. 8.

23. Si omnia interualla corpusculorum fuerint inter se aequalia, seu $a=b=c$; erit $P=\frac{1}{Aa}$, $Q=\frac{1}{Ba}$, et $R=\frac{3}{ABaa}$, vnde fit $z=\frac{1}{a}(\frac{1}{A}+\frac{1}{B})\pm\frac{1}{a}\sqrt{(\frac{1}{AA}-\frac{1}{AB}+\frac{1}{BB})}$, seu $z=\frac{A+B\pm\sqrt{(AA-AB+BB)}}{ABa}$, hincque

$$n=\sqrt{\frac{2Kk}{ABa}(A+B+\sqrt{(AA-AB+BB)})};\ n'=\sqrt{\frac{2Kk}{ABa}(A+B-\sqrt{(AA-AB+BB)})}$$

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}.\frac{B-A-\sqrt{(AA-AB+BB)}}{B};\ \mathfrak{B}'=\mathfrak{A}'.\frac{B-A+\sqrt{(AA-AB+BB)}}{B}$$

et pro statu initiali adimplendo:

$$\mathfrak{A}=\tfrac{1}{2}\alpha+\frac{\alpha(B-A)-\beta B}{2\sqrt{(AA-AB+BB)}};\ \mathfrak{A}'=\tfrac{1}{2}\alpha-\frac{\alpha(B-A)+\beta B}{2\sqrt{(AA-AB+BB)}}$$

$$\mathfrak{B}=\tfrac{1}{2}\beta-\frac{\beta(B-A)-\alpha A}{2\sqrt{(AA-AB+BB)}};\ \mathfrak{B}'=\tfrac{1}{2}\beta-\frac{\beta(B-A)+\alpha A}{2\sqrt{(AA-AB+BB)}}.$$

Motus vero his aequationibus exprimetur:

$$p = \mathfrak{A}\,\text{cof.}\,\omega + \mathfrak{A}'\,\text{cof.}\,n'\omega$$
$$q = \mathfrak{B}\,\text{cof.}\,\omega + \mathfrak{B}'\,\text{cof.}\,n'\omega$$

Coroll. 9.

24. Vt fiat hoc cafu $n : n' = \mu : \nu$, oportet effe:

$$\frac{4(\mu^4 + \nu^4)}{AB} - 4\mu\mu\nu\nu\left(\frac{1}{AA} + \frac{1}{BB}\right) = \frac{(\mu\mu + \nu\nu)^2}{AB}, \text{ feu}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{3\mu^4 - 2\mu\mu\nu\nu + 3\nu^4 \pm \surd(9\mu^8 - 12\mu^6\nu\nu - 42\mu^4\nu^4 - 12\mu\mu\nu^6 + 9\nu^8)}{8\mu\mu\nu\nu}$$

vnde, fi fit $\mu = 2$, et $\nu = 1$, feu $n : n' = 2 : 1$, fiet

$$\frac{B}{A} = \frac{43 \pm \surd 825}{32} = \frac{43 \pm 5\surd 33}{32}.$$

Coroll. 10.

25. Si praeterea ambo corpora A et B fint aequalia, erit $z = \frac{2 \pm 1}{Aa}$, vnde fequentes obtinentur determinationes:

$$n = \surd\frac{6Kk}{Aa} \quad ; \quad n' = \surd\frac{2Kk}{Aa}$$
$$\mathfrak{B} = -\mathfrak{A} \quad ; \quad \mathfrak{B}' = +\mathfrak{A}'$$
$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad ; \quad \mathfrak{A}' = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$
$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) \quad ; \quad \mathfrak{B}' = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

et pro motu:

$$p = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\,\text{cof.}\,\omega\surd\frac{6Kk}{Aa} + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\,\text{cof.}\,\omega\surd\frac{2Kk}{Aa}$$
$$q = -\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\,\text{cof.}\,\omega\surd\frac{6Kk}{Aa} + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\,\text{cof.}\,\omega\surd\frac{2Kk}{Aa}.$$

Problema 3.

Fig. 4. 26. Si filum in terminis I et O fixum et data vi $= K$ tenfum tribus pondufculis A, B, et C fuerit onera-

oneratum, determinare eius motum, poſtquam de ſtatu ſuo naturali recto IO vtcunque fuerit deturbatum.

Solutio.

Hic igitur habemus $IA = a$; $AB = b$; $BC = c$ et $CO = d$, ac ſi, elapſo tempore ω min. ſec., ponamus diſtantias:

$PA = p$; $QB = q$ et $RC = r$

quae initio fuerant reſpectiue α, β, γ, ſequentes tres reſoluendae ſunt aequationes:

$$\frac{p}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{q}{A}\cdot\frac{1}{b}+\frac{ddp}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{q}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{p}{B}\cdot\frac{1}{b}-\frac{r}{B}\cdot\frac{1}{c}+\frac{ddq}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{r}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-\frac{q}{C}\cdot\frac{1}{c}+\frac{ddr}{2Kkd\omega^2}=0.$$

Quodſi ergo ſtatuamus $p = \mathfrak{A}\,\mathrm{coſ.}\,n\omega$; $q = \mathfrak{B}\,\mathrm{coſ.}\,n\omega$; $r = \mathfrak{C}\,\mathrm{coſ.}\,n\omega$; habebimus, ponendo $\frac{nn}{2Kk} = z$, has aequationes:

$$\frac{\mathfrak{A}}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{\mathfrak{B}}{Ab}=\mathfrak{A}z$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{\mathfrak{A}}{Bb}-\frac{\mathfrak{C}}{Bc}=\mathfrak{B}z$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-\frac{\mathfrak{B}}{Cc}=\mathfrak{C}z$$

vnde eruimus:

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{B}}{b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-Abz};\quad \mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{B}}{c\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-Ccz}$$

qui in ſecunda ſubſtituti praebent:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{bb\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-Abbz}-\frac{1}{cc\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-Cccz}=Bz$$

 qua

qua aequatione ordinata oritur:

$$z^3 \left.\begin{matrix} -\frac{1}{A}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \\ -\frac{1}{B}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \\ -\frac{1}{C}(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) \end{matrix}\right\} zz \left.\begin{matrix} +\frac{1}{AB}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}) \\ +\frac{1}{AC}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) \\ +\frac{1}{BC}(\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}) \end{matrix}\right\} z - \frac{1}{ABC}(\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}) = 0$$

quae aequatio, si ponatur breuitatis gratia:

$$\frac{1}{A}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) = P; \quad \frac{1}{B}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = Q; \quad \frac{1}{C}(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) = R$$

transmutatur in sequentem formam:

$$(z-P)(z-Q)(z-R) = \frac{z-R}{ABbb} + \frac{z-P}{BCc}$$

vnde terni eliciuntur valores ipsius z, iique semper reales et positiui, qui sint z, z', et z'', ex quibus sequentes terni valores porro eruuntur:

$$n = \sqrt{2Kkz}; \quad n' = \sqrt{2Kkz'} \quad n'' = \sqrt{2Kkz''}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}}{Ab(P-z)}; \quad \mathfrak{A}' = \frac{\mathfrak{B}'}{Ab(P-z')} \quad \mathfrak{A}'' = \frac{\mathfrak{B}''}{Ab(P-z'')}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{Cc(R-z)}; \quad \mathfrak{C}' = \frac{\mathfrak{B}'}{Cc(R-z')} \quad \mathfrak{C}'' = \frac{\mathfrak{B}''}{Cc(R-z'')}$$

quibus valoribus inuentis, motus his formulis definietur:

$$p = \mathfrak{A}\,\mathrm{cos}.\,n\omega + \mathfrak{A}'\,\mathrm{cos}.\,n'\omega + \mathfrak{A}''\,\mathrm{cos}.\,n''\omega$$

$$q = \mathfrak{B}\,\mathrm{cos}.\,n\omega + \mathfrak{B}'\,\mathrm{cos}.\,n'\omega + \mathfrak{B}''\,\mathrm{cos}.\,n''\omega$$

$$r = \mathfrak{C}\,\mathrm{cos}.\,n\omega + \mathfrak{C}'\,\mathrm{cos}.\,n'\omega + \mathfrak{C}''\,\mathrm{cos}\,n''\omega$$

quae, vt ad statum propositum initialem accommodentur, fiat:

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'+\mathfrak{A}'' = \alpha; \quad \mathfrak{B}+\mathfrak{B}'+\mathfrak{B}'' = \beta \text{ et } \mathfrak{C}+\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}'' = \gamma$$

sicque motus quaesitus erit determinatus.

Coroll.

Coroll. 1.

27. Tota ergo ſolutio reducitur ad reſolutionem huius aequationis cubicae:

$$z^3 \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ -\frac{1}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right) \\ +\frac{1}{AC}\left(\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}\right) \\ +\frac{1}{BC}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}\right) \end{array}\right\} z - \frac{1}{ABC}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}\right)=0$$

dum caſu problematis praecedentis, vbi filum duobus tantum ponduſculis erat onuſtum, haec aequatio quadratica ſolutionem continebat:

$$zz \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ -\frac{1}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \end{array}\right\} z + \frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)=0.$$

Coroll. 2.

28. Tres ſcilicet huius aequationis cubicae radices, generaliter modo expoſito coniunctae, generalem problematis ſuppeditant ſolutionem, quae ad omnes caſus, quicunque ſtatus filo fuerit inductus initio, pateat. Vnde patet, ſi terni numeri n, n', n'' fuerint incommenſurabiles inter ſe, motum fili admodum fore irregularem, neque certas periodos eſſe habiturum.

Coroll. 3.

29. Tres autem dantur caſus, quibus filum ad vibrationes regulares et iſochronas excitari poteſt, qui conditionibus his locum habebunt:

Caſus I

	Casus I	Casus II	Casus III
si sit	$\alpha=\mathfrak{A}$	$\alpha=\mathfrak{A}'$	$\alpha=\mathfrak{A}''$
	$\beta=\mathfrak{B}$	$\beta=\mathfrak{B}'$	$\beta=\mathfrak{B}''$
	$\gamma=\mathfrak{C}$	$\gamma=\mathfrak{C}'$	$\gamma=\mathfrak{C}''$
tum erit	$p=\mathfrak{A}\,\mathrm{cos}.\,n\omega$	$p=\mathfrak{A}'\mathrm{cos}\,n'\omega$	$p=\mathfrak{A}''\mathrm{cos}.\,n''\omega$
	$q=\mathfrak{B}\,\mathrm{cos}\,n\omega$	$q=\mathfrak{B}'\mathrm{cos}.\,n'\omega$	$q=\mathfrak{B}''\mathrm{cos}.\,n''\omega$
	$r=\mathfrak{C}\,\mathrm{cos}\,n\omega$	$r=\mathfrak{C}'\,\mathrm{cos}.\,n'\omega$	$r=\mathfrak{C}''\mathrm{cos}.\,n''\omega$
temp. vibrat.	$=\frac{\pi}{n}$ min. sec.	$=\frac{\pi}{n'}$ min. sec.	$=\frac{\pi}{n''}$ min. sec.

Coroll. 4.

30. Inuentis autem his tribus casibus, quibus vibrationes isochronae euadunt, ex iis omnes reliqui casus motuum irregularium per compositionem definiri poterunt; vbi notari meretur, vtcunque hi motus appareant irregulares, eos tamen ex combinatione vibrationum isochronarum oriri.

Coroll. 5.

31. Quando autem tria corpora A, B, C, tam ratione massae, quam distantiarum, ita fuerint comparata, vt numeri n, n', n'' inde resultent commensurabiles, irregularitas motus eatenus euanescit, quod in motu percipientur periodi, quibus filum in eundem statum restituitur.

Coroll. 6.

32. Si corpusculorum interualla a, b, c, d inter se fuerint aequalia, aequatio cubica resoluenda abibit in hanc formam:

$$z^3-\left(\frac{2}{A}+\frac{2}{B}+\frac{2}{C}\right)\frac{zz}{a}+\left(\frac{3}{AB}+\frac{4}{AC}+\frac{3}{BC}\right)\frac{z}{aa}-\frac{4}{ABCa^3}=0$$

quae

quae si corpuscula insuper sint inter se aequalia, fit:

$$z^3 - \frac{6zz}{\mathrm{A}a} + \frac{10z}{\mathrm{A}^2a^2} - \frac{4}{\mathrm{A}^3a^3} = 0$$

cuius tres radices sunt:

$$\text{I. } z = \frac{2}{\mathrm{A}a}; \quad \text{II. } z' = \frac{2-\surd 2}{\mathrm{A}a}; \quad \text{III. } z'' = \frac{2+\surd 2}{\mathrm{A}a}.$$

Coroll. 7.

33. In hoc ergo postremo casu, quo $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C}$ et $a=b=c=d$ erit pro motu fili generatim determinando ob $\mathrm{P} = \frac{2}{\mathrm{A}a} = \mathrm{Q} = \mathrm{R}$:

$$n = \sqrt{\frac{4\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}}; \quad n' = \sqrt{\frac{2(2-\surd 2)\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}}; \quad n'' = \sqrt{\frac{2(2+\surd 2)\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}}{0\mathrm{A}a} \qquad \mathfrak{A}' = \frac{\mathfrak{B}'}{\surd 2} \qquad \mathfrak{A}'' = -\frac{\mathfrak{B}''}{\surd 2}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{0\mathrm{A}a} \qquad \mathfrak{C}' = \frac{\mathfrak{B}'}{\surd 2} \qquad \mathfrak{C}'' = -\frac{\mathfrak{B}''}{\surd 2}$$

seu $\mathfrak{B} = 0 \qquad \mathfrak{B}' = \mathfrak{A}'\sqrt{2} \qquad \mathfrak{B}'' = -\mathfrak{A}''\sqrt{2}$

et $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A} \qquad \mathfrak{C}' = \mathfrak{A}' \qquad \mathfrak{C}'' = \mathfrak{A}''$.

Ac pro statu initiali dato habebitur:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' = \alpha; \quad 0 + \mathfrak{A}'\sqrt{2} - \mathfrak{A}''\sqrt{2} = \beta; \quad -\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' = \gamma$$

vnde obtinetur:

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha-\gamma}{2}; \quad \mathfrak{A}' = \frac{\alpha+\beta\surd 2+\gamma}{4}; \quad \mathfrak{A}'' = \frac{\alpha-\beta\surd 2+\gamma}{4}$$

$$\mathfrak{B} = 0 \quad \mathfrak{B}' = \frac{\alpha+\beta\surd 2+\gamma}{2\surd 2}; \quad \mathfrak{B}'' = \frac{-\alpha+\beta\surd 2-\gamma}{2\surd 2}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{-\alpha+\gamma}{2}; \quad \mathfrak{C}' = \frac{\alpha+\beta\surd 2+\gamma}{4}; \quad \mathfrak{C}'' = \frac{\alpha-\beta\surd 2+\gamma}{4}$$

Consequenter motus definietur per has formulas:

$$p = \frac{\alpha-\gamma}{2}\operatorname{cos}.\omega\sqrt{\frac{4\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}} + \frac{\alpha+\beta\surd 2+\gamma}{4}\operatorname{cos}.\omega\sqrt{\frac{2(2-\surd 2)\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}} + \frac{\alpha-\beta\surd 2+\gamma}{4}\operatorname{cos}\omega\sqrt{\frac{2(2+\surd 2)\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}}$$

$$q = \quad + \frac{\alpha+\beta\surd 2+\gamma}{2\surd 2}\operatorname{cos}\omega\sqrt{\frac{2(2-\surd 2)\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}} - \frac{\alpha+\beta\surd 2-\gamma}{2\surd 2}\operatorname{cos}\omega\sqrt{\frac{2(2+\surd 2)\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}}$$

$$r = \frac{-\alpha+\gamma}{2}\operatorname{cos}.\omega\sqrt{\frac{4\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}} + \frac{\alpha+\beta\surd 2+\gamma}{4}\operatorname{cos}.\omega\sqrt{\frac{2(2-\surd 2)\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}} + \frac{\alpha-\beta\surd 2+\gamma}{4}\operatorname{cos}.\omega\sqrt{\frac{2(2+\surd 2)\mathrm{K}k}{\mathrm{A}a}}.$$

 Proble-

Problema 4.

Fig. 5. 34. Si filum, in terminis I et O fixum et data vi $=K$ tenſum, quatuor corpuſculis A, B, C, D fuerit oneratum, determinare eius motum, poſtquam de ſtatu ſuo naturali recto IO vtcunque fuerit depulſum.

Solutio.

Habemus ergo $IA=a$, $AB=b$, $BC=c$, $CD=d$ et $DO=e$, ac ſi elapſo tempore ω min. ſec. ponamus diſtantias

$$PA=p;\ QB=q;\ RC=r \text{ et } SD=s$$

quae initio fuerant reſpectiue α, β, γ, δ, ſequentes quatuor reſolui debent aequationes:

$$\frac{p}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{q}{A}\cdot\frac{1}{b}+\frac{ddp}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{q}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{p}{B}\cdot\frac{1}{b}-\frac{r}{B}\cdot\frac{1}{c}+\frac{ddq}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{r}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-\frac{q}{C}\cdot\frac{1}{c}-\frac{s}{C}\cdot\frac{1}{d}+\frac{ddr}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{s}{D}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)-\frac{r}{D}\cdot\frac{1}{d}+\frac{dds}{2Kkd\omega^2}=0.$$

Quodſi iam ſtatuamus

$$p=\mathfrak{A}\,\mathrm{coſ}.n\omega;\ q=\mathfrak{B}\,\mathrm{coſ}.n\omega;\ r=\mathfrak{C}\,\mathrm{coſ}.n\omega;\ s=\mathfrak{D}\,\mathrm{coſ}.n\omega$$

ac ad abbreuiationem ponamus $\frac{nn}{2Kk}=z$, nec non $\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=P$; $\frac{1}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=Q$; $\frac{1}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=R$ et $\frac{1}{D}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)=S$ orientur ſequentes aequationes:

$$\mathfrak{A}P-\frac{\mathfrak{B}}{Ab}=\mathfrak{A}z$$

$$\mathfrak{B}Q-\frac{\mathfrak{A}}{Bb}-\frac{\mathfrak{C}}{Bc}=\mathfrak{B}z$$

$$\mathfrak{C}R-\frac{\mathfrak{B}}{Cc}-\frac{\mathfrak{D}}{Cd}=\mathfrak{C}z$$

$$\mathfrak{D}S-\frac{\mathfrak{C}}{Dd}=\mathfrak{D}z$$

ex

ex quibus elicitur:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}Ab(P-z);$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}ABbc(P-z)(Q-z) - \tfrac{\mathfrak{A}c}{b}$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}ABCbcd(P-z)(Q-z)(R-z) - \tfrac{\mathfrak{A}Ccd}{b}(R-z) - \tfrac{\mathfrak{A}Abd}{c}(P-z),$$

qui valores in vltima aequatione ſubſtituti praebent:

$$ABCbcd(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z) - \tfrac{Ccd}{b}(R-z)(S-z)$$
$$- \tfrac{Abd}{c}(P-z)(S-z) - \tfrac{ABbc}{Pd}(P-z)(Q-z) + \tfrac{c}{Dbd} = 0$$

quae per $ABCbcd$ diuiſa abit in hanc formam:

$$(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z) - \frac{(R-z)(S-z)}{ABbb} - \frac{(P-z)(S-z)}{BCcc} - \frac{(P-z)(Q-z)}{CDdd}$$
$$+ \frac{1}{ABCDbbdd} = 0,$$

cuius indoles clarius perſpicitur ex hac forma:

$$1 - \frac{1}{ABbb(P-z)(Q-z)} - \frac{1}{BCcc(Q-z)(R-z)} - \frac{1}{CDdd(R-z)(S-z)}$$
$$+ \frac{1}{ABCDbbdd(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z)} = 0.$$

Verum ſi illa aequatio, reſtituendis pro P, Q, R, S valoribus, penitus euoluatur, obtinebitur ſequens aequatio biquadratica:

$$z^4 \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ -\frac{1}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \\ -\frac{1}{D}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \end{array}\right\} z^3 \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right) \\ +\frac{1}{AC}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \\ +\frac{1}{AD}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \\ +\frac{1}{BC}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}\right) \\ +\frac{1}{BD}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \\ +\frac{1}{CD}\left(\frac{1}{cd}+\frac{1}{ce}+\frac{1}{de}\right) \end{array}\right\} zz \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{ABC}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}\right) \\ -\frac{1}{ABD}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \\ -\frac{1}{ACD}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{cd}+\frac{1}{ce}+\frac{1}{de}\right) \\ -\frac{1}{BCD}\left(\frac{1}{bcd}+\frac{1}{bce}+\frac{1}{bde}+\frac{1}{cde}\right) \end{array}\right\} z$$
$$+ \frac{1}{ABCD}\left(\frac{1}{abcd}+\frac{1}{abce}+\frac{1}{abde}+\frac{1}{acde}+\frac{1}{bcde}\right) = 0.$$

Inuentis autem huius aequationis quaternis radicibus z, z', z'' et z''', ex illis totidem valores numeri n habebunbebuntur per formulam $n = \sqrt{2Kkz}$; ac ſumtis quoque quaternis arbitrariis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$, ex vnoquoque reliqui $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ reſpondentes reperientur ope formularum:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}Ab(P-z)$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}ABbc((P-z)(Q-z) - \tfrac{1}{ABbb})$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}ABCbcd((P-z)(Q-z)(R-z) - \tfrac{1}{ABbb}(R-z) - \tfrac{1}{BCcc}(P-z))$$

ac tandem formulae pro motu fili erunt:

$$p = \mathfrak{A}\,\mathrm{coſ}.n\omega + \mathfrak{A}'\mathrm{coſ}.n'\omega + \mathfrak{A}''\mathrm{coſ}\,n''\omega + \mathfrak{A}'''\mathrm{coſ}\,n'''\omega$$
$$q = \mathfrak{B}\,\mathrm{coſ}.n\omega + \mathfrak{B}'\mathrm{coſ}\,n'\omega + \mathfrak{B}''\mathrm{coſ}.n''\omega + \mathfrak{B}'''\mathrm{coſ}.n'''\omega$$
$$r = \mathfrak{C}\,\mathrm{coſ}.n\omega + \mathfrak{C}'\mathrm{coſ}.n'\omega + \mathfrak{C}''\mathrm{coſ}.n''\omega + \mathfrak{C}'''\mathrm{coſ}.u'''\omega$$
$$s = \mathfrak{D}\,\mathrm{coſ}.n\omega + \mathfrak{D}'\mathrm{coſ}.n'\omega + \mathfrak{D}''\mathrm{coſ}.n''\omega + \mathfrak{D}'''\mathrm{coſ}.n'''\omega$$

quatuor autem conſtantes arbitrariae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ ex ſtatu initiali ita definiri debent, vt fiat:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}''' = \alpha$$
$$\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'' + \mathfrak{B}''' = \beta$$
$$\mathfrak{C} + \mathfrak{C}' + \mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}''' = \gamma$$
$$\mathfrak{D} + \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'' + \mathfrak{D}''' = \delta.$$

Coroll. 1.

35. Iam igitur quatuor exiſtunt caſus, quibus vibrationes erunt iſochronae, quarum tempora erunt

$$\frac{\pi}{n};\quad \frac{\pi}{n'};\quad \frac{\pi}{n''};\quad \frac{\pi}{n'''}\ \text{min. ſec.}$$

atque ex his caſibus, tanquam motibus ſimplicibus, reliqui omnes per compoſitionem oriuntur.

Coroll.

Coroll. 2.

36. Ex his iam lex iſtarum formularum, ſi filum pluribus corpuſculis fuerit onuſtum, non difficulter perſpicitur. Si enim quinque habeantur corpuſcula, adiecto valore $\frac{1}{E}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right)=\Gamma$, aequatio principalis reſoluenda ita ſe habebit:

$$1-\frac{1}{ABbb(P-z)(Q-z)}-\frac{1}{BCcc(Q-z)(R-z)}-\frac{1}{CDdd(R-z)(S-z)}-\frac{1}{DEee(S-z)(T-z)}$$
$$+\frac{1}{ABCDb^2d^2(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z)}+\frac{1}{BCDEccee(Q-z)(R-z)(S-z)(T-z)}=0$$

Ac ſi ſex fuerint corpuſcula, poſito $\frac{1}{F}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)=V$, erit

$$1-\frac{1:ABbb}{(P-z)(Q-z)}-\frac{1:BCcc}{(Q-z)(R-z)}-\frac{1:CDdd}{(R-z)(S-z)}-\frac{1:DEee}{(S-z)(T-z)}-\frac{1:EFff}{(T-z)(V-z)}$$
$$+\frac{1:ABCDbbdd}{(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z)}+\frac{1:BCDEccee}{(Q-z)(R-z)(S-z)(T-z)}+\frac{1:CDEFddff}{(R-z)(S-z)(T-z)(V-z)}$$
$$-\frac{1:ABCDEFbbddff}{(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z)(T-z)(V-z)}=0.$$

Coroll. 3.

37. Hae autem formulae in genere nimis ſunt complicatae, quam vt quidquam ad cognitionem motus inde concludi queat. Concipiamus ergo interualla a, b, c, d, etc. inter ſe aequalia, ac pro quouis corpuſculorum numero aequationes, ex quibus valores ipſius z elici oportet, ita ſe habebunt:

Pro vno corpuſculo

$$z-\frac{2}{Aa}=0$$

Pro duobus corpuſculis

$$zz-\frac{1}{a}\left(\frac{2}{A}+\frac{2}{B}\right)z+\frac{1}{aa}\cdot\frac{3}{AB}=0$$

Pro tribus corpuſculis

$$z^3-\frac{1}{a}\left(\frac{2}{A}+\frac{2}{B}+\frac{2}{C}\right)zz+\frac{1}{aa}\left(\frac{3}{AB}+\frac{4}{AC}+\frac{3}{BC}\right)z-\frac{1}{a^3}\cdot\frac{4}{ABC}=0$$

Pro quatuor corpuſculis

$$z^4 - \frac{1}{a}\left(\frac{2}{A}+\frac{2}{B}+\frac{2}{C}+\frac{2}{D}\right)z^3 + \frac{1}{aa}\left(\frac{3}{AB}+\frac{4}{AC}+\frac{4}{AD}+\frac{3}{BC}+\frac{4}{BD}+\frac{3}{CD}\right)z^2$$
$$-\frac{1}{a^3}\left(\frac{4}{ABC}+\frac{6}{ABD}+\frac{6}{ACD}+\frac{4}{BCD}\right)z + \frac{1}{a^4}\cdot\frac{5}{ABCD} = 0$$

Pro quinque corpuſculis

$$z^5 - \frac{1}{a}\left(\frac{2}{A}+\frac{2}{B}+\frac{2}{C}+\frac{2}{D}+\frac{2}{E}\right)z^4$$
$$+\frac{1}{aa}\left(\frac{3}{AB}+\frac{4}{AC}+\frac{4}{AD}+\frac{4}{AE}+\frac{3}{BC}+\frac{4}{BD}+\frac{4}{BE}+\frac{3}{CD}+\frac{4}{CE}+\frac{3}{DE}\right)z^3$$
$$-\frac{1}{a^3}\left(\frac{4}{ABC}+\frac{6}{ABD}+\frac{6}{ABE}+\frac{6}{ACD}+\frac{8}{ACE}+\frac{6}{ADE}+\frac{4}{BCD}+\frac{6}{BCE}+\frac{6}{BDE}+\frac{4}{CDE}\right)z^2$$
$$+\frac{1}{a^4}\left(\frac{5}{ABCD}+\frac{8}{ABCE}+\frac{9}{ABDE}+\frac{8}{ACDE}+\frac{5}{BCDE}\right)z - \frac{1}{a^5}\cdot\frac{6}{ABCDE} = 0.$$

Coroll. 4.

38. Si non ſolum interualla corpuſculorum a, b, c, d etc. ſed etiam ipſa corpuſcula A, B, C, D etc. inter ſe aequalia aſſumamus, aequationes ſequentes prodibunt:

num. corp.	
I	$z - \frac{2}{Aa} = 0$
II	$z^2 - \frac{4z}{Aa} + \frac{3}{AAaa} = 0$
III	$z^3 - \frac{6zz}{Aa} + \frac{10z}{AAaa} - \frac{4}{A^3a^3} = 0$
IV	$z^4 - \frac{8z^3}{Aa} + \frac{21z^2}{A^2a^2} - \frac{20z}{A^3a^3} + \frac{5}{A^4a^4} = 0$
V	$z^5 - \frac{10z^4}{Aa} + \frac{36z^3}{A^2a^2} - \frac{56z^3}{A^3a^3} + \frac{35z^2}{A^4a^4} - \frac{6}{A^5a^5} = 0$
VI	$z^6 - \frac{12z^5}{Aa} + \frac{55z^4}{A^2a^2} - \frac{120z^3}{A^3a^3} + \frac{126z^2}{A^4a^4} - \frac{56z}{A^5a^5} + \frac{7}{A^6a^6} = 0$

vnde pro corpuſculorum numero quocunque m concluditur, fore:

$$z^{2m} - \frac{2m}{1}\cdot\frac{z^{2m-1}}{Aa} + \frac{(2m-1)(2m-2)}{1.\ 2.}\cdot\frac{z^{2m-2}}{A^2a^2} - \frac{(2m-2)(2m-3)(2m-4)}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{z^{2m-3}}{A^3a^3}$$
$$+ \frac{(2m-3)(2m-4)(2m-5)(2m-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\cdot\frac{z^{2m-4}}{A^4a^4} - \frac{(2m-4)(2m-5)(2m-6)(2m-7)(2m-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\cdot\frac{z^{2m-5}}{A^5a^5}$$
$$+ \text{etc.} = 0$$

Coroll. 5.

39 Hoc autem caſu coefficientes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. ex primo $\mathfrak{A}$ arbitrario pro quouis valore ipſius z ita definientur, vt ſit:

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = Aa\left(\frac{2}{Aa}\right) - z)$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = A^2a^2\left(\frac{2}{Aa} - z\right)^2 - 1$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} = A^3a^3\left(\frac{2}{Aa} - z\right)^3 - 2Aa\left(\frac{2}{Ab} - z\right)$$
$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}} = A^4a^4\left(\frac{2}{Aa} - z\right)^4 - 3A^2a^2\left(\frac{2}{Aa} - z\right)^2 + 1$$

ſiue

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = 2 - Aaz$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = 3 - 4Aaz + A^2a^2zz$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} = 4 - 10Aaz + 6A^2a^2zz - A^3a^3z^3$$
$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}} = 5 - 20Aaz + 21A^2a^2zz - 8A^3a^3z^3 + A^4a^4z^4$$

etc.

quarum formularum progreſſio ex ſuperioribus facillime colligitur.

Coroll. 6.

40. Ponamus pro eodem caſu breuitatis gratia $Aaz = y$, ac pro quouis corpuſculorum numero aequationes reſoluendae ita ſe habebunt:

Pro

Pro vno corpuſculo

$y - 2 = 0$, cuius radix eſt $y = 2$

Pro duobus corpuſculis

$yy - 4y + 3 = 0$, cuius radices ſunt $y = 1$; $y' = 3$

Pro tribus corpuſculis

$y^3 - 6yy + 10y - 4 = 0$, cuius radices ſunt

$y = 2$; $y' = 2 + \sqrt{2}$; $y'' = 2 - \sqrt{2}$

Pro quatuor corpuſculis

$y^4 - 8y^3 + 21y^2 - 20y + 5 = 0$, cuius radices ſunt

$y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; $y' = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$; $y'' = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$; $y''' = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$.

Coroll. 7.

41. Si has formulas bene perpendamus, eas per quadrata ſinuum, denotante ϱ angulum rectum, ſequenti modo exhiberi poſſe deprehendemus:

Pro vno corpuſculo

$y = 4(\text{ſin.}\, \frac{1}{3}\varrho)^2$

Pro duobus corpuſculis

$y = 4(\text{ſin.}\, \frac{1}{3}\varrho)^2$; $y' = 4(\text{ſin.}\, \frac{2}{3}\varrho)^2$

Pro tribus corpuſculis

$y = 4(\text{ſin.}\, \frac{1}{4}\varrho)^2$; $y' = 4(\text{ſin.}\, \frac{2}{4}\varrho)^2$; $y'' = 4(\text{ſin.}\, \frac{3}{4}\varrho)^2$

Pro quatuor corpuſculis

$y = 4(\text{ſin.}\, \frac{1}{5}\varrho)^2$; $y' = 4(\text{ſin.}\, \frac{2}{5}\varrho)^2$; $y'' = 4(\text{ſin.}\, \frac{3}{5}\varrho)^2$;
$y''' = 4(\text{ſin.}\, \frac{4}{5}\varrho)^2$

quarum formularum progreſſio per ſe eſt manifeſta.

Coroll.

Coroll. 8.

42. Inuentis autem pro quouis casu valoribus ipsius y, ob $z = \frac{y}{Aa}$, erit $n = \sqrt{\frac{2Kk}{Aa}y}$, et pro reliquis coefficientibus:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(2-y)$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(3-4y+yy)$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}(4-10y+6yy-y^3)$$
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A}(5-20y+21yy-8y^3+y^4)$$
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A}(6-35y+56yy-36y^3+10y^4-y^5)$$

etc.

Cum autem y habeat huiusmodi formam $y = 4(\text{sin.}\,\Phi)^2$; erit:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\cdot 2\,\text{cos.}\,2\Phi = \mathfrak{A}\cdot\frac{\text{sin.}\,4\Phi}{\text{sin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\cdot(2\,\text{cos.}\,4\Phi+1) = \mathfrak{A}\cdot\frac{\text{sin.}\,6\Phi}{\text{sin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\cdot(2\,\text{cos.}\,6\Phi+2\,\text{cos.}\,2\Phi) = \mathfrak{A}\cdot\frac{\text{sin.}\,8\Phi}{\text{sin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A}\cdot(2\,\text{cos.}\,8\Phi+2\,\text{cos.}\,4\Phi+1) = \mathfrak{A}\cdot\frac{\text{sin.}\,10\Phi}{\text{sin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A}\cdot(2\,\text{cos.}\,10\Phi+2\,\text{cos.}\,6\Phi+2\,\text{cos.}\,2\Phi) = \mathfrak{A}\cdot\frac{\text{sin.}\,12\Phi}{\text{sin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\cdot(\text{cos.}\,12\Phi+2\,\text{cos.}\,8\Phi+2\,\text{cos.}\,4\Phi+1) = \mathfrak{A}\cdot\frac{\text{sin.}\,14\Phi}{\text{sin.}\,2\Phi},$$

vnde sequens problema poterit in genere resolui.

Problema 5.

43. Si filum, terminis I et O fixum et data vi K tensum, onustum sit quotcunque corpusculis A, B, C etc. aequalibus et paribus interuallis a se inuicem distinctis, definire motum eius, postquam de statu suo naturali vtcunque fuerit depulsum.

 Solutio.

Solutio.

Sit numerus corpusculorum $=m$; massa vniuscuiusque $=A$, et binorum interuallum $=a$, erit totius fili massa $=mA$, et longitudo $IO=(m+1)a$. Reducta sint initio corpuscula A, B, C etc. ad distantias ab axe α, β, γ, etc. elapso autem tempore ω min. secund. peruenerint ad distantias $PA=p$; $QB=q$; $RC=r$, etc. His positis, si angulus rectus denotetur signo ϱ, et i sumatur pro numero quocunque integro positiuo; valor quilibet ipsius y erit $y=A(\sin.\frac{i}{m+1}\varrho)^2$, vnde fit $n=2\sin.\frac{i}{m+1}\varrho, V\frac{2Kk}{Aa}$; et ob $\Phi=\frac{i}{m+1}\varrho$, erit:

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\sin.\frac{4i}{m+1}\varrho:\sin.\frac{2i}{m+1}\varrho$$

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\sin.\frac{6i}{m+1}\varrho:\sin.\frac{2i}{m+1}\varrho$$

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{A}\sin.\frac{8i}{m+1}\varrho:\sin.\frac{2i}{m+1}\varrho$$

etc.

Ponatur iam $\mathfrak{A}=\mathfrak{a}\sin.\frac{2i}{m+1}\varrho$, ac pro motu habebuntur hae formulae:

$$p=\mathfrak{a}\sin.\frac{2i}{m+1}\varrho.\cos.(2\omega\sin.\frac{i}{m+1}\varrho.V\frac{2Kk}{Aa})+\text{etc.}$$

$$q=\mathfrak{a}\sin.\frac{4i}{m+1}\varrho.\cos.(2\omega\sin.\frac{i}{m+1}\varrho.V\frac{2Kk}{Aa})+\text{etc.}$$

$$r=\mathfrak{a}\sin.\frac{6i}{m+1}\varrho.\cos.(2\omega\sin.\frac{i}{m+1}\varrho.V\frac{2Kk}{Aa})+\text{etc.}$$

etc.

Scilicet ex quouis valore ipsius i formentur tales expressiones, eaeque coniunctae praebebunt valores generales pro applicatis p, q, r etc. At pro i successiue sumi debent numeri 1, 2, 3, 4 vsque ad m.

Coroll.

Coroll. 1.

44. Si breuitatis gratia ponatur angulus $\frac{1}{m+1}\varrho = \Phi$ et angulus $2\omega V \frac{2Kk}{Aa} = \psi$, habebuntur, fubftituendo pro i fucceffiue numeros 1, 2, 3, 4 etc. fequentes expreffiones pro applicatis:

$$p = \mathfrak{a}\,\text{fin.}\,2\Phi.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\Phi + \mathfrak{b}\,\text{fin.}\,4\Phi.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,2\Phi$$
$$+ \mathfrak{c}\,\text{fin.}\,6\Phi.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,3\Phi + \text{etc.}$$
$$q = \mathfrak{a}\,\text{fin.}\,4\Phi.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\Phi + \mathfrak{b}\,\text{fin.}\,8\Phi.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin}\,2\Phi$$
$$+ \mathfrak{c}\,\text{fin.}\,12\Phi.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,3\Phi + \text{etc.}$$
$$r = \mathfrak{a}\,\text{fin.}\,6\Phi.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\Phi + \mathfrak{b}\,\text{fin.}\,12\Phi.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,2\Phi$$
$$+ \mathfrak{c}\,\text{fin.}\,18\Phi.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,3\Phi + \text{etc.}$$
$$s = \mathfrak{a}\,\text{fin.}\,8\Phi.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\Phi + \mathfrak{b}\,\text{fin}\,16\Phi.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,2\Phi$$
$$+ \mathfrak{c}\,\text{fin.}\,24\Phi.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,3\Phi + \text{etc.}$$

etc.

Coroll. 2.

45. Ratio autem harum formularum clarius apparebit, fi eas ad quemuis corpufculorum numerum accommodemus. Maneat ergo breuitatis gratia angulus $2\omega V \frac{2Kk}{Aa} = \psi$, eritque pro cafu vnius corpufculi, ob $\Phi = \frac{1}{2}\varrho$,

$$p = \mathfrak{a}\,\text{fin.}\,\varrho.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin}\,\tfrac{1}{2}\varrho.$$

Coroll. 3.

46. Pro cafu autem duorum corpufculorum, vbi $\Phi = \frac{1}{3}\varrho$, habebimus:

$$p = \mathfrak{a}\,\text{fin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{3}\varrho + \mathfrak{b}\,\text{fin.}\,\tfrac{4}{3}\varrho.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho$$
$$q = \mathfrak{a}\,\text{fin.}\,\tfrac{4}{3}\varrho.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{3}\varrho - \mathfrak{b}\,\text{fin.}\,\tfrac{2}{3}\varrho.\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin}\,\tfrac{2}{3}\varrho.$$

Coroll. 4.

47. Pro casu trium corpusculorum, ob $\Phi = \frac{1}{4}\varrho$, habebimus:

$$p = \mathfrak{a} \sin. \tfrac{2}{4}\varrho \cos. \psi \sin. \tfrac{1}{4}\varrho + \mathfrak{b} \sin \tfrac{4}{4}\varrho. \cos. \psi \sin. \tfrac{2}{4}\varrho + \mathfrak{c} \sin. \varrho. \cos. \psi \sin. \tfrac{3}{4}\varrho$$

$$q = \mathfrak{a} \sin. \tfrac{4}{4}\varrho. \cos. \psi \sin. \tfrac{1}{4}\varrho + \mathfrak{b} \sin \tfrac{3}{4}\varrho. \cos. \psi \sin \tfrac{2}{4}\varrho - \mathfrak{c} \sin \tfrac{4}{4}\varrho. \cos. \psi \sin. \tfrac{3}{4}\varrho$$

$$r = \mathfrak{a} \sin. \tfrac{2}{4}\varrho \cos. \psi \sin. \tfrac{1}{4}\varrho - \mathfrak{b} \sin. \tfrac{4}{4}\varrho. \cos. \psi \sin. \tfrac{2}{4}\varrho + \mathfrak{c} \sin. \tfrac{2}{4}\varrho. \cos. \psi \sin. \tfrac{3}{4}\varrho.$$

Coroll. 5.

48. Pro casu quatuor corpusculorum, ob $\Phi = \frac{1}{5}\varrho$, habebimus:

$$p = \mathfrak{a} \sin. \tfrac{2}{5}\varrho. \cos. \psi \sin. \tfrac{1}{5}\varrho + \mathfrak{b} \sin. \tfrac{4}{5}\varrho. \cos. \psi \sin \tfrac{2}{5}\varrho + \mathfrak{c} \sin. \tfrac{4}{5}\varrho \cos. \psi \sin. \tfrac{3}{5}\varrho + \mathfrak{d} \sin. \tfrac{2}{5}\varrho. \cos. \psi \sin \tfrac{4}{5}\varrho$$

$$q = \mathfrak{a} \sin. \tfrac{4}{5}\varrho. \cos. \psi \sin \tfrac{1}{5}\varrho + \mathfrak{b} \sin. \tfrac{2}{5}\varrho \cos. \psi \sin. \tfrac{2}{5}\varrho - \mathfrak{c} \sin. \tfrac{2}{5}\varrho. \cos. \psi \sin. \tfrac{3}{5}\varrho - \mathfrak{d} \sin. \tfrac{4}{5}\varrho \cos. \psi \sin. \tfrac{4}{5}\varrho$$

$$r = \mathfrak{a} \sin. \tfrac{4}{5}\varrho. \cos. \psi \sin. \tfrac{1}{5}\varrho - \mathfrak{b} \sin. \tfrac{2}{5}\varrho. \cos. \psi \sin \tfrac{2}{5}\varrho - \mathfrak{c} \sin \tfrac{2}{5}\varrho. \cos. \psi \sin. \tfrac{3}{5}\varrho + \mathfrak{d} \sin. \tfrac{4}{5}\varrho. \cos. \psi \sin \tfrac{4}{5}\varrho$$

$$s = \mathfrak{a} \sin \tfrac{2}{5}\varrho \cos. \psi \sin. \tfrac{1}{5}\varrho - \mathfrak{b} \sin \tfrac{4}{5}\varrho. \cos. \psi \sin. \tfrac{2}{5}\varrho + \mathfrak{c} \sin. \tfrac{4}{5}\varrho. \cos. \psi \sin \tfrac{3}{5}\varrho - \mathfrak{d} \sin. \tfrac{2}{5}\varrho. \cos. \psi \sin. \tfrac{4}{5}\varrho.$$

Coroll. 6.

49. Quod si vero numerus corpusculorum fuerit infinite magnus, ob $\sin. \Phi = \Phi = \frac{\varrho}{m}$, nanciscemur has formulas:

$$p = \frac{2\mathfrak{a}\varrho}{m} \cos. \frac{\psi\varrho}{m} + \frac{4\mathfrak{b}\varrho}{m} \cos. \frac{2\psi\varrho}{m} + \frac{6\mathfrak{c}\varrho}{m} \cos. \frac{3\psi\varrho}{m} + \text{etc.}$$

$$q = \frac{4\mathfrak{a}\varrho}{m} \cos. \frac{\psi\varrho}{m} + \frac{8\mathfrak{b}\varrho}{m} \cos. \frac{2\psi\varrho}{m} + \frac{12\mathfrak{c}\varrho}{m} \cos. \frac{3\psi\varrho}{m} + \text{etc.}$$

$$r = \frac{6\mathfrak{a}\varrho}{m} \cos. \frac{\psi\varrho}{m} + \frac{12\mathfrak{b}\varrho}{m} \cos. \frac{2\psi\varrho}{m} + \frac{18\mathfrak{c}\varrho}{m} \cos. \frac{3\psi\varrho}{m} + \text{etc.}$$

etc.

Coroll.

Coroll. 7.

50. Verum si huius cordae tota longitudo IO ponatur $= l$, et massa totius cordae $=$ M ob $a = \frac{l}{m}$, et $A = \frac{M}{m}$, erit $\psi = 2 m \omega \surd \frac{2Kk}{Ml}$, vnde $\frac{\psi \varrho}{m} = 2 \varrho \omega \surd \frac{2Kk}{Ml} = \pi \omega \surd \frac{2Kk}{Ml}$; in coefficientibus autem constantibus vtpote arbitrariis omitti poterunt litterae ϱ et m, ita vt sit:

$$p = \mathfrak{a} \cos. \pi \omega \surd \frac{2Kk}{Ml} + \mathfrak{b} \cos. 2\pi \omega \surd \frac{2Kk}{Ml} + \mathfrak{c} \cos. 3\pi \omega \surd \frac{2Kk}{Ml} + \text{etc.}$$

$q = 2p$; $r = 3p$; $s = 4p$ etc.

quae formula eundem exhibet motum, qui pro corda vniformiter crassa determinari solet.

DE MOTV VIBRATORIO CORDARVM INAEQVALITER CRASSARVM.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Quae primum a *Tayloro* circa casum vibrationum singularem, tum vero generaliter a Cel. *Alemberto* et a me sunt inuestigata, ad cordas per totam longitudinem aequaliter crassas restringuntur, ex quo etiam regulae, pro formatione soni inde petitae, vltra hoc cordarum genus extendi non possunt. Ita regula inuenta, quod tempus cuiusque vibrationis cordae, cuius longitudo $= a$, pondus $= M$, et vis tendens cordam $= F$, fit $= \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ minutorum secundorum, denotante g altitudinem, ex qua graue vno minuto secundo libere delabitur, non nisi pro cordis vniformiter crassis habet locum; quin etiam in his tantum cordis vsu venire potest, vt eadem corda vel duplo, vel triplo, vel quadruplo, plures edat vibrationes, quam haec regula continet. Denique etiam insigne illud phaenomenon, quo eadem corda subinde plures huiusmodi sonos, rationem numerorum 1, 2, 3, 4 etc. sequentes, simul edere obseruatur, cuius causam Vir Celeb. *Daniel Bernoulli* felicissime nuper explicauit, in aliis cordis, nisi quae sint aequabiliter crassae, haud deprehenditur.

2.

2. Quando autem cordae non ſunt aequabiliter craſſae, atque in aliis corporum vibrantium generibus etiamſi ſimili modo vſu venire poteſt, vt idem corpus plures ſonos ſimul edat, hi tamen ſoni vtcunque a ratione numerorum 1, 2, 3, 4 etc. diſcrepare poſſunt. Ex quo intelligere licet, quam infirmo nitatur fundamento principium illud, cui ſummus in arte muſica artifex *de Rameau* vniuerſam harmoniam ſuperſtruendam arbitratur. Ideo ſcilicet diuerſos ſonos ad harmoniam compoſitos eſſe putat, quod iidem ſoni ab eadem corda vibrante ſimul producantur. Verum praeterquam iam pridem firmiſſimis rationibus eſt demonſtratum, principium harmoniae in ſimplicitate rationum, quas numeri vibrationum eodem tempore editarum inter ſe tenent, vnice eſſe quaerendum; haec opinio etiam per cordas inaequaliter craſſas, quae ſonos vtcunque diſſonos ſimul edere poſſunt, funditus euertitur.

3. Ne igitur talibus phaenomenis, quae cordis vniformiter craſſis ſunt propria, nimium tribuatur, haud abs re fore arbitror, ſi cordarum etiam inaequaliter craſſarum motum, quantum quidem Analyſeos fines permittunt, examini ſubiecero, eiusque inueſtigationem latiſſime complexam inſtituero. Maxime autem ardua eſt haec quaeſtio, atque grauiſſimis difficultatibus inuoluta; hancque ob cauſam etiamſi in eius enodatione parum profecero, tamen ampliſſimus nobis aperietur campus, vires noſtras in analyſi exercendi, huiusque ſcientiae limites vlterius dilatandi Hic igitur non tam ipſius quaeſtionis, quam tractandam ſuſcipio, vtilitas eſt ſpectanda, etiamſi forte non parum

parum doctrinam de vibrationibus cordarum ſit illuſtratura, quam opportuna occaſio nonnulla inſignia momenta, per totam Analyſin vberrimum fructum pollicentia, accuratius perpendendi. Huiusmodi autem inueſtigationibus, quae per ſe leuis momenti videantur, praeclariſſima inuenta, quibus Analyſis adhuc eſt ditata, plerumque debemus.

4. Quo igitur facilius maſſam ſeu pondus cordae ratione inaequalis craſſitiei in calculum introducere queamus, ſumamus cylindri, ex pari materia confecti, cuius baſis diameter ſit $=b$, et altitudo $=b$, maſſam ſeu pondus eſſe $=M$: hinc enim cuiusque cylindri elementaris in corda concipiendi, cuius diameter eſt $=z$, et altitudo $=dx$, pondus erit $=\frac{Mzzdx}{bbb}$. Cordam enim tanquam rotundam, ſeu quaſi tornatam, ſpectare licet, vt ſit ex infinitis huiusmodi cylindrulis elementaribus compoſita. Praeterea vero hic cordam perfecte flexilem pono, omnique rigore, ſiue elatere, penitus deſtitutam, vt inflexioni, quam inter vibrandum patitur, nullo modo obluctetur. Denique etiam, vti in cordis aequabilis craſſitiei eſt factum, ipſas vibrationes quaſi infinite paruas ſpectabo, ita vt excurſiones vtrinque a ſitu naturali recedentes prae longitudine cordae pro nihilo haberi queant. Hoc modo longitudo cordae manebit inuariata, calculoque hoc commodi aſſequemur, vt elementa curuae ab elementis axis non diſcrepent.

Tab. II. Fig. 1. 5. Sit igitur A B huiusmodi corda inaequabilis craſſitiei, in punctis A et C fixa, et tenſa a vi quacunque, quam exponamus pondere $=F$. Statuamus totam

totam cordae longitudinem $AB = a$, quae, dum eſt in quiete, vtique ſitum rectilineum APB tenebit; abſciſſa autem a puncto A portione quacunque $AP = x$, ſit diameter craſſitiei eius in puncto $P = z$, et, quia quaeſtionem generatim complectitur, erit z functio quaecunque ipſius x, et quidem functio cognita, ſiquidem variationem craſſitiei tanquam cognitam ſpectemus. Sumto ergo longitudinis elemento $Pp = dx$, erit maſſa ſeu pondus huius elementi cordae $Pp = \frac{Mzzdx}{bbb}$. In genere ergo problema, cuius ſolutionem aggredior, ita ſe habet:

Si haec corda a ſtatu naturali recto APB *in figuram quamcunque fuerit depulſa, ita tamen vt eius elongationes a recta* AB *pro axe aſſumtae ſint quam minimae, atque corda de hoc ſitu violento ſubito dimittatur, definire motum vibratorium, quem eſt receptura:*

Proponitur ergo in hoc problemate figura quaecunque, quae cordae initio fuerit tributa, quaeſtioque huc redit, vt ad quoduis tempus, a momento relaxationis elapſum, ſtatus cordae definiatur.

6. Ponamus ergo, ab iſto momento iam elapſum eſſe tempus $= t$, atque nunc cordam conſecutam eſſe figuram AMB, cuius termini quidem A et B cum ſtatu naturali conueniant, punctum autem P cordae iam in M eſſe translatum, vocemusque hanc applicatam $BM = y$, quae erit quantitas non ſolum ab abſciſſa $AP = x$, ſed inſuper etiam a tempore t pendens, ſeu erit functio quaedam ipſius x et ipſius t ſimul, in cuius functionis inueſtigatione tota problematis

 I i ſolu-

solutio versabitur. Iam autem quasdam primarias proprietates huius functionis ipsa quaestionis natura suppeditat, quarum prima est, vt, si ponatur $x = o$, ista functio y semper euanescat, quicunque valor tempori t tribuatur; deinde vero idem euenire debet in altero puncto fixo B, si ponatur $x = AB = a$. Tertio, si tempus t statuatur euanescens, functio y ita debet esse comparata, vt figuram cordae primitus impressam referat Quarto vero, etiam posito $t = o$, motus cordae omnino euanescere debet, quod eueniet, si ratio differentialis $\frac{dy}{dt}$, dum abscissa x vt constans tractatur, in nihilum abeat.

7. Dum enim in his excursionibus minimis longitudo cordae non mutari assumitur, longitudo AM aequalis censenda est longitudini $AP = x$, vnde durante motu punctum M secundum ipsam applicatam MP mouebitur, neque extra eam vsquam diuagabitur. Quare, si ponamus $dy = p\,dx + q\,dt$, punctum M tempusculo dt per spatiolum $q\,dx$ feretur, cuius motus propterea celeritas, a recta AB secundum directionem PM recedens, erit $= \frac{q\,dt}{dt} = q$. Vtar autem hic signandi modo iam aliquoties exposito, et pro q scribam $(\frac{dy}{dt})$, vti similiter haec scriptio $(\frac{dy}{dx})$ valorem ipsius p exprimit. Vlterius autem istum signandi modum hic extendi conueniet, ita vt, quia $p = (\frac{dy}{dx})$ et $q = (\frac{dy}{dt})$ posuimus, haec formula $(\frac{ddy}{dx^2})$ idem significet, quod $(\frac{dp}{dx})$, et $(\frac{ddy}{dx\,dt})$ idem, quod $(\frac{dp}{dt})$; tum vero $(\frac{ddy}{dt^2})$ idem, quod $(\frac{dq}{dt})$, et $(\frac{ddy}{dt\,dx})$ idem, quod $(\frac{dq}{dx})$. Cum autem ex

natura

natura differentiationis ſit $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{dp}{dt}\right)$, manifeſtum eſt, hoc ſignandi modo fore $\left(\frac{ddy}{dt\,dx}\right) = \left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$, quae ſcriptionis ſimilitudo valoris vtriusque aequalitatem commodisſime declarat.

8. Dum autem corda in ſitu AMB verſatur, ſingula eius elementa in motu ſuo vel accelerabuntur, vel retardabuntur, quae motus mutatio a vi cordam tendente F oritur, indeque eſt definienda. Hanc vero vim, a tenſione reſultantem, ex figura AMB, quam corda nunc tenet, determinari oportet, quo in negotio, quamdiu eandem cordae figuram AMB contemplamur, tempus t tanquam quantitatem conſtantem tractari conueniet, vnde in calculum hic tantum formulae $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ et $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ ingredientur, excluſis reliquis, variabilitatem temporis t inuoluentibus. At quia corda a ſitu naturali quam minime diſtat, tenſio cordae in ſingulis elementis immutata manebit, eritque adhuc $= E$, vnde punctum M, ſeu potius elementum Mm, tam a portione antecedente MA, quam a ſequente mB, vim $= F$ ſuſtinebit, quarum virium directio tangentium in punctis M et m ducendarum directionem ſequetur.

9. Reſoluantur ergo hae vires more ſolito, atque hinc, ex vi F ſecundum tangentem in M antrorſum vrgente, naſcetur vis ſecundum directionem MP ſollicitans $= F\left(\frac{dy}{dx}\right)$, quia elementum curuae ipſi elemento abſciſſae dx aequale reputatur. Verum ex vi F ſecundum tangentem in m retrorſum vrgente naſcetur vis ſecundum directionem contrariam PM ſollicitans $= F\left(\frac{dy}{dx}\right) + F\,d.\left(\frac{dy}{dx}\right)$, in qua poſtrema differen-

 tia-

tiatione tempus t adhuc vt conſtans ſpectatur: erit ergo $d.\left(\frac{dy}{dx}\right)=d.\,p=dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ ideoque $d.\left(\frac{dy}{dx}\right)=dx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Ex his ergo duabus viribus reſultat vis elementum cordae Mm ab axe AB ſecundum directionem PM remouens $=Fdx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, ſi quidem haec expreſſio haberet valorem poſitiuum; quia autem ſemper valorem negatiuum ſortitur, haec vis perpetuo cordam ad ſitum naturalem AB impellit, vti ex motus natura per ſe eſt manifeſtum. Vi ergo motrice, cuius actioni ſingula cordae elementa ſunt ſubiecta, inuenta, facile erit ipſam motus mutationem elicere, vnde totus cordae motus ſubſecuturus ſponte innoteſcet.

10. Inuenta ergo vis motrix $Fdx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ diuidatur per maſſam mouendam $\frac{Mzzdx}{bbb}$, vt obtineatur acceleratio $=\frac{Fbbb}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Cum iam celeritas puncti M ſit $=\left(\frac{dy}{dt}\right)$, inde acceleratio ſecundum directionem PM quoque definitur per $2\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, ſecundum eas motus leges, quas alias ſtabiliui, vbi celeritas per altitudinem ipſi debitam, tempus vero per ſpatium ad celeritatem applicatum menſuratur. Quod ſi autem tempus potius in minutis ſecundis exprimere velimus, introducta altitudine g, ex qua graue vno minuto ſecundo libere deſcendit, loco litterae t poſtremam formulam afficientis ſcribi oportet $2t\sqrt{g}$, ideoque $4g\,dt^2$ loco dt^2, ex quo acceleratio erit $=\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, ac littera t iam numerum abſolutum denotat, indicantem, quot minuta ſecunda a motus initio iam ſint praeterlapſa. Gemina ergo accelerationis formula ſequentem praebebit aequationem:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\frac{Fbbb}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \text{ ſeu } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

quae

quae totum motum, quo corda ciebitur, in ſe complectitur.

11. Hic primum obſeruandum eſt, quantitatem z eſſe functionem ipſius x tantum, atque ex data cordae craſſitie inaequabili definiri; hac ergo functione, tanquam cognita ſpectata, quaeſtio mechanica ad hanc quaeſtionem mere analyticam eſt reuocata; qua quaeritur, qualis functio binarum variabilium x et t pro y ſubſtitui debeat, vt conditiones in hac aequatione $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ contentae adimpleantur; ſiue vt haec analogia locum habeat:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) : \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = 2Fbbbg : Mzz.$$

Facile autem perſpicitur, huic conditioni infinitis modis ſatisfieri poſſe, ex quibus deinceps eos eligi oportet, qui ſimul proprietatibus ante commemoratis ſint praediti; ſcilicet vt ſemper prodeat $y=0$, ſiue ponatur $x=0$, ſiue $x=a$, quemcunque valorem tempus t obtinuerit. Deinde vt, poſito tempore $t=0$, aequatio inter x et y eam ipſam curuam ſit exhibitura, quae primum cordae fuerit inducta. Tum vero, vt, poſito $t=0$, valor quantitatis $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ euaneſcat pro qualibet abſciſſa x.

12. Vt igitur ſolutio has cunctas determinationes ſuſcipere poſſit, facile intelligitur, aequationem inventam $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ generaliſſime conſtrui oportere, ita vt pro y expreſſio generaliſſima eliciatur, in qua omnes omnino valores, huic aequationi ſatisfacientes, ſint contentae; cuiusmodi ſolutionem dedi pro caſu cordarum aequabiliter craſſarum, quo cordae

 diame-

diameter z erit constans $= b$, totusque ideo coefficiens $\frac{2Fbbbg}{Mzz}$ quantitati constanti aequalis. Ostendi enim pro hoc casu, si breuitatis gratia ponatur $\frac{2Fbbbg}{Mzz} = cc$, huic aequationi $(\frac{ddy}{dt^2}) = cc(\frac{ddy}{dx^2})$ generalissime satisfieri per hanc formam $y = \Phi(x+ct) + \psi(x-ct)$, vbi Φ et ψ sunt signa, functiones quascunque quantitatum $x+ct$ et $x-ct$ indicantia. Pro nostro ergo casu cordarum inaequaliter crassarum similis forma generalissima desideratur, quae pari modo aequationem differentio-differentialem $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}(\frac{ddy}{dx^2})$ exhauriat; huiusmodi autem solutionem ob defectum analyseos vix sperare licet.

13. Quodsi tantum functionem particularem eruerimus, quae loco y substituta, aequationi satisfaciat $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}(\frac{ddy}{dx^2})$, ea speciem quandam vibrationum, quarum corda erit capax, definiet, siquidem ea functio ita fuerit comparata, vt, siue ponatur $x = 0$, siue $x = a$, valor ipsius y prodeat euanescens, quantumcunque tempus t iam fuerit elapsum. Ac si haec conditio locum habeat, patebit, cuiusmodi figura cordae primitus tribui debeat, vt ad hunc motum sit accommodata. Tales igitur solutiones particulares vsu non carebunt, cum semper certam quandam speciem vibrationum nobis declarent, quae sub certis conditionibus in motu cordae locum habere queant; etiamsi solutio problematis, in genere propositi, quo figura cordae initialis est praescripta, adhuc maneat abscondita. Ob defectum ergo solutionis generalis in huiusmodi solutionibus particularibus acquiescere debebimus, quemadmodum etiam pro casu

caſu vniformiter craſſarum ſolutio *Taylori*, etſi fuerat particularis, non parum motum huiusmodi cordarum illuſtrauit, ac tandem etiam ad ſolutionem generalem perduxit.

14. Multo minus igitur pro caſu cordarum inaequaliter vtcunque craſſarum, ſolutionem completam ante expectare poterimus, quam plures ſolutiones particulares ſedulo euoluerimus. Ac primum quidem animaduerto, ſtatim ac duae pluresue ſolutiones particulares fuerint inuentae, ex iis facillime infinitas alias per compoſitionem erui poſſe. Si enim P, Q, R ſint eiusmodi functiones quantitatum x et t, quarum quaelibet loco y ſubſtituta aequationi inuentae ſatisfaciat, tum quaeuis harum aequationum $y = P$, $y = Q$, $y = R$ certam quandam ſpeciem vibrationum exprimet, quarum cuique certus quidam ſonus conueniet. Iam vero manifeſtum eſt, ſi ſingulae aequationes iſtae ſeorſim quaeſito ſatisfaciant, tum etiam aequationem ex illis vtcunque compoſitam $y = \alpha P + \beta Q + \gamma R$ quaeſito aeque eſſe ſatisfacturam; vnde hoc nanciſcimur eximium Theorema Phyſico-Muſicum, a Celeb. *Bernoullio* prolatum, quod quos ſonos corda ſeorſim edere valeat, eosdem quoque ſimul edere poſſit.

15. Ponamus breuitatis gratia $\frac{2Fbbbg}{Mzz} = ss$, vt ss denotet functionem datam abſciſſae x, et cardo quaeſtionis in hac aequatione $(\frac{ddy}{dt^2}) = ss(\frac{ddy}{dx^2})$ reſoluenda verſabitur, cuius quidem conſtructionem generalem, ſi ss eſſet quantitas conſtans, iam nouimus contentam fore in hac formula:

$$y = \Phi(x + st) + \psi(x - st)$$

ve-

verum quia s eſt quantitas variabilis, haec formula non amplius conditioni praeſcriptae ſatisfacit. Operae pretium igitur erit, inueſtigare, quibusnam caſibus ſimiles formulae generales locum habere queant; huuc in finem fingamus huiusmodi valorem

$$y = v\,\Phi\,u,$$

vbi v et u ſint functiones quaecunque ipſarum t et x, etiamſi prior v ſine detrimento amplitudinis tanquam functio ſolius x ſpectari poſſit. Vtar autem in differentiatione his ſignis:

$$d.\,\Phi u = du.\,\Phi' u \text{ et } d.\,\Phi' u = du.\,\Phi'' u.$$

16. Cum igitur differentiando ſit

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right)\Phi u + v\left(\frac{du}{dt}\right)\Phi' u \text{ et}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)\Phi u + v\left(\frac{du}{dx}\right)\Phi' u, \text{ erit}$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dt^2}\right)\Phi u + 2\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)\Phi' u + v\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)\Phi' u + v\left(\frac{du}{dt}\right)^2\Phi'' u$$

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dx^2}\right)\Phi u + 2\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\Phi' u + v\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)\Phi' u + v\left(\frac{du}{dx}\right)^2\Phi'' u$$

atque, his valoribus ſubſtitutis, in aequatione $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = ss\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ membra, quodlibet functionis genus continentia, ſeorſim aequentur, vnde ſequentes aequationes obtinebuntur:

I. $\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = ss\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)$

II. $2\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{du}{dt}\right) + v\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = 2ss\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + ssv\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$

III. $v\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = ssv\left(\frac{du}{dx}\right)^2$

quarum poſtrema ſtatim praebet $\left(\frac{du}{dt}\right) = \pm s\left(\frac{du}{dx}\right)$, cui ſatisfit ponendo $u = t \pm \int \frac{dx}{s}$. Satisfaceret quidem etiam functio quaecunque formulae $t \pm \int \frac{dx}{s}$; ſed hinc amplitudo formulae aſſumtae Φu non extenderetur.

17.

17. Ponamus ergo $u = t \pm \int \frac{dx}{s}$, quae formula eſt determinata ob s functionem ipſius x tantum, eritque $\left(\frac{du}{dt}\right) = 1$, et $\left(\frac{du}{dx}\right) = \pm \frac{1}{s}$, porroque $\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = 0$, et $\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \mp \frac{ds}{ssdx}$; qui valores in ſecunda aequatione ſubſtituti praebent:

$$2\left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm 2s\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{vds}{dx}$$

$$\text{ſeu } \left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm s\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{vds}{2dx}$$

Hinc vlterius more noſtro differentiando conſequimur:

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \pm s\left(\frac{ddv}{dxdt}\right) \mp \frac{ds}{2dx}\left(\frac{dv}{dt}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{ddv}{dt\,dx}\right) = \pm \frac{ds}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) \pm s\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) \mp \frac{ds}{2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{vdds}{2dx^2}$$

vnde fiet:

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = + \frac{sds}{2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + ss\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) - \frac{svdds}{2dx^2} - \frac{sds}{2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{vds^2}{4dx^2},$$

qui valor, cum per primam aequationem aequalis eſſe debeat ipſi $ss\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)$, orietur:

$$-\frac{svdds}{2dx^2} + \frac{vds^2}{4dx^2} = 0, \text{ ſeu } 2sdds = ds^2,$$

cuius integrale primum eſt $\frac{\alpha ds^2}{dx^2} = s$, porroque $x = \beta + 2\sqrt{\alpha s}$, ſicque obtinebimus $s = \frac{(k+nx)^2}{f}$.

18. En ergo caſum eximium, pro quo ſolutionem generalem exhibere poterimus, qui toties locum habet, quoties diameter craſſitiei cordae z ita pendeat ab abſciſſa x, vt ſit $s = \frac{(k+nx)^2}{f}$; ſeu quando fuerit $\frac{2Fbbhg}{Mzz} = \frac{(k+nx)^4}{ff}$, ideoque ipſe diameter craſſitiei cordae $z = \frac{bf\sqrt{hg}}{(k+nx)^2}\sqrt{\frac{2F}{M}}$. Cum autem iam ſit $s = \frac{(k+nx)^2}{f}$, erit $u = t \mp \frac{f}{n(k+nx)} + m$; et ob $\frac{ds}{dx} = \frac{2n(k+nx)}{f}$, pro valore v habebimus:

$$2\left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm \frac{2(k+nx)^2}{f}\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{2n(k+nx)}{f}v$$

 Pona-

Ponamus ergo, v tantum ab x pendere, vt fit $(\frac{dv}{dt})=o$, esseque oportet $(k+nx)dv=uvdx$, seu $v=\alpha(k+nx)$. Quare cum pro u duplicem valorem elicuerimus, et vtriusque functionem quamcunque capere liceat, exinde obtinebitur pro y sequens valor generalis:

$$y=(k+nx)\Phi(t+\alpha+\frac{f}{n(k+nx)})+(k+nx)\Psi(t+\beta-\frac{f}{n(k+nx)})$$

19. Quo hunc casum facilius applicare queamus, ponamus, diametrum crassitiei cordae in A esse $=b$, in alio autem quocunque loco P esse $z=\frac{b}{(1+\frac{nx}{a})^2}$ $=\frac{aab}{(a+nx)^2}$, ita vt in altero termino B diameter cordae futurus sit $z=\frac{b}{(1+n)^2}$, vbi n vel numerum positiuum quemcunque, vel fractionem quamcunque vnitate minorem negatiuam assumere licet. Quodsi iam haec forma comparetur cum praecedente $z=\frac{bf\sqrt{bg}}{(k+nx)^2}\sqrt{\frac{2F}{M}}$, habebimus $k=a$ et $f=\frac{aa}{\sqrt{bb}}\sqrt{\frac{M}{2F}}=\frac{a\sqrt{N}}{\sqrt{2Fbg}}$. In Formula autem ante inuenta ponamus $\alpha=-\frac{f}{nk}$, et $\beta=\frac{f}{nk}$, quod sine detrimento vniuersalitatis fieri potest, sicque obtinebimus pro motu cordae determinando sequentem aequationem generalem:

$$y=(a+nx)\Phi(t+\frac{ax\sqrt{M}}{(a+nx)\sqrt{2Fbg}})+(a+nx)\Psi(t-\frac{ax\sqrt{M}}{(a+nx)\sqrt{2Fbg}})$$

quam etiam hoc modo exprimere licet:

$$y=(a+nx)\Phi(\frac{ax}{a+nx}+t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}})+(a+nx)\Psi(\frac{ax}{a+nx}-t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}),$$

20. In hac expressione itaque M denotat pondus cordae, aequaliter crassae, longitudinis $=b$, cuius crassities aequalis est ei, quam nostra corda habet in termino A; at F denotat vim, qua corda est tensa; Φ autem

autem et Ψ ſunt ſigna, quibus functiones quaecunque indicantur. Has igitur ita comparatas eſſe oportet, vt, ſiue ponatur $x = 0$, ſiue $x = a$, valor ipſius y ſemper euaneſcat; vnde fit:

$$\text{I.} \quad \Phi\left(t\sqrt{\tfrac{2Fbg}{M}}\right) + \Psi\left(-t\sqrt{\tfrac{2Fbg}{M}}\right) = 0$$

$$\text{II.} \quad \Phi\left(\tfrac{a}{1+n} + t\sqrt{\tfrac{2Fbg}{M}}\right) + \Psi\left(\tfrac{a}{1+n} - t\sqrt{\tfrac{2Fbg}{M}}\right) = 0$$

Cum deinde, poſito $t = 0$, eſſe debeat $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, quidquid ſit x, neceſſe eſt, vt ſit:

$$\text{III.} \quad \Phi'\left(\tfrac{ax}{a+nx}\right) - \Psi'\left(\tfrac{ax}{a+nx}\right) = 0$$

vnde patet, ſigna Φ' et Ψ', ideoque et Φ et Ψ, ſimiles functiones denotare debere.

21. Cum igitur functio Ψ ſimilis eſſe debeat functioni Φ, haec porro eius naturae eſſe debet, vt ſit tam $\Phi u + \Phi(-u) = 0$, quam

$$\Phi\left(\tfrac{a}{1+n} + u\right) + \Phi\left(\tfrac{a}{1+n} - u\right) = 0;$$

vnde, cum omnis functio per lineam curuam repraeſentari poſſit, cuius applicatae exhibeant iſtas functiones abſciſſis reſpondentes, manifeſtum eſt, pro noſtro caſu eiusmodi requiri lineam curuam, quae circa initium abſciſſarum habeat ramos alternatim aequales, ita vt, poſita abſciſſa negatiua, applicata quoque prodeat negatiua; tum vero, ſumto in axe interuallo $= \frac{a}{1+n}$, vt circa hoc punctum iterum dentur rami vtrinque alternatim aequales, ita vt, ſi alter ſupra axem extendatur, alter infra axem iaceat. Quoniam igitur huiusmodi puncta, circa quae exiſtunt rami alternatim aequales, centra lineae curuae appellare licet, patet, tam initium abſciſſarum ipſum, quam aliud punctum in axe, inde interuallo $\frac{a}{1+n}$ remotum, centri natura praedita eſſe oportere. Hinc autem ſequitur, infinita alia quoque dari centra in axe ſita, quae a ſe inuicem interuallo $\frac{a}{1+n}$ ſint remota.

Tab. II. Fig. 2. 22. Haec igitur curua, quam determinatricem motus vocabo, ita erit formata, vti in figura 2 repraeſentatur. Erit ſcilicet anguiformis, infinitos habens plexus βa, ab, $b\alpha$ inter ſe ſimiles et aequales, ita vt circa puncta β, a, b, α rami alternatim ſint aequales, atque horum punctorum interualla ſint $ab = \beta a = b\alpha = \frac{a}{1+n}$. Si iam horum punctorum quodpiam a pro abſciſſarum initio aſſumatur, capiaturque abſciſſa quaecunque $aq = u$, erit applicata $qn = \Phi u$, ſeu exhibebit eiusmodi functionem ipſius u, qualis ad motus determinationem requiritur. Quaecunque ergo curua huius formae fuerit deſcripta, ea ſemper ſpeciem quandam motus vibratorii, quem corda ſuſcipere poteſt, definiet, et cum innumerabiles curuae huius formae diuerſae deſcribi queant, innumerabiles quoque motus vibratorii ſpecies inde determinabuntur, quae ratione curuaturae, quam corda ſingulis momentis induet, erunt quidem inter ſe diuerſae; verum ſi ipſe motus vibratorius eiusque periodi ſpectentur, omnes admirabili modo inter ſe conſentient, niſi forte certis caſibus eadem corda eodem tempore, vel duplo, vel triplo, vel quadruplo etc. plures vibrationes ſit editura.

23. Ad certam autem motus ſpeciem conſtituendam non opus eſt, vt iſta curua determinatrix ſecundum

dum legem continuitatis ſit deſcripta, vt eius natura aequatione analytica comprehendi queat; ſed ad hunc vſum aeque erit accommodata, etiamſi vtcunque veluti libero manus tractu fuerit delineata, neque eius partes per legem continuitatis inter ſe connectantur, dummodo figuram habeat praeſcriptam. Ita pro lubitu ſi ſuper axe intra puncta a et b curua quaecunque, ſiue continua, ſiue non continua, fuerit deſcripta, eiusdem curvae deſcriptio vtrinque ad eundem axem infinitum repetatur, ita vt alternis vicibus ſupra et infra axem delineetur, et in ſingulis punctis a, b, α, β pares curuae anb termini inuicem iungantur. Hoc igitur modo ſemper curua ad motum quendam cordae determinandum apta obtinebitur, vbi notandum eſt, etiamſi pro curua anb linea algebraica, veluti arcus circuli, fuerit aſſumta, quae naturalem habeat continuationem, hac tamen penitus reiecta continuationem modo deſcripto inſtitui oportere.

24. Interim tamen quoque huiusmodi curuae determinatrices continuae exhiberi poſſunt, quae ſecundum totam extenſionem vna aequatione comprehendantur. Tales autem curuae, vti per ſe eſt manifeſtum, inter algebraicas non reperiuntur, ſed ex ordine tranſcendentium ſunt petendae, ex quo quidem linea ſinuum, ſeu trochois elongata, inprimis eſt notanda, quae pro noſtro inſtituto, ſi ponamus $aq = u$ et $qn = v$, hanc praebet aequationem $v = \alpha \sin. \frac{\pi(1+n)u}{a}$, quin etiam aequatio magis generalis ſequens aeque eſt idonea:

$$v = \alpha \sin. \frac{\pi(1+n)u}{a} + \beta \sin. \frac{2\pi(1+n)u}{a} + \gamma \sin. \frac{3\pi(1+n)u}{a} + \text{etc.}$$

 ſed

ſed hae curuae etiamſi continuae prae non continuis in hoc negotio nullam habent praerogatiuam, atque in hoc vis noſtrae ſolutionis generalis potiſſimum conſiſtit: quod eo magis eſt notatu dignum, quod hoc modo calculum adeo ad curuas non-continuas et per calculum non explicabiles accommodauerim, quod neſcio an vllo alio caſu adhuc ſit praeſtitum.

25. Deſcripta autem huiusmodi curua quacunque, accuratius inueſtigemus, quomodo ex ea motus cordae definiri queat. Totum autem negotium huc redit, vt pro corda AMB ad datum tempus t, cuius expreſſio ad minutum ſecundum tanquam vnitatem refertur, applicata $PM = y$, datae abſciſſae $AP = x$ conueniens, determinetur. Hunc in finem in curua determinatrice capiantur binae abſciſſae

Tab. II. Fig. 1. et 2.

$$ap = \frac{ax}{a+nx} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}, \text{ et } aq = \frac{ax}{a+nx} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}$$

notatisque applicatis pm et qn, erit

$$y = m(a+nx).pm + m(a+nx).qn$$

vbi coefficiens m tam paruus accipi debet, vt applicata PM fiat quam minima. Hinc enim orietur, vt ante inuenimus,

$$y = m(a+nx)\Phi\left(\frac{ax}{a+nx} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right) + m(a+nx)\Phi\left(\frac{ax}{a+nx} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right).$$

Cum igitur hinc ad quoduis tempus ſtatus et figura cordae determinetur, eius quoque motus innoteſcet, ſi, poſita x conſtante, tantum tempus t variabile ſtatuatur.

26. Si ponamus tempus $t = 0$, inueniemus cordae figuram initialem, ex qua motus hoc modo determinatus oriatur. Habebimus ergo pro hac figura initiali iſtam aequationem:

$$y = 2m(a+nx)\Phi\frac{ax}{a+nx},$$

vbi

vbi manifeſtum eſt, curuam determinatricem ita aſſumi poſſe, vt data curua initialis obtineatur. Si enim y denotet applicatam curuae initialis cordae tributae, quae abſciſſae x reſpondeat, in curua determinatrice abſciſſae $ao = \frac{ax}{a+nx}$ reſpondebit applicata $ol = \Phi\frac{ax}{a+nx} = \frac{y}{2m(a+nx)}$. Quo hinc conſtructio curuae determinatricis ſimplicior euadat, ponamus $2m = \frac{1}{a}$, vt pro curua initiali cordae habeamus $y = (1 + \frac{nx}{a})\Phi\frac{ax}{a+nx}$, ac tum pro curua determinatrice, ſumta abſciſſa $ao = \frac{ax}{a+nx}$, applicata reſpondens eſſe debet $ol = \frac{ay}{a+nx}$; vnde, data cordae figura initiali, curua determinatrix facile conſtruetur, ex qua deinceps totus cordae motus expedite definietur.

27. Quoniam igitur hunc caſum cordae inaequaliter craſſae aeque generaliter reſoluere licet, atque caſum cordarum vniformiter craſſarum; hicque adeo caſus in illo tanquam ſpecies contineatur, ex quo quippe oritur, ſi numerus n, qui inaequalitatem craſſitiei continet, euaneſcat: operae certe pretium erit, vt iſtum caſum omni diligentia articulatim exponamus. Primum igitur cordas iſtas inaequaliter craſſas, ad quas hic caſus eſt accommodatus, dilucide deſcribam, vt intelligatur, quomodo cordae inaequaliter craſſae exhiberi queant, quarum motus aeque generaliter definiri poſſit, atque cordarum vniformiter craſſarum. Deinde vero poſtquam huiusmodi corda ad figuram quamcunque fuerit diducta, indeque ſubito dimittatur, motum, quem ſit proſecutura, determinabo. Atque hic quidem ex iam expoſitis perſpicitur, motum fore ſemper ſatis regularem, omninoque ſimilem ei, quo cordae vniformiter craſſae

craſſae agitantur, niſi quod tempora vibrationum aliam rationem longitudinis cordarum ſequantur.

Deſcriptio cordarum, ad hunc caſum aptarum.

28. Ad huiusmodi igitur motum regularem edendum nonniſi certa ſpecies cordarum inaequaliter craſſarum eſt idonea, quam idcirco primum accurate deſcribi conveniet. Cordam ergo primum in directum extenſam
Fig. 3. APBO contemplemur, cuius in initio A craſſitiei diameter ſit $Aa = b$, tum vero in alio loco quocunque P, poſito interuallo $AP = x$, diameter craſſitiei ſupra ita eſt determinata, vt ſit $Pp = z = \frac{b}{(1 + \frac{nx}{a})^2}$. Ne autem craſſities a longitudine cordae vibrantis a, quippe quae pro eadem corda vtcunque variari poteſt, pendere videatur, ponamus $\frac{n}{a} = \frac{1}{c}$ ſeu $n = \frac{a}{c}$, vt ſit $Pp = z = \frac{bcc}{(c + x)^2}$ vbi c eſt quantitas conſtans, non a longitudine cordae vibrantis pendens. Sin autem alter terminus conſtituatur in B, vt ſit $AB = a$, altero termino conſtanter in puncto A ſumto, erit diameter craſſitiei ibi $Bb = \frac{bcc}{(c + a)^2}$.

29. Linea ergo curua $apbo$, craſſitiem cordae referens, erit hyperbola ſecundi ordinis, quae autem, ſi variatio craſſitiei fuerit valde parua, a linea recta vix diſcrepabit. Euenit hoc, quando quantitas conſtans c prae longitudine cordae fuerit vehementer magna; tum enim erit proxime $z = b(1 - \frac{2x}{c})$; ſicque huc referri poterunt cordae, quarum craſſities vniformiter decreſcit dummodo

modo decrementum totum fuerit minimum. Sin autem id ſit notabile, curuatura lineae $apbo$ negligi non poteſt. Ponamus enim in B diametrum craſſitiei $Bb = d$, erit $1 + \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{b}{d}}$, et $\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{d}}{a\sqrt{d}}$, vnde pro loco quocunque P fiet $Pp = z = \frac{aabd}{(a\sqrt{d} + x\sqrt{b} - x\sqrt{d})^2}$; ſeu $Pp = \frac{AB^2 . Aa . Bb}{(AP . \sqrt{Aa} + BP . \sqrt{Bb})^2}$. Hinc ergo ex data craſſitie cordae, in vtroque termino A et B, cognoſcitur craſſities in quouis loco medio P, vt corda ad praeſentem vibrationum caſum fiat accommodata. In hoc enim conſiſtit indoles eius cordarum inaequaliter craſſarum ſpeciei, cuius motus ex ſuperioribus formulis in genere definiri poteſt.

30. Materia vero, ex qua corda fuerit confecta, eius pondus conſtituit, quam in calculo ita aſſumſi, vt cordae, ex eadem materia confectae, vniformiter craſſae, cuius craſſitiei diameter vtique foret $= Aa = b$, et longitudo $= b$, pondus eſſet futurum $= M$. Facta hac hypotheſi, videamus, quantum futurum ſit pondus portionis cuiuscunque noſtrae cordae AP. Cum igitur, poſita longitudinae $AP = x$, ſit $Pp = z = \frac{bcc}{(c+x)^2}$, erit pondus partis $AP = \frac{M}{bbb}\int zz\,dx = \frac{Mc^4}{b}\int\frac{dx}{(c+x)^4} = \frac{Mc^4}{b}\left(\frac{1}{3c^3} - \frac{1}{3(c+x)^3}\right)$, ita vt hoc pondus ſit $= \frac{Mcx(3cc + 3cx + xx)}{3b(c+x)^3}$. Quodſi ergo c prae x fuerit quantitas maxima, erit hoc pondus proxime $= \frac{Mx}{b}(1 - \frac{2x}{c})$. Hactenus quidem aſſumſi, cordam ex materia vniformi eſſe ductam, ſin autem materia non fuerit homogenea, lex craſſitiei praeſcripta ita debet immutari, vt, quo leuior fuerit materia, ibi craſſities ipſa, ſeu quadratum eius diametri, in eadem ratione vltra legem datam augeatur.

Problema.

Tab. II. Fig. 4. 31. *Si iam talis corda, qualem ratione crassitiei descripsimus, primum in termino* A, *deinde in alio quocunque loco* B *figatur, et a vi quacunque, quae ponderi* F *aequipolleat, tendatur: tum vero de suo situ naturali recto* AB *ad figuram quamcunque* ALB *quam minime a recta* AB *recedentem detorqueatur, subitoque in omnibus punctis remittatur; quaeritur motus, quo haec corda deinceps agitabitur.*

Datur ergo primo longitudo cordae $AB = a$, deinde eius crassities in A, cuius diameter sit $= b$, tertio pro quouis loco intermedio P, existente $AP = x$, crassitiei diameter $z = \frac{bcc}{(c+x)^2}$, seu datur longitudo c. Quarto constat, si corda haberetur vniformiter crassa longitudinis $= b$, cuius diameter crassitiei vbique esset $= b$, eius pondus fore $=$ M. Quinto denique datur linea ALB, ideoque pro quauis abscissa $AP = x$ applicata respondens PL: neque vero opus est, vt haec linea ALB per aequationem detur, sed sufficit, vt sit descripta, quocunque demum modo hoc fuerit factum.

Solutio.

32. Iam ante omnia ex data cordae figura initiali ALB construi debet linea curua determinatrix motus vibratorii, cuius constructio, per praecepta supra (26) tradita, ita est instituenda: Ob $n = \frac{a}{c}$, super axe
Fig. 5. et 4. $ab = \frac{ac}{a+c}$, pro abscissa $AP = x$, capiatur abscissa $ap = \frac{cx}{c+x}$, et in p erigatur applicata $pl = \frac{c.PL}{c+x}$; seu adiun-

adiuncta cordae AB recta $AC = c$, construantur hae proportiones:

$$CP : CA = AP : ap$$

$$\text{et } CP : CA = PL : pl$$

Cum iam hoc modo fuerit descripta curua alb, eadem vtrinque ad axem ab productum repetatur, alternatim supra et infra axem describenda, vti figura ostendit, ita vt in singulis iuncturis a, b, α, β cognomines curuae alb termini inuicem iungantur. Atque hoc pacto habebitur curua determinatrix, ex qua motus cordae quaesitus definiri poterit.

33. Constructa autem curua determinatrice, ex ea motus cordae ita definitur, vt ad quoduis tempus a momento dimissionis elapsum cordae figura assignetur. Sit enim tempus hoc $= t$ min. sec. et pro puncto M inueniendo, in quo iam punctum L versabitur, abscissae $AP = x$ in curua determinatrice capiatur abscissa respondens $ap = \frac{cx}{c+x}$, et circa punctum p vtrinque capiantur spatia aequalia pq et pr tempori proportionalia, ita vt sit

$$pq = pr = t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}},$$

et cum in punctis q et r applicatae curuae determinatricis sint:

$$qm = \Phi\left(\frac{cx}{c+x} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right)$$

$$rn = \Phi\left(\frac{cx}{c+x} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right)$$

ob $m = \frac{1}{2a}$ et $n = \frac{a}{c}$ in §. 25, habebitur

$$PM = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{c}\right)(qm + rn).$$

Hocque modo situs, quem tota corda post tempus t habebit, definietur.

34. Ponamus iam tantum elapsum esse tempus t, vt sit

$$t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}=\frac{ac}{c+a}, \quad \text{seu } t=\frac{ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$$

atque interualla pq' et pr' vtrinque a puncto p capienda erunt aequalia interuallo ab, sicque in curuis similibus adiacentibus $\beta m'a$, $bn'\alpha$ abscissae $\beta q'$ et br' aequales erunt abscissae ap; vnde ob applicatas $q'm'$ et $r'n'$ aequales, locus puncti cordae L nunc cadet infra axem AB ad distantiam $=\frac{1}{2}(1+\frac{x}{c})(q'm'+r'n')$ $=(1+\frac{x}{c})q'm'$. Si vlterius tempus infinite paruum dt fluat, applicatae $q'm'$ et $r'n'$ infinite parum vlterius a puncto p remoueri debent; cum igitur, quantum illa diminuitur, haec tantundem augeatur, ob tangentes in punctis m' et n' ad axem aequaliter inclinatas, distantia puncti L cordae per hoc momentum ab axe non mutatur, sicque tota corda ad statum quietis erit redacta, ita vt iam in maxima excursione infra axem reperiatur. Interea temporis igitur corda vnam vibrationem confecisse est censenda: eritque idcirco tempus vnius vibrationis cordae $t=\frac{ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$ min. sec. vbi g denotat altitudinem fere 15 pedum, per quam graue vno minuto secundo libere descendit.

35. Sin autem tempus ab initio elapsum t tantum statuamus, vt fiat $t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}=\frac{2ac}{c+a}$ seu $t=\frac{2ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$, ex constructione manifesto liquet cordae punctum L ite-

rum

rum in locum primitiuum L peruenire, ibique quiete frui momentanea; vnde corda interea duas vibrationes abfoluiffe eft exiftimanda: deinceps vero motus cordae iterum vti ab initio fequetur, ex quo fufficiet, motum cordae ad hoc vsque momentum determinauiffe. Hinc igitur perfpicuum eft, tempus vniuscuiusque vibrationis effe $= \frac{ac}{c+a} \sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$; quod ergo non amplius, vti in cordis vniformiter craffis vfu venit, longitudini cordae a eft proportionale, manente fcilicet eadem tenfione; fed iam rationem fequitur formulae $\frac{ac}{c+a}$. Vnde fi tempus vibrationis duplo longius fieri debeat, cordae longitudo a puncto A tanta fumi debebit, vt fit $= \frac{2ac}{c-a}$; ac fi tempus vibrationis n vicibus maius effe debeat, cordae longitudinem effe oportet $= \frac{nac}{c-(n-1)a}$. Patet ergo, fonum huiusmodi cordarum non vltra datum gradum deprimi poffe, nam fi longitudo cordae etiam infinita ftatuatur, tempus vnius vibrationis etiam nunc erit finitum $= c\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$.

36. Semper autem minuenda cordae AB longitudine effici poteft, vt tempus vibrationis ad medietatem reducatur, fonusque vno interuallo diapafon eleuetur: eueniet hoc, fi corda praeter A etiam in E figatur, vt fit $AE = \frac{ac}{2c+a}$. Sin autem tempus vibrationis ad trientem reduci debeat, longitudo cordae erit $= \frac{ac}{3c+2a}$, fin ad quadrantem, erit $= \frac{ac}{4c+3a}$, et ita porro. Si igitur cordae ab initio talis figura fuerit impreffa, vt punctum E in fitu naturali relinquatur, indeque curua determinatrix obtineat interualla plexuum

ab, *bα*, *a*β, vel duplo, vel triplo, vel quadruplo, minora, tum tota corda toties rapidius contremiſcet. Eo enim tempore, quod generatim vni vibrationi aſſignavimus, iam duas, vel tres, vel quatuor abſoluet vibrationes. Quin etiam euenire poteſt, vt corda ſimul duos pluresue huiusmodi motus recipiat, totidemque ſonos diuerſos edat. Omnino igitur huius generis cordarum motus ſimili modo erit comparatus, quo cordarum vniformiter craſſarum, hoc ſolo excepto, quod pro varia longitudine tempus vibrationis, non longitudinis, rationem ſequatur: hancque ob cauſam iſtud genus cordarum maxime dignum eſt viſum, cuius motus diligentius euolueretur.

37. Veriſimile eſt, praeter cordas vniformiter craſſas, et eas, quas hactenus ſum contemplatus, alias prorſus non dari, quae talis motus regularis ſint capaces, ſimulque ſonos harmonicos edere valeant. Tum etiam, ſi variatio craſſitiei aliam legem ſequatur, nulla patet via ad motum in genere definiendum, ita vt figurae cuicunque, quae cordae initio fuerit tributa, reſpondeat; interim tamen caſus exhiberi poſſunt, quibus, ſi figura initialis certis conditionibus ſit praedita, motum ſecuturum aſſignare liceat. Haec autem inueſtigatio non ſolum tantopere eſt reſtricta, vt nullum vnquam vſum habere videatur, ſed etiam diſquiſitiones ampliſſimas exigit, quae caſus aequationis *Riccatianae* conſtruibiles implicant. Longe autem difficillima videbitur quaeſtio, ſi cordae craſſities nullam legem calculo ſubiectam ſequatur: veluti ſi duae cordae vniformes

qui-

quidem, ſed diuerſae craſſitiei, iungantur. Nihilo vero minus hunc caſum generatim expediri poſſe obſeruaui, qui, cum non parum doctrinam vibrationum illuſtrare videatur, eum data opera pertractabo; quia enim duplici modo a lege continuitatis abhorret, ſcilicet ratione craſſitiei et figurae initio impreſſae, methodus talem quaeſtionem ad calculum reuocandi, imprimis ad fines Analyſeos promouendos, videtur accommodata.

Problema.

38 *Si corda* ACB, *ex duabus partibus* AC *et* BC *conflata, quarum vtraque ſeorſim ſit vniformiter craſſa, ſed craſſitiem habeant diuerſam; haecque corda, in terminis* A *et* B *fixa, a vi quacunque ſit tenſa; tum vero ad figuram quamcunque* ADB *detorqueatur, quam minime a figura naturali rectilinea* ALB *recedentem: quaeritur motus, quo corda, poſtquam repente fuerit dimiſſa, agitabitur.* Tab. II. Fig. 6.

Ponamus partis AC longitudinem $AC = a$, alterius partis longitudinem $BC = b$; diametrum craſſitiei illus partis $AC = \alpha$, huius vero $= \beta$: tum vero ſit cordae AC pondus $= N$, eritque cordae BC pondus $= \frac{Mb\beta\beta}{a\alpha\alpha} = N$. Vis autem, qua tota corda intra ſuos terminos tenſa tenetur, aequiualeat ponderi F. Initio porro huic cordae inducta fuerit curua quaecunque ADB, quae ſiue ſit aequatione quapiam exprimibilis, ſiue ſecus, poſt dimiſſionem motum determinari oportet. Sufficit ergo, ex figura noſſe, quanta applicata PL initio motus cuilibet abſciſſae $AP = x$ reſpondeat, neque

neque hic adhuc refert, siue punctum P ad partem crassiorem AC pertineat, siue ad tenuiorem BC, veluti si in Π capiatur.

Solutio.

39. Ponamus ergo, elapso tempore $= t$ minut. secund. cordam iam peruenisse in situm AMEMB, et applicatam abscissae $AP = x$ respondentem iam esse $PM = y$, quae ergo erit, certa quaedam functio temporis t et abscissae x. Hic vero imprimis est attendendum, vtrum punctum P in parte AC assumatur, an in parte BC, hoc est: vtrum sit $x < a$, an vero $x > a$. Ponamus primo, esse $x < a$, atque motus puncti M continebitur in hac aequatione: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, sin autem sit $x > a$, seu si abscissa capiatur AΠ, motus puncti M hac aequatione continebitur: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbg}{N}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Quamobrem determinatio motus ad resolutionem harum duarum aequationum ita reducitur, vt prior tantum locum habeat, si sit $x < a$, posterior vero, si sit $x > a$, vnde manifestum est, si sit $x = a$, ambas aequationes consentire debere.

40. Ponamus breuitatis gratia, $\frac{2Fag}{M} = mm$ et $\frac{2Fbg}{N} = nn$ et quamdiu est $x < a$, vt satisfaciendum sit aequationi $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = mm\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, nouimus in genere, fore

$$y = \Phi(x + mt) + \Psi(x - mt).$$

Sin autem sit $x > a$, vt satisfaciendum sit aequationi $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = nn\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, erit per alias quascunque functiones

$$y = \phi(x + nt) + \psi(x - nt).$$

Vel

Vel cum hic abſciſſas a termino B computare liceat, etiam ſi ibi a termino A ſint captae, hae duae aequationes diſtinctius ita exhibebuntur:

$$PM = \Phi(AP + mt) + \Psi(AP - mt)$$

$$\Pi M = \phi(B\Pi + nt) + \psi(B\Pi - nt)$$

vnde ob nexum harum partium in E neceſſe eſt, vt ſit:

$$CE = \Phi(a + mt) + \Psi(a - mt) = \phi(b + nt) + \psi(b - nt)$$

quo iam quaedam relatio inter has functiones definitur.

41. Cum iam tota quaeſtio ad naturam harum quaternarum functionum inueſtigandam ſit traducta, primum perpendendum eſt, applicatas tum in A, quam in B, ſemper euaneſcere debere, vnde eſſe oportet:

$$o = \Phi(mt) + \Psi(-mt) \text{ et } o = \phi(nt) + \psi(-nt).$$

Deinde etiam expendendum eſt, motus initio ſingulorum punctorum celeritatem per $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ expreſſam euaneſcere debere; hinc vero vtraque aequatione colligitur:

$$o = \Phi'(AP) - \Psi'(AP) \text{ et } o = \phi'(B\Pi) - \psi'(B\Pi),$$

vnde concludimus tam $\Psi' = \Phi'$ et $\psi' = \phi'$, quam $\Psi = \Phi$ et $\psi = \phi$; et vtraque functio Φ et ϕ debet eſſe impar, ſeu eiusmodi curuam refert, cuius abſciſſae, ſi negatiuae ſumantur, applicatae quoque in negatiuas abeant, quantitate autem maneant eaedem.

42. Hac igitur functionum ϕ et Φ indole inventa habebimus binas ſequentes aequationes:

$$PM = \Phi(AP + mt) + \Phi(AP - mt)$$

$$\Pi M = \phi(B\Pi + nt) + \phi(B\Pi - nt)$$

praetereaque esse oportet:

$$\Phi(a+mt)+\Phi(a-mt)=\phi(b+nt)+\phi(b-nt).$$

Hinc ergo primum, posito $t=0$, esse debet $\Phi a=\phi b$. Deinde etiam perpendere debemus, si esset $m=n$, qui casus locum haberet, si tota corda esset aequaliter vbique crassa, abscissam $a+mt$, a puncto A sumtam, in idem axis punctum esse casuram, atque abscissam $b-nt$ a termino B computatam, ideoque fore $\Phi(a+mt) = \phi(b-nt)$, similique modo $\Phi(a-mt)=\phi(b+nt)$. At si m et n non sint aequales, alio modo functiones $\Phi(a+mt)$ et $\phi(b+nt)$, quae adhuc sunt incognitae, ex functionibus cognitis $\Phi(a-mt)$ et $\phi(b-nt)$ definientur, atque ab hac determinatione solutio problematis potissimum pendebit. Sunt autem functiones $\Phi(a-mt)$ et $\phi(b-nt)$ ob curuam cordae initialem datam cognitae, cum sit $PL=2\Phi.AP$ et $\Pi\Lambda=2\phi.B\Pi$, qui valores dantur, quoties fuerit $AP<a$ et $B\Pi<b$.

43. Verum ad plenam determinationem non sufficit, vt applicata CE communis sit vtrique cordae parti, motus indoles insuper postulat, vt ambae curvae in iunctura E communem habeant tangentem. Hinc autem nascitur ista aequatio differentialis:

$$\Phi'(a+mt)+\phi'(a-mt)=-\phi'(b+nt)-\phi'(b-nt)$$

quae aequipollet huic integrali:

$$n\Phi(a+mt)-n\Phi(a-mt)=-m\phi(b+nt)+m\phi(b-nt).$$

Cum hac coniungatur ante inuenta:

$$\Phi(a+mt)+\Phi(a-mt)=\phi(b+nt)+\phi(b-nt)$$

hinc-

hincque functiones incognitae ita determinabuntur, vt sit:

$$\Phi(a+mt)=\frac{2m}{m+n}\phi(b-nt)-\frac{m+n}{m+n}\Phi(a-mt)$$

$$\phi(b+nt)=\frac{2n}{m+n}\Phi(a-mt)+\frac{m-n}{m+n}\phi(b-nt)$$

sicque ex functionibus $\Phi(a-mt)$ et $\phi(b-nt)$, quarum valor ex curua cordae initiali datur, functiones incognitae $\Phi(a+mt)$ et $\phi(b+nt)$ inueniuntur, quae autem, quomodo ad vsum sint accommodandae, iam accuratius perpendamus.

44. Reducamus functiones principales ad dimidium, vt sit:

$$PM=\tfrac{1}{2}\Phi(AP+mt)+\tfrac{1}{2}\Phi(AP-mt)$$

$$\Pi M=\tfrac{1}{2}\phi(B\Pi+nt)+\tfrac{1}{2}\phi(B\Pi-nt)$$

sicque ex curua cordae primitus impressa erit:

$$\Phi(AP)=PL \text{ et } \phi(B\Pi)=\Pi\Lambda$$

vnde, dum sint abscissae $AP<a$ et $B\Pi<b$, earum functiones, per signa Φ et ϕ indicatae, ex figura cordae initiali cognoscuntur. Tum vero etiam nouimus, si abscissae negatiuae capiantur, fore

$$\Phi(-z)=-\Phi(+z) \text{ et } \phi(-z)=-\phi(+z).$$

Functiones autem, maioribus abscissis conuenientes, ex minoribus, et generis quidem vtriusque, ita definiuntur, vt sit:

$$\Phi(a+mu)=\frac{2m}{m+n}\phi(b-nu)-\frac{m+n}{m+n}\Phi(a-mu)$$

$$\phi(b+nu)=\frac{2n}{m+n}\Phi(a-mu)+\frac{m-n}{m+n}\phi(b-nu),$$

quarum formularum ope, ex vtra curua ALD et BAD, duae curuae in infinitum extensae construi poterunt,

 qua-

quarum alterius applicatae pro fingulis abfciffis debitas functiones ϕ, alterius vero functiones Φ exhibeant.

Fig 7. et 8. 45. Conftructio autem harum duarum curuarum ita commodiffime abfoluetur: Ductis duobus axibus XY et xy, fuper illo defcribatur figura initialis partis finiftrae cordae ALD, fuper hoc vero figura initialis partis dextrae BAD, fimulque tam illa vltra A infra axem in Ad, haec vero vltra B in Bd transferatur, ficque ex figura cordae initiali illius curuae ramus DAd, huius vero ramus DBd iam defcriptus habetur. Pro vtriusque autem continuatione, circa punctum C in vtroque axe abfcindantur vtrinque interualla aequalia $CG = CQ$ et $Cg = Cq$, ita vt illa fint ad haec femper vt m et n, feu fumta quantitate quacunque u, capiatur $CG = CQ = mu$, et $Cg = Cq = nu$, atque applicatae in punctis G et g erunt cognitae: in punctis vero Q et q applicatae ftatuantur

$$QR = \frac{2m.gb + (n - m).GH}{m + n}$$

$$\text{et } qr = \frac{2n.GH - (n - m).gb}{m + n}.$$

Hoc ergo modo vtraque curua ALD et BAD, quousque libuerit, continuari poterit, prouti vero vtraque in vnam plagam continuatur, ita ftatim ad plagam oppofitam fitu inuerfo transferatur.

Fig. 6. 7, 8. 46. His duabus curuis, praefcripto modo conftructis, prior inferuiet motui partis cordae ALD determinando, pofterior vero partis BAD. Scilicet pro puncto quocunque L, ad partem AD pertinente, fi quaeratur punctum M, vbi poft tempus t min. fec. fit futurum, vtendum erit curua determinatrice ALDRIV (fig. 7.)

(fig. 7.), in cuius axe capiatur abſciſſa AP, puncto L reſpondens, et circa P vtrinque abſcindantur interualla aequalia $PF = PG = mt$, tum applicatarum FK et GH ſemiſumma dabit loci quaeſiti M diſtantiam PM ab axe. Simili modo, ſi quaeſtio ſit de puncto Λ, in altera parte cordae BC ſumto, vbi ſit futurum poſt tempus t min. ſec. in fig. 8. a puncto B capiatur abſciſſa BΠ, puncto Λ conueniens, et circa Π vtrinque abſcindantur aequalia interualla $\Pi g = \Pi f = nt$; quo facto applicatarum gh et fk ſemiſumma dabit loci quaeſiti M diſtantiam ab axe AB fig. 6. Hoc igitur modo totius cordae propoſitae ADB ſitus ad quoduis tempus determinari, eiusque propterea motus aſſignari poterit. Facile autem perſpicitur, hunc motum maxime fore irregularem, dum neque ſingula eius puncta ſimul ad maximas ab axe elongationes peruenient, neque itus reditusque ſuos temporibus aequalibus abſoluant, ex quo ne quaeſtio quidem de numero vibrationum, dato tempore factarum, neque etiam de ſono, quem huiusmodi corda ſit editura, locum habere poterit.

47. Neque etiam vllus caſus huiusmodi cordarum ex duabus cordis diuerſae craſſitiei compoſitarum exhiberi poteſt, quo vibrationes fiant regulares. Caſus quidem talis oriri videtur, quando ſit $m = n$, tum enim ambae curuae determinatrices inter ſe fiunt aequales, interuallaque nodorum AI, AO, toti cordae longitudini aequalia, prorſus vti pro cordis vniformiter craſſis vſu venit. Verum, ob $mm = \frac{2Fag}{M}$, et $nn = \frac{2Fbg}{N}$, pro hoc caſu habebimus $\frac{a}{M} = \frac{b}{N}$, ſeu $\frac{a}{b} = \frac{M}{N}$, at eſt $\frac{M}{N} = \frac{a\alpha\alpha}{b\beta\beta}$;

 vnde

vnde neceſſario fit $\alpha = \beta$, qui eſt caſus cordae per totam ſuam longitudinem eiusdem craſſitiei. Quam ob rem ſolutio huius problematis eo magis eſt notatu digna, quod non ſolum in inueſtigatione a lege continuitatis maxime abhorrente verſatur, ſed etiam vibrationes a lege iſochronismi, cuiusmodi adhuc a Geometris ſolae tractari ſunt ſolitae, nobis cognoſcendas offerat.

48. Caeterum cum conſtructio ac determinatio huiusmodi motus per binas curuas determinatrices perficiatur, quarum deſcriptio et irregularitas potiſſimum a ratione inaequalitatis inter quantitates m et n pendet, notari conueniet, eſſe in genere $mm : nn = \frac{a}{M} : \frac{b}{N} = \beta\beta : \alpha\alpha$, ideoque $m : n = \beta : \alpha$. Tenent ergo quantitates m et n, quatenus ad vtramque partem cordae AC et BC referuntur, rationem reciprocam diametrorum craſſitiei vtriusque partis. Caeterum etiam circa hanc ſolutionem imprimis notetur, quod motum huiusmodi cordarum compoſitarum, vtcunque fuerit irregularis, ſemper definire liceat, quaecunque etiam figura curuae primitus fuerit inducta, ſiue aequatione quapiam includi queat, ſiue ſecus; quae circumſtantia adeo pro cordis vniformiter craſſis nonnullis ſummis Geometris vires Analyſeos tranſcendere eſt viſa. Pari autem methodo vis ſoluendi extendi poterit ad cordas, quae ex tribus pluribusue partibus diuerſae craſſitiei fuerint compoſitae; manifeſtum enim eſt, totidem ſemper curuis determinatricibus opus eſſe, quarum conſtructio ex figura initiali cordae ſimili fere modo abſolui queat.

49.

49. Datur tamen caſus, quo ambae cordae partes $AC = a$ et $BC = b$ certam quandam inter ſe tenent rationem, ſi figura initialis certo modo fuerit comparata, vt motus vibratorius fiat regularis. Obtinetur autem hic caſus, ſi primo ſit $a : b = m : n$, ſeu $a : b = \beta : \alpha$; quo etiam ſit $M : N = b : a$; deinde ſi figura initialis ſit huiusmodi, vt ſit $\phi(b-nu) = \Phi(a-mu)$, tum enim obtinebitur

$$\Phi(a+mu) = \Phi(a-mu) \text{ et } \phi(b+nu) = \phi(b-nu).$$

Manifeſtum enim eſt, aequationem $\phi(b-nu) = \Phi(a-mu)$ locum habere non poſſe, niſi ſit $b : a = n : m$, propterea quod eſt, tam $\phi 0 = 0$, quam $\Phi 0 = 0$, ſimul autem quantitates $b-nu$ et $a-mu$ in nihilum abire nequeunt, niſi ſit $a:b = m:n$. Hoc autem caſu vtraque curua determinatrix per ſe determinari poterit, fietque ſimilis illi, quae motui cordae vniformis definiendo inſeruit, ex quo etiam hic motus aeque regularis euadit. Hunc igitur caſum diligentius euoluamus.

Caſus motus regularis in cordis, ex duabus partibus inaequalis craſſitiei compoſitis.

50. Sit igitur ACB corda ex duabus partibus AC et BC compoſita, quarum partes $AC = a$ et $BC = b$ rationem teneant reciprocam diametrorum craſſitiei α et β, vt ſit $a : b = \beta : \alpha$, ideoque etiam $m : n = a : b$ et $M : N = b : a$. Haec corda ſit in terminis A et B fixa et tenſa vi, quae aequalis eſt ponderi F. Tum vero in eiusmodi figuram ADB detorquatur, vt figura Tab. III. Fig. 1.

BAD

BΛD affinis ſit figurae A L D, ſcilicet vt ſumtis vtrinque abſciſſis AP et BΠ, ipſis AC et BC proportionalibus, applicatae PL et ΠΛ inter ſe fiant aequales. Iam corda dimiſſa quaeritur eius motus, ſeu ſtatus ad quoduis tempus t minut. ſec. a momento di-
Fig. 2. 3. miſſionis elapſum Hunc in finem conſtruantur ambae curuae determinatrices AD$ada'd'$ (fig. 10) et BDbdb', (fig. 11) quarum portiones primitiuae ALD et BΛD ex figura cordae initiali deſumuntur, ſequens autem vtriusque portio ita conſtruitur, vt ſit pro fig. 10. $\Phi(a+mu)=\Phi(a-mu)$ et pro fig. 11. $\phi(b+nu) = \phi(b-nu)$.

51. In axe ſcilicet abſcindantur interualla Ca, ac, ca', $a'c'$ etc. aequalia ipſi interuallo AC, iisque applicentur, vti figura indicat, figurae aD, ad $a'd$ $a'd'$ ſimiles et aequales figurae ALD. Simili modo pro fig. 11. curuae BΛD ſimiles et aequales ſtatuantur figurae bD, bd, $b'd$, etc. tum vero etiam ad alteram partem punctorum A et B hae figurae ſimili ordine
Fig. 1. repetantur; hocque modo obtinebuntur ambae curuae determinatrices, ex quibus motus cordae promte definietur. Scilicet ſi diſtantia ab axe AB, ad quam punctum L poſt tempus t reperietur, ponatur $=y$, vocata abſciſſa AP$=x$, definietur ea ex determinatrice priori, ita vt ſit

$$y=\tfrac{1}{2}\Phi(x-mt)+\tfrac{1}{2}\Phi(x+mt):$$

ſin autem poſt idem tempus t, diſtantia puncti Λ ab axe AB deſideretur, eaque vocetur $=z$, poſita abſciſſa BΠ$=u$, erit per alteram curuam determinatricem

$$z=\tfrac{1}{2}\phi(u-nt)+\tfrac{1}{2}\phi(u+nt).$$

52.

52. Si tempus t tantum assumatur, vt sit $mt = a$ seu $nt = b$, ob $\Phi(x-a) = -\Phi(a-x) = -\Phi(x+a)$ et $\Phi(u-b) = -\Phi(b+u) = -\Phi(b+u)$, vtraque distantia euanescit, peruenientque post hoc tempus singula cordae elementa in situm rectum AB, quod est tempus dimidiae vibrationis. Sin autem sumatur $mt = 2a$, seu $nt = 2b$, fiet

$$\Phi(x-2a) = -\Phi(a+(a-x)) = -\Phi(a-(a-x)) = -\Phi x$$
$$\Phi(x+2a) = \Phi(a+(a+x)) = \Phi(a-(a+x)) = -\Phi x$$

ideoque $y = -\Phi x$, sicque corda ad alteram axis partem in maxima excursione versabitur, ibique figuram, ipsi initiali omnino aequalem, habebit; vnde post elapsum aequale tempus iterum in figuram initialem reuertetur; atque hoc simili modo locum habet pro altera cordae parte BAD. Motus igitur omnino erit similis motui cordae vniformiter crassae, ac vibrationes peraget isochronas, quarum cuiusque tempus est $= \frac{2a}{m} = \frac{2b}{n}$.

53. Cum igitur sit $mm = \frac{2Fag}{M}$, et $nn = \frac{2Fbg}{N}$, erit vniuscuiusque vibrationis tempus $= 2a\sqrt{\frac{M}{2Fag}} = \sqrt{\frac{2Ma}{Fg}}$ min. sec. sin autem cordae huius compositae pars $AC = a$, cuius pondus $= M$, praeter A in C figeretur, eaque ab eadem vi $= F$ tenderetur, esset tempus vnius vibrationis $= a\sqrt{\frac{M}{2Fag}}$; ideoque superioris dimidium. Vnde, manente tensione F, eadem tota corda composita ACB duplo lentius vibrabit, quam vtraque pars AC, vel BC, seorsim, si in ambobus terminis esset fixa. ideoque sonum vna octaua grauiorem

 edet.

edet. Definiri etiam poteſt corda vniformis craſſitiei et longitudinis $AB = a + b$, quae ab eadem vi tenſa eundem eſſet editura ſonum; ponatur enim pondus huius cordae $= P$, ac tempus vnius vibrationis erit $= (a + b) \sqrt{\frac{P}{2Fg(a+b)}}$, quod tempori pro noſtra corda compoſita inuento $\sqrt{\frac{2Ma}{Fg}}$ aequale poſitum praebet $P = \frac{4Ma}{a+b} = \frac{4MN}{M+N}$; eiusque diametrum craſſitiei $= \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Exemplum motus irregularis in cordis, ex duabus partibus diuerſae craſſitiei compoſitis.

54. Cum indoles motuum irregularium, quos ſupra in genere determinaui, luculentius ex exemplo determinato percipi queat, ponamus ambas cordae partes longitudine aequales, ſeu $b = a$, deinde ſit diameter craſſitiei partis AC duplo maior, quam partis BC, ſeu $\alpha = 2\beta$, erit illius partis pondus M huius N quadruplum, vnde fit $m : n = 1 : 2$, ſeu $n = 2m = 2\sqrt{\frac{2Fag}{M}}$,
Fig. 4. exiſtente F pondere, quo corda haec tenditur. Tribuatur autem huic cordae figura initialis ſimpliciſſima ADB, ſcilicet ſtylo iuncturae C admoto corda in ſitum ADB detrudatur, vt vtraque pars AD et BD lineam rectam referat, ac triangulum iſoſceles ADB exhibeat. Huius igitur cordae, ſi ſubito dimittatur, motus determinetur, ſeu regula inueſtigetur, cuius ope ſitus et figura cordae ad quodcunque tempus aſſignari queat.

55.

55. Conſtrui ergo oportet ambas lineas determinatrices fig. 13 et 14, quarum partes principales ACD et BCD ex ipſa figura cordae initiali ſumuntur. Sit Φ character prioris, ϕ vero poſterioris, et cum poſita applicata CD $=1$, habeamus ob $b=a$

$\Phi\, o = o$; $\Phi a = 1$. item $\phi\, o = o$ et $\phi a = 1$.

lineis puncta A, D et B, D iungentibus exiſtentibus rectis, pro maioribus abſciſſis ob $m:n = 1:2$ conſequimur has formulas:

$$\Phi(a+u) = \tfrac{2}{3}\Phi(a-2u) + \tfrac{1}{3}\Phi(a-u)$$
$$\phi(a+2u) = \tfrac{4}{3}\phi(a-u) - \tfrac{1}{3}\phi(a-2u)$$

Statuamus pro u ſucceſſiue valores a, $2a$, $3a$, $4a$, etc. et, quia eſt $\Phi(-c) = -\Phi(c)$, et $\phi(-c) = -\phi(c)$, noſtrae formulae erunt:

$$\Phi(a+u) = -\tfrac{2}{3}\Phi(2u-a) - \tfrac{1}{3}\Phi(u-a)$$
$$\phi(a+2u) = -\tfrac{4}{3}\phi(u-a) + \tfrac{1}{3}\phi(2u-a),$$

ſicque ex praecedentibus vtriusque lineae applicatis ſequentes definientur, punctaque hoc modo inuenta lineis rectis iungenda eſſe manifeſtum eſt, vnde applicatis intermediis non erit opus.

56 Facili ergo negotio ſequentes applicatae computabuntur:

Pro linea fig. 13	Pro linea fig. 14
$\Phi\, o = o$	$\phi\, o = o$
$\Phi a = 1$	$\phi a = 1$
$\Phi 2a = -\tfrac{2}{3}\Phi a - \tfrac{1}{3}\Phi\, o = -\tfrac{2}{3}$	$\phi 3a = -\tfrac{4}{3}\phi\, o + \tfrac{1}{3}\phi a = +\tfrac{8}{3}$
$\Phi 3a = -\tfrac{2}{3}\Phi 3a - \tfrac{1}{3}\Phi a = -\tfrac{5}{9}$	$\phi 5a = -\tfrac{4}{3}\phi a + \tfrac{1}{3}\phi 3a = -\tfrac{11}{9}$
$\Phi 4a = -\tfrac{2}{3}\Phi 5a - \tfrac{1}{3}\Phi 2a = +\tfrac{28}{27}$	$\phi 7a = -\tfrac{4}{3}\phi 2a + \tfrac{1}{3}\phi 5a = -\tfrac{28}{27}$
$\Phi 5a = -\tfrac{2}{3}\Phi 7a - \tfrac{1}{3}\Phi 3a = -\tfrac{11}{81}$	$\phi 9a = -\tfrac{4}{3}\phi 3a + \tfrac{1}{3}\phi 7a = -\tfrac{73}{81}$
$\Phi 6a = -\tfrac{2}{3}\Phi 9a - \tfrac{1}{3}\Phi 4a = -\tfrac{230}{243}$	$\phi 11a = -\tfrac{4}{3}\phi 4a + \tfrac{1}{3}\phi 9a = -\tfrac{263}{243}$
etc.	etc.

 Sum-

Sumtis ergo in vtroque axe interuallis aequalibus ipſi interuallo $AC = BC = a$, applicatae ita ſe habebunt:

CD. 2. II 3. III 4. IV 5. V 6. VI 7 VII

Fig. 13. $0, 1, -\frac{2}{3}; -\frac{5}{9}; +\frac{28}{27}; -\frac{11}{81}; -\frac{230}{243}; +\frac{559}{729}$ etc.

Fig 14. $0, 1, +\frac{2}{3}; +\frac{1}{3}; -\frac{4}{9}; -\frac{11}{9}; -\frac{10}{27}; +\frac{13}{27}$

e quibus valoribus ambae figurae deſcriptae conſpiciuntur.

57. Ex his figuris porro ad quoduis tempus t min. ſec. locus ſingulorum cordae punctorum L et Λ per regulas ſupra datas aſſignari poterit: Sit enim $AP = x$, et puncti L poſt tempus t ab axe AB diſtantia $= y$, tum $B\Pi = v$ et puncti Λ ab axe diſtantia $= z$ erit:

$$y = \tfrac{1}{2}\Phi(x+mt) + \tfrac{1}{2}\Phi(x-mt) = \tfrac{1}{2}\Phi(x+mt) - \tfrac{1}{2}\Phi(mt-x)$$

$$z = \tfrac{1}{2}\Phi(v+2mt) + \tfrac{1}{2}\Phi(v-2mt) = \tfrac{1}{2}\Phi(v+2mt) - \tfrac{1}{2}\Phi(2mt-v).$$

Hinc, poſito $v = a$, puncti cordae medii D tempore t ab axe diſtantia erit $= \tfrac{1}{2}\Phi(a+2mt) - \tfrac{1}{2}\Phi(2mt-a)$: vnde ſequentem tabulam conſtruxi:

Poſt tempus	Diſtantia puncti D ab axe:
$t = \frac{a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 2a - \frac{1}{2}\Phi 0 = +\frac{1}{3}$
$t = \frac{2a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 3a - \frac{1}{2}\Phi a = -\frac{1}{3}$
$t = \frac{3a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 4a - \frac{1}{2}\Phi 2a = -\frac{5}{9}$
$t = \frac{4a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 5a - \frac{1}{2}\Phi 3a = -\frac{7}{9}$
$t = \frac{5a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 6a - \frac{1}{2}\Phi 4a = +\frac{1}{27}$
$t = \frac{6a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 7a - \frac{1}{2}\Phi 5a = +\frac{25}{27}$
$t = \frac{7a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 8a - \frac{1}{2}\Phi 6a = +\frac{45}{81}$
$t = \frac{8a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 9a - \frac{1}{2}\Phi 7a = +\frac{17}{81}$
$t = \frac{9a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 10a - \frac{1}{2}\Phi 8a = -\frac{95}{243}$
$t = \frac{10a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 11a - \frac{1}{2}\Phi 9a = -\frac{241}{243}$
$t = \frac{11a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 12a - \frac{1}{2}\Phi 10a = -\frac{197}{729}$
$t = \frac{12a}{2m}$ - - - -	$\frac{1}{2}\Phi 13a - \frac{1}{2}\Phi 11a = +\frac{329}{729}$.

Iſta

Iſta puncti D agitatio circa punctum quietis C in figura 15 repraeſentatur, vbi puncta numeris 1, 2, 3, 4, 5 etc. loca deſignant, vti id poſt tempus $\frac{a}{2m}$ min. ſec. ſemel, bis, ter, quater, quinquies etc. elapſum ſit futurum. Hinc patet, primam vibrationem tali tempore circiter quadruplo, ſecundam duplo, tertiam quadruplo, quartam fere triplo etc. abſolui, ita vt vibrationes alternatim prodeant lentiores et citiores, neque tamen legem regularem conſtituant, ex quo ſonus erit rudis neque ad harmoniam aptus.

De caſu vibrationum iſochronarum in cordis, ex duabus partibus diuerſae craſſitiei compoſitis.

58. Vti in omni motu vibratorio, ſi quidem eſt minimus, datur caſus, quo iſochroniſmus et ſynchroniſmus locum habet, et pro quo certus ſtatus initialis requiritur; ita etiam noſtro caſu, vtcunque longitudines $AC = a$ et $BC = b$ ratione craſſitiei, cuius diametros poſuimus α et β, fuerint comparatae, ſemper caſus maxime ſpecialis pro iſochroniſmo aſſignari poteſt, qui euenit, ſi acceleratio cuiusuis elementi diſtantiae eius a ſitu naturali fuerit proportionalis. Hinc autem pro motu elementorum vtriusque partis, ſi poſt tempus t min ſec. puncta L et Λ in loca M et M perueniſſe ponamus, vocemusque: Tab. II. Fig 6.

$$AP = x;\ PM = y;\ \text{et}\ B\Pi = v;\ \Pi M = z$$

ad huiusmodi formulas perueniemus:

$$y = \alpha \sin \mu x \cos \lambda t \quad \text{et} \quad z = \beta \sin \nu v \cos \lambda t$$

 vbi

vbi litterae incognitae ita ſunt definiendae, vt his formulis differentio differentialibus ſatisfiat:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = mm\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \text{ et } \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = nn\left(\frac{ddz}{dv^2}\right).$$

59 Primo ergo eſſe debet $\alpha\lambda\lambda = \alpha\mu\mu mm$, ideoque $\mu = \frac{\lambda}{m}$, tum vero $\beta\lambda\lambda = \beta\nu\nu nn$, ideoque $\nu = \frac{\lambda}{n}$. Deinde quia, poſito $x = a$ et $v = b$, fieri debet $y = z$, habebimus $\alpha \text{ſin.} \mu a = \beta \text{ſin.} \nu b$; ſtatuamus ergo $\alpha = \frac{e}{\text{ſin } \mu a} = \frac{e}{\text{ſin } \frac{\lambda a}{m}}$ et $\beta = \frac{e}{\text{ſin. } \nu b} = \frac{e}{\text{ſin. } \frac{\lambda b}{n}}$ eruntque noſtrae aequationes:

$$y \,\text{ſin.} \frac{\lambda a}{m} = e \,\text{ſin.} \frac{\lambda x}{m} \,\text{coſ.}\, \lambda t \text{ et } z \,\text{ſin.} \frac{\lambda b}{n} = e \,\text{ſin.} \frac{\lambda v}{n} \,\text{coſ}\, \lambda t.$$

Poſtremo ambas curuas in puncto iuncturae E ſemper communem tangentem habere oportet, ſeu eſſe debet $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dv}\right) = 0$, poſito $x = a$ et $v = b$: vnde fit $\frac{\lambda e}{m} \text{cot.} \frac{\lambda a}{m} + \frac{\lambda e}{n} \text{cot.} \frac{\lambda b}{n} = 0$ ſiue $m \,\text{tang.} \frac{\lambda a}{m} + n \,\text{tang.} \frac{\lambda b}{n} = 0$. Quaeri ergo debet huiusmodi numerus λ, vt huic conditioni ſatisfiat, id quod infinitis modis fieri poteſt, ſicque innumerabiles obtinebuntur vibrationum iſochronarum caſus, qui, deinde inuicem combinati, infinitas ſuppeditabunt vibrationum compoſitarum ſpecies.

60. Cum autem ſit $m = \sqrt{\frac{2Fag}{M}}$ et $n = \sqrt{\frac{2Fbg}{N}}$, denotante M pondus partis AC, et N pondus partis BC, huic formulae erit ſatisfaciendum: $\sqrt{\frac{a}{M}} . \text{tang}\, \lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} + \sqrt{\frac{b}{N}} \,\text{tang}\, \lambda \sqrt{\frac{Nb}{2Fg}} = 0$, quod quidem in genere praeſtare non licet, quouis autem caſu determinato valores idonei pro λ non difficulter eliciuntur. Inuento autem

tem quocunque valore ipſius λ, motus cordae vibratorius ita ſe habebit, vt ſingulae vibrationes abſoluantur tempore t, exiſtente $\lambda t = \pi$, denotante π ſemiperipheriam circuli radii $= 1$, ſeu tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{\lambda}$ min. ſec. Quod autem ad diuerſos valores ipſius λ attinet, niſi ſint inter ſe commenſurabiles, vibrationes, quae ex illarum combinatione oriuntur, nunquam fient regulares, quod ex aequationibus eſt manifeſtum:

$$y = \frac{e \operatorname{ſin} \frac{\lambda x}{m} \operatorname{cof.} \lambda t}{\operatorname{ſin} \frac{\lambda a}{m}} + \frac{e' \operatorname{ſin.} \frac{\lambda' x}{m} \operatorname{cof.} \lambda' t}{\operatorname{ſin.} \frac{\lambda' a}{m}} + \frac{e'' \operatorname{ſin.} \frac{\lambda'' x}{m} \operatorname{cof.} \lambda'' t}{\operatorname{ſin.} \frac{\lambda'' a}{m}} \text{ etc.}$$

$$z = \frac{e \operatorname{ſin.} \frac{\lambda v}{n} \operatorname{cof.} \lambda t}{\operatorname{ſin.} \frac{\lambda b}{n}} + \frac{e' \operatorname{ſin.} \frac{\lambda' v}{n} \operatorname{cof.} \lambda' t}{\operatorname{ſin.} \frac{\lambda' b}{n}} + \frac{e'' \operatorname{ſin.} \frac{\lambda'' v}{n} \operatorname{cof.} \lambda'' t}{\operatorname{ſin.} \frac{\lambda'' b}{n}} \text{ etc.}$$

Euolutio exempli ſpecialis.

61. Ponamus eſſe, vti in exemplo ſuperiori, $b = a$, et $N = \frac{1}{4} M$; vnde fit $m = \frac{2 Fag}{M}$ et $n = 2m$: debet ergo reſolui haec aequatio:

$$\operatorname{tang.} \lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} + 2 \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} \lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} = 0$$

Ponatur breuitatis gratia angulus $\frac{1}{2} \lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} = \omega$, vt ſit $\lambda = 2 \omega \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$; quaerique oportet angulum ω, ita vt ſit

$$\operatorname{tang.} 2\omega + 2 \operatorname{tang.} \omega = 0, \text{ ſeu } \operatorname{tang.} 2\omega = -2 \operatorname{tang.} \omega,$$

cui aequationi primum ſatisfit his valoribus:

$$\omega = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi \text{ etc.}$$

Deinde ob $\operatorname{tang} 2\omega = \frac{2 \operatorname{tang.} \omega}{1 - \operatorname{tang.} \omega^2}$, prodit $\operatorname{tang} \omega = \pm \sqrt{2}$; ſi ergo ſit θ minimus angulus tangentem habens $= \sqrt{2}$,

qui

qui eſt $54^\circ, 44', 8'', 12'''$ praeterea quoque hi anguli ſatisfacient:

$$\omega = \theta;\ \pi \pm \theta;\ 2\pi \pm \theta;\ 3\pi \pm \theta;\ 4\pi \pm \theta;\ 5\pi \pm \theta \text{ etc.}$$

62. Sumto ergo horum angulorum pro ω inuentorum quocunque, ob $\lambda = 2\omega \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$, tempus vnius vibrationis cordae erit $= \frac{\pi}{2\omega} \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ min. ſec. ac pro motu cordae eiusque partis vtriusque habebuntur hae aequationes:

$$y = \frac{e}{\mathit{ſin.}\, 2\omega}\, \text{ſin.} \frac{2\omega x}{a} \text{coſ.}\, 2\omega t \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$$

$$z = \frac{e}{\mathit{ſin.}\, \omega}\, \text{ſin.} \frac{\omega v}{a} \text{coſ}\, 2\omega t \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$$

vbi euidens, valores prioris ordinis pro ω inuentos, punctum cordae medium D ſemper in C immotum praebere. Cum enim ſit ſin. $\omega = 0$, et ſin. $2\omega = 0$, neceſſario capi debet $e = 0$. Quod incommodum quo euitetur, ponamus $e = 2d$ ſin. ω, vt habeatur:

$$y = \frac{d}{\mathit{coſ.}\, \omega}\, \text{ſin.} \frac{2\omega x}{a} \text{coſ.}\, 2\omega t \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$$

$$z = 2d\, \text{ſin.} \frac{\omega v}{a} \text{coſ}\, 2\omega t \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}.$$

63 Hic autem patet, quod quidem ſtatim ſuſpicari licuerat, valores prioris ordinis plane eſſe inutiles, neque ad noſtrum inſtitutum accommodatos; cum enim, poſito $x = v = a$, fieri debeat $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dv}\right) = 0$, hinc nanciſcimur:

$$\frac{\mathit{coſ.}\, 2\omega}{\mathit{coſ.}\, \omega} + 2\, \text{coſ.}\, \omega = 0 \quad \text{ſeu} \quad \text{coſ}\, \omega = \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

vbi factor ſuperior inutilis tang ω eſt excluſus. Denotante ergo θ angulum $54^\circ, 44', 8'', 12'''$, valores idonei pro ω ſubſtituendi ſunt

$$\omega = \pm \theta;\ \pi \pm \theta;\ 2\pi \pm \theta;\ 3\pi \pm \theta;\ \text{etc.}$$

et

et in genere $\omega = i\pi \pm \theta$, denotante i numerum integrum quemcunque. Quocirca tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{2i\pi \pm 2\theta} \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ min. sec. et posito $t = 0$, pro figura initiali hae obtinentur aequationes:

$$y = \frac{e}{\sin .2(i\pi \pm \theta)} \sin . \frac{2(i\pi \pm \theta)x}{a} \text{ et } z = \frac{e}{\sin .(i\pi \pm \theta)} \sin . \frac{(i\pi \pm \theta)v}{a}.$$

64. Haec ergo corda infinitis modis ad vibratorium motum isochronum excitari potest; vnde innumerabiles sonos edet. Cum autem soni se habeant reciproce vt tempus vnius vibrationis, ob $\frac{\theta}{\pi} = 0,3040868$, hi soni, ad quos edendos eadem corda est apta, erunt vt numeri:

0,3040868; 0,6959132; 1,3040868; 1,6959132; 2,3040868 etc.

qui cum inter se sint incommensurabiles, soni erunt maxime dissoni, sicque eadem corda simul plures sonos inter se dissonos edere poterit. Dum autem corda illos sonos simplices edit, primo excepto, vnum pluresue nodos inter vibrandum formabit, seu vnum pluraue puncta eius in recta AB immota manebunt; eaque erunt vel in parte AC, vbi sumta $x < a$ fuerit sin $\frac{2\omega x}{a} = 0$; vel in parte BC, vbi, sumta $v < 0$, fuerit sin $\frac{\omega v}{a} = 0$. Sic pro sono secundo in parte AC dabitur vnus nodus circa locum fere $x = \frac{5}{7}$, in parte BC nullus: pro sono tertio dabuntur in parte AC duo nodi $x = \frac{5}{13}$ et $x = \frac{10}{13}$, in parte BC vnus $v = \frac{10}{13}$; pro sono quarto dabuntur in parte AC tres nodi $x = \frac{5}{17}$, $x = \frac{10}{17}$, $x = \frac{15}{17}$, et in parte BC vnus $v = \frac{10}{17}$, et ita porro.

Aliud Exemplum speciale.

65. In praecedente exemplo soni simplices, quorum eadem corda est capax, etsi dissonantes, tamen alternatim progressionem arithmeticam constituebant; qui ordo inde veniebat, quod tam quantitates m et n, quam anguli $\frac{\lambda a}{m}$ et $\frac{\lambda b}{n}$, rationem tenebant rationalem. Quando autem hoc non euenit, ne iste quidem ordo amplius locum habebit, quod exemplo ostendisse iuuabit. Ponamus igitur, esse quidem $b = a$, sed $N = \frac{1}{2}M$, eritque $n = m\sqrt{2}$, existente $m = \sqrt{\frac{2Fag}{m}}$: quaeri ergo oportet numerum λ vt sit tang $\frac{\lambda a}{m} + \sqrt{2}$. tang $\frac{\lambda a}{m\sqrt{2}} = 0$. Ad quam aequationem resoluendam ponamus $\frac{\lambda a}{m\sqrt{2}} = \omega$, vt sit $\lambda = 2\omega\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}$; fierique debet $\frac{\text{tang.}\,\omega\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \text{tang}\,\omega = 0$; quae aequatio quidem iterum infinitos praebet valores pro angulo ω, qui autem non ita sunt comparati, vt vno cognito reliqui assignari queant.

66. Videamus ergo, quomodo aequatio $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{tang}\,\omega\sqrt{2} + \text{tang.}\,\omega = 0$ commodissime resolui possit, ac tentaminibus quibusdam institutis minimus angulus ω intra limites $72^\circ, 25'$ et $72^\circ, 35'$ cadere reperitur: hos ergo valores pro ω substituamus, calculumque sequenti modo instituamus:

Hypoth.

		Hypoth. I	Hypoth. II
	$\omega =$	$72^\circ, 25'$	$72^\circ, 35'$
ſeu	$\omega =$	$260700''$	$261300''$
hinc	$l\omega =$	$5,4161410$	$5,4171394$
adde	$l\sqrt{2} =$	$0,1505150$	$0,1505150$
	$l\omega\sqrt{2}'' =$	$5,5666560$	$5,5676544$
	$\omega\sqrt{2} =$	$368685\frac{1}{2}''$	$369534''$
ſeu	$\omega\sqrt{2} =$	$02^\circ, 24', 45\frac{1}{2}''$	$102^\circ, 38', 54''$
	$\pi - \omega\sqrt{2} =$	$77, 35, 14\frac{1}{2}$	$77, 21, 6$
	$l\text{tang}(\pi - \omega\sqrt{2}) =$	$10,6573889$	$10,6489532$
adde	$l\sqrt{\frac{1}{2}} =$	$9,8494850$	$9,8494850$
		$10,5068739$	$10,4984382$
at	$l\text{tang}\,\omega =$	$10,4990797$	$10,5034848$
	Error	$+ \quad 77942$	$- \quad 50466$
		50466	
		128408	

$128408 : 10' = 77942 : 6', 4''$

vnde concluditur verus angulus $\omega = 72^\circ, 31', 4''$.

67. Inuento hoc angulo ω, erit $\lambda = 2\omega\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}$, et tempus vnius vibrationis cordae $= \frac{\pi}{2\omega}\sqrt{\frac{Ma}{Fg}}$ min. ſec. motus autem cordae ex ſequentibus aequationibus innoteſcet; ob $\frac{\lambda}{m} = \frac{\omega\sqrt{2}}{a}$ et $\frac{\lambda}{n} = \frac{\omega}{a}$:

$$y = \frac{e}{\text{ſin.}\,\omega\sqrt{2}}\ \text{ſin.}\ \frac{\omega x\sqrt{2}}{a}\ \text{coſ.}\ 2\,\omega\, t\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}$$

$$z = \frac{e}{\text{ſin.}\,\omega}\ \text{ſin.}\ \frac{\omega v}{a}.\ \text{coſ.}\ 2\,\omega\, t\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}.$$

Verum pro angulo ω infinitos inſuper alios valores idoneos inueſtigari licet, quo in negotio methodo ante adhibita vti conueniet, vt primum per tentamina

 limites,

limites, intra quos verus quispiam valor continetur, colligantur, iique deinceps arctius constringantur, donec valor verus ex iis satis accurate concludi queat. Cum autem isti valores nullo certo ordine inter se cohaereant, labor vtique non parum erit molestus suscipiendus, si quis plures eruere voluerit.

Inuestigatio vibrationum regularium in cordis crassitiei vtcunque variabilis

68. Reuertamur iam tandem ad problema generale, quo cordae crassities vtcunque variabilis est assumta, ac supra (10) inuenimus omnium motuum, quos quidem corda recipere valeat, inuestigationem ad solutionem huius aequationis differentio-differentialis reuocari: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, vbi z est diameter crassitiei cordae abscissae x respondens, ideoque functio cognita ipsius x. Ponamus ergo ad abbreuiandum $\frac{2Fbbbg}{Mzz} = uu$, vt habeamus $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = uu\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, in qua nunc u erit functio cognita ipsius x: quaeriturque, qualis functio ipsarum x et t, pro y substituta, isti aequationi satisfaciat, atque insuper his conditionibus sit consentanea, vt, siue statuatur $x=0$, siue $x=a$, prodeat $y=0$, tum vero vt, posito $t=0$, fiat $\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$. Quartam conditionem, vt, posito $t=0$, pro y prodeat data functio ipsius x, datae figurae initiali cordae conueniens, hic seponamus, quandoquidem problema isto latissimo sensu resolui nequit.

69. Euoluamus igitur primum casum illum maxime notabilem, quo corda vibrationes omnes synchronas

nas et isochronas producit, pro quo vis acceleratrix, vti constat, ipsi applicatae y esse debet proportionalis. Statuatur ergo ea $= nny$, et obtinebimus istas binas aequationes resoluendas:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -nny \quad \text{et} \quad uu\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = -nny$$

in quarum illa abscissa x, in hac vero tempus t est constans assumtum. At ex priori aequatione oritur $y = p$ cos. nt, vt fiat $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, posito $t = 0$, vbi p denotat functionem quamcunque ipsius x, quae ex altera aequatione debet definiri. Obtinetur autem: $uuddp + nnpdx^2 = 0$, vnde valor ipsius p ita debet determinari, vt fiat $p = 0$ siue ponatur $x = 0$, siue $x = a$. Verum alterutra conditio inseruit numero n determinando, ex quo deinceps tempus cuiusque vibrationis innotescet $= \frac{\pi}{n}$ min. sec.

70. Verum haec aequatio, in genere considerata, $uuddp + nnpdx^2 = 0$ iisdem difficultatibus subiecta deprehenditur, quae in formula illa famosa *Riccatiana* occurrunt; posito enim $p = e^{\int qdx}$ seu $\frac{dp}{pdx} = q$, illa aequatio ad hanc formam reducitur: $uudq + uuqqdx + nndx = 0$, cuius integratio ita est instituenda, vt, posito $x = 0$, fiat $\int qdx = -\infty$. Cum igitur habeatur

$$dq + qqdx + \frac{nndx}{uu} = 0$$

ex casibus integrabilitatis formulae *Riccatianae* patet, hanc aequationem ad constructionem perduci posse, si valor ipsius u sit huiusmodi potestas:

$$\frac{(k+mx)^2}{a}; \; (k+x)^{\frac{2}{3}}\sqrt[2]{a}; \; \frac{(k+mx)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}}; \; (k+mx)^{\frac{4}{5}}\sqrt[5]{a} \text{ etc.}$$

quorum caſuum primum ſupra iam in genere expedivimus, quem ſpeciminis loco euoluamus, ita vt haec aequatio reſoluenda ſit:

$$dq + qqdx + \frac{nnaadx}{(k+mx)^4} = 0.$$

71. Huic autem aequationi primum ſequens valor imaginarius ſatisfacere deprehenditur:

$$q = \frac{na\sqrt{-1} + mk + mmx}{(k+mx)^2}$$

vnde fit $\int q\,dx = \frac{-na\sqrt{-1}}{m(k+mx)} + l(k+mx)$ et $p = \alpha(k+mx)\,e^{\frac{-na\sqrt{-1}}{m(k+mx)}}$. Simili vero modo quoque ſatisfacit $p = \beta(k+mx)\,e^{\frac{+na\sqrt{-1}}{m(k+mx)}}$, quibus valoribus combinandis per formulas reales obtinetur:

$p = \mathrm{A}(k+mx)\,\text{ſin.}\frac{na}{m(k+mx)} + \mathrm{B}(k+mx)\,\text{coſ.}\frac{na}{m(k+mx)}$
qui vt euaneſcat, poſito $x=0$, fiet

$$p = \mathrm{A}(k+mx)\,\text{ſin.}\frac{nax}{k(k+mx)},$$

et proinde $y = \mathrm{A}(k+mx)\,\text{ſin.}\frac{nax}{k(k+mx)}\,\text{coſ.}\,nt$.
Cum autem hic ſit $uu = \frac{(k+mx)^4}{aa}$, erit $zz = \frac{2\mathrm{F}aabbbg}{\mathrm{M}(k+mx)^4}$ et tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{n}$ min. ſec. Verum numerus n ita debet eſſe comparatus, vt poſito $x=a$ ſit ſin. $\frac{naa}{k(k+ma)} = 0$, ſeu $n = \frac{\lambda\pi k(k+ma)}{aa}$, ideoque tempus vibrationis $= \frac{aa}{\lambda k(k+ma)}$ min. ſec.

72. Ponamus ergo ſecundo $u = (k+mx)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a}$, vt habeamus

$$dq + qqdx + \frac{nndx}{(k+mx)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{aa}}$$

cui

cui aequationi particulariter ſatisfacit

$$q = \frac{1}{\frac{(k+mx)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a}}{n\sqrt{-1}} + \frac{m(k+mx)^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{aa}}{3nn}}$$

Sit $k+mx = s^3$, vt fiat $dx = \frac{3ssds}{m}$, eritque

$$qdx = \frac{3sds}{\frac{ms\sqrt[3]{a}}{n\sqrt{-1}} + \frac{mm\sqrt[3]{aa}}{3nn}} = \frac{3nds\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}} + \frac{ds}{s - \frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}}$$

et $\int qdx = \frac{3ns\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}} + l(s - \frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}})$ hincque

$$p = \mathrm{A}\left(s - \frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}\right)e^{\frac{3ns\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}}} + \mathrm{B}\left(s + \frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}\right)e^{\frac{-3ns\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}}}$$

quae expreſſio, ad valores reales reuocata, praebet:

$$p = \alpha s \operatorname{cof.} \frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}} + \beta s \operatorname{fin.} \frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}} - \frac{\alpha m\sqrt[3]{a}}{3n} \operatorname{fin.} \frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}}$$
$$+ \frac{\beta m\sqrt[3]{a}}{3n} \operatorname{cof.} \frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}}$$

vel $p = \mathrm{A}s \operatorname{fin.} (\frac{3ns+\delta}{m\sqrt[3]{a}}) + \frac{\mathrm{A}m\sqrt[3]{a}}{3n} \operatorname{cof.} (\frac{3ns+\delta}{m\sqrt[3]{a}})$.

73. Ponatur iam $x = 0$, quo caſu fieri debet $p = 0$, et ob $s = \sqrt[3]{k}$ erit:

$\sqrt[3]{k}$

$$\sqrt[3]{k}.\,\text{fin.}\,\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}+\frac{m\sqrt[3]{a}}{3n}\,\text{cof.}\,\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}=0$$

feu tang. $(\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}})=\frac{-m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt[3]{k}}$; ideoque

$$\text{fin.}\,\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}=\frac{-m\sqrt[3]{a}}{\sqrt{(mm\sqrt[3]{aa}+9nn\sqrt[3]{kk})}}$$

Deinde ponatur $x=a$, et ob $s=\sqrt[3]{(k+ma)}$ fiet quoque

$$\text{tang.}\,(\frac{3n\sqrt[3]{(k+ma)}+\delta}{m\sqrt[3]{a}})=-\frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt[3]{(k+ma)}},$$

vnde eliminando angulo δ elicitur

$$\text{tang.}\,\frac{3n\sqrt[3]{(k+ma)}-3n\sqrt[3]{k}}{m\sqrt[3]{a}}=\frac{3mn\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k})}{mm\sqrt[3]{aa}+9nn\sqrt[3]{k(k+ma)}}$$

ex qua aequatione valor numeri n erui debet, quod quidem infinitis modis fieri poffe per fe patet. Si enim ponatur $\frac{3n}{m\sqrt[3]{a}}=\frac{\omega}{\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k}}$ quaeri debet angulus ω, vt fit

$$\text{tang.}\,\omega=\frac{\omega(\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k})}{(\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k})^2+\omega\omega\sqrt[3]{k(k+ma)}}$$

vel $\omega=\text{A tang.}\,\frac{\omega\sqrt[3]{(k+ma)}}{\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k}}-\text{A tang.}\,\frac{\omega\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k}}$

Tum

Tum inuento angulo ω, quaeratur angulus θ, vt sit

$$\text{tang. }\theta = \frac{\sqrt[3]{(k+ma)} - \sqrt[3]{k}}{\omega\sqrt[3]{(k+ma)}},$$ prodibitque altera constans

$$\frac{\delta}{m\sqrt[3]{a}} = \theta + \frac{\omega\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{(k+ma)} - \sqrt[3]{k}}.$$

74. Attentionem quoque meretur casus quasi infinitesimus, quo $u = k + mx$, seu $z = \frac{b}{k+mx}\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}$: statim enim liquet aequationi $(k+mx)^2 ddp + nnpdx^2 = 0$ satisfacere potestatem quandam $p = (k+mx)^\alpha$, facta enim substitutione fit $\alpha(\alpha-1)mm + nn = 0$, huncque $\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{nn}{mm})}$. Sit breuitatis gratia $\sqrt{(\frac{nn}{mm} - \frac{1}{4})} = \lambda$, habebiturque $p = (A(k+mx)^{\lambda\sqrt{-1}} + B(k+mx)^{2\lambda\sqrt{-1}})\sqrt{(k+mp)}$, quae ad realitatem reuocata praebet

$$p = (C\sin.\lambda l(1+\tfrac{mx}{k}) + D\cos.\lambda l(1+\tfrac{mx}{k}))\sqrt{(k+mx)}$$

Iam quia, posito $x=0$, fieri debet $p=0$, oportet esse $D=0$, et facto $x=a$, necesse est sit $\lambda l(1+\frac{ma}{k}) = i\pi$ denotante i numerum integrum quemcunque. Inuento igitur $\lambda = \frac{i\pi}{l(1+\frac{ma}{k})}$, erit $n = m\sqrt{(\frac{1}{4} + \lambda\lambda)}$, vnde tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{n}$, et motus definietur per hanc aequationem:

$$y = A(k+mx)^{\frac{1}{2}}\sin.i\pi\frac{l(1+\frac{mx}{k})}{l(1+\frac{ma}{k})}\cos mt\sqrt{(\tfrac{1}{4} + \frac{ii\pi\pi}{(l(1+\frac{ma}{k}))^2})}.$$

75. Sumendis pro i diuersis numeris, oriuntur diuersae vibrationum isochronarum species, quarum tem-

pora autem plane erunt inter se incommensurabilia. Poterunt autem vibrationes ex pluribus huiusmodi simplicibus componi, in quibus nulla amplius regularitas perspicietur. Si enim breuitatis gratia ponamus $\frac{\pi}{l(1+\frac{ma}{k})}=\mu$, sequens aequatio in infinitum adeo continuata problemati satisfaciet:

$$y=(k+mx)^{\frac{1}{2}}\begin{cases}\alpha\,\text{fin.}\,\mu\,l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{cof.}\,mt\sqrt{(\frac{1}{4}+\mu\mu)}\\ +\beta\,\text{fin.}\,2\mu\,l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{cof.}\,mt\sqrt{(\frac{1}{4}+4\mu\mu)}\\ +\gamma\,\text{fin.}\,3\mu\,l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{cof}\,mt\sqrt{(\frac{1}{4}+9\mu\mu)}\\ +\delta\,\text{fin.}\,4\mu\,l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{cof}\,mt\sqrt{(\frac{1}{4}+16\mu\mu)}\end{cases}$$

etc.

Neque tamen haec expressio, etsi in infinitum producta, eiusmodi solutionem generalem suppeditat, quae se ad omnes casus, quibus cordae initio figura quaecunque fuerit inducta, extendat. Verum consideratio huiusmodi solutionum particularium viam ad solutionem generalem parare debet.

Integratio generalis et completa aequationis differentio-differentialis $x^{2m+2}ddy+ccydx^2=0$.

76. Ad hanc aequationem peruenimus, quoties in nostra aequatione superiori $uuddp+nnpdx^2=0$, functio u fuerit potestas ipsius x, vel ipsius $\alpha+\beta x$, scilicet $u=(\alpha+\beta x)^{m+1}$, quibus igitur casibus haec aequatio integrationem admittit, iisdem motus vibratorius cordae isochronus determinari poterit. Manifestum autem

autem eſt, hanc aequationem a celebri illa *Riccatiana* non differre. Poſito enim $y = e^{\int z\,dx}$, vt ſit $z = \frac{dy}{y\,dx}$ prodit haec ipſa forma:

$$dz + zz\,dx + cc\,x^{-2m-2}\,dx = 0$$

quae quibusnam caſibus exponentis m integrabilis euadat, a celeberrimis Geometris olim eſt inueſtigatum. Verum integralia ab illis exhibita non ſolum ſunt particularia, ſed etiam hoc caſu, ob coefficientem $+cc$ neceſſario poſitiuum, fiunt imaginaria, ita vt nobis nullum vſum eſſent praeſtitura.

77. Non mediocriter ergo hoc opus circa vibrationes promouebitur, ſi huius aequationis integrale completum, quod a formulis imaginariis ſit liberum, exhibuero. Hunc in finem coefficientes neceſſarii ſequenti modo definiantur:

$$A = \frac{mm-1}{8mc};\ B = \frac{9mm-1}{16mc}A;\ C = \frac{25mm-1}{24mc}B;\ D = \frac{49mm-1}{32mc}C$$
$$E = \frac{81mm-1}{40mc}D;\ F = \frac{121mm-1}{48mc}E;\ G = \frac{169mm-1}{56mc}F \text{ etc.}$$

quibus inuentis erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{m+1}{2}}(1 - Bx^{2m} + Dx^{4m} - Fx^{6m} + \text{etc.})\,\text{ſin.}\left(\frac{c}{mx^m} + \theta\right) \\ -kx^{\frac{m+1}{2}}(Ax^m - Cx^{3m} + Ex^{5m} - Gx^{7m} + \text{etc})\,\text{coſ.}\left(\frac{c}{mx^m} + \theta\right) \end{cases}$$

vbi angulus θ cum quantitate k ſunt binae illae conſtantes arbitrariae, per duplicem integrationem introductae. Pro noſtro autem caſu vibrationum, cum angulus θ, tum conſtans c, ita definiri debent, vt, ſi abſciſſae x, quae iam non amplius a puncto A computatur,

 tatur,

tatur, certi duo valores, veluti $x = d$ et $x = d + a$, tribuantur, applicata y vtroque casu euanescat.

78. In genere quidem haec expressio in infinitum excurrit; sed manifestum est, dari infinitos eiusmodi valores exponentis m, quibus ea fiat finita. Hoc scilicet euenit, si sumta littera i ad numerum imparem quemcunque significandum, fuerit $iimm - 1 = 0$ seu $m = \pm \frac{1}{i}$, quibus casibus fit noster exponens $2m + 2 = 2 \pm \frac{2}{i}$ Quare aequatio nostra $x^{2m+2} ddy + ccydx^2 = 0$ sequentibus casibus integrationem absolutam admittit, si scilicet exponens $2m + 2$ fuerit terminus alterutrius sequentium duarum progressionum:

$$0;\ \tfrac{4}{3};\ \tfrac{8}{5};\ \tfrac{12}{7};\ \tfrac{16}{9};\ \tfrac{20}{11};\ \tfrac{24}{13};\ \text{etc.}$$

$$4;\ \tfrac{8}{3};\ \tfrac{12}{5};\ \tfrac{16}{7};\ \tfrac{20}{9};\ \tfrac{24}{11};\ \tfrac{28}{13};\ \text{etc.}$$

qui numeri negatiue sumti dant notos illos integrabilitatis casus aequationis $dz + zzdx + ccx^{-2m-2}dx = 0$, pro qua est generatim $z = \frac{dy}{ydx}$.

79. Quo haec integralia facilius assignare queamus, ponamus in genere $m = \frac{1}{i}$; eruntque nostri coefficientes:

$$A = \frac{1 - ii}{8ic}$$

$$B = \frac{(1 - ii)(9 - ii)}{8.16\, iicc}$$

$$C = \frac{(1 - ii)(9 - ii)(25 - ii)}{8.16.24\, i^3 c^3}$$

$$D = \frac{(1 - ii)(9 - ii)(25 - ii)(49 - ii)}{8.16.24.32.\, i^4 c^4}$$

$$E = \frac{(1 - ii)(9 - ii)(25 - ii)(49 - ii)(81 - ii)}{8.16.24.32.40.\, i^5 c^5}$$

etc.

Pro

Pro quolibet ergo casu assignato integrale completum vtriusque aequationis $x^{2m+2}ddy + ccydx^2 = 0$ et $dz + zzdx + ccx^{-4m-2}dx = 0$ non difficulter colligetur.

Casus I $(m = -1)$

$$ddy + ccydx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccdx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = k\,\text{fin.}(\theta - cx) \text{ et } z = \frac{dy}{ydx} = \frac{-c\,\text{cof.}(\theta - cx)}{\text{fin.}(\theta - cx)}$$

Casus II $(m = +1)$

$$x^4 ddy + ccydx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-4}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = kx\,\text{fin.}(\theta + \tfrac{c}{x}), \text{ et } z = \frac{dy}{ydx} = \frac{1}{x} - \frac{c}{xx}\cot(\theta + \tfrac{c}{x})$$

Casus III $(m = -\frac{1}{3})$

$$x^{\frac{4}{3}}ddy + ccydx^2 = 0;\ \text{et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{4}{3}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = kx^{\frac{1}{3}}(\text{fin.}(\theta - 3cx^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{3c}x^{-\frac{1}{3}}\text{cof.}(\theta - 3cx^{\frac{1}{3}}))$$

$$\text{seu } y = k(x^{\frac{1}{3}}\text{fin.}(\theta - 3cx^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{3c}\text{cof.}(\theta - 3cx^{\frac{1}{3}}))$$

Casus IV $(m = +\frac{1}{3})$

$$x^{\frac{8}{3}}ddy + ccydx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{8}{3}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = kx^{\frac{2}{3}}(\text{fin.}(\theta + 3cx^{-\frac{1}{3}}) + \tfrac{1}{3c}x^{\frac{1}{3}}\text{cof.}(\theta + 3cx^{-\frac{1}{3}}))$$

Casus V $(m = -\frac{1}{5})$

$$x^{\frac{8}{5}}ddy + ccdx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{8}{5}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = kx^{\frac{2}{5}}((1 - \tfrac{3}{25cc}x^{-\frac{2}{5}})\,\text{fin.}(\theta - 5cx^{\frac{1}{5}}) - \tfrac{3}{5c}x^{-\frac{1}{5}}\text{cof.}(\theta - 5cx^{\frac{1}{5}}))$$

 Casus

Casus VI $(m = + \frac{1}{5})$

$$x^{\frac{12}{5}} ddy + ccy dx^2 = 0; \text{ et } dz + zz dx + cc x^{-\frac{12}{5}} dx = 0,$$

erit integrale completum

$$y = k x^{\frac{3}{5}}\left(\left(1 + \frac{3}{25cc} x^{\frac{2}{5}}\right) \text{fin.}\left(\theta + 5c x^{-\frac{1}{5}}\right) + \frac{3}{5c} x^{\frac{1}{5}} \text{cof.}\left(\theta + 5c x^{-\frac{1}{5}}\right)\right)$$

Casus VII $(m = - \frac{1}{7})$

$$x^{\frac{12}{7}} ddy + ccy dx^2 = 0; \text{ et } dz + zz dx + cc x^{-\frac{12}{7}} dx = 0$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} + k x^{\frac{3}{7}}\left(1 - \frac{3 \cdot 5}{7^2 cc} x^{-\frac{2}{7}}\right) \text{fin}\left(\theta - 7c x^{\frac{1}{7}}\right) \\ - k x^{\frac{3}{7}}\left(\frac{2 \cdot 1}{7c} x^{-\frac{1}{7}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{7^3 c^3} x^{-\frac{3}{7}}\right) \text{cof.}\left(\theta - 7c x^{\frac{1}{7}}\right) \end{cases}$$

Casus VIII $(m = + \frac{1}{7})$

$$x^{\frac{16}{7}} ddy + ccy dx^2 = 0; \text{ et } dz + zz dx + cc x^{-\frac{16}{7}} dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} + k x^{\frac{4}{7}}\left(1 - \frac{3 \cdot 5}{7^2 c^2} x^{\frac{2}{7}}\right) \text{fin.}\left(\theta + 7c x^{-\frac{1}{7}}\right) \\ + k x^{\frac{4}{7}}\left(\frac{2 \cdot 3}{7c} x^{\frac{1}{7}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{7^3 c^3} x^{\frac{3}{7}}\right) \text{cof.}\left(\theta + 7c x^{-\frac{1}{7}}\right) \end{cases}$$

Casus IX $(m = - \frac{1}{9})$

$$x^{\frac{16}{9}} ddy + ccy dx^2 = 0 \text{ et } dz + zz dx + cc x^{-\frac{16}{9}} dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} + k x^{\frac{4}{9}}\left(1 - \frac{9 \cdot 5}{9^2 c^2} x^{-\frac{2}{9}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{9^4 c^4} x^{-\frac{4}{9}}\right) \text{fin.}\left(\theta - 9c x^{\frac{1}{9}}\right) \\ - k x^{\frac{4}{9}}\left(\frac{10}{9c} x^{-\frac{1}{9}} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9^3 c^3} x^{-\frac{3}{9}}\right) \text{cof.}\left(\theta - 9c x^{\frac{1}{9}}\right) \end{cases}$$

Casus X $(m = + \frac{1}{9})$

$$x^{\frac{20}{9}} ddy + ccy dx^2 = 0; \text{ et } dz + zz dx + cc x^{-\frac{20}{9}} dx = 0,$$

erit

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{5}{9}}\left(1 - \frac{9\cdot 5}{9^2c^2}x^{\frac{2}{9}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{9^4c^4}x^{\frac{4}{9}}\right)\mathrm{sin.}\left(\theta + 9cx^{-\frac{1}{9}}\right) \\ +kx^{\frac{5}{9}}\left(\frac{10}{9c}x^{\frac{1}{9}} - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{9^3c^3}x^{\frac{3}{9}}\right)\mathrm{cos.}\left(\theta + 9cx^{-\frac{1}{9}}\right) \end{cases}$$

Casus XI $(m = -\frac{1}{11})$

$x^{\frac{20}{11}}ddy + ccydx^2 = 0$; et $dz + zzdx + ccx^{-\frac{20}{11}}dx = 0$,

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{5}{11}}\left(1 - \frac{21\cdot 5}{11^2c^2}x^{-\frac{2}{11}} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{11^4c^4}x^{-\frac{4}{11}}\right)\mathrm{sin.}\left(\theta - 11cx^{\frac{1}{11}}\right) \\ -kx^{\frac{5}{11}}\left(\frac{15}{11c}x^{-\frac{1}{11}} - \frac{4\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{11^3c^3}x^{-\frac{3}{11}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{11^5c^4}x^{-\frac{5}{11}}\right)\mathrm{cos.}\left(\theta - 11cx^{\frac{1}{11}}\right) \end{cases}$$

Casus XII $(m = +\frac{1}{11})$

$x^{\frac{24}{11}}ddy + ccydx^2 = 0$; et $dz + zzdx + ccx^{-\frac{24}{11}}dx = 0$,

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{6}{11}}\left(1 - \frac{21\cdot 5}{11^2c^2}x^{\frac{2}{11}} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{11^4c^4}x^{\frac{4}{11}}\right)\mathrm{sin.}\left(\theta - 11cx^{-\frac{21}{11}}\right) \\ +kx^{\frac{6}{11}}\left(\frac{15}{11c}x^{\frac{1}{11}} - \frac{4\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{11^3c^3}x^{\frac{3}{11}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{11^5c^5}x^{\frac{5}{11}}\right)\mathrm{cos.}\left(\theta + 11cx^{-\frac{1}{11}}\right) \end{cases}$$

Casus XIII $(m = -\frac{1}{13})$

$x^{\frac{24}{13}}ddy + ccydx^2 = 0$; et $dz + zzdx + ccx^{-\frac{24}{13}}dx = 0$,

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{6}{13}}\left(1 - \frac{6\cdot 5\cdot 7}{13^2c^2}x^{-\frac{2}{13}} + \frac{5\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{13^4c^4}x^{-\frac{4}{13}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{13^5c^5}x^{-\frac{6}{13}}\right)\mathrm{sin}\left(\theta - 13cx^{\frac{1}{13}}\right) \\ -kx^{\frac{6}{13}}\left(\frac{3\cdot 7}{13c}x^{-\frac{1}{13}} - \frac{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{13^3c^3}x^{-\frac{3}{13}} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{13^5c^5}x^{-\frac{5}{13}}\right)\mathrm{cos.}\left(\theta - 13cx^{\frac{1}{13}}\right) \end{cases}$$

Casus XIV $(m = +\frac{1}{13})$

$x^{\frac{28}{13}}ddy + ccydx^2 = 0$; et $dz + zzdx + ccx^{-\frac{28}{13}}dx = 0$,

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{7}{13}}\left(1 - \frac{6\cdot 5\cdot 7}{13^2c^2}x^{\frac{2}{13}} + \frac{5\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{13^4c^4}x^{\frac{4}{13}} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{13^5c^5}x^{\frac{6}{13}}\right)\mathrm{sin.}\left(\theta + 13cx^{-\frac{1}{13}}\right) \\ +kx^{\frac{7}{13}}\left(\frac{3\cdot 7}{13c}x^{\frac{1}{13}} - \frac{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{13^3c^3}x^{\frac{3}{13}} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{13^5c^5}x^{\frac{5}{13}}\right)\mathrm{cos.}\left(\theta + 13cx^{-\frac{1}{13}}\right). \end{cases}$$

Ex

Ex his autem ſingulis valoribus ipſius y eruitur valor ipſius $z = \frac{dy}{y\,dx}$.

80. Quod ad ordinem coefficientium in his expreſſionibus attinet, is facillime perſpicitur, ſi numeri impares pro i ſubſtituendi diſtinguantur, prout ſint formae vel $4n+1$, vel $4n-1$:

I. Ita ſi ſit $m = \frac{1}{4n+1}$ ſeu $i = 4n+1$, erit

$$A = \frac{n}{1} \cdot \frac{(2n+1)}{ic}$$

$$B = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{i^2 c^2}$$

$$C = \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^3 c^3}$$

$$D = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^4 c^4}$$

$$E = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{i^5 c^5}$$

etc.

II. Si ſit $m = \frac{1}{4n-1}$ ſeu $i = 4n-1$, erit

$$A = \frac{n}{1} \cdot \frac{(2n-1)}{ic}$$

$$B = \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{i^2 c^2}$$

$$C = \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}{i^3 c^3}$$

$$D = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^4 c^4}$$

$$E = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^5 c^5}$$

etc.

THERMO-

THERMOMETRI METALLICI DESCRIPTIO.

Auctore

I. E. ZEIHERO.

Exſtat in machinarum phyſicarum theſauro Illuſtriſſimi Comitis *de Loeſer*, Saxoniae Mareſchalli haereditarii, artium mechanicarum magni promotoris, thermometrum metallicum, quod ipſe quidem nunquam vidi, cuius autem egregia ſtructura ex amici cuiusdam deſcriptione mihi innotuit: praemittere hanc non incongruum fore iudicaui, priusquam ipſam inuenti mei deſcriptionem aggrediar, quum poſterius inſtrumentum in priori ſit fundatum.

Thermometrum autem Loeſerianum e quatuor parallelepipedis, ſeu prismatibus quadrangularibus, vel e ſtanno puro, vel plumbo mixto, confectis, AB, DE, GH, KL compoſitum eſt, quorum quodlibet longitudine pedem Pariſinum parum ſuperat, ſecundum latitudinem autem et craſſitiem quatuor lineas circiter adaequat. Prisma AB extremitate A fundo XY verticali ſitu eſt affixum, altera autem extremitate B cum extremitate ſuperiore D, alterius prismatis DE, ſitu verticali deſcendentis, vecte mediante aurichalceo BCD ita connectitur, vt motus circa puncta HIK fieri poſſit. Axis C receptaculi parieti eſt affixus. Alterius prismatis extremitas E cum tertii prismatis GH extremitate G, pari modo ope vectis EFG, cuius axis F alteri parieti eſt affixus, con- Tab. IV. Fig. 1.

 iun-

iungitur, aeque ac extremitates HK cum vecte HIK conne-ctuntur Quarti prismatis KL extremitas L mediante clauo rotundo Z, in furcae ML rimam fese insinuante, rotam vrget dentatam NOP, quae aliam minorem Q, cui applicita est, circummouet; quo fit, vt index posteriori affixus, diuisiones in lin bo STV factas denotet. E structura huius instrumenti elucet, sensibilitatem eius a brachiorum vectium inaequalitatis ratione maxime pendere. Ponamus enim, prisma primum a calore vel frigore quantitate q mutari, et rationem inter vectis crura esse vt 1 ad 3, tunc cruris maioris extremitas cum prismate secundo connexa, spatium percurret $= 3q$, per consequens prisma secundum protrudetur $3q$, quod, quoniam pari modo a calore vel frigore mutabitur quantitate q, vectem secundum, qui secundum et tertium prisma coniungit, vrgebit $4q$; hic autem tertium prisma $4q.\frac{3}{1} = 12q$; tertium porro prisma tertium vectem $13q\frac{3}{1} = 39q$: consequenter spatium ab extremitate L prismatis quarti percursum, erit $39q + q = 40q$. Vt autem formulam generaliorem eruamus, rationem inter vtraque crura supponere licet, vti m ad n, vbi m cruris maioris, n vero minoris longitudinem denotat: obtinebimus tunc

pro prism. 1. q

2 $q + \frac{qm}{n} = q\left(\frac{n+m}{n}\right)$

3. $q + \frac{m}{n}\left(\frac{qn+qm}{n}\right) = q\left(\frac{n^2+mn+m^2}{n^2}\right)$

4. $q + \frac{m}{n}\left(\frac{q+qn^2+qmn+qm^2}{n^2}\right) = q\left(\frac{n^3+mn^2+m^2n+m^3}{n^3}\right)$

5. $q\left(\frac{n^4+mn^3+m^2n^2+m^3n+m^4}{n^4}\right)$

6. $q\left(\frac{n^5+mn^4+m^2n^3+m^3n^2+m^4n+m^5}{n^5}\right)$.

Quum

Quum inuentum hoc aptiſſimum mihi viſum ſit ad inſtituenda experimenta, qualia thermometrorum huc vsque vſitatorum auxilio inſtitui plane nequeunt: non dubito, fore vtile, ſi peculiarem et nouam eiusmodi inſtrumenti deſcribam conſtructionem a me excogitatam, cuius imperfectiones, quibus adhuc forſan laborat, reiterata experimenta, cum hoc ipſo inſtituta, in totum tollent. Thermometrum vero hoc metallicum eum in finem componere conatus ſum, vt partim puncta duo conſtantia in eodem determinare, partim caloris gradus, mercurii ebullientis gradum longe ſuperantes, nec non frigus illud, quo fluidum iſtud metallicum ipſum coit, metiri queamus: cui fini ſequens conſtructio ſatisfaciet.

Tab. IV. Fig. 2.

Conficiatur lamina ferrea ABCD, ac prismata quadrangularia E, F, G, H, I, K, ex argento, quorum primum E ad L bis incuruatum, mediante cochlea *a*, firmetur ad laminam modo nominatam ABCD. Ad *xy* exſcindatur crena, cuius vſus inferius patebit; eidem cochlea *a* imponatur. Altera extremitas *b* cum vecte *bc* articuli ope connectatur, pari modo ac prismatum F, G, H, I, K, extremitates cum vectium extremitatibus *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, *m*. Vectium axes *o*, *o*, *o* . . . etc. laminae ferreae infigantur vna extremitate, altera autem vectibus inſerantur, ita quidem, vt circa illos commouere ſeſe queant. Vltimi vectis crus maius *on* indicis munere fungitur cuſpidis ope *n*, diuiſiones in limbo AB factas denotantis. Hunc limbum ex aurichalco comparare oportet, vt diuiſiones eo melius ac commodius in eodem defignari poffint. Ad partem laminae ferreae inferiorem CDPQ operculum RS affigatur mediantibus cochleis, eo modo, vt fpatium, in quo prismata vna cum vectibus fuis funt contenta, accurate claudatur, excepto loco PQ, qui apertus remaneat, vt index commoueri queat.

Si quis inftrumentum in metallum quoddam liquefactum immergere velit, capfula CDPQ ad craffitiem vnius circiter lineae vsque luto obducatur, non tantum ad metalli liquidi introitum impediendum, verum etiam ad omne, quod capfula alias pati poffet, detrimentum auertendum. Lutum hoc, experimentis factis, pro lubitu iterum tollitur. Quodfi vero circa frigus artificiale experimenta fint inftituenda, thermometri capfula vernice calida, ex lini oleo et pice confecta, eft obducenda, ne metallum ab acida mixtione, in quam immergitur, corrodatur.

Thermometrum Loeferianum prismatibus conftat e ftanno confectis; quod metallum ad obferuationes meteorologicas inftituendas aptiffimum eft, quia mutationem prae reliquis omnium patitur maximam. Quia vero idem fub leui caloris gradu liquefcit, et per confequens experimentis pyrometricis inftituendis non conuenit, argentum elegi, quod et difficillime liquefcit, et ratione mutationis, quam a calore vel frigore patitur, ad ftannum feu plumbum proxime accedit; vti ex Cel. *Bougueri* experimentis, Quitoae factis (*), notum

(*) Vid. Memoires de l'Acad. de Sc. ad an. 1743. p. 230. etc. Cum ftanno ipfo quidem Cel. Vir experimenta non fecit; interim quum Cel. *Mufchenbroek* (*vid Tent. Acad del Cimento* P. II. p. 22.) nullum notabile difcrimen inter plumbum et ftannum deprehenderit, vnum pro altero fubftituere nullus dubito.

tum eſt. Experimenta enim haec multoties repetita Cel. Virum docuere, hexapedam Pariſinam a niuis frigore ſeu congelatione, ad ebullitionem vsque, in ferro ad $\frac{47}{1000}$, in auro $\frac{63}{1000}$, in argento $\frac{81}{1000}$, in plumbo $\frac{90}{1000}$ lin. pedis Pariſ. increſcere.

Quodſi igitur aſſumamus, longitudinem prismatis inter vtrumque articulum eſſe 18 lin. id a congelatione ad ebullitionem vsque ad $\frac{81}{4800}$ lin. extendetur; ponamus porro, rationem inter vectis crura eſſe vti 1 ad 3, habebimus pro ſpatio a vectis *o l* crure percurſo, ſubſtitutis in formula generali $\left(\frac{mn^4+m^2n^3+m^3n^2+m^4n+m^5}{n^5}\right)q$ valoribus in caſu hoc ſpeciali aſſumtis $\frac{(3+9+27+81+243)}{4800}\times 81 = \frac{29403}{4800}$, ſeu diuiſione peracta, $6\frac{1}{8}$ fere lineas. Spatium hoc quinti vectis *o l* extremitas *l* percurrere deberet, niſi lamina ferrea, cui axes vectium ſunt infixi, ipſa volumine ſuo increſceret. Quum vero hoc incrementum in ferri fruſtulo $1\frac{1}{2}$ poll. longo $\frac{47}{4800}$ lin. efficiat, incrementum relatiuum $\frac{81-47}{4800}=\frac{34}{4800}$ lin. inuenitur; quod pro *q* ſubſtitui debet, ſi ſpatium extremitate *l* vere percurſum quaeramus: calculo autem vti ſupra peracto, $2\frac{1}{3}$ lin. attinget. Ad vltimi prismatis incrementum quod attinet, quum $\frac{1}{282}$ lineae non excedat, negligi poteſt. Denique ſi rationem inter indicis crura ſupponamus vti 12 ad 1, extremitas *n* ſpatium percurret $2\frac{1}{8}$ poll. a congelationis puncto ad gradum vsque ebullitionis aquae: id quod in explorandis inſignibus caloris vel frigoris gradibus abunde ſufficiet; immo in caſibus quibusdam *e.g.* vbi gradus menſurandi, ſpatium, ebullitionis et congelationis punctis inclusum, aliquoties excurrunt, $2\frac{1}{2}$ poll. nimium erunt.

Supposuimus in formula incrementorum superius inuenta, prismata semper vrgeri a vectibus secundum directionem eandem, ac inter se manere parallela; id quod in eo tantum casu locum habet, in quo vectes satis sunt magni, ac per consequens arcus ab iisdem descriptus ratione radii describentis valde exiguus, vti id ipsum in instrumento ad obseruationes meteorologicas adaptato re vera obtinet. Quum autem in instrumento, gradibus permagnis caloris vel frigoris explorandis inseruituro, vectes necessario satis parui euadant, ac vectis vltimi extremitas arcum octauam circuli partem superantem nonnunquam percurrere cogatur, inaequalitates ab hinc ortas fore valde sensibiles, hincque non
Tab. IV. Fig. 3. negligendas esse per se patet. Sit enim AD vectis vltimi crus maius, AK prisma cum indicis crure minori IL coniunctum, sintque, ne res nimis complicetur, AD, AK, KL, inter se aequales; moueatur porro A ad B, et punctum K transferatur ad H, elucebit tunc, arcum AB maiorem esse arcu KH. Cum enim sinus $IH = EG - FG$, EG autem $= CB$, sinus $IH <$ erit sin. CB; quo simul conspicitur, differentias sinuum CB et IH eo magis crescere, quo magis crescit arcus AB. Quodsi itaque spatium, quod punctis congelationis atque ebullitionis aquae includitur, a crure AD percursum, non sit arcus ratione radii AD valde exiguus e. g. circuli pars vigesima, spatia aequalia intermedia, puncto A descripta, tanquam partes aequales

les in ſcala aſſumi haud poſſunt; ſed ſecundum legem, qua decreſcunt, in eadem deſignanda ſunt: id quod methodo ſequenti mechanica optime fieri poſſe arbitror.

Supinetur in niuem, ſeu glaciem contuſam, thermometrum, huicque permaneat immerſum, donec ad congelationis punctum circiter refrixerit; quo facto, mediante cochlea a, per rimam *x y* inſerta, tam priſmata quam vectes collocentur in ſitum, in figura repraeſentatum; affigatur dein operculum laminae C D P Q, omniaque bene claudantur; punctum denique accuratius quaeratur methodo vulgari, nec non punctum aquae ebullientis. Ducantur in charta lineae AD, AK, KL, et quidem ita, vt L K, quae crus indicis repraeſentat minus, aequalis ſit cruri indicis maiori *mn*, reliquae autem ſiat proportionatae eidem quod repraeſentant; nempe L K crus indicis minus *mo*, AK priſma *lm*, et AD vectis crus maius *o l*. Tunc deſcribatur radio LK arcus K H, et arcus K M aequalis fiat arcui *n p*, qui ſpatium inter congelationem et ebullitionem denotat; porro AK transferatur ad M N, ſic A N erit circuli pars, quam A D eodem tempore, quo *n* mouebatur ad *p*, deſcripſit. Arcus A N diuidatur in tot partes aequales, quot cuilibet ſcalae congruunt; ſcilicet in 15, ſi Delisliana iſta ſit: non enim opus eſt, vt mediante hac methodo ſingulatim denotentur gradus; quippe qui poſtea interponi commode queunt. Diuiſione ad A N facta, ſingulis punctis circini crus imponatur, et altero, ſpatio AK a priori diſtante, diſſecetur arcus K M in tot partes, quot diuiſiones ad A N factae Fig. 8.

factae ſunt, haeque in ſcalae arcum transponantur. Arcus autem A N in N B transferatur, ex D reſecetur H, ac operatio modo deſcripta repetatur, et ſpatium a Zero ad gradum vsque 150 *Delislianum* ſupra punctum ebullitionis diuiſum obtinebitur: ſic denuo repeti poteſt operatio infra et ſupra puncta conſueta, prouti res illud poſtulant.

Supereſt, vt diſquiramus, an contractionis vel extenſionis inaequalitas, quam vtrumque indicis crus pati poteſt, ſi thermometri capſula immergitur vsque ad P Q, quum e contrario pars A B P Q relinquitur libera, ſit negligenda, nec ne? Ponamus itaque, crus *mo* eſſe 1 poll. hexapedam vero pariſinam ferream a niuis frigore ad aquae ebullitionem vsque $\frac{47}{100}$ lin. increſcere, vt ex praecedentibus patet; per conſequens pollicis vnius incrementum aequale erit $\frac{47}{7200}$ lin. quod $\frac{1}{1838}$ longitudinis cruris integri *m o* non excedit; differentia itaque exorietur in ſpatio 150 graduum *Delislianorum* $\frac{1}{1838}$, poſito effectu caloris vel frigoris ad *o* penitus euaneſcente. Quia autem ſenſu ſtrictiori hoc locum non habet, quoniam effectus in ratione diſtantiarum duplicata tantum euaneſcit, variatio inde exoriunda inſuper etiam minor erit, et conſequenter plane negligi poterit.

Quum taedioſum ſit, immo interdum impoſſibile, in obſeruandis caloris gradibus permagnis, indicis apicem oculis perſequi, ſummumque denotare gradum, ad *n* clauus exacutus, ac elatere *q* inſtructus, cochlearum *ſ*, *ſ*, ope affigatur, limbusque fuligine obducatur; ſic ille, indice ſeſe mouente, ſemitam deſcribet, cuius punctum

punctum extremum gradum indicabit summum. Hoc commodo etiam vti possumus absentes, in obseruandis summis atmosphaerae nostrae gradibus, tam caloris, quam frigoris, si loco claui chalybei stylum e cerussa confectum insigamus, limbumque papyro obducamus; qua praerogatiua thermometra vulgaria plane carent: quamuis enim in hunc finem constructiones eorum variae sint excogitatae, idem tamen longe facilius thermometro metallico obtinebitur.

THERMOMETRORVM, PVNCTIS CONSTANTIBVS GAVDENTIVM, EMENDATIO.

Auctore
I. E. ZEIHERO.

Quum taediosum valde sit, tantos labores et sumtus ad perficiendas scalas metallicas, bulbo vitreo fracto, frustra impendisse: non incongruum fore iudicaui, artificium proponere, malo huic auertendo idoneum, sequens:

Tab IV. Fig. 4. Elaboretur bulbus ferreus AB, fundo B cochlea caua instructus, et ad collum A perforatus. Cochleae cauae B adaptetur cochlea solida F, bulbo AB non modo claudendo, sed bulbi spatio DE etiam augendo, vel diminuendo, inseruiens. Colli foramini imponatur tubulus vitreus DC, ac lithocolla firmetur, ita, vt prae fornice D non promineat, sed extremitate sua inferiore superficiem fornicis iusto attingat.

E descriptione huius bulbi, seu cylindri, euidenter elucet, eum ita comparatum esse, vt eiusdem ope spatium inter punctum ebullitionis et congelationis, determinatae magnitudinis semper obtineri possit. Ponamus enim, spatium inter duos terminos constantes maius esse spatio dato, statim hoc diminui poterit diminuendo bulbi spatium DE; si nimirum cochlea F fornicem D versus protrudatur, et vice versa.

Quodsi nunc casu fortuito diffractum fuerit thermometrum, cylindro modo descripto ferreo, vel etiam bulbo

bulbo vitreo communi, inſtructum, ac deſideretur pro ſcala relicta, elegantiſſime elaborata, nouum thermometrum, cuius ratio bulbi ad tubulum eadem ſit, ac in priori, cuiusque puncta fixa cum ſcalae punctis coincidant: eligatur tubulus, cuius diameter diametro prioris circiter aequalis ſit; infigatur lithocollae ope in bulbi ferrei collum A, tuncque cylindrus AB ac aliqua tubuli pars repleatur mercurio, et claudatur mediante cochlea F. Notandum autem hic eſt, ſpatium *a* duplicem ob finem annulis chartaceis repleri debere; partim vt, cochlea F fortiſſime conſtricta, penitus mercurio praecludatur exitus; partim vt, annulorum numero pro lubitu aucto, vel diminuto, ſpatium D E vel augeri, vel diminui poſſit.

Thermometro iam repleto, determinetur vtrumque punctum, ebullitionis nempe ac congelationis, et comparetur thermometri noui ſpatium cum ſpatio in ſcala relicta deſignato. Si prius e. g. maius inuenitur poſteriore, cochlea F ſoluta, vnus, vel duo, tresue annuli chartacei demantur; quo facto, cochlea F iterum immittatur, firmiter contorqueatur, denuoque ſcala comparetur, donec vnum cum altero ſpatio coincidat. Si autem ſpatium nouum minus ſit ſpatio in ſcala deſignato, annuli addantur, et ſic porro.

Spatio modo deſcripto priori facto aequali, nihil aliud ſupereſt, quam curare, vt tubulus iuſta mercurii quantitate repleatur, ne puncta fixa, aut nimis altum, aut nimis profundum, in ſcala obtineant ſitum: id quod, vnam vel alteram mercurii guttulam, vel demendo, vel addendo, facillime perficitur.

EMENDATIO
MICROSCOPII SOLARIS.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Qui de microſcopio ſolari, atque laterna magica, repraeſentationi obiectorum non diaphanorum ſeu opacorum apta, cogitauit, primus ſine dubio eſt Ill. *Eulerus*, cuius Diſſertatio, ſub titulo: *Emendatio Laternae magicae et Microſcopii ſolaris*, inſerta *nouorum Commentariorum Academiae noſtrae Tomo III*, incommoda et vitia vtriusque inſtrumenti recenſet, atque commonſtrat, pleraque exinde oriri, quod obiecta, non in ea parte, quae lenti refringenti eſt obuerſa, ſed in altera parte, auerſa nempe, illuminantur, vnde hic praecipue oritur defectus, quod vulgari more conſtructa microſcopia ſolaria, aut laternae magicae, exhibendis obiectis non pellucidis, omnino ſint inepta

Vir ad Opticam excolendam natus, Celeberrimus *Lieberkühn*, ſuam non deſiderari paſſus eſt diligentiam, in perficiendo inſtrumento, cuius inuentor eſt. Poſtquam nempe *Eulerus* laternam magicam, opacis obiectis depingendis idoneam, felici cum ſucceſſu conſtrui fecerat, *Lieberkühnius* etiam microſcopium ſolare imaginatus eſt, atque confecit, quod obiecta non pellucida repraeſentaret. Teſtis ſum huius rei fide dignus, qui non ſolum ex Viri integerrimi ore hoc accepi, ſed ipſum quoque inſtrumentum manibus contrectaui. Mirabungabuntur forte Lectores, meam aut hebetudinem, aut neglıgentiam, quod nihilominus, ignorare me penitus, qualis fuerit inſtrumenti conſtructio, fatear, nilque amplius aſſerere valeam, niſi, quantum ex adſpectu nudo iudicari potuit, non habuiſſe ipſum aliquid, cum conſueti microſcopii ſolaris ſtructura, commune. Aſt ſciant hi, vidiſſe me inſtrumentum paucis ante Viri deſideratiſſimi praematuram mortem ſeptimanis, ingruente nocte, ipſo eo momento, quo relinquens *Lieberkühnium*, domum reuerti volebam, atque diſtuliſſe me, conſulente Ipſo Celeberrimo Viro, et effectuum, et ſtructurae inſtrumenti examen, in aliam diem. Quo minus vero humaniſſimae *Lieberkühnii* inuitationi morem gerere, meamque ſatiare potuerim auiditatem, impediuit, in quem protinus incidebat Vir Celeberrimus, morbus, qui fatalis ipſi fuit. Supereſt proinde ſine dubio, in eo, quem reliquit inſtrumentorum opticorum theſauro, *Lieberkühnius*, et hocce, cuius, cum nulla, quod ſciam, deſcriptio publice hactenus exſtet, a Viro autem Celeberrimo, qui nil moliebatur inepte, non niſi egregia ſperanda ſint, rogandi omnino ſunt ipſius haeredes, vt erudito orbi deſcriptionem microſcopii huius impertiri velint.

Cum proinde in microſcopium ſolare, obiectis opacis aptum, aequum ius habeant Celeberrimi Viri *Eulerus* et *Lieberkühnius*, ac pro inuentoribus procul dubio habendi ſint, quam hic propono, microſcopii ſolaris emendationem, (etſi et haec, ad repraeſentanda obiecta pelluciditate carentia, aptum reddat hoc inſtrumentum) non ea mente trado,

 quaſi

quasi microscopii solaris, obiecta opaca depingentis, primam mihi adscribere ideam, velim.

Sunt plures, qui possident microscopia solaria, vulgari more constructa, hisque gratissimum erit sine dubio, si viam ipsis commonstrem, quomodo seruato toto huius instrumenti apparatu, ita adaptare istud facile queant, vt obiectis opacis depingendis idoneum euadat, iungendo solummodo ipsi machinulam, hic a me describendam, paucos exigentem sumtus, ac ita simplicem, vt a rudiori quouis, instrumentis mathematicis parandis modice adsueto opifice, construi facile queat.

Cum non nisi, quae recensui, praestare animus sit, neque *Eulerum*, neque *Lieberkühnium*, neque tandem (quod, ne iniurius sim in Clariss. Collegam, reticere nequeo) Celeb. *Zeiherum*, laedere mihi videor. Etsi nempe quoque postremus hic, iam ex aliquo tempore, de construendo microscopio solari, obiecta opaca depingente, cogitauerit, atque duplicem eiusmodi instrumenti constructionem imaginatus sit, non tamen neque *Ipse*, neque *Lieberkühnius* id sibi propositum habuerunt, quod ego, vt vulgare microscopium solare ad finem huncce adaptarent.

Antequam ipsam instrumenti mei descriptionem aggrediar, generales quasdam, microscopium solare, opaca obiecta depingens, spectantes annotationes afferre mihi liceat. Notabile primum accidit, quod picturae, a microscopio tali formatae, tanta gaudeant venustate, quae verbis exprimi difficulter queat. Obstupui fere ad primum adspectum; non enim picturam, non imaginem

ginem, ſed rem ipſam conſpicere mihi videbar, incantationis quaſi ope in prodigioſam molem adauctam.

Quae perfectionis huius cauſa ſit, non ita difficulter concipitur, ac a duabus potiſſimum circumſtantiis pendere videtur, quarum altera ab Ill. *Eulero* annotata, altera vero neglecta eſt. Eſt poſterior haec, quod microſcopium ſolare, obiecta opaca depingens, depreſſiones ac eleuationes obiecti partium (*bas relief* vocare ſolent *Galli*) exprimat, quod quidem microſcopium, non niſi obiectis diaphanis aptum, praeſtare nunquam poſſe, in oculos facile incurrit. Deinde picturarum pulchritudo, prouti annotauit *Eulerus*, magnam quoque partem pendet exinde, quod a microſcopio obiecta opaca depingente productae imagines, non prouti iſtae, quas efformat vulgari modo conſtructum microſcopium, priſmaticis coloribus inquinatae ſint, quod quidem in poſteriori hocce, nullo artificio euitari poſſe, exinde facile patet, quoniam radii ſolis, obiectum tranſparens depingendum permeantes, neceſſario in colores reſoluuntur.

Quamuis autem microſcopium, opacis obiectis depingendis idoneum, imagines multo elegantiores ac vulgare producat, cedit tamen huic, quoad augmentationem, quam imaginibus conciliat. Liquet nempe ſine negotio, in microſcopio, transparentibus obiectis apto, omne fere lumen, quo illuſtratur obiectum, ad lentem obiectiuam pertingere; aſt in microſcopio, opaca obiecta depingente, incidens in obiectum lumen quaqua verſus diſpergitur, neque, niſi minima ipſius pars, in lenticulam incidit. Si ergo ponas, obiectum in in vtroque microſcopio aequaliter illuminari, et imaginem ad aequalem vtrinque gradum amplificari, neceſſario, quae a poſteriori microſcopio efformatur imago, multo obſcurior erit, quam quae a priori producitur. Si itaque ſatis claras, ope microſcopii poſterioris, picturas obtinere voluerimus, neceſſe erit, vt amplificatione multo minori, quam quidem per vulgare microſcopium obtineri poteſt, contenti ſimus.

Videtur quidem facile huic defectui remedium inueniri poſſe; nulla enim alia re opus eſſe videtur, niſi vt maior lucis copia in obiectum coniiciatur, quam in vulgari microſcopio fieri ſolet, quod quidem, ope aut ſpeculorum, aut lentium, efficere, in poteſtate noſtra ſitum eſt: Aſt vereor nihilo minus, ne irriti ſint conatus iſti; vix enim fieri poſſe puto, vt multo maiori luce obiectum colluſtretur, ac in vulgari microſcopio fieri ſolet. Deſumuntur namque obiecta pro microſcopiis pleraque, aut ex vegetabili, aut ex animali regno, eiusmodi vero corpora calorem vehementiorem perpeti nequeunt, absque eo, vt aut comburantur, aut corrumpantur. Liquet autem, ſolis radios, pro intendenda lucis vi, in arctius ſpatium cogi non poſſe, absque eo, vt calor in eadem ratione augeatur, ac lucis energia. Dantur itaque certi limites, a natura praeſcripti, quos, ſi attingere, nunquam tamen tranſcendere, nobis licet.

Ipſum inſtrumentum a me inuentum, cuius ope microſcopium vulgare, depingendis obiectis opacis aptum reddo, ex binis laminis orichalceis circularibus, brachio prae-

praeditis, ac articulatione inter ſe iunctis, conſtat. Exhibet ipſarum primam, Fig. 1. et 2, alteram Fig. 3. et 4. Figura autem 6 ipſas ſiſtit, et inter ſe, et microſcopio debita ratione iunctas.

Partium iſtarum prior AB, Fig 1. et 2, ex anteriori parte afferruminatum gerit cylindrum cauum orichalceum *ab*, lineam circiter altum, cui exterius inciſa eſt cochlea mas, quae quidem cochlea inſeruit, iungendo inſtrumento meo, microſcopio, loco conſuetae lenticulae obiectiuae. Area circularis, ab hoc cylindro comprehenſa, duplici foramine pertuſa eſt; inferius, ſemicirculari *c*, cuius radius, radio areae aequalis; ſuperius, circulari *d*, cuius diameter diametri areae dimidia eſt (*). Poſteriori huic foramini inſeritur lens obiectiua *d*, quae in inſtrumento, quod nuper parari feci, focum habet, 5 aut 6 circiter linearum. Inferius annectitur huic parti articulatio A, cuius ope alteri parti, mox deſcribendae, iungitur, ſuperius vero brachium CB annexum gerit, verſus *e* perforatum, per quod foramen cochlea *fe*, Fig 6 tranſmittitur.

Secunda inſtrumenti pars, AB, Fig. 3. et 4, itidem circularis eſt, ſimilemque, ac prior, articulationem et brachium annexum habet. Anteriori ipſius ſuperficiei afferruminatum eſt ſpeculum planum *ab*, aut metallicum, aut vitreum, nihil enim refert, quale hoc

(*) Pro arcendis radiis, lentem iuſto obliquius permeantibus, conducit, vt a parte poſtica afferruminetur huic foramini tubulus orichalceus, eiusdem diametri cum foramine, $\frac{1}{2}$ aut $\frac{3}{4}$ poll. circiter longus.

hoc ſit. Speculum hoc in ſemicircularem elaboratum eſt figuram, ac tantae eſt magnitudinis, vt foramen ſemicirculare partis prioris, *c*, Fig. 1. et 2. exacte repleat. Eo vero in ſitu iunctum eſt ſpeculum *ab*, laminae AC, vt ſpeculi atque laminae ſuperficies ſuperius conuergant parumper, atque inferius diuergant, angulo 15 circiter aut 20 graduum. Supra ſpeculum hoc, foramine elliptico *c*, quantum fieri poteſt magno, pertunditur lamina AC, cuius ellipſeos axis maior verticalis, coniugatus, horizontalis eſt.

Iunguntur hae partes, Fig. 6, AB, AC, ope articuli A, ita vt forcipis inſtar brachia aut iungi, aut ſeparari a ſe inuicem queant. Per foramina nempe *f* et i, tranſit cochlea mas *fe*, parumper incurua, cui aptata eſt cochlea foemina *hg*, alis inſtructa, inter brachia vero DB, EC, interſeritur elater *mn*, vnde, prouti cochlea *hg* aut adducitur, aut relaxatur, pars AB, aut ad alteram AC accedit, aut ab ipſa recedit, ſimul vero inclinatio ſpeculi, parti AB iuncti, pro lubitu variatur.

Qua ratione hoc inſtrumentum microſcopio iungatur, euidenter ſatis ex Fig. 6. intuitu patet. Eo enim loco, cui inſeri ſolet in microſcopio vulgari lenticula obiectiua, iungitur, cochleae *ab*, Fig. 1. 2. ope, ita vt brachia verticaliter ſint erecta. Quo vero, qua ratione in ipſo inſtrumenti vſu procedendum ſit, luculenter pateat, Fig. 7 contemplemur. Diriguntur nempe radii ſolis, a lente collectiua, anteriori microſcopii ſolaris parti inſerta, in conum collecti, ita, vt conus radiorum ſolarium *cdba* incidat in medium ſpeculi

culi *mn*. Laxando tum, aut adducendo, cochleam *gb*, ea concilietur ſpeculo *mn* inclinatio, vt repercuſſi ab ipſo radii, incidant in obiectum, ad *e f* ſitum, atque ita diſponatur microſcopium, vt, quantum fieri poteſt, diſtincta ſolis imago formetur ad *ef*. Ab illuminato hac ratione obiecto redeuntes radii, ac incidentes in lenticulam obiectiuam *k*, tranſeuntes per foramen ellipticum *rs*, in aliquot pedum diſtantia, ſuper tabula alba nitidiſſimam formant obiecti picturam.

Binae ad manus eſſe debent laminae, tales, qualem exhibet Fig. 5. ABCD, quibus affigi poſſunt obiecta, altera nigra, ex ebeno, altera alba, ex ebore conſtans, pro diuerſitate coloris obiecti depingendi. Glutine iungere ſoleo his laminis obiecta, docuit enim me experientia, picturae elegantiam valde turbari, ſi aut lamina vitrea, aut tenui Talci folio, prouti alias fieri ſolet, contegatur; multoque nitidiores haberi imagines, ſi nudum exponatur radiis ſolaribus obiectum. Lamina iſta ABCD ita introducitur inter laminas *pr*, *qs*, Fig. 6. *pqrs* Fig. 5, vt inferius foraminis circularis *abcd* dimidium *abc* apertum relinquatur, radiique ſolares *ab*, *cd*, Fig. 7, libere ad ſpeculum *mn* pertingere queant. Superius vero foraminis *abcd* dimidium *adb*, a lamina ABCD, Fig 5. contegitur, laminaque affixum gerit obiectum ad *m*.

Etſi hoc meo additamento inſignem me elegantiſſimo inſtrumento conciliaſſe perfectionem, affeverere audeam, omnino tamen mereri videtur, vt pro ipſius perfectione vlterius adhuc ſtrenue laboretur. Ex aliquo tempore eapropter in mentem induxi, vniuerſam ipſius theoriam ad Optices principia data opera expendere, quod, an a quoquam hactenus factum ſit, ignoro. Differre autem iam cogor hoc negotium, vsque dum alii quidam, quos prae manibus habeo, labores abſoluti ſint, quod cum factum fuerit, non ſolum theoriae microſcopii ſolaris elaborationem, ſed et artificii cuiusdam, quod, prouti auguror, inſigniter adhuc perficere poteſt inſtrumentum, exactiorem deſcriptionem Academiae polliceor.

Breuem nihilo minus artificii huius expoſitionem adiungere ſtatim placet, quo in anteceſſum, quid, ex Clariſſ. Collegarum iudicio, de ipſo ſperandum ſit, explorem. Adhibemus hactenus microſcopio ſolari, lenticulam vnicam obiectiuam, aſt nonne nouas aliquas huic inſtrumento conciliare poſſumus perfectiones, ſi ad formandam imaginem plures adhibeamus lentes? Aliquam talem ex veſtigio indicare valeo. Notum eſt, lentis vnius ſolitariae campum repraeſentationis nullibi terminari, nulliſque limitibus definitis eſſe circumſcriptum. Euenit hinc, vt, quamdiu in microſcopio ſolari non niſi vnicam adhibemus lenticulam, praeter aream, obiectum comprehendentem, ac a ſolaribus radiis illuſtratam, quae directe oppoſita eſt lenticulae obiectiuae, etiam reliqua puncta, quaquauerſus a latere extra aream illuminatam ſita, ſimul depingantur. Sic autem non ſolum multum lucis inutilis in cameram obſcuram intromittitur, ſed etiam inelegans, oculosque ſpectatoris valde offendens, oritur ſpectaculum; puncta enim a latere ſita partim obſcure, cum non ſint ſatis illuminata, partim, ob valde obliquam radiorum

diorum incidentiam, admodum confuſe depinguntur. Si autem duabus vtamur lentibus, tuboque ipſas includenti inſeramus, vbi vtriusque lentis ſoci concurrunt, annulum circularem debitae magnitudinis, alia longe res eſt, tum enim campus admodum acute terminatur, nullique, niſi qui ad imaginem pingendam requiruntur, radii, cameram intrant. Inſigniter hac ratione iuuari poſſe picturarum, quae a microſcopio ſolari formantur, elegantiam, auguror; hanc enim ſolam ob rationem laternae magicae, duplici lente obiectiua praeditae, longe praeſtantiores inueniuntur iis, in quibus non niſi vnica lens ſola adhibetur. Certus itaque ſum, imaginum a microſcopio ſolari productarum elegantiam augeri inſigniter poſſe, ſi pluribus vtamur lentibus obiectiuis; an vero, quoad diſtinctionem quoque, aliquis exinde ſperari queat fructus, altioris aliquantum eſt indaginis, atque nec aſſerere, nec negare, ſtatim audeo, niſi poſtquam inſtrumenti theoriam penitus explorauero, quod alio loco ac tempore praeſtiturus ſum.

DISSERTATIO
DE EXPERIMENTO QVODAM MAGNETICO CELEBERR. DOMINI *DU FAY*, DESCRIPTO IN COMMENTARIIS ACAD. SCIENT. PARIS. A. MDCCXXX.

Auctore
F. V. T. AEPINO.

Tab, VI. *In recta interminata* DE, *Fig.* 1. *capiantur duo puncta* A, B, *quorum distantia* AB $=$ a. *Fingantur haec puncta agere secundum rationem distantiarum inuersam in punctum mobile* C *vtcunque assumtum, ea lege, vt punctum* A *repellat*, B *vero attrahat punctum* C; *sintque intensitates virium punctorum* A *et* B *aequales. Quaeritur vis, qua sollicitatur punctum* C, *in directione rectae* DE *parallela, a* C *versus dextram, aut versus* E.

Demissa perpendiculari CH ex puncto C in rectam DE, dictaque HC $=y$, AH $=x$, erit ex statica virium resolutione, vis, quam punctum A directe in punctum C exercet, ad vim, qua punctum C sollicitatur, in directione, rectae DE parallela, vti AC ad AH. Si ergo actio puncti A in punctum C, exhibeatur per $\frac{b}{AC}$, erit vis, qua pellitur punctum C versus E $= \frac{bx}{AC^2} = \frac{bx}{x^2+y^2}$. Simili ratione inuenitur vis, qua punctum B sollicitat punctum C, in directione DE $= \frac{b(a-x)}{BC^2} = \frac{b(a-x)}{(a-x)^2+y^2}$. Binae itaque vires, pun-

punctum C, in directione DE parallela, versus E vrgentes, simul sumtae, erunt $= \frac{bx}{x^2+y^2} + \frac{b(a-x)}{(a-x)^2+y^2}$ $= \frac{a^2bx - abx^2 + aby^2}{(x^2+y^2)((a-x)^2+y^2)}$.

Vt loca inueniantur, in quibus haec vis euanescit, ponendum est $a^2bx - abx^2 + aby^2 = 0$, vnde obtinetur $y^2 = x^2 - ax$. Descripta itaque hyperbola aequilatera, habente axin transuersum, rectam AB, atque vertices, puncta A et B, erit vterque huius hyperbolae ramus, AM, BN, ea proprietate praeditus, vt, si punctum C ponatur versari vbicunque in ipsius perimetro, ducaturque per punctum C recta FG, DE parallela, punctum C in directione rectae FG non magis in vnam, quam in alteram vrgeatur partem.

Euidens porro est, quamdiu punctum C in spatio interminato MABN, a recta AB ramisque hyperbolicis AM, BN comprehenso, reperitur, sollicitari istud perpetuo versus E, quam directionem supra tanquam positiuam assumsimus; quam primum autem punctum C in spatiorum interminatorum DAM, EBN, alterutrum intrat, vim, qua vrgetur, in negatiuam transire, hincque versus D directam esse.

Cogitetur, punctum C percurrere rectam interminatam FG, rectae DE parallelam, atque liquet, interea dum punctum C transit per rectae FG partem QP, inter binos hyperbolae ramos interceptam, vim, qua vrgetur punctum saepius dictum versus E, a *o* increscere, tum vero denuo vsque ad *o* decrescere debere, vnde consequens est, cadere inter puncta P et Q vnum aut plura puncta,

in

in quibus vis corpusculum C sollicitans sit maximum aut minimum quoddam.

Si porro punctum C a puncto P abeat versus G in infinitum, liquet, dum infinite distat a punctis A et B, actionem horum punctorum in punctum C euadere nullam. Vis itaque, qua punctum C sollicitatur versus F, interea dum a P in infinitum abit, a o increscit, et decrescendo denuo ad o reuertitur, vnde rursum in rectam indefinitam PG cadere debet vnum aut plura puncta, vbi vis, corpusculum C sollicitans, est maximum, aut minimum. Omnino simile ratiocinium valet pro recta QF.

Vt loca istorum maximorum, aut minimorum, inveniantur, consideretur y tanquam constans, et consueta methodus adhibeatur. Obtinetur sic differentiale vis punctum C vrgentis capiendo, atque istud ponendo $= 0$:

$$\begin{array}{llllll} x^5 - \tfrac{5}{2} a x^4 & - 2 y^2 x^3 & + 3 a y^2 x^2 & - 2 a^2 y^2 x & + \tfrac{1}{2} a^3 y^2 & = 0. \\ & + 2 a^2 x^3 & - \tfrac{1}{2} a^3 x^2 & - 3 y^4 x & + \tfrac{3}{2} a y^4 & \end{array}$$

ex qua aequatione resoluta dantur x, quae pro quovis y dato, vi maximae, aut minimae, respondent.

Si in aequatione ista y sumatur variabilis, definit ipsa lineam ea proprietate praeditam, vt, si in distantia quacunque $CH = y$ agatur recta indefinita FG, rectae AB parallela, recta haec FG secet lineam istam, iis in punctis, in quibus si versetur punctum C, maximam, aut minimam, ab actione punctorum

ctorum A et B, patiatur sollicitationem, in directione, rectae AB parallela.

Vt naturam huius lineae perspiciamus, annotamus primum, aequationem pro ipsa inuentam admittere diuisorem rationalem $x-\frac{a}{2}=0$. Linea itaque, quam consideramus, complexa est, ac praeter curuam quandam quarti ordinis, rectam IK, ex puncto medio rectae AB perpendiculariter erectam, comprehendit, quapropter dum punctum C in hac linea IK deprehenditur, perpetuo aut maximam aut minimam patitur sollicitationem, quod quidem etiam ex solo problematis intuitu, absque calculo, perspici potest.

Diuisa aequatione supra suppeditata per factorem $x-\frac{1}{2}a=0$, prodit aequatio quarti ordinis

$$\begin{array}{l} x^4+2ax^3+2y^2x^2-2ay^2x+a^2y^2=0. \\ \qquad\quad -a^2x^2 \qquad\qquad\quad +3y^4 \end{array}$$

quae definit curuam quarti ordinis, vna cum recta IK problemati nostro satisfacientem.

Cum ex intuitu problematis pateat, partem huius curuae a recta IK versus sinistram sitam, similem et aequalem esse debere parti, quae cadit versus dextram, facilis et expedita est huius aequationis resolutio. Sequitur nempe hinc, si n et m sint radices huius aequationis, reliquas duas fore $a-n$ et $a-m$. Vnde obtinentur hae quatuor aequationis nostrae radices:

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{4y^2+a^2}{4} + y\sqrt{4y^2+a^2}} = x^0$$
$$\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{4y^2+a^2}{4} + y\sqrt{4y^2+a^2}} = x'$$
$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{4y^2+a^2}{4} - y\sqrt{4y^2+a^2}} = x''$$
$$\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{4y^2+a^2}{4} - y\sqrt{4y^2+a^2}} = x'''$$

quarum aequationum quaeuis aliquem curuae ramum definit, quatuor vero iſti rami vniuerſam curuam conſtituunt.

Liquet porro, aequationes pro x^0 et x', et ſimiliter aequationes pro x'' et x''', ſuppeditare ramos perfecte ſimiles et aequales, poſitione ſolummodo differentes, vnde opus non eſt, niſi vt conſideremus aequationes pro x' et x''', quae quippe ſuppeditant dimidium curuae, a recta IK verſus ſiniſtram cadens.

Ramus in aequatione pro x' comprehenſus, ad x negatiua pertinet, et ex puncto A exeundo, ſemperque magis magisque ab axe recedendo, in infinitum abit. Ponendo nempe $y = 0$, fit $x' = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = 0$, ac praeterea quantitas $\sqrt{\frac{4y^2+a^2}{4} + y\sqrt{4y^2+a^2}}$ quantitate $\frac{a}{2}$ ſemper maior eſt, creſcenteque y continuo ſimul increſcit.

Alter ramus, ex aequatione pro x''' oriundus, itidem exit ex puncto A, aſt verſus x poſitiua inflectitur, et recedendo ab axe, pertingit ad rectam IK, in qua terminatur in puncto L, tali, vt ſit IL $= \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Ponendo nempe primum $y = 0$, fit $x''' = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = 0$. Deinde vero ponendo $y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, erit $x''' = \frac{a}{2}$, augendo

augendo autem y vltra limitem $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, fit x''' imaginarium, vnde ramus hic in puncto L terminatur.

Curua itaque quaesita ductum habet RBLAS, similisque eius pars, qualis deorsum, etiam supra axin sursum cadit, quod monuisse sufficit, cum sub considerationem nostram haec pars non cadat.

Ducta iam recta indefinita FG, axi AC parallela, duplex accidere potest casus: vel enim y, rectae FG respondens, minus est $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, vel hac quantitate maius. Primo casu quinque dantur puncta, in quibus fg curuam RBLAS et rectam IK secat, puncta nempe t, s, v, r, w, vnde si punctum C percurrere ponatur rectam fg a dextra versus sinistram, ad t erit vis, qua sollicitatur versus f, maxima, ad p nulla, ad s maxima versus g, ad v minima, ad r rursum maxima, ad q denuo nulla, tandemque ad w rursus maxima, ast iterum versus f directa.

Si iam vlterius crescere ponatur y, siue si recta fg motu sibi parallelo ab axe remoueatur, puncta intersectionum s, v, r, continuo ad se inuicem magis magisque accedunt, factoque $y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, siue transeunte recta fg per punctum L, inter se et cum puncto L confunduntur. Augendo vero y adhuc vltra limitem $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, puncta interfectionum, r et s, rectae fg, cum parte curuae BLA, fiunt imaginaria. A termino itaque $y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, vsque in infinitum, non cadit in spatium NBAM, nisi vnicum maximum, intersectione rectae FG cum recta IK, in puncto V, determinatum.

Valores maximorum et minimorum, de quibus hactenus locuti sumus, sine difficultate reperiuntur; non enim opus est, nisi vt valores ipsius x, maximis aut minimis respondentes, introducantur in formulam supra repertam,

$$\frac{a^2 b x^2 - a b x^2 + a b y^2}{(x^2 + y^2)((a - x)^2 + y^2)}$$

vim, qua punctum C sollicitatur, exprimentem. Reperitur hac ratione

I. Si $y < \frac{a}{2\sqrt{3}}$

minimum cadens ad $v = + \frac{ab}{\frac{a^2}{4} + y^2}$

maximum cadens ad $r = + \frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} - 2y)}$,

maximum cadens ad $w = - \frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} + 2y)}$

II. Si y vel $=$, vel $> \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

maximum cadens ad $V = + \frac{ab}{\frac{a^2}{4} + y^2}$

maximum cadens ad $W = - \frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} + 2y)}$

Ex harum formularum intuitu sine negotio patet, maximum positiuum, maximo negatiuo ipsi respondente, semper maius esse. Si enim primum consideremus casum, vbi $y < \frac{a}{2\sqrt{3}}$, maximum positiuum cadens ad r superat maximum negatiuum cadens ad w, quantitate $\frac{2b}{a}$. Deinde vero, si fuerit $y > \frac{a}{2\sqrt{3}}$, dico maxi-

maximum poſitiuum cadens ad V, fore itidem ſemper maius, maximo negatiuo cadente ad W. Facili nempe calculo demonſtratur, quantitatem $\frac{ab}{4y^2+a^2}$ quantitate $\frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2+a^2}+2y)}$ maiorem eſſe, modo ſit $y^2 > \frac{a^2(\sqrt{1943}-44)}{28}$, vnde a fortiori, prior quantitas poſteriorem certe ſuperat, ſi fuerit $y^2 > \frac{a^2}{12}$.

Corpuſculum C incluſum fingatur tubo $\alpha\beta$, cuius medium punctum occupet, ſitque punctum C, mobile quidem in tubo $\alpha\beta$, ſed non ſine difficultate quadam, fingaturque haec difficultas ſimilis eſſe frictioni, ita, vt, ſi ponatur difficultas haec $=\alpha$, vis particulam C vrgens effectum ſortiri queat nullum, niſi ipſa maior ſit α. Concipiatur denique, percurrere tubum $\alpha\beta$, cum corpuſculo ſibi incluſo, rectam FG, ea ſeruata lege, vt tubus $\alpha\beta$ perpetuo in ſitu rectae AB parallelo detineatur.

Dico iam 1) duci ſemper poſſe rectam aliquam GF vel gf, rectae DE parallelam, ea proprietate praeditam, vt ſi tubus $\alpha\beta$ vltra hanc rectam remoueatur a DE, actio punctorum A et B in punctum C impar ſit reſiſtentiae α ſuperandae, hincque effectum ſortiatur nullum.

Ponatur nempe maximum poſitiuum cadens ad V, ſiue $\frac{ab}{\frac{a^2}{4}+y^2}=\alpha$, atque erit $y=\sqrt{\frac{ab}{\alpha}-\frac{a^2}{4}}$, vbi α ita aſſumtum fingimus, vt reddat quantitatem y ſiue $\sqrt{\frac{ab}{\alpha}-\frac{a^2}{4}} > \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Fiat $IV=\sqrt{\frac{ab}{\alpha}-\frac{a^2}{4}}$, ac ducta per punctum V recta FG, rectae DE parallela, per se patet, si tubus $\alpha\,\beta$ percurrat rectam quandam, vltra FG a DE distantem, effectum oriri posse nullum, sed corpusculum C, tubo $\alpha\,\beta$ inclusum, ex loco suo non dimoueri. Si vero tubus saepius dictus percurrat aliquam rectarum, rectae DE propinquiorum, ac FG, dari punctorum A et B in corpusculum C aliquam actionem, itidem per se manifestum est.

Si vero calculus commonstret, α eiusmodi habere valorem, vt reddat formulam $\sqrt{\frac{ab}{\alpha} - \frac{a^2}{4}} < \frac{a}{4\sqrt{3}}$, ponatur maximum cadens ad r, aut s, siue $\frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} - 2y)} = \alpha$, quae aequatio suppeditat $y = \sqrt{\frac{ab^2}{4\alpha^2 a - 8ab}}$, sumtaque $\mathrm{I}v = \sqrt{\frac{ab^2}{4\alpha^2 a - 8ab}}$, ductaque recta fg per punctum v, rectae DE parallela, pro recta fg iam eadem valebunt, quae in casu praecedente pro recta FG locum habebant.

Sit iam 2.) in Fig. 2. recta FG ea, quae spatium, vbi actio in punctum C nullum habet effectum, separat a spatio, vbi aliquem producere debet effectum, (quae an cis, an vltra, punctum L, Fig. 1. cadat, iam perinde est,) et euidens quidem est, effectum sollicitationis, qua vrgetur corpusculum C, interea dum tubus $\alpha\,\beta$ percurrit cuiusdam rectarum, quae cadunt inter FG et DE, partem, inter binos hyperbolae ramos APM, BQN interceptam, in eo consistere, vt corpusculum C protrudatur versus tubi extremitatem β; in spatio enim isto sollicitatio positiua est, et versus G dire-

directa. Si vero tubus vlterius promoueatur, et tranſeat in ſpatium interminatum DAPF, vbi ſollicitatio fit negatiua, manifeſtum eſt, duplicem accidere poſſe caſum. Si nempe maximum negatiuum, in quod in ſpatio DAPF incidit corpuſculum C, maius ſit α, prior effectus deſtruitur, et corpuſculum C verſus tubi extremum oppoſitum α retrahitur; contrarium vero accidit, ſi maximum hoc negatiuum fuerit minus α.

Ponamus ea propter maximum negatiuum, in quod incidit corpuſculum C, ſiue $\frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2+a^2}+2y)} = \alpha$, ac erit ex hac formula $y = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{4\alpha^2 a + 8\alpha b}}$. Fiat $Iv \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{4\alpha^2 a + 8\alpha b}}$, quae quantitas ſemper minor eſt IV, ductaque recta fg, rectae DE parallela, per rectas fg, FG, vniverſum ſpatium diſtributum erit in tres partes interminatas DEfg, fgFG, et FGMN, ea lege, vt, ſi tubus $\alpha\beta$ percurrat rectam aliquam, rectae DE parallelam, in quouis modo dictorum ſpatiorum diuerſus producatur effectus. Namque

1) Si tubus $\alpha\beta$ pertranſeat ſpatium DEfg,
   - α) in ſpatio EBqg corpuſculum C propellitur verſus extremitatem α,
   - β) in ſpatio BqpA retrahitur verſus β; denique vero
   - γ) in ſpatio DApf rurſum verſus α retrorſum propellitur.

2) Si tubus $\alpha\beta$ percurrat ſpatium gfFG,
   - α) quamdiu reperitur in ſpatio gqQG corpuſculum C, ex loco ſuo non dimouetur,

β)

β) in ſpatio *qp*PQ propellitur verſus β,

γ) in ſpatio *fp*PF actio in punctum C nullum habet effectum, atque corpuſculum C a puncto β, verſus quod in ſpatio *qp*PQ propulſum erat, non dimouetur.

3) Si tubus tranſeat per ſpatium FGMN, actio punctorum A et B in corpuſculum C nullum habet effectum, vnde tubi medium perpetuo occupat.

Ex conſiderationibus hactenus prolatis, pure analyticis, combinatis cum principiis, ad quae theoriam magneticam deduxi, in *Tentamine* meo *Theoriae Electricitatis et Magnetismi*, profluit ſponte quaſi, explicatio phaenomeni cuiusdam magnetici valde mirabilis, cuius inventor eſt Ill. naturae ſcrutator, Celeb. *du Fay*, quodque propriis ipſius verbis deſcribere mihi liceat. "*Je rapporterai à cette occaſion une Expérience, qui ne ſe trouve dans aucun des Auteurs, qui ſont venus à ma connoiſſance; c'eſt que, ſi l'on gliſſe une aiguille à la diſtance d'environ deux lignes des armures d'une Pierre, ſans toucher à la Pierre, il n'importe pour cet effet qu'on la gliſſe du Nord au Sud, ou du Sud au Nord, ou même qu'on la tienne immobile pendant un inſtant, à quelque diſtance des armures; elle acquiert dans ces trois cas une direction ſemblable à celle, qu'elle auroit, ſi on la poſoit ſimplement ſur les armures de la Pierre, et qu'on la retirât enſuite parallelement à l'axe, et tout oppoſee à celle, qu'elle auroit contractée, ſi on l'avoit gliſſée d'un bout a l'autre ſur les deux armures de* *de la Pierre.* „ Vid. Memoires de l'Academie Roïale des Sciences l'année 1730. pag. 219. Edit. Amſtelod.

Repetens hoc experimentum, non ſolum mirabundus phaenomeni veritatem deprehendi, ſed ſimul quoque obſeruaui circumſtantias aliquas, Ill *du Fay* equidem, vt credere fas eſt, non incognitas, non tamen diſtincte ab ipſo enunciatas, quas adducere operae praetium iudico.

Sit in Fig. 3. ABCD magnes armatus, cuius poli artificiales ſint A et B. Aſſumtis aliquot filis, ex ferro molli conſtantibus, craſſitie, qualis eſt calami anſerini, circiter gaudentibus, longitudinis 4 aut 5 pollicum, quale in figura exhibetur per $\alpha\beta$, bina ſequentia inſtituebam tentamina:

I.) Fili extremo α applicabam polum B, atque magnetem per totam fili longitudinem producebam, ita vt polus B praecederet, A vero ſequeretur, vsque dum polus A ad extremum β perueniſſet; remotoque tum magnete, videbam filum $\alpha\beta$ magneticum factum fuiſſe ea lege, vt extremum α polo A, extremum β polo B homogeneum acquiſiuerit magnetismum.

II. Repetebam idem experimentum, vnica hac intercedente differentia, quod magnetem ab immediato cum filo $\alpha\beta$ contactu, interpoſito parallelipipedo ligneo EF, Fig. 4, arcerem, tumque deprehendebam:

α) Si diſtantia inter magnetem atque filum admodum parua erat, eundem oriri effectum, ac in experimento praecedente, vbi magnes filum actu contingebat. Si vero β) retentis reliquis experimenti circumſtantiis omnibus, magnetis a filo diſtantiam magis magisque adaugebam, perueniebatur tandem ad locum talem, vbi tentamen omnino contrarium ſortiebatur euentum. Fili nempe extremum α polo B, extremum β polo A homogeneum acquiſiuerat magnetismum.

Diſtantiae, in qua admiranda haec effectus experimenti commutatio contingebat, dimenſionem exactam eapropter non addo, quoniam pro circumſtantiarum varietate, magnis variationibus ipſam ſubiectam eſſe deprehendi.

Diſquiſitiones, antea a me prolatae, ad hocce tentamen ſine negotio adaptantur. Sint in Fig. 1. et 2, puncta A et B magnetis cuiusdam poli, et A quidem poſitiuus, B vero negatiuus ipſius polus. Tubi $\alpha\beta$ vices ſuſtineat filum ferreum magnetiſandum. C ſit fluidi magnetici quaedam particula, in filo ferreo $\alpha\beta$ reperiunda, quae dum ferri poros tranſit, difficultatem quandam experiatur, quae $= \alpha$, tandemque fingatur, actionem, qua poli A et B ſollicitant magnetici fluidi particulam C, exerceri ea lege, vt ſecundum inuerſam diſtantiarum rationem decreſcat, atque ſtatim patet, ſuperius tradita ratiocinia omnia huc trahi poſſe. Si itaque filum $\alpha\beta$ percurrat ſpatium $DEgf$, fluidum magneticum, poſt experimenti inſtitutionem verſus α condenſatum, verſus β rarefactum deprehendi debet. Si vero filum $\alpha\beta$, vltra rectam fg, a magnete remoueatur, atque tranſeat per ſpatium $fgGF$, prorſus con-

contrarius oriri debet euentus, atque abſoluto experimento fili extremum β, vltra quantitatem naturalem magnetico fluido repletum, extremum vero α infra hanc quantitatem euacuatum, obſeruabitur.

Non offendere poterit lectores, rite rem conſiderantes, quod fictas hypotheſes hic adſumſerim, quales ſunt, quod polorum magnetis, qui tentamini adhibetur, vim in puncta A et B coactam ſuppoſuerim, quodque exerceri magneticam attractionem et repulſionem ſecundum diſtantiarum rationem inuerſam, admiſerim. Satis enim liquet, quomodocunque haec omnia immutentur, prodituras perpetuo concluſiones, iis, quas ex fictis hypotheſibus elicui, quoad principaliores circumſtantias, omnino ſimiles, quod pro ſcopo, quem hic intendimus, abunde ſufficit.

Nouum in hac diſſertatione accipiunt ſpecimen naturae ſcrutatores, quantum theoria mea magnetica, in *Tentamine Theoriae Electricitatis et Magnetismi*, expoſita, cum phaenomenis difficilioribus, naturae conſuetudini ad primum intuitum contrariis, atque valde paradoxis, conſentiat. An itaque vanitatis reus agendus ero, ſi fatear, de die in diem me magis magisque perſuaſum euadere, hypotheſin admodum probabilem phaenomenorum magneticorum me orbi erudito propoſuiſſe?

ADDITAMENTVM

AD DISSERTATIONEM DE EXPERIMENTO MAGNETICO, CELEB. DN. *DU FAY*, CONTINENS NOVA EXPERIMENTA MAGNETICA DETECTA ET EXPLICATA.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Hoc praecipue ſingulare habent vis electrica et magnetica, quod perſaepe, phaenomenorum ab ipſis pendentium apparente quadam inconſtantia, naturae ſcrutatorem confundant. Dantur nempe caſus plurimi, vbi idem experimentum, aliquoties repetitum, diuerſos, immo interdum omnino contrarios producit effectus, etſi vel perſpicaciſſimus nullam, in ratione tentamen inſtituendi, detegere valeat circumſtantiarum varietatem, quae tanta eſſet, vt producendae mirabili huic in ſucceſſu varietati, par videri poſſet.

Ex quo methodo *Newtoniana* binas ſupra nominatas vires examinare incepi, ſaepe mihi contigit, vt experimentorum, miranda eiusmodi inconſtantia Philoſophis crucem figentium, enodationem reperirem, circumſtantiasque euoluerem, quae variabilitatis effectuum cauſae exiſtunt; ſique fateri licet, quod ſentio, hoc inter praecipua theoriae meae praeſidia numero, quod plurimis eiusmodi phaenomenis paradoxis tam apte conſentiat, vt, ſi non pro ipſa naturae hypotheſi, pro tali

tali tamen ſine dubio habenda ſit, quae naturae hypotheſi tuto ſubſtitui poteſt.

Praecedens diſſertatio, cuius haec additamentum eſt, tale exemplum ſiſtere potuit; aſt contigit mihi nuper, adhuc vlterius in disquiſitionibus iſtis progredi, atque theoriae meae magneticae innixa ſyntheſi, talia detegere phaenomena, quae, niſi cauſam ipſorum iam antea cognitam habuiſſem, in ſtuporem coniicere me debuiſſent.

Recordari poterunt lectores ex diſſertatione praecedenti phaenomenorum et ratiociniorum, quorum expoſitionem ipſa continet, vnde absque noua rei explicatione, filum ratiociniorum meorum denuo prehendere, et vlterius progredi licebit.

Sit vniuerſum ſpatium, cis rectam indefinitam ED (Fig. 2. Diſſert. praeced.) ſitum, per rectas fg, FG, ita diſtributum, vti in Diſſertatione praecedente expoſitum eſt, atque liquet, ſi punctorum A et B diſtantia imminuatur, reliquis circumſtantiis omnibus non mutatis, conſequens inde eſſe debere, quod recta fg propius propiusque in indefinitum accedat ad rectam DE, tranſeuntem per puncta A et B. Cum nempe rectae fg diſtantia Iv ab AB ſit $= \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{4\alpha^2 a + 8\alpha b}}$, haec vero quantitas, modo reliquarum literarum valor non mutetur, decreſcat, decreſcente a, de propoſiti veritate facile conſtat. Tab. VII.

Quodſi haec ad magnetem adplicemus, obſeruandum eſt, puncta, in quae magneticorum polorum vis vniuerſa coacta fingitur, non in ipſas polorum extremitates cadere, ſed ipſis ad aliquam profunditatem immerſa eſſe. Quodſi ergo detur magnes M, Fig. 1. cuius poli ſunt valde propinqui, fieri poteſt, vt recta fg rectae AB propinquior ſit, quam polorum extremitates mn, pq. Quodſi ergo filum ferreum $\alpha\beta$ polis vel maxime ad ipſum vsque contactum admoueatur, atque more *du Fayano* ſtringatur, nihilominus is eſſe debet experimenti euentus, vt extremum fili α polo B, extremum vero β polo A, euadat homogeneum, qui effectus *du Fayanis* experimentis omnino aduerſatur.

Anſam praebuere haec ratiocinia experimento ſequenti:

Exper. I.

„Magnetes artificiales, AC, DB, Fig. 2. ae„qualium circiter virium, tabulae impoſui, vt ad C, D, „ſe contingerent, verſus A et B vero aliquantum „diuaricarent, polique A et B eſſent heterogenei. Plura „poſtea fila $\alpha\beta$, eiusdem longitudinis, ſex circiter „pollicum, ex eodem filo ferreo, modice duro, cras„ſitiei, qualis eſt calami anſerini, abſcidi, tumque

1) „diuaricare feci extrema magnetum A, B, tres „circiter pollices, filoque $\alpha\beta$ ad polos admoto, „ſtrictoque more *du Fayano*, eundem ac Dn. *du* „*Fay*, reperi euentum; abſoluta nempe operatione „erat extremum α polo A, β vero polo B homoge„neum.

2)

2) „Tum ſenſim ſenſimque parallelipipedorum di-„varicationem imminuebam, et experimentum, qua-„vis vice nouum adhibendo filum $\alpha\beta$, repetebam, „ſubque initium effectus idem inde reſultare pergebat, „vt antea. Aſt cum eatenus imminuta eſſet diſtantia, „vt poli A et B non niſi dimidium circiter pollicem „a ſe inuicem diſtarent, euentum omnino contrarium „ſortiebatur tentamen. Iam enim α polo B, β vero „polo A, homogeneum monſtrabat magnetismum.

Quanta, quaeſo, admiratione percelli debuiſſet naturae ſcrutator, qui, per innumera tentamina, de experimenti *du Fayani* veritate conuictus, fortuito in magnetem incidiſſet, qui omnino contrarium dediſſet, euentum?

Pergamus vlterius. Pendet rectae fg ab AB diſtantia (Fig. 2. Diſſert. praeced.) itidem ab α, ſic vt reliquis valoribus non mutatis, cum α decreſcente, diſtantia haec adaugeatur. Cum nempe ſit ipſa $= \mathrm{I}v = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{4\alpha^2 a + 8\alpha b}}$, ex ipſo formulae intuitu de propoſiti veritate conſtat. Quodſi itaque duo diuerſa fila ferrea, alterum mollius, alterum durius adhibeantur, ſic, vt poſteriori maius reſpondeat α, ac priori, fieri poterit, vt pro duriori filo recta fg vltra polorum extremitates mn, pq, Fig. 1. pro molliori vero citra ipſas cadat, tumque mollius filum, polis admotum et more *du Fayano* ſtrictum, euentum *du Fayanum*, durius vero, omnino contrarium monſtrabit, ſic vt idem magnes, ſub iisdem apparenter circumſtantiis, mox hunc, huuc, mox oppofitum praeftet effectum. Etiam haec ratiocinia per experientiam comprobata funt.

Exper. II.

„Aliqua filorum $\alpha\beta$, qualia in experimento „praecedente adhibueram, ignitionis ope, admodum „mollia reddebam. Admotis tum virgarum AC, BD, „extremis AB, Fig. 2. ita propinque ad fe inuicem, „vt in filo duriori, prouti in exper. I. accidebat, „effectum *du Fayano* contrarium producerent, feruata „hac diftantia, filum molle tentamini adhibebam, „tumque euentus, experimento *du Fayano* penitus „confentiens, deprehendebatur.

Simile quid, quale in hoc experimento contingit, alia quoque ratione obtineri poteft, vt nempe idem magnes in bina ferramenta diuerfa prorfus contrarium edat effectum. Commonftrat hoc, fequens experimentum:

Exper. III.

„Filum ferreum molle $\alpha\beta$ (Fig. 2. Differt. „praeced.) ftringatur magnete, more *du Fayano*, eliga-„tur vero talis rectae, quam percurrit $\alpha\beta$, ab AB „diftantia, vt haec recta fita quidem fit in fpatio „*gf*DE, aft rectae *fg* fit fatis propinqua, et filum „$\alpha\beta$ iam ea ratione magnetificabitur, vt extremum α „polo A, extremum β polo B euadat homogeneum. „Tum filum, ex duriori conftans ferro, prioris loco „adhibeatur, et percurrat eandem rectam, ac filum

„mol-

„ mollius, et modo rite electa ſit diſtantia, quod vno „alteroque vago tentamine facile obtinetur, euentus „erit omnino contrarius, extremum nempe α durio- „ris huius fili erit polo B, et ipſius extremum β „polo A homogeneum.

Cauſa huius phaenomeni per ſe in oculos incurrit, ac in eo ſita eſt, quod antea monſtraui, rectam fg pro α minori magis, pro α maiori minus, diſtare ab AB.

Erat tandem in experimento *du Fayano* perinde, ſiue filum $\alpha\beta$ a dextra verſus ſiniſtram, ſiue a ſiniſtra verſus dextram ducebatur. Incidi autem, per exactius theoriae examen, in methodum, qua effici poteſt, vt contrarius exoriatur euentus, ſi filum contrariis promoveatur directionibus. Vniuerſum myſterium huc redit, vt magnetem nobis paremus, cuius alter polus inſigniter fortior ſit, quam alter, quod magnetum artificialium ope efficere facillimum eſt.

Pro diſtinctiore rei comprehenſione aliqua indigemus analyſi. Supponamus puncta A et B, Fig. 3. prius repellere, poſterius attrahere punctum C, viribus, quae ſunt vti diſtantiae AB, BC, inuerſe, aſt intenſitates virium, quas vtrumque punctum exſerit, ſint diuerſae, ita vt prior habeat indicem intenſitatis b, poſterior c. Sit $DA = DB = a$, $Dm = x$, $Cm = m$. Si iam quaeratur vis, qua punctum C vrgetur in directione rectae AB parallela verſus E, ſimili ratiocinio, quo in Diſſertatione praecedente vſus ſum, pervenitur ad formulam

$$\frac{(c-b)x^3-(c+b)ax^2-(c-b)(a^2-m^2)x+(c+b)(a^3+am^2)}{x^4+2(m^2-a^2)x^2+(m^4+a^4)}.$$

 Per-

Percurrente puncto C rectam GF, AB parallelam, cum x variato ſimul variatur haec ſollicitatio, et interdum nulla euadit. Vt puncta, vbi hoc contingit, determinentur, fractionis numerator euaneſcere ponendus eſt, vnde obtinetur, poſito breuitatis cauſa $\frac{c+b}{c-b} = \mu$, haec aequatio trium dimenſionum:

$$x^3 - \mu a x^2 - (a^2 - m^2) x + \mu (a^3 + a m^2)$$

quod indicio eſt, tria dari poſſe puncta rectae FG, vbi ſi conſtituitur corpuſculum D, ſollicitatio in directione rectae AB parallela verſus E fit nulla.

Vlterius haec aequatio, ex noto Theoremate *Harrioti*, ſeu *Carteſii*, quamdiu μ eſt poſitiuum, i. e. quamdiu c eſt maius b, binas habet radices poſitiuas, vnamque negatiuam; ſin vero μ ſit negatiuum, quod accidit ſi c fuerit minus b, inuerſo ordine binas poſſidet radices negatiuas, atque vnicam poſitiuam.

Quicunque horum caſuum a nobis examini ſubiiciatur, perinde eſt; nam ratiocinia omnia vtrinque penitus ſimilia ſunt, quapropter eum enodaſſe caſum, vbi μ eſt poſitiuum, ſufficit.

Dico iam, cum aequatio, quam conſideramus, neceſſario aliquam habeat radicem realem, eſſe hanc negatiuam ipſius radicem, quam quippe aſſero, modo μ ſit poſitiuum, quoscunque de caetero acquirant valores μ, a, et m, nunquam fieri poſſe imaginariam. Euaneſcat nempe x, vt punctum C conſiſtat ad Q, atque ſollicitatio, quam patitur, erit $= \frac{(c+b)(a^3+a m^2)}{m^4+a^4}$,

hinc

hinc poſitiua; fiat vero $x = -\infty$, atque erit ſollicitatio $= \frac{(c-h)}{-\infty}$, hinc negatiua. Interea itaque, dum x ab o in $-\infty$ variatur, ſollicitatio ex poſitiuo in negatiuum tranſit, vnde ad x negatiua neceſſario aliquando fit o, cum, prouti ex problematis intuitu facile patet, tranſitus ex poſitiuo in negatiuum per infinitum, locum hic habeat nullum.

Quod ad binas reliquas radices poſitiuas, pro varia literarum μ, a, et m determinatione, mox reales ſunt, mox vero imaginariae euadunt. Cum nempe pro $x = +\infty$, ſollicitatio fiat $= \frac{(c-b)}{+\infty}$, hinc poſitiua, nihil inde concludere licet, niſi quod interea, dum x a o ad $+\infty$ variatur, ſollicitationem aut plane non, aut 2 vicibus euaneſcere, vnde disiunctiue ſolum aſſerere licet, binas radices poſitiuas, aut vtramque eſſe realem, aut vtramque imaginariam.

Tres itaque hic diſtinguendi ſunt caſus. Sunt nempe hae radices poſitiuae,

1) aut imaginariae,
2) aut reales et aequales,
3) aut reales et inaequales.

In caſu priori liquet, etſi ſollicitatio, quam patitur punctum C, verſus x negatiua, fiat aliquando negatiua, ita vt dirigatur verſus F, non tamen idem contingere verſus x poſitiua, ſed ex hac parte ipſam perpetuo in infinitum perſiſtere poſitiuam. Quodſi itaque A et B ſint magnetis cuiusdam poli, atque filum ferreum, per quod fluidum magneticum mouetur difficultate $=\alpha$, percurrat rectam GF, a finiſtra verſus x negatiua, ſitque R punctum illud vbi ſollicitatio euaneſcit, et in negatiuum tranſit; euidens eſt, quamdiu filum reperitur in parte interminata rectae GF, verſus ſiniſtram puncti R ſita, perpetuo tendere polos magneticos ad magnetiſandum filum ea ratione, vt extremum α polo B, extremum β polo A, fiat homogeneum. Quam primum vero punctum C intrauit in partem interminatam rectae GF, ad dextram puncti R ſitam, penitus contrarium accidit; tendunt nempe tunc poli ad eum producendum ſtatum, vt extremum α polo A, extremum β polo B, fiat homogeneum. Modo itaque difficultas α vtraque ſollicitatione maxima, poſitiua nempe et negatiua, minor ſit, is inde reſultare debet effectus, vt, poſtquam ductum eſt filum a ſiniſtra verſus dextram, ea ratione magnetificetur, vt extremum α polo A, extremum β polo B, fiat homogeneum. Quodſi vero filum contraria directione, a dextra nempe verſus ſiniſtram, incedat per rectam GF, oppoſitum oriri debere effectum, aeque facile patet; tum enim extremum α polo B, extremum β polo A, euadere debet homogeneum.

Prorſus ſimilis eſt ratio caſus ſecundi, vbi binae aequationis radices poſitiuae ſunt reales quidem, aſt aequales. Si nempe ad R cadat radix negatiua, ad S vero binae poſitiuae, etſi ſollicitatio ad S fiat nulla, non tamen in negatiuum tranſit, ſed ſtatim in poſitiuum reuertitur. Cum itaque ad ſiniſtram puncti R in infinitum, ſollicitatio perpetuo ſit poſitiua, (aut vt ex-

exactius loquamur, nunquam ſit negatiua) ad dextram vero puncti R perpetuo ſit negatiua, pro hocce caſu intermedio penitus eadem valent, ac pro caſu antecedente.

Tertius denique caſus, vbi binae aequationis radices poſitiuae ſunt reales et inaequales, peculiarem diſquiſitionem requirit. Sint puncta, ad quae cadunt radices, negatiua ad R, binae vero poſitiuae ad S. et T. Iam ergo ſollicitatio ad ſiniſtram puncti R non perpetuo eſt poſitiua, ſed aliquando inter S et T negatiua euadit, vltra punctum T vero in poſitiuum reuertitur.

Hoc iam caſu, dico

1) ſi capiatur x poſitiuum $= Q\gamma$, Fig. 3. cui reſpondet ſollicitatio negatiua, atque tum capiatur ex altera parte x negatiuum, $Q\delta$, poſitiuo $Q\gamma$ aequale, fore ſollicitationem, quae puncto δ reſpondet, et negatiuam, et maiorem ſollicitatione, quae ad punctum γ pertinet.

Fingatur nempe primum intenſitas virium punctorum A et B aequalis eſſe, ſic vt tam puncto A quam B reſpondeat idem intenſitatis index b, atque ſub hac hypotheſi, erit

ſollicitatio

in puncto $\gamma = \frac{b \times Bn}{B\gamma^2} - \frac{b \times An}{A\gamma^2} = M'$

in puncto $\delta = \frac{b \times Ap}{A\delta^2} - \frac{b \times Bp}{B\delta^2}$ ſiue

$$\frac{b \times Bn}{B\gamma^2} - \frac{b \times An}{A\gamma^2} = N'.$$

Quapropter, ſi intenſitatis index vtrobique ſit idem, erunt M' et N' vtrumque negatiuum, et $M' = N'$.

 Si

Si vero iam ipſius B index intenſitatis creſcat, et fiat $= c = b + \mu$, erit

ſollicitatio

in puncto $\gamma = \frac{b \times Bn}{B\gamma^2} + \frac{\mu \times Bn}{B\gamma^2} - \frac{b \times An}{A\gamma^2} = M''$;

in puncto $\delta = \frac{b \times Ap}{A\delta^2} - \frac{b \times Bp}{B\delta^2} - \frac{\mu \times Bp}{B\delta^2} = N''$

ex quarum formularum comparatione patet, eſſe M'' minus M', aſt N'' maius N', vnde de aſſerti mei veritate facile conſtat.

Concludo autem hinc,

2) maximam ſollicitationem negatiuam, cadentem ad x poſitiua, neceſſario minorem eſſe, maxima ſollicitatione negatiua, quae cadit ad x negatiua.

Cadat nempe prius maximum ad γ, et facto $Q\delta = Q\gamma$, erit ſollicitatio ad δ maior, maxima ſollicitatione negatiua, quae cadit ad x poſitiua. Vnde id quod demonſtrandum ſumſeram, ſi ad δ cadat maximum, immediate, ſi non ad hoc punctum cadat, a fortiori concluditur.

Sit maximum negatiuum cadens ad $\gamma = P$, id vero, quod cadit ad δ, $= Q$; et cum ſit $P < Q$, rurſus manifeſtum eſt, fieri poſſe, vt α, quod exprimit difficultatem, quacum fluidum magneticum mouetur per filum magnetificandum, cadat inter P et Q, ſitque priori maius, et poſteriori minus. Tum itaque, ſi filum percurrat rectam GF, circa Q quidem ita magnetificabitur, vt extremum α polo B, extremum β polo A, fiat homogeneum; aſt effectus hic deſtruetur, ſi filum incedat a ſiniſtra verſus dextram, et abſoluta operatione erit extremum fili α polo A, prouti

extre-

extremum β polo B, homogeneum. Deſtructio vero eiusmodi, ſi filum percurrat rectam GF a dextra verſus ſiniſtram, locum nullatenus habebit. Subnatum eſt ex hiſce ratiociniis experimentum ſequens, quo veritas ipſorum abunde comprobatur.

Exper. IV.

„Tres magnetes artificiales AB, CD, EH, in „tabula ita diſpoſui, vti monſtrat Fig. 4. ea nempe „ratione, vt virgae CD, EH ſe contingerent per to„tam ſuam longitudinem polis ſuis homologis, tertia „vero virga in contrario ſitu diſpoſita eſſet, ita vt „polus B, polis H et D, eſſet heterogeneus. Diuari„cabant hae virgae ita vt diſtantia polorum B et HD „aliquot eſſet pollicum. Poſtquam per aliquot vaga „tentamina omnes circumſtantias rite adaptaueram, „ducto filo $\alpha\beta$ a ſiniſtra verſus dextram, extremum „α polo B, extremum β polo HD, homogeneum „reddebatur. Contraria vero aſſumta directione, con„trarius oriebatur effectus, et extremum α polo HD, „extremum β polo B, homologum nanciſcebatur ma„gnetismum.

COGI-

COGITATIONES
DE AGGERIBVS CONSTRVENDIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

De hoc argumento, quod ampliſſimam rerum maritimarum notitiam poſtulat, commentari nunquam mihi in mentem veniſſet, niſi nuper mihi quaeſtio eo ſpectans cum controuerſia coniuncta eſſet propoſita, vt ſententiam meam aperirem, quandoquidem totum negotium ad Geometriam et Analyſin reuoluebatur. Res autem ita ſe habebat: In prouincia maritima extra aggerem, quo littora ſunt munita, fluctibus tantum terrae erat aggeſtum, vt nouo aggere in-
Tab.VIII. cludendum videretur. Vetus agger ſecundum lineam
Fig. 1. AGKE erat ductus, et terra extrinſecus adiecta vsque ad lineam ABCDE patebat, ſecundum quam etiam nouus agger longitudine 1128 perticarum erat extructus: quo pacto totum ſpatium inter veterem nouumque aggerem interiectum in lucrum ceſſit. Conſtitit hoc opus 120000 Thal. et ſingularum linearum menſurae in perticis in figura ſunt adſcriptae.

2. Iam iis, qui hunc aggerem extrui curauerant, obiectum eſt, cum hic agger ſecundum lineam inflexam ABCDE eſſet ductus, a puncto A ad E, eum

eum potius secundum arcum circularem, qui aequale spatium concluderet, duci oportuisse, subductoque calculo compertum est, hunc aggerem 76 perticis breuiorem futurum fuisse, ita vt idem commodum minoribus impensis, quot scilicet extructio aggeris 76 perticas longi requirit, obtineri potuisse. Cuius obiectionis ratio huic fundamento inniti videbatur, quod linea circularis inter omnes alias tantumdem spatii includentes sit breuissima, ac damnum quidem, ex neglectu huius principii natum, ad 9600 Thal. aestimabatur. Controuersia igitur in hoc versabatur, num ab Architecto, vel iis, qui hunc aggerem extrui curauerunt, restitutio huius damni iure exigi queat? Atque hic quiden videndum est, vtrum Architectus ob ignorantiam istius principii geometrici peccauerit, an ob alias caussas ab eo recedere sit coactus?

3. Principium autem hoc Geometricum non solum nunc quidem est notissimum, sed etiam naturae nostrae quasi ingenitum, vt mihi nullo modo persuadere queam, eius ignorationem in caussa fuisse, cur Architectus aggerem secundum lineam inflexam ABCDE duxerit. Si haec circuli proprietas ipsi incognita fuisset, cur aggerem non potius iuxta rectam AE duxit? vel si maius spatium complecti voluit, cur non latera polygoni cuiusdam regularis est secutus? Mihi quidem extra omne dubium positum videtur, si in aggere ducendo quicquam Architecti arbitrio esset relictum, illum certe neutiquam hunc ductum sinuosum ABCDE electurum fuisse. Ei quidem, postquam ab

A ad B peruenit, non in mentem incidere non potuit, aggerem recta ab B ad E potius, quam per partes intus vergentes BC, CD, DE continuare; quippe quo modo breuiori aggere adeo maius spatium inclusisset. Quin hoc nouerit Architectus, quantumuis caeterum fuisset Geometriae rudis, dubitari nullo modo potest.

4. Causa igitur subesse debet, cur potius tractum hunc infractum ABCDE, quam alium quemcunque, in extruendo aggere sit secutus; atque, etsi omnes rationes Architecturae maritimae mihi non sunt perspectae, haec tamen causa manifesto in figura terrae fortuito aggestae sita videtur: agger enim constitui nequit, nisi vbi terra supra fundum maris iam satis fuerit eleuata et confirmata. Loca igitur B, C, D ita videntur comparata, vt regio exterior, ob defectum fundi sufficientis, aggerem recipere non potuerit. Quodsi ergo rectas lineas AB, BC, CD, DE vt limites spectemus, vltra quos aggerem remouere non liceat, causa manifesta est, ob quam Architectus aggerem iuxta has ipsas lineas constituerit; simulque perspicuum est, arcum illum circularem, qui aequale spatium includeret, hic adhiberi non potuisse, propterea quod alicubi vltra hos limites extendi debuisset.

5. Si enim vspiam hos limites transgredi licuisset, equidem non in hoc Architectum reprehenderem, quod aggerem non secundum arcum circularem, qui aequale spatium includeret, duxerit, sed potius ideo, quod non eiusmodi arcum super corda AE constituerit,

rit, qui etiam maius ſpatium eſſet complexus. Etſi enim hoc modo agger maiorem longitudinem eſſet nactus, tamen ſumtuum incrementum maiori terrae ſpatio in vſum conuertendo fortaſſe fuiſſet compenſatum: ad hoc ſcilicet diiudicandum ſumtus in ſingulas perticas, quibus agger longior redditur, impendendi vna cum ſorte pecuniae ad conſeruationem requiſitae cum pretio ſingularum perticarum quadratarum, quibus terra vſui futura augetur, comparari debent, vt pateat, vtrum augmentum impenſae ſuperet lucri augmentum nec ne? Haec disquiſitio ibi erit neceſſaria, vbi ſatis terrae firmae fuerit aggeſtum, vt quousque libuerit aggerem extendere liceat, qui caſus, etſi a propoſito abhorrere videatur, eum tamen accuratius euoluere haud erit incongruum.

Problema I.

Si extra aggerem APQB tantum terrae a fluctibus maris ſit cumulatum, vt a terminis A et B nouum aggerem ADB quousque libuerit, protendere liceat, definire eum aggerem, qui maximum lucrum ſit allaturus. Fig. 2.

Solutio.

6. Primum obſeruo, huic aggeri nouo ab A ad B ducendo figuram arcus circularis tribui oportere: quamcunque enim aliam figuram haberet, ſemper arcus circularis dari poſſet aequale ſpatium includens, qui, cum ſit breuior, minoresque propterea ſumtus poſtulet, illi omnino erit anteferendus. Sit igitur ADB huiusmodi arcus circularis centrum habens in O, ponaturque

que cordae semissis $AC = BC = c$, et anguli ad O semissis $AOD = BOD = \omega$; tum vero sit spatium inter aggerem veterem APQB et rectam AB inclusum $= bb$, quod partem constituit spatii extructione noui aggeris acquirendi. Hinc ergo fit radius circuli $OA = \frac{c}{\sin.\omega}$ et $OC = \frac{c\cos.\omega}{\sin.\omega}$; ideoque arcus $ADB = \frac{2c\omega}{\sin.\omega}$, qui dat longitudinem aggeris. Porro erit sector $AOB = \frac{cc\omega}{\sin.\omega^2}$, indeque auferendo triangulum $AOB = \frac{cc\cos.\omega}{\sin.\omega}$, relinquitur area segmenti $ADBA = \frac{cc(\omega - \sin.\omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^2}$, ita vt spatium terrae aggere ADB acquisitum sit $= \frac{cc(\omega - \sin.\omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^2} + bb$.

7. Ponamus, has mensuras in perticis dari, sintque sumtus ad vnam perticam aggeris exstruendam $= m$ Thal. comprehensis simul impensis ad conseruationem, quos casu exposito vidimus exsurgere ad 100. Thal. Pretium autem vnius perticae quadratae terrae statuatur $= n$ Thal. quod vtique ab indole terrae et fructibus inde percipiendis pendet. Hinc lucrum deductis impensis erit

$$\frac{ncc(\omega - \sin.\omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^2} + nbb - \frac{2mc\omega}{\sin.\omega},$$

quod, nisi valorem obtineat positiuum, praestabit res in pristino statu relinquere, neque exstructionem noui aggeris suscipere, quoniam sumtus superarent fructus inde sperandos.

8. Incipiamus a casu, quo agger recta ab A ad B ducitur; et quia terrae spatium fit $= bb$, et longitudo aggeris $= 2c$, erit lucrum $= nbb - 2mc$. Nisi ergo sit $bb > \frac{2m}{n}c$, seu $c < \frac{nbb}{2m}$, hic nouus agger dam-

damnum afferret: ex quo duo caſus euoluendi occurrunt; alter, quo $bb < \frac{2m}{n}c$, alter vero quo $bb > \frac{2m}{n}c$; illo caſu non ſine damno agger rectus iuxta cordam AB duceretur, hoc vero lucrum quidem praeberet, ſed videndum eſt, num aggerem ſecundum arcum circularem incuruando non maius lucrum obtineri queat. Priori vero caſu, quo agger rectus cum manifeſto damno eſt coniunctus, inquiri conuenit, an aggeris curuatura damnum non minuatur, ac tandem in lucrum conuerti queat?

9. Sit igitur $bb < \frac{2m}{n}c$, et videamus, ſi angulus AOB $= 2\omega$ minimus capiatur, vtrum detrimentum minuatur nec ne? Ponamus, ſi $\omega = z$, et ob $\omega = z + \frac{1}{6}z^3$ et $\operatorname{cof.}\omega = 1 - \frac{1}{2}zz$, erit $\operatorname{ſin.}\omega \operatorname{cof.}\omega = z - \frac{1}{2}z^3$, vnde aeſtimatio lucri oritur:

$$\tfrac{2}{3}nccz + nbb - 2mc(1 + \tfrac{1}{6}zz)$$

quae ergo maior eſt praecedente $nbb - 2mc$, quoniam $\frac{2}{3}nccz > \frac{2}{6}mczz$ ob z minimum. Certum ergo eſt, incuruatione aggeris damnum diminui; an autem continuo minuatur? differentiatio noſtrae formulae oſtendet, quae praebet:

$$\frac{2nccd\omega(\operatorname{ſin.}\omega - \omega\operatorname{cof.}\omega)}{\operatorname{ſin.}\omega^3} - \frac{2mcd\omega(\operatorname{ſin.}\omega - \omega\operatorname{cof.}\omega)}{\operatorname{ſin.}\omega^2} \text{ — ſeu}$$

$$\frac{2cd\omega(\operatorname{ſin.}\omega - \omega\operatorname{cof.}\omega)}{\operatorname{ſin.}\omega^3}(nc - m\operatorname{ſin.}\omega)$$

Cum igitur ſit $\operatorname{ſin.}\omega > \omega\operatorname{cof.}\omega$, aeſtimatio lucri aggerem magis incuruando continuo creſcit, quamdiu eſt $nc > m\operatorname{ſin}\omega$.

10. Si esset $nc < m$, seu $c < \frac{m}{n}$, lucrum eousque tantum cresceret, quoad fieret sin. $\omega = \frac{nc}{m}$, tum vero, vltra augendo angulum ω, iterum decresceret, neque vero perpetuo. Nam cum anguli ω, postquam vltra rectum, quo casu arcus ADB fit semicirculus, fuerit acutus, sinus iterum decrescat, quando infra valorem $\frac{nc}{m}$ decreuerit, lucri aestimatio iterum crescere incipit, idque deinceps continuo ac tantopere, vt tandem in infinitum augeatur. Quare lucrum dato quouis maius obtineri potest, dummodo angulus ω maxime obtusus capiatur, et arcus ADB segmentum maius maximi circuli constituat. Atque hoc in genere valet, siue fuerit $bb > \frac{2m}{n}c$, siue $bb < \frac{2m}{n}c$, ita vt neutro casu verum maximum locum habeat, sed lucrum continuo maius consequi liceat.

11. Sin autem aliae circumstantiae prohibeant, quo minus segmentum ADB vltra semicirculum augeri possit, tum semper, dummodo fuerit $c > \frac{m}{n}$, aggerem in figuram semicirculi duci conueniet, vt maximum lucrum, vel certe minimum damnum, obtineatur. Tum autem posito π pro semicircumferentia circuli, cuius radius est $= 1$, vt $\frac{1}{2}\pi$ angulum rectum denotet, ob $\omega = \frac{1}{2}\pi$, fiet lucri aestimatio:

$$\tfrac{1}{2}\pi ncc + nbb - \pi mc$$

quae expressio, nisi sit negatiua, aggerem maxime lucrosum indicat, contra autem praestabit, nullum plane aggerem extruere. At si fuerit $c < \frac{m}{n}$, statuatur $c = \frac{m}{n}$sin. ζ, ac tum segmentum ADB minus esse oportet semicirculo,

culo, ſumendo angulum $AOD = \zeta$; vt lucrum maximum vel damnum minimum euadat. Poſito autem $\omega = \zeta$ et $c = \frac{m}{n}\,\text{ſin.}\,\zeta$ fit lucri aeſtimatio:

$$\frac{ncc(\zeta - \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)}{\text{ſin.}\,\zeta^2} + nbb - \frac{2mc\zeta}{\text{ſin.}\,\zeta} = nbb - \frac{mc}{\text{ſin.}\,\zeta}(\zeta + \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)$$

ſeu $= nbb - \frac{mm}{n}(\zeta + \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)$.

Niſi ergo ſit $bb > \frac{mm}{nn}(\zeta + \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)$ nequidem aggerem ſine damno extruere licet: niſi arcus ſemicirculo maiores admittantur.

12. Haec igitur ſunt fere obſeruanda, quando terra aggeſta nullos limites ponit, vltra quos aggerem extendere non liceat, qui caſus, cum nunquam locum habere poſſit, quandoquidem nunquam aggerem quaſi in infinitum extendere conceditur, reuertor ad ipſam quaeſtionem propoſitam, vbi ratio terrae extra veterem aggerem adiectae non permittit, vt agger vsquam vltra limites per lineas AB, BC, CD, DE deſignatos producatur. Atque hoc quidem caſu manifeſtum eſt, nouo aggere maiorem terrae quantitatem cingi non poſſe, quam quae figura eſt repraeſentata; hocque ſpatium aliter in vſum conuerti non poſſe, niſi agger ſecundam ipſos illos limites extruatur; vtcunque enim ab iis recedatur, quoniam non extra eos vagari licet, ſemper minor terrae portio includetur. Quare ſi Architecto propoſitum fuerit, tantum terrae includere, quantum fieri licet, neceſſario aggerem iuxta ipſos limites extruere coactus fuit, neque quicquam in hoc opere ipſi vitio verti poteſt. Tab. VIII. Fig. 1.

13. Hic

13. Hic autem alia quaestio meo quidem iudicio grauissima oritur, an non vtilius fuisset, aliquid de campo includendo remittere, et aggerem intra limites praescriptos ita ducere, vt deductis impensis aggeris a pretio terrae acquisitae lucrum idque maximum obtineretur. Quaeritur scilicet eiusmodi aggeris constructio, qui si breuior sit, quam linea limitum ABCDE, p perticis, spatium autem includat minus quam id, quod intra limites illos contineretur, qq perticis quadratis, vt lucrum ex diminutione aggeris natum, quod valet mp Thal. maxime superet damnum ob diminutionem terrae ortum, quod aestimatur nqq Thal. seu vt $mp-nqq$ fiat maximum. Quem in finem, vt res generaliter ac dilucide pertractetur, sequentia problemata euoluam.

Problema 2.

Fig. 3. Si limites, vltra quos aggerem protendi non liceat, sint rectae AB et BC, in B datum angulum constituentes, determinare rectam PQ, ita vt, si agger iuxta rectas AP, PQ, QC ducatur, quo pacto quidem terrae spatium PBQ perit, maximum tamen lucrum obtineatur.

Solutio.

14. Quodsi loco aggeris ABC aggere APQC vtamur, in eius longitudine tot perticas lucramur, quot excessus laterum $BP+BQ$ iunctim sumtorum supra latus PQ exhibet, quod ergo in expensis lucrum praebet $=m(BP+BQ-PQ)$ Thal. Contra vero in campo

campo includendo amittimus tot perticas quadratas, quot continet area trianguli PBQ, cuius pretium ad $n.\Delta PBQ$ Thal. eſt conſtituendum. Lineam rectam ergo PQ ita duci oportet, vt haec quantitas $m(BP+BQ-PQ)-n.\Delta PBQ$ maximum valorem adipiſcatur.

15. Ponamus angulum $ABC=\beta$, qui datur, ſintque lineae quaeſitae $BP=x$, et $BQ=y$, erit $PQ=\sqrt{}(xx-2xy\cos.\beta+yy)$ quae breuitatis gratia dicatur $=z$, et area trianguli PBQ fit $=\frac{1}{2}xy\sin.\beta$; vnde his longitudinibus x et y in perticis expreſſis, habetur lucrum ad pecuniam reductum $=m(x+y-z)$ $-\frac{1}{2}nxy\sin.\beta$ Thal. quod maximum eſt reddendum. Vnde, cum ſit

$$dz=\frac{x\,dx-y\,dx\cos.\beta-x\,dy\cos.\beta+y\,dy}{z},$$

prout vel x vel y vt variabilis tractatur, hae duae aequationes eliciuntur:

$$m\left(1-\frac{x+y\cos.\beta}{z}\right)-\tfrac{1}{2}ny\sin.\beta=0$$

$$m\left(1+\frac{x\cos.\beta-y}{z}\right)-\tfrac{1}{2}nx\sin.\beta=0.$$

16. Quodſi illa per x, haec vero per y, multiplicetur, differentia ad hanc perducit aequationem:

$$m\left(x-y-\frac{xx+yy}{z}\right)=0=m(x-y)\left(1-\frac{x-y}{z}\right).$$

Cum igitur fieri nequeat $1=\frac{x+y}{z}$, ſeu $z=x+y$, neceſſe eſt, ſit $x=y$, ſeu $BP=BQ$, quam quidem conditionem ipſa quaeſtionis natura ſtatim ſuppeditare potuiſſet, cum nulla ſit ratio, cur linea BP et BQ inaequales capi deberent. Sit ergo $y=x$, et quia tum

 ſit

fit $z = \sqrt{(2xx - 2xx\cos.\beta)} = 2x\sin.\frac{1}{2}\beta$, alterutra illarum aequationum abit in hanc formam:

$$m\left(1 + \frac{\cos.\beta - 1}{2\sin.\frac{1}{2}\beta}\right) - \frac{1}{2}nx\sin.\beta = 0,$$

feu $m(1 - \sin.\frac{1}{2}\beta) = \frac{1}{2}nx\sin.\beta$,

vnde fit $x = \frac{2m(1-\sin.\frac{1}{2}\beta)}{n\sin.\beta} = \frac{m(1-\sin.\frac{1}{2}\beta)}{n\sin.\frac{1}{2}\beta\cos.\frac{1}{2}\beta}$,

fiue $x = \frac{m}{n\sin.\frac{1}{2}\beta}\sqrt{\frac{1-\sin.\frac{1}{2}\beta}{1+\sin.\frac{1}{2}\beta}} = \frac{m\,\mathrm{tang.}(45^\circ - \frac{1}{4}\beta)}{n\sin.\frac{1}{2}\beta}$

17. Problemati ergo ita fatisfit, vt capiatur:

$$BP = BQ = \frac{2m(1-\sin.\frac{1}{2}\beta)}{n\sin.\beta},$$

fiquidem lineae BA et BC fuerint maiores, fin autem hae lineae fint minores, tum euidens eft, rectarum BP et BQ alteram breuiori aequalem capi oportere, vnde altera per eandem methodum definietur. Atque hoc modo, fi limites habeant plures angulos, finguli refecari poterunt, fiquidem extus fint verfi, qui anguli enim intus vergunt, vt C et D in fig. 1, ii hanc operationem non admittunt, quin etiam deinceps nouos angulos ad P et Q ortos fimili modo fubtendere licebit, quae operatio fi continuetur, tandem agger figuram quafi curuilineam confequetur, quae omnium maximam vtilitatem apportabit. Eam autem circuli arcum fore manifeftum eft, quem ftatim fequenti modo determinare poterimus.

Pro-

Problema 3.

18. Si limites, vltra quos aggerem protendi non licet, ſint rectae AB et BC, in B datum angulum facientes, determinare eam aggeris figuram APSQC, qua maximum lucrum obtineatur. Tab. VIII. Fig. 4.

Solutio.

Primo patet, vt ante, partes a limitibus reſciſſas BP et BQ aequales eſſe debere, dummodo ipſae lineae BA et BC ſatis ſint longae, vt huiusmodi partes mox definiendas contineant, quod quidem hic aſſumo; ſi enim altera, vel vtraque, breuior fuerit, hic caſus peculiarem euolutionem poſtulat. Tum vero etiam patet, lineam curuam PSQ fore circularem, quam totam intra limites contineri neceſſe eſt; eius ergo centrum erit in recta BO, angulum B biſecante.

Ponamus itaque angulum $ABC = 2\beta$, vt ſit ſemiſſis $ABO = CBO = \beta$; tum vero ſtatuatur $BP = BQ = x$, erit $PR = QR = x\,\text{ſin.}\,\beta$ et $BR = x\,\text{coſ}\,\beta$, vnde conficitur area trianguli $PBQ = xx\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\beta$. Ponatur porro anguli POQ ſemiſſis $BOP = BOQ = \omega$, erit radius circuli $PO = QO = \frac{x\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\omega}$, et $OR = \frac{x\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$, hincque ipſe arcus $PSQ = \frac{2x\omega\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\omega}$, et ſector $PSQO = \frac{xx\omega\,\text{ſin.}\,\beta^2}{\text{ſin.}\,\omega^2}$, vnde, cum ſit triangulum $POQ = \frac{xx\,\text{ſin.}\,\beta^2\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$, fit area ſegmenti $PSQP = \frac{xx\,\text{ſin.}\,\beta^2}{\text{ſin.}\,\omega^2}(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega)$ et trilinei $BPSQB = xx\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\beta - \frac{xx\,\text{ſin.}\,\beta^2}{\text{ſin.}\,\omega^2}(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ}\,\omega)$.

Quod ſi iam agger non iuxta ipſos limites ABC, ſed lineam mixtam APSQC ducatur, in longitudine

 aggeris

aggeris lucramur $PB + QB - PSQ = 2x - \frac{2x\omega \,\text{fin.}\beta}{\text{fin.}\omega}$, quod lucrum valet $2mx(1 - \frac{\omega \,\text{fin.}\beta}{\text{fin.}\omega})$ at in campo perdimus trilineum $BPSQB$, quod damnum valet $nxx(\text{fin.}\beta \,\text{cof.}\beta - \frac{\text{fin.}\beta^2}{\text{fin.}\omega^2}(\omega - \text{fin.}\omega \,\text{cof.}\omega))$. Nunc igitur exceffus lucri fupra damnum maximus reddi debet, vnde ob binas variabiles x et ω binas fequentes nancifcimur aequationes:

$$\text{I. } m(1 - \frac{\omega \,\text{fin}\,\beta}{\text{fin.}\omega}) - nx(\text{fin.}\beta \,\text{cof}\,\beta - \frac{\text{fin.}\beta^2}{\text{fin.}\omega^2}(\omega - \text{fin.}\omega \,\text{cof.}\omega)) = 0$$

$$\text{II. } -\frac{2mx\,\text{fin.}\beta}{\text{fin.}\omega^2}(\text{fin.}\omega - \omega\,\text{cof.}\omega) - \frac{2nxx\,\text{fin.}\beta^2}{\text{fin.}\omega^3}(\omega\,\text{cof.}\omega - \text{fin.}\omega)) = 0$$

feu $\text{II. } -\frac{2x\,\text{fin.}\beta}{\text{fin.}\omega^3}(\text{fin.}\omega - \omega\,\text{cof.}\omega)(m\,\text{fin.}\omega - nx\,\text{fin.}\beta) = 0.$ Ex hac pofteriori, quia fieri nequit $\text{fin.}\omega - \omega\,\text{cof.}\omega = 0$, fit $m\,\text{fin.}\omega = nx\,\text{fin.}\beta$, feu $x = \frac{m\,\text{fin.}\omega}{n\,\text{fin.}\beta}$, qui valor, in priori fubftitutus, praebet

$$m(1 - \frac{\omega\,\text{fin.}\beta}{\text{fin.}\omega}) - m(\text{cof.}\beta\,\text{fin.}\omega - \frac{\text{fin.}\beta}{\text{fin.}\omega}(\omega - \text{fin.}\omega\,\text{cof.}\omega)) = 0,$$

feu $\text{fin.}\omega - \omega\,\text{fin.}\beta - \text{cof.}\beta\,\text{fin.}\omega^2 + \omega\,\text{fin.}\beta - \text{fin.}\beta\,\text{fin.}\omega\,\text{cof.}\omega = 0$, quae, per $\text{fin.}\omega$ diuifa, dat:

$$1 - \text{cof.}\beta\,\text{fin.}\omega - \text{fin.}\beta\,\text{cof.}\omega = 0, \text{ feu } 1\,\text{fin.}(\beta + \omega)$$

vnde concludimus, fore $\beta + \omega = 90^\circ$, feu $\omega = 90^\circ - \beta$, ita vt angulus BPO fit rectus, ideoque arcus PSQ a limitibus AB et BC tangatur: ex quo totus arcus PSQ intra limites cadit, quemadmodum natura rei poftulat.

Cum igitur fit $\omega = 90^\circ - \beta$, erit $BP = BQ = x = \frac{m\,\text{cof.}\beta}{n\,\text{fin.}\beta} = \frac{m}{n\,\text{tang.}\beta}$, feu $x\,\text{tang.}\beta = PO = \frac{m}{n}$, ita vt $\frac{m}{n}$ perticae femper dent radium circuli PSQ, iuxta quem aggerem duci oportet, qui arcus cum limites tangere debeat,

beat, tota constructio est facilis. In recta enim BO, angulum ABC bisecante, id punctum O capi debet, e quo perpendiculum in alterum limitem demissum OP fiat $=\frac{m}{n}$, eritque O centrum circuli, et OP eius radius.

Tum autem sumtis $BP=BQ=\frac{m\,cos.\beta}{n\,cos.\beta}$, erit arcus $PSQ=\frac{m}{n}(\pi-2\beta)$ denotante π semicircumferentiam et 2β arcum circuli, angulum ABC metientis, sinu toto existente $=1$, vnde, lucrum ex aggeris diminutione ortum, est $=\frac{mm}{n}(2\cot.\beta-\pi+2\beta)$ Thal. Damnum autem, ob diminutionem spatii inclusi natum, est $=\frac{mm}{n}(\cot.\beta-\frac{1}{2}\pi+\beta)$, quod lucri semissi aequatur, ita vt totum lucrum sit $=\frac{mm}{n}(\beta+\cot.\beta-\frac{1}{2}\pi)$ Thal.

Coroll. 1.

19. Quo maior ergo est angulus $ABC=2\beta$, eo minores fiunt partes rescindendae $BP=BQ$, et plane euanescunt, si ille angulus ad duos rectos excrescat. Hinc quo obtusior fuerit angulus ABC, eo minus hac correctione est opus.

Coroll. 2.

20. At si angulus ABC fuerit acutus, ideoque β semirecto minor, partes rescindendae $BP=BQ$ maiores fiunt, quam $\frac{m}{n}$, hocque casu imprimis necesse erit, aggerem intra limites contrahi; quia alias ingentes sumtus frustra impenderentur.

Coroll. 3.

21. Quo facilius pro quouis angulo ABC constructio aggeris maxime conueniens perspiciatur, hanc tabellam subiungo:

Angulus ABC	Partes rescindendae $BP = BQ$	Diminutio aggeris	Diminutio terrae inclusae	Lucrum in pecunia
10°	11,430052 $\frac{m}{n}$	19,89304. $\frac{m}{n}$	9,94652. $\frac{m^2}{n^2}$	9,94652. $\frac{mm}{n}$
20	5,671282. $\frac{m}{n}$	8,55004 $\frac{m}{n}$	4,27502. $\frac{mm}{nn}$	4,27502. $\frac{mm}{n}$
30	3,732051. $\frac{m}{n}$	4,84611. $\frac{m}{n}$	2,42305. $\frac{mm}{nn}$	2,42305. $\frac{mm}{n}$
40	2,747477 $\frac{m}{n}$	3,05149 $\frac{m}{n}$	1,52575 $\frac{mm}{nn}$	1,52575. $\frac{mm}{n}$
50	2,144507. $\frac{m}{n}$	2,02008 $\frac{m}{n}$	1,01004 $\frac{mm}{nn}$	1,01004. $\frac{mm}{n}$
60	1,732051. $\frac{m}{n}$	1,36970 $\frac{m}{n}$	0,68485 $\frac{mm}{nn}$	0,68485. $\frac{mm}{n}$
70	1,428148. $\frac{m}{n}$	0,93643. $\frac{m}{n}$	0,46821. $\frac{mm}{nn}$	0,46821. $\frac{mm}{n}$
80	1,191754. $\frac{m}{n}$	0,63817. $\frac{m}{n}$	0,31909. $\frac{mm}{nn}$	0,31909. $\frac{mm}{n}$
90	1,000000. $\frac{m}{n}$	0,42920. $\frac{m}{n}$	0,21460. $\frac{mm}{nn}$	0,21460. $\frac{mm}{n}$
100	0,839099. $\frac{m}{n}$	0,28193 $\frac{m}{n}$	0,14097. $\frac{mm}{nn}$	0,14097. $\frac{mm}{n}$
110	0,700207. $\frac{m}{n}$	0,17868. $\frac{m}{n}$	0,08934. $\frac{mm}{nn}$	0,08934. $\frac{mm}{n}$
120	0,577350 $\frac{m}{n}$	0,10750 $\frac{m}{n}$	0,05375 $\frac{mm}{nn}$	0,05375. $\frac{mm}{n}$
130	0,466308. $\frac{m}{n}$	0,05995. $\frac{m}{n}$	0,02997. $\frac{mm}{nn}$	0,02997. $\frac{mm}{n}$
140	0,363970. $\frac{m}{n}$	0,02981. $\frac{m}{n}$	0,01490. $\frac{mm}{nn}$	0,01490. $\frac{mm}{n}$
150	0,267949. $\frac{m}{n}$	0,01230 $\frac{m}{n}$	0,00615. $\frac{mm}{nn}$	0,00615 $\frac{mm}{n}$
160	0,176327. $\frac{m}{n}$	0,00358. $\frac{m}{n}$	0,00179 $\frac{mm}{nn}$	0,00179. $\frac{mm}{n}$
170	0,087488. $\frac{m}{n}$	0,00044. $\frac{m}{n}$	0,00022. $\frac{mm}{nn}$	0,00022. $\frac{mm}{n}$
180	0,000000. $\frac{m}{n}$	0,00000. $\frac{m}{n}$	0,00000. $\frac{mm}{nn}$	0,00000. $\frac{mm}{n}$

Coroll. 4.

22. Tota haec determinatio pendet a pretio aggeris, vnam perticam longi, quod m Thaleros posuimus, et a pretio vnius perticae quadratae agri, quod n Thal. sumsimus, quae duo pretia prouti variauerint, exstructio aggeris maxime idonea inde determinationem consequitur.

Scholion 1.

23. Casu ergo proposito, quo angulus B est fere angulus rectus, ductum aggeris ita intra hunc angulum statui conueniet, vt resciſſis rectis $BP = BQ = \frac{m}{n}$ pertic. a P ad Q arcus circuli ducatur, quem rectae BP et BQ tangunt: haecque constructio tanto vtilior erit, quam si agger secundum ipsos limites duceretur, vt lucrum futurum sit $= \frac{2146}{10000} \cdot \frac{mm}{n}$ Thal. Cum igitur, vti vidimus, vna pertica aggeris constet 100 Thal. si perticam quadratam agri aestimemus ad 1 Thal. vt sit $m = 100$ et $n = 1$, abscindi oportet $BP = BQ = 100$ pert. aggerque a P ad Q per arcum circularem PSQ extruatur; sicque lucrum obtinebitur $= 2146$ Thal. Haec scilicet constructio maxime praeferenda est ei, qua agger secundum ipsos limites PB et QB ad ipsum angulum B vsque produceretur; minor quidem terrae portio hoc modo includitur, deficiens 2146 perticis quadratis, quarum pretium 2146 Thal aestimatur: at agger hoc modo breuior fit $42\frac{92}{100}$ perticis, quae sumtum $= 4292$ Thal. requirent, vnde lucrum obtinetur 2146 Thal. Circa reliquos angulos C et D, quoniam intus vergunt, nulla emendatio locum habet, vtcunque enim agger a Q et E intra hos limites

mites conſtitueretur, non ſolum minor campus concluderetur, ſed etiam agger longior euaderet. Vnde Architectus ideo tantum eſt reprehendendus, quod aggerem vsque ad angulum extus vergentem B extenderit, ſicque ſumtus inutiles 2146 Thal. erogarit, quos euitare licuiſſet; verum haec ſolertia ab homine Geometriae ſublimioris experte non eſt exigenda.

Scholion 2.

24. Comparemus etiam caſum, quo agger ſecundum ipſam rectam AE duceretur, cum caſu, quo iuxta limites ABCDE eſt ductus, viſuri, vtrum lucrum, an damnum, inde fuiſſet expectandum. Hoc autem modo agger breuior prodiiſſet 86 perticis, vnde ſumtuum diminutio fuiſſet 8600 Thal. Periiſſet autem omnis terra, inter limites ABCDE et rectam AE contenta, quae cum ſit 44237 perticarum quadratarum, damnum totidem Thalerorum eſſet aeſtimandum, vnde agger iuxta limites ductus praeſtat aggere ſecundum rectam AE ducto, diſcrimine exiſtente 35637 Thal. Verum, vti iam vidimus, magis expedit arcus PSQ a limitibus recedere, quam ipſos limites ſequi, lucro exiſtente 2146 Thal. Hoc modo tota aggeris longitudo foret 1085 perticarum, cuius extructio, vti poſuimus, poſtulat 108500 Thal. ac nunc quidem videndum eſt, an agri ſic acquiſiti quantitas, quae eſt ſpatium inter veterem aggerem AGKE et nouum APSQCDE, ſuperet 108500 perticas quadratas nec ne? ſi enim minor eſſet, praeſtitiſſet omnino extructione noui aggeris ſuperſedere; eatenus enim tantum

hoc

hoc opus suscipere operae pretium fuisset, quatenus quantitas terrae acquisitae superasset 108500 perticas quadratas, siquidem pretium vnius perticae quadratae ad vnum Thalerum constituatur. Praeterea vero etiam perpendendum est, extructo nouo aggere, veterem aggerem nullos amplius sumtus ad conseruationem requirere; cuius commodi ratio etiam in aestimatione lucri est habenda: impensae scilicet noui aggeris tanto minores sunt censendae. Cum igitur agger secundum ipsos limites sit extructus, qui ad 1128 perticas porriguntur, dummodo maior terrae quantitas quam 112800 pert. quadratarum fuerit acquisita, lucrum inde est comparatum, quod etsi non fuerit maximum, tamen Architecto vitio verti non potest, atque perpetuo extructio nouorum aggerum secundum haec principia diiudicanda videtur, postquam tam sumtus in singulas aggeris perticas, quam pretium cuiusque perticae quadratae fuerit constitutum.

Scholion. 3.

25. Reuertamur ad nostrum problema, quo limites duabus rectis AB et BC contineri assumsimus, ac perpendamus casum, quo altera harum duarum rectarum, puta BC, minor est quam pars abscindenda, quae supra est inuenta $= \frac{m}{n}\cot.\beta$, existente altera $BA > BC$. Atque hic facile perspicitur, arcum circuli per ipsum punctum C transire debere; secet is ergo alteram in P, ac pariter euidens est, rectam PB huius arcus tangentem esse debere; si enim non tangeret, a puncto quodam

 rectae

rectae BA a B remotiori duci poſſet ad C arcus rectam BA tangens, aequale ſpatium ab angulo reſcindens, quae cum aggerem breuiorem daret, vtique eſſet praeferenda. Manente ergo angulo $ABC = 2\beta$, ſit recta $BC = b$, et quaeſita $BP = x$: Ducta PO ad BP normali, ſit O centrum arcus PSC, vnde OR cordam CP biſecans ſimul angulum COP biſecabit, et ad CP erit normalis. Statuatur angulus $COR = POR = \omega$, erit $CPB = \omega$, et $PCB = 180° - 2\beta - \omega$, vnde colligitur $BP = x = \frac{b\,\text{ſin.}\,(2\beta + \omega)}{\text{ſin.}\,\omega}$ et $CP = \frac{b\,\text{ſin.}\,2\beta}{\text{ſin.}\,\omega}$, vt ſit $PR = \frac{b\,\text{ſin.}\,2\beta}{2\,\text{ſin.}\,\omega}$, et $PO = \frac{b\,\text{ſin.}\,2\beta}{2\,\text{ſin.}\,\omega^2}$, atque $OR = \frac{b\,\text{ſin.}\,2\beta\,\text{coſ.}\,\omega}{2\,\text{ſin.}\,\omega^2}$. Hinc prodit arcus $PSC = \frac{b\,\omega\,\text{ſin.}\,2\beta}{\text{ſin.}\,\omega^2}$, et ſector $OPSC = \frac{b\,b\,\omega\,\text{ſin.}\,2\beta^2}{4\,\text{ſin.}\,\omega^4}$, vnde, ablato triangulo $OCP = \frac{bb\,\text{ſin.}\,2\beta^2\,\text{coſ.}\,\omega}{4\,\text{ſin.}\,\omega^3}$, relinquitur ſegmentum $CSPC = \frac{b\,b\,\text{ſin.}\,2\beta^2}{4\,\text{ſin.}\,\omega^4}(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega)$. Cum iam ſit $BC + BP = b\left(1 + \frac{\text{ſin.}\,(2\beta + \omega)}{\text{ſin.}\,\omega}\right)$, diminutio aggeris eſt $= b\left(1 + \frac{\text{ſin.}\,(2\beta + \omega)}{\text{ſin.}\,\omega} - \frac{\omega\,\text{ſin.}\,2\beta}{\text{ſin.}\,\omega^2}\right)$; et ob aream trianguli $CBP = \frac{1}{2} b x\,\text{ſin.}\,2\beta = \frac{b\,b\,\text{ſin.}\,2\beta\,\text{ſin.}\,(2\beta + \omega)}{2\,\text{ſin.}\,\omega}$, diminutio campi includendi $= \frac{b\,b\,\text{ſin.}\,2\beta}{4\,\text{ſin.}\,\omega^4}(2\,\text{ſin}\,\omega^3\,\text{ſin.}(2\beta + \omega) - \text{ſin.}\,2\beta\,(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega))$. Quare lucrum erit:

$$mb\left(1 + \frac{\text{ſin.}\,(2\beta + \omega)}{\text{ſin.}\,\omega} - \frac{\omega\,\text{ſin.}\,2\beta}{\text{ſin.}\,\omega^2}\right) - \tfrac{1}{4} n b b\,\text{ſin}\,2\beta\left(\frac{2\,\text{ſin.}\,(2\beta + \omega)}{\text{ſin.}\,\omega} - \frac{\text{ſin.}\,2\beta\,(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\omega^4}\right),$$

cuius differentiale nihilo aequatum et per $\phi\,\text{coſ.}\,\phi - \text{ſin}\,\phi$ diuiſum praebet $n\,b\,\text{ſin.}\,2\beta = 2\,m\,\text{ſin.}\,\omega^2$, vnde ſit $PO = \frac{m}{n}$ et

$$\text{ſin.}\,\omega = \sqrt{\frac{nb\,\text{ſin.}\,2\beta}{2\,m}} = \sqrt{\frac{nb\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\beta}{m}}, \text{ et } x = \frac{b\,\text{ſin.}\,(2\beta + \omega)}{\text{ſin.}\,\omega},$$

vbi, cum ſit $b < \frac{m\,\text{coſ.}\,\beta}{n\,\text{ſin.}\,\beta}$, erit $\text{ſin.}\,\omega < \text{coſ.}\,\beta$ ſeu $\omega < 90 - \beta$ ideo-

ideoque $BP > BC$. Hinc ſequitur, ſi eſſet $BA < BP$ tum arcum circuli per ambo puncta A et C duci conuenire, vt rectam BA tangat; tum ſcilicet magis lucrum obtinere non licet.

Problema 4.

26. Si limites, quos aggerem transgredi non oportet, tribus lineis rectis AB, BC, CD conſtent, definire aggeris conſtructionem maxime lucroſam. Fig. 6.

Solutio.

Sit, vt ante, m pretium aggeris vnam perticam longi, et n pretium vnius perticae quadratae agri, ponatur angulus $ABC = 2\beta$ et angulus $BCD = 2\gamma$, ac ſi fuerit $BC > \frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$ ſolutionem praecedens problema ſuppeditat. Primum enim circa B abſcindantur portiones $BP = BQ = \frac{m}{n}\cot\beta$, et circa C portiones $CR = CS = \frac{m}{n}\cot.\gamma$; deſcribanturque, tam per puncta P et Q, quam per R et S, eodem radio $= \frac{m}{n}$ pert. bini arcus circulares PQ et RS limites tangentes; quo facto aggerem ſecundum lineam mixtam APQRSD duci conueniet. Hoc modo maximum lucrum acquiretur, quod maius erit, quam ſi agger iuxta ipſos limites duceretur, exceſſu exiſtente:

$$\frac{mm}{n}(\beta + \gamma + \cot.\beta + \cot.\gamma - \pi);$$

aggeris enim longitudo diminuetur quantitate:

$$\frac{2m}{n}(\beta + \gamma + \cot.\beta + \cot.\gamma - \pi) \text{ pert.}$$

 at

at agri inclusi spatium minuitur quantitate:

$$\frac{mm}{nn}(\beta + \gamma + \cot.\beta + \cot.\gamma - \pi) \text{ pert. II.}$$

Quodsi lineae BA et CD vel alterutra earum minor fuerit quam portio inde resecanda, puncta P et S in A et D capi oportet, et arcus PQ et SR semper eodem radio $= \frac{m}{n}$ pert. describendi tantum lineam BC tangent. Hoc casu non opus est, vt sit $BC > \frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$ sed sufficit, si BC non fuerit minor quam BQ et CR, quippe quae partes BQ et CR minores erunt quam casu praecedente. Si alteruter angulorum B et C intus vergat, in eo nulla correctio locum habet, sed tantum angulus extus vergens arcu erit subtendendus.

Si fuerit praecise $BC = \frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$, puncta Q et R conuenient, prodibitque vnus arcus continuus PQRS limites tangens, iuxta quem aggerem construi oportet. Sin autem recta BC minor fuerit quam $\frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$ neque rectae BA et CD tam sint paruae, vt praecedens solutio locum habere posset, sequenti modo solutio eruetur:

Fig. 7. Cum euidens sit, aggerem intra rectam BC cadere, is etiam maximi proprietate gaudebit, si rectae AV et BV ad concursum V productae limites constituerent. Erit autem angulus $V = 2\beta + 2\gamma - 180^\circ$; vnde posita recta $BC = b$, vt sit $b < \frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$ pert. erit $BV = \frac{b \sin. 2\gamma}{\sin.(2\beta + 2\gamma - 180^\circ)} = -\frac{b \sin. 2\gamma}{\sin.(2\beta + 2\gamma)}$ et $CV = -\frac{b \sin. 2\beta}{\sin.(2\beta + 2\gamma)}$.

Tum

Tum capiatur $VP=VS=\frac{m}{n}\cot.(\beta+\gamma-90^\circ)=-\frac{m}{n}\mathrm{tang}.(\beta+\gamma)$ et per puncta P et S radio $=\frac{m}{n}$ pert. ducatur arcus circuli PQRS, limites AB et CD in P et S tangens, qui dabit ductum aggeris. Quodsi ponamus $b=\frac{\lambda m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma)=\frac{\lambda m \sin.(\beta+\gamma)}{n \sin.\beta \sin.\gamma}$ vt sit $\lambda<1$, reperitur:

$$BP=\frac{m}{n}(\lambda \cot.\beta-(1-\lambda)\mathrm{tang}.(\beta+\gamma))$$

$$CS=\frac{m}{n}(\lambda \cot.\gamma-(1-\lambda)\mathrm{tang}.(\beta+\gamma)).$$

Quantum autem lucrum hoc modo obtineatur, ita cognoscetur: Cum sit

$$VP+VS-PQRS=\frac{2m}{n}(\beta+\gamma-\mathrm{tang}.(\beta+\gamma)-\pi) \text{ et}$$

$$VPQRSV=\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma-\mathrm{tang}.(\beta+\gamma)-\pi)$$

tum vero $BV+CV-BC=-\frac{b(\sin.2\beta+\sin.2\gamma-\sin.(2\beta+2\gamma))}{\sin.(2\beta+2\gamma)}$

seu $BV+CV-BC=-\frac{2\lambda m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma+\mathrm{tang}.(\beta+\gamma))$

$$=-\frac{2\lambda m}{n}\cot.\beta\cot.\gamma\,\mathrm{tang}.(\beta+\gamma)$$

qua expressione inde ablata, prodit aggeris diminutio:

$$PB+BC+CS-PQRS=\frac{2m}{n}(\beta+\gamma+\lambda\cot.\beta+\lambda\cos.\gamma$$
$$-(1-\lambda)\mathrm{tang}.(\beta+\gamma)-\pi)$$
$$=\frac{2m}{n}(\beta+\gamma-(1-\lambda\cot.\beta\cot.\gamma)\mathrm{tang}.(\beta+\gamma)-\pi)$$

Deinde ob $\triangle BVC=-\frac{bb\sin.2\beta\sin.2\gamma}{2\sin.(2\beta+2\gamma)}=-\frac{\lambda\lambda mm}{nn}\cot.\beta$
$\cos.\gamma\,\mathrm{tang}.(\beta+\gamma)$

fit campi includendi diminutio: $BPQRSC=$

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma-(1-\lambda\lambda\cot.\beta\cos.\gamma)\mathrm{tang}.(\beta+\gamma)-\pi)=$$
$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma+\lambda\lambda\cot.\beta+\lambda\lambda\cot.\gamma-(1-\lambda\lambda)\mathrm{tang}.(\beta+\gamma)-\pi)$$

 vnde

vnde totum lucrum aestimandum erit:

$$\tfrac{mm}{n}(\beta+\gamma-\text{tang.}(\beta+\gamma)+\lambda(2-\lambda)\cot.\beta\,\text{cos}\,\gamma\,\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi)=$$
$$\tfrac{mm}{n}(\beta+\gamma+\lambda(2-\lambda)(\cot.\beta+\text{cos}.\gamma)-(1-\lambda)^2\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi).$$

Coroll. 1.

27. Si rectae AB et DC extus conuergant, vti in figura exhibentur, erit $2\beta+2\gamma>180^\circ$, ideoque $\beta+\gamma>90^\circ$, vnde tang. $(\beta+\gamma)$ fit negatiua, hincque $BP>\frac{\lambda m}{n}\cot.\beta$ et $CS>\frac{\lambda m}{n}\cot.\gamma$. Qui etiam posito $\beta+\gamma=90^\circ+\theta$, vt fit $V=2\theta$ habebitur $BP=\frac{m}{n}(\cot.\beta+\frac{(1-\lambda)\text{cos}.\gamma}{\text{sin}.\beta\,\text{sin}.\theta})$ et $CS=\frac{m}{n}(\cot.\gamma+\frac{(1-\lambda)\text{cos}.\beta}{\text{sin}.\gamma\,\text{sin}.\theta})$ adeoque $BP>\frac{m}{n}\cot.\beta$ et $CS>\frac{m}{n}\cot.\gamma$.

Coroll. 2.

28. Hoc ergo casu, quo $\beta+\gamma=90^\circ+\theta$, nihil obstat, quo minus solutio inuenta applicari possit, dummodo rectae BA et CD superent valores pro BP et CS inuentos. Sin autem altera vel vtraque fuerit breuior, arcus circuli radio $\frac{m}{n}$ describendi per terminum breuioris ita duci debet, vt longiorem tangat; at si ne hoc quidem fieri queat, per vtrumque terminum A et D ita ducatur, vt longiorem tangat.

Coroll. 3.

29. Quodsi autem fuerit $\beta+\gamma=90^\circ+\theta$, et solutionem inuentam applicare liceat, erit aggeris diminutio:

$$\tfrac{2m}{n}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\text{cos}.\gamma-\pi+(1-\lambda)\cot.\beta\cot.\gamma\cot.\theta)$$

Campi

Campi autem includendi decrementum

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\cot.\gamma-\pi+(1-\lambda\lambda)\cot.\beta\cot.\gamma\cot.\theta)$$

ita vt verum lucrum fit

$$\frac{mm}{n}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\cot.\gamma-\pi+(1-\lambda)^2\cot.\beta\operatorname{cos}.\gamma\cot\theta).$$

Coroll. 4.

30. At si rectae BA et CD intus conuergant, quo casu angulus θ fit negatiuus, partes BP et CS minores euadunt, quam casu $\lambda=1$, ideoque arcus circuli vltra rectam BC porrigeretur, quod cum naturae aduersetur, hoc casu verum maximum locum non inuenit. Quod etiam inde patet, quod intra rectas BA et CD conuergentes circulum radii $=\frac{m}{n}$, qui vtramque tangat, describere non licet.

Scholion 1.

31. Antequam casum rectarum B A et C D intus conuergentium perpendamus, consideremus casum, quo sunt parallelae, ideoque $\beta+\gamma=90°$, et $\theta=0$, atque $BC=b=\frac{\lambda m}{n\sin.\beta\sin.\gamma}=\frac{2\lambda m}{n\sin.2\beta}$, existente $\lambda<1$. Fig. 8.
Sit autem $BA>\frac{m}{n}\cot.\beta$ et $CD>\frac{m}{n}\cot\gamma$; per solutionem iam partes BP et CD capi deberent infinitae; quod cum fieri nequeat, arcum circularem ita per terminum breuiorem D duci conueniet, vt alteram rectam BA tangat, radio $=\frac{m}{n}$, ac si esset etiam $BA<BP$, alio radio circulus per A et D duci deberet, quia rectam BA in A tangeret. Quantum igitur hinc lucrum oriatur, generalius inuestigemus: Sit $CD=c$, ac demisso

missu ex D in BA perpendiculo DM, erit $DM = b\,\text{sin.}\,2\beta = \frac{2\lambda m}{n}$, et $BM = c + b\,\text{cos.}\,2\beta$; ponatur radius circuli $DO = MN = z$, erit $DN = b\,\text{sin.}\,2\beta - z$, et $ON = \sqrt{(2bz\,\text{sin.}\,2\beta - bb\,\text{sin.}\,2\beta^2)}$; vocetur autem angulus $DON = \Phi$, erit $\frac{b\,\text{sin.}\,2\beta - z}{z} = \text{sin.}\,\Phi$ et $z = \frac{b\,\text{sin.}\,2\beta}{1 + \text{sin.}\,\Phi}$; ideoque $ON = PM = \frac{b\,\text{sin.}\,2\beta\,\text{cos.}\,\Phi}{1 + \text{sin.}\,\Phi}$; hinc arcus $PQRD = \frac{(90^\circ + \Phi)\,b\,\text{sin.}\,2\beta}{1 + \text{sin.}\,\Phi}$. Quare ob $BP = c + b\,\text{cos.}\,2\beta + \frac{b\,\text{sin.}\,2\beta\,\text{cos.}\,\Phi}{1 + \text{sin.}\,\Phi}$, respectu casus, quo agger secundum ipsos limites duceretur, in longitudine aggeris lucraremur $b + 2c + b\,\text{cos.}\,2\beta + \frac{\beta\,\text{sin}\,2\beta\,\text{cos.}\,\Phi}{1 + \text{sin.}\,\Phi} - \frac{(\frac{1}{2}\pi + \Phi)\,b\,\text{sin}\,2\beta}{1 + \text{sin.}\,\Phi}$

Porro est sector $DOP = \frac{(\frac{1}{2}\pi - \Phi)\,bb\,\text{sin.}\,2\beta^2}{2(1 + \text{sin.}\,\Phi)^2}$, area autem $BCDOP = bc\,\text{sin.}\,2\beta + \frac{1}{2}bb\,\text{sin.}\,2\beta\,\text{cos.}\,2\beta + \frac{bb\,\text{sin.}\,2\beta^2\,\text{cos.}\,\Phi}{(1 + \text{sin.}\,\Phi)^2} + \frac{bb\,\text{sin.}\,2\beta^2\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi}{2(1 + \text{sin.}\,\Phi)^2}$, vnde in magnitudine campi perdimus:

$$bc\,\text{sin.}\,2\beta + \tfrac{1}{2}bb\,\text{sin.}\,2\beta\,\text{cos.}\,2\beta + \frac{bb\,\text{sin.}\,2\beta^2\,\text{cos.}\,\Phi}{(1 + \text{sin.}\,\Phi)^2}$$

$$+ \frac{bb\,\text{sin.}\,2\beta^2\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi}{2(1 + \text{sin.}\,\Phi)^2} - \frac{(\frac{1}{2}\pi + \Phi)\,bb\,\text{sin.}\,2\beta^2}{2(1 + \text{sin}\,\Phi)^2}.$$

Hinc igitur posito Φ constante statim patet, eo maius fore lucrum, quo maiorem capere liceat lineam $CD = c$; ea enim elemento dc aucta, lucri augmentum erit $dc(2m - nb\,\text{sin.}\,2\beta) = 2(1 - \lambda)m\,dc$. Cum autem c detur, sumto angulo Φ variabili, lucrum erit maximum, si

$$mb\,\text{fin.}\,2\beta\left(d.\frac{\text{cof.}\Phi}{1+\text{fin}\,\Phi}-d.\frac{\frac{1}{2}\pi+\Phi}{1+\text{fin.}\Phi^2}\right)=$$

$$nbb\,\text{fin.}\,2\beta^2\left(d\frac{\text{cof.}\Phi}{(1+\text{fin.}\Phi)^2}+\tfrac{1}{2}d.\frac{\text{fin.}\Phi\,\text{cof.}\Phi}{(1+\text{fin.}\Phi)^2}-\tfrac{1}{2}d.\frac{\frac{1}{2}\pi+\Phi}{(1+\text{fin.}\Phi)^2}\right),$$

quae aequatio euoluta commode ad hanc reducitur:

$$m=\frac{n\,b\,\text{fin.}\,2\beta}{1+\text{fin.}\Phi}=nz,\ \text{ita vt fit}\ z=\frac{m}{n}$$

vti quidem iam ex fuperioribus liquet. Erit ergo

$$1+\text{fin.}\Phi=\frac{n\,b\,\text{fin.}\,2\beta}{m}=2\lambda\ \text{et fin}\ \Phi=2\lambda-1.$$

Quia $\lambda<1$, ponatur $\lambda=\text{cof.}\zeta^2$, erit $\text{fin.}\Phi=2\,\text{cof}\,\zeta^2-1=\text{cof.}\,2\zeta$, et $\Phi=90^\circ-2\zeta=\frac{1}{2}\pi-2\zeta$; hinc $\text{cof.}\Phi=\text{fin}\,2\zeta$.

Diminutio ergo aggeris fecundum longitudinem ob $b=\frac{2\,m\,\text{cof.}\zeta^2}{n\,\text{fin.}\,2\beta}$ erit $=2c+\frac{2\,m\,\text{cof.}\zeta\,\text{cof.}(\beta-\zeta)}{n\,\text{fin.}\beta}-\frac{m}{n}(\pi-2\zeta)$ et diminutio agri inclufi:

$$\frac{2\,m\,c\,\text{cof.}\zeta^2}{n}+\frac{m\,m}{n\,n}\left(\text{fin.}\zeta\,\text{cof.}\zeta+\frac{2\,\text{cof.}\zeta^3\,\text{cof.}(2\beta-\zeta)}{\text{fin.}\,2\beta}-\tfrac{1}{2}(\pi-2\zeta)\right).$$

Scholion 2.

32. Quod fi lineae BA et CD intus conuergant, vt fit $\beta+\gamma=90^\circ-\theta$, et $BC=b<\frac{m\,\text{cof.}\theta}{n\,\text{fin.}\beta\,\text{fin.}\gamma}$, quaeftio eft magis difficilis, verumtamen ex principiis hactenus ftabilitis expediri poterit. Huc imprimis pertinet cafus, quo infula quaedam figurae et magnitudinis cuiuscunque aggere effet cingenda, cuius figura fi fuerit polygonum, cuius fingula latera fuperent quantitatem $\frac{m}{n}(\text{cot.}\frac{1}{2}p+\text{cot}\frac{1}{2}q)$ exiftentibus, p et q angulis cuique lateri adiacentibus, quaeftio nullam habet diffi-

 culta-

cultatem, dum ſinguli anguli arcubus circuli, cuius radius eſt $=\frac{m}{n}$ pert. ita ſubtendi debent, vt latera fiunt tangentes At ſi quaedam latera, vel adeo omnia, ſint minora, peculiari ſolutione eſt opus, cui autem hic non immoror, cum quaeſtio digna videatur, quae omni cura euoluatur, et ad vſum communem accommodetur; quod opus, vel aliis perficiendum relinquo, vel in tempus magis opportunum mihi reſeruo.

PHYSI-

PHYSICA.

AD OBSERVATIONES ET EXPERIMENTA DE MERCVRIO EX MANVSCRIPTIS *HERMANNI BOERHAAVE* SVPPLEMENTVM I.

recenſente

CAROLO FRIDERICO KRVSE.

Anno 1734. obtulit Collegio Philoſophorum in Brittannia obſeruationes et experimenta de argento viuo (*a*), anno vero inſequenti Academiae Regiae Scientiarum in Galliis ſuper eadem re (*b*) exhibuit quaedam ſummus *Hermannus Boerhaaue*.

Ex vtrisque caſti, vere Phyſici obſeruatis conſtitit immutabilis prorſus natura Hydrargyri, dum variata interim ſpecie, in nouas formas mutatus appareret.

Anno 1737. data ad Senatum Sapientum in Brittannia diſſertatione (*c*) recitauit et alios, quos illi vltro explorando labores, incredibili ſumtu et patientia adhibuit. Vnde, detecta eiusdem conſtantia, auri ſimul indoles perſpecta habetur.

(*a*) Philoſophical Transactions No. 430. pag. 145.
(*b*) Memoires de l'Acad Royale des Scienc. 1736. pag. 539. et Philoſoph. Transact. No. 445. pag 343.
(*c*) Philoſoph. Transact. No. 444. pag. 368.

Nacto otio plura promiſerat; promiſſis praeuenere cunctis flebilia bonis fata (*d*). Moriens, tradiderat manuſcripta nepotibus, *Hermanno* (*e*) et *Abrahamo* (*f*) *Kaau Boerhaaue*, quibus praematura morte ereptis ad me peruenere ſcripta manu viri omni laude maioris.

Legens interim, perlegens, faſtidioſa, herculei laboris taedia, piaculum duxi, acto labore adeo iucunda vnice in muſeo ſeruare. Non pauca enim docent atque prioribus, iam editis, collata, lucem affundunt, dicta firmant, veritatem adſerunt.

In prima, ad Illuſtrem Brittanniae Eruditorum ſocietatem, diſſertatione lucide aſſeruit *Boerhaauius*, per ſolos motus mechanicos Mercurium ex mitiſſimo fieri acrem, ex inſipidiſſimo acquirere ſaporem, ex ſplendidiſſimo fieri nigrum, ex fluido conſiſtentem; ex eadem vero conſtat, ſola ignis actione redire iterum in priſti-

(*d*) 1738. Septembr. 23. die.

(*e*) Socero meo, quem 7. Octobr. 1753. fato functum lugeo. Hic Inuictiſſimae *Eliſabethae*, Auguſtae, Piae, Felicis, Orbis Ruſſici Imperatricis, Conſiliarii intimi, Archiatrorum Comitis et ſupremi, per vniuerſum Imperium, rei medicae Directoris munere fungens, feliciſſimi, quem vnquam Ruſſica tellus aluit, Medici nomen meruit.

(*f*) *Hermanni* frater, iunior, cuius ſcripta meritaque vel mediocriter in litteris medicis verſatis, non latent. Hic, febre acuta cum delirio perpetuo correptus, vndecima morbi die, 6. Iulii 1758. eſſe deſiit. Vita eius paucis, aſt veriſſimis, lineis delineata eſt in Summario Nouor. Commentar. huius Academiae Tom. IV.

priſtinam formam, ludere perſonas mutatas, laruaque depoſita, alis et talaribus volare mercurium, nec tormentis his mutari.

Ibidem docuit, aetatem qui hermetica in arte conſumpſerat, auctor, neque feces ponere ignis tormentis, neque leuiorem fieri mercurium, cuius ad aquae, aceti ve bullientis calorem ſubortas mutationes eodem in ſcripto recenſet.

Ex iis autem, quae ad Regiam in Galliis florentem Academiam dedit, liquido apparet, nec in igne diutiſſime digerendo, ſiue renouatus oſcillet aer, ſiue repagulis arceatur, tranſire ſolidum in metallum, argentum viuum.

Docuit porro, ibidem, ex plumbo per ſales fixos haud generari mercurium, quidquid clamant Chymicorum nobile par, Pater et filius *Helmontii*: quidquid offert *Becherus* (*g*). Nec illud praeſtare acetum ſtillatitium, vt perhibet ſubtiliſſimus *Iſaacus Hollandus*, primus trium principiorum chemicorum auctor, (*h*) labore fideliore didicit, docuitque caſte, ſuosque

(*g*) Neque obeſſe puto, quae hac de re exhibuit celeberrimus *Groſſe*. Vid. eius Recherches ſur le Plomb. Memoires de l'Acad. Royal. des Scienc. 1735. p. 313. et ſequentibus.

(*h*) „Recentiſſimi, de corporum principiis chemicis tractantes, perhibent: Arabes atque Saracenos ſaeculo XII. et XIII. inueniſſe, „metalla nil aliud eſſe, quam argentum viuum per ſulphur „condenſatum hocque ex Gebri, Auicennae atque Rhaſis monumentis patere. Efficta haec per Arabes principia, ab hoc „tempore vsque ad ſaeculi XVI. initium, Chymici interea clari, „absque suosque errores expurgantis Chemiae assertor *Boerhaave* (*i*). Post resuscitantium salium impotentiam, per

---

„absque vlla retractione adoptarunt, veluti *Raymundus Lullius*, „*Arnoldus de Villa Noua* et *Ioannes Isaacus*, *Hollandus* vulgo „dictus. Postquam vero versus dicti saeculi initium *Basilius Valentinus*, et *Theophrastus Paracelsus* imprimis, Chemiae operam „dedere, factum est, vt iste, praeter haec duo, ab Arabibus „efficta principia, aliud nouum, quod salis nomine insigniebat, „prioribus adiiciendum existimauerit etc.„

Doleo auctorem, ad quem superius memorata pertinent, accuratius non euoluisse *Boerhaauium*, celebre licet illum dicat nomen esse, in re tamen neglexisse videtur. Maluit nimirum citare dissertatiunculam, modo hanc, modo illam, vnicum interdum sui Auctoris fructum, necessitatis saepe lege, non raro alieno arbore natum, quam ad *Hombergium*, *Boerhaauium*, *Hofmannum*, *Stahlium* ve crebrius prouocare; vtut foetus eiusmodi citati, ingentibus his viris, re propius examinata principium vitale deberent. Captus hic Auctor voluptate enucleandi *Boerhaavii*, aliorumue auctorum grauissimorum, fato iam functorum, erroribus, illum vix citat, quin reprehendat. Melius egisset, ex purissimo fonte huius Viri hauriendo, si nobis accuratius, quae ad hermeticae artis historiam pertinent, exhibuisset. *Boerhaavio* enim edoceri potuisset, *Gebri* testimonium ad VII. potius quam ad XII. saeculum pertinere. Systema duorum principiorum chemicorum, mercurii et sulphuris, proinde iam illo tempore celebrabatur. Nihilominus ipso *Gebro* adhuc edocemur, ante ipsum iam viguisse, hanc, antiquissimam certe opinionem, dum in principio *summae perfectionis metallorum* scribit, se non nisi libros antiquorum abbreuiasse; partem forsan librorum, de hac arte, quos Imperio *Diocletiani* combustos perhibet *Suidas*. *Basilius* vero *Valentinus* quem *Paracelso* saeculo priorem, iure indicat *Boerhaauius*, minus recte ad initium XVI. saeculi celebratur. *Paracelsum* vero ex *Basilio* doctrinam de tribus elementis illo tempore hausisse, atque, presso auctoris nomine, suam fecisse per ipſum argentum viuum, ex plumbo dum mercurium educere conatur, eundemque ex ſtanno eodem adminiculo extrahere tentat, fruſtra fuit (*k*).

In tertia denique ad ſapientes Brittannos data diſſertatione, mercurium e venis eductum labe quadam inquinatum, ab ipſa origine illi concreta intimeque inoleſcente, ab alchimiſtis credi, perhibet *Boerhaavius*, qui, ad mentem illorum, defaecationem impuri feliciſſime tum demum obtineri crediderat, quando puriſſimis corporibus, ſuae naturae ſimilibus, miſceretur, atque ope ignis inde iterum ſepareretur. Miſcuit ideoque auro Mercurium, totiesque igne illum inde auocans, conſtan-

---

feciſſe extra omne dubium poſitum eſt. *Baſilius Valentinus* vero iuuenis vidit Belgium et Angliam. *appendic. ad XII. claues.* artem cereuiſiariam optimam ibi reperit: Hac autem occaſione *Iſaaci Hollandi* opera vidiſſe, atque ex illis doctrinam de tribus principiis retinuiſſe, veroſimile eſt, ait enim in coenobio ſe ex libris didiciſſe, nullum licet auctorem citet; *Hollandum* vero, *Baſilio* antiquiorem, doctrinam de tribus principiis profitentem videre licet, opera ſubtiliſſimi huius auctoris vel fugitiuo oculo perluſtranti. Neque hoc *Paracelſi* temporibus ignorabatur: *Severinus* Danus etenim Epiſtolam ad *Paracelſum* dedit, quae praefixa exſtat operibus *Paracelſi*, ibi citat *Iſaacum Hollandum* pro auctore diſciplinae Paracelſicae et laudat.

(*i*) Meretur ab omnibus legi oratio quam habuit 1718. de Chemia errores ſuos expurgante, illuſtris auctor, antequam ad egregium, prae caeteris, hoc ſtudium animum adiungant tirones.

(*k*) Miror Cl. *Vogel* mercurium, in oleo Vitrioli currentem adhuc ſtatuere, atque exinde pondus inſigne huius acidi deriuare. In inſtit. chemic. §. 413. et 417. pulcherrime alias chemica tractantem.

constantiam et simplicitatem vtrorumque admiratus, spem figendi cum auro argentum viuum, ignis actione, seposuit.

Neque substetisse hic indefessum rerum naturalium scrutatorem, ex sequentibus patebit (*l*). Selegi quippe Experimenta quaedam, ex diario egregii viri, nullis proh dolor! annotationibus diuite, quaeque simpliciter trado, verbis ipsissimis Auctoris, minus licet speciosis, ast magis veris, vtens. Haec, quoad sermonem, operationis atque effectuum ratione, in paragraphos dispescui, vt labores et producta melius a se inuicem distingui possint. Caeterum, simplex veri est sigillum. En summi viri verba:

§. 1.

17 $\frac{10}{8}$ 36 Mercurii Amstelodamensis optimi vncias XXXII. destillaui ex retorta vitrea, pura, igne arenae, ita, vt nihil prorsus mercurii fluidi in fundo retortae maneret.

§. 2.

Mercurium egressum, siccatum, effudi semper in retortam eandem, et destillaui modo §. 1.

§. 3.

(*l*) Experimenta illa, quae ad Dissertationes de Mercurio, in actis Londinensibus atque Parisiensibus impressas, spectant, praemittenda censeo, illis quorum nullam neque ipse auctor adhuc mentionem fecit, moneat licet aliquo in loco, superesse ipsi adhuc experimenta, quibus euertatur spes alchymistarum primi ordinis, quam Caesaribus, Regibus, Principibus fastuose depraedicatam, caro vendiderunt.

§. 3.

Singulis deſtillationibus naſcebatur rubri (*a*) quid in retorta.

§. 4.

Labore ſedulo continuaui deſtillationes vsque $17\frac{26}{2}37$, ſemper accurate fluidum totum eleuando.

§. 5.

Exiuerant tunc Mercurii Vnc. XXIV, 511 vicibus iam deſtillati. In fundo retortae erant genitae Vnc. ijß praecipitati rubri, ſcintillantis. In chartulis, quibus ſingulis vicibus mercurius erat exſiccatus, poſt quamque deſtillationem, multum mercurii forma nigra reſtabat. Ita vt perierint 511. deſtillationibus de mercurio Vnc. vß. id cauere non potui omni cura, id et in operatione inchoata $17\frac{10}{9}31$. contigit (*b*), ſic fere $5\frac{1}{6}$ grana perierunt ſingula deſtillatione, ſollicite licet caueretur (*c*).

Ccc 2 § 6.

(*a*) Vide primae, datae ad Britannos, de mercurio diſſertationis §. IV. Ibidem enim deſcribit auctor operationem huic ſimillimam, niſi tempore ac laboribus vlterioribus protractis diuerſam cerneres.

(*b*) Operatio $17\frac{10}{9}31$. eadem eſt, quam deſcripſit in prima de mercurio ad Brittannos diſſertatione §. IV. vsque ad XII.

(*c*) Comparari vtique debet proceſſus hic cum 511. deſtillationibus, quae maximam partem primae de mercurio diſſertationis conſtituunt; ibidem enim mercurius 52 vicibus deſtillatus

1) Ex fluido in puluerem rubrum ſplendentem pro $\frac{1}{52}$ ſui ponderis vertebatur.

2) 52 deſtillationibus illis perierunt mercurii drachmae $6\frac{1}{2}$. ergo $7\frac{1}{2}$ grana, ſingula in deſtillatione.

3)

§. 6.

$17\frac{27}{3}37$. Praecipitati rubri (§. 5.) nati Vnc. ijß addito pauco mercurii 511. vicibus destillati, ex chartulis in quibus exsiccabatur collecti, destillaui e retorta luto obducta, igne summo, vt canderet retorta per horam.

§. 7.

Exiit mercurius reuificatus ad Vnc. ij. in fundo vero retortae gr. xviii. pulueris rubri (*d*).

§ 8.

3) Idem mercurius 448. vicibus rursus destillatus de pondere amisit Vnc. iv. dr. ij. gr. xxxviiij. Ergo $4\frac{1}{2}$ grana singula in destillatione perierunt, dum toties destillando igne actus pro $\frac{11}{72}$ sui ponderis in puluerem rubrum vertebatur.

4) In toto vero mercurius 500 vicibus destillatus, pro $\frac{5}{16}$ sui ponderis, illo igne in puluerem rubrum versus est. Mercurii vero fluidi ab operatione superfuere Vnc. ix. dr. v. quae excedunt parum dimidiam adhibiti hydrargyri quantitatem. Perierunt vero Vnc. v. dr. j. gr. xxxxviiij. Ideoque grana v. singula in destillatione.

5) Conueniunt proinde pulcherrime duae, diuersis temporibus peractae, operationes, ex quibus plura meditationi opportuna ab idoneis, vlterius erui possunt.

(*d*) Drachmae tres ac grana quadraginta duo perierunt. Quomodo? Vide quae de insigniore reuificandi ex praecipitato mercurii dispendio monet auctor, in prima de mercurio dissertatione §. VIII corol. 8. Vix enim mihi persuadere possum, errorem autographi esse: primus enim foret, quem in scriptis accuratissimi huius viri reperiissem. Crediderim, multa enucleandae huic quaestioni conferre, experimenta, quae Celeb. *Hombergius* cum metallis in foco *Tschirnhausiano* olim instituit, quaeque in actis scientia et experientia ditissimis academiae Parisinae legi possunt.

§. 8.

Has (*e*) miſcui cum Vnc. XXIV. mercurii 511. vicibus deſtillati (§. 5.).

§. 9.

His (§. 8.) admiſcui Vnc. VIII. dr. ij. mercurii 511. vicibus deſtillati, cui et ſuus mercurius, ex praecipitato regeneratus, iam admiſtus erat (*f*).

§. 10.

Habui ergo mercurii 511. vicibus deſtillati per ſe et reuiſicati Vnc. XXXIV. et dr. ij.

§. 11.

Has (§. 10.) deſtillaui ſemper accurate modo §. 1. hodie incipiendo $17\frac{8}{3}37$. vsque ad $17\frac{5}{11}37$. 448. vicibus.

§. 12.

Tum habui mercurii mille et nouies per ſe iam deſtillati Vnc. XVII. Et praecipitati rubri in retorta Vnc. j. dr. jß. (*g*).

(*e*) Scilicet Vnc. ij. mercurii ex praecipitato reuiſicati §. 7.

(*f*) Quas hic iudicat auctor Vnc. VIII. dr. ij. mercurii 511. vicibus deſtillati pars maxima mercurii eſt, quem obtinuit aliquando ab operationibus, quas deſcripſit in prima de mercurio diſſertatione §. 4. 5. 6. 7. 8.

(*g*) Perierunt ergo Vnc: XVI. gr. XXX. praecipitati vero rubri longe minus natum vltimis his 448. deſtillationibus, quam quidem in praecedentibus. Cauſam huius phaenomeni in prima diſſertatione innuit auctor §. 5.

§. 13.

Mercurium (§. 12.) per chartam calidam, puram, ſiccam, colatum, vaſe vitreo, puro, ſicco ſeruaui, titulo mercurii 1009. per ſe deſtillati (*b*).

§. 14.

Praecipitati nati (§ 12.) dr. ʒß. ſeruaui titulo praecipitati per ſe mercurii 1009 deſtillati; reliquum vero deſtillaui ex retorta loricata, igne aperto.

§. 15.

Obtinui mercurii puri dr. vij. gr. VIII. in fundo retortae ſupererat pulueris rubri fixioris gr. xv. (*i*).

§. 16.

Mercurium illum (§. 12.) ponderaui ope bilancis induſtria clariſſimi *s'Graueſande*, pendebat ad aquam vt 13 $\frac{59}{100}$. ad 1. 17 $\frac{15}{2}$ 38.

§ 17.

Mercurius regeneratus ex praecipitato mercurii 1009 per ſe deſtillati erat ad aquam vt 13 $\frac{65}{180}$ ad 1., ponderante eodem celeberr. viro 17 $\frac{16}{2}$ 38. (*k*).

Eous-

(*b*) De hoc plura impoſterum, quando ad alia longe operoſiora *Boerhaavii* experimenta peruenero, quibus perficiendis hunc adhibuit.

(*i*) Periere itaque gr. XXXVII. Vide §. 7. huius ſupplementi notam.

(*k*) Quibus iam impreſſas *Boerhaavii* de Mercurio Diſſertationes adeundi occaſio deficit, habent hic tabulam, ſeriem expenſionum varii mercurii complectentem, quas vt plurimum vna cum celeberrimo *s'Graneſandio* abſoluit, illuſtris *Boerhaave*.

☉

Eousque Mercurium, igne torſit, ſolitarium Ill. *Boerhaave*, non contentus primis datis ad Brittannos Diſſertationibus iam indicatis, vt diſceret, quid tandem ignis actione diuturniore eueniret. Conſtans ſimili modo ſe exhibuit mirabile hoc, noſtris temporibus frigore actum, omnino malleabile, metallum. Nulla huic ſupplemento corollaria appoſui: deduxit plura hac in arte ſeuerus quidem, vberrimus tamen auctor, quae in prima eius de mercurio diſſertatione legi poſſunt, nimia ſi huc transferri debuiſſent, adiecto fortaſſis vnico: quod mercurius 448. vicibus, ſimili ac antea igne adhuc actus, idem perſiſteret, varias vario igne luderet perſonas, maiori tamen igne vtcunque in priſtinam formam rediret.

OBSER-

☉ ad ▽ vt $19\frac{119}{500}$. ad 1.
☿ venalis ſemel deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{57}{100}$. ad 1.
☿ 511 vicibus per ſe deſtillatus ad ▽ vt $14\frac{11}{100}$. ad 1.
☿ 1009 per ſe deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{50}{100}$ ad 1.
☿ reſuſcitatus ex praecipitato mercurii 1009. deſtillati ad △ vt $13\frac{65}{100}$ ad 1.
☿ aliquoties ab ☉ deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{55}{100}$. ad 1.
☿ 750. vicibus ab ☉ deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{52}{100}$. ad 1.
☿ 877. vicibus ab ☉ deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{50}{100}$. ad 1.
☿ aliquoties ab ☽ deſtillatus ad ▽ vt $13.\frac{55}{100}$. ad 1.
☿ 217. vicibus ab ☽. deſtillatus ad ▽ vt $13.\frac{50}{100}$. ad 1.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE POTISSIMVM BAROMETRICAE ET THERMOMETRICAE ANNI 1757. CVM CONSECTARIIS INDE DEDVCTIS.

Auctore

I. A. BRAVN.

Methodus fere eadem in his obſeruationibus eſt adhibita, quae in antecedentibus, hinc ſuperfluum eſſet, pluribus rurſus hic exponere de inſtrumentis et modo, quo ſint confectae. Repraeſentant ſcilicet obſeruationes barometricae maximas et minimas altitudines cuiuslibet menſis per integrum annum cum differentiis, vti thermometricae maximum et minimum caloris gradum cuiuslibet menſis per totum annum cum differentiis. Barometrum idem ſimplex eſt adhibitum, in quo pollices ſunt Pariſienſes notati, qui in centum partes ſunt diviſi. Numerus igitur ante punctum pollices Pariſienſes, poſt punctum eorum partes centeſimas ſignificat. Idem quoque Thermometrum eſt adhibitum, in quo ſcilicet (o) ſignificat calorem aquae bullientis, et 150. aquae in glaciem abeuntis, quod congelationis punctum adpellatur. Haec ſcala thermometrica facile cum aliis comparari poteſt, quae ſunt vſitatae, ſi inſpiciatur comparationis ſcalarum thermometricarum vſitatiorum tabula, quam iam 1755. cum obſeruationibus noſtris ex-

exhibuimus. Inſerta eſt Tom. VII. Comment. Acad. Nihil ſupereſt, niſi vt obſeruationes ipſas repraeſentemus, ita vt primum barometricae adpareant, dein thermometricae et Meteora.

Obſeruationum barometricarum anni 1757. altitudines maximae et minimae cum earum differentiis, per ſingulos menſes anni integri.

Menſes.	Dies.	Maxima.	Minima.	Differ.
Ian.	24. -	28.60. -	27.47 d. 15. h. 11. p. m.	1.13.
Febr.	1. -	28.43. -	27.05. d 21 - - -	1.38.
Mart.	26. -	28.35. -	27.30 d. 9. et 15. - -	1.05.
April.	10. -	28.54. -	27.50. d 27 m. - -	1.04.
Maius	31. -	28.43. -	27.45. d 9. et 12. -	0.98.
Iunius	1. -	28.45. -	27.55. d. 13. - - -	0.80.
Iulius	16. et 17	28.35. -	27.90 d. 6. 28. 31. -	0.45.
Auguſt.	28. -	28.46. -	27.33 d. 3 - - -	1.13.
Sept.	10. et 11.	28.75. -	27.45 d 19 - - -	1.30.
Octob.	2. -	28.55. -	27.05. d 17 - - -	1.49.
Nou.	20. -	28.63 -	27.45. d. 3 - - -	1.18.
Dec.	19. h. 11 p. m.	29.12. -	27.85 d. 5, - - -	1.27.

Max. 29.12. Min. 27.05. Differ max. 2.7 per integr. annum.

Conſectaria.

Si hae obſeruationes inter ſe comparentur, patet primum, maximam altitudinem contigiſſe Decembris 19. h. 11 p. m. Eſt haec altitudo 29.12. plane extraordinaria, quae nunquam hic Petroburgi eſt obſeruata. Maximae enim hic obſeruatarum ad hoc vsque tempus fuere primum 29.01. ſiue ſecundum pollices Londinenses praecise 30.95, vti ex antecedentibus obseruationibus publicatis iam satis patet. Deinde 29.10. anno 1750. Est igitur nunc spatium variationum barometricarum rursus mutandum; amplificari scilicet debet duabus partibus centesimis, tanto enim haec maior est ea, quae antea huc vsque fuit maxima, scilicet 29.10. Quum igitur huc vsque spatium, intra quod altitudines mercurii in tubo *Torricelliano* variarint, fuerit primum 2.60. ab altitudine nimirum 26.41. ad 29.01: deinde ab anno 1750. 2.69: erit nunc 2.71. ab altitudine scilicet minima 26.41. ad maximam, quae nunc est 29.12. Contigit haec altitudo maxima Decembris 19. h. 11. post meridiem, Thermometro monstrante 180. Dies fuit serenus, vti quoque dies aliquot antecedentes et subsequentes. Ventus ipso die vix fuit sensibilis, vti quoque diebus antecedentibus et subsequentibus debilis, ex oriente vt plurimum spirans. Altitudo minima accidit Februarii 21. et Octobris 17. Febr. 21. ventus fuit N. O. dies nubilus, quem sequuta est nox serena. Dies antecedentes et subsequentes fuere mixti. Octobris autem 17. ventus fuit vehementissimus W., qui iam die praecedente incepit, et nocte sequente continuauit. Dies fuit nubilus cum niue exigua, vti dies aliquot antecedentes quoque fuere nubili et sequentes mixti. Aqua fluuii Neuae ad notabilem altitudinem eodem die adscendit, thermometrum monstrabat 149.

In obseruationibus thermometricis more nostro consueto notauimus maximos minimosque gradus caloris

ris per ſingulos menſes totius anni cum differentiis eorum ; obſeruationes ipſae autem ſequenti modo ſe habent :

Frigus max. ſ. Calor minimus.			Calor max.	Differentia.
Ianuar. d.	8.	182	152.d. 16. et 17.	30.
Febr.	24.	175	145.d 14.	30.
Martii	3.	173.	135.d. 31. et 18.	38.
Aprilis	9.	148.	120.d. 24.	28.
Maii	3.	148.	99½.d. 24.	48½.
Iunii	13.	134.	103.d. 23.	31.
Iulii	15. et. 16.	124.	97.d. 12.	27.
Auguſt.	6.	138.	107.d. 1. et 21.	31.
Septembris	23.	155.	119.d 2.	36.
Octobris	14.	169.	147.d. 28.	28.
Nouembris	20.	174.	141.d. 11.	33.
Decembris	17.	187.	149.d. 3.	38.

Frigus maximum 187. Calor maximus 97. Diff. max. 90. per integrum annum.

Conſectaria.

Ex comparatione diuerſorum horum caloris graduum manifeſtum eſt, maximum frigus per integrum annum fuiſſe 187. Hic frigoris gradus quum non ſuperet gradum 200, hic 1733 et 1739. obſeruatum: manet hic huc vsque maximus. Incidit maximus huius anni frigoris gradus in Decembris 17. vento vix ſenſibili O, tempeſtate ſerena, barometro adſcendente hoc die a 28.75 ad 28 87. Ventus aliquot diebus antecedentibus et ſequentibus ex oriente debilis fuit, vti quoque tempeſtas vtplurimum ſerena diebus proxime antecedentibus et conſequentibus. Calor maximus fuit 97. Hic gradus nunquam hic Petroburgi eſt obſeruatus, aequalis eſt calori hominis naturali, et ſanguinis hominis ſani. Maximus caloris gradus, qui huc vsque hic fuit obſeruatus, quum fuerit 104, erit igitur gradus caloris huius anni 7 gradibus maior eo, qui adhuc fuit maximus. Differentia et variationum thermometricarum ſpatium maximum quum huc vsque fuerit 96. ſcilicet a gradu 104. ad 200. amplificandum nunc erit 7 gradibus, ita vt nunc ſit 103. ſcilicet a 97 ad 200. Incidit hic calor maximus in Iulii 12 h 4 poſt meridiem. H. 2 erat 99 et h. 10 ante meridiem 104. Ventus debilis fuit SW, qui quoque diebus aliquot antecedentibus et ſequentibus flauit. Eodem die circa h 4 tonitru eſt auditum, ſed tantum debile, bis enim vel ter tantum audiebatur, aliud autem tonitru h 11 p m. ſequutum eſt, quod etiam tantum e longinquo audiebatur. Barometrum deſcendens erat et attigerat 28.02 Die 10 erat 28.15. continuabat deſcendere ad diem 14.

Quodſi non ſolum gradus caloris maximus, qui hoc anno fuit obſeruatus, ſed etiam reliqui caloris gradus obſeruati expendantur; facile conſpicitur hanc aeſtatem omnium, ex quo quidem tempore obſeruationes hic inſtituuntur, fuiſſe calidiſſimam. Quum alias magni caloris gradus diu durare non ſoleant, vti frigoris; e contrario hac aeſtate fere perpetuus calor intolerabilis fuit. Nam poſt medium Maium iam dies cali-

calidiſſimi fuerunt. Monſtrabat enim thermometrum d. 19. 110, d. 20. 116, d. 22. 108, d. 23. 105, in ſole 82. d. 24, 99. d. 25. 100. d. 26, 103. d. 27, 116. Menſe Iunio d. 1. 112, d. 3. 106, d. 28. 109, d. 9. 107, d. 11. 113, d. 22. 104, d. 23. 103, d. 27. 106, d. 28. 107. Menſe Iulio d. 1. 113, d. 2. 110, d. 3. 111, d. 4. 109, d. 5. 101, d. 6. 109, d. 9. 109, d. 10. 101, d. 11. 102, d. 12. 99, d. 13. 106, diebus 14, 15 et 16. 112, d. 17. 108, d. 19. 101, d. 20 et 21. 105, d. 22. 107, d. 24 et 26. 105, d. 28. 103, d. 29. 107, d. 31. 104. Quin ipſo Auguſto multi dies adhuc ſatis calidi fuere. Monſtrabat enim thermometrum d. 1. 107, d. 11. 119, d. 13. 116, d. 15. 111. d. 21. 107, d. 23. 108, d. 26 et 27. 116, d. 31. 113. Hi gradus caloris plerique obſeruati ſunt inter h. 2. et 3. p. m. quo tempore vtplurimum maximus exiſtere calor ſolet caeteris paribus, vt frigoris gradus maximus ſiue minimi caloris gradus circa ortum ſolis vel proxime, veſperi quoque circa h. 11, quibus temporibus ad minimos caloris gradus cognoſcendos obſeruationes a nobis ſunt inſtitutae.

Primum tonitru iam contigit Aprilis 4. cum magna pluuia. Tonuit porro Maii 16. 20. Iunii 18. 27 et 28. Iulii 5. 6. 12. 13. 22. et 28. Auguſti 1 et 24. Per integrum igitur annum decies quater tonuit.

Dies hoc anno ſereni fuerunt Ianuarii 1, 2, 6, 8, 14. Februarii 6, 7, 13, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 28. Martii 1, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 20, 26, 31. Aprilis 1 nocte, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 28 et 30. Maii 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28. Iun. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 14, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30. Iulii 1, 3, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 26, 27, 29, 30. Augusti 6, 11, 15, 17, 21, 22, 23, 27, 31. Septembris 1, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 23, 24, 30. Octobris 1 nocte, d. 2, 4, 10, 13, 14, 25. Nouembris 17, 18, 19, 20. Decembris 7, 9, 17, 19, 22, 23, 24' 25, 26, 27.

Nemo, opinor, sibi persuadebit, serenitatem perfectam semper hic esse intelligendam, diximus quoque diem serenum qui maiorem partem fuit serenus, licet quoque hinc inde nubes tenues se conspiciendas praebuerint. Forsitan nullo anno plures dies sereni numerati fuerint, quam hoc; serenitas enim quoque dierum hoc anno fuit extraordinaria. Reliqui dies fuerunt vel mixti, vel nubili tantum, vel cum pluuia et niue. Pluuii et niuosi dies cum ventis vehementioribus praecipue fuerunt hi: Ianuario niuosi 4. 6. 9. 10. 13. 15. 27. Februarii 3. 11. 15. Martii 2. 10. 11. 15. 17. d. 21 pluuius vt et 23. 24. d. 25. nebulosus d. 27. et 28. pluuii. Aprilis pluuii 4. 6. et quidem pluuia cum niue mixta, porro pluuius d. 7. 13. et 14. Ventus vehementior WzS cum pluuia magna et quadam aquae Neuensis altitudine solito maiore. D. 25. 26. 27. itidem pluuii. Maii 8. 9. magna procella cum mediocri pluuia

pluuia, quae per interualla toto die continuauit. D. 9. h. 1 grando quoque per aliquot momenta cecidit. Pluuii porro d. 11. 12. 16. vltimo die cum vento vehementiori item d. 20. Iunii pluuius 12. 13. 16. 18. 29. Iulii 14. 20. 22. 28. Augusti 3. 4 et 5 cum vento vehementiore W et altitudine aquae Neuensis sat magna, porro pluuii d. 13. 16. 24. Septembris d. 9. nebulosus d. 14. pluuius d. 15. niuosus et nocte prima glacies, d. 19. pluuius et 28. Octobris 6 niuosus item 11. 12. 16. cum procella ex occidente. D. 17 ventus continuauit, quem comitata est altitudo aquae fluuii Neuae. D 20 pluuius, d. 23 niuosus, d. 24 pluuius, vt et 27. D. 29 ventus W z N vehementior cum quadam altitudine aquae solito maiore. Nouembris pluuii 1. 3. Nix cum pluuia mixta d. 10, 11 et 12. magna pluuia, d. 13. exigua nix, d. 14. niuosus, d. 15. pluuiosus, d 22. 23. 25. 26 niuosi. Decembris niuosi 2. 5 d. 11 nebula densa dein nix d. 12 nebulosus, d. 13 niuosus, d 21 niuosus, thermometro 171. figurae niuis ✱ nitidissimae adparuerunt, vti fere semper, si magno frigoris gradu existente ningat. d. 30 et 31 pauca nix cecidit.

Aurorae boreales nullae insigniores se conspiciendas hoc anno praebuerunt, quamuis nonnunquam vestigia adparuerint, quum aliis annis sat frequentes fuerint, id quod etiam extraordinarium videri potest.

OBSER-

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM A. MDCCLVIII. PETROBVRGI FACTARVM IOTIORA MOMENTA CVM ANIMADVERSIONIBVS ET CONSECTARIIS.

Auctore

I. A. BRAVN.

Obſeruationes hae Meteorologicae, eodem modo, ac praecedentes, et iisdem inſtrumentis, ſunt confectae. Complectuntur nimirum obſeruationes barometricas, thermometricas, et potiorum meteororum. Barometricae ſimplici barometro in altitudine circiter ſedecim pedum Pariſienſ. ſupra planum maris Baltici ſunt captae vt antecedentes. Numeri ante punctum, vti alias, notant pollices pedis Pariſini; numeri poſt punctum partes centeſimas eiusdem pollicis. Exhibentur hic, vti in antecedentibus, ex altitudinibus barometricis, maximae et minimae cum differentiis cuiuslibet menſis per integrum annum in tabula quadam, vt vno obtutu inſpici queant, et maxima altitudo annua cum maxima differentia, ſiue variatione ponderis atmoſphaerici per integrum annum perſpici poſſit. Additur et hic tempeſtas antecedens, comitans, et conſequens, vt relatio altitudinum barometricarum, minimum ſummarum et infimarum, ad tempeſtates pateſcat.

Ob-

Obſeruationes thermometricae hic notatae variationem caloris per ſingulos menſes totius anni indicant, ſcilicet gradus maximos et minimos caloris cum eorum differentiis, vnde ſummum frigus et maximus calor totius anni cum variatione annua cognoſcitur.

Adnotatur et hic, cum ſummis et infimis caloris gradibus annuis, ſtatus tempeſtatis cum antecedente et conſequente, et cum altitudinibus barometricis, vt et hic relatio obſeruationum thermometricarum ad barometricas et ſtatum tempeſtatis eluceſcat.

Obſeruationes haſce quoque ſecundum ſcalam thermometri Delilianam eſſe factas, vti antecedentes, vix opus eſſe videtur monere. Indicat nimirum cifra nullitatis nota, gradum caloris aquae bullientis, et numerus 150 punctum congelationis, quod iam ſatis notum.

Denique ſequuntur meteora inſigniora, ſcilicet venti vehementiores, nebulae, pluuiae, niues, grandines, tonitrua cum fulminibus, fulgura etc. quae omnia a vaporibus et exhalationibus in atmoſphaeram adſcendentibus et deſcendentibus originem trahere, et diuerſas tempeſtates efficere conſtat. Eiusmodi obſeruationes et Meteorologiae emendandae et perficiendae inſeruire, notius eſt, quam vt moneri debeat.

Progredimur igitur ad ipſas obſeruationes recenſendas.

Ad obſeruationes barometricas huius anni quod attinet, illae ſequentem in modum ſe habent:

Menſes - -	D.	Alt. barom. max.	Min. -	D. -	Differ.
Ianuarii	17 - -	28.50 - -	27.05.	10 -	1.45
Februarii	27 - -	28.47 - -	27.60.	4 -	0.87
Martii	28 - -	28.63 - -	27.15.	23 -	1.38
Aprilis	3 - -	28.80 - -	27.68.	19 -	1.12
Maii	2 - -	28.57 - -	27.35.	18 -	1.22
Iunii	14 - -	28.35 - -	27.62.	25 -	0.73
Iulii	21 - -	28.32 - -	27.40.	11 -	0.32
Auguſti	1 - -	28.32 - -	27.63.	18 -	0.69
Septembris	16 et 23.	28.20 - -	26.63.	26 -	1.84
Octobris	29 - -	28.50 - -	27.02.	15 -	1.48
Nouembris	17 - -	28.90 - -	27.13.	30 -	1.77
Decembris	12 - -	28.85 - -	26.42.	30 -	2.40

Ergo fuit ſumma altitudo barometrica per integrum hunc annum 28.90, et infima 26.42, adeoque differentia maxima annua 2.48.

Haec ſumma altitudo barometrica 28.90, ſiue viginti octo pollices pariſinos, et nonaginta partes eiusdem centeſimas ſeu fere vndecim lineas magna obſeruata mihi eſt Nouembris 17. h. 11. p. m. Antecedens altitudo erat 28.85. et ſequens die 18. 28.68. Dies praecedentes a die 14, quo barometrum erat 28.20 fuere nubili, vento ex oriente debili vel nullo, ipſo obſeruationis tempore SO 1. Thermometrum variabat inter gradus 149 et 152, quem gradum monſtrabat ipſo obſeruationis tempore. Sequentes dies tres proximi erant fere ſereni, et barometrum deſcendebat ad 28.44, vento vix ſenſibili, frigus vero creſcebat a 153 ad 176. Pondus igitur aeris potius copiae vaporum

et

et exhalationum, quam frigori aerem condenſanti, tribuendum videtur. Caeterum ſi ſumma barometri altitudo huius anni comparetur cum ſumma altitudine anni praecedentis, ſcilicet $29\frac{12}{100}$, ſiue viginti nouem pollicum pariſinorum et vnius et dimidiae fere lineae, quae nunc omnium obſeruatarum adhuc maxima eſt; adparet, altitudinem huius anni ſummam 28.90. minorem eſſe altitudine ſumma anni praecedentis 29.12. partibus centeſimis 22. ſiue amplius $2\frac{1}{2}$ linearum. Ergo manet altitudo anni praecedentis omnium adhuc obſervatarum maxima.

Minima huius anni altitudo barometrica 26.42 mihi obſeruata eſt Decembris 30. h. 9. p. m. Obſeruatio proxime antecedens h. 2. p. m. indicabat altitudinem 26.92. et proxima ſequens diei ſequentis 31. h. 9. a. m. 27.30. Deſcendit a tribus diebus proxime antecedentibus a 27.90 ad hanc notatam altitudinem minimam, et diebus proxime ſequentibus rurſus adſcendit ad 27.90. celerrime, et porro ad 28.00. Ventus obſeruationis tempore fuit vehementiſſimus ex S, qui iam die 28. flare coepit, et ad diem 31 continuauit, licet non ſemper ex eadem ſpirauerit plaga, ſed modo S modo W fuerit. Procul dubio igitur haec exigua altitudo vehementiae venti erit praecipue adſcribenda. Thermometrum gradum caloris indicabat 148 cadente pluuia, quum per diem copioſiſſima nix cecidiſſet. Dies antecedentes et ſequentes erant fere nubili et niuoſi. Variatio caloris erat intra gradus 148 et 173, qui gradus die 27 veſperi mihi notatus eſt, quae igitur temperiei mutatio ſatis ſubita et magna.

 Quod

Quod ſi porro haec altitudo huius anni minima comparetur cum altitudine minima omnium adhuc obſeruatarum: conſpicitur, hanc eidem eſſe aequalem. Nam omnium minima adhuc eſt 28. 18 pedis Londin. ſiue 26 et fere $\frac{41}{100}$ pedis Pariſini. Haec iam obſeruata eſt 1729. Octobris 12, adeoque ante 29. annos, et quod excurrit. Merito igitur mirandum intra tantum temporis ſpatium nullam eſſe obſeruatam, niſi hoc anno, quae illi eſſet aequalis. Caeterum ex obſeruationibus antecedentibus conſtat, altitudinem ſummam barometricam ab anno 1737 Decemb. 24. ad annum 1750, adeoque tempore 13 annorum, manſiſſe eandem, ſcilicet 30.95 pedis Lond. ſiue fere 29.01 pedis Pariſ. ſed 1750 creuiſſe ad 29.10, et anno praecedenti ad 29.12.

In ſpatio igitur variationis altitudinum barometricarum obſeruationes huius anni nihil mutant, ſed manet adhuc 2. 70, vel 71, ſiue pollicum duorum et linearum $8\frac{1}{2}$, vti altitudo media 27. 77, ſiue pollicum Pariſ. viginti ſeptem et linearum fere nouem.

Differentiae menſtruae altitudinum harum ſi inſpiciantur, patet, eas, vti alias, menſibus mediis, inprimis Iunio, Iulio, Auguſto, eſſe minores, quam menſibus primis et vltimis, quae lex ſemper obtinet, niſi extraordinaria tempeſtas faciat exceptionem, vti hic Februarius, quum tempeſtas ſolito calidior fuerit. Differentia vero annua 2. 48 admodum magna eſt, et extraordinaria, dum a maxima 2. 70 tantum $\frac{22}{100}$ differt, ſiue minus quam lineas tres, vti menſtrua menſe Decem-

Decembri 2. 40 plane extraordinaria quoque deprehenditur. Contra minima menſtrua occurrit menſe Iulio $\frac{32}{100}$, ſiue fere quatuor linearum, quae ſatis eſt exigua, et variationem ponderis atmoſphaerici ſatis paruam indicat.

Hactenus de variationibus ponderis atmoſphaerae huius anni, quae per diuerſas altitudines mercurii in tubo torricelliano hic obſeruatas innotuere. Sequuntur variationes caloris per ſingulos huius anni menſes thermometro Deliliano notatae, quae ſunt ſequentes:

Menſes - - -	Frig. max.	Calor max. - - -	Differ.
Ian. 9. h. 11. p. m.	197	- 152. die 22. h. 2. p. m. -	45
Febr. 28. h. 7. a. m.	177	- 145. 8. h. 2. p. m. - -	32
Mart. 12. h. 7. a. m.	177	- 140. 19. h. 2. p. m. -	37
April. 2. h 11. p. m.	164	- 120. 29. h. 5. p. m. - -	44
Maii 17. h. 11. p. m.	146	- 111. 27. h. 3. p. m. - -	35
Iunii 10 et 12 mane	135	- 97. in ſole 88. 24. h. 2. p. m.	38
Iulii 8. h. 11. p. m.	136	- 105. 20. h. 4. p. m. - -	31
Aug. 28. h. 7. a. m.	141	- 107. 13. h. 3. p. m. - -	34
Sept. 15 21. 23.	150	- 127. 3. h. 2. p. m. - -	23
Oct. 29. h. 7. a. m.	160	- 139. die 2, et 26. h. 2. p. m.	21
Nou. 20. h. 8 a. m.	176	- 146. 26. h. 2. p. m. -	30
Dec. 2, h. 11. p. m.	182	- 148. 16 per totum diem.	34

Ex obſeruationibus hisce thermometricis inter ſe comparatis varia pateſcunt. Primum adparet, hoc anno frigus maximum fuiſſe 197. et maximum calorem 97. adeoque variationem annuam 100. graduum, qualis fere vt plurimum eſſe ſolet. Hic frigoris gradus maximus, ſi comparetur cum maximo 200. vel 201. alias hic obſeruato, 1733. 1739. et 1748, patet, gradum frigoris huius anni maximum proxime ad maximum omnium hic obſeruatorum accedere, gradum autem caloris maximum eſſe aequalem maximo omnium hic obſeruatorum, ſcilicet 97, quem, vti ex antecedentibus obſeruationibus patet, notauimus Iulii 12. h. 4. p. m. anni ſuperioris 1757. aeſtate calidiſſima. Quoniam autem frigus maximum huius anni 197. non ſuperat frigus maximum 200: manifeſtum eſt, hunc gradum omnium adhuc hic obſeruatorum manere maximum, et ſpatium variationum caloris anno ſuperiore de nouo ſtabilitum manere 103.

Ex comparatione differentiarum porro conſpicitur, maximam menſtruam obſeruatam eſſe 45. menſe Ianuario, et minimam 21. menſe Octobri, quae ſatis parua eſt, quum haud raro differentiae diurnae non ſolum huic aequales, ſed ea maiores reperiantur, dum ad gradus 28. et 30. tempeſtate variabili et ſubito inſigniter mutata adſcendere ſolent, vti hoc anno maxima diurna fuit 28. Aprilis 12. obſeruata, quamuis contra ea nonnunquam differentia diurna vix ſit etiam ſenſibilis, quod poſterius tamen rarius accidere hic ſolet.

Gradus frigoris maximus huius anni 197. mihi obſeruatus Ianuarii 9. h. 11. p. m. ſub ſequentibus circumſtantiis contigit. Barometri altitudo erat 28.22. quum mane fuerit 28.28. die antecedenti 28.30. et ſequenti mane 28.10. Nox erat ſereniſſima, vti quoque

que dies ipſe, et aliquot antecedentes dies, ſequentes vero erant nubili et niuoſi. Ventus erat nullus, vti quoque per diem, quod inſignioribus frigoris gradibus exiſtentibus fieri vt plurimum ſolet. Diebus duobus antecedentibus ventus leniter ex oriente ſpirabat, ſequentibus vero proximis ex S. et W. Gradus frigoris inter horam 2. et 3. p. m. obſeruatus erat 188, adeoque differentia diurna tantum 9. Conſtat enim, ſi caetera ſint paria, duo potiſſimum interuallo 24. horarum eſſe tempora, quibus calor maximus et minimus contingere ſolet. Scilicet calor minimus, ſeu frigus maximum, regulariter ſub ſolis ortum eſſe ſolet, creſcit dein calor non ſolum ad meridiem vsque, quo ſolis altitudo maxima eſſe, adeoque maxime calefacere ſolet, ſed fere ad h. 3. p. m. quo rurſus decreſcit regulariter, niſi diuerſa tempeſtas obſtet, ad ſolis ortum diei ſequentis. Haec ratio eſt, cur obſeruationes thermometricae noſtrae mane ſint inſtitutae et poſt meridiem inter h. 2. et 3. Quodſi vero mane non ſint factae, nocte h. 11. inſtitui eas, quo tempore plerumque gradus iam obſeruari ſolet, qui gradui ſub ſolis ortum eſt ſaepe aequalis, aut proxime ad eum accedit.

Calor maximus 97. Iunii 24. inter horam ſecundam et tertiam p. m. obſeruatus ſub hiſce circumſtantiis accidit: In ſole thermometrum monſtrabat 88. vt adeo differentia inter thermometrum ſoli expoſitum, et thermometrum in vmbra collocatum fuerit nouem graduum. De hac differentia notandum eſt, eam admodum variari, licet totum coelum aequaliter ſerenum

videatur,

videatur, ita vt non nunquam graduum 25. et amplius mihi ſit hic obſeruata. Barometri altitudo erat 27.75, quum mane fuerit 27.80. et ab 28.26, quae altitudo die 20. fuit, ad hunc terminum lente deſcenderit, et ſequenti die ad 27.62. deſcendere perrexerit. Coelum admodum fuit vaporoſum, ita vt ſol tanquam diſcus ruber adparuerit, quod, aere vaporibus, praecipue exhalationibus, copioſis repleto, contingere ſolet. Ventus debilis ex oriente ſpirabat, vti quoque diebus duobus antecedentibus et conſequentibus. Circa h. 4. p. m. tonitru e longinquo eſt auditum, et pluuia parua cecidit, h. 10. autem pluuia ſatis larga, et tonitru, non tamen vehemens, fuit. Quum atmoſphaera inferior vaporibus et exhalationibus fuerit repleta, et barometrum altitudinem inſignem non monſtrauerit, calorque inſignis thermometro fuerit indicatus: mirandum non eſt, fulmineam tempeſtatem hoc die contigiſſe, dum omnes adfuerunt conditiones, ſub quibus tempeſtates fulmineae accidere ſolent. Vltra altitudinem 28.08. ſiue viginti octo pollicum pedis Pariſini et lineae vnius tempeſtas fulminea mihi hic non eſt obſeruata, quae ſcil. propius acceſſit.

Sequuntur meteora inſigniora per ſingulos huius anni menſes, vt venti, ſed tantum vehementiores, ſcilicet gradus tertii et quarti, qui poſteriores procelloſos notant, porro nebulae, nubes, pluuia, grando, nix, tonitrua cum fulminibus, halones circa Solem et Lunam, et aurorae boreales.

Men-

Menſis Ianuarius.

Ventus vehementior nullus eſt obſeruatus, niſi quod die 14. p. m. paullo vehementior ex occidente flauerit, qui vero iam circa veſperam ceſſauit. Conſtat generatim tempeſtate frigidiore ventos vehementes non oriri.

Reſpectu plagarum venti hoc menſe vt plurimum ex oriente et occidente ſpirauere, ſcilicet per 13. dies ex oriente, et per nouem dies ex occidente. Dies ſine vento fuerunt, vel vix ſenſibiles venti d. 2. 4. 9. 12. 13. 17. adeoque dies ſex.

Dies nubili et niuoſi hoc menſe fuerunt 14, reliqui 17. ſereni, licet pauci perfecte ſereni, qui hic ſunt rariores, quum coelum vt plurimum ſit vaporoſum, et nubes hinc inde ſimul deprehendantur.

Februarius.

Et hoc menſe nullus ventus vehementior eſt obſeruatus, niſi quod die 7. ex oriente paullo vehementior ſpirauerit, deſcendente quidem barometro, non tamen inſigniter. Venti debiliores reſpectu plagarum fuere hi; ventus ex oriente fuit per 10. dies, ex occidente 5. et ex meridie quoque per 5. dies, venti nulli die 6. et nocte die 27. Iam adnotatum eſt, et vulgaris experimentia docet, ventos per diem flantes vtplurimum per noctem fieri debiliores et ſaepius quoque nullos. Saepius quoque dies ſine vento ſequi ventos vehementiores, vti hoc menſe diem ſextum tranquillum ſequutus eſt die 7. ventus vehementior. Et contra ventos vehementiores excipere tranquillitas ſolet.

Dies sereni hoc mense tantum fuere 4. scilicet dies 20. 23. 27. et 29, reliqui plerique fuere nubili, pauci niuosi.

Martius.

Hoc mense ventus vehementior graduum 3. et 4. fuit die 17. per diem et noctem, irregularis, fere tamen ex W, barometro adscendente durante vento, neque ante ventum multum descenderat. Subitaneae temperiei mutationi hic ventus adscribendus videtur, dum thermometrum ab 173. ad 151. spatio 24. horarum fuit variatum. Venti debiliores respectu plagarum fere fuere ex occidente. Nam per 21. dies ventus W flauit. Ventus siluit d. 12. 19. 20. 21. 22. 27.

Dies sereni hoc mense fuere fere dimidii, reliqui nubili plerique, pauci niuosi.

Aurora borealis conspecta fuit die 15. placida, barometro 28. 12, thermometro 168. Sequenti die thermometrum monstrabat mane et nocte 174. p. m. autem 152. vento ex occidente 2, qui etiam eiusdem gradus antecessit aliquot diebus.

Aprilis.

Hoc mense ventus vehementior W 3. et 4. die 20. 21. flauit. Die 19. barometrum ab h. 2. ad 10. p. m. descendit a 27.90. ad 27.66, qui descensus celer ventum vehementiorem praenunciabat, durante autem procella d. 21. ad 28. 15. rursus adscendit, quod vtplurimum fieri solet. Reliqui venti fue-

fuere debiliores et admodum variabiles, quod hoc menſe fieri ſolet. Scilicet 6. W. 8. O. 6. S. 6. N. 2. ſine vento.

Hic menſis ſatis fuit ſerenus, quum 19 dies fuerint ſereni, reliqui nubili, niuoſi et pluuii. Pluuii nempe 10. 20. et 22. Sed quantitas pluuiae exigua fuit. Glacies Neuae die 9. ſoluta eſt, thermometro mane 147. p. m. 126, vento SW. Aprilis 9. fere medius eſt terminus temporis, quo glacies Neuae abire ſolet, maximus enim terminus ad huc eſt Apr. 26. qui bis occurrit ab a. 1718. ad hoc tempus, ſcilicet 1739. et 1742; minimus Mart. 22. qui ſemel occurrit 1723. Ergo differentia eſt 35. dierum et medius inter diem 8. et 9. Aprilis incidit.

Maius.

Venti vehementiores fuere d. 19 20. W. 3. et 4. Die 17. barometrum erat 27.95. et deſcendebat ad diem ſequentem ad 27.35, durante vero vento ad 27.68. rurſus adſcendit. Tempeſtas fuit pluuia cum grandine. Venti lenes W. 21. et O. 4.

Dies ſereni huius menſis fuere viginti, reliqui dies nubili et pluuii, pluuii ſcilicet d. 18. pluuia 4. lineas alta, die 19. 2. lin. d. 20. lin. 2. Tota igitur altitudo pluuiae hoc menſe lapſae fuit tantum 8. linearum, ſiue pollicis dimidii pedis Pariſini et duarum linearum.

Grando pauca d. 12. inter h. 10. et 11. cecidit, itemque d. 20. cum pluuia antea indicata.

Halo circa ſolem coloribus praedita conſpecta mihi fuit die 25. inter h. 11. et 12, coelo tenuiſſimis nubibus, vt alias, obducto.

Iunius.

Hoc menſe ventus vehementior nullus eſt obſervatus, omnes venti fuere debiles fere W. et O. Scilicet per 13. dies ventus ex occidente, per 10. ex oriente ſpira ut. Dies ſine vento 3. 5. 17. noctes 29. et 30.

Dimidius fere menſis fuit ſerenus, ſiue praeciſe 13. dies, reliqui fuere pluuii cum tempeſtatibus fulmineis. Pluuii fuere dies 6^{tus}, quo ſimul primum tonitru mihi eſt auditum. Altitudo pluuiae 4 linearum fuit. Ventus durante tempeſtate inter h. 7. et 8. p. m. variabilis fuit modo W modo O modo S. Barometrum 27 82. et thermometrum h. 2. p. m. 112, porro dies pluuii fuere 7^{mus}, vbi altitudo pluuiae 6. lin. dies 8. vbi pluuia 2. lin. dies 9. pluuia 4. lin. d. 10. pluuia cum grandine 2. lin. d. 11. pluuia cum grandine piſi magnitudine maioris 3. lin. d. 16. pluuia 6. lin. d. 21. pluuia cum tonitru et exigua grandine 2. lin d. 24. pluuia cum tonitru 1. lin d. 25. tonitru cum pluuia 4. lin. Die 26. magna pluuia 1. pollicis et 7. linearum, cum grandine, tonitru et fulminibus perpetuis. Die 27. tonitru cum pluuia 8. lin. Die 29. pluuia exigua lin. 1. Barometrum diebus pluviis et turbidis vltra altitudinem 27.95. non adſcendit, plerumque haerebat circa numeros inferiores niſi quod ſemel d. 21. fuit 28.12, quo pluuia cum grandine

dine cecidit et tonitrua cum fulminibus fuere. Thermometrum diebus, quibus tonuit, gradum 23. maiorem non monstrauit.

Ex hisce obseruationibus adparet: 1) dies pluuios hoc mense fuisse 13, et quantitatem pluuiae 5. pollicum pedis Paris. et 2. linearum 2) tonitrua cum fulminibus fuisse 6. 3) grandinem cecidisse quater.

Iulius.

Mense Iulio ventus vehementior nullus contigit, venti debiles plerique ex oriente flauere, scilicet per dies 21, et ex occidente per dies quatuor. Sine vento dies 22. solus fuit.

Tonitru nullum toto hoc mense contigit, quod satis insolitum est.

Dies sereni 14, reliqui nubili, sed plerique pluuii, et quidem pluuii dies 3. 4. 10. 11. 13. 14. 18. 23. 24 25. adeoque 10. Quantitas pluuiae fere fuit 4. pollicum Parisiensium.

Augustus.

Neque hoc mense ventus vllus vehementior obseruatus est. Venti debiles ex oriente et occidente vt plurimum spirauere, et quidem per 13 dies ex oriente et per 10 ex occidente. Sine vento d. 1. 16, saepius autem noctibus. Tonitru hoc mense est obseruatum die 17. cum pluuia inter h. 2. et 3. p. m. thermometro 115, barometro 27. 92. Ventus W paullo vehemens durante tempestate, vt solet, fuit.

Nebula conspecta die 30. vento O 1, quam nocte pluuia sequuta est.

Dies sereni fuere 15, reliqui nubili et pluuii, pluuii scilicet 6. dies 8. 17. 18. 21. 23. 30. Quantitas pluuiae $3\frac{1}{2}$. lin.

September.

Venti vehementiores hoc mense flauere tres, die 22. W 3. et 4. d. 25. S. 3. et 4. d. 27. W 3. et 4. Barometro flantibus his ventis insigniter descendente.

Caeterum venti debiliores ex occidente spirarunt die 2. 11 16 22. 28. 30. adeoque per sex dies. Ex oriente diebus 1. 3. 8. 10. 12. 13. 29. adeoque septem. Ex meridie semel die 25. Ex septentrione d. 5. 20. reliqui ex plagis intermediis. Sine vento fuere dies 9. 14. 15. 16. 21. adeoque quinque.

Dies sereni 6. scilicet 2. 8. 10. 21. 23. 28. reliqui nubili et pluuii. Pluuia cecidit die 1. 4. 7. 18. 22. 26. 27. 29. Quantitas pluuiae $3\frac{1}{2}$. poll.

Grando cecidit bis die 22.

Nebulae fuere d. 11. 20.

Pruina die 11. et congelatio prima thermometro 150.

October.

Venti vehementiores hoc mense fuere d. 1, W 3. d. 9. nocte N 3 et 4. d. 12. W 3. et 4. Reliqui venti maiorem partem fuere W scilicet per dies 22.

Sine

Sine vento dies 6. fuere, nimirum 8. 21. 23. 25. 27. 31.

Dies fereni 12. fcilicet 5. 6. 10. 11. 13. 16. 17. 19. 20. 21. 28. 29 reliqui nubili, pluuii et niuofi. Pluuia d. 3. 8. 22. 27 30. et 31. adeoque per fex dies.

Niues die 9. 12. 14. 16.

Grando d. 3. et 4.

Nebulae die 24. 27. 31.

Nouember

Hoc menfe duo venti vehementiores funt numerati, nimirum die 26. et 28. W 3. tantum nocte. Reliqui omnes admodum debiles fuere et quidem W et NW 4. fcilicet die 6. 26. 27. 29. O et S. O 10. fcil 7. 9. 12. 13. 17. 18. 21. 24. 25. 30. N d. 3 et 5. S d. 4. et 22.

Sine vento dies 4. 10. 11. 15. 16. 19. 20. 29. adeoque octo.

Dies fereni 5. nimirum 4. 5. 19. 21. 29.

Pluuia cum niue d. 1. Niues d. 3 6. 7. 10. Pluuia d. 11. Nix d. 12. 13. 22. Pluuia d. 25. Nix d. 28. et 30.

Nebula craffior die 20. 2 m.

Glacies in flumine Neua adparere coepit die 2. nocte, thermometro 166. fequenti die 3 h. 10. p. m. glacies iam ftetit, thermometro 164. Saepius, quin perpetuo, obferuauimus gradu frigoris ad 166. perueniente et aliquot dies durante, glaciem in Neua adparere incipere, et mox ftare, nifi fubito tempeftas mitior incidat. Conftat iam ex antecedentibus et aliunde terminum maxi-

mum,

mum, quo flumen glacie constrictum est, esse Nouembris 30, qui ter ab 1718. adhuc fuit obseruatus, scilicet 1719. 1727. 1729. et minimum die 23. Octobris, qui semel est notatus 1750. Differentia igitur maxima est 39. dierum, hinc medius numerus est fere Nouembris 20, quo die quoque intra tempus dictum quinquies coiit glacie flumen. Idem huius anni terminus fuit quoque 1748. notatus.

December.

Mense Decembri venti vehementiores obseruati sunt sequentibus diebus 16. et 17. W 4. die 29. 30. et 31. N W. 3. et 4.

Venti reliqui leniores primum ex occidente spirarunt 13. dies. Ex S per sex dies, totidemque dies ex N. et semel ex O. Sine vento nullus fuit dies hoc mense nisi 3. ex parte.

Dies sereni fuerunt quinque scilicet 2. 3. 9. 12. 23. Niuosi vero nouem, reliqui tantum nubili.

Quodsi meteora integri huius anni hactenus recensita considerentur et conferantur, adparet

1) Ventos vehementiores per totum annum fuisse 18, scilicet mense Martio 1. Apr. 3. Maio 2. Sept. 3 Octob. 3. Nou. 2. Dec. 4, eosque vt plurimum W. Vnus enim tantum mense Septembri fuit S, et vnus N. Octob. Dec. duo N W, et siue vento vehementiori fuere Ian. Febr. Iun. Iulius, Augustus.

2)

2.) Ventos potiſſimum ſpiraſſe ex W ſcilicet 134. dies vt Ian. 9. Febr. 5. Martio 21. Apr. 6. Maio 21. Iun. 13. Iul. 4. Aug. 10. Sept. 6. Octobr. 22. Nou. 4. Dec. 13. Praecipue igitur menſibus Martio, Maio, Octobri.

Ventos ex oriente 93. ſcilicet 13. Ian. 10. Febr. 8. Apr. 4. Maio 10. Iun. 21. Iul. 13. Aug. 7. Sept. 10. Nou. 1. Dec. Ergo potiſſimum menſe Ian. Iul. Auguſto.

Ex meridie 18.

Ex Sept. 16. Dies autem ſine vento fuiſſe 44. Hinc intelligitur, ventum ex occidente hoc anno fuiſſe frequentiſſimum, quod et alias fieri ſolet, ventum ex oriente ſatis quoque frequentem, minus autem frequentes ex meridie et ſeptentrione. Per 60 autem dies ex plagis diuerſis intermediis flauit.

3.) Dies ſereni integro hoc anno fuere 144. ergo tertia pars et amplius fuit ſerena.

4.) Dies pluuii menſibus aeſtiuis Maio, Iulio, Auguſto, Septembri fuere 40. ſcilicet Maio 3. Iunio 13. Iulio 10. Auguſto 6. Septembri 8.

Quantitas pluuiae fuit 16 pollicum Pariſinorum et 9 linearum in his diebus: nimirum menſe Maio octo linearum, Iunio 5. pollicum 2. lin. Iulio 4. poll. Auguſto poll. 3. lin. 6. Sept. poll. 3. lin. 5. Hinc aeſtatem ſolito humidiorem fuiſſe conſpicitur, adeoque minus quoque fertilem, dum propter copioſam pluuiam et foenum et frumentum multum corruptum eſt, ſatis laete creuit foenum tamen in locis aridioribus.

5) Grandines per integrum annum cecidere per 9 dies scilicet Maii 12. et 20. Iun. 10. 11. 21. 26. Sept. 22. Octobr. 3. et 4.

6.) Nebulae fuere mihi septem obseruatae, nimirum Augusti 30. Sept. 11. et 20. Octobr. 24. 27. 31. et Nou. 20. quae thermometro 176. monstrante accidit, et admodum spissa adparuit, flumine iam a die 3. huius mensis glacie obducto, quod frequenter non contingit.

7.) Tempestates fulmineae fuere septem, quae, excepta vna, omnes mense Iunio fuere, scilicet die 6. quo primam obseruaui, die 21. 24. 25. 26. 27. Augusti 17. fuit vltima.

8.) Prima pruina et congelatio mature contigit, scilicet Sept. 11, vti vltima huius anni fuit Aprilis 24. adeoque differentia est 4. mensium 17. dierum, quod tempus $4\frac{1}{2}$ mensium circiter, menses aestiuos, siue aestatem hic fere constituere solet.

9.) Halo vnica eaque circa Solem cum coloribus est obseruata Maii 25, quae alias circa Solem praecipue autem Lunam esse frequentiores solent.

10) Aurora borealis vnica tantum insignis secundum obseruationes meas contigit, nocte inter diem 15. et 16 mensis Martii, licet saepius vestigia lucis borealis adparuerint.

11.) Si quatuor tempestates fixae porro comparentur, adparet, hiemem satis gelidam et constantem fuisse, ver adhuc satis frigidum, contra aestatem et autumnum humidiores, hinc annum in his locis minus fertilem.

Ad

Ad haec ſequentia addere placet:

Conſtat iam alias, declinationem acus magneticae hic loci parum eſſe variabilem, hinc nullam differentiam inter declinationem huius et anni ſuperioris notare mihi licuit; manet igitur declinatio $4\frac{1}{2}$ graduum fere occidentem verſus.

Fuerunt, qui exiſtimarent maculas ſolares influxum quoque in tempeſtates habere. Quamuis haec ſententia probabilis non videatur, quum effectus eiusmodi obſcurationum Solis per maculas vix ſenſibiles in atmoſphaera noſtra videantur: adnotare tamen hic lubet hoc anno maculas in Sole fuiſſe copioſiſſimas, nullo enim die ſereno Solem tubo 5 pedum contemplatus ſum, quin maculas conſpexerim plures, Decembris 21. duodecim ſimul mihi obſeruare contigit. Quaedam multo maiores adparebant, quam Mercurius ſolet, Solem tranſiens.

Denique quum nullum ſit dubium, quin aer atmoſphaericus, et tempeſtates anni ſuos in corpus humanum, eiusque ſanitatem exſerant effectus; morbos praecipue hoc anno humido graſſatos, addere volui. Fuere autem illi praecipue febres inflammatoriae, peripneumoniae, pleuritides, petechiales, catarrhales, quae vltimae fere omnibus menſibus fuere obſeruatae, variolae, ſcorbutus, febres intermittentes, acutae, peracutae cum deliriis, arthritides, et menſe Octobri quoque anginae. Diarrhoeae ſatis frequentes, vt alias, quoque fuere.

DESCRIPTIONIS PISCIVM RARIORVM E MVSEO PETROPOLITANO EXCEPTORVM CONTINVATIO.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

IV.

Cyprinus pinna caudae horizontali, subtrifida; dorsuali fastigata, paruula.

DESCRIPTIO.

Tab. IX. fig. 1. et 2. Colorem huius Cyprini, quem propinqua affinitate cum Chinensi aurato esse coniunctum, pinna caudae horizontalis prodit, olim fuisse argenteum, et branchiarum operculi laminae, et squamae, hinc et inde argenteo adhuc nitentes splendore, probare videntur.

Corpus ab oris extremo rectius primum, notabiliter tamen statim adscendit, et arcuato dein sub flexu pinnam dorsi petit; abhinc descendit sub arcu leuiter concauo ad eminentiam quandam vsque, subacutam, paruam, a qua denuo vlterius ad caudae pinnam, sub arcu leuissime conuexo, descendit.

Idem ab oris extremo, sub flexu minus arcuato, quam quo ad dorsi pinnam adscendebat, ad pinnarum pectoralium regionem descendit, dein rectiorem sequitur

tur curſum ad pinnas vsque ventrales, et ab his denique ad caudae pinnam eodem modo ſenſim adſcendit, quo ab oris extremo antea deſcendebat. Differt itaque a vero Chinenſium Cyprino „ pinna ani gemina, caudae „ transuerſa triſurca Linn. Syſt. Nat. edit. dec. p. 322. „ n°. 8. „ quem pariter ad manus habebam, dum haec ſcriberem, quod huius corpus ab oris extremo verſus dorſum aequali fere ſub arcu adſcendat, quo abdomen verſus deſcendit, et pari quoque modo a dorſi pinna ad caudam deſcendat, quo a pinnis ventralibus ad eandem adſcendit. Sic etiam Cyprini Chinenſis caput multo magis obtuſum eſt, quam noſtratis, quod in illo ab oris extremo ſtatim arcuato ſub flexu ad dorſi initium adſcendit, cum in hoc rectiori ſub ductu idem attingat.

Prona capitis ſuperficies anteriora verſus planiuſcula, poſteriora verſus ſubconuexa eſt. Dorſum ab initio conuexum, ſenſim in ſubacutum marginem pinnam ſuam verſus contrahitur, pone quam, ſi eminentiam iſtam ſubacutam, de qua ſupra dixi, quaeque pinnae ani principio e directo opponitur, excipias, conuexum iterum ambitum ad extremum vsque oſtendit. Abdominis e contrario ſuperficies ab angulo coniunctionis vtriusque membranae branchioſtegae e conuexa ſenſim planior fit, inter pinnas ventrales et anum in ſubacutum contrahitur marginem, et pone pinnae ani finem planitiem denuo acquirit notabilem. Latera capitis infra et ante oculos plana, circa branchiarum opercula ſubconuexa; qualia etiam trunci ſunt latera, ad anteriora tamen magis, ad poſteriora minus.

Oris edentuli, leuiter prominentis, labia carnosa, immo carnosiora mihi visa, quam in Cyprino Chinensi.

Foramina Narium vtrinque duo, in eadem fere cum superiore orbitae margine posita altitudine, eidemque, quam oris extremo, propiora: anteriori subrotundo, minori; posteriori maiori, semilunari, membranula retrorsum spectante, velut operculo, obtecto.

Oculi satis magni, limbo superiore magis prominentes, quam inferiore, maximam partem intra orbitam recondito.

Opercula branchiarum cum membrana branchiostega eiusdem plane sunt conformationis, ac in Cyprino Chinensium. Membrana, qua illorum margo auctus deprehenditur, non tantum iuxta pinnarum pectoralium principium, id quod manifesto attingit, sed etiam ad ipsius cum membrana branchiostega coniunctionem, latior multo est, quam versus angulum operculorum superiorem.

Squamae cuti arcte inhaerentes, et respectu corporis magnae; quaedam sc. ex maioribus detractae, $1\frac{1}{4}$ lin. latae, et $1\frac{1}{5}$ lin. longae, margine libero rotundatae, altero truncatae et emarginatae erant.

Linea longitudinalis ex angulo operculi branchiarum superiore prodiens, ab initio sensim descendit ad regionem vsque, principio pinnarum ventralium e directo oppositam, sensimque ex obliquo in rectum extensa, immutata directione, excurrit supra extremam et horizontaliter expansam corporis partem lateralem, qua exterior pinnae caudae lobus sustentatur,

et

et iuxta radii eiusdem pinnae medii maiorisque basin finitur, in toto decursu dorso, quam ventri, propior.

Anus leuiter prominens, ante pinnae ani principium situm obtinet. Iuxta pinnae huius finem, in sinistro latere, ex abdominis margine inferiore papilla quaedam dependet, pedunculo crassiusculo suffulta, de qua dubius sum, num ex statu morboso, an naturali, ortum suum duxerit?

Pinnae pectorales radiorum quindecim circiter, a primo ad tertium, qui longissimus est, ex ordine longiorum, et ab hoc ad vltimum ex ordine breviorum.

Pinna dorsi parua, respectu ventralium, paullo anterius sita, radiorum sex: primus horum breuis setaceus, secundo arcte adpressus; secundus omnium fortissimus, simplex. leuiter incuruatus, rigidus, postico margine denticulis oblique deorsum spectantibus instructus, tertio breuior; tertius omnium longissimus, tenuior; reliqui ex ordine breuiores ac tenuiores, vltimo excepto, qui penultimo et antepenultimo fortior est.

Pinnae ventrales radiorum octo, quorum primus secundo paullo breuior, secundus tertio, longissimo, caeteri ex ordine breuiores sunt.

Pinna ani vnica, radiorum septem: primus setaceus, secundo dimidio breuior, eique arcte adpressus; secundus omnium fortissimus, rigidus, simplex, margine postico denticulis, oblique sursum spectantibus, instructus, rectus, tertioque paullo breuior; tertius longissigissimus, et ab hoc inclusiue ad vltimum omnes in extremitatibus ramosi, ac ex ordine breuiores; vltimo bipartito.

Pinna caudae horizontalis, magna, vtrinque leviter deflexa, inaequaliter trifurcata, radiisque circiter triginta sex composita: 1mus, 2dus ac 3tius, ab vtroque latere, radii breuissimi, vix conspicui; 4tus, 5tus et 6tus, omnium longissimi; caeteri ex ordine iterum breuiores ad intimum vsque pinnae caudae lobum, quocum vterque lateralium angulum obtusum efficit; huius denique, intimi nempe, radii, ab extimis ad interiores, ex ordine longiores sunt, interiorumque vnus reliquis fortior factus est, magisque ad basin suam prominulus. Lobus etiam eiusdem pinnae dexter sinistro paullo maior, medius autem lateralibus longe breuior est; et, quoniam modo dictae pinnae latera modice deflexa sunt, basis eius squamata, sub cauda, concaua ex parte apparet. Desuper, me caudae pinnam in vero Chinensium Cyprino paullo aliter formatam deprehendisse, quam quidem a Cel. *Linnaeo* in Actis Stockh. 1740. p. 403, T. 1. f. 1—8. vers. germ. descripta exstat, praetermittere nolui: erat nempe in tres lacinias, aequalis inter se longitudinis, diuisa, quarum media partem dimidiam pinnae caudae perpendicularis, qualem in piscium plurimis ordinarie videmus, eamque superiorem, repraesentabat, illiusque instar radiata quoque erat; radii enim, 1, 2, 3, 4 et 5 omnium minimi et simplices, a primo ad quintum ex ordine longiores; sextus et septimus, omnium longissimi ac fortissimi; octauus, nonus et decimus prio-

prioribus paullo breuiores ac tenuiores; omnesque, exceptis quinque vel ſex ſuperioribus, in extremitatibus ramoſi erant. Huius laciniae, decem radiis conſtructae, radio infimo intimus vtriusque lateralis ac horizontalis laciniae radius, membranae ope, radios pinnarum ſolito more connectentis, iungebatur. Singula harum lacinia, ſub angulo plus minusue recto cum media, mediante iam dicto radio, connexa, e quindecim conſtabat radiis: extimis quatuor, omnium minimis; quinto, ſexto et ſeptimo, omnium longiſſimis ac fortiſſimis; caeteris, ab octauo ad decimum quintum, qui intimus erat, ex ordine breuioribus; omnibusque, ſi quatuor vel quinque exteriores exceperis, in extremitatibus ramoſis. Baſis huius pinnae ſub cauda erat excauata, prout etiam in *Linnaeana* deſcriptione monetur, medium autem eiusmodi in intermedia pinnae lacinia radium, reliquis fortiorem, ab iisque forma maxime diſtinctum, qualis in icone proſtat, et deſcribitur, non vidi. Ea propter autem deſcriptionem, a Cel. Viro datam, mendo laborare, non contendam, cum in ſupra deſcripto piſce caudae pinnam ei per omnia fere ſimilem eſſe, ipſe viderim, qualem in Cyprino ſuo deprehendit Auctor, fide digniſſimus, ſed exponam potius hanc ſtructurae varietatem, tanquam maxime ſingularem, in dubio haerens, vtrum diuerſam plane ſpeciem, varietatemue tantum, an ſexus diuerſitatem potius indicet, erat autem maſculus, caeterum Chinenſi ſimillimus, ſi excipias, quod dorſi pinna in noſtrate viginti, ventrales octo tantum, radiis fuerint inſtructae.

Menſura.

	Ped. Pariſ.	Poll.
Longitudo tota, ſcil. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum -	2	2
— — — ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - -	1	$9\frac{1}{2}$
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	-	$2\frac{1}{2}$
— — — ad angulum operc. br. poſticum -	-	7
— — — — principium pinnarum pectoralium -	-	$6\frac{1}{2}$
— — — — — — pinnae dorſi - - - -	-	10
— — — — — — pinnarum ventralium -	-	$10\frac{1}{2}$
— — — — — — pinnae ani - - - -	1	$3\frac{1}{3}$
— — — — — — — — caudae - - - -	1	7
— — — — ad anum - - - - - - -	1	3
Longitudo pinnarum pectoralium - - - -	-	$4\frac{1}{2}$
— — — pinnae dorſi, ad baſin - - - -	-	$1\frac{1}{4}$
— — — — — — radiorum longiorum - -	-	$3\frac{1}{2}$
— — — pinnarum ventralium - - - -	-	4
— — — pinnae ani, ad baſin - - - -	-	$2\frac{1}{2}$
— — — — — — radiorum longiorum - -	-	3
— — — pinnae caudae, ſcil. a primis radiis, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices - - - - - - - - - -	-	7
Extremitas corporis ſquamoſa, in caudae pinnam extenſa ad - - - - - - -	-	1
Diameter oculi fere - - - - - - -	-	2
Diſtantia inter primi pinn. pect. primique pinn. ventr. radii baſin - - - - -	-	$3\frac{3}{4}$

Diſtan.

	Ped.	Poll. Pariſ.
Diſtantia inter vltimi pinnae dorſi radii baſin, et primum pinnae caudae radium - -	-	$9\frac{1}{2}$
- - - - vltimi pinnae ani radii baſin, et primum pinnae caudae radium - - -	-	$1\frac{1}{2}$

	Lin.
Latitudo horizontalis per oculorum axes - -	$3\frac{1}{2}$
- - - - - - - - poſticum operc br. marginem - - - - - - - - - - -	$3\frac{2}{3}$
- - - - - - - - maximam corporis latitudinem, quae in operculum branchiarum cadit - - - - - - - - - - -	$4\frac{1}{4}$
- - - - - - - - pinnae dorſi principium	$3\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - ani principium - -	$1\frac{1}{3}$
- - - - - - - - - caudae principium -	$2\frac{1}{3}$
Latitudo perpendicularis per oris angulum - -	$1\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - oculi medium - -	$4\frac{1}{3}$
- - - - - - - - - dorſi initium - -	6
- - - - - - - - - principium pinnarum pectoralium - - - - - - - - - -	7
- - - - - - - - - - - - - ventralium - -	6
- - - - - - - - - - - - - pinnae ani - - -	$3\frac{1}{4}$
- - - - - - - - pinnae ani finem - - -	$1\frac{2}{3}$
- - - - - - - - principium pinnae caudae -	1

* * *

V.

Gobio pinna ventrali ſubrotunda, acetabuliformi, e duobus pedunculis, octoque radiis, valde ramoſis, compoſita.

DESCRIPTIO.

Tab. IX. fig. 3. et 4.

Color Piſcis, cuius deſcriptionem nunc aggredior, in praeſenti pallide brunus, circa os ſubfuſcus, ſub gula et abdomine cinereus erat.

Corpus forma maxima ex parte, eaque anteriore, ſubteres, poſteriore cathetoplateum, eiusdemque fere vbique latitudinis, craſſitiei autem ab anterioribus poſteriora verſus ſenſim decreſcentis. Idem ab oris extremo ad capitis verticem adſcendit, adſcenſuque ſuo, leuiſſimo quidem, ad pinnae dorſi principium vsque pergit, inde vero ſecundum rectam fere lineam ad extremum vsque vix notabiliter deſcendit. Sic quoque ab maxillae inferioris extremitate acetabulum verſus mediocriter valde adſcendit ab eiusque dein poſtico margine anum verſus leuiter deſcendit ſub ductu parum conuexo, abhinc vero ad extremum vsque, vt ſupra, curſum fere rectilineum obſeruat. Hinc caput ipſo corpore demiſſius; dorſum ab initio, ad pinnam ipſius primam, planiuſculum, in medio ſecundum longitudinem ſulco ſuperficiali diſtinctum, qui ad anteriora latior, poſtice anguſtior eſt, in aliquali a pinnae iſtius principio diſtantia plane euaneſcit, colore, quam latera, intenſiore tinctus; reliquum dorſi iuxta pinnas ſubconconuexum, interque posterioris finem et caudae pinnae initium planiusculum est. Inferior corporis superficies ante acetabulum subconuexa, pone illud vsque ad anum in carinam mediocriter elauatam contracta, eiusdemque ad latera sinuata, ab ano vero, tam iuxta pinnam, quam pone eam ad caudae pinnam vsque planiuscula apparet. Latera corporis, a capite pinnae dorsualis secundae regionem versus, conuexa primum, inde, mutata sensim in planitiem conuexitate, ad extremitatem vsque plana sunt.

Caput latius parum, quam altum, hinc quodammodo plagioplateum tam inter oculos, quam infra eos, dein, vbi in decliue oblique antrorsum abit, e planiusculo leuiter impressum, est. Os, respectu corporis, amplum; rictus enim diameter transuersa toti capitis latitudini aequalis est. Labium maxillae superioris latum, crassum, liberum, inque oris extremo, leporini labii instar, fissum, oblique parum retrorsum flexum: margine exteriore longiore, magisque prominente, interiore breuiore, denticulis contiguo. Ex huius, interioris nempe, medio, proxime infra labii fissuram, papilla quaedam parua prominet. Labium inferius, quod pari cum superiore fissura notatur, ipsamque maxillam inuestit, prominet, ac ab antico ipsius et subacuto margine oblique sursum introrsumque versus dentes ducitur, vtrinque appendice, qua mediante cum superiori ad oris angulos coniungitur, auctum.

Vnica in maxilla superiore denticulorum, iuxta internum labii superioris marginem conspiciendorum series eſt, qui, quum minutiſſimi ſint, ſetarumque potius breuium, plurimarum, ac denſe compoſitarum formam habeant, numerari vix poſſunt. Dentes in maxillae inferioris ſummo margine vtrinque quatuor tantum, vel quinque, aliquali ſpatio a ſe inuicem diſtantes, breues quidem, aſt e latiori baſi in acumen introrſum incuruatum terminati, immobiles. Lingua lata, palato inferiori vndique adnata, ſuperficieque inaequali praedita. Maxilla inferior, et ore clauſo, ſuperiore notabiliter breuior, extremo ſuo et acuto margine huius denticulorum ſeriem vix attingit

Foraminula, quae a tubulis oblique truncatis, mucum ſecernentibus, vtplurimum formantur, in capite ſeptendecim obſeruaui, tria ſc. inter, quatuor ante oculos, et quinque ex vtroque latere, inter inferiorem oculi marginem ac ſuperiorem operculi branchiarum angulum obuia. Quae inter oculos ſunt, in triangulum diſponuntur, duo nempe anteriora, parallela, et vnicum in medio, poſticum; eorum vero vnum ab altero $1\frac{1}{2}$. lineam diſtat. In dimidiae lineae diſtantia ab oculi margine antico aliud occurrit, patulum, absque tubuli veſtigio, quod ſetam immiſſam in profundum ducit, huicque in vnius ac dimidiae lineae diſtantia directe anteponitur aliud, tubuloſum, e quo ad praecedens haud datur aditus. An haec duo, ante ſingulum oculum collocata, narium vices gerunt? an plenarius harum defectus? diſcernant ii, quibus Piſcem hunc diſſecandi dabitur occaſio. Sequuntur ea, quae pone oculum in vtroque latere occurrunt; vnum horum dimidiam ab oculi inferiore ac poſtico margine lineam remo-

remotum, dein alia tria videbis, in triangulum difpofita, et vltimum tandem in vnius ac dimidiae lineae diftantia a praecedentibus, proxime fupra operculi branchiarum fuperiorem angulum fitum. Praeter haec recenfita foramina et alia adfunt, longe iis minora, de quibus vero nimis prolixum effet dicere. Huc etiam fpectant areolae iftae fcrobiculatae, quae infra inferiorem orbitae marginem in confpectum veniunt, pro muci lacunis forte habendae.

Oculi, trium fere linearum interuallo inter fe diftantes, fitum inter perpendicularem et horizontalem medium obtinent, nec magni funt, nec prominentes, vt in prius defcripta fpecie fub n°. III, cute tamen communi pari modo obtecti.

In membrana branchioftega, abfque fectione tria tantum detegere potui officula. Haec ipfa fub operculo libera adfcendit, eiusdemque angulo poftico, fuperiori, demum annectitur, limbo fuo ad pofteriorem operculi marginem prominens. Nec ad branchias vlla patet apertura, quae ab ifto membranae branchioftegae limbo, pinnarum pectorialium bafin lambente, formatur, quaeque tam ampla eft, vt latae harum bafi exacte refpondeat.

Squamae fubquadratae in circumferentia, a $\frac{1}{3}$ ad 1. lin. longae, pellucidae, fecundum longitudinem ftriatae, limbo libero, quin in externo latere ftria transuerfa ab altero, cuti inhaerente, diftinguitur, obfcuriores, craffiores, ftriisque longitudinalibus, prominulis, quarum extremitates, denticulorum fub forma, a limbi iſtius margine prominent, inſignitae, hinc ad tactum leuiter aſperae ſunt. Magnitudo ſquamarum ab anteriori verſus poſteriorem corporis partem ſenſim increſcit, diametro longitudinali transuerſam ſuperante. Squamae omnium minimae, quae anteriora corporis occupant, ſubrotundae ac tenuiſſimae ſunt. In capite, operculo branchiarum, dorſi et abdominis initio ſquamarum ne veſtigium quidem apparet.

Linea longitudinalis valde obſcura, vel potius nulla.

Anus oris, quam pinnae caudae extremo propior, poſt ſe gerit papillam latiuſculam, ex ſinu prodeuntem ac retrorſum ſpectantem, extremoque ſuo apice pinnae ani primi radii baſi fere contiguam.

Pinnae pectorales, ad latera corporis, baſi ſua carnoſa aperturae ad branchias patenti oppoſitae, ex ouato-lanceolatae, radiisque ſeptendecim inſtructae: exterioribus ab vtroque margine ad intimum vsque ex ordine longioribus, plurimis ramoſis. Pinnae ventrales inter ſe connatae, orbiculum concauum, ſeu acetabulum, repraeſentant, in aequali cum pinnis pectoralibus ab oris extremo diſtantia ſitum. Eſt autem illud in circumferentia ſubrotundum, diametri $4\frac{1}{2}$. linearum, antice duobus quaſi pedunculis, craſſiuſculis, breuibus, impreſſis, ceu fulcris, vel columellis, firmatum, radiisque praeterea octo, ſub angulo acuto ab abdomine reflexis, parumque dein inflexis, valde ramoſis, compoſitum. Pedunculi iſti, duarum linearum interuallo inter ſe diſtantes, ad baſin anguſtiores, ſuperne latiores, acetabu-

lum

lum verſus impreſſi, et infracti quaſi ſunt, ac, licet ad anticum illius latus formandum ſuam addant ſymbolam, ab ipſo tamen acetabulo et proximis eius radiis prominent; hinc ſinum etiam efformant ſatis profundum, inter ipſorum baſes ac externam acetabuli lateris antici faciem relictum. Idem illud anticum acetabuli latus, quod vtrumque pedunculum connectit, radiis omnino deſtitutum, membranaceum ac pellucidum eſt, limbo tamen excepto, qui craſſior, obſcurior, extrorſum flexus, et pedunculorum propago eſſe videtur. Vtriusque pedunculi lateri, primum atque diſtinctum maiorem radium reſpicienti, arctiſſime iungitur radiolus quidam ſpurius, qui aeque ac ſequentes in ramos finditur, illorum partialibus radiolis tenuiores quidem, arctiorique vinculo inter ſe iunctos, pro pedunculi ipſius parte, ob arctiorem cum eo nexum, facile habendus. Inter ſpurii huius primique baſes interſtitium oblongum, mere membranoſum ac pellucidum eſt, interſtitio, quod inter veros occurrit radios, membranoſo breuius quidem, aſt multo latius. Radices octo inſequentium radiorum, quorum in vtroque corporis latere, ſeu in dimidia acetabuli parte, quatuor collocantur, oſſeae, diſtinctae ab ipſorum radiato flabello, breues ac latiuſculae ſunt, retrorſumque parum inclinatae. Radii ipſi, valde inter ſe contigui, a primo ad quartum, ex ordine, parum quidem, longiores, in ramos ſiue radiolos, ſtatim a radice finduntur tenues, ſimplices, eundoque diuergentes. Primum dextri lateris radium 7, ſecundum 10, tertium 9, quartum pariter 9; primum vero ſiniſtri lateris 7, ſecundum 8, tertium pariter 8,

 quar-

quartum 9, minoribus eiusmodi radiolis instructum esse obseruaui; adeoque numeros vnius lateris certas inter se non habere rationes, per se patet. Licet posteriores radii $2\frac{1}{2}$. circiter lin. longi, anteriores vero paullo breuiores sint, ob illorum tamen maiorem versus anum inclinationem, idem fere vbique habet profundum atque altitudinem acetabulum, si anticum eius latus excipias, quod ob ipsius limbum extrorsum deorsumque flexum postico parum demissius est. Latera acetabuli externam superficiem conuexam, internam concauam habent; fundus autem, qui acetabuli partem, corpori adnatam, constituit, $2\frac{1}{2}$. lin. latus ac planus est, eiusdemque ad marginem, lateribus proximum, radiorum ossicula radicalia cum interstitiis subconcauis, quae inter se relinquunt, in conspectum veniunt. Notandum etiam est, octo istorum radiorum, quibus maxima ex parte acetabulum formatur, inferiorem portionem, eamque potiorem, substantiae esse firmioris, rigidioris ac minus pellucidae, quam superiorem, siue acetabuli limbum, qui ab ista distinctissimus, tenuis, flexilis, pellucidus ac integerrimus est.

Pinna dorsi prima, principio suo acetabuli lateri postico fere e directo opposita, sex radiorum, rigidiusculorum, quorum vltimus a penultimo longius dissitus est, quam caeteri inter se inuicem radii, radicibus sc. eorum $1\frac{1}{2}$. lin. interuallo inter se distantibus. Quoniam omnes huius pinnae radii, vltimo, $5\frac{1}{2}$. lin. longo, excepto, mutilati fuerant, veram eorum longitudinem indicare non potui. Membrana, a posteriore imoque vltimi radii margine versus alterius pinnae initium expansa, primam secundae pinnae contiguam efficiebat. Pinna

Pinna dorſi ſecunda radiorum 11, primus ſecundo parum breuior, ſimplex; ſequentes ad intermedios vsque ex ordine parum longiores; reliqui eiusdem cum intermediis longitudinis; omnes autem, excepto primo, in extremitatibus ramoſi; vltimus bifidus.

Pinna ani, initio ſuo pinnae dorſualis ſecundae initio e directo oppoſita, radiorum 11, aequalis fere inter ſe longitudinis, minoris tamen, quam pinnae dorſi ſecundae radii. Primus horum ſimplex, et ſecundo parum breuior eſt; a ſecundo ad vltimum omnes ramoſi ſunt; penultimus vltimo proximior, quam caeteri inter ſe inuicem radii.

Pinna caudae radiorum circitee 24, in extremo elliptica, integerrima, et, ſi expanditur, circumſcriptione ad marginem ſubrotunda.

Gobionem nigrum omnium fere Auctorum, qui *Go* vel *Goget* Venetis, *Sea-Gudgeon* vel *Rockfiſh* Anglis dicitur, eiusdem, quam modo deſcripſi, eſſe ſpeciei, vix crediderim, et lectores mihi aſſenſuros perſuaſum habeo, ſi ſequentia iis libuerit perpendere momenta: 1) enim *Willoughbeius* Gobioni ſuo (*a*) duplicem denticulorum in maxillis ordinem tribuit, cum noſter ſimplici tantum fuerit inſtructus. 2) Idem Auctor, et poſt eum alii quoque, in pinna dorſuali ſecunda quatuordecim numerauerunt radios, ego vndecim tantum; ſed hanc minoris eſſe momenti ratio-

 nem,

(*a*) Hiſt. Piſc. Lib. IV. cap. X. pag. 206. Tab. N. 12. fig. 1.

nem, lubens fateor, quod variare non raro in pinnis radiorum numerum certissimum sit. 3) Pinnam ventralem, si extendatur, infudibuli figuram quadantenus imitari, idem affetit, cum in nostrate eadem, cum rigiditate late patens, non tantum se extendi non patiatur, sed infundibulum etiam nullo modo referat. 4) Quantum ex icone, tam a *Rondeletio*, quam a *Willughbeio* data, potest coniici, maxilla Gobionis nigri inferior superiore longior, in nostrate e contrario breuior est. 5) In illo pinnae pectorales a branchiarum operculo nimium distant, si huius in comparatione habeatur ratio. 6) Pinna illius ventralis in icone *Willoughbeii* non immediate sub pectoralibus, sed paullo posterius sita est, neque, vt in praesenti, adeo singularis structurae specimen, sed verarum potius pinnarum imaginem referre videtur, siue formam, siue eximiam longitudinem consideres, qua pectorales adhuc superat. 7) In eadem icone latera corporis caudam versus tanquam conuexa expressit chalcographus, quae in nostrate cathetoplatea et plana erant; alias vt taceam rationes, quas afferre non dubitarem, si in eruendis characteribus essentialibus, et in dignoscendis a se inuicem speciebus satis essent comprobatae.

Mensura.

Menſura.

	Poll. Pariſ.	Lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum -	3	10
- - - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - -	3	2
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	-	$4\frac{1}{4}$
- - - - - - - - - - - angulum operc. br. poſticum - - - - - - - - - - -	-	8
- - - - - - - - - ad principium pinnarum pectoralium - - - - - - - - - -	-	$8\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - anticum acetabuli marginem	-	$7\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - principium pinnae dorſi -	1	$\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - anum - - - - - -	1	$7\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - principium pinnae ani -	1	$8\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - - - - - caudae - -	3	
Longitudo pinnarum pectoralium - - - -	-	9
- - - - pinnae dorſi primae, ad baſin -	-	8
- - - - - - - - - - - ſecundae, ad baſin -	-	$10\frac{1}{3}$
- - - - - - - - ani, ad baſin - - - -	-	$9\frac{1}{3}$
- - - - - - - - radiorum longiorum - -	-	5
- - - - - - - caudae, ſc. a primis radiis ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices - - - - - - - -	-	10
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa, ad - - - - - - -	-	3
Diameter oculi - - - - - - - - -	-	$1\frac{1}{4}$
- - - - - acetabuli - - - - - - - -	-	$4\frac{1}{2}$
Ab vno oris angulo (ore aperto) ad alterum	-	6

	Poll.	Lin.
Diſtantia inter primi inferioris pinnae pectoralis radii baſin et primum pinnae ani radium - - - - - - - - - - -	1	1
– – – – – – vltimi pinnae dorſualis primae radii baſin et primum pinn. dorſ. ſecundae radium - - - - - - -	–	$\frac{1}{5}$
– – – – – – vltimi pinnae dorſualis ſecundae radii baſin et primum pinnae caudae radium - - - - - - - - - -	–	$5\frac{1}{2}$
– – – – – – vltimi pinnae ani radii baſin, et primum pinnae caudae radium - -	–	$5\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	–	$6\frac{1}{2}$
– – – – – – – – – poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - - -	–	6
– – – – – – – – – principium pinnae dorſ primae -	–	6
– – – – – – – – – – – – – – – ſecundae -	–	$5\frac{1}{2}$
– – – – – – – – – pinnae dorſi ſecundae finem	–	3
– – – – – – – – – principium pinnae caudae	–	$1\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium	–	5
– – – – – – – – – – – principium pinn pect.	–	$6\frac{1}{3}$
– – – – – – – – – – – – – – dorſual. ſecundae -	-	$5\frac{2}{3}$
– – – – – – – – – – finem pinn. dorſ ſecundae -	–	$5\frac{1}{3}$
– – – – – – – – – – principium pinnae caudae -	–	$5\frac{2}{3}$

* * *

VI.

VI.

Gobio pinna dorſuali vnica, longa; pectoralibus latiſſimis, acetabulum planiuſculum includentibus. Piſcis Smyrnenſis ad Muſtelas accedens. Catal. Muſ. Petrop. nº. 90.

Tab. IX. fig. 5. et 6.

DESCRIPTIO.

Color corporis vniuerſi mutatus, ſubalbidus eſt, et caudam verſus in dilute brunum vergit.

Corpus ipſum, quo ad Muſtelas quam proxime accedit, antice valde craſſum, ſubteres, ventricoſum, poſtice tenuiſſimum, maxime cathetoplateum, et, ſi pinnarum non habeatur ratio, ſatis etiam anguſtum, ac, pro capitis et ventris mole, ſolito breuius. Quod ad circumferentiam eius attinet, ab oris extremo, ſub convexo ductu, ſupra narium regionem adſcendit, circa quam, inter oculos, aliquantum imprimitur, ſub initium dorſi denuo ſub ductu, parum conuexo, breui licet, eleuatum; deſcendit enim abhinc modice verſus pinnae dorſualis initium, deſcenſuque ſuo, eoque magis notabili, ad extremitatem vsque pergit. Idem ab maxillae inferioris extremo, ſub ductu parum concauo vsque ad ſternum prominulum, ſub rectiori vero dein verſus anticum acetabuli marginem, deſcendit ſtatim notabiliter; ab huius vero margine poſtico ad pinnae ani principium ductum ſequitur ſubconuexum, vlterioremque

remque dein curſum ad extremitatem vsque manifeſto ſub aſcenſu abſoluit. Piſce erecto, ſeu abdomini incumbente, etiam apparet, pronam corporis ſuperficiem eſſe conuexam ante oculos et circa narium regionem, ab vno vero ad alterum oculum leuiter impreſſam, a dorſi initio ad dorſualem pinnam vsque ſubconuexam denuo, ſulcoque leuiori, per medium dorſum ad pinnae initium excurrente, interſtinctam; latera dorſi vero iuxta pinnam anguſtiſſima, conuexa primum, ſenſim, dein ſenſimque quo propius ad caudae pinnam accedunt, decliuia magis. Inuerſo piſce, ſupinam corporis ſuperficiem, inter maxillae inferioris extremum et acetabulum, conuexam, leuiorique inſimul ad mentum impreſſione, ſternique prominentia eſſe notabilem; eandemque pone acetabulum pinnaeque ani principium, absque ſulco ſinu ve, pariter conuexam, tandemque ad abdominis latera, iuxta ani pinnam, anguſtiſſimam, ſtatim ab huius principio decliuem, et ad extremitatem vsque decliuitate continuo maiori auctam, obſeruaui. Latera corporis circa branchiarum operculum ſatis, circa pinnas pectorales autem modice, conuexa, pone has planiuſcula ſunt. Ex modo dictis etiam corporis craſſities quodammodo intelligitur, quae in vniuerſum, in dimidia, eademque antica, eius parte, maxima, in altera, eaque poſtica, prioris reſpectu, minima eſt; ſpeciatim vero mox ab oris extremo magna, ad mediam operculorum branchialium partem maxima, et ad pinnae dorſi principium ventremque turgidulum vix minor, inde contra ſubito diminuta, vsque ad extremum cum decremento valde notabili, ſpectatur.

Oris

Oris obtuſi rictus, in ratione ad corporis magnitudinem habita, amplus, ab vno ſc. oris angulo ad alterum ſeptem lineas latus, eiusdem conformationis eſt, qualem in Gadis et Muſtelis alias deprehendimus.

Labia oris, nec craſſa, nec valde prominula, interiorem marginem liberum, dentiumque laminis ſolummodo contiguum habent: ſuperius inferiore craſſius latiusque, ab lamina dentium ſuperiore, ſi os apertum directe adſpicias, parum prominet, eiusdemque partem anticam obtegit; inferius, quod tenuius eſt anguſtiusque, eodem, quo ſuperius, modo inferioris laminae faciei anticae opponitur.

Maxillae fere ſemicirculares: ſuperior inferiore parum longior, vtraque lamina ſolida oſſea, ſemicirculari eſt inſtructa, cuius planiuscula ſuperficies plurimis eiusmodi ſcrobiculis, quales digitalibus imprimere ſolent artifices, exarata conſpicitur. His ipſis, non ſine concinno ordine diſtributis, et aequali ſemper interuallo inter ſe diſtantibus, ſine dubio efficitur, vt ſub manducatione v. g. cibi in ſcabra et inaequali ſuperficie conterantur, et ad deglutitionem praeparentur; adeoque laminas iſtas dentium molarium munere fungi, ac praeter hoc in capiendis firmiusque retinendis cibis ſuum pariter vſum habere, probabile eſt. Singulae laminae medium ſulco eſt diuiſum. quo duorum crurum, quibus componitur, ſymphyſis dignoſcitur. Iuxta hanc maxima earum latitudo $\frac{3}{4}$ lineas exaequat, oris angulos verſus ſenſim decreſcens.

 Vtrius-

Vtriusque harum laminarum marginem posticum membrana satis valida, crassa, plusquam dimidiam lineam lata, papillisque planiusculis referta, coronat; pronascitur nempe e postici laminae marginis radice, limbo lateribusque omnino libera; harumque ea, quae ad inferiorem maxillam pertinet, sursum spectat, oreque aperto, statim in oculos cadit, cum altera, quod fauces respicit, minus, quam ista, promineat. Cutis, oris interiora inuestiens, aeque, ac membranae modo dictae, papillis vndique scatet.

Septem ab oris extremo lineas in palato superiori conspiciuntur puluilli duo ossei, scabri, hemisphaerici, pisi magnitudine, paralleli, vaginisque membranaceis, veluti praeputio, cincti, iisdemque in palato inferiori totidem areae planiusculae, eiusdemque indolis, respondent.

Narium prominularum vtrinque duo foramina, margini oculorum superiori et antico propiora, quam oris extremo, ac inter se communicantia: posticum, antico dimidio minus, ab oculi proximo margine 1. lineam distat, et in aequali distantia ante se habet anticum, maius, $1\frac{1}{2}$. lin. a proximo oculi margine, et $3\frac{1}{2}$. lin. ab oris extremo, collocatum. Interstitium vero inter dextri ac sinistri lateris nares $3\frac{1}{2}$. linearum est. Notari etiam merentur orificia ductuum muciferorum octo, in vtroque proni capitis latere conspicienda, quorum primum pone oculum, tubulosum; secundum, tubulo satis prominente instructum, infra eundem; tertium, haud procul ab oris angulo, pariter tubulosum, sed antecedentibus minus; quartum, quin-

tum

tum et ſextum, in extremo capitis limbo, ſuperiori labio contiguo, diſpoſita, aequalis a ſe inuicem diſtantiae, caeteris minora, tubuloque diſtituta; haecque ſex in ſemicirculo ſita ſunt; ſeptimum proxime ſupra ſextum, prominulum; tandem oblique introrſum octauum a priori et narium foramine antico aequaliter fere diſtans, paruulum. In aliquali ab maxillae inferioris limbo diſtantia octo iterum occurrunt foraminula, ratione ſitus, maxillae ductum ſequentia. Praeter haecce tubulorum oſtia, in cute etiam circelli minimi, non tantum in prono capite, praeſertim inter oculos, ſed etiam in dorſo et lateribus vndique ſparſim occurrunt, numero plurimi, inaequali ſpatio inter ſe diſtantes, vt plurimum disiuncti, rarius contigui. Num et ex his liquor mucoſus ſecernatur, mihi non certo conſtat; probare tamen id videtur muci coagulum, quo tota fere corporis ſuperficies erat perfuſa, et ſquamarum in vniverſo corpore defectus, quarum ad vices forſan ſupplendas cutis, alias glaberrima, iis inſtructa eſt. Horum circellorum nullum in ſupino corpore comparuit veſtigium.

Oculi, ratione corporis, haud magni, minime prominentes, cutisque communis propagine obducti, ſitum inter perpendicularem et horizontalem medium habent, et quinque linearum interuallo a ſe inuicem diſtant.

Operculum branchiarum variis muſculis, per cutem translucentibus, eſt inſtructum, quorum vnus, omnium maximus, ac dimidiam fere, eandemque inferiorem, operculi partem occupans, buccae inſtar, valde prominet. Habet autem hic mufculus, ex ouato-oblongus, feu potius amygdalaeformis, ac fecundum corporis longitudinem extenfus, fuum duas lineas ab oris angulo principium, quod latiorem et anticam eius extremitatem conftituit, infertionem vero ad pofticum operculi marginem, ad eleuandum operculum et infimul membranam branchioftegam, fine dubio efformatus.

Membrana branchioftega, ampla valde, a fupremo ac poftico operculi angulo ad fterni prominentiam vsque late extenfa, officulis feptem, fitu ac forma inter fe difcrepantibus, duobusque praeterea Mercurii virgulae non abfimilibus cruribus offeis, ex fupremo ac poftico ipfius angulo prouenientibus, fuftentatur. De his primo dicemus, officulorum, proprie talium, genera, vnum poft alterum, poftea pertractaturi. Prodit nempe e loco modo dicto officulum tenue, ftatim a bafi, verfatili, in duo crura inaequalis longitudinis ac modice recurua diuifum, quorum exterius, longius, in partem membranae branchioftegae triangularem, fpinae inftar, fupra pinnae pectoralis bafin, prominentem, abit, eandemque fulcit; interius, breuius, fub angulo valde acuto, prius deferit, aliudque officulum, extremitate inferiore fecundo membranae branchioftegae officulo laxe incumbens, tanquam acceforium, fub angulo obtufo recipit, quod vna cum cruribus virgulam Mercurii fat bene referre mihi vifum eft. Quod ad ipfa membranae branchioftegae officula attinet, omnia tenuia, gracilia, et aequalis fere inter fe craffitiei funt: primum, caeteris longius, rectum, et fupra ipfius medietadietatem quaſi infractum, partim maxillae inferioris marginem preſſe comitatur, partim ab eodem et operculo aliquantum recedit, extremitate antica muſculi cuiusdam, de quo inferius ſermo erit, lateri interno et maxillae limbo, laxo mediante nexu, interpoſitum, poſtica oſſiculi, quod acceſſorium ſupra vocaui, interno margini contiguum; ſecundum, tertium, quartum et quintum, parallela inter ſe ſurſumque recuruata, ſub anteriore primi parte ſuas habent radices, craſſiusculas, inter ſe conuergentes, firmoque ſatis nexu coniunctas, apicibus vero ſpinae triangularis parti inferiori, eidemque marginali, inſeruntur; ſextum ac ſeptimum denique, itidem inter ſe parallela, et notabili a praecedentibus interuallo diſtantia, ad ſterni prominentiae latus ſuas figunt radices, ab illorum radicibus longe remotas, ſurſumque leuiter recuruata, iisdem propius ſenſim accedunt, tandemque ad pinnae pectoralis baſin in apices, praecedentium apicibus ſatis vicinos, abeunt. Quamuis in deſcribendis partibus externis ad muſculos, tanquam ad internas, non reſpiciatur, ſingularis tamen in hoc piſce oſſiculorum membranae branchioſtegae compoſitio, muſculorumque, ad ea mouenda deſtinatorum, diſtributio me mouent, vt hac occaſione breuiſſimis eorum iniiciam mentionem. Quatuor autem obſeruantur muſculi, faſciales: vnus eleuator, tres, qui deprimunt. Primus, quem pro eleuatore habeo, ad ſummum operculi marginem ortus, oblique deſcendit, et oſſiculi, duobus cruribus inſtructi, baſi inſeritur; ſecundus, praecedenti triplo maior, ad mentum oritur, et, oblique transuerſo ſub decurſu, oſſiculorum, quarti et quinti,

 forte

forte et plurimum, radicibus affigitur; tertius, secundo duplo minor, cum eodemque, bino sc. triangulum efformans, sub sterni prominentia conspiciendus, ab vno ad alterum latus transuersim extenditur, anticam, sexti ac septimi, ossiculorum extremitatem subit, ac eadem cum praecedenti, insertione gaudet; quartus, tertio aequalis, ac parallelus, ad pinnarum pectoralium basin, eiusdemque inferiorem partem, proxime ante limbum acetabuli anticum situs, a duobus infimis, modo memoratis, sexto sc. et septimo, vnius lateris assiculis ad ista alterius, arcuato parum sub flexu, in transuersum pariter extenditur, suisque tendinibus, qui tenues valde sunt, iis inseritur. Quamuis membranae branchiostegae late pateat ambitus, aperturam tamen ad branchias exiguam valde, sub late triangulari spina, videmus, quatuor sc. tantum lineas latitudine exaequantem.

Squamae in toto corpore nullae; id quod supra iam monui; neque linea longitudinalis vera, sed spuria tantum, in posteriore corporis parte, cuius per medium recta excurrit, apparet.

Anus oris, quam corporis, extremitati propior, angustus, minimeque prominulus est.

Pinnae omnes radiis simplicibus sunt instructae; id quod alias rarissime obseruabitur.

Pinnae pectorales, magnae, latissimae, obtusae, radiorum 33 circiter, basin habent largam, ab inferiore aperturae angulo ad anticum acetabuli limbum sese extendentem, superne semilunari musculo obfirma-

tam

tam, inferne autem plus quam vltra dimidiam partem fulcro eiusmodi musculoso, certe haud prominente, destitutam. Inferior harum pinnarum portio, si expansa est, maximam acetabuli partem obtegit. Septem aut octo infimorum radiorum extremitates pulposae, vltra pinnae marginem excurrentes, breuium diuersaeque magnitudinis, barbularum sub forma dependent. Quoniam, pinnae huius basis a primo statim radio ad vltimum vsque, sub ipsius descensu, sensim antrorsum flectitur, primus situm multo posteriorem, quam vltimus s. infimus, obtinet. Radiorum longitudo sic sese habet, vt ab infimo ad vigesimum sextum circiter vsque, sensim longiores fiant, ab hoc vero ad primum praecedentibus, longissimis, ex ordine parum breuiores. Crassitiei, quam inter se seruant radii, eadem est ratio. Infimi vtriusque pinnae radii sibi tam proxime adstant, vt exiguum tantum inter se relinquant spatium; immo, si quis obiter hasce pinnas adspiciat, in vnam coalitae ipsi videbuntur.

Acetabulum, quod ab inferiore pinnarum pectoralium portione quasi includitur, scutum refert rotundum, planiusculum, illi, quod in Lumpo Anglorum videmus, simillimum. Diuiditur autem sulcis, in ipsius superficie conspiciendis, in varias variae magnitudinis ac formae partes, quarum omnium maxima ea est, quae, acetabuli medium occupans, eiusdemque limbo situ paullo profundior, sub cordis figura apparet, basi os, apice obtuso anum respicientis. Haec, quam et fundum nuncupare possumus, $2\frac{3}{4}$ lin. diametri, secundum longitudinem stria quadam albicante, veluti nervo vo, in duas aequales diuiditur portiones, ex eademque, tanquam ex ſterno, vtrinque ſub angulo acuto emittit oblique antrorſum coſtas quinque, inferne tenuiores, ſuperne latiores, quarum ſingula in ſummitate lobo obuerſe ouato, reflexoque inſtruitur. Extremitates horum loborum latiores ipſum cordatae partis marginem terminant, quem inter et acetabuli limbi interiorem portionem ſinus valde anguſtus, aut profuncior, quam alibi, ſulcus obtinet. Fundum cingit limbus, planus, latiusculus, dimidio plus ſuae latitudinis liber, interius vero vna cum fundo corpori adnatus, ſubſtantiae parte interiore durioris, rigidae, quaſi cartilagineae, foliaceae, exteriore tenuioris, membranaceae, flexilis ac vniformis. Foliaceam iſtam dixi, quod, praeter ſcutulum ſolitarium, e duodecim foliolis, ſeu lobis, contiguis, ſulcisque circumſcriptis, conſtat.

Illud, ſcutulum nempe, directe fundo cordato praepoſitum, ſubquadrangulum, lateribus exaſciatum, antico margine conuexum, poſtico vero ſterni minoris anticae extremitati continuum eſt, foliolaque magnitudine multum ſuperat. Duo proxima ſcutulo foliola, lateribus eius exaſciatis contigua, ſubrotunda ſunt, coſtisque deſtituta, caetera vero, ſubouata, oblique retrorſum ſpectant, extremitate obtuſiore fundo, acutiore membranaceae limbi parti obuerſa, ſingulumque coſtae lobatae reſpondet. Vtriusque etiam lateris intermedia anterioribus ac poſterioribus perparum maiora ſunt. De membranacea limbi parte vix habeo, quod dicam, niſi, quod ad acetabuli latera paullo latiorem, quam in reliquo tractu, eam deprehenderim.

Pinna

Pinna dorſi vnica, longa, 35 radiorum, ad dimidiam fere altitudinem cute, communis propagine, incraſſata, in caudae pinnam vsque excurrit, vltimo ſc. ipſius radio cum primo alterius, pari modo, vt caeteri, membrana connexo. Radii, a primo, quem in duobus indiuiduis a ſecundo diſtinctum, et ſpinulae inſtar prominentem vidi, ad vigeſimum quartum circiter, ex ordine longiores magisque ſurrecti, ab his vero ad vltimum vsque ſenſim breuiores fiunt, licet primis adhuc multo longiores ſint.

Pinna ani longa, radiorum 29, eiusdem, ac prior, formae et ſubſtantiae, in caudae pinnam, eodem, vt iſta, modo, et quidem paullo longius, excurrit, quia vltimus ipſius radius vltimum dorſualis radium longitudine excedit.

Pinna caudae, ratione corporis, parua, lingulata, radiorum 12. Piſcem hunc, non tantum pinnarum pectoralium, ſed acetabuli etiam forma ac ſitu, ad Cyclopterum, *Lump* Anglis dictum, mira ſimilitudine accedere, ex deſcriptione cuiuis erit clarum; quantum autem corporis potiſſimum forma, ſumma cutis laeuitate, dorſuali et ani pinna etc. ab eodem abludat, non minus euidens eſt. Eum itaque ad Genus referre placuit, cum quo pluribus, quam cum alio, notis conuenit. An in ſalſo mari, an dulcibus in aquis vitam degat, et vbi, quaeritur?

Menſura.

	Poll. Pariſ.	lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum -	4	1
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	–	6
— — — ad angulum operc. br. poſticum -	1	
— — — ad ſupremi pinnae pect. radii baſin -	1	
— — — ad infimi eiusdem pinnae radii baſin -	–	9
— — — ad anticum acetabuli marginem - -	–	9
— — — ad dorſi initium - - - - -	–	6
— — — ad pinnae dorſi principium - - -	1	3
— — — ad eiusdem finem - - - - -	3	7½
— — — ad anum - - - - - - - -	1	6
— — — ad pinnae ani principium - - -	1	11
— — — ad eiusdem pinnae finem - - -	3	9
— — — ad pinnae caudae principium - -	3	7
Longitudo radiorum pinnae pect. longiorum -	–	9
— — — pinnae dorſi, ad baſin - - - -	2	4½
— — — — — — radiorum longiorum - -	–	5½
— — — — ani, ad baſin - - - - -	1	11
— — — — — — radiorum longiorum - -	–	4½
— — — — caudae - - - - - - -	–	6
Diameter oculi - - - - - - - -	–	1⅔
— — — acetabuli - - - - - - -	–	5½
Ab vno oris angulo (ore ſc. aperto) ad alterum - - - - - - - - -	–	7

Diſtantia

	Pol.	Lin.
Diſtantia inter ſingulum oculum - - .		5
— — — — infimorum vtriusque pinnae pect radiorum baſes - - -	-	$2\frac{1}{4}$
— — — — anticum acetabuli marginem et anum - - - - - - - - - .	-	$0\frac{1}{4}$
— — — — anum, et primi pinnae ani radii baſin	-	5
Membrana vltimi pinnae dorſi radii in caudae pinnam excurrit ad - - - - - .	-	$1\frac{1}{4}$
— — — — pinnae ani radii in eandem excurrit ad - - - - - - - - -	-	2
Latitudo horizontalis per oculorum axes - -	-	9
— — — — — — — medium operc. bronch	-	1
— — — — — — — pinnarum pect. baſin	-	$0\frac{1}{2}$
— — — — — — — pinnae dorſi princpium	-	$9\frac{1}{2}$
— — — — — — — anum - - - -	-	9
— — — — — — — pinnae ani principium	-	5
— — — — — per eiusdem pinnae medium	-	$1\frac{2}{3}$
— — — — — — — — — — — — finem	-	$\frac{1}{4}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium - -	-	$9\frac{2}{3}$
— — — — — — — — pinn. pect baſin -	1	
— — — — — — — — — — — extrem. marg	1	
— — — — — — — — ani principium - -	-	$0\frac{1}{2}$
— — — — — — — — — medium - -	-	$5\frac{1}{2}$
— — — — — — — circa pinnae ani finem -	-	2

* * *

VII.

Sparus, duabus vtrinque maculis notatus; primo pinnarum ventralium radio longiſſimo, aſtaci antennam referente.

DESCRIPTIO.

Tab. X. fig. 1. Color Piſcis, in ſpiritu vini aſſeruati, e luteo in ſpadiceum vergit, in prono capite, dorſo, poſterioreque corporis parte intenſior, in capitis lateribus pinnisque dilutior, in operculis branchiarum et regione, pone pinnas pectorales ſita, ac circa ventrales dilutiſſimus et argenteo ſplendore mixtus. Intenſioris e luteo ſpadicei coloris obſcura etiam ſedecim circiter zonarum, per transuerſum corporis ductarum, veſtigia adhuc ſuperſunt; rectae quidem hae ſunt, aſt non item perpendiculares, ſed poſteriora verſus parum inclinatae, ita, vt cuiusuis extremitas ſuperior, dorſalis, reſpectu ad ſitum inferiore, ventrali, ſit poſterior. Dorſi, caudaeque, pinnarum radii colore albicante et ſpadiceo alterno variegati. Duae denique in vtroque corporis latere ſunt obſeruandae maculae, ſubrotundae, e bruno fuſcae, quarum vna in medio fere corpore, diametri trium linearum, proxime infra lineam longitudinalem ac poſteriore ſua parte pinnae dorſalis principio directe ſuppoſita; altera minor, ad extremitatem corporis, ſupra pinnae ani finem, huicque, quam extremo dorſo, propior.

Totum

Totum corpus cathetoplateum, latiusculum, et ab anterioribus posteriora versus crassitie sensim decrescens. A prona capitis parte, conuexa, recta et decliui, dorsum statim modico arcu ascendit vsque ad pinnam dorsalem, mox circa quintum huius radium ad x lineam vsque depressum, in linea fere recta ad caudae pinnae principium vsque descendit, conuexam vbique seruans superficiem.

Inferior corporis margo a maxilla inferiore ad caudae pinnam vsque vnicum modo arcum describit, a principio ad anum vsque conuexus, a pinnae ani initio vero vsque ad eius finem sensim magis magisque attenuatur.

Capitis latera anterioraque corporis leuissime tantum conuexa, posteriora e toto fere plana.

Os directe ante oculos locatum, paruulum, arcuatum. Labia oris carnosa, dentes tegentia. Dentes in vtrisque maxillis conferti, obtusi, minimi, fere aequales.

Foramina narium vtrinque duo, inter superius oris labium et orbitae marginem anteriorem eumque superiorem aequali in distantia disposita: anteriore minimo, membranula, antrorsum spectante, velut operculo, obtecto; posteriore ampliore, retrorsumque patente.

Oculi palpebris destituti, limbo superiore magis prominentes, quam inferiore, maximam partem intra orbitam recepto. Iris ex argenteo in pallide brunum colorem vergens. Pupilla subrotunda.

Opercula branchiarum membrana, marginem inveſtiente, et ſupra pinnae pectoralis baſin in triangularem lobulum exeunte aucta, inferioreque marginis parte ciliis offeis exaſperata.

Malae os (quod etiam altera alteri ſuperincumbens operculi lamina poſſet nominari) ad anguli poſtici marginem denticulis eſt inſtructum. Pariter etiam margo laminae iſtius offeae, orbitam inter ac oris angulum deflexae, denticulis armatus eſt.

Oſtium, ad branchias patens, longum quidem, aſt anguſtum valde.

Membrana branchioſtega, ſi quae forſan adeſt, in conſpectum non cadit; an ſub denſo iſto, quod inter malae oſſa conſpicitur, ſquamarum ſtrato recondita?

Squamae denſe confertae ac molles, totum non ſolum corpus, ſed et omnes capitis partes, exceptis ſolum labiis oculisque, totam fere ani pinnam, vt et dorſi, caudae, pectoraliumque pinnarum baſin obtegunt; maximae ſuper caput, branchiarum opercula, malae oſſa ac anteriorem corporis partem, poſteriorem verſus autem ſenſim minores, quae in pinnis ſunt, et praeſertim in ani pinna, omnium minimae. Linea longitudinalis ex angulo operculi branchiarum ſuperiore prodiens, modicumque deſcribens arcum, poſticum ac ſupremum maculae, in medio corpore ſitae, marginem petit, inde rectiore via, leuique tamen ſub aſcenſu, per medium corporis decurrit, ſubitoque ad vnius circiter lineae altitudinem ſurſum inflexa, leui ſub deſcen-

ſu,

ſu, et, poſtquam recta per ſupremum alterius maculae ad caudam conſpiciendae marginem tranſiit, ad medii pinnae ani caudae radii baſin terminatur.

Anus in foſſulam demerſus.

Pinnae pectorales lineari-lanceolatae, radiorum vndecim; extimis breuiſſimis, ſimplicibus, interioribus ex ordine longioribus, ac bifurcatis.

Pinnae ventrales, iuxta abdominis marginem, reſpectu pectoralium $1\frac{1}{2}$ lin. ſitu anteriores, ſibique valde approximatae, ſetaceae, longiſſimae, aſtacorumque antennis ſimiles, radiorum quatuor, quorum tres inferiores in vtraque pinna tenuiſſimi ac breuiſſimi; infimo ſc. ſeu quarto 1 lin. tertio 2 lin. ſecundo $2\frac{1}{2}$ lin. tantum longo. Primus autem, reſpectu illorum valde craſſus, teres, ſetaceus, flexilis, omniumque longiſſimus; ac baſi ſc. verſus apicem ſenſim attenuatur, innumerisque articulis, magnitudine ſenſim decreſcentibus, aſtaci antennarum inſtar, compoſitus eſt, et, in rectam extenſus lineam, tenuiſſima ſua extremitate pinnae caudae radiorum apices fere attingit.

Pinna dorſalis, in ſquamoſa baſi faſtigata quaſi, citra dorſi medietatem ſita, radiorum tredecim, ex ordine ſenſim longiorum. Priores quinque, ſimplices, rigidi, caeterisque craſſiores, veri ac validi ſunt aculei; ſequentium, a ſexto ad duodecimum, qui longiſſimus eſt, plerique infirmiores, flexiles magis ac ramoſi; vltimus penultimo paulo breuior.

Pinna ani, ab ano ad caudae pinnae initium extenſa, radiorum circiter quadraginta quatuor, maxi-

mam

mam partem ſimplicium ; a primo ad trigeſimum ſextum vsque ex ordine ſenſim longiorum , ab hoc ad vltimum vero ex ordine ſenſim breuiorum. Decem vel duodecim priores rigidi , validi et aculeati, ſequentium plurimi molliores ; vltimorum quidam ſubramoſi. Caeterum , ſi de numero et longitudine radiorum certus eſſe velis, pinna , quae denſo ſquamarum ſtrato obtecta eſt, deſquamanda tibi prius erit , vt radii denudati in conſpectum veniant.

Pinna caudae modice bifurca , lobis obtuſis , radiorum octodecim , ramoſorum ; vtriusque lobi intermedii ac exteriores caeteris, quos includunt, longiores.

Menſura.

	Poll.	Lin. Pariſ.
Longitudo tota , ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum	4	
- - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - -	3	1
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	-	4
- - - - - - - ad angulum operc. br. poſticum	-	$9\frac{1}{3}$
- - - - - - - - principium pinn. pectoralium	-	$10\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - - - - - ventralium	-	11
- - - - - - - - - - - pinnae dorſi - -	1	10
- - - - - - - - - - - - - - - - ani - -	1	$1\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - - - - - caudae -	3	
- - - - ad anum - - - - - - - -	1	$1\frac{1}{2}$

Longi-

	Poll.	Lin.
Longitudo pinnarum pectoralium - - - -		$10\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - ventralium - - - -	3	1
- - - - pinnae dorsi, ad basin - - - -	-	6
- - - - - - - - - - - - radiorum longiorum -	-	11
- - - - - - - - - - ani, ad basin - - - -	2	1
- - - - - - - - - - - - radiorum longiorum -	-	$7\frac{1}{2}$
- - - - - - - - caudae, sc. a primis radiis, seu ab eius principio ad longiorum radiorum apices - - - - - - - -	-	11
Extremitas corporis squamosa in caudae pinnam extensa, ad - - - - - -	-	1
Diameter oculi - - - - - - - - -	-	$2\frac{1}{2}$
Distantia inter infimi pinnae pectoralis primique pinnae ventralis radii basin - -	-	3
- - - - pinnae ventralis basin et anum, seu pinnae ani initium - - - - - - -	-	3
- - - - vltimi pinnae dorsi radii basin, et primum pinnae caudae radium - - -	-	$9\frac{2}{3}$
- - - - vltimi pinnae ani radii basin, et primum pinnae caudae radium - - -	-	0
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	-	5
- - - - - - - per posticum operc. br. marginem - - - - - - - - - -	-	$5\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - pinnae ani principium -	-	5
- - - - - - - - - - - - - - dorsi - - -	-	3
- - - - - - - - - - - - - - caudae - - -	-	$\frac{2}{3}$

	Poll.	Lin.
Latitudo perpendicularis per oculi medium -	–	7
- - - - - - - - - - - - - dorſi initium -	–	$10\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - - - - principium pinnarum pectoralium - - - - - - - -	1	$1\frac{1}{3}$
- - - - - - - - - - - - principium pinnarum ventralium - - - - - - -	1	5
- - - - - - - - - - - - principium pinnae dorſi - - - - - - - - - -	1	5
- - - - - - - - - - - - eiusdem pinn. finem	1	3
- - - - - - - - - - - - principium pinnae caudae - - - - - - - - - -	–	6

* * *

VIII.

Labrus valde oblongus, taeniis tribus candidis, diuerſae longitudinis, inſignitus; cauda integra.

DESCRIPTIO.

Tab. X. fig. 2. Piſcis in ſpiritu vini aſſeruatus ex albido liuidus, taeniisque tribus candidis vtrinque pictus eſt, quarum *ſuprema* e media fronte orta, oblique ad orbitae marginem anticum, indeque, ipſo interrupta oculo, ab orbitae margine poſtico ad ſuperiorem operculi branchiarum angulum vsque ducitur, *intermedia* ab angulo oris

oris initium capiens, orbitaeque marginem inferiorem tangens, rectaque via per branchiarum operculum, eique appenſam membranam, ducta perſiſtit, ſuique finem mentitur, aſt directe ſub hac, in ipſo corpore continuata, per lateris medium in caudae pinnam vsque excurrit, *infima* vero ſub maxilla inferiore orta, arcuato ſtatim ductu imum operculi marginem petit, abhinc, pariter vt intermedia, in ipſo corporis margine, margini operculi branchiarum contiguo, ſub angulo cum priore ſui tractu obtuſo, continuata, pone pinnae pectoralis baſin inflectitur, indeque leui ſub deſcenſu paralleloque cum intermedia ductu ad extremitatem corporis vsque ducitur. Sic quoque margo corporis inter mentum et angulum vtriusque operculi branchiarum inferiorem candicat, candoremque ſuum cum infimae vtriusque lateris taeniae principio miſcere videtur.

Corpus cathetoplateum, lanceolatum, macrolepidotum, margine ſuperiore paulo magis arcuato, magisque attenuato, quam inferiore; lateribus ſubconuexis.

Caput cathetoplateum, laeue. Os anguſtum; denticulorum in vtraque maxilla elliptica et aequali gracilium, oblique antrorſum porrectorum, denſeque conſtipatorum, vnica ſeries, labiis carnoſis, clauſo ore, obtecta. Lingua anguſta, carinata, glabra.

Narium foramina vtrinque duo, minima, in taeniae ſupremae tractu, qui ante oculum eſt, diſpoſita, ipſi oculo, quam ori, longe propiora.

Oculi ſubrotundi, in ſupremis fere capitis lateribus, oreque altius, ſiti.

Mmm 2 Oper-

Opercula branchiarum laeuia, alepidota, membranaque terminata, tam ad ſuperiorem, quam ad inferiorem ſinguli operculi angulum, in lobulum ſatis notabilem excreſcente. Membranae branchioſtegae, eiusque oſſiculorum, nulla veſtigia. Hiatus ad branchias peranguſtus, licet praelongus ſit, et ab operculi angulo ſuperiore, oculo altius poſito, ad abdominis marginem vsque, quem inferior occupat, extenſus.

Squamae ſatis amplae, magnitudine inter ſe invicem haud multum diuerſae, flexiles, perbreues, laeves, ad oras integerrimae.

Linea longitudinalis ab angulo operculi branchiarum vtriusque lateris ſuperiore, ductu leuiſſime conuexo, in aequali fere ab extremo dorſi margine et latere corporis medio diſtantia et parallelismo decurrit ad regionem vsque, decimi ſeptimi pinnae dorſi radii baſi ſuppoſitam, ibi, mox in linea recta oblique deorſum ac retrorſum ad lateris medium deflexa, intermediam ſubintrat taeniam, cum eademque dein rectilineo curſu in caudae pinnam vsque procedit. Formatur autem ipſa haec linea longitudinalis potiſſimum a viginti ſex ſeptemve punctis, quae ipſa nihil aliud ſunt, quam canaliculorum muciferorum, ſquamas ad lineam pertinentes perforantium, oſtiola.

Anus in medio fere corpore.

Pinnae in toto piſce ſeptem.

Pinna dorſi vnica, longa, e regione pinn. pect. radii primi baſi orta, radiis inſtructa viginti, ſimplicibus; anterioribus nouem aculeatis, ex ordine ſenſim longi-

longioribus ; reliquis inermibus, aculeatorum vltimos perparum longitudine primum ſuperantibus, dein vero finem pinnae verſus iisdem breuioribus ſenſim factis ; vltimo, vigeſimo ſc. ad baſin vsque bipartito.

Pinnae pectorales duae ; vtrinque vnica, ſtatim poſt operculum, ſubtriangularis, oblique ſurſum flexa, radiisque quindecim circiter inſtructa, quorum longitudo et craſſities, a ſuperioribus ad inferiores, ſenſim decreſcit ; horumque plurimi bipartiti.

Pinnae ventrales binae, contiguae, pectoralibus paulo poſteriores ſitu, abdominis margini impoſitae, in aequali fere ab operculorum angulo inferiore et ano diſtantia. Figurae eſt quaelibet lanceolatae, acutae, radiisque ſex ſuffulta, quorum interiores exterioribus, ſimplicibus, longiores et bipartiti.

Pinna ani, mox poſt anum et e regione pinn. dorſ. radii noni baſi orta, vltimique eiusdem pinnae terminata, radiis conſtat tredecim, ſimplicibus, eiusdem fere inter ſe et cum dorſalibus longitudinis ; primo, et ſecundo, aculeatis, breuioribus ; in ſequentibus iisdem parum longioribus, inermibus ; vltimo ad baſin vsque bifido.

Pinna caudae integra, aequalis, circa baſin ſquamis veſtita, radiorum duodecim ; extimo vtriusque lateris ſimplici, breuiore ; caeteris omnibus ramoſis, quorum intermedii proximis lateralibus perparum longiores.

Menſura.

	Poll. Pariſ.	Lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad pinnae caudae radiorum apices - - -	3	5
- - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - -	3	1
Ab oris extremo ad oculi medium - -	–	5
- - - - - - - - - - angulum operc. br. ſuperiorem - - - - - - - - -	–	10
- - - - - - - - - - principium pinnae dorſi -	1	
- - - - - - - - - - - - - - - pinnarum pectoralium - - - - - - - -	–	11
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - ventralium	1	2
- - - - - - - - - - - - - - - pinnae ani, ſeu ad anum - - - - - - - -	1	9
- caudae -	2	10
Longitudo pinnae dorſi, ad baſin - - -	1	$6\frac{1}{2}$
- - - - - - - - radiorum longiorum	–	$3\frac{1}{2}$
- - - - pinnarum pectoralium - - -	–	7
- - - - - - - - ventralium - - -	–	$4\frac{2}{3}$
- - - - pinnae ani, ad baſin - - -	–	$9\frac{1}{2}$
- - - - - - - radiorum longiorum -	–	3
- - - - - - caudae, ſc. a primis radiis, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices - - - - - - - -	–	7
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa ad - - - - - -		$2\frac{1}{2}$
Diameter oculi - - - - - - - -	-	$1\frac{2}{3}$

Diſtan-

	Poll.	Lin.
Diſtantia inter primi pinn. dorſ. primique pinnae pect. radii baſin - - - - -	–	5
– – – – – – vltimi pinn. dorſ. primique pinnae caudae radii baſin - - - - -	–	4
– – – – – – infimi pinn. pect. primique pinnae ventralis radii baſin - - - -	–	$5\frac{1}{3}$
– – – inter pinnarum ventralium baſin et anum, ſeu pinnae ani initium - - -	–	7 ad
– – – – – – – vltimi pinnae ani radii baſin et primum pinnae caudae radium - -	–	$7\frac{1}{2}$ 4
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	–	$3\frac{1}{2}$
– – – – – – – – – – – poſticum operc. br. marginem - - - - - - - -	–	5
– – – – – – – – – – – pinnae ani principium	–	$3\frac{1}{4}$
– – – – – – – – – – – – – – finem -	–	$1\frac{1}{2}$
– – – – – – – – – – – – caudae principium - - - - - - - - -	–	$\frac{2}{3}$
– – – perpendicularis per oculi medium -	–	7
– – – – – – – – – – – dorſi initium -	–	8
– – – – – – – – – – – – principium pinnarum pectoralium - - - - - -	–	$10\frac{1}{3}$
– – – – – – – – – – – ventralium	–	$10\frac{2}{3}$
– – – – – – – – – – – pinnae ani	–	$9\frac{2}{3}$
– – – – – – – – – pinnae ani finem	–	5
– – – – – – – – – principium pinnae caudae - - - - - - - - -	–	4

* * *

IX.

IX.

Scomber dorſi anique pinna continua; aculeis ad vtriusque initium acceſſoriis.

An? *Gaſteroſteus* ſpinis dorſalibus quatuor. *Linn.* *Syſt.* Nat. edit. dec. p. 295. n°. 2. (Ductor.).
Haſſelqu. iter. 366.
Act. *Stockb.* 1755. p. 71.

DESCRIPTIO.

Tab. X. fig. 3. et 4.

Colore hic piſcis, in ſpiritu vini aſſeruatus, adhuc gaudet argenteo, ſplendente in ſemilunari iſta, quae infra et poſt vtrumque oculum ſita eſt, regione muſculari, in vtriusque operculi branchiarum maxima, eaque poſtica dimidiaque, et omni totius corporis, quae infra lineam longitudinalem cadit, parte; ſordide albicante in prono et ſupino capite, ore, maxillis, palpebra, anteriore operculi lamina, pinnisque omnibus; dilute ſpadiceo denique in omni, quae ſupra lineam corporis longitudinalem venit obuiam, regione.

Corpus teretiusculum, rectum, toroſum, microlepidotum et modice cathetoplateum eſt, excepta ipſius extremitate, quae vltimos dorſi, vel ani, et caudae, pinnarum radios interiacet, plagioplatea, et, ſi latus reſpicias, valde contracta, ac in medio vtrinque in aciem carnoſo-membranaceam attenuata. Porro, quod ad conformationem corporis attinet, idem a maxillae ſuperio-

ſuperioris extremitate ſenſim ac leuiter aſcendit ad quartum dorſi aculeum, ſeu primum pinnae dorſalis radium vsque, et ab hoc caudam verſus ſimiliter deſcendit; a maxillae inferioris extremitate vero leui ſub deſcenſu pinnas petit ventrales, ab his rectius progreditur vsque ad anum, et ab hoc caudam verſus ſenſim ac leuiter aſcendit. Margo dorſi ab occipite primum aculeum verſus contractus ac prominulus eſt. Latera corporis ſatis conuexa.

Caput vtrinque compreſſum, ſuperne planiusculum, carina longitudinali, per medium verticem ducta, ſuperficiali notatum, alepidotum, glabrum, occipitis tantum vtriusque lateris angulo et ſpatio iſto ſemilunari, muſculoſo, oculum inter et operculum branchiarum ſito, exceptis, ſquamulis minutiſſimis inſtructis.

Os obtuſiusculum, apertura oblique deorſum ſpectante. Maxillae, ore clauſo, ſatis aequales, aperto autem inferior ſuperiore paulo longior; eaedemque denticellis acutis, minutiſſimis interius exaſperatae.

Narium foramina, oris extremo, quam oculis, paulo propiora, vtrinque duo, ſibi inuicem valde propinqua, elliptica et verticaliter poſita; horum poſterius ſitu paulo altius, quam anterius, eſt.

Oculi magni, in laterum ſuprema parte poſiti, oris extremo, quam angulo operculorum poſtico, propiores, cute, quam orbitae margo omnis ſuper albugineam emittit, ceu palpebra, in ipſorum ambitu inaequaliter obtecti, ita, vt luminis, quo palpebra ad oculum patet, diameter perpendicularis horizontalem nonnihil ſuperet.

Opercula branchiarum falcata, ſubtus et in lateribus vtrinque longo hiatu aperta, inermia, alepidota, circa marginem membrana terminata. Margo laminae anterioris, caeteris incluſae, membranaceus et crenulis minutiſſimis inciſus.

Membrana branchioſtega, ſub operculis tota latens, oſſiculis videtur ſex ſuffulta.

Supra pinnarum pectoralium baſin ſcapula oſſea triangularis, poſtico ac ſuperiori operculorum margini contigua, prominet.

Squamulae innumerae, minutiſſimae, cuti arcte inhaerentes, fere vt in Gadis.

Linea longitudinalis, continua, prominula, ab angulo operculorum poſtico ad $4\frac{1}{2}$. lin. recta et oblique ſurſum ducta, hinc ſub angulo valde obtuſo deflexa, leuique et modice arcuato ſub deſcenſu in aciei ſupra memoratae initium incurrit, in eodemque ſuum agnoſcit finem.

Anus in corporis medio, ſc. ab oris extremo aeque ac longiorum pinnae caudae radiorum apicibus, et breui interuallo ab ani pinna, diſtans.

Pinnae

Pinnae in toto corpore ſeptem ; ſc. duae pecto-rales , totidem ventrales , vnica dorſi ani et caudae.

Pinnae pectorales , poſt branchiarum aperturas , ventri , quam dorſo , propiores , oblongae , radiis ſeptendecim circiter conſtructae , leuiter arcuatis et ſubramoſis. Hi , a primo , aut ſecundo potius , ſuperiore , ad infimum vsque , ſenſim gracileſcunt , et , ratione longitudinis , a primo ad quintum vsque , ſenſim increſcunt , ab hoc vero ad infimum notabiliter decreſcunt. Communis omnium horum radiorum baſis , non minus vt ipſi , arcuata.

Pinnae ventrales contiguae , directe ſub inferiorum pinn. pect. radiorum baſi , in imo ventre ſitae , radiisque quinque compoſitae ſatis robuſtis , quorum primus ac ſecundus , ſitu exteriores , ſimplices ac reliquis longiores , tertius , quartus et quintus vero , interiores ſitu , ramoſi , illisque ex ordine breuiores. Intimus pinnarum vterque membrana mediante eidem baſi affixus.

Pinna dorſi , praecedentibus vtriusque generis pinnis ſitu poſterior , longa , plurimam dorſi marginis partem occupans , radiis viginti nouem ſuffulta , et praeterea quatuor , breuibus , aculeis diſtinctis , ad ipſius initium , aucta. Horum anticus et poſticus , minimi , intermedii duo paulo craſſiores ac longiores , omnes autem mobiles , et poſtica ipſorum facie membranula triangulari inſtructi. Illi , ſc. ipſius pinnae radii omnes in vnam pinnam , ſolito more , concreti ac molles ; anteriores craſſiores ac longiores, inſequentes tenuiores ac breuiores ſenſim facti, ſimplices, poſteriorum quidam intermedios longitudine parum ſuperantes ac ſubramoſi.

Pinna ani, dorſali breuior longe, radiorum nouendecim, quorum anteriores maiores reliquis, (ſimilibus tamen in dorſali pinna minores) intermedii minores poſteriores mediae magnitudinis, de reliquo autem eiusdem cum dorſalibus conformationis. Accedunt ad initium huius pinnae pariter aculei duo diſtincti, perbreues, dorſalibus iſtis minores; anterior ob paruitatem ſuam vix conſpiciendus, poſterior paulo maior. Caeterum pinnae huius finis paulo longius a pinnae caudae initio diſtat, quam finis pinnae dorſi.

Pinna caudae profunde biſurca, caudae plagioplateae verticaliter inſiſtit, eamque ex parte excipit, radiis circiter triginta quatuor compoſita, quorum exteriores vtriusque lateris omnium breuiſſimi, ex ordine tamen longiores, ſimplices, ſuperantur a proximis ſequentibus, omnium longiſſimis, ſubramoſis, hisque cedunt intermedii, ex ordine, ad medium pinnae vsque, ſenſim breuiores facti, valde ramoſi.

Menſura.

Menſura.

	Poll Pariſ.	Lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad longiorum pinnae caudae radiorum apices -	5	6
— — — ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - - - -	5	
Ab oris extremo ad oculi medium - -	-	$6\frac{1}{2}$
— — — — — — angulum operc. br. poſticum	-	9
— — — — — — principium pinn. pectoralium	1	5
— — — — — — — — — — — ventralium	1	7
— — — — — — primum dorſi aculeum -	1	11
— — — — — — principium pinnae dorſi -	2	$2\frac{1}{2}$
— — — — — — anum - - - - -	2	9
— — — — — — aciei caudae initium -	3	11
— — — — — — primum ani aculeum, ſeu ad pinnae ani principium - - - -	2	11
— — — — — — principium pinnae caudae	4	5
— — — — — — aciei caudae finem -	4	9
Longitudo pinnarum pectoralium - - -	-	8
— — — — — — — ventralium - - -	-	9
— — — maiorum dorſi aculeorum - -	-	1
— — — pinnae dorſi, ad baſin - - -	1	11
— — — — — — — radiorum longiorum -	-	$6\frac{1}{2}$
— — — — — ani, ad baſin - - - -	1	$1\frac{1}{2}$
— — — — — — radiorum longiorum -	-	$4\frac{1}{2}$
— — — — — caudae, ſc. a primis radiis, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices	1	2
Extremitas corporis ſquamoſi in caudae pinnam extenſa ad - - - - - - - - -	-	$6\frac{1}{2}$

	Poll.	Lin.
Diameter oculi perpendicularis - - - -	-	$3\frac{2}{3}$
Diſtantia inter infimi pinn. pect. primique pinn. vent. radii baſin - - -. - - - -		$3\frac{1}{2}$
— — — — quinti pinn. ventr. radii baſin et anum - - - - - - - - - - -	I	$1\frac{1}{2}$
— — — —anum et primum aculeum - -	-	$1\frac{2}{3}$
— — — — vltimi pinn. dorſ. et primi pinn. caudae radii baſin - - - - -	-	$3\frac{1}{3}$
— — — — vltimi pinn. ani primique pinn. caudae radii baſin - - - - - -	-	4
— — — — longiorum vtriusque lateris pinn. caudae radiorum apices - - - - -	I	
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	-	$7\frac{1}{3}$
— — — — — — — — poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - - -	-	9
— — — — — — — - primum dorſi aculeum	-	$7\frac{2}{3}$
— — — — — — — - principium pinn. dorſi	-	$7\frac{1}{2}$
— — — — — — — — — — — aciei caud.	-	5
— — — — — — — — pinnae dorſi finem -	-	$5\frac{1}{3}$
— — — — — — — — — — caud. initium	-	$3\frac{2}{3}$
— — — — — — — — aciei caudae finem -	-	$1\frac{1}{4}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium -	-	$8\frac{1}{4}$
— — — — — poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - - -	-	11
— — — — — principium pinnae dorſi - - - - - - - - - - -	I	
— — — — — anum - -	-	11
— — — — — aciei caud. princip.	-	$4\frac{1}{2}$
— — — — — pinnae ani finem	-	$3\frac{1}{3}$
— — — — — pinn. caud. princip.	-	2

ASTRO-

ASTRONOMICA.

OBSER-

OBSERVATIONES

ALIQVOT ASTRONOMICAE ET METEOROLOGICAE LIPSIAE HABITAE

a

G. HEINSIO.

Eclipsis Lunae totalis d. 24. Ianuar. anno 1758. temp. ciuil. ſtyl. nou.

Eclipſis haec inſtabat horis matutinis in vicinia horizontis occidui, et calculus momenta tantum ingreſſus Lunae in vmbram terreſtrem viſibilia hic loci promittebat. Nix copioſa, quae die praecedente cecidit, nullam obſeruationis futurae ſpem praebebat, quae tamen veſperi, cum nubes inciperent hiatus agere, nonnihil excitabatur. Et re vera, inſtante Eclipſis initio, coeli facies, nubes plerumque tenues et hiatus ſerenos oſtendens, ſucceſſum nonnullarum ſaltem obſeruationum ſpondebat. Inuigilaui illis ope Tubi Aſtronomici, 6 ped. Pariſ. longi, qui obiecta admodum diſtincte repraeſentat, eaque ſecundum diametrum 24. vicibus auget. Tempus ad horologium oſcillatorium, hoc et ſequentibus diebus per altitudines Solis reſpondentes correctum, numeratum eſt. En obſeruationum circumſtantias:

An. 1758. *ſtyl nou.*
d 23. *Ian temp.*
vero Aſtronomico.

$17^h. \ 1'. \ 0''.$	Penumbra iam ad limbum Lunae orientalem in regione inter Cardanum et Seleucum diſtingui potuit, licet Luna per nubes pallida appareret.
— 10. 0.	Penumbra denſa cernebatur in dicta lunaris diſci regione. Luna nonnihil lucidior erat.
— 12. 20.	Initium Eclipſis fieri credidi in media inter Cardanum et Seleucum regione. Forſan initium nonnihil citius contigit: vmbra enim vera cum penvmbra admodum confundebatur. Non multum tamen aberrari puto, ſi momentum notatum pro momento initii habeatur. Luna ſatis lucida per nubes apparuit.
— 12. 45.	Certus eram, initium Eclipſis iam ante contigiſſe, licet terminus fere nullus inter vmbram et penumbram diſtingui poſſet.
— 14. 15.	Credidi appulſum vmbrae ad Grimaldum, termino inter vmbram et penumbram valde incerto.
— 14. 45.	Certus eram de appulſu vmbrae ad Grimaldum; vel potius peripheria vmbrae Grimaldum iam nonnihil intraverat.

verat. Statuere licebit appulſum vmbrae ad Grimaldum 17^h 14′ 30″.

Nunc vmbra melius terminari incipiebat.

— 15.′23″. Grimaldus videbatur totus in vmbra; ſed incertus adhuc eram.

— 15. 53. Grimaldus certe totus ab vmbra tectus; quod momentum pro totali immerſione Grimaldi retinere licet.

Luna per nubes tenues halone cincta apparuit.

— 20. 54. Vmbra tangit Ariſtarchum.

— 21. 33. Ariſtarchus totus in vmbra.

Paulo poſt coelum faciem nanciſcebatur ſerenam.

— 31. 8. Vmbra tangit Copernicum.

— 32. 7. - - - per medium Copernici.

— 33. 6. - - - totum Copernicum inuoluit.

Has circa Copernicum obſeruationes omnium certiſſimas habeo. Luna erat admodum clara, et terminus inter vmbram et penumbram bene diſtinctus.

— 37. 0. Nubes denuo coelum peruagabantur, et elapſo minuto omnis conſpectus Lunae erat impeditus.

— 47. 0. Luna quidem per nubes denuo translucere incipiebat, aſt maculas lunares ſufficienter diſtinguere non licuit, vt appulſus vmbrae ad iſtas aliqua certitudine notari potuiſſent. Sic quoque

$18^h. 7'. 0''$. coniectura tantum appulſum vmbrae ad Mare Criſium, quo ſcilicet iſta hoc tangere incepit, animaduertere licuit. Tandem et denſiores nubes et aedificia interpoſita obſeruationum continuationem impediebant.

Cum die 26. Ianuar. poſt meridiem obſeruationes altitudinum Solis pro correctione horologii proſequerer, inſignis effectus refractionis per nubes ſeſe obtulit. Scilicet inueneram ope Quadrantis, cuius mentio facta eſt T. I. Comment. nou. p. 464.

tempore horologii oſcillatorii		altitudinem limbi ſuperioris Solis (pro apparentia Tubi, inferioris) absque vlla correctione	
$2^h. 49'. 59''.$	$6'. 4''.$	$12^°. 20'$	$35'.$
$- 56. 3.$		$11. 45.$	

et tempore intermedio Quadrantem quoque diſpoſueram ad altitudinem $12^°. 0'$. vt momentum appulſus limbi Solis (apparenter in Tubo, inferioris) ad filum horizontale annotarem. Accedebat limbus inferior ad filum horizontale aſcendendo ſecundum apparentiam in Tubo; pauca autem ſecunda temporis ante, quam contactus limbi cum filo horizontali futurus eſſet, nubes denſa diſcum Solis intrabat, ita quidem, vt pars eius apparenter ſuperior tota e conſpectu eriperetur, inferior autem in vicinia fili ſufficienter adhuc cerni poſſet. Portio tunc admodum exigua limbi inferioris infra filum horizontale adhuc perſiſtebat, prona ad contactum cum

cum filo; aſt intra 20. ſecunda temporis nulla ſenſibilis eius portionis imminutio, nullus ſenſibilis acceſſus limbi inferioris ad filum, obſeruari potuit, donec tandem contactus limbi cum filo poſt pauca ſecunda conſequeretur, quem $2^h.53'.44''$. horologii celebratum fuiſſe aeſtimaui, intra 3. vel 4. ſecunda temporis certus, quia nubes nunc limbum quoque inferiorem (apparenter) occuparet. Hoc phaenomenum permanentiae diſci ſolaris in eodem loco inſigne refractionis augmentum per nubem vtique indicat, et retardatio appulſus limbi ad filum horizontale ſub altitudine $12^\circ.0'$. quam ſuperiores obſeruationes docent, idem comprobat. Scilicet ſi variatio altitudinis 35. minut. vniformis ſtatuatur per interuallum temporis $6'\ 4''$; limbus Solis altitudinem $12^\circ.0'$. attingere debuiſſet $2^h.53'.27''$., quam tamen re vera demum $2^h.53'.44''$., ideoque $17''$. ſerius, conſecutus eſt. Animaduertere conuenit, altitudini $12^\circ.0'$. ex diuiſione Quadrantis ob aberrationem lineae fiduciae reſpondere altitudinem re vera $= 11^\circ.40\frac{3}{4}'$.; thermometrum autem mercuriale intra conclaue, in quo obſeruatio peracta eſt, appenſum ad horologium, proxime indicaſſe 160. grad. ex diuiſione *de l'Isle.*

Coronidis loco mentionem iniiciam obſeruationis *Eclipſis Lunae partialis* d. 17. April. ſt. nou. 1753. Lipſiae peractae, quamuis non, niſi vnicum momentum, *Finem* nempe *Eclipſis*, hor. 8. $35\frac{3}{4}$. min. temp. veri aſtron. annotare licuerit. Circumſtantiae quoque omnem rigorem non ſpondent; a veritate tamen momentum notatum non multum aberrare credo. Scilicet Eclipſis haec accidit in vicinia horizontis ortiui, quorſum proſpectus ex meo domicilio non patebat. Idoneum itaque locum petens horologiis tantum portatilibus, tribus quidem, in dimenſione temporis, vti licuit, quorum vnum minuta ſecunda monſtrabat. Iſtorum comparatio facta eſt tum mutua, tum ad horologium oſcillatorium in domicilio meo poſitum, cuius ſtatus, ex obſeruatis Solis altitudinibus innotuit. Probe iſta inter ſe conueniebant in determinatione momenti finis Eclipſis, quem ſolummodo per Tubum Gregorianum ſub apparatu, quo obiecta ſecundum diametrum 52. vicibus ille amplificat, obſeruare potui; pauca enim minuta prima temporis ante finem Eclipſis nubes demum, tenues adſpectum Lunae ſufficientem concedebant. Vmbra terreſtris valde diluta, et confinium vmbrae et penumbrae non ſatis diſtinctum apparuit. Momento $8^h.35\frac{3}{4}'$. ſupra notato finem iudicaui, de certitudine ſub eiusmodi circumſtantiis ſufficiente perſuaſus; et $8^h.37\frac{1}{4}'$. de fine certe iam peracto conuictus eram.

* * *

D. 21. *Iunii ſt. nou. an.* 1757, quinto poſt nouilunium die, veſperi circa occaſum Solis inſtabat *occultatio* ſtellae primae magnitudinis, *Cordis* nempe *Leonis* a *Luna*. Attentus ad iſtam ope Tubi aſtron. 6. ped. ſupra in obſ. Eclipſ. ☽. d 24. Ianuar 1758. deſcripti, quo integer Lunae diſcus oculo ſubiiceretur, immerſionem ſtellae ad marginem Lunae obſcurum obſeruare non licuit, absque dubio nimia luce ante Solis occaſum obſtante; aſt circiter $\frac{2}{3}$. horae poſt Solis

Solis occaſum *emerſionem* ſtellae ad limbum Lunae lucidum probe annotare potui $8^h. 57'. 55''$. *temp. vero aſtron.* quo momento ſtella, figuram diſculi referens, limbo Lunae lucido ita adhaerebat, vt ſecundum apparentiam in Tubo (inuerſam nempe) margo ſtellae occidentalis limbnm Lunae orientalem tangeret. Tempus horologii oſcillatorii per altitudines Solis, ex parte reſpondentes, rite correctum eſt.

D. 10. *Iulii ſt. nou an.* 1757. per Tubum Gregorianum ſub apparatu, quo iſte obiecta 52. vicibus ſecundum diametrum auget, obſeruaui *emerſionem Satellitis ſecundi* ex vmbra *Iouis*, ad diſtantiam a proximo Iouis limbo orientem verſus (ſitu erecto) $= \frac{3}{4}$. diam. Iouis proxime, coelo bene fauente. Contigit autem tempore vero aſtron.

Emerſio 2^di prima	$9^h. 28'. 45''$.
Emerſio totalis ſeu Satelles lumine pleno fulgebat	— 31. 20.

Altitudines Solis correctionem horologii oſcillatorii ſubminiſtrarunt.

De apparitione Veneris interdiu egi in Tom. III. Nou. Commentar. pag. 437. ſequ. ibique pag. 441. reditum huius phaenomeni circa finem Septembris vel menſe Octobri an. 1756. futurum praedixi. Euentus praedictionem optime confirmauit. Diebus ſerenis, ſpeciatim d. 29. Septembris, d. 3. et 10. Octobr. an. 1756, Venerem per integram horam poſt Solis ortum oculo nudo cernere licuit, et ii, qui oculorum acie pollebant, Venerem per duas tresue horas poſt Solis

lis ortum, diebus aliis per menſem Octobr. ſerenis, proſecuti ſunt.

Obſeruationes meteorologicae.

Caloris aeſtiui maxime extraordinarii, quem nonnunquam hic loci experimur, aliquoties mentionem inieci in Tomis Commentar. praec. Exempla ſequentia addere licebit. Thermometrum mercuriale ex diviſione *de l'Isle* Tom. I. Nou. Commentar. pag. 469. deſcriptum, quod I. vocabo, in loco vmbroſo boream verſus libero aeri expoſitum, rem patefecit.

An. 1755. *ſtyl. nou.*

	Poſt meridiem		Therm. I	
D. 13. Iulii	$1^h. 34'$.	-	101. grad.	
	3. 5.	-	$99\frac{2}{3}$.	Coelo ſereno, ſpirante vento leni ex auſtro.
	— 24.	-	$99\frac{1}{6}$.	
	— 42.	-	$99\frac{1}{3}$.	
	4. 0.	-	100.	

An. 1757. *ſtyl. nou.*

			Therm Z	
D. 14. Iulii	$3^h. 0'$.	- - - -	$101\frac{1}{3}$	coelum ſerenum
	5. 15.	- - - -	102.	ventus ex auſtro
d. 15. Iulii	3. 0.	- - - -	102.	ventus ex occidente, nocte inſequenti tonitrua.
d. 19. Iulii	3. 0.	- - - -	103.	ventus SSO. coelum ſerenum
d. 21. Iulii	2. 45.	- - -	$99\frac{3}{4}$.	ventus SW. coelum ſerenum.

Iam ante d. 14. Iulii per plures dies coelo ſereno ingentem experti eramus calorem, isque, licet per vices

ces plueret, continuauit vsque ad d. 28. Iulii, quo hor. 3 p. m. thermometrum adhuc indicabat 106. grad. Tam diuturni aestus, quem nulla fere tonitrua hic loci comitabantur, recordatio non extat. Fertilitas erat singularis, et messis admodum larga. In his obseruationibus thermometrum mercuriale a Cel. D *Zeihero* constructum secundum diuisionem *de l'Isle* sub circumstantiis supra notatis adhibui, quod per Z signabo.

Anno 1758. *styl. nou. d.* 10. *Iunii.*

Per quatuor abhinc hebdomades tempestate plerumque serena et sicca fruiti sumus, spirante vento, maiori ex parte, vel boreali, vel orientali, nec nisi d. 28. Maii pluuia nonnihil copiosa decidit. Cum vero ante aliquot dies ventus ex occidente spirare inciperet, calor atmosphaerae insignia cepit incrementa, qui hodie pomeridianis horis, coelo sereno, maxime extraordinarius et sensui vix tolerabilis deprehensus est. Thermometris I. et Z. in loco vmbroso supra notato repositis sequentia annotaui.

	Therm. Z		Therm. I
$2^h.58'$.	$98\frac{2}{3}$	- - - -	——
3. 2.	$99\frac{1}{2}$	nubes exiguae per tempus exiguum interdum occultabant Solem	——
- 8.	99		$100\frac{1}{2}$
- 14.	99		$100\frac{1}{2}$
- 23.	$98\frac{3}{4}$	- - - -	$100\frac{1}{8}$
- 30.	$98\frac{1}{3}$	- - - -	$99\frac{2}{3}$
- 45.	98.	- - - -	$99\frac{1}{6}$
4. 2.	$98\frac{2}{3}$	- - - -	$99\frac{1}{6}$.

Thermometrum Z ob bulbum minorem variationes caloris facilius recipit, quam Thermom. I.

 Hor.

Hor. $4\frac{1}{2}$. nubes fulgure praegnantes ſurgebant, et paulo poſt tonitrua, attamen e longinquo tantum, audiebantur. Die 11. Iunii p. m. coelo ſereno Therm. Z oſtendebat 102. grad. hor. $3\frac{1}{4}$; et d. 12. Iunii veſperi poſt hor. 7. copioſa et vicina fulgura et tonitrua ſequebantur.

Frigoris hic loci *extraordinarii* ſequentia innotuerunt exempla, teſte thermometro in loco vmbroſo boream verſus libero aeri expoſito.

Anno 1755. *ſtyl. nou.*

Temp. ciuil.	ante merid.	Therm. I.	ventus ſignaturae vulgaris et tempeſtas.
d. 9. Februar.	$9^h. 0'$	$179\frac{2}{3}$. grad.	SO. ſerenum.

Anno 1757. *ſtyl. nou.*

Ineunte, frigida quoque tempeſtas ingrediebatur.

d. 5 Ianuar.	$8^h. 9'$.	$169\frac{1}{2}$	—— —— ——
7. - - -	8. 30.	180	N. ſerenum
8. - - -	8 30.	$176\frac{2}{3}$	N. ſerenum
9. - - -	8 30.	$172\frac{1}{2}$	NO. ſerenum
10. - - -	8. 30.	$171\frac{1}{4}$	ONO plerumque ſer.
11. - - -	8. 30.	$167\frac{1}{2}$	S. ſerenum.

Anno 1758. *ſtyl. nou.*

D 21. Ianuar.	8. 30.	178.	N. ſerenum
22. - - -	9. 0.	$175\frac{1}{3}$.	— — — —

Barometricas obſeruationes per aliquot annos in dies inſtitui, ex quibus eas tantum adducam, quae ſingulis annis maximam minimamue Mercurii altitudinem prodiderunt. Elegans ad hoc negotium adhibui baro-

barometrum phosporescens, a doctissimo artifice constructum, recuruum in parte inferiori cum bulbo annexo, in quo superficies Mercurii stagnat, et constantem *terminum a quo* computandi altitudines barometricas subministrat, qui tunc constitutus fuit, dum ad mediam altitudinem Mercurius in barometro haereret. Diameter luminis bulbi in regione superficiei Mercurii stagnantis est 10, et tubi barometrici in regione scalae variationis $2\frac{1}{2}$. lin. Paris. duodecim; vnde sectionum areae sunt in ratione 16:1. Scala variationis addita est orichalcea cum indice mobili, diuisionem *Nonii* referente, cuius ope obseruationes altitudinum Mercurii commode peragi possunt, ipsas tamen altitudines, ad diuisionem scalae istius quidem consignatas, in mensura Parisiensi duodecimali expressi, pede 12. digitos, digito 12. lineas, linea autem 24 scrupulos capientibus; quem in finem ope mensurae Parisiensis exactam dimensionem a termino a quo supra notato vsque ad diuisiones scalae perfeci. Barometrum hoc suspensum est intra conclaue pro anni tempestate calefactum, ne variationes caloris et frigoris, quas aer externus alias subit, altitudines barometricas sensibiliter turbent; adiectum tamen est thermometrum ex diuisione *de l'Isle*, vt variationes aeris interni etiam innotescerent. Locus ipse, quem bulbus barometri occupat, eleuatus est $42\frac{1}{2}$ped. mensurae Parisiensis super pauimentum plateae *Heinensis* in vicinia antliae publicae prope aedificia exstructae, quorum prospectus est in orientalem coeli plagam. Sub his circumstantiis sequens Tabula summam obseruationum exponit.

Temporis annus	ciuilis menſis	ſtyl. nou. dies	hora.	Barometri altitudo in menſura Pariſ. dig.	lin.	ſcrup.	Thermometrum.	Ventus ſignaturae vulgaris	Tempeſtatis conditiones.
1750.	Nouembr	9.	— — —	26.	11.	13.	$126\frac{1}{2}$	S.	nubes interruptae.
	Decembr	26.	— — —	28.	4.	2.	$126\frac{1}{2}$	ONO.	ſerenum
1751.	Mart.	15.	$1\frac{1}{2}^{h}$. p. m.	26.	10.	2.	$118\frac{1}{2}$	SSO.	pluuioſum
	Nouembr	21.	— — —	28.	3.	19.	121.	W.	nubilum
1752.	Mart.	10.	— — —	28.	5.	21.	124.	NNW.	ſerenum
	— — —	11.	— — —	28.	6.	16.	$125\frac{1}{2}$	NO	ſerenum
	— — —	26.	$10\frac{1}{2}^{h}$. veſp.	26.	8.	19.	124.	WSW.	nubilum
	— — —	27	7. a m.	26.	8.	19.	130.	WSW.	nubilum
	Decembr	25.	9. a m.	26.	10.	21.	125.	NW.	nubes ſparſ.
1753.	Ianuar.	25.	— — —	28.	5.	1.	129.	W.	nubilum
	Mart.	8	8. a. m.	28.	4.	17.	$125\frac{1}{2}$	NNO	nubes ſparſ.
	April.	5.	7. a. m.	26.	11.	1.	126.	NO.	nubilum
	Decembr.	27.	— — —	26.	11.	16.	126.	N.	nubilum
1754.	Ianuar.	20.	— — —	28.	4.	6.	126.	N.	nubilum
	Februar.	18.	— — —	28.	4.	6.	$123\frac{1}{2}$	W.	nubilum
	Nouembr	26.	8. a. m.	27.	1.	23.	$124\frac{1}{2}$	WSW	nubes
1755.	Ianuar.	6.	— — —	28.	4.	10.	133.	WNW	ſerenum
	Februar.	11.	$10\frac{1}{2}$. veſp.	26.	10.	17	131.	S.	nubilum
1756.	Ianuar.	30	— — —	28.	6.	16.	$123\frac{1}{2}$	SW.	ſerenum
	Februar.	19	7. a. m.	26.	10.	17.	128.	W.	procella
	Mart.	23.	$5\frac{1}{2}$ p. m.	26.	9.	11.	124.	SSO.	pluuia et procella
1757.	Ianuar.	25.	10. veſp.	26.	9.	11	——	S.	pluuia et procella
1758.	Ianuar.	29	$10\frac{1}{2}$. a. m.	28.	5.	9	——	——	——
	Februar.	17.	$8\frac{1}{2}$. a. m.	26.	9.	19.	——	SW.	pluuia

Vbi hora nulla notatur, meridies intelligi debet.

Sic

Sic erit altitudo omnium maxima -	$28^{dig.}$	$6^{lin.}$	$16^{scrup.}$
— — — — — — — — minima -	26.	8.	19.
variatio -	1.	9.	21.
altitudo media -	27.	7.	$17\frac{1}{2}$.

Notandum autem eſt, omnes hactenus recenſitas altitudines numeratas eſſe a termino ad bulbum conſtanti ſupra memorato. Quodſi ergo ex ratione arearum in ſectionibus bulbi et tubi (16:1.) ad variationem iſtius termini relationis attendere, et inde altitudines corrigere velis, inuenies variationem termini a maxima ad minimam altitudinem proxime $=$ 33. ſcrup., variationem barometricam $= 1^{dig.}\ 11^{lin.}\ 6^{scrup.}$ altitudinem maximam $= 28^{dig.}\ 7^{lin.}\ 8\frac{1}{2}^{scrup.}$, minimam $= 26^{d.}\ 8^{l.}\ 2\frac{1}{4}^{scr.}$ manente media $= 27^{d.}\ 7^{l.}\ 17\frac{1}{8}^{scr.}$ Alias concluſiones tranſeo.

OBSERVATIO
ECLIPSEOS SOLARIS
QVAE CONTIGIT Anno 1758. d. $\frac{19}{30}$. Dec.
HABITA PETROPOLI

ab

A. N. GRISCHOW.

Altitudines Solis correſpondentes ad Horologium aſtronomicum examinandum captae per Quadrantem bipedalis radii d. $\frac{17}{28}$. Dec.

$\frac{17}{28}$. Dec. Ante merid. T. Hor. Aſtr.	Altit. marg. ⊙ bor.	$\frac{17}{28}$. Dec. Poſt meridiem T. Horol. Aſtr	Alt. marg. ⊙ bor.	Merid. ex obſeruatis altitudinib. deductus T. Horol. Aſtr.
$9^h.54'.10''$	$3°.44'$ -	$1^h.55'.34''$ -	$3°.44'$ -	$11^h.54'.52'',0$
55. $50\frac{1}{3}$ -	3. 49 -	53. 31 -	3. 50 -	- - - - 50, 9
57. 52 -	3. $55\frac{2}{3}$ -	51. 56 -	3. $55\frac{1}{3}$ -	- - - - 50, 5
59. 37 -	4. $0\frac{3}{4}$ -	49 $56\frac{1}{2}$	4. 1	- - - - 49, 4
10. 1. $47\frac{1}{2}$ -	4. $6\frac{1}{2}$ -	47. 27 -	4. 8	- - - - 53, 5
3. 50 -	4. $11\frac{2}{3}$ -	45. $15\frac{1}{2}$ -	4. 13	- - - 50, 2

Per medium igitur | $11^h.54'.51'',1$
Aequat. merid. ſubtr. - - - - - 4, 7

Meridies verus d. $\frac{17}{28}$. Dec. - $11^h.54'.46''\frac{1}{2}$

d. $\frac{17}{28}$. Dec. veſp. $11^h.7'.35''$ Horol. Aſtr. appulſus Sirii ad fil. vert. tubi biped.

d. $\frac{18}{29}$. Dec. veſp. 11. 7. $18\frac{1}{3}$ - - - - - appulſus Sirii ad idem fil. vert.

Erit

Erit igitur reuolutio fixarum $23^h.59'.43''$; Horol. aſtr.

d. $\frac{19}{13}$. Dec. T. Horol. aſtr.		T. verum	
mane	$9^h. 4'.32''$	$9^h. 1'.58''$	Ortus appar. marg. ⊙ ſuper.
	11. 20	8. 45	Ortus appar marg. ⊙ inferioris
	39. 25	36. 45	Finis Eclipſeos per Teleſcop. Gregor. 2. pedum.
	39. 40	37. 0	

Fumus focorum atque vapores ob ventum ex auſtrali plaga vehementiſſimum vndantes impediuerunt, quo minus Eclipſeos huius obſeruatio accuratius inſtitueretur. In Sole variae obſeruabantur macularum numero atque magnitudine inſignium, ſeries.

INSTRV-

INSTRVMENTORVM ASTRONOMICORVM, RETICVLO, AVT MICROMETRO, INSTRVCTORVM, NOVA EMENDATIO.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Obſeruationum aſtronomicarum exactitudo, quantum pendeat a commodo corporis obſeruatoris ſitu, difficulter imaginari poterunt inexperti, omnes autem ii conqueruntur, qui inſtituendis obſeruationibus ipſi ſe vnquam applicuerunt. In imaginanda itaque inſtrumentorum aſtronomicorum conſtructione, vtramque facere paginam cenſendum eſt, vt commoditati obſeruatoris, quantum fieri poteſt, proſpiciatur, neque aſſumere vnquam, aut ſeruare diu, moleſtum corporis ſitum, ipſe cogatur.

Laborant eiusmodi imperfectione, reticulo, aut micrometro, inſtructa inſtrumenta aſtronomica fere omnia, quales ſunt Quadrantes, aut fixi aut portatiles, Sectores aſtronomici, immo et ſimplices tubi, micrometro praediti. Etſi enim horum inſtrumentorum ope, obſeruationes absque magno incommodo peragantur, quamdiu altitudo obiecti, ad quod diriguntur, ſupra horizontem, 45° non tranſcendit, tamen ſi in regionibus coeli eleuatioribus, atque vertici propioribus, aliquid obſeruandum occurrit, opus eſt, vt valde reclinet caput, immo et prope Zenith ipſum, ſupinum aſſumat corporis ſitum, tubum introſpiciens obſeruator; quod quam moleſtum ſit,

ſit, et quod maius eſt, quantum obſeruationum fidelitati atque acumini noceat, vno ore conqueruntur, qui ipſi eiusmodi obſeruationibus inſtituendis vacant.

Commodiſſimus ſine dubio obſeruatori, corporis capitisque ſitus, is eſt, qui prae reliquis homini naturalis atque conſuetus eſt, erectus nempe, atque talis, vt tubum ſecundum rectam horizontalem introſpiciat. Qui itaque adaptare poſſet inſtrumenta aſtronomica, vt obſeruator, qualescunque, et in quacunque regione coeli, inſtituat obſeruationes, nunquam alium, niſi modo dictum, aſſumere cogatur corporis ſitum, hic omnino non contemnendam inſtrumentis conciliaſſe perfectionem habendus foret.

Diu eſt, ex quo tale ſe medium mihi obtulit, quod cum, in aduerſaria mea relatum, ac fere oblitum, paucos ante dies fortuito ſe rurſum oculis meis obtulerit, ſatis dignum mihi viſum eſt, cuius in Academia mentionem iniicerem. Etſi enim facile quiuis imaginari iſtud potuerit, a nemine tamen hactenus in vſum vocatum eſt, quod tamen omnino mereri videtur.

Ad ſequentia, hoc quicquid eſt inuenti mei, re ipſa maioris forſan momenti, quam ad primum intuitum videri poteſt, reducitur. Canalis orichalceus ABMP, Fig. 1. inſertum gerens a parte anteriori vitrum obiectiuum AB, aliquot pollices breuior ſit, diſtantia focali lentis AB. A parte poſteriori, ad MP, afferruminetur ipſi ad angulos rectos canalis alter HIGM, eius longitudinis, vt vtriusque canalis longitudo ſimul ſumta, ſummam diſtantiarum focalium lentis obiectiuae AB, et ocularis CD, efficiat. Vbi iun- Tab. XI. Fig. 1.

guntur sibi inuicem cylindri hactenus descripti, inseratur tubo speculum planum, elliptica figura praeditum MN, quod ita ad axin canalis ABMP inclinatum sit, vt radios a vitro obiectiuo venientes, in tubum HIGM, versus vitrum oculare CD, reflectat. Cadat itaque focus lentis obiectiuae AB, siue superficies, in quam cadit imago, a lente AB formata, in planum LK, atque ad LK inseratur tubo, aut reticulum simplex, aut reticulum consuetum micrometri; et euidens erit cuiuis, qui astronomicam praxin callet, obseruationes omnes aeque feliciter peragi posse, tubo eiusmodi incuruo, ac si tubus omnino rectus adhiberetur. Cum vero in plerisque obseruationibus, planum Quadrantis, aut Sectoris, eum perpetuo habere soleat situm, vt verticale sit, cylinder HGIM horizontalem situm semper seruabit, neque adstans instrumento, aut adsidens, obseruator, vnquam incommodum assumere corporis situm coactus erit.

Aliqua addere placet breui huic descriptioni, non quod viros Astronomiae peritos pluribus indigere putem, quo in vsus haec suos conuertere queant, sed ne ii, qui forsitan in astronomica praxi minus exercitati sunt, aliquid inueniant, quod iure desiderari posse, videri ipsis queat. Moneo ea propter, speculum, non vitreum, sed metallicum, adhibendum esse, cuiusmodi speculorum constructionem in potestate esse, satis constat, ex quo felicissime in Anglia constructi sunt tubi reflectentes *Newtoniani*, ad quorum quippe constructionem speculum planum metallicum requiritur. Deinde indicandum mihi est, nouum hoc instrumentorum additaditaditamentum, nouae verificationis Aftronomo imponere neceffitatem. Spectat, de qua loquor, verificatio, fpeculi MN fitum, qui talis effe debet, vt planum picturae, a lente obiectiua formatae, cum plano reticuli coincidat. Facile autem, fi in fpeculi fitu peccatum fuerit, et vitium deprehenditur, et corrigitur. Si nempe erroneum habeat fpeculum fitum, atque ita adaptetur tubus, vt in campi centro, nulla detur filorum reticuli parallaxis, obferuabitur, puncta imaginis, aut fupra et infra, aut ad dextram et finiftram centri, fita, fenfibilem habere parallaxin, quod indicio habendum eft, correctione indigere fpeculi fitum. Facile vero iudicatur, quamnam in partem inclinandum fit fpeculum, vt fitus ipfius emendetur. Secto nempe tubo HGIM, Fig. 1. per axem, fit in Fig. 2. MN fectio per fpeculum; LK, fectio per planum reticuli; RS vero, fectio per planum imaginis. Punctum iam imaginis Q, poft planum reticuli, atque punctum P, ante iftud fitum, vtrumque fenfibilem habebit parallaxin, aft, prouti notiffimum aftronomis, prius punctum, dum commouetur oculus, oculi motum fequi, pofterius in contrarias partes transferri videbitur, quod indicio eft, pro corrigendo fpeculi fitu, verfus N iftud adducendum, verfus M vero parumper retrahendum effe, quod ope trium, a tergo fpeculi reperiundarum cochlearum, quarum ope in quamuis partem inclinari poteft, facile efficitur. Tab XI. Fig. 2.

Reliquae verificationes inftrumenti, hic defcripta ratione constructi, a confuetis nihil differunt.

OBSERVATIO ECLIPSEOS LVNAE d. 18 Maii ſt. v. 1760. PETROPOLI HABITA

a

NICETA POPOW, ANDREA KRASILNIKOW et NICOLAO KVRGANOW.

Coelo tranquillo et ſereno, tenuiſſimis tamen vaporibus a fluuio Neua ſurgentibus.

	Tempore penduli	Tempore vero
Penumbra adeſſe videtur in diſco Lunae	10^h. 55′	10^h. 57′. 50″
Penumbra certo adeſt	10. 58	11. 0. 49
Initium Eclipſeos adeſſe creditur	11. 7	11. 9. 48
Eclipſis certe adeſt	11. 16	11. 18. 47
Maxima obſcuratio celebrari viſa eſt	11. 31	11. 32. 45$\frac{1}{2}$
Cornu Eclipſeos in Tubo ſuperius in eodem verticali cum Tychone exiſtit - - - - -	11. 45	11. 47. 44
Finis Eclipſeos factus eſſe iudicatur.	12. 2	12. 4. 42$\frac{1}{2}$
Finis totalis Eclipſeos exceſſusque penumbrae e diſco Lunae factus eſſe viſus eſt, et Luna priſtino ſplendori ſuo reſtituta putabatur - - -	12. 12	12. 14. 41$\frac{1}{2}$

Quan-

Quantitas Eclipſeos ad decimam ſextam circiter partem diametri Lunae extendi aeſtimabatur, ſeu aliquantum maior, quam eſt tertia pars diſtantiae Tychonis a limbo Lunae.

In vmbra terreſtri limbus Lunae per integram Eclipſin ſemper clarior, quam reliqua eiusdem pars obſcurata, eſt viſus.

Finis Eclipſeos bene eſt obſeruatus. Initii tamen et maximae obſcurationis et egreſſus penumbrae e diſco Lunae tempora ſunt dubia intra minutum temporis et amplius.

* * *

Anno 1760. Iunii 2. die mane ſt. v. Petropoli in obſeruatorio obſeruata eſt Eclipſis Solis

a

N. POPOW et ANDREA KRASILNIKOW.

Initium Eclipſeos accidit
$9^h.1'.44''$ tempore vero obſeruatio exacta.
Reliqua nubes interuenientes impediuere.
$11^h.2'$ Eclipſis non amplius iam apparuit.

ECLIPSIS SOLIS

LIPSIAE VISA HORIS MATVTINIS
d. 13. Iunii ſtyl. nou. temp. ciuilis an. 1760.

a

G. HEINSIO.

Coelum mane nubibus refertum vix ſpem Eclipſin obſeruandi relinquere videbatur; hiatus tamen poſtea agebant nubes, vt Solem verſus initium Eclipſis per interualla conſpicere liceret. Hac circumſtantia permotus Tubum minorem praetuli praeſtantiori, qui alias pro obſeruando initio certius adhiberi ſolet, vt, retinendo imaginem Solis in largiori repraeſentationis campo per longius temporis ſpatium, momentum initii tutius exſpectare poſſem. Vſus itaque ſum Tubo terreſtri longo 4. pedes Pariſinos cum digito, qui amplo repraeſentationis campo inſtructus obiecta ſecundum diametrum 13. vicibus augebat. Huius ope caſu felici *initium Eclipſis* annotare mihi licuit mane hor. 7. 25′. 34″. temporis veri, tam exacte, vt ingreſſus Lunae in diſcum Solis ad inſtans quaſi in oculos incurreret. Paulo poſt initium ſpiſſae nubes Solem ſubibant, et obſeruationum continuationem per omne reliquum Eclipſis tempus impediebant, licet Sol, per pauca tamen momenta, nonnunquam e nubibus erumperet, et phaſin oculo nudo per nubes tenues oſtenderet. Correctio temporis in duobus horologiis oſcil-

oſcillatoriis facta eſt ope altitudinum Solis reſpondentium diebus ante et poſt diem eclipticum captarum. Hodie circa meridiem altitudo mercurii in barometro erat $27^{dig.} 8^{lin.}$ menſurae Pariſienſis, et thermometrum ex diuiſione de *l'Isle* oſtendebat 120. grad.; quod poſtea d 6. Iulii ſt. n. hor. 3. poſt meridiem, libero aeri in loco vmbroſo verſus orientem expoſitum, calorem inſolitum $97\frac{1}{2}$ grad. eiusdem diuiſionis patefecit. Praeceſſerant plures dies valde calidi.

OBSER-

OBSERVATIO
ECLIPSEOS LVNARIS,
D. $\frac{7}{18}$. MAII 1761. HABITA IN OBSERVATORIO IMPERIALI PETROPOLITANO

a

F. V. T. AEPINO.

Die $\frac{7}{18}$. Maii, An. 1761. tempore vero Petropolitano,

$10^h. 4'.$	Penumbrae aduentum ſatis diſtincte obſeruare poteram.
$10. 22. 8''.$	Eclipſin incipere iudicabam.
10. 27. 45.	Vmbra ad mare humorum.
10. 36. 23.	ad Bullialdum.
10. 37. 37.	ad Ariſtarchum.
10. 40. 48.	ad Tychonem.
10. 44. 0.	ad Copernicum.
10. 52. 13.	ad Heraclidem.
11. 0. 17.	ad Manilium.
11. 4. 3.	ad Menelaum.
11. 9. 28.	ad Promontorium acutum.
11. 14. 52.	ad Promontorium ſomnii.
11. 20. 15.	ad mare Criſium.
11. 24. 15.	mare Criſium tectum.
11. 30. 0.	Immerſio totalis.
1. 5. 20.	Initium Emerſionis.
1. 13. 19.	Ariſtarchus in limbo vmbrae.

1^h.

$1^h.19'.11''$.	Vmbra ad mare humorum.
1. 22. 37.	ad montem Helicon.
1. 24. 47.	mare humorum extra vmbram.
1. 27. 55.	Copernicus totus extra vmbram.
1. 43. 7.	Manilius.
1. 46 13.	Menelaus.
1. 49 38.	Posſidonius.
1. 59. 22.	Vmbra tranſit per apicem Promont. acuti.
2. 1. 59.	mare Nectaris detectum.
2. 3. 25.	Vmbrae margo ad mare Criſium.
2. 8. 20.	mare Criſium totum extra vmbram.
2. 11. 42.	Finis Eclipſeos.

Vmbra telluris admodum denſa erat, ita vt, poſtquam Lunae diſcum intrauerat, ab ea tectum ſegmentum penitus euaneſceret. Cum vero ad Heraclidem circiter progreſſa eſſet vmbra, obſeruabam, a ſuperiori ſua parte, ipſam rariorem eſſe. Parti enim lunaris diſci ab vmbra non tecti, ABC, ab hoc momento, vsque ad immerſionem totalem, adnexa videbatur appendicula ADE, lacteo colore ſplendens, qui ſplendor poſt immerſionem totalem adhuc per 10′ ſenſibilis erat, ac fallere potuiſſet rei ignarum, vt crederet, Lunam nondum totam obſcuratam eſſe. Poſt horam 11. et 42′ aut 43′ penitus euaneſcebat Luna, ita vt fere vsque ad emerſionis initium nullum ipſius veſtigium in coelo ſupereſſet. Tab. XI. fig 3.

Momenta immerſionis et emerſionis macularum, minus ſecura ſunt, quam momenta principalia, initii et finis Eclipſeos, atque immerſionis totalis, et initii emerſionis Lunae ex vmbra. Luna nempe durante hac obſeruatione partim vaporibus horizontem cingentibus immerſa erat, partim forte crepuſculum, quod hiſce menſibus obſeruationes aſtronomicas apud nos valde turbat, tantum Lunae diſco conciliabat pallorem, vt quamprimum macula quaedam penumbrae inuoluta eſſet, cum reliquo Lunae diſco quaſi confunderetur, ac vix ac ne vix quidem ab ipſo diſtingui poſſet; vnde ipſe ego vel per minutum dimidium, immo vlterius, de vmbrae ad maculam appulſu dubius haeſi.

AD

AD NOVA ACTA

PETROP. ACADEMIAE SCIENT. TOM. III. ADDITAMENTVM EX SINIS,

P. ANTONII GAVBIL. S. I.

7 Maii 1736. in Ilginskoi Oſtrog. h. 14 44′.34″ Imm. 1^{mi} Sat. ſt. v.
Pekini - - - - - - 15.30. 15 differ. 45′. 41″
Septembr. 3. in Olekminskoi Oſtrog. 7^h. 52′. 32″ Emerſ. 1^{mi} Sat. ♃
Pekini ſtylo nouo 21. Sept. 9^h. 36′. 12″ 1^{ma} Emerſ. 1^{mi} Satell. ♃
28. Sept. 11. 32. 26 1^{ma} Emerſ. 1^{mi} Satell. ♃

Ab obſeruatione 21. Sept. ad obſeruationem 28. Sept. ſunt 4. reuolutiones = 7 dies 1^h. 56′. 14″

itaque ad obſeruat. in Olekminskoi adde 7 dies 1^h. 56′. 14″
obſ. fuiſſet in Olekminskoi Em. 1^{ma} 21 Sept. n. ſt. 9^h. 48′. 46″
fuit obſeruata Pekini - - 9^h. 36. 12.

Ergo Pekinum occidentalius Olekminskoi arce 12′. 34″ temp.

Anno 1738. ſt. n. Pekini 11. Sept. 16^h. 0′. 50″ Imm. 1^{mi} Sat. ♃
in vrbe Iakuzk - 16. 54 0 diff. 53′. 10″
Pekini 30. Nou. 9. 45. 25 Emerſ. 1^{mi} Satell.
Iakuzk - - - - - 10. 37. 54 diff. 52.′ 29″
Pekini 9. Dec. 6. 4. 40 Emerſ. 1^{mi} Satell.
Iakuzk - - - - - 6. 58. 52 diff. 54′ 12″
Pekini 29. Dec. 8. 56. 15 Imm. 3^{tii} Satell.
Iakuzk - - - - - 9. 49. 43 diff. 53.′ 28″

1738. Pekini 16 Nou. - $5^h.59'.58''$ Emerſ. 1^{mi} Satell.
Iakuzk - - - - - - 6. 52. 1 diff. $52'.3''$
Minima differentia 52. 3
Maxima differ. - 54. 12
Media differentia 53. 7. $30'''$. quibus vrbs Iakuzk eſt Pekino orientalior.

Stylo vet. in Kamtſchatka

anno 1741. in portu SS. Petri et Pauli.
12. Febr. $10^h.28'.49''$ Emerſ. 1^{mi} Satell. ♃
Pekini - - - - 7. 40. 45 diff. $2^h.48'.4''$
30 Ian. in portu illo 12. 5. 30 Imm. 3^{tii} Satell.
Pekini - - - - 9. 16. 30 differ. $2.^h49''$
media differ. $2^h.48'.32''$ quibus portus eſt Pekino orientalior.

in Bolſcherezkoi 23. Mart. $10^h.55'.2''$ Emerſ. 2^{di} Satell.
Pekini - - 8. 14. differ. $2.^h41'.2''$

Tubus adhibitus in obſeruationibus Pekinenſibus eſt 14 ped. Pariſin. Obſeruationes ſunt factae in Collegio PP. Gallor. S. I. Pekini

Adiungo duas obſeruationes factas in ſtatione Gallica loci dicti Chandernagor in India orientali a Patre Boudier S. I.

Lat. bor. Chandernagor $22°.51'.26''$ obſeruata.

Anno 1741. ſt. v. in portu Kamtſchatkae SS. Petri et Pauli
23. Ian. $11^h.7'.22''$ Emerſ. 3^{tii} Sat.
in Chandernagor — 6. 25. 40 diff. $4^h\ 41'.42''$
in portu SS. Petr. et Pauli } 25. Ian. 13. 44. 26 Emerſ. 2^{di} Satell.
in Chandernagor — 9. 2. 42 diff. $4.^h41'.44''$.

Ex

Ex altitudinibus meridianis Solis obſeruatis ante et poſt ſolſtitium hybernum anni 1756 et ſolſtitium aeſtiuum anni 1757. vidi altitudinem meridianam veram Centri ☉ ſolſtitialem hyemalem fuiſſe 26°. 36′. 19″ altitudinem ſolſtitialem aeſtiuam 73°. 32′. 58″. 31‴. inſtrum. 3 ped ½ micrometro inſtructum. Adhibita eſt refractio notata in tabulis *Halleyi*, et parallaxis notata in Ephemeridibus Pariſienſibus. Diameter ☉ aſſignata in illis Ephemeridibus imminuta eſt 6″. hinc itaque obliquitas Eclipticae 23°. 28′. 19″. 45‴½; vnde concluditur altitudo Poli in hac noſtra Eccleſia Pekinenſi Gallica 39°. 55′. 21″. 7‴. 30⁗. Haec altitudo Poli parum differt ab ea, quae iam concluſa fuerat ex altitudinibus ſuperioribus et inferioribus meridianis ſtellae polaris et ſtellae antiquae polaris Sinicae. Notaui tertia, et quarta, quia attendi ad diuiſiones partium micrometri.

Anno 1710. PP ſoc. Ieſu, *Regis* et *Iartoux* Galli, et Pater *Fredeli* Germanus Auſtriacus, in vrbe *Aighun* ad fluuium *Amour*, 4 Octobr. obſeruarunt altitudinem meridianam limbi ſuperioris Solis 36°. 10′. 26″ quadrante 2 ped. 2 pollic. Exhibebat altitudines maiores quam par eſſet vno minuto primo. PP. concluſerunt loci latit bor. 50° 0′. 50″.

Ex aliis altitudinibus merid. limbi ſuperioris ☉ in praedicto loco, et aliis vicinis, PP. eandem ferme latitudinem *Aighun* inuenere. Latitudo illa, quae videtur ſat certa, differt a latitudine notata in nouo Atlante Ruſſico.

Praedicti PP. ex locorum diſtantiis, ex rhumbis, obſeruationibus adhibitis declinationis acus, ſaepe obſeruatis ⊙ merid. altitudinibus, in itinere Pekino ad vrbem *Aighoun*, determinarunt vrbem *Aighoun* Pekino orientaliorem 11°. Certior eſſet illa determinatio ſi erueretur ex aliqua obſeruatione aſtronomica, vel Eclipſeos Solis et Lunae, vel Satellitum Iouialium. Neſcio an Geographi Ruſſi determinarint latitudinem et longitudinem *Aighoun* vi obſeruationum aliquot aſtronomicarum, ſeu prope *Aighoun*, ſeu in loco, cuius diſtantia ab *Aighoun* ſit cognita.

MER-

MERCVRIVS IN SOLE
OBSERVATVS *PEKINI* SINARVM ANNO 1756. DIE 7. NOVEMBRIS MANE

a *P. AVGVSTINO HALLERSTEIN S. I.*

$9^h. 29'. 15''.$ ☿ primum visus in limbo ortiuo Solis, Telescopio 14. pedum.
30. 30. Ingressus totus

1. 15.

I. 9. 41. 7. ☿ in horario
21. ⊙lis limbus ortiuus in horario, et tum limbus boreus ⊙lis borealior ☿^{io} $23'. 9''. 16'''.$

14.

II. 9. 49. 14½. ☿
29. ⊙ - - 22. 59. 28.

14½.

III. 9. 56. 46. ☿
57. 4. ⊙ - - 22. 39. 9.

18.

IV. 10. 2. 30. ☿
50. ⊙ - - 22. 26. 3.

20.

V. 10. 5. 48. ☿
6. 9. ⊙ - - 22. 18. 2.

21.

VI.

VI.	10^h. $8'.51''$.	☿		
	9.15.	☉	-	$22'$. $2''.30'''$.
	24.			
VII.	10.11 56.	☿		
	12.20.	☉	-	22. 1. 11.
	24.			
VIII.	10,19.21.	☿		
	48.	☉	-	21. 43. 30.
	27.			
IX.	10.22.46.	☿		
	23.14.	☉	-	21. 36. 18.
	28.			
X.	10. 25.55.	☿		
	26 24.	☉		
	29.			
XI.	10.29.10.	☿		
	41.	☉	-	21. 19. 17.
	31.			
XII.	10.32.30½.	☿		
	33. 1½.	☉	-	21. 8. 10.
	31.			
XIII.	10.37.14.	☿		
	47.	☉	-	20. 59. 38.
	33.			

XIV.

XIV. $10^{h}.53'.47''$ ☿
54 26. ⊙ - $20'.13''.49'''$.
39.

XV. 10. 57. 22½. ☿
58. 3. ⊙ - 20. 5. 57.
40½.

XVI. 11. 0. 28. ☿
1 10. ⊙ - 19. 58. 6.
42.

XVII. 11. 5. 51. ☿
6. 35. ⊙ - 19. 46. 58.
44.

XVIII. 11. 9 21. ☿
10. 6. ⊙ - 19. 41. 5.
45.

XIX. 11. 15. 11. ☿
58½. ⊙ - 19. 21. 26.
47½.

XX. 11. 18. 44. ☿
19. 33. ⊙ - 19. 13. 35.
49.

XXI. 11. 22. 35. ☿
23. 25. ⊙ - 19. 5. 43.
50.

XXII. 11ʰ.29′.19″. ☿
30. 12. ☉ - 18′.48″.42‴.
53.

XXIII. 11.32.26. ☿
33.20. ☉ - 18. 42. 9.
54.

XXIV. 11.40. 3. ☿
59. ☉ - 18. 16. 37.
56.

XXV. 11.43. 6. ☿
44. 3. ☉
57.

XXVI. 11.46 40. ☿
47. 39. ☉ - 18. 3. 32.
59.

XXVII. 11.49.43. ☿
50.44. ☉ - 17. 57. 38.
1. 1.

XXVIII. 11.52.45½. ☿
53.47. ☉ - 18. 3. 32.
1. 1½.

11ʰ.58′.52″. ☉lis limb. occ.
12. 0. 3. ☿ } in Meridiano.
12. 1. 7. ☉lis limb. ort.

XXIX.

XXIX.	$12^h.18'.50''.$	☿		
	20. 2.	☉	-	$16'.36''.27'''.$
	1. 12.			
XXX.	12. 22. 11.	☿		
	23. 24.	☉	-	16. 29. 54.
	1. 13.			
XXXI.	12. 24. 37.	☿		
	25. 51.	☉	-	16. 27. 17.
	1. 14.			
XXXII.	12. 31. $0\frac{1}{2}$	☿		
	32. $17\frac{1}{2}$	☉	-	16. 6. 20.
	1. 17.			
XXXIII.	12. 34. 52.	☿		
	36. 9.	☉	-	16. 10. 16.
	1. 18.			
XXXIV.	12. 44. 9.	☿		
	45. 30.	☉	-	et limbus auſtralis ☉lis auſtralior ☿io $16'.58''.43'''.$
	1. 21.			
XXXV.	12. 46. 48.	☿		
	48. 9.	☉	-	17. 5. 15.
	1. 21.			
XXXVI.	12. 49. 29.	☿		
	50. 51.	☉	-	17. 10. 30.
	1. 22.			

XXXVII.	$12^h.53'.49''$.	☿		
	55. 13.	☉	-	$17^h.20'\ 20''$
	1. 24.			
XXXVIII.	12. 56. 30.	☿		
	57. 55.	☉	-	17. 27. 31.
	1. 25.			
XXXIX.	1. 1. 36.	☿		
	3. 3.	☉	-	17. 41. 55.
	1. 27.			
XL.	1. 4. 35.	☿		
	6. 3.	☉	-	17. 51. 5.
	1. 28.			
XLI.	1. 23. 16.	☿		
	24. 51.	☉	-	18. 34. 28.
	1. 35.			
XLII.	1. 27. 15.	☿		
	28. 52.	☉	-	18. 48. 42.
	1. 37.			
XLIII.	1. 30. 23.	☿		
	32. 0.	☉	-	18. 52. 38.
	1. 37.			
XLIV.	1. 34. 58.	☿		
	36. 37.	☉	-	19. 5. 43.
	1. 39.			

XLI.

XLV.	$1^h. 38'. 45''.$	☿		
	40. 27.	☉	-	19. 18. 49.
	1. 42.			
XLVI.	1. 48. 50.	☿		
	50. 35.	☉	-	19. 41. 5.
	1. 45.			
XLVII.	1. 52. 1.	☿		
	53. 46.	☉	-	19. 50. 15.
	1. 45.			
XLVIII.	1. 55. 56.	☿		
	57. 44.	☉	-	19. 56. 47.
	1. 48.			
XLIX.	1. 59. 4.	☿		
	2. 0. 53.	☉	-	20. 5. 57.
	1. 49.			
L.	2. 5. 7.	☿		
	6. 58.	☉	-	20. 22. 20.
	1. 51.			
LI.	2. 9. 52.	☿		
	11. 45.	☉	-	20. 32. 48.
	1. 53.			
LII.	2. 13. 30.	☿		
	15. 25.	☉	-	20. 46. 33.
	1. 55.			

LIII.	2^{h}. 20′ 4″.	☿		
	22. 0.	⊙	–	20′.59″.38‴.
	1. 56.			
LIV.	2. 23. 38.	☿		
	25. 26	⊙	–	21. 11. 25.
	1. 58.			
LV.	2. 26. 46.	☿		
	28. 45.	⊙	–	21. 17. 58.
	1. 59.			
LVI.	2. 30. 8.	☿		
	32. 9.	⊙	–	21. 25. 40.
	2. 1.			
LVII.	2. 33. 21.	☿		
	35. 22.	⊙	–	21. 32. 22.
	2. 1.			
LVIII.	2. 36. 36.	☿		
	38. 39.	⊙	–	21. 36. 18.
	2. 3			
	2. 54 22.	☿ coepit egredi ex ⊙		
	56. 6.	Egressus totus		
	1. 44.			

Noto: Ingressus ☿rii in Solem, et Egressus ex eodem obseruati sunt Telescopio 14. pedum bono. Transitus ⊙lis et ☿rii per meridianum obseruati instrumento

mento, quod vocant, Culminatorio, pedum trium. Id nobis ante hos annos obuenit dono Cl. Viri Domini *Antonii Ribeiro Sanchez*, et nos illud diligenter et accurate, firmiter et feliciter, in Meridiano constituimus. Reliquae Phases obseruatae sunt Telescopio 8. pedum, cui applicatum Micrometrum Anglicum Grahamianum, tribus filis argenteis instructum, vno horario et duobus parallelis, altero mobili, fixo altero, cuius cum horario intersectio orthogona est centrum, circa quod tota machina ope cochleae infinitae volui, et ad situm Aequatori parallelum constitui potest.

Tempora Phasium omnia sunt vera, reducta scilicet ex temporibus penduli, quod geminum habeo opere Gallico, vtrumque optimae notae. Differentiae declinationum reductae sunt ex reuolutionibus Micrometri, prout et has et illa inter obseruandum adnotaui, sine correctione vlla errorum quorundam inter obseruandum commissorum. Malui numeros obseruationum, vt sua his fides constet, candide et fideliter referre, praesertim cum cuiuis facile fuerit, eos ex calculo vel typo emendare, si in hoc operationum numero opus, aut operae pretium putauerit.

Cum autem totus in eo essem, vt quam plurima puncta viae Mercurii determinarem, diametri Solis adeo oblitus fui, vt ne in mentem quidem veniret, eius Micrometro metiendae, vt adeo ista ex Ephemeridibus vel tabulis Solaribus petenda sit. Caeterum quantitates reuolutionum Micrometri, alias aliunde determinatae fuerunt, tutius etiam multo, quam ex diametro Solis.

Porro

Porro obſeruatio haec facta eſt in Collegio noſtro, quod vocamus, auſtrali, cuius latitudo recens conſtituta eſt $39^{\circ}\ 54'.\ 0''$. praeciſe, et differentia a Meridiano obſeruatorii Petropolitani $5^{h}.\ 44'.\ 16''$, puto item ſatis praeciſe, quae fuſius videre erit in libro obſeruationum Pekinenſium, qui lucem expectat.

Fig. 1.

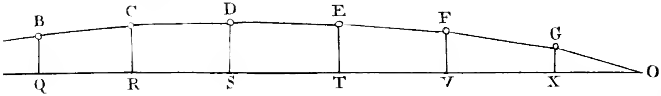


Fig. 2.

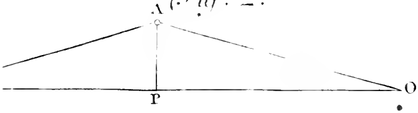


Fig. 3.

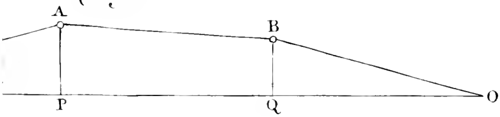


Fig. 4.

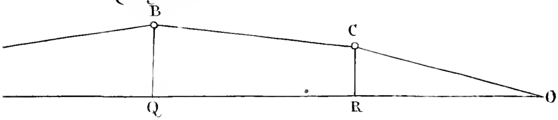


Fig. 5.

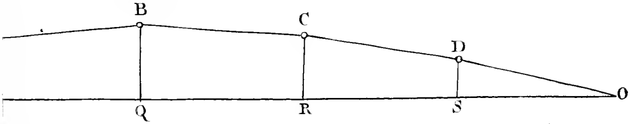


Fig. 1.

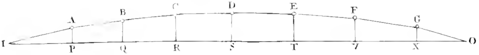


Fig. 2.

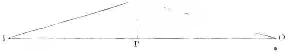


Fig. 3.

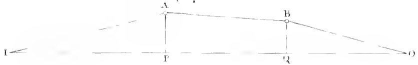


Fig. 4.

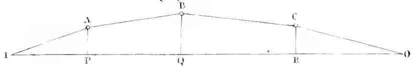
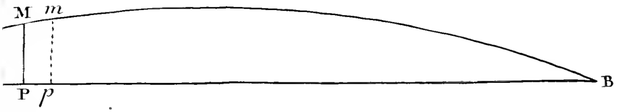


Fig. 5.

Fig. 1.



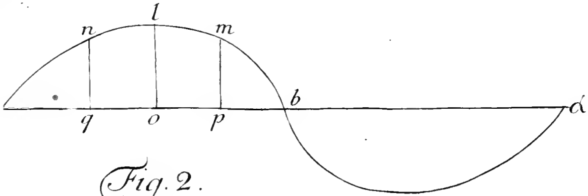


Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

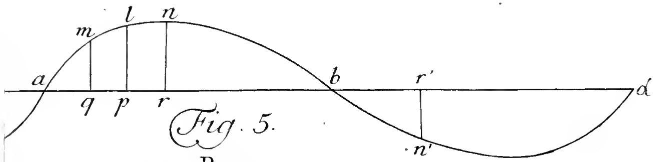


Fig. 5.

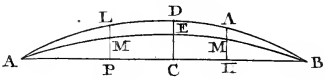


Fig. 6.

Fig. 7.

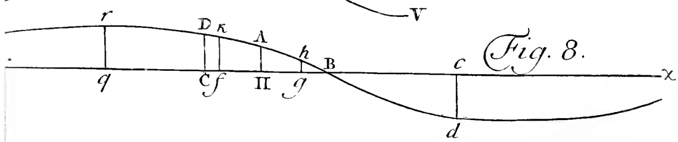


Fig. 8.

Fig. 1

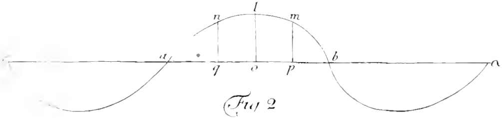


Fig. 2

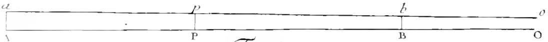


Fig. 3

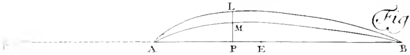


Fig. 4

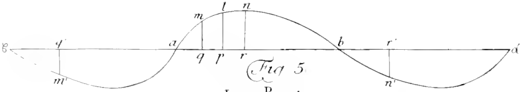


Fig. 5

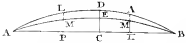


Fig. 6

Fig. 7

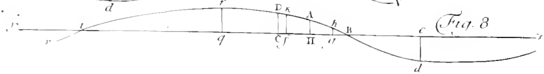


Fig. 8

Fig 1 (9)

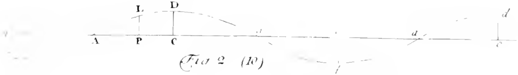


Fig 2 (10)

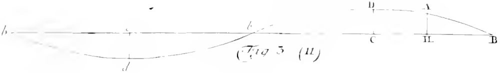


Fig 3 (11)

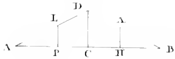


Fig 4 (12)

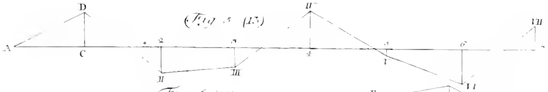


Fig 5 (13)

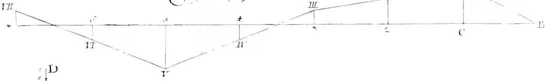


Fig 6 (14)

Fig 7 (15)

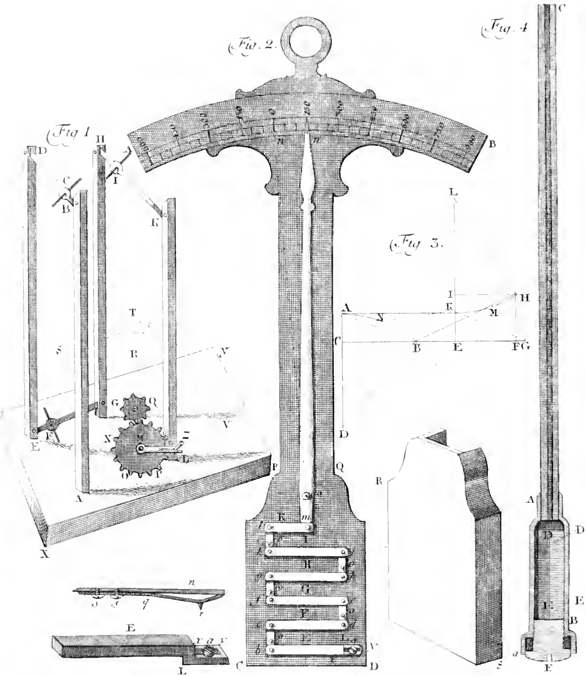


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4

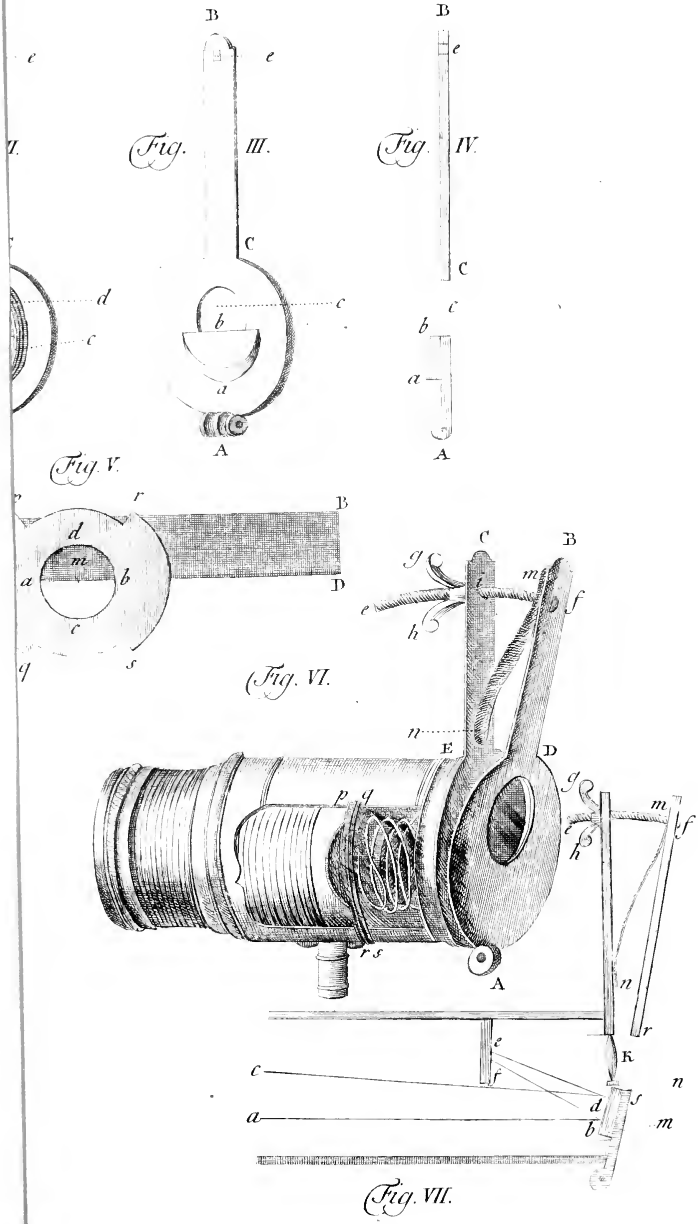


Fig. III. Fig. IV. Fig. V. Fig. VI. Fig. VII.

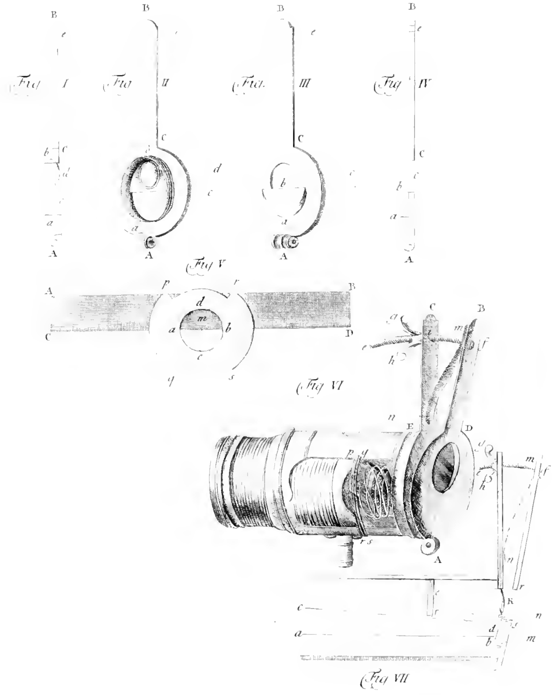


Fig. I
Fig. II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V
Fig. VI
Fig. VII

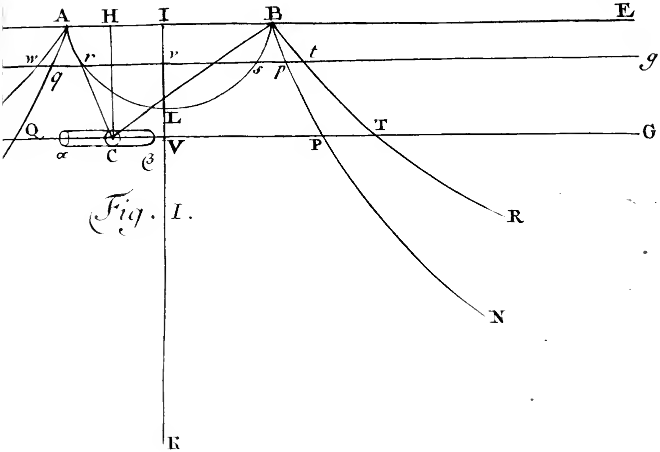


Fig. I.

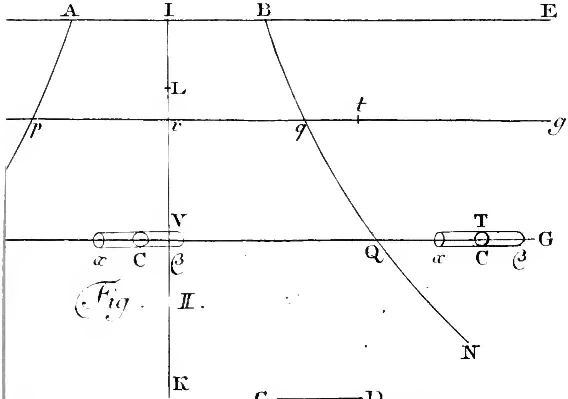


Fig. II.

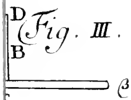


Fig. III.

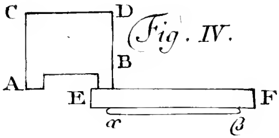


Fig. IV.

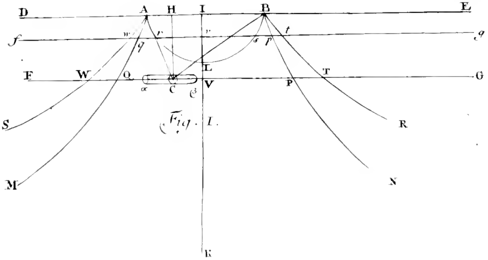


Fig. I.

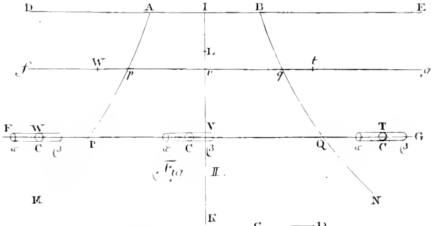


Fig. II.

Fig. III.

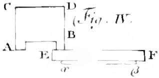
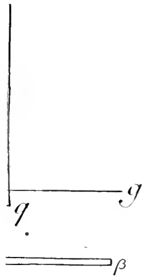


Fig. IV.



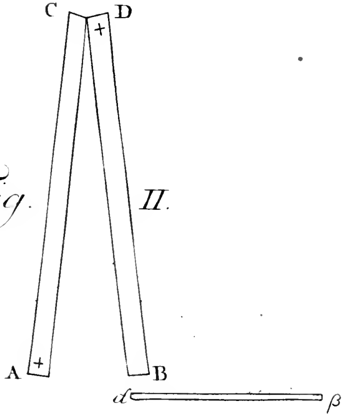
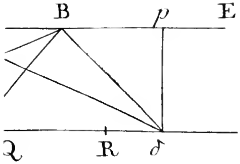


Fig. II.

III.



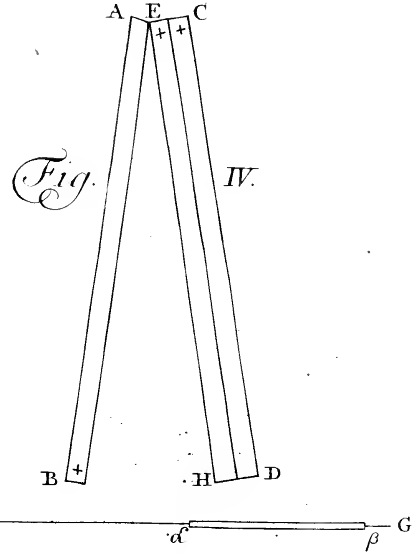


Fig. IV.

Fig. I.

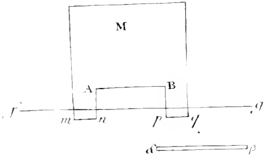


Fig. II

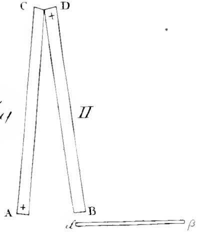


Fig. III

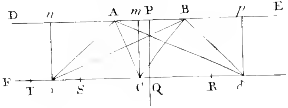


Fig. IV

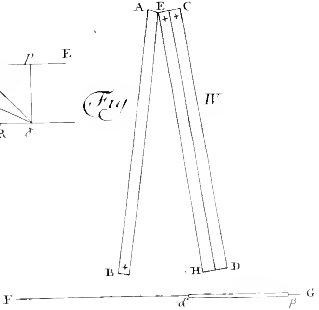
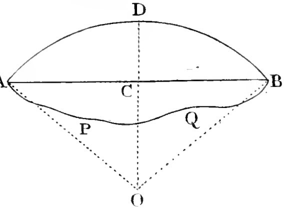
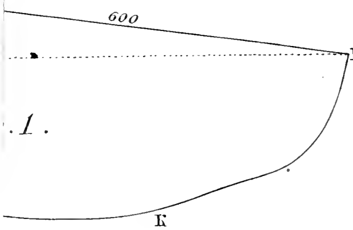


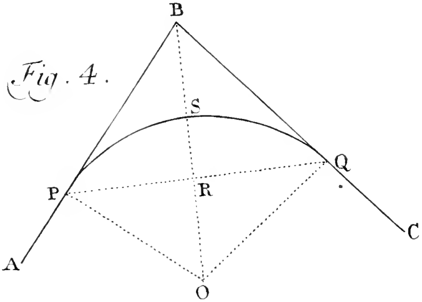
Fig. 2.





.1.

Fig. 4.



.5.

Fig. 6.

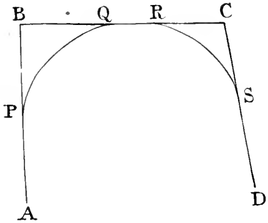


Fig. 7.

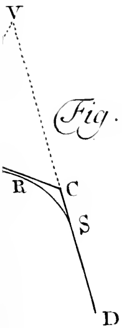
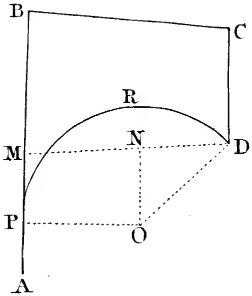


Fig. 8.



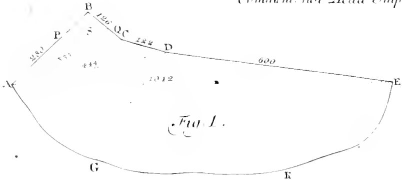
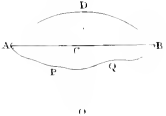


Fig. 1.

Fig. 2.



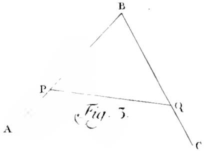
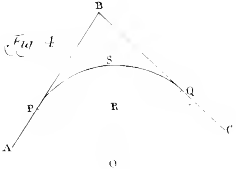


Fig. 3.

Fig. 4



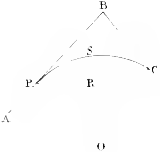


Fig. 5.

Fig. 6.

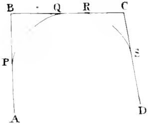


Fig. 7.

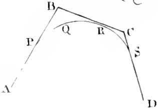
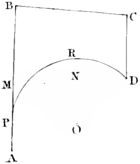


Fig. 8.



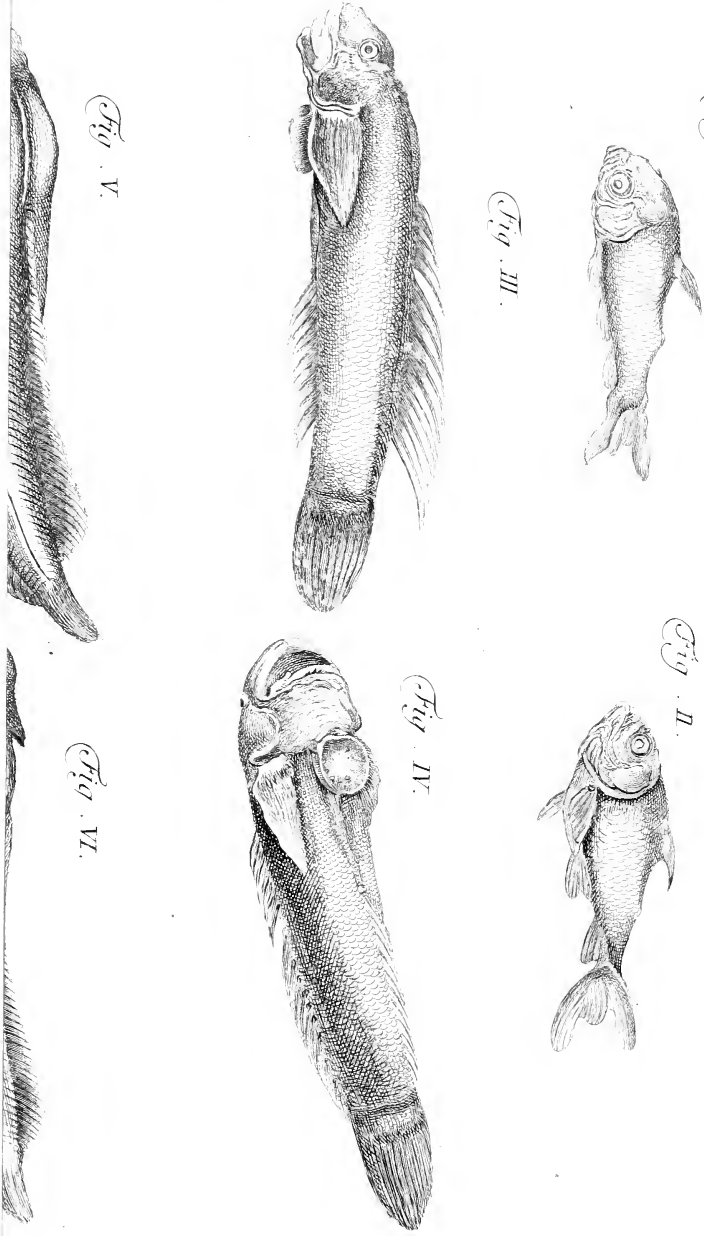


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.

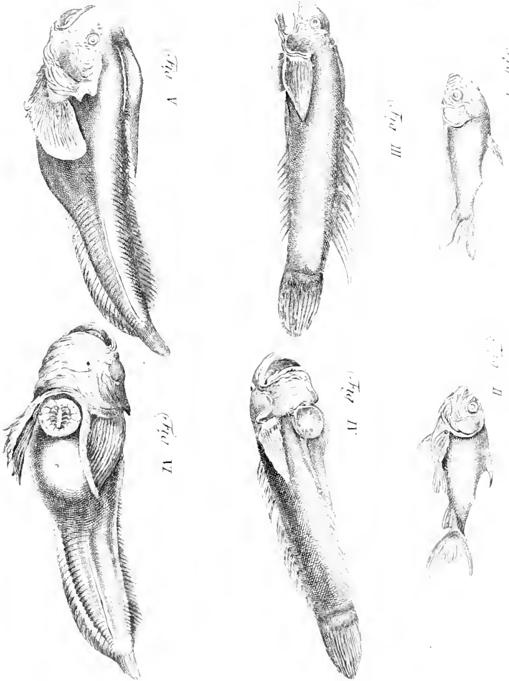


Fig. I
Fig. II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V
Fig. VI

Fig. I.

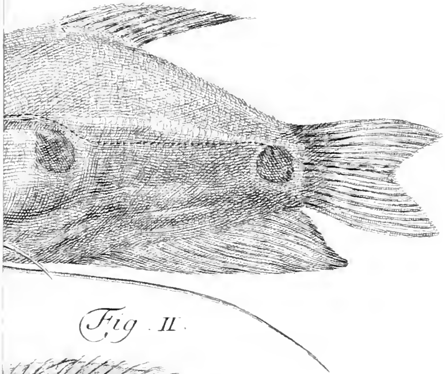


Fig. II.

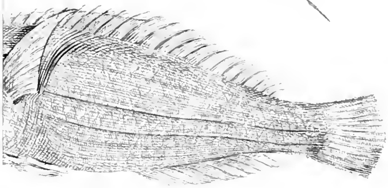


Fig. III.

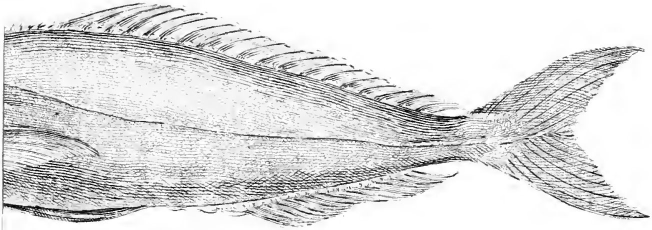


Fig. IV.

Fig. I

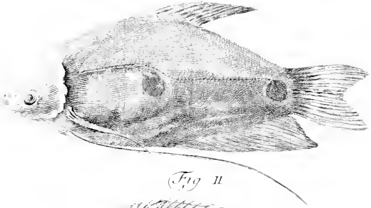


Fig. II

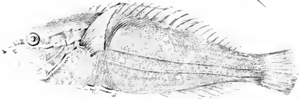


Fig. III

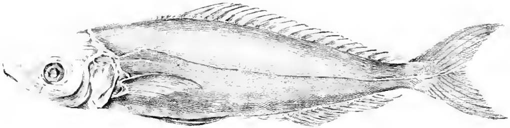


Fig. IV

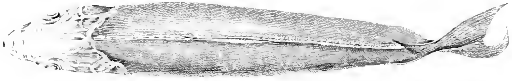


Fig. 1.

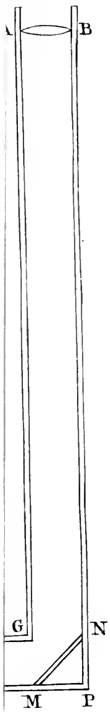


Fig. 2.

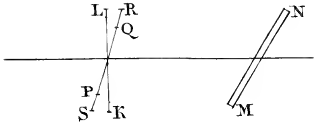


Fig. 3.

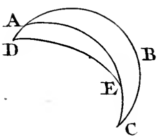


Fig. 1.

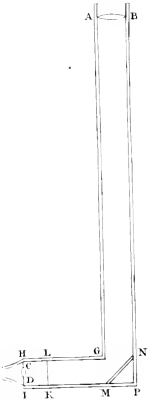


Fig. 2.

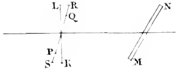


Fig. 3