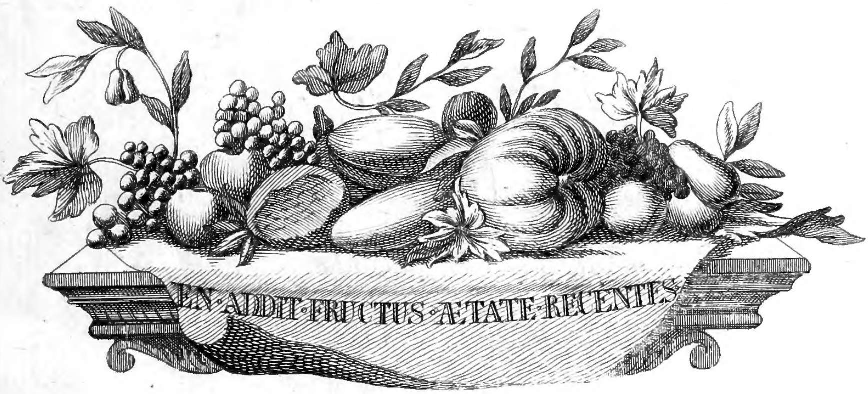
NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. VIII.

pro Annis MDCCLX. et MDCCLXI.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXIII.

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS VIII.

MATHEMATICA.

I.

De integratione aequationum differentialium.

Auctore Leon. Eulero pag. 3.

Saeculum mox erit elapsum, ex quo idea Differentialium et Integralium felicissimo successu in Analysin est inuecta, vnde etiam haec scientia tanta subito accepit incrementa, vt, quicquid antea fuerat exploratum, vix comparationem sustineat. Quantumuis autem hoc nouum calculi genus summorum ingeniorum studio et indefesso labore adhuc est excultum, minime tamen id exhaustum est reputandum, et quo vlterius in hac scientia penetrare licet, eo ampliores campos etiam nunc prorsus incultos detegunt Geometrae, qui vires humanas longe superare videntur. Cum igitur labores in hoc studio impensi iam tantum vtilitatis attulerint, eo magis hinc animi Geometrarum inflammari debent, vt omnibus viribus immensum hunc campum perscrutari annitantur. Quorum quidem studia antiquis tantum elementis sunt adstricta, vel qui a Mathematicis disciplinis prorsus abhorrent, eos idea Infiniti, cui sublimiores istae inuestigationes sunt superstructae, non mediocriter offendere solet, et voce perperam intellecta, plerumque sibi persuadent, subtiliorem hanc Analyseos

 partem

partem tantum in vanis circa Infinite magna et Infinite parua ſpeculationibus conſumi, neque inde quicquam vtilitatis ad vera cognitionis noſtrae obiecta, quippe quae omnia ſint finita, expectari poſſe. Quae opinio, etſi vtiliſſimis inuentis, quae ſublimiori Analyſi accepta referre debemus, iam funditus eſt euerſa, haud tamen abs re erit peruerſas illas Infiniti ideas, quibus ea innititur, remouere et emendare. Cum igitur vniuerſa Matheſis in omnis generis quantitatum contemplatione et comparatione verſetur, nemo ignorat, pleraſque quantitates, quas in mundo deprehendimus, continuo variari, et perpetuis mutationibus eſſe obnoxias. Coelum inſpicienti mox patet, ſolem, lunam et ſtellas ſitum ſuum iugiter mutare, ſola illa ſtella excepta, ſi quae forte in ipſo mundi polo fixa apparet: ſitum autem per quantitates cognoſcimus, dum locum cuiusque ſtellae, ſiue reſpectu noſtri Horizontis per Altitudinem et Azimuthum, ſiue reſpectu Aequatoris per Aſcenſionem rectam et Declinationem, ſiue denique reſpectu Eclipticae per Longitudinem et Latitudinem definimus; vnde perſpicuum eſt, totam Aſtronomiam cognitione quantitatum contineri, quarum aliae continuas mutationes patiantur, modo maiores modo minores, aliae vero perpetuo eaedem maneant, veluti Latitudo cuiusque ſtellae fixae, etiamſi nunc quidem hic leuis variatio ſit obſeruata. Harum ergo quantitatum, quas natura nobis offert, diuiſio in Variabiles et Conſtantes ſatis eſt manifeſta, ſimulque intelligitur, difficillimam noſtrae cognitionis partem in accurata quantitatum Variabilium inueſtigatione eſſe conſtitutam. Scilicet tum demum perfectam cognitionem motuum

motuum coelestium, veluti planetae, seu cometae, sumus adepti, cum pro quouis tempore eius locum in coelo, hoc est, eius Longitudinem et Latitudinem, assignare valuerimus. Ponamus nobis lunae motum hac ratione esse exploratum, quo melius nostras cogitationes figere queamus; quicquid enim de hoc casu dixero, id facile ad omnis generis quantitates variabiles transferetur. Cum igitur ad quoduis tempus, quod pariter quantitate metimur, lunae tum Longitudo, quam Latitudo, assignari queat, vtraque haec quantitas per tempus determinatur, seu si tempus a certa epocha elapsum denotetur littera *t*, tam Longitudo, quam Latitudo, lunae exprimetur certa quadam formula per tempus *t* vtcunque definita, cuius valorem pro quouis tempore *t* assignare liceat. Huiusmodi formula generalis, cuius valor determinatus pro quolibet tempore determinato exhiberi potest, vocatur in Analysi Functio quantitatis *t*, sicque nostro casu et Longitudo et Latitudo lunae erit certa quaedam Functio temporis *t*, cuius natura, hoc est, ratio compositionis, si nobis esset perspecta, motus lunae perfectam haberemus cognitionem, quae igitur tota in ratione illarum functionum sita est censenda. Cum igitur inde constet, quantam mutationem lunae Longitudo et Latitudo quouis tempore subeat; variatio etiam, minimo tempore facta, quae vtique et ipsa erit minima, definiri, eiusque relatio ad ipsum tempus minimum assignari poterit; quae cognitio maximi est momenti, cum inde mutatio momentanea innotescat, nihilque hic impedit, quo minus tempusculum istud euanescens seu infinite paruum accipiatur. Atque hic est fons Infinite paruorum, in Analysi receptorum; vbi probe notari conuenit, venit, non tam ipſorum paruitatem, quam rationem mutuam, quae vtique eſt finita, conſiderari: et quemadmodum huiusmodi Infinite parua Differentialia vocantur, ita Calculus, in eorum relatione ſcrutanda occupatus, Differentialis appellatur: neque hic quicquam de Infinite paruis eſt metuendum, cum omnis calculus in eorum relatione, quae eſt finita, abſoluatur. Hactenus quidem aſſumſimus indolem earum formularum, ſeu Functionum, quae Longitudinem lunae et Latitudinem per tempus exprimunt, eſſe cognitam; verum ſi viciſſim ipſa mutatio momentanea daretur, quippe quam ex viribus lunam ſollicitantibus colligere licet, tum quaeſtio ad naturam illarum Functionum inueſtigandam reducitur, totaque lunae theoria ipſi eſt ſuperſtruenda. Hic igitur ex mutatione momentanea, ſeu, vt Geometrae loquuntur, ex data relatione Differentialium, indoles ac natura ipſarum functionum determinari debet, in quo Calculus Integralis continetur. Quemadmodum itaque Calculus Differentialis docet Functionum Differentialia, ſeu potius eorum rationem, inueſtigare, ita viciſſim Calculus Integralis ex data Differentialium ratione indolem Functionum eruendi methodum tradit. Vtriusque ergo vim ita commodiſſime deſcribere licet, vt ſi v fuerit Functio quaecunque quantitatis t, ac ponatur Differentialium ratio $\frac{dv}{dt} = p$, Calculus Differentialis methodum exhibeat, ex indole Functionis v hanc Differentialium rationem p definiendi; contra autem Calculi Integralis munus ſit, ex data hac ratione p, ſeu eius relatione ad ipſas quantitates t et v, indolem Functionis v eruere. Scilicet ſi inter has quantitates p, t, et v aequatio quaecunque proponatur, totum

tum negotium eo redit, vt inde natura Functionis v, seu quomodo ea per t determinetur, concludatur. Quia vero ex illa aequatione data quantitatem $p = \frac{dv}{dt}$ per t et v definire licet, hinc eiusmodi aequatio $Mdt + Ndv = o$ nascetur, Differentialis appellata, in qua litterae M et N vtcunque per t et v determinatae sunt intelligendae, et iam quaeritur, cuiusmodi functio quantitas v sit ipsius t, seu, quod eodem redit, aequatio relationem inter t et v exprimens requiritur, vnde pro quouis valore ipsius t valor ipsius v assignari queat.

Hanc igitur quaestionem in latissimo sensu acceptam Cel. *Eulerus* in hac dissertatione contemplatur, et postquam animaduertit, eam tantum paucissimis casibus adhuc resolui posse, atque in hunc finem methodos maxime diuersas a Geometris adhiberi solere, methodum multo simpliciorem magisque naturalem exponit, omnes illos casus expediendi, quae simul viam ad plurimos alios casus patefacere videtur. Quantum hic sit praestitum, ex ipso Auctoris scripto est iudicandum; hic tantum notasse iuuabit, aequationem hanc $Mdt + Ndv = o$ etiam in latissimo sensu acceptam, exiguam tantum particulam vniuersae Analyseos infinitorum continere, quia tantum Differentialia primi ordinis complectitur. Quodsi enim v fuerit functio quaecunque ipsius t, et Differentialium ratio ponatur $\frac{dv}{dt} = p$, etiam haec quantitas p est variabilis, ex cuius variatione iterum similiter statui potest $\frac{dp}{dt} = q$, quae quantitas q Differentialia secundi ordinis inuoluere dicitur: quae cum pariter a t pendeat, ponaturque $\frac{dq}{dt} = r$ haec littera Differentialia tertii ordinis implicare censetur, et ita porro. Quibus positis Calculus Integralis ita deſcribi poteſt, vt ſit methodus ex data relatione Differentialium cuiusque ordinis indolem Functionis v inueſtigandi, ex qua illa Differentialia naſcantur, ſeu, quod eodem redit, ex data aequatione quacunque inter quantitates t, v, p, q, r etc. quemadmodum quantitas v per t determinetur, inueſtigari oportet. Ab hoc autem perfectionis gradu omnia adhuc inuenta Analyſeos artificia multo magis ſunt remota, et quae adhuc ignorantur, immenſum ſuperant exiguam illam particulam, quam etiamnum euoluere licuit.

Verum ne ſic quidem tota vis Analyſis infinitorum exhauritur, quia eiusmodi tantum functiones hic ſumus contemplati, quae per vnicam variabilem determinantur, veluti longitudo vel latitudo lunae ſpectari poterat, tanquam Functio ſolius illius quantitatis, qua tempus exprimitur. Dantur autem vtique caſus, quibus eiusmodi Functiones quaerantur, quae ſimul per binas, vel ternas, vel adeo plures variabiles determinantur.

Huiusmodi exemplum ſe offert, quando motus fluuii definiri debet, vbi aquae celeritatem pro omnibus punctis, quae in fluuio concipere licet, determinari oportet. Cuiuslibet autem puncti ſitus per ternas coordinatas x, y et z definitur, et celeritas in quolibet puncto tanquam Functio ternarum iſtarum variabilium x, y et z erit conſideranda: quodſi ergo relatio inter harum et ipſius Functionis quaeſitae differentialia intercedens proponatur, quam forte ex principiis motus colligere licet, quaeſtio huc redit, vt eiusmodi functio v ternarum variabilium x, y, et z definiatur, cuius

Diffe-

Differentiale dv ad harum Differentialia dx, dy, dz datam teneat relationem; ſeu ſi ponatur $dv = p\,dx + q\,dy + r\,dz$, ex data relatione inter quantitates v, x, y, z, p, q, r aequatione quacunque expreſſa, quaeritur, quomodo functio v per variabiles x, y et z exprimatur. Tum vero, cum etiam p, q, r futurae ſint functiones coordinatarum x, y et z, earum quoque differentialia, quae ſecundi ordinis ſunt cenſenda, in computum ingredi poſſunt, vnde hanc quaeſtionem, vt latiſſime pateat, etiam ad relationem differentialium ſecundi altiorumque ordinum extendi conueniet. Quodſi motus fluminis etiam cum tempore varietur, tum ad eius cognitionem celeritatem nonſolum pro quolibet puncto, quod iam ternis coordinatis definitur, ſed etiam ad quoduis tempus aſſignari debet, ex quo celeritas quaeſita, tanquam Functio quatuor variabilium, trium ſcilicet coordinatarum et temporis, erit ſpectanda. Quocirca Calculus Integralis generaliſſime ita definiri poterit, vt dicatur eſſe methodus talem Functionem quotcunque variabilium inueſtigandi, cuius Differentialia cuiusque ordinis propoſitam teneant relationem. Quicquid autem adhuc in hoc genere eſt praeſtitum, ad vnicum fere caſum, quo functio vnius variabilis ex data differentialium relatione quaeritur; et parum admodum, quod quidem ad functiones plurium variabilium pertineat, in medium a Geometris eſt allatum. In quo cum quaſi Calculi Integralis pars altera ſit conſtituenda, fateri cogimur, eam etiam nunc fere totam incultam iacere. Interim tamen certum eſt, vniuerſam Theoriam motus fluidorum huic Analyſeos parti maximam partem inniti, in eaque vix quicquam solidi ante expectari posse, quam fines Analyseos etiam in hoc genere haud mediocriter fuerint prolati. Fortiori certe incitamento Geometris haud erit opus, vt omnes vires ad hoc quasi nouum Analyseos genus excolendum intendant.

II.

Solutio Problematis de inuestigatione trium numerorum, quorum tam summa, quam productum, nec non summa productorum ex binis, sint numeri quadrati.

Auctore Leon. Eulero pag. 64.

Etsi huius generis problemata plerisque Geometris nimis sterilia videntur, quam vt in iis soluendis operam suam collocare, aequum iudicent, negari tamen nequit, quin inde insignia incrementa Analysis acceperit. Ac certe in genere affirmare licet, quo magis cuiusquam problematis resolutio fuerit abscondita, methodisque adhuc cognitis frustra tentata, eo magis solutionis, si tandem successerit, pretium esse constituendum. Ad hoc autem genus omnino referendum videtur problema hic pertractatum, cuius difficultatem non solum plures conatus irriti, antequam ad solutionem

nem peruenire licet, suscipiendi, sed etiam magnitudo numerorum satisfacientium manifesto declarat. Quam quidem solutionem Cel. Auctor tanquam simplicissimam affert, ea maximis numeris continetur; verum hic non parum intererit obseruasse, ex ipsa Auctoris solutione multo minores numeros quaestioni satisfacientes satis expedite elici posse. Positis enim ternis quaesitis numeris nx, ny, nz, vt tres sequentes numeros

I. $n(x+y+z)$; II. $nn(xy+xz+yz)$; III. n^3xyz

quadratos effici oporteat; prima et tertia conditio impletur sumendo $z = \frac{vv(x+y)}{xy-vv}$ et $n = m^2xy(x+y)(xy-vv)$. Vt autem secunda impleatur, statuit Auctor:

$xy-vv=uu$; $x=tv$, vt fit $y=\frac{vv+uu}{tv}$ et $z=\frac{vv}{uu}(x+y)$ tum vero deducitur ad hanc aequationem:

$$\frac{vv}{uu} = \frac{tt+1-ss}{2s(tt+1)-stt-2}$$

cui facillime satisfit sumendo $s=\frac{3}{2}$; siquidem hinc sequitur $\frac{vv}{uu} = tt - \frac{5}{4}$. Capi ergo conuenit $t = \frac{pp+5qq}{4pq}$, vnde fit $\frac{v}{u} = \frac{5qq-pp}{4pq}$, vbi numeros p et q pro lubitu assumere licet, ita vt hinc innumerabiles solutiones obtineantur: inter quas simplicissima videtur, quae oritur sumendo $t=\frac{3}{2}$, vnde fit $v=1$ et $u=1$, porro $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{4}{3}$ et $z=\frac{17}{6}$. Iam ob $x+y+z=\frac{17}{3}$, capiatur $n=6.34$ ex prima conditione, sicque tres numeri satisfacientes minimi erunt:

I . . $9.34=306$; II . . $8.34=272$; III . . $17.34=578$ quorum summa est $=1156=34^2$.

summa productorum ex binis $= 8\,9.34^2 + 9.17.34^2 + 8.17.34^2 = 19^2.34^2$
productum omnium $= 8.9.17.34^3. = 8^2.3^2.17^4$.

Hinc pronunciari posse videtur, minimos numeros integros problemati satisfacientes esse 272; 306; 578; fractos autem hos $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{17}$; $\frac{9}{34}$.

Caeterum hic notasse iuuabit, si tres numeri integri x, y, z desiderentur, vt tantum haec formula $xy + xz + yz$ fiat numerus quadratus, eos in genere ita exhiberi posse, vt sit:

$$x + y = (a-b)^2 + (d-e)^2$$
$$y + z = (b-c)^2 + (e-f)^2$$
$$z + x = (c-a)^2 + (f-d)^2$$

vnde fit $x + y + z = aa + bb + cc - ab - bc - ac + dd + ee + ff - de - ef - df$, ipsique numeri ita se habebunt:

$$x = (a-b)(a-c) + (d-e)(d-f)$$
$$y = (b-c)(b-a) + (e-f)(e-d)$$
$$z = (c-a)(c-b) + (f-d)(f-e)$$

vnde fit:

$$\sqrt{(xy + yz + xz)} = a(e-f) + b(f-d) + c(d-e)$$

Vel simplicius haec solutio ita enunciari potest, vt sit:

$$x = lm + pq;\ y = mn + qr;\ z = nl + rp$$

sumtis his senis numeris l, m, n et p, q, r, ita vt sit:

$$l + m + n = 0 \text{ et } p + q + r = 0$$

tum vero erit:

$$\sqrt{(xy + yz + xz)} = lq - mp = mr - nq = np - lr.$$

III.

III.

Theoremata Arithmetica, noua methodo demonſtrata.

Auctore Leon. Eulero pag. 74.

Singulari omnino Auctor hic vtitur methodo, ad plures inſignes numerorum proprietates demonſtrandas, quarum quidem nonnullas iam alio modo demonſtratas dedit, reliquae vero nouae ſunt habendae, atque ad alias maiori adhuc attentione dignas viam parare videntur. Ipſa quidem methodus ita dilucide eſt expoſita, vt nihil ad ampliorem eius illuſtrationem afferri poſſit; at vero praecipuas veritates, quas Auctor feliciter inueſtigauit, hic recenſuiſſe iuuabit. Poſtquam is iam gemina methodo eximium illud Theorema: *quod forma* $a^{p-1}-1$ *ſemper ſit diuiſibilis per numerum* p, *ſiquidem is ſit primus, neque numerus* a *per eum diuidi poſſit*, demonſtraſſet; hic non ſolum tertiam demonſtrationem ex aliis principiis petitam adiicit; verum etiam idem Theorema, quod ad numeros tantum primos erat adſtrictum, ad omnes plane numeros extendit. Propoſito ſcilicet quocunque numero N, definit inde numerum n, vt forma a^n-1 per illum numerum N certe diuiſionem admittat; vbi quidem numerus a pro lubitu aſſumi poteſt, ſed tamen ita comparatus eſſe debet, vt cum numero N nullum habeat diuiſorem communem, ſeu vt numeri N et a ſint inter ſe primi, quae quidem conditio ſemper eſt ſubintelligen-

da

da, etiamsi verbis non exprimatur. Demonstrat igitur Auctor, exponentem n semper ita pendere a numero proposito N, vt aequalis sit multitudini numerorum ipso N minorum, qui simul ad eum sint primi, id quod exemplo magis perspicuum reddetur. Sit igitur numerus propositus $N = 10$; numeri autem eo minores, ad eumque primi, sunt 1, 3, 7, 9, ideoque quatuor, vnde fit $n = 4$. Sumto iam pro a numero quocunque ad 10 primo, seu qui neque per 2 neque per 5 diuidatur, ac certo pronunciare licet, hanc formam $a^4 - 1$ esse per 10 diuisibilem, hoc est, omnium huiusmodi numerorum biquadrata vnitate minuta diuisionem per 10 admittunt. Veluti si $a = 3$, fit $a^4 - 1 = 80$; si $a = 7$, fit $a^4 - 1 = 2400$ et ita porro. Quaeritur autem hic ante omnia, quomodo pro quouis numero N multitudo numerorum ipso minorum, ad eumque primorum, cui numerus n aequalis est sumendus, commode definiri possit: vbi quidem perspicuum est, si N fuerit numerus primus, fore $n = N - 1$, propterea quod omnes numeri ipso minores, quorum multitudo vtique est $= N - 1$, simul ad eum sunt primi. Sed si numerus N non est primus, eius ratio compositionis ex primis est spectanda; vbi cum existentibus p, q, r, s numeris primis, omnes numeri ad hanc formam $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc. reuocari possint, ab Auctore est demonstratum:

si sit $N = p^\alpha$, fore $n = p^{\alpha-1}(p-1) = N.\frac{p-1}{p}$

si $N = p^\alpha q^\beta$, fore $n = p^{\alpha-1}(p-1).q^{\beta-1}(q-1) = N.\frac{p-1}{p}.\frac{q-1}{q}$

si $N = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, fore $n = p^{\alpha-1}(p-1).q^{\beta-1}(q-1).r^{\gamma-1}(r-1)$

seu $n = N.\frac{p-1}{p}.\frac{q-1}{q}.\frac{r-1}{r}$.

sicque

ſicque porro, ita vt pro dato numero N numerus n inueniri poſſit ex ſolis numeris primis in eum ingredientibus, nullo ad eorum poteſtates habito reſpectu, quod in diſſertatione non eſt animaduerſum. Ita ſi $N = 120$, qui numerus ex primis 2, 3, 5 componitur, vnde fit $n = 120 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 32$; atque forma $a^{32} - 1$ certe erit diuiſibilis per 120, dum a nullum horum numerorum 2, 3, 5 complectatur. Verum hic inſuper obſeruare licet, plerumque minorem poteſtatem eadem proprietate praeditam eſſe. Rationem enim harum demonſtrationum perpendenti mox patebit, ſi fuerit $N = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, formam $a^n - 1$ per hunc numerum fore diuiſibilem, non ſolum cum n fuerit productum ex his tribus numeris:

$$p^{\alpha-1}(p-1); \quad q^{\beta-1}(q-1); \quad r^{\gamma-1}(r-1)$$

ſed ſufficere, ſi pro n minimus communis diuiduus horum numerorum accipiatur, quae obſeruatio haud inelegans in diſſertatione eſt praetermiſſa. Ita ſi ſit $N = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, terni numeri pro exponente n inueniendo ſunt 4; 2; 4, quorum minimus communis diuiduus eſt 4: ſicque pronunciare licet, hanc formam $a^4 - 1$ ſemper eſſe per 120 diuiſibilem, dummodo a ad 120 fuerit primus.

Simili modo ſi $N = 63 = 3^2 \cdot 7$, hi duo factores dant numeros 6 et 6, quorum minimus communis diuiduus cum ſit 6, haec forma $a^6 - 1$ erit per 63 diuiſibilis, ſi modo a neque ternarium, neque ſeptenarium, contineat.

Sit $N = 32760 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7 . 13$, qui factores inter se primi praebent hos numeros:

$$4; 6; 4, 6, 12$$

quorum communis diuiduus est 12, ex quo haec forma $a^{12} - 1$ semper per 32760 diuisionem admittit, modo a nullum horum numerorum primorum, 2, 3, 5, 7, 13 inuoluat: veluti si $a = 11$, est

$$a^{12} - 1 = 3138428376720 = 32760 . 95800622$$

vbi notari conuenit, esse:

$$95800622 = 2 . 37 . 61 . 19 . 1117$$

Saepenumero autem euenire potest, vt pro sumto numero a etiam minor potestas satisfaciat, sed talis diminutio ab indole numeri a pendet, neque in genere minor potestas, quam hic est assignata, theoremati tribui potest.

IV.

Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur.

Auctore Leon. Eulero pag. 105.

Versantur haec Theoremata circa numeros, qui sunt aggregata ex quadrato et triplo alterius quadrati formata, ideoque hac formula generali $pp + 3qq$ continentinentur. Scilicet si duae series constituantur, quarum altera constet ex numeris quadratis, altera ex iisdem triplicatis, vti

I. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

II. 3, 12, 27, 48, 75, 108, 147, 192, 243

atque singuli prioris seriei singulis posterioris seriei addantur, oriuntur ii numeri, quorum indoles hic consideratur, et qui secundum ordinem magnitudinis dispositi sunt ad centum vsque

4, 7, 12, 13, 16, 19, 21, 28, 31, 36, 37, 39, 43, 48, 49
52, 57, 61, 63, 64, 67, 73, 76, 79, 84, 91, 93, 97, 100.

Hinc si primo excerpantur numeri, qui sunt primi

7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97

hi omnes vnitate minuti per 6 diuisibiles deprehenduntur, seu in formula $6n+1$ continentur, cuius quidem ratio facile perspicitur, cum ex forma $pp+3qq$ alii numeri primi oriri nequeant, nisi qui per 3 diuisi, vnitatem relinquant. Sed eius inuersum, quod vicissim omnes numeri primi istius formae $6n+1$ simul in illo numerorum genere occurrant, veritas est multo magis ardua, cuius demonstratio maximas ambages postulat. Demonstrari scilicet oportet, semper dari numeros p et q, vt sit $6n+1=pp+3qq$, si quidem numerus $6n+1$ fuerit primus, vbi imprimis notari conuenit, nisi $6n+1$ sit primus, hanc proprietatem saepius fallere, vti fit in numeris 55, 85, qui etsi multiplum senarii vnitate superant, tamen neutiquam in forma $pp+3qq$ continentur. At si huiusmodi numerus $6n+1$ fuerit primus, quantumuis sit magnus,

 veluti

veluti 20161, certo pronunciare licet, duo dari quadrata pp et qq, vt ſit $20161 = pp + 3qq$, reperitur autem $p = 31$ et $q = 80$, neque plus vno modo hoc fieri poteſt. En ergo ſummam Theorematum hic ſingulari prorſus modo demonſtratorum, quod omnis numerus primus formae $6n + 1$ ſemper in hac forma $pp + 3qq$, idque vnico tantum modo, contineatur, ex quo ſequitur, ſi quispiam numerus formae $6n + 1$ vel prorſus non in forma $pp + 3qq$ contineatur, vel plus vno modo, tum eum certe non fore primum. Fundamentum autem harum demonſtrationum in hac propoſitione eſt ſitum, quod ſi numerus formae $pp + 3qq$ non fuerit primus, eum non alios admittere diuiſores, niſi qui ipſi in eadem forma $pp + 3qq$ contineantur. His autem principiis Auctor iam olim erat vſus, cum demonſtraſſet, non dari duos cubos, quorum ſumma, vel differentia, ſit cubus, tum vero etiam nuper, cum noua plane methodo problema de tribus cubis inueniendis, quorum ſumma ſit cubus, ſoluiſſet, quamobrem, vt hic nihil amplius deſiderari poſſet, omnino neceſſe erat, theoremata iſta rigidis demonſtrationibus confirmari. Caeterum ingenue fatetur Auctor, has demonſtrationes ex principiis nimis alienis eſſe petitas, fonteſque magis proprios dari eo deducentes, ex quibus *Fermatius* hauſiſſe videtur, cum inde ſe demonſtrauiſſe aſſeueret, hanc aequationem generalem $a^n \pm b^n = c^n$ nunquam locum habere poſſe, ſtatim atque exponens n binarium ſuperet, cum tamen *Eulerus* hanc impoſſibilitatem tantum pro caſibus $n = 3$ et $n = 4$ demonſtrare valeat, ex quo eo magis dolendum eſt Fermatiana inuenta temporum iniuria periiſſe.

V.

Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolui potest.

Auctore Leon. Eulero pag. 129.

Quando integrationes algebraice perficere non licet, valores integralium per quadraturas linearum curvarum vulgo exhiberi solent, dum scilicet linea curva assignatur, cuius area eundem valorem exprimat, vel saltem eiusmodi quantitatem, ex qua is determinari possit. Inter huiusmodi quantitates, quae dum limites Algebrae communis quasi transcendunt, Transcendentes appellantur, frequentissime occurrunt, quae a quadratura circuli et hyperbolae pendent, quorsum omnes formulas integrales nullam irrationalitatem inuoluentes reduci posse constat, atque hae binae transcendentium species iam ita vsu in Analysin sunt receptae, vt propemodum instar algebraicarum tractentur. Quae nimirum a quadratura circuli pendent, eae nunc quidem per calculum angulorum felicissime expediuntur, quemadmodum eae, quae a quadratura hyperbolae pendent, logarithmis comprehendi solent, quorum calculus nunc fere inter elementa refertur. Quodsi vero quadraturis magis complicatis opus est, euolutio multo maioribus difficultatibus est obnoxia. Etsi enim descriptio linearum curuarum conceditur, tamen in praxi nimis est moleſtum, areas iis incluſas ſatis exacte dimetiri. Quam ob cauſam iam pridem Geometrae in hoc elaborauerunt, vt loco quadraturarum potius rectificationes curuarum in hunc vſum traducerent; quia ſtatim ac linea curua accurate fuerit deſcripta longitudinem cuiusque arcus ſine vllo apparatu ope fili dimetiri licet, in quo negotio olim *Hermannus* immortalem gloriam eſt aſſecutus, dum problema ab aliis pro deſperato habitum ſumma ſagacitate reſoluit, et pro cuiuscunque curuae quadratura lineas curuas adeo algebraicas inuenire docuit, quarum rectificatione idem praeſtari queat. Cum igitur nullum ſit dubium, quin huiusmodi conſtructiones eo ſint elegantiores, quo facilius curuae, quarum rectificatio adhibetur, deſcribi queant, in hoc negotio ſectionibus conicis, Ellipſi ſcilicet et Hyperbolae, merito primae partes ſunt tribuendae; et cum plerumque difficillimum ſit indolem earum formularum integralium perſpicere, quarum valores per arcus, ſiue ellipticos, ſiue hyperbolicos, exprimere liceat, Auctor hic ſingulari methodo praecipuas formulas integrales inueſtigat, quae hoc modo conſtructionem admittunt. Celeb. *Alembertus* quidem hoc idem argumentum iam pridem in actis Acad. Reg. Pruſſicae pertractauit, *Euleri* vero methodus plane noua, qua arcus ſectionum conicarum aliarum curuarum inter ſe comparare docuit, in hac inueſtigatione eximiam praeſtitit vtilitatem, vt hoc negotium multo vberius confeciſſe videatur. Plurimae autem transformationes, quibus Auctor in hac ardua euolutione vtitur, in Analyſi haud ſpernendam vtilitatem habere poſſunt. Interim laudi ac dignitati huiusmodi inueſtigationum nihil

de-

detrahetur, si obseruauerimus, nunc quidem in calculi applicatione ad praxin neque curuarum quadraturam, neque rectificationem, magnopere desiderari, cum omnia multo facilius et accuratius per methodos appropinquandi expediri queant.

VI.

Constructio aequationis differentio-differentialis etc.

Auctore Leon. Eulero pag. 150.

Forma aequationis, quam Auctor hic construendam suscepit, ita est comparata, vt latissime pateat, ac per vniuersam Analysin amplissimum habeat vsum; cum in ea omnia, quae olim de celeberrima illa aequatione Riccatiana sunt inuestigata, contineantur. Si hoc negotium per methodos vsitatas tentetur, summae difficultates obstant, quo minus ad finem perduci queat; nouam igitur Auctor ac prorsus singularem methodum exponit huiusmodi aequationes tranctandi, cuius quidem iam pridem nonnulla egregia specimina edidit; neque vllum est dubium, quin ista methodus, si diligentius excolatur, insignia incrementa Analysi sit allatura. Casu autem euenit, vt haec tractatio non penitus ad finem sit perducta, siue quaedam capita perierint, siue ab Auctore sint neglecta. Quae autem hic proferuntur, omnino sufficiunt ad vim nouae huius methodi per-

perſpiciendam, atque adeo, quae deſunt, ab attento lectore harum rerum ſtudioſo haud difficulter reſtituentur. Quin etiam ſi ex hac parte attentio excitetur, nullum eſt dubium, quin Analyſis inde multo maiora incrementa ſit conſecutura.

VII.

Annotationes in locum quendam Carteſii, ad circuli quadraturam ſpectantem.

Auctore Leon. Eulero pag. 157.

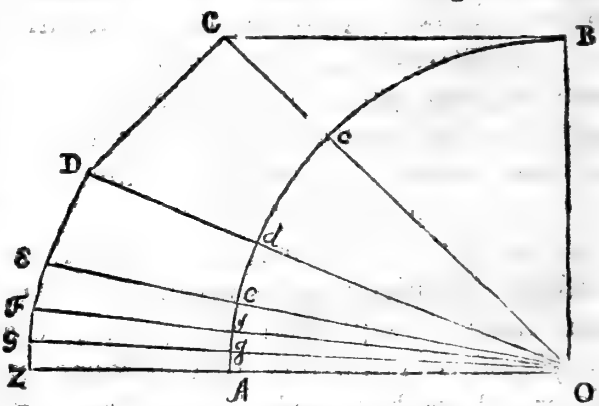
Peripheriam circuli ad diametrum eſſe incommenſurabilem, ſeu nullam dari menſuram, qua tam diametrum, quam peripheriam, ita metiri liceat, vt nihil relinquatur, iam ab antiquiſſimis Geometris eſt obſervatum, etſi hoc etiam nunc aliter demonſtrari non poteſt, niſi quod omnes conatus huiusmodi menſuram inueniendi fuerint irriti. Nullos ſcilicet eiusmodi binos numeros exhibere licet, qui inter ſe eandem praeciſe rationem teneant, quae inter diametrum ac peripheriam intercedit, ex quo in praxi tales numeri vſurpari ſolent, qui tantum proxime ad iſtam rationem accedant, cuiusmodi ſunt Archimedei 7 ad 22 et Metiani 113 ad 355; tum vero ab aliis iſta vera ratio multo accuratius numeris expreſſa, vt etiam in maximorum circulorum computo error omnino ſit con-

contemnendus. Incommenſurabilitas autem in ſe ſpectata non obſtaret, quominus ratio diametri ad peripheriam geometrice aſſignari poſſet, cum quadrati Diagonalis ad latus quoque ſit incommenſurabilis, atque in genere omnes quantitates irrationales, quae ab extractione radicum oriuntur, geometrice conſtrui poſſint. Verum peripheria circuli ad genus Irrationalium longe ſublimius referenda videtur, ad quod demum radicis extractione infinities repetita pertingere liceat; vnde etiam geometrice plus praeſtari non poteſt, quam vt vera peripheriae ad diametrum ratio continuo propius exprimatur. Atque hoc modo Conſtructio *Carteſiana*, quam Cel. Auctor hic perpendit, eſt comparata, vt continua rectangulorum certa lege decreſcentium appoſitione linea tandem eliciatur recta peripheriae circuli aequalis; haecque conſtructio ita ingenioſe eſt excogitata, vt facillima operatione citiſſime ad veritatem conuergat; in quo eximium monumentum ſummae inuentoris ſagacitatis mirari debemus. *Eulerus* autem, dum hoc inventum obliuioni ſubtrahit, plures egregias formulas et ſeries ad circuli menſuram pertinentes profert, quibus huiusmodi approximationes geometricae multiplicari magisque perfici queant. Veluti cum demonſtrauiſſet, denotante q longitudinem quadrantis circuli, cuius radius $= 1$, eſſe:

$$q = \text{ſec.}\,\tfrac{1}{2}q.\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{4}q.\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{8}q.\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{16}q.\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{32}q.\ \text{etc.}$$

 hinc

hinc sequens constructio satis concinna et elegans concluditur. Constituto Quadrante A O B radio O B iungatur normalis B C rectae O C angulum A O B bisecanti occurrens in C.



Tum huic O C in C normaliter iungatur C D occurrens rectae O D angulum A O C bisecanti in D. Simili modo huic O D normaliter iungatur recta D E occurrens rectae O E angulum A O D bisecanti in E; hincque O E denuo normaliter recta E F occurrens rectae D F angulum A O E bisecanti in F; atque ita porro. Hoc modo tandem peruenietur vsque ad radium O A productum, in cuius puncto Z constructio vltimo cadat; quo facto erit recta O Z longitudini quadrantis B*cdefg*A praecise aequalis.

Plurimas autem alias huiusmodi constructiones ex Formulis Auctoris facile deriuare licet. Notasse hic iuuabit, puncta B, C, D, E, F reperiri in tali linea curua, cuius natura, posito angulo quocunque A O D $= \Phi$ et recta O D $= v$, ita exprimitur, vt sit $v = \frac{q \sin. \Phi}{\Phi}$. Hinc enim sumta quacunque ratione inter angulum Φ et angulum rectum, cuius mensura est arcus q, vt sit $\Phi = \frac{m}{n} q$, erit $v = \frac{n}{m} \sin \frac{m}{n} q$ ideoque recta v geometrice assignari potest. Cum autem angulo Φ continuo immi-

imminuendo ad angulum euanescentem fuerit peruentum, vbi fit $\frac{\sin.\Phi}{\Phi} = 1$, tum recta v manifesto fit Quadranti q aequalis: Similes autem formulas alias quotcunque pro lubitu fingere licet.

VIII.

Demonstratio generalis Theorematis Newtoniani de binomio ad potentiam indefinitam eleuando.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 169.

Vt veritates mathematicae, quarum certitudo in aliis disciplinis tanquam exemplum imitandum proponi solet, extra omnem dubitationis aleam collocentur, non sufficit, eas eiusmodi demonstrationibus muniri, quibus animi ad discendum parati atque ingenio satis perspicaci praediti acquiescant, sed etiam omnino est necessarium, vt omnes obiectiones solide refellantur, atque adeo cauillationes Sophistarum explodantur. Ad hoc genus imprimis est referenda demonstratio Euclidea de aequalitate angulorum alternorum in lineis parallelis, quae haud leuibus dubiis est obnoxia, vt etiam summi Geometrae in ea firmius stabilienda studium atque operam collocauerint, in quo autem non parum est dolendum, quod istae emendationes nimis sint prolixae et arduae, quam vt elementis inseri queant. In Analysi etiam pura eiusmodi occurrunt demonstrationes, quas cauillandi ſtudium non mediocriter labefactare eſt annisum, cum circa quantitates plurimae veritates tanquam generales admitti ſoleant, etiamſi demonſtratio tantum ad numeros integros ſit accommodata. Huiusmodi obtrectationes imprimis expertum eſt Theorema *Newtonianum*, quo poteſtas binomii $(x+y)^m$ generaliter in hanc ſeriem euolui ſtatuitur:

$$x^m + \tfrac{m}{1} x^{m-1} y + \tfrac{m}{1}.\tfrac{m-1}{2} x^{m-2} y^2 + \tfrac{m}{1}.\tfrac{m-1}{2}.\tfrac{m-2}{3}.x^{m-3} y^3 + \text{etc.}$$

cum tamen iſta reſolutio nonniſi pro iis caſibus, quibus exponens m eſt numerus integer, ſit demonſtrata. Tantum autem abeſt, vt pro reliquis caſibus, quibus m eſt vel numerus fractus, vel irrationalis, vel tranſcendens, vel adeo imaginarius, de eius veritate dubitetur, vt potius huic Theorematі in latiſſimo ſenſu accepto vniuerſa Analyſis infinitorum ſit ſuperſtructa. Hinc ii, qui eius veritatem in genere, Analyſi infinitorum in ſubſidium vocata, demonſtrare ſunt conati, manifeſto vitioſiſſimum circulum in ratiocinando commiſerunt. Non inutiliter itaque collocauit laborem Auctor, cum demonſtrationem fundamentalis huius totius Analyſeos principii, idque per ſola Algebrae communis elementa, condere aggreſſus eſt. Singulari autem omnino artificio, poſtquam formulam $(x+1)^m$ huic ſeriei $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} +$ etc. aequalem finxit, oſtendit primo quidem ſemper eſſe $A = 1$, tum vero a quantitate B reliquas C, D, E etc. ita pendere, vt ſit:

$$C = B.\tfrac{B-1}{2};\ D = C.\tfrac{B-2}{3};\ E = D.\tfrac{B-3}{4};\ \text{etc.}$$

verum

verum mirifico prorſus caſu hic vſu venit, vt ipſa quantitas B hinc non determinetur. Altera igitur huius demonſtrationis pars in hoc verſatur, vt aliunde oſtendat, ſemper eſſe $B = m$, quod quidem tanto rigore praeſtat, vt nulli plane dubio locus relinquatur.

IX.

De functionum algebraicarum integrarum factoribus trinomialibus realibus commentatio.

Auctore F. V. T. Aepino p. 181.

Spectat haec commentatio ad Theoriam aequationum algebraicarum cuiuscunque ordinis, ſcilicet:

$$x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} + \text{etc.} \ldots + M x + N = 0$$

quam conſtat ſemper reſolui poſſe in totidem factores ſimplices formae $x + p$, quot maximus exponens n contineat vnitates. Saepe numero autem euenit, vt iſti factores ſimplices euadant imaginarii, ac tum demonſtratum eſt, numerum huiusmodi factorum imaginariorum ſemper eſſe parem. Quod autem praeterea in Analyſi aſſumi ſolet, tales factores imaginarios ita eſſe comparatos, vt cuique ſuus conueniat ſocius, qui per eum multiplicatus productum producat reale; id quidem tantum pro aliquibus caſibus firmiter eſt demonſtratum, generalem vero demonſtrationem adhuc deſiderari, omnes qui hanc Theoriam accuratius sunt scrutati, confitentur. Quotcunque scilicet aequatio habuerit factores imaginarios, quorum vnus sit $x+p$, ideoque p quantitas imaginaria, demonstrari debet, inter reliquos semper dari vnum illius quasi socium $x+q$, ita vt productum $(x+p)(x+q)=xx+(p+q)x+pq$ euadat reale; ad quod quidem requiri perspicuum est, vt binarum quantitatum imaginariarum p et q tam summa, quam productum, abeat in quantitatem realem. Huius itaque theorematis demonstrationem condere aggressus est Auctor, in quo quidem negotio ita procedit, vt si supponatur, (cuius perfectam demonstrationem, ex analysi infinitorum petitam, sibi vindicat *Alembertus*,) omnes quantitates imaginarias ad formam $A+B\sqrt{-1}$ reducibiles esse, postea singulari quodam artificio, propositionis antea indicatae probationem, inde deducat, quae quidem demonstratio, ita comparata est, vt per se attentionem mereri videatur, etsi concedatur, sub assumta ab Auctore hypothesi, dari forsitan faciliores aliquas ad demonstrationem hanc absoluendam vias.

X.

Solutio Problematis cuiusdam ad maxima minimaue pertinentis.

Auctore Steph. Rumowski pag. 189.

Problema hoc, cuius solutionem Cl. Auctor feliciter perfecit, omni Geometrarum attentione dignum est iudi-

iudicandum. Etsi enim ad famosam illam de Isoperimetricis quaestionem pertinet, circa quam opera ac studio Cel. *Euleri* nihil amplius reperitur, quod desiderari queat, tamen eius solutio in se spectata non solum est pulcerrima, sed etiam tantas implicat difficultates, ad quas superandas insignia Analyseos artificia requiruntur. Clar. quidem Auctor idonea Variabilium electione solutionem ita instruxit, vt commode prima Integratio succederet, et altera quasi sponte separationem Variabilium largiretur. In solutione autem, quam ab *Eulero* filio sibi missam communicat, prima integratio multo maiorem sollertiam requirit, et haud contemnenda calculi artificia complectitur. Caeterum ipsa quaestio, qua pro data Coni altitudine inter omnes bases, quae Cono aequalem soliditatem conciliant, ea quaeritur, vnde coni superficies minima oriatur? neutiquam inutilis est putanda, cum talis minimi cognitio saepius ingentem lucem foenerari queat: quod magis perspicuum redditur, si quaestio eadem aliis verbis ita efferatur, vt inter omnes conos tam eiusdem altitudinis quam eiusdem superficiei is definiatur, qui maxime sit capax? Solutio autem huius problematis tandem ad eiusmodi aequationem perducitur, quae innumerabiles lineas curuas in se complectitur, inter quas circulus etiam tanquam species occurrit. Ingrediuntur enim in aequationem finalem tres nouae constantes arbitrariae, vnde pro earum diuersa determinatione infinitae curuae diuersae obtinentur. Quae infinita multitudo, quomodo cum problematis natura consistere possit, haud facile apparet, ampliorique explicatione indiget. Namque

si

ſi baſis circularis ſatisfacit, ita vt conus ei ſuperſtructus minorem habeat ſuperficiem, quam ſi alia quaecunque figura eiusdem capacitatis baſi tribueretur; omnino mirum videtur, quid reliquae lineae curuae in ſolutione aeque contentae ſibi velint, et quomodo ad problema ſoluendum accommodari debeant? Ad hoc intelligendum indoles huiusmodi quaeſtionum accuratius eſt perpendenda. Primo igitur antequam tota coni ſuperficies vndequaque terminata conſideretur, ſolutio ad quemuis arcum indefinitum baſeos ita pertinere eſt cenſenda, vt inter omnes curuas iisdem terminis comprehenſas, quae ſimul idem ſpacium includant, ea definiatur, ex qua minima ſuperficies conica gignatur. Hic ergo tres res tanquam datae ſunt ſpectandae, bina ſcilicet puncta, per quae curua tranſire debet, et area, quam iſta curua includit. Quam ob rem ſolutionem completam ita comparatam eſſe oportet, vt curua quaeſita per data duo puncta deſcribi poſſit, ſimulque eius area inter haec puncta contenta datam quantitatem nanciſcatur. His ergo conditionibus vt ſatisfieri poſſit, omnino neceſſe eſt, vt aequatio finalis tres quantitates ab arbitrio noſtro pendentes inuoluat. Quo obſeruato iam perſpicuum eſt, quid aequatio illa maxime generalis inuenta ſibi velit, et quomodo ad vſum ſit traducenda? Quolibet enim caſu oblato duo puncta, per quae curuae eſt tranſeundum, tanquam data proponi ſunt intelligenda, vna cum area inter ea comprehenſa, tum vero aequationis ternae conſtantes arbitrariae ita determinentur, vt linea curua per iſta duo puncta tranſeat, et area inter ea comprehenſa datam illam quantitatem obtineat:

ex

ex quo euidens eſt, in aequatione problema perfecte ſoluente neceſſario tres conſtantes indefinitas ineſſe debere. Deinde etiam notari conuenit, quomodocunque iſtas conſtantes pro lubitu determinauerimus, vt curua determinata reſultet, eam ſemper problemati ita ſatisfacere, vt ſumtis in ea ad libitum binis punctis, inter omnes alias lineas, quae per eadem puncta ductae aequale ſpatium includant, quarum multitudo vtique eſt infinita, ea, quae fuerit reperta, minimam generet ſuperficiem conicam. Atque hoc modo vtique euenire poteſt, vt curua ſatisfaciens maxime a circulo diſcrepet. Statim enim atque bina puncta data non aeque fuerint a centro baſis remota, areaque inter ea comprehenſa ab area ſectoris circularis diuerſa, neutiquam fieri poteſt, vt circulus quaeſtionem reſoluat. Ex quo iam perſpicue intelligitur, cur ſolutio iſtius problematis infinitam diuerſarum linearum curuarum multitudinem complectatur.

PHYSICO - MATHEMATICA.

I.

Dilucidationes de reſiſtentia fluidorum.

Auctore Leon. Eulero pag. 197.

Quantam reſiſtentiam quaeuis corpora in fluido, veluti aqua, aut aere, mota patiantur, et quantum inde eorum motus debilitetur? quaeſtio eſt in vniuerſa Phyſica maximi momenti, cum nullus motus in hoc mundo exiſtat, qui ab huiusmodi perturbatione ſit immunis. Ex quo iam dudum naturae ſcrutatores, atque imprimis Geometrae, ſummo ſtudio fuerunt occupati, vt leges iſtius reſiſtentiae, quam corpora in fluidis mota ſuſtinent, inueſtigarent, eiusque veram quantitatem quouis caſu aſſignarent. Primum quidem ſolam experientiam conſulentes mox animaduerterunt, quo fluidum fuerit denſius, eo maiorem eſſe reſiſtentiam, idemque corpus ſimili motu in aqua latum tanto maiorem pati reſiſtentiam, quam in aere, quanto aqua aerem denſitate ſuperet. Tum vero etiam facile obſeruarunt, in eodem fluido reſiſtentiam eo eſſe maiorem, quo motus fuerit velocior. Imprimis autem ſenſerunt, reſiſtentiam plurimum a figura corporis pendere, effectumque fluidi eo eſſe minorem, quo obliquius in corporis ſuperficiem allabatur; quod diſcrimen praecipue

in

in nauigatione cernitur, dum aliae naues pro diuerſa figura aliis multo aptiores deprehenduntur ad reſiſtentiam ſuperandam, ex quo nata eſt quaeſtio plurimum agitata, cuiusmodi figuram naui tribui conueniat, vt minimam reſiſtentiam patiatur. Quae phaenomena vt explicarent, atque accuratius explorarent Geometrae, ad motus principia confugerunt, indeque per calculum definire ſunt conati, quanta quouis caſu reſiſtentia eſſe debeat, cum ratione celeritatis, qua corpus in fluido promoueatur, tum vero ratione eius figurae; atque tandem vniuerſam reſiſtentiae Theoriam ad duplicem regulam reuocaſſe ſunt arbitrati; quarum altera ad motum directum pertinet, quo ſuperficies plana perpendiculariter in fluidum occurrit, eaque ſtatuitur, reſiſtentiam quadrato celeritatis eſſe proportionalem, et quouis caſu aequiualere ponderi cylindri fluidi, cuius baſis aequalis ſit ſuperficiei motae, altitudo vero cum illa conueniat, ex qua graue cadendo eam ipſam celeritatem acquirat, qua corpus aduerſus fluidum mouetur. Altera regula ad motus obliquos ſpectat, quando motus directio ad ſuperficiem eſt obliqua, eaque reſiſtentia quadrato ſinus anguli obliquitatis proportionalis ſtatuitur. Hinc quaecunque fuerit corporis figura, eius ſuperficies in innumerabiles particulas infinite ſecta concipitur, et pro qualibet angulus obliquitatis, ſub quo in fluidum incurrit, indeque quantitas reſiſtentiae definitur; atque ex his omnibus reſiſtentiis elementaribus tandem tota reſiſtentia colligi ſolet, quatenus quidem calculum expedire licet. Celeberr. igitur huius diſſertationis Auctor in eo verſatur, vt principia, vnde hae regulae ſunt deductae, accuratiori examini ſubiiciat, quae cum hypotheſi manifeſto falſae innitantur, qua, ad ſimilitudinem colliſionis corporum ſolidorum, particulae fluidi ſimiliter corpus in eo motum percutere aſſumuntur, eas tanquam omni fundamento deſtitutas reiicere non dubitat. Plerumque quidem eas tam parum a veritate recedere fatetur, vt error enormis non ſit metuendus; veluti euenit, ſi corpus figura non nimis irregulari praeditum in fluido ampliſſimo moueatur, neque tamen celeritate adeo magna, vt pone corpus ob fluidum ſequi non valens quaſi vacuum relinquatur. Sin autem fluidum ſpatio ſatis anguſto eſt incluſum, in quo corpus motum partem ſatis notabilem occupet, manifeſtum eſt, illas regulas immaniter fallere debere. Si enim corpus totam cauitatem, qua fluidum includitur, repleret, procedere plane non poſſet, ac reſiſtentiam quaſi infinitam ſentiret, niſi quatenus fluidum ſe comprimi pateretur. Deinde etiam regulae illae memoratae tantum partem corporis anticam reſpiciunt, in quam fluidum allidit, pars vero poſtica plane non in cenſum trahitur, cum tamen experientia teſte eius figura multum ad reſiſtentiam, ſiue augendam, ſiue minuendam, conferat. His igitur perpenſis Auctor luculenter oſtendit, in reſiſtentia nullam plane colliſionem ſimilem ei, qua corpora ſolida in conflictu ſe mutuo percutiunt, admitti poſſe, quo ipſo totum fundamentum illarum regularum corruit. Partes autem fluidi anteriores iam antequam corpus motu ſuo ad eas pertingit, ad motum concitantur, quo iuxta corpus defluunt, ſpatium pone corpus relictum occupaturae, ita vt reſpectu corporis fluidum continuo circa

id

id refluat, quemadmodum nauigantes vident aquam continuo a prora ad puppim defluere. Hinc perspicuum est, corpus in fluido motum ab eo aliam vim non sustinere, praeter pressionem, quam fluidum praeterlabens in totam eius superficiem circumquaque exerit, et resistentiam nihil aliud esse, nisi effectum ex omnibus his pressionibus natum, motui corporis contrarium. In quo primo tenendum est, si pressio aquae, iuxta corpus praeterfluentis, haud differret ab ea, quam aqua quieta in corpus exereret, quoniam tum omnes pressiones se mutuo essent destructurae, nullum motus impedimentum, nullamque propterea resistentiam, inde esse exorturam. Eatenus ergo resistentia existit, quatenus aqua circa corpus praeterfluens aliam in id exercet pressionem atque aqua stagnans; atque ex hoc fonte vera resistentiae origo est haurienda. Primo igitur motum aquae praeterfluentis, tum vero pressionem, qua inde corpus in singulis punctis sollicitatur, definiri oportet, hincque demum ex omnibus pressionibus inter se collatis vera resistentiae quantitas assignari poterit. Haec autem inuestigatio maxime ardua est censenda, cum perfectam Theoriam motus ac pressionis fluidorum requirat. Etiamsi enim idem Auctor principia huius Theoriae perfecte euoluisset, ex iisque omnia quae tam ad motum, quam pressionem fluidorum pertinent, formulis analyticis esset complexus, tamen Calculi ad eas expediendas necessarii subsidia adhuc desiderantur, vt completam resistentiae Theoriam inde vix sperare liceat. Cum autem ea duplici inuestigatione contineatur, altera ad motum fluidi iuxta corpus defluentis, altera vero ad eius pressionem in singulis spectante, eiusmodi nexum Auctor ex Theoria agnouit, vt ex motu cognito pressio, ac vicissim definiri possit. Quodsi ergo vndecunque motus, quo fluidum iuxta corpus praeterfluit, fuerit cognitus, ex eo pressionem, quam corpus in singulis punctis sustinet, indeque porro resistentiam ipsam determinare docet, idque ope regulae satis simplicis, qua euictum est, quo celerius fluidum in quoque corporis puncto praeterfluit, ibidem pressionem eo esse minorem, ita vt maxima pressio ibi in corpus exeratur, vbi fluidi motus fuerit lentissimus. Atque hinc iam intelligitur, partem corporis posticam in determinatione resistentiae minime esse negligendam, vti fit in eius vulgari aestimatione. His expositis Auctor vicissim inquirit, quomodo cognita resistentia, seu pressione, qua corpus circumquaque vrgetur, inde ipse fluidi motus iuxta corpus defluentis definiri, simulque conditiones assignari queant, sub quibus talis motus locum habere possit, vnde Theoria fluidorum haud spernenda incrementa capere videtur. Imprimis autem cum resistentia per vulgares regulas definita saepenumero vix sensibiliter a veritate recedat, eos inuestigat casus, quibus haec determinatio cum veritate prorsus conueniat, inuenitque hoc fieri non posse, nisi corpus habeat figuram conoidis parabolici, simulque secundum directionem axis in fluido promoueatur; quia autem hoc conoides nusquam terminatur, sed in infinitum porrigitur, manifestum est, plane nunquam vulgarem resistentiae determinationem veritati consentaneam esse posse.

II.

II.
Principia Theoriae Machinarum.
Auctore Leon. Eulero p. 230.

Hic non agitur de vulgari Machinarum doctrina, qua constructio earum et compositio ex machinis simplicibus tradi solet, et quae ex solis principiis staticis naturae aequilibrii innixis petitur, ita vt ad ipsum motum, quo tamen totus effectus absoluitur, vix respiciatur. In hac igitur dissertatione ea potissimum, quae ad effectum machinarum determinandum spectant, exponuntur, in quo negotio commode vsu venit, vt quomodocunque machina fuerit composita, nihil aliud inde in computum ingrediatur, praeter solam rationem, quae inter celeritatem vis agentis et celeritatem oneris movendi intercedit, et ex machinae structura secundum praecepta in staticis tradita facile innotescit. Bina scilicet loca in qualibet machina sunt consideranda, in quorum altero vis mouens, in altero vero vis oneris reluctans, applicatur, motuque machinae impresso videndum est, quam rationem celeritates in his locis inter se sint habiturae. Iam cognita hac ratione certum est, ad onus mouendum tantam requiri vim, quae ad onus teneat eandem rationem inuersam. Hinc Auctor momentum vis agentis appellat productum, quod oritur, si haec vis celeritatem, qua operatur, multiplicetur; et vt ista mensura sit determinata, celeritatem exprimit spatio vno minuto secundo confecto. Simili modo momentum oneris, seu vis reluctantis, vocat productum, quod

quod oritur, ſi haec vis reluctans per ſuam celeritatem ſeu ſpatium vno minuto ſecundo abſolutum, multiplicetur. Perſpicuum autem eſt, hoc momento oneris veram menſuram effectus, quam machina producit, contineri, cum ſine dubio effectus tanto maior ſit aeſtimandus, quo magis oneri renitatur, et quo celerius promoueatur; at momentum hoc modo expreſſum ſimul effectum vno minuto ſecundo editum accurate metietur. Simili modo prius momentum vis agentis veram menſuram *actionis* largitur, quam certe diſtinctius mente concipere non licet. In omnibus nunc motibus machinarum ope effectis ſemper momentum vis agentis aequale eſt momento vis reluctantis, ſeu actio aequalis effectui, ſi quidem a frictione mentem abſtrahamus, et motus machinae fuerit aequabilis. Verum frictionis ratio haud difficulter habetur, dum ob eam tantum oneris momentum augetur, ita vt tum hoc momentum ob frictionem auctum momento vis agentis aequale ſit ſtatuendum, vnde pro data actione effectus machinae ob frictionem vtique diminuitur. In machinarum ergo conſtructione imminutio frictionis vtique maximi eſt momenti, at perfectio machinarum non tam a minuta frictione ipſa, ſed ab imminutione eius momenti pendet, quod quomodo obtineri poſſit, ipſa frictione non minuta, ab Auctore docetur. Quod vero ad motum machinae vniformem attinet, pleraeque quidem, dum ſunt in actione, aequabiliter mouentur; verum tamen in earum partibus ſaepe motus inaequalitas ſpectatur, dum verbi gratia piſtilla alternatim attolluntur et detruduntur, vnde actio machinae quoddam patitur detrimentum,

atque

atque Auctori ansam praebet hanc machinarum conditionem accuratius inuestigandi. His autem praemissis tota machinarum perfectio eo reuocatur, vt data vi agente machina ita instruatur, vt inde maximus obtineatur effectus, quae quidem quaestio primo intuitu solutionis non capax videtur, cum semper effectus sit actioni huius vis aequalis, nisi totam perfectionem in sola momenti frictionis imminutione quaerere velimus. Verum Auctor hic imprimis ostendit, etiamsi vires ad machinam mouendam adhibendae sint datae, tamen idcirco earum actionem neutiquam esse datam, sed prouti tardius, vel celerius, operentur, eam modo maiorem, modo minorem, existere posse; ex quo his viribus quouis casu ita vti conuenit, vt earum actio fiat maxima; quia tum etiam effectus machinae maximus efficietur. Hic igitur indoles virium mouentium potissimum est spectanda, vbi primo quidem, si viribus hominum vtamur, notari oportet, quantacunque vi homo, dum est in quiete, operari, hoc est trahere, vel trudere valeat, tamen eius vim, quo celerius idem opus exequi debet, continuo diminui, ac tandem prorsus euanescere. Ita si homo, dum quiescit, onus 100 librarum mouere valeat, idem progrediens eo minus onus post se trahere valebit, quo celerius incedit, ac si maxima qua potest celeritate currit, ne minimum quidem onus protrahere poterit, cum omnes suas vires in proprium motum impendat. Ponamus eius vires consumi, dum singulis minutis secundis spatium 6 pedum percurrit; et cum priori casu, quo quiescit, vis exerta sit 100 libr. celeritas autem nulla, posteriori vero vis

 nulla

nulla, celeritas autem 6 pedum, vtroque caſu actio hominis, productum ſcilicet ex vi in celeritatem, eſt nulla; dabitur ergo certus celeritatis gradus, quo ſi homo operetur, tametſi minorem vim quam 100 libr. exerat, actio tamen eius ſit maxima, atque adeo machinae applicata maximum effectum producat. Ad hanc definiendam Auctor quidem ad hypotheſin confugit, ſed ratione non deſtitutam, atque experientia confirmatam: ſumit ſcilicet, ſi homo, aliaue potentia agens, in quiete exerere valeat vim $= A$, at vero celeritate $= f$ progrediens nihil amplius praeſtare poſſit; tum ſi idem homo celeritate $= v$ incedat, exerere poſſe vim $= (1 - \frac{v}{f})^2 A$: vnde cum eius actio ſit aeſtimanda $= v(1 - \frac{v}{f})^2 A$, ea erit maxima, ſi fuerit $v = \frac{1}{3} f$, et ipſa actio maxima ſit $= \frac{4}{27} A f$. Ita ſi pro homine ſumatur $A = 100$ libr. et celeritas extrema $f = 6$ ped. homo efficaciſſime operabitur, ſi celeritate 2 ped. vno minuto ſecundo aget, tum autem vim exeret $= \frac{4}{9}\, 100 = 44\frac{1}{2}$ libr. et eius actio erit $= 44\frac{1}{2} \cdot 2 = 89$. Quoties ergo ad machinas mouendas operis hominum vti velimus, efficiendum eſt, vt hominum motus ſit 2 ped. ſingulis minutis ſecundis; ſcilicet ſi onus mouendum cum frictione reſiſtentiam faciat R libr. id tanta celeritate u moueri poterit, vt ſit $R u = \frac{4}{27} A f$, ideoque $u = \frac{4 A f}{27 R}$: vnde cum celeritas vis agentis ſit $= \frac{1}{3} f$. machinam ita inſtrui conueniet, vt ſit celeritas vis ad celeritatem oneris vt 1 ad $\frac{4 A}{9 R}$.

Idem tenendum eſt de viribus animalium cuiusque generis, quae ad machinas mouendas adhibentur; vbi

vbi imprimis notandum eſt, ea, quae maximae celeritatis ſunt capacia, maximum effectum producere. Ita ſi equus in quiete tantum anniti queat, quantum tres homines, ſimul vero triplo maiorem celeritatem ſuſtinere poſſit, eius actio efficaciſſima nouies erit maior quam vnius hominis, vnusque equus tantum praeſtare poterit, quam nouem homines. Eadem regula quoque locum habet in vi fluminis, cuius actio ad rotas circumagendas eſt maxima, ſi rota tanta velocitate verſetur, vt celeritas aquae allabentis ſit pars tertia. Haec igitur ſunt vera principia, ex quibus omnis generis machinae ad ſummum perfectionis gradum euehi poterunt, ad quod vulgarem machinarum doctrinam parum conferre manifeſtum eſt.

III.

De motu et attritu lentium, dum ſuper catinis poliuntur.

Auctore Leon. Eulero pag. 254.

Artifices olim in eiusmodi machinis excogitandis fuerunt occupati, quibus ſpreta figura ſphaerica lentibus vitreis figuram, vel parabolicam, vel ellipticam, vel hyperbolicam, aliamue quamcunque inducere poſſent, nunc autem etſi Dioptricae tam theoria, quam praxis, vberius eſt exculta, praeclare tamen nobiscum agi arbitramur, ſi modo lentes exactiſſime ad ſphaericam figuram elaborari poſſent; hoc enim ſi praeſtare liceret, multo perfectioribus certe tam telescopiis, quam microscopiis, vteremur. Duae autem sunt res, quae huic praxi impedimento esse deprehenduntur: altera in ipsius vitri natura flexibili et elastica est sita, qua fit, vt vitrum etiam planum catino concauo fortiter appressum eius figurae apprime se applicet, inde vero remotum in pristinam figuram restituatur. Quamuis ergo lens exactissime catini figuram induisse videatur, plerumque tamen eius figura deinceps multum diuersa reperitur; quod vitium aliter euitare non licet, nisi vt vitrum, dum super catino atteritur, ipsi lenissime apprimatur, quo quidem modo labore multo diurturniore opus est, quem artifices aegerrime suscipiunt. Alterum impedimentum in ipso catino reperitur, cuius figura, dum lens atteritur, non parum vitiatur, vt necesse sit, saepius veram eius figuram restituere, antequam eandem fuerit adepta; attritu enim mutuo non solum a vitro, sed etiam ab ipso catino, plurimae particulae abraduntur. Hoc vitium imprimis se exerit in operis initio, quo lentis figura etiamnum vehementer discrepat a catini figura, ideoque catinus in certis tantum locis atteritur; cui vitio quidem artifices remedium afferre student, dum lentem per totam catini superficiem circumducunt, casui autem hic nimis latus campus relinquitur, quam vt quicquam certi hinc sperare liceat. Quando autem lens iam proxime catini figuram est adepta, vt laeuigatione tantum sit opus, minus illud incommodum metuendum videtur, siquidem vbique tantumdem a catino abraderetur. Hinc Auctor sedulo in attritum, quem catinus a lente patitur, inquirit, vbi quidem mechanisnismum nunc fere vtique vſu receptum contemplatur, quo lens ope ſtili eius centro applicati ita catino in gyrum acto apprimi ſolet, vt interea libere circa ſtilum gyrari poſſit. Hic igitur primo obſeruat, motum gyratorium lentis ſemper aequalem eſſe motui gyratorio catini, vt vtrinque eodem tempore totidem reuolutiones peragantur; tum vero oſtendit, lentem quidem per totam ſuperficiem aequaliter atteri, attritumque eo eſſe maiorem, quo longius 1^{mo}. lentis centrum a centro catini teneatur remotum, 2^{do}. quo fortius lens ad catinum apprimatur, 3^{tio}. quo minor fuerit lentis ſuperficies, et 4^{to}. quo celerius catinus in gyrum agatur, catinum vero demonſtrat admodum inaequaliter abradi, ſiquidem lentis centrum immotum teneatur; vnde cum eius figura mox deprauetur, idem vitium in lentem transferatur neceſſe eſt, remedium autem, quo vulgo artificices vti ſolent, dum centrum lentis per totum catinum deducunt, nimis incertum iudicat; quin potius ſuadet, centrum lentis perpetuo in eadem a catini centro diſtantia detineri, atque vt catinus vbique aequalem attritum patiatur, definit figuram fruſti cuiusdam vitri, quod in alio loco catino certa vi impreſſum praeciſe tantum de catino abradat, vt tota abraſio vbique aequalis reddatur. Tutiſſimus hic videtur modus, figuram catini ab omni deprauatione immunem conſeruandi, atque artifices hunc modum facile ad praxin accommodabunt. Conſultum quoque foret lentem non vi manus minis inconſtante ad catinum apprimi, ſed certo quodam pondere ita moderando, ne prius incommodum ſupra memoratum locum habere possit; tum vero singulari artificio conatum lentis centrifugum coerceri conueniet, vt hoc pacto nihil plane fortunae et arbitrio artificis relinquatur. Frusti autem illius vitrei per se otiosi figura facile determinatur, aeque ac vis, qua id ad catinum apprimi debet, vt desideratus effectus obtineatur. Caeterum hic nouum documentum principii minimae actionis praeter omnem expectationem cernitur, dum enim Auctor motum lentis super catino definiuit, eum ita comparatum esse invenit, vt inde attritus minimus exoriretur, ex quo huius principii vsus amplissimus et foecundissimus per vniversam naturam eo clarius elucet.

IV.

De noua quadam vectis proprietate Dissertatio.

Auctore F. V. T. Aepino p. 271.

In hac dissertatione denuo insignis casus, quo principium minimae actionis eminet, profertur, atque adeo ex natura vectis petitus, cuius proprietates nemine contradicente veritatibus aeternis sunt annumerandae. Considerat scilicet Cl. Auctor, vectem aequalium brachiorum, quorum extremitates binae ad bina virium centra infinite remota singulatim viribus quibuscunque sollicitentur, quaeritque situm, quo vectis sit in aequilibrio futurus. Ad hoc vtramque vim resoluit in binas,

qua-

quarum altera ad vectem ſit normalis, altera vero in ipſam eius directionem incidens; atque demonſtrat, aequilibrium in eo ſitu fore, vbi ſumma harum poſteriorum virium in axis directionem cadentium futura ſit maxima. Dolendum autem eſt, hanc elegantem proprietatem nimis anguſtis limitibus contineri, dum ea non amplius locum habet, ſtatim ac brachia vectis inaequalis longitudinis aſſumuntur, ſeu centra illa virium non fuerint infinite remota; interim tamen non erit difficile hoc Theorema, adiiciendis adhuc quibusdam conditionibus, non quidem ſine elegantiae iactura latius extendere, quod autem eo minus neceſſarium videtur, cum iam firmiſſimis rationibus ſit euictum, principium minimae actionis per vniuerſam Staticam, quorſum doctrina vectis eſt referenda, eminentiſſime regnare.

V.

Deſcriptio inſtrumenti cuiusdam, nautis Barometri ad inſtar inſeruituri.

Auctore I. E. Zeihero p. 274.

Cum Barometra vulgaria in nauibus ob continuos motus et ſucceſſiones nullum vſum praeſtare queant, iam olim inſtrumentum peculiare ad vſum marinum ab *Hookio* erat excogitatum. Nunc autem Cl. Auctor aliud inſtrumentum ex ipſa aeris indole petitum proponit. Cum enim quouis tempore exacta elaſticiſticitatis aeris menſura deſideretur, cylindrum cauum aere omnino vacuum in hunc finem commendat. Quia enim aer extremus tota vi elaſtica ſua in baſin cylindri agit, easque, ſi eſſent mobiles, per cauitatem cylindri ad occurſum vsque detruderet, ne hoc eueniat, elaſtrum inter baſes in ipſo vacuo conſtituit, cuius vi eae diſtendantur, ita vt tenſio elaſtri quouis tempore cum preſſione aeris in aequilibrio eſſe debeat. Aucta ergo aeris elaſticitate baſes illae mobiles propius ad ſe inuicem adiguntur; ea vero minuta ab elaſtro interno baſes magis repelluntur, ſicque ex earum interuallo ſemper veram aeris preſſionem agnoſcere licebit, ſi modo frictio hunc effectum non impediat.

VI.

Duarum Machinarum etc. deſcriptio. Auctore I. E. Zeihero p. 279.

Cochlearum vſus per vniuerſam Mechanicam ita eſt ampliſſimus, vt artifices in iis exacte elaborandis merito omne ſtudium et operam impendant; in quo negotio Cl. Auctor feliciſſimo ſucceſſu iam dudum fuit occupatus, atque hic ingenioſas inuentiones cum publico communicat, quas ex ipſo eius ſcripto perſpicere oportet.

VII.

VII.

Acus nauticae noua deſcriptio.

Auctore I. E. Zeihero pag. 284.

Quemadmodum haec acus, exactiſſime veram declinationem magneticam oſtendens, ſuſpendi atque ad vſum accommodari debeat, Cl. Auctor hic perquam ingenioſe docet; quod inuentum eo magis eſt aeſtimandum, quo ampliorem nunc quidem vtilitatem a magnetis declinatione in diuerſis telluris locis accurate obſeruata expectare licet. Famoſiſſimum enim de inuenienda longitudine maris problema commodius feliciusque expediri nequit, quam ſi lex fuerit inuenta, ſecundum quam declinatio magnetis in omnibus terrae locis ad quoduis tempus mutationibus eſt obnoxia. Omnino autem eſſet optandum, vt ſimul inclinationis ratio haberetur, cuius autem accurata obſeruatio multo maiores ambages et apparatus poſtulat, quam vt a nauigantibus commode inſtitui poſſit.

VIII.

De aequilibrio virium corporibus applicatarum commentatio.

Auctore S. Kotelnikow pag. 286.

Quae de aequilibrio potentiarum in Statica tradi ſolent, huic propoſitioni fundamentali innituntur, quod potentia per diagonalem parallelogrammi expreſſa aequiualeat binis potentiis per eius latera expressis; haecque veritas vulgo ita demonstrari solet, vt motus saltem primo initio impressi ratio habeatur; quod autem minime congruum videtur, cum Staticae principia ante solide demonstrata esse oporteat, quam quicquam de motu explicari possit. In primis quidem Commentariorum nostrorum Tomis egregia occurrit huius veritatis demonstratio, quae ab omni motus consideratione immunis negotium quidem plane conficit, sed tamen tantis ambagibus inuoluitur, vt ipsi inter prima elementa vix locus concedi queat. Interim tamen hinc isti propositioni palmariae tantum firmamentum comparatur, vt non solum ipsa, sed etiam omnia, quae inde circa aequilibrium quotcunque potentiarum proferuntur, veritatibus necessariis accenseri debeant. Ea namque propositione stabilitur cuiusque potentiae resolutio in binas alias, quarum directiones cum ad lubitum accipi queant, quouis casu omnes potentias, quotcunque fuerint propositae, ad binas directiones fixas reuocare licet, ex quarum momentis deinceps status aequilibrii facile determinatur. Cel. *Eulerus* postea eandem hanc propositionem fundamentalem ex principio maximorum ac minimorum singulari modo demonstrauit, dum assumsit, trium potentiarum puncto applicatarum aequilibrium tum dari, cum omnes potentiae iunctim sumtae maximum effectum produxerint, seu singulae punctum, in quod agunt, secundum suam quaeque directionem maxime protraxerint. Hoc igitur eodem principio per omnes scientias foecundissimo hic vtitur Cl. Auctor ad statum aequilibrii, quando plures tribus potentiae puncto sunt appli-

applicatae, definiendum; sumtis scilicet in cuiusque potentiae directione puncto fixo, eum quaerit statum, vbi singulae potentiae, per distantiam quaeque istius puncti a puncto, in quod agunt, multiplicatae, minimum producunt aggregatum. Potentiis ergo, quotcunque fuerint, per litteras A, B, C, D etc. indicatis, et puncti, in quod agunt, distantiis ab illis punctis, in cuiusque directione assumtis per litteras p, q, r, s etc. status aequilibrii ibi datur, vbi quantitas $Ap+Bq+Cr+Ds+$ etc. fuerit minima, seu eius differentiale euanescens, scilicet

$$A dp + B dq + C dr + D ds \text{ etc.} = 0$$

vnde simul patet, perinde esse, vbicunque illa puncta in cuiusque directione accipiantur. Tum vero angulis inter directiones potentiarum per litteras α, β, γ, δ etc. singulatim notatis, anguloque quodam indefinito Φ in calculum introducto, Cl. Auctor ex illo principio sequentem deducit aequationem § 6.

$$\left.\begin{aligned} A\,\text{cos.}\,\Phi + B\,\text{cos.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\alpha + C\,\text{cos.}\,\Phi\,\text{cos.}\,(\alpha+\beta) \\ + D\,\text{cos.}\,\Phi\,\text{cos.}\,(\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.} \\ - B\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,\alpha - C\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,(\alpha+\beta) \\ - D\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,(\alpha+\beta+\gamma) - \text{etc.} \end{aligned}\right\} = 0$$

quae in statu aequibrii semper locum habere debet, quicunque valor angulo Φ tribuatur. Variis igitur ipsi Φ valoribus tribuendis pro quolibet potentiarum numero plures insignes aequilibrii proprietates deriuat, eximio vsu non destitutas. Si autem ipsa aequilibrii determinatio spectetur, duae aequationes, quotcunque etiam potentiae proponantur, sufficiunt, siquidem, binis angulorum α, β, γ, δ etc. definitis, positio puncti O determinatur.

Cum igitur superior aequatio euanescere debeat, quicunque valor angulo Φ tribuatur, facile perspicitur, hoc euenire, si modo bina membra, quorum altero cosinus anguli Φ afficitur, altero eiusdem sinus, seorsim nihilo aequentur, vnde sequentes binae aequationes obtinentur:

$$A + B\,\text{cos}\,\alpha + C\,\text{cos}.(\alpha+\beta) + D\,\text{cos}.(\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.} = 0$$

$$\text{et}\quad B\,\text{sin}\,\alpha + C\,\text{sin}.(\alpha+\beta) + D\,\text{sin}.(\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.} = 0$$

quae non solum omnes formulas a Cl. Auctore allatas in se complectuntur, sed etiam aeque late patent. Conueniunt autem eae quoque egregie cum regulis ex vulgari theoria petitis, quibus status aequilibrii definiri solet. Si enim per punctum O recta in directionem potentiae A incidens ducta intelligatur, omnesque vires secundum binas directiones, quarum altera cum illa conuenit, altera vero eidem est perpendicularis, resoluantur, tum omnium harum virium resolutarum eae, quae in dictam directionem cadunt, simul sumtae se mutuo destruere debent, perinde ac eae, quae ad illam directionem sunt normales. Illud scilicet priori aequatione indicatur, hoc vero posteriori.

IX.

De commoda acus declinatoriae suspensione dissertatiuncula.

Auctore S. Kotelnikow pag. 304.

Quo acus magnetica stilo, super cuius cuspide libere gyretur, imponi queat, vulgo perforari et capitulo

tulo inſtrui ſolet; quoniam vero huiusmodi perforatione curſus materiae magneticae non mediocriter interrumpitur, quo fit, vt plerumque acus plures duobus polos recipiat, eorum ſtudium maxime eſt laudandum, qui ſine vlla acus magneticae laeſione idoneam ſuſpenſionem excogitare conantur, quod quidem acum cum alio corpore, in quo ſuſpenſio fiat, firmiter connectendo facile praeſtari poſſe videtur. Verum hic obſeruandum eſt, punctum, circa quod acus mobilis reddatur aliquantillum ſupra commune centrum grauitatis exiſtere, ſimulque totum pondus minimum effici debere, ne frictione motus impediatur. Cl. Auctor igitur in eo potiſſimum eſt occupatus, vt minimo adiuncto corpore peregrino his conditionibus ſatisfaciat.

PHYSICA.

I.

Plantarum rariorum deſcriptiones completae.

Auctore Ioh. Chr. Hebenſtreit pag. 315.

Si non noua in regno Naturae reperire occaſio datur, quod quidem in vno loco haerentibus rarius occurrit, cognita, at nondum ſatis deſcripta, pleniore deſcriptione notiora reddere operae pretium eſt. Hanc ſibi prouinciam excolendam ſumſit, dum nobiſcum commoraretur, Cl. *Hebenſtreitius*, cuius ſtudium in accurata et completa Plantarum deſcriptione iam ex praecedentibus Commentariorum noſtrorum voluminibus conſtat. Plantarum hic deſcriptarum et iconibus ad viuas plantas illuſtratarum prima eſt *Meſſerſchmidia*, hoc nomine nuncupata in honorem viri de omni Hiſtoria naturali meritiſſimi *Danielis Gottlieb Meſſerſchmidii*, Medicinae Doctoris, qui iuſſu PETRI MAGNI per nouem annos totam fere Sibiriam, ea cura, quae intelligentiſſimum et ſolertiſſimum naturae indagatorem decet, perluſtrauit, eamque ad fontes *Arguni* fluuii circa lacum *Dalai* reperit. *Meſſerſchmidii* ſchedis vſus b. *Ammanus* deſcriptionem huius Plantae edidit, ſub *Arguſiae* nomine, monuit autem ſe non refragaturum, ſi quis ab inuentore *Meſſerſchmidiam* vocare voluerit. Hoc fecit Ill. *Linnaeus*, at deinceps *Tournefortiae* generi

neri accensuit. *Hebenstreitius* omnino sui generis plantam esse docet, quae filamentis, situ antherarum, stilo, fructu, a *Tournefortia* differat. Altera *Aeschynomene*, vel *Hedysarum* Sloani, planta est a V. Ill. *Hans Sloane* in Insula Iamaica primum reperta, cuius vegetationis historiam et reliqua *Hebenstreitius* accurate describit, et iconem suppeditat, isti, quam Sloanius ad siccam, vt videtur, plantam fieri curauerat, meliorem. Tertia *Verbesinae* species, vel *Rudbeckia* Zinnii, vel *Zinnia* Linnaei, ex Galliis originem ducit, Lipsiae primum culta, et abinde Goettingam, Vpsaliam, Petropolin, propagata. Secundum methodum plantarum Cel. *Ludwigii* ad genus *Verbesinae* referendam esse noster existimat. Hic autem characteres quoque, ab Ill. *Linnaeo* in noua editione Syst. Nat. Tom. II. pag. 1377. suppeditatae, conferri merentur. Quarto loco *Brassicae* species occurrit, Sinis indigena, et alias quoque nota, at hic pluribus descripta, vna cum aliis obseruationibus, quas Botanophilis non ingratas futuras esse arbitramur.

II.

De gradibus Frigoris ac Caloris summis, quos certa fluida ferre possunt, etc.

Auctore I. A. Braun p. 339.

Sunt phaenomena Congelationis et Ebullitionis diuersorum corporum haud exigui momenti, adeoque atten-

attentione et indagine dignissima Non igitur mirandum est, viros summos indagare eiusmodi phaenomena studuisse, quos inter magnus *Newtonus* primus scalam graduum caloris et frigoris in Actis Societatis Regiae Londinensis mense Aprili 1701. N. 270. publicauit. Facit eiusmodi indagatio ad naturam corporum fluidorum et firmorum detegendam, et ad diuersos, in diuersis corporibus, effectus caloris et ignis cognoscendos, qui saepe sunt mirandi. Corpora modo adparent in forma fluidorum, modo in forma solidorum, qui duplex corporum status solius caloris et ignis est effectus; vti quoque forma vaporum, in quos resolui saepius corpora solent, praecipue in eorum ebullitione, huc est referenda. Hinc sequitur, corpora fluida solo frigore in corpus firmum abeuntia, glaciem quandam, quae pro diuersitate corporum diuersa est, constituere, et statum fluiditatis a certo caloris gradu pendentem, nil nisi glaciem esse fusam, vti est aqua. Quum igitur fluiditas et firmitas constituant tantum diuersum vnius eiusdemque corporis statum, manifestum est, hunc duplicem statum ad essentialia corporis non esse referendum, sed ad extra essentialia et accidentia, seu modos, dum eiusmodi commutatio status soli calori, nempe vel eius augmento, vel decremento, debeatur. Non enim existimandum est, calorem et frigus esse res sua natura diuersas, licet diuersis nominibus, iisque positiuis, ad illa designanda vti consueuerimus. Frigus enim sola priuatio et diminutio caloris est, et quando in thermometris quibusdam terminus inter

calorem

calorem desinentem et Frigus incipiens ponitur, id mere est arbitrarium. Nam gradus frigoris 200, scalae Delilianae, pro gradu caloris insigni haberi potest et debet, respectu gradus 600, qui circiter hydrargyrum congelare solet. Quod si igitur corpus firmum calore fundatur, idem corpus essentialiter maneat necesse est, eiusdem generis. Cera fusa manet cera, aurum, argentum et omnia metalla fusa, manent metalla, et eiusdem generis, scil. aurum, argentum etc., quo ipso patet, duritiem et firmitatem perpetuam pro charactere metallorum essentiali haberi non posse, alias metalla fusa, in statu scilicet fluiditatis, pro metallis non essent reputanda, quod absonum.

Quum hodie constet hydrargyrum solo frigore abire in corpus firmum, quae eiusdem huius dissertationis Auctoris Cl. *Braunii* inuentio est, et calore rursus mutari in corpus fluidum, an dubitari potest, Mercurium aeque ac reliqua metalla, Aurum, Argentum, Plumbum, Stannum etc. si in forma fluidorum adparent, dum fusa sunt, pro metallo vero fuso reputandum esse? Differentia enim nulla alia est, nisi quod Mercurius multo minore caloris gradu fundatnr, quam reliqua metalla, et propter hunc minorem gradum, qui semper in Atmosphera regnat, perpetuo quoque in nostro terrarum orbe fluidum seu fusum maneat necesse est, et frigore naturali in metallum firmum et durum, vti reliqua, abire nequeat. Desinat igitur Mercurius locum inter semimetalla occupare; euehatur potius ad dignitatem perfectorum metallorum,

rum, quod omnino fieri debere luce meridiana clarius eſt, niſi quis manifeſto veritati demonſtratae repugnare velit.

Sunt igitur ſoli gradus caloris diuerſi, qui efficiunt, vt corpora modo ſub ſpecie fluidorum, modo ſub ſpecie firmorum, adpareant. Et hos ipſos gradus caloris diuerſos Cl. Auctor in diuerſis corporibus, multis adcuratisque, quantum fieri potuit, experimentis, determinare ſtuduit. Pleraeque determinationes nouae ſunt, quae vero plane noua non ſunt phaenomena experimentis detecta, ita tamen ſunt comparata, vt cognita partim confirmentur, partim vero emendentur. Haec generatim dicta ſufficiant, ad ſpecialia deſcendere non attinet, quae in diſſertatione ipſa lector harum obſeruationum cupidus euoluere non praetermittet.

III.

Cautelae circa obſeruationes Meteorogicas adhibendae.

Auct. Petro van Muſchenbroek p. 367.

Solas obſeruationes et experimenta ſola, veras firmasque eſſe baſes Philoſophiae naturalis, recte Cel. Auctor ſub finem diſſertationis monet, quoniam ſine his vera theoria condi nequit, ſed loco verae et firmae ſcientiae naturae inanes ſpeculationes et hypotheſes fictae, quas delet dies, proferuntur.

Sequitur hinc, inueſtigationes huius generis veritatum ſcrutatoribus naturae praecipue commendandas

eſſe,

esse, ex quibus consectaria ad veram scientiam naturae condendam hauriri et deduci queant. Ad veritates huius generis pertinent quoque obseruationes Meteororum, quae, tantum abest, vt sint negligendae et superficiarie instituendae, vt potius omnem adcurationem mereantur et requirant, quoniam theoria Meteororum, quae tot et tantas generi humano promittit vtilitates, quam longissime adhuc a sua perfectione abest. Vti igitur theoria astronomica, quae insigni perfectione hodie gaudet, non nisi post innumeras obseruationes multorum annorum condi potuit; sic quoque Meteorologia non nisi post multorum annorum obseruationes ad perfectionem quandam poterit perduci. Sunt quidem obseruationes Meteorologicae a multis hinc annis iam factae, sed paucae scopo indicato seruire possunt, quia sunt pleraeque minus accuratae et perfectae. Operae igitur pretium est, defectus et imperfectoines obseruationum meteorologicarum vulgarium, quod b. Auctor in hac dissertatione fecit, indicare, et simul, quomodo accuratae et perfectae sint faciendae, ostendere.

Et quem quis tutiorem viae ductorem desideraverit, quam eum, qui per totum fere vitae suae decursum eam calcauit? Beati *Muschenbroekii* experientia et solertia in obseruationibus et experimentis naturalibus instituendis neminem latet. Hinc nullum dubium est, quin ipsius consilia vtilitatem sint allatura. Hinc quoque Academia non superuacaneum censuit, eadem, etiamsi plura alias quoque in vniuersum nota contineant, inserere Commentariis suis.

IV.

Halonum extraordinariarum descriptio.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 392.

Si ingeniosa vnquam in lucem producta est hypothesis, explicando phaenomeno cuidam naturali destinata, ea certe est, quam de Halonum atque Parheliorum caussis proposuit magnus *Christianus Hugenius*. Etsi autem hypothesis ista miro modo phaenomenis consentiat, de veritate ipsius tamen dubitandi, immo penitus ipsam reiiciendi, caussas satis praegnantes inuenerunt recentiores Physici, quarum vnicam hic adduxisse sufficiat.

Constat ex obseruationibus, et ab ipso *Hugenio* ita statuitur, esse diametrum Halonis interioris fere semper 44 ad 45°, atque si plures adsunt, secundae Halonis diametrum constanter duplum huius reperiri, et ad 90° ascendere, quae quidem obseruatio ita constans est, vt ad rarissima phaenomena pertineant Halones, quarum diametri antea assignatis notabiliter aut maiores aut minores reperiuntur. Cum vero Vir summus phaenomena haec ex sphaerulis atque cylindris glacialibus, in aere volitantibus, opaco nucleo praeditis, deriuet, pendere debent diametri Halonum, secundum ipsius hypothesin, a ratione, quae inter diametros globuli glacialis et nuclei opaci intercedit, quam quidem rationem pro halonibus 45° ipse *Hugenius*, 1000 ad 480, ac pro halonibus 90°. 1000 ad 680 statuit.

Ardua

Ardua itaque iam oritur quaeſtio, vnde fiat, vt natura in producendis globulis glacialibus, modo allegatas corticis diaphani ad nucleum opacum proportiones prae aliis affectet, ac fere nunquam, et inter innumeros, qui ad datae Halonis formationem concurrunt, globulos vix aliquem producat, in quo alia obtineret proportio. Effectus enim naturae determinati a vagis proficiſci cauſis nequeunt, ſed determinatas expoſtulant. Quicquid autem de ortu et formatione globulorum glacialium imaginari velimus, nunquam tamen aliquam mente concipere poterimus cauſam, quae non ad producendas quasuis corticis et nuclei proportiones quaſi indifferens eſſet, vnde miraculi inſtar habendum foret, quod inter plures caſus, quorum nullus peculiari prae reliquis gaudet priuilegio, vnicus ſolus fere conſtanter accidere ſoleat.

Prouti haec euidenter probant, theoriam atque explicationem Halonum et Parheliorum ad deſideranda adhuc pertinere, ſic praeſens Diſſertatio euincit, phaenomenon ipſum, ad hanc vsque diem Phyſicis non ita cognitum fuiſſe, vt omnes et praecipuas ipſius circumſtantias perſpectas habuerint. Producitur namque, nouum genus Halonum, quod Philoſophiae naturalis ſcrutatoribus hucusque ignotum fuit, etſi videatur in ſeptentrionalibus terrae regionibus non ita infrequens eſſe, vt inter rariora numerandum ſit. Vidit nempe Auctor, Haloni conſuetae circulari 45°, iunctam Halonem ellipticam, cuius axis minor et verticalis diametrum Halonis circularis aequabat, axis vero maior, horizonti parallelus, ſex circiter diametris ſolaribus axem minorem ſuperabat.

Solerter inquiſiuit Auctor, qui deſcriptum ſe legiſſe phaenomenon non recordabatur, an alicubi mentionem ipſius iniectam inuenire poſſet, aſt fruſtra; vnde pro nouo et incognito hactenus habendum eſſe ſtatuit.

Notiſſimum quidem eſt, hinc inde allegari apud auctores Halones ellipticas, ſed patet ex intuitu, ſermonem nullibi eſſe, niſi de Halonibus, quae in ſe circulares quidem ſunt, et actuali inſtituta dimenſione tales reperiuntur, aſt per fallaciam opticam, ellipticam, ſeu oualem, potius figuram mentiuntur. Eae vero Halones, quas Auctor hic producit, id peculiare habent, quod non ſolum ellipticae videantur, ſed dimenſae actu quoque tales inueniantur, et praeterea axis ipſorum maior horizonti parallelus ſit, qui in prioris generis Halonibus nunquam non horizonti perpendiculariter inſiſtere videtur.

Etſi itaque Auctor nullum inuenerit veſtigium, deſcriptas eſſe alicubi Halones vere ellipticas, non difficile tamen ipſi fuit agnoſcere, apparuiſſe idem hoc phaenomenon quibusdam obſeruatoribus, aſt ita incompletum, vt iuſtam ſibi ipſius exinde formare ideam non potuerint.

Quamuis tandem Auctor, in nuda phaenomeni maxime notabilis deſcriptione hic ſubſiſtat, neque ad eruendam cauſam ipſius ac ſimilium phaenomenorum animum

animum aduertat, iungit tamen cogitationes aliquas ſuas, huc pertinentes, quaeſtionum ſub forma, in quarum aliqua inſinuat, mirabilis phaenomeni Halonum et Parheliorum cauſam, ſua ex mente, ſine dubio in iis quaerendam eſſe, quae ſummus *Newtonus* de proprietate luminis, quam acceſſuum facilis transmiſſionis et reflexionis nomine inſigniuit, detexit, vnde optandum eſt, vt aliquis Phyſicorum ad vlterius examinandam hanc doctrinam, quae, neſcio quo fato, inde a *Newtoni* tempore fere neglecta ac inculta iacet, animum aduertat.

V.

Piſcium rariorum e Muſeo Petropolitano exceptorum deſcriptiones.

Auctore I. T. Koelreuter p. 404.

Recte Cl. Auctor celebrat ingentem rerum naturalium theſaurum in Muſeo Petropolitano aſſeruatum, et inprimis Collectionem Piſcium, quam immortalis memoriae Imperator PETRVS MAGNVS a V. Cel. *Alb.Seba* haud paruo pretio comparauit. Ipſe quidem *Seba* res Muſei ſui rariores deſcribere inſtituit, et elegantisſimis iconibus illuſtratas duobus tomis euulgauit. Tertium autem, qui piſces exhibere debebat, mors in lucem emittere prohibuit. Hinc operam pro amplificanda Hiſtoria naturali non inutiliter collocauit *Koelreuterus*, dum piſces

piſces rariores, quorum vel nomina tantum, vel nimis breues et defectuoſae deſcriptiones apud Auctores Ichthyologos extant, tam pleniore et accuratiore deſcriptione, quam iconibus ſuo ductu confectis, notiores reddere adgreſſus eſt. Sunt autem piſces a *Koelreutero*, dum nobiscum commoraretur, deſcripti in vniuerſum tredecim. Ex his tres hoc loco comparent: Gaſteropelecus *Gronouii*, ſiue Clupea (Sternicla) *Linnaei*, Trutta dentata, *Piabucu* Braſilienſium *Marcgrafii*, et Gobionis ſpecies, a nemine ante indicata. Reliqui ſequentia Commentariorum volumina ornabunt. Rationem, qua Auctor in deſcribendo et omnes piſcium partes menſurando procedit, laudare ſuperfluum foret. Fatebuntur artis periti, nihil, quod notatu dignum ſit, praetermiſſum eſſe, et, ſi omnes Ichthyologi hac via incederent, fore, vt nihil in hac ſcientia dubium aut incertum remaneret. Monemus tantum, in noua Syſtematis Naturae editione anni 1758. Ill. *Linnaeum* nomen vulgare Sterniclae, et denominationem Gaſteropeleci *Gronouii*, non Clupeae pinnis flauis, ventralibus minutiſſimis, ſed Clupeae pinnis ventralibus nullis, adſcripſiſſe.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

I.

Inueſtigatio poſitionum inſigniorum Ruſſiae locorum.

Auctore A. N. Griſchow pag. 433.

Atlantem Ruſſicum An. 1745. ab Academia euulgatum multa emendatione indigere, nemini notius eſt, quam ipſi Academiae, quae ideoque, ſtatim poſt primum hoc tentamen abſolutum, de corrigendis eius erroribus ac ſupplendis defectibus ſerio cogitauit. Pluribus opus erat obſeruationibus Aſtronomicis ad poſitiones locorum accurate ſtabiliendas. Nonnullarum quoque prouinciarum nouae delineationes geodaeticae deſiderabantur, prioribus, quae extabant, praeſtantiores, quibus ſine poſitiones locorum ex obſeruationibus aſtronomicis erutae parcam tantum lucem iteratis laboribus affunderent. Rem hanc, propter magnitudinem Imperii Ruſſici, vltimis cogniti orbis limitibus terminatam, lente procedere, mirum nemini videbitur. Delineatae autem ſunt, quantum ex nouis cum Academia communicatis ſubſidiis fieri potuit, tabulae nouae geographicae complures, quae, poſtquam vltimam limam expertae fuerint, teſtabuntur, non inanem fuiſſe eorum operam, qui huc vsque in Atlante Ruſſico emendando verſati ſunt. Cura, b. *Griſchouio* hunc in

 finem

finem demandata, haec fuit, vt poſitiones locorum, de quibus obſeruationes aſtronomicae habebantur, ex iisdem obſeruationibus ac correſpondentibus aliis, inueſtigaret, quod quanta accuratione ac ſollertia praeſtitit, lectores in ipſo eius ſcripto non ſine voluptate perſpicient. Nos tantum Longitudines ac Latitudines locorum, ex eius inueſtigatione determinatas, hic apponemus:

Nomina locorum	Longitudo	Latitudo
Archangelopolis	56°. 21′. 15″	64°. 33′. 36″
Riga	41. 18. 45	56. 56. 24
Reualia	41. 57. 30	59. 26. 22
Dagher - Ort	39. 35. 0	58. 56. 0
Narua	- - -	59. 23. 27
Bereſow	- - -	63. 56. 14
Samarowskoi jam	- - -	60. 55. 30
Demianskoi jam	- - -	59. 30. 34
Tobolsk	- - -	58. 6. 46
Nouo Vſolie	74. 13. 0	59. 23. 54
Weretie	74. 15. 15	59. 22. 40
Saigatka	70. 43. 0	56. 43. 15
Sarapul	70. 13. 0	56. 26. 40
Vſt - Ykskoe	69. 13. 0	51. 51. 50
Swinji gori	67. 43. 0	55. 36. 0
Caſan	66. 28. 0	55. 45 vel 47
Niſchnei Nowgorod	- - -	56. 18. 0
Moſcua	55. 12. 45	55. 45. 46.

Non poſſumus non monere, haberi quoque Latitudinem vrbis Tobolsk, opera V. Cl. *Chappe d'Auteroche*, cum tranſitum Veneris per diſcum Solis a. 1761 ibidem obſer-

obſeruaret, magno rigore ſtabilitam, ex cuius obſeruationibus etiam patet, Latitudinem vrbis Caſan aliqua correctione indigere. Habet namque Vir accuratiſſimus

pro Tobolsk	58°. 12′. 22″	vid. eius *Memoire*
pro Caſan	55. 43. 58	*du Paſſage de Venus.*

Quadrantis quidem verificationem, dum Caſani eſſet, non inſtituit: inſtrumentum autem optimum, quo vſus eſt, tantis variationibus, ac iſtud Cel. *Delisle*, obnoxium eſſe non potuit; vnde de *Chappiana* obſeruatione intra minuti primi interuallum ſecuri ſumus, cum in *Delisleanam* ſuſpicio erroris aliquot minutorum cadat.

Caeterum non ingratum erit lectoribus aſtronomis, declinationes Stellarum *Rigel*, γ *Draconis*, *ſtellae polaris* et *Pallicii*, ex propriis obſeruationibus b. *Griſchovii* exacte admodum ſtabilitas, hic reperire.

II.

Latitudinum ſpecularum aſtronomicarum Tych. Brahei etc. diſquiſitio.

Auctore A. N. Griſchow pag. 476.

Inter obſeruationes Aſtronomicas ſaeculo XVI. inſtitutas maximam certe merentur attentionem, eae, quas ſummi nominis Aſtronomus Danus *Tycho de Brahe*, Vraniburgi, aliisque in locis magno numero inſtituit. Etſi enim organa, quae adhibuit *Tycho*, perfectione hodiernis aequari nullo modo queant, magna tamen, Ill. Aſtronomi ſollertia, ipſaque vetuſtas harum obſeruationum, ſummum ipſis pretium conciliant. Vt vero tantus obſeruationum aſtronomicarum theſaurus et nobis et poſteris in vſum cedere queat, neceſſarium inprimis erat, vt ſitus Obſeruatoriorum, vbi inſtitutae ſunt, quantum fieri poteſt, exacte determinaretur, quod iam ante ſaeculum perſpexit Academia Scientiarum Pariſina, dum celeberr. Aſtronomum *Picardum* in Inſulam Huennam miſit, vt in Vraniburgi arcis Latitudinem atque Longitudinem ſollicite inquireret; aſt minus feliciter ceſſit hic labor, vnde Celeb. *Griſchowio*, nouas circa hanc rem diſquiſitiones inſtituendi, campus relictus fuit.

Procedit in hoc negotio Cl. Vir ea ratione, vt ex propriis ſuis obſeruatis declinationem *α Leonis* aut *Reguli*, atque *ſtellae polaris* magno labore determinet, tumque partim ex *Picardi*, partim ex ipſius *Tychonis*, obſeruationibus, circa dictas modo ſtellas inſtitutis, Latitudinem Vraniburgi, ex prioribus 55°. 54′. 12″. 3‴. ex poſterioribus 55°. 54′. 17″. 4‴. calculi ope eruat, ea quidem cum accuratione, vt de Latitudine celebris huius Obſeruatorii intra pauca ſecunda certi eſſe queamus.

Daniam relinquens Ill. *Brahaeus* per aliquot tempus commoratus eſt in arce Wandesburgo, non procul a celebri Germaniae emporio Hamburgo ſita, quae nunc Wandesbeck dicitur, ibique obſeruationes habuit, vtiles futuras, modo de loci huius poſitione conſtet. Aggreditur itaque huius quoque loci Latitudinis deter-

determinationem *Grischowius*, pari felicitate, dum ipsam ex ipsius *Tychonis* obseruationibus 53°. 35′. 12½″. deducit.

Ansam hinc arripit Cl. Auctor corrigendi enormem quendam errorem, quem in collocatione vrbis Hamburgi committere solent, nostro etiam tempore, Geographi atque Astronomi, dum vrbis huius Latitudinem 6, 8. immo ad 20′. vera maiorem exhibent. Invenit nempe ex mensurationibus in agro Hamburgensi institutis *Grischowius*, Wandesburgum, vel Wandesbeck, 1′ 4″½ magis septentrionem versus situm esse, ac vrbis Hamburgi medium, vnde Eleuatio poli Hamburgo tribuenda prodit 53°. 34′. 8″.

Addidit his disquisitionibus Auctor proprias suas obseruationes, quas circa Latitudinem Obseruatoriorum Regiorum, Parisiensis et Berolinensis, summa sollertia et excellentissimo instrumento, Quadrante nempe tripedali Parisiis constructo, qui hodie in Obseruatorio Academiae nostrae asseruatur, instituit, ex quibus prioris Latitudinem 48°. 50′. 12½″. aliquot nempe secundis maiorem ea, quam assumere solent Astronomi Parisienses, posteriorem 52°. 31′. 0″. exacte inuenit.

III.

III.

Obſeruationes Lunares correſpondentes in Inſula Oeſilia habitae a. 1752.

Auctore A. N. Griſchow pag. 515.

Hae ſunt obſeruationes a b. *Griſchouio* ex compacto cum Cel. Abbate *de la Caille* Arensburgi in Inſula Oeſilia, ad Parallaxin Lunae inueſtigandam, inſtitutae, de quibus in Summario Tom. VI. horum Commentariorum pag. 43. dictum eſt, Academiam operam daturam, vt quantocyus lucem publicam adſpiciant. Additae ſunt obſeruationes pro Refractione determinanda, nec non pro Longitudine et Latitudine Obſeruatorii Arensburgenſis, ex quibus prodit

Longitudo Arensburgi ab Inſula Ferro	$39°. 56\frac{1}{4}'$.
vel	$39°. 57\frac{1}{2}'$.
Aſſumta differentia Meridianorum Pariſios inter atque Ferro inſulam vt in Faſtis aſtronomicis Pariſienſibus pro a. 1763. ſtabilita legitur.	$19°. 54'$
Latitudo Arensburgi - - - -	$58°. 15'. 9''\frac{1}{2}$.
Latitudo Petropoli in Obſeruatorio -	$59°. 56'. 23\frac{1}{2}$
	vel $24\frac{1}{2}$.

Adplicatis correctionibus ex deuiatione, praeceſſione et aberratione, et adhibita refractionis tabula Caſſiniana.

INDEX

INDEX
COMMENTARIORVM.

Mathematica.

Phyſico-Mathematica.

Eiusdem

Phyſica.

Aſtronomica.

* * *

MATHE-

MATHEMATICA.

DE
INTEGRATIONE
AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Consídero hic aequationes differentiales primi gradus, quae duas tantum variabiles inuoluunt, quas propterea sub hac forma generali $M\,dx + N\,dy = 0$, repraesentare licet, si quidem M et N denotent functiones quascunque binarum variabilium x et y. Demonstratum autem est, huiusmodi aequationem semper certam relationem inter variabiles x et y exprimere, qua pro quouis valore vnius certi valores pro altera definiantur. Cum autem per integrationem ista relatio finita inter ambas variabiles inueniri debeat, aequatio integralis, si quidem ad omnem amplitudinem extendatur, nouam quantitatem constantem recipiet, quae, dum penitus ab arbitrio nostro pendet, infinitas quasi aequationes integrales complectitur, quae omnes aequationi differentiali aeque conueniant.

2. Proposita igitur huiusmodi aequatione differentiali quacunque $M\,dx + N\,dy = 0$, tota vis Analyseos in hoc consistit, vt aequatio finita inter easdem varia-

biles x et y eliciatur, quae eandem inter illas relationem exprimat, atque ipſa differentialis, et quidem latiſſimo ſenſu, ita vt conſtantem quampiam arbitrariam, quae in differentiali non ineſt, contineat. Verum ſi haec quaeſtio ita generaliſſime proponatur, nulla plane adhuc inuenta eſt via ad eius ſolutionem perueniendi; atque omnes caſus, quos adhuc reſoluere licuit, ad numerum perquam exiguum reduci poſſunt, ita vt in hac Analyſeos parte, perinde ac in reliquis, maxima adhuc incrementa deſiderentur; neque ob hanc cauſam vnquam plena omnium huius ſcientiae arcanorum cognitio expectari queat.

3. Quae quidem adhuc in hoc negotio ſunt praeſtita, ea fere omnia ad hos caſus referri poſſunt, quibus aequatio differentialis $Mdx + Ndy = 0$, vel ſponte ſeparationem variabilium admittit, vel per idoneas ſubſtitutiones ad talem formam reduci poteſt. Quodſi enim introducendis loco x et y binis nouis variabilibus v et z, aequatio differentialis propoſita in huiusmodi formam $Vdv + Zdz = 0$ transmutari queat, in qua V ſit functio ipſius v tantum, et Z ipſius z tantum, totum negotium erit confectum, dum aequatio integralis completa erit:

$$\int Vdv + \int Zdz = \text{Conſt.}$$

quae manifeſto illam conſtantem arbitrariam, per generalem integrationem inuectam complectitur. Atque huc fere redeunt omnia artificia, quibus Analyſtae adhuc in reſolutione huiusmodi aequationum ſunt vſi.

4. Niſi

4. Nisi igitur aequatio proposita differentialis sponte separationem variabilium admittat, totum negotium in hoc consumi est solitum, vt idoneae substitutiones, quae ad separationem viam parent, inuestigantur, in quo etiam saepius summam sagacitatem, quam Geometrae ad scopum obtinendum adhibuerunt, admirari oportet. Interim tamen cum nulla certa via pateat, huiusmodi substitutiones inuestigandi, haec methodus minus ad rei naturam videtur accommodata, ex quo constitui, aliam methodum non nouam quidem, verum tamen etiamnunc non satis excultam, accuratius perpendere, quae vti substitutionibus non eget, ita etiam naturae aequationum magis consentanea videtur, dum eius ratio indoli differentialium innititur, tum vero etiam priorem methodum, velut partem, in se complectitur.

5. Aequatione differentiali ad hanc formam $M\,dx + N\,dy = 0$ perducta, consideretur formula $M\,dx + N\,dy$ sine respectu habito, quod ea euanescere debeat, et examinetur, vtrum ea sit differentiale cuiuspiam functionis ipsarum x et y, nec ne? Quemadmodum hoc examen sit instituendum, iam passim abunde est explicatum; vtramque scilicet functionem M et N differentiari oportet, et cum earum differentialia huiusmodi formam sint habitura:

$$dM = p\,dx + q\,dy \text{ et } dN = r\,dx + s\,dy$$

dispiciatur, vtrum sit $q = r$, nec ne? Quodsi enim fuerit $q = r$, hoc infallibile est criterium, formulam $M\,dx + N\,dy$ esse integrabilem: at si non fuerit $q = r$, aeque certum est, istam formulam ex nullius finitae functionis ipsarum x et y differentiatione esse ortam. Ex quo tota quaeſtio ad duos caſus reducitur, quorum alter locum habet, ſi fuerit $q = r$, alter vero, ſi hae quantitates q et r non fuerint inter ſe aequales.

6. Ad aequalitatem igitur, vel inaequalitatem, quantitatum q et r agnoſcendam, ne opus quidem eſt, vt functiones M et N penitus per differentiationem euoluantur, ſed ſufficit in functione M, quae cum dx eſt coniuncta, quantitatem x vt conſtantem ſpectare, eamque tantum eius differentialis partem quaerere, quae ex variabilitate ipſius y tantum naſcitur, ſi quidem hoc modo membrum $q\,dy$ obtinetur, valorem autem ipſius q ſic erutum hac ſcriptione $\left(\frac{dM}{dy}\right)$ denotare ſoleo. Simili modo altera functio N, quae cum dy eſt coniuncta, ita differentietur, vt y pro conſtante tractetur, et ex variabilitate ſolius x impetretur differentialis pars $r\,dx$, vbi valorem ipſius r pariter per $\left(\frac{dN}{dx}\right)$ exprimo. Quodſi ergo formula $M\,dx + N\,dy$ ita fuerit comparata, vt ſit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, ea eſt integrabilis, eiusque integrale ſequenti modo inueniri poterit. Quo facto, ſi hoc criterium non locum habeat, videamus quomodo ſit procedendum.

Problema I.

7. Si aequatio differentialis $M\,dx + N\,dy = 0$ ita fuerit comparata, vt ſit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, inuenire eius aequationem integralem.

Solutio.

Si fuerit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, tunc datur functio finita binarum variabilium x et y, quae differentiata praebet

bet $Mdx + Ndy$. Sit V iſta functio, et cum ſit $dV = Mdx + Ndy$, erit Mdx differentiale ipſius V, ſi tantum x variabile ſumatur, et Ndy eius differentiale, ſi tantum y variabile capiatur. Hinc ergo viciſſim V reperietur, ſi vel Mdx integretur, ſpectata y vt conſtante, vel Ndy integretur, ſpectata x vt conſtante: ſicque haec operatio reducitur ad integrationem formulae differentialis vnicam variabilem inuoluentis, quae in hoc negotio, ſiue algebraice ſuccedat, ſiue quadraturas curuarum requirat, concedi poſtulatur. Cum autem hac ratione quantitas V duplici modo inueniatur, et altera integratio vice conſtantis functionem quamcunque ipſius y, altera vero ipſius x aſſumat, ita vt ſit

$$\text{et } V = \int Mdx + Y, \text{ et } V = \int Ndy + X,$$

ſemper has functiones Y ipſius y, et X ipſius x, ita definire licet, vt fiat $\int Mdx + Y = \int Ndy + X$, id quod quouis caſu facile praeſtatur. Quo facto cum quantitas V ſit integrale formulae $Mdx + Ndy$, euidens eſt, aequationis propoſitae $Mxd + Ndx = 0$ integralem aequationem fore $V = \text{Conſt.}$ eamque completam, propterea quod inuoluit conſtantem quantitatem ab arbitrio noſtro pendentem.

Coroll. 1.

8. In hoc problemate ſtatim continetur caſus aequationum ſeparatarum. Si enim fuerit M functio ipſius x tantum, et N functio ipſius y tantum, erit vtique $\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0$ et $\left(\frac{dN}{dx}\right) = 0$, ideoque $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$; qui eſt ergo caſus ſimpliciſſimus, quem problema in ſe complectitur.

Coroll.

Coroll. 2.

9. Quodsi autem in aequatione differentiali $M dx + N dy = 0$ fuerit M functio solius x, et N solius y, vtraque pars seorsim integrabilis existit, atque aequatio integralis erit:

$$\int M dx + \int N dy = \text{Const.}$$

Coroll. 3.

10. Praeterea vero nostrum problema resolutionem infinitarum aliarum aequationum differentialium largitur, quarum omnium character communis in hoc consistit, vt sit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, earumque resolutio per integrationem formularum, vnicam variabilem continentium, expediri potest.

Scholion 1.

11. Quoties ergo in aequatione differentiali $M dx + N dy = 0$ fuerit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, eius resolutio nullam habet difficultatem, dummodo integratio formularum vnicam variabilem inuoluentium concedatur; quam quidem iure postulare licet. Interim tamen determinatio functionum illarum X et Y, quae loco constantium introduci debent, molestiam quandam creare videri posset, quae autem singulis casibus mox euanescere reperietur. Verum quo magis et haec operatio contrahatur, ne duplici quidem integratione est opus. Postquam enim altera pars $M dx$, spectata y tanquam constanti, fuerit integrata, quod integrale sit $= Q$, statuatur $V = Q + Y$, posito tantisper Y pro functione inde-

indefinita ipſius y, in quam altera variabilis x prorſus non ingrediatur. Tum differentietur denuo haec quantitas $Q + Y$, tractando x tanquam conſtantem, et quia differentiale prodire debet $= N\,dy$, ex hac conditione functio Y facillime definietur, quandoquidem ex rei natura hinc ſponte eliminabitur quantitas x. Inuenta autem iſta functione Y, aequatio integralis erit $Q + Y = \text{Conſt.}$ quam operationem ſequentibus exemplis illuſtrari conueniet.

Exemplum 1.

12. *Integrare hanc aequationem differentialem:*

$$2axy\,dx + axx\,dy - y^3\,dx - 3xyy\,dy = 0.$$

Comparata hac aequatione cum forma $M\,dx + N\,dy = 0$, erit:

$$M = 2axy - y^3 \text{ et } N = axx - 3xyy.$$

Primum igitur diſpiciendum eſt, vtrum hic caſus in problemate contineatur? quem in finem quaeramus valores:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 2ax - 3yy, \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = 2ax - 3yy,$$

qui cum ſint aequales, operatio praeſcripta neceſſario ſuccedet. Reperietur autem, ſumta y pro conſtante:

$$\int M\,dx = axxy - y^3x + Y;$$

cuius formae ſi differentiale ſumatur, poſita x conſtante, prodibit:

$$axx\,dy - 3yyx\,dy + dY = N\,dy,$$

et pro N valore ſuo $axx - 3xyy$ reſtituto, fiet $dY = 0$, ex quo naſcitur $Y = 0$, vel $Y = \text{conſt.}$ Quare aequatio integralis quaeſita habebitur:

$$axxy - y^3x = \text{Conſt.}$$

Exemplum 2.

13. *Integrare hanc aequationem differentialem:*

$$\frac{y\,dy + x\,dx - 2y\,dx}{(y-x)^2} = 0$$

Comparata hac aequatione cum forma $M\,dx + N\,dy = 0$, erit:

$$M = \frac{x-2y}{(y-x)^2} \text{ et } N = \frac{y}{(y-x)^2}$$

Iam vt pateat, num haec aequatio in casu problematis contineatur, quaerantur valores differentiales:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \frac{2y}{(y-x)^3} \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2y}{(y-x)^3}$$

qui cum sint aequales, negotium succedet. Quare secundum regulam colligatur, sumto y constante, integrale:

$$\int M\,dx = \int \frac{x\,dx - 2y\,dx}{(y-x)^2} = -\int \frac{dx}{y-x} - \int \frac{y\,dx}{(y-x)^2}$$

ac reperietur:

$$\int M\,dx = l(y-x) - \frac{y}{y-x} + Y$$

cuius differentiale, sumto x constante, producere debet alteram aequationis propositae partem $N\,dy$; vnde habebitur:

$$N\,dy = \frac{dy}{y-x} + \frac{x\,dy}{(y-x)^2} + dY = \frac{y\,dy}{(y-x)^2} + dY.$$

Cum igitur sit $N\,dy = \frac{y\,dy}{(y-x)^2}$ et $dY = 0$, et $Y = 0$, constantem enim in Y negligere licet, quia iam in aequationem integralem introducitur, quippe quae erit:

$$l(y-x) - \frac{y}{y-x} = \text{Const.}$$

Exemplum 3.

14. *Integrare hanc aequationem differentialem:*

$$\frac{dx}{x} + \frac{yy\,dx}{x^3} - \frac{y\,dy}{xx} + \frac{(y\,dx - x\,dy)\sqrt{(xx+yy)}}{x^3} = 0$$

Com-

Comparata hac aequatione cum forma $M\,dx + N\,dy = 0$, habebimus:

$$M = \frac{xx + yy + y\surd(xx+yy)}{x^3} \text{ et } N = \frac{-y - \surd(xx+yy)}{xx}$$

vnde pro criterio explorando quaeratur:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \frac{2y}{x^3} + \frac{\surd(xx+yy)}{x^3} + \frac{yy}{x^3\surd(xx+yy)} \text{ et}$$

$$\left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2y}{x^3} + \frac{2\surd(xx+yy)}{x^3} - \frac{x}{xx\surd(xx+yy)}$$

qui valores reducti cum fiant aequales, scilicet

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2y}{x^3} + \frac{xx + 2yy}{x^3\surd(xx+yy)}$$

resolutio erit in potestate. Inuestigetur ergo, sumto y constante:

$$\int M\,dx = lx - \frac{yy}{2xx} + y\int\frac{dx}{x^3}\surd(xx+yy).$$

At per regulas integrandi, formulas vnicam variabilem inuoluentes, quia hic y pro constante habetur, reperitur:

$$\int\frac{y\,dx}{x^3}\surd(xx+yy) = \frac{-y\surd(xx+yy)}{2xx} + \tfrac{1}{2}l\frac{\surd(xx+yy)-y}{y}$$

ita vt sit:

$$\int M\,dx = lx - \frac{yy}{2xx} - \frac{y\surd(xx+yy)}{2xx} + \tfrac{1}{2}l\frac{\surd(xx+yy)-y}{y} + Y$$

At huius quantitatis differentiale, assumto x pro constante, quia praebere debet $N\,dy = -\frac{y\,dy - dy\surd(xx+yy)}{xx}$, nanciscemur:

$$N\,dy = \frac{-y\,dy}{xx} - \frac{dy\surd(xx+yy)}{2xx} - \frac{yy\,dy}{2xx\surd(xx+yy)} - \frac{dy}{2y} - \frac{dy}{2\surd(xx+yy)} + dY$$

qua forma cum illa comparata fiet:

$$dY = -\frac{dy\surd(xx+yy)}{2xx} + \frac{yy\,dy}{2xx\surd(xx+yy)} + \frac{dy}{2y} + \frac{dy}{2\surd(xx+yy)}$$

vbi termini, qui adhuc continent x, sponte se destruunt, ita vt sit $dY = \frac{dy}{2y}$ et $Y = \frac{1}{2}ly$. Quo valore pro Y inuento, obtinebitur aequatio integralis quaesita:

$$lx - \frac{yy}{2xx} - \frac{y\surd(xx+yy)}{2xx} + \tfrac{1}{2}l(\surd(xx+yy)-y) = \text{Const.}$$

Scholion 2.

15. Ex his exemplis ſatis perſpicitur, quemadmodum perpetuo operatio praeſcripta ſit inſtituenda, ita vt hinc nulla amplius difficultas moleſtiam faceſſat, niſi quae ex integratione formularum, vnicam variabilem inuoluentium, quandoque relinquitur, dum integratio neque algebraice abſolui, neque ad circuli hyperbolaeue quadraturam reduci patitur. Verum tum ſuperiores quadraturas ſimili modo tractari oportet, et ſi quae difficultates relinquantur, eae non huic methodo ſunt adſcribendae. Quam ob rem hic aſſumere licet, quoties aequatio differentialis $M\,dx + N\,dy = 0$ ita fuerit comparata, vt in ea ſit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, toties integrationem eſſe in noſtra poteſtate; vnde ad eas aequationes pergo, in quibus hoc criterium non habet locum.

Theorema.

16. Si in aequatione differentiali $M\,dx + N\,dy = 0$ non fuerit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, ſemper datur multiplicator, per quem formula $M\,dx + N\,dy$ multiplicata fiat integrabilis.

Demonſtratio.

Cum non ſit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, etiam formula $M\,dx + N\,dy$ non erit integrabilis, ſeu nulla exiſtit functio ipſarum x et y, cuius differentiale ſit $M\,dx + N\,dy$. Verum hic non tam formulae $M\,dx + N\,dy$, quam aequationis $M\,dx + N\,dy = 0$, quaeritur integrale; et cum eadem aequatio ſubſiſtat, ſi per functionem quam-

quamcunque L ipſarum x et y multiplicetur, ita vt ſit $LMdx + LNdy = 0$, demonſtrandum eſt, ſemper eiusmodi dari functionem L, vt formula $LMdx + LNdy$ fiat integrabilis. Quo enim hoc eueniat, neceſſe eſt, vt ſit:

$$\left(\frac{d.LM}{dy}\right) = \left(\frac{d.LM}{dx}\right)$$

vel ſi ponatur $dL = Pdx + Qdy$, cum ſit $\left(\frac{dL}{dy}\right) = Q$, et $\left(\frac{dL}{dx}\right) = P$, functio L ita debet eſſe comparata, vt ſit:

$$L\left(\frac{dM}{dy}\right) + MQ = L\left(\frac{dN}{dx}\right) + NP.$$

Euidens autem eſt, hanc conditionem ſufficere ad definiendam functionem L, per quam ſi formula $Mdx + Ndy$ multiplicetur, fiat integrabilis.

Coroll. 1.

17. Inuento ergo tali multiplicatore L, qui reddat formulam $Mdx + Ndy$ integrabilem, aequatio $Mdx + Ndy = 0$, in formam $LMdx + LNdy = 0$ translata, integrari poterit methodo in problemate praecedente expoſita.

Coroll. 2.

18. Quaeratur ſcilicet, ſpectata y tanquam conſtante, integrale $\int LMdx$, ad quod adiiciatur talis functio Y ipſius y, vt ſi aggregatum $\int LMdx + Y$ denuo differentietur, ſpectata iam x vt conſtante, prodeat $LNdy$. Quo facto erit aequatio integralis $\int LMdx + Y = Const.$

Coroll. 3.

19. Multiplicator igitur L ita debet esse comparatus, vt posito $dL = Pdx + Qdy$, satisfiat huic aequationi:

$$L\left(\frac{dM}{dy}\right) + MQ = L\left(\frac{dN}{dx}\right) + NP$$

vel huic:

$$\frac{NP - MQ}{L} = \left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)$$

vnde manifestum est, si esset $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, pro L sumi posse vnitatem, vel quantitatem constantem quamcunque, dum sit $P = 0$, et $Q = 0$.

Scholion.

20. Si ergo hinc in genere multiplicator L inveniri posset, haberetur vniuersalis resolutio omnium aequationum differentialium primi gradus; id quod ne sperare quidem licet. Contentos ergo nos esse oportet, si pro variis casibus, pluribusque aequationum differentialium generibus, huiusmodi factores inuestigare valeamus. Sunt autem duo aequationum genera, pro quibus tales factores commode erui possunt, quorum alterum eas comprehendit aequationes, in quibus altera variabilis nusquam vltra vnam dimensionem exsurgit; alterum vero genus est aequationum homogenearum. Praeter haec vero duo genera plures alii existunt casus, quibus inuentio talis factoris absolui potest, quos diligentius examinasse, vsu non carebit, cum haec sola via patere videatur ad eam Analyseos partem, quae adhuc desideratur, excolendam ac perficiendam. Quam ob

ob rem hic conſtitui, plura aequationum genera colligere, quae per huiusmodi multiplicatorem ad integrabilitatem perduci poſſunt.

Problema 2.

21. Cognito vno multiplicatore L, qui formulam $Mdx + Ndy$ integrabilem reddit, inuenire infinitos alios multiplicatores, qui idem officium praeſtent.

Solutio.

Cum formula $L(Mdx + Ndy)$ per hypotheſin ſit integrabilis, ſit eius integrale $= z$, ita vt ſit $dz = L(Mdx + Ndy)$, exiſtente z quapiam functione ipſarum x et y. Denotet iam Z functionem quamcunque ipſius z, et quia formula Zdz eſt etiam integrabilis, ob $Zdz = LZ(Mdx + Ndy)$, manifeſtum eſt formulam propoſitam $Mdx + Ndy$ quoque fieri integrabilem, ſi per LZ multiplicetur. Dato ergo vno multiplicatore L, qui formulam $Mdx + Ndy$ integrabilem reddat, ex eo innumerabiles alii factores LZ inveniri poſſunt, qui idem ſint praeſtituri, ſumendo pro Z functionem quamcunque integralis $\int L(Mdx + Ndy)$.

Coroll. 1.

22. Propoſita igitur formula differentiali quacunque $Mdx + Ndy$, non ſolum vnus, ſed etiam infiniti dantur multiplicatores, qui eam integrabilem reddant. Quorum autem vnum inueniſſe ſufficit, cum reliqui omnes per hunc determinentur.

Coroll.

Coroll. 2.

23. Si ergo habeatur aequatio differentialis $Mdx + Ndy = 0$, ea infinitis modis ad integrabilitatem perduci poteſt. Siue autem capiatur multiplicator L, ſiue alius quicunque LZ, aequatio integralis inuenta eodem redit; ſiquidem ille factor L praebet $z =$ Conſt. hic vero $\int Z dz =$ Conſt. id quod conuenit cum $\int Z dz$ et ſit functio ipſius z.

Exemplum 1.

24. *Inuenire omnes multiplicatores, qui reddant hanc formulam* $\alpha y dx + \beta x dy$ *integrabilem.*

Vnus multiplicator hoc praeſtans in promtu eſt, ſcilicet $\frac{1}{xy}$. Sit ergo $L = \frac{1}{xy}$, fiatque $dz = \frac{\alpha y dx + \beta x dy}{xy} = \frac{\alpha dx}{x} + \frac{\beta dy}{y}$, vnde integrando prodit $z = \alpha lx + \beta ly = lx^\alpha y^\beta$. Denotet iam Z functionem quamcunque ipſius $z = lx^\alpha y^\beta$, hoc eſt ipſius $x^\alpha y^\beta$, atque omnes multiplicatores quaeſiti in hac forma generali $\frac{1}{xy}$ funct. $x^\alpha y^\beta$ continebuntur.

Simpliciores ergo multiplicatores reperientur, ſi loco functionis poteſtas quaecunque ipſius $x^\alpha y^\beta$ capiatur; ſicque formula $\alpha y dx + \beta x dy$ integrabilis redditur per hunc multiplicatorem latius patentem $x^{\alpha n - 1} y^{\beta n - 1}$. Si magis compoſiti deſiderentur, plures huiusmodi vtcunque inter ſe combinari poterunt, vt habeatur $A x^{\alpha n - 1} y^{\beta n - 1} + B x^{\alpha m - 1} y^{\beta m - 1}$ etc.

Exem-

Exemplum 2.

25. *Inuenire omnes multiplicatores, qui reddant hanc formulam differentialem* $\alpha x^{\mu-1} y^{\nu} dx + \beta x^{\mu} y^{\nu-1} dy$ *integrabilem.*

Hic iterum ſtatim ſe offert vnus multiplicator $L = \frac{1}{x^{\mu} y^{\nu}}$, qui praebet $dz = \frac{\alpha dx}{x} + \frac{\beta dy}{y}$, vnde fit $z = \alpha l x - \beta l y = l x^{\alpha} y^{\beta}$. Poſito igitur Z pro functione quacunque ipſius $x^{\alpha} y^{\beta}$, omnes multiplicatores continebuntur in hac expreſſione generali $\frac{Z}{x^{\mu} y^{\nu}} = \frac{1}{x^{\mu} y^{\nu}}$ funct. $x^{\alpha} y^{\beta}$. Si loco iſtius functionis ſumatur poteſtas quaecunque $x^{\alpha n} y^{\beta n}$, innumeri hinc obtinebuntur multiplicatores, vnico termino conſtantes $x^{\alpha n-\mu} y^{\beta n-\nu}$, ſumendo pro n numeros quoscunque.

Scholion.

26. Fieri igitur poteſt, vt duae pluresue huiusmodi formulae differentiales $\alpha x^{\mu-1} y^{\nu} dx + \beta x^{\mu} y^{\nu-1} dy$ communem recipiant multiplicatorem: quod ſi eueniat aequatio differentialis, ex huiusmodi formulis, tanquam membris, compoſita, integrabilis reddi poterit, dum multiplicator iſte communis adhibetur. Quem caſum iam olim tractatum euoluamus.

Problema 3.

27. Propoſita ſit iſta aequatio differentialis:

$$\alpha y dx + \beta x dy + \gamma x^{\mu-1} y^{\nu} dx + \delta x^{\mu} y^{\nu-1} dy = 0$$

cuius integralem inueniri oporteat.

 Solutio.

Solutio.

Ad multiplicatorem idoneum inueniendum, quo haec aequatio reddatur integrabilis, consideretur vtrumque membrum seorsim. Ac prius quidem membrum $\alpha y dx + \beta x dy$ vidimus integrabile reddi hoc multiplicatore $x^{\alpha n - 1} y^{\beta n - 1}$, posterius vero membrum $\gamma x^{\mu - 1} y^{\nu} dx + \delta x^{\mu} y^{\nu - 1} dy$ hoc $x^{\gamma m - \mu} y^{\delta n - \nu}$. Quia nunc pro n et m numeros quoscunque accipere licet, hi duo factores ad aequalitatem reduci poterunt; vnde fit

$$\alpha n - 1 = \gamma m - \mu \text{ et } \beta n - 1 = \delta m - \nu$$

ideoque $n = \frac{\gamma m - \mu + 1}{\alpha} = \frac{\delta m - \nu + 1}{\beta}$, hincque obtinetur

$$m = \frac{\alpha\nu - \beta\mu - \alpha + \beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \text{ et } n = \frac{\gamma\nu - \delta\mu - \gamma + \delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

His valoribus pro m et n inuentis, iste multiplicator communis dabit hanc aequationem integralem:

$$\tfrac{1}{n} x^{\alpha n} y^{\beta n} + \tfrac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = \text{Const.}$$

Coroll. 1.

28. Haec ergo aequatio integralis semper est algebraica, siquidem pro m et n valores veri reperiantur. Ii igitur tantum casus singulari reductione indigent, quibus numeri m et n vel in infinitum abeunt, vel euanescunt.

Coroll. 2.

29. Infiniti autem euadunt ambo numeri m et n, si fuerit $\alpha\delta = \beta\gamma$. Verum hoc casu ipsa aequatio differentialis in duos factores resoluitur, hancque formam acquirit

$$(\alpha y dx + \beta x dy)(1 + \tfrac{\gamma}{\alpha} x^{\mu - 1} y^{\nu - 1}) = 0$$

ideoque

ideoque erit vel $\alpha y dx + \beta x dy = 0$, vel $1 + \frac{\gamma}{\alpha} x^{\mu - 1} y^{\nu - 1} = 0$, quarum resolutionum neutra difficultate laborat.

Coroll. 3.

30. At si fiat $n = 0$, seu $\gamma(\nu - 1) = \delta(\mu - 1)$, consideretur numerus n, vt valde paruus, et cum sit per seriem conuergentem

$$x^{\alpha n} = 1 + \alpha n l x + \tfrac{1}{2}\alpha^2 n^2 (lx)^2 + \text{etc. et } y^{\beta n} = 1 + \beta n l y + \tfrac{1}{2}\beta^2 n^2 (ly)^2 + \text{etc.}$$

erit

$$\tfrac{1}{n} x^{\alpha n} y^{\beta n} = \tfrac{1}{n} + \alpha l x + \beta l y = l x^\alpha y^\beta$$

prima parte $\frac{1}{n}$ in constantem inuoluta. Hoc ergo casu erit aequatio integralis:

$$l x^\alpha y^\beta + \tfrac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = \text{Const.}$$

Coroll. 4

31. Statuatur ergo pro hoc casu $\mu = \gamma^{k+1}$ et $\nu = \delta k + 1$, vt habeatur ista aequatio differentialis:

$$\alpha y dx + \beta x dy + \gamma x^{\gamma k} y^{\delta k + 1} dx + \delta x^{\gamma k + 1} y^{\delta k} dy = 0$$

et cum sit $m = \frac{\alpha\delta k - \beta\gamma k}{\alpha\delta - \beta\gamma} = k$, erit aequatio integralis

$$l x^\alpha y^\beta + \tfrac{1}{k} x^{\gamma k} y^{\delta k} = \text{Const.}$$

Coroll. 5.

32. Simili modo si fuerit $m = 0$, seu $\alpha(\nu - 1) = \beta(\mu - 1)$ ob $\frac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = l x^\gamma y^\delta$, si ponatur $\mu = \alpha k + 1$ et $\nu = \beta k + 1$, vnde fit $n = \frac{\gamma\beta k - \delta\alpha k}{\alpha\delta - \beta\gamma} = -k$; erit huius aequationis

$$\alpha y dx + \beta x dy + \gamma x^{\alpha k} y^{\beta k + 1} dx + \delta x^{\alpha k + 1} y^{\beta k} dy = 0$$

integralis

$$-\frac{1}{k}x^{-\alpha k}y^{-\beta k}+lx^{\gamma}y^{\delta}=\text{Const.}$$

Scholion.

33. Neque vero huiusmodi resolutio in membra, quae per eundem multiplicatorem reddantur integrabilia, ad omnis generis aequationes patet. Euenire enim vtique potest, vt tota aequatio per quampiam quantitatem multiplicata integrabilis euadat, cum tamen nulla eius pars inde seorsim integrabilis existat, ex quo huic tractationi, qua hic sum vsus, non nimis tribui oportet.

Problema 4.

34. Si proposita sit aequatio differentialis

$$Pdx+Qydx+Rdy=0$$

vbi P, Q et R denotant functiones quascunque ipsius x, ita vt altera variabilis y plus vna dimensione non habeat, inuenire multiplicatorem, qui eam reddat integrabilem.

Solutio.

Comparata hac aequatione cum forma $Mdx+Ndy=0$ erit $M=P+Qy$ et $N=R$, vnde fiet

$$\left(\frac{dM}{dy}\right)=Q \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right)=\frac{dR}{dx}$$

Statuatur iam L pro multiplicatore quaesito, sitque $dL=pdx+qdy$, atque huic aequationi satisfieri oportet

$$\frac{Np-Mq}{L}=Q-\frac{dR}{dx}=\frac{Rp-(P+Qy)q}{L}$$

Cum

Cum iam sit $Q - \frac{dR}{dx}$ functio ipsius x tantum, pro L quoque functio ipsius x tantum accipi poterit, ita vt sit $q = 0$, et $dL = pdx$; vnde erit:

$$Q - \frac{dR}{dx} = \frac{Rp}{L}, \text{ seu } Qdx - dR = \frac{RdL}{L}$$

ideoque $\frac{dL}{L} = \frac{Qdx}{R} - \frac{dR}{R}$. Quare integrando habebitur $lL = \int \frac{Qdx}{R} - lR$, et sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est vnitas, prodit

$$L = \frac{1}{R} e^{\int \frac{Qdx}{R}}$$

Inuento autem hoc multiplicatore erit aequatio integralis:

$$\int \frac{Pdx}{R} e^{\int \frac{Qdx}{R}} + y e^{\int \frac{Qdx}{R}} = \text{Const.}$$

Coroll. 1.

35. Si aequatio habeat formam propositam, ea, antequam hoc modo tractetur, diuidi poterit per R, vt hanc formam induat $Pdx + Qydx + dy = 0$, seu statim assumere licet $R = 1$, quo facto multiplicator erit $e^{\int Qdx}$, et aequatio integralis $\int e^{\int Qdx} Pdx + e^{\int Qdx} y = \text{Const.}$

Coroll. 2.

36. Si ponatur hoc integrale $\int e^{\int Qdx} Pdx + e^{\int Qdx} y = z$, ita vt z sit functio quaepiam ambarum variabilium, tum vero Z denotet functionem quamcunque ipsius z; omnes multiplicatores, qui formulam $Pdx + Qydx + dy$ reddunt integrabilem, in hac forma generali $e^{\int Qdx} Z$ continentur.

Problema 5.

37. Si propoſita ſit aequatio differentialis:

$$Py^n dx + Qy dx + R dy = 0$$

vbi P, Q et R denotent functiones quascunque ipſius x, inuenire multiplicatorem, qui eam reddat integrabilem.

Solutio.

Erit ergo $M = Py^n + Qy$ et $N = R$, hincque

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = nPy^{n-1} + Q, \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{dR}{dx}$$

Quare poſito multiplicatore quaeſito L et $dL = pdx + qdy$, erit ex ante inuentis:

$$\frac{Rp - Py^n q - Qyq}{L} = nPy^{n-1} + Q - \frac{dR}{dx}.$$

Fingatur $L = Sy^m$, exiſtente S functione ipſius x tantum, erit $p = \frac{y^m dS}{dx}$, et $q = mSy^{m-1}$, quibus valoribus ſubſtitutis, prodibit:

$$\frac{RdS}{Sdx} - mPy^{n-1} - mQ = nPy^{n-1} + Q - \frac{dR}{dx}$$

Quae aequatio vt ſubſiſtere poſſit, ſumi debet $m = -n$, ac fiet

$$\frac{RdS}{Sdx} = (1-n)Q - \frac{dR}{dx}, \text{ ſeu } \frac{dS}{S} = \frac{(1-n)Qdx}{R} - \frac{dR}{R}$$

Vnde cum integrando proueniat $S = \frac{1}{R} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}}$, erit, ob $m = -n$, multiplicator quaeſitus:

$$L = \frac{y^{-n}}{R} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}}$$

et aequatio integralis erit

$$\frac{y^{1-n}}{1-n} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}} + \int \frac{Pdx}{R} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}} = \text{Conſt.}$$

Coroll. 1.

Coroll. 1.

38. Si $n=0$, habemus casum ante tractatum aequationis $P\,dx+Q\,y\,dx+R\,dy=0$, quae per multiplicatorem $\frac{1}{R}e^{\int\frac{Q\,dx}{R}}$ integrabilis redditur; et cuius aequatio integralis est

$$y\,e^{\int\frac{Q\,dx}{R}}+\int\frac{P\,dx}{R}\,e^{\int\frac{Q\,dx}{R}}=\text{Const.}$$

Coroll. 2.

39. At sit $n=1$, vt aequatio differentialis sit:

$$P\,y\,dx+Q\,y\,dx+R\,dy=0$$

multiplicator, ob $1-n=0$, erit $\frac{1}{Ry}$; quo aequatio reducitur ad hanc formam $\frac{P\,dx+Q\,dx}{R}+\frac{dy}{y}=0$, cuius integralis manifesto est $\int\frac{(P+Q)\,dx}{R}+ly=\text{Const.}$

Scholion.

40. Caeterum hoc problema ex antecedente facile deducitur. Diuidatur enim aequatio differentialis proposita per y^n, et habebitur:

$$P\,dx+Q\,y^{1-n}\,dx+R\,y^{-n}\,dy=0$$

Ponatur $y^{1-n}=z$, erit $(1-n)\,y^{-n}\,dy=dz$, sicque aequatio transit in hanc:

$$P\,dx+Q\,z\,dx+\frac{1}{1-n}R\,dz=0$$

quae cum aequatione problematis praecedentis conuenit. Cum igitur hae duae aequationes referendae sint ad casum, quo altera variabilis nusquam vltra vnam dimensionem ascendit, hunc methodo hac per multiplicato-

res

res expediuimus. Pergo itaque ad alterum genus aequationum differentialium homogenearum, quas etiam hac methodo tractari posse constat. Ad hoc autem lemma, quo natura functionum homogenearum continetur, praemitti necesse est, si quidem operationem ex primis principiis petere velimus.

Lemma.

41. Si V fuerit functio homogenea, in qua binae variabiles x et y vbique n dimensiones constituant, eius differentiale $dV = Pdx + Qdy$ ita erit comparatum, vt sit $Px + Qy = nV$.

Demonstratio.

Ponatur $y = xz$, et functio V induet huiusmodi formam $x^n Z$, existente Z quapiam functione ipsius z tantum. Hinc ergo erit $dV = nx^{n-1} Z dx + x^n dZ$. Ad has duas variabiles x et z etiam differentiale propositum $dV = Pdx + Qdy$ reducatur, et cum sit $dy = zdx + xdz$, erit

$$dV = (P + Qz)dx + Qxdz$$

necesse igitur est, vt sit $nx^{n-1}Z = P + Qz$, et per x vtrinque multiplicando: $nx^nZ = nV = Px + Qxz = Px + Qy$: ita vt sit $R + Qy = nV$.

Coroll. 1.

42. Quia ergo habemus duas aequationes:

$dV = Pdx + Qdy$, et $nV = Px + Qy$

hinc

hinc ambae functiones P et Q definiri poterunt; reperietur enim:

$$P = \frac{y\,dV - nV\,dy}{y\,dx - x\,dy} \text{ et } Q = \frac{nV\,dx - x\,dV}{y\,dx - x\,dy}.$$

Coroll. 2.

43. Quoties ergo V est functio homogenea n dimensionum, toties ob $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$ erit

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{y\,dV - nV\,dy}{y\,dx - x\,dy} \text{ et } \left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{nV\,dx - x\,dV}{y\,dx - x\,dy}$$

vbi notandum est, in his fractionibus differentialia se mutuo tollere, seu vtrumque numeratorem fore per $y\,dx - x\,dy$ diuisibilem.

Problema 6.

44. Proposita aequatione differentiali $M\,dx + N\,dy = 0$, in qua M et N sint functiones homogeneae ipsarum x et y eiusdem ambae dimensionum numeri, inuenire multiplicatorem, qui eam aequationem reddat integrabilem.

Solutio.

Sit n numerus dimensionum, vtrique functioni M et N conueniens, eritque per §. praec.

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \frac{nM\,dx - x\,dM}{y\,dx - x\,dy} \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{y\,dN - nN\,dy}{y\,dx - x\,dy}$$

ideoque

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{n(M\,dx + N\,dy) - x\,dM - y\,dN}{y\,dx - x\,dy}.$$

Iam facile colligere licet, dari multiplicatorem, qui etiam sit functio homogenea ipsarum x et y. Sit ergo L talis functio homogenea m dimensionum. Quare si in §. 19 ponatur $dL = Pdx + Qdy$, erit (42.)

$$P = \frac{ydL - mLdy}{ydx - xdy}, \text{ et } Q = \frac{mLdx - xdL}{ydx - xdy}$$

hincque, cum esse oporteat per §. 19.

$$\frac{NP - MQ}{L} = \left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)$$

obtinebitur vtrinque per $ydx - xdy$ multiplicando:

$$\frac{NydL - mLNdy - mLMdx + MxdL}{L} = n(Mdx + Ndy) - xdM - ydN$$

vnde elicitur:

$$\frac{dL}{L} = \frac{(m+n)(Mdx + Ndy) - xdM - ydN}{Mx + Ny}$$

quae formula manifesto fit integrabilis posito $m + n = -1$, quo facto erit $lL = -l(Mx + Ny)$. Quam ob rem multiplicator quaesitus habebitur $L = \frac{1}{Mx + Ny}$.

Coroll. 1.

45. Proposita igitur aequatione differentiali homogenea $Mdx + Ndy = 0$, ea facillime ad integrabilitatem reducetur, propterea quod formula $\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny}$ est integrabilis, cuius integrale, per methodum supra traditam inuentum, dabit aequationem integralem quaesitam.

Coroll. 2.

46. Eo casu tantum incommodum oritur, vbi fit $Mx + Ny = 0$, veluti euenit in aequatione $ydx - xdy = 0$, quae diuidi deberet per $xy - xy = 0xy$. Sed quia huius diuisoris multiplum quodcunque aeque satisfacit, diuisor xy negotium conficiet, quemadmodum per se est perspicuum.

Scholion.

Scholion.

47. Notiſſima eſt methodus, qua ſagaciſſimus *Ioh. Bernoullius* olim omnes aequationes differentiales homogeneas ad ſeparabilitatem variabilium perducere docuit. Propoſita ſcilicet huiusmodi aequatione $M\,dx + N\,dy = 0$, in qua M et N ſint functiones homogeneae *n* dimenſionum, ponere iubet $y = ux$, quo facto functiones M et N huiusmodi formas induent, vt ſit $M = x^n U$, et $N = x^n V$, exiſtentibus U et V functionibus ipſius *u* tantum. Aequatio ergo propoſita per x^n diuiſa abibit in hanc: $U\,dx + V\,dy = 0$. Cum autem ſit $dy = u\,dx + x\,du$, habebimus $U\,dx + Vu\,dx + Vx\,du = 0$, quae per $x(U + Vu)$ diuiſa fit ſeparabilis, ſeu haec forma

$$\frac{(U + Vu)\,dx + Vx\,du}{x(U + Vu)} \text{ integrabilis.}$$

At eſt $(U + Vu)\,dx + Vx\,du = \frac{1}{x^n}(M\,dx + N\,dy)$ et $x^n(U + Vu) = M + Nu$. Integrabilis ergo erit haec formula:

$$\frac{M\,dx + N\,dy}{x(M + Nu)} = \frac{M\,dx + N\,dy}{Mx + Ny} \text{ ob } ux = y.$$

Expoſitis igitur his duobus aequationum generibus, quae per idoneos multiplicatores integrabiles reddi poſſunt, videamus, ad quaenam alia genera eadem methodus extendi poſſit: ac primo quidem obſeruo, omnes aequationes differentiales, quae aliis methodis integrari poſſunt, etiam hac methodo per idoneum multiplicatorem tractari poſſe, id quod in ſequente problemate clarius explicabitur.

Problema 7.

48. Propofita aequatione differentiali $Mdx+Ndy=0$, fi inuenta fuerit eius integralis aequatio completa, affignare omnes multiplicationes, qui aequatorem differentialem reddant integrabilem.

Solutio.

Cum aequatio integralis completa inuoluat quantitatem conftantem arbitrariam C, quae in aequatione differentiali non ineft, vtcunque ea fit implicata, quaeratur eius valor per refolutionem aequationis, qui fit $C=V$, eritque V functio ipfarum x et y, quae infuper conftantes aequationis differentialis in fe complectetur. Tum ifta aequatio $C=V$ differentietur, ficque prodibit $0=dV$. Ac iam neceffe eft, vt dV diuiforem habeat ipfam formulam differentialem propofitam. Sit itaque $dV=L(Mdx+Ndy)$, eritque L multiplicator idoneus, qui aequationem differentialem propofitam reddit integrabilem. Deinde cum, denotante Z functionem quamcunque ipfius V, fit etiam formula $ZdV=LZ(Mdx+Ndy)$ integrabilis, expreffio LZ omnes multiplicatores includet, quibus aequatio differentialis propofita $Mdx+Ndy=0$ fit integrabilis.

Coroll. 1.

49. Quoties ergo aequationis differentialis $Mdx+Ndy=0$ integrale completum affignari poteft, toties non folum vnus, fed plane omnes multiplicatores definire licet, quibus ea aequatio integrabilis reddatur.

Coroll. 2.

50. Cum ergo aliis methodis plurium aequationum differentialium integralia completa ſint inuenta, hinc methodus hactenus tradita, quae ad duo tantum aequationum genera adhuc eſt applicata, non mediocriter amplificari poterit.

Scholion.

51. Interim tamen, niſi ad ſpecialiſſima exempla deſcendere velimus, aequationes differentiales, quarum integralia completa aſſignare licet, ad exiguum numerum reducuntur. Ac primo quidem occurrunt aequationes differentiales primi gradus in hac forma contentae

$$dx(\alpha+\beta x+\gamma y)+dy(\delta+\varepsilon x+\zeta y)=0$$

quae quia facile ad homogeneas reuocantur, etiam hac methodo per multiplicatores tractari poterunt. Deinde memoratu digna eſt haec forma $dy+Pydx+Qyydx=Rdx$, cuius ſi conſtet vnus valor ſingularis ſatisfaciens, ex eo integrale completum elici poteſt, ex quo his caſibus multiplicatores idoneos aſſignare licebit. Tertio etiam perpendi merentur caſus huius aequationis $dy+yydx=ax^m dx$, ab inuentore Riccatiana dictae, quibus ea ad ſeparabilitatem reduci poteſt. Denique exiſtunt caſus huius aequationis $ydy+Pydx=Qdx$, qui cum ſint integrabiles, ad multiplicatorum inueſtigationem ſunt accommodati. Hinc noua patefiet via ex data multiplicatorum forma eas aequationes inueniendi, quae per eos fiant integrabiles, vnde fortaſſe haud ſpernenda analyſeos incrementa haurire licebit.

Problema 8.

52. Propoſita aequatione differentiali primi gradus :

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)dx+(\delta+\varepsilon x+\zeta y)dy=0$$

inuenire multiplicatores, qui eam reddant integrabilem.

Solutio.

Reducatur haec aequatio ad homogeneitatem ponendo :

$x=t+f$ et $y=u+g$, vt prodeat

$$(\alpha+\beta f+\gamma g+\beta t+\gamma u)dt+(\delta+\varepsilon f+\zeta g+\varepsilon t+\zeta u)du=0$$

quae poſito $\alpha+\beta f+\gamma g=0$ et $\delta+\varepsilon f+\zeta g=0$, vnde quantitates f et g determinantur, vtique fit homogenea, ſcilicet

$$(\beta t+\gamma u)dt+(\varepsilon t+\zeta u)du=0;$$

ideoque per multiplicatorem $\frac{1}{\beta tt+(\gamma+\varepsilon)tu+\zeta uu}$ integrabilis redditur. Hinc inuentis litteris f et g aequatio propoſita integrabilis euadet, ſi diuidatur per

$$\beta(x-f)^2+(\gamma+\varepsilon)(x-f)(y-g)+\zeta(y-g)^2,$$

ſeu per

$$\beta xx+(\gamma+\varepsilon)xy+\zeta yy-(2\beta f+\gamma g+\varepsilon g)x$$
$$-(2\zeta g+\gamma f+\varepsilon f)y+\beta ff+(\gamma+\varepsilon)fg+\zeta gg$$

Cum autem ſit $f=\frac{\alpha\zeta-\gamma\delta}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}$, et $g=\frac{\beta\delta-\alpha\varepsilon}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}$, prodibit diuiſor quaeſitus :

$$\beta xx+(\gamma+\varepsilon)xy+\zeta yy+\frac{\alpha\gamma\delta-\alpha\alpha\zeta+\alpha\delta\varepsilon-\beta\delta\delta}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}$$
$$\frac{-2\alpha\beta\zeta+\beta\gamma\delta-\beta\delta\varepsilon+\alpha\gamma\varepsilon+\alpha\varepsilon\varepsilon}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}x$$
$$\frac{-2\beta\delta\zeta+\alpha\varepsilon\zeta-\alpha\gamma\zeta+\gamma\delta\varepsilon+\gamma\gamma\delta}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}y.$$

In-

Inuento autem vno diuifiore, feu multiplicatore, ex eo reperientur facile omnes poffibiles.

Coroll. 1.

53. Forma ergo diuiforis, per quem aequatio differentialis

$$(\alpha + \beta x + \gamma y)dx + (\delta + \varepsilon x + \zeta y)dy = 0$$

redditur integrabilis, eft

$$\beta xx + (\gamma + \varepsilon)yx + \zeta yy + Ax + By + C$$

vbi conftantes A, B, C fupra funt definitae

Coroll. 2.

54. Cum diuifor inuentus etiam fatisfaciat, fi per $\gamma\varepsilon - \beta\zeta$ multiplicetur, patet, cafu, quo $\beta\zeta = \gamma\varepsilon$, diuiforem fore

$$(\alpha\varepsilon\varepsilon - \beta\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta - \alpha\beta\zeta)x + (\gamma\gamma\delta - \alpha\gamma\zeta \\ + \alpha\varepsilon\zeta - \beta\delta\zeta)y + \alpha\gamma\delta - \alpha\alpha\zeta + \alpha\delta\varepsilon - \beta\delta\delta$$

qui pofito $\beta = mf$; $\gamma = nf$; $\varepsilon = mg$; $\zeta = ng$, abit in

$$m(\alpha g - \delta f)(mg - nf)x + n(\alpha g - \delta f)(mg - nf)y \\ + (\alpha g - \delta f)(\delta m - \alpha n)$$

Coroll. 3.

55. Quare fi aequatio propofita fuerit huiusmodi:

$$(\alpha + f(mx + ny))dx + (\delta + g(mx + ny))dy = 0$$

ea reddetur integrabilis, fi diuidatur per

$$(mg - nf)(mx + ny) + \delta m - \alpha n$$

fiue per $mx + ny + \frac{\delta m - \alpha n}{mg - nf}$. At fi fuerit $mg - nf = 0$, aequatio propofita iam ipfa eft integrabilis.

Prob-

Problema 9.

56. Propofita hac aequatione differentiali:

$$dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$$

vbi P, Q et R fint functiones ipfius x tantum, fi conftet, huic aequationi fatisfacere $y = v$, exiftente v functione ipfius x, inuenire multiplicatores, qui iftam aequationem reddant integrabilem.

Solutio.

Cum aequationi fatisfaciat valor $y = v$, erit

$$dv + Pvdx + Qvvdx + Rdx = 0;$$

fi ergo ponatur $y = v + \frac{1}{z}$, habebitur

$$-\frac{dz}{zz} + \frac{Pdx}{z} + \frac{2Qvdx}{z} + \frac{Qdx}{zz} = 0$$

fiue:

$$dz - (P + 2Qv)zdx - Qdx = 0$$

quae integrabilis redditur per multiplicatorem

$$e^{-\int(P+2Qv)dx}.$$

Hic ergo multiplicator per zz multiplicatus conueniet aequationi propofitae. Cum ergo fit $z = \frac{1}{y-v}$, multiplicator aequationem propofitam integrabilem reddens erit:

$$\frac{1}{(y-v)^2} e^{-\int(P+2Qv)dx}$$

Sit breuitatis gratia $e^{-\int(P+2Qv)dx} = S$. Quia aequationis $dz - (P + 2Qv)zdx - Qdx = 0$ integrale eft

$$Sz - \int QSdx = \text{Conft.}$$

omnes multiplicatores quaefiti continebuntur in hac forma:

$$\frac{S}{(y-v)^2} \text{ funct. } \left(\frac{S}{y-v} - \int QSdx\right)$$

vbi

vbi per hypothesin v est functio cognita ipsius x, ideoque etiam $S = e^{-\int(P + 2Qv)dx}$

Coroll. 1.

57. Multiplicator ergo, qui primum se obtulit, est $\frac{S}{(y-v)^2}$, tum vero etiam multiplicator erit $\frac{S}{S(y-v) - (y-v)^2 \int QS dx}$ qui etsi continet formulam integralem $\int QS dx$, saepe numero illo simplicior euadere potest.

Coroll. 2.

58. Si enim S est quantitas exponentialis, fieri potest, vt $\int QS dx$ huiusmodi formam S T induat, existente T functione algebraica, quo casu multiplicator erit

$$\frac{1}{y - v - (y-v)^2 T} = \frac{1}{(y-v)(1 - Ty + Tv)}$$

ideoque algebraicus, quod in priori forma fieri nequit.

Coroll. 3.

59. Cum his duobus casibus multiplicator sit fractio, in cuius solum denominatorem variabilis y ingreditur, ibique vltra quadratum non ascendat, innumerabiles alii huiusmodi multiplicatores exhiberi possunt: Sit enim $\int QS dx = V$, et fractionis $\frac{S}{(y-v)^2}$ denominatorem multiplicare licebit per $A + B(\frac{S}{y-v} - V) + C(\frac{S}{y-v} - V)^2$, sicque erit generalior multiplicatoris forma:

$$\frac{S}{A(y-v)^2 + BS(y-v) - BV(y-v)^2 + CSS - 2CSV(y-v) + CVV(y-v)^2}$$

siue:

$$\frac{S}{(A - BV + CVV)y^2 - (2Av - BS - 2BVv + 2CSV + 2CVVv)y + Avv - BSv - BVvv + CSS + 2CSVv + CV^2v^2},$$

Coroll. 4.

60. Quodsi ergo haec formula $\frac{dy + Pydx + Qyydx + Rdx}{Lyy + My + N}$ fuerit integrabilis, denominator ita debet esse comparatus, vt sit

$$SL = A - BV + CVV,\ SM = S(B - 2CV) - 2v(A - BV + CVV)$$

et $$SN = CSS - Sv(B - 2CV) + vv(A - BV + CVV)$$

existente $dv + Pvdx + Qvvdx + Rdx = 0$, $S = e^{-\int (P + 2Qv)dx}$ et $V = \int QSdx$.

Problema 10.

61. Proposita aequatione differentiali praecedente:

$$dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$$

inuenire functiones L, M et N ipsius x, vt ea per formulam $Lyy + My + N$ diuisa fiat integrabilis.

Solutio.

Cum igitur integrabilis esse debeat haec formula:

$$\frac{dy + dx(Py + Qyy + R)}{Lyy + My + N}$$

per proprietatem generalem esse opportet, postquam per $(Lyy + My + N)^2$ multiplicauerimus:

$$-\frac{yydL}{dx} - \frac{ydM}{dx} - \frac{dN}{dx} = \begin{matrix} + QMyy - 2RLy + NP \\ - PLyy + 2QNy - RM \end{matrix}$$

Vnde pro determinatione functionum L, M et N has consequimur aequationes:

I. $dL = PLdx - QMdx$

II. $dM = 2RLdx - 2QNdx$

III. $dN = RMdx - PNdx$,

ex

ex quarum prima deducimus:

$$M = \frac{PL}{Q} - \frac{dL}{Q\,dx}$$

et ex secunda: $N = \frac{RL}{Q} - \frac{dM}{2Q\,dx}$,

qui valores pro M et N in tertia substituti, dant:

$$dN = \frac{P\,dM}{2Q} - \frac{R\,dL}{Q},$$

Cum autem sit, sumto differentiali dx constante,

$$dM = \frac{PdL + LdP}{Q} - \frac{PLdQ}{QQ} - \frac{ddL}{Qdx} + \frac{dQdL}{QQdx}, \text{ erit}$$

$$N = \frac{RL}{Q} - \frac{PdL}{2QQdx} - \frac{LdP}{2QQdx} + \frac{PLdQ}{2Q^3dx} + \frac{ddL}{2QQdx^2} - \frac{dQdL}{2Q^3dx^2}$$

et $dN = \frac{PPdL}{2QQ} + \frac{PLdP}{2QQ} - \frac{PPLdQ}{2Q^3} - \frac{PddL}{2QQdx} + \frac{PdQdL}{2Q^3dx} - \frac{RdL}{Q}$

quod ergo illius differentiali debet aequari, vnde fit:

$$\begin{aligned} 0 = {} & QQd^3L - 3QdQddL - PPQQdLdx^2 - 2QQdPdLdx \\ & + 3dQ^2dL + 2PQdQdLdx - QdLddQ + 4Q^3RdLdx^2 \\ & - PQQLdPdx^2 + PPQLdQdx^2 - QQLdxddP \\ & \qquad + PQLdxddQ \\ & + 3QLdPdQdx - 3PLdQ^2dx + 2Q^3LdRdx^2 \\ & \qquad - 2Q^2RLdQdx^2 \end{aligned}$$

Haec autem aequatio si per $\frac{L}{Q^4}$ multiplicetur, integrari poterit, eritque eius integralis

$$\text{Const.} = \frac{LddL}{QQ} - \frac{LdLdQ}{Q^3} - \frac{dL^2}{2QQ} - \frac{PPLLdx^2}{2QQ} - \frac{LLdPdx}{QQ} + \frac{PLLdQdx}{Q^3} + \frac{2RLLdx^2}{Q}$$

quae in hanc formam abit:

$$\begin{aligned} 2EQ^3dx^2 = {} & 2QLddL - 2LdLdQ - QdL^2 - PPQLLdx^2 \\ & - 2QLLdPdx + 2PLLdQdx + 4QQRLLdx^2. \end{aligned}$$

Quodsi ponatur $L = zz$, aequatio induet hanc formam:

$$\begin{aligned} \frac{2EQ^3dx^2}{z^3} = {} & 4Qddz - 4dQdz - z(PPQdx^2 + 2QdPdx \\ & - 2PdQdx - 4QQRdx^2). \end{aligned}$$

E 2 Coroll. 1.

Coroll. 1.

62. Quoties ergo per problema praecedens, valor ipsius L assignari potest, toties aequatio differentialis tertii ordinis hic inuenta, et ea secundi ordinis, ad quam illam reduxi, generaliter resolui poterit: quae resolutio, cum alias foret difficillima, probe est notanda.

Coroll. 2.

63. Scilicet si v fuerit eiusmodi functio ipsius x, quae loco y posita, satisfaciat aequationi $dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$, capiatur $S = e^{-\int (P + 2Qv)dx}$, statuaturque $V = \int QSdx$, quo facto erit pro nostra aequatione differentiali tertii ordinis $L = \frac{A - BV + CVV}{S}$, qui valor cum tres constantes arbitrarias complectatur, adeo erit eius aequationis differentiale completum.

Coroll. 3.

63. Si sit $P = 0$, $Q = 1$ et R functio quaecunque ipsius x, aequatio differentialis tertii gradus hanc accipiet formam:

$$0 = d^3 L + 4RdLdx^2 + 2LdRdx^2$$

pro cuius ergo differentiali completo inueniendo, quaeratur primo functio ipsius x, quae sit $= v$, quae satisfaciat huic aequationi $dv + vvdx + Rdx = 0$: tum ponatur $V = \int e^{-2\int vdx} dx$, eritque $L = (A - BV + CVV) e^{+2\int vdx}$.

Coroll. 4.

Coroll. 4.

64. Idem ergo integrale satisfaciet huic aequationi differentiali secundi gradus:

$$E\,dx^2 = 2\,L\,ddL - dL^2 + 4\,R\,L\,L\,dx^2$$

et, posito $L = zz$, etiam huic:

$$\frac{E\,dx^2}{z^3} = ddz + R\,z\,dx^2$$

pro qua itaque est $z = e^{+\int v\,dx}\sqrt{(A - BV + CVV)}$.

Scholion.

65. Omnino animaduerti meretur haec integratio, quippe quae ex aliis principiis vix quidem praestari potest. Hinc autem adipiscimur integrationem completam sequentis aequationis differentio-differentialis satis late patentis:

$$ddz + S\,dx\,dz + T\,z\,dx^2 = \frac{E\,dx^2}{z^3}e^{-2\int S\,dx}$$

Primo nempe quaeratur valor ipsius v ex hac aequatione differentiali primi gradus:

$$dv + vv\,dx + S\,v\,dx + T\,dx = 0$$

quo inuento ponatur breuitatis ergo $V = \int e^{-2\int v dx - \int S dx}\,dx$ eritque

$$z = e^{\int v\,dx}\sqrt{(A + BV + CVV)},$$

si modo constantes arbitrariae A, B, C ita accipiantur, vt sit $AC - \frac{1}{4}BB = E$, sicque adhuc duae constantes arbitrio nostro relinquuntur, vti natura integrationis completae postulat.

Exemplum 1.

66. *Proposita sit haec aequatio differentialis*

$$dy + y\,dx + yy\,dx - \frac{dx}{x} = 0,$$

cuius multiplicatores, qui eam reddant integrabilem, investigari oporteat.

Erit ergo, Problema 9. huc transferendo, $P = 1$, $Q = 1$ et $R = -\frac{1}{x}$, et quia aequationi satisfacit valor $y = \frac{1}{x}$, erit $v = \frac{1}{x}$. Quare fiet $S = e^{-\int(1+\frac{2}{x})dx} = \frac{1}{xx}e^{-x}$ et multiplicator, qui primum se offert, habebitur $= e^{-x}\frac{1}{(xy-1)^2}$. Hunc autem porro multiplicare licet per functionem quamcunque huius formae $e^{-x}\frac{1}{x(xy-1)} - \int e^{-x}\frac{dx}{xx}$; cum vero haec forma integrari nequeat, alii multiplicatores idonei assignari nequeunt. Ob primum ergo integrabilis est haec forma:

$$e^{-x}\frac{1}{(xy-1)^2}\left(dy + y\,dx + yy\,dx - \frac{dx}{x}\right)$$

cuius, si x capitur constans, integrale est.

$$\frac{-e^{-x}}{x(xy-1)} + X$$

quae differentiata, posito y constante, praebet

$$\frac{e^{-x}dx(xxy + 2xy - x - 1)}{xx(xy-1)^2} + dX$$

quod aequari debet alteri membro $\frac{e^{-x}}{(xy-1)^2}\left(y\,dx + yy\,dx - \frac{dx}{x}\right)$ vnde fit $dX = \frac{e^{-x}dx}{xx(xy-1)^2}(xxyy - 2xy + 1) = e^{-x}\frac{dx}{xx}$;

sicque

ſicque integrale completum noſtrae aequationis eſt

$$\frac{-e^{-x}}{x(xy-1)}+\int e^{-x}\frac{dx}{xx}=\text{Conſt.}$$

Exemplum 2.

67. Inuenire multiplicatores idoneos, qui reddant hanc aequationem integrabilem:

$$dy+yydx-\frac{a\,dx}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)^2}=0.$$

Caſus ſingularis huic aequationi ſatisfaciens eſt

$$y=\frac{k+\gamma x}{\alpha+\beta x+\gamma xx}=v$$

exiſtente $k=\frac{1}{2}\beta\pm\sqrt{(\frac{1}{4}\beta\beta-\alpha\gamma+a)}$.

Cum nunc ſit $P=0$, et $Q=1$, erit

$$S=e^{-\int\frac{2k\,dx+2\gamma x\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}$$

vel poſito breuitatis gratia $\pm\sqrt{(\frac{1}{4}\beta\beta-\alpha\gamma+a)}=\frac{1}{2}n$ erit

$$S=\frac{1}{\alpha+\beta x+\gamma xx}e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}$$

et $\int S\,dx=-\frac{1}{n}e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}$

Multiplicator ergo primum inuentus eſt

$$e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\cdot\frac{\alpha+\beta x+\gamma xx}{((\alpha+\beta x+\gamma xx)y-k-\gamma x)^2}$$

qui porro duci poteſt in functionem quamcunque huius quantitatis

$$e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\left(\frac{1}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)y-k-\gamma x}+\frac{1}{n}\right).$$

Ducatur ergo in

$$e^{\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\cdot\frac{(\alpha+\beta x-\gamma xx)y-k-\gamma x}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)y+n-k-\gamma x}$$

ac

ac prodibit multiplicator algebraicus:

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma xx}{((\alpha+\beta x+\gamma xx)y-k-\gamma x)((\alpha+\beta x+\gamma xx)y+n-k-\gamma x)}$$

qui reducitur ad hanc formam:

$$\frac{1}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)\left(y\frac{-2\gamma x-\beta-\sqrt{}(\beta\beta-4\alpha\gamma+4a)}{2(\alpha+\beta x+\gamma xx)}\right)\left(y\frac{-2\gamma x-\beta+\sqrt{}(\beta\beta-4\alpha\gamma+4a)}{2(\alpha+\beta x+\gamma xx)}\right)}$$

Aequationis autem integrale completum eſt

$$e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\quad\frac{(\alpha+\beta x+\gamma xx)y+n-k-\gamma x}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)y-k-\gamma x}=\text{Conſt.}$$

exiſtente $n=\sqrt{}(\beta\beta-4a\gamma+4a)$ et $k=\frac{\beta+n}{2}$.

Ex quo aequatio integralis completa erit

$$e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\cdot\ \frac{2(\alpha+\beta x+\gamma xx)+n-\beta-2\gamma x}{2(\alpha+\beta x+\gamma xx)y-n-\beta-2\gamma x}=\text{Conſt.}$$

cuius indoles eſt manifeſta, dummodo $n=\sqrt{}(\beta\beta-4\alpha\gamma+4a)$ ſit numerus realis.

Quodſi autem valor ipſius n ſit imaginarius, puta $n=m\sqrt{}-1$, ob $e^{p\sqrt{}-1}=\text{coſ.}p+\sqrt{}-1\,\text{ſin.}p$, aequatio integralis ita ad realitatem perduci poteſt. Sit $-m\int\frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}=p$, et $2(\alpha+\beta x+\gamma xx)y-\beta-2\gamma x=q$, eritque ea:

$$(\text{coſ.}p+\sqrt{}-1\,\text{ſin.}p).\frac{q+m\sqrt{}-1}{q-m\sqrt{}-1}=\text{Conſt.}=A+B\sqrt{}-1$$

hinc fit:

$$q\,\text{coſ.}p-m\,\text{ſin.}p+(m\,\text{coſ.}p+q\,\text{ſin,}p)\sqrt{}-1=Aq+Bm$$
$$+(Bq-Am)\sqrt{}-1$$

aequentur ſeorſim membra realia et imaginaria:

$$q\,\text{coſ}p-m\,\text{ſin.}p=Aq+Bm;\quad m\,\text{coſ}\,p+q\,\text{ſin.}p=Bq-Am$$

quae duae aequationes congruunt, ſi capiatur $AA+BB=1$.

Sit

Sit itaque constans arbitraria $A = \cos.\theta$, vt sit $B = \sin.\theta$ et casu, quo $\sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\gamma + 4a)} = m\sqrt{-1}$, aequatio realis erit

$$q\cos.p - m\sin.p = q\cos.\theta + m\sin.\theta \text{ seu } q = \frac{m(\sin.p + \sin.\theta)}{\cos.p - \cos.\theta} = m\cot.\frac{\theta - p}{2}$$

Quare aequationis differentialis

$$dy + yydx + \frac{(mm + \beta\beta - 4\alpha\gamma)dx}{4(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} = 0$$

posito $p = \int \frac{-mdx}{\alpha + \beta x + \gamma xx}$, aequatio integralis completa est

$$2(\alpha + \beta x + \gamma xx)y = \beta + 2\gamma y + m\cot.\frac{\theta - p}{2}$$

seu $y = \dfrac{\frac{1}{2}\beta + \gamma x + \frac{1}{2}m\cot.\frac{\theta - p}{2}}{\alpha + \beta x + \gamma xx}$

Vel sit $\theta = 180° - \zeta$, et habebitur $y = \dfrac{\frac{1}{2}\beta + \gamma x + \frac{1}{2}m\,\mathrm{tang}.\frac{\zeta + p}{2}}{\alpha + \beta x + \gamma xx}$

Hoc autem casu notandum est, integrale speciale, ex quo haec omnia deduximus, fieri imaginarium, quo tamen non obstante inde integrale completum in forma reali exhibere licuit.

Exemplum 3.

68. *Proposita aequatione Riccatiana* $dy + yydx - ax^m dx = 0$, *pro casibus exponentis* m, *quibus eam separare licet, inuenire multiplicatores idoneos.*

Sit $y = v$ valor aequationi satisfaciens, et cum sit $P = 0$, $Q = 1$, et $R = -ax^m$, erit primus multiplicator, aequationem integrabilem reddens,

$$e^{-2\int vdx}\frac{1}{(y - v)^2}$$

 per

per quem si aequatio multiplicetur, cum integrale completum sit

$$e^{-2\int v\,dx}\frac{1}{y-v}-\int e^{-2\int v\,dx}dx = \text{Const.}$$

Quare si Z denotet functionem quamcunque huius quantitatis, omnes multiplicatores continebuntur in hac forma:

$$e^{-2\int v\,dx}\frac{Z}{(y-v)^2}$$

Hinc si ponatur $\int e^{-2\int v\,dx}dx = V$, omnes multiplicatores in hac forma $\frac{1}{Lyy+My+N}$ contenti obtinebuntur, si capiatur:

$$L = e^{2\int v\,dx}(A-BV+CVV)$$

$$M = B-2CV-2ve^{2\int v\,dx}(A-BV+CVV)$$

$$N = Ce^{-2\int v\,dx}-v(B-2CV)+vve^{2\int v\,dx}(A-BV+CVV).$$

Verum hic valor ipsius L simul est integrale completum huius aequationis differentialis tertii gradus:

$$0 = d^3L-4ax^m dL\,dx^2-2maLx^{m-1}dx^3$$

hincque etiam huius secundi gradus:

$$E\,dx^2 = 2L\,ddL-dL^2-4aLLx^m dx^2$$

existente $E = 4AC-BB$.

Scholion.

69. Re attentius perpensa aequationem differentialem tertii ordinis etiam methodo directa resolui, eiusque integrale completum idem, quod hic est assignatum, elici posse deprehendi. Sit enim proposita haec aequatio:

$$d^3L+4R\,dL\,dx^2+2L\,dR\,dx^2 = 0$$

vbi

vbi R sit functio quaecunque ipsius x, sumto differentiali dx constante. Iam quaero functionem ipsius x, per quam ista aequatio multiplicata euadat integrabilis. Sit S ista functio, et aequationis

$$Sd^3L + 4SRdLdx^2 + 2SLdRdx^2 = 0$$

integrale erit

$$SddL - dSdL + L(ddS + 4SRdx^2) = 2Cdx^2$$

dummodo sit

$$d^3S + 2SdRdx^2 + 4RdSdx^2 = 0.$$

Sufficit scilicet quemuis valorem particulariter satisfacientem sumsisse. At haec aequatio, per S multiplicata, neglecta constante, dat integrale:

$$SddS - \tfrac{1}{2}dS^2 + 2SSRdx^2 = 0.$$

Ponatur $S = e^{2\int v\,dx}$, eritque

$$2dv + 2vvdx + 2Rdx = 0$$

vnde negotium huc redit, vt pro v saltem valor particularis inuestigetur, qui satisfaciat huic aequationi differentiali primi gradus: $dv + vvdx + Rdx = 0$, quem igitur tanquam concessum assumo. Hinc nostra aequatio semel integrata erit, ob $S = e^{2\int v\,dx}$,

$$ddL - 2vdxdL + L(2dvdx + 4vvdx^2 + 4Rdx^2) = 2Ce^{-2\int vdx}dx^2$$

Cum igitur, ob $Rdx = -dv - vvdx$, habeamus

$$ddL - 2vdxdL - 2Ldxdv = 2Ce^{-2\int vdx}dx^2,$$

eius integrale manifesto est:

$$dL - 2Lvdx = Bdx + 2Cdx\int e^{-2\int vdx}dx$$

et per $e^{-2\int vdx}$, denuo multiplicando integrale, prodibit

$$e^{-2\int vdx}L = A + B\int e^{-2\int vdx}dx + 2C\int e^{-2\int vdx}dx\int e^{-2\int vdx}dx$$

F 2 Quare

Quare si breuitatis gratia ponatur $\int e^{-2\int v dx} dx = V$, habebimus

$$L = e^{2\int v dx}(A + BV + CVV)$$

prorsus vti ante inuenimus.

Problema 2.

70. Proposita aequatione Riccatiana $dy + yydx = ax^m dx$, inuenire eius integralia particularia, casibus, quibus ea separabilis existit.

Solutio.

Ponendo $a = cc$, et $m = -4n$, tribuatur aequationi ista forma:

$$dy + yydx - ccx^{-4n}dx = 0.$$

Cum enim quaestio circa integralia particularia versetur, nihil interest, vtrum ea sint realia, nec ne. Quo autem facilius, et vna quasi operatione, hos casus, quibus y per functionem ipsius x exprimere licet, eliciamus: statuamus $y = cx^{-2n} + \frac{dz}{zdx}$, et sumto dx constante, nanciscemur hanc aequationem differentialem secundi gradus:

$$-2ncx^{-2n-1}dx + \frac{ddz}{zdx} + \frac{2cx^{-2n}dz}{z} = 0, \text{ seu}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} + \frac{2cdz}{x^{2n}dx} - \frac{2ncz}{x^{2n+1}} = 0$$

cuius valor fingatur:

$$z = Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + Dx^{7n-3} + Ex^{9n-4} + \text{etc.}$$

quo

quo debite ſubſtituto obtinebimus:

$$0 = n(n-1)Ax^{n-2} + (3n-1)(3n-2)Bx^{3n-3} + (5n-2)(5n-3)Cx^{5n-4} + \text{etc.}$$
$$+2ncAx^{-n-1} + 2(3n-1)cB + 2(5n-2)cC + 2(7n-3)cD$$
$$-2ncA - 2ncB - 2ncC - 2ncD$$

vnde coefficientes ficti ita determinantur:

$$2(2n-1)cB + n(n-1)A = 0;\quad B = \frac{-n(n-1)A}{2(2n-1)c}$$
$$2(4n-2)cC + (3n-1)(3n-2)B = 0;\quad C = \frac{-(3n-1)(3n-2)B}{4(2n-1)c}$$
$$2(6n-3)cD + (5n-2)(5n-3)C = 0;\quad D = \frac{-(5n-2)(5n-3)C}{6(2n-1)c}$$

Statim igitur atque vnus coefficiens euaneſcit, ſequentes ſimul omnes euaneſcunt, id quod euenit his caſibus:

$$n = 0;\; n = \tfrac{1}{3};\; n = \tfrac{2}{5};\; n = \tfrac{3}{7};\; \text{etc.}$$
$$n = 1;\; n = \tfrac{2}{3};\; n = \tfrac{3}{5};\; n = \tfrac{4}{7};\; \text{etc.}$$

Denotante igitur i numerum integrum quemcunque, quoties fuerit $n = \frac{i}{2i \pm 1}$, toties reſolutio aequationis exhiberi poteſt. Erit enim $y = cx^{-2n} + \frac{dz}{zdx}$, exiſtente

$$z = Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + Dx^{7n-3} + Ex^{9n-4} + \text{etc.}$$

Proueniet ergo hic valor particularis ipſius y:

$$y = cx^{-n2} + \frac{nAx^{n-1} + (3n-1)Bx^{3n-2} + (5n-2)Cx^{5n-3} + \text{etc.}}{Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + \text{etc.}}$$

Coroll. 1.

71. Quodſi ergo iſte valor particularis ipſius y vocetur $= v$, erit aequationis propoſitae multiplicator idoneus $= e^{-2\int v dx} \cdot \frac{1}{(y-v)^2}$. Ac ſi ponatur $\int e^{-2\int v dx} dx$

 $= V$,

$=V$, ſumtis $A=o$, et $C=o$, erit alius factor ſimplicior

$$\frac{1}{e^{2\int v\,dx}Vyy-(1+2ve^{2\int v\,dx}V)y+v+vve^{2\int v\,dx}V.}$$

Coroll. 2.

72. At eſt $\int v\,dx = \frac{-c}{(2n-1)x^{2n-1}} + l(Ax^n + Bx^{3n-1}$ $+ Cx^{5n-2} +$ etc.

vnde fit $e^{-2\int v\,dx} = \frac{2c}{e^{(2n-1)x^{2n-1}}} \frac{1}{(Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + \text{etc.})^2}$

ex quo porro inueniri poteſt valor ipſius $V=\int e^{-2\int v\,dx}dx$ qui ſi fuerit huiusmodi $e^{-2\int v\,dx}T$, exiſtente T functione algebraica, erit ſuperior multiplicator algebraicus.

Coroll. 3.

73. Inuento valore v, ſeu integrali particulari aequationis propoſitae, inde ſtatim habebitur integrale completum eiusdem, quippe quod erit:

$$\frac{e^{-2\int v\,dx}}{y-v} - \int e^{-2\int v\,dx}dx = \text{Conſt.}$$

Caſus 1. quo $n=o$.

74. Pro hac ergo aequatione $dy+yydx=ccdx$, ob $B=o$, $C=o$ etc. erit valor particularis $y=c$; Quare

Quare posito $v = c$, erit $e^{-2\int v\,dx} = e^{-2cx}$ et $V = \int e^{-2\int v dx}\,dx = -\frac{1}{2c} e^{-2cx}$; vnde integrale completum est

$$\frac{e^{-2cx}}{y-c} + \frac{1}{2c} e^{-2cx} = \text{Const.}$$

seu
$$\frac{e^{-2cx}(y+c)}{y-c} = \text{Const.}$$

Porro, ob $e^{2\int v\,dx} V = -\frac{1}{2c}$, et $v = c$, erit multiplicator algebraicus:

$$\frac{1}{-\frac{1}{2c}yy + \frac{1}{2}c}$$

qui reducitur ad $\frac{1}{yy - cc}$, vti per se est perspicuum.

Casus 2. quo $n = 1$.

75. Pro hac ergo aequatione $dy + yy\,dx = \frac{cc\,dx}{x^4}$ ob $B = 0$, $C = 0$ etc. erit valor particularis $y = \frac{c}{xx} + \frac{1}{x}$. Quare posito $v = \frac{c}{xx} + \frac{1}{x}$, erit $e^{-2\int v\,dx} = \frac{e^{\frac{2c}{x}}}{xx}$ et $V = -\frac{1}{2c} e^{\frac{2c}{x}}$. Hinc integrale completum est

$$\frac{e^{\frac{2c}{x}}}{xxy - x - c} + \frac{1}{2c} e^{\frac{2c}{x}} = \text{Const.}$$

seu $e^{\frac{2c}{x}} \cdot \frac{xxy - x + c}{xxy - x - c} = \text{Const.}$

Porro, ob $e^{2\int v\,dx} V = -\frac{xx}{2c}$, et $v = \frac{x+c}{xx}$, habebitur multiplicator algebraicus:

$$\frac{1}{xxyy - 2xy + 1 - \frac{cc}{xx}} = \frac{1}{(xy-1)^2 - \frac{cc}{xx}}$$

siue

siue aequatio proposita $dy + yydx - \frac{ccdx}{x^4} = 0$ fit integrabilis, si diuidatur per $(xy-1)^2 - \frac{cc}{xx}$.

Casus 3. quo $n = \frac{1}{3}$.

76. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{4}{3}}dx = 0$ est $B = -\frac{A}{3c}$, $C = 0$, etc. vnde integrale particulare

$$y = cx^{-\frac{2}{3}} + \frac{cx^{-\frac{2}{3}}}{3cx^{\frac{1}{3}} - 1} = \frac{3ccx^{1-\frac{1}{3}}}{3cx^{\frac{1}{3}} - 1} = v$$

et $e^{-2\int vdx} = e^{-6cx^{\frac{1}{3}}} \frac{\text{Const.}}{(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3c})^2} = e^{-6cx^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)^2}$

hincque $V = \int e^{-6cx^{\frac{1}{3}}} \frac{dx}{(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)^2} = -e^{-6cx^{\frac{1}{3}}} \frac{3cx^{\frac{1}{3}} + 1}{18c^3(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)}$

Quare integrale completum est

$$\frac{e^{-6cx^{\frac{1}{3}}}}{(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)^2 y - 3ccx^{-\frac{1}{3}}(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)} + \frac{e^{-6cx^{\frac{1}{3}}}(3cx^{\frac{1}{3}} + 1)}{18c^3(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)} = \text{Const.}$$

siue $e^{-6cx^{\frac{1}{3}}} \frac{y(1 + 3cx^{\frac{1}{3}}) + 3ccx^{-\frac{1}{3}}}{y(1 - 3c3^{\frac{1}{3}}) + 3ccx^{-\frac{1}{3}}} = \text{Const.}$

Tum, ob $e^{2\int vdx}V = \frac{1 - 9ccx^{\frac{2}{3}}}{18c^3}$, prodibit diuisor aequationem integrabilem reddens:

$(y + 3ccx^{-\frac{1}{3}})^2 - 9ccx^{\frac{2}{3}}yy$

Casus

Casus 4. quo $n = \frac{2}{3}$.

77. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{8}{3}}dx = 0$ est $B = +\frac{A}{3c}$, $C = 0$ etc. vnde integrale particulare:

$$y = cx^{-\frac{4}{3}} + \frac{2cx^{-\frac{1}{3}} + 1}{3cx^{\frac{2}{3}} + x} = \frac{3ccx^{-\frac{2}{3}} + 3cx^{-\frac{1}{3}} + 1}{3cx^{\frac{2}{3}} + x} = v$$

et $e^{-2\int vdx} = e^{6cx^{-\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{(3cx^{\frac{2}{3}} + x)^2}$: ex quo porro elicitur:

$$V = \int \frac{e^{6cx^{-\frac{1}{3}}}dx}{(3cx^{\frac{2}{3}} + x)^2} = \frac{-e^{6cx^{-\frac{1}{3}}}(3cx^{\frac{2}{3}} - x)}{18c^3(3cx^{\frac{2}{3}} + x)}.$$

Quare integrale completum erit:

$$e^{6cx^{-\frac{1}{3}}} \cdot \frac{(x - 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 + 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}}}{(x + 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 - 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}}} = \text{Const.}$$

Tum ob $e^{2\int vdx}V = \frac{xx - 9ccx^{\frac{4}{3}}}{18c^4}$ prodit diuisor algebraicus aequationem propositam integrabilem reddens:

$$((x + 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 - 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}})((x - 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 + 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}}).$$

Casus 5. quo $n = \frac{2}{5}$.

78. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{8}{5}}dx = 0$ erit $B = -\frac{3A}{5c}$; $C = -\frac{B}{5c} = +\frac{3A}{25cc}$; $D = 0$ etc. ideo-

que integrale particulare:

$$y = c x^{-\frac{4}{5}} + \frac{\frac{2}{5} x^{-\frac{2}{5}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5c} x^{-\frac{4}{5}}}{x^{\frac{2}{5}} - \frac{3}{5c} x^{\frac{1}{5}} + \frac{3}{25cc}} = c x^{-\frac{4}{5}} + \frac{10cc x^{-\frac{3}{5}} - 3c x^{-\frac{4}{5}}}{25cc x^{\frac{2}{5}} - 15c x^{\frac{1}{5}} + 3}$$

seu $y = \dfrac{25c^3 x^{-\frac{2}{5}} - 5cc x^{-\frac{3}{5}}}{25cc x^{\frac{2}{5}} - 15c x^{\frac{1}{5}} + 3} = v$. Vnde integrale completum oritur:

$$e^{-10cx^{\frac{1}{5}}} \cdot \frac{(3 + 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{3}{5}} + 25c^3x^{-\frac{2}{5}}}{(3 - 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{3}{5}} - 25c^3x^{-\frac{2}{5}}} = \text{Const.}$$

Et si huius fractionis ponatur

numerator $(3 + 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{3}{5}} + 25c^3x^{-\frac{2}{5}} = P$, et

denominator $(3 - 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{3}{5}} - 25c^3x^{-\frac{2}{5}} = Q$,

erit diuisor aequationem propositam integrabilem reddens $= PQ$.

Casus 6. quo $n = \frac{3}{5}$.

79. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{12}{5}}dx = 0$, erit $B = \frac{3A}{5c}$; et $C = \frac{B}{5c} = \frac{3A}{25cc}$; $D = 0$ etc. hincque integrale particulare prodit:

$$y = cx^{-\frac{6}{5}} + \frac{15ccx^{-\frac{2}{5}} + 12cx^{-\frac{1}{5}} + 3}{25ccx^{\frac{3}{5}} + 15cx^{\frac{4}{5}} + 3x} \text{ seu}$$

$$y = \frac{25c^3x^{-\frac{3}{5}} + 30ccx^{-\frac{2}{5}} + 15cx^{-\frac{1}{5}} + 3}{25ccx^{\frac{3}{5}} + 15cx^{\frac{4}{5}} + 3x} = v$$

vnde

vnde integrale completum obtinetur:

$$e^{10cx^{\frac{-1}{5}}}\cdot\frac{(3x-15cx^{\frac{4}{5}}+25ccx^{\frac{3}{5}})y-3+15cx^{\frac{-1}{5}}-30ccx^{\frac{-2}{5}}+25c^3x^{\frac{-3}{5}}}{(3x+15cx^{\frac{4}{5}}+25ccx^{\frac{3}{5}})y-3-15cx^{\frac{-1}{5}}-30ccx^{\frac{-2}{5}}-25c^3x^{\frac{-3}{5}}}=\text{Const.}$$

Ac neglecto factore exponentiali $e^{10cx^{\frac{-1}{5}}}$, productum ex numeratore et denominatore praebebit diuisorem, per quem aequatio proposita diuisa euadit integrabilis.

Problema 12.

80. Denotante i numerum quemcunque integrum, exhibere resolutionem huius aequationis:

$$dy+yydx-ccx^{\frac{-4i}{2i+1}}dx=0.$$

Solutio.

Cum igitur sit $n=\frac{i}{2i+1}$, reperietur

$$B=-\frac{(i+1)i}{2(2i+1)c}A$$

$$C=+\frac{(i+2)(i+1)i(i-1)}{2.4(2i+1)^2c^2}A$$

$$D=-\frac{(i+3)(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)}{2.4.6(2i+1)^3c^3}A$$

$$E=+\frac{(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)(i-1)(i-2)(i-3)}{2.4.6.8(2i+1)^4c^4}A$$

etc.

tum vero integrale particulare erit:

$$y=\frac{cx^{\frac{-2i}{2i+1}}+\frac{i}{2i+1}Ax^{\frac{-i-1}{2i+1}}+\frac{i-1}{2i+1}Bx^{\frac{-i-2}{2i+1}}+\frac{i-2}{2i+1}Cx^{\frac{-i-3}{2i+1}}+\frac{i-3}{2i+1}Dx^{\frac{-i-4}{2i+1}}+\text{etc.}}{Ax^{\frac{i}{2i+1}}+Bx^{\frac{i-1}{2i+1}}+Cx^{\frac{i-2}{2i+1}}+Dx^{\frac{i-3}{2i+1}}+\text{etc.}}$$

 quod

quod vt ad eundem denominatorem reducatur, ſtatuamus:

$$\mathfrak{A} = c\mathrm{A}$$
$$\mathfrak{B} = -\frac{i(i-1)}{2(2i+1)}\mathrm{A}$$
$$\mathfrak{C} = +\frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2\cdot 4(2i+1)^2 c}\mathrm{A}$$
$$\mathfrak{D} = -\frac{(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^3 c^2}\mathrm{A}$$

etc.

vnde fiet:

$$y = \frac{\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i+1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i-1}{2i+1}} + \mathfrak{C}x^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i-3}{2i+1}} + \text{etc.}}{\mathfrak{A}x^{\frac{i}{2i+1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{i-1}{2i+1}} + \mathfrak{C}x^{\frac{i-2}{2i+1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{i-3}{2i+1}} + \text{etc.}}$$

Ponamus porro breuitatis gratia:

$$\mathrm{A}x^{\frac{i}{2i+1}} + \mathrm{B}x^{\frac{i-1}{2i+1}} + \mathrm{C}x^{\frac{i-2}{2i+1}} + \mathrm{D}x^{\frac{i-3}{2i+1}} + \text{etc.} = \mathrm{P}$$
$$\mathrm{A}x^{\frac{i}{2i+1}} - \mathrm{B}x^{\frac{i-1}{2i+1}} + \mathrm{C}x^{\frac{i-2}{2i+1}} - \mathrm{D}x^{\frac{i-3}{2i+1}} + \text{etc.} = \mathrm{Q}$$
$$\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i+1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i-1}{2i+1}} + \mathfrak{C}x^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i-3}{2i+1}} + \text{etc.} = \mathfrak{P}$$
$$-\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i+1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i-1}{2i+1}} - \mathfrak{C}x^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i-3}{2i+1}} - \text{etc.} = \mathfrak{Q}$$

atque integrale completum erit:

$$e^{-2(2i+1)c x^{\frac{+1}{2i+1}}} \frac{\mathrm{Q}y - \mathfrak{Q}}{\mathrm{P}y - \mathfrak{P}} = \text{Conſt.}$$

Tum vero diuiſor, aequationem propoſitam reddens integrabilem, erit $= (\mathrm{P}y - \mathfrak{P})(\mathrm{Q}y - \mathfrak{Q})$.

Coroll. 1.

81. Quodſi ergo in aequatione $dy + yydx + \alpha x^{\frac{-4i}{2i+1}} dx = 0$ coefficiens α fuerit quantitas negatiua, vt poſito

$\alpha =$

$\alpha = -cc$, fit c quantitas realis, integrale completum hic inuentum formam habet realem, et quouis casu facile exhiberi poteſt, pariter ac diuiſor, qui aequationem integrabilem reddit.

Coroll. 2.

82. At ſi α fuerit quantitas poſitiua, puta $\alpha = aa$, vt habeatur haec aequatio: $dy + yydx + aax^{\frac{-4i}{2i+1}}dx = 0$, erit $c = a\sqrt{-1}$, et coefficientes B, D, F etc. et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ etc. fient imaginarii; vnde valores particulares $y = \frac{\mathfrak{P}}{P}$ et $y = \frac{\mathfrak{Q}}{Q}$ prodibunt imaginarii.

Coroll. 3.

83. Hoc tamen caſu, quo $c = a\sqrt{-1}$ et $cc = -aa$, fient $P + Q$ et $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ quantitates reales, at $P - Q$ et $\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}$ imaginariae. Quodſi ergo ponatur

$$P + Q = 2R;\; P - Q = 2S\sqrt{-1};\; \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{R}$$
$$\text{et } \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{S}\sqrt{-1}$$

erunt R, S, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ quantitates reales, et ob

$$P = R + S\sqrt{-1};\; Q = R - S\sqrt{-1};\; \mathfrak{P} = \mathfrak{R} + \mathfrak{S}\sqrt{-1};$$
$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} - \mathfrak{S}\sqrt{-1}$$

fiet diuiſor, reddens aequationem integrabilem,

$$(RR + SS)yy - 2(R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S})y + \mathfrak{R}\mathfrak{R} + \mathfrak{S}\mathfrak{S}$$

ideoque realis.

Coroll. 4.

84. At eodem casu $c = a\sqrt{-1}$, ob $e^{-p\sqrt{-1}} = \operatorname{cos}. p - \sqrt{-1} \operatorname{sin}. p$, erit $e^{-2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}}\sqrt{-1}} = \operatorname{cos}. 2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}} - \sqrt{-1}. \operatorname{sin}. 2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}}$; vnde posito breuitatis gratia $2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}} = p$, erit integrale completum:

$$(\operatorname{cos}. p - \sqrt{-1} \operatorname{sin}. p). \frac{(R - S\sqrt{-1})y - \mathfrak{R} + \mathfrak{S}\sqrt{-1}}{(R + S\sqrt{-1})y - \mathfrak{R} - \mathfrak{S}\sqrt{-1}} = \text{Const.}$$

quae forma est imaginaria.

Coroll. 5.

85. Tribuatur autem constanti talis forma: $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, et aequatione integrali euoluta, erit:

$$(Ry - \mathfrak{R})\operatorname{cos}. p - (Ry - \mathfrak{R})\operatorname{sin}. p\sqrt{-1} - (Sy - \mathfrak{S}) \operatorname{cos}. p\sqrt{-1} - (Sy - \mathfrak{S})\operatorname{sin}. p = (Ry - \mathfrak{R})\alpha - (Ry - \mathfrak{R}) \beta\sqrt{-1} + (Sy - \mathfrak{S})\alpha\sqrt{-1} + (Sy - \mathfrak{S})\beta.$$

Iam aequentur seorsim partes reales et imaginariae:

$$(Ry - \mathfrak{R})\operatorname{cos}. p - (Sy - \mathfrak{S})\operatorname{sin} p = \alpha(Ry - \mathfrak{R}) + \beta(Sy - \mathfrak{S})$$
$$(Ry - \mathfrak{R})\operatorname{sin}. p + (Sy - \mathfrak{S})\operatorname{cos}. p = \beta(Ry - \mathfrak{R}) - \alpha(Sy - \mathfrak{S})$$

quae duae aequationes conueniunt, si modo sit $\alpha\alpha + \beta\beta = 1$. Sit ergo $\alpha = \operatorname{cos}. \zeta$, et $\beta = \operatorname{sin}. \zeta$, prodibitque ex vtraque

$$\frac{Ry - \mathfrak{R}}{Sy - \mathfrak{S}} = \frac{\operatorname{sin}. p + \operatorname{sin}. \zeta}{\operatorname{cos}. p - \operatorname{cos}. \zeta} = \operatorname{cot}. \frac{\zeta - p}{2}.$$

Coroll. 6.

Coroll. 6.

86. Sumto ergo pro ζ angulo quocunque, si sit $\alpha = a\sqrt{-1}$, erit integrale completum aequationis propositae

$$\frac{\mathrm{R}y - \mathfrak{R}}{\mathrm{S}y - \mathfrak{S}} = \cot. \frac{\zeta - p}{2}$$

$$\text{seu } y = \frac{\mathfrak{R} \sin. \frac{\zeta - p}{2} - \mathfrak{S} \cos. \frac{\zeta - p}{2}}{\mathrm{R} \sin. \frac{\zeta - p}{2} - \mathrm{S} \cos. \frac{\zeta - p}{2}}$$

existente $p = 2(2i+1) a x^{\frac{1}{2i+1}}$.

Problema 13.

87. Denotante i numerum quemcunque integrum, exhibere resolutionem huius aequationis:

$$dy + yy\,dx - cc\,x^{\frac{-4i}{2i-1}} dx = 0.$$

Solutio.

Quia est $n = \frac{i}{2i-1}$, haec resolutio deriuari potest ex solutione praecedentis problematis, ponendo $-i$ loco i. Quare tribuantur litteris B, C, D, etc. sequentes valores:

$$\mathrm{B} = + \frac{i(i-1)}{2(2i-1)c} \mathrm{A}$$

$$\mathrm{C} = + \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2 \cdot 4 (2i-1)^2 c^2} \mathrm{A}$$

$$\mathrm{D} = + \frac{(i+2)(i+1)i(i-1)(i-3)(i-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 (2i-1)^3 c^3} \mathrm{A}$$

etc.

Tum

Tum vero alterarum litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc determinatio ita ſe habebit:

$$\mathfrak{A} = c\,\mathrm{A}$$
$$\mathfrak{B} = + \frac{(i+1)i}{2(2i-1)}\,\mathrm{A}$$
$$\mathfrak{C} = + \frac{(i+2)(i+1)i(i-1)}{2 \cdot 4\,(2i-1)^2 c}\,\mathrm{A}$$
$$\mathfrak{D} = + \frac{(i+3)(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6\,(2i-1)^3 c^2}\,\mathrm{A}$$
etc.

Quibus valoribus conſtitutis, ponatur breuitatis gratia:

$$\mathrm{A}x^{\frac{+i}{2i-1}} + \mathrm{B}x^{\frac{+i+1}{2i-1}} + \mathrm{C}x^{\frac{+i+2}{2i-1}} + \mathrm{D}x^{\frac{+i+3}{2i-1}} + \text{etc.} = \mathrm{P}$$
$$\mathrm{A}x^{\frac{+i}{2i-1}} - \mathrm{B}x^{\frac{+i+1}{2i-1}} + \mathrm{C}x^{\frac{+i+2}{2i-1}} + \mathrm{D}x^{\frac{+i+3}{2i-1}} + \text{etc.} = \mathrm{Q}$$
$$\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i-1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i+1}{2i-1}} + \mathfrak{C}x^{\frac{-i+2}{2i-1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i+3}{2i-1}} + \text{etc.} = \mathfrak{P}$$
$$-\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i-1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i-1}{2i-1}} - \mathfrak{C}x^{\frac{-i+2}{2i-1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i+3}{2i-1}} - \text{etc.} = \mathfrak{Q}$$

atque hinc ſtatim habentur duae integrationes particulares:

$$\text{I. } y = \frac{\mathfrak{P}}{\mathrm{P}}, \quad \text{et II. } y = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathrm{Q}}.$$

Tum vero aequatio integralis completa erit:

$$e^{2(2i-1)cx^{\frac{-1}{2i-1}}}\,\frac{\mathrm{Q}y - \mathfrak{Q}}{\mathrm{P}y - \mathfrak{P}} = \text{Conſt.}$$

et diuiſor aequationem propoſitam integrabilem reddens, fiet $= (\mathrm{P}y - \mathfrak{P})(\mathrm{Q}y - \mathfrak{Q})$.

Coroll.

Coroll. 1.

88. Quodſi autem aequatio propoſita fuerit huiusmodi:

$$dy + yy\,dx + aax^{\frac{-4i}{2i-1}}\,dx = 0$$

vt ſit $cc = -aa$, et $c = a\sqrt{-1}$, integrationes particulares exhibitae fient imaginariae, ob B, D, F, etc. item $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ etc. imaginarias, dum reliquarum litterarum valores ſunt reales.

Coroll. 2.

89. At ſi ponatur:

$$P + Q = 2R;\; P - Q = 2S\sqrt{-1};\; \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{R}$$
$$\text{et } \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{S}\sqrt{-1}$$

quantitates R, S, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ nihilo minus fient, vt ante, reales, et diuiſor aequationem reddens integrabilem erit:

$$(RR + SS)yy - 2(R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S})y + \mathfrak{R}\mathfrak{R} + \mathfrak{S}\mathfrak{S}.$$

Coroll. 3.

90. Tum vero, ſi ponatur breuitatis cauſa $2(2i-1)$ $ax^{\frac{-1}{2i-1}} = p$, aequatio integralis completa erit:

$$\frac{Ry - \mathfrak{R}}{Sy - \mathfrak{S}} = \cot.\frac{\zeta + p}{2}$$

vnde elicitur:

$$y = \frac{\mathfrak{R}\,\text{ſin.}\frac{\zeta+p}{2} - \mathfrak{S}\,\text{coſ.}\frac{\zeta+p}{2}}{R\,\text{ſin.}\frac{\zeta+p}{2} - S.\,\text{coſ.}\frac{\zeta+p}{2}}$$

vbi angulus ζ vicem gerit conſtantis arbitrariae.

 Scholion.

Scholion.

91. Solutiones horum duorum postremorum problematum non tam per accuratam analysin sunt euolutae, quam per inductionem ex casibus particularibus supra expeditis deriuatae, quandoquidem progressio ab his casibus ad sequentes satis erat manifesta. Fundamentum autem harum solutionum in hoc potissimum est situm, quod solutio particularis, vnde omnia sunt deducta, re vera est geminata, cum quantitas c, cuius quadratum tantum in aequatione differentiali occurrit, aeque negatiue, ac positiue, accipi possit. Quoties autem huiusmodi aequationum binae solutiones particulares sunt cognitae, ex iis multo facilius solutio generalis, indeque multiplicatores, eas integrabiles reddentes, erui possunt, id quod operae pretium erit clarius exposuisse.

Problema 14.

92. Datis duabus solutionibus particularibus huiusmodi aequationis:

$$dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$$

inuenire eius solutionem generalem, et multiplicatorem, qui eam integrabilem reddat.

Solutio.

Sint M et N huiusmodi functiones ipsius x, quae loco y substitutae, ambae aequationi propositae satisfaciant, ita vt sit:

$$dM + PMdx + QM^2dx + Rdx = 0$$

$$\text{et} \quad dN + PNdx + QN^2dx + Rdx = 0.$$

Ponatur

Ponatur $\frac{y-M}{y-N} = z$, seu $y = \frac{M-Nz}{1-z}$, erit

$$dy = \frac{dM - zdM + Mdz - Ndz - zdN + zzdN}{(1-z)^2}$$

quibus valoribus in aequatione proposita substitutis, et tota aequatione per $(1-z)^2$ multiplicata, prodibit:

$$(1-z)dM - z(1-z)dN + (M-N)dz + P(1-z)Mdx - P(1-z)Nzdx$$
$$+ QMMdx - 2QMNzdx + QNNzzdx + R(1-z)^2dx = 0.$$

Iam pro dM et dN substituantur valores ex binis superioribus aequationibus differentialibus oriundi:

$$\begin{aligned}
&- P(1-z)Mdx - Q(1-z)M^2dx - R(1-z)dx \\
&+ Pz(1-z)Ndx + Qz(1-z)N^2dx + Rz(1-z)dx + (M-N)dz = 0 \\
&+ P(1-z)Mdx + QM^2dx \qquad + R(1-z)^2dx \\
&- Pz(1-z)Ndx - 2QMNzdx \\
&\qquad\qquad + QN^2zzdx
\end{aligned}$$

qua aequatione in ordinem redacta, orietur:

$$QzM^2dx + QzN^2dx - 2QMNzdx + (M-N)dz = 0$$

seu $Q(M-N)dx + \frac{dz}{z} = 0$, ita vt sit:

$$z = Ce^{-\int Q(M-N)dx}$$

vnde aequatio integrata generalis erit:

$$e^{\int Q(M-N)dx} \frac{y-M}{y-N} = \text{Const.}$$

Pro multiplicatore autem inueniendo, notetur, aequationem propositam, facta substitutione primum per $(1-z)^2$, esse multiplicatam, tum vero diuisam per $z(M-N)$, euasisse integrabilem. Statim ergo per $\frac{(1-z)^2}{(M-N)z}$ multiplicata fiet integrabilis: ex quo factor erit $\frac{(1-z)^2}{(M-N)z}$, qui ob $z = \frac{y-M}{y-N}$ hanc induet formam:

$$\frac{M-N}{(y-M)(y-N)}.$$

Problema 15.

93. Propofita aequatione $ydy + Pydx + Qdx = 0$, inuenire conditiones functionum P et Q, vt huiusmodi multiplicator $(y+M)^n$ eam reddat integrabilem.

Solutio.

Ex natura ergo differentialium effe oportet:

$$\frac{1}{dx} d. y(y+M)^n = \frac{1}{dy} d(Py+Q)(y+M)^n$$

vnde cum M fit functio ipfius x tantum, erit

$$ny(y+M)^{n-1}\frac{dM}{dx} = P(y+M)^n + n(Py+Q)(y+M)^{n-1}$$

quae diuifa per $(y+M)^{n-1}$ abit in hanc:

$$\frac{nydM}{dx} = (n+1)Py + PM + nQ$$

vnde neceffe eft fit:

$$P = \frac{ndM}{(n+1)dx} \quad \text{et} \quad Q = \frac{-PM}{n} = -\frac{MdM}{(n+1)dx}$$

His igitur valoribus fubftitutis aequatio

$$ydy + \frac{nydM}{n+1} - \frac{MdM}{n+1} = 0$$

fit integrabilis, fi multiplicetur per $(y+M)^n$.

Coroll. 1.

94. Quia haec aequatio eft homogenea, ea quoque fit integrabilis, fi diuidatur per $(n+1)yy + nyM - MM = (y+M)((n+1)y - M)$. Neque ergo hinc nouae aequationes methodo hac tractabiles obtinentur.

Coroll. 2.

95. Quoniam autem habemus duos multiplicatores $(y+M)^n$ et $\frac{1}{(y+M)((n+1)y-M)}$: fi alter per alterum

rum diuidatur, quoties constanti arbitrariae aequatus dabit integrale completum. Quare aequatio $ydy + \frac{nydM}{n+1} - \frac{MdM}{n+1} = 0$ generaliter integrata praebet:

$$(y+M)^{n+1}((n+1)y - M) = \text{Const.}$$

Problema 16.

96. Proposita aequatione $ydy + Pydx + Qdx = 0$, inuenire conditiones functionum P et Q, vt huiusmodi multiplicator $(yy + My + N)^n$ eam reddat integrabilem.

Solutio.

Ex natura differentialium sit necesse est:

$$\frac{1}{dx} d.y(yy+My+N)^n = \frac{1}{dy} d.(Py+Q)(yy+My+N)^n$$

Cum igitur M, N, P et Q sint per hypothesin functiones ipsius x, erit, facta euolutione:

$$ny(yy+My+N)^{n-1}\left(y\frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dx}\right) = P(yy+My+N)^n$$
$$+ n(Py+Q)(2y+M)(yy+My+N)^{n-1}$$

et post diuisionem per $(yy+My+N)^{n-1}$

$$nyy\frac{dM}{dx} + \frac{nydN}{dx} = (2n+1)Pyy + (n+1)PMy + PN$$
$$+ 2nQy \qquad + nQM$$

Hinc fiere oportet:

I. $ndM = (2n+1)Pdx$

II. $ndN = (n+1)PMdx + 2nQdx$

III. $0 = PN + nQM$

Prima dat $P = \frac{ndM}{(2n+1)dx}$, et vltima $Q = \frac{-PN}{nM}$, seu $Q = \frac{-N\,dM}{(2n+1)M\,dx}$, qui valores in media substituti praebent:

$$n\,dN = \frac{n(n+1)M\,dM}{2n+1} - \frac{2nN\,dM}{(2n+1)M} \text{ seu}$$
$$(2n+1)M\,dN + 2N\,dM = (n+1)MM\,dM$$

quae multiplicata per $M^{\frac{-2n+1}{2n+1}}$ et integrata praebet:

$$(2n+1)M^{\frac{2}{2n+1}}N = \text{Const.} + (n+1)\int M^{\frac{2n+2}{2n+1}}dM$$

$$\text{seu } (2n+1)M^{\frac{2}{2n+1}}N = \text{Const.} + \frac{2n+1}{4}M^{\frac{4n+4}{2n+1}}$$

$$\text{vnde fit } N = \alpha M^{\frac{-2}{2n+1}} + \tfrac{1}{4}M^2.$$

Cum ergo sit

$$P\,dx = \frac{n\,dM}{2n+1} \text{ et } Q\,dx = -\frac{\alpha M^{\frac{-2n-3}{2n+1}}dM}{2n+1} - \frac{M\,dM}{4(2n+1)}$$

ista aequatio differentialis:

$$y\,dy + \frac{ny\,dM}{2n+1} - \frac{M\,dM}{4(2n+1)} - \frac{\alpha}{2n+1}M^{\frac{-2n-3}{2n+1}}dM = 0$$

integrabilis redditur, si multiplicetur per

$$(yy + My + \tfrac{1}{4}M^2 + \alpha M^{\frac{-2}{2n+1}})^n.$$

Coroll. I.

97. Si fuerit $-\frac{2n-3}{2n+1} = 1$, seu $n = -1$; aequatio differentialis est homogenea, et si $-\frac{2n-3}{2n+1} = 0$ seu $n = -\frac{3}{2}$, primi gradus. Vtroque autem casu nulla est difficultas, cum aequatio facile tractari possit.

Coroll.

Coroll. 2.

98. Magis ergo abstrusi erunt casus, quibus exponens $-\frac{2n-3}{2n+1}$ neque est 0, neque 1. Sit ergo $-\frac{2n-3}{2n+1}=m$, vnde fit $2n=-\frac{m-3}{m+1}$ et aequatio differentialis

$$ydy+\tfrac{1}{4}(m+3)ydM+\tfrac{1}{8}(m+1)MdM+\tfrac{1}{2}\alpha(m+1)M^{m}dM=0$$

integrabilis reddetur per multiplicatorem

$$(yy+My+\tfrac{1}{4}MM+\alpha M^{m+1})^{\frac{-m-3}{2(m+1)}}$$

Coroll. 3.

99. Quod si iam pro M functiones quaecunque ipsius x substituantur, aequationes tam complicatae formari poterunt, quas quomodo aliis methodis tractari oporteat, vix liquet, cum tamen hac methodo earum resolutio sit in promtu.

Scholion.

100. Si quis haec vestigia vlterius prosequi voluerit, dubium est nullum, quin haec methodus mox multo maiora sit acceptura incrementa, quibus vniuersa Analysis non mediocriter promoueatur. Specimina etiam hic euoluta ita sint comparata, vt viam ad inuestigationes profundiores parare videantur, praecipue si insuper alia aequationum differentialium genera simili modo pertractentur. Verum haec, quae hactenus protuli, sufficere videntur, animis Geometrarum ad ampliorem huius methodi enucleationem incitandis, quem scopum mihi equidem potissimum proposueram.

SOLVTIO

SOLVTIO PROBLEMATIS DE INVESTIGATIONE TRIVM NVMERORVM, QVORVM TAM SVMMA, QVAM PRODVCTVM, NEC NON SVMMA PRODVCTORVM EX BINIS, SINT NVMERI QVADRATI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Etsi problemata huius generis, quae Diophantea appellari solent, parum vtilitatis afferre videntur: tamen certum est, Analysin Mathematicam, atque adeo etiam eam partem, quae circa infinita versatur, ex methodo problemata Diophantea soluendi, maxima incrementa cepisse. Non solum autem huiusmodi problemata, si sint difficiliora, fines Analyseos plurimum amplificauerunt: sed etiam vim ingenii mirifice acuere solent, vt etiam in aliis problematibus, quomodo solutionem institui oporteat, facilius perspicere valeat. Quam ob rem huius generis problemata, praecipue si modus soluendi magis fuerit reconditus, minime contemnenda esse arbitror. Dum enim singularia artificia ad eorum solutionem requiruntur, ab iisdem quoque egregia subsidia ad vniuersam Analysin vberius excolendam expectare licebit.

2. Ad hoc autem genus potissimum referendum videtur problema propositum, quandoquidem id diu

et

et multum per varia Methodi Diophanteae artificia frustra tractaui, vt fere etiam de eius solutione penitus desperauerim. Tandem vero, quasi inopinato, solutionem sum consecutus, quae eo magis notatu digna videbatur, quod minimi numeri, quos quidem adhuc satisfacientes elicere potui, sunt ita praegrandes, vt mirum non sit, solutionem tantis difficultatibus fuisse inuolutam. Quare cum methodo singulari ad istam solutionem pertigerim, eius ampliorem explicationem vsu non esse cariturum arbitror, cum simili fortasse modo aliae quaestiones multo adhuc difficiliores superari queant.

3. Quaeruntur ergo tres numeri, quibus tres sequentes conditiones conueniant:

I. Vt eorum summa sit numerus quadratus.

II. Vt summa productorum ex binis sit numerus quadratus.

III. Vt productum omnium trium sit numerus quadratus.

Quod problema etiam hoc modo enunciari potest, vt quaeratur aequatio cubica $z^3 - pzz + qz - r = 0$, omnes suas radices habens rationales, cuius singuli coefficientes p, q et r sint numeri quadrati. Posset adhuc adiici haec conditio, vt isti numeri sint integri, verum per se est perspicuum, quomodo inuentis ternis numeris fractis satisfacientibus, ex iis facile integri, qui etiam satisfaciant, formari queant. Quicunque enim terni numeri satisfacere fuerint inuenti, iidem per numerum quadratum quemcunque multiplicati aeque satisfacient, quo pacto fractiones facillime tollentur.

4. Sint igitur nx, ny, nz tres huiusmodi numeri quaesiti, ac satisfieri oportebit his conditionibus:

I. Vt sit $n(x+y+z) =$ Quadrato

II. Vt sit $nn(xy+xz+yz)$ seu $xy+xz+yz =$ Quadrato

III. Vt sit $n^3 xyz$ seu $nxyz =$ Quadrato.

At primae et tertiae conditioni satisfiet, si reddatur

$$xyz(x+y+z) = \text{Quadrato.}$$

Ponatur ergo:

$$xyz(x+y+z) = vv(x+y+z)^2$$

vnde per $x+y+z$ diuidendo erit

$$xyz = vv(x+y+z), \text{ hincque } z = \frac{vv(x+y)}{xy-vv}.$$

Cum igitur hinc fiat $xyz = \frac{vvxy(x+y)}{xy-vv}$,
vt $nxyz$ prodeat, quadratum capi debet,

$$n = m^2 xy(x+y)(xy-vv)$$

Hisque valoribus pro z et n assumtis, satisfactum erit primae et tertiae conditioni.

5. Hinc itaque nostri tres numeri erunt

primus $nx = mmxxy(x+y)(xy-vv)$

secundus $ny = mmxyy(x+y)(xy-vv)$

tertius $nz = mmvvxy(x+y)^2$

vbi per numerum arbitrarium m fractiones, si quae forte occurrent, tolli poterunt. Verum contemplemur iam secundam conditionem, quae ob $z = \frac{vv(x+y)}{xy-vv}$ requirit, vt sit:

$$xy + \frac{vv(x+y)^2}{xy-vv} = \text{Quadrato.}$$

Pona-

Ponamus in hunc finem:

$xy - vv = uu$; vt sit $y = \frac{vv + uu}{x}$ et $z = \frac{vv(x+y)}{uu}$

erit $xy = vv + uu$ et $x + y = \frac{xx + vv + uu}{x}$

efficiendumque est, vt sit

$$vv + uu + \frac{vv(xx + vv + u^2)^2}{uuxx} = \text{Quadrato}.$$

6 Ponatur $x = tv$; vt sit $y = \frac{vv + uu}{tv}$, esseque debet

$$vv + uu + \frac{(vv(tt+1) + uu)^2}{ttuu} = \text{Quadrato},$$

seu multiplicando per $ttuu$

$$ttuuvv + ttu^4 + v^4(tt+1)^2 + 2uuvv(tt+1) + u^4 = \text{Quadrato},$$

siue $v^4(tt+1)^2 + uuvv(3tt+2) + u^4(tt+1) = \text{Quadrato}$.

Statuatur huius quadrati radix $= vv(tt+1) + suu$, erit

$$vv(3tt+2) + uu(tt+1) = 2svv(tt+1) + ssuu;$$

vnde elicitur

$$\frac{vv}{uu} = \frac{tt+1-ss}{2s(tt+1) - 3tt - 2} = \text{Quadrato}.$$

Sit porro $s = t - r$, et habebitur:

$$\frac{vv}{uu} = \frac{2rt - rr + 1}{2t^3 - (2r+3)tt + 2t - 2(r+1)}$$

Multiplicetur numerator et denominator per $2rt - rr + 1$, vt fiat

$$\frac{vv}{uu} = \frac{(2rt - rr + 1)^2}{4rt^4 - 2(3rr + 3r - 1)t^3 + (2r^3 + 3rr + 2r - 3)tt - 2(3r-1)(r+1)t + 2(r-1)(r+1)^2}$$

7. Tota ergo quaestio huc est perducta, vt huius fractionis denominator reddatur quadratum: posito enim

$$4rt^4 - 2(3rr + 3r - 1)t^3 + (2r^3 + 3rr + 2r - 3)tt$$
$$- 2(3r-1)(r+1)t + 2(r-1(r+1)^2 = QQ$$

 erit

erit definitis hinc t et r

$\frac{v}{u} = \frac{2rt - rr + 1}{Q}$, tum vero $x = tv$ et $y = \frac{vv + uu}{tv}$ vnde numeri quaesiti definientur. Ante autem, quam ad istam aequationem pertigimus, solutionem iam limitauimus positione $xy - vv = uu$, quae restrictio probe est notanda, quoniam nullum est dubium, quin eiusmodi extent solutiones, in quibus $xy - vv$ non sit numerus quadratus, easque propterea hinc non reperiemus. Verum hanc limitationem ideo facere sum coactus, vt ad istam formulam quadrato aequandam peruenire licuerit, quippe quae ita est comparata, vt per cognita artificia resolui possit. Sicque tota solutionis vis in reductionibus §. praeced. est sita.

8. Pluribus autem casibus haec formula et quidem infinitis modis quadratum effici potest, quorum praecipui, et qui statim se offerunt sunt: 1°). Si coefficiens ipsius t^4, scilicet $4r$, seu r, fuerit numerus quadratus. 2°) Si terminus vltimus $2(r-1)(r+1)^2$ seu $2(r-1)$ fuerit numerus quadratus: vtroque enim casu per regulas cognitas valores idonei pro t elici, tum vero porro ex quolibet alii noui inueniri possunt. Sin autem simul et r et $2(r-1)$ fuerint quadrata, vna operatione plures valores idoneos pro t eruere licet, neque vero hic, vt plerumque fieri solet, solutio simplicior se offert; etsi enim si $2(r-1) =$ quadrato, satisfacit valor $t = 0$, tamen inde prodit $x = 0$ et $y = \infty$, qui valores pro natura quaestionis plane sunt incongrui. Excluduntur enim solutiones, quibus vnus trium numerorum quaesitorum euanesceret, quia tum

quaestio

quaestio esset facillima et circa duos numeros versaretur, quorum tam summa, quam productum, esset quadratum.

Casus I. quo ponitur $r = 1$.

9. Hic casus simplicissimus videtur, quia vltimus terminus nostrae formae euanescit, primusque fit quadratus. Habemus ergo

$$4t^4 - 10t^3 + 4tt - 8t = QQ \text{ et } \frac{v}{u} = \frac{2t}{Q}.$$

Ad hanc aequationem soluendam statuamus $Q = 2tt - \frac{5}{2}t$ eritque

$$4tt - 8t = \tfrac{25}{4}tt;\ \tfrac{9}{4}t = -8;\ \text{et } t = -\tfrac{32}{9}.$$

At hinc fiet $\frac{v}{u} = \frac{4}{4t-5} = \frac{-36}{173}$; vnde habebimus

$$v = -36;\ u = 173;\ t = \frac{-32}{9} \text{ et } x = tv = 128$$

indeque porro $y = \frac{36^2 + 173^2}{128} = \frac{31225}{128} = \frac{25 \cdot 1249}{128}$.

Erit ergo $x + y = \frac{47609}{128}$ et $z = \frac{36^2 \cdot 47609}{173^2 \cdot 128}$

ac tres numeri quaesiti erunt, ob $xy - vv = uu$,

$$\text{Primus} = \frac{128^2 \cdot 25 \cdot 1249 \cdot 47609 \cdot 173^2}{128 \cdot 128} mm$$

$$\text{Secundus} = \frac{128 \cdot 25^2 \cdot 1249^2 \cdot 47609 \cdot 173^2}{128^2 \cdot 128} mm$$

$$\text{Tertius} = \frac{36^2 \cdot 128 \cdot 25 \cdot 1249 \cdot 47609^2}{128 \cdot 128^2} mm.$$

10. Ad fractiones tollendas ponamus $m = \frac{128}{5}$, eruntque terni nostri numeri

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Primus} = & 128^2 \cdot 173^2 \cdot 1249 \cdot 47609 & = 128^2 \cdot 173^2 \\ \text{Secundus} = & 5^2 \cdot 173^2 \cdot 1249^2 \cdot 47609 & = 5^2 \cdot 173^2 \cdot 1249 \\ \text{Tertius} = & 36^2 \cdot 1249 \cdot 47609^2 & = 36^2 \cdot 47609 \end{array}\right\} \text{in } 1249 \cdot 47609$$

quibus numeris euolutis erit

$$\text{Primus} = 490356736 \cdot 59463641$$
$$\text{Secundus} = 934533025 \cdot 59463641$$
$$\text{Tertius} = 61701264 \cdot 59463641$$

quorum productum manifesto est quadratum 2 quippe

$$5^2 \cdot 36^2 \cdot 128^2 \cdot 173^4 \cdot 1249^4 \cdot 47609^4.$$

Summa autem reperitur

$$25 \cdot 59463641^2$$

et summa productorum ex binis:

$$173^2 \cdot 59463641^2 \cdot 18248924559376$$

cuius radix quadrata est $173 \cdot 59463641 \cdot 4271876$

11. Pro eadem aequatione resoluenda poni potest $Q = 2tt - \frac{5}{2}t - \frac{9}{16}$, vt tres primores termini tollantur, ac prodibit

$$-8t = +\frac{45}{16}t + \frac{81}{256}, \text{ seu } 0 = 173t + \frac{81}{16}, \text{ ergo } t = \frac{-81}{16 \cdot 173}.$$

Hinc $Q = \frac{81^2}{128 \cdot 173^2} + \frac{405}{32 \cdot 173} - \frac{9}{16} = -\frac{9 \cdot 207563}{128 \cdot 173^2}$ et $\frac{v}{u} = \pm \frac{144 \cdot 173}{207563}$. Sumi enim potest valor ipsius Q tam negatiue quam positiue. Statuatur ergo

$$v = -144 \cdot 173;\ u = 207563;\ \text{erit } x = 9 \cdot 81 = 729$$

et $y = \frac{vv + uu}{729}$; vnde iam manifestum est, ad tam enormes perueniri numeros, vt solutio praecedens prae hac multo simplicior sit aestimanda. Superfluum autem foret, huiusmodi solutiones nimis complicatas vlterius euoluere, quia in huius generis quaestionibus solutione simplicissima plerumque contenti esse solemus.

Casus

Casus 2. quo ponitur $r=\frac{3}{2}$.

12. Hac positione vltimus formulae nostrae terminus fit quadratum, eritque $\frac{v}{u}=\frac{12t-5}{4Q}$, existente

$$QQ=6t^4-\tfrac{41}{2}t^3+\tfrac{27}{2}tt-\tfrac{35}{2}t+\tfrac{25}{4}.$$

Iam, ad tres terminos vltimos tollendos, statuatur

$$Q=\tfrac{5}{2}-\tfrac{7}{2}t+\tfrac{1}{4}tt, \text{ eritque}$$

$$6t^4-\tfrac{41}{2}t^3=\tfrac{1}{16}t^4-\tfrac{7}{4}t^3 \text{ et } t=\tfrac{60}{19}$$

hincque $Q=\frac{4375}{722}$ et $\frac{v}{u}=\frac{19}{14}$, vnde $v=19$ et $u=14$. Nunc igitur erit $x=tv=60$; et $y=\frac{vv+uu}{x}=\frac{557}{60}$ ideoque $x+y=\frac{4157}{60}$ et tres numeri quaesiti:

$$\text{Primus} = \frac{60^2\cdot 557\cdot 4157\cdot 196}{60\cdot 60}mm = 14^2\cdot 60^2\cdot 557\cdot 4157$$

$$\text{Secundus} = \frac{60\cdot 557^2\cdot 4157\cdot 196}{60\cdot 60\cdot 60}mm = 14^2\cdot 557^2\cdot 4157$$

$$\text{Tertius} = \frac{361\cdot 60\cdot 557\cdot 4157^2}{60\cdot 60\cdot 60}mm = 19^2\cdot 557\cdot 4157^2$$

posito $m=60$: hique numeri iam notabiliter sunt minores quam ii, qui casu primo sunt inuenti.

13. Quoniam ergo hi numeri ob paruitatem attentione digni videntur, ii ita exhibeantur:

$$\text{Primus} = 705600\cdot 2315449$$

$$\text{Secundus} = 109172\cdot 2315449$$

$$\text{Tertius} = 1500677\cdot 2315449.$$

Quorum numerorum summa est $=2315449^2$, et productum $=14^4\cdot 19^2\cdot 60^2\cdot 557^4\cdot 4157^4$, sicque vterque numerus quadratus.

At summa productorum ex binis erit

$$(14^2\cdot 60^2\cdot 14^2\cdot 557+14^2\cdot 60^2\cdot 19^2\cdot 4157+14^2\cdot 557\cdot 19^2\cdot 4157)\,2315449^2$$

quae

quae reducitur ad hanc formam:

$$14^2\, 2315449^2 \cdot 6631333489$$

cuius radix quadrata est

$$14 \cdot 2315449 \cdot 81433.$$

Sunt autem hi numeri circiter 15000 vicibus minores, quam primum inuenti.

Casus 3. quo ponitur $r=3$.

14. Posito $r=3$, fit $\frac{v}{u}=\frac{6t-8}{Q}$, et habebitur haec aequatio resoluenda:

$$QQ = 12t^4 - 70t^3 + 84tt - 64t + 64.$$

Iam ad ternos vltimos terminos tollendos statuatur

$$Q = 8 - 4t + \tfrac{17}{4}tt \text{, eritque}$$

$$12t^4 - 70t^3 = \tfrac{289}{16}t^4 - 34t^3$$

vnde elicitur $t = -\frac{576}{97}$. et $Q = \pm\frac{8 \cdot 213601}{97 \cdot 97}$

Ergo $\frac{v}{u} = -\frac{97 \cdot 529}{213601} = -\frac{97 \cdot 23}{9287} = -\frac{23 \cdot 97}{37 \cdot 251}$.

ideoque $v = -23 \cdot 97$ et $u = 37 \cdot 251$: tum $x = tv = 23 \cdot 24^2$ et $y = \frac{9\ 225730}{23 \cdot 24^2}$. Verum facile perspicitur, hos numeros in immensum excrescere, vnde iis euoluendis supersedemus. Contemplemur ergo adhuc vnum casum, quo tam primus, quam vltimus terminus formulae QQ fiunt quadrati.

Casus 4. quo ponitur $r=9$.

15. Posito $r=9$, fit $\frac{v}{u}=\frac{18t-80}{Q}$, existente

$$QQ = 36t^4 - 538t^3 + 1716tt - 520t + 1600$$

Tollamus terminos primum et duos vltimos, ponendo

$$Q = 40 - \tfrac{13}{2}t \pm 6tt \text{, et habebimus}$$

$$-538t^3 + 1716tt = \mp 78t^3 \pm 480tt + \tfrac{169}{4}tt$$

vnde

vnde elicimus pro vtroque ſigno

ſuperiori $t = \frac{5 \cdot 191}{16 \cdot 23}$ } vtrinque autem prodeunt
inferiori $t = \frac{5 \cdot 1723}{32 \cdot 77}$ } numeri nimis magni.

Tollamus ergo tres terminos vltimos, ponendo

$$Q = 40 - \frac{13}{8} t + \frac{1339}{64} tt;$$

hinc autem numeri multo adhuc maiores reſultant. Poſſet porro pro binis terminis primis cum vltimo tollendis poni $Q = 6tt - \frac{269}{6} t \pm 40$, verum hinc multo minus ad numeros ſimpliciores perueniemus.

16. Ex his ſatis tuto concludi poſſe videtur, minimos numeros problemati ſatisfacientes eſſe eos, quos §. 13. elicuimus, qui ergo, ſi penitus per multiplicationem euoluantur, erunt:

Primus $= 1633780814400$.
Secundus $= 252782198228$.
Tertius $= 3474741058973$.

Sin autem in fractionibus numeri ſatisfacientes ſimpliciſſimi deſiderentur, ii indidem aſſignari poterunt, his per 2315449^2 diuidendis: ita vt hi numeri futuri ſint:

Primus $= \frac{705600}{2315449}$
Secundus $= \frac{196}{4157}$
Tertius $= \frac{161}{557}$.

quorum tam ſumma, quam ſumma productorum ex binis, et omnium trium productum, ſunt numeri quadrati.

THEOREMATA ARITHMETICA
NOVA METHODO DEMONSTRATA.

Auctore

L. EVLERO.

Praeter varias computandi operationes, quae vulgo in Arithmetica tradi solent, huiusque disciplinae quasi partem practicam constituunt, eiusdem pars Theoretica, quae in indaganda numerorum natura versatur, non minus iam olim tractari est coepta, quemadmodum ex *Euclide* et *Diophanto* intelligere licet, vbi insignes numerorum proprietates erutae reperiuntur ac demonstratae. Quo magis autem deinceps numerorum indolem et affectiones Mathematici sunt scrutati, multo plures eorum proprietates obseruauerunt, vnde pulcherrima Theoremata numerorum naturam illustrantia deriuauere, quae partim demonstrationibus sunt munita, partim etiam nunc iis indigent, siue quod eae ab auctoribus non sint inuentae, siue temporum iniuria deperditae: ex quo genere plurima passim occurrunt huiusmodi Theoremata numerica, quorum demonstrationes adhuc desiderantur, etiamsi eorum veritatem in dubium vocare non liceat. Atque hic insigne discrimen, quod inter Theoremata arithmetica et geometrica intercedit, non parum mirari debemus, quod vix vlla propositio geometrica proferri possit, quam non sit in promtu, siue veram, siue falsam, ostendere,

dum

dum contra multae circa numerorum naturam notae ſunt propoſitiones, quarum veritatem nobis agnoſcere, neutiquam vero demonſtrare liceat. Magna huiusmodi Theorematum copia a *Fermatio* relicta habetur, quorum demonſtrationes maximam partem ſe inueniſſe affirmauit, quas cum eius ſcriptis interiiſſe in eximium huius ſcientiae detrimentum non parum eſt dolendum. Quot autem talium Theorematum demonſtrationes vel ſunt cognitae, vel reſtitutae, in iis certe multo maior vis ingenii elucet, quam vix in vllo alio demonſtrationum genere deprehendimus; vnde in hoc negotio non tam vtilitas, qua ſcientia numerorum illuſtratur, eſt aeſtimanda, quam maxima ſubtilitas, qua huiusmodi demonſtrationes prae aliis diſtinguuntur. Atque ob hanc cauſam, cum iam ſaepius, quam plerisque aequum videri queat, in hoc genere laborauerim, operam mihi equidem non perdidiſſe videor, neque etiam nunc theoremata, quae hic propono, vtilitate caritura confido. Notatu imprimis dignum viſum eſt Theorema illud *Fermatii*, quo omnes numeros in hac formula $a^{p-1}-1$ contentos, ſemper diuiſibiles eſſe per numerum p, ſiquidem is fuerit primus, neque tamen a per eum diuiſionem admittat, affirmauit, cuius Theorematis iam geminam dedi demonſtrationem. Nunc autem idem in latiori ſenſu contemplor, atque in genere, ſi diuiſor non ſit numerus primus, ſed quicunque N, inueſtigo, cuiusmodi exponentem poteſtati cuicunque tribui oporteat, vt expreſſio $a^{n}-1$ ſemper ſit diuiſibilis per numerum N, dummodo numerus a cum eo nullum habeat diuiſorem communem. Inueni autem hoc ſemper vſu venire, quoties exponens n aequalis fuerit multitudini numerorum ipſo N minorum, qui ſint ad N primi. Ad hoc ergo demonſtrandum, ante omnia huiusmodi theorematibus eſt opus, ex quibus, propoſito numero quocunque N, cognoſci poſſit, quot inter numeros ipſo minores futuri ſint ad eum primi, ſeu qui nullum cum eo habeant communem diuiſorem; quae theoremata iam ipſa, multo ampliorem vſum habere, atque ad alias magis abſconditas numerorum proprietates aditum parere, videntur. Iis autem praemiſſis, demonſtratio veritatis propoſitae ita eſt comparata, vt maiore attentione non indigna videatur.

Theorema 1.

1. Si per numerum quemcunque n termini progreſſionis arithmeticae cuiuscunque, cuius differentia ſit numerus ad n primus, diuidantur, inter reſidua occurrent omnes numeri diuiſore n minores.

Demonſtratio.

Sit progreſſionis arithmeticae terminus primus $= a$, et differentia $= d$, quae ſit ad n numerus primus, ſeu quae cum numero n nullum praeter vnitatem habeat diuiſorem communem, ita vt progreſſio arithmetica futura ſit:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, \text{ etc.}$$

ac dico: ſi ſinguli termini per numerum n diuidantur, inter reſidua omnes numeros ipſo n minores occurrere.

Ad

Ad hoc demonſtrandum ſufficiet huius progreſſionis tantum n terminos conſideraſſe, qui ſunt:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots a+(n-1)d.$$

Quodſi ergo iſti termini ſinguli per n diuidantur, omnia reſidua inter ſe diuerſa eſſe oportet. Si enim duo termini, veluti $a+\mu d$ et $a+\nu d$, exiſtentibus μ et ν numeris ipſo n minoribus, per n diuiſi paria praeberent reſidua, eorum differentia $(\nu-\mu)d$ vtique per n eſſet diuiſibilis. Cum autem numeri d et n nullum habeant diuiſorem communem, neceſſe eſſet, vt $\nu-\mu$ diuiſionem per n admitteret; id quod eſſet abſurdum, ob $\nu-\mu < n$. Quare cum omnia illa reſidua ſint diverſa, eorumque numerus, vtpote terminorum numero aequalis, ſit $= n$, in iis omnes plane numeri ipſo n minores occurrent, ſcilicet:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots (n-1)$$

ſiquidem differentia progreſſionis d ſit numerus ad diuiſorem propoſitum n primus. Q. E. D.

Coroll. 1.

2. Inter terminos ergo progreſſionis arithmeticae cuiuscunque, quorum numerus eſt n, dummodo differentia eius ad n ſit numerus primus, certe reperitur vnus, qui per n eſt diuiſibilis: tum vero etiam aderit vnus, qui per n diuiſus datum reſiduum r relinquit.

Coroll. 2.

3. Si ergo numerus d ad n fuerit primus, ſemper numerus huius formae $a+\nu d$ exhiberi poteſt,

existente a numero quocunque et ν minore quam n, qui per numerum n sit diuisibilis, atque etiam sub iisdem conditionibus semper talis dabitur numerus $a+\nu b$, qui per n diuisus datum relinquat residuum r.

Coroll. 3.

4. Datis igitur numeris a et d, quorum hic d ad n sit primus, semper inuenire licet numeros μ et ν, vt aequationi huic: $a+\nu d=\mu n$, vel etiam huic: $a+\nu d=\mu n+r$ satisfiat, quicunque numerus minor quam n pro r assumatur.

Scholion.

5. Quod de progressionis arithmeticae terminorum numero n demonstrauimus, id de tota progressione in infinitum continuata valet: termini enim, qui post illos n terminos sequuntur, eadem ordine reproducunt residua, si per n diuidantur. Ita terminorum post $a+(n-1)d$ sequentium, qui sunt $a+nd$, $a+(n+1)d$; $a+(n+2)d$ etc. per n diuisorum residua, conueniunt cum residuis ex terminis initialibus a, $a+d$, $a+2d$, etc. natis. Atque si tota series in infinitas periodos distribuatur, cuique n terminos tribuendo, hoc modo:

$$a, a+b \ldots a+(n-1)b \,|\, a+nb \ldots a+(2n-1)b \,|\, a+2nb \ldots a+(n-1)b \,|$$

termini cuiuslibet periodi eadem praebebunt residua, eodemque ordine disposita; omnium enim periodorum termini cum primi, tum secundi, et tertii etc. constanter paria dabunt residua. Quare si rationem residuorum

duorum cognoſcere velimus, ſufficit vnicam periodum examinaſſe.

Theorema 2.

6. In progreſſione arithmetica, cuius terminorum numerus eſt $= n$, totidem termini erunt ad numerum n primi, quot inter numeros ipſo n minores dantur ad n primi, dummodo differentia progreſſionis fuerit ad n numerus primus.

Demonſtratio.

Sit enim a terminus primus, et d differentia progreſſionis, quae ſit ad n numerus primus, ideoque ipſa progreſſio n continens terminos:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots\ldots a+(n-1)d.$$

Quoniam igitur, ſi hi termini per numerum n diuidantur, inter reſidua occurrunt omnes plane numeri ipſo n minores; ponamus ex termino quocunque $a+\nu d$ reſultare reſiduum r, ac manifeſtum eſt, ſi r fuerit numerus ad n primus, illum quoque terminum $a+\nu d$ ad n fore primum, ſin autem r cum n habeat quempiam diuiſorem communem, idem quoque erit diuiſor communis numerorum n et $a+\nu d$. Quare quot inter numeros ipſo n minores fuerint numeri ad n primi, totidem quoqne inter terminos progreſſionis arithmeticae propoſitae habebuntur numeri ad n primi. Q. E. D.

Coroll. 1.

7. Si n fuerit numerus primus, quia omnes numeri, ipſo minores, ad ipſum quoque ſunt primi,

quorum

quorum numerus ergo eſt aequalis $= n - 1$; in illa etiam progreſſione arithmetica omnes termini praeter vnum erunt ad n primi, quippe vnus per n eſt diuiſibilis.

Coroll. 2.

8. Sin autem n fuerit numerus compoſitus, inter numeros ipſo minores dabuntur quipiam, qui cum eo diuiſorem habeant communem; totidemque vero etiam reperientur in progreſſione arithmetica, quibus iidem communes diuiſores cum n conueniant.

Coroll. 3.

9. Ita ſi ſit $n = 6$, quia inter numeros ſenario minores ſunt duo ad 6 primi, ſcilicet 1 et 5; in omni progreſſione arithmetica 6 terminorum:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d$$

duo tantum erunt ad 6 primi, dummodo differentia d ſit ad 6 numerus primus. Ita ſi capiatur $a = 4$; $d = 5$, horum ſex numerorum 4, 9, 14, 19, 24, 29, duo, ſcilicet 19 et 29, ad 6 ſunt primi, vnus 24 per 6 diuiſibilis, reliqui vero 4, 9, 14 ad 6 compoſiti perinde ac 2, 3, 4.

Scholion.

10. Haec Theoremata in doctrina et contemplatione naturae numerorum inſignem habent vſum, hic autem ea ſolum adhibere viſum eſt ad hanc quaeſtionem enodandam: *Propoſito numero quocunque* n, *quot inter numeros ipſo minores futuri ſint ad eundem numerum*

rum n *primi*? Statim quidem patet ſi n ſit numerus primus, omnes numeros ipſo minores ſimul ad eum fore primos, eorumque idcirco numerum eſſe $= n-1$. Verum ſi n ſit numerus compoſitus, multitudo numerorum ipſo minorum ad eumque primorum eſt minor, quanta autem ſit quouis caſu, non tam facile aſſignari poteſt. Ita, ſi ſit $n=12$, inter numeros minores tantum quatuor reperiuntur ad 12 primi, ſcilicet 1, 5, 7, 11: et ſi ſit $n=60$, numeri minores ad eum primi ſunt:

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59

quorum numerus eſt 16: vnde reliqui 43 omnes cum 60 diuiſores habent communes. Moneri hic conuenit, vnitatem ad omnes plane numeros eſſe numerum primum, etiamſi omnium ſit diuiſor; id quod ex definitione eſt euidens, qua numeri dicuntur eſſe inter ſe primi, qui praeter vnitatem alium nullum agnoſcunt diuiſorem.

Theorema 3.

11. Si n ſit poteſtas quaecunque numeri primi p, ſeu $n=p^m$, inter numeros ipſo minores tot erunt ad eum primi, quot vnitates continentur in $p^m - p^{m-1} = p^{m-1}(p-1)$.

Demonſtratio.

Multitudo omnium numerorum poteſtate $n=p^m$ minorum eſt p^m-1, inter hos autem reperiuntur quidam, qui ad n non ſunt primi, omnia ſcilicet ipſius p multipla, minora quam n, nullique alii praeterea: ex quo ſequentes numeri ad n non erunt primi:

$$p,\ 2p,\ 3p,\ 4p \;------\; p^m-p$$

 quo-

quorum numerus eſt $p^{m-1}-1$; quo ablato a numero omnium ipſo $n=p^m$ minorum, relinquitur multitudo eorum, qui ad p^m ſunt primi, quorum numerus itaque eſt $=p^m-p^{m-1}=p^{m-1}(p-1)$. Q. E. D.

Coroll. 1.

12. Hinc igitur primo ſequitur, id quod per ſe eſt manifeſtum, ſi ſit $n=p$ exiſtente p numero primo, numerum omnium numerorum ipſo minorum ad eumque primorum eſſe $=p-1$, ſiquidem omnes numeri ipſo minores ſimul ſunt ad eum primi.

Coroll. 2.

13. At ſi ſit $n=p^2$, inter numeros ipſo minores, multitudo eorum, qui ad eum ſunt primi, eſt $=pp-p=p(p-1)$; reliqui, quorum numerus eſt $p-1$, ad $n=p^2$ erunt compoſiti, ſeu per p diuiſibiles.

Coroll. 3.

14. Propoſita autem numeri primi poteſtate quacunque $n=p^m$, inter numeros ipſo minores, quorum multitudo eſt $=p^m-1$, reperiuntur $p^{m-1}-1$, qui ſunt per p diuiſibiles, ideoque ad p^m non primi: reliqui vero omnes, quorum numerus eſt $=p^m-p^{m-1}=p^{m-1}(p-1)$ ad p^m ſunt primi.

Scholion.

15. Si ergo numerus propoſitus n fuerit poteſtas cuiuspiam numeri primi, ope huius regulae aſſignare

pote-

poterimus, quot inter omnes numeros ipſo minores futuri ſint ad eum primi. Quando autem numerus n, ex duobus pluribusue numeris primis fuerit conflatus, hinc nondum iſta quaeſtio confici poteſt: praecedentibus autem Theorematibus adhibendis iſtam quaeſtionem latius patentem reſoluere poterimus.

Theorema 4.

16. Si numerus n ſit productum duorum numerorum primorum p et q, ſeu $n = pq$, multitudo omnium numerorum ipſo minorum ad eumque primorum eſt $= (p-1)(q-1)$.

Demonſtratio.

Cum numerus omnium numerorum ipſo $n = pq$ minorum ſit $pq-1$, hinc primum ii debent excludi, qui per p ſunt diuiſibiles, deinde vero etiam ii, qui per q, hisque deletis relinquetur multitudo quaeſita. Notentur ergo ab vnitate vsque ad pq numeri, qui ſunt ad p primi, hoc modo:

$$\begin{array}{cccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & \cdots & p-1 \\
p+1, & p+2, & p+3, & p+4 & \cdots & 2p-1 \\
2p+1, & 2p+2, & 2p+3, & 2p+4 & \cdots & 3p-1 \\
3p+1, & 3p+2, & 3p+3, & 3p+4 & \cdots & 4p-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(q-1)p+1; & (q-1)p+2, & (q-1)p+3, & (q-1)p+4 & \cdots & pq-1
\end{array}$$

atque iam ex his ii tantum eligi debent, qui ſimul quoque ad q ſunt primi. Conſiderentur ergo ſeries verticales, quarum numerus eſt $p-1$; quaelibet autem continet q terminos in arithmetica progreſſione creſcentens, differentia exiſtente p, quae eſt ad q numerus primus. In qualibet ergo ſerie verticali omnes termini praeter vnum ad q erunt primi (per §. 7.); vnde vnaquaeque ſeries verticalis continet $q-1$ numeros ad q primos Quare cum numerus ſerierum verticalium ſit $p-1$, in omnibus continentur ſimul $(p-1)(q-1)$ numeri ad q primi, iidemque igitut etiam ad productum pq erunt primi; conſequenter inter omnes numeros ipſo pq minores reperientur $(p-1)(q-1)$ numeri ad pq primi. Q. E. D.

Coroll. 1.

17. Cum multitudo omnium numerorum ipſo producto pq minorum ſit $pq-1$, inter eos ſemper ſunt $(p-1)(q-1)=pq-p-q+1$ primi ad pq, reliqui vero, quorum numerus eſt $p+q-2$, ad eum ſunt compoſiti, ſeu cum eo communem habent diuiſorem vel p, vel q.

Coroll. 2.

18. Hoc etiam inde patet, quod inter numeros ipſo producto pq minores ſint $q-1$ numeri per p diviſibiles, ſcilicet:

$$p, 2p, 3p, 4p \; \dots\dots \; (q-1)p$$

deinde inter eosdem ſunt $p-1$ numeri per q diuiſibiles, nempe:

$$q, 2q, 3q, 4q \; \dots\dots \; (p-1)q$$

qui cum ab illis omnes ſint diuerſi, omnino habentur

$(q-1)$

$(q-1)+(p-1)=p+q-2$ numeri, qui ad pq non ſunt primi.

Coroll. 3.

19. Si ergo quaeratur, quot ab 1 vsque ad 15 ſint numeri ad 15 primi? ob $p=3$ et $q=5$, regula docet eorum numerum eſſe $2.4=8$, quippe qui ſunt 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14. Simili modo ab 1 ad 35 ob $p=5$ et $q=7$, multitudo numerorum ad 35 primorum eſt $4.6=24$, hique numeri ſunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34.

Scholion.

20. Quoniam hic quaeſtio eſt de numeris, qui ad quempiam numerum ſint primi, eoque minores, eos commode partes ad iſtum numerum primas appellare licebit. Ita ſi numerus propoſitus fuerit primus $=p$, numerus partium ad eum primarum eſt $=p-1$: ſi numerus propoſitus ſit poteſtas quaecunque numeri primi $=p^n$, numerus partium ad eum primarum erit $=p^n-p^{n-1}=p^{n-1}(p-1)$: at ſi numerus propoſitus ſit productum duorum numerorum minorum diſparium $=pq$, numerus partium ad eum primarum eſt $=(p-1)(q-1)$, hocque modo ambages in loquendo contrahemus. Simili modo demonſtrare poſſemus, ſi numerus propoſitus ſit productum ex tribus numeris primis diſparibus $=pqr$, numerum partium ad eum primarum fore $=(p-1)(q-1)(r-1)$: hocque adeo ad productum plurium extendere liceret. Verum ſequens propoſitio omnes hos caſus in ſe complectetur.

Theorema 5.

21. Si ſint A et B numeri inter ſe primi, et numerus partium ad A primarum ſit $=a$, numerus vero partium ad B primarum ſit $=b$; tum numerus partium ad productum AB primarum erit $=ab$.

Demonſtratio.

Sint $1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \omega$ numeri illi ipſo A minores ad eumque primi, ſeu partes ad A primae, quarum igitur partium numerus per hypotheſin eſt $=a$. Totidem ergo erunt numeri ad A, itidem primi erunt ab A ad 2A, item a 2A ad 3A, et ita porro. Hoc modo exhiberi poterunt omnes numeri ad A primi ab vnitate vsque ad numerum propoſitum AB, quos ſequens ſchema exhibebit:

$$\begin{array}{ccccc}
1, & \alpha, & \beta, & \ldots\ldots & \omega \\
A+1, & A+\alpha, & A+\beta & \ldots\ldots & A+\omega \\
2A+1, & 2A+\alpha, & 2A+\beta & \ldots\ldots & 2A+\omega \\
3A+1, & 3A+\alpha, & 3A+\beta & \ldots\ldots & 3A+\omega \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(B-1)A+1, & (B-1)A+\alpha, & (B-1)A+\beta, & \ldots & (B-1)A+\omega.
\end{array}$$

Hic ſingulae ſeries horizontales continent a terminos, numerusque omnium ſerierum horizontalium eſt $=B$; vnde omnes ſeries iunctim offerunt aB terminos, qui iam omnes ad A erunt primi. Inde ergo adhuc excludi debent ii, qui ad B non ſunt primi, vt hoc modo relinquantur, qui non ſolum ad A, ſed etiam ad B, ideoque ad ipſum productum AB, ſint primi, ſeu

ex

ex his ſeriebus ii tantum termini numerari debent, qui etiam ad B ſint primi. Hunc in finem conſideremus ſeries verticaliter; et cum numerus ſerierum verticalium ſit $= a$, quaelibet ſeries verticalis continebit B terminos in arithmetica progreſſione auctos, quorum differentia cum ſit $=$ A, ideoque numerus ad B primus, per Theor. II. quaelibet ſeries verticalis tot continebit terminos ad B primos, quot dantur partes ad numerum B primae; eorum ergo numerus eſt per hypotheſin $= b$. Cum igitur ſingulae ſeries verticales contineant b terminos ad B primos, qui propterea etiam erunt ad productum AB primi, numerus omnium terminorum ad AB primorum, hoc eſt partium ad hunc numerum AB primarum erit $= ab$. Q. E. D.

Coroll. 1.

22. Si inſuper tertius numerus C adiiciatur, qui ſit ad vtrumque praecedentium A et B, ſeu ad eorum productum AB primus, et numerus partium ad C primarum ſit $= c$; tum numerus partium ad productum ABC primarum erit $= abc$. Productum enim AB conſiderari poteſt tanquam vnus numerus, cuius partium ad eum primarum ſit $= ab$; et quia C ad AB eſt primus, Theorema hic habet locum.

Coroll. 2.

23. Cum igitur vnusquisque numerus N reſolui poſſit in factores inter ſe primos, qui ſinguli ſint vel ipſi numeri primi, vel poteſtates primorum, ope huius regulae multitudo partium ad numerum quemcunque N primarum aſſignari poterit.

Coroll. 3.

Coroll. 3.

24. Exiſtentibus ſcilicet p, q, r, s, etc. numeris primis, omnis numerus N in huiusmodi forma $N = p^\lambda q^\mu, r^\nu, s^\xi$ comprehendetur; vnde numerus partium ad N primarum erit:

$$p^{\lambda-1}(p-1).\ q^{\mu-1}(q-1).\ r^{\nu-1}(r-1).\ s^{\xi-1}(s-1).$$

Coroll. 4.

25. Pro formis igitur numerorum ſimplicioribus multitudo partium ad eos primarum ita ſe habebit:

numerus propoſitus	multitudo partium ad eum primarum
p	$p-1$
pp	$p(p-1)$
pq	$(p-1)(q-1)$
p^3	$pp(p-1)$
p^2q	$p(p-1)(q-1)$
pqr	$(p-1)(q-1)(r-1)$
p^4	$p^3(p-1)$
p^3q	$p^2(p-1)(q-1)$
p^2q^2	$p(p-1)q(q-1)$
p^2qr	$p(p-1)(q-1)(r-1)$
$pqrs$	$(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)$
p^5	$p^4(p-1)$
p^4q	$p^3(p-1)(q-1)$
p^3q^2	$p^2(p-1)q(q-1)$
p^3qr	$p^2(p-1)(q-1)(r-1)$
p^2q^2r	$p(p-1)q(q-1)(r-1)$
p^2qrs	$p(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)$
$pqrst$	$(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)(t-1)$

num. prop.	mult. part. ad eum prim.
2	1
3	2
4	2
5	4
6	2
7	6
8	4
9	6
10	4
11	10
12	4
13	12
14	6
15	8
16	8
17	16
18	6
19	18
20	8
21	12
22	10
23	22
24	8
25	20

Coroll.

Coroll. 5.

26. Hinc igitur propofito numero quocunque multitudo partium ad eum primarum expedite definietur. Veluti, fi proponatur 360, cum fit $360 = 2^3 . 3^2 . 5$, erit multitudo partium ad 360 primarum $= 4 . 6 . 4 = 96$.

Scholion.

27. Haec circa multitudinem partium ad numerum quemuis primarum pro praefenti inftituto fufficere poffunt. Interim tamen circa ipfas partes ad quemuis numerum primas haec notaffe iuuabit: fi numerus propofitus fuerit N, atque inter partes ad eum primas occurrat numerus α, ibidem quoque occurret numerus $N - \alpha$; quoniam, exiftente α ad N primo, etiam $N - \alpha$ erit ad N primus. Hinc pro quouis numero partes tantum eius femiffe minores inueniffe fufficiet, cum reliquae fint earum complementa ad ipfum numerum N. Simili modo, fi N fit numerus par, inter partes ad N primas etiam occurret $\frac{1}{2}N - \alpha$, tum etiam $\frac{1}{2}N + \alpha$. Item fi N fit diuifibilis per numerum quemcunque n, inter partes ad eum primas quoque occurrent hi numeri:

$$\tfrac{1}{n}N \pm \alpha;\ \tfrac{2}{n}N \pm \alpha;\ \tfrac{3}{n}N \pm \alpha \ldots \tfrac{(n-1)}{n}N \pm \alpha, \text{et } N - \alpha$$

hincque multo facilius ipfae partes iftae actu exhiberi poterunt.

Theorema 6.

28. Si numerus x fuerit primus ad N, tum omnes poteftates ipfius x per N diuifae relinquent refidua, quae erunt ad numerum N prima.

Demonstratio.

Cum enim x ſit numerus ad N primus, omnes eius poteſtates erunt quoque ad N primae, ideoque ſi per N diuidantur, reſidua etiam ad N erunt numeri primi. Q. E. D.

Coroll. 1.

29. Inter reſidua ergo poteſtatum ipſius x per N diuiſarum alii numeri non occurrunt, niſi qui ſint partes ad N primae; quarum numerus cum ſit pro indole numeri N determinatus, innumerabiles exiſtent poteſtates ipſius x, quae per N diuiſae aequalia relinquunt reſidua.

Coroll. 2.

30. Inter reſidua autem iſta ex diuiſione poteſtatum ipſius x per numerum N orta ſemper reperietur vnitas, propterea quod inter poteſtates ipſius x etiam referri debet $x^0 = 1$. Vtrum autem praeter vnitatem etiam omnes reliquae partes ad N primae inter reſidua occurrant, nec ne? mox videbimus.

Coroll. 3.

31 Si pro x capiatur vnitas, omnia reſidua erunt vnitates, quicunque numerus pro N fuerit aſſumtus. Deinde ſi ſumatur $x = N - 1$, qui numerus ad N etiam eſt primus, in reſiduis, ex diuiſione poteſtatum $(N-1)^0$, $(N-1)^1$, $(N-1)^2$, $(N-1)^3$, etc. ortis, nonniſi duo reperientur diuerſa, ſcilicet 1 et $N-1$, quae continuo ſe alternatim excipiunt.

Coroll. 4.

Coroll. 4.

32. Prout igitur numerus x ratione ad N fuerit comparatus, vtique fieri poteſt, vt inter reſidua omnium poteſtatum ipſius x non omnes partes ad diuiſorem N primae occurrant.

Coroll. 5.

33. Si ergo omnes partes ad numerum N primae ſint $1, a, b, c, d, e, \ldots\ldots$ quarum numerus ſit $= n$, inter reſidua memorata, vel omnes iſtae partes occurrent, vel quaedam tantum, inter quas autem ſemper vnitas reperietur.

Coroll. 6.

34. Quodſi non omnes illae partes in reſiduis ex diuiſione poteſtatum ipſius x per numerum N relictis occurrant, illae partes in duas claſſes diſtribuentur, quarum altera continebit partes in reſiduis occurrentes, altera vero partes in reſiduis non occurrentes.

Theorema 7.

Si ſeries poteſtatum $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4\ x^5$, etc. per numerum N, qui ad x ſit primus, diuidatur, eousque reſidua prodibunt diuerſa, donec perueniatur ad poteſtatem, quae iterum vnitatem pro reſiduo praebeat.

Demonſtratio.

Quoniam ſerie poteſtatum $1, x, x^2, x^3, x^4$, etc. in infinitum continuata, omnia reſidua diuerſa eſſe nequeunt, neceſſe eſt, vt tandem quodpiam ex praecedentibus residuis redeat; ac dico: vnitatem esse id residuum, quod omnium primum sit rediturum. Quod si quis neget, sit x^{μ} ea potestas, cuius residuum primum in sequentibus ex potestate $x^{\mu+\nu}$ redeat; cum igitur potestates x^{μ} et $x^{\mu+\nu}$ aequalia praebeant residua, earum differentia $x^{\mu+\nu}-x^{\mu}=x^{\mu}(x^{\nu}-1)$ per numerum N erit diuisibilis. Verum producti $x^{\mu}(x^{\nu}-1)$ factor prior ad N est numerus primus, ergo alter $x^{\nu}-1$ per N diuisibilis sit necesse est. Hinc autem potestas x^{ν} per N diuisa residuum daret $=1$, sicque vnitas inter sequentia redua citius redibit, quam residuum potestatis x^{μ}, quippe quod per hypothesin demum in potestate altiore $x^{\mu+\nu}$ recurrit. Ex quo euidens, nullum residuum iterum occurrere posse, nisi ante vnitas inter residua redierit. Q. E. D.

Coroll. 1.

36. Postquam diuisio terminorum seriei 1, x, x^2, x^3, x^4, etc. per numerum N ad x primum ab initio dedit residua diuersa, puta 1, α, β, γ etc. tandem iterum occurret primum residuum 1; quod si oriatur ex potestate x^{ν}, numerus praecedentium residuorum diuersorum erit $=\nu$.

Coroll. 2.

37. Quando autem potestas x^{ν} residuum dat 1, idem quod primus terminus x^0, potestas sequens $x^{\nu+1}$ idem dabit residuum quod x^1; et sequentium quaecunque $x^{\nu+\mu}$ idem quod potestas x^{μ}. Cum enim differentia

rentia $x^{\nu+\mu} - x^{\mu} = x^{\mu}(x^{\nu} - 1)$ ſit diuiſibilis per N, neceſſe eſt, vt ambo termini $x^{\nu+\mu}$ et x^{μ} per N diuiſi idem praebeant reſiduum.

Coroll. 3.

38. Cum poſt poteſtatem x^{ν} eadem reſidua 1, α, β, γ etc. ordine recurrant, poteſtas $x^{2\nu}$, ſimilique modo poſt eam poteſtates $x^{3\nu}$, $x^{4\nu}$, $x^{5\nu}$ etc. omnes per N diuiſae idem reſiduum 1 relinquent. Quin etiam omnes poteſtates x^{μ}, $x^{\mu+\nu}$, $x^{\mu+2\nu}$, $x^{\mu+3\nu}$, $x^{\mu+4\nu}$ etc. aequalia reſidua ſuppeditabunt.

Coroll. 4.

39. Si igitur x^{ν} fuerit infima poteſtas, quae poſt $x^{0} = 1$ iterum vnitatem pro reſiduo praebeat, numerus diuerſorum reſiduorum erit ν. Cum ergo numerus partium ad numerum N primarum ſit $= n$, fieri certe nequit, vt ſit $\nu > n$: erit ergo vel $\nu = n$, vel $\nu < n$.

Coroll. 5.

40. Si ergo ſeries poteſtatum 1, x, x^2, x^3, etc. vsque ad x^n continuetur, inter eas certe vna ſaltem reperietur praeter primum terminum 1, quae per N diuiſa vnitatem relinquat. Plures fortaſſe huiusmodi poteſtates aliquando, ſed pauciores vna nunquam exiſtent.

Scholion.

41. Reſidua proprie ſemper ſunt numeri minores diuiſore N, ſed nihil impedit, quo minus numeros

etiam maiores tanquam residua spectemus, cuiusmodi relinquuntur, si quotus nimis paruus accipiatur. Ita si in diuisione cuiuspiam numeri per N relinquatur $N+\alpha$, hoc residuum aequiualens ipsi α censeri debet; hincque, si de residuis sermo sit, omnes hi numeri α, $N+\alpha$, $2N+\alpha$, $3N+\alpha$, etc. instar vnius residui α sunt considerandi. Scilicet multipla quaecunque diuisoris N siue adiecta, siue demta a quopiam residuo α eius naturam non mutant, atque hoc modo etiam numeri negatiui commode inter residua referuntur; veluti $\alpha-N$ pro eodem residuo est habendum ac α; et residuum -1 aequiualet residuo $N-1$. Ex his conficitur, omnes numeros, qui per N diuisi idem exhibeant residuum α, pro eodem residuo haberi posse, ex quo enim numero per diuisionem quotum nimis paruum sumendo oritur residuum vel $N+\alpha$, vel $2N+\alpha$, vel $3N+\alpha$ etc. ex eodem, quotum plenum sumendo, nascitur residuum α; tum vero indidem, si quotus capiatur nimis magnus, obtinebuntur residua negatiua $\alpha-N$, vel $\alpha-2N$, vel $\alpha-3N$ etc. quae ergo etiam ab α non discrepare sunt censenda.

Thorema 8.

42. Si dum termini progressionis 1, x, x^2, x^3, x^4, etc per numerum N ad x primum diuidantur, residua fuerint 1, a, b, c, etc. in iisdem quoque occurrent tam singulorum omnes potestates, quam producta quaecunque vel binorum, vel ternorum, vel quotlibet in se multiplicatorum.

Demon-

Demonſtratio.

Naſcantur reſidua a, b, c etc. ex poteſtatibus x^{α}, x^{β}, x^{γ} etc. ac numeros etiam maiores quam N in reſiduis admittendo, ex poteſtatibus $x^{2\alpha}$, $x^{3\alpha}$, $x^{4\alpha}$ etc. orientur reſidua a^2, a^3, a^4 etc. quae igitur etiam in ſerie reſiduorum 1, a, b, c etc. continebuntur. Tum vero poteſtates $x^{\alpha+\beta}$, $x^{\alpha+\gamma}$, $x^{\alpha+\beta+\gamma}$ etc. relinquent reſidua ab, ac, abc etc. quae ergo etiam in ſerie reſiduorum inueniri debebunt. Producta igitur, quomodocunque ex reſiduis 1, a, b, c etc. per multiplicationem formata, omnia in eadem ſerie reſiduorum occurrent, ſi quidem ſingula per ablationem diuiſoris N, quoties id fieri poteſt, ad minimam formam reducantur Q. E. D.

Coroll. 1.

43. Haec indoles reſiduorum eo clarius eluceret, ſi eorum loco ipſae illae poteſtates ipſius x, vnde ſunt orta, ſubſtituantur; tum enim manifeſto non ſolum omnes poteſtates harum poteſtatum, ſed etiam earum producta quaecunque, in reſiduis occurrunt.

Coroll. 2.

44. Neque tamen ideo numerus reſiduorum indeterminatus euadit; quemadmodum enim iam vidimus, ex innumeris poteſtatibus paria reſidua prouenire, ita, ſi omnia haec reſidua, ex mutua multiplicatione nata, ad formam minimam reducantur, ad multitudinem modicam reuocabuntur.

Coroll.

Coroll. 3.

45. Ita ſi minima poteſtas, quae per N diuiſa iterum vnitatem relinquit, fuerit x^ν, ita vt numerus reſiduorum 1, a, b, c, etc. ſit $=\nu$, tum in eodem numero omnia producta, ex multiplicatione numerorum a, b, c, etc. nata, continebuntur, ſi quidem ab iis diuiſor N toties, quoties fieri poteſt, auferatur.

Scholion.

46. Vnicum exemplum omnibus dubiis, quae forte circa hanc apparentem reſiduorum multitudinem naſci poſſunt, ſoluendis ſufficiet. Sit igitur $x=2$, et pro diuiſore ſumatur $N=15$, qui ſcilicet ad 2 ſit primus; iam ſingulae binarii poteſtates per 15 diuiſae, ſequentia relinquent reſidua

pot. $1;\ 2;\ 2^2;\ 2^3;\ 2^4;\ 2^5;\ 2^6;\ 2^7;\ 2^8;\ 2^9;\ 2^{10};$ etc.
reſ. $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 1;\ 2;\ 4;$ etc.

Poteſtas igitur, quae primum vnitatem reproducit, eſt 2^4, a qua reſidua continuo eodem ordine 1, 2, 4, 8 repetuntur, ita vt tantum quaterna reſidua diuerſa occurrant. Hic iam manifeſtum eſt, quomodocunque haec reſidua in ſe inuicem multiplicentur, nunquam numeros inde produci, qui non in eodem quaternione includantur; poſtquam ſcilicet ablatione diuiſoris 15 ad formam minimam fuerint reuocata. In hoc quoque exemplo inter reſidua non omnes partes ad 15 primae occurrunt, ſed inde excluduntur iſtae partes 7, 14, 13, 14, quae pariter ad 15 ſunt primae; vnde diſtributio ſupra

ſupra facta inter partes ad diuiſorem primas, quae in reſiduis occurrunt, et quae non occurrunt, illuſtratur, ad quam potiſſimum in ſequentibus probe reſpiciatur.

Thorema 9.

47. In reſiduis ex diuiſione poteſtatum cuiuspiam numeri per diuiſorem ad eum primum relictis, vel omnes partes ad diuiſorem primae occurrunt, vel numerus partium non occurrentium aequalis erit, vel rationem tenebit multiplam ad numerum partium, quae reſidua conſtituunt.

Demonſtratio.

Sit ſeries poteſtatum 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 etc. et diuiſor N ad x primus, cuius partium ad ipſum primarum numerus ſit $= n$. Sit porro x^ν minima poteſtas, quae per N diuiſa iterum vnitatem relinquit, ita vt numerus omnium diuerſorum reſiduorum ſit $= \nu$, quae cum omnia ſint ad N numeri primi, eorum numerus erit vel $= n$, vel minor; priorique caſu inter reſidua vtique omnes partes ad N primae occurrent. Conſideremus igitur caſum, quo $\nu < n$, ſintque $1, a, b, c, d$, etc. omnia reſidua ex diuiſione poteſtatum

$$1, x, x^2, x^3, x^4 \ldots\ldots x^{\nu-1}$$

per diuiſorem N relicta, quorum numerus cum ſit $= \nu$, non omnes partes ad N primae ibi occurrent. Sit igitur α huiusmodi pars in reſiduis non occurrens, ac demonſtrari poteſt, nullum quoque horum numerorum αa, αb, αc, αd etc. in reſiduis occurrere. Nam ſi

αa esset residuum potestati x^λ respondens, quia a est quoque residuum ex quapiam potestate, puta x^ς, ortum, foret $x^\lambda = AN + \alpha a$, et $x^\varsigma = BN + a$, ideoque $x^\lambda - \alpha x^\varsigma = (A - \alpha B)N$ per N diuisibile. Cum autem x^ς ad N sit numerus primus, et $x^\lambda - \alpha x^\varsigma = (x^{\lambda - \varsigma} - \alpha)$, numerus $x^{\lambda - \varsigma} - \alpha$ esset per N diuisibilis, sicque potestas $x^{\lambda - \varsigma}$ per N diuisa relinqueret residuum α, contra hypothesin. Cum igitur α, αa, αb, αc, etc. quorum numerus est $= \nu$, sint numeri ad N primi, atque diuisione per N ad partes ad N primas reuocari possint, statim atque vna pars α ad N prima in residuis non reperitur, simul quoque ν eiusmodi partes assignari possunt in residuis non occurrentes. Numerus ergo partium non occurrentium, nisi sit nullus, ad minimum est $= \nu$, ac si praeterea fuerit pars ad N prima β in his non residuis non contenta, denuo habebuntur ν partes nouae in residuis non occurrentes; sicque porro. Quare si non omnes partes ad diuisorem N primae in residuis occurrant, numerus partium non occurrentium necessario est vel $= \nu$, vel $= 2\nu$, vel $= 3\nu$, vel alii cuipiam multiplo ipsius ν, hoc est numeri diuersorum residuorum. Q. E. D.

Coroll. 1.

48. Constituto ergo discrimine inter partes ad diuisorem N primas eas quae sunt residua, et eas quae non sunt residua, ex demonstratione patet, productum ex residuo et non-residuo in classe non-residuorum semper contineri. Ita si a sit residuum, α non-residuum, productum αa certe non erit residuum.

Coroll.

Coroll. 2.

49. Contra autem iam ſupra vidimus productum ex duobus pluribusue reſiduis in claſſe reſiduorum reperiri. Vnde ſequitur ex vno non-reſiduo et quotcunque reſiduis in claſſe non-reſiduorum occurrere debere.

Scholion.

50. Vis huius demonſtrationis iſto nititur fundamento, quod ſi inter reſidua occurrant partes $1, a, b, c, d$, etc. ad diuiſiorem primae, atque α fuerit etiam pars ad diuiſiorem prima in his reſiduis non contenta, tum producta omnia αa, αb, αc, αd, etc. non ſolum in reſiduis non occurrere, quod quidem perfecte eſt demonſtratum, ſed etiam ea eſſe partes ad diuiſorem N primas, omnesque inter ſe diuerſas; ſeu ſi ea per N, actu diuidantur, relinqui reſidua diuerſa. Illud quidem per ſe eſt perſpicuum; cum enim tam α, quam a, b, c, d, etc. ſint numeri ad N primi, etiam eorum producta ad N prima ſint neceſſe eſt. Quod autem producta αa, αb, αc, αc, etc. ſint omnia ad N relata inter ſe diuerſa, intelligitur, quod ſi verbi gratia duo αa et αb per N diuiſa paria darent reſidua, eorum differentia $\alpha b - \alpha a = \alpha(b-a)$ per N eſſet diuiſibilis, ideoque et $b-a$; id quod hypotheſi, quod a et b ſint diverſae partes ad N primae, repugnat.

Theorema 10.

51. Exponens minimae poteſtatis x^ν, quae per numerum N ad x primum diuiſa vnitatem relinquit,

vel eſt aequalis numero partium ad N primarum, vel huius numeri ſemiſſis, aliaue eius pars aliquota.

Demonſtratio.

Sit n numerus partium ad N primarum, quarum cum ν conſtituant reſidua, erit numerus non-reſiduorum $= n - \nu$. Vidimus autem hunc numerum eſſe vel $= 0$, vel $= \nu$, vel $= 2\nu$, vel alii cuipiam multiplo exponentis ν. Sit ergo $n - \nu = (m - 1)\nu$, ita vt m denotet vel vnitatem, vel alium quemuis numerum integrum, atque hinc obtinebimus $n = m\nu$ et $\nu = \frac{n}{m}$: vnde patet exponentem minimae poteſtatis ipſius x, quae per N diuiſa vnitatem relinquit, eſſe vel $= n$, ſi $m = 1$, vel $= \frac{n}{2}$, ſi $m = 2$, vel in genere eſſe partem quampiam aliquotam numeri n, qui exprimit multitudinem partium ad diuiſorem N primarum. Q. E. D.

Coroll. 1.

52. Si x^{ν} fuerit minima poteſtas, quae per numerum N ad x primum diuiſa vnitatem relinquit, ſequentes poteſtates idem reſiduum relinquentes ſunt $x^{2\nu}$, $x^{3\nu}$, $x^{4\nu}$, $x^{5\nu}$, etc. neque praetera vllae aliae dantur, quae per N diuiſae vnitatem relinquant.

Coroll. 2.

53. Exponens ergo huius poteſtatis minimae ſemper cum numero partium ad diuiſorem N primarum ita connectitur, vt ſit vel illi ipſi, vel cuipiam eius parti aliquotae, aequalis.

Scholion.

Scholion.

54. Quo haec ratio clarius perſpiciatur, iuuabit nonnullos caſus ſimpliciores perpendiſſe. Sit igitur $x=2$, et pro N ſumamus ſucceſſiue numeros impares, vtpote ad $x=2$ primos, atque exhibeamus minimam poteſtatem binarii, quae per quemque numerum imparem diviſa vnitatem relinquat.

Diuiſor N	num. part. ad eum pr. n	min. pot. 2^ν quae per N diuiſ. vnitatem relinquit.		
3	2	2^2	ergo	$\nu=n$
5	4	2^4	——	$\nu=n$
7	6	2^3	——	$\nu=\frac{1}{2}n$
9	6	2^6	——	$\nu=n$
11	10	2^{10}	——	$\nu=n$
13	12	2^{12}	——	$\nu=n$
15	8	2^4	——	$\nu=\frac{1}{2}n$
17	16	2^8	——	$\nu=\frac{1}{2}n$
19	18	2^{18}	——	$\nu=n$
21	12	2^6	——	$\nu=\frac{1}{2}n$
23	22	2^{11}	——	$\nu=\frac{1}{2}n$
25	20	2^{20}	——	$\nu=n$
27	18	2^{18}	——	$\nu=n$
29	28	2^{28}	——	$\nu=n$
31	30	2^5	——	$\nu=\frac{1}{6}n$

Theorema 11.

55. Si fuerit N ad x numerus primus, et n numerus partium ad N primarum, tum poteſtas x^n vnitate minuta ſemper per numerum N erit diuiſibilis.

Demonſtratio.

Sit enim x^ν minima poteſtas, quae per N diuiſa vnitatem relinquit, eritque ν vel aequalis ipſi numero n, vel parti eius cuipiam aliquotae $\frac{n}{m}$. Cum igitur $x^\nu - 1$ per N ſit diuiſibilis, quia forma $x^{\nu m} - 1$ factorem habet $x^\nu - 1$, etiam iſta forma $x^{\nu m} - 1$, ſeu $x^n - 1$, per N erit diuiſibilis. Q. E. D.

Coroll. 1.

56. Si ergo diuiſor N ſit numerus primus p, neque x per p ſit diuiſibilis, tum ſemper numerus $x^{p-1} - 1$ per numerum primum p erit diuiſibilis, vti quidem dudum demonſtraui.

Coroll. 2.

57. Si praeterea p, q, r, etc. ſint numeri primi, x neque vllum eorum implicet, ex hoc theoremate ſequitur,

has formas	fore diuiſibiles per
$x^{p-1} - 1$	p
$x^{p(p-1)} - 1$	pp
$x^{(p-1)(q-1)} - 1$	pq
$x^{pp(p-1)} - 1$	p^3
$x^{p(p-1)(p-1)} - 1$	ppq
$x^{(p-1)(q-1)(r-1)} - 1$	pqr.

Coroll.

Coroll. 3.

58. Si x et y ſint primi ad diuiſorem N, cuius partium ad eum primarum numerus ſit $= n$, quia tam $x^n - 1$, quam $y^n - 1$, eſt diuiſibilis per N, erit etiam $x^n - y^n$ ſemper diuiſibilis per numerum N, quod eſt Theorema generalius.

Coroll. 4.

59. Propoſito ergo numero quocunque N, cuius partium ad ipſum primarum numerus ſit $= n$, quicunque numerus ad N primus pro x capiatur, formula $x^n - 1$ ſemper erit per numerum N diuiſibilis.

Coroll. 5.

60. Saepe numero vero etiam euenire poteſt, vt huiusmodi formula ſimplicior, veluti $x^{\frac{1}{2}n} - 1$ vel $x^{\frac{1}{3}n} - 1$, vel $x^{\frac{1}{4}n} - 1$ etc. ſit per numerum N diuiſibilis, quae circumſtantia pendet a certa indole numeri x.

Scholion.

61. En ergo nouam demonſtrationem Theorematis Fermatiani, quod ſi fuerit p numerus primus, omnes numeri in hac forma $a^{p-1} - 1$ contenti ſint per p diuiſibiles, dummodo numerus a non ſit per p diuiſibilis. Duas autem iam dudum huius theorematis dederam demonſtrationes; ſed ea quam hic exhibui, iis praeſtare videtur, quod non ſolum ad numeros pri-

mos

mos adſtringitur. Quicunque enim numerus N pro diviſore accipiatur, dummodo a ad eum ſit primus, hic numerus $a^n - 1$ ſemper per N erit diuiſibilis, ſiquidem n denotet numerum partium ad N primarum, quae propoſitio multo latius patet, quam Fermatiana. Ex quo eo magis vtilitas Theorematum primorum elucet, quibus numerum partium ad quemque numerum primarum definiui, quae ſine hac applicatione nimis ſterilia videri potuiſſent.

SVPLE-

SVPPLEMENTVM QVORVNDAM THEOREMATVM ARITHMETICORVM QVAE IN NONNVLLIS DEMONSTRATIONIBVS SVPPONVNTVR.

Auctore

L. EVLERO.

Cum nuper demonſtrauiſſem, non dari duos cubos, quorum ſumma ſit cubus, ſine ſufficiente probatione aſſumſeram, omnes numeros in hac forma contentos $mm+mn+nn$, quae forma facile ad hanc reducitur: $pp+3qq$, nunquam alios admittere diuiſores, niſi qui ipſi in eadem forma contineatur. Atque hinc concluſi, ſi forma $mm+mn+nn$ fuerit cubus, aliaue poteſtas, eius radicem quoque numerum eiusdem formae eſſe futuram; cui fundamento etiam tota demonſtratio modo memorata innititur. Cum deinceps methodum nouam et maxime generalem expoſuiſſem, tres cubos inueniendi, quorum ſumma ſit cubus, quae ſimul omnibus adhuc vſitatis facilitate longe praeſtabat, non ſolum eandem indolem numerorum, in forma $mm+mn+nn$, ſeu $pp+3qq$, contentorum, tanquam certam aſſumſi, ſed etiam in euolutione ſolutionis ſuppoſui, huius generis numeros alios diuiſores primos, praeter ternarium, non implicare, niſi qui eſſent formae $6x+1$. Quin etiam viciſſim affirmare licet, omnes numeros primos iſtius formae $6x+1$, cuiusmodi ſunt 7, 13, 19, 31, 37, 43, etc. ita eſſe comparatos, vt in forma $pp+3qq$ contineantur: veluti

$7=2^2+3.1^2$; $13=1^2+3.2^2$; $19=4^2+3.1^2$; $31=2^2+3.3^2$; etc.

Quae Theoremata, etsi iam a Fermatio fuerant prolata, nusquam tamen adhuc demonstrata reperiuntur: ex quo operae pretium me facturum putaui, si has assertiones rigidis demonstrationibus confirmarem, quo simul supra memoratae demonstrationes ad summum certitudinis gradum eueherentur.

His proprietatibus innituntur ratiocinia, quibus sum deductus, ad tres cubos, quorum summa itidem est cubus, hinc autem omissis ratiociniis solutio consueto modo adornari poterit, idoneis formis pro radicibus cuborum assumendis. Quarum ratio etsi non perspiciatur, tamen in hoc Analyseos genere problemata plerumque per huiusmodi formulas feliciter excogitatas resolui solent, in quas saepe numero, vel casu, vel post plurima tentamina, incidimus.

Ita si tres cubi inueniri debeant, quorum summa sit cubus, positis eorum radicibus x, y, et z, statuatur

$$x^3+y^3+z^3=v^3.$$

Tum vero istorum cuborum radicibus sequentes formae tribuantur:

$$x=(m-n)p+qq; \qquad z=pp-(m+n)q$$
$$y=(m+n)p-qq; \qquad v=pp+(m-n)q$$

et quoniam loco quaternarum quantitatum x, y, z et v, quaternae nouae m, n, p et q in calculum introducuntur, his positionibus problema non restringi est censendum. Cum igitur vi problematis esse operteat

$$x^3+y^3=v^3-z^3, \text{ siue}$$
$$(x+y)(xx-xy+yy)=(v-z)(vv+vz+zz)$$

per assumtas formas habebitur:

$x+y$

$x+y=2mp; xx-xy+yy=(mm+3nn)pp-6npqq+3q^4$
$v-z=2mq; vv+vz+zz=3p^4-6nppq+(mm+3nn)qq$
hisque valoribus ſubſtitutis obtinebitur, diuiſione vtrinque per $2m$ facta:

$$(mm+3nn)p^3-6nppqq+3pq^4=3p^4q-6nppqq+(mm+3nn)q^3$$

vbi cum termini medii ſe vtrinque deſtruant, fiet

$$(mm+3nn)(p^3-q^3)=3p^4q-3pq^4=3pq(p^3-q^3)$$

Hic igitur commodo vſu venit, vt haec aequatio per p^3-q^3 diuidi queat, in quo ipſo ſumma vtilitas noſtrarum poſitionum conſiſtit; nanciſcimur enim hanc aequationem

$$mm+3nn=3pq$$

vnde aſſumtis numeris m et n cum altero reliquorum p vel q pro lubitu alter ſponte et quidem rationaliter determinatur, quod eximium commodum non locnm haberet, niſi poſtrema aequatio diuiſionem per p^3-q^3 admiſiſſet. Niſi ergo fractiones euitare velimus, habebimus ſtatim

$$q=\frac{mm+3nn}{3p}.$$

Verum etſi fractiones facile erui poſſunt, dum aeque multipla quaecunque radicum x, y, z et v pariter ſatisfaciunt, tamen ad expreſſiones ſimpliciores pertingemus, ſi numeros m et n ſtatim ita aſſumamus, vt $mm+3nn$ primo diuiſibile euadat per 3, tum vero inſuper duos contineat factores, quorum alter pro p, alter pro q accipi queat.

Primo igitur ſtatuatur $m=3k$, vt fiat

$$pq=nn+3kk$$

et quia, vt mox demonſtrabo, numeri formae $nn+3kk$

 alios

alios non admittunt diuisores, nisi qui ipsi sint eiusdem formae, ponamus:

$$nn + 3kk = (aa + 3bb)(cc + 3dd)$$

vt sit:

$$p = aa + 3bb \text{ et } q = cc + 3dd$$

eritque

$$\text{vel } n = ac + 3bd;\ k = bc - ad;\ m = 3bc - 3ad$$
$$\text{vel } n = ac - 3bd;\ k = bc + ad;\ m = 3bc + 3ad$$

Hanc pluralitatem valorum per ambiguitatem signorum ita exhibere poterimus, vt sit

$$m = \pm 3(bc \pm ad) : n = \pm (ac \mp 3bd)$$

ideoque diuersi valores pro m et n, sumtis pro a, b, c, d, numeris quibuscunque, erunt

I. $m + n = 3(bc + ad) + (ac - 3bd)$; $m - n = 3(bc + ad) - (ac - 3bd)$

II. $m + n = 3(bc + ad) - (ac + 3bd)$; $m - n = 3(bc + ad) + (ac - 3bd)$

III $m + n = 3(bc - ad) + (ac + 3bd)$; $m - n = 3(bc - ad) - (ac + 3bd)$

IV. $m + n = 3(bc - ad) - (ac + 3bd)$; $m - n = 3(bc - ad) + (ac + 3bd)$

Hinc autem sequuntur solutiones, quas iam dudum fusius exposui, quare ad propositum reuertor, sequentes propositiones demonstraturus.

Propositio I.

1. Si numeri a et b non sint numeri inter se primi, tum numerus $aa + 3bb$ non erit primus, sed diuisibilis erit per quadratum maximi communis diuisoris numerorum a et b.

Demon-

Demonſtratio.

Sit enim m maximus communis diuiſor numerorum a et b, ita vt ſit $a=mc$ et $b=md$, exiſtentibus iam c et d numeris inter ſe primis, quia alioquin non eſſet maximus communis diuiſor. Ac numerus $aa+3bb$ induet hanc formam: $mm(cc+3dd)$, quae propterea certo diuiſorem habet mm.

Coroll. 1.

2. Niſi ergo numeri a et b ſint primi inter ſe, numerus ex iis formatus $aa+3bb$ primus eſſe nequit. Neque vero hinc viciſſim concludere licet, numerum $aa+3bb$ ſemper eſſe primum, quoties numeri a et b fuerint primi inter ſe.

Coroll. 2.

3. Primo autem patet, numerum $aa+3bb$ diviſibilem eſſe per ternarium, dum numerus a fuerit multiplum ternarii, etiamſi caeterum a et b fuerint numeri primi inter ſe. Neque vero vnquam forma $aa+3bb$ per 9 altiorem ve ternarii poteſtatem eſt diuiſibilis, niſi ambo numeri a et b communem diuiſorem habeant 3.

Coroll. 3.

4. Deinde etiam patet, formam $aa+3bb$ numerum parem eſſe non poſſe, niſi ambo numeri a et b vel ſint pares, vel impares. Vtroque autem caſu numerus $aa+3bb$ non ſolum per 2, ſed etiam per 4 erit diuiſibilis.

Coroll. 4.

5. Non ergo datur numerus formae $aa+3bb$, qui ſit impariter par, ſed ſtatim atque admittit diuiſorem 2, ſimul erit diuiſibilis per 4. Vnde quoties huiusmodi numeri fuerint pares, quaternarium, tanquam eorum factorem ſimplicem, conſiderare licet, etiamſi alias quaternarius, vtpote binarii quadratum, non inter numeros primos referatur.

Coroll. 5.

6. Si ergo numerus formae $aa+3bb$ ſit primus, non ſolum certo conſtat, ambos numeros a et b eſſe primos inter ſe, ſed etiam vtrumque non eſſe imparem. Neceſſe igitur eſt, vt alter ſit par, alter vero impar.

Propoſitio II.

7. Si numerus formae $aa+3bb$ per ternarium eſt diuiſibilis, tunc etiam quotus eſt numerus formae eiusdem.

Demonſtratio.

Si numerus $aa+3bb$ per 3 eſt diuiſibilis, neceſſe eſt, vt radix prioris quadrati a ſit multiplum ternarii. Ponamus ergo $a=3c$, et numerus propoſitus erit $9cc+3bb$, qui per 3 diuiſus dat quotum $3cc+bb$, qui vtique eſt numerus eiusdem formae $aa+3bb$.

Scholion.

8. Notari hic conuenit ipſum quoque ternarium eſſe numerum formae $aa+3bb$, quippe qui prodit, ſi $a=0$ et $b=1$. Conſideramus autem has duas formas $aa+3bb$ et $mm+mn+nn$ tanquam aequiualentes, quoniam

quoniam posterior in priorem transit, ponendo $m=a+b$, et $n=b-a$; vnde quicquid de altera demonstramus, etiam de altera valet. Posterior autem, casu $m=1$ et $n=1$, manifesto dat 3. Videtur quidem forma $mm+mn+nn$, si numerorum m et n alter fuerit par, alter impar, ad priorem reduci non posse, quia tum in integris esse nequit $m=a+b$, et $n=b-a$; verum dantur adhuc aliae reductiones, scilicet $a=\frac{1}{2}m+n$, et $b=m$, siue $a=m+\frac{1}{2}n$, et $b=n$, quarum ope, si numerorum m et n alter fuerit par, alter impar, forma $mm+mn+nn$ ad $aa+3bb$ reducitur.

Propositio III.

9. Si numerus formae $aa+3bb$ per quaternarium est diuibilis, tum etiam quotus erit numerus eiusdem formae $aa+3bb$.

Demonstratio.

Diuisio formae $aa+3bb$ per 4 succedit, si vel vterque numerorum a et b fuerit par, vel impar. Priori casu ponatur $a=2c$, et $b=2d$, fietque $aa+3bb=4cc+12dd$, vnde, diuisione per 4 instituta, prodit quotus $cc+3dd$.

Sin autem vterque numerus a et b fuerit impar, tum eorum, vel summa, vel differentia, certo erit diuisibilis per 4. Namque, cum tam $a+b$, quam $a-b$, sit numerus par, eorumque summa sit $2a$, hoc est numerus impariter par, necesse est, vt alter eorum sit impariter par, alter vero pariter par. Erit ergo, vel

$a+b$

$a+b=4c$, vel $a-b=4c$, ideoque $a=4c\pm b$: quo valore substituto fiet

$$aa+3bb=16cc\pm 8bc+4bb$$

vnde, diuisione per 4 instituta, prodit quotus

$$4cc\pm 2bc+bb=(b\pm c)^2+3cc.$$

Coroll. 1.

10. Hic pariter notasse iuuabit, ipsum quaternarium etiam esse numerum formae $aa+3bb$, inde resultantem, positis $a=1$, et $b=1$. At ex forma $mm+mn+nn$ quaternarius nascitur, si ponatur $n=0$, et $m=2$.

Coroll. 2.

11. Cum igitur viderimus, dari numeros formae $aa+3bb$, qui tam per 3, quam per 4, sint diuisibiles: nunc demonstrauimus, quotos ex vtraque diuisione resultantes etiam esse numeros eiusdem formae $aa+3bb$.

Coroll. 3.

12. Quodsi autem ambo numeri a et b fuerint impares, tum quotus, ex diuisione numeri $aa+3bb$ per 4 nascens, erit numerus impar. Vidimus enim, quotum esse $4cc\pm 2bc+bb$, qui, ob b numerum imparem, certo est impar.

Scholion.

13. Quod hactenus de diuisione numerorum formae $aa+3bb$ per 3 et 4 demonstrauimus, idem demonstrabimus de diuisione per numerum quemcunque

alium

alium primum formae $aa + 3bb$; quotum ſcilicet inde oriundum pariter fore numerum eiusdem formae. Hunc in finem, vt breuitati conſulamus, denotabunt litterae P, Q, R, S etc. numeros primos formae $aa + 3bb$, inter quos tamen etiam quaternarium referemus, etiamſi non ſit primus, propterea quod binarius ab hac forma eſt excludendus.

Propoſitio IV.

14. Si numerus formae $aa + 3bb$ eſt diuiſibilis per numerum primum $P = pp + 3qq$, tum quotus eſt etiam numerus eiusdem formae.

Demonſtratio.

Si $aa + 3bb$ eſt diuiſibilis per $pp + 3qq$, tum etiam $aapp + 3bbpp$ per eundem eſt diuiſibilis, itemque $aapp + 3aaqq$; quare etiam horum numerorum differentia $3aaqq - 3bbpp$, ideoque et $aaqq - bbpp = (aq + bp)(aq - bp)$. Cum igitur $3pp + 3qq$ ſit numerus primus, neceſſe eſt, vt alteruter iſtorum factorum, ſcilicet vel $aq + bp$, vel $aq - bp$, ſit per $pp + 3qq$ diuiſibilis. Ponatur ergo pro vtroque caſu $aq \pm bp = m(pp + 3qq)$; hincque fiet

$$a = \frac{m(pp + 3qq)}{q} \pm \frac{bp}{q} = 3mq + \frac{p}{q}(mp \pm b).$$

Verum quia a eſt numerus integer, et p et q numeri inter ſe primi, neceſſe eſt, vt $mp \pm b$ diuiſionem per q admittat. Ponatur ergo $mp \mp b = \mp nq$, eritque

$$b = mp \pm nq \quad \text{et} \quad a = 3mq \mp np$$

Cum igitur numeri a et b neceſſario hoc modo exprimantur,

mantur, siquidem numerus $aa+3bb$ per $pp+3qq$ fuerit diuisibilis, hinc obtinebimus

$$aa+3bb=3mmpp+9mmqq+3nnqq+nnpp$$
$$=(pp+3qq)(nn+3mm)$$

vnde patet, hunc numerum, per numerum primum $P=pp+3qq$ diuisum, pro quoto dare $nn+3mm$, hoc est numerum formae $aa+3bb$.

Coroll. 1.

15. Quoties ergo numerus formae $aa+3bb$ diuisorem primum habet $P=pp+3qq$, quotus est numerus formae $nn+3mm$. Vel, quod eodem redit, si numerus $aa+3bb$ constet duobus factoribus, quorum alter sit primus $P=pp+3qq$, tum etiam alter factor siue sit numerus primus, siue compositus, erit numerus formae $nn+3mm$.

Coroll. 2.

16. Si igitur numerus $aa+3bb$ duobus constaret factoribus, quorum alter non in forma $nn+3mm$ contineretur, tum alter certe non erit primus formae $pp+3qq$.

Coroll. 3.

17. Ex demonstratione patet, quomodo innumerabiles numeri $aa+3bb$ exhiberi queant, qui omnes sint diuisibiles per $pp+3qq$; eiusmodi nempe numeri obtinentur capiendo

$$a=3mq\pm np \quad \text{et} \quad b=mp\pm nq$$

neque

neque hic amplius opus eſt, conditionem adieciſſe, vt $pp+3qq$ ſit numerus primus; quoniam his valoribus aſſumtis in genere fit $aa+3bb=(pp+3qq)(nn+3mm)$.

Coroll. 4.

18. Hinc igitur viciſſim intelligitur, ſi duo pluresue numeri quicunque formae $aa+3bb$ in ſe inuicem multiplicentur, productum ſemper fore numerum eiusdem formae. Quod enim de producto duorum valet, facile ad productum quotcunque talium numerorum extenditur.

Scholion.

19. Etiamſi autem verum ſit, productum ex duobus numeris formae $aa+3bb$ itidem eſſe numerum eiusdem formae, tamen hinc per legitimam conſequentiam nondum inferre licet, ſi numerus formae $aa+3bb$ diuiſorem habeat quemcunque $pp+3qq$, tum etiam quotum eiusdem formae eſſe futurum: tametſi enim et hoc verum ſit, tamen peculiari indiget demonſtratione mox exponenda. Eiusmodi autem concluſionem illicitam eſſe, vel ex hoc exemplo patebit: cum productum ex duobus numeris paribus ſit numerus par, ſi quis inde concludere vellet, numerum parem per parem diuiſum quotum etiam parem eſſe praebiturum, is certe falleretur. Demonſtrationem ergo huius veritatis a diuiſore primo formae $pp+3qq$ ſum exorſus, quae conditio eatenus demonſtrationem afficit, quod absque ea perperam concluderetur, cum pro-

ductum $(aq+bp)(aq-bp)$ ſit diuiſibile, alterutrum factorem diuiſibilem eſſe debere per $pp+3qq$. Deinde vero etiam ex eo, quod p et q ſint numeri inter ſe primi, deriuauimus producti $p(mp \pm b)$, quod per q eſt diuiſibile, factorem $mp \pm b$ per q diuiſibilem eſſe debere; quae poſterior conditio cum priore neceſſario eſt connexa.

Propoſitio V.

20. Si numerus $aa+3bb$ fuerit diuiſibilis per productum ex duobus pluribusue numeris primis formae $pp+3qq$, tum etiam quotus erit numerus eiusdem formae, puta $nn+3mm$.

Demonſtratio.

Sint enim P, Q, R, etc. numeri primi formae $pp+3qq$, numerusque $aa+3bb$ diuiſibilis per productum P Q R. Sit M quotus inde reſultans, ita vt ſit $aa+3bb=MPQR$. Cum igitur ſit $\frac{aa+3bb}{P}=MQR$, erit per prop. praec. MQR numerus eiusdem formae. Ponatur itaque $MQR=cc+3dd$, erit $\frac{cc+3dd}{Q}=MR$; ideoque, ob eandem rationem, hic quotus MR numerus eiusdem formae ſtatuatur, itaque $MR=ee+3ff$, et cum ſit $\frac{ee+3ff}{R}=M$, erit pariter M numerus formae $nn+3mm$.

Coroll. 1.

21. Si ergo numerus $aa+3bb$ fuerit productum ex numeris quotcunque primis P, Q, R, S etc.

formae

formae $pp+3qq$, et praeterea numero M, ita vt sit $aa+3bb=MPQRS$, certo affirmare poterimus, hunc numerum M esse eiusdem formae seu $M=nn+3mm$.

Coroll. 2.

22. Quodsi igitur numerus $aa+3bb$ vnum habeat factorem A, qui non sit numerus formae $nn+3mm$, tum alter factor neque erit numerus primus formae $pp+3qq$, neque productum ex duobus pluribusue huiusmodi numeris primis.

Coroll. 3.

23. Eodem ergo casu si ponamus $aa+3bb=AB$, et A non fuerit numerus formae $nn+3mm$; tum B vnum saltem factorem primum complectetur, qui non erit huius formae. Nam si B est numerus primus, non erit formae $pp+3qq$, sin autem non est primus, quia non ex meris numeris primis formae $pp+3qq$ constabit, vnum ad minimum factorem continebit, qui non sit eiusdem formae.

Coroll. 4.

24. At si existente $aa+3bb=AB$, factor A non fuerit numerus formae $nn+3mm$, tum vel ipse erit numerus primus, in hac forma non contentus, vel saltem factorem implicabit primum, in hac forma non contentum; si enim A ex meris numeris primis formae $pp+3qq$ esset conflatus, ipse foret numerus eiusdem formae.

Coroll. 5.

25. Hinc ſequitur, ſi numerus $aa+3bb$ vnum habeat factorem primum in forma $pp+3qq$ non contentum, tum eum inſuper certo adhuc alium factorem inuoluere, qui aeque non in hac forma $pp+3qq$ contineatur.

Coroll. 6.

26. Ita iam ante vidimus, ſi numerus $aa+3bb$ ſit par, ſeu factorem habeat 2, qui numerus non eſt formae $pp+3qq$, tum eum inſuper eundem factorem 2 complecti, ſeu non ſolum per 2, ſed etiam per 4, eſſe diuiſibilem.

Scholion.

27. Exhiberi quidem poſſunt numeri formae $aa+3bb$, qui per numerum quemcunque N ſint diuiſibiles, etiamſi N non ſit numerus formae $pp+3qq$; dum ſcilicet pro a et b multipla quaecunque huius numeri N accipiuntur: ita poſito $a=m$N, et $b=n$N, numerus $aa+3bb=$NN$(mm+3nn)$, non ſolum per N, ſed adeo per eius quadratum NN, ſit diuiſibilis; hocque ergo caſu vtique duo adſunt factores N et N, quorum neuter in forma $pp+3qq$ continetur, vti § 25. oſtendimus. Verum ſi a et b ſint numeri inter ſe primi, hic caſus locum habere nequit, ex quo merito dubitamus, num numerus inde formatus $aa+3bb$ praeter binarium vllum admittat diuiſorem, qui non ſit formae $pp+3qq$? De binario quidem hoc negari nequit, cum quoties a et b fuerint numeri impares ambo, diuiſio per 2 ſuccedat, at vero tum inſuper binarius

rius ineſt, qui cum illo coniunctus praebet factorem 4, quaſi ſimplicem ſpectandum. Diligentius igitur examinandum reſtat, vtrum, dum a et b ſunt primi inter ſe, numerus $aa + 3bb$ habeat vllum diuiſorem primum, qui non in forma $pp + 3qq$ contineatur, nec ne? quod quidem eſſe negandum mox rigide ſum demonſtraturus; in quo negotio autem probe eſt cauendum, ne caſus binarii, quem excipi oportet, in demonſtratione quicquam turbet.

Propoſitio VI.

28. Si daretur numerus primus A, in forma $pp + 3qq$ non contentus, qui eſſet diuiſor cuiuspiam numeri $aa + 3bb$, numeris a et b exiſtentibus inter ſe primis, tum exhiberi poſſet alius numerus primus praeter binarium, minor B, in forma $pp + 3qq$ pariter non contentus, qui etiam futurus eſſet diuiſor cuiuspiam numeri formae $aa + 3bb$, in quo numeri a et b itidem forent inter ſe primi.

Demonſtratio.

Quia a et b ſunt numeri primi inter ſe, et $aa + 3bb$ per A diuiſibilis ponitur, erunt ii quoque primi ad A. Si illi numeri eſſent maiores, quam A, ſtatui poſſet $a = m\mathrm{A} \pm c$, et $b = n\mathrm{A} \pm d$, vt numeri c et d, qui pariter tum inter ſe, quam ad A, futuri eſſent primi, forent ſemiſſi ipſius A minores, ſcilicet $c < \frac{1}{2}\mathrm{A}$ et $d < \frac{1}{2}\mathrm{A}$, quia A, vt pote primus, eſt impar, caſum enim quo $\mathrm{A} = 2$ hinc excipimus. Prodiret autem hac poſitione

$$aa + 3bb = mm\mathrm{AA} \pm 2m\mathrm{A}c + cc + 3nn\mathrm{AA} \pm 6n\mathrm{A}d + 3dd$$

hincque

hincque obtineretur numerus $cc + 3dd$ minor, quam AA, qui esset per A diuisibilis, et quotus foret minor, quam A. Cum igitur A sit per hypothesin numerus in forma $pp + 3qq$ non contentus, vel ipse quotus, si fuerit primus, non erit numerus formae $pp + 3qq$, vel, si sit compositus, factorem habebit primum in hac forma non contentum. Sit B vel ipse quotus vel iste eius factor, eritque certe $B < A$, ex quo daretur numerus primus B minor, quam A, in forma $pp + 3qq$ non contentus, qui esset diuisor numeri $cc + 3dd$, existentibus numeris c et d inter se primis.

Dico autem hunc numerum primum B a binario fore diuersum. Vel enim quotus $\frac{cc + 3dd}{A}$ foret impar, vel par: et casu priori binarius in eo non contineretur, sicque numerus B non esset 2. Casu autem posteriori quotus binarium quidem, atque adeo quaternarium inuolueret; vnde cum 4 sit numerus formae $pp + 3qq$, necesse esset, vt ille quotus alium insuper factorem primum in forma $pp + 3qq$ non contentum implicaret. Vel si $cc + 3dd$ esset per 4 diuisibilis, quod eueniret, si vterque numerus c et d esset impar, eius quadrans $\frac{1}{4}(cc + 3dd)$ ad formam $ee + 3ff$ reduci posset, quae cum per A etiam nunc foret diuisibilis, multo magis quotus $\frac{ee + 3ff}{A}$ implicaret factorem primum imparem in forma $pp + 3qq$ non contentum.

Propositio VII.

29. Omnes numeri huius formae $aa + 3bb$, siquidem a et b sint numeri primi inter se, praeter binarium nullos admittunt diuisores primos, nisi qui ipsi in forma $pp + 3qq$ contineantur.

Demon-

Demonstratio.

Si enim numerus quispiam formae $aa+3bb$ haberet factorem primum quamtumuis magnum A, qui in forma $pp+3qq$ non contineretur, ex eo inueniri posset alius numerus primus B, minor quam A, nec in forma $pp+3qq$ contentus, qui pariter esset diuisor cuiuspiam numeri formae $aa+3bb$, existentibus a et b numeris inter se primis; atque ex hoc numero B simili modo alii C, D, E continuo minores eiusdem indolis inueniri possent, haecque diminutio nunquam terminaretur, neque etiam vnquam ad binarium perueniretur. Cum igitur exhibitio numerorum integrorum continuo minorum inuoluat contradictionem: sequitur praeter binarium nullum dari numerum primum in forma $pp+3qq$ non contentum, per quem vllus numerus formae $aa+3bb$ diuidi queat, existentibus a et b numeris inter se primis.

Coroll. 1.

30. Omnes ergo diuisores primi, qui conueniunt numeris formae $aa+3bb$, siquidem a et b sint numeri inter se primi, ipsi in eadem forma $pp+3qq$ continentur; dummodo hinc binarius excludatur.

Coroll. 2.

31. Si igitur numeri primi in duas classes distribuantur, quarum prior contineat eos, qui sunt formae $pp+3qq$; posterior vero eos, qui ad hanc formam

reduci nequeunt: omnes numeri huius posterioris classis ex serie diuisorum numerorum formae $aa+3bb$ excluduntur.

Coroll. 3.

32. Nisi ergo numerus $aa+3bb$, existentibus a et b numeris inter se primis, ipse sit primus, erit is productum ex meris numeris primis formae $pp+3qq$; dummodo quaternarius etiam inter hos numeros referatur.

Scholion.

33. Quod productum ex duobus pluribusue numeris formae $pp+3qq$ iterum in forma $aa+3bb$ contineatur, supra ostendimus; indeque ergo patebat, si P, Q, R, S, etc. denotent numeros primos in forma $pp+3qq$ contentos, productum ex quotcunque huiusmodi numeris P, Q, R, S, etc. semper ad formam $aa+3bb$ reuocari posse. Nunc autem huius propositionis inuersam demonstrauimus, qua patet, numeros formae $aa+3bb$ nullos alios factores admittere, nisi qui ipsi sint numeri formae $pp+3qq$. Hic quidem assumsimus, numeros a et b esse primos inter se: sin autem non essent primi, sed maximum haberent diuisorem communem m, vt sit $a=mc$, et $b=md$, tum numerus $aa+3bb=mm(cc+3dd)$ primum habebit factorem quadratum mm, cuius radix potest esse numerus quicunque, praeterea vero alios non in-

voluet

voluet factores primos, nisi qui ipsi sint formae $pp + 3qq$.

Propositio VIII.

34. Omnis numerus primus formae $pp + 3qq$, si per 6 diuidatur, relinquit vnitatem, seu in forma numerorum $6n + 1$ continetur; excepto ternario, qui etiam in forma $pp + 3qq$ continetur.

Demonstratio.

Cum $pp + 3qq$ sit numerus primus, quadratum pp per ternarium non est diuisibile, sed per 3 diuisum relinquit 1; quia ergo $3qq$ diuisionem per 3 admittit, summa $pp + 3qq$ per 3 diuisa residuum dabit $= 1$; eritque propterea numerus formae $3m + 1$. Cum autem $pp + 3qq$ simul sit numerus impar per hypothesin, necesse est, vt m sit numerus par; vnde, posito $m = 2n$, formula $6n + 1$ omnes complectetur numeros primos in forma $pp + 3qq$ contentos; excepto scilicet ternario ipso, cuius singularis est ratio.

Coroll. 1.

35. Quia omnes numeri primi, exceptis 2 et 3, vel in hac formula $6n + 1$, vel in hac $6n - 2$, continentur, euidens est, nullos numeros primos posterioris formae $6n - 1$, in forma $pp + 3qq$ contineri.

Coroll. 2.

36. Hinc omnes numeri primi formae $6n-1$ qui ſunt:

5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, etc.

ex diuiſoribus numerorum formae $aa+3bb$ ſunt excludendi, ſeu nullus numerus huius formae $aa+3bb$, dum quidem ſint a et b numeri primi inter ſe, exhiberi poteſt, qui per vllum numerum primum formae $6n-1$ ſit diuiſibilis.

Scholion.

37. Vtrum autem omnes numeri primi alterius formae $6n+1$, qui ſunt:

7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97 etc.

ſint diuiſores numerorum formae $aa+3bb$; ſeu, quod eodem redit, an omnes in forma $pp+3qq$ contineantur? ex allatis nondum affirmare licet. Inde enim tantum conſtat, omnes numeros primos formae $pp+3qq$ ſimul in forma $6n+1$ contineri, et propoſitio inuerſa peculiari indiget demonſtratione; quae ita concinnari debet, vt, propoſito numero primo formae $6n+1$ quocunque, oſtendatur, ſemper quempiam numerum formae $aa+3bb$, in quo a et b ſint numeri primi inter ſe, exhiberi poſſe, qui per illum numerum $6n+1$ ſit diuiſibilis: in quo negotio loco formae $aa+3bb$ etiam haec $ff\pm fg+gg$ illi aequiualens accipi poteſt. Si enim numerum f et g alteruter, puta g, fuerit par, erit

$$ff\pm fg+gg=(f\pm\tfrac{1}{2}g)^2+3(\tfrac{1}{2}g)^2$$

ſin

ſin autem vterque ſit impar, erit tam $f+g$, quam $f-g$, numerus par, et

$$ff \pm fg + gg = \frac{(f \mp g)^2}{2} + 3\frac{(f \pm g)^2}{2}.$$

Quodſi ergo exhiberi queat numerus $ff \pm fg + gg$ per numerum primum $6n+1$ diuiſibilis, ita vt f et g ſint primi inter ſe, ſimul conſtabit, numerum $6n+1$ eſſe numerum in forma $pp+3qq$ contentum; id quod in ſequente propoſitione demonſtrabimus.

Propoſitio IX.

38. Omnis numerus primus formae $6n+1$ ſimul in hac forma $pp+3qq$ continetur.

Demonſtratio.

Iam dudum demonſtraui, ſi $6n+1$ fuerit numerus primus, per eum diuiſibiles eſſe omnes numeros in hac forma $a^{6n}-b^{6n}$ contentos, dummodo neuter numerorum a et b ſeorſim per $6n+1$ ſit diuiſibilis. Cum igitur in factores reſoluendo ſit

$$a^{6n}-b^{6n} = (a^{2n}-b^{2n})(a^{4n}+a^{2n}b^{2n}+b^{4n})$$

alteruter horum factorum per $6n+1$ ſit diuiſibilis neceſſe eſt. Quodſi ergo dentur caſus, quibus factor $a^{2n}-b^{2n}$ non ſit diuiſibilis per $6n+1$, vt tamen, neque a, neque b, per eum ſit diuiſibilis, iis caſibus certe alter factor $a^{4n}+a^{2n}b^{2n}+b^{4n}$, hoc eſt numerus formae $ff+fg+gg$, per $6n+1$ erit diuiſibilis, ideoque numerus primus $6n+1$ foret in forma $pp+3qq$ contentus. Demonſtrari igitur debet, dari caſus, quibus

 forma

forma $a^{2n}-b^{2n}$ non sit diuisibilis per $6n+1$. Ad hoc efficiendum sumo $b=1$, et ostendam, fieri non posse, vt omnes isti numeri:

$$2^{2n}-1;\ 3^{2n}-1;\ 4^{2n}-1;\ 5^{2n}-1;\ \ldots\ldots (6n)^{2n}-1;$$

sint per $6n+1$ diuisibiles, vbi quidem pro a omnes numeros ipso $6n+1$ minores, ideoque primos ad eum, assumi pono. Nam si omnes hi numeri per $6n+1$ essent diuisibiles, eorum etiam differentiae, cum primae, tum secundae, et sequentes omnes, per $6n+1$ essent diuisibiles, ideoque etiam differentiae ordinis $2n$, quae sunt omnes constantes, et hoc modo exprimuntur:

$$2^{2n}-\tfrac{2n}{1}\cdot 3^{2n}+\tfrac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}4^{2n}-\tfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}5^{2n}\ldots\ldots(2+2n)^{2n}$$

vbi, cum sit $2n+2<6n$, nullae potestates numerorum per $6n+1$ diuisibilium ingrediuntur. Aliunde autem constat, differentiam ordinis $2n$ esse $=1.2.3.4\ldots\ldots 2n$, quae, cum certe non sit per $6n+1$ diuisibilis, manifesto indicat, reperiri adeo inter hos numeros:

$$2^{2n}-1;\ 3^{2n}-1;\ 4^{2n}-1;\ \ldots\ldots (2+2n)^{2n}-1$$

vnum, vel etiam plures, qui non sint per $6n+1$ diuisibiles. Dum autem vnicus detur huiusmodi numerus $a^{2n}-1$ per $6n+1$ non diuisibilis, per eum erit diuisibilis $a^{4n}+a^{2n}+1$, hoc est numerus formae $ff+fg+gg$, in quo neque f, neque g, sit per $6n+1$ diuisibilis. Consequenter numerus primus $6n+1$ est formae $pp+3qq$.

Scholion.

39. Omnia ergo, quae cum in demonstratione Theorematis, non dari duos cubos, quorum summa sit cubus,

cubus, tum in ſolutione problematis de inueniendis tribus cubis, quorum ſumma ſit cubus, aſſumſeram, iam plane rigide ſunt demonſtrata. Aſſumſeram autem primo, numeros formae $aa + 3bb$, ſeu $ff \pm fg + gg$, nullos admittere diuiſores primos, niſi qui ipſi ſint eiusdem formae, deinde omnes numeros primos iſtius formae ſimul in formula $6n + 1$ contineri, ac vicisſim omnes numeros primos in formula $6n + 1$ contentos, ſimul eſſe numeros formae $pp + 3qq$. Quare nunc, tam illa demonſtratio, quam ſolutio, pro perfectis ſunt habendae. Interim tamen fateri cogor, in hac de natura numerorum Theoria plurima etiamnum deſiderari, atque *Fermatii* demonſtrationes deperditas ſine dubio multo profundiores ſpeculationes in ſe eſſe complexas. Eo enim modo, quo vſus ſum ad demonſtrandum, ſummam duorum cuborum nunquam poſſe eſſe cubum, non perſpicio, quomodo demonſtratio ad poteſtates altiores extendi poſſit; cum tamen *Fermatius* demonſtrationem habuerit, neque ſummam $a^n + b^n$, neque differentiam $a^n - b^n$, nunquam eſſe poteſtatem ſimilis exponentis c^n, quando exponens n fuerit binario maior. Demonſtrandum ergo eſſet, hanc aequationem $a^n \pm b^n = c^n$ in rationalibus nunquam locum habere poſſe, ſtatim atque exponens n binarium ſuperet, niſi vnus numerorum a, b, c euaneſcat. Deinde etſi demonſtraui, numeros primos omnes formae $6n + 1$ eſſe in formula $pp + 3qq$ contentos, tamen ſimili modo demonſtrare non licet, numeros primos formae $8n + 3$ ſemper in forma $pp + 2qq$ contineri, quod tamen aeque eſt certum, et a *Fermatio* demon-

ſtratum.

ſtratum. Succeſſit mihi quidem demonſtratio, quod numeri primi formae $4n+1$ ſint omnes duorum quadratorum ſummae, ſimilique modo demonſtrare poſſum, omnes numeros primos formae $8n+1$ ſimul in forma $pp+2qq$ contineri: verum plurima eiusdem generis theoremata proferri poſſunt aeque vera, veluti quod omnes numeri primi vel huius formae $20n+1$, vel $20n+9$, ſimul in formula $pp+5qq$ contineantur, et huiusmodi plura alia, quae tamen nondum video, quomodo demonſtrari queant. Ex quo Theoria numerorum nobis adhuc maximam partem abſcondita eſt cenſenda.

CON-

CONSIDERATIO FORMVLARVM, QVARVM INTEGRATIO PER ARCVS SECTIONVM CONICARVM ABSOLVI POTEST.

Auctore

L. EVLERO.

Lemmata.

I. $$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\tfrac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{fk-gh+gxx}{xx-h}}$$

posito $x=\sqrt{(h+kzz)}$

II. $$\int\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=\tfrac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}}$$

$$=\tfrac{1}{k}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$$

posito $x=\sqrt{(f+gzz)}$ et $y=\sqrt{(h+kzz)}$

III. $$\int\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}}=-\tfrac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}}$$

$$=\tfrac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$$

posito $x=\frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y=\frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

IV. $$\int\frac{dz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}=-\tfrac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}}$$

$$=\tfrac{1}{f}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$$

 posito

posito $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$

V. $\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} = \frac{1}{f}\int dx \sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$

$$= \frac{1}{fk-gh}\int dy\sqrt{\frac{k-gyy}{fyy-h}}$$

posito $x = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

VI. $\int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} = \frac{1}{h}\int dx \sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}}$

$$= \frac{1}{gh-fk}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$$

posito $x = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

VII. $\int \frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} = -\frac{1}{g}\int dx \sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}}$

$$= \frac{1}{fk-gh}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$$

posito $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

VIII. $\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} = -\frac{1}{k}\int dx \sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$

$$= \frac{1}{gh-fk}\int dy\sqrt{\frac{hyy-f}{g-kyy}}$$

posito $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

Theore-

Theoremata.

I. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{fk-gh+gxx}{xx-h}}$

posito $x=\sqrt{(h+kzz)}$

II. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} - \int dx\sqrt{\frac{hxx-f}{g-kxx}}$

posito $x=\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

III. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{gh-fk}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$

posito $x=\frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$

IV. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{fk-gh}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$

posito $x=\frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$

V. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{f}{k}\int dx\sqrt{\frac{k-gxx}{fxx-h}}$

posito $x=\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

VI. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}}$

posito $x=\sqrt{(f+gzz)}$

VII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{gh-fk}{hk}\int dx\sqrt{\frac{xx-h}{fk-gh+gxx}}$

posito $x=\sqrt{(h+kzz)}$

VIII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + P + Q$

vbi $P = \frac{gh-fk}{gk}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}} = \frac{fk-gh}{gh}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$

posito $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

et $Q = \frac{-f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}} = \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$

posito $x = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

IX. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{fk}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + P + Q$

vbi $P = \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gh-fk}{hk}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$

posito $x = \sqrt{(f+gzz)}$ et $y = \sqrt{(h+kzz)}$

atque $Q = \frac{f(gh-fk)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}} = \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$

posito $x = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

X. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{gh-fk}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P$

vbi $P = \frac{gh-fk}{gk}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}} = \frac{fk-gh}{gh}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$

posito $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

XI. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{f}{h}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P + Q$

vbi $P = \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gh-fk}{hk}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$

posito $x = \sqrt{(f+gzz)}$ et $y = \sqrt{(h+kzz)}$

atque

atque $Q = \frac{f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{-f}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$

poſito $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

XII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P + Q$

vbi $P = \frac{f(gh-fk)}{ghk}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{fk-gh}{hk}$

$\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$

poſito $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{z}{(f+gzz}}$

atque $Q = \frac{f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{-f}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$

poſito $x = \sqrt{\frac{1}{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

XIII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{gh-fk}{hk}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P$

vbi $P = \frac{f(gh-fk)}{gk}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{fk-gh}{hk}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$

poſito $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$.

Theorema Singulare.

$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{-gxz}{\sqrt{p}} - \int dx\sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}}$, vbi p denotat conſtantem arbitrariam, poſita inter x et z hac relatione:

$gkxxzz - pxx - pzz - 2xz\sqrt{(p+fk)(p+gh)} + fh = 0$ siue

$$x = \frac{-z\sqrt{(p+fk)(p+gh)} + \sqrt{p(f+gzz)(h+kzz)}}{p - gkzz}$$

Hypothesis.

Haec scribendi formula $\Pi x\,[a]$ denotet sectionis conicae, cuius semiparameter $=1$, et semiaxis transversus $=a$, arcum a vertice sumtum, cui in axe transverso conueniat abscissa $=x$.

Corollarium.

Si a sit quantitas positiua, hoc modo designatur arcus ellipsis; sin negatiua, arcus hyperbolae. Si modo x fuerit quantitas positiua et minor quam $2a$.

Integrationes formulae $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ in 12 casus distributae.

Casus I. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$:

Integrale est immediate:

$$C - \frac{(fk+gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk+gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk+gh}\right]$$

vel etiam per Theor. I.

$$C + \frac{f}{\sqrt{(fk+gh)}}\Pi\frac{fk+gh}{fk}\left(1 - \frac{\sqrt{(h-kzz)}}{\sqrt{k}}\right)\left[\frac{fk+gh}{fk}\right]$$

Casus II. $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$, existente $fk > gh$

Integrale est immediate:

$$C - \frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

vel

vel etiam per Theor. I.

$$C+\frac{f}{\sqrt{(fk-gh}}\Pi\frac{fk-gh}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(h-kzz))}}{\sqrt{h}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

Casus III. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}$, existente $fk<gh$

Integrale est immediate:

$$C+\frac{gh-fk}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(z\sqrt{\frac{k}{h}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right]$$

Casus IV. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$, existente $fk<gh$

Integrale est per Theor. I.

$$C+\frac{f}{\sqrt{(gh-fk}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{\sqrt{h}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

Casus V. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}}$

Integrale est per Theor. III.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}}-\frac{f}{\sqrt{(fk+gh)}}\Pi\frac{fk+gh}{fk}$$
$$\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gh)}}{\sqrt{g}(h+kzz)}\right)\left[\frac{fk+gh}{fk}\right]$$

vel etiam per Theor. II.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}}+\frac{fk+gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk+gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{\sqrt{g(h+kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{fk+hg}\right]$$

Casus VI. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}$, existente $fk>gh$

Integrale est per Theor. III.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-k+kzz}}-\frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(fk-gh}}{\sqrt{g(-h+kzz}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

vel

vel etiam per Theor. II.

$$C+zV\frac{-f+gzz}{-h+kzz}+\frac{fk-gh}{kVfk}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1-\frac{Vk(-f+gzz)}{Vg(-h+kzz)}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

Casus VII. $\int dz V\frac{f-gzz}{h-kzz}$, existente $fk<gh$

Integrale est per Theor. III.

$$C+\frac{gz}{k}V\frac{h-kzz}{f-gzz}-\frac{(gh-fk)}{kVfk}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(\frac{Vf(h-kzz)}{Vh(f-gzz)}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right]$$

Casus VIII. $\int dz V\frac{-f+gzz}{h-kzz}$, existente $fk<gh$

Integrale est per Theor. II.

$$C+zV\frac{-f+gzz}{h-kzz}-\frac{f}{V(gh-fk)}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{V(gh-fk)}{Vg(h-kzz)}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

vel etiam per Theor. V.

$$C-\frac{gz}{k}V\frac{h-kzz}{-f+gzz}+\frac{f}{V(gh-fk)}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{zV(gh-fk)}{Vh(-f+gzz)}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

Casus IX. $\int dz V\frac{f+gzz}{h+kzz}$, existente $fk>gh$

Integrale est per Theor. X.

$$C-\frac{(fk-gh)z}{gh}V\frac{f+gzz}{h+kzz}-\frac{(fk-gh)}{kVfk}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{zVk}{V(h+kzz)}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$+\frac{f}{V(fk-gh)}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{V(f+gzz)}{Vf}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

vel etiam per Theor. XIII.

$$C-\frac{(fk-gh)z}{hk}V\frac{h+kzz}{f+gzz}+\frac{(fk-gh)}{kVfk}\Pi\frac{fk}{gk}\left(1-\frac{Vf}{V(f+gzz)}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$+\frac{f}{V(fh-gh)}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{V(h+kzz)}{Vh}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

Casus X.

Casus X. $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}}$, existente $fk>gh$

Integrale est per Theor. IX.

$$C+\frac{fkz}{gh}\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}}+\frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(f-gzz)}}{\sqrt{(fk-gh)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$-\frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{z\sqrt{(fk-gh)}}{\sqrt{f(-h+kzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

vel etiam per Theor. XI.

$$C-\frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f-gzz}}+\frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(f+gzz)}}{\sqrt{(fk-gh)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$+\frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{(fk-gh)}}{\sqrt{k(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

Casus XI. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{-h+kzz}}$

Integrale est per Theor. XI.

$$C-\frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{\sqrt{(fk+gh)}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gh)}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$
$$+\frac{(fk+gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{k(f+gzz)}}{\sqrt{(fk+gh)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$

vel etiam per Theor. XII.

$$C+\frac{gz}{k}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{\sqrt{(fk+gh)}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gh)}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$
$$+\frac{(fk+gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f+gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$

Casus XII. $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}}$

Integrale est per Theor. XIII.

$$C-\frac{(fk+gh)}{hk}\sqrt{\frac{h+kzz}{f-gzz}}+\frac{f}{\sqrt{(fk+gh)}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{f}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$
$$+\frac{(fk+gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$

Omnes ergo casus formulae $\int dz\sqrt{\frac{\alpha+\beta zz}{\gamma+\delta zz}}$, quomodocunque litterae α, β, γ, δ fuerint comparatae, per arcus sectionum conicarum integrari possunt.

Non solum igitur formulae initio commemoratae integrationem per arcus sectionum conicarum admittunt, sed etiam innumerabiles aliae, quae per substitutionem ad formam $\int dx\sqrt{\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}}$ se reduci patiuntur, cuiusmodi sunt

$$1^\circ.\ \int\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=-\int dx\sqrt{\frac{fxx+g}{hxx+k}}=-\frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-fk+gh}{yy-k}}$$

posito $x=\frac{1}{z}$ et $y=\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{z}$

$$2^\circ.\ \int\frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=-\frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{xx-g}{hxx+fk-gh}}=\frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{yy-k}{fyy-fk+gh}}$$

posito $x=\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{z}$ et $y=\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{z}$

$$3^\circ\ \int\frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=\frac{k}{fk+gh}\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}-\frac{g}{fk-gh}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$$

cuius formulae reductio etiam ita instituitur:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=\frac{f}{fk-gh}\int dx\sqrt{\frac{k-gxx}{fxx-h}}+\frac{g}{fk-gh}\int dx\sqrt{\frac{fxx-h}{k-gxx}}$$

posito $x=\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

vel etiam sic:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}-\int dy\sqrt{\frac{1-fyy}{k+(gh-fk)yy}}$$

posito $x=\frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y=\frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$.

Ponamus $zz=v$ atque obtinebimus sequentes formulas, quae pariter per arcus sectionum conicarum construi poterunt:

$$1^\circ.\int\frac{dv\sqrt{(f+gv)}}{\sqrt{v(h+kv)}}\quad;\quad 2^\circ.\int\frac{dv\sqrt{(f+gv)}}{v\sqrt{v(h+kv)}}$$

$$3^\circ.\int\frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{(f+gv)(h+kv)}}\quad;\quad 4^\circ.\int\frac{dv}{\sqrt{v(f+gv)(h+kv)}}$$

5°

$5^\circ. \int \frac{dv\sqrt{(f+gv)}}{(h+kv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}}$; $6^\circ. \int \frac{dv}{v\sqrt{v(f+gv)(h+kv)}}$

$7^\circ. \int \frac{dv}{(f+gv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v(h+kv)}}$; $8^\circ. \int \frac{dv\sqrt{v}}{(f+gv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kv)}}$

hae enim vicissim, posito $v = zz$, ad formas praecedentes reducuntur.

Hinc patet, istam formulam satis late patentem ad arcus sectionum conicarum reduci posse

$$\int \frac{(A+Bu)du}{\sqrt{(\alpha+\beta u)(\gamma+\delta u)(\varepsilon+\zeta u)}},$$

quae imprimis notari meretur. Ponatur enim $\alpha+\beta u = v$, vt sit $u = \frac{v-\alpha}{\beta}$, haecque formula transmutabitur in hanc:

$$\int \frac{dv(A\beta - B\alpha + Bv)}{\beta\sqrt{v(\beta\gamma-\alpha\delta+\delta v)(\beta\varepsilon-\alpha\zeta+\zeta v)}},$$

quae ad binas formulas, sub n°. 3 et 4 allatas, reuocatur. Quare, si $\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3$ habeat tres factores reales, haec formula

$$\int \frac{dx(A+Bx)}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3)}}$$

modo exposito integrari poterit: semper autem vnum factorem certe habet realem. Sin autem bini sint imaginarii, formula $\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3$ ita referri potest $y(pp+2npqy+qqyy)$, existente $nn < 1$, vt definiendum sit integrale harum formularum:

$$\int \frac{Cdy}{\sqrt{y(pp+2npqy+qqyy)}} + \int \frac{Ddy\sqrt{y}}{\sqrt{(pp+2npqy+qqyy)}}$$

Ponatur $\sqrt{(pp+2npqy+qqyy)} = p+qyz$, fietque $y = \frac{2p(z-n)}{q\sqrt{(1-zz)}}$, qua substitutione prior formula abit in $\frac{C\sqrt{2q}}{\sqrt{p}}\int\frac{dz}{\sqrt{(z-n)(1-z)(1+z)}}$ construibilem: posterior vero in hanc $\frac{2DV2p}{Vq}\int\frac{dzV(z-n)}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}}$; cum vero fit $\int\frac{dzV(z-n)}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}}$ $=\frac{zV(z-n)}{V(1-zz)}-\frac{1}{2}\int\frac{zdz}{V(z-n)(1-z)(1+z)}$ etiam haec per superiora construi potest. Sicque in genere habetur constructio huius formulae $\int\frac{dx(A+Bx)}{V(\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3)}$.

Problema I.

Integrationem huius formulae $\int\frac{dx}{V(a+bx+cxx+dx^3+ex^4)}$ per arcus sectionum conicarum perficere.

Solutio.

Quantitatem $a+bx+cxx+dx^3+ex^4$ semper in duos factores trinomiales reales resoluere licet, qui sint $(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$ et $(\delta+2\varepsilon x+\zeta xx)$, ita vt habeatur haec formula integranda: $\int\frac{dx}{V(\alpha+2\beta x+\gamma xx)(\delta+2\varepsilon x+\zeta xx)}$ Ponatur $\delta+2\varepsilon x+\zeta xx=(\alpha+2\beta x+\gamma xx)y$, vt formula proposita fiat $\int\frac{dx}{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)Vy}$. At aequatio assumta per radicis extractionem praebet

$$\varepsilon+\zeta x-\beta y-\gamma xy V(pyy+qy+r),$$

posito $p=\beta\beta-\alpha\gamma$; $q=\alpha\zeta-2\beta\varepsilon+\gamma\delta$; et $r=\varepsilon\varepsilon-\beta\zeta$. Tum vero eadem differentiata dat:

$$dx(\varepsilon+\zeta x-\beta y-\gamma xy)=\tfrac{1}{2}dy(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$$

seu $\frac{dx}{\alpha+2\beta x+\gamma xx}=\frac{\frac{1}{2}dy}{\varepsilon+\zeta x-\beta y-\gamma xy}$

Quare

Quare ſi pro hoc poſtremo denominatore valorem irrationalem modo inuentum ſubſtituamus, formula propoſita abit in hanc:

$$\int \frac{\frac{1}{2} dy}{\sqrt{y(pyy+qy+r)}},$$

cuius integratio per arcus ſectionum conicarum ſupra eſt oſtenſa.

Hic igitur naſcitur quaeſtio, quid tenendum ſit de hac formula:

$$\int \frac{dx(A+Bx+Cxx)}{\sqrt{(a+bx+cyy+dx^3+ex^4)}}$$

Euidens enim eſt, non neceſſe eſſe, vt numeratori altiores poteſtates ipſius x tribuantur; quam etiam Cel. *d'Alembert* fatetur, ſe in genere ad rectificationem ſectionum conicarum perducere non poſſe. Conſiderat quidem in Vol. IV. Mem. Acad. R. Berol. pag. 254 caſum, quo $A=0$, $C=0$ et $a=0$, ita vt formula ſit $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(0+cx+dx^2+ex^3)}}$ conaturque oſtendere (pag. 257.) eius integrationem caſu $dd=4ce$ per arcus ſectionum conicarum abſolui poſſe: verum methodus, qua vtitur, negotium minime conficere videtur, vti rem accuratius perpendenti mox patebit. Transformationes autem, quas deinceps tradit, caſus nonnunquam hoc modo tractabiles ſuppeditant. Quocirca haec inueſtigatio, vti eſt difficillima, merito omni attentione digna eſt cenſenda: vnde etiam mea tentamina ſuper hac quaeſtione propoſuiſſe iuuabit.

 Proble-

Problema 2.

Inuestigare conditiones, sub quibus integrationem huius formulae $\int \frac{dy(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}y+\mathfrak{R}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4+2\mathfrak{B}y^3+\mathfrak{C}yy+2\mathfrak{D}y+\mathfrak{E})}}$ ad hanc simpliciorem $\int \frac{dx(P+Qx+Rxx)}{\sqrt{(Ax^4+Cxx+D)}}$ reducere liceat.

Solutio.

Statuatur inter variabiles x et y talis relatio:
$$\alpha xxyy+2xy(\beta x+\gamma y)+\delta xx+\varepsilon yy+2\zeta xy+2\eta x+2\theta y+\varkappa=0,$$
cuius coefficientes ita determinentur, vt sit
$$\beta\zeta-\alpha\eta-\gamma\delta=0; \qquad \zeta\theta-\gamma\varkappa-\varepsilon\eta=0$$
$$\gamma\gamma-\alpha\varepsilon=\mathfrak{A}; \qquad \gamma\zeta-\alpha\theta-\beta\varepsilon=\mathfrak{B}$$
$$\eta\eta-\delta\varkappa=\mathfrak{E}; \qquad \zeta\eta-\beta\varkappa-\delta\theta=\mathfrak{D}$$
et $\zeta\zeta+2\gamma\eta-\alpha\varkappa-\delta\varepsilon-4\beta\theta=\mathfrak{C}$
hincque erit pro denominatore transformatae:
$$\left.\begin{array}{l} A=\beta\beta-\alpha\delta; \\ E=\theta\theta-\varepsilon\varkappa; \end{array}\right. \text{ et } C=\zeta\zeta+2\beta\theta-\alpha\varkappa-\delta\varepsilon-4\gamma\eta$$

Cum autem nouem habeantur litterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \varkappa$ his septem conditionibus praescriptis vtique satisfieri poterit, relinqueturque adhuc vna arbitrio nostro determinanda. Si iam breuitatis gratia ponamus:
$$\mathfrak{A}y^4+2\mathfrak{B}y^3+\mathfrak{C}y^2+2\mathfrak{D}y+\mathfrak{E}=Y \text{ et } Ax^4+Cxx+E=X,$$
resolutio aequationis assumtae praebet:
$$\alpha xyy+2\beta xy+\delta x+\gamma yy+\zeta y+\eta=\sqrt{Y}$$
$$\alpha xxy+2\gamma xy+\varepsilon y+\beta xx+\zeta x+\theta=\sqrt{X}$$

eius-

eiusque differentiatio ducit ad hanc aequationem:

$\frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dx}{\sqrt{X}} = 0$. Ponamus ergo:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}y + \mathfrak{R}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}} = V - \int \frac{dx(P + Qx + Rxx)}{\sqrt{(Ax^4 + Cx^2 + E)}},$$

ac sit V talis functio algebraica:

$$V = mx + ny + pxy + \tfrac{1}{2}qxx + \tfrac{1}{2}ryy + txyy.$$

Hinc sumtis differentialibus terminisque homogeneis seorsim aequatis, reperientur sequentes determinationes:

$$m = \frac{\beta\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}};\ n = \frac{\gamma\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}};\ p = \frac{\alpha\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}};\ q = 0,\ r = 0 \text{ et } t = 0,$$

praeterea vero haec determinatio accedit, vt sit $\mathfrak{A}\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{R}$.
Deinde vero fit:

$$P = \mathfrak{P} + \frac{(\beta\theta - \gamma\eta)\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}};\ Q = 0;\ \text{et } R = \frac{A\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}$$

Definitis ergo coefficientibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \varkappa$, quibus constat relatio inter x et y, ex iis innotescunt quantitates A, C, E, quibus inuentis, si fuerit $\mathfrak{A}\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{R}$, erit:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}y + \mathfrak{R}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}} = \text{Const.} + \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}(\beta x + \gamma y + \alpha xy)$$
$$- \int \frac{dx\left(\mathfrak{P} + \frac{(\beta\theta + \gamma\eta)\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}} + \frac{A\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}xx\right)}{\sqrt{(Ax^4 + Cx^2 + E)}}$$

Dummodo ergo fuerit $\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}$, formulae propositae integratio reducta est ad hanc simpliciorem: $\int \frac{dx(P - Rxx)}{\sqrt{(Ax^4 + Cx^2 + E)}}$.

Corollarium I.

Determinatio coefficientium α, β, γ, etc. commodissime hoc modo instituetur: Primo quaeratur valor

lor ipſius s ex hac aequatione:

$$\mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}-\mathfrak{D}\mathfrak{D}ss}{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}ss}+\frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D}-2\mathfrak{B}\mathfrak{E}s}{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}s},$$

quae, cum ſit cubica, certe valorem realem pro s ſuggerit: quo inuento, ſumtaque ad arbitrium quantitate t, ſit breuitatis gratia $\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}ss}{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}ss}=u$, tum autem valores omnium 9 coefficientium ita ſe habebunt:

$$\zeta=u\sqrt{\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}-3\mathfrak{A}\mathfrak{D}s+3\mathfrak{B}\mathfrak{E}ss-\mathfrak{D}\mathfrak{E}s^3}{s-uu}}$$

$$\gamma=\frac{\zeta s}{2u};\qquad \alpha=\frac{u}{2t(s-uu)}$$

$$\eta=\frac{\zeta}{2u};\qquad \delta=\frac{u}{2st(s-uu)}$$

$$\beta=\frac{1}{2t(s-uu)};\ \theta=\tfrac{1}{2}t\left(2(\mathfrak{A}+\mathfrak{E}ss)-\tfrac{s}{u}(\mathfrak{B}+\mathfrak{D}s)\right)$$

$$\varepsilon=\tfrac{1}{2}t(4\mathfrak{A}u-3\mathfrak{B}s+\mathfrak{D}ss);\ \varkappa=\tfrac{1}{2}t(4\mathfrak{E}su+\mathfrak{B}-3\mathfrak{D}s).$$

Coroll. 2.

Alio adhuc modo idem praeſtari poteſt. Extracto ſcilicet, vt ante, valore s ex hac aequatione:

$$\mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}-\mathfrak{D}\mathfrak{D}ss}{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}ss}+\frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D}-2\mathfrak{B}\mathfrak{E}s}{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}s},$$

poſitoque breuitatis gratia $\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}ss}{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}s}=u$, et, ſumto t pro arbitrio, erit:

$$\alpha=-\frac{1}{4tu};\ \beta=0;\ \gamma=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{s(\mathfrak{B}+\mathfrak{D}s)}{u}};\ \delta=\frac{1}{4tsu}$$

$$\varepsilon=t(4\mathfrak{A}u-\mathfrak{B}s-\mathfrak{D}ss);\ \zeta=\sqrt{\frac{u(\mathfrak{B}+\mathfrak{D}s}{s}},\ \eta=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{D}s}{us}}$$

$$\theta=2tu;\ \varkappa=t(\mathfrak{B}+\mathfrak{D}s-4\mathfrak{E}su).$$

Coroll.

Coroll. 3.

Si fuerit $\mathfrak{A}:\mathfrak{E}=\mathfrak{B}\mathfrak{B}:\mathfrak{D}\mathfrak{D}$, aequatio cubica valori s definiendo fit inepta. Hoc autem incommodum facile tollitur, transformanda formula differentiali per positionem $y=y\pm a$; qua etiam forma numerationis non turbatur.

Scholion.

Posito $\mathfrak{N}=n\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{Q}=n\mathfrak{B}$, integratio huius formulae:

$$\int\frac{dy(\mathfrak{P}+n\mathfrak{B}y+n\mathfrak{A}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4+2\mathfrak{B}y^3+\mathfrak{C}y^2+2\mathfrak{D}y+\mathfrak{E})}},$$

semper reduci potest ad integrationem talis:

$$\int\frac{dx(P+Rxx)}{\sqrt{(Ax^4+Cxx+E)}},$$

quae, si denominator $Ax^4+Cxx+E$ in huiusmodi duos factores reales $(f+gxx)(h+kxx)$ se resolui patitur, per rectificationem sectionum conicarum conficitur; at, si talis resolutio non succedit, sequenti artificio negotium absolui poterit.

Problema 3.

Si in formula $\int\frac{dx(P+Rxx)}{\sqrt{(Ax^4+Cx^2+E)}}$ quantitas Ax^4+Cx^2+E in factores reales huiusmodi $(f+gxx)(h+kxx)$ resolui nequeat, eam in aliam transformare, quae per arcus sectionum conicarum certo integrari queat.

Solutio.

Inducatur alia variabilis z, cuius relatio ad x hac aequatione exprimatur:

$$4Exxz^4 - 4xxzz\sqrt{AE} - 4Ezz + 2\sqrt{AE} - C = 0$$

vbi $\sqrt{AE}$ erit vtique quantitas realis, si quidem $Ax^4 + Cxx + E$ non habeat factores binomios reales. Hinc autem fiet:

$$\int \frac{dx(P + Rxx)}{\sqrt{(Ax^4 + Cx^2 + E)}} = \text{Const} + \frac{Rx}{\sqrt{A}} - \frac{2R\sqrt{E}}{A}xzz$$
$$- 2\int \frac{dz\left(P - \frac{R\sqrt{E}}{\sqrt{A}} + \frac{2ER}{A}zz\right)}{\sqrt{\left(4Ez^4 + (C - 6\sqrt{AE})zz + 2A - \frac{C\sqrt{A}}{\sqrt{E}}\right)}}$$

in qua noua formula quantitas, in denominatore contenta, certe in duos factores binomios reales est resolubilis, cum sit $(C - 6\sqrt{AE})^2 > 16E\left(2A - \frac{C\sqrt{A}}{\sqrt{E}}\right)$; propterea quod hinc sequitur $CC + 4C\sqrt{AE} + 4AE = (C + 2\sqrt{AE})^2 > 0$.

Aliter.

Habeat noua variabilis z ad x talem relationem:

$$2Exxz^4 - Cxxzz + \frac{CC - 4AE}{8E}xx - 2Ezz = 0$$

eritque:

$$\int \frac{dx(P + Rxx)}{\sqrt{(Ax^4 + Cxx + E)}} = \frac{CR}{2A\sqrt{E}}x - \frac{2R\sqrt{E}}{A}xzz$$
$$- 2\int \frac{dz\left(P - \frac{CR}{2A} + \frac{2ER}{A}zz\right)}{\sqrt{\left(4Ez^4 - 2Czz + \frac{CC - 4AE}{4E}\right)}}$$

cuius

cuius denominator pariter certe in factores reales binomios est resolubilis.

Conclusio.

His demonstratis manifestum est, hanc formulam:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + n\mathfrak{B}y + n\mathfrak{A}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}}$$

semper per arcus sectionum conicarum construi posse. Cum igitur denominator semper in duos factores trinomiales reales resolui possit, hac formula ita exhiberi potest:

$$\int \frac{dy(A + n(\alpha\varepsilon + \beta\delta)y + r\alpha\delta yy)}{\sqrt{(\alpha yy + 2\beta y + \gamma)(\delta yy + 2\varepsilon y + \zeta)}},$$

cuius ergo eadem datur constructio. Porro augendo vel diminuendo y quantitate constante, formula nostra etiam ita repraesentari potest:

$$\int \frac{dy(M + Nyy)}{\sqrt{(Ay^4 + Cyy + 2Dy + E)}}.$$

In his autem fere omnes casus, quos quidem per rectificationem sectionum conicarum integrale licet, contineri videntur. Sed in medium afferamus adhuc aliam reductionem.

Problema IV.

Inuestigare conditiones, sub quibus integrationem huius formulae:

$\int \frac{dy(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}y + \mathfrak{R}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}yy + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}}$ ad hanc simpliciorem $\int \sqrt{\frac{dx(P + Qx + Rxx)}{(2Bx^3 + Cx^3 + 2Dx)}}$ perducere liceat:

Solutio.

Statuatur inter variabiles x et y talis relatio:

$$\alpha xxyy + 2xy(\beta x + \gamma y) + \delta xx + \varepsilon yy + 2\zeta xy + 2\eta x + 2\theta y + \varkappa = 0,$$

cuius coefficientes ita determinentur, vt sit:

$$\beta\beta - \alpha\delta = 0;\quad \gamma\gamma - \alpha\varepsilon = \mathfrak{A};\quad \gamma\zeta - \alpha\theta - \beta\varepsilon = \mathfrak{B}$$

$$\theta\theta - \varepsilon\varkappa = 0;\quad \eta\eta - \delta\varkappa = \mathfrak{E};\quad \zeta\eta - \beta\varkappa - \delta\theta = \mathfrak{D}$$

atque $\zeta\zeta + 2\gamma\eta - \alpha\varkappa - \delta\varepsilon - 4\beta\theta = \mathfrak{C}$,

quem in finem definiatur primo p ex hac aequatione cubica:

$$p^3 - \tfrac{1}{3}\mathfrak{C}pp - (\mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{B}\mathfrak{D})p + \tfrac{1}{3}(\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{E}) = 0$$

Deinde, pro lubitu sumto numero m, definiatur q ex hac aequatione quadratica: $qq - q(\mathfrak{D}m - \mathfrak{B}) + (m\mathfrak{E} - p)(mp - \mathfrak{A}) = 0$, quo facto, si denuo numerus arbitrarius accipiatur n, erit:

$$\beta = \frac{n(m\mathfrak{E} - p)}{\surd(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})};\qquad \theta = \frac{mp - \mathfrak{A}}{n\surd(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}$$

$$\alpha = \frac{nq}{\surd(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})};\qquad \varkappa = \frac{q}{n\surd(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}$$

$$\delta = \frac{n(m\mathfrak{E} + p)^2}{q\surd(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})};\qquad \varepsilon = \frac{(mp - \mathfrak{A})^2}{nq\surd(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}$$

$$\gamma = \frac{m\surd(pp - \mathfrak{A}\mathfrak{E})}{\surd(2mp - \mathfrak{A} - \mathfrak{E}mm)};\qquad \eta = \frac{\surd(pp - \mathfrak{A}\mathfrak{E})}{\surd(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}$$

et $$\zeta = \frac{\mathfrak{D}(mp - \mathfrak{A}) - \mathfrak{B}(m\mathfrak{E} - p)}{\surd(pp - \mathfrak{A}\mathfrak{E})(2mp - \mathfrak{A} - mm\mathfrak{E})}.$$

Quibus inuentis erit:

$$B = \beta\zeta - \alpha\eta - \gamma\delta;\quad D = \zeta\theta - \gamma\varkappa - \varepsilon\eta$$

et $C = \zeta\zeta + 2\beta\theta - \alpha\varkappa - \delta\varepsilon - 4\gamma\eta$.

Pona-

Ponatur iam:

$$\int \frac{dy(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}y+\mathfrak{R}yy)}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4+2\mathfrak{B}y^3+\mathfrak{C}y^2+2\mathfrak{D}y+\mathfrak{E})}} = \text{Const.} + mx + ny + pxy - \int \frac{dx(P+Qx+Rxx)}{\sqrt{(2Bx^3+Cx^2+2Dx)}}$$

atque reperitur, vt ante,

$$m = \frac{\beta\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}};\; n = \frac{\gamma\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}};\; \text{et } p = \frac{\alpha\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}$$

deinde $P = \mathfrak{P} + \frac{(\beta\theta - \gamma\eta)\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}$; $\mathfrak{Q} = \frac{B\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}$ et $R = 0$.
Necesse autem est, vt in formula proposita sit $\mathfrak{A}\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}\mathfrak{R}$, neque ergo haec reductio nouos casus suppeditat. At posito $x = zz$, formula transformata abit in hanc:

$$-2\int \frac{dz(P+Qzz)}{\sqrt{(2Bz^4+Cz^2+2D)}}$$

quae reductio saepe facilius succedit, quam praecedens.

CONSTRVCTIO AEQVATIONIS DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIS

$$Aydu^2 + (B + Cu)dudy + (D + Eu + Fuu)ddy = 0,$$

sumto elemento du constante.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Aequationem hanc differentio-differentialem latissime patere, ex plurimis formis, in quas eam transmutare licet, facile intelligitur; plerumque autem eiusmodi complectitur casus, qui, cum sint aequationi *Riccatianae* similes, solitis methodis neque ad integrationem, neque ad variabilium separationem reduci possunt. Primo enim, ponendo $y = e^{\int z du}$, reuocatur ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$$dz + \frac{(B - Cu)zdu}{D + Eu + Fuu} + zzdu + \frac{Adu}{D + Eu + Fuu} = 0,$$

quae deinceps ad alias substitutiones amplissimum campum patefacit. Quam ob rem non parum Analysi consultum fore arbitror, si in genere istius aequationis constructionem docuero, id quod per ea, quae olim de aequatione *Riccatiana* proposui, sequentem in modum praestari poterit.

2. Concipio autem y determinari formula quapiam integrali praeter quantitatem u nouam variabilem x inuoluente, ita vt in hac integratione sola x, vt variabilis,

riabilis, quantitas u vero vt conſtans, tractetur. Cum autem integratio, ſiue analytice, ſiue per conſtructionem quadraturarum, fuerit abſoluta, quantitati x valor quidam conſtans datus tribuitur, quo facto integrale repraeſentabit functionem quandam ipſius u, quae ſit ea ipſa, quam aequatio propoſita exigit. Totum ergo negotium huc redit, vt formula illa integralis quantitates u et x inuoluens inueniatur, quae hoc modo tractata verum valorem ipſius y exhibeat.

3. Ponamus ergo eſſe $y = \int P\,dx(u+x)^n$, in qua formula P denotet functionem quandam ipſius x ab u immunem, quam quidem demum definiri oportet. Quae cum fuerit cognita, integrale ſaltem per quadraturas concedetur, idque pro quocunque valore ipſius u, quae in integratione vt conſtans ſpectatur. Tum integrali ita ſumto, vt pro quopiam valore ipſi x tributo euaneſcat, ſtatuatur pro x alius quiſpiam valor definitus et conſtans, ab u ſcilicet non pendens; quo facto aequabitur y functioni cuipiam determinatae ipſius u, quae ſit ea ipſa, qua aequatio propoſita reſoluitur.

4. Etſi autem in integratione $\int P\,dx(u+x)^n$ quantitas u pro conſtante habetur, tamen eius incrementum aſſignari poteſt, quod capit, ſi pro u ſtatuatur $u+du$, et integratio ſimili modo abſoluatur. Ex principiis autem alioi expoſitis colligitur hoc incrementum $= n\,du \int P\,dx(u+x)^{n-1}$. Quare ſi haec formula eodem modo tractetur, ipſique x poſt integrationem valor determinatus tribuatur, cum fuerit $y = \int P\,dx(u+x)^n$ erit nunc, quatenus variato u ſimul y variationem ſubit, $dy = n\,du \int P\,dx(u+x)^{n-1}$. Ac ſi porro ſimili modo

modo differentiale ex variatione ipsius u ortum colligamus, ob du constans consequemur:

$$ddy = n(n-1)du^2\int Pdx(u+x)^{n-2}.$$

5. Cum igitur his integralibus modo praescripto ita sumtis, vt ipsi x valor quidam determinatus tribuatur, sicque ea in meras functiones ipsius u abeant, habeamus hos valores:

$$y = \int Pdx(u+x)^n;\ \frac{dy}{du} = n\int Pdx(u+x)^{n-1}$$
$$\text{et } \frac{ddy}{du^2} = n(n-1)\int Pdx(u+x)^{n-2}$$

necesse est, vt vi aequationis propositae sit

$$A\int Pdx(u+x)^n + n(B+Cu)\int Pdx(u+x)^{n-1}$$
$$+ n(n-1)(D+Eu+Fuu)\int Pdx(u+x)^{n-2} = 0$$

in quibus integralibus sola x vt variabilis spectatur, u vero pro constante habetur. Haec autem aequatio tum solum locum habere debet, cum post singulas integrationes quantitati x valor ille determinatus ab u non pendens fuerit tributus.

6. In genere autem, antequam ipsi x iste valor assignatur, ista quantitas non euanescet, sed potius cuipiam quantitati ex u et x compositae aequabitur, quae autem ita comparata esse debet, vt illo casu, quo pro x valor ille determinatus scribatur, euanescat. Sit igitur $R(u+x)^{n-1}$ ea quantitas indefinita, cui superior forma in genere aequetur, vbi R sit eiusmodi functio ipsius x, quae tam pro eo valore ipsius x, quo integralia singula euanescentia redduntur, quam pro eo, qui ipsi post integrationes tribuitur, in nihilum abeat. Quos valores ex ipsa indole huius functiones R

colligi

colligi conuenit, haecque etiam eſt cauſa, cur eos non ſtatim determinauerim.

7. Quamdiu ergo x adhuc eſt variabilis, et u vt conſtans ſpectatur, neceſſe eſt, vt expreſſio $R(u+x)^{n-1}$ aequetur huic formulae integrali:

$$\int Pdx(u+x)^{n-2}\left(\begin{array}{lll} +Auu & +2Aux & +Axx \\ +nCuu & +nCux & +nBx \\ & +nBu & +n(n-1)D \\ +n(n-1)Fuu & +n(n-1)Eu & \end{array}\right)$$

cuius propterea differentiale aequari oportet huic:

$$(u+x)^{n-2}\left(\begin{array}{l} udR+xdR \\ \quad +(n-1)Rdx \end{array}\right)$$

Quia autem R ab u pendere non debet, conditiones ſatisfacientes his aequationibus continentur:

$$A+nC+n(n-1)F=0$$

$$dR=(2A+nC)Pxdx+n(B+(n-1)E)Pdx$$

$$xdR+(n-1)Rdx=APxxdx+nBPxdx+n(n-1)DPdx.$$

8. Si valor ipſius dR ex ſecunda in tertia ſubſtituatur, habebitur:

$$(n-1)R=-(A+nC)Pxx-n(n-1)EPx+n(n-1)DP$$

et quia ex prima eſt $-A-nC=n(n-1)F$, prodit

$$R=nP(Fxx-Ex+D).$$

Deinde ob $2A+nC=-2n(n-1)F-nC$ ſecunda induit hanc formam:

$$dR=nPdx(-(C+2(n-1)F)x+B+(n-1)E)$$

quae per illam diuiſa dat:

$$\frac{dR}{R}=\frac{-(C+2(n-1)F)xdx+(B+(n-1)E)dx}{Fxx-Ex+D}$$

 vnde

vnde, cum R fuerit inuentum, erit

$$P\,dx = \frac{R\,dx}{n(Fxx - Ex + D)},$$

exponens autem n per primam aequationem definitur, vnde fit $n = \frac{F - C + \sqrt{((F-C)^2 - 4AF)}}{2F}$.

9. Hic plures casus perpendendi occurrunt, ac primo quidem ratione exponentis n, si is prodierit imaginarius, puta $n = \mu + \nu\sqrt{-1}$, notandum est, esse $r^{\sqrt{-1}} = \text{cos.}\, lr + \sqrt{-1}.\ \text{sin}\, lr$, ideoque $r^n = r^\mu(\text{cos.}\, \nu lr + \sqrt{-1}.\ \text{sin.}\, \nu lr)$, vnde imaginarium exponentis ope sinuum ad imaginaria simplicia reducitur, ex quibus deinceps eorum destructio mutua facilius perficietur. Deinde inuestigatio functionis R huc redigitur, vt sit

$$lR = -(n-1)\,l(Fxx - Ex + D) - \int \frac{Cx\,dx - B\,dx}{Fxx - Ex + D}$$

quae denuo ad hanc formam perducitur:

$$lR = -(n - 1 + \tfrac{C}{2F})\,l(Fxx - Ex + D) + (B - \tfrac{CE}{2F})\int \frac{dx}{Fxx - Ex + D}$$

Nisi ergo sit $B - \frac{CE}{2F} = 0$, videndum est, an formulae integrandae denominator $Fxx - Ex + D$ habeat duos factores simplices reales et inaequales, an vero aequales? tum vero an in huiusmodi factores sit irresolubilis? praeterea casus, quo $F = 0$ peculiarem euolutionem postulat, quos diuersos casus seorsim pertractabo.

I. Casus quo $B = \frac{CE}{2F}$.

10. Aequatio ergo resoluenda erit

$$Ay + \frac{C}{2F}(E + 2Fu)\frac{dy}{du} + (D + Eu + Fuu)\frac{ddy}{du^2} = 0$$

pro qua si sumamus $y = \int P\,dx\,(u + x)^n$, habemus primo

$$n = \frac{F - C \pm \sqrt{((F - C)^2 - 4AF)}}{2F},\ \text{tum vero}$$

R =

$$R = (D - Ex + Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}}, \text{ hincque}$$

$$P dx = \tfrac{1}{n} dx (D - Ex + Fxx)^{-n-\frac{C}{2F}}, \text{ ita vt fit}$$

$$y = \tfrac{1}{n} \int \frac{dx (u+x)^n}{(D - Ex + Fxx)^{+n+\frac{C}{2F}}}$$

quod integrale eiusmodi terminis ipſius x comprehendi debet, quibus quantitas $(u+x)^{n-1}(D - Ex + Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}}$ euaneſcat.

11. Quoties ergo formula $D - Ex + Fxx$ duos factores habet reales, ea duplici caſu euaneſcit, vnde bini integrationis termini conſtitui poſſunt; ad hoc autem neceſſe eſt, vt eius exponens $-n + 1 - \frac{C}{2F}$, qui fit $= \frac{F \mp \surd((F-C)^2 - 4AF)}{2F}$, ſit poſitiuus, quia alioquin quantitas illa, cui formula propoſita aequalis ſtatuitur, non in nihilum abiret. Hoc igitur caſu conſtructio aequationis nullam habebit difficultatem, propterea quod ob ſignum ambiguum exponenti ſemper valor poſitiuus tribui poteſt. Sit enim exponens ille $= m$, et habebitur

$$4FFmm - 4FFm + 4AF + 2CF - CC = 0$$

quae aequatio ſi habet radices reales, ob terminum $-4FFm$ negatiuum, altera certe erit poſitiua. Quem caſum diligenter proſequamur.

12. Sit $D = aa$, $E = 0$ et $F = -1$, ita vt haec aequatio ſit reſoluenda:

$$Ay + \frac{C u dy}{du} + (aa - uu)\frac{ddy}{du^2} = 0,$$

 eritque

eritque $n = \frac{1 + C \pm \sqrt{(1 + 2C + CC + 4A)}}{2}$, cuius valor semper est realis, nisi A sit quantitas negatiua maior quam $\frac{1}{4}(1 + C)^2$: hinc erit

$$m = -n + 1 + \frac{1}{2}C = \frac{1 \mp \sqrt{(1 + 2C + CC + 4A)}}{2}$$

cuius valore positiuo sumta, erit pro resolutione nostrae aequationis

$$y = \frac{1}{n}\int dx(u + x)^n(aa - xx)^{m-1}$$

quod integrale ita capiatur, vt posito $x = a$ euanescat; tum vero statuatur $x = -a$, et pro y prodibit functio ipsius u aequationi satisfaciens. Prout iam fuerit numerus realis, vel imaginarius, sequentia exempla subiungamus.

13. *Exemplum* 1. Sit $C = 2$, et $A = -2$, vt proposita sit haec aequatio:

$$-2y + \frac{2udy}{du} + \frac{(aa - uu)ddy}{du^2} = 0.$$

erit $n = 1$, et $m = 1$, vnde fit $y = \int dx(u + x)$ et ob

$$-2y + \frac{2udy}{du} + \frac{(aa - uu)ddy}{du^2} = aa - xx$$

integratio ipsius y ita absolui debet, vt pro terminis integralis $aa - xx$ euanescat, hoc est si fuerit $x = a$ et $x = -a$. Fiet ergo $y = ux + \frac{1}{2}xx - au - \frac{1}{2}aa$, et posito iam $x = -a$, erit $y = -2au$, qui valor aequationi vtique satisfacit, et generalius quidem $y = \alpha u$, ex quo porro integrale completum eruitur, ponendo $y = uz$, vnde fit

$$2aadudz + (aa - uu)uddz = 0, \text{ seu } \frac{ddz}{dz} + \frac{2aadu}{u(aa - uu)} = 0$$

vel $\frac{ddz}{dz} + \frac{2du}{u} + \frac{2udu}{aa - uu} = 0$, quae integrata dat

$$\frac{uudz}{aa - uu} = \beta du, \text{ porroque } z = \gamma - \beta u - \frac{\beta aa}{u}$$

consequenter $y = \gamma u - \beta uu - \beta aa$.

ANNO-

ANNOTATIONES
IN LOCVM QVENDAM CARTESII AD CIRCVLI QVADRATVRAM SPECTANTEM.

Auctore

L. EVLERO.

In excerptis ex Manuſcriptis *Carteſii* paucis quidem verbis refertur conſtructio quaedam geometrica promtiſſime ad circuli veram dimenſionem appropinquans, ſed quae ſiue *Carteſius* ipſe eam inuenerit, ſiue ab alio habuerit communicatam, acutiſſimum inuentoris ingenium, illo praeſertim tempore, luculenter declarat. Qui deinceps hoc idem argumentum pertractarunt, quantum equidem memini, nullam huius eximiae conſtructionis mentionem faciunt, vt periculum ſit, ne tandem penitus obliuione obruatur. Demonſtratio quidem, quae non adiuncta reperitur, haud difficulter ſuppletur; verum non ſolum elegantia conſtructionis vberiorem explicationem meretur, ſed etiam tam inſignes concluſiones inde deduci poſſunt, quae per ſe omni attentione dignae videntur. Pulcherrima autem haec conſtructio ipſis *Carteſii* verbis ita eſt propoſita:

„Ad quadrandum circulum nihil aptius inuenio, Tab. I. Fig. 1.
„quam ſi dato quadrato bf adiungatur rectangulum cg
„comprehenſum ſub lineis ac et bc, quod ſit aequale
„quartae parti quadrati bf: item rectangulum db fa-
„ctum ex lineis da, dc, aequale quartae parti praece-

 „dentis;

„dentis; et eodem modo rectangulum *ei*, atque alia „infinita vsque ad x: et erit haec linea ax diameter „circuli, cuius circumferentia aequalis est circumferen-„tiae quadrati bf.

Vis igitur huius constructionis in hoc consistit, vt continua appositione istiusmodi rectangulorum cg, dh, ei, etc. quorum anguli superiores dextri in diagonalem quadrati productam cadunt, tandem ad punctum x perueniatur, quo terminatur diameter circuli ax, cuius peripheria aequalis est perimetro quadrati bf, seu quadruplo rectae ab.

Cum horum rectangulorum quodque aequetur parti quartae praecedentis, iam ipse *Cartesius* obseruat, summam omnium horum rectangulorum aequalem fore parti tertiae quadrati bf; quod quidem manifestum est, cum huius seriei $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} +$ etc. in infinitum continuatae summa sit $= \frac{1}{3}$.

Praeterea etiam *Cartesius* indicat rationem, cui haec constructio innititur; concipit scilicet polygona regularia 8, 16, 32, 64 etc. laterum, quorum perimetri sint inter se aequales simulque perimetro quadrati bf. Iam cum ab sit diameter circuli quadrato inscripti, ita affirmat fore ac diametrum circuli octogono inscripti, tum vero ad diametrum circuli 16gono, ae 32gono inscripti, et ita porro. Vnde liquet ax fore diametrum circuli polygono infinitorum laterum regulari inscripti, ideoque eius peripheriam aequari perimetro quadrati.

Quo facilius demonstrationem huius constructionis adornem, obseruo, quae hic de diametris circulorum dicuntur, etiam valere pro radiis, ita vt ab, ac, ad,

ae

ae etc. ſpectari poſſint tanquam radii circulorum, quibus ſi circumſcribantur polygona regularia 4, 8, 16, 32 etc. laterum, eorum perimetri futurae ſint inter ſe aequales.

Problema.

Dato circulo, cui polygonum regulare quodcunque ſit circumſcriptum, inuenire circulum alium, cui ſi polygonum regulare duplo plurium laterum circumſcribatur, perimeter huius polygoni aequalis ſit futura perimetro illius polygoni.

Solutio.

Sit ENM circulus datus et EP ſemilatus polygoni ipſi circumſcripti, centro exiſtente in C; CF autem ſit radius circuli quaeſiti, et FQ ſemilatus polygoni ipſi circumſcribendi. Neceſſe ergo eſt, vt ſit FQ ſemiſſis ipſius EP, et angulus FCQ ſemiſſis anguli ECP. Quare recta CQ angulum ECP, et recta QO ipſi CE parallela lineam EP biſecabit. Cum nunc Fig. 2.

ſit $EV : CE = FQ : CF$

et $EV : CE = EP : CE + CP$

erit $FQ : CF = EP : CE + CP$

ſed quia $FQ = \frac{1}{2}EP$, erit etiam $CF = \frac{1}{2}(CE + CP)$. Hinc auferatur CF, et habebitur $EF = \frac{1}{2}(CP - CE)$ ex quo erit rectangulum $CF.EF = \frac{1}{4}(CP^2 - CE^2) = \frac{1}{4}EP^2$ ideoque punctum F ita definiri debet, vt ſit rectangulum, ſub CF et EF comprehenſum, aequale parti quartae quadrati rectae EP, ſeu ipſi quadrato rectae FQ.

Coroll. 1

Coroll. 1.

Cum ſit $CF.EF = FQ^2$ erit $CF : FQ = FQ : EF$, vnde ducta recta QE, fiet triangulum FQE ſimile triangulo FCQ, vel ECV, ideoque angulus FQE aequalis angulo ECV.

Coroll. 2.

Cum ſit $CE : EV = EO : EF$, punctum F etiam ita definiri poterit: ex O ducatur recta ad CV productam normalis, eaque baſi CE in F occurret.

Coroll. 3.

Si polygonum circulo ENM circumſcriptum ſit n laterum, erit angulus $ECP = \frac{\pi}{n}$, denotante π menſuram duorum angulorum rectorum; et angulus $FCQ = \frac{\pi}{2n}$. Hinc ſi radius $CE = r$, erit $EP = r \operatorname{tang.} \frac{\pi}{n}$ et $FQ = \frac{1}{2} r \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}$.

Coroll. 4.

Iam quia angulus $FQE = \frac{\pi}{2n}$ erit $EF = FQ \operatorname{tang.} \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{2} r \operatorname{tang.} \frac{\pi}{n} \operatorname{tang.} \frac{\pi}{2n}$. Verum ſi vocemus $CF = s$, erit $FQ = s \operatorname{tang.} \frac{\pi}{2n}$, vnde ob $FQ = \frac{1}{2} r \operatorname{tang.} \frac{\pi}{n}$ fiet $s = \frac{1}{2} r \operatorname{tang.} \frac{\pi}{n} \cot. \frac{\pi}{2n}$.

Demonſtratio Conſtructionis Carteſianae.

Fig. 3. Sit iam CE radius circuli quadrato inſcripti, CF octogono inſcripti, CG polygono regulari 16 laterum, CH

CH polygono 32 laterum et ita porro. Sit porro EP femilatus quadrati, FQ femilatus octogoni, GR polygoni 16, HS polygoni 32 laterum, etc. et quia haec polygona eiusdem perimetri affumuntur, erit $FQ = \frac{1}{2}EP$; $GR = \frac{1}{2}FQ = \frac{1}{4}EP$; $HS = \frac{1}{2}GR = \frac{1}{4}FQ = \frac{1}{8}EP$, etc. Iam ex problemate praemiffo eft $CF.\ EF = \frac{1}{4}EP^2 = FQ^2$; tum vero ex eodem fimili modo

$$CG.\ FG = \tfrac{1}{4}FQ^2 = \tfrac{1}{4}CF.\ EF = GR^2$$
$$CH.\ GH = \tfrac{1}{4}GR^2 = \tfrac{1}{4}CG.\ FG = HS^2 \text{ etc.}$$

ficque puncta F, G, H etc. eodem plane modo determinantur, vti habet constructio *Cartefiana*; et quia interualla EF, FG, GH etc. continuo fiunt minora, fatis promte ad punctum vltimum x appropinquatur, eritque Cx radius circuli, cuius peripheria aequatur perimetro polygonorum praecedentium, ideoque rectae EP octies fumtae. Q. E. D.

Coroll. I.

Si ponatur $CE = a$, $CF = b$, $CG = c$, $CH = d$, etc. progreffio harum quantitatum ita eft comparata, vt fit ob $EP = a$

$$b(b-a) = \tfrac{1}{4}aa;\ c(c-b) = \tfrac{1}{4}b(b-a);\ d(d-c) = \tfrac{1}{4}c(c-b) \text{ etc.}$$

ideoque

$$b = \frac{a+\sqrt{2aa}}{2};\ c = \frac{b+\sqrt{(2bb-ab)}}{2};\ d = \frac{c+\sqrt{(2cc-bc)}}{2} \text{ etc.}$$

et harum quantitatum infinitefima eft radius circuli cuius peripheria eft $= 8a$.

Coroll. 2.

Cum ſit angulus ECP ſemirectus, ſeu $ECP = \frac{\pi}{4}$, erunt anguli $FCQ = \frac{\pi}{8}$; $GCR = \frac{\pi}{16}$; $HCS = \frac{\pi}{32}$, etc. Quare ob $EP = a$; $FQ = \frac{1}{2}a$; $GR = \frac{1}{4}a$; $HS = \frac{1}{8}a$ etc. erit per cotangentes

$CE = a\cot\frac{\pi}{4}$; $CF = \frac{1}{2}a\cot\frac{\pi}{8}$; $CG = \frac{1}{4}a\cot.\frac{\pi}{16}$; $CH = \frac{1}{8}a\cot.\frac{\pi}{32}$ etc. Vnde denotante n numerum infinitum, fit harum linearum vltima $= \frac{1}{n}a\cot.\frac{\pi}{4n}$.

Coroll. 3.

Sed $\cot.\frac{\pi}{4n} = 1 : \text{tang}.\frac{\pi}{4n}$; et quia angulus $\frac{\pi}{4n}$ eſt infinite paruus, erit $\text{tang}.\frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{4n}$, ideoque $\cot.\frac{\pi}{4n} = \frac{4n}{\pi}$. Quare linearum illarum vltima fit $= \frac{4a}{\pi}$, quo radio ſi circulus deſcribatur, erit eius peripheria $= 2\pi.\frac{4a}{\pi} = 8a$.

Coroll. 4.

Deinde quia ex coroll. 4 praec. probl. eſt $EF = FQ\,\text{tang}.FCQ$, erit ob eandem rationem:

$FG = GR.\text{tang}.GCR$; $GH = HS.\text{tang}.HCS$ etc. vnde haec interualla ſequenti modo exprimentur:

$EF = \frac{1}{2}a\,\text{tang}.\frac{\pi}{8}$; $FG = \frac{1}{4}a\,\text{tang}.\frac{\pi}{16}$; $GH = \frac{1}{8}a\,\text{tang}.\frac{\pi}{32}$ etc. antecedens vero ad analogiam $CE = a\,\text{tang}\frac{\pi}{4} = a$.

Coroll. 5.

His cum praecedentibus collatis nanciſcemur:

$$CF = a(\text{tang}.\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\text{tang}.\tfrac{\pi}{8}) = \tfrac{1}{2}a\cot.\tfrac{\pi}{8}$$
$$CG = a(\text{tang}.\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\text{tang}\,\tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{4}\text{tang}.\tfrac{\pi}{16}) = \tfrac{1}{4}a\cot.\tfrac{\pi}{16}$$
$$CH = a(\text{tang}.\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\text{tang}.\tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{4}\text{tang}.\tfrac{\pi}{16} + \tfrac{1}{8}\text{tang}.\tfrac{\pi}{32}) = \tfrac{1}{8}a\cot.\tfrac{\pi}{32}$$

etc.

ſicque

ſicque omnium huiusmodi progreſſionum ſummae expedite aſſignari poſſunt.

Coroll. 6.

In infinitum ergo progrediendo obtinebimus ſummationem huius ſeriei:

$$\text{tang.}\,\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\tfrac{\pi}{8}+\tfrac{1}{4}\,\text{tang}\,\tfrac{\pi}{16}+\tfrac{1}{8}\,\text{tang.}\,\tfrac{\pi}{32}+\text{etc.}=\tfrac{4}{\pi}$$

quae ergo per quadraturam circuli determinatur. Hinc occaſionem arripio ſequens problema ſoluendi.

Problema.

Denotante Φ arcum quemcunque circuli cuius radius $=1$, inuenire ſummam huius ſeriei infinitae:

$$\text{tang.}\,\Phi+\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi+\tfrac{1}{4}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\Phi+\tfrac{1}{8}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{8}\Phi+\tfrac{1}{16}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{16}\Phi\ \text{etc.}$$

Solutio.

Si in fig. 2. vti ſupra eſt conſtructa, ponatur angulus $ECP=\Phi$, erit $FCQ=\tfrac{1}{2}\Phi$: iam poſito $FQ=1$ erit $EP=2$, hincque $CE=2\,\text{cot.}\,\Phi$; $CF=\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Phi$ et $EF=\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi$, ex quo habetur: Tab. I. Fig. 2.

$$2\,\text{cot.}\,\Phi=\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Phi-\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi \text{ et tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi=\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Phi-2\,\text{cot.}\,\Phi$$

eodemque modo $\text{tang.}\,\Phi=\text{cot.}\,\Phi-2\,\text{cot.}\,2\Phi$. Collocentur hi valores tangentium per cotangentes expreſſi in ſerie propoſita

$$\begin{aligned}
\text{tang.}\,\Phi&=\text{cot}\,\Phi-2\,\text{cot.}\,2\Phi\\
\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi&=\tfrac{1}{2}\text{cot}\,\tfrac{1}{2}\Phi-\text{cot.}\,\Phi\\
\tfrac{1}{4}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\Phi&=\tfrac{1}{4}\text{cot}\,\tfrac{1}{4}\Phi-\tfrac{1}{2}\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\Phi\\
\tfrac{1}{8}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{8}\Phi&=\tfrac{1}{8}\text{cot}\,\tfrac{1}{8}\Phi-\tfrac{1}{4}\text{cot}\,\tfrac{1}{4}\Phi\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

 et

et colligendo consequemur:

$$\operatorname{tang}.\Phi = \cot.\Phi - 2\cot.2\Phi$$

$$\operatorname{tang}.\Phi + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Phi = \tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}\Phi - 2\cot.2\Phi$$

$$\operatorname{tang}\Phi + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}.\tfrac{1}{4}\Phi = \tfrac{1}{4}\cot.\tfrac{1}{4}\Phi - 2\cot.2\Phi$$

$$\operatorname{tang}.\Phi + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}.\tfrac{1}{4}\Phi + \tfrac{1}{8}\operatorname{tang}.\tfrac{1}{8}\Phi = \tfrac{1}{8}\cot.\tfrac{1}{8}\Phi - 2\cot.2\Phi$$

etc.

vnde in infinitum progrediendo, si n denotet numerum infinitum, quia $\operatorname{tang}.\frac{1}{n}\Phi = \frac{\Phi}{n}$, hincque $\cot.\frac{1}{n}\Phi = \frac{n}{\Phi}$, erit: $\frac{1}{n}\cot\frac{1}{n}\Phi = \frac{1}{\Phi}$, ideoque summa seriei propositae:

$$\operatorname{tang}\Phi + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\Phi + \tfrac{1}{8}\operatorname{tang}.\tfrac{1}{8}\Phi + \text{etc.} = \tfrac{1}{\Phi} - 2\cot.2\Phi$$

Vnde si 2Φ est angulus rectus, seu $\Phi = \frac{\pi}{4}$, ob $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ fit seriei summa $= \frac{1}{\Phi} = \frac{4}{\pi}$, qui est casus supra tractatus.

Ex hac serie plures aliae deriuari possunt non minus notatu dignae.

I. Ex eius differentiatione adipiscimur:

$$\frac{1}{\cos\Phi^2} + \frac{1}{4\cos.\frac{1}{2}\Phi^2} + \frac{1}{4^2\cos.\frac{1}{4}\Phi^2} + \frac{1}{4^3\cos\frac{1}{8}\Phi^2} + \frac{1}{4^4\cos\frac{1}{16}\Phi}$$
$$+ \text{et} = -\frac{1}{\Phi\Phi} + \frac{4}{\sin.2\Phi^2}$$

vel cum sit $\frac{1}{\cos.\Phi} = \sec.\Phi$, erit quoque

$$(\sec.\Phi)^2 + \tfrac{1}{4}(\sec.\tfrac{1}{2}\Phi)^2 + \tfrac{1}{4^2}(\sec\tfrac{1}{4}\Phi)^2 + \tfrac{1}{4^3}(\sec.\tfrac{1}{8}\Phi)^2 + \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{\sin.\Phi^2\cos.\Phi^2} - \frac{1}{\Phi\Phi}$$

II Deinde ob $\cos.\Phi^2 = \frac{1+\cos.2\Phi}{2}$, et $\sin.2\Phi^2 = \frac{1-\cos.4\Phi}{2}$ erit vbique per 2 diuidendo:

$$\frac{1}{1+\cos.2\Phi} + \frac{1}{4(1+\cos.\Phi)} + \frac{1}{4^2(1+\cos.\frac{1}{2}\Phi)}$$
$$+ \frac{1}{4^3(1+\cos.\frac{1}{8}\Phi)} + \text{etc.} = \frac{2}{1-\cos.4\Phi} - \frac{1}{2\Phi\Phi}.$$

seu

seu pro Φ scribendo $\frac{1}{2}\Phi$

$$\frac{1}{1+\cos.\Phi}+\frac{1}{4(1+\cos.\frac{1}{2}\Phi)}+\frac{1}{4^2(1+\cos.\frac{1}{4}\Phi)}$$
$$+\frac{1}{4^3(1+\cos.\frac{1}{8}\Phi)}+\text{etc.}=\frac{2}{1-\cos.2\Phi}-\frac{2}{\Phi\Phi}.$$

III. Si series inuenta per $d\Phi$ multiplicetur et integretur, ob $\int d\Phi \,\text{tang}.\Phi=\int\frac{d\Phi\,\sin.\Phi}{\cos.\Phi}=-l\cos.\Phi$, et $\int 2d\Phi \cot.2\Phi=l\sin.2\Phi$, habebitur

$$-l\cos.\Phi-l\cos.\tfrac{1}{2}\Phi-l\cos.\tfrac{1}{4}\Phi-l\cos.\tfrac{1}{8}\Phi-l\cos.\tfrac{1}{16}\Phi-\text{etc.}$$
$$=l\Phi-l\sin.2\Phi+\text{Const.}$$

ad quam constantem definiendam ponamus $\Phi=0$, et quia $l\cos.0=l1=0$, ex priori parte habemus 0, ex posteriori vero ob $\sin.2\Phi=2\Phi$, habemus $l\Phi-l2\Phi+\text{Const.}=-l2+\text{Const}$ vnde $\text{Const.}=l2$. Hinc ad numeros progrediendo erit:

$$\frac{1}{\cos.\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi\cos.\frac{1}{4}\Phi\cos.\frac{1}{8}\Phi\cos.\frac{1}{16}\Phi\,\text{etc.}}=\frac{2\Phi}{\sin.2\Phi}$$

IV. Cum sit $\frac{1}{\cos.\Phi}=\sec.\Phi$, habebitur etiam hoc Theorema pro secantibus:

$$\sec.\Phi\sec.\tfrac{1}{2}\Phi\sec.\tfrac{1}{4}\Phi\sec.\tfrac{1}{8}\Phi\sec.\tfrac{1}{16}\Phi\,\text{etc.}=\frac{2\Phi}{\sin.2\Phi}$$

vnde si ratio diametri ad peripheriam ponatur $=1:\pi$ et q denotet angulum rectum, si statuamus $2\Phi=q$, $=\frac{\pi}{2}$ erit:

$$\sec.\tfrac{1}{2}q\sec.\tfrac{1}{4}q\sec.\tfrac{1}{8}q\sec.\tfrac{1}{16}q\sec.\tfrac{1}{32}q\,\text{etc.}=\tfrac{\pi}{2}.$$

Problema.

Innenire feriem quantitatum: a, b, c, d, e, f, etc. cuius haec fit proprietas, vt fit: $c(c-b)=\frac{1}{4}b(b-a)$; $d(d-c)=\frac{1}{4}c(-b)$; $e(e-d)=\frac{1}{4}d(d-c)$ etc. feu vt quantitates inde deriuatae

$$b(b-a);\ c(c-b);\ d(d-c);\ e(e-d);\ f(f-e), \text{ etc.}$$

decrefcant fecundum rationem quadruplam.

Solutio.

Cum fit $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi = \cot.\,\frac{1}{2}\Phi - 2\cot.\,\Phi$, fi multiplicemus vtrinque per $\cot.\,\frac{1}{2}\Phi$, ob $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi\,\cot.\,\frac{1}{2}\Phi = 1$ erit $\cot.\,\frac{1}{2}\Phi(\cot.\,\frac{1}{2}\Phi - 2\cot.\,\Phi) = 1$. Statuatur ergo $a = r\cot.\,\Phi$; $b = \frac{1}{2}r\cot.\,\frac{1}{2}\Phi$; $c = \frac{1}{4}r\cot.\,\frac{1}{4}\Phi$; $d = \frac{1}{8}r\cot.\,\frac{1}{8}\Phi$, etc. eritque

$$\frac{2b}{r}\left(\frac{2b}{r}-\frac{2a}{r}\right)=1 \quad \text{hinc } b(b-a)=\frac{rr}{4}$$
$$\frac{4c}{r}\left(\frac{4c}{r}-\frac{4b}{r}\right)=1 \quad \text{hinc } c(c-b)=\frac{rr}{4^2}$$
$$\frac{8d}{r}\left(\frac{8d}{r}-\frac{8c}{r}\right)=1 \quad \text{hinc } d(d-c)=\frac{rr}{4^3}$$
etc.

Quare haec feries

$$a=r\cot\,\Phi;\ b=\tfrac{1}{2}r\cot.\,\tfrac{1}{2}\Phi;\ c=\tfrac{1}{4}r\cot.\,\tfrac{1}{4}\Phi;\ d=\tfrac{1}{8}r\cot.\,\tfrac{1}{8}\Phi;\ \text{etc.}$$

hanc habet proprietatem, vt quantitates inde formatae

$$b(b-a);\ c(c-b);\ d(d-c);\ e(e-d);\ \text{etc.}$$

in ratione quadrupla decrefcant.

Coroll. 1.

Coroll. 1.

Datis duobus terminis primis a et b reliqui c, d, e, f inde successiue ita determinantur, vt sit $c = \frac{b + \sqrt{(2bb - ab)}}{2}$; $d = \frac{c + \sqrt{(2cc - bc)}}{2}$; $e = \frac{d + \sqrt{(2dd - cd)}}{2}$ etc. ideoque binis terminis initialibus pro lubitu assumtis, tota series ope harum formularum exhiberi potest.

Coroll. 2.

Datis autem terminis a et b, inde angulus Φ cum quantitate r ita definitur, vt sit:

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{2\sqrt{(bb-ab)}}{a} \text{ et } r = 2\sqrt{(bb-ab)}$$

vnde inuento angulo Φ reliqui termini etiam ita exprimuntur, vt sit:

$$c = \tfrac{1}{4} r \cot.\, \tfrac{1}{4}\Phi;\ d = \tfrac{1}{8} r \cot.\, \tfrac{1}{8}\Phi;\ e = \tfrac{1}{16} r \cot.\, \tfrac{1}{16}\Phi \text{ etc.}$$

Coroll. 3.

Hinc istius seriei termini infinitesimi fient $= \frac{r}{\Phi}$, ad quem valorem termini seriei satis cito conuergunt. Quaeratur scilicet in circulo radii $= 1$, arcus cuius tangens $= \frac{2\sqrt{(bb-ab)}}{a}$, qui arcus sit $= \Phi$, et seriei nostrae termini infinitesimi erunt $= \frac{2\sqrt{(bb-ab)}}{\Phi}$.

Scholion.

Caeterum hic monuisse iuuabit puncta P, Q, R, S, x sita esse in curua quadratrice veterum, propterea quod applicatae EP, FQ, GR, HS eandem inter se rationem tenent, quam anguli ECP, FCQ, Tab. I. Fig. 3.

FCQ, GCR, HCS etc. Et quoniam x, vbi haec curua in basin incidit, iam olim circuli quadraturam indicare est inuentum, vnde ei istud nomen est inditum, constructio Cartesii cum hac veterum quadratura egregie quidem conuenit; sed multo commodius et accuratius puncta E, F, G, H etc. successiue praebet, quam a continua bisectione angulorum expectari queat.

DEMON-

DEMONSTRATIO GENERALIS THEOREMATIS NEWTONIANI DE BINOMIO AD POTENTIAM INDEFINITAM ELEVANDO.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

1)

Notiſſimum, ac per vniuerſam analyſin vtiliſſimum theorema Newtonianum, cuius ope $(x+1)^m$ per ſeriem indefinitam potentiarum ipſius x exhibetur, inductione primum erutum, variis poſtea demonſtrationibus a diuerſis auctoribus communitum eſt. Inuenerunt autem, qui exactius rem rimati ſunt, plerumque aliquid, quod in probationibus eiusmodi reprehenderent. Solet enim in analyſi hoc theorema ad quosuis caſus extendi, ac adhiberi, ſiue m ſit numerus integer, vel fractus; ſiue ſit poſitiuus, vel negatiuus; ſiue ſit rationalis, vel irrationalis, vel tranſcendens; immo, ſiue habeat valorem realem, aut imaginarium. Requirere ergo videtur ea, qua praecellunt diſciplinae mathematicae, exactitudo, vt et huius theorematis eiusmodi condatur demonſtratio, quae ad omnes modo dictos valores ipſius m ſe aequaliter extendat, nec ad vnum horum caſuum ſolum pertineat.

2) Pleraeque autem, quae hactenus prolatae ſunt, huius theorematis demonſtrationes, ſi ſecundum hanc

 normam

normam examinentur, non ſatis generales deprehendi ſolent. Non enim ordinario, niſi pro eo caſu, vbi m eſt numerus integer poſitiuus, valent, nec ſalua veritate ad caeteros extendi poſſunt. Optarunt hac de cauſa iam diu Mathematici, vt vniuerſalis, neque ad vllum valorem ſpecialem ipſius m reſtricta, proſtaret demonſtratio. Contigit mihi nuperrime, eruere probationem, perfectionibus, quae requirebantur, donatam, quam cum Ill. Academia ſcientiarum hic communicare conſtitui.

3) Cum explicari debeat $(x+1)^m$ per ſeriem, ſupponamus:

$$(x+1)^m = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} - -$$

vbi A, B, C, D - - potentiarum ipſius x coefficientes indicant. Arbitrarie quidem hic aſſumo, fore hanc formam ſeriei, quae hic quaeritur, aſt nihil inde metuendum eſt. Si enim impoſſibile foret, vt $(x+1)^m$ per ſeriem eius formae, qualem habet expoſita, explicetur, ratiocinia, quibus ſolutionem tentabo, ipſa, hanc impoſſibilitatem detegent. Totum enim negotium huc redit, vt coefficientium valores eruamus, quos ſi imaginarios inuenimus, formam hanc impoſſibilem, ſin minus, poſſibilem ipſam eſſe, rite concludimus.

4) Patet autem hic ſtatim, coefficientium valores ab m pendere, ſeu A B C - - - fore functiones ipſius m. Non enim fieri poteſt, vt coefficientes maneant iidem, ſi m varietur; ſequeretur enim inde hoc abſurdum, eſſe $(x+1)^m . x = (x+1)^{m+1}$. Sunt itaque coefficientes iſti, pro dato quidem valore ipſius m conſtantes, aſt non ita pro diuerſis. Sic v. g. ſi loco

m ſuc-

m succeſſiue ponantur $m-1$, $m-2$, $m-3$ - - - coeffi-cientes A, B, C, D - - - diuerſos quoque induere debent valores. In poſterum valores iſtos, hac ratione indicabo, vt

$$\begin{array}{llllll} m & \text{reſpondeat} & A^m, & B^m, & C^m & - - - - \\ m-1 & - - - & A^{m-1}, & B^{m-1}, & C^{m-1} & - - \\ m-2 & - - - & A^{m-2}, & B^{m-2}, & C^{m-2} & - - \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ r & - - - & A^r, & B^r, & C^r & - - - - - \end{array}$$

vnde probe notandum, niſi aliud monuerim, expreſſiones huiusmodi A^r, B^r, C^r - - hic mihi non denotare, vt alias ſolent, potentias iſtas harum literarum, A, B, C, neque r hic eſſe exponentem potentiae, ſed indicem, ex quo, ad quemnam ipſius m valorem quoduis A, B, C, pertineat, determinatur.

5) Suppoſitis his, cum ſit per hypotheſin $(x+1)^m = A^m x^m + B^m x^{m-1} + C^m x^{m-2} + D^m x^{m-3}$ - - - erit $(2(x+1))^m = 2^m A^m x^m + 2^m B^m x^{m-1} + 2^m C^m x^{m-2} + 2^m D^m x^{m-3}$ - - -. Eſt vero quoque, $(2(x+1))^m = ((2x+1)+1)^m$, vnde neceſſe eſt, vt ſit $(2(x+1))^m = A^m(2x+1)^m + B^m(2x+1)^{m-1} + C^m(2x+1)^{m-2} + D^m(2x+1)^{m-3}$. - - -

6) Euoluamus ſeorſim, potentias $(2x+1)^m$, $(2x+1)^{m-1}$, $(2x+1)^{m-2}$ - - - in ſeries, ac erit

$$\begin{array}{lllll} (2x+1)^m = 2^m A^m x^m + 2^{m-1} B^m x^{m-1} & + 2^{m-2} C^m x^{m-2} & + 2^{m-3} D^m x^{m-3} & - - \\ (2x+1)^{m-1} = - - - & + 2^{m-1} A^{m-1} x^{m-1} & + 2^{m-2} B^{m-1} x^{m-2} & + 2^{m-3} C^{m-1} x^{m-3} & - - \\ (2x+1)^{m-2} = - - - - - - - & & + 2^{m-2} A^{m-2} x^{m-2} & + 2^{m-3} B^{m-2} x^{m-3} & - - \\ (2x+1)^{m-3} = - - - - - - - - - - & & & + 2^{m-3} A^{m-3} x^{m-3} & - - \end{array}$$

Quodſi

Quodsi hos valores in formulam supra repertam substituamus, erit

$$\begin{aligned}(2x+2)^m = 2^m A^m A^m x^m &+ 2^{m-1} A^m B^m x^{m-1} + 2^{m-2} A^m C^m x^{m-2} + 2^{m-3} A^m D^m x^{m-3} - \\ &+ 2^{m-1} B^m A^{m-1} \quad + 2^{m-2} B^m B^{m-1} \quad + 2^{m-3} B^m C^{m-1} - - \\ &\qquad\qquad + 2^{m-2} C^m A^{m-2} \quad + 2^{m-3} C^m B^{m-2} - - \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + 2^{m-3} D^m A^{m-3} - -\end{aligned}$$

Obtinuimus itaque 2 diuersos valores pro $(2x+2)^m$, quos comparando, sequentes oriuntur aequationes: $2^m A^m = 2^m A^m A^m$, $2^m B^m = 2^{m-1}(A^m B^m + B^m A^{m-1})$, $2^m C^m = 2^{m-2}(A^m C^m + B^m B^{m-1} + C^m A^{m-2})$, $2^m D^m = 2^{m-3}(A^m D^m + B^m C^{m-1} + C^m B^{m-2} + D^m A^{m-3})$; - -

7) Reducta prima harum aequationum pro inueniendo A^m, erit $A^m = 1$. Indicium hoc est, A generatim non pendere ab m, sed esse quantitatem constantem. Cum enim m indeterminatum assumtum sit, ac ipsi respondens valor A repertus sit $= 1$, patet, vtcunque variato m, A valorem $= 1$ constanter retinere, vt proinde $A^m = A^{m-1} = A^{m-2}$ - - $= 1$. Secunda aequatio, $2^m B^m = 2^{m-1}(A^m B^m + B^m A^{m-1}) = 2^{m-1}(2B^m) = 2^m B^m$, identica est, vnde ex ipsa nihil concludi potest. B itaque hac ratione determinari nequit, sed eius valor peculiari ratiocinio inuestigandus erit.

8) Seponamus tantisper hanc disquisitionem, ac ad caeteras aequationes progrediamur, et quomodo caeteri coefficientes pendeant a B inuestigemus. Ex tertia aequatione est $2^m C^m = 2^{m-2}(A^m C^m + B^m B^{m-1} C^m A^{m-2})$, qua reducta, adhibendo supra repertum valorem ipsius A, erit $C^m = \frac{B^m B^{m-1}}{1 \cdot 2}$. Antequam nunc ad quartam aequationem transeamus, antecedenter notandum erit,

cum

cum sit $C^m = \frac{B^m B^{m-1}}{1.\,2}$, fore $C^{m-1} = \frac{B^{m-1} B^{m-2}}{1.\,2}$

$C^{m-1} = \frac{B^{m-2} B^{m-3}}{1.\,2}$. - - - Est enim C^{m-1} aequale C quod prodit, si loco m substituatur $m-1$, facta autem hac substitutione, vtique fieri debet $C^{m-1} = \frac{B^{m-1} B^{m-2}}{1.\,2}$, ac ita porro. Idem etiam in caeteris coefficientibus, si similes occurrant casus, semper tenendum erit. Si iam reducamus aequationem $2^m D^m = 2^{m-3}(A^m D^m + B^m C^{m-1} + C^m B^{m-2} + D^m A^{m-1})$ erit $6\,D^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2}}{1.\,2.} + \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2}}{1.\,2}$, siue $D^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2}}{1.\,2.\,3}$.
Simili modo, operationem vlterius continuando, reperitur $E^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2} B^{m-3}}{1.\,2\,3.\,4}$, $F^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2} B^{m-3} B^{m-4}}{1.\,2.\,3\,4.\,5}$
Vnde colligimus fore generatim, si sit T coefficiens termini $r$ti ab initio, non connumerato termino primo, $T^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2} \text{ - - - } B^{m-r+1}}{1.\,2.\,3 \text{ - - } r}$.

9) Absolutum sic erit negotium, modo valor ipsius B, quem methodo, quam hactenus secuti sumus, non obtinuimus, eruatur. Viam parabunt huic inuestigationi sequentia: Sumatur m recipere valores r, s, et $r+s$, ac erit $(x+1)^{r+s} = (x+1)^r . (x+1)^s$.
Est autem $(x+1)^r = x^r + B^r x^{r-1}$ - - -, ac $(x+1)^s = x^s + B^s x^{s-1}$ - - - - - - - - - -
hinc $(x+1)^r . (x+1)^s = x^{r+s} + B^r x^{r+s-1}$ - - - .
$+ B^s x^{r+s-1}$ - - - -

quapropter, cum ſit quoque $(x+1)^{r+s} = x^{r+s} = x^{r+s} + B^{r+s}x^{r+s-1}$ - - - - , erit $B^{r+s} = B^r + B^s$.

10. Cum igitur ſit generatim $B^{r+s} = B^r + B^s$, erit quoque $B^{r+s} - B^r = B^s$. Si itaque m increſcat quantitate quacunque s, erit incrementum, quod inde capit B^m, perpetuo conſtans, qualecunque fuerit m. Denotat nempe $B^{r+s} - B^r$ incrementum, quod capit B, ſi r augeatur quantitate s; hoc vero cum ſit $= B^s$, patet hoc incrementum ſolum ab s, nullatenus vero ab r, pendere, quapropter idem ſemper reperiri debet, quamdiu s manet idem, vtcunque varietur r. Viciſſim autem hinc facile patet, ſi m decreſcat quantitate s, fore decrementum, quod inde patitur B^m, itidem conſtans, ac aequale B^s.

11) Ponendo itaque ſucceſſiue $m =$ - - - - - - $-3s, -2s, -s, 0, +s, +2s, +3s$ - - - - erunt B reſpondentia - - - - $-3B^s, -2B^s, -B^s, 0, +B^s, +2B^s, +3B^s$ - - - - - -, vnde patet, ſi m ſumantur in progreſſione arithmetica, progrediente ſecundum denominatorem s, fore B reſpondentia, itidem in eiusmodi progreſſione, habente denominatorem B. Quoduis itaque B erit ad reſpondens ſuum m in ratione conſtante. Sit s infinite paruum, et progreſſio - - - - - $-3s, -2s, -s, 0, +s, +2s, +3s$ - - - vtrimque in infinitum continuata, tranſeundo per continuum, comprehendet omnes valores reales ipſius m, quapropter generatim affirmari poteſt, ſi m fuerit numerus realis quicunque, fore B^m ad m in ratione data.

12) Ex-

12) Exhiberi itaque poteſt generatim B^m per λm, poſito λ numero conſtanti, vnde nunc res eo reducta eſt, vt ad problematis ſolutionem plenariam, vlterius nil niſi determinatio ipſius λ requiratur. Sufficit autem, cum ſit conſtans, vt pro vnico caſu determinetur. Fieri hoc poteſt minimo negotio ſequenti ratione: Cum pro caſu $m = 1$, ſeries $x^m + B^m x^{m-1} + C^m x^{m-2} \text{ - - -} = x + B^1 + \frac{C^1}{x} \text{ - - -}$ abire debeat in $(x + 1)$, erit $B^1 = 1$. Quapropter, cum ſit $B^m = \lambda m$, fiet pro hoc caſu $\lambda = 1$. Conſtat itaque generatim, pro quouis numero reali eſſe $B^m = m$.

13) Notamus hic ſpeciatim, quoniam in ſequentibus aliquis huius propoſitionis erit vſus: eſſe quoque pro caſu $m = 0$, $\lambda = 1$. Patet hoc ſufficienter ex eo, quod 0 ſit aliquis valorum realium, quos m recipere poteſt. Quodſi vero adhuc quis dubitet de veritate huius aſſerti, facile conuinci de ea re poterit. Cum nempe s ac B^s dari queant, quae tam parum differunt ab 0 ac B^0, quantum ipſe volueris, dabuntur s ac B^s, quorum ratio a ratione 0 ad B^0 recedit, minus omni quanto dabili. Aſt ratio haec s ad B^s perpetuo manet $= 1 : 1$, quantumuis parua ſint. Ratio itaque 0 ad B^0 ab ratione 1 ad 1 differt minus omni quanto dabili, vnde huic aequalis non eſſe non poteſt. Patet igitur, B eſſe functionem ipſius m talem, vt non ſolum m ac B^m euaneſcant ſimul, ſed euaneſcant etiam cum ratione aequalitatis.

14) Quanquam ratiocinium, quo hic vſus ſum, rem pro valoribus realibus ipſius m prorſus extra dubium

bium ponat, adplicari tamen ad valores imaginarios non poteſt, vt incautius agens ſupponere quis poſſet. Quanquam enim progreſſio $-2s$, $-s$, $0+s+2s$, caſu quo s eſt infinite paruum, tranſeat per continuum, tamen non comprehendit niſi valores reales, neque, vtcunque continuetur, per ipſam tranſitus ad vllam quantitatem imaginariam patet. Immo ne exhiberi quidem poteſt progreſſio arithmetica, tranſiens per continuum, quae omnes valores imaginarios in ſe complecteretur Sic v. g. ponendo s infinite paruum, progreſſio - - - - - - $-2s\sqrt{-1}$, $-s\sqrt{-1}$, 0, $+s\sqrt{-1}$, $+2s\sqrt{-1}$ - - - -, comprehendet equidem omnes valores impoſſibiles formae $A\sqrt{-1}$, nullos vero formae $B+A\sqrt{-1}$, ac ſimiliter haec progreſſio - - - - - - - - $-2(\alpha s+s\sqrt{-1})$, $-(\alpha s+s\sqrt{-1})$, 0, $+(\alpha s+s\sqrt{-1})$, $+2(\alpha s+s\sqrt{-1})$ - - - , praeter imaginarios formae $\alpha A+A\sqrt{-1}$, nullos formae $\beta A+A\sqrt{-1}$, continebit.

15) Quanquam autem omnes quantitates imaginarias comprehendere in vnica, etiam per continuum tranſeunte, progreſſione non liceat, exhiberi tamen ſemper poteſt eiusmodi progreſſio, datam quamuis imaginariam in ſe comprehendens. Sit enim numerus imaginarius propoſitus $=I$, et capiatur eius pars quaedam aliquota, infinite parua, $\frac{I}{i}$, intellecto i numero infinite magno; ac progreſſio - - - - $-\frac{2I}{i}$, $-\frac{I}{i}$, 0, $+\frac{I}{i}$, $+\frac{2I}{i}$ - - - proprietate adducta donata erit. Quodſi iam ſupponamus m recipere ſucceſſiue hos valores, erunt B reſpondentia - - - $-2B^{\frac{I}{i}}$, $-B^{\frac{I}{i}}$, 0, $+B^{\frac{I}{i}}$, $+2B^{\frac{I}{i}}$ -, vnde

vnde et pro hac progreſſione erunt B ſemper ad reſpondentia m in ratione data. Quodſi igitur rurſum ponatur $B^m = \lambda m$, erit λ conſtans. Quoniam vero haec lex quadrare quoque debet in B^0, (quippe quod eſt terminus huius ſeriei, vnde ratiocinia quibus n. 13. vſus ſum, etiam hic adplicari poſſunt) erit 0 ad B^0 in ratione λ ad 1. Supra vero oſtenſum eſt (n. 13.) eſſe hanc rationem 0 ad B^0, rationem aequalitatis; quapropter erit quoque λ ad 1 in ratione aequalitatis, ſeu $\lambda = 1$.

16) Conſtat igitur iam generatim eſſe $B^m = m$, ſiue m ſit numerus realis, ſiue imaginarius quicunque. Quodſi autem hunc valorem, in ſupra repertos valores pro C^m, D^m, E^m - - - ſubſtituamus, erit $(x+1)^m = x^m + mx^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}x^{m-3}$ - - - quod eſt ipſum theorema a *Newtono* propoſitum.

17) Quanquam vero hactenus a me propoſita demonſtratio fini ſuo abunde ſatisfaciat, deſiderabunt tamen adhuc, qui demonſtrationum rigorem amant, vt ab inductionis, cui ex parte innititur, labe, immunis reddatur. Quo hoc obtineri queat, ſumamus theorema *Newtonianum* verum eſſe repertum, pro coefficientibus r primorum terminorum ſeriei $x^m + B^m x^{m-1} + C^m x^{m-2}$ - - ac dico, probari tunc ſemper poſſe, quod termini proxime ſequentis $(r+1)$ti coefficiens, etiam ſub eadem lege comprehendatur. Facile autem patet, cum pro coefficientibus primorum ſeriei terminorum lex iſta ſupra vera deprehenſa ſit; ſi propoſitionem modo propoſitam hypotheticam rite probauerim, vlterius tunc

de vniuerſali *Newtonianae* legis veritate dubitari non poſſe. Tentemus igitur ipſius demonſtrationem, vt vero ad hanc via aperiatur, quasdam, de potentiarum integrarum poſitiuarum ipſius $(x+1)$ natura, praemittamus conſiderationes.

18) Quoniam, ſi m fuerit integer poſitiuus, potentia $(x+1)^m$ per actualem multiplicationem euolui ſemper poteſt, ſupponatur haec facta, ac facile concipitur, $(x+1)^m$ hac ratione actu euolutum, aſſumere ſemper formam ſequentem,

$$x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \; - - - - \; + Lx^2 + Nx + 1.$$

vnde ſequitur, numerum terminorum, ex quibus potentia quaeuis integra poſitiua conſtat, ſemper eſſe finitum, ac aequalem $m+1$, vltimum vero terminum ſemper eſſe aequalem vnitati. Tam facile haec ex repetitae multiplicationis natura concipiuntur, vt demonſtrationem addere omnino non opus ſit.

19) Si igitur de legis *Newtonianae* veritate nondum vniuerſaliter, ſed pro primis ſolum r terminis, conſtet, potentia $(x+1)^r$, equidem per legem hanc, non niſi vsque ad terminum $r$tum euolui poteſt, aſt cum ipſa ſic euoluta non niſi vnicus terminus deficiat, compleri tamen ſemper poteſt; addendo nempe vnitatem, cui quippe ſemper terminus vltimus aequalis eſſe debet.

20) Si igitur probatum habeamus theorema *Newtonianum* pro primis r terminis, ponendo $x=1$, erit $(1+1)^r = 2^r = 1 + \frac{r}{1.} + \frac{r.\, r-1}{1.\,2} + \frac{r.\, r-1.\, r-2}{1.\,2.\,3.} \; - - - + \frac{r.}{1.} + 1.$

21) Sup-

21) Supponendo iam legis *Newtonianae* veritatem pro primis r terminis, proponatur inueniendus coefficiens termini proxime ſequentis $(r+1)$ ti. Ponamus hunc coefficientem $=\mathrm{T}$, coefficientes vero terminorum ipſum proxime antecedentium S, R, Q - - -, et ex argumentationis ratione, qua ſupra vſus ſum, manifeſtum eſt, pro inueniendo T ſequentem reperiri debere aequationem; $2^m \mathrm{T}^m = 2^{m-r}(\mathrm{A}^m \mathrm{T}^m + \mathrm{B}^m \mathrm{S}^{m-1} + \mathrm{C}^m \mathrm{R}^{m-2} \ldots + \mathrm{R}^m \mathrm{C}^{m-r+2} + \mathrm{S}^m \mathrm{B}^{m-r+1} + \mathrm{T}^m \mathrm{A}^{m-r})$ ſiue $(2^r-2)\mathrm{T}^m = (\mathrm{B}^m \mathrm{S}^{m-1} + \mathrm{C}^m \mathrm{R}^{m-2} \ldots + \mathrm{R}^m \mathrm{C}^{m-r+2} + \mathrm{S}^m \mathrm{B}^{m-r+1})$.

22) Quodſi haec facta, $\mathrm{B}^m \mathrm{S}^{m-1}$, $\mathrm{C}^m \mathrm{R}^{m-2}$ - - - quorum omnium ſummae aequatur $(2^r-2)\mathrm{T}^m$, exactius conſiderentur, patet formari ea, hac ratione, vt ſi vnus factorum ſit coefficiens pertinens ad terminum αtum a primo, alter tunc pertineat ad αtum a termino $(r+1)$ to, poſteriorque hic habeat ſemper indicem $m-\alpha$, prior autem indicem m. Si itaque prior horum factorum dicatur M, poſterior N, erit ſub conditione legis *Newtonianae*, valentis vsque ad terminum $r$tum,

$$\mathrm{M}^m = \frac{m.\,m-1.\,m-2 \;-\;-\;-\;-\; m-\alpha+1}{1.\,2.\,3 \;-\;-\;-\; \alpha}$$

$$\mathrm{N}^m = \frac{m.\,m-1.\,m-2 \;-\;-\;-\;-\; m-r+\alpha+1}{1.\,2.\,3 \;-\;-\;-\;-\; r-\alpha}$$

$$\mathrm{N}^{m-\alpha} = \frac{m-\alpha.\,m-\alpha-1 \;-\;-\;-\;-\; m-r+1}{1.\,2.\,3 \;-\;-\;-\;-\; r-\alpha}$$

hinc $$\mathrm{M}^m \mathrm{N}^{m-\alpha} = \frac{m.\,m-1 \;-\;-\;-\;-\; m-r+1}{(1.\,2.\,3 \;-\;-\;-\; \alpha) \times (1.\,2.\,3 \;-\;-\;-\; r-\alpha)}.$$

23) Patet igitur omnia iſta facta, $\mathrm{B}^m \mathrm{S}^{m-1}$, $\mathrm{C}^m \mathrm{R}^{m-2}$ - - - - habere numeratorem eundem, quippe

 qui

qui ab α non pendet. Vocemus hunc numeratorem breuitatis causa L. Si itaque tribuantur α successiue omnes valores integri ab 1 vsque ad $r-1$, reperietur

$$(2^r-2)T^m = L\left(\frac{1}{1.2.3 - - - r-1} + \frac{1}{(1.2)(1.2.3 - - - r-2)} + \frac{1}{(1.2.3)(1.2.3 - - - r-3)} - - - - + \frac{1}{(1.2)(1.2.3 - - - r-2)} + \frac{1}{1.2.3 - - - r-1}\right).$$

Dicatur haec series fractionum k, ac ducta ipsa in $1.2.3. - - - - - - r$ erit

$$k(1.2.3 - - - - - - r) = \frac{r}{1.} + \frac{r.r-1}{1.2.} + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3.} - - - - - - + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3.} + \frac{r.r-1}{1.2.} + \frac{r}{1.}.$$

Cum vero $\frac{r}{1.} + \frac{r.r-1}{1.2} - - - - + \frac{r.r-1}{1.2} + \frac{r}{1}$, per §. 20, $=$ sit 2^r-2, erit $k = \frac{2^r-2}{1.2.3 - - - r}$, hinc (2^r-2)

$$T^m = \frac{(2^r-2)L}{1.2.3 - - - r} \text{ siue } T^m = \frac{m.m-1.m-2 - - - - m-r+1}{1.2.3 - - - - r},$$

quae formula, cum ea, quam theorema *Newtonianum* suppeditat, plane coincidit.

24) Cum itaque theorema *Newtonianum* verum sit pro coefficiente termini secundi, idem verum quoque erit pro termino tertio, hinc pro quarto, quinto, sexto, ac quocunque eorum, qui hos sequuntur, in infinitum.

DE

DE FVNCTIONVM ALGEBRAICARVM INTEGRARVM FACTORIBVS TRINOMIALIBVS REALIBVS COMMENTATIO.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

1)

Functionem algebraicam integram quamcunque, formae $x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3}$ - - - -, in factores ſimplices huiusmodi, $x+\alpha$, $x+\beta$, $x+\gamma$, etc. numero m reſolubilem eſſe, conſtat ex elementis, vnde cognitum quoque eſt, dari functiones algebraicas integras eiusmodi, quae in meros factores ſimplices reales reſolui nequeunt, ſed inter quorum factores, imaginarii admittendi ſunt, quorum autem numerum ſemper parem eſſe debere, demonſtratum habetur.

2) Cum $x+\alpha$, $x+\beta$ - - -, ſupponantur eſſe factores functionis $x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2}$ - - -, quam in poſterum per $\odot$ indicabimus, combinando, prouti libuerit, binos quoscunque ipſorum, v. g. $x+\alpha$, et $x+\gamma$, etiam productum illorum, ſiue $x^2 \begin{matrix} +\alpha \\ +\gamma \end{matrix} x + \alpha\gamma$, erit factor functionis $\odot$. Factores eiusmodi compoſitos, ex binis ſimplicibus conflatos, quoniam ex tribus conſtant terminis, *trinomiales* vocare mos eſt, vnde functio quaeuis algebraica integra, in meros factores

 trino-

trinomiales, numero $\frac{m}{2}$, ſi m fuerit par, in $\frac{m-1}{2}$ vero trinomiales, atque vnum ſimplicem, reſolui poterit, ſi m fuerit impar.

3) Pronunciant ſcriptores analytici, functionis cuiusuis algebraicae integrae, talem ſemper poſſibilem eſſe reſolutionem in factores trinomiales, vt, ſi m ſit par, meri factores trinomiales reales, atque ſi m ſit impar, meri prodeant factores trinomiales reales, cum vnico factore ſimplici, itidem reali. Occurrit ipſum hoc theorema apud Ill. *Eulerum*, in Introductione ad analyſin infinitorum. Tentauit quoque demonſtrationem ipſius, Vir ſummus, atque pro functionibus quidem, quae non niſi duos continent factores imaginarios, ex ipſis elementis de rei veritate facile conſtat, pro iis vero functionibus, quae quatuor eiusmodi continent factores, admodum ingenioſam ſuppeditauit Vir Illuſtris demonſtrationem. Non extenditur autem demonſtratio iſta vltra huncce caſum, neque ad poteſtates altiores applicari poteſt, quapropter et ipſe Ill. inuentor, non ſummo rigore hoc demonſtratum eſſe, fatetur. Cum itaque ſe mihi demonſtratio directa, ſatis concinna, atque vniuerſalis, minimum quoad functiones algebraicas, obtulerit, operae pretium iudicaui, de ipſa ad Illuſtriſſimam Academiam deferre.

4) Cum factores trinomiales ſpectari queant, quaſi ortum traxerint ex combinatione binorum atque binorum factorum ſimplicium, theorematis veritas, pro functionibus, quae omnes factores ſimplices habent reales, nulla laborat difficultate. Quomodocunque enim com-

combinentur bini atque bini factores simplices, per se tamen patet, factores trinomiales, qui sunt producta eorum, fore reales, modo simplices omnes sint reales. Tota itaque quaestio non spectat nisi eius generis functiones, inter quorum factores simplices imaginarii occurrunt. Cum porro numerus factorum imaginariorum semper sit par, consequens est, si m fuerit impar, functionem ⊙, vnum minimum admittere factorem realem. Sit iste $x+\zeta$, atque si ponatur ⊙ diuidi per ipsum, prodibit functio gradus $m-1$, hinc parium dimensionum, quam vocemus ☾. Cum itaque sit ⊙ $=$ ☾ $\times(x+\zeta)$, sufficit pro hoc casu, monstrasse, functionem ☾ in meros factores trinomiales reales, resolubilem esse. Cum autem ☾ sit functio dimensionum parium, non requiritur, nisi vt theorema nostrum demonstretur pro functionibus parium dimensionum, neque opus est, vt ad functiones impares speciatim respiciatur.

5) Occurrant ergo inter functionis ⊙, quam in posterum parium esse dimensionum semper supponimus, factores imaginarii quidam, numero $2n$, atque demonstratum erit theorema nostrum, modo probare queamus, si $x+\delta$ sit factor imaginarius functionis ⊙, dari inter caeteros factores imaginarios semper aliquem, qui in $x+\delta$ ductus, producit factorem trinomialem realem, ad quam itaque propositionem probandam, tota nostra quaestio reducitur.

6) Sit itaque functionis ⊙ factor imaginarius, $x+m+n\sqrt{-1}$, ad quam formam reduci posse

omnes

omnes eiusmodi factores imaginarios, constat, sitque $x+v+z\sqrt{-1}$ factor, qui in priorem ductus producere supponitur factum reale. Cum ergo sit factorum istorum productum

$$= x^2 \begin{array}{l} +m \\ +n\sqrt{-1} \\ +v \\ +z\sqrt{-1} \end{array} x \begin{array}{l} +mv \\ +nv\sqrt{-1} \\ +mz\sqrt{-1} \\ -nz \end{array}$$

patet, reale hoc esse non posse, nisi talia sint z et v, vt coefficientes huius producti fiant reales, id est, nisi quantitates imaginariae, quas coefficientes inuoluunt, se destruant.

7) Talia itaque esse debent v et z, vt fit $n\sqrt{-1}+z\sqrt{-1}=0$, atque $nv\sqrt{-1}+mz\sqrt{-1}$ pariter $=0$. Obtinemus autem has aequationes reducendo, $z=-n$, atque $v=+m$. Factor itaque imaginarius, qui cum $x+m+n\sqrt{-1}$ combinatus producit factum reale, alius non esse poterit, nisi iste $x+m-n\sqrt{-1}$. Probandum itaque nobis incumbit, si fuerit $x+m+n\cdot\sqrt{-1}$ factor functionis $\odot$, necesse tum esse, vt quoque $x+m-n\sqrt{-1}$ huius functionis factor existat.

8) Ponatur $m=\alpha \operatorname{cos}.\Phi$, et $n\sqrt{-1}=\alpha \operatorname{sin}.\Phi\sqrt{-1}$, atque erit $\alpha=\frac{m}{\operatorname{cos}.\Phi}=\frac{n}{\operatorname{sin}.\Phi}$, vnde fit $\frac{m}{n}=\frac{\operatorname{cos}.\Phi}{\operatorname{sin}.\Phi}=\operatorname{tang}.\Phi$, siue formulam inuertendo $\Phi=\operatorname{A\,tang}.\frac{m}{n}$, atque $\alpha=\frac{m}{\operatorname{cos}.\operatorname{A\,tang}.\frac{m}{n}}$. Factor itaque $x+m+n\sqrt{-1}$, et ita exprimi potest, vt sit $x+\alpha\operatorname{cos}.\Phi+\alpha\operatorname{sin}.\Phi\sqrt{-1}$ intelligendo sub Φ arcum, cuius tangens est $=\frac{m}{n}$, posito radio $=1$, sub α vero quantitatem $\frac{m}{\operatorname{cos}.\operatorname{A\,tang}.\frac{m}{n}}$.

9) Si

9) Si iam quantitas $x + \alpha \cos. \Phi + \alpha \sin \Phi \sqrt{-1}$, sit factor functionis $\odot$, ex elementis constat, si quantitas $-\alpha(\cos. \Phi + \sin. \Phi \sqrt{-1})$ substituatur in functione loco x, totam tum functionem euanescere debere. Substitutio autem ista admodum facile perficitur. Cum nempe sit $x = -\alpha (\cos \Phi + \sin \Phi \sqrt{-1})$, erit

$$x^2 = +\alpha^2 (\cos. 2\Phi + \sin. 2\Phi \sqrt{-1})$$
$$x^3 = -\alpha^3 (\cos. 3\Phi + \sin. 3\Phi \sqrt{-1}), \text{ atque generatim}$$
$$x^m = \pm \alpha^m (\cos. m\Phi + \sin m\Phi \sqrt{-1})$$

vti demonstratum habetur apud Ill. *Eulerum* in Introd. ad Anal. infin. Tom. I. pag. 98. Si iam substitutionem istam actu perficiamus, obtinebimus:

$$\left.\begin{array}{l} +\alpha^m \cos. m\Phi - a\alpha^{m-1} \cos.(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2} \cos.(m-2)\Phi - - - - - - \\ (+\alpha^m \sin m\Phi - a\alpha^{m-1} \sin.(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2} \sin (m-2)\Phi - -) \times \sqrt{-1} \end{array}\right\} = 0$$

Ponatur $\alpha^m \cos. m\Phi - a\alpha^{m-1} \cos.(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2} \cos.(m-2)\Phi - - - - = P$

et $\alpha^m \sin. m\Phi - a\alpha^{m-1} \sin.(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2} \sin.(m-2)\Phi - - - - = Q$

ac erit $P + Q\sqrt{-1} = 0$.

10) Si $P + Q\sqrt{-1}$ sit $= 0$, consequens inde est, esse $P = 0$, atque $Q = 0$; nisi enim hoc esset, concludendum foret, esse $Q\sqrt{-1} = -P$, id est quantitatem imaginariam, reali, quod contradictorium esse, per se patet. Cum ergo sit $P = 0$, et $Q = 0$, erit non solum $P + Q\sqrt{-1} = 0$, sed etiam $P - Q\sqrt{-1} = 0$.

11) Vt iam determinare queamus, an factor simplex, $x + m - n\sqrt{-1}$, qui adhibendo denominationes §. 8. assumtas, transit in $x + \alpha \cos. \Phi - \alpha \sin. \Phi \sqrt{-1}$, quique solus est, qui cum priori combinatus

productum reale efficere poteſt, ſit quoque factor functionis ⊙, ſubſtituatur quantitas $-\alpha(\text{coſ.}\,\Phi - \text{ſin.}\,\Phi\sqrt{-1})$, loco x, et diſpiciatur, an hic valor functionem ⊙ euaneſcere faciat. Quoniam autem

$$x^2 = +\alpha^2(\text{coſ.}\,2\,\Phi - \text{ſin.}\,2\,\Phi\sqrt{-1})$$
$$x^3 = -\alpha^3(\text{coſ.}\,3\,\Phi - \text{ſin.}\,3\,\Phi\sqrt{-1})$$

et generatim $x^m = \pm\alpha^m(\text{coſ.}\,m\Phi - \text{ſin.}\,m\Phi\sqrt{-1}$, functio ⊙ per ſubſtitutionem iſtam, tranſit in

$$+\alpha^m\text{coſ.}\,m\Phi - a\alpha^{m-1}\text{coſ.}(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2}\text{coſ.}(m-2)\Phi \ldots$$
$$(-\alpha^m\text{ſin.}\,m\Phi + a\alpha^{m-1}\text{ſin.}(m-1)\Phi - b\alpha^{m-2}\text{ſin.}(m-2)\Phi \ldots(\times\sqrt{-1}$$

vnde fit, ſi denominationes §. 10. aſſumtas, vſurpemus $P - Q\sqrt{-1}$, quae quantitas, ſi fuerit nulla, indicio hoc erit, quantitatem $x + \alpha\,\text{coſ.}\,\Phi - \alpha\,\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{-1} = x + m - n\sqrt{-1}$, eſſe factorem functionis ⊙. Supra autem §. 10. probatum iam dedimus, fieri non poſſe, vt ſit $x + m + n\sqrt{-1}$ factor functionis ⊙, ſiue vt ſit $P + Q\sqrt{-1} = 0$, niſi fuerit quoque $P - Q\sqrt{-1} = 0$, ſiue $x + m - n\sqrt{-1}$ factor eiusdem functionis.

12) Perſpicuum hinc tandem eſt, $x + m + n\sqrt{-1}$; non poſſe eſſe factorem functionis ⊙, niſi $x + m - n\sqrt{-1}$ quoque ipſius factor exiſtat, atque factorem ipſa habeat trinomialem realem, huncce, $x^2 + 2mx + m^2 - n^2$. Negotium itaque nobis propoſitum, abſolutum iam eſt, aſt dubio tamen adhuc occurrere debemus, quod ſubnaſci poſſet, circa caſum, vbi functio ⊙ plures habet factores aequales, vbi nempe factor imaginarius, $x + m + n\sqrt{-1}$, bis aut ter, aut pluribus vicibus functionis huius

huius factor exiſtit. Videri nempe poſſet, demonſtrationem a me prolatam, euincere quidem, ſi $x+m+n\sqrt{-1}$, ſit factor functionis ☉, etiam $x+m-n\sqrt{-1}$, inter reliquos factores occurrere debere, aſt non probare ipſam, quod toties occurrere debeat poſterior, quoties prior occurrit, quod tamen, ſi contingat non eſſe, euidens eſt, reſolutionem in meros factores trinomiales reales ſuccedere non poſſe.

18) Leui autem negotio hoc dubium aufertur. Si nempe functio ☉ habeat quantitatem $x+m+n\sqrt{-1}$, n vicibus pro factore, patet ex demonſtratione prolata, minimum vna vice $x+m-n\sqrt{-1}$, fore eiusdem functionis factorem. Diuidatur ergo functio ☉ per factorem trinomialem $x^2+2mx+m^2-n^2$, atque prodeat

$$x^{m-2}+a'x^{m-3}+b'x^{m-4}+c'x^{m-5}\ldots\ldots = ☾$$

inter cuius factores $x+m+n\sqrt{-1}$, adhuc $n-1$ vicibus occurrit. Haec itaque functio, vi demonſtrationis noſtrae, denuo minimum vna vice habebit factorem $x+m-n\sqrt{-1}$. Si ergo denuo diuidatur functio ☾, per $x^2+2mx+m^2-n^2$, atque prodeat

$$x^{m-4}+a''x^{m-5}+b''x^{m-6}+c''x^{m-7}\ldots\ldots = ☿$$

quae functio, $x+m+n\sqrt{-1}$, $n-2$ vicibus pro factore habebit, euidens eſt, et ipſam, minimum vna vice, factorem $x+m-n\sqrt{-1}$ habituram. Perſpicuum autem eſt, continuari poſſe hanc argumentandi methodum, vsquedum poſt n diuiſiones, peruentum ſit ad functionem

$$x^{m-2n}+\alpha x^{m-2n-1}+\beta x^{m-2n-2}\ldots\ldots ♄,$$

 inter

inter cuius factores, $x+m+n\sqrt{-1}$, vlterius non occurrit. Inter huius autem functionis factores, etiam $x+m-n\sqrt{-1}$ vlterius occurrere nequit. Si enim haec quantitas foret factor ipsius $\mathfrak{z}$, ex demonstratione nostra abunde patet, etiam inuersim necesse est, vt tum sit quoque $x+m+n\sqrt{-1}$ ipsius factor. Ast locum non habet posterius, quoniam per institutas divisiones numero n, hic factor penitus sublatus est. Manifestum ergo est, si $x+m+n\sqrt{-1}$ pluries occurrat inter factores functionis cuiusdam, totidem exacte vicibus etiam occurrere debere alterum, $x+m-n\sqrt{-1}$.

SOLVTIO.

SOLVTIO PROBLEMATIS CVIVSDAM AD MAXIMA MINIMAVE PERTINENTIS.

Auctore

STEPH. RVMOWSKI.

1)

Cum commercium epistolicum iuniorem *Eulerum* inter et me intercederet, in litteris mense Ianuario anni praeterlapsi ad me datis, significauit, se problema *Data altitudine Coni determinare figuram basis, vt conus inter omnes alios eiusdem superficiei maximam habeat soliditatem* a patre propositum soluisse, voluitque vt ego in soluendo problemate vires meas experiar. Tentaui igitur eiusdem problematis solutionem, et partem ad eum transmisi. Interea autem ipsam solutionem humanissime mecum communicauit, qua accepta animus incessit, vt meam quoque ad finem perducerem. Exhibita igitur mea solutione, *Euleri* ex litteris excerptam sistam, quo appareat diuersitas solutionum.

2) Sit figura basis AMN, quae vtique in se redeat necesse est. Incidat demissum ex vertice V perpendiculum in D, et sit $VD = a$, per punctum D ducatur vtcunque recta AN, quae pro axi seu diametro curuae quaesitae haberi poterit. Ex puncto D ducatur ad curuam recta DM, et alia ei infinite propinqua Dm, et dicatur $DM = z$, erit $rm = dz$. Statuatur insuper $ADM = \Phi$, erit $MDm = d\Phi$, $Mr = z d\Phi$ Tab. I. Fig. 4.

 et

et $Mm = \sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}$. Ex puncto D ducatur insuper in tangentem MQ perpendiculum DQ, et prodibunt triangula Mmr et DQM similia, qua propter erit $DQ = \frac{zzd\Phi}{\sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}}$ et $QM = \frac{zdz}{\sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}}$. Hinc $VQ = \sqrt{(VD^2 + DQ^2)} = \sqrt{aa + \frac{z^4 d\Phi^2}{dz^2 + zzd\Phi^2}}$ $= \frac{\sqrt{(aadz^2 + (aa + zz)zzd\Phi^2)}}{\sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}}$. Elementum ergo superficiei VMm erit $= \frac{Mm.VQ}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(aadz^2 + (aa+zz)zzd\Phi^2)}$ et superficies arcui AM respondens erit $= \frac{1}{2}\int\sqrt{(aadz^2 + (aa + zz)zzd\Phi^2)}$. Cuius integrale ita capi debet, vt posito $\Phi = 0$, ipsum euanescat. Elementum autem areae baseos $DMm = \frac{1}{2}zzd\Phi$ et hinc area ADM $= \frac{1}{2}\int zzd\Phi$, soliditas autem partis coni arcui AM respondentis erit $= \frac{1}{6}a\int zzd\Phi$. Commune ergo omnibus conis debet esse $\frac{1}{6}a\int zzd\Phi$, et maximum minimumue $\frac{1}{2}\int\sqrt{(aadz^2 + (aa + zz)zzd\Phi^2)}$, quae expressio posito $dz = pd\Phi$ transibit in sequentem $\frac{1}{2}\int d\Phi \sqrt{(aapp + (aa + zz)zz)}$.

3) Comparentur nunc hae expressiones secundum regulas a Celeberrimo *Eulero* datas cum formula $\int Zd\Phi$ in qua Z ponitur functio quaecunque ipsarum Φz et p atque ponatur $dZ = Md\Phi + Ndz + Pdp + Qdq$ etc. prior ergo expressio dabit $Z = zz$, quod differentiatum et comparatum cum dZ dat $M = 0$ $N = 2z$, $P = 0$ etc. Posterior autem $Z = \sqrt{(aapp + (aa + zz)zz)}$. Hinc $M = 0$, $N = \frac{(aa + 2zz)z}{\sqrt{(aapp + zz(aa + zz))}}$ et $P = \frac{aap}{\sqrt{(aapp + zz(aa + zz))}}$. Per easdem ergo maximorum et minimorum regulas debebit esse

$$\alpha(N - \frac{dP}{d\Phi}) = 2\beta z.$$

Ponatur $\frac{\beta}{\alpha} = cc$, et prodibit $N - \frac{dP}{d\Phi} - 2ccz = 0$, quae ducta in $pd\Phi$ dabit $Npd\Phi - pdP - 2c^2zpd\Phi = 0$ seu

Ndz

$N dz - p dP - 2cczdz = 0$. Hinc $N dz + p dP - 2cczdz = d.Pp$. Quod integratum dabit

$$\surd(aapp + zz(aa+zz)) - cczz = Pp + \text{Const.}$$

Posita constante $= bb$ et restituto valore ipsius P obtinebimus $\frac{zz(aa+zz)}{\surd(aapp+zz(aa+zz))} = bb + cczz$, vnde p definietur sequentem in modum $ap = \frac{z\surd(zz(aa+zz)^2 - (aa+zz)(bb+cczz)^2)}{bb+cczz}$ et ob $p = \frac{dz}{d\Phi}$ nanciscimur aequationem figuram baseos exprimentem

$$d\Phi = \frac{adz(bb+cczz)}{z\surd(zz(aa+zz)^2 - aa+zz)(bb+cczz)^2)} \text{ et}$$

$$\Phi = \text{Const.} + \int \frac{adz(bb+cczz)}{z\surd(zz(aa+zz)^2 - (aa+zz)(bb+cczz)^2)}.$$

vbi constans post integrationem ita definiri debet, vt posito $\Phi = 0$; z obtineat datum valorem, eum nempe quem habet, si punctum M transferatur in A. Toties ergo curuae problemati satisfacientes prodibunt algebraicae, quoties $\int \frac{adz(bb+cczz)}{z\surd(zz(aa+zz)^2 - (aa+zz)(bb+cczz)^2)}$ praebet arcum circuli commensurabilem arcui Φ.

4) Haec erant, quae ad *Eulerum* priusquam eius solutionem acceperim transmisi. Cum aequatio inuenta in genere integrationem admittere non videatur, ad casus speciales erit descendendum. Ponatur in aequatione inuenta $\frac{bb}{cc} = aa$, seu $bb = aacc$, et habebimus pro natura curuae quaesitae sequentem aequationem $d\Phi = \frac{accdz}{z\surd(zz - c^4(aa+zz))}$ quae mutari poterit in sequentem $d\Phi = \frac{acc}{\surd(1-c^4)} \cdot \frac{dz}{z\surd(zz - \frac{aac^4}{1-c^4})}$ et posito breuitatis gratia $\frac{acc}{\surd(1-c^4)} = \frac{1}{f}$, prodibit $d\Phi = \frac{dz}{z\surd(ffzz - 1)}$. Vnde facta reductione prodibit $\frac{zzd\Phi}{\surd(zzd\Phi^2 + dz^2)} = \frac{1}{f}$. At $\frac{zzd\Phi}{\surd(zzd\Phi^2 + dz^2)}$ est perpendiculum ex centro D in tangentem demissum, quod quia est constans $= \frac{acc}{\surd(1-c^4)}$,

curua

curua problemati satisfaciens hoc casu erit circulus, radio $\frac{acc}{\sqrt{(1-c^4)}}$ descriptus.

5) Aliae atque aliae curuae problemati satisfacientes obtinebuntur, prouti constantes, quae in aequationem naturam curuae exprimentem ingrediuntur, determinentur. Nunc solutionem *Euleri* eius verbis conceptam tradam. Sit ACB basis coni, altitudo eius $OC = a$. Ponatur $CP = x$, $PM = y$, $dy = pdx$ et habebitur soliditas coni $= \frac{1}{3} a \int y\, dx$. Superficies autem $= \frac{1}{2} \int dx \sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$. Quaestio igitur et hoc modo enunciari poterit, vt inter omnes curuas AMB, quibus idem valor formulae $\int y\, dx$ conueniat, seu quae eandem aream includant, definiatur ea, pro qua valor huius formulae fiat minimus. Ad quod soluendum, constat, primo vtriusque harum formularum valorem differentialem, seu, vti alio modo vocatur, variationem, inuestigari, tum vero alterum multiplo cuiuscunque alterius aequalem statui oportere. Quodsi ergo hi valores differentiales, seu variationes, praefixione litterae δ indicentur, aequatio pro figura basis ita exprimetur $4\delta \int y\, dx = \delta \int dx \sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$. Cum igitur negotium ad inuestigationem harum variationum perducatur, ex methodo maximorum et minimorum contemplemur hanc formulam $\int Z dx$, in qua Z sit functio quaecunque, tam variabilium x et y, tam earum differentialium, seu posito $dy = pdx$, quantitatis p, quandoquidem haec forma binas nostras complectitur. Quia ergo Z est functio quantitatum finitarum x, y et p, ea differentiata talem praebebit formam $dZ = M dx + N dy + P dp +$ etc. et quouis casu quantitates

Tab. I. Fig. 5.

titates M, N et P innotescent, quibus inuentis dabitur formulae $\int Z\,dx$ valor differentialis. Pro priori ergo formula $\int y\,dx$, quia $Z = y$, erit $M = 0$; $N = 1$ et $P = 0$. Vnde eius variatio erit vt 1. Pro altera vero formula $\int dx\, \surd(aa(1+pp)+(y-px)^2)$ erit eodem modo $M = \frac{-p(y-px)}{Z}$, $N = \frac{y-px}{Z}$ et $P = \frac{aap-x(y-px)}{Z}$. Vnde litteris breuitatis gratia retentis erit huius alterius formulae valor differentialis vt $N - \frac{dP}{dx}$. Quare pro figura basis coni consequimur hanc aequationem $m = N - \frac{dP}{dx}$ denotante m numerum constantem, euolutis omnibus aequatio abibit in hanc

$$m\,dx = \frac{2(y-px)}{Z} - \frac{(aa+xx)\,dp}{Z} + \frac{(aap-x(y-px))^2\,dp}{Z^3}$$

Bini postremi termini aequationis hoc modo in vnam summam colligentur $-\frac{aadp}{Z^3}(aa+xx+yy)$ ita vt nostra aequatio hanc formam induat

$$\text{(A)} \quad m\,dx = \frac{2(y-px)\,dx}{Z} - \frac{aa(aa+xx+yy)\,dp}{Z^3}$$

multiplicata ea per p prodibit (B) $m\,dy = \frac{2(y-px)\,dy}{Z} - \frac{aap\,dp(aa+xx+yy)}{Z^3}$. Fiat combinatio (A) $x +$ (B) y ea dabit

$$m(x\,dx + y\,dy) = \frac{2(x\,dx+y\,dy)(y-px)}{Z} - \frac{aa(x+py)(aa+xx+yy)}{Z^3}$$

quae integrata posito $\frac{1}{2}m = n$, et adiecta constante nab

$$n(xx+yy+ab) = \frac{(aa+xx+yy)(y-px)}{Z}$$

hinc posito $b = a$ circulus elicietur.

6) Cum ex aequatione $n = \frac{y-px}{Z}$ non statim pateat curuam quaesitam esse circulum, et *Eulerus* id non exponat, lubet eius rei hic demonstrationem adiicere. Cum sit $n = \frac{y-px}{Z}$, sumtis quadratis habebimus tandem $\frac{nnaa}{1-nn}(1+pp) = (y-px)^2$. Ponatur $y = u$, x et

prodibit $dy = udx + xdu = pdx$ Vnde $\frac{du}{p-u} = \frac{dx}{x}$, et aequatio praecedens mutabitur in sequentem $\frac{nnaa(1+pp)}{1-nn} = (u-p)^2 xx$, sumendis logarithmis fit $l\frac{nnaa}{1-nn} + l(1+pp) = 2l(u-p) + 2lx$, et differentialibus $\frac{pdp}{1+pp} = \frac{du-dp}{u-p} + \frac{dx}{x}$. Hinc ob $\frac{du}{p-u} = \frac{dx}{x}$ prodibit $1 + pu = 0$, quod ob $p = \frac{dy}{x}$ et $u = \frac{u}{x}$ post integrationem dat $xx + yy = \text{Const.}$ quod manifesto est ad circulum abscissis a centro computatis. Pergit *Eulerus*:

7) Aequatio $n(ab + xx + yy) = \frac{(aa+xx+yy)(y-px)}{z}$ porro per substitutionem $y - px = u\sqrt{(1+pp)}$ hanc suppeditat aequationem $\frac{n(ab+xx+yy)}{aa+xx+yy} = \frac{u}{\sqrt{(aa+uu)}}$, iam conemur omnia per nouam variabilem determinare, at substitutio assumta dat per differentiationem (C) $x = \frac{du}{dp}\sqrt{(1+pp)} - \frac{pu}{\sqrt{(1+pp)}}$. Vnde oritur ob $y = px + u\sqrt{(1+pp)}$. (D) $y = -\frac{pdu}{dp}\sqrt{(1+pp)} + \frac{u}{\sqrt{(1+pp)}}$. Statuatur porro breuitatis gratia $\frac{u}{\sqrt{(aa+uu)}} = nU$, erit aequatio pro curua $\frac{ab+xx+yy}{aa+xx+yy} = U$, hinc $xx+yy = \frac{aaUU-ab}{1-U} = \frac{du^2}{dp^2}(1+pp) + uu$, ex qua restat, vt p per u vel U determinetur, tunc x et y ex (C) et (D) per solam variabilem expressa habebimus: Cum igitur sit $\frac{du^2}{dp^2}(1+pp) + uu = \frac{aaUU-ab}{1-U}$ erit statim

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{dU\sqrt{(1-U)}}{\sqrt{(aaU-ab-uu(1-U))}}$$

Si pro u ex antecedentibus valor per U expressus substituatur, aequatio separata integrari poterit per signum summatorium. Hinc p innotescet per U, ideoque etiam per u, et problema erit solutum.

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DILVCIDATIONES DE RESISTENTIA FLVIDORVM.

Auctore
L. EVLERO.

I.

Duplici modo quaeſtio de reſiſtentia, quam corpora ſolida in fluidis mota patiuntur, tractari ſolet, altero negotium tantum vero proxime plerumque conficitur, dum quantitas reſiſtentiae per regulam ſatis concinnam ad calculum reuocatur; altero vero reſiſtentiae doctrinam ex ipſa fluidorum natura et preſſione, quam in corpora exerunt, per profundiſſimas Hydrodynamicae inueſtigationes conſtituere Geometrae ſunt conati. Quo poſteriori modo ſi negotium ad finem perducere liceret, omnia, quae ad menſuram reſiſtentiae pertinent, inde accuratiſſime definiri poſſent, neque amplius coacti eſſemus, ad modum priorem confugere, quo prope tantum vera reſiſtentiae magnitudo exhibetur. Verum etiam nunc tam longe ab iſta perfecta reſiſtentiae cognitione abeſſe videmur, vt priori modo, etiamſi eius defectum probe norimus, minime carere queamus, ſed eo potius, quoties reſiſtentia indaganda occurrit, vti debeamus.

II. Prior autem modus, quo Newtonus plurimum eſt vſus, etiamſi eius aberrationem a veritate non ignoraſſe videatur, hac regula ad calculum inprimis accommodata continetur, vt resistentia rationem compositam sequi censeatur, ex ratione duplicata celeritatis, qua fluidum impingit, et ratione pariter duplicata sinus anguli, quem directio impulsionis cum superficie percussa constituit. Hinc ergo si pro allisione fluidi perpendiculari, vbi angulus ille fit rectus, resistentiae quantitatem nouerimus, facile erit, eam pro quauis allisione obliqua assignare. At vero si fluidum perpendiculariter superficiem quampiam planam feriat, resistentia aequalis aestimatur ponderi columnae eiusdem fluidi, cuius basis sit ipsa superficies percussa, altitudo vero congruat cum ea, ex qua graue cadendo ipsam fluidi celeritatem esset impetraturum.

III. Haec regula cum ob facilem vsum in calculo, tum vero ideo potissimum commendari meretur, quod a veritate plerumque haud notabiliter abludere deprehendatur. Nam quod ad principia attinet, quibus innititur, nullum plane est dubium, quin ea nimis sint vaga, atque a vero statu, ad quem accommodantur, remota, quam vt conclusio inde deducta pro certa admitti queat. Maximam enim partem haec regula est petita ex collisione corporum, dum fluidum continuo in corpus data celeritate et secundum directionem motus sui impingere, conflictumque exerere concipitur. At vero certum est, fluidum neutiquam in corpus hoc modo impingere, sed antequam ad corpus perueniat, tam suam directionem, quam celeritatem, ita inflectere, vt cum ad corpus peruenerit, secundum ipsam eius superficiem praeterlabatur, nullamque aliam vim in corpus exerat, praeter pressionem, quae ipsi in

singulis

ſingulis contactus punctis conuenit. Quam ob rem concluſio, quae ex ratiocinio tam peruerſo deduci ſolet, minime pro vera haberi poteſt.

IV. Quo hoc clarius perſpiciamus, flumen concipiamus, quod data celeritate ſecundum directionem OV feratur; iam vero in hoc flumine corpus collocari AME, quod quantam vim a flumine ſit ſuſtentaturum, definiri oporteat. Atque per regulam vulgarem haec vis ita inueſtigatur, quaſi in ſingula corporis puncta *M* vena aquea I*M* ſecundum directionem fluminis, eaque celeritate, qua flumen progredi aſſumimus, incurreret, ac per conflictum verum corpori vim inferret. Interim tamen ſi actionem fluminis, prouti re vera ſe habet, perpendamus, mox percipiemus, tractus ſeu quaſi riuulos fluminis, qui ſupra corpus in notabili diſtantia celeritatem ſuam cum directione retinuerant, vti *f*, *f*, *f*, *g*, *g*, *g*, etc. cum propius ad corpus acceſſerint, curſum ſuum inflectere, atque tandem iuxta corporis latera defluere, quae deflexio in figura exhibetur. Ex quo manifeſtum eſt, nusquam eiusmodi conflictum fieri, qualis in conſtitutione regulae vulgaris concipi ſolet. Tab. II. Fig. 1.

V. Quin potius hinc manifeſtum eſt, iſtam aquae vim, quae ſub reſtiſtentiae nomine comprehenditur, a preſſione aquae iuxta corpus praeterlabentis proficiſci, quam idcirco preſſionem inueſtigari neceſſe eſt, ſi reſiſtentiam accurate aſſignare velimus. Quare vera ratio reſiſtentiam determinandi, qua alter modus ſupra memoratus continetur, huc redit, vt preſſionem

quam

quam corpus in ſingulis punctis a fluido ſuſtinet, definiamus: at vero haec quaeſtio altioris eſt indaginis, quam vt eius enodationem a profectibus, quos adhuc in hydrodynamicis fecimus, expectare queamus. Hic enim ſinguli riuuli, ex quibus fluuius conſtat, et quemadmodum curſum ſuum circa corpus inflectant, conſiderari, atque omnes illae lineae curuae *ff*, *gg*, *hh*, etc. quaſi ſub communem aequationem redigi debent; vnde deinceps aquae celeritas in ſingulis cuiusque riuuli punctis concludi queat. Hac autem demum celeritate cognita, ipſam preſſionem, cui hoc negotium innititur, aſſignare licebit, a tam perfecta autem motus fluidorum cognitione adhuc longe abſumus.

VI. Quae Celeb. *Alembertus* de reſiſtentia fluidorum in peculiari Tractatu eſt commentatus, hanc ſummam difficultatem, veram reſiſtentiam inueſtigandi, magis demonſtrant, quam leuant. Cum enim Vir acutiſſimus omni adhibita ſagacitate hanc quaeſtionem adaequate explicare haud valuerit, vt inde reſiſtentia, quam quaeuis corpora in aqua mota patiuntur, aſſignari poſſit: magno hoc nobis eſt argumento, quaeſtionem tantopere eſſe difficilem, vt vires humanas tantum non ſuperare videatur. Quae ego etiam nuper in aliquot diſſertationibus de motu fluidorum expoſui, nullum ſubſidium huc afferunt. Etiamſi enim omnia, quae ad motum fluidorum pertinent, ad aequationes analyticas reduxi, tamen ipſa Analyſis minime adhuc ita eſt exculta, vt illis aequationibus reſoluendis ſufficiat. Quae porro alii de hoc argumento ſunt meditati, haud feliciori ſucceſſu vires ſuas ingenii ſunt experti.

VII. Etſi

VII. Etsi autem determinatio pressionis in genere, hoc est in omnibus punctis fluidi, tam a tractu singulorum riuulorum, quam ab aquae celeritate pendet, tamen inueni, si quaestio ad vnicum riuulum restringatur, tum pressionem in singulis eius locis per solam celeritatem definiri. Quare cum corpus AME ab vnico riuulo f, f, f contingatur, omnisque resistentia ab eius pressionibus solis oriatur, si modo pressionem huius riuuli in singulis eius punctis cognosceremus, inde facile resistentiam, quam corpus a fluuio sustinet, definire possemus. Tametsi autem ista celeritatis cognitio per riuulum corpori proximum non minoribus difficultatibus sit subiecta, quam determinatio pressionis generatim considerata, tamen hoc inde lucri nanciscimur, vt si nobis licuerit, siue per experientiam, siue vndecunque, celeritatem fluidi iuxta corpus praeterlabentis cognoscere, hoc solum nobis satis sit futurum ad veram resistentiam corporis accurate determinandam.

VIII. Si enim ponamus celeritatem, qua aqua circa elementum corporis M praeterlabitur, debitam esse altitudini v, atque assumamus, vt vulgo fieri solet, omnes riuulos in plano horizontali versari, ex iis, quae demonstraui de motu fluidorum in genere, colligitur, pressionem aquae in puncto M exprimi per altitudinem $k-v$, ita vt quantitas k pro toto riuulo f, f, f, f, eundem obtineat valorem, ideoque in praesenti negotio pro constanti haberi queat, etiamsi pro diuersis riuulis diuersos sortiatur valores. Hanc autem pressionem $k-v$ ita interpretari oportet, vt corpus in M a pondere columnae aqueae, cuius altitudo sit $=k-v$, follicitari fit cenfendum. Pro bafi fcilicet huius columnae fumi debet elementum fuperficiei corporis in M, quod ab ifta vi normaliter vrgebitur, vti in omnibus preffionibus euenit, hincque porro more folito quantitatem totius refiftentiae colligere licebit.

IX. Quanquam autem circa celeritatem aquae apud fingula puncta M nihil habemus exploratum ex Theoria, tamen fi experientiam in fubfidium vocemus, egregias refiftentiae proprietates cognofcemus. Cum enim aucta celeritate in eodem riuulo preffio diminuatur, contra vero augeatur celeritate imminuta, certo affirmare poterimus, in quibus locis corporis AME aqua velocius praeterlabatur, ibi refiftentiam effe minorem, quam iis locis, vbi tardius praeterfluit: quae veritas fi probe perpendatur, plura alia infignia confectaria fuppeditare poterit. Ac merito hoc ingens paradoxon videri debet, quod a maiori celeritate refiftentia minor, a minori autem celeritate refiftentia maior oriatur; quod primo intuitu regulae vulgari directe aduerfari videtur. Sed omnis difficultas euanefcet, fi perpendamus, hic diuerfas fluidi celeritates, quibus eodem tempore fuperficiem corporis ftringit, inter fe comparari. Neque minus certum manet, fi vel fluuius velocius moueatur, vel corpus celerius aduerfus aquam trudatur, refiftentiam quoque maiorem effe futuram.

X. Viciffim ergo vbi per experientiam refiftentia maior deprehenditur, ibi celeritas fluidi praeterlabentis minor fit neceffe eft; cum igitur nouerimus, in

iis

iis superficiei corporis partibus, ad quas directio fluminis OV propius ad perpendicularem accedit, resistentiam esse maiorem, atque omnium maximam, vbi directio fluuii OV ad corporis superficiem sit normalis; in istis locis quoque celeritas fluidi praeterlabentis minor esse debet. Ad angulum scilicet AMI erit respiciendum, qui quo fuerit maior, seu recto propior, ibi celeritas aquae tanto minor sit necesse est, contra autem eo maior, vbi hic angulus diminuitur. In figura igitur exhibita celeritas aquae praeterlabentis circa A erit minima, circa E vero maxima: atque hoc etiam experientia manifesto declarat, qua constat, aquam circa verticem A plerumque fere penitus stagnare, imprimis si angulus OAM fuerit rectus.

XI. Quoniam igitur nouimus per regulam vulgarem, quantumuis debili nitatur fundamento, resistentiam tamen parum a vero aberrantem obtineri, eius beneficio celeritatem aquae iuxta corpus praeterlabentem vero proxime assignare poterimus; et quoniam in eodem riuulo O in singulis locis $ffff$ E amplitudo reciprocam tenet rationem celeritatis, hinc simul amplitudinem istius riuuli corpus contingentis in singulis locis definire licebit. Tum vero porro primo hoc riuulo constituto simili ratione riuulus sequens $fggf$, seu secundus, ex hocque tertius $ghhg$, indeque sequentes vero proxime designari poterunt. Quae determinationes etsi a veritate aliquantum recedere sunt censendae, tamen in tam ardua inuestigatione insigni vsu non carebunt. Quodsi enim iam vero proxime tractum singulorum riuulorum vna cum aquae celeritate cognouerimus,

mus, nullum eſt dubium, quin deinceps multo facilius ſummas difficultates, quibus haec quaeſtio eſt involuta, ſuperare valeamus. Inde ſaltem colligere licebit, quemadmodum aequatio generalis figuram ſingulorum riuulorum complectens debeat eſſe comparata.

XII. Quodſi autem celeritatem fluuii, qua in notabili a corpore diſtantia circa O ſecundum directionem OV mouetur, vel, quod eodem redit, celeritatem, qua ipſum corpus AME in aqua ſtagnante ſecundum directionem AO fertur, debitam eſſe ponamus altitudini c, per regulam vulgarem nouimus, vbi corporis ſuperficies ad directionem fluminis ſit perpendicularis, ibi reſiſtentiam exprimi per ipſam altitudinem c, ſin autem in loco M angulus incidentiae AMI, ducta recta MI directioni AO parallela, ponatur $=\Phi$, per eandem regulam conſtat, fore reſiſtentiam in $M = c$ $\text{ſin.}\,\Phi^2$. Hinc ergo, comparatione inſtituta, ſi aquae iuxta corpus praeterfluentis celeritas in M debita ſtatuatur altitudini v, hanc adipiſcemur aequationem:

$$c\,\text{ſin.}\,\Phi^2 = k - v, \text{ ideoque } v = k - c\,\text{ſin.}\,\Phi^2.$$

Quocirca ex hac formula veram aquae celeritatem ad ſingula corporis puncta M aſſignare valebimus.

XIII. Tantum ergo ſupereſt, vt hinc conſtantem quantitatem k definiamus, quae quidem ex caſu, vbi angulus Φ eſt rectus, facile colligetur. Experientia enim teſtatur, in his locis celeritatem aquae allabentis eſſe nullam, tum vero etiam nulla adeſt ratio, cur aqua, vbi directio fluminis ad ſuperficiem corporis eſt perpendicularis, in hanc potius plagam, quam aliam, dilabelaberetur. Ex quo conficitur, ſi angulus Φ fuerit rectus, ideoque ſin. $\Phi = 1$, tum eſſe oportere $v = 0$; vnde manifeſto fit $k = c$, ſeu iſta conſtans k praeciſe eſt aequalis altitudini fluminis celeritati debitae. Poſita autem $k = c$, habebimus $v = c - c\,\text{ſin.}\,\Phi^2$, ſeu $v = c\,\text{coſ}\,\Phi^2$, hincque $\sqrt{v} = \text{coſ.}\,\Phi.\sqrt{c}$: vnde hanc inſignem proprietatem deriuamus, quod celeritas aquae iuxta corpus ad M praeterlabentis ſit ad veram celeritatem fluminis $\sqrt{c}$, vti coſinus anguli AMI ad ſinum totum. Atque hinc in E, vbi tangens directioni OA eſt parallela, ſeu $\Phi = 0$, erit $v = c$, ſeu celeritas aquae ibi aequalis reſultabit ipſi fluminis celeritati in O.

XIV. Hinc diſcimus, ſi celeritatem nauis, qua vehimur, ex velocitate aquae praeterlabentis aeſtimare velimus, atque nauis ſecundum directionem OA progrediatur, tum in naui eum locum E eſſe eligendum, vbi tangens horizontalis directioni AO ſit parallela. Atque in hoc loco tuto concludere poterimus, celeritatem nauis aequalem eſſe velocitati aquae, quae hic praeterlabitur: ſin autem in alio loco, vti in M, hoc iudicium inſtituere vellemus, eo magis erraremus, quo maior fuerit angulus AMI, nauem ſcilicet nimis paruam reputantes; quoniam celeritas aquae in M praeterlabentis minor eſt celeritate nauis, et quidem in ratione coſinus anguli AMI ad ſinum totum. Interim tamen probe eſt recordandum, has determinationes non ſummo rigore eſſe veras, ſed tantum idoneas ad veritatem appropinquationes.

Tab. II. Fig. 2. XV. Ac regula quidem haec certo fallit in corporis parte posteriori ENB; si enim ponamus, vt in parte anteriori, esse $v = c \cos. \Phi^2$, puppis nauis praecise tanta vi propelleretur, quanta prora repellitur; vnde a puncto E retrorsum formula $v = c \cos. \Phi^2$ eo magis a veritate discedet, quo propius ad B perueniamus; tantum ergo in parte anteriori AME, tanquam toleranter vera, admitti potest. Interim tamen hinc coniectando suspicari poterimus, quomodo motus aquae praeterlabentis circa puppim nauis ENB se sit habiturus. Si enim puppis nihil ad resistentiam conferat, certum est, aquam ab E ad B celeritate vniformi defluere, ea scilicet, quae debeatur altitudini c, et quam iam in E recuperauit. Sin autem in hac parte lentius decurrat, nauis hinc propulsionem accipiet, qua resistentia diminuetur. Fieri autem nequit, vt vsquam euadat $v > c$, quia tunc pressio prodiret negatiua. Hoc enim casu aqua post nauim vacuum relinqueret, et nauis quasi sulcum traheret; vnde ob deficientem pressionem a tergo resistentia vtique augeretur.

XVI. Si igitur puppi nauis ENB eiusmodi figura tribui posset, vt aqua ab E et B progrediendo retardaretur, atque circa N et B minorem habitura esset celeritatem, quam in E, talis figura constructioni nauium esset aptissima iudicanda, quia hoc modo aqua puppim adeo antrorsum propelleret, resistentiamque prorae diminueret. Verum si experientiam consulamus, talem figuram vix dari colligere licet, quin potius omnis cura eo conferri debere videtnr, vt ne alterum incommodum vsu veniat, quo ob vacuum pene navem

vem relictum resistentia adeo augetur. In eo imprimis ergo circa figuram puppis erit elaborandum, vt tale vacuum euitetur, ac puppis ita insensibiliter ad B vsque conuergat, vt aqua eam iugiter sequatur, neque riuulus E f eam vsquam deserat. In hoc etiam insignis illa nauium proprietas versatur, qua puppi talem figuram conciliare student, vt aqua libere ad gubernaculum decurrere queat, quo effectu frustraremur, si aqua circa puppim nauem desereret, neque in gubernaculum allideret.

XVII. Ex celeritate autem aquae iuxta corpus defluentis figuram riuulorum illorum, per quos aqua motum suum inflectit, satis exacte colligere poterimus. Ac primo quidem pro riuulo corpori proximo fff eius amplitudo vbique celeritati reciproce debet esse proportionalis. Cum igitur, posito angulo $AMI = \Phi$, celeritas aquae in M sit $= c \operatorname{cos.} \Phi$, in hoc loco amplitudo riuuli f erit vt $\frac{1}{c \operatorname{cos.} \Phi}$; quia autem hunc riuulum angustissimum concipimus, motusque aquae in M secundum curuae tangentem dirigitur, amplitudo Mq ad curuam statuenda est normalis. Quare in normali QM producta capiatur portio Mq, quae sit vbique vt $\frac{1}{c \operatorname{cos.} \Phi}$, seu vt sec. Φ, ob c constantem, et punctum q erit in curua proxima $fgqe$ riuulum exhibente. Verum hic Φ denotabit quoque angulum PMQ, posita applicata PM ad fluminis directionem OA perpendiculari: vnde erit Mq vt $\frac{MQ}{MP}$. Producatur ergo vbique applicata PM in p, vt pars producta Mp sit constantis magnitudinis, et ex p axi AO agatur parallela pq, normalem QM productum secans in q, eritque punctum q in curua quaesita.

Tab. II. Fig. 3.

XVIII.

XVIII. Cum ergo curua *fgqe* hac praedita sit proprietate, vt sit interuallum M*p* constantis magnitudinis, in puncto E, vbi tangens curuae est axi AO parallela, ipsa riuuli amplitudo E*e*, quae est applicatae PM parallela, hanc amplitudinem habebit, seu vicissim interuallum M*p* vbique isti amplitudini E*e* aequale est capiendum, vnde patet, quemadmodum ab E per M ad A progrediendo amplitudo riuuli continuo augeatur. Hinc ergo pro vertice corporis A, si recta A*d* fuerit ad curuam normalis, puncti *d* ab axe AO distantia D*d* quoque interuallo E*e* erit aequalis, et quoniam hic riuuli amplitudo per ipsam rectam D*d* aestimari debet, in hoc loco D*d* aquae celeritas aequalis est censenda celeritati in E*e*, hoc est verae fluminis celeritati, ita vt hic fluuius adhuc vero suo motu feratur, neque vllam ob corpus oppositum mutationem subierit. Quin etiam, si corpus in A angulo terminetur, quaelibet alia recta A*g* ad axem AO magis inclinata pariter ad curuam in A normalis est censenda, vnde et hic distantia ab axe G*g* ipsi E*e* et D*d* est aequalis, sicque vltra *d* riuulus includetur recta *dgf*, axi AO parallela.

XIX. En ergo figuram primi riuuli *fgdqe* corpori AME proximi et altera parte cum axe AO tum corpore AME terminati, per cuius partem anteriorem O*f*D*d* aqua motu suo naturali affluit. Cum autem vltra D*d* ad corpus appropinquauerit, ob crescentem amplitudinem riuuli, eius motus partim retardabitur, partim directionem ita inflectet, vt ab *f* ad *q* vsque directionem quidem curuae *fq* sequatur, ex altera

tera vero parte primum ſecundum axem DA, tum vero ſecundum ductum curuae AM progrediatur; atque ad A ob maximam amplitudinem motu minimo feratur. At vero ſingula interualla Ee, Mq, Dd, Gg infinite parua ſunt concipienda, quae ſi denuo in duos pluresue riuulos minores ſubdiuidentur, vti in figura biſectio per lineam $f'g'd'q'e'$ repraeſentatur, vnde motus aquae per ſingulos hos riuulos eiusque retardatio et inflexio multo clarius perſpicitur.

XX. Quanquam haec tantum proxime ad veritatem accedere ſunt cenſenda, atque adeo vltra A verſus O lex continuitatis in formula noſtra non amplius obſeruatur, cum vi formulae amplitudo riuuli in d non per rectam Dd ſed Ad eſſet aeſtimanda, tamen haec ita ad veritatem, quam experientia monſtrare ſolet, accedere videntur, vt ſi non per hanc ipſam conſtructionem, tamen per ſatis ſimilem vera figura ſingulorum riuulorum definiri ſit cenſenda. Per experientiam enim certum eſt, tantum in modica a corpore diſtantia motum demum fluminis perturbari incipere, ita vt, cum retardetur, tum circa corpus inflectatur, omnino vti delineatio riuulorum ſecundum formulam noſtram facta manifeſto declarat. Atque in parte corporis antica AME nullum eſt dubium, quin interualla lateralia Mp ſint inter ſe proxime aequalia, pone corpus autem, vt vidimus, haec aequalitas ceſſabit, dum ibi ipſae amplitudines Mq potius aequalitatis legem ſequi videntur.

XXI. Vt a ſimplicioribus incipiam, terminetur corporis pars antica duabus lineis rectis AE et EF, quaTab. II. Fig. 4.

 qua-

quarum haec sit directioni fluminis parallela, illa vtcunque inclinata; haec scilicet figura quasi semissis corporis est spectanda, iudiciumque partis vltra rectam AC sitae pari modo absoluetur, dummodo punctum A maxime promineat. Iam ad riuulos designandos ad rectam inclinatam AE ducantur normales Ad, Ee, tum in dato interuallo $Dd = Ff$, directioni fluminis OA parallelae agantur od, fe, iunganturque puncta d et e recta de; ac linea composita $odef$ repraesentabit tractum riuuli proximi, simili vero modo si interualla $D'd'$, $F'f'$ maiora capiantur, figura riuuli sequentis $o'd'e'f'$ prodibit. Sic quidem secundum regulam inuentam figura riuulorum exprimetur; reuera autem circa d et e anguli obtundentur, quia aqua non subito, sed successiue, directionem mutabit: vnde quo magis riuuli a corpore distabunt, eo magis eorum tractus ad vniformitatem accedet, quin etiam interualla Ff ratione Dd ita insensibiliter diminuentur, vt tandem riuuli satis remoti directioni OA plane paralleli restituantur.

XXII. In primo ergo riuulo aqua per totum tractum $OodD$ celeritatem suam et directionem retinebit, ac mutatio demum in distantia AD a corpore incipiet, nisi quatenus ob incuruationem ad d hoc interuallum aliquantum augeri est censendum. Cum igitur sit $Dd : AD = AB : BE$, erit ista distantia ante corpus, in qua motus aquae perturbari incipit, $AD = \frac{BE}{AB} . Dd = Dd. \text{tang. } BAE$. Vnde si angulus BAE fuerit rectus, hoc spatium in infinitum augeri videtur; verum cum ipsa riuuli amplitudo Dd pro infinite parua

sit

ſit habenda, hinc interuallum ad magnitudinem finitam redigetur. Verum ſi plures poſitiones lateris EA, vt $E\alpha$, inter ſe comparemus, quae omnes eadem latitudine AE ſint praeditae, ponamusque $BE = a$, $BA = x$, et amplitudinem riuuli $Dd = Ff = f$, locus D, vbi motus aquae primum perturbari incipit, a recta BE diſtabit interuallo $BD = x + \frac{af}{x}$, quod fit omnium minimum, ſi $x = \sqrt{af}$, ſeu $B\alpha = \sqrt{BE\,Dd}$, quo caſu angulus $B\alpha E$ iam minime a recto diſtabit. Veriſimile autem eſt, ſi ſpatium $B\alpha$ adhuc minus capiatur, atque adeo euaneſcat, interuallum BD non fieri magis, cum poſitio BE non in maiori diſtantia motum aquae perturbare valeat, quam poſitio αE, vnde et pro poſitione BE haec diſtantia erit cenſenda $BD = 2\sqrt{af}$.

XXIII. Hinc ergo colligere poterimus, quomodo aqua ad ſuperficiem BE, quae ad directionem fluminis eſt normalis, alluat. Scilicet riuulus od, cuius ab axe OB diſtantia ſit Dd, motu inalterato affluet vsque ad d, vt ſit diſtantia $BD = 2\sqrt{BE.Dd}$, hicque demum motum ſuum inflectet ad e progrediens, vnde ſecundum ef lateri EF parallele proferetur, vt ſit diſtantia $Ff = Dd$. Simili modo riuulus remotior viam ſequetur $o'd'e'f'$, curſum ſuum iam in d' inflectens, vt ſit interuallum $BD' = 2\sqrt{BE.D'd'}$. In ſpatiis autem Bd et dd', quia ibi amplitudo riuulorum eſt maxima, motus aquae erit tardiſſimus, et ad B penitus quieſcet, vnde hic reſiſtentia quoque erit maxima, ad E verſus F autem, ob riuuli primi amplitudinem decreſcentem, continuo diminuetur, neque tamen diminutio tanta eſſe poteſt, vt reſiſtentia inde orta a Fig. 5.

regula vulgari notabiliter abhorreat. Haud aliter resistentia comparata fore videtur, si latus EB retro fuerit inclinatum.

Fig. 6. XXIV. Sit iam corporis figura AMF quadrans circuli, atque, ad tractum riuuli proximi inueniendum, ponatur radius circuli $CA = CM = a$, amplitudo riuuli in F, nempe $Ff = f$. Pro puncto quocunque circuli M ponatur abscissa $CP = x$, applicata $PM = y$, vt sit $xx + yy = aa$. Tum producto radio CM in m, vt sit applicata curuae quaesitae $pm = y + f$, erit abscissa $Cp = x + \frac{fx}{y}$. Statuantur ergo pro curua omf coordinatae $Cp = X$, $pm = Y$, vt sit $Y = y + f$ et $x = \frac{(y+f)x}{y} = \frac{Yx}{y}$; eritque $y = Y - f$ et $x = \frac{X(Y-f)}{Y}$ vnde ob $xx + yy = aa$ pro curua omf habebitur haec aequatio $(XX + YY)(Y-f)^2 = aaYY$: quae si f vt parameter variabilis spectetur, innumerabiles istiusmodi curuas omf exhibebit, quae omnes secundum axem AO in infinitum extendentur, ab eoque tandem interuallo $= f$ distabunt, vnico casu excepto, quo $f = o$ ipsum circulum AMF referente. Cum enim sit $XX = \frac{aaYY}{(Y-f)^2} - YY$, si X in infinitum abeat, fiet $Y = f$. Neque vero omnes hae curuae riuulos exhibebunt, propterea quod quaeque sequens non eodem modo ex praecedente definitur, vti prima ex ipso circulo est constructa.

XXV. Si curua AMF fuerit alia curua quaecunque, aequatione inter $CP = x$ et $PM = y$ contenta, et pro riuulo proximo omf ponatur $Cp = X$ et $pm = Y$, erit $Y = y + f$ et $X = x - \frac{f\,dy}{dx}$, siquidem interuallum f fuerit minimum. At quoniam figura sequenquentium riuulorum a praecedentibus fimili modo defi-nitur, fi interuallum $Ff = f$ ftatuatur finitum, curuae omf figura expreffione magis complicata definietur. Ac pro applicata quidem erit $Y = y + f$, verum abfciffa X talis erit functio ipfarum x et f, vt fit $\frac{dy}{dx} + (\frac{dX}{dx})(\frac{dX}{df}) = 0$, vnde natura functionis X determinatur. Si enim po-natur per feriem $X = x - fP + ffQ - f^3R + f^4S$ - etc. exiftentibus P, Q, R, S etc. functionibus ipfius x, cuius quoque data eft functio y, erit

$$dy = (dx - fdP + ffdQ - f^3dR + f^4dS \text{ etc.})(P - 2fQ + 3ffR - 4f^3S + \text{etc.})$$

vnde fit:

$$P = \frac{dy}{dx};\ Q = \frac{-PdP}{2dx};\ R = \frac{-PdQ - 2QdP}{3dx};\ S = \frac{-PdR - 2QdQ - 3RdP}{4dx} \text{ etc.}$$

ficque data curua AM omnes riuulorum curuae om affignabuntur, ac per feriem quidem infinitam.

XXVI. Quoniam hae formulae tantum vero proxime tractum fingulorum riuulorum declarant, fu-perfluum foret, in iis euoluendis operam confumere. Ve-rae tamen formulae ab his non admodum erunt di-verfae, ac fortaffe earum refolutio multo facilior eua-det. Praeterea vero notari conuenit, formulas veras non omnino determinatas effe poffe, nifi forte extenfio fluuii in latitudinem fit infinita; nam vtcunque fluuius circa corpus curfum inflectat, ad ripam tamen eius directionem fequetur. Vnde aequatio inter X et Y ita debet effe comparata, vt pofito $f = 0$, praebeat ip-fam corporis figuram AM; fin autem ipfi f certus quidam valor tribuatur, vt tum figuram ripae exhi-beat. Ita fi ripa rectae AO ad diftantiam $= b$ fuerit

 paral-

parallela, ac ponatur $CF = a$, aequatio inter X et Y has proprietates habere debet, vt posito $f = 0$, inde ipsa curua AM resultet, seu fiat $X = x$ et $Y = y$, sin autem ponatur $f = b - a$, quo casu punctum f in ripam cadet, vt tum fiat $Y = b$ quicunque valor pro X sit prodituruS.

XXVII. Hinc autem satis probabiliter resistentiam definire poterimus, qua corpus AMF in fluido canali OCIH datae amplitudinis $CH = b$ motum patitur, ad quem casum regula vulgaris non est accommodata. Sit igitur celeritas, qua corpus secundum directionem AO promouetur, $= c$, et riuuli axi proximi amplitudo $Oo = e$; amplitudo autem corporis maxima $CF = a$; vt spatium in canali residuum sit $FH = b - a$, per quod cum fluidum omne defluere debeat, assumo enim, id neque supra corpus neque infra defluere posse, amplitudo riuuli in Ff erit $\frac{b-a}{b} e = f$, vbi celeritas debita sit altitudini k vt sit $kff = cee$, seu $k = \frac{cbb}{(b-a)^2}$. Ponatur nunc pro corporis figura $CP = x$; $PM = y$; et pro riuulo $Cp = X$ et $pm = Y$, neque hic erit $Y - y = f$, neque $Y - y = e$, sed medium quendam tenebit valorem, vt sit $Y - y = \frac{b-y}{b} e$. At est $Y - y : Mm = dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, vnde fit $Mm = \frac{b-y}{b} \cdot \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$. Si ergo celeritas aquae ad M defluentis debita sit altitudini v, erit $\frac{(b-y)^2 ee(dx^2 + dy^2)}{bbdx^2} v = cee$, seu $v = \frac{cbbdx^2}{(b-y)^2 (dx^2 + dy^2)}$.

XXVIII. Iam vero fluidi pressio in M est per resistentiae theoriam veram aequalis altitudini $C - v$. Sed quia in F pressio debet esse nulla, euidens est, fore $C = k = \frac{cbb}{(b-a)^2}$, vnde pressio in M erit $= \frac{cbb}{(b-a)^2}$

$-\frac{cbbdx^2}{(b-y)^2(dx^2+dy^2)}$, quae cum ſit normalis ad corporis ſuperficiem, inde naſcetur reſiſtentia ex curuae elemento $V(dx^2+dy^2)$ oriunda $=-\frac{cbbdy}{(b-a)^2}+\frac{cbbdx^2dy}{(b-y)^2(dx^2+dy^2)}$, cuius integrale dabit totam reſiſtentiam. Si amplitudo fluidi b eſſet infinita, foret reſiſtentia $=-cy+c\int\frac{dx^2\,dy}{dx^2+dy^2}$. Si ergo AMF fuerit linea recta AF, ſitque CA$=b$, exiſtente CF$=a$; erit $a-y:x=a:b$, ſeu $a-y=\frac{ax}{b}$, et $dy=-\frac{adx}{b}$, hincque $dx^2+dy^2=\frac{dx^2(aa+bb)}{bb}$. Vnde hoc caſu reſiſtentia erit $=C+\frac{acbbx}{b(b-a)^2}+\frac{bbcbb}{(aa+bb)(b-y)}$ quae per totam rectam AF extenſa fiet:

$$\frac{acbb}{(b-a)^2}+\frac{bbcb}{aa+bb}-\frac{bbcbb}{(aa+bb)(b-a)}=\frac{acbb}{(b-a)^2}-\frac{abbcb}{(aa+bb)(b-a)}$$

quae expreſſio abit in hanc: $\frac{aacb(ab+bb)}{(aa+bb)(b-a)^2}$. At ſi fluidum eſſet infinitum, reſiſtentia foret $=\frac{a^3c}{aa+bb}$; quae ſi ponatur $=R$, illa reſiſtentia erit $=\frac{b(ab+bb)}{a(b-a)^2}R$, ideoque maior, quam R.

XXIX. Experientia quoque hoc ipſum egregie confirmat, qua conſtat corpus in canali anguſtiori promotum, maiorem pati reſiſtentiam, quam in canali ampliori, atque adeo ſi amplitudo corporis CF amplitudini canalis fuerit aequalis, ita vt corpus canalem perfecte expleat, tum reſiſtentiam fieri infinitam. Quia enim fluidum non niſi per ſpatium FH defluere poſſe aſſumitur, hoc ſpatio euaneſcente corpus moueri non poſſet, quin fluidum in minus volumen compingeretur; at fluidum nullius compreſſionis capax aſſumitur. Quod ſi planum ad directionem motus fuerit normale, vti ſi ipſa linea CF$=a$ celeritate Vc in directione CO promoueatur, reſiſtentia in fluido infinito foret $=ac=R$, in in canali autem amplitudinis $CH = b$, eadem linea reſiſtentiam ſuſtinebit $= \frac{bb}{(b-a)^2} R$, quae ergo erit ad illam vt CH^2 ad FH^2. Niſi ergo amplitudo CH prae amplitudine corporis CF fuerit praegrandis, augmentum reſiſtentiae erit notabile. Sic ſi $CH = 2 CF$ erit reſiſtentia $= 4R$, ſi $CH = 3 CF$, erit ea $= \frac{9}{4} R$; ac ſi fuerit $CH = 10 CF$, erit reſiſtentia $= \frac{100}{81} R = 1\frac{19}{81} R$.

XXX. Quanquam autem hinc riuulorum, per quos aqua circa quodque corpus defluit, deſignatio non adeo difficilis videtur, tamen eorum natura cum principio continuitatis vix conciliari poteſt. Cum enim riuulorum partem corporis anticam cingentium amplitudo ſit coſinui anguli, quem tangens corporis cum directione motus conſtituit, reciproce vero ſaltem proxime proportionalis, iuxta partem poſticam vero eorum amplitudo ſit quaſi conſtans, nulla huius anguli, quem Φ vocauimus, functio excogitari poſſe videtur, quae pro parte antica, vbi hic angulus eſt poſitiuus, eius coſinum proxime exhibeat, pro parte autem poſtica, vbi iſte angulus ſit negatiuus, quaſi non amplius ab hoc angulo pendeat, ſed conſtans euadat. Interim hoc certum eſt, amplitudinem riuuli exacte per $\frac{1}{cos. \Phi}$ non exprimi, quia tum ſimilis mutatio circa partem poſticam locum habere deberet, quod veritati repugnat. Cauſam quidem ampliationis riuulorum in parte antica agnoſcimus, ſimulque in parte poſtica abſentiam huius cauſae concedere debemus, ſed quomodo haec cum principio continuitatis, cui calculus eſt ſuperſtruendus, cohaereant, nullo modo patet, ex quo ſumma difficultas,

cultas, qua Theoria motus fluidorum etiam nunc premitur, multo magis perſpicitur, quo propius ad eam pertingere videmur.

XXXI. Quae hactenus tradita ſunt, tantum ad reſiſtentiam plani proprie ſunt referenda, nihilo vero minus reſiſtentia nauis aliusue corporis in aqua moti inde colligi poteſt, dum eius partem ſubmerſam per ſectiones inter ſe parallelas in ſtrata minutiſſima ſectam concipimus. Ita ſi AMENB fuerit ſectio nauis quaecunque horizontalis, eius reſiſtentiam inde quoque aeſtimare licet, ſiquidem aqua reſiſtens in hoc plano permaneat, neque ſurſum vel deorſum iuxta nauem defluat. Quod igitur ad figuram puppis ENB attinet, in genere intelligimus, aquam iuxta eam defluere non poſſe, niſi lineae ENB curuatura ſit vbique valde exigua. Cum enim in Ef nulla detur preſſio, nulla inde vis adeſt, quae motum aquae ab E ſecundum directionem axi AB parallelam progreſſurae inflectat, atque hanc inflexionem a ſola grauitate aquae produci debere, quod quidem in ſectionibus profundioribus citius euenit, quam magis eleuatis. Tum vero, quo velocius nauis promouetur, eo difficilius aquae decurſus incuruatur, et niſi inflexio ENB ſit ſatis parua, aqua nauem deſeret, et ob deficientem ibi preſſionem aquae, reſiſtentia prorae etiam a pondere aquae proram vrgente augebitur, quod ingens vitium nauium reputatur. Tab. II. Fig. 2.

XXXII. Etiamſi autem aqua iuxta puppem ENB bene defluat, neque iſtud incommodum ſit pertimeſcendum, tamen hoc ad facilem gubernaculi actionem, ad quam non minus nauem inſtructam eſſe oportet, non

 ſuffi-

ſufficit. Cum enim aqua fere vsque ad B defluxerit, quia ab altera parte ſimili modo fertur, perinde motum continuare debet, quaſi ſecundum rectam BV obex ipſi obiiceretur, et quia prope B curſum inflectere cogitur, perinde vti in A eſt factum, eius motus eo magis retardabitur, quo maior fuerit angulus ABN, quod quidem in maioribus nauibus vſu venire poteſt, etiam ſi linea ENB ſit arcus circuli admodum magni; in aqua autem circa B fere ſtagnante gubernaculum vix vllam vim exerere valebit. Quocirca neceſſe eſt, vt figura ENB non ſolum lente incuruetur, ſed etiam in B cum axe AB angulum ſatis acutum conſtituat. Interim tamen, ob iſtam aquae retardationem circa B, nauis inde maiorem preſſionem ſuſtinebit, qua reſiſtentia prorae imminuetur, vnde, niſi gubernaculi ratio haberi deberet, angulus fere rectus ad B curſum nauis potius acceleraret, quam retardaret.

XXXIII. Hae autem conſiderationes ad commodiorem euolutionem formularum, quibus vniuerſa Theoria motus fluidorum continetur, viam aperire videntur. Cum enim iſtae formulae in genere pro quocunque loco tam motum fluidi, quam preſſionem, exhibeant, quae ſumma generalitas in cauſa erat, quod hae formulae minus tractabiles euaſerint, ea, quae hactenus ſunt allata, non exiguam ſpem facilioris calculi faciunt, ſi non ſolum riuulos, per quos ſingulae aquae particulae deferuntur, contemplemur, ſed etiam harum curuarum traiectorias orthogonales in calculum introducamus: quoniam enim hae traiectoriae cuiusque riuuli in quoque loco amplitudinem commodiſſime oſtendunt, inde

inde celeritas aquae, quae in quolibet riuulo amplitudini reciproce est proportionalis, aptissime definitur, vnde deinceps pressio per formulam concinniorem exprimi posse videtur. Assumo autem, tam omnem aquam, quam eius motum, in eodem plano esse constitutum, eumque iam ita ad statum permanentem esse perductum, vt riuulorum tractus sint constantes, neque vlli amplius mutationi obnoxiae.

XXXIV. Quo autem haec facilius ad Theoriam resistentiae accommodari queant, omnes determinationes ad figuram corporis AME aquae immissi referri conueniet. Hanc ergo figuram pro fixa habebo, quia in resistentiae inuestigatione perinde est, siue corpus contra aquam stagnantem, siue aqua contra corpus quiescens pari celeritate feratur. Iuxta corpus ergo aqua, quicunque motus ei tribuatur, secundum eius figuram AME praeterfluet, et in maioribus distantiis motus aquae fiet per certas lineas curuas RYS, rys, quibus riuuli constituuntur. Talium riuulorum series intra AME et RYS infinita multitudo concipi debet, quae omnes inter se tantum ratione parametri differant. Sit MYy traiectoria orthogonalis quaecunque, quae ex M egressa omnes riuulos normaliter traiiciat, vti etiam in M ad ipsam curuam datam AME est normalis. Hocque modo puncta riuulorum Y et y inprimis cum puncto M connectuntur, vt magis ad hoc punctum, quam ad aliud quoduis pertinere sint censenda. Tab. III. Fig. 1.

XXXV. Ponamus ergo pro isto puncto M abscissam AP $= s$, et applicata PM exprimetur per certam quandam functionem ipsius s: pro riuulo autem

RYS parameter ſit $=b$, qui pro ſequente rys abeat in $b+db$, pro ipſa autem curua AME euaneſcat. Iam ſitus puncti Y pendebit partim a puncto M, partim a parametro, vnde eius coordinatae, quae ſint $AX=x$, $XY=y$, erunt functiones iſtarum duarum quantitatum s et b; ponamus ergo:

$$dx=Pds+Qdb \text{ et } dy=Rds+Sdb,$$

quae relatio inter x et y ita debet eſſe comparata, vt, poſito $b=0$, ipſam curuam AME praebeat: at ſi ipſi b certus quidem et conſtans valor tribuatur, aequatio ſit proditura pro curua RYS; pro qua ergo erit $dx=Pds$ et $dy=Rds$. Sin autem punctum M fixum ſumatur, variabilitas ſolius parametri b dabit traiectoriam orthogonalem MYy, pro qua ergo ducta applicata proxima xy, et Yz, axi AX parallela, erit $Xx=Qdb$ et $yz=Sdb$; quia pro punctis in eadem traiectoria ſitis quantitas s non variatur.

XXXVI. Cum iam Yy ſit ad curuam RYS normalis, erit ex natura traiectoriarum orthogonalium $zy:Yz=dx:-dy=P:-R$ vnde fit $S:Q=P:-R$ ideoque $PQ+RS=0$. Vt huic conditioni ſatisfaciamus, ponamus ſtatim:

$$Q=RT \text{ et } S=-PT \text{ vt ſit}$$

$$dx=Pds+RTdb \text{ et } dy=Rds-PTdb.$$

Porro autem erit riuuli amplitudo $Yy=db\sqrt{(QQ+SS)}$ $=Tdb\sqrt{(PP+RR)}$, cui cum celeritas aquae in Y, quatenus aqua in eodem riuulo comparatur, ſit reciproce proportionalis, poſita celeritate in $Y=v$, ſtatuamus $v=\frac{B}{T\sqrt{(PP+RR)}}$, vbi B denotat functionem ipſius para-

parametri b tantum. Resoluatur haec celeritas secundum directiones coordinatarum x et y, sintque celeritates deriuatae secundum $AX = u$ et secundum $XY = v$; ac reperitur:

$$u = \frac{BP}{T(PP + RR)} \text{ et } v = \frac{BR}{T(PP + RR)}$$

vnde ob $uu + vv = \vartheta\vartheta$ erit $\vartheta\vartheta = \frac{BB}{TT(PP + RR)}$.

XXXVII. Quia igitur est $\frac{B}{T(PP + RR)} = \frac{T\vartheta\vartheta}{B}$, habebimus:

$$u = \frac{PT\vartheta\vartheta}{B} \quad \text{et } v = \frac{RT\vartheta\vartheta}{B}.$$

Conueniet autem potius ipsas has celeritates u et v in calculum introduci, quam quantitates P et R ibi relinqui, vnde colligetur:

$$P = \frac{Bu}{T\vartheta\vartheta}; \quad R = \frac{Bv}{T\vartheta\vartheta}; \quad Q = \frac{Bv}{\vartheta\vartheta}; \quad S = \frac{-Bu}{\vartheta\vartheta}$$

et $dx = \frac{B}{T\vartheta\vartheta}(uds + Tvdb)$ et $dy = \frac{B}{T\vartheta\vartheta}(vds - Tudb)$ quas ergo formulas integrabiles esse oportet. Quare quia $\vartheta\vartheta = uu + vv$ et B functio ipsius b tantum, facile colligitur, cuiusmodi functiones esse debeant u, v et T, vt his duobus requisitis satisfiat. Siquidem, quod regula vulgaris exigebat, celeritas in quouis riuulo proportionalis esset cosinui anguli, quem curua cum axe facit, seu $\vartheta = \frac{CP}{\sqrt{(PP + RR)}}$, haberemus $Cu = \vartheta\vartheta$, existente C functione ipsius b tantum, ideoque $v = \sqrt{(Cu - uu)}$ seu $u = \frac{\vartheta\vartheta}{C}$ et $v = \frac{\vartheta}{C}\sqrt{(CC - \vartheta\vartheta)}$, ita vt integrabiles esse deberent hae formulae:

$$dx = \frac{B}{CT}ds + \frac{Bdb}{C\vartheta}\sqrt{(CC - \vartheta\vartheta)}; \quad dy = \frac{Bds}{CT\vartheta}\sqrt{(CC - \vartheta\vartheta)} - \frac{B}{C}db.$$

XXXVIII. Verum iam perpendamus, quid Theoria motus fluidorum requirat. Ostendi autem, si pressio aquae in Y exponatur per altitudinem p, et ex viribus acceleratricibus nascatur efficacia $= V$, tum sumtis x et y vtcunque variabilibus, hanc aequationem locum habere debere:

$$p = V - \int \left(u\,dx\left(\frac{du}{dx}\right) + v\,dx\left(\frac{du}{dy}\right) + u\,dy\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\,dy\left(\frac{dv}{dy}\right)\right)$$

Totum ergo negotium huc redit, vt ista formula integrationem actu admittat; nisi enim hoc eueniat, talis motus, qualis per quantitates u et v fingitur, omnino subsistere nequit. Si quaestio de pressione restringatur ad vnicum riuulum, ostendi hoc integrale eo reduci, vt fiat $p = V - \frac{1}{2}\vartheta\vartheta$, vbi $\frac{1}{2}\vartheta\vartheta$ referat altitudinem celeritati aquae debitam, vti iam supra inueni. Verum pro tota motus extensione necesse est, vt illud differentiale, cuius integrale occurrit, sit completum, vti quidem loquendi mos est.

XXXIX. Quodsi formulas hactenus inuentas huc transferre velimus, habemus quidem valores pro dx et dy; verum pro formulis $\left(\frac{du}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ notandum est in differentiatione ita solum x poni variabile, vt y maneat inuariatum; ergo ob $dy = o$ erit $Tudb = vds$ seu $db = \frac{vds}{Tu}$; vnde fit $dx = \frac{Bds}{Tu}$. Quare si ponamus

$$du = K\,ds + L\,db \quad \text{et} \quad dv = M\,ds + N\,db$$

erit in hac hypothesi

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(K\,ds + \frac{Lvds}{Tu}\right) : \frac{Bds}{Tu} = \frac{KTu + Lv}{B}$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(M\,ds + \frac{Nvds}{Tu}\right) : \frac{Bds}{Tu} = \frac{MTu + Nv}{B}$$

Simili-

Similiter pro formulis $(\frac{du}{dy})$ et $(\frac{dv}{dy})$ assumitur x constans, vnde erit $db = \frac{-uds}{Tv}$ et $dy = \frac{Bds}{Tv}$, sicque prodibit:

$$(\frac{du}{dy}) = (Kds - \frac{Luds}{Tv}) : \frac{Bds}{Tv} = \frac{KTv - Lu}{B}$$

$$(\frac{dv}{dy}) = (Mds - \frac{Nuds}{Tv}) : \frac{Bds}{Tv} = \frac{MTv - Nv}{B}.$$

XL. Ex his ergo differentiale superius, cuius integrale in formulam pro p datam ingreditur, abibit in formam sequentem:

$$+ \frac{u}{T\mathfrak{v}\mathfrak{v}}(uds + Tvdb)(KTu + Lv)$$

$$+ \frac{v}{T\mathfrak{v}\mathfrak{v}}(uds + Tvdb)(KTv - Lu)$$

$$+ \frac{u}{T\mathfrak{v}\mathfrak{v}}(vds - Tudb)(MTu + Nv)$$

$$+ \frac{v}{T\mathfrak{v}\mathfrak{v}}(vds - Tudb)(MTv - Nu)$$

quae quatuor formulae statim ad has duas rediguntur:

$$K(uds + Tvdb) + M(vds - Tudb).$$

Cum iam sit $K = (\frac{du}{ds})$ et $M = (\frac{dv}{ds})$ pressio quaesita p sequenti definietur aequatione:

$$p = V - \int((uds + Tvdb)(\frac{du}{ds}) + (vds - Tudb)(\frac{dv}{ds}))$$

seu ob $udu + vdv = \mathfrak{v}d\mathfrak{v}$ habebitur:

$$p = V - \int(ds(\frac{\mathfrak{v}d\mathfrak{v}}{ds}) + Tdb(\frac{vdu - udv}{ds})).$$

XLI. Haec formula adhuc concinnior reddi potest, introducendo praeter ipsam celeritatem $\mathfrak{v}$, eius quoque directionem. Sit ergo Φ angulus quem directio motus in Y cum axe Ao facit, et quia sit $u = \mathfrak{v}\cos.\Phi$ et $v = \mathfrak{v}\sin.\Phi$, conficitur hinc $vdu - udv = -\mathfrak{v}\mathfrak{v}d\Phi$, sicque pressio p definietur per hanc aequationem:

$$p = V - \int(ds(\frac{\mathfrak{v}d\mathfrak{v}}{ds}) - T\mathfrak{v}\mathfrak{v}db(\frac{d\Phi}{ds}))$$

quae

quae non amplius pendet a positione coordinatarum; vtpote arbitraria; et hic quantitates, $\upsilon\upsilon$ et Φ considerandae sunt tanquam functiones ipsarum s et b. Hic vero euidens est, si b sumatur constans, integrationem nullam habere difficultatem, cum prodeat

$$p = V - \tfrac{1}{2}\upsilon\upsilon + D$$

denotante D functionem parametri D; quare si et eius variabilitatis ratio habeatur, esse oportet

$$db\left(\frac{\upsilon d\upsilon}{db}\right) - dD = -T\upsilon\upsilon db\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$$

vnde hoc obtinemus requisitum, vt esse debeat

$\frac{dD}{db} = \left(\frac{\upsilon d\upsilon}{db}\right) + T\upsilon\upsilon\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) =$ functioni ipsius b tantum.

XLII. Verum insuper necesse est, vt formulae differentiales pro dx et dy inuentae fiant completae seu integrabiles; valoribus autem pro u et v substitutis habemus:

$$dx = \frac{B}{T\upsilon}(ds\,\text{cos.}\,\Phi + T\,db\,\text{sin.}\,\Phi)$$

$$dy = \frac{B}{T\upsilon}(ds\,\text{sin.}\,\Phi - T\,db\,\text{cos.}\,\Phi).$$

Quae formulae vt fiant integrabiles necesse est sit: si breuiatis gratia ponamus $\frac{1}{T\upsilon} = \Theta$,

$$\Theta\,\text{cos.}\,\Phi.\frac{dB}{db} - B\Theta\,\text{sin.}\,\Phi\left(\frac{d\Phi}{db}\right) + B\,\text{cos.}\,\Phi\left(\frac{d\Theta}{db}\right) = \frac{B\,\text{cos.}\,\Phi}{\upsilon}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \frac{B\,\text{sin.}\,\Phi}{\upsilon\upsilon}\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)$$

$$\Theta\,\text{sin.}\,\Phi.\frac{dB}{db} + B\Theta\,\text{cos.}\,\Phi\left(\frac{d\Phi}{db}\right) + B\,\text{sin.}\,\Phi\left(\frac{d\Theta}{db}\right) = \frac{B\,\text{sin.}\,\Phi}{\upsilon}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) + \frac{B\,\text{cos.}\,\Phi}{\upsilon\upsilon}\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)$$

quae

quae formulae reducuntur ad has duas:

$$\Theta\upsilon\upsilon\left(\frac{d\Phi}{db}\right)=\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) \text{ et } \frac{dB}{B\,db}=\frac{1}{\Theta\upsilon}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)-\frac{1}{\Theta}\left(\frac{d\Theta}{db}\right).$$

Ergo praeterquam quod fit $\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)=\Theta\upsilon\upsilon\left(\frac{d\Phi}{db}\right)$

necesse est, vt binae fequentes quantitates

$$\frac{1}{\Theta\upsilon}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)-\frac{1}{\Theta}\left(\frac{d\Theta}{db}\right) \text{ et } \upsilon\left(\frac{d\upsilon}{db}\right)+\frac{\upsilon}{\Theta}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$$

fint functiones folius parametri b.

XLIII. Ex his iam poterimus diiudicare, num eiusmodi fluidi ftatus, cuius refiftentia perfecte fequatur regulam vulgarem, fit poffibilis, et fub quibus conditionibus? id quod inueftigauiffe operae erit pretium. Regula autem vulgaris poftulat, vt fit $u=\frac{\upsilon\upsilon}{C}$; cum igitur hic pofuerimus $u=\upsilon\,\text{cof.}\,\Phi$, fiet $\upsilon=C\,\text{cof.}\,\Phi$, exiftente C functione ipfius b tantum: hinc erit

$$\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)=-C\,\text{fin.}\,\Phi\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) \text{ et } \left(\frac{d\upsilon}{db}\right)=\frac{dC}{db}\text{cof.}\,\Phi-C\,\text{fin.}\,\Phi\left(\frac{d\Phi}{db}\right).$$

Verum effe oportet $\Theta\upsilon\upsilon\left(\frac{d\Phi}{db}\right)=\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)$, vnde fit

$$CC\Theta\,\text{cof.}\,\Phi^2\left(\frac{d\Phi}{db}\right)=-C\,\text{fin.}\,\Phi\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$$

ideoque $\Theta=\frac{-\text{fin.}\,\Phi}{C\,\text{cof.}\,\Phi^2}\cdot\frac{\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)}{\left(\frac{d\Phi}{db}\right)}$, et $T=\frac{-\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi}\cdot\frac{\left(\frac{d\Phi}{db}\right)}{\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)}$

Cum autem porro effe debeat $\frac{dD}{db}=\upsilon\left(\frac{d\upsilon}{db}\right)+\frac{\upsilon}{\Theta}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$, erit

$$\frac{dD}{db}=\frac{C\,dC}{db}\text{cof.}\,\Phi^2-CC\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)-\frac{CC\,\text{cof.}\,\Phi^3}{\text{fin.}\,\Phi}\left(\frac{d\Phi}{db}\right)$$

 fiue

fiue

$$\frac{dD}{db} = \frac{CdC}{db}\operatorname{cof}\Phi^2 - \frac{CC\operatorname{cof}.\Phi}{\operatorname{fin}.\Phi}\left(\frac{d\Phi}{db}\right).$$

XLIV. Hinc fi tantum b pro variabili habeamus, s vero vt conftantem fpectemus, habebimus hanc aequationem differentialem:

$$dD = CdC\operatorname{cof}.\Phi^2 - \frac{CCd\Phi\operatorname{cof}.\Phi}{\operatorname{fin}.\Phi},$$

quam fi more confueto integremus, et loco conftantis functionem ipfius s, quae fit Σ, introducamus, dum E et F pro functionibus ipfius b tantum affumimus, obtinebimus:

$$\operatorname{fin}.\Phi = \sqrt{\frac{E}{F+\Sigma}} \text{ et } \operatorname{cof}.\Phi = \sqrt{\frac{F-E+\Sigma}{F+\Sigma}}$$

exiftente $lC = \frac{1}{2}\int\frac{dF}{E}$ et $D = \frac{1}{2}CC - \frac{1}{2}\int\frac{CCdE}{E}$.

Hinc ergo eruitur:

$$d\Phi\operatorname{cof}.\Phi = \frac{FdE - EdF + \Sigma dE - Ea\Sigma}{2(F+\Sigma)\sqrt{E(F+\Sigma)}}$$

$$\text{et } d\Phi = \frac{FdE - EdF + \Sigma dE - Ed\Sigma}{2(F+\Sigma)\sqrt{E(F-E+\Sigma)}}$$

ita vt fit:

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{-d\Sigma\sqrt{E}}{2(F+\Sigma)ds\sqrt{(F-E+\Sigma)}} \text{ et}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{db}\right) = \frac{FdE - EdF + \Sigma dE}{2(F+\Sigma)db\sqrt{E(F-E+\Sigma)}}.$$

XLV.

XLV. His valoribus fubftitutis obtinebimus:

$$\vartheta = C\sqrt{\frac{F-E+\Sigma}{F+\Sigma}} \quad \text{et}$$

$$\Theta = \frac{E\sqrt{E(F+\Sigma)}}{C(F-E+\Sigma)} \cdot \frac{db\,d\Sigma}{(F+\Sigma)dE\,ds - E\,dF\,ds}$$

Ponamus breuitatis gratia $\frac{dE}{db} = e$; $\frac{dF}{db} = f$; $\frac{d\Sigma}{ds} = \sigma$

eritque $dC = \frac{C\,dF}{2E} = \frac{C\,f\,db}{2E}$; et

$$l\Theta = \tfrac{3}{2}lE + \tfrac{1}{2}l(F+\Sigma) - lC - l(F-E+\Sigma) + l\sigma$$
$$- l(e(F+\Sigma) - fE).$$

Sit porro $de = \varepsilon db$ et $df = \zeta db$, eritque fumto folo b variabili

$$\frac{d\Theta}{\Theta db} = \frac{3e}{2E} + \frac{f}{2(F+\Sigma)} - \frac{f}{2E} + \frac{e-f}{F-E+\Sigma} - \frac{\varepsilon(F+\Sigma)+E\zeta}{e(F+\Sigma)-fE}$$

At vero effe debet $\frac{dB}{Bdb} = \frac{1}{\Theta\vartheta}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \left(\frac{d\Theta}{\Theta db}\right)$;

vnde ob

$$\frac{1}{\Theta\vartheta} = \frac{\sqrt{(F-E+\Sigma)}}{E\sqrt{E}} \cdot \frac{e(F+\Sigma)-fE}{\sigma} \quad \text{fiet}$$

$$\frac{dB}{Bdb} = \frac{-2e}{E} + \frac{f}{2E} + \frac{f-e}{F-E+\Sigma} + \frac{\varepsilon(F+\Sigma)-\zeta E}{e(F+\Sigma)-fE}$$

XLVI. Quia haec formula ab altera variabili s omnino immunis effe debet, transformetur in hanc fpeciem:

$$\frac{dB}{Bdb} = \frac{-2e}{E} + \frac{f}{2E} + \frac{f-e}{F-E+\Sigma} + \frac{\varepsilon}{e} + \frac{\varepsilon fE - \zeta eE}{ee(F+\Sigma) - efE}$$

 vnde

vnde manifestum est, esse oportere:

$$ee(f-e)(F+\Sigma)-efE(f-e)+(\varepsilon fE-\zeta eE)(F+\Sigma)-EE(\varepsilon f-\zeta e)=0$$

ideoque $ee(f-e)=E(\zeta e-\varepsilon f)$

et $ef(f-e)=E(\zeta e-\varepsilon f)$

sicque necesse est, vt sit $f=e$, vnde fit $\zeta=\varepsilon$; et $F=E$; atque hinc prodit $\frac{dB}{Bdb}=\frac{-3e}{2E}+\frac{\varepsilon}{e}$; ideoque integrando

$lB=le-\frac{3}{2}lE$, seu $B=\frac{e}{E\sqrt{E}}$. Porro vero erit

$$\mathfrak{v}=C\sqrt{\frac{\Sigma}{E+\Sigma}} \quad \text{et} \quad \Theta=\frac{E\sigma\sqrt{E(E+\Sigma)}}{Ce\Sigma\Sigma}$$

ac denique $\sin.\,\Phi=\sqrt{\frac{E}{E+\Sigma}}$ et $\cos.\,\Phi=\sqrt{\frac{\Sigma}{E+\Sigma}}$.

XLVII. Verum ob $F=E$, fit $lC=\frac{1}{2}lE$ et $C=\sqrt{E}$, vnde sumta pro E functione quacunque ipsius b, et pro Σ functione quacunque ipsius s, statuaturque $dE=edb$ et $d\Sigma=\sigma ds$

erit $\mathfrak{v}=c\sqrt{\frac{E\Sigma}{E+\Sigma}}$; et $\Theta=\frac{E\sigma\sqrt{(E+\Sigma)}}{ce\Sigma\Sigma}$

item $D=\frac{1}{2}CC-\frac{1}{2}\int\frac{CCdE}{E}=\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}E=0$ vel constans.

Tum vero erit $T=\frac{1}{\Theta\mathfrak{v}}=\frac{e\Sigma\sqrt{\Sigma}}{E\sigma\sqrt{E}}$, ac denique

ob $\frac{B}{T\mathfrak{v}}=B\Theta=\frac{\sigma\sqrt{(E+\Sigma)}}{e\Sigma\Sigma\sqrt{E}}$, obtinebimus

$$dx=\frac{\sigma ds}{\Sigma\sqrt{E\Sigma}}+\frac{edb}{E\sqrt{E\Sigma}} \quad \text{hincque} \quad x=\frac{-2}{\sqrt{E\Sigma}}$$

$$dy=\frac{\sigma ds}{\Sigma\Sigma}-\frac{edb}{EE} \quad \text{hincque} \quad y=\frac{1}{E}-\frac{1}{\Sigma}$$

Quare

Quare cum sit $\frac{1}{\Sigma} = \frac{1}{E} - y$, erit $x = -2\sqrt{\left(\frac{1}{EE} - \frac{y}{E}\right)}$
Sit $\frac{1}{E} = a$, et fiet $xx = 4aa - 4ay$. Pressio autem in quouis loco Y erit $p = V - \frac{E\Sigma}{2(E+\Sigma)} = V - \frac{2acc}{xx+4aa}$.

XLVIII. Iam ergo audacter pronunciare possumus, regulam resistentiae vulgarem exacte locum habere non posse, nisi quando figura corporis AEB fuerit parabolica, et singuli riuuli aeb, $a'e'b'$ quoque sint inflexi secundum parabolas, quae cum illa parabola AEB, tam axem EF, quam focum F, habeant communem, vnde et vasis extremam oram $\alpha\varepsilon\beta$ secundum similem parabolam formatam esse oportet. Cum igitur in reliquis casibus omnibus regula vulgaris a veritate aberret, resistentia quoque aliam sequetur legem, neque isti regulae erit consentanea. Quando ergo specie huius regulae nonnulli seducti putauerunt, fieri posse, vt corpus in fluido nullam resistentiam passurum moueatur, propterea quod actio fluidi in partem posticam destruat vim in partem anticam exertam, et in fluidis terrestribus haec destructio a tenacitate prohiberi censeatur; iam manifestum est, hanc conclusionem nullo modo admitti posse. Quia enim corpus parabolicum AEB non vtrinque terminatur, hic casus neutiquam ad resistentiae doctrinam traduci potest. Tab. III. Fig. 2.

PRINCIPIA THEORIAE MACHINARVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Primum omnes machinas in duas classes distribui convenit: quarum prima eas complectitur, quae dum in actione versantur, ita vniformiter mouentur, vt omnes eius partes perpetuo motu vniformi ferantur. Ad alteram vero classem eae pertinent machinae, quarum singulae partes in motu suo modo accelerantur, modo retardantur, etiamsi forte tota machina motum vniformem mentiatur.

Prioris classis sunt machinae oneribus eleuandis destinatae, item molae frumentariae, quippe quae dum in actione debita versantur, omnes earum partes iugiter motu vniformi agitantur, ita vt nusquam neque acceleratio, neque retardatio motus, adsit. Pistrina vero, aliaeque machinae, quae tundendo opus conficiunt, quoniam pistilla alternatim attolluntur, ac remittuntur, ad classem posteriorem sunt referendae: quorsum etiam pertinent omnis generis horologia, in quibus cum nullum proprie adsit onus superandum, tota actio in alterna partium acceleratione ac retardatione consumitur. Machinae quoque aquis attollendis destinatae huic classi sunt annumerandae, quoniam cum embola non motu vni-

formi

formi agitantur, tum etiam ipſi aquae, quae primum fuerat in quiete, motus imprimi debet, ad quod neceſſario acceleratio requiritur. Poſterior ergo claſſis latiſſime patet, atque adeo ſaepe machinas, quae ad priorem pertinere debebant, recipit; id quod earum vitio euenit, quando dentes, quibus rotae ſe mutuo vrgent, non ita fuerint elaborati, vt dum vna motu vniformi gyratur, reliquae pari motu cieantur, ſed quaſi per ſuccuſſiones impellantur. Alio autem loco oſtendi, cuiusmodi figuram dentibus binarum rotarum ſe inuicem trudentium tribui oporteat, vt dum altera motu vniformi circumagitur, alterius quoque motus futurus ſit vniformis. Quam neceſſaria autem haec ſit machinarum diſtinctio, ad earum actionem recte perſpiciendam, mox clarius exponetur.

2. *In Machinis primae claſſis, quae in omnibus partibus motu vniformi feruntur, vis ad earum motum conſeruandum requiſita praeciſe aequalis eſt ei, qua opus eſt ad aequilibrium, ſeu quae reſiſtentiae tantum non ſuperandae par eſt.*

Quae igitur vis aequilibrio producendo ſufficit, eadem motum quantumuis celerem in machina, dummodo fuerit vniformis, conſeruare valet. Hinc ſi machina ponderi 100 librarum eleuando deſtinata ita ſit inſtructa, vt pro aequilibrio opus ſit vi 10 librarum, eadem vis 10 librarum ſufficiet ad idem pondus 100 ℔ celeritate quantumuis magna vniformiter eleuandum. Statim enim ac motus machinae ad vniformitatem eſt perductus, quia ſingulae partes ob inertiam ad hunc

mo-

motum conſeruandum ſunt diſpoſitae, continuatio motus plus non requirit, quam vt reſiſtentia motui aduerſans ſuperetur, quae cum eadem ſit atque in ſtatu quietis, eadem vis, quae machinam in ſtatu quietis conſeruare, eiue motum vel minimum valet, ad motum vniformem conſeruandum ſufficit. Mirum quidem videbitur et experientiae contrarium, quod celerrimus motus maiori vi non indigeat, quam tardiſſimus; cum tamen in machinis, vel aqua, vel animalibus actis, nullum ſit dubium, quin ad motum velociorem producendum maior aquae copia, maiorue animalium numerus requiratur. Verum his caſibus perpendendum eſt, augendo vel aquae copiam, vel animalium numerum, vim inde ortam non augeri, propterea quod, quo velocius machina mouetur, ſiue aquae, ſiue animalium vis in machinam agens minuatur: vnde fit, vt etiamſi pro motu celeriori maior vis non requiratur, tamen maiori ſiue aquae copia, ſiue animalium numero ſit opus: quod idem de reliquis virium generibus, quae ad machinas momouendas adhiberi ſolent, eſt tenendum. Minime igitur noſtra propoſitio, qua motum etiam velociſſimum, dummodo fuerit vniformis, maiorem vim non exigere ſtatuimus, quam tardiſſimum affirmamus, veritati aduerſari eſt cenſenda, quin potius, vti firmiſſimis Theoriae principiis innititur, ita quoque experientiae apprime conformis deprehenditur, dummodo quantitatem virium rite aeſtimare diſcamus.

3. *Hinc euidens eſt, ſi vis machinam ſollicitans vel maior fuerit, vel minor ea, quae ad aequilibrium conſeruandum requiritur, ſeu quae ipſi vel minimum motum im-*

imprimere valet, tum motum machinae priori casu accéleratum posteriori vero retardatum iri.

Viciſſim ergo intelligitur, ſi motus machinae debeat accelerari, maiorem vim requiri, quam quae aequilibrio conſeruando ſufficiat: hoc enim caſu non ſolum reſiſtentiam, ſeu vim motui machinae proprie aduerſantem, vinci oportet, ſed etiam ipſi accelerationi inertia tam oneris, quam ſingularum ipſius machinae partium, reluctatur. Quamobrem ſi ex vi data, quae ſuperet eam, qua ad aequilibrium ſuſtinendum opus eſt, motus machinae acceleratus definiri debeat, praeter vim reſiſtentem ſimul inertiae ratio eſt habenda, quae inveſtigatio idcirco proprie ex principiis motus eſt expedienda, dum conſideratio motus vniformis per ſola principia ſtatica, ſeu aequilibrii, perfici poteſt. Vnde fit, vt ſi accelerationem cuiuspiam machinae definire velimus, in calculos plerumque admodum moleſtos prolabamur, dum motus vniformis facillime ad calculum reuocatur. Similis eſt ratio retardationis motus, quae oritur, ſi vis ſollicitans minor fuerit ea, quam aequilibrii conſeruatio exigit: tum enim vis reſiſtentiae, motui machinae reluctans, quatenus vim ſollicitantem ſuperat, in retardationem motus impenditur; cuius accurata explicatio pariter ex motus principiis eſt petenda. Quando ergo machina alternatim motu accelerato et retardato agitatur, tuto concludere poſſumus, vim ſollicitantem alternatim maiorem minoremque eſſe ea, quae ad motum vniformem eſſet neceſſaria: difficillimum autem plerumque erit ipſam accelerationem et retardationem aſſignare. Interim tamen ſine dubio pronunciare licet, ſi omnes illae vires modo maiores, modo minores, ad mediam quandam vim reuocentur, hanc minorem non esse futuram ea vi, quae ad motum vniformem requireretur; si modo acceleratio et retardatio vtrinque aeque a motu vniformi discedant.

4. *In machinis prioris classis, quae motu vniformi agitantur, productum ex vi sollicitante in celeritatem, qua incedit, aequale est producto ex vi resistente in celeritatem, qua promouetur.*

Haec propositio sequitur ex principio vniuersali aequilibrii, quo constat tum binas vires contrarias machinae cuicunque applicatas esse in aequilibrio, cum impresso machinae vel minimo motu vires fuerint reciproce vt spatia percursa, seu vti celeritates; hinc enim producta vtriusque vis in suam celeritatem fient inter se aequalia. Ostendimus autem, in motu machinarum vniformi ad resistentiam vincendam maiorem vim non requiri, quam in statu aequilibrii: vnde, cum motus machinae tam vi sollicitanti, quam resistenti, certum celeritatis gradum tribuat, si vtraque vis per suam celeritatem multiplicetur, ambo producta necesse est, vt inter se sint aequalia. Verum celeritas, qua vis quaecunque mouetur, secundum directionem eius propriam aestimari debet, in directione scilicet vis mente concipiatur fixum quodpiam punctum, cum quo conferatur punctum, vbi vis machinae applicatur; et ex mutatione momentanea distantiae horum punctorum celeritatem definiri oportet. Quomodo autem quouis casu haec bina producta, quorum aequalitate actio machinae continetur, recte exprimi conueniat, mox accuratius exponetur.

tur. Quod autem ad machinas motu non vniformi operantes attinet, hinc satis est perspicuum, si productum ex vi sollicitante in suam celeritatem maius fuerit, quam productum ex vi resistente in suam celeritatem, quoniam tum vis sollicitans maior est quam motus vniformitas requirit, motum machinae inde accelerari; contra vero, si illud productum hoc fuerit minus, retardari. Ex quo intelligitur, istorum productorum accuratam cognitionem ad actionem omnis generis machinarum definiendam maxime esse necessariam. Quomodocunque ergo machina fuerit composita, hic non tam ipsa compositionis ratio in computum ingreditur, quam ratio celeritatum, quibus cum potentia tum onus, dum machinae motus imprimi concipitur, promouentur: quandoquidem ex hac ratione statim ratio inter potentiam et onus, quam tam motus vniformis, quam acceleratus et retardatus requirit, innotescit.

5. *Momentum effectus inuenitur, si vis motui machinae reluctans, seu cui mouendae machina destinatur, per viam ab ea dato tempore descriptam multiplicetur. Pro hoc autem tempore hic perpetuo minutum secundum assumemus.*

In hoc momento effectus vera continetur notio effectus a machina quacunque editi. Quo celerius enim onus, seu vis resistens, mouetur, seu, quo maius fuerit spatium, per quod dato tempore promouetur, eo maior aestimatur machinae effectus, et, manente celeritate eadem, quo maior fuerit ipsa resistentia, eo maior quoque effectus censetur. Ad hoc ergo momentum definiendum primo ipsa vis resistens, quatenus motui machinae reluctatur, explorari, eiusque quantitas per pondus aequiualens exprimi debet, tum vero dispiciendum est, per quantum ſpatium ea dato quodam tempore promoueatur. Hinc momentum effectus ad definitum quodpiam tempus adſtringitur, pro quo hic commoditatis gratia minutum ſecundum aſſumamus; ita vt hac expreſſione effectus vno minuto ſecundo editus indicetur, vnde autem facile ad quoduis aliud tempus, ſiquidem motus fuerit vniformis, transferri poterit. Ita ſi onus, cuius pondus $= Q$, ſit verticaliter attollendum, idque ſingulis minutis ſecundis per altitudinem a eleuetur, erit momentum effectus $= Qa$. Sin autem onus horizontaliter promoueri debeat, eius tantum frictio ſuperanda eſt, quae ſi aequiualeat ponderi Q, onusque pariter per ſpatium a ſingulis minutis ſecundis protrahatur, momentum effectus pariter erit $= Qa$. At ſi onus ſuper plano inclinato ſurſum trahi debeat, vis reſiſtens Q partim pondere oneris, partim frictione exprimenda erit. Quod ſi in molis momentum effectus ſit aeſtimandum, indagari debet vis ad molam circum agendam requiſita, cuius quidem punctum applicationis imprimis eſt ſpectandum; quod enim quo magis ab axe motus fuerit remotum, eo minor vis reſiſtentiae ſuperandae par erit. Quoniam vero haec vis per ſpatium vno minuto ſecundo per curſum multiplicari debet, quod in ratione diſtantiae ab axe creſcit, productum eandem quantitatem retinebit, ſiue diſtantia illa maior minorue aſſumatur, vnde momentum effectus fixum obtinebit valorem. Si machina ad aquam eleuandam fuerit accommodata, ex Theoria fluidorum oſtendi poteſt, momentum effectus inueniri, ſi copia aquae,

eius

eius ſcilicet pondus, quae ſingulis minutis ſecundis eleuatur, per totam altitudinem eleuationis multiplicetur, ſimilique modo pro omnibus omnino caſibus momentum effectus aſſignari poterit.

6. *Momentum impulſus ſimili modo reperitur, ſi vis machinam actu impellens multiplicetur per ſpatium, quod ab ea dato tempore conficitur: vbi iterum pro hoc dato tempore minutum ſecundum aſſumetur.*

Duae ergo res requiruntur ad momentum impulſus conſtituendum; primo ſcilicet ipſa vis impellens, cuius quantitatem pondere metiri licet, deinde ſpatium, quod ea agendo ſingulis minutis ſecundis abſoluit: harumque duarum quantitatum multiplicatione momentum impulſus oritur, quod ergo homogeneum erit cum momento effectus. Circa aeſtimationem ipſius vis impellentis plerumque ad celeritatem, qua in machinam agit, eſt reſpiciendum; niſi enim haec vis a grauitate ponderis deſcendentis petatur, quod, dummodo aequabiliter deſcendat, perpetuo aequali vi vrget, aucta celeritate, qua in machinam agit, ſimul eius quantitas diminui ſolet, idque diuerſimode pro varia virium ſollicitantium natura. Ita ſi machina operis hominum animaliumue impellatur, eorum vis actu exerta maxime ab actionis celeritate pendet: cum enim animal vi indigeat ad ſe ipſum mouendum, atque omni, quo pollet, niſu adhibito ſe vltra certum celeritatis gradum mouere nequeat, quo propius eius actio ad hunc gradum acceſſerit, eo minorem vim exerere valebit, quippe quae cum illum gradum attigerit, penitus euaneſcet. Quare ſi vim impellentem aeſtimare velimus, minime magnitutudinem conatus, quo machinam quiescentem sollicitat, tanquam eius mensuram accipere debemus, sed ad hoc iam ipsam celeritatem, qua machina mouetur, spectari oportet, vnde pro natura vis agentis eius vera quantitas definiri queat: atque hanc demum vim per viam minuto secundo percursam multiplicando obtinebimus verum momentum impulsus. Istud vis agentis decrementum a motu iam acquisito ortum clarissime perspicitur in machinis a vi illabentis aquae impulsis: quo celerius enim rota aquaria gyratur, eo minorem vim ab aqua sustinet; dum contra vis aquae in rotam quietam est maxima. Probe igitur cuiusque generis virium, quae ad machinas mouendas adhibentur, natura est exploranda, vt pro quolibet celeritatis gradu vera vis agentis quantitas assignari possit.

7. *Si machina frictione careat, eiusque motus fuerit vniformis, momentum effectus praecise aequale erit momento impulsus; ideoque ex cognito momento impulsus verus effectus eiusue momentum poterit determinari.*

Assumo hic primum, machinam frictione carere, tum vero eius motum esse vniformem, vt conseruatio motus machinae nullam vim requirat, totaque vis impellentis actio in onus promouendum impendatur. Ita enim fiet, vt superatio vis reluctantis maiorem vim non exigat, quam quae aequilibrio continendo sufficeret, propterea quod solum onus motui machinae resistentiam opponit. Cum igitur productum ex vi resistente in suam celeritatem aequale sit vi impellenti

per

per ſuam celeritatem multiplicatae, haeque celeritates ſint vt ſpatia eodem tempore confecta, ſi earum loco ſpatia vno minuto ſecundo abſoluta ſubſtituamus, illa producta abeunt in momenta impulſus et effectus, prouti ea modo definiuimus, quae igitur inter ſe aequalia eſſe oportet. Hinc ſi cognita fuerit quantitas vis impellentis vna cum celeritate, qua agit, inde ſimul momentum effectus innoteſcit; ita ſi vis impellens ſit $= P$, ſpatiumque, quod ab ea ſingulis minutis ſecundis conficitur, $= p$, exprimet Pp momentum impulſus, cui cum aequale ſit momentum effectus, ſi Q deſignet reſiſtentiam oneris, et q ſpatium, per quod vno minuto ſecundo promoueatur, erit $Qq = Pp$, hincque $q = \frac{Pp}{Q}$. In hac formula nota illa aequalitas inter cauſam et effectum continetur, quatenus ea quidem rite ad actionem machinarum accommodatur; eique actioni machinarum certus terminus praefigitur, quem nunquam transgredi valeant. Pendet igitur quantitas effectus non ſolum a quantitate vis impellentis, ſed etiam a celeritate, qua agere poteſt, et quoniam vidimus, pleraſque vires, quae ad machinas agitandas adhiberi ſolent, ita eſſe comparatas, vt aucta celeritate ipſae minuantur, de quantitate effectus nihil certi definire licet, niſi exploratum ſit, qua lege quantitas vis impellentis pro ſingulis celeritatis augmentis diminuatur. Atque hinc euenire poteſt, vt manente eadem vi ſollicitante, effectus machinae plurimum variari poſſit, prout ſcilicet ea vis alia atque alia celeritate fuerit praedita, quod tamen neutiquam aequalitatem inter cauſam et effectum euertit, propterea quod in iuſta cauſae aeſtimatione ſimul celeritatis ratio haberi debet.

8.

8. *Frictio vero, quam partes machinae, dum inter se commouentur exerunt, non admodum iudicium machinarum turbat; quoniam enim motui machinae reluctatur, resistentiam oneris tantum augere est censenda, ex quo momentum effectus data quadam quantitate augeri debet, antequam momento impulsus aequale statuatur.*

Hic ex experientia assumitur frictionis quantitatem eandem manere, quantacunque celeritate machina moueatur: vnde machinae cuiusuis propositae frictio explorari potest, si remota oneris resistentia inuestigetur, quanta vi opus sit, ad machinam, dum est in quiete, vel tantillum commouendam; tanta enim vis deinceps quoque in motu, vtcunque fuerit rapidus, perpetuo ad frictionem superandam requiretur. Perinde igitur erit, ac si resistentia oneris certa quadam quantitate sit aucta, sicque commode frictio cum ipso onere coniungetur, ita vt ob frictionem resistentia oneris maior sit aestimanda, quam re vera est. Quoniam enim resistentia oneris perpetuo eadem manet, quacunque celeritate moueatur, frictio congrue ad oneris resistentiam adiicitur. Dum minus congrue propter eam vis impellens quapiam quantitate imminui conciperetur, quia haec cum celeritate motus variatur, etiamsi ratione recte instituta res eodem redeat. Atque hinc frictionis nulla ratione seorsim habita resistentia oneris ob eam aucta statim per experientiam cognosci poterit: quaecunque enim machina cum adiuncta oneris resistentia fuerit proposita, quaeratur vis, quae illi vel tantillum commouendae par sit, atque ex regulis staticis statim colligetur, quanta sit tota vis resistentiae, quae tam ex onere

onere ipſo, quam ex frictione reſultat. Quae ſi fuerit cognita, ac ponatur $= Q$, ea in momentum effectus introduci debet, cui deinceps momentum impulſus erit coaequandum, dummodo motus fuerit vniformis, prorſus vt ante eſt praeceptum. Totum ergo negotium huc redit, vt in computo ob frictionem reſiſtentia oneris data quapiam quantitate augeatur, ac momentum effectus ex hac reſiſtentia aucta determinetur, cui aeque ac ante momentum impulſus aequale ſtatui debebit.

9. *Propoſita machina cum reſiſtentia ſuperanda ante omnia indagari debet quantitas vis impellentis, quae ad eam in motu vniformi conſeruandam requiritur. Haecque inueſtigatio commodiſſime per experimenta inſtituitur, vt ſimul frictio in effectu comprehendatur.*

In hunc finem bina machinae loca praecipue ſunt notanda, vbi tam vis impellens, quam reſiſtentia oneris, applicatur, atque ex ſtructura machinae patebit, quaenam ratio, dum mouetur, inter celeritatem vis impellentis et celeritatem oneris intercedat. Quare ſi quantitas oneris, ſeu vis motui machinae reluctantis, fuerit $= Q$, et ratio celeritatis vis impellentis ad celeritatem vis reluctantis ſit vt m ad n, quantitas vis impellentis foret $= \frac{Qn}{m}$, ſi motus machinae ob frictionem non impediretur. Quando ergo frictio adeſt, quae inſuper vinci debet, maior vis impellens requiritur, ad quam inueniendam, cum frictio difficulter a priori definiri queat, commodiſſime ad experimenta confugietur. Machina ſcilicet in quiete conſtituta ei in loco, vbi vis

 im-

impellens est applicanda, vis adhibeatur, quae primo aequilibrio conseruando par sit, deinde ea sensim augeatur, quoad machinae vel minimum motum imprimere valeat; hocque modo habebitur ea ipsa vis, quae motui machinae quantumuis celeri, dummodo fuerit vniformis, conseruando sufficiet. Ob frictionem autem haec vis maior prodibit, quam $\frac{Qn}{m}$, eoque magis hanc quantitatem excedet, quo maior fuerit frictio; seu posita hac vi per experimentum inuenta $= P$, erit $P > \frac{Qn}{m}$, ideoque $P = \frac{Qn}{m} + F$, existente F eius augmento ad frictionem superandam requisito. Vel si ponatur $F = \frac{Gn}{m}$, ob $P = \frac{n}{m}(Q + G)$, frictio eundem praestabit effectum, ac si loco resistentiae Q maior resistentia $Q + G$ superari deberet. Neque vero opus est, vt in hoc experimento vis explorans P in eo ipso loco, vbi deinceps vis impellens applicari debet, applicetur; si enim in alio loco applicetur, cuius celeritas ad celeritatem in loco vis impellentis sit vt μ ad ν, eaque vis reperiatur $= \Pi$, hinc facile concludetur vera vis impellentis P quantitas, quippe quae erit $P = \Pi \frac{\mu}{\nu}$: quemadmodum ex principiis staticis est manifestum. Hoc ergo modo plura experimenta institui poterunt, quo certiores de vera quantitate vis P reddamur.

10. *Quantacunque fuerit resistentia superanda, machina semper ita instrui potest, vt data vis impellens, quae simul data celeritate agat, ei vniformiter mouendae sufficiat; vnde itaque momentum effectus sponte innotescet.*

Ex-

Exprimat Q resistentiam superandam, quae simul frictionem rite aestimatam et ad locum resistentiae reductam complectatur: deinde sit P vis impellens, quae singulis minutis secundis spatium p absoluat; quoniam enim vires, quibus machinae agitari solent, ita sunt comparatae, vt aucta actionis celeritate minuantur, de earum quantitate absolute nihil certi pronunciare licet, nisi celeritas, qua agant, simul definiatur. His positis, ex vulgaribus Mechanicae elementis constat, quemadmodum partes machinae instrui ac disponi debeant, vt vis P resistentiam Q in aequilibrio continere valeat. Efficiendum scilicet est, vt dum machina tantillum mouetur, spatia tam a vi impellente P, quam a resistentia Q percursa ipsis viribus sint reciproce proportionalia. Machina igitur ita instructa, motus quicunque vniformis maiorem vim impellentem quam P non requiret; et quia vis impellentis quantitas eatenus est $=P$, quatenus ea praescripta celeritate agit, hoc est singulis minutis secundis spatium $=p$ conficit, etiam in motu machinae vniformi haec celeritas vi impellenti conueniet. Cum igitur momentum impulsus sit $=Pp$, eidem momentum effectus erit aequale, ita si q denotet spatium, per quod resistentia Q singulis minutis secundis promouetur, quia est $Qq=Pp$, erit $q=\frac{Pp}{Q}$, sicque verus machinae effectus innotescit, siquidem motus vniformis sit capax. Quoniam vero in resistentia superanda Q frictionem sumus complexi, euidens est, quo maior fuerit frictio, eo minorem esse futurum verum machinae effectum. Hinc si frictio aequiualeat vi G in loco resistentiae applicatae, atque iam Q denotet

 ipsam

ipſam reſiſtentiam ſuperandam, erit $Pp = (Q + G)q$, ideoque verum momentum effectus $Qq = Pp - Gq$, ſeu ob $q = \frac{Pp}{Q+G}$ erit id $Qq = \frac{PQ}{Q+G}p. = \frac{Q}{Q+G} \cdot Pp$; ſcilicet in ratione $Q + G$ ad Q minus erit, quam momentum impulſus Pp.

11. *Niſi vis impellens ſit pondus deſcendens, eius quantitas a celeritate, qua agit, pendet, ita vt pro celeritate nulla ſit maxima, tum vero aucta celeritate decreſcat, donec, cum celeritas datum gradum attigerit, penitus euaneſcat; neque vnquam hunc gradum ſuperare queat.*

Iſta vis impellentis diminutio ratione auctae celeritatis clariſſime in impulſu aquae contra obicem mobilem perſpicitur. Ponamus enim obicem eſſe planum, et aquam in eum directe celeritate altitudini c debita illidere, obicisque ſuperficiem eſſe $= aa$, erit vis aquae aequalis ponderi maſſae aquae, cuius volumen eſt $= aac$, quae ſtatuatur $= A$. Iam ſi obex habeat motum, quo impulſui aquae directe cedat, eiusque celeritas debita ſit altitudini v, perinde erit, ac ſi aqua tantum celeritate $\sqrt{c} - \sqrt{v}$ illidat, cum ante celeritate $\sqrt{c}$ incurriſſet, vnde nunc vis impulſus aequabitur ponderi maſſae aqueae, cuius volumen eſt $= aa(\sqrt{c} - \sqrt{v})^2$, quae ergo ob $aac = A$ erit $= A(1 - \sqrt{\tfrac{v}{c}})^2$. Cum igitur haec vis euaneſcat, ſi fiat $\sqrt{v} = \sqrt{c}$, eademque ſit $= A$, dum adhuc in quiete verſatur, generalius actionem huiusmodi virium ita deſcribere poterimus, vt dicamus, ſi quantitas talis vis, dum quieſcit, ſit $= A$, dum autem ſingulis minutis ſecundis ſpatium $= f$

percurrit,

percurrit, euanescat, tum si ita moueatur, vt singulis minutis secundis spatium p, existente $p < f$, absoluat, eius quantitatem fore $= A(1 - \frac{p}{f})^2$. Quae etsi ex natura impulsus aquae sunt desumta, tamen latius patere, atque adeo in actione hominum animaliumque locum habere videntur; de quo eo minus dubitare licet, cum huiusmodi vires nonnisi propemodum ad calculum revocari queant. De hominibus ergo atque animalibus, quorum ope machinae agitari solent, statuemus, si hominis animalisue, dum quiescit, vis fuerit $= A$, ea vero, quando singulis minutis secundis spatium $= f$ percurrit, euanescat, tum eiusdem vim, dum ita movetur, vt singulis minutis secundis spatium $= p$ absolvat, fore $= A(1 - \frac{p}{f})^2$. Quodsi ergo talis vis, dum singulis minutis secundis per spatium $= p$ fertur, ponatur $= P$, erit $P = A(1 - \frac{p}{f})^2$, ac si insuper constet vis A, quam eadem vis in quiete exerit, hinc vicissim concludemus maximam eius celeritatem f, qua nullam amplius vim exeret: erit enim $1 - \frac{p}{f} = \sqrt{\frac{P}{A}}$, hincque $f = \frac{p\sqrt{A}}{\sqrt{A} - \sqrt{P}}$, vnde natura huiusmodi virium distincte intelligitur.

12. *Si huiusmodi vis ad machinam mouendam adhibeatur, quae in quiete maior sit, quam resistentiae aequilibrium requirit, tum machina mox ad motum uniformem perducetur, quo deinceps perpetuo agitabitur, siquidem ipsa machina motus vniformis fuerit capax.*

Sit igitur haec vis impellens ita comparata, vt in quiete eius quantitas sit $= A$; dum autem singulis

 minutis

minutis ſecundis ſpatium $=f$ abſoluit, in nihilum abeat: eiusdem ergo vis impellentis quantitas erit $= A\left(1-\frac{p}{f}\right)^2$, dum minuto ſecundo ſpatium $=p$ conficiet. Sit porro tota reſiſtentia ſuperanda $=Q$, qua ſimul frictio comprehendatur, ipſaque Machina ita inſtructa, vt ſtatus aequilibrii vim $=\frac{n}{m}Q$ requirat. His poſitis, quia aſſumo eſſe $A > \frac{n}{m}Q$, ſtatim ab initio motus machinae accelerabitur, et quoniam aucto motu vis impellens continuo imminuitur, acceleratio tamdiu durabit, quoad vis impellens quantitatem $\frac{n}{m}Q$ attigerit. Re vera quidem hoc demum tempore elapſo infinito eueniet, verum plerumque mox ab initio machinae talis motus imprimetur, qui ab iſto vniformitatis gradu vix parte centeſima differat, qui igitur in praxi iam pro vniformi haberi poterit. Quod ſi euenerit, motusque iam pro vniformi haberi poſſit, neceſſe eſt, vt ſit $A\left(1-\frac{p}{f}\right)^2 = \frac{n}{m}Q$ ideoque $1-\frac{p}{f} = \sqrt{\frac{nQ}{mA}}$ et $p = \frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}.f$, quae formula ſpatium exprimit, quod tum a vi impellente ſingulis ſecundis abſoluetur; visque reſiſtens ergo eodem tempore per ſpatium $=\frac{n}{m}p = \frac{n}{m}.\frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}.f$ promovebitur. Vnde momentum effectus habebitur $=\frac{n}{m}.\frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}.fQ = \frac{n}{m}\left(1-\sqrt{\frac{nQ}{mA}}\right)fQ$, quo ſimul momentum impulſus definitur. Patet ergo, quo maioris celeritatis vis impellens fuerit capax, antequam actionem amittat, eo maiorem ab ea produci effectum; his autem caſibus machina tardius ad motus vniformitatem perducetur. Ac ſi adeo ſpatium f fuerit infinitum, quo caſu vis impellens conſtanter eandem quantitatem A retineret,

retineret, tum quidem tandem effectum in infinitum excrescere posse, verum mox tam debilia incrementa acciperet, vt a leuissima resistentia vlterior acceleratio impediri posset. Semper tamen caeteris paribus effectus eo maior obtinebitur, quo maius fuerit spatium f, etiamsi is non in eadem ratione augeri sit censendus.

13. *Etiamsi igitur eadem impulsione ad eandem resistentiam superandam vtamur, effectus tamen plurimum a machinae indole pendebit, seu a ratione* m: n, *quae inter celeritates vis impellentis et resistentis statuitur. Haecque adeo ita temperari poterit, vt maximus effectus consequatur.*

Quoniam pro positionibus modo in genere traditis inuenimus momentum effectus $= \frac{n}{m}(1 - \sqrt{\frac{nQ}{mA}})fQ$, patet eius quantitatem manentibus A, f et Q plurimum a ratione $m:n$, quam structura machinae praebet, pendere; si enim fuerit vel $\frac{n}{m} = 0$, vel $\frac{nQ}{mA} = 1$, seu $\frac{n}{m} = \frac{A}{Q}$ vtroque casu effectus penitus euanescit. Vnde inter limites o et $\frac{A}{Q}$ dabitur valor quidam medius pro fractione $\frac{n}{m}$ capiendus, qui cum maximo effectu futurus sit coniunctus; quem ergo potissimum operae pretium erit cognouisse. Ponamus in hunc finem $\frac{n}{m} = zz$, et huic formulae $zz - z^3 \sqrt{\frac{Q}{A}}$ maximum valorem conciliari oportebit; reperietur autem $2z - 3zz\sqrt{\frac{Q}{A}} = 0$, ideoque $z = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{A}{Q}}$, quare habebitur $\frac{n}{m} = \frac{4A}{9Q}$; seu machina ita instrui debet, vt sit celeritas vis impellentis ad celeritatem vis resistentis vt $9Q$ ad $4A$. Quodsi ergo iste

valor

valor $\frac{4A}{9Q}$ pro fractione $\frac{n}{m}$ substituatur, fiet $V\frac{nQ}{mA} = \frac{2}{3}$ et $1 - V\frac{nQ}{mA} = \frac{1}{3}$; hincque maximum momentum effectus obtinebitur

$$\frac{4A}{9Q} \cdot \frac{1}{3} \cdot fQ = \frac{4}{27} Af.$$

Hinc igitur luculenter perspicimus, quantopere effectus ab idonea machinae dispositione pendeat, cum vnico modo iste effectus maximus obtineri queat, scilicet efficiendo, vt sit $m:n = 9Q:4A$, a qua proportione si machina recesserit, semper minorem effectum producet, etiamsi tam vis impellens, quam vis resistens, cum frictione maneant eaedem, quam si haec iusta ratio obseruetur. Interim si vel tantillum ab ea aberretur, detrimentum in effectu vix erit sensibile, quoniam maxima et minima aliquam latitudinem admittunt, id quod commode evenit, quia in praxi hanc rationem summo rigore vix obseruare licet. In eo tamen erit elaborandum, vt machina, quam fieri potest exactissime, ad hanc rationem accommodetur.

14. *Si vis impellens ita sit comparata, vt celeritate* f *omnem actionem amittat, machina semper maximum praestabit effectum, si ita instruatur, vt vis impellentis celeritas fiat pars tertia ipsius* f.

Sumo hic, vt et in sequentibus, spatium vno minuto secundo percursum pro mensura celeritatis; ac huiusmodi vim impellentem contemplor, cuius dum est in quiete quantitas sit $= A$, quae autem celeritate f lata omni actione destituatur. Huius igitur vis, dum celeritate $= p$ procedit, quantitas erit $= (1 - \frac{p}{f})^2$.

Quodsi

Quodſi iam reſiſtentia ope machinae ſuperanda ſit $= Q$, et ratio celeritatis vis impellentis ad celeritatem reſiſtentiae ponatur $= m : n$, quae ratio a ſtructura machinae pendet, vidimus, vt effectus maximus obtineatur, ſtatui oportere $\frac{n}{m} = \frac{4A}{9Q}$. Tum vero pro celeritate vis impellentis nanciſcimur $p = \frac{\sqrt{mA} - \sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}} f = (1 - \sqrt{\frac{nQ}{mA}}) f$: erit itaque ob $\sqrt{\frac{nQ}{mA}} = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{3} f$. Hoc autem immediate ex actione vis impellentis colligi poterit, quippe cuius momentum impulſus maximum reddi debet, vt maximum momentum effectus obtineatur Verum ſi vis impellens celeritate p agere aſſumatur, quia tum eius quantitas eſt $= A(1 - \frac{p}{f})^2$, erit momentum impulſus $= Ap(1 - \frac{p}{f})^2$, quod maximum factum praebet $A(1 - \frac{p}{f})^2 = \frac{2Ap}{f}(1 - \frac{p}{f})$, ſeu

$$1 - \frac{p}{f} = \frac{2p}{f}, \text{ hincque } 3p = f \text{ et } p = \tfrac{1}{3} f.$$

Effectus igitur maximus produci nequit, niſi vis impellens ita agat, vt eius celeritas p ſit pars tertia celeritatis f, qua omni actione priuatur. Poſito autem $p = \frac{1}{3} f$, erit quantitas vis impellentis $= A(1 - \frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9} A$; vnde pro data vi reſiſtente machina ita attemperari debet, vt vis $\frac{4}{9} A$ in aequilibrio conſiſtat cum vi reſiſtente frictione ſimul complexa, ſeu vt vis $\frac{4}{9} A$ tantum non motum machinae imprimere valeat. Scilicet ſi tota vis reſiſtens ſit $= Q$, celeritas vis impellentis ad celeritatem reſiſtentis ſtatui debet, vt $9Q$ ad $4A$, quo facto momentum effectus, ideoque et momentum impulſus erit $= \frac{4}{27} A f$, quod nullo modo maius effici poterit seu fieri omnino nequit, vt ab eadem vi impellente maior effectus obtineatur.

15. *Cum ratione celeritatis, qua vis impellens agit, machina ad maximum effectum producendum fuerit instructa, frictio quoque spectari debet, quae primo, quantum fieri potest, erit diminuenda, tum vero eius effectus eo minor reddetur, quo longius vis impellens ab axe, circa quem machinam vrget, remouetur.*

Assumo ergo frictionem iam eo vsque esse minutam, vt minor fieri nequeat, et vim impellentem rotae esse applicatam, cuius radius sit $= r$, in eadem autem distantia vi opus esse F ad frictionem superandam. Iam sit Mf momentum impulsus, idque maximum, cuius vis impellens est capax, quae agat celeritate $= p$, et quia vis ad frictionem superandam requisita F, vtpote in eodem loco applicata, eadem celeritate agit, erit eius momentum $= Fp$, ideoque verum momentum effectus detracta frictione erit $= Mf - Fp$, ex quo quantitas effectus ob frictionem minutus aestimari debet. Ponamus iam, rotae illius primariae radium augeri in ratione $1 : \lambda$, ita vt vis impellens eadem nunc applicetur in distantia λr ab eius axe, et in hoc loco vi tantum opus erit $\frac{1}{\lambda}F$ ad frictionem superandam: machina autem paucis mutandis denuo ita instruatur, vt pro motu vniformi vis impellens celeritate p, cui maximum momentum impulsus respondeat, incedat, et cum frictio nunc tantum huius momenti partem $\frac{1}{\lambda}Fp$ postulet, verum momentum effectus hoc casu

casu erit $= Mf - \frac{1}{\lambda} Fp$, ideoque eo maius, quam casu praecedente, quo maior fuerit numerus λ Hinc igitur patet fieri posse, vt ab eadem vi impellente, frictione non imminuta, multo maior effectus impetrari possit: hic autem suppono, aucto illius rotae diametro frictionem non augeri, vnde haec regula ita debet limitari, vt quatenus augenda rota hac principali frictio vel non augetur, vel saltem in minore ratione augetur, quam diameter rotae, eatenus semper conueniat hanc rotam maximam fieri. Antequam autem ad hanc regulam confugiamus, maxime interest, vt notis artificiis frictionem, quantum quidem fieri potest, diminuere conemur; tum vero obseruatio huius regulae nihilominus maximam afferet vtilitatem, propterea quod, etiamsi frictio sit minima, ob eam momentum effectus adhuc notabiliter diminui posset, si scilicet λ denotaret fractionem valde paruam.

16. *Denique plurimum ad machinarum perfectionem confert motus vniformitas, ad quam ideo imprimis machinas instrui oportet; si enim motus non fuerit vniformis, sed per interualla modo intendatur, modo remittatur, tum effectus semper erit minor eo, qui secundum regulas praecedentes obtineri posset.*

In motus difformitate enim non solum portio vis impellentis in superanda inertia consumitur, sed etiam nonnisi maxima celeritas aequalis est ei, quam machina esset habitura, si motus foret vniformis. Namque dum motns acceleratur, vis impellens maior est vi ad aequilibrium requisita, eiusque idcirco celeritas minor, quam ea, quae motui vniformi conueniret; etsi autem interdum machinae motus celerior inesse queat, quia tamen hoc euenit, quando machina non in totum onus agit, inde nihil omnino in augmentum effectus redundat: vtroque ergo casu semper non parum de vi impellente perit, quando motus non erit vniformis. Quare in hoc potissimum est incumbendum, vt machinae, quantum fieri potest, motus vniformis concilietur. Hunc in finem igitur, primo rotae, quae se mutuo mouent, ita sunt fabricandae, vt dum vna vniformiter mouetur, etiam reliquarum motus prodeat vniformis, id quod dentibus rotarum debita figura inducenda efficietur, quod argumentum antehac pertractaui. Deinde defectus vniformitatis imprimis est pertimescendus, quando machina pistillis alternatim attollendis ac demittendis, vel deprimendis, destinatur, propterea quod corpori, quod est in quiete, non subito motus imprimi potest. His ergo casibus machina ad pistilla ita est applicanda, vt motus machinae non sequatur motum pistillorum, seu vt ille vniformis manere possit, etiamsi hic a statu quietis acceleretur iterumque retardetur, qui effectus commodissime per brachia incuruata impetrari solet; dum enim huiusmodi brachium pistillum eleuandum primum arripit, motum suum continuare potest, etiamsi pistillum parum attollatur; id quod etiam vsu venit, quando pistillum ad maximam altitudinem fuerit eleuatum. Quoniam autem hoc pacto pistilla motui machinae non semper pari

vi

vi reluctantur, ea, si plura fuerint, ita disponi oportet, vt machina quouis momento in pistilla plura, quorum alia sint in loco imo, alia in summo, aliaque in medio statu versentur, agat, sic enim reluctantia aequabilis reddetur. Idem obseruandum est in omnibus machinis, quibus motus reciproci produci solent; ac perpetuo, quando his tribus regulis erit satisfactum, certi esse possumus, machinas ad summum perfectionis gradum, cuius sunt capaces, esse euectas.

DE
MOTV ET ATTRITV LENTIVM
DVM SVPER CATINIS POLIVNTVR.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Inter plures modos, quibus lentes ſuper catinis, ſiue immotis, ſiue in gyrum actis, atteri ac poliri ſolent, hic eum tantum ad examen reuocare conſtitui, quo catino vniformiter in gyrum acto, lens ope ſtyli eius centro applicati ad catinum apprimitur, quo fit, vt ipſa lens circa ſtylum libere mobilis a catini motu in gyrum agatur, et quatenus eius motus a motu catini diſcrepat, eidem atteratur, ſicque politura perficiatur. Quoniam hac ratione arbitrio artificis nihil aliud praeter locum, vbi lentem ſuper catino detineat, relinquitur. Hic modus lentes poliendi prae reliquis geometricae inueſtigationis capax videtur, dum contra, vbi totus lentis motus ab arbitrio artificis pendet, vix quidquam definire licet.

Tab IV. Fig 1. 2. Sit igitur PQRS catinus ope machinae rotatoriae certa quadam velocitate vniformiter in gyrum agendus, circa eius axem O, quem verticalem aſſumo, vt motus catini in plano horizontali abſoluatur. Lens autem AEBF ope ſtyli eius centro C applicati ita con-

continuo ad catinum apprimatur, vt punctum C immotum seruetur, lens autem circum id libere reuolui queat. Catino iam in gyrum acto, ipsa lens circa stylum in motum abripietur, moxque vniformiter circumagetur, cuius motus celeritatem ante definiri oportet, quam effectus attritus, seu celeritas, qua singula lentis puncta super catino teruntur, assignari queat.

3. Denotet u celeritatem gyratoriam catini, ita ad distantiam quandam fixam a centro O, vnitate indicandam relatam, vt in distantia a centro quacunque z sit celeritas vera $= uz$, cuius quadratum $uuzz$, vt mensuras certas obtineamus, exprimat altitudinem huic celeritati debitam: hac ergo littera u motus catini prorsus determinatur, quippe qua constat, punctum quodcunque catini Z, cuius distantia ab axe O fuerit $OZ = z$, ita moueri, vt eius directio sit recta Zm ad OZ normalis, celeritas vero $= uz$, quae tanta est intelligenda, quanta ex lapsu grauis per altitudinem $uuzz$ acquiri solet; quandoquidem catinus in plagam PQRS circumagitur; si enim in plagam contrariam circumageretur pari celeritate, celeritas quidem puncti Z foret eadem, sed directio Zm contraria esset statuenda.

4. Quod porro ad lentem attinet, primo eius diameter AB in computum est ducendus, cuius semissis sit $CA = CB = a$. Deinde plurimum refert, in quanta distantia eius centrum C a centro catini O ope styli fixum detineatur, quae distantia sit $OC = c$. Tum vero si de effectu attritus iudicare velimus, vis qua

ea

ea ad catinum apprimitur, rationem haberi conuenit, quae vis aequetur ponderi $= P$. Cum autem tanta vi tota facies lentis inferior catino apprimatur, vis qua quaelibet eius portio atque adeo elementum apprimitur, ex eius ratione ad totam faciem erit colligenda; siquidem assumimus, lenti iam catini figuram esse inductam, totumque negotium sola politura esse absolvendum.

5. His quae circa lentem sunt nota constitutis, inuestigandus est eius motus, qui ob centrum C fixum alius esse nequit, nisi gyratorius circa idem centrum, et qui inter quaerenda primum locum obtinet. Statim quidem patet, lentem ob motum catini, quem in plagam PQRS fieri pono, in similem plagam AEBF abreptum iri; sed celeritas huius motus etiam nunc est incognita. Sit ergo simili modo huius motus celeritas gyratoria $= v$, ita ad distantiam fixam $= 1$ relata, vt puncti lentis cuiuscunque Z, cuius distantia ab eius centro C fuerit $CZ = x$, celeritas vera futura sit $= vx$, directione existente Zn ad CZ normali. Tum vero vt punctum C immotum teneatur, quoniam motus catini totam lentem auehere conatur, stylo praeterea vim contranitentem applicatam esse oportet, cuius quantitas pariter erit inuestiganda.

6. Quo nunc felicius haec, quae sunt incognita, definire liceat, ante omnia motum respectiuum cuiusque lentis puncti ratione catini explorari conuenit, in quo motu verus attritus consistit. Ac primo quidem at-

attritus centri lentis C ſuper catino per ſe eſt manifeſtus; cum enim ob diſtantiam $OC = c$, punctum catini C celeritate $= cu$ in directione Cc ad OC normali feratur, lentis autem punctum C quieſcat, haec ipſa cu erit celeritas attritus; quae ergo eo maior eſt, quo longius centrum lentis C a centro catini O detineatur. Euidens autem eſt, effectum politurae ab hac attritus celeritate ita pendere, vt partim illi ipſi, partim preſſioni futurus ſit proportionalis.

7. Celeritas attritus autem omnium reliquorum lentis punctorum ſuper catino, non ſolum ab huius, ſed etiam a lentis motu pendet, ad quam inueſtigationem figuram ſecundam maiori ſpecie expreſſam accommodemus. Sit ergo pro puncto lentis quocunque Z diſtantia $CZ = x$ et angulus $ACZ = \Phi$, ad CZ normaliter iungatur $Zn = vx$ motum verum puncti lentis Z exhibens. Catini autem punctum ſubiectum Z, poſita diſtantia $OZ = z$, feretur in directione Zm ad OZ normali celeritate $= uz$. Sumta ergo $Zm = uz$, ſi catino et lenti ſimul motum imprimi concipiamus ſecundum directionem $Z\nu$, ipſi Zn oppoſitam, et celeritate $Z\nu = vx$; tum vero completo parallelogrammo $mZ\nu z$ ducamus diagonalem Zz, res eodem redibit, ac ſi puncto lentis Z quieſcente catinus ſub eo promoueatur in directione Zz celeritate $= Zz$, quae ergo erit celeritas attritus puncti Z. Tab IV. Fig. 2.

8. Cum autem ſit $OC = c$; $CZ = x$, et angulus $ACZ = \Phi$, erit $OZ = z = \sqrt{(cc + xx + 2cx \operatorname{cof.} \Phi)}$. Deinde poſito angulo $COZ = \omega$, erit tang. $\omega = \frac{x \operatorname{ſin.} \Phi}{c + x \operatorname{cof.} \Phi}$

 et

et $\text{ſin.}\,\omega = \frac{x\,\text{ſin.}\,\Phi}{z}$: porro ang. $CZO = \Phi - \omega$, et $\text{tang.}(\Phi - \omega) = \frac{c\,\text{ſin.}\,\Phi}{x + c\,\text{coſ.}\,\Phi}$, atque $(\Phi - \omega) = \frac{c\,\text{ſin.}\,\Phi}{z}$. In triangulo autem $Z\nu z$ eſt $Z\nu = vx$; $z\nu = Zm = uz$ et angulus $Z\nu z = CZO = \Phi - \omega$; vnde colligitur $Zz = \sqrt{(vvxx + uuzz - 2uvxz\,\text{coſ.}(\Phi - \omega))}$.

Inde vero colligitur $z\,\text{coſ.}(\Phi - \omega) = x + c\,\text{coſ.}\,\Phi$, quo valore ſubſtituto fit:

$$Zz = \sqrt{(vvxx + uuzz - 2uvxx - 2cuvx\,\text{coſ.}\,\Phi)} \text{ ſeu}$$
$$Zz = \sqrt{(ccuu + 2cu(u - v)x\,\text{coſ.}\,\Phi + (u - v)^2 xx)}.$$

9. Pro ſitu deinde huius lineae Zz, quae celeritatem attritus puncti lentis Z exprimit, erit primo $CZ\nu$ angulus rectus, tum vero $\text{coſ.}\,\nu Zz$

$$= \frac{Zz^2 + Z\nu^2 - z\nu^2}{2Zz.Z\nu} = \frac{-(u - v)x - cu\,\text{coſ.}\,\Phi}{Zz} = \text{ſin.}(CZ\nu + \nu Zz)$$

Tab. IV. Fig. 1. at $\text{ſin.}\,\nu Zz = \frac{z\nu.\,\text{ſin.}\,Z\nu z}{Zz} = \frac{uz\,\text{ſin.}(\Phi - \omega)}{Zz} = \frac{cu\,\text{ſin.}\,\Phi}{Zz} = -\text{coſ.}(CZ\nu + \nu Zz)$. Si ergo in fig. 1. lineam Zz ſuperne cum CZ angulum conſtituere aſſumamus, erit

$$\text{ſin.}\,CZz = \frac{(v - v)x + cu\,\text{coſ.}\,\Phi}{Zz} \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,CZz = \frac{-cu\,\text{ſin.}\,\Phi}{Zz} \text{ exiſtente}$$
$$Zz = \sqrt{(ccuu + 2cu(u - v)x\,\text{coſ.}\,\Phi + (u - v)^2 xx)};$$

vnde patet, ſi fuerit $ACZ = \Phi = 0$, fore $Zz = cu + (u - v)x$; et angulum CZz rectum, ac ſi praeterea ſit $x = 0$, erit vt ante celeritas attritus centri lentis $C = cu$.

10. Iam quaeſtio huc redit, quamnam habitura ſit rationem celeritas gyratoria lentis v ad celeritatem gyratoriam catini u? ad quam reſoluendam duae patent viae, altera indirecta ex principio minimae actionis

nis petita, altera directa ex principiis motus negotium conficiens. Secundum priorem nullum eſt dubium, quin motus lentis ita comparatus ſit futurus, vt attritus totus fiat minimus. Quare ſi in Z elementum ſuperficiei lentis concipiatur, erit id ob variabilitatem tam diſtantiae $CZ = x$, quam anguli $ACZ = \Phi$, ita expreſſum $= x\,dx\,d\Phi$, quod per celeritatem attritus Zz multiplicatum, dabit eius attritus quantitatem

$$x\,dx\,d\Phi\,\sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x\,\mathrm{cof.}\,\Phi + (u-v)^2 xx)}$$

cuius integrale per totam lentem extenſum minimum eſſe debet.

11. Producta recta ZC vltra C, concipiatur par elementum ſuperficiei $x\,dx\,d\Phi$ ad alteram partem rectae AB, et quia hic fit vel x vel cof. Φ negativum, eius quantitas attritus erit

$$x\,dx\,d\Phi\,\sqrt{(ccuu - 2cu(u-v)x\,\mathrm{cof.}\,\Phi + (u-v)^2 xx)}$$

Collectis his ambobus elementis, euidens eſt, eorum ſummam fieri minimam, ſi ſumatur $v = u$; id quod vtraque formula irrationali in ſeriem conuertenda facillime patet, dum additione poteſtates impares ipſius x, ac proinde etiam ipſius $u - v$, ſe deſtruant, vnde minimum ratione celeritatis v inueſtigando manifeſto elicitur $v = u$, quod cum de omnibus elementorum ſibi hoc modo oppoſitorum paribus valeat, ſequitur etiam, totius lentis attritum minimum eſſe futurum, ſi fuerit $v = u$, ideoque lens aeque celeriter in gyrum agatur atque catinus, ita vt ambo aequalibus temporibus ſuas reuolutiones abſoluant.

12. Verum etiam via directa ad eandem conclusionem manuducet. Cum enim experimentis constet, frictionem a sola pressione pendere, neque celeritatem attritus quicquam, siue ad augendam, siue diminuendam frictionem, conferre, elementum superficiei $x\,dx\,d\Phi$ in Z vi quadam ipsi proportionali, ob pressionem vbique aequalem, in directione Zz sollicitabitur; quae vis ergo sit $= \alpha x\,dx\,d\Phi$; et quia centrum lentis C immotum tenetur, erit huius respectu momentum illius vis $= \alpha x\,dx\,d\Phi .\, CZ \,\text{fin.}\, CZz$
$= \frac{\alpha x\,dx\,d\Phi .\, x((u-v)x + cu \cos\Phi)}{\sqrt{(ccuu + 2cu((u-v)x \cos.\Phi + (u-v)^2 xx)}}$. Ex elemento autem opposito, vti supra, sumto, orietur momentum
$\frac{\alpha x\,dx\,\Phi .\, x((u-v)x - cu \cos.\Phi)}{\sqrt{(ccuu - 2cu(u-v)x \cos.\Phi + (u-v)^2 xx)}}$.

13. Nunc autem, quia motus lentis iam ad vniformitatem compositus statuitur, necesse est, vt horum momentorum summa vniuersa ad nihilum redigatur, quod cum fiat in binis elementis oppositis, si capiatur $v = u$, idem pro tota lente valebit. Idem etiam per integrationem solito more elucet, posito enim $v = u$, ex elemento Z oritur momentum $= \alpha xx\,dx\,d\Phi \cos.\Phi$, vnde pro sectore elementari CZ colligitur momentum $= \frac{1}{3}\alpha x^3 d\Phi \cos.\Phi$, et pro toto ad marginem vsque extenso $= \frac{1}{3}\alpha a^3 d\Phi \cos.\Phi$, cuius denuo integrale est $= \frac{1}{\alpha} a^3 \,\text{fin.}\,\Phi$, quod per totam lentem extensum, donec fiat $\Phi = 360^\circ$, manifesto in nihilum abit, quod non fieret, si non esset $v = u$. Vicissim ergo altera methodus per alteram confirmatur, et cum principium minimi per se sit euidens, patet

simul

ſimul alterum, quo frictio a ſola preſſione pendere aſſumitur, veritati omnino eſſe conſentaneum.

14. Definita iam celeritate $v = u$, non difficile erit determinare vim, cui ſtylus centro lentis C applicatus, praeter preſſionem P, reniti debet, ne centrum lentis C a motu catini abripiatur. Cum enim ſit $v = u$, erit $Zz = cu$, ſin $CZz = \text{coſ.}\Phi$ et coſ.$CZz = -\text{ſin.}\Phi$, ita vt ſit $CZz = 90^\circ + \Phi$, et $zZn = \Phi = ACZ$. Ob frictionem autem vrgetur elementum ſuperficiei lentis $x\,dx\,d\Phi$ ſecundum directionem Zz vi conſtante; et quia tota ſuperficies, quae eſt $= \pi aa$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter eſt $= 1$, apprimitur vi P, elementum illud apprimetur vi $= \frac{P x\,dx\,d\Phi}{\pi aa}$ cuius parti quaſi tertiae frictio aequatur. Scribamus autem generalius λ pro parte tertia, ita vt elementum in Z ſecundum Zz ſollicitetur vi $= \frac{\lambda P x\,dx\,d\Phi}{\pi aa}$, quae ſecundum directionem CZ praebet vim $= \frac{\lambda P x\,dx\,d\Phi\,\text{ſin.}\Phi}{\pi aa}$ et ſecundum directionem ad illam normalem vim $= \frac{\lambda P x\,dx\,d\Phi\,\text{coſ.}\Phi}{\pi aa}$.

15. At per ea, quae ſupra oſtendimus, omnes iſtae vires normales ſe deſtruunt, vnde ſtylus ſuſtinere debet alteras illas vires ſecundum CZ agentes, quae ſunt $= \frac{\lambda P x\,dx\,d\Phi\,\text{ſin.}\Phi}{\pi aa}$, et quaſi ipſi centro lentis C ſecundum directionem CZ applicatae eſſent, concipi poſſunt. Quaelibet vero huiusmodi vis reſoluatur ſecundum directiones fixas CA et Cc, eritque vis ſecundum $CA = \frac{\lambda P x\,dx\,d\Phi\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi}{\pi aa}$, et vis ſecundum $Cc = \frac{\lambda P x\,dx\,d\Phi\,\text{ſin.}\Phi^2}{\pi aa}$. Illa primum integrata, poſito

 $x = a$

$x = a$, dat $\frac{\lambda}{2\pi} P d\Phi$ fin. Φ cof. $\Phi = \frac{\lambda}{4\pi} P d\Phi$ fin. 2Φ, cuius porro integrale eft $= \frac{\lambda}{8\pi} P(1 - \text{cof.}\, 2\Phi)$. Pofito nunc pro tota lente $\Phi = 360°$, haec vis fecundum CA euanefcit Altera vis fecundum Cc femel integrata dat $\frac{\lambda}{2\pi} P d\Phi$ fin. $\Phi^2 = \frac{\lambda}{4\pi} P d\Phi (1 - \text{cof.}\, 2\Phi)$, cuius fequens integrale eft $= \frac{\lambda}{4\pi} P(\Phi - \frac{1}{2}\text{fin.}\, 2\Phi)$, et pofito $\Phi = 360° = 2\pi$ prodit vis fecundum $Cc = \frac{1}{2}\lambda P$.

16. Ob motum ergo catini ftylus fuftinet vim $= \frac{1}{2}\lambda P$ fecundum directionem Cc, quam artifex continuo vi contraria et aequali renitendo deftruere debet, fiquidem centrum lentis immotum tenere velit. Quare fi $\lambda = \frac{1}{3}$, haec vis aequatur fextae parti preffionis totius P, qua lens catino apprimitur, cui conclufioni per fe verae vnicus cafus aduerfatur, quo centrum lentis C ipfi centro catini O apprimitur; tum enim, quia lens pari motu cum catino circumagitur, nullusque attritus exercetur, ftylus etiam nullam vim fuftinet. At huiusmodi exceptio femper, quando de frictione agitur, admitti debet; cum enim in motu tardiffimo frictio aeque fit magna atque in celerrimo, motu tamen plane euanefcente frictio quafi fubito euanefcit. Neque ergo hoc incommodum tanquam vitium calculo eft imputandum.

17. Cum duplici demonftratione euictum fit, effe $v = u$, idem etiam experientia egregie confirmari deprehendi; in quacunque enim catini loco lens detinebatur, eius reuolutiones femper exactiffime cum reuolutionibus catini conueniebant, neque vix vllam inae-

quali-

qualitatem, ne in motus quidem initio, obſeruare licuit. Vnde patet ſtatim ab initio motus reuolutiones lentis ſe ad eam aequalitatem componere, quam calculus oſtendit; quin etiam motu catini modo intenſo, modo remiſſo, lens eandem inaequalitatem ſequi obſeruata eſt. Hic ergo inſigne cernitur ſpecimen foecundiſſimi illius principii minimae actionis, quod eo magis omni attentione dignum videtur, quod etiam in motu per frictionem impedito tam felici cum ſucceſſu adhiberi potuerit, cum hactenus eius vſus tantum in motibus liberis a viribus veri nominis, quibus frictionem vix annumerare licet, perturbatis, ſit oſtenſus.

18. Quoniam igitur ex eo, quod inuenimus $v = u$, ſequitur eſſe celeritatem $Zz = cu$, patet in eodem lentis ſitu omnia eius puncta aequali celeritate atteri, ideoque pari vi laeuigari ac poliri, quo ipſo hic mechanismus non mediocriter reliquis antecellit, cum alias alia lentis puncta fortius, alia debilius, atteri ſoleant. Praeterea vero hic perſpicitur, celeritatem attritus rationem ſequi interualli $OC = c$, ita vt ſi centrum lentis C centro catini O applicetur, nullus plane attritus ſit futurus; quo longius autem interuallum OC capiatur, eo maiorem fore attritum, idque in eadem ratione. Quam ob rem omnino neceſſe eſt, vt catini magnitudo multum ſuperet magnitudinem lentis, quae regula etiam ab artificibus probe obſeruari ſolet.

19. Hic igitur ingens conſpicitur diſcrimen inter frictionem et attritum, quae duae res vulgo confundi ſolent.

ſolent. Frictio enim, ſiue motus ſit tardior, ſiue velocior, perpetuo manet eadem. cum attritus eiusque effectus, qui in abraſione eſt conſtituendus, maxime a velocitate pendent, ex quo attritus quantitatem commodiſſime metiemur eius celeritate Zz in preſſionem ducta. Quare ſi in ſuperficie lentis conſideremus elementum dZ, quod quia catino apprimitur vi $= \frac{PdZ}{\pi aa}$, teriturque celeritate $= cu$, erit quantitas attritus $= \frac{PcudZ}{\pi aa}$. Hinc ergo lens eo promtius laeuigabitur et polietur, quo maior fuerit quantitas $\frac{Pcu}{\pi aa}$; quae proportionalis eſt 1°, vi P, qua lens catino apprimitur, 2°, celeritati u, qua catinus in gyrum agitur, 3°, interuallo $OC = c$ quo centrum lentis diſtat a centro catini, et 4°, denique reciproce ſuperficiei lentis, ita vt quo lens fuerit maior, eo tardius laeuigatio perficiatur.

20. Hic autem non tantum ad lentis attritum eſt reſpiciendum, ſed quia catinus etiam atteritur, eiusque ſuperficies abraditur, niſi vbique aequaliter radatur, mox eius figura alteratur; vnde fit, vt deinceps etiam lenti figura a propoſita aberrans inducatur. Quam ob rem neceſſe eſt, vt etiam attritus ipſius catini accuratius inueſtigetur. Primo autem patet omnia catini puncta ab eius centro aeque remota quauis reuolutione aequaliter atteri. Conſideremus ergo catini punctum quodcunque L a centro catini O diſtans interuallo $OL = y$, quod vna reuolutione tamdiu tantum atteritur, quamdiu per angulum MON profertur. Cum igitur attritus momentaneus ſit $= \frac{Pcu}{\pi aa}$, vna reuolutione integra totus attritus cenſendus erit $= \frac{Pcu}{\pi aa} \cdot \frac{ang.\,MON}{360°}$, ſiquidem

Tab. IV. Fig. 3.

puncti

puncti lentis L quantitas attritus vna reuolutione exprimatur per $\frac{Pcu}{\pi aa}$.

21. Cum nunc ſit $CM = CA = a$; $OC = c$; $OM = OL = y$, erit coſ. $LOM = \frac{cc + yy - aa}{2cy}$, vnde, ob $\pi = 180^\circ$, erit attritus puncti catini L durante vna reuolutione $= \frac{Pcu}{\pi\pi aa}$. A coſ. $\frac{cc - aa + yy}{2cy}$, quae expreſſio tantum pro iis catini punctis valet, quorum diſtantia a centro O intra limites $AO = c + a$ et $BO = c - a$ continetur, quoniam tam in vtroque limite, quam extra eos, attritus euaneſcit. Hic autem notandum eſt, ſi fuerit $c < a$, et $y = a - c$, fore A coſ. $\frac{cc - aa + yy}{2cy} = 180^\circ = \pi$, ſeu haec catini puncta perpetuo atteri, quod multo magis valebit, ſi fuerit $y < a - c$, hoc ſcilicet caſu ſpatium circulare circa centrum catini O, cuius radius eſt $= a - c$, perpetuo attritum patietur, et quidem aequalem ei, cui lens eſt ſubiecta. Cuiusmodi attritu ſi totus catinus afficeretur, non eſſet metuendum, vt eius figura deformaretur.

22. Cum autem ſolum ſpatium annulare catini lenti ſe applicans atteratur, quamdiu quidem lens in eodem loco detinetur, eius tantum figura alterationem patitur, eamque non aequabilem, vnde ſphaericitas eius tandem vehementer mutabitur, lentique proinde figura a ſcopo non mediocriter aberrans imprimetur. Huic incommodo artifices remedium afferre conantur, dum lentem modo propius admouent ad centrum catini, modo ab eo longius remouent, quo pacto quidem cati-

 num

num circa centrum atterunt, sed circa marginem attritus multo minor manet, ita vt ne hoc quidem modo catinus per totam superficiem aequaliter radatur. Deinde vero etsi hoc modo attritus non tam inaequabilis sit, quam si lens iugiter in eodem loco detineretur, tamen is non certa quadam lege distribuitur, vnde fit, vt figura catini a sphaerica mox notabiliter recedat, solique fortunae sit tribuendum, si quandoque bonae indolis lentes hoc modo elaborentur.

23. Ad catini autem attritum aequabilem reddendum optimum remedium videtur, si frustum quoddam vitri praeter lentem super catino atteratur, cuius figura et pressio ita sit comparata, vt singula catini puncta, tam a lente, quam ab isto frusto, aequabilem attritum patiantur. Quo huius frusti figura simplicior prodeat, ponamus interuallum BO euanescere, seu esse $OC = c = CB = a$, catinique radium OA diametro lentis $2a$ esse aequalem, quandoquidem, cum lens perpetuo in eodem loco detineatur, superfluum foret, catinum ampliorem efficere. Sit igitur $EObi$ figura illius frusti vitrei quaesita, quod continuo catino in eodem loco applicatum detineatur, eique pondere $= Q$ apprimatur, cuius area sit $= ee$. Quoniam nihil refert, quo in loco hoc frustum applicemus, concipiamus id in situ DOHVT.

Tab. V. Fig. 1.

24. Cum igitur catini puncta L a centro O interuallo $OL = y$ distantia ob $c = a$ a lente attritum pati-

patiantur, cuius quantitas vna reuolutione eſt $=\frac{Pu}{\pi\pi a}$ A coſ. $\frac{y}{2a}$ $=\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LM$. Tum vero eadem puncta L ſub fruſto vitri per arcum VR deferuntur celeritate uy, et quia preſſio in ſingulis punctis eſt vt $\frac{Q}{ee}$, erit quantitas attritus in vna reuolutione $=\frac{Quy}{ee}.\frac{KV}{2\pi y}=\frac{Qu}{2\pi ee}.KV$, vbi $2\pi y$ peripheriam totius circuli denotat. Neceſſe ergo eſt, vt ſumma harum expreſſionum $\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LM+\frac{Qu}{2\pi ee}.KV$ ſit quantitas conſtans, quae ſtatuatur $=\frac{Pu}{\pi\pi a}.\frac{\pi}{2}$. At poſita recta OD ad AO perpendiculari, ob arcum LMK $=\frac{\pi}{2}y$, erit haec conſtans $=\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LMK$, ita vt habeatur haec aequatio:

$$\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LM+\frac{Qu}{2\pi ee}.KV=\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LMK$$

quae reducitur ad hanc: $\frac{Q}{2ee}.KV=\frac{P}{\pi ay}.MK$.

25. Erit ergo arcus $KV=\frac{2Pee}{Q\pi ay}.MK$, exiſtente $OK=y$; vnde porro area ſpatii DOHVI $=ee$ definiri poteſt. Cum enim ſit $MK=y$ A ſin. $\frac{y}{2a}$, habebitur $KV=\frac{2Pee}{Q\pi a}$ A ſin. $\frac{y}{2a}$, hincque areae elementum $KV.\,dy=\frac{2Pee}{Q\pi a}dy$. A ſin. $\frac{y}{2a}$, cuius integrale eſt

$$\frac{2Pee}{Q\pi a}\left(y\,\text{A ſin.}\frac{y}{2a}+\sqrt{(4aa-yy)}-2a\right)$$

quod per totum fruſtum extenſum ponendo $y=2a$ praebet aream totam

$$ee=\frac{2Pee}{Q\pi a}\left(2a.\frac{\pi}{2}-2a\right)=\frac{2Pee}{Q\pi}(\pi-2)$$

vnde quidem non area ee, ſed pondus apprimens Q, ita definitur, vt ſit $Q=\frac{2P(\pi-2)}{\pi}$; vnde ſiue ponatur $\pi=\frac{22}{7}$

 ſiue

siue $\pi = \frac{355}{113}$, dat $Q = \frac{8}{11}P$, seu $Q = \frac{258}{355}P$, vnde constat, quanto pondere frustum vitri catino apprimi debeat.

26. Ad figuram autem frusti vitrei inueniendam quia inuenimus $\frac{2Pee}{Q\pi} = \frac{ee}{\pi - 2}$, habebimus hanc aequationem $KV = \frac{ee}{(\pi - 2)ay} . MK$, vbi ee pro lubitu assumere licet. Statuamus ergo $ee = (\pi - 2)aa$, vt area frusti sit ad aream lentis, vt $\pi - 2$ ad π, seu 4 ad 11, fiatque $KV = \frac{a}{y} . MK$. Ad quam aequationem construendam ducto per centrum lentis C quadrante CHX, quem recta OM secet in T, erit $TX = \frac{a}{y} . MK$, ideoque $KV = XT$. Vbique ergo sumatur arcus KV aequalis arcui XT, et spatium curua OHVI et radio OD inclusum dabit figuram frusti DOHVI, seu in situ lentem non impediente $EObvi$, quod pondere $Q = \frac{8}{11}P$ catino appressum desideratum praestabit effectum, vt figura catini non deformetur.

27. Etsi constructio lineae $Obvi$ est facilis, dum vbique arcus kv arcui xt aequalis est capiendus, constituto semicirculo OmD semissi lentis aequali, tamen conueniet, aequationem huius curuae ad coordinatas orthogonales saltem proxime reduci. Sit igitur $Op = p$ et $pv = q$, existente $Ok = y = \sqrt{(pp + qq)}$ et $Ox = a$, et vocetur angulus $kOm = A \sin. \frac{y}{2a} = \Phi$, vt sit $y = 2a \sin. \Phi$, vnde ob $kv = xt = a\Phi$, hincque angulum $kOv = \frac{a\Phi}{y} = \frac{\Phi}{2 \sin. \Phi}$ reperietur:

$$p = 2a \sin. \Phi \cos \frac{\Phi}{2 \sin. \Phi} \text{ et } q = 2a \sin. \Phi \sin. \frac{\Phi}{2 \sin. \Phi},$$

vnde

vnde approximando colligitur

$$q = 0,5463p + 0,03513 \cdot \frac{p^3}{aa}.$$

Initio ſcilicet circa O haec curua abit in rectam ad OE angulo $28^\circ, 39'$, cuius arcus ſemiſſi radii aequatur inclinato; pro puncto extremo autem i fiunt coordinatae $p = q = a\sqrt{2}$.

28. Facillime autem huius fruſti figura in praxi hoc modo delineabitur: Radio OE diametro lentis aequali deſcribatur circulus, in quo primo capiatur arcus $Ei = 45^\circ$, tum vero arcus En ſemiſſi rectae OE aequalis, qui continebit quaſi $28^\circ, 39'$: Deinde centro O radio dimidio Oc deſcribatur arcus cg continens 30°, ac ducta recta On linea quaeſita circa O cum hac recta confundetur, tum vero ab ea paulatim recedens per punctum g tranſibit, indeque proferetur ita in punctum i, vt hic circulum Ei tangat. Fruſtum ergo vitri terminandum eſt primo recta OE, tum arcu Ei, ac denique linea curua Ogi oſtenſo modo praeſcripta: hocque vitrum catino appreſſum pondere $Q = \frac{8}{11}P$, dum P eſt pondus, quo lens ei apprimitur, impediet catini deprauationem. Tab. V. Fig. 2.

29. Hic modus figuram catini intemeratam conſeruandi in vſum vocari nequit, niſi lens ita detineatur, vt eius ora ad centrum catini vſque pertingat. Si enim a lente centrum catini plane non attereretur, quoniam etiam a fruſto vitri, quod catino immotum

incumbere aſſumo, nullum attritum pateretur, nihil inde abraderetur, neque ergo deprauatio eius caueri poſſet. Quae eſt cauſa, cur hic lentem vsque ad catini centrum O porrigi aſſumſerim. Caeterum cum tam lentis centrum C ope ſtyli, quam totum vitri fruſtum perpetuo in eodem loco teneri debeat, artifex ſtrenuus ope ſimplicis mechanismi haud difficulter hoc exequetur, ſimulque efficiet, vt cum lens dato pondere P catino apprimatur, fruſtum vitri debito pondere Q, quod ad illud ſit vt 8 ad 11, ſit oneratum. Hocque pacto lentibus praeſcripta figura induci poterit, dum inter operandum figura catini non deprauatur.

DE

DE NOVA QVADAM VECTIS PROPRIETATE DISSERTATIO.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

In euoluenda magnetis theoria occupatus, fortuito in notabilem quandam vectis proprietatem incidi, quam, vtpote non inelegantem, et a nemine, quantum scio, animaduersam, obliuioni eripiendam esse iudicaui, vnde non incongruum puto, si ipsius in Commentariis Academiae mentio iniiciatur.

Nouam istam proprietatem sequens comprehendit theorema: *Vectis BAC, aequalium brachiorum, extremis punctis B et C applicatae cogitentur vires datae magnitudinis, trahentes secundum directiones, rectis positione datis LM et ON, parallelas, secundum lineas nempe BD et CF. Exhibeatur altera harum virium per rectam BD, altera per EF, et prior resoluta cogitetur in vim vecti parallelam CB, atque normalem ED, posteriorque simili modo in vires CG et GF. Dico fore vectem ABC in aequilibrio constitutum, quando eum adquisiuit situm, vt summa virium EB et CG sit maximum.* Tab. V. Fig. 3.

Pro demonstranda propositionis istius veritate, cogitetur positione data recta tertia RS, sitque angulus

gulus $LPI = \alpha$, $OQH = \beta$, $BKH = \Phi$, recta $BD = A$, CF vero $= B$. Quaeramus iam ſitum vectis, ſiue angulum Φ, qui ſummam rectarum BE atque CG reddit maximam. Quoniam hic angulus LPI ſiue $BHI = \alpha$, BKH vero $= \Phi$, erit $EBD = \alpha + \Phi$, vnde obtinemus in triangulo rectangulo EBD, $EB = A$ $\cos(\alpha + \Phi)$. Similiter eſt angulus $FCG = \beta - \Phi$, atque $CG = B \cos.(\beta - \Phi)$. Fit itaque $EB + CG = A$ $\cos.(\alpha + \Phi) + B \cos.(\beta - \Phi) = (A \cos.\alpha + B \cos.\beta)$ $\cos\Phi - (A \sin.\alpha - B \sin\beta) \sin.\Phi$, quae quantitas ſi debeat eſſe maximum, erit, poſtquam capta ſunt differentialia $-(A \cos.\alpha + B \cos.\beta) \sin.\Phi\, d\Phi - (A \sin.\alpha - B$ $\sin\beta) \cos.\Phi\, d\Phi = 0$, vnde deducitur tang $\Phi = \frac{B \sin.\beta - A \sin.\alpha}{B \cos.\beta + A \cos.\alpha}$, ex qua aequatione deductus valor ipſius Φ, quaeſito ſatisfacit.

Ex ſtaticis porro notum eſt, eſſe tum vectem BAC in aequilibrio conſtitutum, quando eſt $ED = FG$. Cum ergo ſit, vti ex ſupra traditis facile concluditur, $ED = A \sin.(\alpha + \Phi)$, atque $GF = B \sin.(\beta - \Phi)$, erit pro ſtatu aequilibrii $A \sin.(\alpha + \Phi) = B \sin.(\beta - \Phi)$, ſiue $A \sin.\alpha \cos.\Phi + A \cos\alpha \sin.\Phi = B \sin\beta \cos.\Phi - B$. $\cos.\beta \sin.\Phi$, vnde fit $\frac{B \sin\beta - A \sin.\alpha}{B \cos.\beta + A \cos.\alpha} = \text{tang}.\Phi$, qui valor, cum idem ſit cum antea reperto, veritas aſſerti noſtri abunde patet.

Dubium autem incidere poteſt lectoribus, an recte aſſeruerim, $BE + CG$ eſſe maximum, conditio enim, quod quantitatis iſtius differentiale euaneſcat, pro hacce re probanda non ſufficit, cum $BE + CG$ quoque eſſe poſſit minimum, immo contingere queat,

vt

vt neque maximum ſit, neque minimum. Aſt dubium facile tolli poteſt. Ponatur breuioris expreſſionis cauſa, $B \sin. \beta - A \sin. \alpha = N$, $B \cos. \beta + A \cos. \alpha = M$, atque $BE + CG = z$. Quoniam iam pro caſu $dz = 0$, $\frac{N}{M} = \tang. \Phi$, erit $\sin. \Phi = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}}$ atque $\cos. \Phi = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}}$, quos valores ſubſtituendo in formula ſupra reperta, erit pro caſu $dz = 0$, $z = \sqrt{M^2 + N^2}$. Sit porro Φ iſtud, quod reſpondet $dz = 0$, $= \psi$, atque ſit Φ reſpondens alii valori ipſius $z = \psi + \gamma$, eritque tum $z = M \cos. (\psi + \gamma) + N \sin. (\psi + \gamma) = M \cos. \psi \cos. \gamma - M \sin. \psi \cos. \gamma + N \sin. \psi \cos. \gamma + N \cos. \psi \sin. \gamma$, quae formula, ob $\sin. \psi = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}}$, et $\cos. \psi = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}}$, tranſit in $\cos. \gamma \sqrt{M^2 + N^2} = z$. Quodſi ergo z reſpondens dz euaneſcenti, quod ſupra repertum eſt $= \sqrt{M^2 + N^2}$, indicetur per z', erit $z' \cos. \gamma = z$.

Cum itaque $\cos. \gamma$, quicunque valor tribuatur angulo γ, ſit ſemper minor radio, ſiue vnitate, erit generatim $z \lesssim z'$, vnde z', omnino, vti aſſerui, eſt maximum.

DESCRIPTIO INSTRVMENTI CVIVSDAM, NAVTIS BAROMETRI AD INSTAR INSERVITVRI.

AVCTORE IO. ERN. ZEIHERO.

Praecipuum Barometri marini requiſitum in eo conſiſtit, vt aer in eiusmodi agat corpus, quod nauis agitatione nullam patiatur mutationem. Quare iam ſuperiori ſaeculo Celeb. Dr. *Robertus Hook*, ſumma eiusmodi inſtrumenti vtilitate conuictus, Barometrum quoddam, quod concuſſionibus nauium non alteretur, excogitauit, coniungendo Thermometrum Florentinum cum Drebeliano, et, inſtituta vtriusque thermometri comparatione, in quorum vnum aeris pondus ſimul agit, alterum autem nullam ab eodem patitur mutationem, ſcalam, diuerſa aeris pondera indicantem, perficiendo, vti ex Transactionibus Anglicanis notum eſt. Pari etiam modo Cel. *Amontons* Barometrum vſui huic memorato inſeruiens inuenit, idque in Actis Pariſinis deſcripſit. (*)

Vtrumque fortaſſe inuentum non modo perfectius, ſed ad vſum etiam accommodatius reddi poſſet, ſi quis rem, de qua agitur, denuo ſuſcipere velit.

Hac occaſione, dum omnia quae huc ſpectant momenta, penſitabam, nouum inuentum ſubiit, quod, quam

(*) Vid. Mem. de l'Acad. des Sc. de Paris. ann. 1705. p. 62.

quum fortaſſe ad alia inuenta, multiplici vſu praeclara, aditum patefacere poſſit, in publicum proferre non dubitaui.

Si concipiamus mercurii loco in tubo Toricelliano elaterem, euidens eſt, eum vsque dum compresſum iri, donec aeris preſſioni perfecte reſiſtat. Inde porro ſequitur, elaterem hunc ſub altitudine mercurii in Barometro Toricelliano minore, e. g. 27″, minus comprimi, quam ſi altitudinem 28 vel 29 digitorum attigerit. Hic itaque elater non ſecus ac columna mercurialis, mutato aeris pondere, ſpatium quoddam percurret, et ſi indice inſtrueretur, pari modo, ac mercurius, inde oriundas mutationes indicabit.

Hoc autem ſequenti modo, ego vt arbitror, effici poteſt. Conſtruatur cylindrus metallicus ABCD, quali alias ad euacuandum ſeu comprimendum aerem vtimur, eidemque adaptetur embolus E pertica EF inſtructus, ita, vt minimam, quantum fieri poteſt, patiatur frictionem; ſedulo tamen in conſtructione caveatur, ne aer intra parites cylindri et emboli latera ſeſe inſinuet. Inter hunc E, illiusque operculum AB, adaptetur ſpiralis G, quae altera extremitate embolo E, altera operculo AB ſit affixa. H eſt alter embolus, quo aer in cylindro inter vtrumque embolum contentus euacuatur. IK eſt capus, mediante cochlea K embolo H vel iungendus, vel pro lubitu ab eo ſeparandus. Pyxis, ſeu fundus CD, foramine quadrangulari, emboli partem eiusdem formae 1. 1. commode recipiente, eſt inſtructus. 2. 2. eſt alia emboli H pars ro- Tab. VI.

 tunda,

tunda, inque ſe inciſam habens cochleam, huicque reſpondet altera, femina 3. 3. quae embolum per foramen fundi quadrangulare retractum retinet. 4. 4. eſt annulus coriaceus, inter cylindri annulum 5. 5. et pyxidem CD poſitus, qui impedit, ne aer externus emboli latera ſubeat. Embolo H itaque verſus embolum E protruſo ad ſpiralis omnimodam compreſſionem (dematur autem prius hamulus α, vt arcte ad ſe inuicem applicari poſſint emboli) indeque ad fundum vsque retracto, ſpatium inter E et H euacuabitur, et externa embolum premens aeris columna ſpiralem G ad certum gradum extendet, donec aeris preſſioni perfecte reſiſtat. Prouti autem aeris pondus mutatur, ſpiralis etiam plus minusue extendetur, embolusque vna cum ſua pertica FE, a minimo aeris pondere ad maximum vsque, ſpatium certum percurret, et quodlibet perticae EF punctum, ad externam operculi ſuperficiem AB relatum, pondus aeris mutatum indicabit.

Si igitur ad notandas mutationes ponamus, altitudinem mercurii eſſe in Barometro communi 28″, 4‴ ped. Rhenan. vis, qua ſpiralis G trahitur, aequalis erit preſſioni columnae mercurii, ſectionem emboli E transuerſam pro baſi, ac 28″, 4‴, pro altitudine habentis. Adeoque, vt determinetur, quo vsque ſpiralis hoc aeris pondere fuerit extenſa, quaenamque virgae EF pars extra operculum AB promineat, nihil aliud requiritur, quam vt auferatur fundus CD, extrahatur embolus H, hamuloque α, embolo infixo, adpendatur pondus columnae mercuriali aequiponderans, idemque

idemque erit, ac ſi aeris columna embolo E incumbens omni ſua preſſione in ſpiralem G ageret, et perticae EF punctum in lineam AB cadens deſignare poterit; hocque modo alia quaeuis puncta a minima mutatione ad maximam vsque inuenientur, ponderis tantum, vel addendo, vel auferendo, quantum Barometri Toricelliani altitudines, a minima mutatione ad maximam vsque, requirunt.

Quum tota viciſſitudo ponderis aeris, vel mercurii, decimam quartam partem circiter attingat, ſpatium, quod punctum quodlibet perticae EF percurrit, non admodum poteſt eſſe magnum. Vt autem iſtae mutationes reddantur notabiliores, efficiatur, vt virga ſub motu ad rotulam β patiatur frictionem, huicque acus $\beta\gamma$ affigatur, qua in laminae LMN, cui cylindrus ABCD duorum cingulorum ope annectitur, oppoſito latere diuiſiones in limbo inferiore notatae indicantur. Ne autem pertica vacillet, ſed in motu ſuo rotulam β ſecum ſemper circumducat, ad δ alia rotula, quae elatere ε inſtructa eſt, perticamque ad ζ articulo donatam, ad priorem adprimit, affigenda eſt.

Quum interdum fieri poſſit, vt acus caſu de loco ſuo excidat, virgam immotam derelinquens; neceſſe erit, vt certa Barometri altitudo, e. g. media, ſigno quodam in virga notetur, e. g. linea transuerſa, quae ſub medio aeris pondere in ſuperficiem AB iuſto cadat, et acus diuiſionem in laminae limbo MN factam in partes duas aequales diuidat. Haec ſi obſervetur cautela, inſtrumentum, perticam vel deprimendo, vel retrahendo, eo vsque, donec linea ſuperficiem AB attingat, acumque $\beta\gamma$ ad diuiſionis medium dirigendo, denuo ſemper verificare poteris.

Ad excludendum vero omnem aerem, qui alias emboli E latera ſubire facile poſſet, olei et ſeui miſtura (germ. Speiſe) ſuper embolum ad aliquot linearum altitudinem affundatur. Si autem poſt aliquod temporis interuallum eſſet, cur aerem clandeſtino irruptum ſuſpicemur, tunc denuo euacuare cylindrum, et, ſi ſpiralem ſuae elaſticitatis feciſſe iacturam foret coniectura, de nouo puncta determinare oportet: id quod facili opera fieri poteſt.

DVARVM

DVARVM MACHINARVM, VNIVS AD PERFICIENDA QVAEDAM INSTRVMENTA, GERM. Rändeleisen, ALTERIVS AD COCHLEAS INFINITAS EXSCINDENDAS IDONEAE, DESCRIPTIO.

AVCTORE I. E. ZEIHERO.

Machinarum siue instrumentorum a modernis fabrefactorum capitula rotunda, cochleis adiuncta, et capsulas cylindricas, mediante cochlea connexas, striatis seu crenatis donatas esse marginibus, nonnullarum instar monetarum, notum est; id quod germanice vocant gerändelt. Crenae autem istae non tam ornamenti causa, quam potius magnum ob vsum, quem praestant, conficiuntur: multum enim faciunt, vt modo dictae partes et firmiter apprehendi, et commode moueri queant; cum e contrario in glabro margine non habeant, quo obfirmentur, digiti, ita vt cochleae soluendae saepius nobis non sit potestas.

Instrumentum, quo conficiuntur margines striati, est discus chalybeus Fig. 1. *n.* 7, 8, 9, 10, circa frontem excauatus, ac crenatus: crenae autem nihil aliud, quam cochlearum typi sunt. CD est furca, qua discus circa axem, altera extremitate capite, altera cochlea instructam, mouetur. G est vncus, quo capulo ligneo insinuatur. Tab. VII.

Opus

Opus autem marginandum torno formatur modo sequenti: annulis hunc in finem torno iam efformatis, ac politis, instrumentum, Rändeleisen dictum, fulcro imponitur, vti quoduis instrumentum tornatorium; porro instrumentum inter tornandum contra marginem operis marginandi fortiter premitur, tam diu, donec crenae instrumenti annulis perfecte sint impressae: id quod peractis aliquot reuolutionibus factum erit.

Machina autem ipsa, ad istiusmodi instrumenta perficienda, vt et alia quaedam, cochleis infinitis quibusdam singularibus, quibus instrumenta hodie instructa reperiuntur, exscindendis adaptata, vno eodemque fundatae sunt principio, modo ratione structurae parum diuersae, quantum scilicet singularum peculiaris requirit vsus.

Cochleas infinitas modo dictas anglicanas omne id, quod in hoc genere adhuc inuentum est, superare, nemo inficias iuerit: ideoque non incongruum fore iudicaui, si vtramque machinam, qualis in vsum laboratorii Mechanici a me inuenta, elaborata, Illustrique Conuentui exhibita est, describerem.

Tab. VII. Fig. 1. n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, totam Machinam primo loco nominatam, secundum omnes ipsius partes, dimidio minores, quam elaboratae exsistunt, repraesentat.

AB, CD, est par laminarum, mediantibus frustis *a*, *b*, cochleis iunctum, eo modo, vt, si necesse fuerit, iterum seiungi possit. E est pars mobilis, germanica voce Laufer dicta, quae cochleae F, partem *b* transeuntis ope protrudi et retrudi potest.

GH,

GH eſt cingulum machinam circumdans, mobile, clauo cochleatim ſtriato *cd* fulcimenti inſtar inſeruiens. Hic clauus, ſeu cochliditypus *cd*, circa extremitatem *d* quadrangularis eſt, thecae pariter quadrangulari apponendae, ac cochleae ſeu claui ope firmandae, adaptatus; thecae modo deſcriptae gyrgillus IK applicatur. Altera extremitas *d* pari modo, aut claui, aut cochleae ope, in loco ſuo retinetur, quod quilibet pro lubitu ſuo diſponere poteſt, modo cochliditypus ita ſit firmatus, vt circum quidem gyrari poſſit, non tamen vacillet, ſed in ſitu ſuo ſemper retineatur.

Quodſi igitur machinae huius ope diſcos crenatos (Rändeleiſen) performare animus eſt, primum diſci chalybei torno perficiuntur, quorum diameter circiter duplex iconis *n*. 7, craſſitiei cochliditypi proportionata eſt. Singuli diſci medium foramine patet, cuius diameter foraminum *e*, *e*, n. 1. diametrum adaequat. Iidem circa frontem excauantur ita, vt ipſorum cauitas conuexitati cochliditypi circiter reſpondeat.

Quo facto, eorum duo machinae applicantur, vti ad n. 3, *g*, *h*, videre eſt. Interſtitium inter laminas, atque diſcos chalybeos, bracteis tenuibus, rotundis, orichalceis, perforatis, impletur, et totus apparatus clauis *f*, *f*, traiicitur ita, vt vtramque machinae laminam tranſeant. Diſcorum vnus inter immobilem partem vtriusque laminae, alter inter mobilem, cochliditypus autem inter frontes diſcorum ponitur. Diſcos ita figere oportet, vt eorum frontes conuexitati cochliditypi reſpondeant, ne inaequabili modo exſcindantur.

 His

His ita dispositis, mediante cochlea F pars mobilis E, vna cum suo disco, contra cochliditypum, hicque contra discum oppositum, protruditur; denique cochliditypus gyrgilli ope circum mouetur, sic cochlidia, ad frontes discorum oppositos sese applicantia, eos secundum directiones oppositas circumagent, ac, parte mobili magis magisque protrusa, sensim sensimque discorum frontibus sese impriment.

Ast caute faciendum est hoc opus: cochlea F enim paulo nimis intensa, clauus seu cochliditypus, vtpote valde induratus, facile diffringitur; exercitio solo acquiritur sensus quidam, quo, an resistentia nimis magna sit, nec ne, percipitur. Cochleam enim leuiter tantum intendere oportet, vt, discis prima vice reuolutis, vix cochlidiorum tramites sint conspiciendi; postea arctius sensim cogitur cochlea, donec post plures reuolutiones crenae satis profunde sint impressae.

Adhibentur autem non eam potissimum ob caussam duo disci, vt vterque simul exscindatur; sed potius, vt cochliditypus ex vtraque parte sibi inuicem opposita aequalem patiatur resistentiam, nec frangatur: id quod alias, ob illius in chalybem actionem, facile accidere posset Quodsi vero cochliditypus admodum crassus sit, sine fracturae periculo vnicus etiam discus exscindi potest.

Altera, cochleis infinitis exscindendis inseruiens machina, ratione structurae a priori aliquantulum differt: partim, quod opera diuersae valde diametri hac mediante exscinduntur; partim, quoniam clauus tantum

modo

modo in orichalcum, vel ad ſummum in ferrum agit, nec opus eſt, vt clauus diſcos duos ſibi oppoſitos ſimul exſcindat.

Machinam totam, omnesque eius partes, dimidio imminutas, fig. 2 et 3. n. 1, 2, 3, 4, 5, repraeſentant. Tab. VII. et VIII.

AB, CD, pariter, vt in machina priore, laminae ſunt, cum partibus *a*, *b*, mediantibus cochleis, capitibus quadrangularibus inſtructis, coniunctae. GH eſt cingulum vna cum ſuo cochliditypo *c d*. Cuneus *l m* cingulo GH et cochleae F eſt interponendus, vt haec illi innitatur, cingulumque GH vna cum ſuo cochliditypo *cd* ad opus exſcindendum apprimat, vti ad fig 2. n 1, punctis notatum videre eſt. *e e e* etc. ſunt foramina, operi firmando inſeruientia, quorum vni vel alteri, prouti diameter operis elaborandi illud requirit, vncus *f* inſeritur; quem in finem, ne vncus, niſi forte foramen perfecte impleret, vacillet, ſed firmiter in ſuo remaneat ſitu, quadrangularia iſta facta ſunt foramina. In eiusmodi enim operibus, prout res poſtulat, diuerſae craſſitiei axes obueniunt.

Quum diſci integri raro, vtplurimum autem ſemicirculi vel quadrantes, aut ſectores circulorum exſcindantur, facile eſt perſpectu, neceſſe eſſe, vt cochliditypus reducatur, opereque ab vna ad alteram extremitatem peracto, denuo adigatur.

Reliqua autem momenta, machinae huius vſum concernentia, quum e prioris machinae deſcriptione pateant, ſuperfluum foret repetere.

ACVS NAVTICAE NOVAE DESCRIPTIO.

AVCTORE I. E. ZEIHERO.

Expoſitis in nouae acus declinatoriae deſcriptione proprietatibus, quibus effectum eſt, vt pertica chalybea, tanquam pars acus princeps, vim maximam magneticam, nec, niſi polos duos acceperit: vlterius meditatus ſum de inueniendo aliquo modo, vi cuius prisma eiusmodi chalybeum ita poſſit ſuſpendi, vt libere ſeſe circummouere, ac per conſequens pyxidis nauticae vſitatae ad inſtar inſeruire queat; id quod obtinebitur ſequenti modo:

Tab. IX. Fig. 1. Elaboretur virga magnetica (A, B) eodem plane modo, quem ad acum declinatoriam perficiendam adhibere oportebat, perforeturque pariter duabus cochleis cauis (1 - 2); loco autem apparatus praecedentis, firmetur nunc, ac iungatur cum acu, fruſtum orichalceum (C D E F). Fruſtum hoc ex lamina (C D) conſiſtit, cuius in medio pyxis (5), achate, cauitate conica vel parabolica (I) inſtructo, munita, continetur. Eidem laminae circulus (E F) columnellarum ope (3 - 4) eſt affixus, totusque apparatus mediantibus cochleis (1 - 2) perticae chalybeae annectitur.

Fig. 1. et 2. — Fig. 2. et 3.

Quum circulus ad conſeruandum aequilibrium factus ſit, e rei natura ſequitur, illum tam longe infra virgam eſſe ponendum, vt centrum grauitatis com-

mune

mune totius apparatus ſub centrum motus cadat, acusque aequilibrium ſemper reſtituatur. Huncque in finem circulus iſte columnellarum (3-4) ope cum acu eſt coniunctus, vt ſitum ſatis profundum obtineat.

Cui Nonio vti libet, circuli arcus (E F), quibus acus extremitates inſtruuntur, diuiſionesque deſignantur, pari modo mediantibus columnellis (3-4) in tanta a ſuperficie acus inferiore diſtantia diſponat, quanta ad conſeruandum acus aequilibrium requiritur, ſic circulo, primo loco deſcripto, non erit opus. Fig. 4.

DE AEQVILIBRIO VIRIVM CORPORIBVS ADPLICATARVM COMMENTATIO.

Auctore

S. KOTELNIKOW.

I.

Nemo, vt ſpero, dubitat, quin illud, paſſim traditum et demonſtratum in libris mechanicis, theorema de aequilibrio trium corpori adplicatarum virium ſit vtiliſſimum; nullam tamen eius demonſtrationem ita eſſe comparatam, vt nihil obiici poſſit, aut in dubium vocari. Omnes vero iſtae difficultates euaneſcerent, ſi principium minimae actionis, a Celeberr. *Mopertuiſio* detectum, admittere vellemus, de cuius veritate fere amplius dubitare non licet, cum ea a Celeberr. *Eulero* aliisque adplicatione illius principii, tum ad Mechanicam, tum ad Staticam, et inde deductis legitimis conſequentiis, ita euicta eſſe videatur, vt absque dubio inter veritates iam rigide demonſtratas referri poſſit. Ex principio illo non ſolum trium virium in aequilibrio conſtitutarum proprietates, ſed et plurium, eadem facilitate deducuntur. E contrario per methodos adhuc vſitatas, non niſi de tribus tantum viribus, quantum mihi conſtat, facile demonſtrari ſolet, eas eſſe in aequilibrio, ſi quaelibet earum ſit, vt ſinus anguli

anguli a directionibus reliquarum facti. Theorema hoc etiam ex principio minimae actionis, ni fallor, iam saepius demonstratum est, sed methodus haec ad plures, quam tres vires nunquam extensa fuit; egregias tamen praebet et maxime notatu dignas proprietates, si corpori plures vires adplicatae, in aequilibrio constitutae, considerentur.

2. Sint vires puncto alicui adplicatae, A, B, C, D, E, F, G etc. et earum distantiae respectiuae p, q. r, s, t, u, x etc. Erunt momenta istarum virium Ap, Bq, Cr, Ds, Et, Fu, Gx etc. Et quia actiones harum virium per earum momenta exprimuntur, principium supra memoratum, ad scopum nobis propositum ita enunciabitur, *vt summa actionum omnium virium puncto adplicatarum debeat esse semper minima*, si nempe vires in aequilibro sunt. Ex hoc igitur principio erit

$$Ap + Bq + Cr + Ds + Et + Fu + \text{etc. minimum},$$

Et ex natura minimi debet esse:

$$A\,dp + B\,dq + C\,dr + D\,ds + E\,ds + E\,dt + F\,du + \text{etc.}$$

Hoc est, si situs puncti, cui vires sunt adplicatae, etiamsi infinite parum mutetur, tamen summa actionum debeat esse eadem, et propterea differentia inter summam actionem prioris status et posterioris erit nihilo aequalis, seu nulla.

3. Videamus nunc, quales obtineant valores, ipsae dp, dq, dr, ds etc. si situs puncti, cui potentiae A, B, C, D etc. adplicatae sunt, infinite parum immutetur. Hunc in finem ponamus potentias A, B, C, D, E, Tab X. Fig. 1.

D, E, F, G etc adplicatas esse puncto O, in distantiis AO, BO, CO, DO, EO, FO, GO etc. hoc est, p, q, r, s, t, u, x etc. easque esse in statu aequilibrii. Vocentur anguli $AOB=\alpha$, $BOC=\beta$, $COD=\gamma$, $DOE=\delta$, $EOF=\varepsilon$, $FOG=\zeta$, $GOA=\eta$, etc. Ponamus nunc punctum O translatum esse in o, et transibunt p, q, r, s, t, u, x etc. in $p+dp$, $q+dq$, $r+dr$, $s+ds$, $t+dt$, $u+du$, $x+dx$ etc. Cum vero summa actionum respectu puncti O sit $Ap+Bq+Cr+Ds+Et+Fu+Gx+$ etc. erit eadem respectu ipsius o $A(p+dp)+B(q+dq)+C(r+dr)+D(s+ds)+E(t+dt)+F(u+du)+G(x+dx)+$ etc. Hinc differentia $Adp+Bdq+Cdr+$ etc. quae aequalis nihilo esse debet; ideoque

$$Adp+Bdq+Cdr+Dds+Edt+Edu+Gdx+\text{etc.}=0.$$

4. Vt iam valores ipsarum dp, dq, dr etc. determinentur, concipiatur ex o per O ducta recta indefinita oON, et ex A tamquam centro, radio AO descriptus arculus Oa, et habebitur, propter $AO=Aa$, $ao=dp$ Ponatur angulus $NOA=\Phi$, et quia $NOA=NoA+OAo=NoA$, propter OAo infinite paruum, erit $dp=Oo.\text{cos}.\Phi=dm\,\text{cos}\,\Phi$, posito $Oo=dm$. Eodem modo, facto ex B radio BO arculo Ob, habebitur $ob=dq$, et propter OBo infinite paruum $NOB=NOA+AOB=NoB$, hoc est $\Phi+\alpha=NoB$. Hinc $dq=dm\,\text{cos}.(\Phi+\alpha)$. Haud dissimili modo determinabitur $dr=dm\,\text{cos}.(\Phi+\alpha+\beta)$, $ds=dm\,\text{cos}.(\Phi+\alpha+\beta+\gamma)$, $dt=dm\,\text{cos}.(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, $du=dm\,\text{cos}.(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$, $dx=dm\,\text{cos}.(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$. etc.

5. Ex

5. Ex his valoribus ipſarum dp, dq, etc. perſpicitur ſimul lex, ſecundum quam formantur, ita vt ſi etiam numerus potentiarum ſit infinitus, valores incrementorum, diſtantiarum virium puncto adplicatarum, facile per coſinus angulorum, a directionibus virium factorum, determinantur; quae lex vt melius percipi poſſet, placet valores illos in ordinem ponere,

$dp = dm \cos. \phi$; $dq = dm \cos.(\phi+\alpha)$; $dr = dm \cos.(\phi+\alpha+\beta)$; $ds = dm \cos(\phi+\alpha+\beta+\gamma)$; $dt = dm \cos(\phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$; $du = dm \cos.(\phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$; $dx = dm \cos.(\phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$; etc.

vbi attente conſideranti obuium erit, valores iſtos ita formari. Si nempe punctum O, cui potentiae A, B, C, etc. adplicatae ſunt, concipiatur ex O ad diſtantiam infinite paruam in o tranſiiſſe, et ex o per O ducta recta indefinita oON, quae cadet intra aliquem angulum, a duabus potentiis formatum, vt in noſtro caſu intra AOG, eumque diuidet in duos alios AON et NOG, tum faciendo initium a potentia G vel A, quod perinde eſt, determinabitur incrementum diſtantiae AO per coſinum anguli NOA per Oo mutiplicatum; et incrementum diſtantiae ſequentis potentiae B, per coſinum ſummae angulorum NOA et AOB, per Oo multiplicatum; et incrementum diſtantiae tertiae potentiae C, per coſinum ſummae trium angulorum praecedentium NOA, AOB et BOC, per diſtantiam Oo multiplicatum; etc. Ita vt ſi numerus potentiarum ſit $= n$, incrementum diſtantiae vltimae potentiae erit aequale producto ex coſinu angulorum praecedentium $n-1$ in Oo. Tab. X. Fig. 1.

 6. Va-

6. Valores incrementorum distantiarum virium puncto adplicatarum, hoc modo determinati, in aequatione,

$$A\,dp + B\,dq + C\,dr + D\,ds + \text{etc.} = 0$$

quam canonicam vocare licet, substituantur, et prodibit

$$A\cos.\Phi + B\cos.(\Phi+\alpha) + C\cos.(\Phi+\alpha+\beta) + D\cos.(\Phi+\alpha+\beta+\gamma) + E\cos.(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc.} = 0$$

seu

$$\left.\begin{array}{l} A\cos.\Phi + B\cos.\Phi\cos.\alpha + C\cos.\Phi\cos.(\alpha+\beta) + D\cos.\Phi\cos.(\alpha+\beta+\gamma) + E\cos.\Phi\cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc.} \\ - B\sin.\Phi\sin.\alpha - C\sin.\Phi\sin.(\alpha+\beta) - D\sin.\Phi\sin.(\alpha+\beta+\gamma) - E\sin.\Phi\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

Ex hac vltima aequatione ratio potentiarum determinari debet.

7. Cum situs puncti o sit arbitrarius, angulus Φ variae magnitudinis esse potest, ideoque propter diuersos valores sinuum et cosinuum ipsius Φ, aequatio generalis plures partiales praebere potest, prouti successiue alii atque alii termini euanescant. Angulus Φ, denotante π semicirculum, potest esse vel 0, vel $\frac{1}{2}\pi$; vel π; vel $\frac{3}{2}\pi$; vel 2π; vel $\frac{5}{2}\pi$; etc. Erunt eius sinus respectiue

$$0; \quad 1; \quad 0; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \text{ etc.}$$

et cosinus

$$1; \quad 0; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 0; \text{ etc.}$$

Reliquorum valorum ipsius Φ vsque in infinitum, sinus et cosinus coincidunt cum quatuor priorum 0, $\frac{1}{2}\pi$, π, et $\frac{3}{2}\pi$. Vnde patet aequationem generalem, plures duabus praebere non posse, quae prodeunt ponendo $\Phi = 0$ et $\Phi = \frac{1}{2}\pi$; vel $\Phi = \frac{1}{2}\pi$; et $\Phi = \pi$; vel $\Phi = \pi$; et et $\Phi = \frac{3}{2}\pi$; vel $\Phi = 0$ et $\Phi = \frac{3}{2}\pi$. Nos ſumemus in poſterum ſemper hos duos valores $\Phi = 0$ ſcilicet et $\Phi = \frac{1}{2}\pi$.

8. Vidimus ſupra, quomodo valores incrementorum diſtantiarum, quarumlibet potentiarum, inueniantur, et demonſtrauimus, pro vnico valore cuiusuis incrementi dari duas aequationes, propter duos diuerſos valores ipſius Φ; videamus quoque, quot valores accipere poteſt incrementum diſtantiae cuiusuis potentiae puncto O adplicatae, dum punctum illud ſucceſſiue ex vno loco in aliud transferatur. Primo intuitu adparet, puncti O ſitum poſſe mutari, non ſolum ita, vt cadat in *o*, intra angulum DOE, ſed etiam intra quemlibet alium, a directionibus duarum virium factum; et cum talium angulorum tot ſint, quot numero potentiae, tot etiam dantur varii ſitus puncti O, ita vt quoduis diſtantiae incrementum, alium, pro alio puncti O ſitu, valorem obtineat. Si numerus potentiarum ſit $= n$, quoduis incrementum dp, dq, dr etc. ſortietur n valores diuerſos. Ideoque, propter ſupra demonſtrata, aequatio generalis canonica praebebit $2n$ aequationes particulares, ex quibus valores potentiarum in aequilibrio conſtitutarum, angulorumque ab iis factorum, determinandi ſunt.

9. Quoniam ex algebra conſtat, tot debere eſſe aequationes, quot ſunt incognitae, dubium hic ſuboriri poteſt, plures dari aequationes, quam neceſſe eſt; nam potentiae per ſinus angulorum, et ſinus per potentias tantum determinari poſſunt, quare non pluribus n ae-

 quatio-

quationibus opus esse videtur. denotante n numerum potentiarum. Sed in posterum patebit, quamlibet potentiam duplici modo determinatum iri, et quaeuis binae determinationes, re vera non nisi vnicam dant tantum aequationem, naturam aequilibrii continentem.

10. Supra demonstrauimus legem, qua valores ipsorum dp, dq, ds etc. formantur, pro qualibet positione rectae oON, a situ puncti o pendente. Ita pro positione rectae oON, quando ista cadit intra angulum AOG, habuimus $dp = dm \cos. \Phi$, $dq = dm \cos. (\Phi + \alpha)$, $ds = dm \cos. (\Phi + \alpha + \beta)$ etc. Si iam recta ON, promoueatur, et successiue intra angulos AOB, BOC, COD etc. cadat, dum iterum ad angulum GOA redeat, valores ipsorum dp, dq, dr etc. ita se habebunt, pro qualibet positione recta ON.

	1.	2.
dp	$dm \cos. \Phi$ . . .	$dm \cos. (\Phi+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)$
dq	$dm \cos. (\Phi+\alpha)$ . .	$dm \cos. \Phi$ . . .
dr	$dm \cos. (\Phi+\alpha+\beta)$ . .	$dm \cos. (\Phi+\beta)$ . .
ds	$dm \cos. (\Phi+\alpha+\beta+\gamma)$.	$dm \cos. (\Phi+\beta+\gamma)$.
dt	$dm \cos. (\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$.	$dm \cos. (\Phi+\beta+\gamma+\delta)$.
du	$dm \cos. (\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$	$dm \cos. (\Phi+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$
dx	$dm \cos. (\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$	$dm \cos. (\Phi+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$

3.

	3.	4.
dp	$dm\cos.(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)$	$dm\cos.(\Phi+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)$
dq	$dm\cos.(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha)$	$dm\cos.(\Phi+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha)$
dr	$dm\cos.\Phi$	$dm\cos.(\Phi+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha+\beta)$
ds	$dm\cos.(\Phi+\gamma)$	$dm\cos.\Phi$
dt	$dm\cos.(\Phi+\gamma+\delta)$	$dm\cos.(\Phi+\delta)$
du	$dm\cos.(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon)$	$dm\cos.(\Phi+\delta+\varepsilon)$
dx	$dm\cos.(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$	$dm\cos.(\Phi+\delta+\varepsilon+\zeta)$

	5.	6.
dp	$dm\cos.(\Phi+\varepsilon+\zeta+\eta)$	$dm\cos.(\Phi+\zeta+\eta)$
pq	$dm\cos.(\Phi+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha)$	$dm\cos.(\Phi+\zeta+\eta+\alpha)$
dr	$dm\cos.(\Phi+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha+\beta)$	$dm\cos.(\Phi+\zeta+\eta+\alpha+\beta)$
ds	$dm\cos.(\Phi+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha+\beta+\gamma)$	$dm\cos.(\Phi+\zeta+\eta+\alpha+\beta+\gamma)$
dt	$dm\cos.\Phi$	$dm\cos.(\Phi+\zeta+\eta+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$
du	$dm\cos.(\Phi+\varepsilon)$	$dm\cos.\Phi$
dx	$dm\cos.(\Phi+\varepsilon+\zeta)$	$dm\cos.(\Phi+\zeta)$

	7.
dp	$dm\cos.(\Phi+\eta)$
dq	$dm\cos.(\Phi+\eta+\alpha)$
dr	$dm\cos.(\Phi+\eta+\alpha+\beta)$
ds	$dm\cos.(\Phi+\eta+\alpha+\beta+\gamma)$
dt	$dm\cos.(\Phi+\eta+\alpha+\beta+\gamma+\delta$
du	$dm\cos.(\Phi+\eta+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$
dx	$dm\cos.\Phi$

In hac tabula prima columna repraesentat valores ipsorum dp, dq, dr etc. pro positione rectae oON intra angulum GOA; secunda pro situ eiusdem rectae intra angulum AOB; et tertia pro situ intra angulum BOC et ita porro.

11. Tabulam hanc adornauimus, pro eo caſu, vbi ſeptem potentiae puncto O adplicatae ſunt, et ob eam rem tantum, vt facilius adpareat, qua ratione, pro quolibet incremento diſtantiae, tot valores formari poſſint, quot potentiae ſunt. Nam ex inſpectione ſolum huius tabulae lex formationis abunde perſpicitur, neque explicationem eius exhibere neceſſe eſt. Ad normam huius tabulae, quolibet caſu dato, pro quouis potentiarum numero, ſimilis facile componi poterit; quod ſequentibus exemplis illuſtrabitur.

Fig. 2. 12. Sint puncto O tres potentiae A, B et C adplicatae, et vocentur diſtantiae $AO = p$, $BO = q$, $CO = r$; et anguli $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $COD = \gamma$; tum erit ex ſupra demonſtratis, retentis denominationibus dm et Φ,

$dp = dm \cos. \Phi$	$dp = dm \cos(\Phi + \beta + \gamma)$	$dp = dm \cos.(\Phi + \gamma)$
$dq = dm \cos(\Phi + \alpha)$	$dq = dm \cos \Phi$	$dq = dm \cos.(\Phi + \gamma + \alpha)$
$dr = dm \cos.(\Phi + \alpha + \beta$	$dr = dm \cos.(\Phi + \beta)$	$dr = dm \cos. \Phi$

quibus in aequatione canonica $A\,dp + B\,dq + C\,dr = 0$ ſubſtitutis prodibit

I. $A \cos. \Phi + B \cos.(\Phi + \alpha) + C \cos.(\Phi + \alpha + \beta) = 0$

II. $B \cos. \Phi + C \cos.(\Phi + \beta) + A \cos.(\Phi + \beta + \gamma) = 0$

III. $C \cos. \Phi + A \cos.(\Phi + \gamma) + B \cos(\Phi + \gamma + \alpha) = 0$

ſeu

I. $\left.\begin{aligned} &A \cos. \Phi + B \cos. \Phi \cos. \alpha + C \cos. \Phi \cos.(\alpha + \beta) \\ &- B \sin. \Phi \sin. \alpha - C \sin. \Phi \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}\right\} = 0$

II. $\left.\begin{aligned} &B \cos. \Phi + C \cos. \Phi \cos. \beta + A \cos. \Phi \cos.(\beta + \gamma) \\ &- C \sin. \Phi \sin. \beta - A \sin. \Phi \sin.(\beta + \gamma) \end{aligned}\right\} = 0$

III. $\left.\begin{aligned} &C \cos. \Phi + A \cos. \Phi \cos. \gamma + B \cos. \Phi \cos.(\gamma + \alpha) \\ &- A \sin. \Phi \sin. \gamma - B \sin. \Phi \sin.(\gamma + \alpha) \end{aligned}\right\} = 0$

Pona-

Ponatur $\phi = 0$, erit $\sin.\phi = 0$, et $\cos.\phi = 1$, tunc orientur:

$$\text{I.}\quad A + B\cos.\alpha + C\cos.(\alpha+\beta) = 0$$
$$\text{II.}\quad B + C\cos.\beta + A\cos.(\beta+\gamma) = 0$$
$$\text{III.}\quad C + A\cos.\gamma + B\cos.(\gamma+\alpha) = 0$$

Est vero propter $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, $\cos.(\alpha+\beta) = \cos.\gamma$, $\cos.(\beta+\gamma) = \cos.\alpha$, et $\cos.(\gamma+\alpha) = \cos.\beta$, quibus substitutis habebitur:

$$A + B\cos.\alpha + C\cos.\gamma = 0;\ B + C\cos.\beta + A\cos.\alpha = 0;$$
$$C + A\cos.\gamma + B\cos.\beta = 0;$$

Eodem modo, posito $\phi = \frac{1}{2}\pi$, propter $\sin.\phi = 1$, et $\cos.\phi = 0$, obtinebitur:

$$B\sin.\alpha + C\sin.(\alpha+\beta) = 0;\ (\sin.\beta + A\sin.(\beta+\gamma) = 0;$$
$$A\sin.\gamma + B\sin.(\gamma+\alpha) = 0;$$

Ex quibus prodit:

$$B\sin.\alpha = C\sin.\gamma;\ C\sin.\beta = A\sin.\alpha;\ A\sin.\gamma = B\sin.\beta;$$

Ex his aequationibus, valores ipsarum B, C et A in prioribus substituantur, et habebitur:

$$\text{I.}\quad A\sin.\alpha + C\sin.\gamma\cos.\alpha + C\cos.\gamma\sin.\alpha = 0$$
$$\text{II.}\quad B\sin.\beta + A\sin.\alpha\cos.\beta + A\cos.\alpha\sin.\beta = 0$$
$$\text{III.}\quad C\sin.\gamma + B\sin.\beta\cos.\gamma + B\sin.\gamma\cos.\beta = 0.$$

Ex quibus oritur:

$$A\sin.\alpha = C\sin.\beta;\ B\sin.\beta = A\sin.\gamma;\ C\sin.\gamma = B\sin.\alpha;$$

13. Inuenimus igitur sex aequationes sequentes:

$$A\sin.\alpha = C\sin.\beta;\ B\sin.\beta = A\sin.\gamma;\ C\sin.\gamma = B\sin.\alpha;$$
$$B\sin.\alpha = C\sin.\gamma;\ C\sin.\beta = A\sin.\alpha;\ A\sin.\gamma = B\sin.\beta;$$

quarum, binae inter se conueniunt; sed hoc in aliis casibus,

casibus, vbi plures potentiae considerantur, non fit. Lex, qua istae aequationes formantur, est talis: Numerando potentias ab A versus dextram, hoc ordine A, B, C, priores tres aequationes obtinebis, si primam potentiam multiplices in cosinum anguli adiacentis ad dextram illius potentiae, illudque productum aequabis tertiae potentiae, in cosinum sequentis anguli multiplicatae. Eodem modo formantur tres aequationes, numerando potentias in partem contrariam, secundum ordinem A, C, B. Si harum aequationum I et IV, II et V, III et VIta, combinentur, habebis tres aequationes, aequilibrii naturam continentes:

I. $A(\sin.\alpha + \sin.\gamma) = (B + C)\sin.\beta$

II. $B(\sin.\beta + \sin.\alpha) = (A + C)\sin.\gamma$

III. $C(\sin.\gamma + \sin:\beta) = (A + B)\sin.\alpha$

Fig. 3. 14. Pro quatuor potentiis, vbi $AO = p$, $BO = q$, $CO = r$, $DO = s$, habebitur, existentibus angulis $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $COD = \gamma$, $DOH = \delta$;

$dp = dm\cos.\Phi$	$dp = dm\cos(\Phi + \beta + \gamma + \delta)$
$dq = dm\cos.(\Phi + \alpha)$	$dq = dm\cos.\Phi$
$dr = dm\cos(\Phi + \alpha + \beta)$	$dr = dm\cos.(\Phi + \beta)$
$ds = dm\cos.(\Phi + \alpha + \beta + \gamma)$	$ds = dm\cos(\Phi + \beta + \gamma)$

$dp = dm\cos.(\Phi + \beta + \gamma + \delta$	$dp = dm\cos.(\Phi + \gamma + \delta)$
$dq = dm\cos.(\Phi + \gamma + \delta + \alpha)$	$dq = dm\cos.(\Phi + \delta + \alpha)$
$dr = dm\cos.\Phi$	$dr = dm\cos.(\Phi + \delta + \alpha + \beta)$
$ds = dm\cos.(\Phi + \gamma)$	$ds = dm\cos.\Phi$

quibus valoribus ipsorum dp, dq, dr, ds in aequatione

$$A\,dp + B\,dq + C\,dr + D\,ds = 0$$

substi-

ſubſtitutis, elicientur quatuor aequationes ſequentes:

$$\text{I.}\ \left.\begin{array}{l} A\,cof.\,\Phi + B\,cof.\,\Phi\,cof.\,\alpha + C\,cof.\,\Phi\,cof.(\alpha+\beta) + D\,cof.\,\Phi\,cof.(\alpha+\beta+\gamma) \\ - B\,fin.\,\Phi\,fin.\,\alpha - C\,fin.\,\Phi\,fin.(\alpha+\beta) - D\,fin.\,\Phi\,fin.(\alpha+\beta+\gamma) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{II.}\ \left.\begin{array}{l} cof.\,\Phi\,(B + C\,cof.\,\beta + D\,cof.(\beta+\gamma) + A\,cof.(\beta+\gamma+\delta)) \\ - fin.\,\Phi\,(C\,fin.\,\beta + D\,fin.(\beta+\gamma) + A\,fin.(\beta+\gamma+\delta)) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{III.}\ \left.\begin{array}{l} cof.\,\Phi\,(C + D\,cof.\,\gamma + A\,cof.(\gamma+\delta) + B\,cof.(\gamma+\delta+\alpha)) \\ - fin.\,\Phi\,(D\,fin.\,\gamma + A\,fin.(\gamma+\delta) + A\,fin.(\gamma+\delta+\alpha)) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{VI.}\ \left.\begin{array}{l} cof.\,\Phi\,(D + A\,cof.\,\delta + B\,cof.(\delta+\alpha) + C\,cof.(\delta+\alpha+\beta)) \\ - fin.\,\Phi\,(A\,fin.\,\delta + B\,fin.(\delta+\alpha) + C\,fin.(\delta+\alpha+\beta)) \end{array}\right\} = 0$$

ſit vti ſupra fecimus $\Phi = 0$, erit ſin. $\Phi = 0$, coſ. $\Phi = 1$, qui valor ipſius Φ dabit hos aequationes:

$$\text{I.}\quad A + B\,cof.\,\alpha + C\,cof.(\gamma+\delta) + D\,cof.\,\delta = 0$$
$$\text{II.}\quad B + C\,cof.\,\beta + D\,cof.(\alpha+\delta) + A\,cof.\,\alpha = 0$$
$$\text{III.}\quad C + D\,cof.\,\gamma + A\,cof.(\alpha+\beta) + B\,cof.\,\beta = 0$$
$$\text{IV.}\quad D + A\,cof.\,\delta + B\,cof.(\gamma+\beta) + C\,cof\,\gamma = 0$$

Item, poſito $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, prodibunt, propter ſin. $\Phi = 1$ et coſ. $\Phi = 0$, ſequentes:

$$\text{I.}\quad B\,fin.\,\alpha = D\,fin.\,\delta + C\,fin.(\gamma+\delta)$$
$$\text{II.}\quad C\,fin.\,\beta = A\,fin.\,\alpha + D\,fin.(\delta+\alpha)$$
$$\text{III.}\quad D\,fin.\,\gamma = B\,fin.\,\beta + A\,fin.(\alpha+\beta)$$
$$\text{IV.}\quad A\,fin.\,\delta = C\,fin\,\gamma + B\,fin.(\beta+\gamma)$$

Multiplicentur quatuor priores aequationes reſpectiue per ſin. α, ſin. β, ſin. γ, ſin. δ et poſteriores per coſ. α, coſ. β, coſ. γ, coſ. δ; tandem in prioribus pro B ſin. α coſ. α, C ſin. β coſ. β, D ſin. γ coſ. γ et A ſin. δ coſ δ ſubſtituantur earum valores, ex poſterioribus deprompti. Et hic priores quatuor aequationes in ſequentes transformabuntur:

$$\text{I.}\quad A\,fin.\,\alpha + C\,fin.(\alpha+\gamma+\delta) + D\,fin.(\alpha+\delta) = 0$$
$$\text{II.}\quad B\,fin.\,\beta + D\,fin.(\beta+\alpha+\delta) + A\,fin.(\beta+\alpha) = 0$$
$$\text{III.}\quad C\,fin.\,\gamma + A\,fin.(\gamma+\alpha+\beta) + B\,fin.(\gamma+\beta) = 0$$
$$\text{IV.}\quad D\,fin.\,\delta + B\,fin.(\delta+\gamma+\beta) + C\,fin.(\delta+\gamma) = 0$$

 ex

ex quibus, quia $\sin.(\alpha+\gamma+\delta) = -\sin.\beta$, $\sin.(\alpha+\delta) = -\sin.(\beta+\gamma)$ etc., elicientur

$$A \sin.\alpha = C \sin.\beta + D \sin.(\beta+\gamma)$$
$$B \sin.\beta = D \sin.\gamma + A \sin.(\gamma+\delta)$$
$$C \sin.\gamma = A \sin.\delta + B \sin.(\alpha+\delta)$$
$$D \sin.\delta = B \sin.\alpha + C \sin.(\alpha+\beta).$$

15. Inuenimus igitur octo aequationes, quae simili modo formantur, vt et primum inuentae sex; nempe si potentiam quamcunque A multiplices per sinum anguli, inter eam et proxime sequentem intercepti, hocque productum aequale ponas summae productorum, ex tertia potentia ab A numerando in sinum anguli, inter eam et secundam intercepti, et ex quarta in sinum angulorum inter eam et secundam iacentium: aequationes, quae hoc modo formantur, et quas iam supra paragrapho praecedenti elicuimus, sunt:

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & A \sin.\alpha = C \sin.\beta + D \sin.(\beta+\gamma) \\
\text{II.} & B \sin.\beta = D \sin.\gamma + A \sin.(\gamma+\delta) \\
\text{III.} & C \sin.\gamma = A \sin.\delta + B \sin.(\delta+\alpha) \\
\text{IV.} & D \sin.\delta = B \sin.\alpha + C \sin.(\alpha+\beta) \\
\text{V.} & A \sin.\delta = C \sin.\gamma + B \sin.(\gamma+\beta) \\
\text{VI.} & B \sin.\alpha = D \sin.\delta + C \sin.(\delta+\gamma) \\
\text{VII.} & C \sin.\beta = A \sin.\alpha + D \sin.(\alpha+\delta) \\
\text{VIII.} & D \sin.\gamma = B \sin.\beta + A \sin.(\beta+\alpha)
\end{array}$$

Ex quibus, combinando I cum V, II cum VI, III cum VII, IV cum VIIIva, fiunt quatuor aequationes,

aequi-

aequilibrii naturam potentiarum A, B, C et D continentes,

$$A(\text{sin.}\alpha+\text{sin.}\delta)=C(\text{sin.}\beta+\text{sin.}\gamma)+(D+B)\,\text{sin.}(\beta+\gamma)$$
$$B(\text{sin.}\beta+\text{sin.}\alpha)=D(\text{sin.}\gamma+\text{sin.}\delta)+(A+C)\,\text{sin.}(\gamma+\delta)$$
$$C(\text{sin.}\gamma+\text{sin.}\beta)=A(\text{sin.}\delta+\text{sin.}\alpha)+(B+D)\,\text{sin.}(\delta+\alpha)$$
$$D(\text{sin.}\delta+\text{sin.}\gamma)=B(\text{sin.}\alpha+\text{sin.}\beta)+(C+A)\,\text{sin.}(\alpha+\beta)$$

16. Sint quinque potentiae A, B, C, D, E puncto O adplicatae, quarum distantiae sunt p, q, r, s, t; et anguli $AOB=\alpha$, $BOC=\beta$, $COD=\gamma$, $DOE=\delta$ et $EOA=\varepsilon$; erit ex supra demonstratis Tab. X. Fig. 4.

$$dp=dm\,\text{cos.}\Phi$$
$$dq=dm\,\text{cos.}(\Phi+\alpha)$$
$$dr=dm\,\text{cos.}(\Phi+\alpha+\beta)$$
$$ds=dm\,\text{cos.}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma)$$
$$dt=dm\,\text{cos.}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

$$dp=dm\,\text{cos.}(\Phi+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$$
$$dq=dm\,\text{cos.}\Phi$$
$$dr=dm\,\text{cos.}(\Phi+\beta)$$
$$ds=dm\,\text{cos.}(\Phi+\beta+\gamma)$$
$$dt=dm\,\text{cos.}(\Phi+\beta+\gamma+\delta)$$

$$pq=dm\,\text{cos.}(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon)$$
$$pq=dm\,\text{cos.}(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha)$$
$$dr=dm\,\text{cos.}\Phi$$
$$ds=dm\,\text{cos.}(\Phi+\gamma)$$
$$dt=dm\,\text{cos.}(\Phi+\gamma+\delta)$$

$$dp=dm\,\text{cos.}(\Phi+\delta+\varepsilon)$$
$$dq=dm\,\text{cos.}(\Phi+\delta+\varepsilon+\alpha)$$
$$dr=dm\,\text{cos.}(\Phi+\delta+\varepsilon+\alpha+\beta)$$
$$ds=dm\,\text{cos.}\Phi$$
$$dt=dm\,\text{cos.}(\Phi+\delta)$$

$$dp=dm\,\text{cos.}(\Phi+\varepsilon)$$
$$pq=dm\,\text{cos.}(\Phi+\varepsilon+\alpha)$$
$$dr=dm\,\text{cos.}(\Phi+\varepsilon+\alpha+\beta)$$
$$ds=dm\,\text{cos.}(\Phi+\varepsilon+\alpha+\beta+\gamma)$$
$$dt=dm\,\text{cos.}\Phi$$

Substitutis his valoribus ipsorum dp, dq, ds etc. successiue in aequatione

$$A\,dp+B\,dq+C\,dr+D\,ds+E\,dt=0$$

 elicien-

elicientur fequentes aequationes:

$$\text{I.}\quad \left.\begin{array}{l}\cos.\Phi(A+B\cos.\alpha+C\cos.(\alpha+\beta)+D\cos.(\alpha+\beta+\gamma)+E\cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta))\\ -\sin.\Phi(B\sin.\alpha+C\sin.(\alpha+\beta)+D\sin.(\alpha+\beta+\gamma)+E\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta))\end{array}\right\}=0$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{l}\cos.\Phi(B+C\cos.\beta+D\cos.(\beta+\gamma)+E\cos.(\beta+\gamma+\delta)+A\cos.(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon))\\ -\sin.\Phi(C\sin.\beta+D\sin.(\beta+\gamma)+E\sin.(\beta+\gamma+\delta)+A\sin.(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon))\end{array}\right\}=0$$

$$\text{III.}\quad \left.\begin{array}{l}\cos.\Phi(C+D\cos.\gamma+E\cos.(\gamma+\delta)+A\cos.(\gamma+\delta+\varepsilon)+B\cos.(\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha))\\ -\sin.\Phi(D\sin.\gamma+E\sin.(\gamma-\delta)+A\sin.(\gamma+\delta+\varepsilon)+B\sin.(\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha))\end{array}\right\}=0$$

$$\text{IV.}\quad \left.\begin{array}{l}\cos.\Phi(D+E\cos.\delta+A\cos.(\delta+\varepsilon)+B\cos.(\delta+\varepsilon+\alpha)+C\cos.(\delta+\varepsilon+\alpha+\beta))\\ -\sin.\Phi(E\sin.\delta+A\sin.(\delta+\varepsilon)+B\sin.(\delta+\varepsilon+\alpha)+C\sin.(\delta+\varepsilon+\alpha+\beta))\end{array}\right\}=0$$

$$\text{V.}\quad \left.\begin{array}{l}\cos.\Phi(E+A\cos.\varepsilon+B\cos.(\varepsilon+\alpha)+C\cos.(\varepsilon+\alpha+\beta)+D\cos.(\varepsilon+\beta+\alpha+\gamma))\\ -\sin.\Phi(A\sin.\varepsilon+B\sin.(\varepsilon+\alpha)+C\sin.(\varepsilon+\alpha+\beta)+D\sin.(\varepsilon+\alpha+\beta+\gamma))\end{array}\right\}=0$$

17. Ponatur nunc $\Phi=0$ vt fupra, et erit $\sin.\Phi=0$ et $\cos.\Phi=1$, tumque orientur fequentes aequationes:

I. $A+B\cos.\alpha+C\cos.(\gamma+\delta+\varepsilon)+D\cos.(\delta+\varepsilon)$
$+E\cos.\varepsilon=0$

II. $B+C\cos.\beta+D\cos.(\delta+\varepsilon+\alpha)+E\cos.(\varepsilon+\alpha)$
$+A\cos.\alpha=0$

III. $C+D\cos.\gamma+E\cos.(\varepsilon+\alpha+\beta)+A\cos.(\alpha+\beta)$
$+B\cos\beta=0$

IV. $D+E\cos.\delta+A\cos.(\alpha+\beta+\gamma)+B\cos.(\beta+\gamma)$
$+C\cos.\gamma=0$

V. $E+A\cos.\varepsilon+B\cos.(\beta+\gamma+\delta)+C\cos(\gamma+\delta)$
$+D\cos\delta=0.$

Item pofito $\Phi=\frac{1}{2}\pi$, fiet $\sin.\Phi=1$ et $\cos.\Phi=0$, ficque prouenient iftae aequationes:

I. $B\sin.\alpha=E\sin.\varepsilon+D\sin.(\delta+\varepsilon)+C\sin.(\gamma+\delta+\varepsilon)$

II. $C\sin.\beta=D\sin.(\alpha+\delta+\varepsilon)+E\sin.(\alpha+\varepsilon)+A\sin.\alpha$

III. $D\sin.\gamma=E\sin.(\alpha+\beta+\varepsilon)+A\sin.(\alpha+\beta)+B\sin\beta$

IV. $E\sin.\delta=A\sin.(\alpha+\beta+\gamma)+B\sin.(\beta+\gamma)+C\sin.\gamma$

V. $A\sin.\varepsilon=B\sin.(\beta+\gamma+\delta)+C\sin.(\gamma+\delta)+D\sin.\delta.$

Multi-

Multiplicentur priores quinque aequationes per ſin. α, ſin. β, ſin. γ, ſin. δ, ſin. ε, et poſteriores per coſinus eorundem angulorum; tandem valores ipſarum B ſin. α coſ. α, C ſin. β coſ. β, D ſin. γ coſ. γ, E ſin. δ coſ. δ et A ſin. ε coſ. ε, in prioribus ſubſtituantur, et transformabuntur iſtae aequationes in ſequentes:

I. $A \sin \alpha = C \sin \beta + D \sin.(\beta+\gamma) + E \sin.(\beta+\gamma+\delta)$

II. $B \sin.\beta = D \sin.\gamma + E \sin.(\gamma+\delta) + A \sin.(\gamma+\delta+\varepsilon)$

III. $C \sin.\gamma = E \sin.\delta + A \sin.(\delta+\varepsilon) + B \sin(\delta+\varepsilon+\alpha)$

IV. $D \sin.\delta = A \sin.\varepsilon + B \sin.(\varepsilon+\alpha) + C \sin.(\varepsilon+\alpha+\beta)$

V. $E \sin.\varepsilon = B \sin.\alpha + C \sin.(\alpha+\beta) + D \sin.(\alpha+\beta+\gamma)$

quae naturam quinque virium, in aequilibrii ſtatu exiſtentium, exhibent.

18. In hoc caſu eadem lex deprehenditur, quam et ſupra in formatione aequationum obſeruauimus; neque opus eſt, vt plures caſus euoluantur, ex his iam tuto concludere licet, aequationes iſtas ſequentem in modum formari: Quaeuis potentia per reliquas ita determinatur, vt multiplicata in ſinum anguli, inter eam et proxime ſequentem intercepti, aequetur tertiae ab ea potentiae, ductae in ſinum anguli inter ſecundam et tertiam iacentis; plus quarta, ducta in ſinum angulorum, inter ſecundam et tertiam, tertiam et quartam interiacentium; plus quinta potentia, multiplicata per ſinum trium angulorum, inter eam et ſecundum iacentium; et ſic porro.

19. Si iam potentiae I et V; II et I; III et II; IV et III; V et IV combinentur, prodibunt ſequentes

 tes

tes aeqvationes, naturam aequilibrii quinque potentiarum continentes:

$$A(\text{fin.}\,\alpha + \text{fin.}\,\varepsilon) = C(\text{fin.}\,\beta + \text{fin}\,(\gamma + \delta)) + D(\text{fin}\,\delta + \text{fin}\,(\beta + \gamma)) + (B + E)\,\text{fin.}(\beta + \gamma + \delta)$$

$$B(\text{fin.}\,\beta + \text{fin}\,\alpha) = D(\text{fin.}\,\gamma + \text{fin.}(\delta + \varepsilon)) + E(\text{fin.}\,\varepsilon + \text{fin}\,(\gamma + \delta)) + (A + C)\,\text{fin}\,(\gamma + \delta + \varepsilon)$$

$$C(\text{fin.}\,\gamma + \text{fin.}\,\beta) = A(\text{fin.}\,\alpha + \text{fin}\,(\delta + \varepsilon)) + E(\text{fin}\,\delta + \text{fin}\,(\alpha + \varepsilon)) + (B + D)\,\text{fin.}(\delta + \varepsilon + \alpha)$$

$$D(\text{fin.}\,\delta + \text{fin.}\,\gamma) = B(\text{fin.}\,\beta + \text{fin.}(\varepsilon + \alpha)) + A(\text{fin}\,\varepsilon + \text{fin}\,(\alpha + \beta)) + (C + E)\,\text{fin.}(\varepsilon + \alpha + \beta)$$

$$E(\text{fin}\,\varepsilon + \text{fin.}\,\delta) = C(\text{fin.}\,\gamma + \text{fin.}(\alpha + \beta)) + B(\text{fin.}\,\alpha + \text{fin.}(\beta + \gamma)) + (D + A)\,\text{fin.}(\alpha + \beta + \gamma).$$

Fig. 5. 20. Sint itaque sex protentiae A, B, C, D, E F puncto O adplicatae, angulique ab iis comprehensi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$; erit per regulam supra §. 18. traditam

$$A\,\text{fin.}\,\alpha = C\,\text{fin.}\,\beta + D\,\text{fin}\,(\beta + \gamma) + E\,\text{fin.}(\beta + \gamma + \delta) + F\,\text{fin}\,(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$$

$$A\,\text{fin.}\,\zeta = E\,\text{fin.}\,\varepsilon + D\,\text{fin.}(\varepsilon + \delta) + C\,\text{fin.}(\varepsilon + \delta + \gamma) + B\,\text{fin.}(\varepsilon + \delta + \gamma + \beta)$$

hinc

I. $A(\text{fin.}\,\alpha + \text{fin.}\,\zeta) = D(\text{fin.}(\beta + \gamma) + \text{fin.}(\varepsilon + \delta)) + C(\text{fin.}\,\beta + \text{fin.}(\varepsilon + \delta + \gamma)) + (B + F)\,\text{fin.}(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon) + E(\text{fin.}\,\varepsilon + \text{fin.}(\beta + \gamma + \delta))$

Eodem modo inueniuntur

II. $B(\text{fin.}\,\beta + \text{fin.}\,\alpha) = E(\text{fin.}(\delta + \gamma) + \text{fin.}(\varepsilon + \zeta)) + D(\text{fin.}\,\gamma + \text{fin.}(\delta + \varepsilon + \zeta)) + (A + C)\,\text{fin.}(\gamma + \delta + \varepsilon + \zeta) + F(\text{fin.}\,\zeta + \text{fin.}(\varepsilon + \delta + \gamma))$

III. $C(\text{fin.}\,\gamma + \text{fin.}\,\beta) = F(\text{fin.}(\zeta + \alpha) + \text{fin.}(\varepsilon + \delta)) + E(\text{fin.}\,\delta + \text{fin.}(\varepsilon + \zeta + \alpha)) + (B + D)\,\text{fin.}(\delta + \varepsilon + \zeta + \alpha) + A(\text{fin.}\,\alpha + \text{fin.}(\zeta + \varepsilon + \delta))$

IV. $D(\text{fin.}\,\delta + \text{fin.}\,\gamma) = A(\text{fin.}(\alpha + \beta) + \text{fin.}(\zeta + \varepsilon)) + B(\text{fin.}\,\beta + \text{fin.}(\alpha + \zeta + \varepsilon)) + (E + C)\,\text{fin.}(\varepsilon + \zeta + \alpha + \beta) + F(\text{fin.}\,\varepsilon + \text{fin.}(\zeta + \alpha + \beta))$

V. $E(\text{fin.}\,\varepsilon + \text{fin.}\,\delta) = B(\text{fin.}(\alpha + \zeta) + \text{fin.}(\beta + \gamma)) + A(\text{fin.}\,\zeta + \text{fin.}(\alpha + \beta + \gamma)) + (F + D)\,\text{fin.}(\zeta + \alpha + \beta + \gamma) + C(\text{fin}\,\gamma + \text{fin.}(\beta + \alpha + \zeta))$

VI. $F(\text{fin.}\,\zeta + \text{fin.}\,\varepsilon) = C(\text{fin.}(\beta + \alpha) + \text{fin.}(\gamma + \delta)) + B(\text{fin.}\,\alpha + \text{fin.}(\beta + \gamma + \delta)) + (A + E)\,\text{fin.}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + D(\text{fin.}\,\delta + \text{fin.}(\gamma + \beta + \alpha)).$

21.

21. Hae ſex aequationes naturam aequilibrii ſex virium A, B, C, D, E, et F puncto O adplicatarum perfecte determinant. Et quouis dato caſu, pro quolibet numero potentiarum, facile inueniuntur, per regulas ſupra traditas. Veritas vero Theorematum, his aequationibus contentorum, ex eo etiam oſtendi poteſt, quod quaelibet harum aequationum euaneſcere debet, hoc eſt: omnes termini ſe deſtruere debent, ſi potentiae et anguli ab illis facti omnes fuerint inter ſe aequales. Sumamus ad hunc ſcopum, vnam ex ſuperiori paragrapho exhibitis ſex aequationibus, veluti VItam.

$$F(\sin.\zeta+\sin.\varepsilon)=C(\sin.\beta+\alpha)+\sin.(\gamma+\delta))+B(\sin.\alpha+\sin.(\beta+\gamma+\delta))+(A+E)\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+D(\sin.\delta+\sin.(\gamma+\beta+\alpha)).$$

22. Quia $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta=2\pi$, erit $\gamma+\beta+\alpha=2\pi-(\delta+\varepsilon+\zeta)$ et $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi-(\varepsilon+\zeta)$, quare $\sin.(\gamma+\beta+\alpha)=-\sin(\delta+\varepsilon+\zeta)$ et $\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=-\sin.(\varepsilon+\zeta)$, quibus ſubſtitutis fiet,

$$F(\sin.\zeta+\sin.\varepsilon)=C(\sin.(\beta+\alpha)+\sin.(\gamma+\delta))+B(\sin.\alpha+\sin.(\beta+\gamma+\delta))-(A+E)\sin.(\varepsilon+\zeta)+D(\sin.\delta-\sin.(\delta+\varepsilon+\zeta))$$

Ponatur nunc $A=B=C=D=E=F$ et $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=\zeta$ et prodibit.

$$2\sin.\alpha=2\sin.2\alpha+\sin.\alpha+\sin.3\alpha-2\sin.2\alpha+\sin.\alpha-\sin 3\alpha$$

vbi omnes termini ſe deſtruunt.

DE

DE COMMODA ACVS DECLINATORIAE SVSPENSIONE DISSERTATIVNCVLA.

Auctore

S. KOTELNIKOW.

I.

Experientia docuit, acus magneticas non perforatas non solum maiorem vim magneticam accipere, sed et id lucri adferre, vt facilius effici possit, vt acus duos tantum polos magneticos a puncto suspensionis aeque distantes adipiscatur, quod in acubus in puncto suspensionis perforatis difficillime obtinetur. Nam praeter expectationem plures poli exoriuntur: quo fit, vt motus acus declinatoriae perturbetur, et ideo experimentis cum tali acu institutis confidere non licet, quod iam Cl. *Zeiberus* in dissertatione ante tradita annotauit. Verum paucissimae acus hoc defectu carentes fabricantur. Igitur non mediocria in scientiam rerum nauticarum totamque physicam redundabunt emolumenta, si iste defectus commoda acus suspensione euitari possit. Cuius rei in gratiam contigit mihi incidisse in sequens, non sumptuosum et ad praxin aptissimum, acus declinatorias suspendendi artificium, vbi non est necesse, acum pertundere, vti adhuc factum est.

II.

II.

Deſcriptio.

1. Fabrefiat lamina chalybea, parallelopipedi figuram habens, in vtraque extremitate in cuſpidem abiens, perque totam longitudinem aequaliter craſſa, in qua centrum grauitatis determinetur, et notetur lineola transuerſa.

2. Lamina ad acum declinatoriam hoc modo fabrefacta induretur et imbuatur vi magnetica, ope duarum magneticarum laminarum, ſeu magnetum artificialium, ad laminam ita adplicatorum, vt ad partes contrarias inclinati angulum efficiant, verticem ad laminam habentem. Frictio ad centrum grauitatis lineola transuerſa notatum incipiatur, ibidemque finiatur, trahendo magnetes dextrorſum et ſiniſtrorſum ad extremitates vsque laminae. Hoc modo obtinebitur, vt lamina non ſolum duos tantum polos habeat, ſed et centrum eorum commune cum centro grauitatis laminae coincidat.

3. Fiat ex ligno conus truncatus, cuius baſis inferior habeat diametrum multo maiorem diametro baſis ſuperioris. In baſi ſuperiore huius coni fiat inciſura transuerſa, ad axem coni normalis, et quae ad laminam accuratiſſime quadret, ita vt lamina in eam impoſita cum cono firmiter cohaereat.

4. In basi inferiore coni fiat secundum eius axem cauitas conica, cuius altitudo vix non adaequet altitudinem coni, propterea vt punctum suspensionis, quod est in fundo cauitatis, cadat supra commune centrum grauitatis acus et coni.

5. Lamina imponatur in incisuram, in superiore basi coni factam, ita vt lineola transuersa, centrum grauitatis laminae designans, per axem coni transeat, suspendaturque in pixide, eodem modo, vti acus ordinariae suspenduntur.

III.

Quodsi acus parum stabilitatis habeat, aut inuertatur, quod indicio est, centrum grauitatis esse supra centrum suspensionis, tum fiat annulus ex graui metallo, et ad inferiorem coni basin adcommodetur. Potest etiam huic incommodo obuiam iri, si conus ita fabrefactus sit, vt ex duabus partibus constet, superior ex ligno, inferior vero ex metallo. Interim notandum est, pondus coni debere esse maius pondere acus. Attamen artifex curare debet, ne pondus coni sit valde magnum respectu ponderis acus; hoc est: ne iusto maius fiat, et superfluo pondere acum segniorem reddat. Vt igitur inter pondus coni et acus desiderata semper proportio obtineatur, sequens problema subiungere placet.

IV

IV.

Problema.

Dato pondere acus declinatoriae, determinare dimenſiones coni truncati, ſi illius pondus ad pondus acus habeat rationem datam.

Solutio.

Sit pondus acus $= p$; et pondus coni $= np$, denotante n numerum integrum. Ponatur pondus vnius digiti cubici chalybis $= b$; erit volumen acus declinatoriae $= \frac{1000 p}{b}$ linearum cubicarum.

Sit porro grauitas ſpecifica chalybis ad grauitatem ſpecificam materiae, ex qua conus fabrefactus debet eſſe, vt i ad m; et ſoliditas coni $= S$.

Erit $S = \frac{1000 np}{mb}$

Sed ex geometricis conſtat, poſita diametro baſis inferioris coni $= x$; ſuperioris $= y$; altitudine b, et ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, fore $S = \frac{1}{12} \pi b \frac{x^3 - y^3}{x - y} = \frac{1}{12} \pi b (xx + yx + yy)$; vnde obtinetur

$$xx + xy + yy = \frac{12000 np}{m \pi bb}.$$

Quia ratio diametrorum baſium coni truncati eſt arbitraria, ponatur $x = \lambda y$, denotante λ numerum vnitate maiorem, et habebitur

$$yy(\lambda\lambda + \lambda + 1) = \frac{12000 np}{m \pi bb}$$

vnde $y = \frac{20}{\sqrt{(1 + \lambda + \lambda\lambda)}} \sqrt{\frac{30 np}{m \pi bb}}$

et $x = \lambda y$.

V.

Sumta igitur altitudine coni b pro arbitrio, basium diametri ex traditis in praecedente paragrapho determinabuntur; oportet tantum numerum λ definire, vt $\frac{1}{4}b(\frac{\lambda}{\lambda-1}-\frac{3}{\lambda^3-1})$ paruum valorem obtineat. Haec formula exhibet valorem distantiae centri grauitatis coni truncati, ab inferiore eius basi. Sed quum debeat esse $\lambda > 1$, et ternarium non multum excedat, tum enim conus erit deformis; nam si ponas $\lambda = 3$, erit distantia centri ab inferiore basi $> \frac{1}{3}b$. Sumamus ergo λ ita, vt distantia centri grauitatis sit praecise $= \frac{1}{3}b$. Quam ob rem erit $\frac{\lambda}{\lambda-1}-\frac{3}{\lambda^3-1}=\frac{4}{3}$; vnde habetur haec aequatio:

$$\lambda^4-4\lambda^3+8\lambda-5=0$$

cuius radices sunt, 1; 1; $1+\sqrt{6}$; $1-\sqrt{6}$

VI.

Vt igitur distantia centri grauitatis coni cadat ad $\frac{1}{3}b$ ab eius basi inferiore, sumatur $\lambda = 1+\sqrt{6}$ et erit:

$$y=\frac{20}{\sqrt{(9+3\sqrt{6})}}\sqrt{\frac{30np}{m\pi bb}} \text{ et } x=y(1+\sqrt{6}).$$

Sed quia $\sqrt{6}=2.44949$, erit $\lambda = 3,44949$, quae fractio decimalis dat sequentes fractiones pro λ:

$$\frac{3}{1};\ \frac{7}{2};\ \frac{31}{9};\ \frac{69}{20};$$

quarum postrema satis accurata est. Si ergo sumatur $x=1$; $y=3$ vel $x=2$; $y=7$ vel $x=9$; $y=31$; vel $x=20$; $y=69$;

semper

ſemper centrum grauitatis coni erit ad $\frac{2}{3}$ eius altitudinis depreſſum. Hoc tamen notato, quod maiores numeri propius ad veritatem accedunt.

VII.

Si quis parum curet, vtrum pondus coni datam habeat proportionem ad pondus acus, nec ne; is poterit ex paragrapho praecedenti ſumere rationes diametrorum. Id tamen reſpicere debet, vt pondus coni ſit maius pondere acus. Sed propter eos, quibus proportio ponderum, acus et coni, curae eſt, ſunt ſequentes abſoluti valores diametrorum:

$$y = 15.283 \sqrt{\frac{np}{mbb}} \text{ et } x = 52.711 \sqrt{\frac{np}{mbb}}.$$

Quum lignum ad hunc vſum aptiſſimum ſit ebenum, propter ſuam duritiem et grauitatem; eſt enim illius grauitas ſpecifica ad grauitatem ſpecificam chalybis indurati vt 1. 177 ad 7. 204: erit $m = 0152777777$ et $\sqrt{m} = 0.39086$; ideoque $y = 39.19 \sqrt{\frac{np}{bb}}$; et $x = 135.16 \sqrt{\frac{np}{bb}}$; ſed ad ſtabilitatem acus obtinendam ſufficit altitudinem coni $= 6'''$ ſtatuiſſe, tum centrum grauitatis acus erit ad minimum adhuc ad $1'''$ infra punctum ſuſpenſionis depreſſum. Mox vero oſtendam, quomodo efficiatur, vt centrum grauitatis profundius cadat. Ponatur ergo $b = 6'''$, et erit

$$y = 16.06 \sqrt{\frac{np}{b}} \text{ et } x = 55.4 \sqrt{\frac{np}{b}}.$$

VIII.

Quia pes cubicus aquae ponderat $62\frac{1}{2}$ libras Amſtelodamenſes, ſeu 480000 grana, ideoque pollex cubi-

 cus

cus Rhenanus ponderabit 278 grana; eſt vero grauitas ſpecifica aquae ad grauitatem ſpecificam chalybis vt 1 ad 7.704: erit pondus pollicis cubici chalybis $=2140$ grana, ideoque $b=2140$; quare

$$y=16.06\sqrt{\tfrac{np}{2140}} \text{ et } x=55.4\sqrt{\tfrac{np}{2140}}.$$

IX.

Quum conum ita determinauerimus, vt eius centrum grauitatis cadat ad profunditatem duabus tertiis eius altitudinis aequalem, et ſi acus adplicetur, tum aſcendet, et erit ad vnam tertiam circiter altitudinis tantum depreſſum: igitur, vt centrum grauitatis acus inferius deprimatur, cono talis figura tribui debet, vt maxima pars eius maſſae ad inferiores partes colligatur; quod ſequenti modo obtinebitur: Fiat conus ſecundum datas dimenſiones, cuius pondus ſit aequale ponderi acus, deinde ita tornetur, vt non tacta baſi inferiore, ad partes ſuperiores multo gracilior reddatur. (vti figura repreſentat) Tum ponderetur, vt ablata pars maſſae innoteſcat. Poſtea obducatur lamina aurichalcea, pondere ablatae maſſae aequali, tam cauitas conica, quam baſis inferior coni. Lamina vero, qua baſis obducitur, debet craſſior fieri ea, qua cauitas conica obducetur. Ita obtinebitur, vt acus magnam ſtabilitatem habeat.

Tab. X. Fig. 6.

X.

Et quum in tornando difficile eſt obſeruare, vt conus ad datas d menſiones exacte fabricetur, adhibeatur

tur cautela: lamina aurichalcea basin coni obducens fiat ponderosior ablata ligni portione. Sed hanc proportionem ponderis et altitudinis coni tantum tum obseruare licet, cum pondus acus sit non infra 500 grana; in minoribus vero altitudo b minor, et pondus maius accipere conueniet, prout necesse erit. Formulae vero ad absolutos diametrorum basium valores determinandos adhibeantur sequentes:

$$\left.\begin{array}{l} y = 39.\ 19\sqrt{\frac{np}{2140\,b}} \\ x = 135.\ 16\sqrt{\frac{np}{2140\,b}} \end{array}\right\}$$ in partibus decimis pollicis Rhenani.

Exemplum I.

Sit pondus acus $= 2140$ grana; sumatur pondus coni aequale ponderi acus, et altitudo $= 6'''$. Erit $n = 1$; $p = 2140$; $b = 6'''$. Vnde inuenitur $y = 16'''$; $x = 55'''$.

Exemplum II.

Sit pondus acus $= 535$ grana. Et fiat pondus coni aequale ponderi acus, altitudo vero $= b = 6'''$. Erit $p = 535$; $n = 1$.

Vnde fit diameter basis superioris $= y = 8'''$.
—— —— —— —— inferioris $= x = 27'''$.

Exemplum III.

Ponatur pondus acus $= 60$ grana; pondus coni duplum ponderis acus; altitudo $b = 4'''$. Erit $n = 2$;

$p = 60$;

$p = 60$; vnde inuenitur $y = 5$; $x = 16$. In hoc caſu lamina aurichalcea ad baſin accommodare non erit opus, etiamſi a ſuperiore parte coni dimidium eius ponderis auferatur.

Scholion.

Tab. X. Fig. 7. Si quis ſumptibus nolit parcere, iubeat parare ex aurichalco, aut ſi malit ex argento, campanulam *ced*, quatuor vel quinque lineas altam, ad cuius baſin iungatur, cochleae ope, annulus *a b*, aequalis cum acu declinatoria ponderis. Ad verticem vero campanulae adcommodetur lamella *ef* quadrangulari foramine praedita, per quod acus tranſire et cochlea *g* firmari poſſit. Parietes vero campanulae verticem verſus valde tenues debent eſſe, ſed baſin verſus craſſiores.

PHYSICA

PHYSICA.

PLANTARVM

ALIQVOT RARIORVM DESCRIPTIONES COMPLETAE. ADIECTAE SVNT DELINEATIONES III.

Auctore

IOH. CHRIST. HEBENSTREIT.

I.

MESSERSCHMIDIA. *Linn.* Hort. Vpſ. p. 36.
ARGVSIA. *Amman.* Stirp. Ruth. p. 29.
TOVRNEFORTIA foliis lanceolatis, floribus corymboſis, caule herbaceo. *Linn.* plant. p. 141. n. 7.

Circa initium Maii planta ex terra prouenit, turionibus copioſis forma capitulorum globoſorum, compactis ex foliolis conuolutis, anguſtis et pubeſcentibus. Incrementum cauliculorum et foliorum, primis, poſtquam ex terra prodiit, diebus, eſt admodum lentum et vix animaduertendum: augentur vero cunctae partes multo euidentius, ſi congelationes nocturnae ceſſant, et pluuia ſolum aliquoties irrigauit. Menſtruo ſpatio vtplurimum exacto, ad iuſtam in ea perueniunt ſingulae partes magnitudinem, et planta, omnibus ſuis partibus exornata, diſquiſitioni eſt aptiſſima. De radicis aetate primum quaedam praemittenda erunt, cum ea multum conferre videatur ad ſingularem illius conditionem diiudicandam. Viuacem admodum eſſe, diuque ſuperſtitem, exinde colligo, quia in adſignato ei loco in horto per decennium iam creuit, et quotannis craſſitie, turionibus et pluribus gemmis nodoſis augetur, latiusque ſerpit. Aliquot vero annorum ſpatium requiri, antequam ſufficientem copiam ſuccorum colligat, et caules florentes et fructus perficientes proferat, hoc iam adnotauit *Ammanus* in Stirpium rariorum, in Imperio Rutheno ſponte prouenientium, deſcriptionibus, Petropol. 1739. 4. p. 30. Ill. *Linnaeus* in Hort. Vpſ. p. 36. caules plantae pedales vidit, nullum vero florem vel fructum, exinde etiam hanc ſtirpem genere dubio, *Meſſerſchmidia*, tradere coactus eſt. Eandem denuo in Spec. plantar. p. 141. inter incertas adhuc plantas *Tourneſortiae* generi adſociauit. Mihi itaque ſubnaſcitur ſuſpicio, in horto Vpſalienſi, aetatem iuſtam nondum adſecutam, aeque ac olim hic, flores fructusque ferre recuſare. Fructus, nec apud nos perficit, licet quotannis floreat, et eos promittat. Radix itaque depicta ad exemplar recens, eſt perennis, calami olorini craſſitie, tenax, extus ſpadicea, multis tuberculis ceu tot gemmis in omni ambitu praedita, horizontaliter repens, et copioſis fibrillulis capillaribus ad tubercula, et vbi finitur, inſtructa, intus alba et parum ſuccoſa. Caulis adſcendens eſt firmus, inflexus tamen aliquantum ad terram, inferius rotundus, ſuperius, vbi rami ex alis foliorum exeunt, anguloſus, hiſpidus, foliis copioſis, et ramis ad cacumen vsque, vbi flores collocantur, veſtitus. Folia caulina et ramea ſunt anguſta, lanceolata, integra, tenuibus et copioſis pilis obſita, in auerſa parte ex albido virentia et ſericea quaſi facie, in aduerſa profundius virore perfuſa, neruis

et

et venis aliquot inſtructa, et breui petiolo cauli alternatim adhaerentia. (Per negligentiam pictoris factum eſſe moneo, quod in ſuperficie folii ſuperiori multae venae excurrentes, quae tamen abſunt, delineatae exhibeantur). Singulare quid obſeruaui in incremento foliorum, nempe augmentum horum durare per omnem aeſtatem, et folia, quae primo vere conſpiciuntur, lineari-lanceolata, pubeſcentia, rigida, etiam confertim poſita, ſi caules perfectos conſideras aeſtate cadente, nunc triplo maiora eſſe, viridiora, flaccida et rara, dimenſione etiam ſua vtplurimum conuenientia. Integritatem caules et folia conſeruant ad primum gelicidium vsque, quo, ſi laeduntur tantisper, protinus corrugantur, nigreſcunt, non tamen decidunt, ſed vna cum caulibus pereunt. Rami plures in ſuperiori caulis parte ad alas foliorum oriuntur, alterni, palmares, quibus dein ſuccreſcunt alii in medio et inferiori loco, minores et tenuiores. In ſummitate plantae et ramorum ſuperiorum, pedunculo communi elongato et ſubdiuiſo in aliquot ramos, pedicellis breuiſſimis flores tres quatuorue inſiſtunt ita, vt corymbum quaſi forment. Calyx eſt monophyllus, quinquifidus, laciniis lanceolatis, hiſpidis, conniuentibus, dimidiam tubi partem haud attingentibus. Corolla eſt monopetala, regularis, infundibuliformis, tubo cylindrico in fundo globoſo, limbus quinquifido, ſegmentis ad horizontem directis, ſulco longitudinali excauatis, in ambitu ſinuatis, apicibus extremis deorſum flexis. Color corollae in limbo in vtraque ſuperficie penitus eſt albus, in tubo interius flauus, exterius viridis, et in fundo, vbi calyce tegitur,

 tur,

tur, flauefcit. Stamina adfunt quinque in medio tubi, filamenta breuiffima et antherae fubulatae erectae flauae; piftillum ftaminibus breuius, ftigmate globofo fcabro, quod extremitati globofae tubi clauis inftar infixum eft. Semina adhuc fruftra exfpectaui. Et ne parte primaria deftituta prodeat haecce defcriptio, eam fupplere in animo habebam Clar. *Mefferfchmidii* expofitione, data ab *Ammano* in ftirpibus rarioribus Ruthenicis. Sed mutanda fuit fententia, ideo, quia in nonuullis emendanda eft inuentoris de femine huius plantae enucleatio. Forte fortuna inueni in feminario horti nonnulla huius plantae femina vetufta, et perfpexi clare, ea effe duas capfulas offeas, fubftantia fpongiofa exterius veftitas, fecundum longitudinem leuiter cohaerentes, quarum quaelibet in parte exteriore conuexa, fi transuerfim diffecatur, duos nucleos oblongos, incuruatos, angulatos, in loculamentis feparatis includit. Capfulae totius, ex duobus hemifphaeriis coalitae, figuram, loculamenta, et nucleos, tabula adiecta repraefentat.

Ex characterum genericorum diuerfitate diiudicandas et denominandas effe omnes plantas, fententia tam certa tamque firma eft, vt probatione nulla indigeat. Quodfi itaque perluftramus plantam, et fingularem fructificationis ftructuram ab omnibus adhuc cognitis plane diuerfam deprehendimus, neceffario quoque ei, ad euitandam in difcernendo ab aliis confufionem, nouum imponendum erit nomen genericum. Ad hasce autem plantas, charactere fingulari donatas, referendam effe *Mefferfchmidiam*, omnes iam perfpexerunt, quotquot eam difquifiuerunt, nec reliqui refragabuntur, quibus

bus in posterum occasio dabitur, eam propius contemplandi. De varia denominatione illius pauca tantum addam. B. *Messerschmidius*, primus inuentor, eam in Xenio Isidis Sibiricae, quod in tabulario Academiae adseruatur, a loco natali penes Argunum fluuium, *Arguniam* vocauit. Hoc nomen et descriptionem, in loco natali concinnatam, stirpibus suis Ruthenicis Clar. *Ammanus* inseruit. Sed nescio, cur mutata compellatione illam dixerit *Argusiam*? Optime tamen insimul monet, posse etiam in posterum vocari *Messerschmidiam* ab indagatore. Ill. *Linnaeus* in Hort. Vpsal. 1748 in 8vo emisso, equidem *Messerschmidiae* genus condiderat ex hac noua, de qua sermo est, planta: in speciebus vero plantarum Anno 1753. editis, illam ad *Tournefortiae* genus retulit. Si vero conferimus cum *Messerschmidia* characteres genericos, a *Linnaeo* in generibus plantar. edit. quint. 1754. *Tournefortiae* adscriptos, cognoscimus, in quam plurimis, praesertim in fructificatione, discrimen sane maximum. Praecipuas differentias allegare ideo necessarium erit, quia exinde discrepantia vtriusque generis comprobabitur. Differt itaque *Messerschmidia* ab eo 1) filamentis, quae non sunt longitudine tubi corollae, sed breuissimae; 2) situ antherarum, quae non in fauce corollae, sed profundius, et quidem in medio tubi, haerent; 3) stylo, qui staminibus est breuior; 4) fructu, qui est siccus, omni pulpa destitutus, ex duobus hemisphaeriis coalitus, quorum singulum duo loculamenta distincta habet, semen vnicum includentia, seu nucleos oblongos, angulatos albidosque. Ad memoriam igitur renouandam et conser-

vandam

vandam viri optimi, *Danielis Gottliebii Messerschmidii*, Gedanensis, Med. Doctoris, qui ab anno 1719 ad 1727 omnem diligentiam et studium indefessum impendit, colligendis et describendis naturae thesauris regni Sibiriae, plantam hanc ab ipso denominare minime improbandum erit, cum idem honor et aliis exhibeatur, quorum merita in rem botanicam videntur alicuius momenti. Exspectamus in posterum, adhibita vlteriori cultura, semina matura ab hac planta, quae communicari poterunt cum iis, qui delectantur cultura et propagatione plantarum, nuper detectarum. Vt vero aliquam interea sibi acquirere possint huius vegetabilis ideam, adieci iconem, confectam ad plantam in horto academico florentem, et quam Cel. *Ammanus* olim descriptioni suae, cum tantum plantas iuniores possidebat, addere non potuit. Dum *Ammanianae* descriptionis mentionem iniicio, quae bona et completa est, si fructum excipias, insimul etiam reprehensionibus forte nonnullorum, qui me actum egisse putabunt, data alia descriptione, obuiam ire debeo. Declinare vero has commode potero, rationem adducens non spernendam; quia incongruum mihi videbatur emittere iconem solam sine expositione aliqua, vel et lectores amandare ad librum, quo forte plures carent, si plantam, nunc demum delineatam, inspiciunt.

Tab. XI. Explicatio Tabulae I.

A. Planta in naturali magnitudine.

B. Radix repens cum turionibus.

a. Calyx cum pistillo.

b. Corolla absque calyce.

c. Eadem

c. Eadem tubo diſſecto, vt ſtamina cum piſtillo in conſpectum veniant.
d. Capſula integra.
e. Hemiſphaerium fructus ab interiori facie expoſitum.
f. Fructus integer transuerſim diſſectus, vt quatuor hemiſphaeriorum loculamenta appareant.
g. Hemiſphaerium, ſubſtantia exteriori ſpongioſa orbatum, oſſeum, cum duobus loculis, vt monſtrentur ſemina, ab interiori facie apertis.
h. Semen.

II.

AESCHYNOMENE caule hiſpido, foliolis acuminatis, leguminum articulis ſuborbiculatis. *Royen.* Flor. Leyd. Prodr. p. 384. *Haller.* Hort. Goett. 1753. p. 265. *Linn.* Spec. plant. pag. 713. n. 2.

HEDISARVM caule hirſuto mimoſae foliis alatis, pinnis acutis minimis gramineis. *Sloan.* Iourn. to Iamaica Tom. I. p. 186. tab. 118. fig. 3.

Inter ſemina, ante triennium ex Anglia huc miſſa, reperi Hedyſarum quoddam americanum minus mimoſae foliis Sloan. inſcriptum, quodque ſatum, ſpatio decem dierum elapſo proueniebat, et laeto incremento ſumto, poſt duos menſes flores exhibuit, quos ſequebantur ſemina matura, ſiliqua articulata incluſa. Periit tum planta frigore tacta, quae ex ſtructura ſua, et celeri omnium partium euolutione, videtur annua. Quae de ea notaui, dum vigebat, breui hac expoſitione referam, et commemorationem horum anguſtioribus limitibus circumſcribere potero, quia planta, de qua dicturus ſum, ſuperiori ſaeculo iam inuenta et delineata, et ante aliquot annos denuo ab Ill. *Hallero* in Enumeratione ne horti Regii et agri Goetting. 1753. in 8. edito, quoad partes praecipuas, florem nempe et fructum, descripta est. Deficit vero illius exacta icon: ea enim, quam dedit *Sloaneus* in Hist. Iamaic. Vol. I. pag. 186. tab. 118. fig. 3. minime tolerari potest, et a Cel. *Royenio* Flor. Leyd. Prodr. pag. 384. iure mala adpellatur, hinc meliorem, et ad viuam plantam factam, exhibeo. Vegetationis historiam paucis dilucidabo. Plantulae ex terra prouenientes, persistentibus aliquamdiu cotyledonibus, ex cauliculo, tenui, terete, hispido emittunt folia pinnata, solitaria, alterna. Si planta pedis altitudinem attigit, in inferiore loco ad latera foliorum emittit ramos procumbentes, in superiori adsurgentes. Exporrigitur tum caulis ad pedes duos et vltra, neque tamen multum volumine augetur: crassities enim eius vix ad duas lineas parisinas, vbi maxima est, accedit. Rami numero, quo altior fit planta, augentur ita, vt habitu externo fruticulum quasi, ramis vndique obsitum, repraesentent. Nunc ad singulas partes seorsim describendas, progrediendum est. Radix est vnica, fibrosa, fibrillis albis donata. Caulis adsurgit vnicus, rectus, rufescens, totus hispidus, pilis inferius rutilis paucioribus, superius viridibus et copiosioribus, vestitus, parum lignosus, teres, emittens plures vndique ramos, superiores adsurgentes, inferiores vero terrae horizontaliter incumbentes. Folia pinnata, foliolis alternis dense positis, et ex parte sibi quasi incumbentibus, lanceolatis, acuminatis, in extremitate ciliatis, superficie prona laete viridibus, supina glaucis, 25 – 30 paribus, seu pinnis. Costae adhaerent foliola breuissimo petiolo

tiolo ita, vt pars poſterior, oblique quaſi dedolata, appreſſa ſit coſtae, et ſi decidunt, fouea rotunda in coſta, vbi adhaeſerunt, conſpicitur. Folia perfecta figuram equidem habent lanceolatam, coſta tamen ſemper non nihil arcuata, reclinatum ſiſtit folium. Si tanguntur manu, foliola complicantur ad coſtam immotam, ſed tardius, ac in mimoſa ſic dicta pudica, neque facile ante aliquot horas iterum explicantur, hinc etiam difficillimus eſt labor exſiccare ramum, ob celerem collapſum et contractionem partium. Omni veſpere, et dum pluuia cadit, folia quoque complicantur et dependent. Duratio et vigor eorum breuis admodum eſt; hinc caules et rami adultiores foliis fere orbati et denudati apparent, cacumina vero ramorum defluuium, ſuccreſcentibus ſemper aliis, abunde ſupplent. Stipulae ad finem petioli poſitae ſunt ex duabus partibus conſtantes, quarum vna, folio contigua, maior eſt, altera vero, pedunculo communi axillari adſtans, minor deprehenditur. Figuram habent lanceolatam et in ſuperficie externa nonnullas rubicundas venas, quae diſparent paullatim. Pedunculus florum communis, ad latera foliorum poſitus, ſitu parallelo cum iisdem extenditur, his tamen eſt longior, filiformis, piloſus, irregulariter ramoſus, bracteis amplexicaulibus ouato-acuminatis ad ſingulum pediculum florum poſitis. Flos vnicus ſuſtinetur pedunculo proprio, vnciali fere, cincto duobus foliolis ouato-lanceolatis oppoſitis, in ambitu ciliatis, et calyci arcte appreſſis. Calyx eſt monophyllus bipartitus, parte altera poſt vexillum maiore, reflexa, leuiter bifida, in nonnullis ſpeciminibus integerrima obſeruata, altera carinam ſuſtentante minore, canaliculata, et in extremitate ciliata: tridentatam prout Ill. *Hallerus* eam eſſe indicat, non inueni. Flos eſt papilionaceus: vexillum ſubcordatum, patens, reflexum, luteſcens, (iſabellinus eſt color) venulis rubicundis longitudinalibus et macula aurea rotunda ante vnguem variegatum, alis paullo breuius: alae ex ouato-oblongae, obtuſae, rectae, vexillo longiores et limbo laterali exteriori deflexae, lineae purpureae veſtigio vix apparente in medio: carina alis breuior, dipetala, foliolis lunulatis exterius purpuraſcentibus. Stamina decem in duobus diſtinctis corporibus ad baſin vsque fiſſis, quorum quodlibet in filamentis, altitudine ſucceſſiue decreſcentibus, quinque antheras ſuſtinet, luteas, paruas et rotundas. Stamina cum piſtillo et ſtigmate ſubulato in carina abſcondita latent: ſuccedit legumen inflexum, articulatum, ſcabrum, articulis poſt maturitatem ſolubilibus, numero variantibus: ſemen reniforme vnicum luteo-fuſcum, in quolibet leguminis articulo ſuborbiculato incluſum. Ex datis huc vsque characteribus quilibet cognoſcit, a Cel. *Royenio* ſuo iure noſtram plantam ad genus Aeſchynomenes eſſe relatam, et ab eo in Flor. Leyd. Prodr. pag. 384. denominatam: Aeſchynomene caule hiſpido, foliolis acuminatis, leguminum articulis ſuborbiculatis, quem et ſecuti ſunt Ill. *Hallerus* et *Linnaeus*, retenta Royeni denominatione; iſte in Hort. Goetting. pag. 265, hic vero in Spec. plantar. pag. 713. n. 2. Inuentionis gloria debetur Ill. *Sloaneo*, qui eam in locis meridionalibus inſulae Iamaicae ſponte creſcentem legit, et in catalogo plantarum,

quae

quae in insula Iamaica sponte proueniunt, Lond. 1696. 8. pag. 74. vocat: Hedysarum caule hirsuto mimosae foliis alatis pinnis acutis minimis gramineis. In historia Iamaicae Vol. I. pag. 186. eam vlterius exposuit, et iconem quoque dedit, sine dubio ad exemplar siccum concinnatam, quia folia et flores quoad maximam partem deficiunt; hinc Cl. *Royenii* iudicio omnino mala.

Explicatio Tab. II. Tab. XII.

A. Plantae ramus in naturali magnitudine.
a. Flos ab antica facie.
b. Idem a postica.
c. Idem a latere expositus.
d. Staminum fasciculus.
e. Ouarium.
f. Calyx bilabiatus cum staminibus et legumine foecundo.
g. Legumen maturum.
h. h. h. h. Leguminis articuli, quorum singulus ab aliis distinctus, vnicum semen continet.
i. Semen.

III.

VERBESINA foliis oppositis ouato-acutis integerrimis, scabris, pedunculorum summitatibus incrassatis et foliosis.

RVDBECKIA foliis oppositis hirsutis, ouato acutis, calyce imbricato cylindrico, radii petalis pistillatis. *Zinn.* Catal. plant. hort. acad. et agri Goetting. p. 409. c. icon.

Radix huius plantae est fibrosa, vnica, recta. Ex corpore, pollicem longo, in extremitate obtuso et quasi truncato, oriuntur radiculae plures quaqua versum repentes, tenaces, albentes, in radice euulsa paullo post rufescentes, fibrillulis pluribus donatae. Superiores

 riores

riores radiculae, ex capite radicis et reliquo eius ambitu prouenientes, inferioribus, paullo ante descriptis, sunt tenuiores et numero pauciores. Caulis est inferius simplex, rectus, duos vel tres pedes altus, inferius glaber et teres, superius molli et tenui lanugine vestitus, calami olorini crassitie, hinc versus supremam partem attenuatus, vbi et folia sibi propius adstant, quodam modo angulatus, vnico flore, inter ramos exorto, terminatus, et sibi relictus, inclinatus. Folia radicalia adsunt nulla, sed tantum caulina et ramea. Haec in parte caulis inferiori, et paullo etiam altiori, semper sunt bina, opposita; minora, pauciora et angustiora superioribus, quae numero terna, volumine maiora et copiosiora, ouato-acuta, sessilia, scabra, pallide viridia, integerrima, in superficie prona venosa, in supina tribus vel quinque neruis prominentibus donata, et ratione situs, semper deflexa apparent. Ex alis foliorum singulis proueniunt rami, foliis eiusdem formae et situs, ac in caule, ornati, oppositi, erecti primum, postea patuli, altitudine inter se discrepantes. Interdum eo in loco, vbi alias ramus exsurgit, petiolus tantum aliquot linearum, duo vel tria folia proferens, oritur, pro imperfecto ramo habendus. Rami per paria in caule a radice ad dimidiam plantae altitudinem crescunt, ex aduerso sibi opposita, numero incerto; in suprema vero parte, vbi tria folia caulem ambiunt, ibi etiam tres rami conspiciuntur, flores citius, ac inferiores rami, exhibentes, quod alias minus sollemne in florescentia, prout etiam illud, quod rami proximi, infra florem, qui caulem terminat, positi,

dum

dum increſcunt, hunc altitudine multum ſuperant. Longitudo, ſeu potius altitudo, iſtius partis, quae ex ſquamis rigidis, imbricatis, conſtat, et communiter calyx vocatur, in planta, quam deſcribo, erat nouem lineas pariſinas, licet interdum et in maius volumen excreſcat: figura eius eſt cylindrica, antequam iam nominatae ſquamae a ſe inuicem diſcedunt, et floſculos tubuloſos et lingulatos emittunt; poſtea refert figuram coni inuerſi. Magnitudo earum primum deſcribenda erit, antequam ad ſitum, colorem, ſtructuram, figuram et numerum progrediar. In inferiore parte calycis poſitae ſunt ſquamae duplo minores reliquis, in media et ſuprema parte collocatis; augentur enim volumine ſemper, quo altius adſcendunt, et ſupremarum limbis reclinati flores radiati incumbunt. More imbricum denſe ſibi imponuntur, et quidem ita, vt dimidia pars, imo duae tertiae, vnius ab altera obtegatur. Textura earum fere eſt cartilaginea; nullum enim parenchyma laminas diſtendit, et tantum ſunt membranae laeues, elaſticae et concauae, lineis longitudinalibus nonnullis exaratae. Color, quo nitent, in parte exteriore eſt pallide viridis, punctis nigris quaſi coagmentatis factus, in interiore luteo-virideſcens; in apice ſummo, ſubrotundo et molliori, exterius eſt linea fuſca et profunde viridis. Figuram obuerſe ouatam equidem omnes habent: attamen cum inferiores duas lineas, mediae et ſupremae quatuor et ſex lineas, altae ſunt, facie externa diuerſae non nihil apparent. Ab vnguibus anguſtis ſenſim ampliantur, donec in parte paullo ſupra medium latiſſimae factae, denuo anguſtantur; apex vero eſt ſubrotundus,

tundus, membrana molliori, antea indicata, quasi coronatus. Numerum foliolorum calycis insimul adponere, superfluum videri posset nonnullis: attamen ideo omittere nolui, quia constantem illum esse cognovi; in multis enim floribus dissectis eum semper ex 22 et 24 foliolis constare comperi. Postquam calycem exposui, transeo nunc ad flores. Hi duplicis generis sunt: alii in radio sic dicto lingulati et pistillati tantum, alii in disco, tubulosi et hermaphroditi. Radii flosculi in flore, cui nihil ex omnibus suis partibus deest, duodecim semper numerantur, et lingulam sistunt ouatam, in apice crena vna vel altera emarginatam, octo lineas longam, quinque ad sex latam, nitidam, deflexam, duabus luteis venis secundum longitudinem excurrentibus et multis aliis transuersalibus notatam. Colorem luteum flores isti habent, sed ideo prae reliquis huius classis notabiles, quia in flore adultiori et semina maturescente persistunt immarcescibiles, et exiguam alterationem coloris patiuntur. Continuus est flosculus iste lingulatus cum semine triquetro, striato, cinereo, incuruo, nec vmquam ab eo separatur. Ex meditullio flosculi exit pistillum vnicum, diuisum in duas tubas luteas, incuruatas, duas lineas longas. Alterius generis flores, hermaphroditi nempe, positi sunt in thalamo conico paleaceo, lineam crasso et fungoso, quorum ii, qui centrum disci occupant, citius reliquis efflorescunt; constantes autem ex corolla monopetala tubulosa, tubo breui in fine globoso et quodam modo compresso, limbo in quinque segmenta linearia, extus ferruginea, intus lutea et tomentosa, diuiso.

Stamina

Stamina quinque in medio tubi, diſtincta habent filamenta breuiſſima et antheras cylindraceas, tubuloſas, parum inter ſe cohaerentes, licet cylindrum forment. Piſtillum per florem deſcendit ad ſemen vsque, et in extremitate altera, ex tubo exporrecta, diuiditur in duas tubas, prout in lingulatis. Semina inuoluuntur paleis lanceolatis, omnem ambitum illorum vaginae inſtar circumdantibus, in apice prominente colore pullo infectis, et ſunt angulata, anguſta, coronata duobus denticulis ſubulatis, altero breuiori, altero longiori, quamquam nonnunquam alter, vel deficiat, vel vix conſpicuus ſit. Abſoluta nunc partium ſingularum expoſitione, progredior ad conſtituendum characterem genericum, ex florum et ſeminis conditione petendum. Secundum methodum a Cel. *Ludwigio* elaboratam, quam ſequor, pertinebit ad claſſem florum compoſitorum mixtorum, et ſi adtendimus ad reliquas notas characteriſticas, pro conſtitutione generum adſumtas, quales ſunt calyx ſquamoſus, thalamus paleaceus et ſemina anguloſa, ad genus Verbeſinae planta iſta, tamquam ſpecies genuina, referenda eſt. Differentiam ſpecificam in foliorum ſitu oppoſito, et pedunculo florum breui ac incraſſato, tribus foliis conſtanter veſtito, facillime inueniri poſſe credo. Reliquis itaque Verbeſinae ſpeciebus adiungatur nomine ſpecifico: Verbeſina foliis oppoſitis ouato-acutis, integerrimis, ſcabris, pedunculorum ſummitatibus incraſſatis et folioſis. Nondum octennium effluxit, ex quo rarior haec planta ex *Gallia* in Germaniam miſſa, non nullis innotuit. Quantum recordor, Cel. *Bernh. de Iuſſieu* eam ex

America meridionali accepit, et nomine Bidentis ſaponariae folio Lipſienſibus communicauit. In viridario inſtructiſſimo Cel. *Ludwigii* ante aliquot annos primum floruit, et ex illo a me 1755 primum ſemina Petropolin miſſa: tum vero 1757 cum aliis rarioribus cultam et florentem deſcripſi et delineandam curaui. Repetii vero ſationem hoc anno ideo, vt de vegetatione illius, aetate et perduratione in climate boreali certi quid notare valerem. Dum iam confecta eſſet delineatio, et deſcriptio compoſita, offertur mihi Catalogus plantarum horti academici et agri Goettingenſis, conſcriptus a Clar. *Zinnio*, Botan. Prof. Goetting. (Goetting. 1757. 8.), in quo haec Verbeſina ex ſeminibus, Lipſia quoque acceptis, ab auctore catalogi *Rudbeckiae*, tamquam noua ſpecies, adnumeratur, inſcripta: *Rudbeckia* foliis oppoſitis hirſutis ouato-acutis, calyce imbricato cylindrico, radii petalis piſtillatis, et icone illuſtratur, in qua vnicus flos, vna cum ſingulis partibus floris et ſeminis ſiſtitur. Quia vero totus habitus plantae ſingularem quamdam formam prae ſe fert, et rami erectopatuli, caulem ipſum ſuperantes, venuſtatem ſpecioſam ſtirpi conciliant; non auocari potui a propoſito, quod ceperam, iconem iam confectam, omnem habitum denuo repraeſentantem, hic tradere, quod minime diſplicebit iis, qui plantam nouam, habitu et forma prorſus peculiarem, inſpicere cupiunt, vsque dum vulgatior ſit, quod proxime futurum, cum quotannis copiam ſeminum exhibeat, et non adeo magna cura vbique proueniat.

Expli-

Explicatio Tab. III. T.b. XIII.

A. Plantae natiua magnitudine expositae pars superior.

a. Calyx cum disci floribus.

b. b. b. Squamae calycinae variae magnitudinis.

c. Radii flosculus ab interiori facie cum semine triangulo nudo.

d. Disci flosculus cum palea vaginali semen obuoluente.

e. Vagina, seu palea eiusdem flosculi.

f. Semen, disci flosculum sustinens.

g. Disci flosculus cum suo pedicello.

h. Semen disci bidentatum.

IV.

BRASSICA foliis oualibus, subintegerrimis, floralibus amplexicaulibus, lanceolatis, calycibus vnguibus petalorum longioribus. *Linn.* Cent. I. Plant. Vps. 1755. n. 54.

Radix annua, caulescens, lignosa, emittit vndique radiculas plures albas, succulentas, fibrillis copiosis instructas. Folia radicalia copiosa, quae in capitulum colliguntur, antequam caulis ex radice protruditur, vtplurimum pedem longa, et dimidium lata, oblonga, obuerse ouata, in margine vndulata et dentata, denticulis apice calloso instructis; superficie prona viridia, rugosa, glabra, supina glauca, laeuia. Neruus folii penitus albus, in basi vnciam latus, in aduersa parte laeuis et depressus, in auersa vero exstans et sulcatus, ex quo secedunt etiam vtrimque plures venae albentes, substantiam folii perreptantes. Caulis in planta florente et semina maturante, circa terram duos pollices crassus, canaliculatus, glaucus, quaqua versum plures ramos alternos emittit: superius glaber et quodammodo angulosus, tres quatuorue pedes altus. Folia in caule et ramis sunt sessilia, amplexicaulia, cordato-lanceolata, denticulis minoribus et rarioribus instructa, suprema vt plurimum integra. Flores in pedunculo communi ante florescentiam densius collecti, vmbellam quasi sistunt; postea vero dissiti in spica elongata successiue aperiuntur, prout in reliquis siliquosis ita fieri solet: propius pedicellus sex lineas longus florem sustinet. Calycis foliola sunt quatuor, sublutea: duo exteriora basi gibba et latiora, duo interiora angustiora, omnia subulata, concaua, canaliculata, erecta, post decidua; superant altitudine vngues petalorum, et eminent inter petala, vbi stamina breuiora posita sunt, hinc etiam petala oppositum situm, non cruciatum, habent. Petala sunt subrotunda, concaua, in apice vnica crena emarginata, lutea, terminata vngue breui, lato-lanceolato-albido. Glandulae quatuor virides: stamina sex filamentis linearibus teretibus, quorum duo breuiora extrorsum flexa, quatuor altiora erecta, columnam tetragonam formant: his insistunt antherae oblongae, acuminatae, biloculares, extrorsum flexae, seu distantes, puluerem luteum dispergentes. Stylus vnicus, stigma capitatum minimum. Siliqua biualuis, linearis, lateribus compressa, duos pollices longa, nodosa, propter valuulas tenues, per quas semina, in thalamo fungoso haerentia, tuberculorum instar extus conspiciuntur; septum valuularum prominens dimidium pollicem longum. Semina matura rotunda, subfusca, splendentia, gustu acria. Huius plantae semina, vnde ad nos delata sint, paucis indicare non superfluum erit, praesertim

tim hanc etiam ob rationem, quia peregrinator quidam, qui Chinam haud ita pridem visitauit, adseruit, ac si in regno sinensi brassicae et sinapi sua sponte non crescerent. Huius vero opinionis vanitatem non solum indices plantarum antiquiores, qualis est immortalis *Boerhauii*, qui in indice altero II. p. 12. Brassicam sinensem folio lactucae, flore luteo, quae forte nostra est species; et p. 13. Sinapi chinense folio acanthi, inter plantas tunc temporis iam notas, enumerat: sed etiam omnis futura dubitatio plane tolletur, si certiores facio curiosos, aeque in China ac in aliis regionibus, brassicam quamdam esse indigenam. Sciant itaque exteri, commercium litterarum Acad. Scient. Petropolitanam diu iam cum R. P. Societ. Iesu Pekini commorantibus habere, illosque subinde semina varia insimul nobis tranmisisse. Talem collectionem seminum etiam 1756 per mercatores russicos Pekino Academia Scient. impetrauit. Inter ea fasciculi duo erant, alter Brassica sinensis, alter Caules sinici maximi, insigniti. Vtrumque semen satum, et ex terra prouenieus, protulit vnius eiusdemque speciei plantas, hanc nempe, quam exposui, brassicam. Nisi me instigasset curiositas et experiendi desiderium, an differrent etiam characteribus specificis ab huc vsque cognitis brassicae speciebus indicatae, omisissem forte horum seminum sationem, quia iam ex commercio litterarum antecessorum meorum cognoueram, plus vice simplici non ea solum semina transmissa esse, quae Sinarum regno indigena sunt, sed et alia, ex aliis prouinciis sensim illata. Simile quid et nunc factum fuisse, intellexi perſpicue: adpoſita enim erant alia braſſicarum ſemina, nullo peculiari titulo inſignita, quae dederunt braſſicam ſic dictam oleraceam eiusque varietates omnibus cognitas; hinc colligo, coli plures ibidem pro vſu oeconomico. Sed redeamus ad noſtram. Plantas iuniores, ſi obiter inſpiciuntur, nemo ad braſſicas referret; exacte enim habitum Lactucae ſatiuuae, romanae dictae, referunt. Menſem circiter adultae folia in capitulum colligunt, molle et oblongum; tum breui interiecto temporis ſpatio caulis protruditur, et rami copioſi et patuli excreſcunt. Altero menſe poſt ſationem, ſi tempeſtas coeli fauet, iam flores profert, et quarto menſe exacto ſemina maturantur. Frigus ſeptemtrionale, quod exeunte menſe Auguſto iam ingruit, minime ob texturam mollem et ſuccoſam perferre valet. Si coniectura non inprobabilis locum inuenire poteſt, braſſica forte noſtra, ea ipſa eſt planta, ex cuius ſemine premitur oleum illud, quod Sinenſes adhibent in cibo et lucerna, prout refert *Anonymus*, Suecus, in Oeconomia Sinarum Holm. 1757. 8. plantam, ſcribens, ex qua depromuntur ſemina pro conficiendo oleo, raphano eſſe ſimilem, et florem habere luteum. Experimenta tum capi poterunt, cum ſufficiens copia ſeminum collecta fuerit, neque illa irrita fore praeuideo, cum iam alia ſpecies braſſicae radice cauleſcente fuſiformi, ſeu Napus ſilueſtris, oleum ſuppeditet, ad multos vſus familiare. Antequam vero finio diſſertationem, probandum mihi incumbit, genuinam etiam eſſe ſpeciem braſſicae, eique inſimul imponendum nomen ſpecificum, quo ab aliis ſui generis clare diſtingui poſſit.

Super-

Superfluum vero foret denuo hic enumerare notas characteristicas, quas pro ſtabiliendo genere Braſſicae adſumſerunt methodorum auctores. Conferantur modo datae a nobis ſuperius deſcriptiones, et notatae in ſingulis partibus conuenientiae, cum genere braſſicae; comprobabit tum, et ſimilitudo, et aequalis fabrica partium, huic, nec alii generi, adnumerandam eſſe in poſterum. Accedit ſententiae noſtrae non leue robur etiam exinde, quod Ill. *Linnaeus* in Centur. Plant. I. Vpſal. 1755. n. 54. adſignauit ei etiam iam locum inter braſſicas. Attulit enim b. *Osbeck*, redux ex China, ſemina, hinc vegetantem, florentem et fructus ferentem diſquiſiuit et denominauit. Retinemus hinc datum ab eo nomen ſpecificum immutatum: Braſſica foliis oualibus, ſubintegerrimis, floralibus amplexicaulibus, lanceolatis, calycibus vnguibus petalorum longioribus. De noua planta vna cum deſcriptione exhibere iconem, omnibus numeris abſolutam, minime ſuperfluum eſſe reor: attamen, ſi adumbratio exacta, ſecundum omnes partes datur, et hic labor omitti poteſt. Curaſſem certo confici iconem, niſi me auocaſſet a propoſito diuulgatio iam facta plantae alibi. Obſtitit mihi et hoc, cum dubius haerebam, annon icon *Pauli Hermanni*, in Paradiſo batauo pag. 250. data, et quae Sinapi indicum maximum, lactucae folio, ſiſtit, aeque noſtrae plantae, ac Sinapi, conueniat. Quodſi enim cuiquam volupe eſt, conferre datam loco indicato deſcriptionem et iconem cum braſſica hac florente, cognoſcet ſtatim, calycem, florem et fructum omnimodam conuenientiam inter ſe habere, nec meliorem et accu-

accuratiorem, ſi folia excipias, de nouo fieri poſſe iconem. Sed qua fiducia tu allegas hanc iconem, obiiciet aliquis? Num te latet, illud Sinapi, quod *Hermannus* deſcripſit, et delineatum dedit, a *Boerhauio*, *Linnaeo* et aliis omni tempore ad Sinapi relatum eſſe? Fateor hoc inſolens eſſe, praeſertim ſi deſcriptionem Ill. *Linnaei* de hoc Sinapi in Hort. Vpſ. pag. 191. datam, curatius perpendo, et cum planta hac confero; multa enim indicantur ibi ſigna, quae diſſuadent confundere Sinapi illud cum braſſica: feci illud tantum, ob florem et fructum, braſſicae noſtrae ſimillimum. Quantae difficultates ſeſe obiiciunt ei, qui plantam, quam pro noua habendam eſſe credit, cum denominationibus incompletis et iuſto breuioribus antiquorum conferre ſtudet, ii tantum norunt, qui hunc laborem in ſe ſuſcepere. Quodſi enim adfirmamus, a nemine huc vsque mentionem factam eſſe plantae a nobis diſquiſitae, incumbit nobis inſimul probare, iſta loca, vnde accepimus ſemina, a nullo botanico adhuc eſſe perluſtrata, neque etiam illinc vmquam ad exteros miſſa eſſe ſemina. Poſterius de Sinarum regno non valet. Cum enim commercium exterorum cum Sinis ſat longo abhinc tempore iam inſtitutum ſit, pluresque peregrinatores attulerint inde plantas indigenas, nunc vbique cognitas; non improbabile eſt, et huius plantae ſemina olim eſſe exportata. Huius aſſerti veritatem exinde probari poſſe contendo, quia *Boerhauius* in indice altero II. pag. 12. recenſet Braſſicam ſinenſem lactucae folio, flore luteo. Si nudum illud nomen accipio, prout plantae inditum eſt, quid impedit, quo minus credam,

credam, eſſe noſtram ſpeciem, cum folia radicalia, prout ſupra monui, habitum lactucae ſatiuae exacte referant.

Occaſione hac opportuna, dum Sinapi ſpeciei mentionem inieci, non incongruum erit, quaedam hic addere de quadam ſpecie, hactenus dubia. Notum enim eſt, in indice *Boerhaauii* pag. 12. inter Sinapi ſpecies haberi etiam aliquam, quam acanthi folio vocat. Citat hoc ſynonymum Ill. *Linnaeus* ad ſpec. 2. Hort. Vpſal. pag. 191; in Speciebus vero iterum omiſit, ſubſtituendo ſolum Sinapi indicum lactucae folio *Hermanni*. Cl. *Zinnius* in Catalogo horti et agri Goettingenſis vtrumque ſynonymum ſimul adducit. In ſeminario horti academici adſeruabatur quoque Sinapi acanthi folio inſignitum, quod ſatum, minime ſpeciem *Linnaei* Spec. plant. n. 4. indicatam dedit, ſed eam potius, quam Ill. *Hallerus* Hort. Goett. pag. 250 retento nomine Sinapi orientale maximum rapi folio *Tourn.* I. R. H., quoad florem et fructum deſcripſit. Folia illud habet pinnata, pinnis tribus irregulariter dentatis, impari maxima; reliqua ex deſcriptione allegata *Halleri* petenda. Eodem tempore ſeueram Sinapi, ex China 1756. acceptum, ideo celebratum apud Sinenſes, prout in capſula adſcriptum legitur, quod „illlus radices coctae cum raphani maioris radicibus „crudis commixtae et maceratae per aliquot horas in „vaſe clauſo habeant ſaporem fortiſſimum„ collatis vero vtriusque foliis, floribus et ſiliquis, nempe eius,

 quod

quod acanthi folio acceperam, et huius ex China accepti, cognoui, minime differre ſpecie, ſed nomine tantum. Nemo itaque a me exigere poteſt vlteriorem de hac ſpecie relationem, quia eam iam Ill. *Hallerus*, et *Linnaeus* Cent. Plant. I. n. 55. nomine ſpecifico Sinapi ſiliquis retrorſum hiſpidis, apice ſubtetragonis compreſſis, exhibuere.

DE

DE GRADIBVS FRIGORIS SVMMIS, QVOS CERTA FLVIDORVM GENERA FERRE POSSVNT, ANTEQVAM FIANT SOLIDA, IN GLACIEM ABEVNTIA; ATQVE GRADIBVS SVMMIS CALORIS, QVOS ACCIPERE POSSVNT, DONEC BVLLIRE INCIPIANT, ET IN IPSA BVLLITIONE CONTINVATA, DISSERTATIO EXPERIMENTALIS.

Auctore

I. A. BRAVN.

Scalam graduum frigoris et caloris insignes afferre vtilitates, ad naturam fluidorum pariter atque firmorum corporum, adeo quoque ipsius ignis, melius cognoscendam, dubio caret. Publicauit primum, quod sciam, e usmodi scalam graduum caloris et frigoris magnus *Newtonus* in Actis Societatis Regiae Londinensis mense Aprili 1701. N. 270. Nomen Auctoris hic quidem additum non legitur, tributur tamen illi in Opusculis, vbi haec scala opusculum XXI conficit Tomi II.

Scalam graduum frigoris perficiendi occasio procul dubio in locis septentrionalioribus maior est, quam in minus septentrionalibus, in primis hiemibus saeuioribus. Quum igitur hiemem anni 1757 et 1758 vehementiorem hic Petroburgi experti simus, hac oportuportunitate vtendum cenſui, variis experimentis inſtituendis ſcalam, frigoris potiſſimum, perficiendi et amplificandi.

Antequam ad ipſa experimenta exponenda progrediar, quaedam de Thermometris praemonenda videntur, quibus in capiendis experimentis vſus ſum. Scala Deliliana a me eſt adhibita, qua etiam in obſeruationibus meteorologicis faciendis vtor, vbi ſcilicet cifra gradum caloris aquae ebullientis, et numerus 150 gradum aquae in glaciem abeuntis, et aquae ſub glacie notat, ſiue niuis regelaſcere incipientis. Nullam enim differentiam vnquam obſeruare potuimus inter gradum niuis regelari incipientis, glaciei recens natae, et aquae ſub glacie, quamuis innumera experimenta in hunc finem inſtituerimus. Hinc quoque non dubitauimus in thermometris noſtris ſaepius Punctum congelationis ope aquae ſub glacie determinare, quia minimo tempore haec methodus indiget, quod commodiſſimum tunc inprimis eſt, quando thermometri puncta fixa paullum loco mota videntur, quod nonnumquam contingere poteſt et ſolet pluribus experimentis inſtitutis.

Non ignoramus quidem quibusdam hanc determinationem puncti congelationis ope aquae ſub glacie dubiam videri poſſe, quia experimenta quaedam probare videntur aquam maiorem frigoris gradum nonnunquam recipere poſſe, quam niuis regelaſcere incipientis, vel glaciei recens genitae.

At enim vero nihil tale obſeruare potuimus, quamuis omni diligentia adhibita in hunc finem experimenta

rimenta ceperimus atque repetierimus plurima. Teximus vitra cera, et aliis operculis ex vitro et ligno, porro varia olea, lini, cannabinum, oliuarum, nucum et essentialia aquae superfudimus, in omnibus hisce experimentis sub eodem gradu scilicet 150 glacies in aqua oriri coepit. In quolibet vitro thermometrum a me immersum erat. Aqua circa bulbum thermometri congelata retinebat ab initio eundem gradum niuis regelascere incipientis, sed tota aqua in vitro congelata adsumebat paullatim gradum frigoris aeris ambientis, 170 et 180 etc.

Ratione temporis, quo in diuersis vitris aqua gelascere coepit, omnino differentia mihi est notata. Nam primum aqua in vitro aperto est gelata, cum nondum vestigium glaciei, neque in vitris tectis, neque in iis, in quibus oleum aquae innatabat, deprehenderetur, et in his quoque congelatio diuerso tempore contigit, licet omnis aqua, quum aeri frigido exponeretur, eiusdem fuerit temperiei, quod etiam de oleis superfusis est intelligendum. Non igitur valet consequentia, hoc vel illud fluidum minori tempore ad congelationem, quam aliud, indiget, ergo sub minori gradu quoque gelascit, quum conditiones esse queant, tam respectu vasis, quam naturae fluidi aliaeque, quae efficiant, vt fluidum citius, tardius, temperiem aeris adsumat; hinc quoque in omnibus experimentis nostris ad tempus non attendimus, intra quod in quolibet fluido congelatio contigit, sed tantum ad gradum thermometri immersi.

Punctum fixum alterum more consueto aqua bulliente est determinatum, sed sub certa et determinata barometri altitudine scilicet 28 poll. pedis regii parisiensis, quum constet thermometra variari, si sub diuersa barometri altitudine aqua bulliat, cui immerguntur. Ad eandem profunditatem quoque aquae ebullienti sunt immersa, nimirum 6 pollicum paris. Bulbus in omnibus thermometris erat sphaericus, elegimus autem hanc figuram ideo, quod minor portio fluidi explorandi requirebatur, quam si formam cylindraceam, aut aliam bulbus haberet. Hydrargyrum erat idem purum, quo thermometra sunt impleta, et hac ratione thermometra satis concordantia obtinuimus, quibus gradus frigoris et caloris fluidorum adcurate explorare potuimus. Pars inferior tubi thermometrici ad duos pollices nuda plane erat, nulli tabulae adfixa, vt eo commodius et adcuratius immergi potuerint in fluida exploranda.

Vti solemus non minus termino positiuo in adsignando frigore, quam calore ex consuetudine loquendi, quamuis frigus mera sit caloris priuatio et diminutio, ita vt caloris gradus minores respectu caloris graduum maiorum, gradus frigoris dici possint. Ita gradus frigoris 200 scalae nostrae satis magnus est respectu graduum frigoris in regionibus calidioribus, sed paruus respectu maiorum frigoris graduum e. g. 280. 300 etc. quo respectu igitur caloris gradus est et dici potest, vti in terminis et ideis relatiuis, quales et frigoris et caloris sunt, fieri solet. Nullus igitur terminus caloris desinentis, et frigoris incipientis absolute indicari potest; mere arbitrarium est in thermometris frigoris gradus ab ab eo caloris gradu numerare incipere, quo aqua in glaciem abire solet, quamuis hoc non inconuenienter fieri potest. Multo minus caloris augmenta et decrementa vltima, seu caloris et frigoris terminos vltimos, adsignari posse, per se patet. Hinc facile intelligitur, terminum materiae frigorificae nihil positiui inuoluere, et inuoluere posse. Sunt enim materiae frigorificae sic dictae nihil aliud nisi materiae calorem aliorum corporum minuentes, vt est spiritus nitri, vitrioli, salis, quin spiritus vini glaciei contusae et niui adfusa. Item salia niui mixta et alia. Neque hae materiae frigefacientes in omnibus corporibus calorem diminuunt, et frigus producunt, vt potius in aliis calorem augeant, et producant, vt idem spiritus nitri et alii spiritus acidi et vinosi, qui respectu niuis sunt frigefacientes, respectu aquae sunt calefacientes. Sed haec hactenus; veniendum ad ipsa experimenta est. Materiae, circa quas experimenta instituimus, fuerunt potissimum 1) Solutiones salium, 2) Vina et spiritus vini, 3) Olea, potissimum expressa, 4) Metalla quaedam.

Ad solutiones salium quod attinet, quarum phaenomena primum proponemus, notandum est, in omnibus solutionibus eandem aquae quantitatem esse adhibitam, scilicet calycem vitreum, ex quo vinum bibi solet, aqua fere plenum.

Calor aquae fere erat gradus 60, quo cera fundi solet. Sales ipsi eundem gradum caloris tenebant. Solutio ad punctum saturationis facta est. Gradus caloris vltimos, quos in statu fluiditatis, et initio firmitatis

mitatis ferre hae ſolutiones potuerunt, notaui, quando ſuperficies aquae ſalſae glacie obduci coepit.

En ipſos frigoris gradus, quos in ſtatu fluiditatis vltimo tulerunt diuerſorum ſalium ſolutiones, ſiue ſub quibus in glaciem abiere.

Solutio ſalis communis in glaciem abiit ſub gradu	182
Solutio ſalis ammoniaci	181
Solutio ſalis digeſtiui Syluii	165
Solutio ſacchari	161
Solutio cinerum clauellatorum	161
Solutio ſalis alcali depurati	160
Solutio ſalis Ebſon.	156
Solutio nitri depurati	155
Solutio ſalis ſedlicenſis	154
Solutio aluminis	153
Solutio vitrioli veneris	152
Solutio vitrioli communis	152
Solutio boracis venetae	152
Solutio ſalis Sibirici	152
Vrina	152
Solutio arcani duplicati	151
Solutio tartari albi	151

Ex comparatione diuerſorum frigoris graduum, ſub quibus diuerſae hae ſalium ſolutiones in glaciem abire coeperunt, adparet, ſolutiones ſalium communis et ammoniaci omnium maximos frigoris gradus ſuſtinere poſſe, antequam ex ſtatu fluiditatis in ſtatum ſoliditatis vel firmitatis tranſeant.

Hinc

Hinc ſi intereſt, tempore hiemis aquam in ſtatu fluiditatis manere, ſale communi in aquam iniecto obtineri potiſſimum poteſt, quum hic ſal maxime congelationem aquae impediat, atque ſal ammoniacus.

Vtrum vero ptoportio a me indicata inter gradus frigoris ſolutiones ſalium congelantes ſemper obtineat, adfirmare non auſim, quum, ſi etiam caetera omnia ſint paria, eorundum ſalium diuerſa bonitas et puritas eſſe poſſit. Non igitur in his et ſequentibus quoque experimentis adcuratio geometrica requiri poteſt, ſed et haec et ſimilia cum latitudine intelligenda eſſe facile conſpicitur.

Differentia graduum frigoris procul dubio pendet vel a maiore ſalis copia, quam diuerſae ſolutiones recipere et continere poſſunt, vel etiam a diuerſa ſalium natura atque textura.

Nam quum eadem aquae quantitas, quam in experimentis noſtris adhibuimus, non eandem ſalis diuerſi copiam ſoluere ſoleat, ſed admodum diuerſam, ſequitur, vt in diuerſis ſolutionibus diuerſa quoque inſit ſalis quantitas. Quantitatem hanc diuerſam ſalium in diuerſis ſolutionibus determinare multis experimentis non infeliciter ſtuduit *Ellerus* in Commentariis Academiae Berolinenſis anni 1750. Iam maior ſalis copia, vtplurimum maius quoque impedimentum congelationi obiicere poteſt et ſolet, hinc mirandum non eſt, aquam maiore ſalis copia impraegnatam maiorum quoque frigoris graduum eſſe capacem, magisque congelationi reſiſtere poſſe. Aqua igitur marina circa littora multo facilius congelatur, quam in locis a littoribus remotioribus, quoniam circa littora aqua marina minus ſalſa eſſe ſolet, potiſſimum ob fluminum influxum; hinc nonnulli ſtatuerunt, vltra viginti milliaria ab ora maritima maria non congelari, quod tamen experientiae repugnat. vid. *Muſſchenbroekii* Eſſai de Phyſique § 925. Maiorem ſalis copiam in aqua ſolutam, congelationem quoque magis impedire, illa quoque experimenta demonſtrant, quibus diuerſi generis ſales in eadem aquae quantitate ſoluuntur; conſtat enim eandem aquae quantitatem, ſi vnius generis ſalem non amplius ſoluat, ſoluere tamen alterius generis adhuc poſſe et ſolere. Quae in hunc finem experimenta inſtitui, in poſterum cum aliis huius generis communicabo. Interim diſſimulandum non eſt, deprehendi tamen ſolutiones maiorem ſalis ſoluti copiam continentes, minus tamen aliis, minorem ſalis copiam continentibus, congelationi reſiſtere, quod igitur a diuerſa ſalium natura et ſpeciali textura generatim pendere debet, ſed ſpecialius hoc diſquirere huius loci non eſt., nec inſtituti. Caeterum monendum adhuc eſt, cauendum eſſe, ne ſalium praecipitatio fiat in congelationibus ſolutionum ſalinarum, quod impediui, dum vehementiſſimo frigori eas expoſui, vt congelatio quam breuiſſimo tempore contingeret. Hac ratione obtinui glaciem aequaliter ſalſam, in quantum guſtu percipere potui.

Quas ſalium ſolutiones frigori expoſui, vt congelarentur, easdem igni quoque ſubieci, vt ebullirent, tam ad initium ebullitionis determinandum, quam ad eos gradus caloris definiendos, quos in continuata bullitione adſumerent.

Conſtat

Conſtat gradum caloris aquae bullientis eſſe conſtantem. Conſtantes gradus in ſolutionibus noſtris non eſſe, nec facile eſſe poſſe, haud difficulter praeuidi. Sunt enim fluida maxime heterogenea, quae naturam et texturam durante bullitione non poſſunt non mutare. Variationes tabula ſequens indicabit.

Solutio ſalis communis bullire plene coepit circa 5. infra o. continuata vero ebullitione adſcendit ſupra o ad gr. 20 thermometri mercurius.

Solutio ſalis ammoniaci, vti aqua, bullire coepit circa o. continuata ebullitione attigit gr. 15.

Solutio cinerum clauellatorum iam plene bullire coepit circa gr. 15. infra o.
continuata bullitione peruenit ad gr. 20 ſupra o.

Solutionis ſacchari initium plenae ebullitionis infra o. 2 contigit; in continuata ebullitione ſpiſſior facta notauit grad. ſupra o. 25 thermometrum.

Solutionis ſalis alcali depurati initium bullitionis infra o. 5. continuata bullitione ſupra o. 8. adſcendit mercurius.

Solutio ſalis ſedlicenſis plene bullire coepit infra o. 3; dein ſpiſſior facta adſcendit ſupra o. 15 thermometrum.

Solutio vitrioli communis et veneris plene bullire incepit infra o. 3; et in continuata bullitione fere eundem gradum retinuit, ad 1 enim ſupra o tantum adſcendere viſum eſt thermometrum.

Solutio ſalis Sibirici conſtantem fere gradum quoque in ebullitione retinuit, nam ſupra o. 1 tantum adſcendit thermometrum immerſum.

Solutio aluminis supra o. 1 bulliit
Solutio boracis venetae supra o. 2.
Arcani duplicati solutionis initium o. continuata bullitione, supra o. 3. mercurius adscendit.
Solutio salis Ebson, infra o. 3 coepit, dein spissior facta supra o. 20. thermometrum adscendit.

Quod si hi gradus caloris, quos solutiones salium indicatae, vel sub initium ebullitionis, vel in continuata ebullitione, adsumserunt, inter se comparentur; conspicitur vel circa o, vti aqua simplex solet, bullire coepisse, vel infra cifram, vti pleraeque, adeoque sub minori gradu, quam aqua solet. Et aqua marina sub multo minore gradu quoque bullire incipere dicitur, scilicet sub 22 infra o. Sed proportio certa et constans graduum caloris, quam hae solutiones inter se seruent, ex his saltem experimentis erui posse non videtur. Videri quidem posset solutionem, quo plus contineat salis, eo sub minore gradu bullire incipere debere, sed ex comparatione experimentorum non patet, et diuersae salium naturae ratio hic quoque est habenda. Plura igitur hic sunt experimenta instituenda, ad explorandum, vtrum aliqua ratio et proportio forsitan erui possit circa initia saltim ebullitionis plenae. Caeterum solutionem cinerum clauellatorum minimo caloris gradu ad ebullitionem indigere conspicitur.

Plenae ebullitionis initium posui, quia aqua quoque constantem gradum non nanciscitur et retinet, nisi omnis aqua plene bulliat.

Ad ebullitionem continuatam quod attinet, facile patet in ea nihil constans et perpetuum facile determinari posse. Nam quo longius continuatur ebullitio, eo plures vapores aquei abeant in aera necesse est, eo magis igitur quoque consistentia fluidi mutetur oportet. Continuauimus in nostris experimentis ebullitionem donec manifesto solutio in quibusdam spissior facta est, in aliis vero donec fere dimidia aqua fuerit euaporata. Quae solutiones fere eundem caloris gradum in ebullitione retinuerunt, eas ab aqua communi parum aut nihil omnino hoc respectu differre, manifestum est. Caeterum in eiusmodi experimentis omnia ad punctum determinari non posse, sed cum latitudine quadam esse intelligenda, iam ante monuimus, quum et materiae ratione bonitatis differre queant, et vix sub iisdem circumstantiis semper repeti possint.

Haec hactenus de solutionibus salium, plures in posterum communicabo, sed nunc ad alia experimenta progrediendum est, scilicet ad ea, quae de vinis et spiritibus vini cepimus. Vina varia varios frigoris gradus in vltimo fluiditatis et primo firmitatis statu tulerunt, nimirum sub sequentibus frigoris gradibus in glaciem transiere.

Vinum Hisp. et illud, quod Sect dicitur, abiit in glac. sub gr.	167
Vinum Tinto dictum - -	167
Madera Maluasier - - -	167
Vinum Hungaricum vetus - -	165
Madera vinum - - -	163
Vinum Burgundicum - - -	162
Vinum Florentinum - - -	161
Vinum Roquemor - - -	161
Vinum Margaux - - -	161

Vinum Francicum album vetus	-	-	160
Vinum Campanense	-	- -	160
Vinum d' Ermitage dictum	-	-	160
Vinum Rhenanum	-	- -	159
Vinum Hoogbrion	-	- -	159
Cereuisia anglicana, Ale dicta	-	-	159
Vinum rubrum Francicum	-	-	155
Acetum vini optimum	-	-	155
Cereuisia ordinaria, vti hic haberi solet		-	152

Ad spiritus vini quod attinet, sequentia phaenomena frigori expositi monstrarunt. Spiritus vini rectificatus sub gradu frigoris 197 nullum congelationis vestigium ostendit, multo minus spiritus vini rectificatissimus. Sed spiritus vini gallicus, vti hic vendi solet, iam sub gradu 194 particulas glaciales conspiciendas praebuit. Spiritus vini Russicus optimus sub gradu 192 et vulgaris sub gradu 190 in glaciem abire coepit.

Quod circa solutiones salium monuimus, id hic quoque valet, scilicet haec experimenta adcurationis geometricae non esse capacia, sed cum latitudine quadam esse capienda. Quis enim ignorat, vina eiusdem generis, etiam, quae pro optimis haberi solent, non eundem semper bonitatis gradum habere solere? Nos quae potuimus optima nancisci vina, in experimentis adhibuimus.

Ex comparatione frigoris graduum, quos thermometra in vina immersa monstrarunt, dum in glaciem abire coeperunt, manifestum est, vina dulcia maiores caeteris frigoris gradus sustinere posse, donec congelengelentur, quod patet ex experimentis de vino hiſpanico, et ſicco, vel Sect, vino Tinto, Madera Maluaſier et vino hungarico, quod vltimum tamen tantum frigoris gradum in ſtatu fluiditatis vltimo perferre non potuit, quantum quatuor priora, illa enim 167, hoc autem 165 tantum ſuſtinuit. Minimum frigoris gradum tulit vinum rubrum ordinarium francicum, quamuis pro optimo ſui generis haberetur, quo vſus ſum. Vtrum hae proportiones frigoris graduum, quas indicauimus, adcurate ſemper ita in experimentis ſe habiturae ſint, quaeſtio eſt, quam pro certo adfirmari non poſſe quilibet perſpicit, qui tantum conſiderat eundem bonitatis gradum ſemper haec vina habere nec ſolere, nec facile poſſe.

Vina et ſpiritus vini, et generatim fluida ſpirituoſa, procul dubio eo magis congelationi reſiſtunt, adeoque eo maiores frigoris gradus, qua fluida, ferre poſſunt, quo maiorem ſpiritus copiam pro dato volumine continent. Hinc ſequitur, quod eiusmodi experimenta indicia quantitatis ſpiritus in fluidis eiusmodi contenti praebere queant. Quo inſigniores enim frigoris gradus eiusmodi fluida ſpirituoſa, qua fluida, ſuſtinere poſſunt, eo maiorem ſpiritus copiam; quo minores, eo minorem ſpiritus quantitatem continebunt. Salis contenti tamen ratio quoque erit habenda, quem congelationi magis minusque, pro varia eius natura et copia in fluido contenta, reſiſtere, ex ſuperioribus patet, vti quoque ex ſpiritibus ſic dictis acidis elucet, de quorum congelatione in poſterum agam. Argumentum igitur ſemper rite procedet: quo maior ſpiritus copia in dato fluido continetur, eo magis fluidum congelationi reſiſtet, ſed forſitan

ſitan omni exceptione maius argumentum non erit, ſi inuertatur: quo magis congelationi fluidum ſpirituoſum reſiſtit, eo maiorem ſpiritus quantitatem habeat neceſſe eſt, niſi oſtendi dato caſu poteſt, rationem ſalis contenti negligi poſſe.

Porro ex his experimentis intelligi poteſt, quando fluida ſpirituoſa a congelatione libera futura ſint, quando contra conglaciationis periculo expoſita, ſi conſiderentur frigoris gradus, ſub quibus congelari coeperunt. Sed facile conſpicitur, hoc tantum valere poſſe, ſi in ipſo fluido, thermometro immerſo, frigoris gradus exploretur. Nam aer ambiens maiorem ſaepius frigoris gradum diu habere poteſt et ſolet, quam fluidum in vaſe contentum. Aqua ipſa in medio diu fluida manet, quamuis gradus 160 et amplius in aere regnet; quae tamen in media glacie contenta retinet nihilo minus gradum 150, quod et ex ſuperioribus manifeſtum eſt, et alias ſatis conſtat.

Caeterum cautionis adhuc mentio eſt facienda, quam in hiſce experimentis inſtitutis adhibui, et quae in inſtituendis eſt adhibenda. Notum enim eſt, eiusmodi fluida ſpirituoſa, quum ſint heterogenea, in congelatione inſignem pati mutationem, et eadem non permanere, dum partes ſpirituoſae in medio fluido congregantur, et hinc maioris frigoris gradus capaces fiant neceſſe eſt, quin ſolo frigore et congelatione ex vino ſpiritum vini fieri poſſe conſtat. Vt igitur euitetur et euaporatio, et mutatio fluidi, quantum fieri poteſt, haec experimenta tunc demum ſunt capienda, quando

in

in aere atmofphaerico multo maius frigus regnat, quam fluidum, vt congelascat, requirit. Sic enim congelatio breuiffimo tempore contingit, vti contigit in noftris experimentis, ita vt fenfibilem differentiam fluidorum obferuare non potuerimus, quando particulae glaciales confpiciendas fe praebere coeperunt in hifce fluidis, et nos punctum congelationis notauimus.

Progredimur ad phaenomena exponenda, quae et vina et fpiritus vini, tam fub initium ebullitionis, quam in continuata ebullitione monftrarunt. Nos hic tantum initium plenae ebullitionis notauimus, quia facile adparet in progreffu ebullitionis fluida eiusmodi fpirituofa ob euaporationem perpetuam infigniorem, infigniter quoque mutari, ita vt eo propius ad naturam aquae accedant, quo diutius bullitio continuatur.

Hinc femper maioris quoque caloris gradus capacia fieri folent et debent, donec tandem gradum caloris aquae bullientis attingant ea, quae funt minus fpirituofa, adeoque ab aqua parum aut nihil omnino amplius differant.

Spiritus vini rectificatiffimus fub gradu thermometri noftri 32 infra o plene bullire coepit, et hic gradus quoque in progreffu ebullitionis conftans manfit, vti aquae bullientis.

Spiritus vini gallicus bullire coepit infra o fub gradu 20, fed eundem caloris gradum in progreffu non obtinuit, fed calor aliquot gradibus auctus eft, idem quoque dicendum eft de fpiritu vini rectificato, qui fub eodem gradu bullire coepit.

Vina ſub initium bullitionis gradus caloris ſequentes monſtrarunt in thermometro immerſo.

Vinum hiſpanicum plene ebullire coepit notante thermometro noſtro immerſo infra o gradus 15

Vinum Tinto dictum	-	-	-		15
Vinum rhenanum	-	-	-	-	15
Vinum d'Ermitage	-	-	-	-	15
Vinum Madera	-	-	-	-	15
Madera Maluaſier	-	-	-	-	12
Vinum vetus hungaricum	-	-	-		12
Vinum burgundicum	-	-	-	-	12
Vinum campanenſe	-	-	-	-	12
Vinum gallicum vetus optimum	-	-			12
Vinum Sect dictum	-	-	-	-	10
Cereuiſia anglicana Ale dicta	-	-	-		10
Vinum rubrum ordinarium	-	-	-		3
Acetum vini, vti aqua	-	-	-		o

Quod ſi hi gradus caloris diuerſi, ſub quibus ſpiritus vini et vina ebullire coepere, inter ſe comparentur; adparet primum ſpiritum vini rectificatiſſimum ſub minimo caloris gradu bullire incepiſſe, ſcilicet notante thermometro immerſo 32 infra o. Porro perſpicitur ſolum ſpiritum vini rectificatiſſimum gradum conſtantem in progreſſu ebullitionis retinuiſſe. Ratio huius phaenomeni facile perſpicitur, quum ſpiritus vini rectificatiſſimus fluidum minime heterogeneum omnium, quae tentauimus experimentis, procul dubio ſit, adeoque in ebullitione parum aut nihil omnino mutetur.

Quam

Quum ſpiritus vini rectificatiſſimus minimum caloris gradum ad ebullitionem requirat, ſequi omnino videtur, fluida eo minori caloris gradu ad ebullitionem indigere, quo propius ad naturam ſpiritus vini rectificatiſſimi accedunt, adeoque eo maiorem, quo longius ab ea recedunt. Quo maiorem igitur ſpiritus puri copiam continet fluidum, eo minori ad ebullitionem gradu opus habet, contra eo maiori egebit calore, quo minor ſpiritus copia erit in fluido contenti.

Hinc ex gradibus caloris maioribus ſub initium bullitionis, et minoribus adcurate notatis, de minore et maiore ſpiritus in fluido dato contenti copia quoque indicari poſſe adparet. Sed non adeo facile eſt, punctum initii bullitionis adcurate notare, nos initium bullitionis tunc demum ſtatuimus, quum tota fluidi ſuperficies ebullire inciperet, haec ratio eſt, cur initium plenae ebullitionis adpellauerimus. Initium autem bullitionis primae ab initio plenae ebullitionis eſſe diſtinguendum, vel ipſa aqua monſtrare poteſt, quae ſemper aliquot gradibus a prima et partiali bullitione ad plenam differt, maior vero haec differentia in vinis mihi eſt obſeruata, ſcilicet 10 graduum et amplius. Quum autem ſtatim poſt initium ebullitionis calor creſcat, difficultas adcurate initium bullitionis obſeruandi ſatis patet. Pondus atmoſphaerae non ſolum in aquam, ſed etiam in reliqua fluida bullientia, influere, atque differentiam quandam producere, me non monente quoque facile perſpicitur. Nos fluida noſtra ſpirituoſa ebullitioni expoſuimus, notante barometro 28 pollices pedis regii pariſienſis, aut quam proxime.

Denique ex comparatione graduum caloris, quos fluida spirituosa in ebullitione adsumere solent, iudicari potest, vtrum punctum fixum v. g. per spiritum vini vulgarem in thermometris spiritu vini impletis determinari possit. Satis patet nullum spiritum vini calorem aquae bullientis adsumere posse, quamuis etiam vilissimus sit, et certe ille spiritus vini, qui gradum caloris aquae ebullientis adsumere in ebullitione potest, parum aut nihil omnino ab aqua differat oportet. Solus spiritus vini rectificatissimus huic scopo seruire potest, quoniam gradus caloris in ebullitione constans est.

Sed satis pro scopo praesenti de spiritibus vinosis et vinis, ad olea veniendum est, quae frigore et calore nobis quoque sunt explorata.

Olea quum successiue frigore spissiora fiant, donec in massam firmam et duram abeant; punctum congelationis eodem modo, ac in praecedentibus fluidis, determinari non potuit. Nam in antecedentibus fluidis congelationis punctum definiuimus, quando fluidum frigori expositum, vel glacie obduci incipiebat, vel particulae glaciales adparebant, vt in spiritibus vini fieri solet; in oleis methodus paullum mutanda erat. Immersimus scilicet thermometrum oleis, vti antecedentibus fluidis, et attendimus ad gradum frigoris thermometri immersi, quando fluiditatem omnem non solum amisit oleum, sed ita durum fieri coepit, vt cera, calori non exposita, esse solet. Gradus frigoris, sub quibus in diuersis oleis hoc factum est, fuere sequentes.

Oleum

Oleum oliuarum in massam firmam abiit sub gradu frigoris, quem thermometrum immersum notabat, 165.

Oleum nucum ex statu fluiditatis in statum firmitatis transiit, thermometro immerso monstrante gradum frigoris 171.

Oleum lini in glaciem abiit sub gradu 197.

Oleum cannabinum sub eodem gradu 197 corpus firmum ex fluido factum est.

Explorauimus praeterea alia adhuc olea, tam expressa, quam destillata, seu essentialia, quae alii tempori seruamus, pluribus circa ea experimentis institutis.

Ex comparatione diuersorum frigoris graduum, quibus olea recensita congelarunt, patet, oleum oliuarum minimum frigoris gradum requirere, vt ex fluido fiat solidum et firmum corpus, quum iam sub gradu 165 durum factum sit; contra oleum lini, quocum cannabinum conuenit, maximum frigoris gradum, quum demum sub gradu 197 in glaciem abierit.

Olea frigore firma corpora facta veram et proprie dictam glaciem esse, nemo, opinor, dubitabit, qui considerat, aquam fieri glaciem, dum ex statu fluiditatis in statum firmitatis solo frigore transit. Omnia igitur corpora firma, quae solo frigore generantur, glaciem veri nominis esse et dici proprie posse, dubitari non potest, vt cera dura, vitrum, quin ipsa metalla, quum aqua nil aliud sit, quam fusa glacies.

Oleum lini frigore non indurari, ad hoc vsque tempus, quod sciam, existimatum est. Quum in diversis regionibus diuersi frigoris gradus regnent; mirandum non eſt, fluida eſſe in hac vel illa regione incongelabilia, quae tamen in altera, vbi maiores frigoris gradus obſeruari ſolent, congelari ſolent. Reſpectiue igitur ſemper intelligendum eſſe, reſpectu ſcilicet loci et temporis, quando fluida quaedam incongelabilia pronunciata ſunt, et pronunciari ſolent, per ſe patet. Habent igitur regiones borealiores praerogatiuam inſignem in capiendis experimentis ad frigus pertinentibus, prae aliis minus borealibus.

Ex dictis porro intelligitur, quid de thermometris oleo lini repletis ſit ſentiendum. Nam quum iam ſub frigoris gradu 197 in maſſam duram abire ſoleat oleum lini; thermometrum oleo lini repletum ad inſigniores gradus frigoris obſeruandos eſſe ineptum, facile conſpicitur, neque contractio et dilatatio proportionalis in maioribus frigoris gradibus obtinere videtur, dum ſenſim ſenſimque ſpiſſius fit, quam vt gradus frigoris adcurate indicare poſſe videatur.

Olea frigori et congelationi magis minusque reſiſtere, non aliunde, niſi a diuerſa eorum puritate eſſe omnino videtur. Conſtat olea eſſe corpora mixta et heterogenea, continere particulas terrenas, ſalinas et portionem aquae maiorem minoremque. Quo igitur oleum erit purius, eo magis quoque congelationi reſiſtere poſſe cenſendum erit. Olea igitur deſtillata, quae et aetherea, et eſſentialia, adpellari ſolent, quum ab expreſſis non niſi puritate et ſubtilitate differant; frigori et congelationi magis reſiſtere debere, quam expreſſa, facile generatim iudicari poteſt. Et ſpiritus vini quid aliud ſunt, quam olea ſubtiliora et puriora?

Eadem

Eadem haec olea expreſſa ad ebullitionem perduximus, ad explorandum, ſub quo caloris gradu bullire inciperent, et vtrum conſtantem, an inconſtantem caloris gradum in continuata ebullitione thermometrum mercuriale immerſum monſtraret. Phaenomena nominatim in oleo nucum ſequentia obſeruauimus. Fumum iam emittere coepit, thermometro immerſo monſtrante gradum caloris 160, ſiue calorem aquae bullientis. 2) circa gradum 360 ſupra 0 ſpuma et quaedam partium agitatio circa parietes vaſis eſt conſpecta. 3) non ita multo poſt plena ebullitio coepit. 4) Aliquot minutis ſecundis poſt plenam ebullitionem, mercurius in thermometro immerſo bullire coepit, et continuo oleum flammam quoque concepit, hinc obſeruationes nullae amplius locum habere poterant.

Reliqua quoque olea, vel in initio plenae ebullitionis, vel paullo poſt, mercurium in thermometro bullientem effecerunt, adeoque obſeruationi finem impoſuerunt. Sub diuerſo quidem caloris gradu ea bullire inceperunt, quam diuerſitatem tamen ob fumos ſpiſſos emiſſos adcurate notare non potui.

Caeterum in ebullitione oleorum probe duplex bullitio eſt diſtinguenda. Prior ebullitio cum ſtrepitu fit, et procul dubio ab admixta aqua eſt, poſterior genuina placida, ſine ſtrepitu, ſecundum noſtras obſeruationes contigit. Patebit hoc euidentius ex ſequentibus experimentis. Primum butyrum purgatum bulliens effecimus. Prior bullitio cum ſtrepitu coepit iam, thermometro immerſo mercuriali 160 ſupra 0, calorem ſcilicet aquae bullientis monſtrante. Sed non diu durauit, ita vt nullum amplius ebullitionis veſtigium mox adpareret.

Dein lente et placide bullire coepit, quo facto mercurius in thermometro ſtatim bullire coepit: butyrum hoc poſt ebullitionem frigefactum in maſſam duriſſimam inſtar lapidis abiit coloris nigricantis.

Ceram praeterea ad ebullitionem coegimus, phaenomena mihi obſeruata huc redeunt.

1) Cera liquefieri coepit circa gradum 60 infra o. 2) Spuma cum ſtrepitu circa gradum 25 infra o eſt orta. 3) Ceſſauit haec ſpuma et ſtrepitus circa gradum 35 circiter ſupra o. mox fumus ſpiſſus ſequutus eſt, et 4) paullo poſt vere bullire coepit, quo facto 5) hydrargyrum in thermometro quoque bullire incepit. Flammam cera non concepit, mercurio bullire incipiente.

Ex hiſce phaenomenis recenſitis circa ebullitionem oleorum expreſſorum et corporum oleoſorum patet primum, gradum caloris mercurii bullientis iis generatim tribui poſſe, quia vel in initio plenae ebullitionis, vel paullo poſt, mercurium in thermometro bullientem effecerunt.

Deinde adparet in ebullitione gradum caloris conſtantem non manere, qui vero thermometro mercuriali in continuata ebullitione explorari nequit, quoniam ipſe mercurius ad bullitionem cogitur. Ratio, cur eiusmodi olea gradum caloris conſtantem non retineant, neque retinere poſſint, vel ex eo facile intelligitur, et praeuideri poteſt, quod ſint corpora admodum heterogenea, quae in bullitione conſiſtentiam ſuam et in-

dolem

dolem mutent oportet, vti experimenta quoque docent. In oleo raparum feruente pyrometro ſuo *Muſſchenbroeckius* obſeruauit, calorem illius aequalem fuiſſe 714 gradibus ſcalae *Fahrenheitiane.*

Quum hic gradus multo maior ſit, quam ille, qui mercurio bullienti tribui ſolet, ſcilicet 600. ſcalae *Fahrenheitianae*; operae pretium exiſtimaui, gradnm caloris hydrargyri bullientis de nouo, quam adcuratiſſime fieri poteſt, explorare, vna cum quibusdam aliis metallis, quatenus ſub certo caloris gradu fundi, fluereque incipiunt, atque rurſus firma fieri corpora, et in ſpeciem quandam glaciei abire.

In praeſenti thermometro mercuriali ſequentia corpora metallica explorauimus.

Primum plumbum liquefieri coepit circa gradum 320 ſupra o ſcalae noſtrae, qui conuenit cum gradu 596 ſcalae *Fahrenheitianae*; alias 550 gradus ***Fahr.*** initio liquefactionis et fuſionis tribui ſolent.

Stannum purum ex ſtatu firmitatis in ſtatum fluiditatis abire coepit, monſtrante thermometro immerſo 170 gradus ſupra o. qui numerus conuenit cum 416 *Fahr.* Tribui ſolet gradus caloris 420 *Fahr.* alias ſtanno fundi incipienti, adeoque differentia parua eſt, vix vllius momenti, quoniam initium fuſionis quam adcuratiſſime adnotari quoque nequit, in progreſſu autem calor continuo inſigniter creſcere incipit.

Bismuthum fundi coepit ſub gradu ſupra o. 235 = 494. *Fahr.* Attribui bismutho liquefieri incipienti alias 470 *Fahr.* ſolent.

Zincum quoque thermometo mercuriali explorare conatus fui, sed conatus fuit irritus.

Nam mercurius in thermometro prius bullire coepit, quam hoc corpus metallicum liquefieri inciperet. Plura circa metalla tentamina, quae firma in statu solito adparent in nostra tellure, simplicia et mixta in posterum communicabo.

Ex hisce tentaminibus igitur adparet diuersitas graduum caloris, sub quibus metallorum mihi in praesenti exploratorum status firmitatis cum statu fluiditatis, et rursus status fluiditatis cum statu firmitatis commutari incipit. Quum enim metalla sub eodem fere gradu caloris solida fieri, quo fundi solent, incipiant; iidem gradus initii fusionis et liquefactionis, erunt quoque gradus initii soliditatis, vel firmitatis. Nam vti aqua in glaciem abire solet sub gradu 150, sic rursus sub eodem fere gradu regelascere et fluidum fieri incipit. Aqua enim et glacies recens genita eundem thermometri gradum habere solent.

Metalla igitur firma pro congelatis reputari debent, et hinc pro glaciei specie, quae autem multo minorem frigoris gradum, quam glacies aquae, requirere solet. Scilicet secundum nostra obseruata quam proxime plumbum 320 gr. supra 0. scalae nostrae; stannum 170 supra 0, bismuthum supra 0. 235, qui gradus omnes alias insigniores caloris esse solent, frigoris tamen respectiue dici possunt, quatenus metalla dicta congelant.

Hydrargyrum perpetuo adhuc in statu fluiditatis adparuit, nunquam in statu firmitatis. Summi frigoris natu-

naturalis gradus in omnibus regionibus obſeruati e ſtatu fluiditatis in ſtatum firmitatis eum tranferre non potuerunt.

Habet quidem Academia obſeruationes in Sibiria factas, quae congelationem mercurii indicare videntur, quum tam in thermometris et barometris ſolidus viſus fuerit. Quoniam autem ſub gradibus frigoris multo inſignioribus, in aliis barometris et thermometris mercurius fluidus perſtiterit; non credibile eſt, mercurium fuiſſe tunc temporis congelatum, et forſitan nullus frigoris naturalis gradus illum figere et congelare poterit, forſan frigus artificiale magnum praeſtare hoc poterit. Mercurius igitur fluens aeque ac alia metalla in ſtatu fluiditatis, pro metallo, certo caloris gradu fuſo, habendus videtur, qui vero ſub multo minori caloris gradu, quam reliqua metalla, fundi ſolet, contra maximum frigoris gradum, vt fiat firmus, requirere, caeterum eandem naturam quam reliqua metalla, habere omnino videtur. *

Veniendum tandem eſt ad ebullientis mercurii phaenomena. Monenda hic quaedam prius ſunt de thermometris, quibus gradus caloris mercurii bullientis exploraui et explorari debet. Contingere nimirum ſolet, et ſaepius mihi contigit, vt mercurius in thermometro, creſcente calore, et inſigniores gradus 250 et 300 ſupra o. adquirente, diuidi ſoleat, et non continuus perſtet, quo ipſo obſeruatio vitioſa fiat neceſſe eſt. Vt hoc caueatur, mercurius, quantum fieri poteſt, ab

Zz 2 omni

* Confirmata haec vide in Diſſertatione mea: De congelatione mercurii a me detecta, praelecta in ſolemni Academiae conuentu Sept. 6, 1760.

omni aere eſt purgandus, et thermometrum ita implendum, vt nullum aeris veſtigium in bulbo thermometri adpareat.

Quae cepimus circa ebullitionem mercurii experimenta adnotata, omnia ita comparata fuere, vt mercurius in thermometro non diuiſus, ſed continuus permanſerit ad terminum ebullitionis, reliqua, tanquam vitioſa, reiecimus experimenta.

Vſi ſumus in his tentaminibus duplici methodo, ordinaria, qua calor bullientis alicuius fluidi immerſo thermometro explorari ſolet, et alia propria, qua thermometrum carbonibus candentibus impoſui, et ita attendi, donec primum ebullitionis ſignum adpareret. In hac methodo poſteriore cautione et attentione non mediocri opus eſt. Cautione, vt calor carbonum candentium iuſto maior non ſit, alias adſcenſus mercurii regularis non fit, et mercurius quoque ob hanc cauſſam interrumpi incipit. Talis igitur calor eſſe debet, vt adſcendat mercurius non nimis celeriter, adeoque, quantum fieri poteſt, lente.

Attentione magna opus eſt, vt primum ebullitionis ſignum notari poſſit, quod conſiſtit in primo ſubſultu mercurii, adeoque prima commotione irregulari. Hic primus ſubſultus circa eundem thermometri gradum adcurate ſemper factus non eſt, termini ſunt inter numeros 414 et 424 ſupra 0.

Quod ſi igitur medium ſumatur inter hos numeros; initium ebullitionis mercurii figi poſſe videtur circa gradum 419 = 715 *Fahr*. Plurima experimenta inſtituimus

ſtituimus in hunc finem hac methodo, et eundem ſemper euentum obſeruauimus.

In altera methodo, qua thermometrum mercuriale mercurio in vaſe aeneo ad ebullitionem perducto immerſimus, differentia quaedam mihi eſt obſeruata. Scilicet hydrargyrum iam bullire in vaſe coepit, quum thermometrum immerſum notaret gradum 395 et 400. Sed in continuata ebullitione in vaſe, paullo poſt mercurius in thermometro quoque ebullire coepit, ſub gradu 414, 420 et 424. Non igitur priores gradus 395 et 400 pro initio plenae ebullitionis mercurii haberi poſſunt, ſed poſteriores, quoniam tunc demum aequalis calor mercurii bullientis in vaſe, et in thermometro immerſo exſiſtere coepit. Nam quum thermometrum mercuriale vnum pollicem circiter ſupra bulbum tantum immerſum eſſet; facile intelligitur, calorem omnem mercurii in vaſe bullientis continuo cum mercurio communicari non potuiſſe. Satis igitur experimenta vtraque methodo inſtituta concordant. Caeterum in repetitione horum experimentorum omnia ad punctum conſentire non poſſe, facile concedet, qui conſiderat differentiam mercurii bonitatis, ponderis atmoſphaerae, forſitan quoque vitri thermometrorum, aliarumque circumſtantiarum, quando experimenta capiuntur. Nos mercurium purum adhibuimus, non quidem reuiuificatum, qui pro puriſſimo haberi ſolet, ſed ita tamen purgatum, vt impuritatis omnis nota abeſſet.

Experimenta ipſa inſtituimus, monſtrante barometro 28 pollices Pariſ. aut quam proxime. Nam pondus atmoſphaerae in calorem mercurii bullientis aeque influere, ac in calorem bullientis aquae, dubium esse nequit.

Vtrum mercurius in ebullitione continuata constantem retineat gradum, thermometro mercuriali decidi posse non videtur, vt ex experimentis nobis captis patet. Nam licet calor mercurii in thermometro sensim creverit, continuata in vase hydrargyri ebullitione, ita vt videri possit, eundem caloris gradum hydrargyrum in vase bullientem non retinuisse; tamen inde euidenter concludere non licet, calorem mercurii in vase bullientis etiam auctum fuisse. Nam fieri potuit, vt idem caloris gradus persisteret, qui tamen non continuo, sed successiue, cum mercurio in thermometro immerso communicari potuit.

Hoc igitur phaenomenon, vtrum calor in mercurio bulliente sit constans, an non, aliis instrumentis ac thermometris mercurialibus explorandum esse, facile conspicitur.

Caeterum ebullitio omnino effectus caloris particulas massae in vapores diuidentis, et subito dilatantis potius videtur, quam dilatationis aeris inclusi, aut alterius fluidi elastici in vniuerso exspansi; et vti mercurius ebullitionis est capax, ita reliqua metalla sub certis conditionibus illius quoque esse capacia, cum ratione dubitari nequit. Vid. Leçons de Physique expérimentale par Mr. *Nollet* Tom. IV. pag. 453.

CAVTE-

CAVTELAE CIRCA OBSERVATIONES METEOROLOGICAS ADHIBENDAE

Auctore

PETRO van MVSCHENBROEK.

Meteora obſeruaturi, ſolemus vti Barometro, Thermometro, Hyetometro, Euaporatorio, Notiometro, Anemometro, et ſi quaedam alia ſint inſtrumenta, quibus ſtatum atmoſphaerae praeſentem, praecedentem aut futurum aliquomodo cognoſcere aut explorare licet. Neceſſe igitur eſt, vt eiusmodi inſtrumentis vtamur maxime perfectis, vt obſeruationibus fidere queamus, atque ex iis probas colligere ſequelas. Memorata inſtrumenta ſunt admodum vulgaria, ſaepius deſcripta, ſed raro tam bona ac perfecta, quemadmodum deſiderantur, ideo obſeruationibus cum iis inſtitutis fidere non licet: operae pretium igitur erit, ea deſcribere, vt omnino perfecta a perito et ſolerti ſabrefiant.

Incipiam a Barometro, quo pondus vel preſſum atmoſphaerae aereae inueſtigamus, eiusque augmentum vel decrementum variis temporibus comperimus. Ab experientia edocti ſumus ſimplex Barometrum eſſe praeſtantiſſimum ad obſeruationes certas capiendas et memoriae tradendas. Conſtat id tantum ex tubo vitreo, recto, cylindrico, vltra 30 pollices Rhenolandicos longo, longitudo maior nequaquam nocet, praeſtat tubus

40 pollicum breuiori et tantum 30 poll. Altera huius tubi extremitas in rotundam desinat fornicem, quae hermetice (vt dici solet) clausa sit. Altera extremitas sit aperta, sed oblique instar cunei desinat, vt cum institerit mercurio, ex cauitate tubi facile mercurius effluere, et ex vase in cauum influere possit, nisi tubus a fundo vasis, de quo mox agam, aliquantum distiterit, tum enim tubi extremitas plana esse potest, patulaque est mercurio via. Diameter cauitatis tubi sit ad minimum $\frac{4}{10}$ pollicis Rhenol. maior capacitas non nocet. Crassior hic tubus vulgaribus est; qualiscunque fuerit, mensuranda accurate et memoriae tradenda est: nam in tubo amplo mercurius ad maiorem subit altitudinem, quam in angusto, discrimen interdum est 2 linearum pollicis. Quoniam huc vsque ratio amplitudinis cauae habita non fuit, nec ab obseruatoribus adnotata, nullis hactenus descriptis obseruationibus barometricis fidere licet. Crassities vitri vix discrimen afferre visum est: notandum etiam est genus vitri, tum in qua regione, et in qua officina vitraria tubus factus sit; vtinam eius vitri ingredientia notare simul possemus! sed artifices haec celant; idque causa est, cur nunquam Philosophus de vera altitudine mercurii in barometro sit certior, vitro vno maiorem vim trahentem et repellentem possidente altero.

Antequam mercurio impleatur tubus, mundanda et polienda est cauitas interna; nam haec in officina vitraria, dum recoquebatur lento refrigerio, contraxit fumum, et sordes a vitrario inflatas: praeterea superficies aliquantum inaequalis et aspera est; nisi omnis asperi-

aſperitas politura tollatur, nunquam accuratiſſime tubus mercurio impleri poteſt: tollitur aſperitas hoc pacto. Capiatur filum ferreum craſſitudinis ac eſt acus textilis, purum, nulla rubigine aut ſordibus infectum, longius tubo, et in capitulum craſſius deſinat vnum extremum; circa extremum hoc conuoluatur puriſſimum cotoneum, idque filo puro albo lineo in duobus locis firme circumligetur, adeo vt medium cotonei, ventris inſtar inflatum, aliquantum difficilius ingrediatur tubi cauitatem; elaſticitas cotonei efficit, vt adimpleat partes anguſtiores et ampliores tubi, et ſuperficies interna abradi polirique poſſit. Tum cotoneum humectetur alcohole vini, et circumſpargatur in rotundum calx ſtanni tenuiſſima, et prius a craſſioribus partibus mundata et lota in aqua; hac calce teratur interna tota tubi capacitas aliquot horis; niſi hoc taedium quis deuorauerit, nunquam opus habebit abſolute perfectum. Peritus in arte videre poteſt a priori vtrum tubus intrinſecus quidem probe laeuigari queat, ſi non, reiiciendus eſt; idem internoſcet, an tubus ſit ſatis laeuigatus et politus. Hoc cognito omnis calx ſtanni eſt ex tubo eluenda, quod tantum ſaepius repetitis fit nouis cotoneis, tandem probe ſicca calce ſtanni, aut alio poliente puluere iniecto, cauitas vlterius ſiccatur et politur; quod ſi aeſtate, coelo ſereno, in ſole nitente tubum calefeceris et polineris memorato modo, certior eris cauitatem eſſe omnino ſiccam. Praeſtat tubum in ſole calefacere, quam prope ignem prunarum, quia hic ſemper fumum eiaculatur, qui aerem inficit. Ideo barometra ſunt aeſtate, coelo ſereno et ſicciſſimo, con-

 ficien-

ficienda, nunquam hyeme, multo minus tempestate humida, aeris humore cauum tubi irrepente et superficiei extemplo obhaerescente.

Deinde eligatur mercurius Tyrolensis nouus, mundissimus, qui in phiala chemica longioris colli infusus, stet in vase ferreo cum arena et a subditis ignibus ebulliat, vt orbetur omni humore et aere, ideo continuanda est ebullitio, donec in phiala nullam bullam inter vitri et mercurii superficiem superesse videamus: quo viso committatur refrigescere.

Iam aliquis tubus vitreus amplior intrinsecus et extrinsecus probe mundetur ab omnibus sordibus, tradatur Encausto, qui ex eo in flamma lampadis liquefacto formet infundibulum cum rostro capillaris angustiae, parum longiori tubo barometrico: formetur tubus capillaris vt intrinsecus nihil fumi conceperit, extrinsecus tamen denuo cotoneo et stanni calce est abstergendus, ne quid oleosi fumi aliarumue sordium adhaerescat, inferius tubi orificium sit adeo angustum, vt exigua guttula mercurii lente effluere possit.

In inuersum tubum barometricum immittatur rostrum capillare vsque ad fornicem: ponatur hic apparatus in sole, vt incalescat ad gradum 70 vel 80, mercurius in phiala paris caloris sit; qui tum effundatur in infundibulum, lente ex ora inferiori effluxurus. Sollicite curandum, vt infundibulum semper multum mercurii capiat, nec vnquam ante tubi plenitudinem euacuetur: si enim id contigerit, postea que impleretur

denuo

denuo infundibulum mercurio, aer, qui in tubum capillarem vacuum ingreſſus delitescit, deorſum preſſus, pelleretur per mercurium, qui aliquousque tubum barometricum iam implet, et hinc inde in eo haereſcens corrumperet omnem exantlatum laborem, adeo vt euacuandus tubus, et omnis impletio ab ouo inchoanda foret. Ex Tubo iam impleto lente extrahatur infundibulum cum roſtro capillari. Prudentia opus eſt, ne frangatur. Tum vero in tubo oritur inanitas, quae affuſo mercurio facile impletur, praecipue ſi breuioris roſtri tubo capillari vtamur. Sed circumſpiciendum eſt, an ibi loci bulla aerea adhaereſcat; haec immiſſo filo ferreo ſurſum tolli poteſt.

Hoc pacto habebitur tubus barometricus perfecte impletus mercurio, et vehementius lucem extrinſecus allabentem reuerberabit, quam vllum ſpeculum vitreum; nec vllibi locorum bullae aereae comparebunt: ne quidem in inuerſo poſtea tubo. Capiatur nunc vas vitreum cylindricum, diametri 6 poll. Rhenol. et $1\frac{1}{2}$ poll. altum, cui infundatur mercurius: eius orae conveniat operculum ligneum, in quodam loco exſciſſum, vt tubum capiat: ſeruit hoc obtegendo mercurio adverſus ſordes in aere natantes: Sublato operculo claudatur extremitas aperta tubi barometrici digito, inuertatur tubus, et extremitas vna cum digito deprimatur ſub ſuperficie mercurii in vaſe, remoto digito effluet mercurius ex parte ſuperiore tubi, donec, quod reſtet, eſt in aequilibrio cum pondere vel preſſu atmoſphaerae.

Vas cylindricum, cui barometrum inſiſtit, tam amplum capiendum eſt, vt mercurius, qui in tubo

 varie-

varietatem trium pollicum in altitudine ſentit in Belgio, effluens, altitudinem mercurii in vaſe ſenſibiliter non augeat, accuratam obſeruationem turbaturus: poſita igitur diametro cauitatis in tubo $\frac{4}{10}$ poll. et vaſis diametro 6 poll. erit varietas in altitudine mercurii in vaſe tantum $\frac{2}{75}$ lineae, quae propter paruitatem internoſci nequit, adeoque absque vllo ſenſibili errore omittitur, cum in ſummo adſcenſu et deſcenſu mercurii in tubo duntaxat tanta ſit, in omni intermedia altitudine minor, nec vllo modo diſtinguenda.

Totus hic apparatus imponendus aſſeri, ligni probe ſicci, cuius parti inferiori adnexa eſt capſa, quae vas cylindricum concludat; aſſeris pars media excauetur, vt in ea tubus barometricus capiatur vsque ad dimidium craſſitiei; lignum ebenum eſt laudatiſſimum, cum nec calorem, nec frigus, ſentiat, et vix humorem aereum ſorbeat: ſi alio vtamur ligno, neceſſe eſt, vt ab omni parti adlinatur oleum lini aliquoties, a quo pori obturantur. Scala iam affigatur ad latus tubi, et quidem ad vtrumque, in Belgio menſura Rhenolandica vtimur, incipiatque a pollicibus 27 a ſuperficie mercurii in vaſe, et deſinat in 30 pollices. Scalae latitudo loco obſeruatoris reſpondeat; alia enim conuenit locis ſub aequatore, vti regno Peruano; alia locis polaribus.

Oportet, vt quotide aliquoties altitudinem mercurii in barometro obſeruemus; ſufficit id mane, ipſo meridie, et noctu feciſſe, quibusdam ſemel electis pro arbitrio, et deinde ſtatis horis, atque ordine obſeruationes hae ſunt notandae: cum autem atrox coorta eſt tempeſtas, qualibet hora, vel ſemihorio, inſpiciendum eſt barometrum,

trum, vt minima cognoſcatur mercurii altitudo durante tempeſtate; quae ſi diligenter memoriae ſint tradita, vt et in aliis adiacentibus regionibus, vel et diſtantibus, latitudo tempeſtatis, limites, progreſſus, directio, et quo in loco maxime ſaeuierit, cognoſcetur.

Notentur quoque celeres adſcenſus vel deſcenſus mercurii in tubo, aut diuturna requies.

Menſe elapſo altitudines mercurii omnes obſeruatae in ſummam addantur, quae diuidatur per numemerum dierum multiplicatum prius in 3, quia tres obſeruationes quotidie ſunt factae, quotiens mediam altitudinem mercurii indicabit; haec ſcribatur inter maximam et minimam altitudinem; quo pacto fere omnia intelliguntur, quae obſeruationes barometricas ſpectant in eo loco, vel vrbe et regione, in quibus factae ſunt; et notata altitudo ſoli ſupra maris ſuperficiem.

Quod ſi verum pondus vel preſſum atmoſphaerae obſeruator in ſua ſede ex barometri altitudine eruere cupiat, ratio caloris etiam eſt habenda. Eſt enim tubus barometricus etiam ſpecies thermometri, mercurio a calore rareſcente, a frigore condenſato, ideo aeſtate mercurius eiusdem ponderis eſt altior in tubo, hyeme humilior. Si hyeme, quando aqua in glaciem verti incipit, mercurius ſteterit in tubo ad altitudinem 29 pollicum Rhen. aeſtate regnante aeſtu 90 grad. paris ponderis ſtabit ad altitudinem 29 poll. $4\frac{4}{10}$ linear. *Amontonſius* in Gallia a maximo frigore ad ſummum aeſtum in coelo regnantem Pariſiis $\frac{1}{115}$ volumine increſcere tradidit in *l'Hiſtoire de l'Acad. Roy. des Sciences An.* 1704, *pag.* 224 *et* 364. Propter aſperitatem gelu Petropoli diſcrimen altitudinis maius erit: ſcala accurata eum in finem ſemel eſt condenda.

Quia pes Rhenolandicus cubicus mercurii eſt ponderis Tricaſſini ℔ 859. ℥ 8. ex altitudine mercurii in barometro ſciri poteſt, quo pondere atmoſphaera pedis quadrati ſuperficiem corporum premat, quae in ſolo iacent: lubet hoc in ſequenti Tabula exhibere: pollex diuiſus eſt in 12. lineas.

Altitudo mercurii.		Pondus.		Altitudo mercurii.		Pondus.	
Poll.	Lin.	℔.	Vnc.	Poll.	Lin.	℔	Vnc.
27	0	1933	14.	28	7	2047	$4\frac{1}{2}$
	1	1939	$13\frac{1}{2}$.		8	2053	4.
	2	1945	13.		9	2059	$3\frac{1}{2}$
	3	1951	$12\frac{1}{2}$		10	2065	3.
	4	1957	12.		11	2071	$2\frac{1}{2}$
	5	1963	$11\frac{1}{2}$	29	0	2077	2
	6	1969	11.		1	2083	$1\frac{1}{2}$
	7	1975	$10\frac{1}{2}$.		2	2089	1.
	8	1981	10.		3	2095	$\frac{1}{2}$.
	9	1987	$9\frac{1}{2}$.		4	2101	0
	10	1993	9.		5	2106	$15\frac{1}{2}$
	11	1999	$8\frac{1}{2}$.		6	2112	15
28	0	2005	8.		7	2118	$14\frac{1}{2}$
	1	2011	$7\frac{1}{2}$		8	2124	14
	2	2017	7		9	2130	$13\frac{1}{2}$
	3	2023	$6\frac{1}{2}$.		10	2136	13
	4	2029	6		11	2142	$12\frac{1}{2}$
	5	2035	$5\frac{1}{2}$	30	0	2148	$0\frac{1}{2}$.
	6	2041	5.				

Altius in Belgio barometrum non eſt, quam 30 poll. neque infra 27 pol. Rhenol. obſeruatum huc vſque.

Ali-

Aliqui Philoſophi omni induſtria altitudinem barometri obſeruaturi, ex ligno leui, parum lato, ſcalam fabrefecerunt, cuius inferiori extremo affixerunt orbem planum ex ſubere, leuem, diametri 2 vel 3 pollicum, Lignea haec ſcala vix deſcendit in mercurium, ob leuitatem ei innatans; attamen adſcendente mercurio in vaſe, adſcendit ſcala, deſcenditque deſcendente mercurio. Hoc pacto vera altitudo mercurii in tubo videri poteſt, eſtque haec ſatis laudanda methodus, quando inferius vas cum mercurio eſt anguſtius. Scala natans appellata fuit.

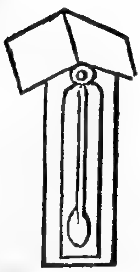
Alii diuiſionem Nonnii applicuerunt, diuidentes pollicem in 10 partes aequales, et applicantes ſupra hanc laminam mobilem ope cochleae, diuiſam in 11 partes aequales, quo pacto conuerſione cochleae attollentes vel deprimentes laminam, et attendentes quaenam lineae conuenientes vnam efficiant, pollicis centeſimas partes diſtinguunt.

Oportet, vt obſeruator attendat ad mercurium in tubo, qui tangit ſuperficiem vitri, ſiue vbi ora ſuprema attactus eſt: haec enim ſola pro vltimo limite altitudinis haberi poteſt, reliqua ſuperficies mercurii in tubo rite diſtingui nequit. Hoc incertam facit omnem obſeruationem: nam quando mercurius in tubo incipit deſcendere, ſuperficies ſuperior rotunditatem amittit, planior fit, immoto adhuc annulo, qui vitrum attingit; adeoque axis columnae mercurii primum deſcendit, mox partes, quae ambiunt axin, tum quae ſucceſſiue maiori interuallo ab axe abſunt, iam, ſuperficie ſuprema fere plana, deſcendit mercurius, qui ſuperficiem vitri attingebat. Quando mercurius in tubum

tubum altius adſcendet, axis columnae primum adſcendit, mox partes axi vicinae, eumque in rotundum ambientes, quamuis hae minus in altum ſurgant; ideo ſuprema columnae in tubo ſuperficies fit admodum convexa, mercurio, qui vitrum attingit, adhuc immoto, nec hic adſcendit, niſi conuexitas columnae magna euaſerit, et ad latera defluxerit; leuis concuſſio id accelerat. Prolixior fui in Barometro deſcribendo, quia hoc inſtrumentum transportari ex regione in regionem nequit, ſed oportet, vt concinnetur in loco obſeruatoris.

Alterum inſtrumentum calori et frigori coeli obſeruandis ſeruiens eſt Thermometrum: laudatiſſimum eſt, quod mercurium continet, et fabrefactum eſt a ſolertisſimis Fabris, G. *Fahrenheitio*, aut *H. Prinſio*, Amſtelodamenſibus. Quomodo huiusmodi thermometra conſtruenda ſint, olim prolixe deſcripſi. Ad ea maiori peritia, quam ad barometra, opus eſt, tum vt quis in arte encauſtica verſatus ſit. Poſſunt autem facile et tuto tranſportari ex Amſtelodamo ad quascunque regiones: modo iaceant in capſula ferrea, ſint inuoluta adipi refuſae, prius tamen cincta leuiuscule foeno, vt medium in liquefacta adipe teneant locum. Capſulam clauſam ambierit largum ſtramen, atque apparatus thecae ligneae includatur, quae hoc pacto omnes iniurias carrorum tolerat; et poſtea ex capſula ferrea, aquae calenti immiſſa, a qua adeps refunditur, integrum tollitur thermometrum. Oportet, vt ſcala *Fahrenheitii* ad latus thermometri vtrumque ſit adſcripta; ſurſum ad gradus 120 ſupra 0, infra 0 ad gradus 60; ſed haec deorſum longior ſit neceſſe foret, ſi in Sibiria frigus aſperrimum

rimum explorandum eſſet, quale expertus eſt 126 grad. ſub o Nobil. *Gmelinus.* Quoniam Thermometrum ſcalae inſidens iniuriis aeris eſt exponendum, oportet, vt ſcala ſit caelata in lamella aenea, quae ab omni parte bene ſit inaurata. Caeteroquin orichalcum ab aereo ſale intra 20 annorum ſpatium eſt eroſum, imo in nonnullis regionibus ocyus.



Suſpendatur ſub dio, obuerſum plagae ſeptentrionali, ne vnquam directe a ſole, aut a radiis repercuſſis illuſtretur, attamen ſit in loco patente et vmbroſo; vmbroſi enim aeris calor tantum eſt notandus, quia eſt conſtantior illo, qui a ſole communicaretur cum Thermometro, multis varietatibus propter aduolantes recedentesque et abactas nubes ſubiectus. Tum ne hyeme a grandine frangatur, vel a niue refrigeretur, pendeat ex aſſerculo viridi, et ſub tecto ampliori, vti in ſchemate videri poteſt. Quotidie ter iisdem horis notetur calor, quibus Barometri altitudo obſeruata fuit.

Finito menſe graduum, calorem indicantium, numeri in ſummam addantur, quae diuidatur per numerum obſeruationum, ita calor medius eius menſis innoteſcit, ex quo, vtrum hoc menſe coelum calidum, an frigidum, an temperatum fuerit, colligitur: inter maximum et minimum calorem menſis ſcribatur medius calor.

Si menſis hyemalis fuerit et gelet, glaciei craſſities qualibet nocte in aqua ſtagnante vel lacu formatae notetur, tum quanta craſſities currente menſe contige-

 rit;

rit; quando inceperit regelari, quo tempore penitus refusa sit glacies; quomodo glacies in flumine fuerit comparata, quo tempore vtramque ripam iunxerit, et reliquerit. Attendatur ad gradum frigoris, quando solum pruina correptum fuerit, quando linteum madescens sub dio suspensum, congelari coeperit: an semper gelet stante mercurio in gradu 32, an semper regelet mercurio maiorem calorem quam 32 gr. indicante? An venti gelu accelerent, minuant, vel retardent, et quinam? An concussio aquae in vase congelationem acceleret? An aqua congelet aeque cito in vasis aequalibus, in eodem loco positis, ex quacunque materia vasa fuerint formata? Sed et ad Lunae phases attendere oportet, et explorare, an vbiuis terrarum idem, quod in Belgio constanter, euenit. Quotiescunque fit nouilunium, prima quadratura, plenilunium, vel vltima quadratura gelante tempore, asperitas gelu aliquantum remittit, et quidem vel ipso die phasium, vel pridie, aut postridie, adeo vt nunquam perstet idem gelu vigor duarum septimanarum decursu, quamvis post vnum alterumue diem recapessat vires, asperiusque quam antea increscat: contingit etiam vt multo modestius pergat, imo fiat regelatio quae totam refundat glaciem. Gelare in Belgio incipit, regnante vento orientali, non cum australi vel occidentali, quamuis in diu durante gelu et hyeme, gelu quidem cum hisce ventis perstet.

Quibus horis memoriae traditur Barometri et Thermometri altitudo, iisdem obseruentur venti: qui si ex vexillo in turri non recte spectari possint, vti

saepe

ſaepe ſit, praecipue nocte illuni, aut omnino ſerena et ſine vllis nubibus, tum ſequenti modo notentur: Modo obſeruator in loco patenti, et bene perflabili degat, nec montes, turres, aedes vicinae altiores decurſum ventorum turbauerint, tum excelſiſſima pars tecti eligatur, ex qua emineat vexillum a ventis regendum; affixum ſit firme longae virgae ferreae, qualis ſeruit cortinis, virga tranſeat foramen in tecto, in quo capiatur laxe ab annulo aeneo, qui aperiri claudique ope articuli poſſit, vt in hoc annulo libere ſit verſatilis inſtar axiculi rotae in anſa; inferius virgae extremum fulciatur palo, inſiſtenti pauimento, cui inſidet concauum aeneum excipulum, vnctum oleo, vt lubrica fiat virgae perpendicularis ad ſolum ſitus, verſatio in rotundum; ad arbitrariam diſtantiam ab hoc extremo, ſurſum, ſit affixus tenuis ſtilus, qui index erit, et parallele ad ſolum verſetur circumacta virga; tum ex ligno formetur circulus amplus, per cuius centrum tranſit virga verſatilis, affigaturque tecto vel contabulationi, parum ſupra indicem, ſitque ad ſolum parallelus, vt index circulum percurrendo ventum regnantem deſignet, qui in oculos ſpectatoris, ſurſum tollentis vultum, incurrat. Planities circuli diuidatur in octo partes aequales, quibus nomina octo ventorum inſcribantur; licet eum partiri in plures partes, ſi maiori accuratione ventos notandos iudicauerimus; oportet circulum ita affigere contignationi, vt Septentrio et Auſter apprime congruat cum linea meridiana terreſtri, ab Aſtronomo in eo loco deſcripta: non autem ex di-

directione acus magneticae, cui fidi nunquam poteſt, quia eſt omni momento temporis irrequieta.

Hoc modo noctu et interdiu ventorum plaga obſeruari poteſt: ſed praeterea notandum eſt, an ventus fuerit nullus, lenis, violentior, an ſaeuiat procella? Interdiu hoc vtcunque detegitur ex motu ramorum in arboribus, aut ex velociori motu alarum, quae in molis a vento agitantur, et vel penitus obteguntur velis a molitore, vel interdum duo vela parum obvoluuntur regnante violentiori vento: vel quatuor vela aliquantum conuoluuntur: vel duae alae non obducuntur velo, aliis duabus obtectis: vel nulla vela ſunt expanſa in alis: vento magis ſaeuiente molitor alas firmat et eas ad aduerſam venti plagam circumuertit, ne a vento laedantur; interdiu ſic ſatis ventorum impetus patet diuidendus in partes 8 notandus 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Si molae, quae a ventis agitantur, ibi loci non ſint, tum poteſt dolium aliquot lapidibus oneratum ex fune 20 pedes longo ſuſpendi ex palo cum longe eminenti brachio, qui ſteterit in loco patenti. Ventus in dolium incurrens, id in oſcillationes agitat, eo maiores, quo vi maiori afflauerit, ex minoribus maioribusue oſcillationibus obſeruator breui ventorum impetus diſtinguere diſcit. Caeteroquin in vſum vocari poteſt Anemometrum quale *Nob. Chr. Wolfius* in Elem. Math deſcripſit, aut ſimile aliquod *Leutmannus* in Tr. de Meteorog vel in l'Hiſt. de l'Acad. Roy. des Scienc.

Neceſſe

Necesse est, vt venti velocitas obseruetur, quantum spatii dato tempore percurrat: id huc vsque a nullo Philosopho praestitum est ea accuratione, qua opus est, quamuis multorum problematum solutiones inde pendeant. Ab experientia enim compertum est, omnes modos magnis defectibus esse subiectos, nullisque fidi posse.

Praeterea ope instrumenti explorandum est, an quocunque anno eadem quantitas venti supra eundem flet locum, an discrepet, tum quantum, et an periodus sit copiae ventorum aliquo annorum decursu? Non exiguam in hoc themate nauaui operam, machinam quandam et obseruationes breui in lucem editurus. Interim ex hisce intelligitur, quaenam ad obseruandi meteora adhuc desiderentur; nullus dubito, quin alii solertes Philosophi animum intensuri sint ad omnes defectus supplendos.

Magnae vtilitatis est Hyetometrum, quo copia pluuiae quotidie labentis mensuratur; hoc instrumento itaque detegitur, quantum pluuiae quolibet mense, quolibet anno in ea regione cadere soleat. Ita dies humidissimus anni, eiusque mensis humidissimus notatur, et multos annos secum comparando annus humidissimus, siccissimus, mediique humoris scitur; quod nouisse magni refert, quoniam annorum et mensium fertilitas a pluuia largiori, parciorive, nonnullis mensibus labente, pendet, tum et aquarum in fluminibus intumescentia, et exundationis periculum, aut aggerum fractura praevidetur, cui in tempore succurri potest.

Hyetometrum, Belgicis obſeruationibus idoneum, ſequenti eſt forma: Ex aere fuluo fiat vas quadratum, cuius quodlibet latus ſit vnius pedis Rhenolandici; ſit fundus decliuis tanquam infundibuli, latera quadrata ſint octo pollices alta, vt niuem largius deciduam capiat vas: fundo decliui afferruminatus deorſum ſit tubus aeneus, 8. poll. longus, conicae figurae, vt aliquousque phialae gulam ingrediatur, eamque accurate oppleat, ne illapſa in phialam pluuia euolet ſub vaporis forma.

Capiatur deinde phiala vitrea quadrata, cuius latus planum adamante diuidatur in aliquot partes, quae hoc pacto eruantur: Cognitum eſt pondus pluuiae in pede cubico Rhenolandico ℔ 63. Vnc. 3. drach 7. gran. 9. ponderis Tricaſſini, quo tempore coelum 50 gradibus calet. Hoc pondus diuiſum per 199, dabit quotum, indicantem pondus pluuiae in pede quadrato et altitudine vnius lineae, id proxime eſt 3373 granorum. Vaſculum mundum, in accurata ſtans bilance, capiat hanc quantitatem aquae, quae in phialam infundatur, noteturque in latere altitudo aquae: vel ipſa phiala ſtet in lance, ad ſacoma in aequilibrum redacta, infundaturque aqua, donec 3373 granis euaſerit ponderoſior. Infuſio et adnotatio continuetur donec phiala omnino ſit plena: effuſa aqua adamante non ſcindente, ſed radente, ducatur ad quamlibet diuiſionem in vtroque latere factam, linea recta, et numeri albo pigmento lateri inſcribantur: ampliores huiusmodi phialae 30 diuiſiones capiunt, quae omnes deſignant altitudinem lineae pollicis. Hoc pacto manifeſto videri

poteſt

poteſt quantitas pluuiae, quae pedis quadrati lineae altitudinem facit: imo peritus facile diſcernet partes lineae, qualis accuratio ſufficit. Si quolibet menſe effundatur pluuia ex phiala, nouo menſe fit noua numeratio; ſi currente menſe plus pluuiae ceciderit, in tempore effundatur pluuia, et in annalibus ſigno notetur, effuſam eſſe pluuiam, denuo delapſa addatur numero praecedenti, et humoris decidui copia hoc menſe cognoſcetur.

Hyetometri pars ſuperior aenea emineat ſtylobata, cui inſiſtit: ſtylobata ſit thecae inſtar caua, lignea, $2\frac{1}{4}$ pedes alta, parte ſuperiori in medio perforata, vt tubus vaſis aenei libere tranſeat, et maxima pars fundi nuda ſit: in cauitate ſtylobatae ponatur phiala, iam diuiſa, quae inſiſtat aſſeri, ſeu potius ſit pauimentum pro altero mobili aſſeri, in priore iacenti, et cui cum inſiſtit phiala, huius gula roſtrum tubi aenei capiat; hoc mobile aſſerculum ſubtus remoueri poteſt, tumque tantundem deſcendit phiala, quantum gulam ingrediebatur tubi roſtrum; deinde phiala depleatur, mox iterum in ventrem ſtylobatae reponenda et aſſerculo fulcienda. Hyeme aqua in phiala congelatur; obſeruato gelu eximatur phiala, et vacua ſeruetur in alio loco aedium, ita tamen, vt quotidie in ea fieri poſſit menſura niuis vel grandinis delapſae et refuſae. Subſtituatur eius loco vaſculum aeneum in ventre ſtylobatae ſub roſtro tubi. Si itaque ningat, vel grandinet, raro tanta niuis labitur copia, quae ſuperat altitudinem 8 poll. qualem pars aenea capit. In ventre ſtylobatae ponatur prope fundum vaſis teſta cum prunis, vt nix refunfundatur, refusa excidit ex rostro tubi in vasculum aeneum, liquida funditur et mensuratur in phiala vitrea: si ningere desierit, et euaporationem aquae arcere voluerimus, aeneum operculum imponatur Hyetometro, et prunas iniiciamus operculo, quo modo et a prunis superioribus et infra fundum positis celeris fit niuis aut grandinis refusio; et simul obseruari potest raritas niuis deciduae, quae in magna altitudine parum aquae suppeditat.

Hyetometrum huiusmodi in medio areae patentis, aut ampli horti, vel in excelso loco, sed ad quem facilis est accessus, ponendum est, optima in obseruatorii astronomico sedes est: non enim pluuia semper recta labitur, sed a vento variis agitur directionibus: sistitur a turribus, templis, excelsis aedibus, altis arboribus; ideo si bina accuratissime fabrefacta sint Hyetometra, quae in variis locis eiusdem vrbis ponantur, pluuiae quantitates non semper concordes comperientur.

Si niualis aquae aut pluuiae variis temporibus deciduae grauitatem specificam scire cupiamus, attendendum est ad calorem aquae ope inmissi Thermometri mercurialis, deinde fiat pensio, inmittendo bulbum vitreum solidum, pendulum ex filo equino, et ex accurata bilance hydrostatica, et obseruando quantum de pondere in aqua amittat: Haec enim methodus est omnium accuratissima, nec, quantum scio, defectibus vel vitiis inquinata, estque prolixe descripta a Cl. *s'Gravesandio* in Elem. Physicae.

Exami-

Examini chemico pluuia, diuerſis menſibus decidua, ſubiiciatur, vt partes componentes, ſalia, olea, terrae etc. innoteſcant, quae omnia ſunt adnotanda: pluuiae enim impuritates multis diſcrepant modis; nec niſi chemica analyſi cognoſcuntur.

Diebus humidis ter quotidie pluuiam notaſſe ſufficit, exinde enim quantum labente menſe ceciderit, conſtat. Neceſſe etiam, vt figurae floccorum niualium et grandinis microſcopio ſpectentur, et delineatae accurate adnotentur.

Notare etiam oportet, quantum aquae quolibet die, menſe, et anno, in vaporem verſae in auras euolet. Hoc inueſtigatur Euaporatorio, ſiue Exatmoſcopio, quod eſt vas ex aere fuluo, cauum, forma parallelepipedi, ſesquipedem altum, cui quodlibet latus orae apertae ſuperius eſt 6 pollicum; ergo 36 pollicum quadratorum eſt apertura. Deinde in regula aenea mobilique inſculpantur pollices 18, vt fundo vaſis inſiſtens apponi interiori lateri poſſit, et exemta ex vaſe appareat altitudo aquae in vaſe. Vaſi infundatur aqua ad altitudinem pedis, ſuperius mane relinquitur, vt capiat pluuiam, nec haec exeat: ponatur prope Hyetometrum in patenti area, vel loco medio horti, aut, quod melius eſt, in obſeruatorio aſtronomico, vt a ſole in rotundum illuſtretur, incaleſcatque in eo aqua, et a vento perfletur. Ex comparata altitudine pluuiae in Hyetometro, et altitudine aquae in Euaporatorio, ſupputatur facile, quantum ſub forma vaporis in ſublime exiuerit. Praeterea fabrefiat craticula ex filis tenuibus aeneis, magnis quae diſtant interuallis; haec orae vaſis imponatur, ne auiculae adulantes aquam potant, quod caeteroquin contingere ſolet: haec fila nec euaporatione obſunt, nec illabenti pluuiae. In diario itaque notari poteſt, quantum aquae nuctemeri ſpatio in vaporem fuerit conuerſum, quantum ventus et ſolis calor operati fuerint in aquam, ita ventorum ſiccorum operationes intelliguntur; praecipue menſibus aeſtiuis. Diſcrimen obſeruabitur, quando vas minoris maiorisue altitudinis fuerit: ex vaſe enim altiori plus vaporis exſpiratur; ſi vas in loco vmbroſo ſteterit, nec a vento lambatur, multo minus vaporis expellitur. Ideo probe notentur altitudo vaſis, locusque in quo ſteterit. Attamen hyeme in regionibus frigidis hoc vas ſub dio relinquendum non eſt, quia ab aqua in glaciem conſtricta et ſe expandente rumperetur. Tum glaciei euaporatio eſt menſuranda, vt poſtea quantum vaporis toto anno in altum adſcenderit, ſupputetur. Capiatur ex glacie parallelepipedum, pedem altum, cuius quodlibet latus eſt 6 pollicum, quod circiter eſt ℔ 16. Si tanta glaciei moles comparari nequeat, prioris loco ſubſtituatur maſſa quadrata, cuius quodlibet latus 4 pollicum, craſſities ſemipollicis, vel integri pollicis, pro arbitrio et regionis coelique conſtitutione, tantum diligenter notetur, quantae craſſitiei maſſa fuerit; iniiciatur lanci ſtaterae Romanae, cuius ſcapus breuior ex feneſtra emineat: altera longior, in quo aequipondium vagatur, ſit in conclaui, pendeatque ſtatera ex trabe. Omnibus in aequilibrium reductis, notetur pondus, quod quotidie adſcribatur: ſed ſi ningere aut grandinare coeperit, ſta-

tera

tera eſt ſub tecto ponenda; nam flocculi niuales et grandines a ventis appulſae in lancem glaciemque inciderent, nec remedium arcendi hucusque comperi, niſi lanx cum glacie amplo laxoque ſacculo, ex ſerico admodum raro, et ſub forma tecti ſuperius expanſo, tegeretur, ex quo nix et grando facile excuterentur.

Nunc ordo exigit, vt de Notiometro agerem, cuius beneficio conſtaret, an aer ſiccus humidusue ſit, quantum humoris ſub dato volumine caperet, quando dies humidiſſimi, quando ſicciſſimi in anni ſpatio euenerunt: ſed ingenue confiteor, me nec vllum Notiometrum, quod recte huic ſcopo ſatisfaciat, in vllo auctore inueniſſe, nec me aliis hucusque machinis voti compotem factum eſſe. Quisque ſuos deperit foetus, encomiisque extollit, vtinam rigidiori facto examine vitia et defectus ſimul notaſſet. Quaedam ſunt Notiometra, quae noua primis menſibus ab humore aereo bene afficiuntur, ſequentibus menſibus minus, peritque ſemper temporis ſucceſſu mobilitas, nec durante anno valent amplius.

Indicant autem modo maiorem minoremue aeris humorem, minime quantum humoris aeri ſub dato volumine inſit. Praeterea Notiometrum vel ſub dio ponendum eſt, vel in conclaui. Hoc plus minusue perflabile erit, aeremque ſicciorem capiet clauſum, quam apertum; ſub dio etiam in loco perflabili ponendum erit, ſed tum a radiis ſolis non parum turbatur. Hae et aliae difficultates tantae ſunt, vt quorſum me vertam neſcius, potius de Notiometris ſileam, quam longo ſermone taedium creem. Scribo haec omnia, quae ab experientia poſt inanes impenſas didici.

Interim alia notanda ſunt, quae ad hiſtoriam meteororum ſpectant.

Obſeruetur quibus diebus, horis matutinis, veſpertinis, nocturnis, labatur ros, et quanta copia collecta ſit in corporibus, quibus vſi, in eo capiendo, fuimus; tum in quaenam corpora labatur? An in omnia ex triplici regno, an in quaedam tantum, tum in quae corpora? An ros tantum ex ſolo et aqua in altum adſcendat? An vero et adſcendat, et relabatur? Haec enim omnia differre comperi in variis regionibus, adeo vt ros, veluti omnia alia meteora ſunt ſuis regionibus propria, diſcrepet in quolibet loco.

Obſeruetur an quoque ros melleus cadat, et quibus temporibus? Solet in Belgio cadere in ſolum et aquam, pinguitudine afficere vtrumque, cum ſit tantum oleum, ex foliis arborum ab aeſtu expulſum, aliquantum volatile, ſed igne orbatum ocyus relabitur in terram. Tantum magno regnante aeſtu comperitur, plerumque cadit ante meridiem, et notabili copia: hinc, ſi diuturnus fuerit aeſtus, folia celeriter orbantur oleo, flaueſcunt, et aduentante autumno decidunt, quae aliis annis vltra menſem adhuc perſtitiſſent viridia et in arboribus.

Notandi quoque ſunt dies nebuloſi, quibus horis inceperit aut aduentauerit nebula, quonam tempore claruerit coelum, quot anni diebus regnauerint nebulae, an an rarae, an denſae fuerint, vt lucem penitus ademerint, quod bis ipſo meridie euenisſe vidi; an foetent, an noxiae, vel innocuae fuerint; qualem humorem praebuerint collectae in ſpeculis vitreis, vel patinis porcellaneis, tum quales excitauerint morbos; nam anno 1732 nebulae ex Polonia ortae, aduentantes in Belgium, atroces excitarunt et periculoſas Peripneumonias.

Spectentur ſaepe nubes in coelo ſublimi; notetur, quot ordines diuerſarum altitudinum compareant, quaenam inſiſtant, quaenam moueantur, an ſtrictae a ſole adſcendant, deſcendant, vel eiusdem altitudinis et diſtantiae a ſolo fuerint.

Dies, quibus fulminauerit, et tonuerit, in ea regione notentur; an fulmina noxia, an bruta fuerint? Quasnam intulerint calamitates? Sunt enim regiones, in quibus nunquam fulminat, ſunt in quibus crebra fulmina, ſunt in quibus vehementes ſunt fragores, et plerumque damnoſi; ſunt in quibus rara et fere nunquam aerumnoſa noxiaque ſunt fulmina, nec magnum eſt locorum interuallum, in quibus tanta fulminum diſcrimina eueniunt. Quoties igitur toto anno fulminauerit, aut et fulgurauerit, ſupputetur ſub finem anni.

Notetur numerus procellarum, et quibus diebus tempeſtates furibundae violentaeque fuerint, et quas intulerint rebus humanis iniurias.

Quoties grandinauerit, et quando in granis grandinis aliquid inſolens ſpectatum ſit, quas aerumnas attulerint.

Quoties ninxerit, quantum niuis deciderit, quo die maxima copia, an insolentis figurae? Notetur, quot dies humidi, ficci, nubilosi, praenubili, subnubili, sereni, toto anno fuerint; quot noctes serenae, quot nuctemera serena.

Quibus noctibus et quoties aurora borea fulserit, et cum quibus phaenomenis.

Quoties et quando Iris solaris lunarisque apparuerit.

An fulserint coronae circumnectentes Solem, Lunam, Planetas, et quaenam tum coeli constitutio fuerit.

An Bolides, vel alia ardentia meteora in coelo fuerint visa; describatur horum cursus, claritas, magnitudo, fragor, et an calamitatibus affecerint res humanas.

Notandum etiam est quolibet mense vernali, quando arbores, quae sunt vnius speciei, quando aliarum specierum, quando herbae nonnullae, quae singulae suis nominibus sunt appellandae, inceperint protrudere gemmas, emittere folia, flores; quonam tempore folia fuerint perfecta et adoleuerint, quando flores marcescentes petalis orbabantur, an infestati ab insectis, et a quibusnam? Quomodo gramina et fruges creuerint, satae ante hyemem, vel vernali tempore; an aestate fruges bene maturuerint, an copiose collectae, an arborei fructus maturi, saporis grati fuerint, an minus arriserint palato, veluti sunt cerasa, pruna, poma, pyra, amygdalae, mori, vuae etc. an laete creuerint legumina, quibus homines vesci solent, aut quid nocuerit incremento? an boues, oues, capri, sues, laete

luxurient

luxurient in paſcuis, vt niteant? an morbis infeſtentur et quibusnam?

Notentur quoque ſedulo morbi, qui quolibet menſe homines inuaſerint, morborum decurſus, cauſa, curatio ſimul addatur.

Quando haec omnia accurate et ordine memoriae traduntur, hiſtoria meteororum multum increſcet; ita enim conſtabit, quaenam hyemes ſint modeſtae, quaenam aſperae, earumque periodus; quinam anni fertiles, quinam ſint infertiles, et ita appellandi: non quod omnes ſpecies frugum, fructuum, leguminum, eodem anno laete et magna copia prouenerint, id enim nunquam eueniſſe vidi, ſed quod maxima pars frugum ad vitam neceſſariarum abundanter collecta fuerit.

Nullus dubito, quin poſteritas alia meteora ſit detectura, quorum potior ratio erit habenda, quod ſi in his adnotandis diligentes ſaeculi ſpatio fuerint Philoſophi, magnas vtilitates pro genere humano colligent, et ſcientiam rerum naturalium multum promouebunt: ſi autem, hiſce, vti rebus inutilibus, neglectis, ſocordes euaſerint, et potius ſe exercere in inutilibus ſpeculationibus et hypotheſibus fingendis voluerint, poſt multa molimina et herculeos exantlatos labores, comperient, ſe profeciſſe nihil: ſolae enim obſeruationes, ſola experimenta ſunt verae firmaeque baſes Philoſophiae naturalis.

HALO-

HALONVM

EXTRAORDINARIARVM PETROPOLI VISARVM DESCRIPTIO.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

1)

Admodum frequens eſt apud nos halonum ſolarium apparitio, quod colligere exinde facile poterunt lectores, ſi accipiant, annotaſſe me in aduerſariis, inde a die 23. Aprilis 1758, vsque ad diem 20 Septembris, eiusdem anni, viginti ſex halones a me conſpectas, minimum vero duplo plures hoc interuallo a me viſas eſſe, ob ſummam enim phaenomeni frequentiam negligentius iſta annotaui.

2) Circumſtantiae huius phaenomeni apud nos fere conſtanter eaedem ſunt, quae et alibi comitari iſtud ſolent. Apparent nempe halones iſtae, coelo neque penitus ſereno, neque penitus nubibus obſcurato, ſed tenuibus nebulis obducto, quae hebetant quidem ſolaris lucis vigorem, atque peculiari quodam pallore, ab adſueto facile diſtinguendo, ipſius radios inficiunt, non vero omnem ipſis tranſitum denegant. Vnicus, ſub his circumſtantiis, conſpici ſolet circulus, ſolem tanquam centrum cingens, diametrum habens 45 circiter graduum, et latitudinem diametro ſolari proxime aequalem, intus rubens, exterius vero ex albo coeruleſcens,

lescens, areaque a circulo isto comprehensa, reliquo coelo obscurior esse solet.

3) Rarius occurrit Parheliorum phaenomenon, etsi et hoc apud nos frequentius conspiciendum se praebeat, quam in Germania, aliisque terrae regionibus australioribus. Vidi hoc phaenomenon anno superiori 1758 quater, die nempe 23 Aprilis, 13 Maii, 19 Augusti, et mensis Octobris, nisi fallor, d. 15, semel autem d. 19 Aprilis huius anni 1759, atque aliqua obseruavi, quae, vt orbi erudito innotescant, admodum digna videntur, vnde exactam eorum descriptionem Academiae tradere constitui.

4) Die 23 Aprilis, Anni 1758, id, quod Fig. 1. exhibet, conspiciendum se mihi dedit phaenomenon. Solem S, tanquam centrum, cingebant circuli bini. Prior eorum CFED, eiusdem erat diametri et latitudinis, atque similiter coloratus, prouti esse solent halones simplices consuetae, de quibus §. 1. locutus sum, ast id peculiare habebat, quod area elliptica albescente, cuius axis maior horizonti parallelus, CGEH, cinctus esset. Erat nempe, area quidem CFED, a circulo hoc comprehensa, reliquo coelo aliquantum obscurior, ast spatia lunularia CGEFC et CHEDC, arcu elliptico exterius, circulari interius, terminata, viuido albore respiendescebant. Secundi circuli infra Solem non nisi pars quaedam IK, quadrantem non adaequans, videbatur. Erat circuli huius diameter 90 fere graduum, latitudo diametro solari circiter aequalis, atque colores prorsus iidem, qui in circulo Soli Tab. XI. Fig. 1.

 pro-

propinquiore. Interius nempe rubicundo, exterius ex albo coerulescente, colore tinctus erat. Tertius tandem circulus, SLMN, completus erat, totus albescebat, perque Solem ipsum transiens, horizontali ductu coelum cingebat, atque itidem latitudinem habebat, solari diametro proxime aequalem.

5) Conspectui porro se dabant parhelii duo in annuli horizontalis SLMN, cum perimetro areae ellipticae, CGEH, intersectione siti, ad G et H. Vividam ipsi spargebant lucem, ast figuram non habebant rotundam, sed irregulariter quadrilateram. Versus Solem rubro colore tincti erant, ex parte vero a Sole auersi, ex coeruleo albescentem colorem exhibebant. Coronae horizontalis arcus G*m*, H*n*, parheliis propinqui, vegetiori lumine quam caeterae annuli huius partes resplendescebant, qui tamen splendor, recedendo a parheliis, magis magisque languidus euadebat, vnde caudarum, horizontaliter exporrectarum, pseudo-soli G atque H annexarum, apparentia oriebatur.

6) Circa halonem intimam, CFED, adhuc sequentia annotabam.

α) Arcus ipsius summus, *pq*, et infimus, *rs*, in verticali AB reperiundi, tantum prae se ferebant fulgorem, quem oculus perferre vix poterat. Pro parheliis tamen fulgentes has areas sumere, oblonga ipsarum figura non permittebat; nullam enim, quoad figuram, cum Solis imagine habebant similitudinem.

β) Loβ) Loca F, D, vbi annulus horizontalis albicans secabat halonem CFED, neque parhelios exhibebant, neque vegetiori lumine, quam caeterae halonis partes, praedita erant.

γ) Videbatur mihi aliquoties, aream totam CGEH, ellipsi, intus rubra, exterius coerulea, cinctam esse, ob summam vero colorum debilitatem, oculis fidem habere pertimescebam.

Plura tum temporis, etsi phaenomenon per aliquot horas duraret, circa istud annotare non potui.

7) Redibat autem d. 13 Maii idem phaenomenon, quoad quasdam quidem circumstantias minus completum, quoad praecipuas vero multo distinctius, quam istud, quod d. 23 Aprilis conspexeram. Sistit eius delineationem Fig. 1, ac prorsus simile erat antea descripto, nisi quod Tab. XII. Fig. 1.

1) Circulus horizontalis albus SLMN, admodum debilis esset,

2) Parhelii, ad G et H siti, parum splenderent,

3) Secundae halonis, solem cingentis, arcus quidam IK, ast minor, quam in phaenomeno 23 Aprilis, conspiceretur. Praecipue autem notabile hoc erat, quod

4) Vniuersa area elliptica halone elliptica, CGEH, cincta esset. Erat halonis huius axis maior, siue transuersus, horizonti parallelus, coniugatus vero, siue minor, ad horizontem normalis, priorque axis posteriorem, qui halonis circularis CFED diametro

 aequa-

aequalis, et 45 circiter erat graduum, ſex quaſi gradibus ſuperabat. Caeterum elliptica halo, eandem habebat latitudinem, ac circularis, quam includebat, ſimilique ratione colorata erat, interius nempe rubra, exterius pallide coerulea. Loca *rEs*, *pCq*, vbi halo elliptica circularem contingebat, ac cum ipſa confundebatur, fulgore vix oculis ferendo reſplendeſcebant, aſt, ob oblongiorem tractuum iſtorum figuram, nullam cum parheliis habebant ſimilitudinem.

Vltra horae ſolidae ſpatium perſiſtebat phaenomenon, quod inter elegantiſſima, quae vnquam conſpexi, numero. Poſt horae vero effluxum, diſſipabantur tenues nebulae aerem replentes, vnde languidum primum euadebat phaenomenon, coeloque penitus ſereno facto, omnino tandem euaneſcebat.

8) Idem phaenomenon d. 19 Auguſti, eiusdem anni denuo obſeruabam. Circa horam nempe 11 et ½ ſolem intuens, conſpiciebam, et ſupra et infra ipſum, arcus aliquos coloratos, aſpectum praebentes talem, qualem ſiſtit Fig. 2. Statim ſuſpicabar, videre me partem phaenomeni, d. 23 Aprilis et 13 Maii conſpecti, et arcum PCQ, FEG, ellipticae, arcum vero RCT, HEI, circularis halonis, eſſe partes. Erat hoc momento aer valde ſerenus, ac vix et ne vix quidem tenues quasdam obſeruare licebat nebulas. Advehebat autem ventus N W. continuo plures vapores, atque, prouti hi denſi magis fiebant, completum magis euadebat phaenomenon, et antea deſcriptis ſimilius. Circa horam tandem 12 tale fere ſe ſiſtebat, quale exhi-

Tab. XII. Fig. 2.

exhibet Fig. 2. niſi quod annulus horizontalis SLMN, parheliique G, H, admodum debiles eſſent. Quoad caeteras circumſtantias omnes, dimenſiones nempe diametrorum et latitudinum halonum circularium et ellipticae, earumque colores etc. omnino ſimile erat phaenomenon hoc iſti, quod d. 13 Maii conſpexeram. Diſſipatis verſus h. 1. vaporibus, prorſus euaneſcebat.

9) Die tandem 19 Aprilis, anni currentis 1759 denuo initia huius phaenomeni videbam, ita ſe ſiſtentia, qualia ipſa exhibentur in Fig. 2. Exſpectabam, an denuo ſe compleret, aſt fruſtra hac vice, ſereno enim facto coelo phaenomenon euaneſcebat. Tab. XII. Fig. 2.

10) Facile in oculos incurrit, quatuor haec a me recenſita phaenomena omnino vnius eiusdemque fuiſſe generis, neque aliam inter ipſa dari diuerſitatem, quam quae eſt phaenomeni, quod mox magis, mox minus completum, videndum ſe praebet. Cum igitur vnum hoc idemque phaenomenon quater ad minimum, anni ſpatio, apparuerit, pro rariori forte non habendum eſt, neque et hanc ob rationem extraordinarium iſtud vocaui, ſed eam ſolum ob cauſam, quoniam Phyſicis hactenus omnino fere ignotum eſt.

11) Quos euolui ſcriptores de parheliis atque halonibus, euolui autem plurimos, ſilent fere omnes de phaenomeno, quod hic deſcripſi, neque aliquam areae et halonis ellipticae iniiciunt mentionem. In magno nempe delineationum aut deſcriptionum huiusmodi phaenomenorum numero, non niſi quatuor inuenire potui, quae huc referenda videntur, ac cum meis obſeruatis

 aliquam

aliquam habent similitudinem. Refert primum *Hugenius in Dissertatione de Coronis et Parheliis*, quae occurrit inter ipsius *Opuscula posthuma*, *pag.* 321. 359. *sqq.* obseruationem a *Scheinero* anno 1630 *Romae* institutam, vbi dicitur: Solem, S, ambiuisse duos circulos excentricos ABDC et AEDF, se mutuo in linea verticali GH intersecantes, prouti monstrat Fig 3. Fatetur *Scheinerus*, non satis distinctum apparuisse phaenomenon, vnde inducor, vt suspicer, idem ac ego, ast subobscure, vidisse *Scheinerum*. Ab Ellipseos enim circulum cingentis apparentia, parum abludit, quae producitur ex duorum circulorum intersectione figura. Deinde in *Transactionum Anglicanarum Num* 13 *pag* 219. *sqq.* inuenio, ex *Diario eruditorum* (*Iournal des Sçavans*) *ad annum* 1666 desumtam, quatuor parheliorum delineationem, et descriptionem, sequentibus verbis conceptam: *The 9th of April, of this present Year, -- there appear'd three Circles in the Sky. One of them was very great, a little interrupted, and white every where. - - - It passed through the midst of the Sun's Disk, and was parallel tho the Horizon. - - - The second was much less, and defective in some places, having the Colours of a Rainbow. - - - It had the true Sun for its Center. The third was less, than the first, but greater than the second. It was not entire, but only an Arch, or Portion of a Circle, whose Center was far distant from that of the Sun, and whose Circumference did, by its middle, joyn to that of the least Circle, intersecting the greatest Circle by its two extreams. In this Circle were discerned also the Colours of*

Tab. XII. Fig. 3.

of a Rainbow. - - - At the place, where the Circumference of this third Circle did close with that of the second, there was a great brightness of Rainbow Colours, mixt together: And at the two extremities, where this second Circle intersected the first, appear'd two Parhelia's, or Mock suns; - - - This Appearance is look'd upon, as one of the notablest, that can be seen, by reason of the Excentricity of the third Circle, and because, that the Parhelia were not in the Intersection of the second Circle, with the great Circle, but in that of the third Circle. Quodsi vero descriptio haec cum Figura mea 2 conferatur, luculenter patet, de eodem ipsam loqui phaenomeno, quod ego quater vidi, modo quod in Gallia non integra visa fuerit halo elliptica CGEH, sed inferius solummodo, quasi ipsius dimidium GEH.

12) Tertium, quod huc spectare videtur exemplum, idem, quem supra iam citaui, *Hugenius* suppeditat, *loc cit pag.* 348. 349. Visa nempe est, *Parisiis* in Bibliotheca regia, d 12. Maii, A. 1667, *Corona circa solem, cuius diameter inuenta est* 44 *graduum, et latitudo limbi eius* ½ *gradus praeterpropter. - - - Apparuit praeterea pars quaedam maioris circuli, qui superiorem coronae partem tangebat, et cuius extrema versus inferiora vergebant, - - - quae pars circuli iisdem, quibus corona, coloribus, sed dilutioribus, splendebat.* Quem quidem arcum, coronam tangentem, ellipseos meae fuisse partem coniicio Tandem recordor, in *Iournal des Sçavans, A.* 1683, narrari, vidisse *Cassinum* halonem Solem cingentem, ac extra eam, ab

vtro-

vtroque Solis latere, parhelium, vtrumque aequalem, cum Sole vero, ſupra horizontem habentem altitudinem, qui vero parhelii, non in halone ſiti, ſed vtrinque, ad aliquot diametrorum ſolarium interuallum, inde remoti erant, quos parhelios eos fuiſſe, qui in meo phaenomeno, ab annuli elliptici, cum horizontali circulo, interſectione formantur, magna cum veriſimilitudine credi poſſe, exiſtimo.

13) Non ignoro, *Newtonum* in Opticae libro, a ſe viſae halonis ellipticae, lunam cingentis, mentionem iniicere, aſt, ſi, quam exhibet, eius deſcriptionem intueamur, liquet, aliud prorſus, quam ego, vidiſſe ipſum phaenomenon. Sic enim ſcribit Vir ſummus, *Opticks, II. Book. Part. IV. Obſ. XIII. pag. m* 111. 112. *The like Crowns appear ſometimes about the Moon; for in the beginning of the year* 1664, *Febr. 19th at nigth, I ſaw two ſuch Crowns about her. - - - At the ſame time there appeared a Halo about* 22 *degrees,* 35′ *diſtant from the Center of the Moon. It was elliptical, and its long Diameter was perpendicular to the Horizon, verging below fartheſt from the Moon.*

14) Ex hactenus prolatis, iure iam concludere mihi poſſe videor, contigiſſe mihi primo, iuſtam acquirere ideam, phaenomeni, quod ante me pauci, nemo autem, quantum ſcio, completum, ac ſatis diſtinctum, conſpexit. Obſeruaui quoque A. 1758, d. 15. Octobris, ſi recte recordor, (diem enim annotare oblitus ſum) denuo halones et parhelios, quod vero phaenomenon, ab antea deſcripto, omnino diuerſum, aliusque generis fuiſſe puto. Siſtit eius delineationem

tionem Fig. 1. atque quoad halonum calores, diametrorumque ac latitudinum dimensiones. equidem simile prorsus erat, phaenomeno superius descripto, ast quoad circumstantias aliquas notabiliter ab ipso diuersum erat. Namque Tab. XIII. Fig. 1.

1) Neque areae ellipticae albescentis, neque annuli elliptici, intimam halonem circularem ambientis, vllum hic aderat vestigium.

2) Halonis internae arcus supremus et infimus, non maiorem, prae caeteris annuli partibus, ostendebant splendorem.

3) Parhelii F, D, in halonis internae CFED, cum annulo horizontali SLMN interfectione praecise siti erant.

4) Arcum videbam IHK, crura sursus vertentem, partem nempe circuli, Zenith Z pro centro habentis. Erat hic arcus similiter coloratus, ac halo CFED, eiusdemque latitudinis, vertex vero ipsius H, a Solis centro S, 45 circiter gradus distabat. Eiusmodi arcus inuersi, in antea descripto phaenomeno, ne vestigium quidem vnquam conspexi.

15) Patet, hoc vltimo descriptum phaenomenon, maiorem, cum iis, quae alibi in meridionalioribus Europae regionibus frequenter obseruata fuerunt, habuisse affinitatem, quam reliqua. Non id iam ago, vt theoriam halonum atque parheliorum exquiram; nil enim, nisi distinctam obseruationum mearum descriptionem tradere, propositum habeo. Quo interim et alios Physicos, ad diligentius obseruanda huius generis phaenomena partim, partim ad euoluendam et

 per-

perficiendam eorum theoriam, excitem, quaestionum sub forma, iungere hic placet aliquas cogitationes meas, nondum satis maturas.

Qu. 1. Nonne parheliorum atque halonum phaenomena omnia ad duas classes redigi possunt, quarum primam constituunt ea, vbi halo intima ellipsi lucida, annuloque elliptico colorato cincta est, alterum vero genus eorum est, vbi areae ellipticae atque halonis ellipticae nulla adsunt vestigia? Atque, nonne ad bina haec genera ita reuocari possunt omnia, quae hactenus visa sunt huius generis phaenomena, vt ostendi queat, omnem quae inter ipsa obseruari solet diuersitatem, non pendere aliunde, nisi quod idem phaenomenon, mox minus, mox magis, completum appareat?

Qu. 2. Nonne prioris generis phaenomenon borealioribus, posterioris generis australioribus terrae regionibus, magis frequens ac commune est? Videor mihi hoc suspicari posse exinde, quoniam vnius anni interuallo quater primum phaenomenon hic Petropoli vidi, quod alibi rarissimum esse, inde concludo, quod, inter ingentem ab aliis conspectorum numerum, paucissima inueniantur, quae, ad primam hanc classem pertinere, censenda sunt.

Qu. 3 Coelum, oculo istud intuenti, apparet, prouti fornix compressus, ellipticus. Circulus itaque, solem aut lunam cingens, in ellipticum hunc fornicem proiectus, apparere debet, quasi esset ellipsis, axin maiorem habens horizonti perpendicularem, et inferius a luna, aut sole, longiori interuallo distans, quam superius.

perius. Nonne itaque dubitare licet, an halo a *Newtono* visa (§. 13.) ex fallacia optica potius, quam ex causa physica, elliptica apparuerit? Non enim nos docet Vir summus, an ellipticitatem halonis ex dimensione, an ex nuda oculorum aestimatione, obseruauerit.

Qv. 4. Etsi a magno *Hugenio* in *Tractatu de Coronis et Parheliis* proposita, de ortu phaenomenorum huius generis, hypothesis, ingeniosissima sit, tantoque Viro non indigna; nonne nihilo minus vera horum phaenomenorum causa in iis quaerenda est principiis, quae proposuit *Newtonus*, *Opticks*, *II. Book. Part. IV*? Non obstat, quod *Hugeniana* hypothesis, phaenomenis, quae explicanda sibi sumsit, apte satis conueniat. Non enim ingeniosa figmenta, sed veritatem, quaerimus Physici.

Qv. 5. Nonne ex iisdem modo allegatis principiis *Newtonianis*, halonis noctu candelam accensam cingentis explicatio, repetenda est? Praesto enim sunt argumenta, quae plane demonstrant, halonem istam, non extra oculum, sed in ipso spectatoris oculo, formari. Sed de his alibi vberius agam.

PISCIVM RARIORVM
E MVSEO PETROPOLITANO EXCEPTORVM DESCRIPTIONES.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Cum Museum Petropolitanum, rebus naturalibus, e toto terrarum orbe congestis, omnium facile instructissimum, praeterita huius anni aestate perlustrarem, plurima mihi sese obtulerunt Naturae Cimelia, quorum mentionem partim nullibi factam esse inuenio, partim quorum nomina tantum, vel nimis breues ac defectuosae apud Auctores, saepius ineruditos, passim leguntur descriptiones, quorumque pleniorem magisque elaboratam omnes mecum optarent Scientiae naturalis cultores historiam. Locupletissimum rerum naturalium thesaurum, a Cel. olim Seba collectum, quem pretio haud paruo sibi comparauit PETRVS MAGNVS, varia continere, quae omnem merentur attentionem, coniectura satis probabili nemo non perspiciet. Licet enim modo laudatus Seba maximam rariorum rerum partem in libro, qui titulum gerit: *Locupletissimi rerum naturalium Thesauri accurata descriptio etc.* 1734, in fol. Tom. I et II. descripserit, iconibusque optimis illustrauerit, principem tamen Historiae naturalis partem, Ichthyologiam puta, senio, vel morte, sine dubio praepeditus, non elaborauit, quamuis Pisces Amphibia numero in collectione fere superarent. Hi igitur prae aliis noui quid suggerunt Naturae curioso, quare, si

in

in deſcribendis eorum rarioribus meam impendam operam, eam in amplificanda ſcientia naturali haud fruſtra collocaſſe ſpero.

*** *** ***

Gaſteropelecus. *Gron.* muſ. 2. no. 155. t. 7. f. 5.

Clupea pinnis flauis: ventralibus minutiſſimis. *Linn.* Syſt. Nat. edit. dec. p. 319. no. 7. (Sternicla).

I.

Deſcriptio.

Color corporis, ſi a capite verſus caudam adſpicias piſcem, ſordide flaueſcens, ſin vero e directo aduerſus latera eius intendas oculos, ſplendide argenteus apparet, quo ſplendore etiam irides, lamellae iuxta oculos, et opercula branchiarum, ſub quocunque adſpiciantur angulo, praedita ſunt, ex eoque, pro varia radiorum reflexione, ſubinde coerulei parum reſplendet, id quod etiam circa dorſum ita contingit. Summo capiti pinnisque pectoralibus viroris diluti aliquid eſt admixtum; reliquae vero pinnae pallidae omnino, incoloratae ac pellucidae ſunt. Nec circa caudam vidi maculam, niſi ſub ea intelligatur linea longitudinalis uſca, de qua inferius dicetur. Tab. XIV. Fig. 1. 2. et 3.

Totum corpus valde compreſſum, latum, et, ſi latera reſpicias, ventricoſum valde, a margine ſuperiore versus inferiorem crassitie paullatim decrescit, ita, vt abdominis pars anterior in marginem, cultri aciei instar, acutum, et papyro haud crassiorem, terminetur. Eadem quoque anterior corporis pars posteriorem latitudine multum superat.

Caput superne planum, ad latera compressum, et antice, circa os, quasi retusum est; superior enim maxilla capitis vertice situ haud inferior est, eiusdemque margini antico maxillae inferioris medium respondet, quae, clauso ore, situm fere verticalem obtinet, et a superiore aliquantum prominet. Si caput ab anteriore adspicitur parte, apparet inter duo maxillae inferioris crura, seu in mento, sinus satis profundus, quem, nisi de vtriusque maxillae praesentia nullum iam esset dubium, ab inferioris absentia ortum fuisse, facile quis iudicaret. Ex huius sinus imo ab initio statim arcuatum emergit abdomen, quod primo aliquali quidem gaudet crassitie, mox vero, sub vlteriori arcuato decursu, ad anum vsque, valde attenuatur, inque acutum valde abit marginem; haec anterior corporis pars, cuius limites a capite ad pinnarum pectoralium basin fere, et ab hac oblique deorsum, ad anum vsque, excurrunt, nullam fouet cauitatem, neque viscus, sed solidam, ex fibris carneis, radiorum instar, e centro ad marginem excurrentibus, conflatam offert substantiam, licet sub ventricosa facie, qualem ipsius prae se ferunt latera, facile possit imponere, vt pro vero abdomine, viscera continente, a quouis haberetur.

Mem-

Membrana branchioſtega, tantum abeſt, vt, more ſolito, ſub poſtica aut laterali operculi branchiarum parte collocetur, quamuis huius apertura late pateat, vt ad antica potius, in menti ſc. ſinu, ſit quaerenda, cuius imo vtraque, ſub angulo acuto coniuncta, affigitur, poſtquam ambae ab operculi lateribus, quibus adnaſcuntur, receſſere. Officulum in membrana iſta vnum alterumue diſtinguere quidem potui, verum, ob eorum paruitatem, de numero certi quid affirmare vix audeo; ſic quoque, ob eandem rationem, branchiarum ſtructuram deſcribere nequeo, modo, earum vtrinque quatuor adeſſe, moniturus.

Superior aeque ac inferior maxilla denticulis minimis et acutis armata eſt. Narium foramina, ab vtroque latere duo, inter labii ſuperioris latera et ſuperiorem ac anticum oculi orbitae marginem, conſpicienda ſunt. Capitis ſummum, quod, vti ſupra iam fuit dictum, planum eſt, marginem habet vtrinque prominentem et acutum, neruoque alio longitudinali, per ipſius medium excurrente, in duas aequales diuiditur partes.

Laminarum iſtarum argentearum, orbitae plus quam dimidiam partem, inferiorem ſc. et lateralem ipſius marginem, cingentium, quatuor ſunt, quarum poſtica reniformis, mediae magnitudinis; inferior eiusdem fere figurae, ſed ad vtrumque extremum truncata, maxima; quae hanc ſequitur, anticarum vna, triangularis, omnium minima eſt.

Oper-

Operculum branchiarum, quoad maximam partem, formatur a lamina postica, omnium maxima, quae ex ouato-lanceolata, et sulco quodam, a dorso laminae orbitalis posticae vltra ipsius medium transuersim excurrente, incisa est; secunda operculi lamina, priore longe minor, itidem ouato-lanceolata est, harumque duarum laminarum extremitates acutae se inuicem excipiunt; secundam sequitur tertia, linearis, ad maxillae inferioris partes potius, quam ad branchiarum operculum, referenda. Hisce modo memoratis, tam orbitalibus, quam branchialibus laminis, duo interponuntur arcus ossei, qui sub infima, maxima, orbitalium lamina potissimum in conspectum veniunt. Posterior operculi branchiarum margo cute producta ampliatur, ad aperturam firmius et exactius claudendam.

Dorsum ab initio planiusculum, leuissime ascendit, sensim dehinc conuexum factum, recto fere decursu suam attingit pinnam, cuius ad basin descendit simul, inde vlterius descensu suo, minus tamen decliui, ad pinnae caudae principium vsque, pergit. Ab ano vero corporis margo inferior, ad pinnae ani finem vsque, in linea recta oblique ascendit, ab eodemque sub angulo obtuso infractus, ad caudae pinnam recta procedit.

Si latus corporis obuertatur luci, ob eius tenuitatem pellucent intestina, quae a pinnae pectoralis basi oblique deorsum ad anum ducuntur, superne maiora volumine, inferne tenuia inque rectum terminata mihi visa, et, vbi latissima sunt, duas vix superantia lineas. Horum

Horum faciei posticae vesica quaedam accumbit, semilunaris figurae, $1\frac{1}{2}$ lin. in medio lata, et, quantum quidem de summa eius pelluciditate suspicari licet, aere forte repleta, cuius cornu superius ac obtusius supra pinnarum pectoralium basin capiti, seu potius branchiarum operculis, contiguum est, inferius et acutius proxime infra anum subsistit; eademque sua conuexitate posticam corporis partem, concauitate intestina respicit. Notandum autem interim est, anum, et, quam ante se gerit, pinnulam ventralem spuriam, collocari inter duas duplicatas squamularum, vltra corporis marginem prominentium, series, quarum vna, 2 lin. longa, bis octo, altera, 1 lin. longa, bis quatuor, iisque minoribus, componitur squamulis, huiusque posterioris inter duplicaturam aditum satis largum ad istam vesicam patere; setam enim ad eius medium vsque et quaquauersum circumducere potui, profundiorem tamen eius immissionem membrana quaedam, qua intus forte obducta erat cauitas, impediuit. Nec ea propter contendere velim, setam, per ostium intrusam, in ipsum vesicae cauum peruenisse, neque eam ipsam pro vera vesica natatoria, aut ostium illud pro ductus pneumatici ostio, venditare.

Posticae extremitati primae squamarum seriei a latere sinistro adiacet pinnula ventralis spuria, penicilliformis, quae, 5 circiter radiis, $\frac{1}{3}$ tantum aut $\frac{1}{2}$ lin. vix longis, nec, quantum quidem distinguere potui, membrana inter se connexis composita, verae pinnae nomen haud meretur. Alterius minorum squamarum seriei extremitati posticae principium pinnae ani contiguum eſt. Iſta, de qua modo dixi, veſica abdominis cauum clauditur, nec vllum praeterea viſcus pone eam diſpoſitum eſſe videtur.

Squamae tenues, ſubrotundae partim, partim ouales, integerrimae: maximae earum partem corporis anticam, infra et ante pinnas pectorales, et laterum medietatem, ſupra et infra lineam longitudinalem occupant; mediae magnitudinis dorſum et caudam, minimae inferiorem veſicae regionem, et marginem corporis, pinnae ani contiguum, inueſtiunt; maximae omnium lineam latae ſunt, vel eam quoque parum excedunt. Duae tres ve ſquamarum ſeries, tam ſupra, quam infra lineam longitudinalem, punctis ſunt pertuſae, lineas quaſi efformantibus. Nec in capite, neque in branchiarum operculo, vllum ſquamarum occurrit veſtigium.

Pinnae duae pectorales, proxime infra magnam operculi branchiarum laminam ſitae, fortes ſunt, et patentes, pro corporis paruitate magnae, radiisque vndecim compoſitae, primis fortibus valde et arcuatis, omnibus autem a primo ad vltimum ex ordine breuioribus.

Pinna dorſi vnica, caudae proprior, quam corporis medio, pinnaeque ani principio ſitu adhuc poſterior, breuis, octo radiorum, ſatis tenuium, vltimo bifido, figura quaſi rhomboidea.

Pinna ani longa, 32 radiis, eiusdem fere vbique longitudinis, 1 ſc. vel 1 $1\frac{1}{3}$ lin. longis, conſtructa.

Pinna caudae bifurcata, 36 circiter radiorum.

Ex

Ex Insula Zeylan aduectum esse testatur Mus. Petropol. Catalogus serpent. p. 470, in quo sub No. 351 (*a*): „Pisciculus argenteus Zeylanicus, circa caudam maculosus„: vocatur.

Quibus notis a Gronouiano hic differat, quibusque cum eodem conueniat, cum ex ipsa descriptione, tum ex iconibus satis elucet.

II.

Mensura.

	Poll. Paris.	lin.
Longitudo tota, sc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum	1	10
- - - ab oris extremo ad extremitatem corporis squamosam - - - -	1	5
Ab extremo oris ad oculi medium - - -	—	$1\frac{1}{2}$
- - - ad marginem operculi branchiarum posticum - - - -	—	$4\frac{2}{3}$
- - - ad principium pinnarum pectoralium	—	$3\frac{3}{4}$
- - - ad primam prominentium squamarum abdominalium - -	—	$9\frac{1}{2}$
- - - ad pinnulam ventralem spuriam et anum - - - - -	—	$10\frac{1}{3}$
- - - ad principium pinnae ani - - -	—	11
- - - - - - - - - - dorsi - - -	—	$11\frac{1}{4}$
Longitudo pinnarum pectoralium - - - -	—	$7\frac{1}{4}$
- - - pinnae dorsi ad basin - - - -	—	$1\frac{2}{3}$
- - - - - - - - radiorum longiorum	—	2
- - - - - ani ad basin - - -	—	$5\frac{3}{4}$
- - - - - caudae; sc. a primis radiis ad longiorum apices - -	—	5

 Extre-

Extremitas corporis squamosa in caudae pinnam	Poll.	lin.
extensa ad - - - - - -	—	1
Diameter oculi - - - - - - - - -	—	$1\frac{1}{4}$
Distantia inter primi pinnae pect. radii basin et anum - - - - -	—	$6\frac{2}{3}$
- - - inter anum et primi pinnae ani radii basin - - - - - - -	—	$\frac{3}{4}$
- - - inter vltimi pinnae ani radii basin, et primum pinnae caudae radium -	—	$1\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis (*a*) per oculorum axes -		2
- - - - - - - ad dorsi initium - - -		$1\frac{3}{4}$
- - - - - - - - principium pinnae dorsi	—	$\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - - - - caudae	—	$\frac{1}{4}$
- - - perpendicularis (*b*) per oculi medium	—	$4\frac{2}{3}$
- - - - per pinnae pectoralis principium	—	$7\frac{1}{2}$
- - - - per maximam corporis latitudinem, pone pinnam pect. -	—	8
- - - - per anum - - - - - - -	—	$6\frac{2}{3}$
- - - - per pinnae ani finem - - -	—	$1\frac{1}{2}$
- - - - - - - - caudae principium -	—	2

(*a*) Pisce erecto, horizontaliter sumta.

(*b*) Pisce lateri incumbente, horizontaliter sumta.

II.

*** *** ***

II.

Trutta dentata, dorſo plano; abdomine acuto, prominente; taenia longitudinali, argentea; pinna ani longiſſima. *Piabucu* Braſilienſ. *Marcgraf. Willoughb.* Hiſt. Piſc. p. 204. Tab. N. 13. fig. 4.

Deſcriptio.

Color Piſcis in S. V. aſſeruati e pallide teſtaceo luteus eſt, qui tamen, eo viuente, vel haud longo poſt mortem tempore, plane alius eſſe debuit; Squamas nempe argenteum oſtendere ſplendorem, dorſumque oliuacei eſſe coloris, viridi hyacinthino permixti, ex *Marcgrauio* allegat *Willoughbeius.* A poſtico operculi branchiarum angulo taenia argentea, vix ſplendens, in linea recta ad medium baſis caudae pinnae tendit, ſummo dorſo in decurſu ſuo propior, quam imo abdominis margini, ab initio ſenſim latior facta, duas tertias longitudinis corporis adtingit, vbi latiſſima, $1\frac{1}{2}$ lineam ſc. lata eſt, abhinc ſtatim decreſcens ad finem vsque. Laminae iuxta oculos et branchiarum opercula argentei, haud tamen ſplendidi, coloris ſunt; irides vero, inferne quidem argenteae, maximam tamen par- Tab. XIV. Fig. 4.

tem ſaturate flauentes; iisdemque alias rubri parum ſuperius eſſe admixtum, *Marcgrafius* perhibet.

Pupilla oualis eſt figurae, diametro perpendiculari horizontalem ſuperante.

Quod ad corporis formam attinet, neſcio, quam ob cauſam et mihi et aliis caput huius piſcis inuerſum quaſi viſum ſit; interim tamen, ſi probe aduertas, capitis ſummi ambitum leuiter depreſſum, imi vero conuexum, ſitumque oculorum ſolito inferiorem, huic fallaciae anſam dediſſe, demum perſpicies. Ab extremo mandibulae ſuperioris ad decem lineas vsque caput ac dorſi initium aſcendit quidem, ſed in reſpectu ad ambitum vtrumque reſimum eſt; abhinc vlterius, ſed conuexo ambitu, leuiter aſcendit dorſum ad pinnae dorſualis primae principium vsque, inde aliquantum rectum ſequitur decurſum, ſenſim tamen circa pinnam adipoſam leuiſſime deſcendit, moxque iterum verſus pinnae caudae principium, breui quidem itinere, leuiter aſcendit. Ab extremo mandibulae inferioris conuexo ſub ductu eo vsque deſcendit imi corporis ambitus, quo a poſticis pinnae pectoralis radiis linea perpendicularis poteſt duci, dein noua maiorique ſub conuexitate pergit ad angulum pinnarum ventralium internum, a quo leuiſſime iterum et recta deſcendit ad pinnae ani principium; abhinc denuo ſecundum totam huius pinnae baſin curſu fere rectilineo, adſcendit, tandemque ab vltimo pinnae ani fine ad pinnae caudae principium vsque leuiter iterum deſcendit.

Expoſita ambitus deſcriptione, me conuerto ad ipſam corporis ſuperficiem, eiusque conformationem.

Ver-

Vertex capitis glaberrimus, pellucidus, conuexus, dorſi initium verſus magis fit decliuis, magisque ad latera compreſſus, proceſſu ſubulato, glaberrimo in dorſi initium, ad $3\frac{1}{2}$ lineas vsque, excurrens. Ipſum dorſi initium, leuiter conuexum, ſtatim in planitiem abit, quodammodo carinatam, marginibus vtrinque ſubacutis circumſcriptam, et ad pinnam adipoſam vsque ſeſe extendentem. Semel quidem ea interrumpitur pinnae dorſualis primae parum eleuata baſi, et ab hac pinna ad alteram adipoſam vsque non amplius carinatum habet reliquum ſui tractum, ſed plana omnino eſt, marginesque vtrinque minus acutos exhibet. Dorſi extremum pone pinnam adipoſam ex planiuſculo ſtatim in conuexum, et quodammodo acutum, contrahitur. Planities dorſi, modo memorata, ante pinnam primam, vbi latiſſima eſt, $2\frac{1}{3}$ lin. latitudinem abſoluit.

Abdomen ab initio ſubacutum, mox infra pinnas pectorales, ad alteram curuaturam, attenuatum valde acutiſſimumque euadit, ob ſquamarum ibi prominentium duplicaturam; idem ante anum planiuſculum, pone eundem ſubconuexum, iuxta pinnae ani baſin ſatis compreſſum, et attenuatum, in extremo tandem cum dorſi extremo conuenit.

Ipſa vero corporis latera compreſſa, et leuiſſime tantum conuexa ſunt; id quod ex menſura, inferius addenda, clarius patebit.

Oris rotundati rictus mediocris. Extremo vtriusque mandibulae limbo infixi ſunt denticuli circiter ſedecim, breues, obtuſi, ſubtriangulares, albicantes, quorum orae ciliis brunis, quaſi minoribus denticulis, inſtruun-

instruuntur. Pone dentes, intra os, vtriusque maxillae ductum sequitur membrana, $\frac{1}{2}$ lineam lata, retrorsum expansa, seu margine libero fauces respiciens. Conspicitur etiam in palato anteriori, in distantia vnius lineae ab oris limbo, parua quaedam eminentia, duarumque linearum interuallo ab eadem linguae extremitas obtusa, laeuis ac libera in conspectum venit. Maxilla superior, ore clauso, inferiore parum longior, aperto vero, breuior aliquantum esse videtur. Narium foramina vtrinque duo, orbitae supremo margini altitudine aequalia, ac inter oris extremum et oculum in medio fere disposita: anteriori subrotundo, minore; posteriori semilunari, maiori, membranaque eiusdem figurae ad dimidium obtecto. Oculi, comparate ad caput, satis magni. Orbitae margo membrana auctus est, super corneae partem extensa, immobili. Angulus operculi branchiarum superior, seu posticus, $7\frac{2}{3}$ lin. ab oris extremo distat, inferior autem, ad vtriusque membranae branchiostegae coalitionem, isto 1 lin. situ anterior est.

Operculi branchiarum margo membrana terminatur, qualis in plurimis piscium occurrit. Caeterum totum caput cum suis partibus glaberrimum et squamis omnino destitutum est. Membrana branchiostega quatuor tantum officula continet, quod in hoc genere singulare est. Branchiarum numerus vtrinque quaternarius.

Squamae mediocres, dense congestae, tenues, integerrimae, partim subrotundae, partim ouales: maximarum diametro $1\frac{1}{3}$ lin. minimarum $\frac{1}{2}$ lin. vix superante.

Linea

Linea longitudinalis ſtatim a principio, quod in taeniae argenteae initium cadit, ad pollicem vsque deſcendit, abhinc cum eadem taenia, pariter ad pollicem vsque, parallelum ſeruat curſum, ab eiusdem margine inferiore ſub hoc ſtatu duas lineas remota, denique ſurſum ſenſim flexa, ipſi taeniae argenteae, in diſtantia vnius pollicis duarumque linearum ab eius extremo, denuo immergitur, in eiusque medio recta ad caudae pinnam excurrit. Vbi incipit linea longitudinalis, a dorſo $2\frac{1}{2}$, a ventre $7\frac{1}{3}$ lin. circa pinnarum ventralium baſin a dorſo $7\frac{1}{2}$, a ventre cultellato 6 lin. circa pinnae ani principium a dorſo $7\frac{1}{3}$, a ventre $5\frac{1}{6}$ lin.; ad ipſius ingreſſum in taeniam argenteam a dorſo 4, a ventre $4\frac{1}{2}$ lin. infra pinnam adipoſam a dorſo 3, a ventre pariter 3 lineas diſtat; ab initio itaque dorſo propior, quam illi, tandem ab vtroque aequaliter diſtans.

Pinnae octo, ſatis rigidae ac fortes: pinnae pectorales radiis tredecim, rectis, et a primo, indiuiſo, ad vltimum ex ordine breuioribus, compoſitae.

Pinnae ventrales, ad baſin appendice ſquamoſa, tetrorſum ſpectante, auctae, radiorum octo, a primo, indiuiſo, ad vltimum ex ordine breuiorum.

Pinna dorſi prima, cuius principium principio pinnae ani e directo opponitur, radiorum decem, quorum primus ſecundo dimidio breuior, indiuiſus, ſecundus longiſſimus, indiuiſus, caeteri ex ordine breuiores et ramoſi, vltimus bifidus; omnes ab vtroque latere membrana prominente aucti.

Pinna dorſi ſecunda, adipoſa, principio ſuo $2\frac{1}{2}$ lin. anterior ſitu, quam pinnae ani finis, baſi anguſtior, in extremo latior et attenuata, margine ſuperiore arcuato, inferiore recto fere praedita.

Pinna ani radiorum quadraginta (*a*) ſex, eiusdem fere inter ſe longitudinis, primis exceptis; 2—9 enim, qui nodo diſtinguuntur, reliquis paulo longiores ſunt; primus, $2\frac{1}{2}$ lin. longus, et ſecundus ſimplices, a tertio ad vltimum vsque omnes ramoſi. Nodus primus in ſecundo radio duas a baſi pinnae lineas diſtat, caeteri ex ordine pinnae baſi propiores. Pinna caudae, viginti ſex circiter radiorum, modice bifurcata.

Exſtat hic Piſcis in Cat. Piſc. Muſ. Petrop. p. 498, No. 307, ſub nomine: „Piſcis Harengi ſpecies, ventre mire intorto.„ Cum vero vel primo ſub intuitu vix vllam cum Harengis prodat ſimilitudinem, quin potius ob pinnam, ſic dictam, adipoſam, quam pro charactere Truttarum eſſentiali omnes aſſumunt Syſtematici, ad truttaceum genus debeat referri, noua id ſpecie multiplicare, ipſa natura iuſſit. Icon, quam a *Marcgrafio* primum, poſtea in *Willoughbeii* Ichthyographia, denuo aeri inciſam accepimus, rudis valde ac vitioſa eſt; pinnae enim dorſi primae ſitum iuſto anterio-

(*a*) In alio indiuiduo, quod ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum quatuor pollices, ac vndecim lineas longum erat, pinn. pect. 13, ventrales 8, dorſ. 1ma 9, ani 42 radiis componebantur. Anteriores pinnae ani radii nodos, vt in priore, non oſtendebant.

teriorem, et secundam, adiposam, magnam nimis, et radiis quasi instructam exhibet, quibus omnino caret. Meliorem itaque, et ad naturalem piscis magnitudinem factam, sisto.

Mensura.

	Poll. Paris.	lin.
Longitudo tota, sc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum	5	7
- - - ab oris extremo ad extremitatem corporis squamosam - - - -	4	11
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	—	$3\frac{1}{2}$
- - - - - ad marginem operc. branch. posticum - - - - -	—	$9\frac{1}{2}$
Ab oris extremo ad principium pinnarum pectoralium - - - - - -	—	$11\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - ventralium	2	$\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - p. dors. primae	2	9
- - - - - - - - - - - secundae	4	$2\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - ani - - -	2	$8\frac{1}{2}$
- - - - ad anum - - - - - - - - -	2	4
Longitudo pinnarum pectoralium - - - -	1	
- - - - - - ventralium - - - -	—	$7\frac{1}{3}$
- - - pinnae dorsi primae, ad basin, -	—	4
- - - - - - - - radiorum longiorum -	—	$10\frac{1}{2}$
- - - - - - secundae, ad basin, - -	—	$\frac{2}{3}$
- - - - - - - a basi ad extremum -	—	$2\frac{1}{3}$
- - - - - - ani, ad basin, - - - - -	1	10
- - - - - - radiorum primorum - -	—	6
- - - - - - - - - - posticorum - -	—	4

	Poll. Parif.	lin.
Longitudo pinnae caudae, fc. a primis radiis, feu ab eius principio, ad longiorum radiorum apices - - -	—	10
Extremitas corporis fquamofa in caudae pinnam extenfa ad - - - - -	—	2
Diameter oculi horizontalis - - - - - -	—	$2\frac{2}{3}$
- - - - - perpendicularis - - - - -	—	3
Diftantia inter primi pinnae pect. radii bafin et primum pinnae ventralis radium - - - - - - - -	1	$\frac{2}{3}$
- - inter primi pinnae ventralis primique pinnae ani radii bafin - -	—	$8\frac{1}{2}$
- - inter vltimi pinnae ani radii bafin, et primum pinnae caudae radium -	—	$3\frac{1}{2}$
- - inter vltimi pinnae dorfi primae radii bafin et pinnam fecundam, adipofam, - - - - - -	1	2
- - inter marginem pinnae adipofae pofticum et primum pinnae caudae radium - - - - - -	—	$5\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis, per oculorum axes - -	—	$4\frac{2}{3}$
- - - - per pofticum operc. br. marginem	—	$4\frac{1}{3}$
- - - - ad principium pinnae dorfi primae - - - - - - -	—	$4\frac{1}{3}$
- - - - - - - - - - - fecundae -	—	$2\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - caudae -	—	$1\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium - -	—	$6\frac{1}{2}$
- - - - per principium pinn. pect. - -	—	$11\frac{1}{3}$

Lati-

	Poll. Parif.	lin.
Latitudo perpendicularis 8 lin. pone pinn. pect. principium, vbi maxima latitudo - -	I	$2\frac{1}{3}$
- - - - - - per principium pinn. ventr. -	I	$1\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - - - - - ni -	I	I
- - - - - - - per pinnae ani finem - -	—	$4\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - caudae principium	—	$5\frac{1}{3}$

*** *** ***

III.

Gobio, pinnis pectoralibus flabello infiftentibus; pinna dorfi prima radiorum 12, fecunda 13.

Defcriptio.

Colorem pifcis naturalem Spiritus Vini conferuatorius in pallidum et exalbidum mutauit. Tab. XIV. Fig. 5. et 6.

A mandibulae fuperioris extremo caput ad oculos vsque, in fummo vertice difpofitos, ftatim notabiliter adfcendit, quorum ad marginem pofticum dorfi eft initium, in linea fere recta ad fecundam ipfius pinnam, et ab hac fub leuiffima vixque notabili curuatura caudae pinnam verfus excurrentis. A mandibulae inferioris extremo abdomen modice defcendit vsque ad anum, a quo modice adfcendit ad pinnae ani finem, et vlterius abhinc recto fere curfu caudae pinnam attingit. Latitudo corporis horizontalis ab oris extremo ad principii pinnae dorfi primae viciniam vsque fenfim in-

 crefcit,

crescit, dein ad caudam vsque sensim decrescit; latitudo e contrario perpendicularis, quae in vniuersum ad anticam maior est, quam ad posticam corporis partem, ab oris extremo statim haud exiguum capit augmentum iuxta oculum, et adhuc maiorem ad pinnam pectoralem, diminuitur vero sensim ab ano ad corporis extremum.

Frons ante oculos decliuis valde, ac planiuscula est, capitis vero verticem oculi totum occupant. Inter hos et pinnae dorsualis primae initium, dorsum in medio profunde satis carinatum, vtroque tamen margine conuexum, inter vtramque vero pinnam, vt et inter secundae finem, pinnaeque caudae principium, planiusculum; abdomen ante pinnas ventrales planum, inter has et anum subconuexum, inter pinnae ani finem et pinnae caudae principium ei dorsi parti, quae huic e directo opponitur, forma omnino simile est. Latera autem corporis planiuscula, vel leuiter tantum conuexa sunt; hinc totum corpus cathetoplateum est.

Superficies corporis glaberrima cutem exhibet, qualem in Gadis et Enchelyopis deprehendimus, squamulis nimirum minutissimis obtectam, desquamatoque pisce, corio illi similem, quod Sagrin vulgo dicitur.

Prona capitis pars, respectu corporis, breuis: limites enim ei orbitarum postici ponunt margines; sin vero quis, latera eius respiciens, branchiarum operculum, tanquam partem constituentem, ad illud referre velit,

velit, ei certe, ob late patentem huius ambitum, magnum videbitur.

Os obtuſum. Rictus oris patens. Clauſo ore, maxilla inferior ſuperiore paullo breuior eſt; vtraque vnica dentium acutorum ſerie inſtruitur, quorum intermedii lateralibus maiores, leuiter incuruati, et, in inferiore inprimis maxilla, prae ceteris antrorſum exporrecti ſunt. Duas ab oris extremo lineas, ad palatum ſuperius, fimbria quaedam transuerſa, valde eminens, ad palatum inferius linguae corpus valde oblongum conſpicitur, cuius apex obtuſus, maxillae vndique adnatus, 1 lineam circiter ab huius extremitate diſtat.

Narium foramen vtrinque vnicum, ab oris angulo 3, a maxillae ſuperioris extremo $1\frac{2}{3}$ lin. diſtans, oculis, quam oris extremo, propius, minimum, vixque peruium mihi viſum.

Oculi in ſummo vertice poſiti, grandes, maximam partem prominentes, contigui, cuteque ſunt obducti, a communi orta, cumque ſclerotica tunica, quae ſubiacet, et membranacea, nec ita dura eſt, ac alias eſſe ſolet, tela mediante celluloſa cohaerente. Circa marginem orbitae inferiorem oculi protuberantia ſinum efficit anguſtum, ſatis tamen profundum, cuius in imo cutis ad ipſum oculi inferiorem marginem, ſub palpebrae ſpecie, reflexa apparet.

Latera capitis ac branchiarum opercula cute laeui, eiusdemque indolis, ac in toto eſt corpore, inueſtiuntur

tur; squamas tamen in ea detegere non potui. Sic operculorum quoque margines eius productione augentur.

Apertura operculi branchiarum angusta valde, vtpote vix $2\frac{1}{2}$ lin. longa, sub postico illius margine quaerenda est. In membrana branchiostega, qua coercetur maxime operculi apertura, officula nulla deprehendi.

Squamae dense congestae, subrotundae, planae, tenuissimae, sinapis seminibus vix maiores, deciduae; decidere autem eas facilius ad anteriorem, quam ad posteriorem corporis partem, obseruaui.

Linea longitudinalis obscura, albicans, ad angulum basis superiorem istius pinnae pectoralis flabelli, de quo statim dicam, orta, recta fere ad caudam decurrit, in eamque ab vtroque latere lineolae minores albentes, ab interstitiis musculorum posterioris corporis partis ortae, oblique excurrunt, tam a dorso descendentes, quam ab inferioribus adscendentes.

Anus patulus, quatuor lineas oris extremo propior, quam pinnae caudae extremitati, postico suo margini appensam gerit papillam grandiusculam, oblongam, retrorsum spectantem, et, quantum videre potui, imperforatam, sub qua sinus satis profundus in corpore conspicitur, ab ipsa papilla maximam partem obtectus.

Pinnae

Pinnae ventrales duae, pectoralibus ſitu anteriores, planum efformant ouale, ſibique inuicem ita proxime adſtant, vt in vnam conflatae eſſe videantur; intimorum quidem radiorum baſes, membranae tenuiſſimae et anguſtiſſimae ope, cohaerent, ipſi vero hi ſingulae pinnae radii ad apices vsque ſoluti ſunt, neque extimus vnius pinnae radius cum extimo alterius connectitur, quod, ſi obtineret, pinnae hae non planum, ſed infundibulum potius, inter ſe formarent. Singula earum ſex inſtructa eſt radiis, ab extimo ad intimum ex ordine longioribus, et, extimo ſimplici, excepto, omnibus ramoſis.

Pinnae pectorales, ad extremum lanceolatae, ad baſin latiores, ſituque ventralibus poſteriores, lacerto cuidam, ſeu brachio, compreſſo, ſubtriangulari, inſiſtunt, cuius baſis, ſeu articulus, poſticum operculi branchiarum marginem contingit, pinnarum ventralium baſi e directo oppoſitus, eiusdemque, tanquam flabelli, ope ipſae pinnae mouentur. Hae e tredecim conſtruuntur radiis, ab extimo ad medios, ab vtroque latere, ex ordine ſenſim longioribus, plurimisque ſimplicibus, ſi medios excipias, verſus extremitates leuiter diuiſos.

Pinna dorſi prima, aequali, reſpectu diſtantiae ab oris extremo, cum pectoralibus ſitu gaudens, radiis ſuffulcitur duodecim, mollibus ac ſimplicibus, a primo ad vltimum ex ordine breuioribus, et ad 1 lin. vsque apicibus ſuis vltra membranam connectentem excurrentibus. Si expanditur haec pinna, triangulare efformat planum, tuncque demum etiam quinque istae conspiciuntur maculae ruso-fuscae, quibus in membranae summo, primum inter et secundum, secundum ac tertium, tertium et quartum, quartum et quintum, quintum denique et sextum radium, notatur. Margo vltimi huius pinnae radii posticus membranae ope medio dorso annectitur.

Pinna dorsi secunda, pinnae ani situ respondens, radiis tredecim est constructa: anterioribus breuioribus, posterioribus longioribus, omnibus mollibus ac simplicibus, (vltimo excepto, qui bifidus est,) radiisque alterius pinnae tenerioribus ac breuioribus.

Pinna ani, eiusdem cum priore situs, e radiis componitur decem, a primo ad vltimos ex ordine longioribus; ac omnibus, excepto vltimo, bifido, simplicibus.

Pinna caudae collapsa lanceolata, expansa vero ex ouali oblonga est, radiisque circiter triginta composita, a primis ad medios ex ordine longioribus, intermediisque ad extremitates ramosis.

Licet hic Piscis, ob ampliorem oris rictum, grandiores oculos, corpus quodammodo anguillaeforme et squamis minutissimis obtectum, cum Gadis aeque ac cum Gobionibus habeat affinitatem, pinnae tamen ventrales obtusae, sibique adeo proximae, vt in vnicam subrotundam connatae esse videantur, quum in Gadis alias

alias multo acutiores, magisque a se inuicem remotae deprehendantur, Gobionum, horumque spuriorum, generi eum potius subiungunt. Quid vero de specie indicem, breuiter dicam. Cum Paganello (*a*) Venetorum et Iozo (*b*) Romanorum quandam quidem ei esse similitudinem, ex descriptione colligitur; cum Iozo inprimis, quod radiorum pinnae dorsualis primae extremitates supra membranam, eos connectentem, emineant, ipsaque huius pinnae membrana in summo maculata sit; verum numero radiorum eiusdem pinnae nimis ab eo differt, quam vt eiusdem cum hoc speciei eum esse crederem. Variabilem quidem esse radiorum in pinnis numerum, propria obseruatione dudum cognoui, in tantum autem differre, vt in duplum increscat, et quidem sine alius, eiusdem generis, pinnae radiorum numeri incremento, nunquam mihi obuenit. Quum igitur in plurimis, hactenus cognitis, Gobionum speciebus, primam dorsi pinnam constanter sex radiis, secundam vero 10, 11, 13, 14, 16, 17 esse suffultam, recentiores contendant Auctores, (*c*) noster autem in pinna dorsi prima duodecim, in secunda tredecim

 obti-

(*a*) *Willoughb.* Hist. Pisc. Libr. 4. pag. 207. §. II. Tab. N. 12. 4. *Linn.* Syst. nat. edit. dec. p. 263. no. 2.

(*b*) *Willoughb.* Hist. Pisc. Libr. 4. pag. 207. §. III. *Linn.* Syst. nat. edit. dec. pag. 263. no. 5.

(*c*) *Linn.* Syst. Nat. edit. dec. p. 262, 263. No. 1, 2, 3, 4, 5.

obtinuerit radios, pinnarumque ambae conſequenter magnitudine inter ſe fere pares ſint, cum ob eandem rationem in caeteris ſpeciebus earum anterior minor, poſterior maior enaſcatur, deſcriptum a nobis piſcem pro noua Gobionum ſpecie habere, conuenit.

Patria eius mihi incognita eſt, nec plura de eo referre poſſum, quod in Cat. Muſ. Petrop. nullibi eius facta ſit mentio.

Menſura.

	Poll. Parif.	lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum	3	10
- - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - -	3	$2\frac{1}{2}$
- - - - ab oris extremo ad oculi medium	—	$4\frac{1}{3}$
- - - - - ad angulum operc. br. poſticum - - -	—	$10\frac{1}{2}$
- - - - - ad pinnarum ventralium principium - -	—	$9\frac{1}{2}$
- - - - - ad flabelli pect. baſin. (ad marginem inferiorem)	1	
- - - - - ad pinnarum pectoralium primos radios - - -	1	$1\frac{1}{3}$
- - - - - ad principium pinnae dorſi - - - - primae	1	1
- - - - - - - - - - - ſecundae	1	$10\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - ani -	1	11
- - - - - ad anum - - - - -	1	9

Longi-

	Poll.	lin. Paris.
Longitudo pinnarum ventralium - - - -	—	6
- - - - - - - pectoralium - - - -	—	$7\frac{1}{2}$
- - - pinnae dorsi primae, ad basin - -	—	6
- - - - - - - - - radiorum longiorum		9
- - - - - - - - - secundae, ad basin, - -	—	$7\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - radiorum longiorum	—	5
- - - - - - - ani, ad basin, - - - -	—	5
- - - - - - - - - radiorum longiorum	—	$3\frac{1}{2}$
- - - - - caudae, sc. a primis radiis, seu ab eius principio, ad longiorum radiorum apices - -	—	10
Extremitas corporis squamosa in caudae pinnam extensa ad - - - -	—	3
Diameter oculi - - - - - - - - - -	—	$2\frac{1}{3}$
Distantia inter primi pinnae ventralis radii basin et primum pinnae pectoralis radium -	—	3
- - - inter intimi pinnae ventralis, et primi pinnae ani radii basin - - -	1	
- - - inter vltimi pinnae ani radii basin, et primum pinnae caudae radium -	—	$8\frac{1}{2}$
- - - inter vltimi pinnae dorsi primae, et primi pinnae dorsi secundae radii basin - - - - - - - -	—	3
- - - inter vltimi pinnae dors. 2dae radii basin et primum pinnae caudae radium	—	$5\frac{1}{3}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes - -	—	4
- - - per posticum operc. br. marginem	—	$5\frac{1}{2}$
- - - per principium pinnae dorsi primae -	—	4

		Poll.	lin. Parif.
Latitudo horizontalis per principium pinnae dorsi secundae	-	—	$3\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - caudae	-	—	$1\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oris angulum	- -	—	4
- - - - - - per oculi medium	- -	—	$6\frac{1}{4}$
- - - - - - - per principium pinnarum ventralium	- -	—	7
- - - - - - - - - - pectoralium	-	—	7
- - - - - - - - - - pinnae ani	-	—	$5\frac{3}{4}$
- - - - - - - per pinnae ani finem		—	$4\frac{1}{2}$
- - - - - - - per caudae principium		—	$3\frac{1}{2}$

ASTRONO-

ASTRONOMICA.

INVESTI-

INVESTIGATIO POSITIONVM

INSIGNIORVM RVSSIAE LOCORVM SECVNDVM EORVM LONGITVDINEM AC LATITVDINEM OBSERVATIONIBVS ASTRONOMICIS MECVM COMMVNICATIS INNIXA.

Auctore

A. N. GRISCHOW.

Cum mihi ex mandato Illuſtriſſimi Praeſidis emendandi Atlantis Ruſſici cura demandata ſit, de locorum inſigniorum Ruſſici Imperii poſitionibus ex aſtronomicis obſeruationibus rite determinandis cogitaui. Hunc in finem Academiam rogaui, vt mecum communicaret obſeruationes aſtronomicas, quotquot ſunt, in Archiuo aſſeruatas. Quo facto, praecipuorum primum locorum longitudines ac latitudines, quantum potero, accuratiſſime ex ſupra memoratis obſeruationibus elicere, et prout eas cognitas habebo, cum Cl. Academicis communicare ſtatui, vt peractis calculis, Catalogus longitudines ac latitudines praecipuorum locorum exhibens conſtrui poſſet. Sequentes, igitur inpraeſentiarum acceptas habeatis locorum determinationes rogo.

Determinatio differentiae inter Meridianum Petropolitanum et Archangelopolitanum.

Quamuis V. Cl. *De l'Isle de la Croyere* annum fere integrum Archangelopoli sit commoratus, paucas tamen ibi habuit eclipsium Satellitum Iouis obseruationes, quarum praeterea maxima pars debita accuratione carere mihi videtur. Vnica tantum sese mihi obtulit eclipsium Satellitum Iouis obseruatio reliquis praestantior atque accuratior, ex qua Meridianorum differentiam supra dictam eruere sequenti modo conabor:

Emersio primi Satellitis Iouis obseruata Archangelopoli

1728. Mart. 3.	$9^h\ 56'.25''$
Aequatio meridiei subtrah.	25
Tempus verum emersionis	$9^h.56'.\ 0''$
Eadem obseruatio habita est Madriti	$7.\ \ 6.\ \ 17$
Different. Merid. inter Archangel. et Madrit.	$2^h.49'.43''$
Different. Merid. Parisios inter et Madritum	$24.\ 18$ subtr.
Differentia Merid. Parisios inter et Archangel.	$2^h.25'.25''$
Posita diff. Merid. inter Parisios et Petrop. =	$1.\ 52.\ \ 0$
erit differ. quaesita Mer. inter Petrop. et Archang.	$0^h.33'.25''$ temp.
et Longitudo Meridiani Archangelopol. =	$56°.21'.15''$

Haec Meridianorum differentia non facile maior statui potest, habita imprimis circumstantiarum huius obseruationis, de quibus *de la Croyere* mentionem fecit, ratione: Si enim secundum monita Cl. *de la*

Croyere

Croyere verum emerſionis momentum obſeruatum eiusdem emerſionis tempus praecedat, Meridianorum differentia prodibit minor, quantitate nimirum errorem in obſeruatione haerentem aequante.

Calculus igitur noſter eorum plane conuellere videtur opinionem, qui longitudinem Archangelopolis augendam eſſe contendunt; longitudinem huius vrbis e contrario in mappa Academiae notatam, 10 minimum minutis primis Aequatoris imminuendam eſſe ſtatuo.

Cl. *de l'Isle* quidem in Tom. III. Commentariorum differentiam Meridianorum inter Petropolin et Archangelopolin, dimidio circiter vnius minuti primi temp. maiorem aſſignauit; notandum vero eſt Cl. *de l'Isle* obſeruationes eclipſium ſatellitum Iouis a Cl. *de la Croyere* Archangelopoli habitas, ſine vllo delectu omnes adhibuiſſe, et quod maius eſt, aequationem Meridiei, qua tempus a *de la Croyere* notatum corrigendum erat, prorſus neglexiſſe, vt in Ephemeridibus obſeruationum Archangelopoli habitarum videre eſt.

Ad latitudinem huius vrbis ſcite determinandam, iis praecipue vſus ſum obſeruationibus, quibus ſimul quadrantis error innoteſceret, aequalibus nimirum, ſiue potius fere aequalibus altitudinibus ſiderum boream auſtrumque verſus, vno eodemque inſtrumento obſeruatis. Paucae quidem eiusmodi reperiuntur in Ephemeridibus Cl. *de la Croyere* obſeruationes, iis tamen adornandis ita ſtudui, vt latitudo exinde deducta accuratior forſitan ſit cenſenda ea, quam Cl. *de la Croyere* ex diuerſis obſeruationibus, poſito errore quadrantis in omnibus

 limbi

limbi eiusdem punctis conſtante, adhibitisque elementis noſtris temporibus accuratius ab aſtronomis definitis, eruere eſt conatus. Nonnullas tamen hoc in calculo, vt et in ſequentibus, correctiones minores, recens ab aſtronomis probatas, ex. gr. aberrationem ex ſucceſſiua luminis propagatione ortam, et propter defectum ſufficientis accurationis in obſeruationibus ipſis, et propter inopiam Catalogi, vera fixarum loca minoribus illis aequationibus correcta, exhibentis, paſſim omittere ſum coactus.

Obſeruationes itaque ad noſtrum inſtitutum maxime idoneae, ſunt altitudines meridianae marg. ☉ bor. obſeruatae 1728. d. 2. 21 et 26 Febr. ſt. n. quas cum altitudinibus meridianis α Lyrae d. 23 et 26. Febr. eiusdem anni infra Polum captis, ſequenti modo comparare conſultum viſum eſt.

Altit. mer. app α Lyrae infra Polum d. 23 Febr.	=	$13^{\circ}.15'.20''$
d. 26 Febr.	=	$13\quad 14.\ 40$
Altit. merid. app. α Lyrae media - -	=	$13^{\circ}.15'.\ 0''$
Refractio	=	$-\quad 4.\ 8$
Altit. merid. α Lyrae refr. corr.	=	$13^{\circ}\ 10'.52''$
Declinatio α Lyrae - -	=	$38^{\circ}.33'.13''$ bor.

Comparatio alt. meridd. α Lyrae infra Polum cum altit. mer. ☉lis d. 2 Febr.

Altitud. merid. app. marg. ☉ bor.	=	$8^{\circ}.53'\ 50''$
Refr. et parall.	=	$-\quad 6.\ 0$
		$8^{\circ}.47\ 50''$
½ Diamet. ☉	=	$16.\ 17$

Altitud.

Altitud. merid. centri ☉ refr. et Paral. corr. =	8°. 31′. 33″
Dift. mer. centri ☉ a Zenith refr. et Par. corr. =	81°. 28′. 27″
Dift merid. α Lyrae a Zenith refr. corr. =	76 49. 8
Summa dift. merid. obferuat. a Zenith =	158°. 17′. 35″
Pofita obliquit. eclipt. An. 1728. =	23°. 28′. 38″
Declinatio centri ☉ erit - - =	16°. 58′. 30″ A.
Dift. centri ☉ a Polo Aequat. bor. =	106°. 58′. 30″
Dift. α Lyrae a Polo Aequat. bor. =	51. 26. 47
Summa dift. a Polo aequat. bor. =	158°. 25′. 17″
Summa dift. merid. obferuat. a Zenith =	158. 17. 35
Dift. =	7′. 42″
Error igitur quadrantis ab altit. obferuatis fubtrah. =	3′. 51″
Altitudo merid. α Lyrae refr. corr. =	13°. 10′. 52″
Error quadr. —	3. 51
Altit. merid. vera α Lyrae =	13° 7′. 1″
Declinatio α Lyrae =	38. 33. 13
Altitudo Aequatoris =	25°. 26′ 12″
Eleuatio Poli Archangel. =	64°. 33′. 48″

Comparatio altit. merid. α Lyrae infra Polum cum altit. merid. ☉ d. 21. Febr.

Altitudo merid. app. marg. ☉ bor. =	15°. 4′. 45″
Refr. et Parall. - - =	— 3. 28
	15°. 1′ 17″
½ Diameter ☉ =	16 14

Alt. merid. centri ⊙ Refr. et Parall. corr.	= 14°.45′. 3″
Dift. mer. centri ⊙ a Zenith refr. et Par. corr.	= 75°. 14′. 57″
Dift. merid. α Lyrae a Zenith refr. corr.	= 76. 49. 8
Summa dift. merid. obferuat. a Zenith	= 152°. 4′. 5″
Declinatio centri ⊙	= 10°.45′.23″½ A.
Dift. centri ⊙ a Polo Aequat. bor.	= 100°.45′.23″½
Dift. α Lyrae a Polo Aequat. bor. - -	= 51. 26. 47
Summa dift. a Polo bor aequat. - -	= 152°.12′.10″½
Summa dift. merid. obferuat. a Zenith	= 152°. 4′. 5″
Different.	= 8′. 5″½
Error igitur quadr. ab altitud. obfer. fubtr.	= 4′. 3″
Altitud. merid. α Lyrae refr. corr. -	= 13°.10′.52″
Error quadr. - -	= − 4. 3
Altitud. merid. vera α Lyrae - -	= 13°. 6′.49″
Declin. α Lyrae	= 38. 33. 13 bor.
Altitud. Aequat.	= 25°.26′.24″
Eleuatio Poli Archangel.	= 64°.33′.36″.

Comparatio altitud. merid. α Lyrae infra Polum cum altitud. merid ⊙ d. 26. Febr.

Altitudo merid. app. marg. ⊙ bor. - -	= 16°.54′.45″
Refr. et Parall. - - -	= − 3. 4
	16. 51. 41.
½ Diam. ⊙	= − 16. 13.

Altit.

Altit. merid. centri ⊙ Refr. et Parall. corr.	= 16° 35′.28″
Dist.mer. centri ⊙ a Zenith Refr et Par. corr.	= 73° 24′.32″
Dist. merid. α Lyrae a Zenith Refr. corr.	= 76. 49. 8
Summa dist. merid. obseruat. a Zenith -	= 150° 13′ 40″
Declinatio centri ⊙	= 8°.55′.23″ A.
Dist centri ⊙ a Polo Aequat. bor. - -	= 98°.55′.23″
Dist. α Lyrae a Polo Aequat. bor. - -	= 51. 26. 47
Summa dist. a Polo Aequat. bor. - -	= 150° 22′.10″
Summa dist. merid. obseruat. a Zenith	= 150°.13. 40
Differ.	= 8′.30″
Error igitur quadrantis ab altit. obseru subtr.	= 4′.15″
Altitudo merid. α Lyrae Refr. corr. - -	= 13° 10′.52″
Error quadr. - - -	= − 4. 15.
Altit. merid. vera α Lyrae - - -	= 13°. 6′.37″
Declin. α Lyrae - - -	= 38. 33 13 bor.
Altit. Aequat. - - - - -	= 25°.26′.36″
Eleuatio Poli Archangel. - - -	= 64° 33′.24″.

Ex prima igitur comparatione prodit eleuatio Poli Archangel = 64° 33′.48; ex secunda = 64° 33′.36″; ex tertia = 64°. 33′. 24″.

Hinc media atque proxime ad veram accedens eleuatio Poli Archangel. erit = 64°. 33′. 36″.

In mappa Academiae situs vrbis Archangelopolis minutis aliquot iusto borealior est.

Deter-

Determinatio longitudinum vrbium Rigae et Reualiae.

Incertae atque ancipites ſemper mihi viſae ſunt in mappa Academiae vrbium Rigae et Reualiae notatae poſitiones, reſpectu praecipue earum longitudinum. Operae igitur quin pretium eſſet non dubitaui, vt ex obſeruationibus, quas Academiae Adiunctus *Kraſſilnikow* hiſce in vrbibus habuit, earum longitudinem atque latitudinem diligentius inueſtigarem. Longitudinum determinatio, cum nullae adſint obſeruationes Satellitum Iouis reſpondentes iis, quas *Kraſſilnikow* habuit, difficillima quidem videtur; artificium vero, in quo elaborando ac perficiendo noſtris temporibus euigilarunt Aſtronomorum curae et cogitationes, eclipſes Satellitum Iouis tabularum ope ſtricte praedicendi, noſtro in negotio difficultates vel maiori ex parte tollere atque ſuperare valet: Tabulae enim motuum Satellitum Iouis, quas Cel. *Wargentin* paucis abhinc annis, ex magno obſeruationum numero, ſollerter concinnauit, adeo arcte cum coelo ſunt connexae, vt calculos eclipſium 1^{mi} Satellitis Iouis, ſecundum harum Tabularum numeros inſtitutos, raro integro minuto primo temp. ab obſeruationibus diſſentire ſoleat.

Summo propterea iure, obſeruationibus correſpondentibus calculo noſtro abſentibus, obſeruationes, imprimis eclipſium I^{mi} Satellitis Iouis reliquis accuratiores cum calculo ex ſupra dictis tabulis conferre et longitudinem locorum, de quibus ſermo, exinde ſequenti modo deducere licet.

An. 1750.

An. 1750. d. 31. Oct. st. v.	$15^h. 4'. 26''$	tempore vero obseruata fuit accurate Rigae emersio I^{mi} Satell. Iouis, tubo 16. ped.
	13. 39. 30.	tempore vero emersio haec contigit Parisiis sec. Tab. Cel. *Wargentini.*
	$1^h. 24'. 56''$	Differentia Meridianorum Parisios inter et Rigam.
An. 1750. d. 18. Dec. st. v.	$9^h. 44'. 14''$	tempore vero optime obseruabatur Rigae emersio I^{mi} Satell. Iouis tubo 16 ped.
	8. 18. 37	tempore vero emersio haec contigit Parisiis sec. Tab. *Wargent.*
	$1^h. 25'. 37''$	Differ. Merid.

Differentia itaque Meridianorum media, ex binis emersionibus I^{mi} Satellitis Iouis optime obseruatis, deducta, $= 1^h. 25'. 15''$.

Occurrit adhuc in ephemeridibus *Krasilnikowii* emersio II^{di} Satellitis Iouis exacte obseruata Rigae An. 1750. d. 22.

d. 22. Dec. $6^{h}.0'.43''$ tempore vero: secundum Tabulas *Wargent.* emersio haec contigit 4. 39. 19 temp. vero Parisiis; differentia itaque Meridianorum ex hac obseruatione prodiret $= 1^{h}.21'.24''$.

Cum vero II^di^ Satellitis numeri non adeo exacte coelo respondeant, horumque Meridianorum differentia supra ex obseruationibus I^mi^ Satellitis accuratius deducta, sit $= 1^{h}.25'.15''$, hac secundi Satellitis obseruatione, ad inueniendum veram Merid. Parisini et Reualiensis differentiam, vtar. In ephemeridibus enim obseruationum *Krasilnikowii* duae tantum obuiae sunt II^di^ Satellitis obseruationes Reualiae habitae; altera ab ipso *Krasilnikow* d. 29. Dec. 1750. peracta fuit, altera autem d. 30. Ian. 1751 a discipulo *Kurganow* aere impuro ibidem habita est. Priori propterea ad nostrum institutum vti fas est. Hunc vero in finem ex supra relata emersione II^di^ Satellitis Iouis d. 22. Dec. 1750. Rigae obseruata, errorem Tabularum *Wargent.* primum deducamus necesse est. Si ponamus igitur differentiam Merid. inter Parisios et Rigam ex emersionibus primi Satellitis Iouis accurate satis esse definitam, haud difficile patet, errorem Tabularum *Wargentinii* secundi Satellitis Iouis tunc temporis fuisse $= 3'.50''$ a tempore ex Tabulis deducto subtrahendis, verum vt habeatur emersionis momentum. Obseruatio Reualiae habita 7 tantum diebus posterior est altera, ex qua errorem Tabularum determinaui, eaque de causa hunc in finem optimo iure adhiberi potest. Quo statuto, inueni tempus emersionis verum secundi Satellitis Iouis sec. Tab. *Wargent.* sub Merid. Paris. d. 29. Dec. 1750 $7^{h}.14'.57''$; subductis $3'.50''$ pro

pro errore Tabularum, habebimus verum emersionis momentum Parisiis $7^h. 11'. 7''$, quod Reualiae obseruatum fuit $8^h. 38'. 57''$. Differentia itaque Merid. inter Parisios et Reualiam erit $= 1^h. 27'. 50''$ temp. et longitudo Reualiae $= 41^\circ. 57'. 30''$, longitudo autem vrbis Rigae $= 41^\circ. 18'. 45''$, posita longitudine Meridiani Parisini $= 20^\circ. 0'$. Secundum Mappam geogr. Academiae longitudo Reualiae est $= 42^\circ. 14'$, et longitudo Rigae Paris. $= 42^\circ. 17'$, adeo vt error in longitudine Meridiani Reualiensis sit $= 16\frac{1}{2}'$, et Meridiani Rigensis $= 58\frac{1}{4}'$ siue integro fere gradui. Riga itaque in Mappa geogr. Academiae Merid. Petropol. propior quam Reualia, nunc magis occidentem versus est collocanda. Neque vero mihi temperare possum, quo minus fatear, obseruationes, ad definiendam latitudinem aeque ac longitudinem hisce in locis institutas, haud sufficere, siue non adeo esse accuratas, vt earum beneficio supra dictarum vrbium latitudo et praecipue longitudo, intra vnum min. prim. temp. stabiliri possit. Tabularum primi Satellitis Iouis erroris quidem quantitatem accurate definire non possumus, eam vero vnum min. prim. temp. non superare, statuere fas est. De errore in obseruationibus ipsis haerente, aeque quidem incerti sumus; ex obseruationum autem circumstantiis concludere licet, errorem hunc, si quis adest, a tempore emersionum supra notato esse subtrahendum, ita vt longitudo Rigae et Reualiae erroris huiusce quantitate decrescere, error contra vero Mappae geogr. eadem quantitate accrescere debeat.

Latitudinis vrbis Rigae determinatio.

Latitudo vrbis Rigae vt rite determinaretur, *Krasilnikowius* aequales capere debuisset altitudines fixarum in vtraque Meridiani parte; hoc vero astronomorum artificio neglecto, altitudines Solis in parte Meridiani australi obseruatas, cum altitudinibus fixarum fere aequalibus, in parte Meridiani boreali, siue infra Polum captis, comparare cogimur.

Obseruationes itaque, quae instituto nostro maxime accommodae videntur, sunt altitudo meridiana apparens marginis Solis borealis obseruata d. 8. Oct. 1750. $= 23^\circ.14'.20''$ et altitudo meridiana apparens ϱ Vrsae maioris eodem instrumento infra Polum obseruata d. 12. Octobr. 1750. $= 23^\circ.7'.0''$. Posita obliquitate Eclipticae tempore obseruationum $= 23^\circ.28'.30''$, et differentia Meridianorum inter Parisios et Rigam $= 1^h.25'.15''$, inueni declinationem centri Solis pro meridie d. 8. Oct. $= 10^\circ.1'.16\frac{1}{2}''$ A. Declinatio vero ϱ Vrsae maioris sec. Catal. Cl. *de la Caille* est $= 56^\circ.14'.35''$ bor. Ad arcum igitur Meridiani apparentem, limbo Solis boreali et ϱ Vrsae maioris interceptum, inueniendum, distantiam apparentem limbi Solis borealis et ϱ Vrsae maioris a Polo Aequatoris boreo in vnam summam colligamus necesse est: distantia autem centri Solis vera a Polo Aequatoris boreo est $= 100^\circ.1'.16\frac{1}{2}''$, quocirca erit distantia vera limbi Solis borealis a Polo Aequatoris boreo $= 99^\circ.45'.7\frac{1}{2}''$, eiusdemque distantia apparens $= 99^\circ.43'.0''$, posita nimirum refractione $= 2'.16\frac{1}{2}''$ et Parall. Solis in altitud. $= 9''$. Simili modo

modo prodibit diſtantia vera ϱ Vrſae maioris a Polo Aequatoris boreo $= 33°.45'.25''$ eiusdemque diſtantia apparens, propter refractionem $2'.17''$, $= 33°.43'.8''$; arcus igitur Meridiani apparens inter limbum Solis borealem et ϱ Vrſae maioris $= 133°.26'.8''$. Eundem iam Meridiani arcum ex obſeruationibus ſupra relatis inuenimus $= 133°.38'.40''$, quo cum antecedenti comparato, habebimus duplum erroris quadrantis $= 12'.32''$ ideoque ſimplicem quadrantis errorem circa 23. altitud. gradum $= 6'.16''$ ad altitudines obſeruatas addendum.

Errore quadrantis circa ſupra dictum diuiſionis punctum ſtabilito, facili negotio ex iisdem obſeruationibus veram vrbis Rigae latitudinem ſequenti modo aſſignare poſſumus:

Altitudo merid. app. limbi ☉ bor.	$= 23°.14'.20''$
Error quadr.	$= + \quad 6.\ 16$
Altit. mer. app. errore quadr. corr.	$= 23°.20'.36''$
Refract. et Paral.	$= - \quad 2.\ 7\frac{1}{2}$
Altit. merid. limbi ☉lis bor. vera	$= 23°.18'.28\frac{1}{2}''$
$\frac{1}{2}$ Diameter ☉	$= - \quad 16.\ 9$
Altitud. merid. vera centri ☉lis	$= 23°.\ 2'.19\frac{1}{2}''$
Declinatio centri ☉lis	$= 10.\ 1.\ 16\frac{1}{2}$ A.
Altitudo Aequatoris vera	$= 33°.\ 3'.36''$, hinc
Eleuatio Poli Rigae	$= 56°.56'.24''$.

Eodem modo eleuatio Poli ex altera obſeruatione ſtellae ϱ Vrſae maioris deduci poteſt. Multo vero accuratius definiri poſſet eleuatio Poli, ſi *Kraſilnikowius*

 aequa-

aequales obseruasset fixarum notabiliorum altitudines meridianas boream austrumque versus. Latitudo vrbis Rigae in Mappa geogr. Acad. est $= 56°. 51\frac{1}{2}'$ circiter.

Latitudinis vrbis Reualiae determinatio.

Latitudinem vrbis Reualiae consimili modo ex obseruationibus fixarum, a *Krasilnikowio* ibi habitis, definire conatus sum Hunc in finem adhibui altitudinem meridianam apparentem stellae Rigel, obseruatam Revaliae d. 19. Ian. 1751 $= 21°. 58'. 20''$, itemque altitudinem apparentem meridianam γ Draconis d. 21. Ian. 1751. eodem organo inuentam $= 20°. 53'. 5''$. * Declinatio stellae Rigel, sec meas obseruationes Parisiis habitas, pro tempore obseruationis est $= 8°. 30'. 33''$ A. ** Declinatio autem γ Draconis sec. obseruationes Cel. Astronomi Anglicani *Beuisii* mecum communicatas $= 51°. 31'. 21''$ bor. posita eleuatione Poli Obseruatorii Grenowicensis $= 51°. 28'. 30''$. Hisce positis, erit distantia vera stellae Rigel a Polo Aequatoris boreo $= 98°. 30'. 33''$, eiusdemque distantia apparens propter refract. $= 98°. 28'. 7''$. Eodem modo reperimus distantiam veram γ Draconis a Polo boreo Aequat. $= 38°. 28'. 39''$ eiusdemque distantiam apparentem a Polo $= 38°. 26'. 7''$. Arcus itaque Meridiani apparens inter Rigel et γ Draconis erit $= 136°. 54'. 14''$. Secundum obseruationes supra relatas vero eiusdem arcus mensura est $= 137°. 8'. 35''$, ita vt erroris quadrantis duplum sit $= 14'. 21''$ errorque eiusdem instrumenti simplex $= 7'. 10\frac{1}{2}''$ ad altitudines obseruatas addendus;

quo

quo inuento, eleuatio Poli Reualiae sequenti calculo definitur:

Altitudo merid. app. Rigel	$= 21°.58'.20''$
Error quadr.	$= + \quad 7.\ 10\frac{1}{2}$
Altit. mer. corr.	$= 22°.\ 5'.30\frac{1}{2}''$
Refr.	$= - \quad 2.\ 25$
Altit. merid. vera	$= 22°.\ 3'.\ 5\frac{1}{2}''$
Declinatio stellae	$= \ 8.\ 30.\ 32\frac{1}{2}$ A
Altitudo Aequat.	$= 30°.33'.38''$ vel
Eleuatio Poli Reualiae	$= 59°.26'.22''$.

In Mappa geogr. Academiae huius vrbis latitudo est $= 59°.22'$.

* Inuestigatio declinationis stellae Rigel ex obseruationibus, quas quadrante 3 ped. radio in Obseruatorio Regio Parisino institui.

1748. st. n. Ad lumen crepusculi et diei

4. Mart. altit merid. app. stellae Rigel	$= 32°.41'.3''.3$
7. Mart. - - - -	32. 41. 4. 0
16. Mart. - - - -	32. 41. 0. 8

Error huius quadrantis, ex vtraque verificatione circa horizontem et verticem instituta deductus, aequatur $30''$ ab altitudinibus obseruatis subtrahendis. Habebimus igitur altitud. merid. stellae Rigel, errore quadrantis et refractione correctam, vt sequitur:

d. 4.

d. 4. Martii $= 32°.39'.3''.3$
7. Mart. - - 32. 39. 4. 0
16. Mart. - - 32. 39. 0. 8.

Aberratio ſtellae Rigel in declinat. d. 4. Mart. eſt $= 10''.2$, d. 7 Mart. $= 10''.3$ et d. 16 Mart. $= 10''.4$ auſtrum verſus. Quantitates has ad altitud. merid. ſupra notatam addendo, inueniemus altit. merid. Rigel errore quadrantis, refractione et aberratione correctam,

d. 4. Mart. $= 32°.39'.13''.5$
7. Mart. - - 32. 39. 14. 3
16. Mart. - - 32. 39. 11. 2, hinc

Media alt. mer. vera Rigel $= 32°.39'.13''$.

Eleuationem Poli Obſeruatorii Reg. Pariſ. eodem inſtrumento accuratiſſime inueni $= 48°.50'.14''$, ſiue altit. Aequat. $= 41°.9'.46''$, ex qua facili negotio fluit declinatio vera ſtellae Rigel ad initium menſ. Mart. 1748. $= 8°.30'.33''$ Auſtr. Correctio declinat. huius ſtellae a nutatione axis telluris producta, aequatur $7''.8$ add. ita vt eius declinat. media ad init. menſ. Mart. ſit $= 8°.30'.40''.8$ A. ſiue declinat. media ſtellae Rigel ad initium An. 1748. $= 8°.30'.41''.6$ A.

Variatio declinationis ſtellae Rigel annua cum ſit $5''$, habebimus declinationem huius ſtellae mediam ad 19. Ian. ſt. v. 1751. reductam $= 8°.30'.26''.2$. A. Aberratio in declinat. tunc temporis erat $= 7''.3$ auſtrum verſus et correctio declinat. ob nutat. axis telluris $= 0''.6$ ſubtr. quocirca erit declinatio ſtellae Rigel apparens ad 19 Ian. ſt. v. 1751. reducta $= 8°.30'.33''$. A.

** In-

** Inuestigatio declinationis stellae γ Draconis ex obseruationibus Cel. Beuisii in Obseruatorio Regio Grenowicensi sectore 8. pedum radio peractis.

1748. Aug. $\frac{6}{17}$. Limbo sectoris Orient. spect dist. γ Drac. a vertice $= 0^{\circ}.3'.\ 5''$ Bor.
Aug. $\frac{16}{27}$. Limbo sect. Occid. spect. $= 0^{\circ}.3'.27''$ vers.

Aberratio declinat. stellae γ Drac. d. $\frac{6}{17}$. Aug. aequatur $16''.1$, et d. $\frac{16}{27}$. Aug. $17''.7$ boream versus. Distantia igitur huius stellae a vertice Obseruat. Grenowicensis, aberratione correcta, erit:

d. $\frac{6}{17}$. Aug. $= 0^{\circ}.2'.48''.9$
d. $\frac{16}{27}$. Aug. $= 0^{\circ}.3'.\ 9''.3$ hinc

Vera γ Draconis a vertice distantia $= 0^{\circ}.2'.59''.1$

Eleuatio Poli Obseruatorii Grenowicensis ponitur $= 51^{\circ}.28'.30''$, ex qua porro deducimus declinationem veram stellae γ Draconis circa tempus supra notatum $= 51^{\circ}.31'.29''.1$. bor. Correctio praeterea declinationis huius stellae, a nutatione axis telluris producta, tunc temporis erat $= 5''.7$ add. ideoque declinatio γ Draconis media ad initium anni 1748. $= 51^{\circ}.31'.35''.4$ bor. habita nimirum variationis declinat. huius stellae ob praecessionem aequinoctiorum mediam ratione.

Ad declinationem iam apparentem γ Draconis pro tempore obseruationis Reualiensis inueniendum, habemus

bemus variationem declinat. huius ſtellae mediam, interuallo temporis inter obſeruationem Reualienſem et epocham ſupra notatam reſpondentem 2″. 5 ſubtr. Correctionem declinationis huius ſtellae ob nutationem axis telluris = 1″. 4 add. et aberrationem in declinat. tempori obſeruationis conuenientem = 13″. 4 auſtrum verſus, hinc declinat. γ Draconis apparent. ad 21 Ian. ſt. v. 1751 = 51°. 31′. 21″. 17 bor.

Determinatio longitudinis loci Dager-Ort ad oram maritimam Inſulae Dagho occidentalem ſiti.

Quia *Kraſilnikowius* eodem in itinere nonnullas quoque obſeruauit in Inſula Dagho, in loco Dager-Ort, primi Satellitis Iouis immerſiones, non alienum eſſe videtur a noſtro inſtituto, ex memoratis obſeruationibus loci Dager-Ort longitudinem methodo in determinatione longitudinis vrbis Rigae expoſita eruere; praeſertim cum immerſiones Satellitum ad hocce negotium magis adhuc multo, quam emerſiones, ſint accommodatae.

An. 1750. d. 31. Iul. ſt. v. 11^h. 45′. 7″ tempore vero accurate obſeruata fuit in loco Dager Ort immerſio primi Satellitis Iouis tubo 16. ped.

10^h.

	$10^h. 26'. 44''$.	temp. vero immersio haec contigit Parisiis sec. Tab. *VVarg.*
	$1^h. 18'. 23''$	Differentia Mer. Parisios inter et locum Dager-Ort.
An. 1750. d. 16. Aug. st. v.	$10^h. 4'. 23''$	temp. vero obseruabatur ibidem immersio primi Satellitis Iouis tubo 16. ped. coelo grate sereno, vento autem vehemente.
	8. 46. 16	temp. vero immersio haec contigit Parisiis sec. Tab. *VVargent.*
	$1^h. 18'. 7''$	Differentia Mer.
An. 1750. d. 6. Sept. st. v.	$15^h. 53'. 32''$	temp. vero accuratissime obseruata fuit ibidem immersio primi Satell. Iouis tubo 16. ped.

$14^h. 35'. 6''$ temp. vero immersio haec contigit Parisiis sec. Tab. *Warg.*

$1^h. 18'. 26''$ Diff. Meridian.

Differentia Meridianorum igitur media inter Parisios et locum Dager-Ort erit $= 1^h. 18'. 20''$, et longitudo loci Dager-Ort $= 39° 35'$. Secundum Mappam geogr. Academiae huius loci longitudo est $= 39°. 26'$.

Determinatio latitudinis loci Dager-Ort.

Eleuationem Poli huius loci, ex aequalibus fixarum altitudinibus meridianis boream atque austrum versus captis, sic determinare adnisus sum:

D. 20 Iul. 1750. *Krasilnikow* quadrante $2\frac{1}{2}$ ped. radio obseru.

Altitudinem merid. app. Lucidae Aquilae	$= 39°. 25. 42''$
d. 22. Iulii - - - - - - -	$= 39. 25. 57$
d. 28. Iulii - - - - - - -	$= 39. 26. 7$
Altit. merid. app. media α Aquilae	$= 39°. 25'. 55''$

Eodem instrumento sequentes cepit in parte Meridiani boreali altitudines meridianas ϰ Draconis:

d. 21. Iul. 1750.	$= 40°. 14'. 20''$
3. Aug. - - -	$= 40. 14. 5$
5. Aug. - -	$= 40. 14. 20$
Altit merid. app. media ϰ Draconis	$= 40°. 14'. 15''$.

Decli-

Declinatio α Aquilae tempore obſeruationum ſupra relatarum eſt $= 8^\circ.13'.53''$. Bor. Declinatio vero $\varkappa$ Draconis $= 71^\circ.9'.55''$. Bor. Diſtantia itaque vera α Aquilae a Polo Aequat. boreo erit $= 81^\circ.46'.7''$ eiusdemque diſtantia apparens ab ante dicto Polo $= 81^\circ.44'.56''$. Simili modo prodit diſtantia vera $\varkappa$ Draconis a Polo Aequat. boreo $= 18^\circ.50'.5''$ eiusdemque diſtantia apparens $= 18^\circ.48'.56''$. Arcus igitur Meridiani apparens interiectus $= 100^\circ.33'.52''$; cum vero idem arcus ex altitudinum merid. obſeruatarum complemento prodit $= 100^\circ.19'.50''$ erroris quadrantis duplum erit $= 14'.2''$, ſiue error ſimplex ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendus $= 7'.1''$.

Poli igitur eleuationem ſequenti iam ratione eruere licet:

Altitudo meridiana app. α Aquilae	$= 39^\circ.25'.55''$
Error quadrantis	$= -\ \ 7.\ \ 1$
Altit. merid. app. errore quadr. corr.	$= 39^\circ.18'.54''$
Refr.	$= -\ \ 1.\ 11$
Altitudo merid. vera α Aquilae	$= 39^\circ.17'.43''$
Declin. bor. ſtellae	$= 8.\ 13.\ 53$
Altitudo Aequatoris	$= 31^\circ.\ 3'.50''$ ſiue
Eleuatio Poli loci Dager-Ort - -	$= 58^\circ.56'.10''$.

Vt de latitudine huius loci euidentius conſtaret, ſimilem calculum aequales Solis ac fixae α Vrſae maioris altitudines meridianas adhibendo ſequenti modo inſtitui:

D. 10 Sept. 1750. *Krafilnikow* altero inftrumento $1\frac{1}{2}$ ped. radio obferuauit in loco Dager-Ort altitudinem apparentem meridianam limbi Solis borealis $= 31°.58'.10''$, eodemque die altit. app. merid. α Vrfae maioris infra Polum $= 31°.58'.0''$.

Declinatio centri Solis pro meridie d. 10. Sept. pofita differentia Merid. inter Dager-Ort et Parifios $= 1^h.18'.20''$, et obliquitate Eclipticae $= 23°.28'.30''$, erit $= 0°.41'.54''$ bor. Declinatio vero α Vrfae maioris fecundum Catalogum Cel. *de la Caille* $= 63°.5'.52''$. Diftantia igitur vera centri Solis a Polo Aequatoris boreo erit $= 89°.18'.6''$ eiusdemque diftantia apparens $= 89°.16'.41''$; pofita itaque $\frac{1}{2}$ diametro Solis $= 16'.1''$, prodibit diftantia app. limbi Solis bor. a Polo Aequat. boreo $= 89°.0'.40''$. Diftantia vero apparens α Vrfae maioris ab eodem Polo, habita fitus huius ftellae infra Polum ratione, eft $= 26°.52'.34''$. Arcus propterea apparens Meridiani inter limbum Solis borealem et α Vrfae mai. infra Polum erit $= 115°.53'.14''$, eiusdem vero arcus menfura ex obferuatis altitud. merid. elicitur $= 116°.3'.50''$, vnde duplum erroris quadrantis $= 10'.36''$ fiue error quadrantis fimplex ad altitudines obferuatas addendus $= 5'.18''$.

Altit. mer. app. α Vrfae mai. infra Polum	$= 31°.$	$58'.$	$0''$
Error quadr.	$= +$	5.	18
	32	3	18
Refr.	$= -$	1.	34

Alti-

Altitudo merid. vera α Vrſae mai. $= 32^\circ.\ 1'.44''$
Declinatio ſtellae $= 63.\ 5.\ 52$

Altitudo Aequatoris $= 31^\circ.\ 4'.\ 8''$ ſiue
Eleuatio Poli $= 58^\circ.\ 55'.52''$.

Qua cum ſupra inuenta comparata, latitudo loci Dager-Ort videtur eſſe $= 58^\circ.56'.0''$. Secundum Mappam geogr. Academiae huius loci latitudo eſt $= 59^\circ.\ 1\frac{1}{2}'$.

Determinatio latitudinis vrbis Naruae.

Kraſilnikowius in itinere Reualia Petropolin paucas habuit Naruae obſeruationes, altitudines nimirum cepit meridianas fixarum nonnullarum quadrante $1\frac{1}{2}$ ped. radio, ex quibus, quantum potero, accurate huiusce vrbis latitudinem ſequenti ratione definire conabor. Ad hoc inſtitutum maxime idoneae videntur altitudines meridianae Sirii et Lucidae in cauda Cygni; Sirii altit. merid. app. obſeruata eſt $= 14^\circ.14'.45''$, Lucidae vero in cauda Cygni altitud. app. merid. infra Polum $= 13^\circ.49'.20''$. Secundum obſeruationes Cel. *Le Monnier* declinatio Sirii ad tempus obſeruationis reducta eſt $= 16^\circ.23'.32''$ A. Lucidae autem Cygni declinatio $= 44^\circ.24'.2''$ Bor. Hiſce admiſſis, erit diſtantia vera Sirii a Polo Aequat. boreo $= 106^\circ.23'.32''$ eiusdemque ſtellae diſtantia apparens, habita altitudinis obſeruatae ratione, $= 106^\circ.19'.42''$. Simili modo prodibit diſtantia apparens Lucidae in cauda Cygni a Polo Aequat. boreo $= 45^\circ.32'.1''$; harum ſumma ſiſtet arcum Meridiani apparentem inter Sirium et Lucidam

Cygni

Cygni $= 151^\circ.51'.43''$, qui obſeruatus fuit $= 151^\circ.55'.55''$. Erroris itaque quadrantis duplum erit $= 4'.12'$, ſiue error ſimplex ad altitudines obſeruatas addendus $= 2'.6''$.

Altit. merid. app. Sirii	$=$	$14^\circ.14'.45''$
Error quadr.	$=$	$+\ 2.\ 6$
		$14.\ 16.\ 51$
Refr.	$=$	$-\ 3.\ 50$
Altit. merid. vera Sirii	$=$	$14^\circ.13'.\ 1''$
Declin. Sirii auſtr.	$=$	$16.\ 23.\ 32$
Altitudo Aequatoris	$=$	$30^\circ.36'.33''$ ſiue
Eleuatio Poli Naruae	$=$	$59^\circ.23'.27''$.

In Mappa geogr. Academiae huius vrbis latitudo eſt $= 59^\circ.31'$.

Inueſtigatio poſitionum locorum nonnullorum, per quos iter habuit *Ioſ. Nic. de l'Isle.*

Determinatio latitudinis vrbis Bereſow.

Varias multasque quidem inſtituit *De l' Islius* Bereſouii obſeruationes, nullas tamen cepit altitudines ſiderum aequales Auſtrum Boreamque verſus, ex quibus inſtrumenti errores accurate definiri poſſent. Boream verſus enim nullam praeter Pollucem obſeruauit fixam, cuius igitur altitudines meridianas cum altitudinibus meridianis Arcturi, ad latitudinem huius vrbis determinandam, comparare cogimur. Bis quidem Bereſouii inueſtivestigauit *De l'Islius* errorem quadrantis circa horizontem per inuersionem huius organi, nimirum d. 12. Maii 1740, vbi error quadrantis circa horizontem erat $= 6'. 1\frac{1}{3}''$ ad altitudines obseruatas addend. et d 24. Maii, existente tunc errore organi circa horiz. $= 5'. 2''$ add. Errotem vero quadrantis circa Zenith illo saltem tempore non determinauit. Quam ob causam consultum visum est, instrumenti errorem latitudinemque loci simul sequenti modo eruere.

Altitudo merid. app. Polaris infra Polum

1740. d. 3. Maii st. n.	=	61°. 45'. 30''
d. 7. Maii - - -		61. 45. 0
d. 14. Maii - - -		61. 45. 0
Media igit. alt. mer. app. Pol. ad id tempus	=	61°. 45'. 10''
Refr.	=	− 28
Altit. merid. obseruata Polar. refract. corr.	=	61°. 44'. 42''

Altitudo merid. app. Arcturi

1740. d. 14. Maii st. n.	=	46°. 31'. 15''
15 Maii - - - -		46. 31. 30
18. Maii - - - -		46. 32. 10
Media altitudo merid. app. Arcturi	=	46°. 31'. 38''
Refr.	=	− 51
Altit. merid. obseruata Arcturi refr. corr.	=	46°. 30'. 47''.

Hisce positis, declinationem apparentem Polaris ad tempus supra notatum sic definire conatus sum. Ex obseruationibus quas Parisiis habui, deduxi declinationem mediam ſtellae Polaris ad initium An. 1748. $= 87^{\circ}.57'.22''$. Motus Polaris annuus in declinat. cum ſit $= 19''.37'''$, erit declinatio Polaris media, ad tempus obſeruationum Bereſouii habitarum reducta $= 87^{\circ}.54'.52\frac{1}{2}'$. Propter nutationem axis telluris ſubtrahenda ſunt $9''$ vt obtineatur declinatio Polaris vera $= 87^{\circ}.54'.43\frac{1}{2}''$. Aberratio huius ſtellae in declinat. tunc temporis erat $= 13''$ auſtrum verſus, ita vt eius declinatio apparens, ad tempus ſupra memoratum, ſit $= 87^{\circ}.54'.30\frac{1}{2}''$ bor. Declinatio Arcturi ad idem tempus ex catalogo Celeb. *le Monnier* prodit $= 20^{\circ}.33'.3\frac{1}{2}''$ bor.

Hinc complem. declin. app Arcturi	$= 69^{\circ}.26'.56\frac{1}{2}''$
Compl. declin. app. Polaris	$= 2.\ 5.\ 29\frac{1}{2}$
Arcus Merid. inter Arcturum et Polarem infra Polum - -	$= 71^{\circ}.32'.26''$
Compl. altit. merid. obſeruatae Polaris infra Polum, refr. corr. -	$= 28^{\circ}.15'_{1}.18''$
Complem. alt merid. Arcturi obſeruat. refr. corr. - -	$= 43.\ 29.\ 13$
Arcus Merid. obſeruatus inter Arcturum et Polarem infra Polum	$= 71^{\circ}.44'.31''$
	$71.\ 32.\ 26$
Erroris quadrantis duplum - -	$= 0^{\circ}.12'.5''$
Siue error ſimplex ad altititudines obſeruatas addendus - -	$= 6'.2\frac{1}{2}''$

Errore quadrantis ſic inuento, latitudo Bereſouii nullo iam fere negotio definitur.

Alti-

Altitudo enim merid. Polaris infra Polum refr. correcta	$=61^{\circ}.44'.42''$
Error quadrantis	$=+\ 6.\ 2\frac{1}{2}$
Altit. merid. Polaris vera	$=61^{\circ}.50'.44\frac{1}{2}''$
Diſtantia app. Polaris a Polo Aequat.	$=\ 2.\ 5.\ 29\frac{1}{2}$
Eleuatio Poli vera Bereſouii	$=63^{\circ}.56'.14''$

Huius loci latitudo ſatis accurate in Mappa geogr. Academiae denotata eſt; longitudo vero, quae ex obſervationibus Bereſouii habitis accurate deduci non poteſt, ſecundum Mappam aequatur $83^{\circ}.2'$.

Determinatio latitudinis vici Samarowskoy-Yam.

Hoc in vico ſemel tantum in tranſitu obſeruauit *De l'Islius* altitudinem Solis meridianam, ex qua quantum potero accurate latitudinem deducere modo ſequenti conabor.

1740. d. 14. Iun. ſt. n. altitudo merid. appar. marg. Solis bor.	$=52^{\circ}.34'.30''$
Ponamus errorem quadr.	$=+\ 5.\ 0$
	$52.\ 39.\ 30$
Refr. et Parall.	$=-\ \ 34$
	$52.\ 38.\ 56$
$\frac{1}{2}$ Diameter Solis	$=-15.\ 49$
Altit. merid. vera centri Solis	$=52^{\circ}.23'.\ 7''$

Ponendo longitud. huius loci $=86\frac{2}{3}^{\circ}$ et obliquitate

 Eclipti-

Eclipticae $= 23^\circ . 28' . 30''$, inueni declinat. centri Solis $= 23^\circ . 18' . 33''$

Altit. Aequat. $= 29. \; 4. \; 34$ siue
Eleuatio Poli vici Samarowskoy Yam $= 60^\circ \; 55\frac{1}{2}'$.

Secundum Mapp. geogr. Acad. huius loci longitudo est $= 86^\circ . 39'$ et latitudo $= 60^\circ . 58'$.

Determinatio latitudinis vici Demianskoy-Yam.

De l'Islius Samarovskoy - Yam profectus, altitudinem marginis Solis borealis maximam in vico Demianskoy - Yam rimari adnixus est, eamque inuenit

D 26. Iunii st. n. $= 54^\circ . \; 4' . \; 0''$
Posito errore quadrantis $= + \; 5 . \; 0$ erit

Altit. marg. ☉ bor. max. errore quadr. corr. $= 54^\circ . \; 9' . \; 0''$
Refr. et Parall. $= - \; 33$

$54^\circ . \; 8' . 27''$
$\frac{1}{2}$ Diameter ☉lis $= - \; 15 . 48$

Altit. maxima vera centri ☉lis $= 53^\circ . 52' . 39''$
Posita long. huius vici $= 87^\circ . 25'$, erit
Declinatio centri Solis $= 23 . 23 . 13$ ideoque

Altitudo Aequat. $= 30^\circ . 29' . 26''$ siue
Eleuatio Poli vici Demianskoy-Yam $= 59^\circ . 30' . 34''$.
In Mappa geogr. Acad. huius loci longitudo ponitur $= 87^\circ . 25'$ et latitudo $= 59^\circ . 38'$.

Deter-

Determinatio latitudinis vrbis Tobolsk.

Binas hac in vrbe obſeruauit *De l'Islius* marginis Solis borealis altitudines meridianas, alteram d. 5. Iul. ſt. n. $=54°.52'.30''$, alteram d. 15. Iul. $=53°.29'.0''$, hac vero in obſeruatione ventus valde erat impedimento, pauloque ante obſeruationem obſeruator vitrum quadrantis obiectiuum ſublatum reſtituerat; ea de cauſa priorem obſeruationem ad determinandum latitudinem adhibere ſatius videtur.

1740. d. 5. Iul. ſt. n. Alt. maxima app.

marg. ⊙ bor.	$= 54°.52'.30''$
Ponamus, vt antea, errorem quadr.	$= + \quad 5.\ 0$
	$= 54°.57'.30''$
Refr. et Parall.	$= - \quad 32$
	$54.\ 56.\ 58$
½ Diam. ⊙	$= - \ 15.\ 48$
Altit. merid. vera Centri ⊙lis	$= 54.\ 41.\ 10$

Poſita longit. huius vrbis $= 85°.56$,

erit declin. Centri ⊙	$= 22.\ 47.\ 56$ bor.
Altit. Aequat.	$= 31°.53'.14''$ ſiue.
Eleuatio Poli vera vrbis Tobolsk	$= 58°.\ 6'.46''$.

Altera autem obſeruatio, quantum a praecedenti differat, in ſequenti calculo elucebit.

1740. d. 15. Iul. ſt. n. Altit. merid.

app. marg. ☉ bor.	$=53^{\circ}.29'.\ 0''$
Error quadr.	$=+\ \ 5.\ \ 0$
	53. 34. 0
Refr. et Par.	$=-\ \ \ \ 34$
	53. 33. 26
½ Diam. ☉	$=-\ 15.\ 49$
Alt. merid. vera Centri ☉	$=53^{\circ}.17'.37''$
Declin. Centri ☉	$=21.\ 31.\ 11$ bor.
Alt. Aequat.	$=31^{\circ}.46'.26''$ ſiue
Eleuatio Poli vera vrbis Tobolsk	$=58^{\circ}.13'.34''$.

In Mappa geogr. Acad. vrbis Tobolsk longitud. ponitur $=85^{\circ}.56'$. eiusdemque latit. $=58^{\circ}.7'$.

Determinatio longitudinis atque latitudinis vici Nowo-Vſolie itemque vici Weretia.

Vnicam tantum hoc in itinere rite obſeruare potuit *De l'Islius* Eclipſin Satell. Iouis, immerſionem nimirum primi Satellitis in vico Nowo-Vſolie viſam, ex qua accurate ſatis huius loci longitudinem modo ſequenti deduxi:

1740. d. 2. Sept. ſt. n. $15^{h}.5'.12''$ temp. vero ſatis bene obſeruata fuit in Nowo-Vſolie immerſio primi Sat. Iouis.

Eadem

Eadem immerſio ſecundum Tabulas *VVargent.* contigit Petropoli d. 2. Sept. $13^h.19'.51''$. Circa id vero tempus calculus ex Tabulis *VVargent.* $30''$ circiter citius quam obſeruatio incidiſſe videtur; addendo igitur $30''$ ad tempus immerſionis ſupra inuentum, prodibit immerſio primi Satellitis Iouis vera Petropoli $13^h.20'.20''$. Differentia itaque Meridianorum erit ſecundum hanc obſeruationem $= 1^h.44'.52''$ ſiue longitudo vici Nowo-Vſolie $= 74°.13'$. Qua cognita, latitudinem quoque huius loci ex obſeruationibus *De l'Islii* eruere iuuat.

Hunc in finem ea vtar altitudine merid. Solis, quam ibi obſeruauit *De l'Islius* quadrante nouis filis inſtructo recensque verificato.

Inuenit enim d. 12. Sept. ſt. n.	
Altit. merid. app. marg. ☉ bor.	$= 34°.49'.30''$
Error quadr. d. 11. Sept. ex inuerſione quadr. circa horiz. inuentus	$= + 7.10$
	$34°.56'.40''$
Refr. et Parall.	$= - 1.7$
	$34.55.33$
$\frac{1}{2}$ Diam. ☉	$= - 15.59$
Alt. merid. vera centri ☉lis	$= 34°.39'.34''$
Declinatio centri ☉lis	$= 4.3.28$ bor.
Alt. Aequatoris	$= 30°.36'.6''$
ſiue Eleuatio Poli vici Nowo-Vſolie	$= 59°.23'.54''$.

Vicus

Vicus quidem hic Nowo-Vſolie in Mappa geogr. Academiae non occurrit, de alio autem pago Weretie 3 Verſtis a Nowo-Vſolie auſtrorientem verſus diſtante, cuiusque locum in Mappa inueni denotatum, mentionem fecit *De l' Islius* in verificatione quadrantis circa horizontem occupatus. Ex hac igitur diſtantia et poſitione vici Weretie, reſpectu vici Nowo-Vſolie, facili iam negotio longitudinem atque latitudinem eiusdem aſſignare poſſumus. Peracto enim calculo, inueni differentiam latitudinum vici Weretie et Nowo-Vſolie $= 1'.13''$, differentiam vero longitud. $= 2'.23''$. Latitudo itaque vici Weretie erit $= 59°.22\frac{2}{3}'$ eiusdemque longitudo $= 74°.15'.23''$.

Secundum Mappam geogr. Acad. huius vici latitudo eſt $= 59°.20\frac{1}{2}'$ et longitudo $= 74°.29'$.

Determinatio longitudinis atque latitudinis vici Saigatka.

De l' Islius monet, vicum Saigatka ab vrbe Caſan ſecundum longitudinem diſtare circiter $4°.15'$ ortum verſus: Longitudinem autem vrbis Caſan *de l'Islius* ipſe accuratiſſime determinauit $= 66°.28'$, ita vt longitudo vici Saigatka ſit $= 70°.43'$.

Longitudine hac vici Saigatka admiſſa, eiusdem latitudinem ſequenti calculo definire valemus.

1740.

1740. d. 23. Sept. ſt. n. Altit. merid.

app. marg. ☉ bor. obſ.	$= 33^{\circ}. 14'. 0''$
Error quadr.	$= + 7. 10$
	$33. 21. 10$
Refr. et Par.	$= - 1. 13$
	$33. 19. 57$
½ Diam. ☉	$= - 16. 2$
Alt. merid. vera centri ☉	$= 33. 3. 55$
Declin. centri ☉	$= 0. 12. 50.$ A
Alt. Aequatoris	$= 33^{\circ}. 16'. 45''$ ſiue
Eleuatio Poli vera vici Saigatka	$= 56^{\circ}. 43'. \frac{1}{4}.$

Secundum Mappam geogr. Academiae huius loci longitudo eſt $= 72^{\circ}. 31'$, latitudo vero $= 57^{\circ}. 12'$, ita vt error in longitudine ad 1. Gr. 48. Min. pr. in latitudine autem ad dimidium Grad. aſſurgat. Hinc quoque poſitio vici Oſſae, totiusque regionis adiacentis, erit corrigenda.

Determinatio longitudinis et latitudinis vrbis Sarapul.

Diſtantiam huius loci ſecundum longitudinem a Saigatka definiuit *De l'Islius* $30'$ Aequat. occidentem verſus, ſiue eiusdem longitudinem $= 70^{\circ}. 13'$. Latitudo autem ex ſequenti altitudine meridiana Solis accurate obſeruata fluit:

1740. d. 24. Sept. Altit. merid app.

marg ⊙ bor.	$=33^{\circ}.\ 7'.\ 0''$
Error quadr.	$= +\ 7.\ 10$
	33. 14. 10
Refr. et Par.	$= -\ 1.\ 13$
	33. 12. 57
$\frac{1}{2}$ Diam. ⊙	$= -\ 16.\ 2$
Altit. merid. vera centri ⊙	$=32.\ 56\ 55$
Declin. centri ⊙	$= 0.\ 36\ 20$ A
Altit. Aequatoris	$=33.\ 33\ 15$ siue
Eleuatio Poli vrbis Sarapul	$=56^{\circ}.\ 26\frac{3}{4}'$.

In Mappa geogr. Acad. huius loci longitudo ponitur $=72^{\circ}.0'$, eiusdemque latitudo $=56^{\circ}\ 56\frac{1}{2}'$. Error itaque in longitudine $=1^{\circ}.47'$, in latitudine vero $=30'$.

Determinatio longitudinis atque latitudinis vici Vſt - Ykskoi, ad ripam fluminis Kamae, e regione oſtii fluminis Yk ſiti.

Cum differentia Meridianorum inter vrbem Caſan et vicum Vſt - Ykskoi ſecundum *De l'Islium* ſit $=2\frac{3}{4}^{\circ}$, erit longitudo huius vici $=69^{\circ}.13'$. Latitudo autem ex ſequenti definitur altitudine meridiana Solis in vici Vſt Ykskoi obſeruata:

1740.

1740. d. 27. Sept. ſt. n. Altit. mer.

app. marg. ☉ bor.	=	32°.	31′.	30″
Error quadr. ponitur	= +		7.	10
		32.	38	40
Refr. et Par.	= −		1.	14
		32.	37	26
½ Diam. ☉	= −		16.	3
Altit. merid. vera centri ☉	=	32.	21.	23
Declin. centri ☉	=	1.	46	46 A
Altit. Aequatoris	=	34°	8′	9″ ſiue
Eleuatio Poli vera vici Vſt-Ykskoi	=	55°	51′.	50″.

Vicus hic in Mappa geogr. Acad. falſo nomine vocatus Ieko, longitudinem habens = 70°. 48′, latitudinem = 56°. 24′. Error itaque in longitudine = 1°. 35′, in latitudine = 32′.

Determinatio longitudinis atque latitudinis vici Swinji - Gori, ad diſtantiam 2 Verſt. cis oſtium fluminis Vjatkae ſiti.

Differentia Meridianorum inter Vſt - Ykskoi et Swinji-gori aequatur ſecundum Mappam 1°. 30′; admiſſa igitur longitudine vici Vſt - Ykskoi ſupra inuenta, erit longitudo vici Swinji-gori = 67°. 43′ circiter.

Latitudo huius loci ex altitudine meridiana Lucidae Aquilae a *De l'Iſlio* obſeruata modo ſequenti deducitur:

1740. d. 28. Sept. ſt. n. Altit. mer.

app. α Aquilae	= 42°. 30′. 15″
Error quadrantis	= 7. 10
	42. 37. 25
Refr.	= − 1. 3
Altit. merid. vera α Aquilae	= 42. 36. 22
Declin. α Aquilae	= 8. 12. 28 bor.
Altit. Aequatoris	= 34. 23. 54 ſiue
Eleuatio Poli vera vici Swinji-gori	= 55. 36.

Longitudo huius loci ſecundum Mappam geogr. Acad. eſt = 69°. 18′ et latitudo = 55°. 57′. Error igitur in longitud. = 1°. 35′, in latitud. = 21′.

Determinatio latitudinis atque longitudinis vrbis Caſan.

Plures inſtituit *De l' Islius* in vrbe Caſan obſeruationes, ad determinandum huius loci latitudinem ſpectantes, ex quibus altitudo meridiana Lucidae Aquilae ibidem obſeruata ad noſtrum inſtitutum maxime videtur idonea.

1740. d. 8. Oct. ſt. n. Altit. merid.

app. α Aquilae	= 42°. 21′. 20″
Ponamus error. quadr.	= + 7. 10
	42. 28. 30
Refr.	= − 1. 3

Altit.

Altit. merid. vera α Aquilae	= 42.	27.	27	
Declin. α Aquilae	= 8.	12.	28	bor.
Altitudo Aequatoris	= 34.	15.		ſiue
Eleuatio Poli vrbis Caſan	= 55.	45.		

Cum vero error quadrantis ante iſtam obſeruationem d. 11. Sept. in Nowo-Vſolie inuentus $= 7'. 10''$, non congruat cum errore eiusdem inſtrumenti poſtea, nimirum d. 13. Nou. in Niſchni-Nowgorod reperto $= 4'. 40''$, nihil certi circa veram vrbis Caſan latitudinem definire licet. Poſito enim errore quadrantis $= 7'. 10''$, erit latitudo vrbis Caſan $= 55°. 45'$, admiſſo autem altero $4'\ 40''$, prodibit latitudo huius vrbis $= 55°. 47\frac{1}{2}'$. *De l' Islius* quidem ipſe latitudinem vrbis Caſan ſtatuit $= 55°. 47'$, dubium autem aliquot min. prim. ſemper relinquitur, neglecta verificatione quadrantis, quae in vrbe Caſan erat peragenda.

Longitudinem huius vrbis accurate diligenterque determinauit *De l' Islius* $= 66°. 28'$.

Secundum Mappam geogr. Academiae huius vrbis longitudo aequatur $66°. 25'$, latitudo autem $55°. 44'$.

Determinatio latitudinis vrbis Niſchni-Nowgorod.

Latitudinem huius loci, cum verificatio quadrantis, paulo poſt peractas ibidem obſeruationes, ſit inſtituta, accurate ſatis ex ſequenti altitudine merid. Lucidae Aquilae definire licet.

1740. d. 5. Nou. ſt. n. Altit. Merid.

app. α Aquilae	$= 41^{\circ}.\ 48'\ 40''$
Error quadrantis	$= +\quad 4.\ 40$
	$41.\ 53.\ 20$
Refr.	$= -\quad 1.\ 5$
Altit. merid. vera α Aquilae	$= 41.\ 52.\ 15$
Declinat. α Aquilae	$= 8.\ 12.\ 28$ bor.
Altit. Aequat.	$= 33.\ 39.\ 47$ ſiue
Eleuatio Poli vera Niſchni-Nowgorod	$= 56.\ 20.\ 13.$

Huius vrbis longitudo ponitur in Mappa geogr. Acad. $= 62^{\circ}.\ 19'$, latitudo autem $= 56^{\circ}.\ 18'$.

Determinatio latitudinis vrbis Moſcouiae.

Quamuis menſem integrum Decembr. *De l'Islius* commoratus ſit Moſcouiae, paucas tamen ibi propter tempeſtatem aduerſam inſtituit obſeruationes; ita vt praeter altitudinem merid. Polaris ſtellae bis obſeruatam, et altitudinem meridianam Palilicii ſemel captam, nullae occurrant obſeruationes determinandae latitudini huius loci inſeruientes. Ex memoratis autem altitudinibus meridianis huius vrbis latitudinem modo ſequenti inueſtigare atque definire conatus ſum:

1740. d. 26. Dec. ſt. n. Altit merid. app.

Polaris ſupra Polum	$= 57^{\circ}.\ 46'.\ 40''$
27. Dec. - - - - - -	$57.\ 47\quad 0$

Media

Media itaque altit. merid. obſeru.

Polaris ſupra Polum	$= 57°. 46'. 50''$
Refr.	$= -\quad 40$
Alt. mer. obſ. Polaris refr. corr.	$= 57.\ 46.\ 10$

Eodem circiter tempore, nempe d. 30. Dec. obſeruata fuit Moſcouiae eodem organo altitudo meridiana appar. Palilicii - - - - $= 50°. 8'. 30''$ ſiue Alt. merid. obſeru. Palilicii refr. corr. $= 50.\ 7.\ 38.$

Ad quadrantis iam errorem definiendum harum fixarum declinationes accuratiſſime ſupputentur, neceſſe eſt. Inueni autem ex obſeruationibus, quas ipſe Pariſiis ſumma cura inſtitui, declinationem apparentem Polaris ad finem Anni 1740.* $= 87°. 55'. 15''.1.$ bor. Parique modo declinationem apparentem Palilicii ad idem tempus** $= 15°. 57'. 45''.4$ bor. Quibus ſtabilitis, erit

Diſtant. app. Polaris a Polo Aequat. bor.	$= 2°.\ 4'. 44''.9$
Diſt. app. Palilicii a Polo Aequat. bor	$= 74.\ 2.\ 14.\ 6$
Differ. diſtant. a Polo Aequatoris bor.	$= 71.\ 57.\ 29.\ 7$
Diſtant. obſeru. vera Polaris a Zenith	$= 32°. 13'. 50''$
Diſtant. obſeru. vera Palil. a Zenith	$= 39.\ 52.\ 22$
Summa diſtant. obſeruat. a Zenith	$= 72\ \ 6\ \ 12$
Different. diſtant. a Polo Aequatoris	$= 71.\ 57.\ 30$
Erroris quadrantis dupl.	$= 0.\ 8.\ 42.$
ſiue error quadrantis ſimplex ad altitud. obſeruatas addendus	$= 4'. 21''.$

Hinc

Hinc altit. merid. obſeru. Polaris refr. corr.	$= 57°. 46'. 10''$
Error quadr.	$= + \quad 4. \; 21$
Altit. merid. vera Polaris ſupra Polum	$= 57. \; 50. \; 31$
Diſt. app. Polaris a Polo	$= \; 2. \; 4. \; 45$
Eleuatio Poli vera Moſcouiae	$= 55. \; 45. \; 46.$

* Inueſtigatio declinationis apparentis ſtellae Polaris ad finem anni 1740.

Secundum obſeruationes a me Pariſiis An. 1748. habitas, declinatio ſtellae Polaris media ad initium An. 1748. eſt $= 87°. 57'. 22''$.

Motus iam Polaris ſtellae annuus in declinatione aequatur $19'. 37''$, vnde declinatio Polaris media ad finem An. 1740. $= 87°. 55'. 4''. 2$.

Ob nutationem axis telluris ſubtrahenda ſunt $9''$, vt prodeat ſtellae Polaris declinatio vera ad finem An. 1740. $= 87°. 54'. 55''. 2$.

Aberratio denique huius ſtellae in declinatione tunc temporis erat $= 19''. 9$ boream verſus, ita vt declinatio Polaris apparens ad finem An. 1740. ſit $= 87°. 55'. 15''. 1$.

** Inueſtigatio declinationis apparentis Palilicii ad finem An. 1740.

Antequam declinationem apparentem Palilicii ad tempus propoſitum aſſignemus, ex certis accuratisque obſeruationibus huius ſtellae declinatio media, h. e. aberratione et aequatione nutationis axis telluris correcta, eſt deducenda atque ſtabilienda. Hunc vero in finem ſequen-

sequentes sum adhibiturus obseruationes, quas ipse quadrante 3 ped. radio, ad lumen crepusculi et diei, in obseruatorio Regio Paris. summa cura institui.

1748. d. $\frac{10}{21}$ Febr.	Alt. mer. app. Aldebaran	$= 57^\circ.\ 9'.\ 48''.\ 9$
$\frac{19\ \text{Febr.}}{1\ \text{Mart.}}$	- - - - - - -	$57.\ 9.\ 50.\ 8$
$\frac{20\ \text{Febr.}}{2\ \text{Mart.}}$	- - - - - - -	$57\ \ 9\ \ 49.\ 5$
$\frac{22\ \text{Febr.}}{4\ \text{Mart.}}$	- - - - - - -	$57.\ 9.\ 48.\ 3$
$\frac{5}{16}$. Mart.	- - - - - - -	$57.\ 9.\ 47.\ 0$

Error huius quadrantis, ex vtraque verificatione deductus, aequatur $30''$ ab altitudinibus obseruatis subtrahendus. Quo rite applicato habebimus altitud. merid. Palilicii errore quadrantis et refractione correctam,

d. $\frac{10}{21}$. Febr.	- - -	$57^\circ.\ 8'.\ 41''.\ 9$
$\frac{19\ \text{Febr.}}{1\ \text{Mart.}}$	- - -	$57.\ 8.\ 43.\ 8$
$\frac{20\ \text{Febr.}}{2\ \text{Mart.}}$	- - -	$57.\ 8.\ 42.\ 5$
$\frac{22\ \text{Febr.}}{4\ \text{Mart.}}$	- - -	$57.\ 8.\ 41.\ 3$
$\frac{5}{16}$. Mart.	- - -	$57.\ 8.\ 40.\ 0.$

Aberratio Palilicii in declinatione est d. $\frac{10}{21}$ Febr. $= 1''.\ 6$; d $\frac{19.\ \text{Febr.}}{1.\ \text{Mart.}} = 2''.\ 1$, d. $\frac{20.\ \text{Febr.}}{2.\ \text{Mart.}} = 2''.\ 2$; d. $\frac{22.\ \text{Febr.}}{4.\ \text{Mart.}} = 2''.\ 3$ et d. $\frac{5}{16}$ Mart. $= 2''.\ 8$ austrum versus; hinc altitudo merid. Palilicii errore quadrantis, refractione et aberratione correcta:

d. $\frac{10}{21}$ Febr.	$= 57^\circ.\ 8'.\ 43''.\ 5$
$\frac{19.\ \text{Febr.}}{1.\ \text{Mart.}}$	$= 57.\ 8.\ 45.\ 9$
$\frac{20.\ \text{Febr.}}{2.\ \text{Mart.}}$	$= 57.\ 8.\ 44\ \ 7$
$\frac{22.\ \text{Febr.}}{4.\ \text{Mart.}}$	$= 57.\ 8.\ 43.\ 6$
$\frac{5}{16}$. Mart	$= 57.\ 8.\ 42.\ 8$

Altitudo itaque meridiana media Palilicii errore quadrantis, refractione et aberratione correcta, ad initium mensis Mart. st. n. A. 1748. $57^\circ.\ 8'\ 44\frac{1}{2}''.\ 1.$

Eleuationem Poli veram Obseruatorii R. Paris. eodem instrumento accuratiss. determinaui $= 48^\circ.\ 50'.\ 12\frac{1}{2}''$,

 qua

qua admiſſa, erit declinatio Palilicii vera ad init. menſ. Mart. ſt. n. 1748. $= 15°.58'.56''.6$ bor. Correctio declinationis huius ſtellae ob nutationem axis telluris tunc temporis erat $= 8''.5$ ſubtrah. et motus Palilicii in declinat. annuus $= 8''.21'''$, ita vt declinatio Palilicii media ad 1. Ian. ſt. n. 1748. accuratiſſ. ſupputata ſit $= 15°.58'.46'', 5$ bor.

Facili iam labore inueniemus declinationem Palilicii apparentem ad tempus obſeruationum Moſcouiae habitarum, id eſt ad finem A. 1740. Motus enim huius ſtellae annuus in declinat. cum ſit $= 8''.21''$, prodibit declinatio media Aldebaran ad finem A. 1740 $= 15°.57'.48'', 0$ bor. Correctio declinationis propter nutationem axis telluris eſt $= 4''.4$ ſubtr. hinc declinatio Aldebaran vera $= 15°.57'.43'', 6$ et declinatio eiusdem apparens ad finem A. 1740, ob aberrationem in declinat. $= 1''.8$ bor. verſus, $= 15°.57'.45''4$ bor.

Adnotationes circa longitudinem vrbis Moſcouiae.

Longitudo huius vrbis, cum nullae priſcis temporibus ibi habitae ſint obſeruationes aſtronomicae, ad determinandum longitudinem idoneae, ab interuallorum aeſtimatione populari ad noſtrum vsque fere aeuum praecipue pependiſſe videtur. *Ferquarſonus* huius quidem ſaeculi initio menſuram viae publicae, qua itur Petropoli Moſcouiam, agendo, Meridianorum harum vrbium differentiam accuratius definire ſtuduit, eamque inueniſſe dicitur $= 7°.29'$, ſiue $29'.56''$ temp. Non obſtante autem hac *Ferquarſoni* menſura Aſtronomorum bona pars, qua

qua auctoritate nescio, differentiam Meridianorum Petropolin inter et Moscouiam statuit $= 40'$ temp. siue 10 grad. Aequat. ita vt solum obseruationum astronomicarum pondus hoc de discrimine diiudicaturum videatur. Hunc in finem operae pretium duxi, anno 1753 occultationum quarundam fixarum a Luna calculos tradere Academiae, cum Adiuncto *Krasilnikow*, tunc Moscouiae commorante, communicandos. Quo facto, obseruauit Moscoviae laudatus *Krasilnikow* vnicam occultationem fixae nimirum δ ♉ a Luna, mihi quoque Petropoli visam, ex qua cum plus otii nactus ero, veram Moscouiae longitudinem supputabo. Interim tamen non abs re fore iudicaui, Moscouiae longitudinem ex obseruationibus transitus ☿rii per Solem, Moscouiae et Parisiis habitis, modo sequenti eruere.

D. $\frac{25\ Apr.}{6.\ Maii}$ obseruante *Krasilnikow*,

Moscouiae limbus ☿. occid. e ☉le egressus est - -	$0^h.38'.55''$ st. v. P. M.
Limbus autem ☿ orient. egressus est	0. 41. 25
Hinc egressus centri ☿rii - -	$0.\ 40'.10''$
Correct. ob parallaxin add. =	48
Egressus centri ☿rii Moscouiae obseruatus ad Merid. Paris. reductus	$0^h.40'.58''$
Egressus centri ☿rii Parisiis obser.	10. 20. 7
Differentia Merid. inter Paris. et Moscouiam	$= 2^h.20'.51''$.

Longitudo itaque Moscouiae $= 55°.\ 12'.\ 45''$, 16 circiter min. pr. minor ea, quae ex operationibus geometricis *Ferquarsoni* prodit.

LATITVDINVM SPECVLARVM ASTRONOMICARVM *TYCHONIS BRAHEI*, VRANIBVRGENSIS NEMPE ET WANDESBVRGENSIS, NEC NON VRBIS HAMBVRGENSIS ET VTRIVSQVE OBSERVATORII PARISIENSIS SCILICET ET BEROLINENSIS DISQVISITIO.

Auctore

A. N. GRISCHOVV.

Cum inueſtigatio rerum aſtronomicarum variis ſemper ſuperſtruatur obſeruatis, quae, quamuis in certis ac inconcuſſis habeantur, nouis tamen correctionibus ſaepiſſime egeant; concluſiones exinde deductae inter ſe ſaepius videntur abhorrere, quanquam, ſi fundamenta curatius examinare liceret, diſſenſus foret nullus, vel exiguus. Eodem modo res ſeſe habet in diſquiſitionibus aſtronomicis, quae comparatione antiquarum et recentiorum obſeruationum innituntur. Quantum enim vtilitatis eiusmodi diſquiſitiones excolendae Aſtronomiae afferre valent, tantum detrimenti nobilis illa ſcientia ex iis capere poteſt, praecipue cum concluſiones ex comparatione antiquarum et recentiorum obſeruationum hauſtae, elementis male ſtabilitis, in varias Aſtronomos adducunt ſententias. Ad hoc probandum maximo eſt argumento diſſenſio Aſtronomorum ex. c. circa decrementum obliquitatis Eclipticae, vt caetera taceam haud minus notatu digna, quae in Aſtronomia ſunt controuerſa. Haec vero opinionum diſſenſio originem praecipue ducit partim

partim ex negligentia Antiquorum in tradendis ſingulis et obſeruationum et inſtrumentorum circumſtantiis, partim ex eo, quod recentiorum Aſtronomorum nonnulli errores inſtrumentorum veterum Aſtronomorum omnibus veſtigiis non indagauerint, et ex tenebris eruerint, neque elementa, quibus eorum diſquiſitiones ſuffulciuntur, ad lancem exegerint ac determinauerint.

Ex omnibus obſeruationibus veterum Aſtronomorum eas, quas nobilis *Tycho Brahe*, Aſtronomus ſaeculi XVI. longe celeberrimus, inſtituit atque perſcripſit, in pretioſiſſimis habendas et ſingulis circumſtantiis maxime illuſtratas eſſe in confeſſo eſt. Subtiliſſimus ille rerum coeleſtium inveſtigator longa experientia et vſu rerum exercitatus, cum videret, quantum ad Aſtronomiam perficiendam intereſſet, vt vetuſtiores obſeruationes cum recentioribus accurate comparari poſſent, nihil habuit antiquius, quam vt in obſeruationum ſuarum ephemeridibus ipſe notaret ſedulo omnes illas circumſtantias, quibus obſeruationes hae praeclarae commendantur poſteritati quam maxime. Theſaurum obſeruationum clariſſimi huius Aſtronomi perluſtranti, non latet cura illa ſumma atque diligentia, qua adnotauit organa aſtronomica, quibus in ſingulis obſeruationibus vſus eſt, conſtructionem inſtrumentorum, methodos, quas ad ea examinanda et verificanda adhibuit, et conditionem inſtrumentorum obſeruationum tempore. Inſigniuit haud minori ſtudio eas obſeruationes, quas prae aliis accuratiores iudicauit; indicauit faciem coeli et tempeſtatem in plurimis obſeruationibus, modumque, quo, ad organa aſtronomica in plano Meridiani collocanda, vſus eſt; quae omnia ſedulo candideque notarentur

tur necesse erat, vt posteri fructum ex Herculeo *Tychonis* labore percipere, eiusque obseruationes, quas ipsi, quo tempore institutae sunt, summa accuratione supputare non licuit, calculo subiicere possent.

Cum itaque harum obseruationum dotes, ad illorum temporum rationem, tantae sint, tamque praeclarae, dubium nullum est, quin elementa Astronomiae plurima, quae ex comparatione antiquarum et recentiorum obseruationum petenda sunt, ex *Tychonis* obseruatis accuratissime erui atque stabiliri possint. Declarant hoc etiam labores quorundum Astronomorum celeberrimorum, qui non solum in obseruatis *Tychonis* emendandis atque corrigendis, verum etiam in iis cum obseruationibus recentissimis comparandis desudarunt. Neque in posterum in hoc opere et studio cessabunt Astronomi. Quanto enim vetustiores fuerint *Tychonis* obseruationes, tanto euadent desideratiores atque vtiliores ad perscrutanda rerum coelestium arcana. Quia vero conclusionum ex *Tychonis* obseruatis hauriendarum et in vsum Astronomiae deriuandarum vtilitas summa ab accuratione harum obseruationum pendet, haud leui momento aestimanda est disquisitio errorum organorum astronomicorum, quibus obseruator ille diligentissimus vsus est, nec non elementorum, quorum cognitio, ad positiones Siderum determinandas, maxime est necessaria, Longitudinis nempe atque Latitudinis locorum, vbi obseruationes habitae sunt, inuestigatio. Haec quidem omnia *Tychoni* ipsi erant definienda; sed praeterquam quod suo modo sedulo annixus sit, vt elementa haecce in apricum proferret, notandum est, motuum coelestium aequatiunculas plures esse nostris

tempo-

temporibus deprehensas, quae *Tychonem* omnino latebant, quarumque propterea rationem in digerendis atque supputandis suis obseruationibus habere non poterat. Adde praeterea, quod hypothesis refractionum, solertissimi huius rerum coelestium contemplatoris aeuo, valde esset imperfecta, cum finxerat refractiones pro Sole maiores esse, quam pro Planetis et stellis fixis. Adducebatur insuper, vt putaret, refractiones fixarum circa 20 gradum altitudinis supra horizontem, Solis vero circa 45 gradum altitudinis, prorsus cessare ac euanescere; cum contra iam centum fere abhinc annis inconcussis obseruationibus demonstratum sit, refractiones in aequali supra horizontem altitudine eiusdem esse quantitatis pro quouis sidere, et ad verticem vsque extendi. Multa quidem adhuc de refractionibus essent dicenda, quippe quae et Astronomos huius saeculi celeberrimos occupatos tenent; sed hic de illis in transitu, tanquam de fonte, ex quo deriuati errores in *Tychonis* calculos latitudinum geographicarum atque positionum siderum fluxerunt, mentionem fecisse sat est. Neque minus notandum est denique, methodos nonnullas, quibus *Tycho* ad verificanda organa sua astronomica vsus est, saepius irritas fuisse, quod a certis quibusdam pendebant obseruationibus atque operationibus, quae diligentissimum hunc Astronomum in nescios nonnunquam inducebant errores. Postquam autem cura atque labore Astronomorum nostrae aetatis organa astronomica methodique obseruandi ad illud praecisionis fastigium euecta sunt, in quo nunc cernuntur, facili negotio complura stabilire possumus elementa, quae corrigendis veterum Astronomorum obseruationibus, definiendisque positionibus

bus, praecipue ſpecularum aſtronomicarum, ruinis iam pridem oppreſſarum, inſeruiunt.

Hunc in finem Celeberrimus *Picardus* An. 1671. a *Ludouico* XIV. Galliarum Rege, in Inſulam Huennam, quae in Danico freto Zelandiam inter et Scaniam ſita eſt, miſſus fuerat, vt Vraniburgi, h. e. arcis, quam Rex Daniae *Fridericus* II. Aſtrorum contemplationi ibi exſtruendam curauerat, et in qua *Tycho* ſeriem obſeruationum aſtronomicarum 15 annorum pertexuit, Longitudinem atque Latitudinem accuratiſſime obſeruaret. Magnum hocce conſilium in multas magnasque incurrebat difficultates, in relatione huius itineris a *Picardo* enumeratas. Manebant tum nulla fere veſtigia famoſiſſimae *Tychonis* ſpeculae aſtronomicae, et obſeruationes, quas ibi ad Latitudinem definiendam *Picardus* habebat, minime cum iis, quae eodem tempore Pariſiis ex compacto inſtituebantur, concinere videbantur; ita vt *Picardus* hancce viam, directe determinandi Latitudinem ſpeculae aſtronomicae *Tychonis*, ipſe deſereret. Sub finem Anni 1671. *Picardus* ibi, quadrantis 3 pedum radio conſpicillo tubulato muniti beneficio, altitudines meridianas Polaris ſtellae infra ſupraque Polum quam diligentiſſime obſeruabat, inueniebatque ex hiſce obſeruatis diſtantiam apparentem huius ſtellae a Polo Aequatoris boreo $2°.27'.25''$, et Eleuationem Poli apparentem Vraniburgi $55°.55'\ 20''$. *Richerius* contra eodem tempore Rupellae obſeruationibus aſtronomicis inuigilans, ope ſextantis 6. pedum radio, diſtantiam apparentem ſtellae Polaris a Polo determinabat $2°.27'\ 5''$, adeoque $20''$ minorem ea, quae *Picardo* in Inſula Huenna obſeruata

ſeruata fuerat. Pariſiis vero, quod maius eſt, ſub idem tempus variatio obſeruabatur in ſtella polari ad 2 fere minuta prima aſſurgens. Abnormes et inexplicabiles hae differentiae *Picardum* ita perplexum incertumque habuerunt, vt de Latitudine Vraniburgi directe accurateque determinanda deſperaret. Quam ob rem, vt demandatum negotium conficeret, de Eleuatione Poli Vraniburgi methodo indirecta, per obſeruatam nimirum Parallelorum Pariſienſis obſeruatorii et ſpeculae aſtronomicae Vraniburgenſis differentiam, definienda cogitauit. Determinauit igitur per medium inter obſeruationes accuratiores differentiam Parallelorum Vraniburgi et Pariſienſis obſeruatorii $7°.4'.5''$, et Eleuationem Poli veram Vraniburgi $55°.54'.15''$, ſiue $25''$ circiter minorem ea, quam per alteram inuenerat methodum. Quamuis vero Eleuatio Poli Vraniburgi methodo indirecta concluſa accuratior videatur ea, quam *Picardus* ex methodo directa collegit, nullo tamen modo recte de tanta differentia diiudicare poſſumus, niſi in errorem quadrantis, quo *Picardus* ad hocce negotium vſus eſt, accurate inquiramus.

Mihi itaque propoſitum eſt, hoc loco, quantum maxime poſſum, extra omnem dubitationem ponere ea, quae ad Latitudinem Vraniburgi ſpectant, vt comparatio inter *Tychonica* obſeruata et recentiorum Aſtronomorum obſeruationes inſtituenda eo meliores in poſterum habeat exitus. Hunc in finem primo adnitar, errorem quadrantis, quo *Picardus* in Inſula Huenna vſus eſt, ex huius Aſtronomi obſeruatis nonnullis, ad obſeruationes, quas egomet Pariſiis inſtitui, comparandis, eruere; id quod non solum Latitudini Vraniburgensis obseruatorii quantum licet accuratissime stabiliendae, verum etiam aliis obseruationibus compluribus, quas *Picardus* eiusdem instrumenti beneficio in Insula Huenna habuit, corrigendis, inseruiet. Deinde calculum Eleuationis Poli Vraniburgi obseruationibus a *Tychone* ipso Vraniburgi peractis et a me concinnatis nixum exhibebo. Collatis enim *Tychonicis* obseruationibus cum iis, quas ipse Parisiis habui, errorem quadrantis, quo *Tycho* ad has obseruationes instituendas vsus est, patefaciam. Simili modo, demonstrata obseruationum *Tychonicarum*, si praecise fuerint correctae, admiranda accuratione, non dubitaui, Eleuationem Poli arcis Ranzouianae Wandesburgi, vbi *Tycho* e Dania discedens exceptus, per tempus aliquod obseruationibus astronomicis inuigilauit, ex obseruatis *Tychonicis* deriuare atque corrigere, simulque Vrbis Hamburgensis Latitudinem ex obseruationibus et mensuris, quas egomet Hamburgum inter et Wandesburgum An. 1749. cepi, ea qua potui praecisione definire. Cum vero elementa nonnulla, quibus ad hosce calculos perficiendos vtor, iis nituntur obseruationibus, quas in Obseruatorio Regio Parisiensi ipse summa diligentia institui, haud alienum hisce disquisitionibus fore iudicaui, et eas adiicere obseruationes, quas mihi ad Latitudinem Obseruatorii Parisiensis definiendam eodem instrumento in famosissimo hocce Obseruatorio habere contigit. Superat quidem Eleuatio Poli Obseruatorii Parisiensis, ex meis obseruationibus deducta, minutis aliquot secundis Latitudinem, quam Cl. *Cassini* aliique Astronomi celeberrimi speculae huic astronomicae assignarunt;

runt;

runt; neque tamen desunt obseruationes optimae notae, quae Latitudinem huius Obseruatorii maiorem adhuc arguant. Obseruationes denique, quas circa Latitudinem Berolinensis Obseruatorii instituere mihi licuit, hac occasione simul exponere, calculoque subiicere, iuuat.

Eleuationis Poli Vraniburgi secundum obseruationes Cel. *Picardi* determinatio.

Cum organa astronomica, quibus Cel. *Picardus* vtebatur, quippe quae telescopiis loco pinnacidiorum instructa erant, longe excellerent prae iis, quorum adhibendorum copia *Tychoni* fuit, Eleuationem Poli Vraniburgi ex *Picardi* obseruationibus primum praecipueque eruere ac definire fas est. Quia autem cardo huius rei vertitur in determinando errore quadrantis, quo *Picardus* vsus est, seligam hunc in finem altitudines meridianas Reguli et Polaris stellae, quarum altera a *Picardo* in Insula Huenna austrum versus, altera in septentrionali plaga fuit obseruata. Harum vero fixarum declinationes praecise cognoscere, methodus haec cum postulet, eas ex meis obseruationibus diligentissime stabilire inprimis adnitar, vt postmodum ad tempus quoduis propositum reduci commode queant.

Ad definiendam itaque declinationem α Leonis, siue Reguli, iis vtar obseruationibus, quas hunc in finem in Obseruatorio Regio Parisiensi quadrantis tripedalis beneficio habui. Ibi enim per plures obseruationes vix 3. 4ue. min. sec. ab inuicem discrepantes, inueni altitudinem

dinem meridianam apparentem Reguli ad lumen crepusculare, coelo eximie sereno, initio mensis Maii

Anno 1748. captam - - - -	54°. 21′. 59″
Ex qua si auferatur error quadrantis - - -	30
Altitudo merid. app. Reguli correcta erit	54. 21. 29
Subtrahendo refractionem pro hac altitud. et ad hanc anni tempestatem - - - -	39
Prodibit altit. merid. Reguli errore quadrantis et refractione correcta - -	54. 20. 50
Eleuatio Aequatoris Obseruatorii Paris. eodem instrumento adinuenta est - - -	41. 9. 47½ hinc
Declinatio apparens Reguli ad initium mensis Maii 1748. erit - - -	13. 11. 2½ bor.

Ad accommodandam nunc huius stellae declinationem ad nostrum vsum, declinatio eius apparens supra determinata in mediam conuertatur necesse est. Dicimus enim mediam positionem eam, quam stella haberet, si nec esset aberratio a propagatione successiua luminis, nec deuiatio ab axis terrae nutatione; apparentem vero positionem eam, quam ex obseruationibus astronomicis directe elicimus, affectam nimirum et aberratione et deuiatione. Apparet igitur positionem stellae mediam, reducendae ac definiendae positioni eius apparenti ad tempus quoduis propositum, commodissime inseruire.

Peracto itaque calculo prodibit deuiatio Reguli in declinationem ad initium mensis Maii 1748. 1″. 1

au-

auſtrum verſus, et aberratio eius in declinationem ad idem tempus 1″.6 auſtrum verſus; vnde emergit declinatio Reguli media ad initium menſis Maii 1748. 13°.11′.5″.2, ſiue, habita praeceſſionis mediae Aequinoctiorum ratione, declinatio Reguli media ad initium anni 1748. 13°.11′.10″.3.

Colligitur porro praeceſſio media Reguli in declinationem a tempore, quo *Picardus* ſtellam hanc Vraniburgi obſeruauit, nempe a fine menſis Aprilis, ſiue ab initio Maii anni 1672. ad noſtram vsque obſeruationem 21′.36″.0 auſtrum verſus, adeoque declinatio Reguli media ad initium Maii 1672. 13°.32′.41″.2, ſiue ob deuiationem in declinationem 2″.9 bor. verſus, et aberrationem 1″.3 auſtrum verſus, declinatio Reguli apparens ad idem tempus 13°.32′.42″.8.

Reſtat nunc, vt ſimili modo declinatio Polaris ſtellae definiatur; haec enim res eo maioris momenti eſſe videtur, quod inter Aſtronomos Gallos, teſte *Picardo*, tunc de diſtantia ſtellae Polaris a Polo non conueniebat. Ad hocce negotium perficiendum, adhibiturus ſum obſeruationes, quas circa Polarem ſtellam anno 1748. in Obſeruatorio Regio Pariſienſi inſtitui, quarumque ſummam poſtea lucide explicabo. Prodit autem ſecundum memoratas obſeruationes diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo Aequatoris boreo ad 1. Ian. 1748. 2°.2′.12″.2; ſiue ob deuiationem huius ſtellae in declinationem 5″.7 bor. verſus, et aberrationem 19″.9 itidem bor. verſus, declinatio Polaris ſtellae media ad idem tempus 87°.57′.22″.2 bor. Cum vero praeceſſio media Polaris ſtellae in declinationem a tempore, quo ſtella haec a *Picardo* Vraniburgi obferuata fuit, nimirum a fine menfis Aprilis, fiue ab initio Maii anno 1672. ad initium vsque An. 1748. fit $24'.59''.0$ bor. verfus, habebimus declinationem Polaris ftellae mediam ad initium Maii Anno 1672. $87^\circ.32'.23''.2$, quae aucta $3''.1$ pro deuiatione boreali, et imminuta $12''.1$ pro aberratione auftrali, dat declinationem huius ftellae apparentem ad idem tempus $87^\circ.32'.14''.2$.

Confimili modo habebimus praeceffionem mediam ftellae Polaris in declinationem a fine anni 1671. ad finem vsque menfis Aprilis 1672. $6''.1$ bor. verfus; deuiationem huius ftellae in declinationem circa finem Anno 1671. $2''.4$ bor. verfus; aberrationem in declinationem ad idem tempus $19''.8$ bor. verfus, hincque declinationem borealem apparentem Polaris ftellae ad finem anni 1671. $87^\circ.32'.39''.3$, fiue diftantiam eius apparentem a Polo Aequatoris boreo $2^\circ.27'.20''.7$. Ablatis denique $4''$. pro refractionum differentia, prodibit diftantia apparens Polaris ftellae a Polo, quae aequatur dimidiae differentiae inter maximam et minimam altitudinem huius ftellae circa id tempus Vraniburgi obferuatam, $2^\circ.27'.16''.7$. *Picardus* diftantiam illam memorato tempore Vraniburgi obferuauit effe $2^\circ.27'.25''$, ideoque $8''$ maiorem ea, quae noftris ftabilita fuit obferuationibus atque calculis; cum contra ex *Richerii* obferuatis eadem diftantia colligitur $12''$ minor illa, quae ex noftris calculis fluit. Ingens atque notabilis ille diffenfus obferuationum *Picardi* et *Richerii* multo maxima ex parte erroribus obferuationum et inftrumentorum tribuendus effe videtur, neutiquam vero,

vti

vti *Picardo* visum est, refractionum vicissitudinibus, quippe quae ad tantam altitudinem tantae esse non possunt. Sed in differentiis illis inordinatis, quae *Picardi* obseruationibus cum *Richerii* vel Astronomorum Parisiensium obseruatis intercedunt, discutiendis morari nunc animus non est. Ostendisse sufficiat, *Picardi* obseruationes circa distantiam Polaris stellae a Polo, de quibus in praesentia maxime agitur, cum nostris magis concinere.

Stabilita nunc nostris obseruationibus et Reguli et Polaris stellae declinatione ad tempus, quo *Picardus* harum fixarum altitudines meridianas Vraniburgi obseruauit, facili negotio error quadrantis, quo *Picardus* vsus est, adeoque vera Eleuatio Poli celebratissimi Obseruatorii Vraniburgensis satis accurate definiri potest. Antequam vero calculos hosce ineamus, obseruationum *Picardi* nostro iudicio delectarum rationem reddere fas est. Ad hunc finem altitudinibus Polaris stellae meridianis et supra et infra Polum a *Picardo* obseruatis examini subiectis, inuicemque comparatis, demonstrare adnitar, quaenam ex illis caeteris sint praeferendae. *Picardus* altitudinem meridianam apparentem stellae Polaris superiorem sub initium mensis Nouembris An. 1671. obseruauit esse $58^{\circ}.\ 23'.\ 0''$, et circa finem eiusdem anni $58^{\circ}.22'\ 45''$. Deuiatio stellae Polaris in declinationem circa initium mensis Nouembris An. 1671. aequabat $2''.\ 0$ bor. versus, et aberratio in declinationem $10''.\ 0.$ itidem bor. versus. Sub finem anni 1671. deuiatio eiusdem stellae erat $2''.\ 4.$ bor. versus et aberratio $19''.\ 8.$ bor. versus; praecessio autem media Polaris stellae in declina-

tionem

tionem ad hocce temporis interuallum aequatur 4″. 0 bor. verſus, ita vt differentia altitudinis meridianae apparentis ſtellae Polaris ſupra Polum ſub initium menſis Nouembris et circa finem An 1671. ſit 14″. 2, quibus ablatis ab altitudine meridiana apparenti Polaris ſtellae ſub initio menſis Nouembris 1671. obſeruata, prodibit eiusdem ſtellae altitudo meridiana apparens reſpondens ad finem anni 1671. = 58°. 22′. 45″. 8, quae cum vix vno minuto ſecundo ab altitudine illo tempore obſeruata differat, indicio eſſe videtur, altitudines meridianas Polaris ſtellae *Picardo* ſupra Polum obſeruatas nullis erroribus notatu dignis eſſe inquinatas. Sed videamus, quomodo altitudines meridianae inferiores huius ſtellae ſe habeant. *Picardus* binas refert eiusmodi altitudines, alteram circa finem An. 1671. obſeruatam, 53°. 27′. 55″, alteram ſub finem menſis Aprilis 1672. captam, 53°. 27′. 45″. Patet autem ex calculis ſupra relatis, deuiationem ſtellae Polaris declinationem eiusdem a fine anni 1671. ad finem vsque menſis Aprilis An. 1672. 0″. 7. augere, dum aberratio eandem 31″. 9 imminuit; praeceſſio vero Aequinoctiorum media Polaris ſtellae declinationem eodem temporis ſpatio 6″. 1 auget, ita vt ſummatim declinatio ſtellae Polaris apparens circa finem menſis Aprilis 1672. 25″. 1 minor ſit, quam ſub finem anni 1671. Quodſi igitur altitudo meridiana ſtellae Polaris ſub finem menſis Aprilis 1672. infra Polum obſeruata 53°. 27′. 45″ augetur 25″, prodibit eiusdem ſtellae altitudo apparens meridiana inferior reſpondens ad finem anni 1671. 53°. 28′. 10″, quae altitudinem illo tempore obſeruatam 15″ ſuperat minimum, cum altitudo meri-

meridiana hiemali tempore obſeruata ob refractionum viciſſitudines minutis aliquot ſecundis maior adhuc ſtatui poſſet. Ex quo colligitur, quod altitudines meridianae ſtellae Polaris infra Polum a *Picardo* obſeruatae, non aeque congruant inter ſe, ac altitudines meridianae ſupra Polum captae. Cum vero in inueſtiganda altitudine meridiana inferiori ſtellae Polaris alteri praeferenda ad noſtrum ſcopum momenta maxima poſita ſint, notandum eſt, iam ſupra eſſe demonſtratum, poſteriorem altitudinem meridianam ſuperiorem Polaris ſtellae priori ad amuſſim conuenire, diſtantiam contra apparentem huius ſtellae a Polo, ex *Picardi* obſeruatis concluſam 8″, iuſto maiorem eſſe: haec autem differentia oritur, eam adhibendo altitudinem meridianam ſtellae Polaris inferiorem, quae circa finem anni 1671 Vraniburgi obſeruata fuit; ex quo inferre licet, altitudinem illam meridianam inferiorem Polaris ſtellae iuſto minorem eſſe, ratione altitudinum meridianarum huius ſtellae ſupra Polum obſeruatarum. Reſtat igitur, vt videamus, quaenam ſit diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo, quae ex altitudine meridiana huius ſtellae ſub finem menſis Aprilis 1672 infra Polum obſeruata fluit. Oſtendimus iam ſupra, altitudinem hancce meridianam apparentem praeciſe ad finem anni 1671. reductam eſſe $53°.\ 28'.\ 10''$.; qua dempta ab altitudine meridiana apparenti, eodem tempore ſupra Polum obſeruata $58°.\ 22'.\ 45''$, reſiduum erit $4°.\ 54'.\ 35''$, adeoque huius dimidium, ſiue diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo $2°.\ 27'.\ 17\frac{1}{2}''$. Determinauimus ſupra huius ſtellae diſtantiam apparentem a Polo ex noſtris obſeruationibus ad praefatum tempus

2°. 27′. 16″. 7, fere vt iam ex reductis obseruationibus *Picardi* inuenimus. Admirabili hocce consensu praestantia altitudinis meridianae Polaris stellae circa finem mensis Aprilis 1672 obseruatae, prae altera, quae sub finem anni 1671 fuit obseruata, quam maxime probatur; ita vt, reiecta hac, illam solam ad perficiendum calculum Eleuationis Poli Vraniburgi adhibere non dubitauerim.

Emergit itaque ex nostris obseruationibus declinatio Reguli apparens ad tempus, quo *Picardus* stellam hanc Vraniburgi obseruauit, nempe ad initium Maii 1672, 13°. 32′. 42″. 8, et declinatio apparens Polaris stellae ad idem tempus 87°. 32′. 14″. 2, atque hinc summa complementorum declinationum harum fixarum 78°. 55′. 3′. 0, a qua si subtrahantur 43″. pro refractione ad altitudinem 53°½ et 54″. pro refractione ad altitudinem 47°⅔, prodibit summa distantiarum apparentium meridianarum Reguli et Polaris stellae a vertice Vraniburgensi 78°. 53′. 26″. Secundum *Picardi* obseruationes altitudo meridiana apparens Reguli erat Vraniburgi initio mensis Maii 1672. 47°. 40′. 0″, et altitudo meridiana apparens stellae Polaris infra Polum 53°. 27′. 45″; vnde consequitur summa distantiarum apparentium meridianarum obseruatarum Reguli et Polaris stellae a vertice Vraniburgensi 78°. 52′. 15″, qua comparata ad earundem distantiarum summam, supra ex nostris obseruationibus deductam, prodibit differentia 1′. 11″, adeoque error quadrantis *Picardi* ab altitudinibus, huius quadrantis beneficio obseruatis, subtrahendus 35″½.

Errore

Errore quadrantis *Picardi* in apricum prolato, Eleuatio Poli Vraniburgi ex Cel. huius Aſtronomi obſeruationibus ſequenti modo accurate definitur:

Eſt enim altit. app. minima ſtellae Polaris ex *Picardi* obſeruationibus - - - -	$53^{\circ}.27'.45''$
Error quadrantis ſubtrahendus - - - - - -	35.5
Altit. minima Polaris ſtellae correcta -	53. 27. 9. 5
Refractio ſubtrahenda - - - - - - - - -	43.
Altit. minima Pol. ſtellae errore quadrantis et refract. correcta - - - - -	53. 26. 26. 5
Diſtantia app. ſtellae Pol. a Polo ex meis et *Picardi* obſeruationibus - - -	2. 27. 45. 8
Adeoque Eleuatio Poli vera Vraniburgi	55. 54. 12. 3

Nobilis *Tycho Brahe* Eleuationem Poli Vraniburgi ſtatuit eſſe $55^{\circ}\ 54''\frac{2}{3}$; *Picardus* autem eam ex ſuis obſeruationibus determinauit primum $55^{\circ}\ 54'.40''$, deinde vero $55^{\circ}.54.15''$, ita vt prima *Picardi* determinatio dimidio ferme vnius minuti primi, altera vero paucis tantum minutis ſecundis a noſtro calculo differat. Verum circa illam determinationem *Picardi* Eleuationis Poli Vraniburgi, quae accuratior tutiorque ab erroribus eſſe videtur, notandum eſt, eam differentia Parallelorum Pariſienſis Obſeruatorii et Vraniburgi a *Picardo* obſeruata eſſe innixam, obſeruationesque, quas *Picardus* et Aſtronomi Regii in Obſeruatorio Pariſienſi hunc in finem compacto inſtituerunt, nonnunquam re vera $10''$ ab inuicem diſcrepare, quamuis *Picardus* perſuaſum habe-

 ret,

ret, inſtrumenta ad hocce negotium adhibita perfecte congruere. Accedit etiam, quod Eleuatio Poli Obſeruatorii Pariſienſis a *Picardo* admiſſa iuſto ſit minor; hanc enim ob cauſam Cl. *le Monnier* in Hiſtoria ſua coeleſti Eleuationem Poli Vraniburgi adauxit ad 55°.54′.20″. Caeterum perſpecta atque perpenſa ratione, qua Eleuatio Poli Vraniburgi ſupra definita eſt, quin praeſens determinatio caeteris anteponenda ſit, nullus dubito. Cl. *Horrebow*, Daniae Regis Aſtronomus, Eleuationem Poli *Hafniae* variis modis obſeruauit eſſe 55°.40′.59″, ita vt admiſſa Parallelorum differentia *Hafniam* inter et Vraniburgum a *Picardo* inuenta 13′.30″, ſecundum haſce obſeruationes Eleuatio Poli Vraniburgi ſit 55°.54′.29″, adeoque 17″ maior ea, quae ex noſtro colligitur calculo. Cum vero parum vtilitatis Aſtronomiae promouendae ex diſquiſitione huius differentiae redire videatur, accuratione noſtrae determinationis ſatis iam, me iudice, probata, melius eſt ſimili methodo ſecundum obſeruationes a *Tychone* ipſo habitas Eleuationem Poli Vraniburgi diligenter indagare, vt inſtituta comparatione, et de accuratione inſtrumentorum nobiliſſimi huius Aſtronomi, et de praeciſione, quam ad obſeruationes habendas adhibuit, eo rectius exiſtimare, eiusque obſeruatis eo tutius vti poſſumus.

Determinatio Eleuationis Poli Vraniburgi obſeruationibus, a nobili *Tychone Braheo* habitis, innixa.

Praeſens diſquiſitio vt bene procedat, obſeruationes *Tychonicas* ad hocce negotium maxime idoneas aucupemur,

pemur, necesse est. Quamuis enim *Tycho* permultas instituerit obseruationes definiendae latitudini Vraniburgi inseruientes, non omnes tamen ad accuratam determinationem aeque idoneae censendae sunt. Perpensis igitur atque comparatis omnibus obseruationibus huc spectantibus, illae, quas *Tycho* sub finem mensis Februarii anni 1588. circa Polarem stellam habuit, mihi ad praesentem disquisitionem aptissimae omnium visae sunt: congruunt enim non solum cum obseruationibus mense Decembri subsequenti peractis, verum id quoque accedit, vt eodem fere tempore eodemque instrumento altitudo meridiana Reguli saepius obseruata sit. Vnde facili negotio error quadrantis, quo *Tycho* vsus est, modo praecedenti indagini erroris quadrantis *Picardi* simili, definiri potest.

Habebimus itaque ex obseruationibus *Tychonicis* per quadrantem chalybeum sub finem mensis Februarii anni 1588. Vraniburgi habitis saepiusque iteratis, altitudinem meridianam apparentem Polaris stellae infra Polum - - - - - - 52°.59′.20″,
et altitud. merid. appar. Reguli circa idem
tempus eodemque organo obseruatam - 48. 2. 30.

Ad errorem quadrantis, quo *Tycho* ad hasce obseruationes instituendas vsus est, eruendum, determinaturus sum, vti in praecedenti calculo, ex meis obseruatis, declinationem Reguli et Polaris stellae ad tempus supra notatum. Admissa igitur declinatione Reguli media ad 1 Ian. 1748, supra ex meis obseruationibus inuenta, 13°.11′.10″.3. bor. prodibit ob praecessionem Reguli mediam in declinationem a tempore obseruationis *Tychonis* ad 1. vsque Ian. 1748, 45′.7″.8 austrum versus

ſus, declinatio Reguli media ad finem menſis Februarii 1588. 13°.56′.18″.1 bor. Cum vero ad idem tempus deuiatio Reguli in declinationem ſit 3″.7 auſtrum verſus, et aberratio 6″.2 itidem auſtrum verſus, erit ad tempus iam notatum declinatio Reguli apparens 13°.56′.8″.2.

Tycho quidem ad hocce tempus declinationem Reguli admittit ferme ſeſquiminuto primo maiorem; huius autem differentiae cauſa praecipue in falſa *Tychonis* hypotheſi refractionum poſita eſſe videtur: hac enim hypotheſi effectum eſt non ſolum, vt *Tycho* Eleuationem Poli Vraniburgi iuſto maiorem inueniret, verum etiam, vt ex duplici hoc errorum fonte, declinationes boreales iuſto maiores, auſtrales contra iuſto minores prodirent, nulla habita ratione errorum organorum aſtronomicorum *Tychonicorum*.

Simili modo declinatio Polaris ſtellae ad tempus obſeruationum *Tychonicarum* ſupra notatum definitur. Habemus nempe ex noſtris obſeruatis declinationem mediam ſtellae Polaris ad 1 Ian. 1748. 87°.57′.22″ 2.bor. a qua ſi auferantur 52′.55″.5 pro praeceſſione ſtellae Polaris media in declinationem, prodibit declinatio media huius ſtellae ad finem menſis Februarii An. 1588. 87°.4′.26″.7, atque hinc ob deuiationem Polaris ſtellae in declinationem 1″.8 auſtrum verſus, et aberrationem 7″ 4 boream verſus, declinatio apparens ſtellae Polaris ad idem tempus 87°.4′ 32″.3, ſiue diſtantia eius apparens a Polo Aequat. boreo 2°.55′.27″.7.

Hiſce

Hiſce ſtabilitis, habebimus declinationem apparentem Reguli ad finem menſis Februarii 1588. $13^\circ\ 56'.8''.2$ bor. et conſequenter eius diſtantiam apparentem a Polo Aequatoris bor. $76^\circ.3'.51''.8$; at cum diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo Aequat. boreo ad idem tempus inventa ſit $2^\circ.55'.27''.7$, erit ſumma diſtantiarum appar. Reguli, et Polaris ſtellae a Polo Aequatoris boreo $78^\circ.59'.19''.5$, a qua ſi auſerantur $54''$ pro refractione Reguli, et $45''$ pro refractione ſtellae Polaris, remanet ſumma diſtantiarum apparentium meridianarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Vraniburgenſi $78^\circ.57'.40''.5$. Secundum obſeruationes *Tychonicas* autem diſtantia apparens meridiana ſtellae Polaris a vertice Vraniburgenſi tunc erat $37^\circ.0'.40''$, et Reguli diſtantia apparens meridiana a vertice Vraniburgenſi $41^\circ.57'.30''$, adeoque ſumma diſtantiarum appar. merid. obſeruatarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Vraniburg. $78^\circ.58'.10''$. Apparet igitur, ſummam diſtantiarum obſeruatarum calculum noſtrum $29''.5$ ſuperare, et errorem quadrantis *Tychonici* hinc eſſe $14''.7$ add. quo inuento eleuatio Poli Vraniburgi ſequenti modo nullo fere negotio definitur:

Tycho ſub finem menſis Februarii Anni 1588. ſtellae Polaris altitudinem apparentem minimam obſeruauit eſſe - - - - - - - - - - - $52^\circ.59'.20''$.

Errore quadrantis addito - - - - - - - 14. 7

Prodit minima ſtellae Polaris altit. apparens correcta - - - - - - - - - 52. 59. 34. 7

Refractione ſubducta - - - - - - - - - 45.

Reſtat

Reſtat minima Polaris ſtellae altit. errore quadr. et refract. correcta - -	52°.58′.49″.7
Cui addendo diſtantiam apparentem ſtellae Polaris a Polo - - -	2. 55. 27. 7
Vraniburgi latitudo quaeſita erit - -	55. 54. 17. 4

Patet igitur Eleuationem Poli Vraniburgi ex obſervationibus *Tychonicis* concinnatis atque correctis deductam 5 tantum min. ſec. differre ab ea, quae ex obſeruatis *Picardi* eodem modo concinnatis et correctis fluit. Admirabili hocce conſenſu perpenſo, conuincimur, curas et cogitationes nobilis *Tychonis*, in obſeruationibus ſumma diligentia et accuratione inſtituendis, neque minus in organis aſtronomicis affabre conficiendis euigilaſſe: maiorem enim accurationem ab inſtrumentis pinnacidiis munitis ſperare aut exſpectare non poſſumus. Perſuaſum potius habemus, obſeruationes *Tychonicas*, modo vt ſedulo concinnentur atque corrigantur, excolendae Aſtronomiae magis magisque eſſe inſeruituras.

Latitudinis arcis Wandesburgenſis, nec non Hamburgenſis vrbis, determinatio.

Ad arcem Wandesburgum, cui hodie nomen eſt *Wandesbeck*, *Henricus Ranzouius* nobilem *Tychonem*, e Dania diſcedere coactum, inuitauerat. Quanquam *Tychoni* illic ſedem fixam habere mens non eſſet, varias tamen ibi autumno anni 1597, annoque inſequenti, inſtituit obſeruationes, praecipue circa Planetas, quae cum vtili-

vtilitatem haud contemnendam afferre possint, operae pretium fore iudicaui, vt huius arcis, in amoena regione prope Hamburgum sitae, Latitudinem, ex obseruatis *Tychonicis*, quantum possem, accuratissime eruerem. Calculum hunc eo libentius attingo, quod ex positione arcis huius respectu vrbis Hamburgensis mihi obseruata, Latitudinem Hamburgi, de qua recentiores Astronomi et Geographi plus quam 8. min. prim. discrepant, multa cum accuratione stabilire possum. Disquisitionem Latitudinis huius vrbis et in Geographia et in Astronomia vsui esse palam est, cum *Fabricius* et *Iungius*, speculatores coelestium rerum diligentissimi, complures ibi instituerint obseruationes, ad Astronomiam excolendam fortasse aliquando profuturas.

Accuratione obseruationum *Tychonicarum* ex consensu harum obseruationum cum obseruatis *Picardi* circa Latitudinem Vraniburgi praecedentibus calculis satis probata, eandem praecisionem in definienda ex *Tychonicis* obseruationibus Eleuatione Poli Wandesburgi et Hamburgi sperare licet, modo vt harum obseruationum Wandesburgi habitarum rite corrigendarum copia sit. Continet autem Historia coelestis *Tychonis Brahei* obseruationes nonnullas circa Regulum et Polarem stellam Wandesburgi habitas, quae simul ad errorem organi, quo *Tycho* vsus est, detegendum, et ad Latitudinem Wandesburgi definiendam commode adhiberi possunt. Antequam vero ipsum calculum aggrediar, facere non possum, quin moneam, obseruationes, quas *Tycho* Wandesburgi initio anni 1598. habuit, non adeo esse accuratas, vt obseruatis illo tempore altitudinibus Polaris stellae et

Reguli vti tute possimus: Organa enim *Tychonica* tunc erant, *Tychone* ipso teste, aliquantum vitiosa, et meridiana linea nondum satis accurate descripta. Verificatione autem organorum astronomicorum et meridianae lineae peracta, obseruationes melioris notae circa Polarem stellam et Regulum mense Martio eiusdem anni institui coeptae sunt, quas itaque ad sequentem calculum adhibiturus sum, easque praecipue, de quibus *Tycho* ipse bene existimauit.

Obseruata nempe fuit Wandesburgi medio mense Martio anni 1598. altitudo apparens meridiana Reguli 50°. 19′. 10″, eodemque organo per idem tempus altitudo apparens meridiana Polaris stellae infra Polum 50°. 44′. 0″.

Posita igitur ex nostris obseruationibus supra exploratis declinatione Reguli media ad 1. Ian. 1748. 13°. 11′. 10″.3 bor. prodibit ob praecessionem Reguli mediam in declinationem inde a medio Martio 1598. vsque ad 1. Ian. 1748. 42′. 19″.7 austrum versus, declinatio Reguli media ad medium mensem Martium 1598. 13°. 53′. 30″,0. Deuiatio autem Reguli in declinationem cum sit ad istud tempus 2″. 3 boream versus, et aberratio in declinationem 5″. 3 austrum versus, emerget declinatio apparens Reguli ad medium Martium 1598. 13°. 53′. 27″. 0.

Eodem modo declinatio apparens Polaris stellae ad tempus obseruationum *Tychonicarum* circa hanc stellam Wandesburgi habitarum definitur. Declinatio enim media stellae Polaris ad 1. Ian. 1748. supra inuenta est 87°. 57′. 22″. 2 bor. a qua si subtrahantur 49′. 34″. pro prae-

praeceſſione media Polaris ſtellae in declinationem a medio menſe Martio 1598. vsque ad 1. Ian. 1748, reſtat declinatio media Polaris ſtellae ad medium menſem Martium 1598. 87°.7′.48″,2, quae aucta 3″.4 pro deuiatione ſtellae Polaris in declinationem boream verſus, et 1″.4 pro aberratione huius ſtellae itidem boream verſus, dat declinationem apparentem Polaris ſtellae ad idem tempus 87°.7′.53″, ſiue diſtantiam eius apparentem a Polo Aequatoris boreo 2°.52′.7″.

Addendo igitur diſtantiae apparenti Polaris ſtellae a Polo nunc inuentae diſtantiam apparentem Reguli ab eodem Polo 76°.6′.33″, prodibit ſumma complementorum declinationum apparentium Reguli et Polaris ſtellae 78°.58′.40″; a qua ſi ſubtrahantur 50″ pro refractione ſtellae Polaris, et 51″ pro refractione Reguli, habebimus ſummam diſtantiarum apparentium meridianarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Wandesburgenſi ad medium Martium 1598. 78°.56′.59″. Diſtantia autem apparens meridiana Polaris ſtellae a vertice Wandesburgenſi tunc a *Tychone* obſeruata fuit 39°.16′.0″, et diſtantia apparens meridiana Reguli ab eodem vertice 39°.40′.50″; ita vt ſumma diſtantiarum meridianarum obſeruatarum a vertice Wandesburgenſi ſit 71°.56′.50″, adeoque error quadrantis *Tychonici* ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendus 4″½, quo detecto, ad calculum ipſum Eleuationis Poli Wandesburgi progredi poſſumus.

Altitudo meridiana apparens ſtellae Polaris infra Polum a *Tychone* Wandesburgi obſeruabatur 50°. 44′. 0″

Subductis pro errore quadrantis - - - -				4. 5
Remanebit altitudo merid. apparens minima correcta - - - - - - -	50.	43.	55.	5
Subtrahendo refractionem - - - - - - -			50.	
Prodit altitudo merid. minima errore quadr. et refractione corr. - - -	50.	43.	5.	5
Diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo aequatur - - - - - - - - - -	2.	52.	7.	0
Hinc Eleuatio Poli vera Wandesburgi -	53.	35.	12½.	

Latitudine Wandesburgi in apricum prolata, facili iam negotio Latitudinem vrbis Hamburgenſis definire poſſumus. Obſeruaui enim, turrim Wandesburgenſem e templo quodam in media fere vrbe ſito ſpectatam 54°. 30′ a Septentrione Orientem verſus declinare. Diſtantia vero templi huius Hamburgenſis a turri Wandesburgenſi ex menſuris, quas in agro Hamburgenſi cepi, aequatur 1780. hexapedis Pariſ., ita vt ex hiſce datis et ex Latitudine Wandesburgi ſupra inuenta differentia Meridianorum Hamburgum inter et Wandesburgum prodeat 2′. 34″. Aequat. ſiue 10¼″ temp. Eleuatio Poli vera autem Hamburgi 53°. 34′. 8″.

Si iam Eleuationem Poli Hamburgi ex noſtro calculo deductam ad Latitudinem comparemus, quam Aſtronomi et Geographi vrbi huic aſſignarunt, patet, pleroſque Latitudinem Hamburgenſis vrbis iuſto maiorem feciſſe. Secundum mappas geographicas fere omnes

Latitudo

Latitudo huius vrbis tertia circiter vnius gradus parte praecedentem determinationem ſuperat. *Keplerus* Latitudinem hanc $8\frac{2}{3}$ min. prim., *Caſſini* $7\frac{2}{3}$ min. prim. et *Tycho* $\frac{1}{3}$ min. prim. circiter iuſto maiorem admittunt. Cl. *Iungius*, *Fabricium* adiutorem habens, cum de Latitudine Hamburgenſis vrbis accurate determinanda cogitaret, ſaeculo proxime praeterlapſo negotium hocce binorum organorum aſtronomicorum pinnacidiis munitorum et in Anglia confectorum beneficio peragendum ſuſcepit. Latitudo autem, quam *Iungius* ex ſuis obſeruationibus, quarum ſingula non perſcripſit, vrbi huic aſſignat, $6\frac{2}{3}$ min. prim. noſtram determinationem ſuperat: Cl. *Kirchium* vero proxime ad noſtrum calculum accedere, ex eius diſſertatione de hocce argumento conſcripta, et Miſcell. Berol. inſerta, facile demonſtrari poteſt; ſed nihil eſt, quod diutius in hac diſquiſitione moremur; magis intereſſet Longitudines ſpecularum aſtronomicarum *Tychonicarum* nunc eodem praeciſionis gradu, quo Latitudines, inueſtigare atque ſtabilire, ſed hanc diſquiſitionem ad aliud tempus reiicimus. Sufficiat hic tanquam in tranſitu monuiſſe, Cl. *Kirchium* ex obſeruata Eclipſi ſolari differentiam Meridianorum Hamburgum inter et Berolinenſe Obſeruatorium determinaſſe $12'.45''$. temp. ita vt ex hac obſeruatione et praecedenti calculo differentia Meridianorum Berolinenſis Obſeruatorii et ſpeculae aſtronomicae *Tychonicae* Wandesburgenſis ſit $12'.35''$ temp. ſiue Longitudo Wandesburgi $27°.57\frac{1}{2}'$.

Diſquiſitione Latitudinum ſpecularum aſtronomicarum *Tychonicarum* ad exitum perducta, promiſſo teneor, eas exhibere obſeruationes, quas ad Latitudinem Pariſienſis Obſeruatorii Regii indagandam ſumma diligentia inſtitui. Obſeruationes iſtae non ſolum inſeruient probandis declinationibus fixarum, quas ex obſeruationibus eodem inſtrumento in Pariſienſi Obſeruatorio a me habitis deduxi, quarumque nonnullas ad praecedentes calculos adhibui; verum etiam ad exiles illas differentias, quae in Latitudine famoſiſſimi huius Obſeruatorii obuiae ſunt, diiudicandas atque dirimendas, non inutiles erunt.

Obſeruationes aſtronomicae ad Latitudinem Obſeruatorii Regii Pariſienſis definiendam habitae Anno 1748. ſt. n.

Sequentes obſeruationes circa Polarem ſtellam exquiſiti quadrantis tripedalis radii ſuper linea meridiana in pauimento turris occidentalis Obſeruatorii Pariſienſis deſcripta collocati beneficio ad lumen crepuſculare et diurnum, nullo lumine peregrino fila teleſcopii colluſtrante, inſtitutae ſunt.

d. 11. Ian. obſeruaui altit. merid. appar.

	Polaris ſtellae ſupra Polum -	50°. 53'. 45". 7
14. Ian.	- - - - - - - -	50. 53. 42. 6
26. Ian.	- - - - - - - -	50. 53. 44. 8
30. Ian.	- - - - - - - -	50. 53. 43. 9.

Cum obſeruationes hae diuerſis diebus habitae ſunt, conferri inuicem commode nequeunt, niſi omnes ad vnum eundemque diem ſecundum praeceſſionis, deviationis

viationis et aberrationis leges reducantur. Quam ob rem praecessionem, deuiationem et aberrationem Polaris stellae in declinationem ad dies obseruationum supra notatos supputaui, et in sequenti tabula exhibui, vt harum correctionum ope obseruatae altitudines meridianae Polaris stellae ad 1. Ian. 1748. reduci queant.

Praecessio Polaris stellae in declinationem.

a 1. Ian. 1748. vsque ad 11. Ian.	0″.5	Bor. versus
14.	0 7	
26.	1. 4	
30.	1. 6	

Deuiatio stellae Polaris in declinationem.

ad 1. Ian. 1748.	5″.7	Bor. versus
11.	5. 8	
30.	5. 9	

Aberratio stellae Polaris in declinationem aequatur

d. 1. Ian. 1748.	19″.9	Bor. versus
11.	19. 5	
14.	19. 3	
26.	17. 8	
30.	17. 1	

Erit igitur altitudo meridiana obseruata Polaris stellae supra Polum deuiatione et aberratione correcta et ad 1. Ian. 1748. reducta

Ex 1ma oseruatione	50°. 54′. 11″. 5
2da	50. 54. 8. 4
3tia	50. 54. 9 9
4ta	50. 54. 8. 5
Per medium igitur inter istas obseruationes	50. 54 9. 6

Eodem quadrante eodemque in loco altitudinem meridianam Polaris stellae infra Polum quantum potui accura-

accuratiſſime obſeruaui, eamque d. 27. Maii 1748. coelo eximie ſereno ad lumen crepuſculare plus vice ſimplici inueni 46°. 48′. 55″.

Cum vero praeceſſio media Polaris ſtellae in declinationem a d. 1. Ian. 1748. vsque ad 27. Maii ſit 7″. 9. boream verſus, deuiatio autem huius ſtellae in declinationem d. 27. Maii 1748. 6″. 3 itidem boream verſus, et eius aberratio in declinationem die notato 16″. 9. auſtrum verſus, prodibit altitudo meridiana obſeruata ſtellae Polaris infra Polum deuiatione et aberratione correcta et ad 1. Ian. 1748. reducta 46°.48′.57″.7.

Antequam vero in ſupputandis hiſce obſeruationibus vlterius progrediar, de iis dicendum erit obſeruationibus, quarum beneficio quadrantis huius verificatio peracta fuit. Quadrante hoc per inuerſionem ad Horizontem iam verificato, reſtabat, vt eius verificatio ad Zenith more conſueto inſtitueretur; quae cum ſit difficillima, omnia prouidi praecauique, vt negotium hocce bene ſub manus ſuccederet, lucidae Perſei beneficio proxime ad Zenith Pariſienſe accedentis.

Plano itaque quadrantis tripedalis radii ſupra memorati ſumma cura verticaliter ſuper famoſiſſima meridiana linea marmorea obſeruatorii Regii Pariſienſis collocato, ſequentes altitudines meridianae α Perſei ad lumen diurnum mihi et Celeb. *le Monnier* coniuncte obſeruatae ſunt:

Facie

Facie quadrantis Orientem ſpectante,

D. 16. Februarii 1748.	90°. + 6′.	59″.	7
17. - - - - - - -	+ 7.	3.	5
20. - - - - - - -	+ 7.	1.	0

Facie quadrantis Occidentem ſpectante,

D. 21. Febr. 1748. 90°.−5′.59″.1. accuratiſſ. coelo grate ſereno.

Vt ſummam ſeruarem praeciſionem in ſupputandis comparandisque eiusmodi obſeruationibus vſitatam, ſequentes ſupputaui correctiones, reducendis altitudinibus meridianis ſupra notatis inſeruientes:

Praeceſſio media α Perſei in declinationem

Ad 1. Ian. 1748. vsque ad 16. Febr.	1″.	9	Bor. verſus
17. -	1.	9	
20. - -	2.	0	
21. - -	2.	0	

Deuiatio α Perſei in declinationem

ad 1. Ian. 1748.	8″.	3	Bor. verſus
21. Febr. - -	8.	2	

Aberratio α Perſei in declinationem

d. 1. Ian. 1748.	10″.	9	Bor. verſus
16. Febr. - -	9.	5	
17. - - -	9.	4	
20. - -	9.	1	
21. - - -	9.	0	

Adhibitis itaque hiſce correctionibus, ad reducendas altitudines meridianas α Perſei ſupra exhibitas, habebimus:

Diſtantiam meridianam obſeruatam α Perſei a vertice Obſeruatorii Reg. Pariſ. deuiatione et aberratione correctam et ad 1. Ian. 1748. reductam,

 ex

ex 1ma obſeruatione	6'.40''1. bor. verſus		Limbo quadrantis ad Orient. obverſo.
2da - - -	6. 44. 0	- -	
3tia - - -	6. 41. 7	- -	
Per medium igitur inter haſce obſeruationes -	6. 41. 9 bor. verſus		
ex 4ta obſeruatione	5. 39. 9 bor. verſus.		Limbo quadrantis ad Occid. obverſo.
Differentia	1. 2.		

Prodibit igitur diſtantia media merid. α Perſei a vertice Obſeruatorii Reg. Pariſienſis ad 1. Ian. 1748 6'. 10''. 9 boream verſus, adeoque error quadrantis circa Zenith ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendus 31''. Cum vero eiusdem quadrantis error, per alteram inuerſionem, circa Horizontem inſtitutam, inuentus ſit vix duobus minutis ſecundis minor, aſſumere poſſumus 30''. pro errore huius quadrantis ad obſeruationes noſtras corrigendas conſtanter adhibendo, modo limbi diuiſio huius quadrantis nullo errore ſit inquinata.

Reſtat nunc, vt refractiones, quibus ad corrigendas obſeruationes Polaris ſtellae ſupra relatas vtendum eſt, quantum poſſumus, accuratiſſime ſtabiliamus. Ad hoc efficiendum notandum eſt, altitudinem Mercurii in Barometro diebus illis, quibus Polarem ſtellam menſe Ianuario ſupra Polum obſeruaui, eandem ferme fuiſſe, quae d. 27 Maii, quo altitudinem Polaris ſtellae minimam cepi, obſeruabatur, vtroque nimirum tempore fere ſummam; temperiem contra aeris maxime diuerſam, exiſtente differentia 40. fere grad. Thermometri *De l'Isliani*; quae

quae temperiei aeris differentia ſecundum noſtras obſeruationes Petropoli et in Inſula Oſilia habitas, in refractione pro altitudine Polari Pariſienſi differentiam 3″. minimum procreare valet. Poſita igitur refractione pro altitudine Polaris ſtellae maxima Ianuario menſe in Obſeruatorio Reg. Pariſienſi obſeruata 49″, refractio, quae altitudini ſtellae Polaris minimae menſe Maio Pariſiis obſeruatae conuenit, 53″. ſuperare non poteſt. Hiſce admiſſis, calculus Eleuationis Poli Obſeruatorii Regii Pariſienſis ſequenti modo perficitur:

Altit merid. obſeruata ſtellae Polaris deuiatione et aberratione correcta ad 1. Ian. 1748. eſt - - - - -	ſupra Polum	50°.	54′.	9″.	6
	infra Polum	46.	48.	57.	7
Error quadrantis - - - - - - - -		—0.	0.	30	-
Refractio - - - - -	pro alt. max.	— 0.	0.	49	-
	pro alt. min.	— 0.	0.	53	-
Altit. merid. med. ſtellae Polaris correcta - -	ſupra Polum	50.	52.	50.	6
	infra Polum	46	47.	34.	7
Differentia - - - - - - - - - - -		4.	5.	15.	9
Diſtantia media ſtellae Polaris a Polo -		2.	2.	37.	9
Altit. merid. med. ſtellae Polaris infra Polum		46.	47	34.	7
Eleuatio Poli vera Obſeruatorii Regii Pariſ.		48.	50.	12½.	

Latitudinis Obſeruatorii Regii Berolinenſis determinatio.

Obſeruationes, quas ad Latitudinem Berolinenſis Obſeruatorii ſtabiliendam, in loco quodam, ab Obſeruatorio ipſo 1″. boream verſus remoto, peregi, quadrantis tripedalis radii ſumma diligentia meo ductu Pariſiis confecti, et duplici limbi diuiſione inſtructi, beneficio, inſtitutae ſunt. Perſpecta nempe huiuſce quadrantis praeſtantia atque praeciſione, praeſertim in limbi eius diuiſione, examinatoque axis tubuli ad quadrantem hunc applicati parallelismo, planum huiuſce organi ſuper linea meridiana accurate deſcripta verticaliter collocaui, et ſequentes altitudines et Polaris ſtellae, et oculi Draconis, Latitudinis Berolinenſis Obſeruatorii definiendae et quadrantis verificandi gratia, ſumma qua potui accuratione obſeruaui.

Altitudines ſtellae Polaris meridianae infra Polum ad Lumen crepuſculare et diurnum An. 1750 Berolini obſeruatae.

D. 24 Maii ſt. n.	50° 30′. 27″ 4	Coelo eximie ſereno atque placido.
25. - - -	50. 30. 25. 2	
30. - - -	50. 30. 23. 6	
1. Iunii - -	50. 30. 27. 4	

Vt harum obſeruationum comparatio accuratius commodiusque inſtitui poſſit, obſeruationes haſce omnes ad primum diem Ianuarii An. 1750 ſt. n. reducere iuuat. Correctiones autem ad iſtam reductionem adhibendae ſequentes ſunt:

Praeceſſio media Polaris ſtellae in declinationem

Ad 1 Ian. 1750 vsque ad d. 24. Maii	7″. 2	Bor. verſus
25. - -	7. 3	
30. - -	7. 5	
1. Iun.	7. 6	

Deuiatio ſtellae Polaris in declinationem

Ad 1. Ian. 1750 - -	6″. 9	Bor. verſus
1. Iunii - - - - -	6. 7	

Aber-

Aberratio Polaris ſtellae in declinationem

Ad 1. Ian. 1750.	- -	19''. 8	Bor. verſus
24. Maii	- - - -	16. 1	Auſtrum verſus.
25	- - - - - - -	16. 3	
30	- - - - - - -	17. 2	
1 Iunii	- - - - -	17. 5	

Reductione facta habebimus altitudinem meridianam obſeruatam Polaris ſtellae infra Polum deuiatione et aberratione correctam et ad 1 Ian. 1750 reductam,

ex 1ma obſeruatione - -	50°. 30'. 29''. 6
2da - - - - - - -	50 30. 27. 5
3tia - - - - - - -	50. 30. 26. 6
4ta - - - - - - -	50. 30. 30. 6
Per medium igitur inter iſtas obſeruationes	50 30. 28. 6

Ad errorem quadrantis, cuius beneficio praecedentes obſeruationes habitae ſunt, explorandum, ſequentem inſtitui verificationem, per inuerſionem huius inſtrumenti circa Zenith, ſumma cura Berolini peractam; obſeruaui nempe

Facie quadrantis Occidentem ſpectante,

An. 1750 d. 23 Iul. ſt. n. Altitud. merid.

appar. β Draconis -	90° + 122''. 0
26. - - - - - - - -	+ 120. 7
27. - - - - - - - -	+ 118. 2
28. - - - - - - - -	+ 120. 1

Facie quadrantis in Orientem conuerſa,

An. 1750 d. 10. Aug. ſt. n. Altit. merid.

appar. β Draconis - -	90° − 32''. 5
13. Aug. - - - - - -	− 30. 3

Concinnandis comparandisque hiſce altitudinibus β Draconis obſeruatis, inſeruient ſequentes correctiones declinationis huius ſtellae :

Praeceſſio media β Drac. annua in declinationem 3″. 1. auſtrum verſus	Deuiatio β Draconis in declinationem pro tempore obſeruationum praecedentium, 1″. 3 auſtr. verſus.

Aberratio β Draconis in declinationem

ad d. 23. Iulii 1750.	- - - - - -	11″. 7	Boream verſus
26.	- - - - - - - -	12. 5	
27.	- - - - - - - -	12. 8	
28.	- - - - - - - -	13. 0	
10. Aug.	- - - - - -	15. 7	
13. Aug.	- - - - -	16. 2	

Ratione harum correctionum habita , prodibit altitudo meridiana obſeruata β Draconis aberratione et deuiatione correcta , et ad 1 Ian. 1750. reducta,

Limbo quadrantis ad Occident. conuerſo :

ex obſeruat. d. 23. Iul.	- - -	90° + 130″. 7
26.	- - - - -	+ 130. 1
27.	- - - - -	+ 127. 9
28.	- - - - -	+ 130. 0
Per medium igitur	- - - - -	90° + 129″. 7

Limbo quadrantis in Orientem conuerſo :

ex obſeruatione d. 10. Aug.	- - -	90° − 45″. 0
13.	- - - - - -	− 43. 3
Per medium itaque	- - - - - -	90° − 44. 1.

Hinc

Hinc distantia med. mer. β Draconis
a Vertice Berol. in primo situ quadr. 2′. 9″. 7 Austr. vers.
- - - in altero situ quadrantis 0. 44. 1 Austr. vers.

Differentia, siue duplus quadrantis error
circa Zenith - - - - - - 1. 25. 6
Error quadrantis simplex ab altitudinibus obseruatis subtrahendus - - - 42. 8, et
Distantia media meridiana β Draconis
a Vertice Berolinensi - - -
ad 1. Ian. 1750. st. n. - - - 1′. 26″. 9 Austr. vers.

Eiusdem quadrantis verificatione more solito per inuersionem circa Horizontem Berolini caute peracta, inueni Altitudines circa Horizontem captas per hunc quadrantem 41″. 6 iusto maiores exhiberi, ita vt tuto statuere possimus arcum huiusce quadrantis 90 graduum iustae esse amplitudinis, totumque errorem huius organi ab altitudinibus obseruatis subtrahendum constanter aequari 42″.

Hisce praemissis Eleuatio Poli Obseruatorii Berolinensis sequenti ratione ex nostris obseruationibus definitur:

Alt. mer. Polar. stellae infra Polum obseru.
deuiatione et aberrat. corr. et ad obseru.
Ber. et 1 Ian. 1750 reducta est - - 50°. 30′. 27″. 6
A qua si subtrahatur error quadrantis - - - - 42

Restat altit. merid. med. Pol. stellae infra
Pol. correcta et ad 1 Ian. 1750 reducta 50. 29. 45. 6
Dempta refractione aestiua - - - - - - 46.

Rema-

Remanet altit. mer. med. Pol. ſtellae infra Polum errore quadr. et refractione correcta ad 1 Ian. 1750. - - - -	50. 28. 59. 6
Cui ſi addatur diſtantia med. Polaris ſtellae a Polo ex obſeruationibus noſtris Pariſ. ad 1 Ian. 1750. reducta - - - -	2. 1. 58. 5
Prodibit Eleuatio Poli vera Obſeruatorii Regii Berolinenſis - - - -	52. 30. 58.

Eleuationem Poli Berolinenſis Obſeruatorii hac occaſione alia methodo demonſtrare atque comprobare, a praeſenti diſquiſitione alienum fore non exiſtimo. Methodus autem, qua nunc vtar, nititur aequalibus fere altitudinibus meridianis Polaris ſtellae et Reguli Berolini vno eodemque quadrante obſeruatis. Obſeruaui nempe Berolini in loco ſupra iam deſcripto An. 1750. d. 15. Maii ſt. n. ſole lucente, altitudinem meridianam apparentem Reguli quam potui accuratiſſime 50°.40′.48″.1. Cum vero praeceſſio media Reguli in declinationem a d. 1 Ian. 1750. ad d. 15 Maii ſit 6″.0 auſtrum verſus, deuiatio Reguli in declinationem d. 1 Ian. 1750. 4″.9, et d. 15 Maii 5″.5 auſtrum verſus, et aberratio huius ſtellae in declinationem d. 1 Ian. 1750. 4″.9, et d. 15 Maii 0″.1 itidem auſtrum verſus, prodibit altitudo meridiana apparens Reguli ad d. 1 Ian. 1750 reducta 50°.40′.49″.9.

Altitudo meridiana apparens Polaris ſtellae infra Polum ad idem tempus, ſecundum obſeruationes Berolinenſes ſupra exhibitas, aequatur 50°.30′.55″.3; ita vt ſubtractis ab vtraque altitudine 46″.pro refractione, ſumma summma distantiarum meridian. obseruatarum Reguli et Polaris stellae a vertice Berolinensi ad 1 Ian. 1750. sit 78°.49'.45".8.

Declinatio Reguli media ex nostris obseruationibus in Obseruatorio Reg. Paris. habitis ad d. 1 Ian. 1748. supra inuenta est 13°.11'.10".3 bor. Habita itaque praecessionis, deuiationis et aberrationis ratione, habebimus declinationem Reguli apparentem ad 1. Ian. 1750. 13°.10' 26".2, siue eius complementum 76°.49'.33".8. Distantia apparens Polaris stellae a Polo ad idem tempus ex memoratis obseruationibus colligitur 2°.1'.31".8, ita vt summa distantiarum merid. apparentium Polaris stellae et Reguli a vertice Berolinensi ad 1 Ian. 1750. sit 78°.51'.5".6, quae comparata cum summa distantiarum merid. obseruatarum Reguli et Polaris stellae a vertice Berolinensi ad d. 1 Ian. 1750. 78°.49'.46".8, dat errorem quadrantis ab altitudinibus obseruatis subtrahendum 39".4. Quare sic absoluetur calculus:

Altit. merid. Reguli interdiu Berolini obseruata et ad Obseruatorium Berolinense et 1 Ian. 1750 reducta est	50°.40'.50".9
Error quadrantis subtrahendus - - - - -	39. 4
Altit. merid. appar. Reguli ad 1 Ian. 1750 errore quadr. correcto -	50. 40. 11. 5
Refractio aestiua subtrahenda - - - -	46.
Altit. merid. Reguli errore quadrantis et refractione correcta - - -	50. 39. 25. 5

Declinatio apparens Reguli ex obſeruationibus noſtris Pariſ. collecta et ad d. 1 Ian. 1750 reducta - - -	13° 10′. 26″. 2
Eleuatio Aequatoris vera Obſeruatorii Regii Berolinenſis - - - -	37. 28. 59, ſiue
Eleuatio Poli vera - - - - -	52. 31. 1.

Egregius hicce conſenſus praeſentis calcu i cum praecedenti Eleuationis Poli Berolinenſis Obſeruatorii determinatione noſtrarum obſeruationum in hac diſſertatione relatarum, et concluſionum exinde deductarum accurationem mirifice comprobat, eoque rem adducit, vt certiſſime ſtabilire poſſimus Eleuationem Poli Obſeruatorii Berolinenſis 52°. 31′. 0″.

OBSER-

OBSERVATIONES LUNARES
CORRESPONDENTES IN INSULA OSILIA HABITAE ANNO 1752.

Auctore
A. N. GRISCHOW.

Temp. Pend. Astr.

d. $\frac{14}{25}$ Oct. $0^h.\ 9'.\ 26''$ App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.

5. 45. $29\frac{1}{2}$ App. α Aquilae ad fil. vert. Merid. prox.

Per nubes vento SSW vehemente.
- 11. 45. $29\frac{1}{2}$ Alt. β ♈ $= 51^\circ.20' + \frac{1}{3}$ fil. $+ 0^R 71^P$.
- 11. 47. 1. App. dubius β ♈ ad fil. vert. Mer. prox. per nubes
- 48. 26. Alt. β ♈ $= 51^\circ.20'. + \frac{1}{3}$ fil. $+ 0^R.68^P$.

Per nubes post culminationem centri Lunae.
- $14^h.\ 52'.\ 37\frac{1}{2}''$ Alt. marg. ☽ae bor. $= 51^\circ 20 + \frac{1}{3}$ fil. $+ 0^R.70^P$.
- 52. 59 - - - - - - - - - 0. 70

Per nubes
- $15^h.\ 28'.\ 21''$ App. ϱ♉ ad fil. vert. Mer. prox.
- 28. $59\frac{1}{2}$ Altit. ϱ♉ $= 52^\circ.40'. + 1^R.\ 87\frac{1}{2}^P$.
- 29. 51 - - - - - 1. 91
- 30. 22 - - - - - 1. $88\frac{1}{2}$.

d. $\frac{16}{27}$ Oct. 0. 10. $31\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox. intra $\frac{1}{2}''$ dubius

Temp. Pend. Astr.

d. $\frac{26\ Oct.}{6\ Nou.}$ $0^h.15'.37\frac{3}{4}''$ Merid. verus ex 9 altitudin. ☉ respond.

$0.\ 15.\ 34.6$ App. centri ☉ obseruat. ad fil. vert. Merid. prox.

$0.\ 0.\ 3'' =$ diff.

d. $\frac{4}{15}$ Nov. $0^h.25'.43''$ Merid. verus ex 6 altudin. ☉ respond.

$0.\ 25.\ 42.$ App. obseruat. centri ☉ ad fil. vert. Merid. prox.

$8^h.42'.51''$. Alt. γ Pegasi $= 45^\circ.30' + 2^R.36\frac{1}{2}^P$.

$43.\ 32$ - - - - - - - - $2.\ 36\frac{3}{4}$.

Per nubes ten. $44.\ 9\frac{2}{3}$ App. ad fil. vert. Merid. prox.

$45.\ 17\frac{1}{2}$ Altit. - - - - - $2.\ 35$

$10^h.53'.38\frac{1}{2}''$ Alt. marg. ☽ae austr. $= 45^\circ.0' + \frac{3}{4}$fil. $+ 1^R.79^P$.

$53.\ 58$ - - - - - - - - - - $1.\ 82$

$54.\ 12\frac{1}{3}$ App. 1 limbi ☽ae ad fil. vert. Mer. prox.

$54.\ 48$ Altit. - - - - - - - $+ 1.\ 84$

$55.\ 4\frac{1}{2}$ - - - - - - - - - - $1.\ 87$

$55.\ 24$ - - - - - - - - - - $1.\ 87\frac{1}{2}$

$55.\ 43$ - - - - - - - - - - $1.\ 92$

$55.\ 58\frac{1}{2}$ - - - - - - - - - - $1.\ 95$

$56.\ 13\frac{1}{2}$ - - - - - - - - - - $1.\ 97$

$56.\ 32$ - - - - - - - - - - $1.\ 98$

$56.\ 47$ - - - - - - - - - - $2.\ 2$

$57.\ 5$ - - - - - - - - - - $2.\ 4$

$11^h\ 24'.\ 0$ Diam. app. ☽ cornua transf. Micr. Grah. $35^R.4^P$.

$11.\ 29.\ 0$ - - - - - - - - - - $35.\ 5\frac{1}{2}$

$11.\ 34.\ 0$ - - - - - - - - - - $35.\ 6$

d. $\frac{10}{21}$ Nov. $0^h.26'.21\frac{1}{2}''$ App. 1 limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox. circiter

Per nubes ten. $28.\ 41\frac{1}{3}$ App. 2 limbi ☉lis - - - - - - prox.

Temp.

Temp. Pend. Astr.

d. $\frac{11}{22}$ Nov. $13^h.54'.24''$ Alt. marg. ☽ae bor $= 51°.20' + \frac{1}{4}$ fil $5^R.23^P$. Accurata

56. 11 App. 2di limbi ☽ ad fil. vert. Merid. prox. intra 1 vel $2''$ dub.

Plures altit. ☽ae capere propter nubes non licuit.

Altit. merid. β ♈ cum altit. merid. ☽ae hodierno die obſeruata comparanda ex obſeruatis d. $\frac{14}{25}$ Oct. colligi poteſt.

d. $\frac{14}{25}$ Nov. $16^h.54'.22\frac{1}{2}''$ Alt. marg. ☽ae auſtr. $= 44°.20' - 2^R.47^P$.

54. 53 - - - - - 2. 54

55. 9 - - - - - 2. 57

55. 30 - - - - - 60

55. 44 - - - - - - $63\frac{1}{2}$

55. $58\frac{1}{2}$ - - - - - - 64

56. 15 - - - - - - 64

56. $30\frac{1}{2}$ - - - - - - 64

56. 42 App. 2di limbi ☽ae ad fil. vert. Mer. prox.

57. $4\frac{1}{2}$ Altit. - - - - 2. $69\frac{1}{2}$

57. 24 - - - - - 2. 72

$17^h.35'.\ 0''$ Diam. ☽ae app. cornua tranſ. Micr. Grah. $= 35^R.31\frac{1}{2}^P$.

39. 0 - - - - - 32

43. 0 - - - - - $32\frac{1}{2}$

$18^h.17'.21''$ Altit. α ♌ $= 45°.0' - 1^R.96\frac{1}{2}^P$.

17. 34 App. α ♌ ad fil. vert. Merid. prox.

17. $58\frac{1}{2}$ - - - - 1. 95.

18. 20 - - - 1. 94

18. 57 - - - $1.94\frac{1}{2}^P$.

Temp Pend. Aſtr.

d. $\frac{15}{16}$ Nov. $3^h.59'.43''$ App. α Aquilae ad fil. vert. Merid. prox.
Per nubes tenues $4.\ 0.\ 9$ Altit. α Aquilae $= 40°.0' + 0^R.40^P$.
0. 40 - - - - 41
1. 5 - - - - 42
1. 30 - - - - 42
$15^h.31'.46''$ Alt. β can min. $= 40°\ 30' - \frac{1}{5}$ fil $+ 1^R\ 12^P\frac{1}{2}$.
32. 43 - - - - - 1. 14
33. $9\frac{1}{2}$ App β can. min. ad fil vert. Merid. prox.
33. 48 Altit. - - - - 1. 12
34. 13 - - - - - 1. $11\frac{1}{2}$
34. 45 - - - - - 1. $11\frac{1}{2}$
Per intervalla lucida. $17^h.48'\ 26''\frac{1}{2}$ Alt. marg ☽ae auſtr. $= 40°.0' - \frac{1}{3}$ fil. $- 0^R\ 27^P\frac{1}{2}$.
50. 33 - - - - - 0 49
51. $8\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☽ ad fil. vert. Merid prox. circiter

d. $\frac{16}{17}$ Nov. $0^h.31'.50''\frac{4}{5}$ App. 1^{mi} limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.
34. $11\frac{1}{3}$ App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.

d. $\frac{20}{1}$ Nov. Dec. $0^h.35'.55''\frac{1}{3}$ App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.
38. $15\frac{4}{5}$ App. 2di limbi ☉lis ad idem filum

1753. Indicibus Penduli aſtron. ad horam aeſtimatam diſpoſitis.

d. $\frac{8}{19}$ Ian. $11^h.49'.23''$ App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

d. $\frac{2}{13}$ Febr. $0^h.\ 0'.56''\frac{3}{4}$ Meridies verus ex 7 altit. ☉lis reſpond.
eod. $8^h.\ 0'.23''$ Alt. marg. ☽ae bor. $= 51°.0' - \frac{5}{12}$ fil. $+ 2^R.29^P$.
0. $46\frac{1}{2}$ - - - - - 2. $25\frac{1}{2}$

Temp.

Temp. Pend. Astr.

1. 5 App. 1 limbi ☽ ad filum vert. Merid. prox.

Coelo	1. 29.	Altit. - - - -	+ 2. 24
sub	2. 1	- - - - -	- 2. 26
sereno.	2. 28	- - - -	2. 24
	2. 51	- - - -	2. 26
	3. 24	- - - -	2. $23\frac{1}{2}$
	3. 47	- - - -	2. $21\frac{1}{2}$

$16^{h}. 12'. 56''$ Altit. Arcturi $= 52^{\circ}. 10' - \frac{1}{3}$ fil. $+ 2^{R}. 27^{P}\frac{1}{2}$.

14. 6 App. Arcturi ad fil. vert. Merid. prox. intra $\frac{1}{2}''$ dubius

15. 21	Altit. - - - - -	2. 28
15. 46	- - - - -	2. 28

d. $\frac{4}{15}$ Febr. $0^{h}. 1'. 10''\frac{1}{2}$ App. 1mi limbi ⊙ ad fil. vert. Mer. prox.

$3. 23\frac{1}{3}$ App. 2di limbi ⊙ ad idem filum.

d. $\frac{9}{20}$ Febr. $11^{h}. 1'. 54''$ $\left\{\begin{matrix}1^{m}\frac{1}{4} \text{ circiter} \\ \text{ante culmin}\end{matrix}\right\}$ Altitud. α Hydrae $= 24^{\circ}. 10' - \frac{2}{3}$ fil. $+ 0^{R}. 73^{P}\frac{1}{2}$.

Paulo post culmin. per intervalla serena.	4 46	- - - - -	0. 76
	5. 2	- - - - -	0. 74

$14^{h}. 40'. 43''$ Alt. marg. ☽ austr. $= 22^{\circ}. 50' - \frac{2}{3}$ fil. $- 5^{R}. 65^{P}$.

41. 8	- - - - -	5. 67
41. 31	- - - - -	5. 71
41. 49	- - - - -	5. $73\frac{1}{2}$
42. 10	- - - - -	5. $77\frac{1}{2}$
42. 34	- - - - -	5. 80
42. 54	- - - - -	5. $82\frac{1}{2}$
43. 11	- - - - -	5. $84\frac{1}{2}$
43. 24	- - - - -	5. 86

Temp.

Temp. Pend. Astr.

43′. 36″$\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☽ ad fil. vert. Merid prox.

43. 54 Altit. - - - - - - 5. 92$\frac{1}{2}$

15^h. 4′. 0 Diameter ☽ae app. cornua iungens Micr. Grah. $= 34^R. 35^P\frac{1}{2}$

9. 0 - - - - - - 37

16. 0 - - - - - - 35$\frac{1}{2}$

27. 0 - - - - - - 36$\frac{1}{2}$

d. $\frac{10}{21}$ Febr. 0^h. 4′. 59″$\frac{1}{3}$ App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

7. 12$\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

eod. 0^h. 6′. 4″$\frac{8}{10}$ Merid. verus ex 5 altit. ☉ respond.

d. $\frac{11}{22}$ Febr. 0^h. 5′. 35″ App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox. dubius

7. 46$\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☉ ad idem filum

d. $\frac{12}{23}$ Febr. 8^h. 8′. 47″$\frac{1}{3}$ App. α Lyrae ad fil. vert. tubi muralis

eod. 16^h. 57′. 0″ Diameter ☽ae app. cornua transf. Micr. Grah. $= 32^R. 36^P\frac{1}{2}$

59. 0 - - - - - - 39$\frac{1}{2}$

17. 0. 0 - - - - - - 38$\frac{1}{2}$

2. 0 - - - - - - 39

5. 0 - - - - - - 39

d. $\frac{13}{24}$ Febr. 0^h. 7′. 47″$\frac{2}{5}$ Merid. verus ex 9. altit. ☉ respond.

0. 7. 48$\frac{1}{2}$ App. centri ☉ ad fil. vert. Merid. prox ex obseruatione

6. 42$\frac{1}{2}$ App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

8. 54$\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☉ ad idem filum.

Coelo eximie sereno 17^h. 6′. 0″ Diameter ☽ae apparens cornua transf. Micr. Grah. $= 32^R. 19^P\frac{1}{2}$.

8. 0 - - - - - - 20$\frac{1}{2}$

11. 0 - - - - - - 18$\frac{1}{2}$

12. 0 - - - - - - 18.

Temp.

	Temp.Pend.Aſtr.		
	$17^h.23'.47''$	Altit. β ♏ $= 12°.50' - \frac{1}{4}$ fil. $-$	$2^R.97^P$.
ſereno	24. 9	- - - - -	2. $96\frac{1}{2}$
	24. 35	- - - - -	2. 96
et	25. 6	- - - - -	2. 97
	25. 18	App. β ♏ ad fil. vert. Merid. prox.	
aere	26. 36	- - - -	$3^R.$ 1^P.
	$17^h.48'.25''\frac{1}{3}$	App. α ♏ ad fil. vert. Merid. prox.	
tran-	$18^h.$ 5. $1''$	Altit. marg ☽ae auſtr. $= 11°.30'$-	$2^R.31^P\frac{1}{2}$
	5. 25	- - - - -	2. 34
quillo	5. 29	- - - - -	2. 34
	6. 12	- - - - -	2. 35
	6. 41	- - - - -	2. 34
	7. 3	- - - - -	2. $34\frac{1}{2}$
	7 24	- - - - -	2. 35
	7. 40	- - - - -	2. $36\frac{1}{2}$
	7. $43\frac{1}{2}$	App. 2di limbi ☽ae ad fil. vert. Merid. prox.	
	8. 10	Altit. - - - -	2. 35
	8 28	- - - - -	2. 37.

d. $\frac{19}{2}$ $\frac{\text{Febr.}}{\text{Mart.}}$ $7^h.46'.12''\frac{2}{3}$ App. α Lyrae ad fil. vert. tubi muralis.

Error indicis Micrometri quadrantis triped. conſt. inuentus fuit in Inſul. Oſilia $= 5\frac{3}{4}^{\text{Part.}} = 7''\frac{1}{4}$, quibus altitud. ſiderum ſupra notatae augendae ſunt. Valor 10. Reuol. cochleae huius Micrometri aequatur $0°.21'.1''\frac{1}{3}$ et latitudo fili penduli $= 9''\frac{1}{2}$. Error quadrantis eſt $40''$ ab altit. obſeruatis ſupraque notatis ſubtrahendus.

Error indicis Micrometri Grahami tubo 8 ped. applicati Arensburgi aequabat 20 partes ad diſtantias vel diametros obſeruatas addendas. Valor autem 30 Reuol.

 coch-

cochleae huius Micrometri, vel 1200 partium $= 27'.28''\frac{1}{5}$. Diametri hoc Micrometro obſeruatae ſupraque notatae errore indicis 20 partium corrigendae ſunt omnes.

Obſeruationes Aſtronomicae exceptae ex Ephemerid. Aſtron. pro eruenda longitudine Obſeruatorii Arensburg. ex obſeruationibus, quas hunc in finem mecum communicauit Cel. *le Monnier*.

Obſeruationes Cel. *le Monnier*.

1752. Sept. 24. $23^h. 53'. 18''$ Midi vrai par les hauteurs correſpondantes du Soleil.

25 on a trouvé que $23^h. 55'. 42\frac{1}{2}'' = 360$ degrés à la Pendule.

26. $23^h. 56'. 5\frac{2}{3}''$ Paſſ. du centre du ☉, Midi vrai $23^h. 56'. 12\frac{1}{2}''$

27. 15. $45'. 33\frac{1}{3}''$ — 2 bord de la Lune
15. 48. $41\frac{2}{3}$ — ε du Taureau
15. 57. 36 — Aldebaran
23. 55. 25 — Midi vrai.

Obſeruationes praecedentibus reſpondentes in Obſeruat. Arensb. habitae 1752.

d. $\frac{15}{24}$ Sept. Meridies verus ex 5 Altitud. ☉ reſpondi. — $23^h. 56'. 23''$ Pend.

d. $\frac{14}{25}$. Sept. $23^h. 57'. 53\frac{1}{4}''$ Pend. App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.

d.

d. $\frac{15}{26}$. Sept. 14^h. Luna, et 16^h Palilicium per quadrant. obseruata fuere

d. $\frac{15}{26}$. Sept. $23^h. 58'. 9''$ Pend. App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.

d. $\frac{16}{27}$. Sept. 6^h. Lucida Lyrae in q. Merid. austr. et 13^h. β γ per quadr. obseruat. fuere.

eod. $15^h.41'.36''$ Pend. Alt. marg. ☽. bor. $= 50^\circ.30' + 6^R. 4^P$.

42. 11 - - - - - - - - - - - 6. 5

42. 39 - - - - - - - - - - - 6. 8

43. 47 - - - - - - - - - - - 6. 10

44. 1 - - - - - - - - - - - 6. 14

15. 44. $12\frac{1}{4}$ App. 2di limbi ☽ae ad fil. vert. Merid. prox.

eod. $15^h 50'.39''$ Pend. Altit. ε ♉ $= 50^\circ.30' - 3^R.46^P$.

51. 28 - - - - - - 3. 43

$15^h.52'. 9\frac{1}{4}''$ App. ε ♉ ad fil. vert. Merid. prox.

52. 44 Altit. - - - - - - - - - - 3. $44\frac{1}{4}$

53. 13 - - - - - - - - - - - 3. $42\frac{1}{4}$

53. 49 - - - - - - - - - - - 3. 44

eod. $16^h.25'$ Diam. ☽ae app. cornua iungens Micr. Grah. $= 35^R. 14\frac{7}{12}^P$.

eod. 17^h. ϱ Orion. 18^h. α Lyrae in q. Merid. bor. obseruabantur.

d. $\frac{16}{27}$. Sept. $23^h.56'.16''$ Pend. App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Merid prox.

58. 25 - - - 2di limbi ☉ ad idem fil.

d. $\frac{17}{28}$. Sept. $23^h.57'.44\frac{1}{4}''$ Pend. Merid. verus d. $\frac{18}{29}$. Sept. ex 3. altit. ☉ respond.

Comparando obseruat. meridiei hodiernam cum obseruatione d. $\frac{13}{24}$. Sept. instituta, patet motum Penduli

Astr. ita se habere vt diem solarem medium $36''$. 1. superet, vel quod ad idem redit $23^h.56'\ 40''$. 2 Pend. $=360°$. Quia vero eiusdem Penduli, cuius virgae longitudo semper eadem est, motus Petropoli inuentus ita fuit comparatus, vt $23^h.\ 57'.\ 14''. = 360°$. colligitur ex nostris obseruationibus Arensburgi institutis longitudinem Penduli Arensburgi multo minorem esse longitudine Penduli Petropolitani, quin imo a lege elongationis Penduli ab Aequatore versus Polos recepta adeo aberrare, vt operae pretium sit hasce obseruationes diligentissime prosequi. Eandem fere aberrationem confirmat alterum Pendulum virga ferrea munitum.

Inuestigatio longitudinis Obseruatorii Arensburg. ex obseruatis eclipsibus Satellitum Iouis.

Comparatione instituta inter obseruationes eclipsium Satell. ♃uis Petropoli habitas et calculum secundum Tab. *Wargent.* patet, immersiones 1mi Satellitis ♃. mense Oct. et Nou. 1752. ex Tab. praedictis supputatas $53''$ praecedere easdem immersiones Petropoli obseruatas; quo posito longitudo Obseruatorii Arensburgensis modo sequenti colligitur.

d. $\frac{22.\text{ Oct.}}{2.\text{ Nou.}}$ 1752. Immersio 1mi Sat. ♃.

Parisiis sec. Tab. *Warg.*	$= 14^h.31'.40''$
Error Tab. add.	53
Immersio correcta	14. 32. 33
Immers. Arensb. accur. obs.	15. 52. 30

Diff.

Diff. Merid. inter Obſ. Pariſ. et Arensb. =	$1^h.19'.57''$
d. $\frac{14}{25}$. Nou. Immerſio 1mi Satell. ♃. Pariſiis ſec. Tab. *Warg.*	$14^h.38'.13''$
Error Tab. add. =	53
Immerſio correcta =	14. 39. 6
Immerſio Arensb. obſeruat.	15. 58. 45
Diff. Merid. inter Obſ. Pariſ. et Arensb.	$1^h.19'.39''$

Conſimili modo colligitur differentia illa Merid. ex obſeruata immerſione 2di Satell. ♃. puta

D. $\frac{31. \text{Aug.}}{11. \text{Sept.}}$ Immerſio 2di Satell. ♃. Petropoli obſeruata	$14^h.30'.21''$
Diff. Merid.	1. 52.
Immerſio Pariſiis	12. 38. 21
Immerſio Arensb. obſeruat.	13. 57. 28
Diff. Merid. inter Obſ. Pariſ. et Arensb.	$1^h.19'. 7''$

Cum vero in hac obſeruatione coelum Arensburgi admodum eſſet vaporoſum, coniicere poſſumus, immerſionem hanc iuſto citius fuiſſe obſeruatam, adeoque differentiam Meridianorum ex illa deductam iuſta veraque eſſe minorem, id quod praecedentes concluſiones egregie confirmare videntur, ita vt differentia Merididianorum inter Obſeruatoria Pariſienſe et Arensburgenſe, donec accuratius determinetur, ſtatui poſſit $= 1^h. 19'.45''$ vel $50''$.

Pro Refractione determinanda in Obseruatorio Arensburgensi.

d. $\frac{16}{27}$. Sept. 1752. $6^h. 5'. 54''$ Pend. altit. α Lyrae
$= 70°. 20' + \frac{1}{3}$ fil. $+ 0^R. 17^P.$

7. 44 - - - - - - - - 0. $16\frac{1}{2}$

7. 54 α Lyrae ad fil. vert. Merid. prox.

8. 52 Altit. - - - - + 0. 18

9. 51 - - - - - - - - 0. 19

eod. $18^h. 3'. 59''$ Alt. α Lyrae infra Pol. $= 7° - 1^R. 25^P.$

4. 50 - - - - - - - - 1. $25\frac{1}{3}$

5. 21 - - - - - - - - 1. 26

Ab h. 18. 6′ stella per nubes tenuiss. obseruabatur.

6. o App. α Lyrae ad fil. vert. Mer. prox.

7. 13 Altit. - - - - - - 1. 22

8. 17 - - - - - - - - 1. 17

---

d. $\frac{6}{17}$. Oct. 1752. $0^h. 5'. 24''$ Pend. Merid. verus

eod. $9^h. 10'. 57''$ Pend. Altit. Fomalhaut
$= 1°. 10' - \frac{1}{3}$ fil. $+ 1^R. 50^P.$

12. 20 - - - - - - - - 1. 42

Quamuis coelum hac in obseruatione eximie esset serenum, stellam tamen Fomalhaut non nisi per interualla conspicere licuit.

d. $\frac{9}{20}$. Oct. $0^h. 4'. 46\frac{1}{2}''$ App. 1mi limbi ⊙ ad fil. vert. Mer. prox.

6. $57\frac{3}{4}$ App. 2di limbi ⊙ ad idem filum

---

d. $\frac{13}{24}$. Oct. $0^h. 7'. 48\frac{1}{3}''$ Pend. Centrum ⊙ ad fil. vert. Merid. prox.
(mora trans. disci ⊙ obs. $= 2'. 12''$)

eod. $15^h. 5'. 22''$ Pend. Altit. Capell. $= 77° 30' + \frac{3}{4}$ fil. $- 0^R. 73^P.$

Coelo

Coelo	$15^h.5'.49''$	- - - - - -	$0.73\frac{1}{2}$
	$6.\ 19$	- - - - - -	$0.\ 73$
eximie	$6.\ 35$	- - - - - -	$0.\ 77$
	$6.\ 55$	- - - - - -	$0.\ 76$
	$7.\ \ 9$	- - - - - -	$0.\ 77\frac{7}{8}$
fereno	$7.\ 25\frac{1}{5}$	App. Capellae ad fil. vert. Merid. prox.	
	$8.\ 56$	Altit. - - - - -	$0.\ 74$
$23^h.56'.41''\frac{1}{2}$ Pend.	$9.\ \ 9$	- - - - - -	$0.\ 75$
$=360^\circ$.	$9.\ 28$	- - - - - -	$0.\ 75$
	$9.\ 42$	- - - - - -	$0.\ 74$
	$10.\ \ 2$	- - - - - -	$0.\ 72\frac{1}{2}$

d. $\frac{13}{24}$ Febr. 1753. $0^h.\ 7'.47\frac{2}{5}''$ Pend. Merid. verus ex 9. Alt ⊙ resp.
$7.\ 48\frac{1}{2}$ Pend. centri ⊙ ad fil. vert. Merid. prox. ($2'.12''$. mora obf. tranf difci⊙)

eod.	$18^h\ 30'.12''$	Pend. Altit. Capellae infra Polum $=14^\circ 0'+\frac{1}{3}$ fil. $+1^R.44^P$.	
	$30.\ 34$	- - - -	$1.\ 43\frac{1}{2}$
Coelo eximie	$31.\ \ 5$	- - - -	$1.\ 41\frac{1}{2}$
	$31.\ 28$	- - - -	$1.\ 38$
fereno	$32.\ \ 8$	- - - -	$1.\ 34$
	$32.\ 26$	App. Capell. ad fil. vert. Mer. prox.	
$23^h.56'.46\frac{1}{2}''$ Pend	$33.\ 21$	- - - -	$1.\ 34$
$=360^\circ$.	$33.\ 43$	- - - -	$1.\ 37\frac{1}{2}$
	$34.\ 11$	- - - -	$1.\ 39\frac{1}{2}$
	$34.\ 40$	- - - -	$1.\ 40\frac{1}{2}$
	$34.\ 58$	- - - -	$1.\ 42$

---

d. $\frac{22.\,Oct.}{2.\,Nou.}$ Limbo qua rantis in Merid. pofiti occidentem fpectante:
$9^h.32'.51\frac{1}{2}''$ Pend. Alt. β Caffiopeiae $=90^\circ 30'+\frac{1}{4}$ v. $\frac{1}{2}$ fil. $-0^R.87^P$.
$33.\ 12$ - - - - - - $0.\ 85\frac{1}{2}$

Coelo

Coelo	$9^h.33'.32''$	- - - -	$0.83\frac{1}{2}$
grate	33. 56	- - - -	0. 84
fereno	34. 23	- - - -	0. 83
	34. 41	- - - -	0. 82
Sec. calculum β	35. 17	- - - -	0. 81
Caff. per Merid:	35. 32	- - - -	0. 80
hodie tranfiit	35. 37	App. β Caffi. ad fil. vert. Merid. prox.	
$9^h.35'.37\frac{1}{2}''$ temp.	36. 25	Altit. - - -	0. 80
Pend.	36. 45	- - - -	$0.80\frac{1}{2}$
	37. 5	- - - -	$0.81\frac{1}{2}$
	37. 31	- - - -	0. 82
	37. 56	- - - -	$0.84\frac{1}{2}$
	38. 29	- - - -	0. 86
	38. 55	- - - -	0. 88

D. $\frac{10}{21}$. Febr. 1753. $0^h.\ 6'.\ 5''$ Pend. Merid. verus ex 5 Altit. ⊙ refp.

D. $\frac{12}{23}$. Febr. - 13. 32. 26 Pend. Alt. β Caffiopeiae infra Polum $= 26^\circ.0' + 2^R.52^P$.

	32. 59	- - - -	$2.51\frac{3}{4}$
	33. 24	- - - -	2. 49
	33. 47	- - - -	2. 49
	33. 55	App. β Caff. ad fil. vert. Merid. prox.	
	34. 34	Altit. - -	+ 2. 50
	34. 56	- - - -	2. 51
	35. 23	- - - -	2. 52
	35. 50	- - - -	$2.52\frac{1}{2}$
	36. 15	- - - -	2. 53

d. $\frac{13}{24}$. Febr. $0^h.\ 7'.47\frac{2}{3}''$ Pend. Mer. verus ex 9 Altit. ⊙ refp.

---

d. $\frac{23.\ Nov.}{4.\ Dec.}$ $0^h.40'.13\frac{5}{6}''$ Pend. Merid. verus ex 6 Alt. ⊙ refp.

0. 40. 11 Pend. app. centri ⊙ ad fil. vert. Mer. prox.

$2\frac{5}{6}'' =$ diff.

d.

d. $\frac{24.\,Nou.}{5.\,Dec.}$ $0^h.41'.\ 9\frac{2}{3}''$ Pend. App. centri ☉ ad fil. vert. Merid. prox.
d. $\frac{26.\,Nou.}{7.\,Dec.}$ $0^h\ 43'.25\frac{1}{2}''$ Pend. App. centri ☉ ad fil. vert. Merid. prox.
eod. $8^h.38'.34''$ Pend. Altitud. β Andromedae supra Polum $= 66^\circ.0' + 2^R.\ 9^P.$

39. 2	- - - - - -	2.	9
39. 19	- - - - - -	2.	10
40. $15\frac{2}{3}$	App. β Andr. ad fil. vert. Merid. prox.		
41. 36	Altit. - - - - -	2.	13
42. 5	- - - - - - -	2.	12

d. $\frac{1}{12}$. Mart. $0^h.15'.39''$ Pend. App. centri ☉ ad fil. vert. Mer. prox.
eod. $13^h.38'$ circiter (hora nimirum culmin.) altitudo β Andromedae infra Polum $= 2^\circ.50' + 0^R.0^P.$ exactissime.

Secundum obseruata circa transitus α Lyrae per fil. Tubi muralis d. $\frac{1}{12}$. et $\frac{6}{17}$. Mart. peracta prodit motus Pend. Astron. ita comparatus, vt $23^h.56'.46\frac{2}{3}'' = 360^\circ$.

Pro determinanda refractione ex comparatione obseruationum Oesiliensium circa stellas australiores habitarum cum iis, quas circa easdem in promontorio B. S. habuit Cl. *de la Caille*. It. pro variatione refractionum Alt. Merid. obseruatae in Ins. Oesilia.

d. $\frac{30.\,Sept.}{11.\,Oct.}$ 1752. Altit. Merid. app. Rigel $= 23^\circ.20' - 1^R.27^P.$
eod. - - Altit. Merid. app. Sirii $= 15^\circ.20' - \frac{1}{3}$ fil. $+ 2^R.54^P.$
d. $\frac{7}{18}$. Oct. - Altit. Merid. app. Sirii $= 15^\circ.20'. + 2^R\ 46\frac{1}{2}^P.$
d. $\frac{10}{21}$. Oct. - Altit. Merid. app. Sirii $= 15^\circ.20'. + 2^R\ 48^P.$
d. $\frac{13}{24}$. Oct. - Altit. Merid. app. Sirii $= 15\ 20 + 2^R\ 49^P.$
d. $\frac{9}{20}$. Febr. 1753. Altit. Merid. app. α Hydrae $= 24^\circ.10' - \frac{2}{3}$ fil. $+ 0^R.76^P.$

eod. - - - Altit. Merid. app. α ♎ $= 16°. 56 - 0^R. 65^P.$

eod. - - - Altit. Merid. app. β ♏ $= 12°. 40' + 1^R. 56\frac{1}{2}^P.$

eod. - - - Altit. Merid. app. α ♏ $= 6°. 0' + \frac{1}{4}$ fil. $+ 1^R. 14^P.$

d. $\frac{12}{23}$. Febr. - - Altit. Merid. app. α ♏ $= 6°. 0'. + 1^R. 58^P.$

d. $\frac{13}{24}$. Febr. $1'$. ante culm. Alt. Mer. app. Sirii $= 15°. 20'\frac{1}{3} + 2^R. 50\frac{1}{2}^P.$

eod. coelo eximie } Altit. Merid. app. β ♏ $= 12°. 50' - \frac{1}{4}$ fil. $- 2^R. 97^P.$

eod. ſereno } Altit. Merid app. α ♏ $= 6°. 0' + 1^R. 60^P.$

d. $\frac{17}{28}$. Maii - - Altit. Merid. app. β ♏ $= 12°. 50' - 3^R. 18^P.$

eod. - - - Altit. Merid. app. α ♏ $= 6°. 0' - \frac{1}{4}$ fil. $+ 1^R. 14\frac{1}{2}^P.$

d. $\frac{21 \text{ Maii}}{1 \text{ Iun.}}$ - - Altitud. Merid. app β ♏ $= 12°. 50' - 3^R. 24^P.$

d. $\frac{26 \text{ Maii}}{6 \text{ Iun.}}$ - - Altitud. Merid. app. δ ♏ $= 9°. 40' + 8^R. 6^P.$

Obſeruationes fixarum, quae eandem fere habent Altit. Merid. Arensburgi et in Promont. B. S.

d. $\frac{14}{25}$ Nou. 1752. Altit. Merid. app. α ♌ $= 45°. 0' - 1^R. 95^P.$

d. $\frac{6}{17}$ Febr. 1753. Altit. Merid. app. Vindemiatr. $= 44°. 0' + 1^R. 75^P.$

Obſeruationes Oeſilienſes ſtellae Polaris pro determinanda Eleuatione Poli Obſeruatorii Arensburg.

d. $\frac{20}{31}$ Oct. - - $0^h. 11'. 43''\frac{1}{2}$ Pend. app. cent. ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

d. $\frac{21 \text{ Oct.}}{1 \text{ Nov.}}$ 1752. $0^h. 12'. 19\frac{3}{4}$ Pend. app. cent ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

d. $\frac{22 \text{ Oct.}}{2 \text{ Nov.}}$ - - $10^h. 17'. 56''$ Pend. altitud. Polaris ſupra Polum $= 60'. 20' - 1^R. 38^P\frac{1}{4}.$

18. 50	-	-	-	-	1. 38
21. 8	App. Pol. ad fil. vert. Merid. prox.				
22. 9	Altit.	-	-	-	1. 37$\frac{1}{2}$
23. 54	-	-	-	-	1. 38$\frac{1}{2}$
24 45	-	-	-	-	1. 38
25. 47	-	-	-	-	1. 39$\frac{1}{2}$

31.

	31. 43 - - - - -	1. $42\frac{1}{2}$
	33. 10 - - - - -	1. $42\frac{1}{2}$
	34. 5 - - - - -	1. 44
	35. 34 - - - - -	1. 47
	36. 58 - - - - -	1. 50

d. $\frac{23}{3}$ Oct. Nov. $0^h.13'.35''$ Pend. Meridies medius ex 6 alt. ☉ respond.

eod. $10^h.15'.51''$ Pend. Alt. Pol. supra Pol. $= 60°.20' + \frac{1}{2}$ fil. $- 1^R.41^P$.

	16. 20 - - - - -	1. $39\frac{1}{2}$
	16. 45 - - - - -	1. $38\frac{1}{2}$
	17. 0 - - - - -	1. 39
	17. 25 - - - - -	1. $38\frac{3}{4}$
	17. 55 App. Pol. ad fil. vert. Merid. prox.	
	19. 16 Altit. - - - - -	1. $38\frac{1}{2}$
	20. 48 - - - - -	1. $39\frac{1}{4}$

d. $\frac{23}{4}$ Nov. Dec. $0^h.40'.13''\frac{5}{6}$ Pend. Merid. verus ex 6 altit. ☉ respond.

40. 11 — App. centri ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

$2''\frac{5}{6}$ = diff.

d. $\frac{3}{14}$ Dec. $19^h.59'.15''$ Pend. Altitud. Polaris infra Polum $= 56°.20' + \frac{1}{4}$ v $\frac{1}{3}$ fil. $- 2^R.6^P\frac{1}{4}$.

20.	0. 32 - - - - -	2. 9
	1. 59 - - - - -	2. $8\frac{1}{4}$
	3. $55\frac{1}{2}$ App. Pol. ad fil. vert. Merid. prox.	
	5. 24 Altit. - - - -	2. $6\frac{1}{2}$
	8. 54 - - - - -	2. $2\frac{3}{4}$

d. $\frac{7}{18}$ Dec. $0^h.55'.37''\frac{2}{3}$ Pend. App. centri ☉ ad fil vert. Mer. prox.

d. $\frac{10}{21}$ Febr. 1753. 0^h $6'$. $5''$ Pend. Meridies verus ex 5. alt. ☉ resp.

d. $\frac{12}{23}$ Febr. $14^h.17'.45''$ Pendul. Altitud. Pol. infra Pol. $= 56°.20' - 2^R.6^P$.

	18. 7 - - - - -	2. 7
	18. 30 - - - - -	2. $8\frac{1}{2}$
	18. 58 - - - - -	2. $8\frac{1}{2}$

19. 21	-	-	-	-	2. 8½
19. 53	-	-	-	-	2. 9½
20. 20	-	-	-	-	2. 11
20. 51	-	-	-	-	2. 9
21. 14	-	-	-	-	2. 9
21. 31	-	-	-	-	2. 8
21. 49	-	-	-	-	2. 10
22. 25	-	-	-	-	2. 9½
22. 54	-	-	-	-	2. 10
23. 46 App. Polaris ad fil. vert. Mer. prox.					
25. 15 Altit.		-	-	-	2. 10
26. 4	-	-	-	-	2. 8
27. 6	-	-	-	-	2. 6
28. 4	-	-	-	-	2. 7
28. 30	-	-	-	-	2. 7
30. 5	-	-	-	-	2. 6.

d. $\frac{13}{24}$ Febr. $0^h.7'.47''\frac{2}{5}$ Pend. Meridies verus ex 9 alt. ☉ resp.

Pro definienda differentia Parallelorum Obseruatorii Petropolitani et Arensburgensis.

d. $\frac{23}{3}$ $\frac{\text{Mart.}}{\text{Apr.}}$ 1752. Petropoli obseruata fuit $2'.45''$ post culminationem et $0'\ 46''$ post appulsum ad fil. vert. quadr. altit. apparens Procyonis $= 35°.50' + \frac{2}{3}$ fil. $+ 2^R.56^{P}\frac{1}{2}$.

d. $\frac{10}{21}$ Oct. 1752. Arensburgi obseruata fuit altit. Merid. appar. Procyonis $= 37°.40' + \frac{2}{3}$ fil. $- 1^R.52^{P}\frac{1}{2}$ Calculo rite peracto, prodit ex hisce obseruatis differentia Parallelorum quaesita $= 1°.41'.14''$, vel $15''$.

Fig. 1.

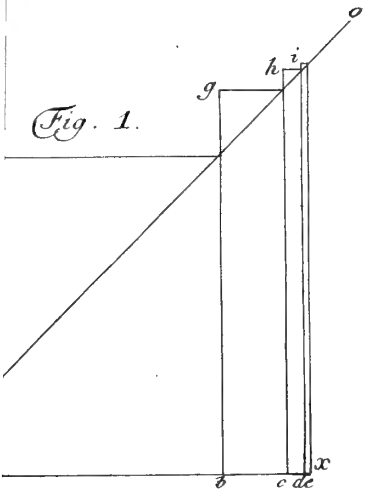


Fig. 2.

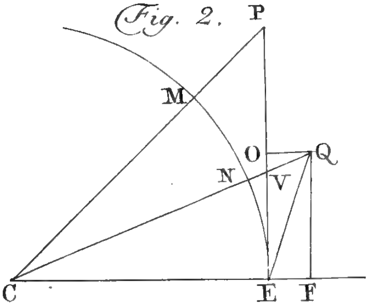


Fig. 3.

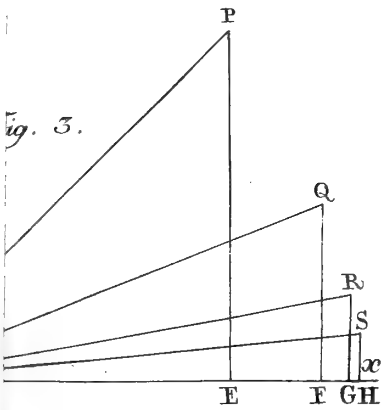


Fig. 4.

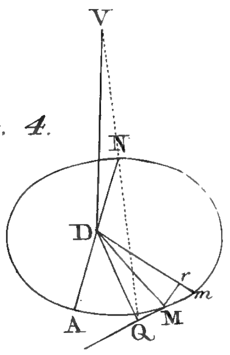


Fig. 5.

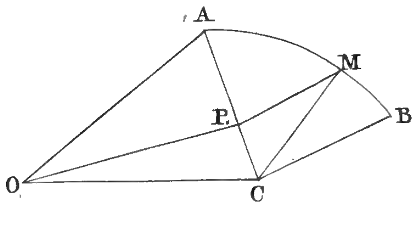


Fig. 1

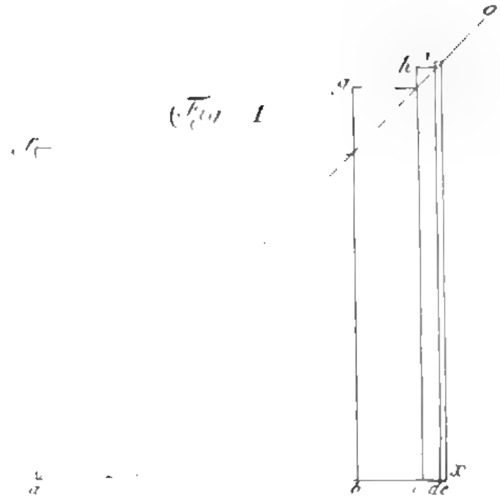


Fig. 2.

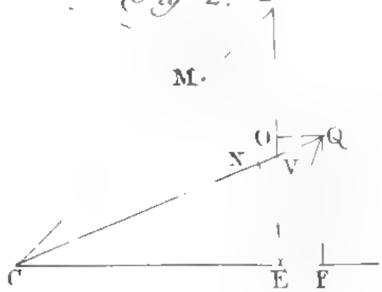


Fig. 3

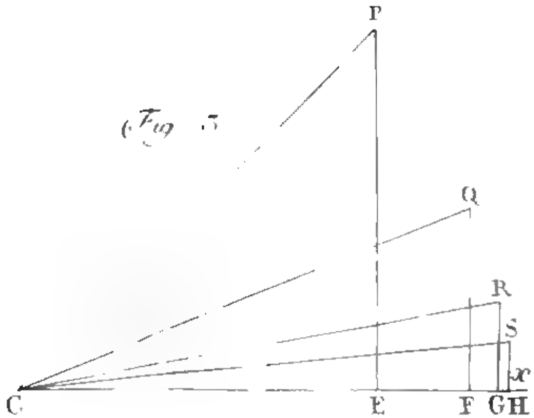


Fig. 4

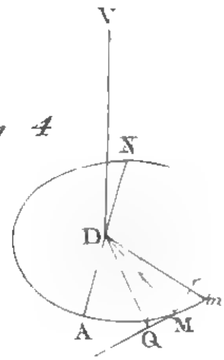


Fig. 5

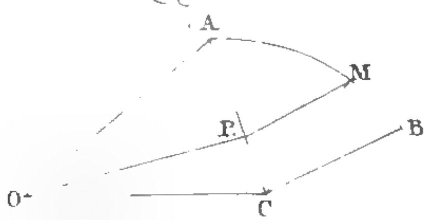


Fig. 1.

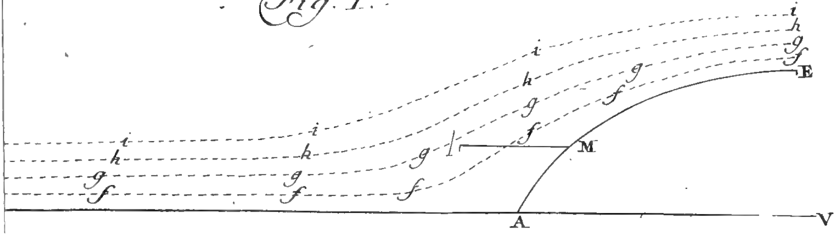


Fig. 2.

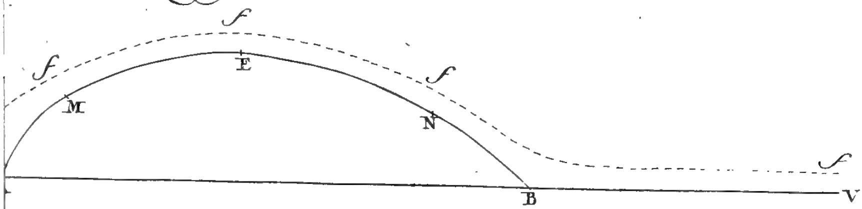


Fig. 3.

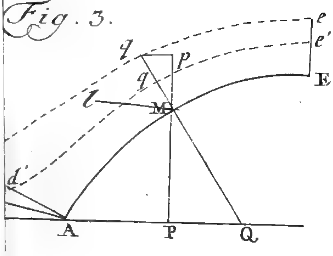


Fig. 4.

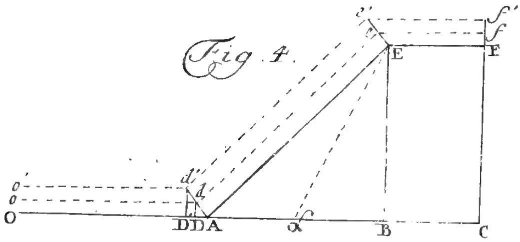


Fig. 6.

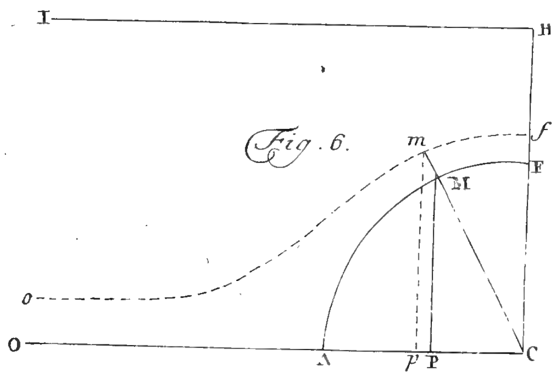


Fig 1

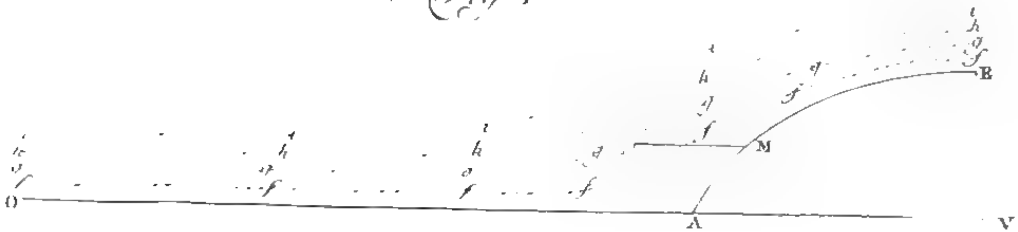


Fig 2

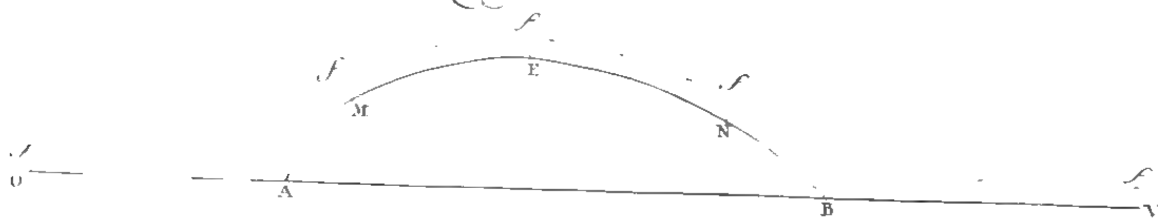


Fig 3

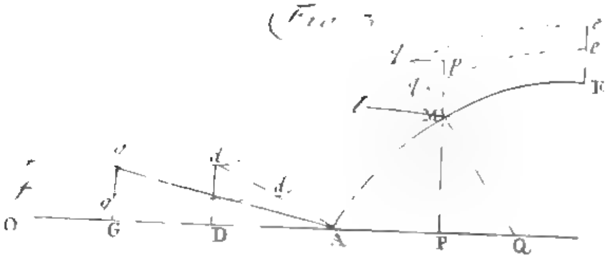


Fig 4

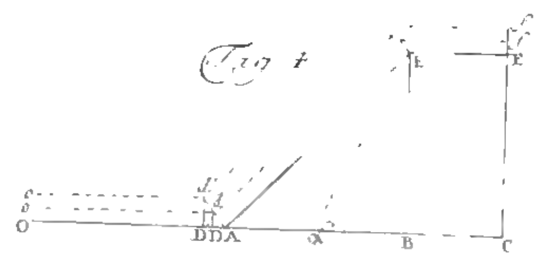


Fig 5

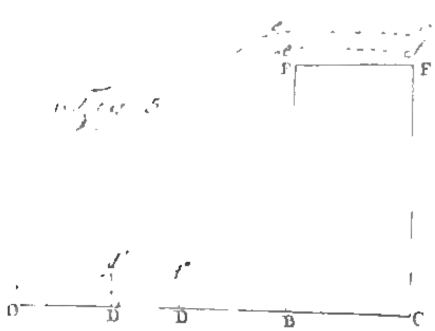


Fig 6

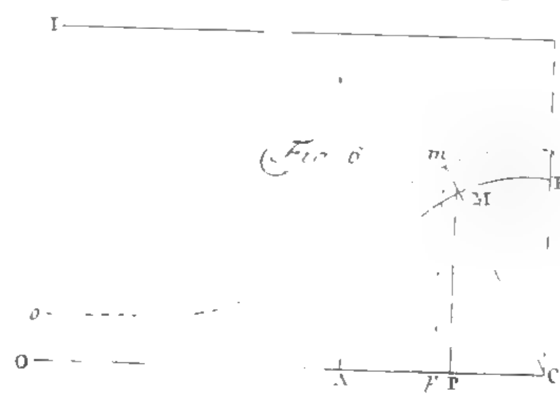


Fig. 1.

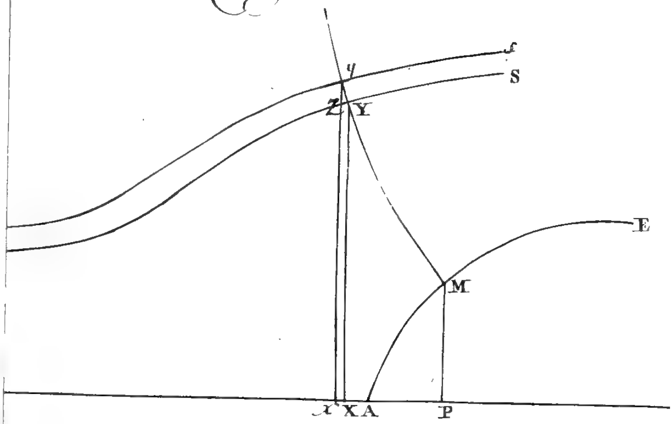


Fig. 2.

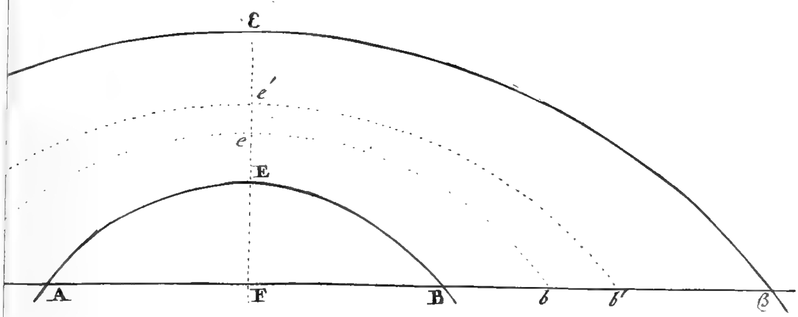


Fig. 1

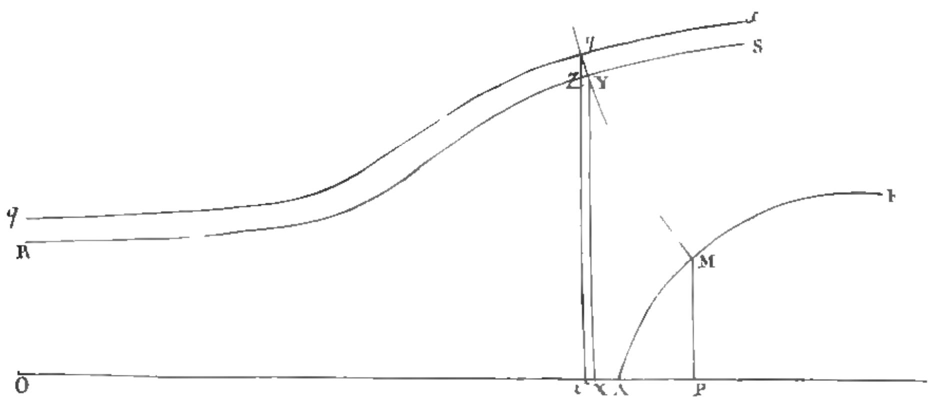
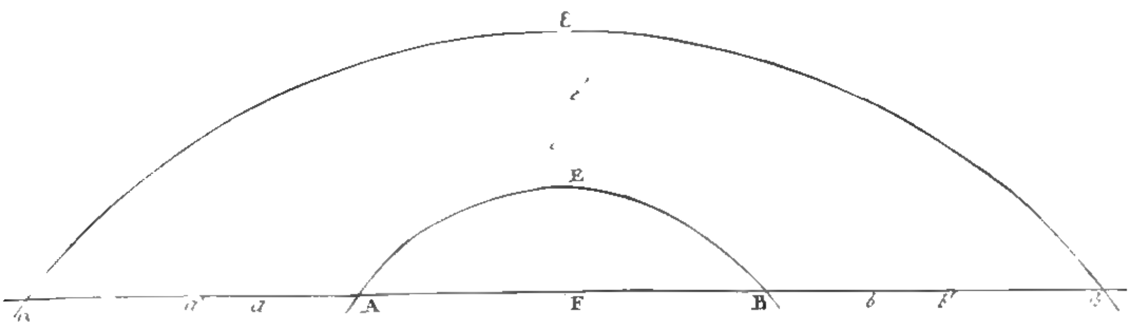


Fig. 2



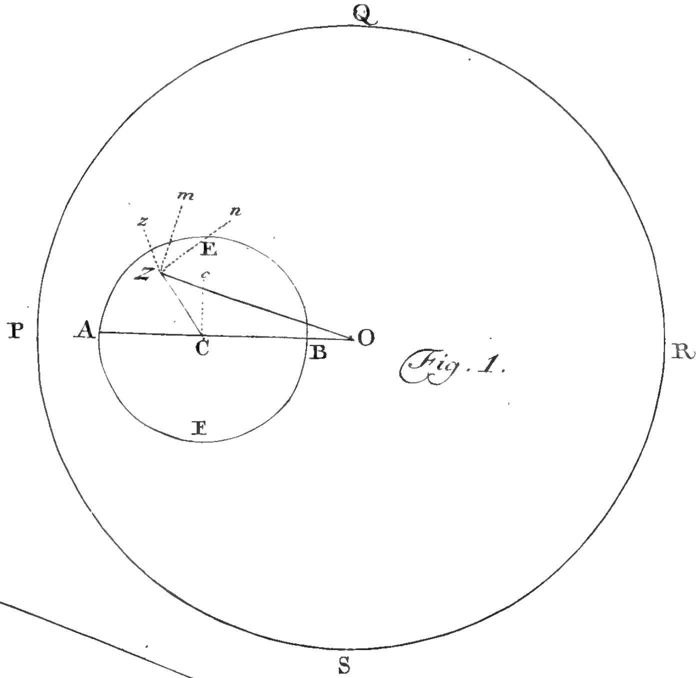


Fig. 1.

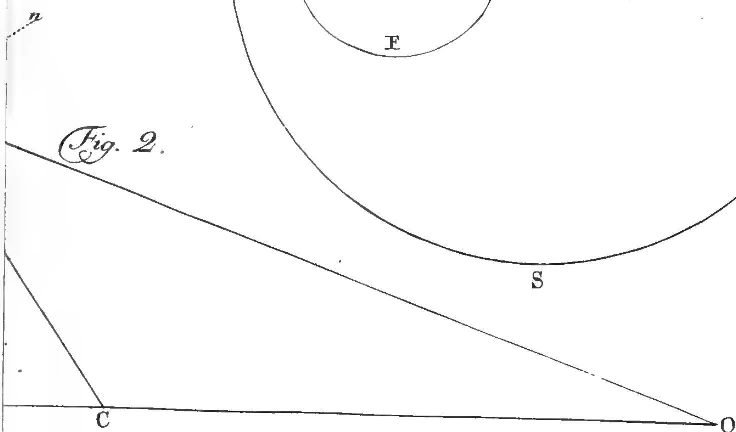


Fig. 2.

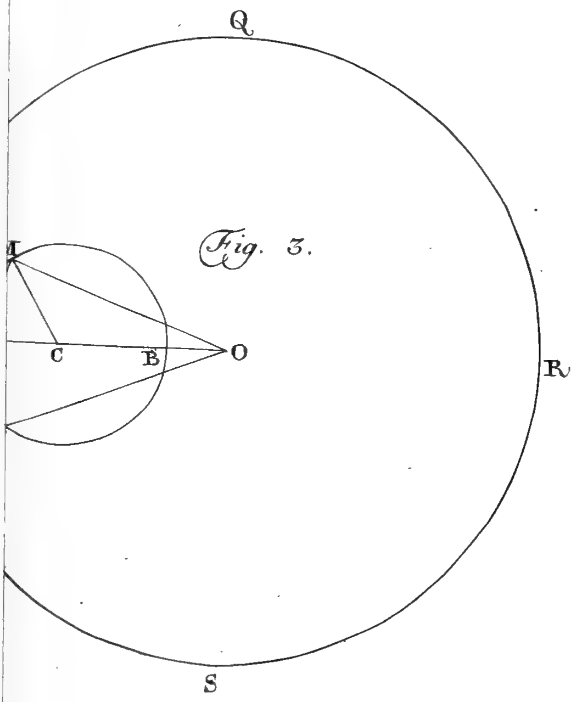
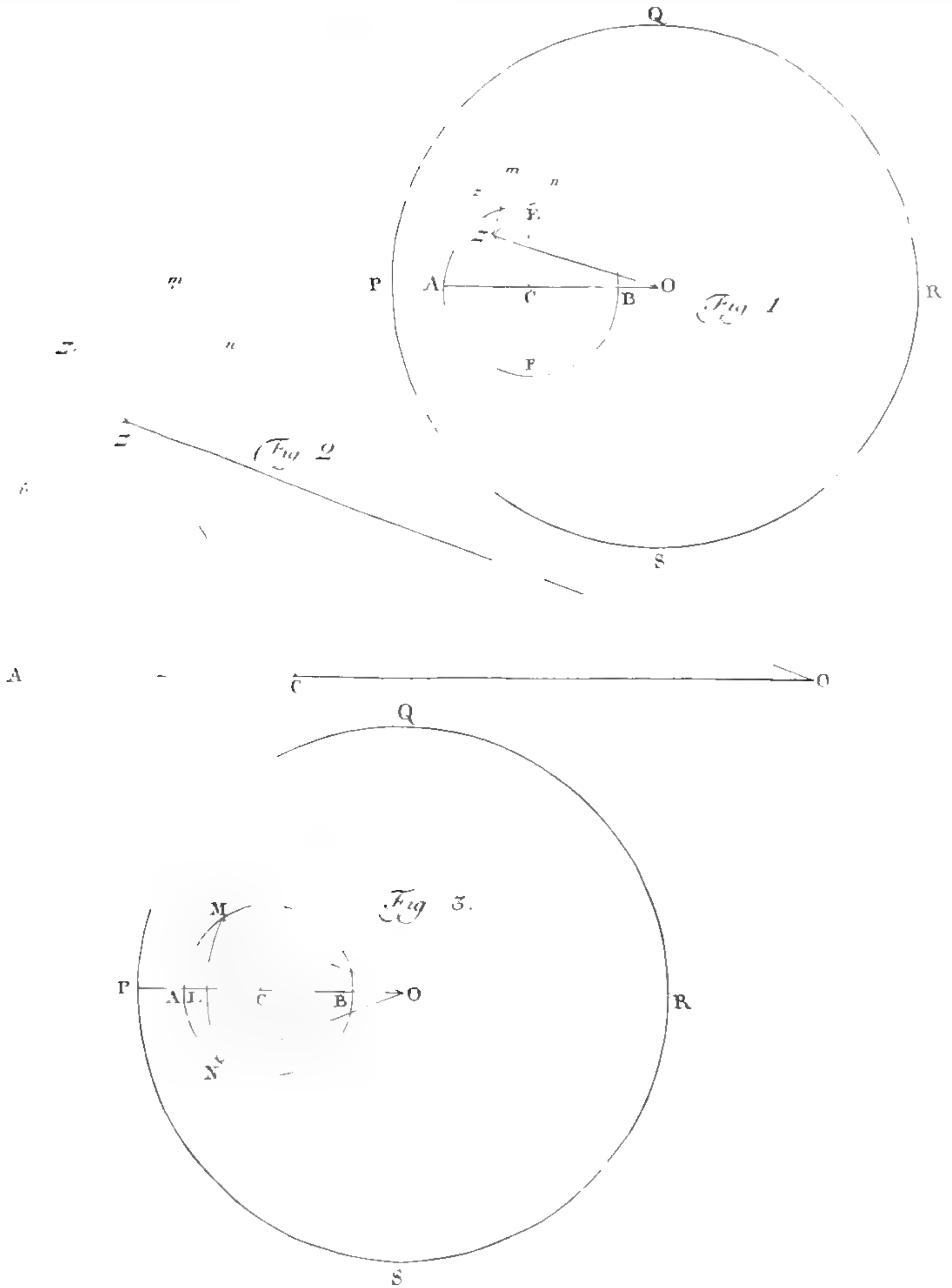


Fig. 3.


Q
m
n
E
z
P
A
C
B
O
R
F
S
Fig 1
m
z
n
z
Fig 2
A
C
O
Q
Fig 3.
M
P
A
L
C
B
O
R
N
S

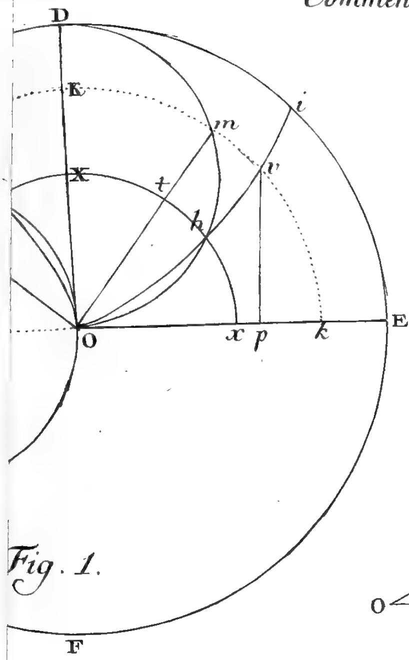


Fig. 1.

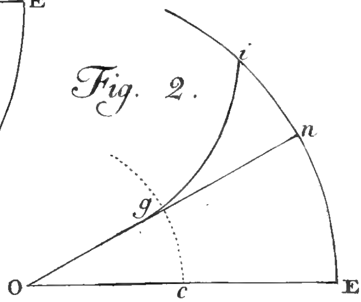


Fig. 2.

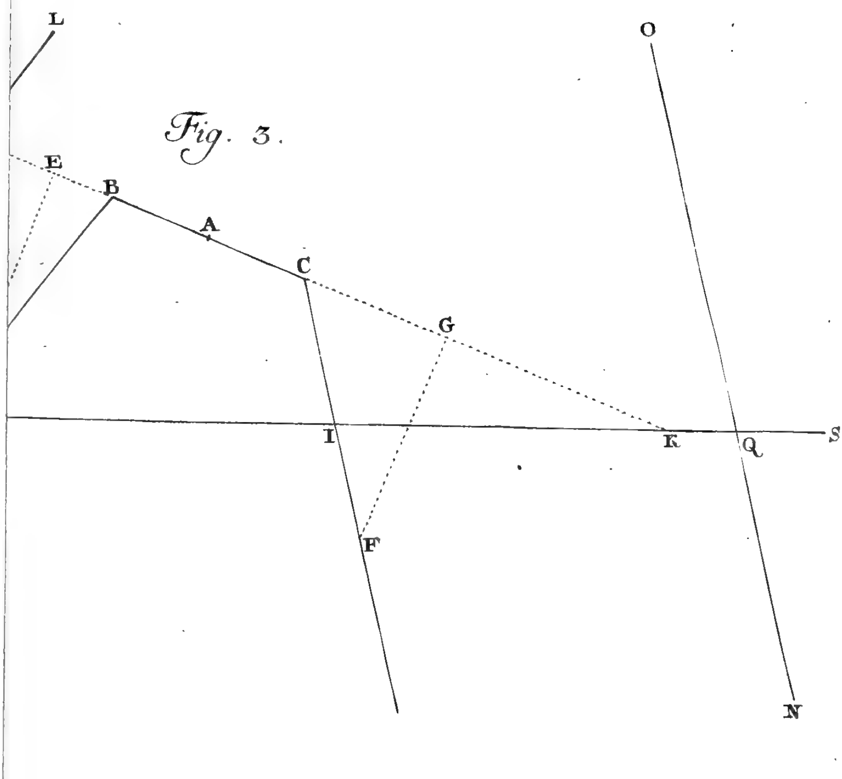


Fig. 3.

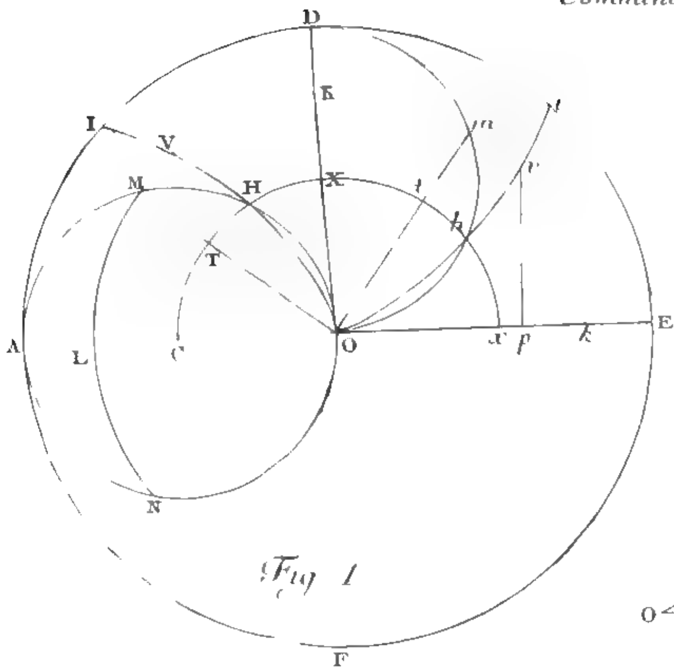


Fig 1

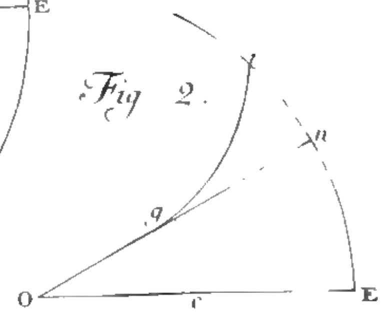


Fig 2.

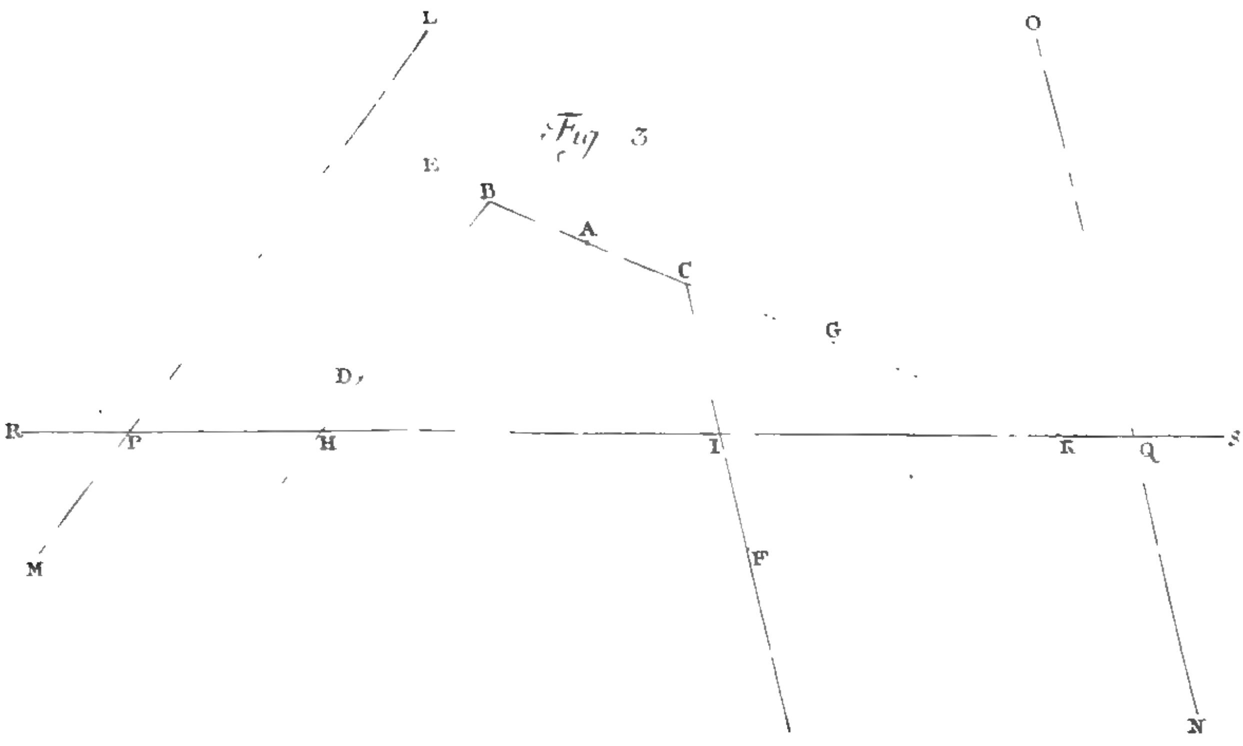
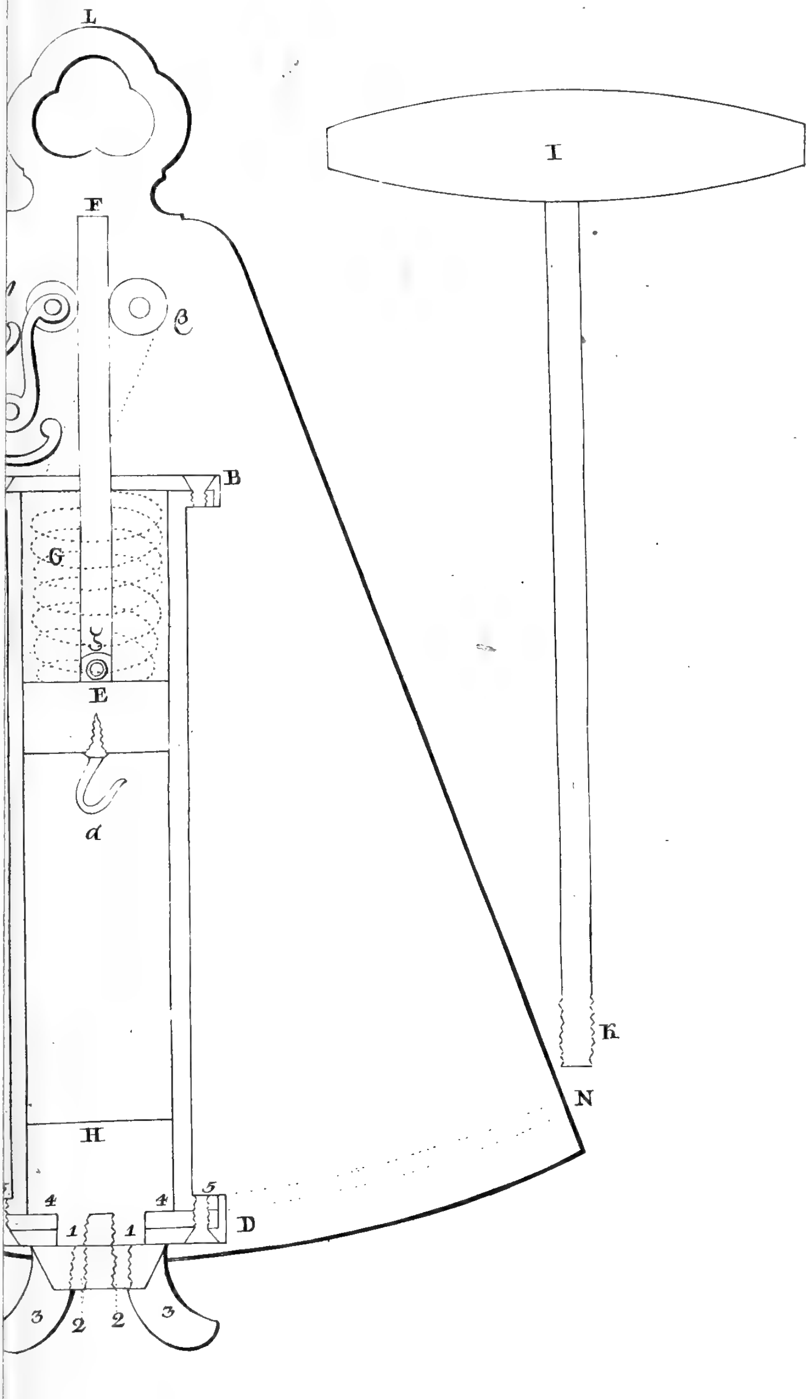
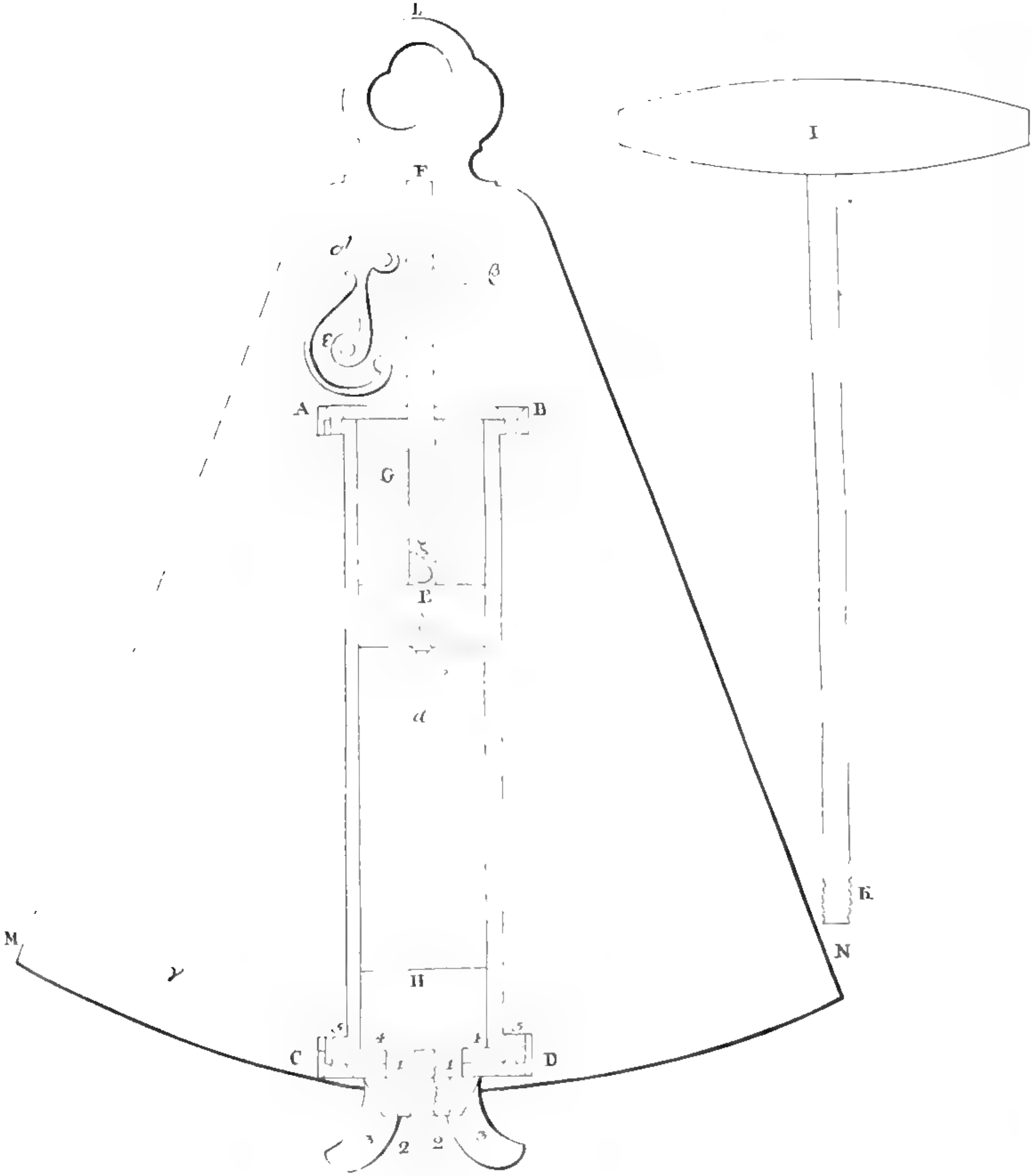


Fig 3


L
I
F
β
G
ζ
E
α
H
B
D
K
N
4
4
5
5
1
1
2
2
3
3


L
I
F
δ
β
ε
A
B
G
ζ
E
α
K
N
M
γ
H
C
D
5
4
1
2
3

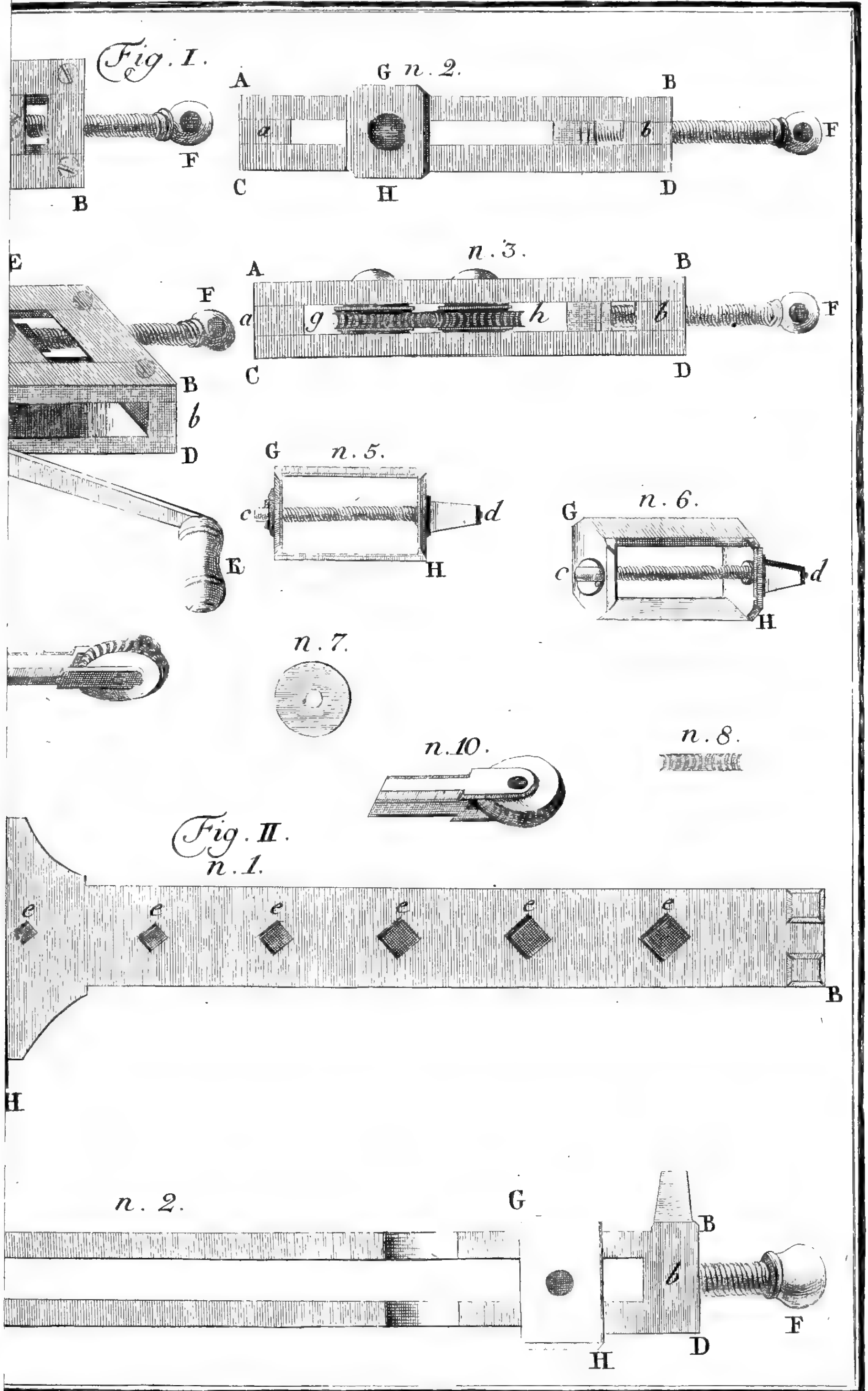


Fig. I.
n. 2.
n. 3.
n. 5.
n. 6.
n. 7.
n. 10.
n. 8.
Fig. II.
n. 1.
n. 2.

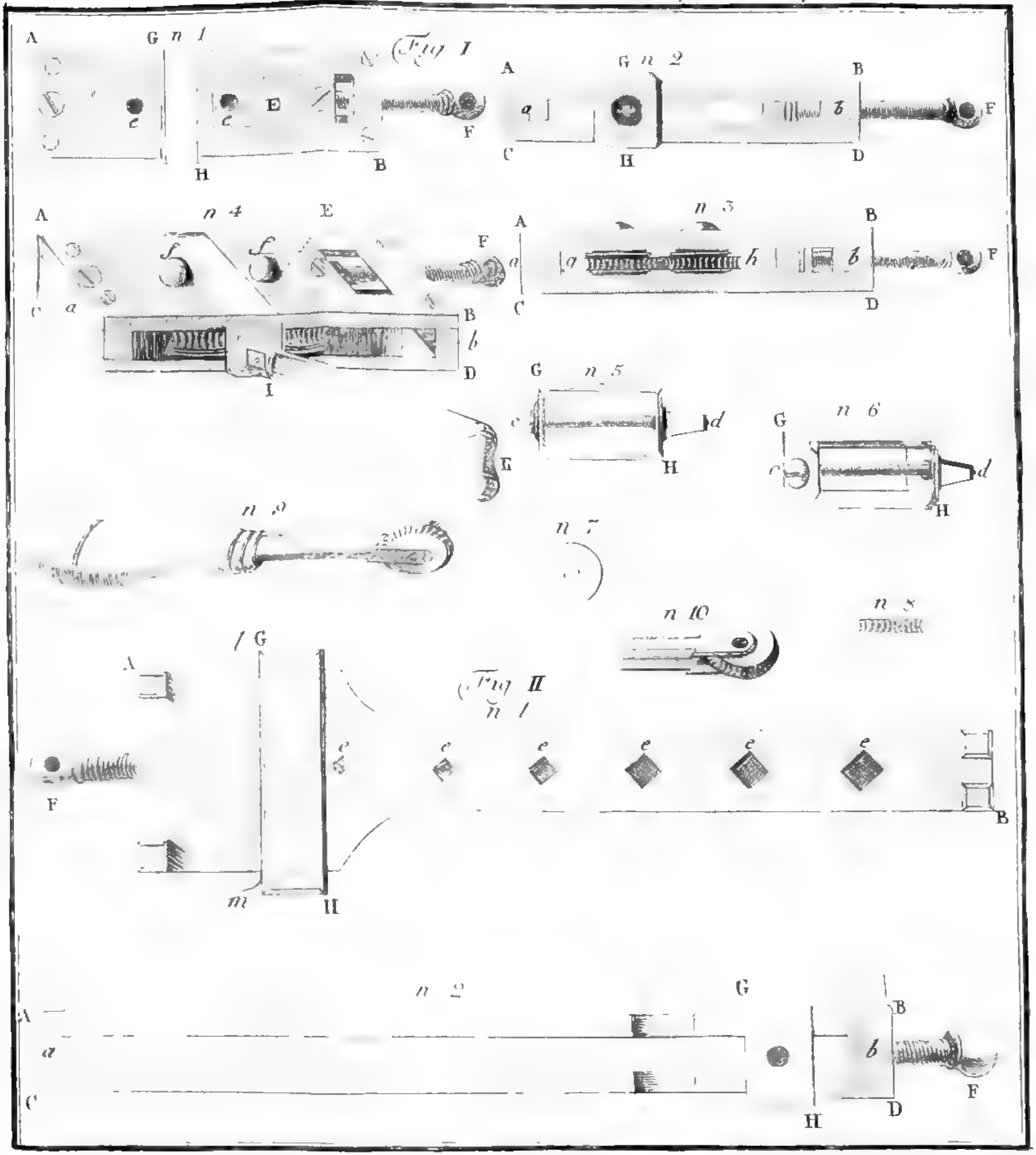


Fig. I
n. 1
n. 2
n. 3
n. 4
n. 5
n. 6
n. 7
n. 8
n. 9
n. 10
Fig. II
n. 1
n. 2

Fig III

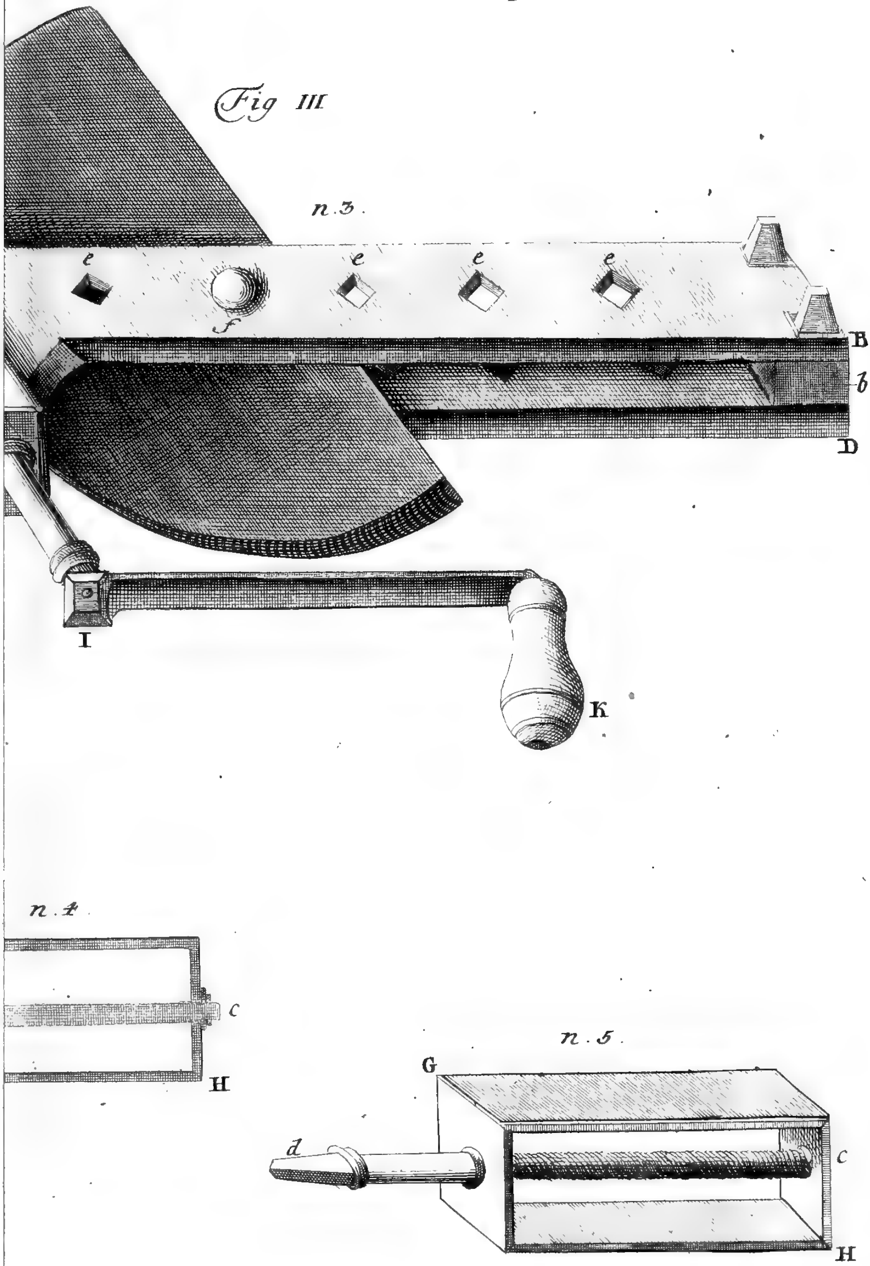
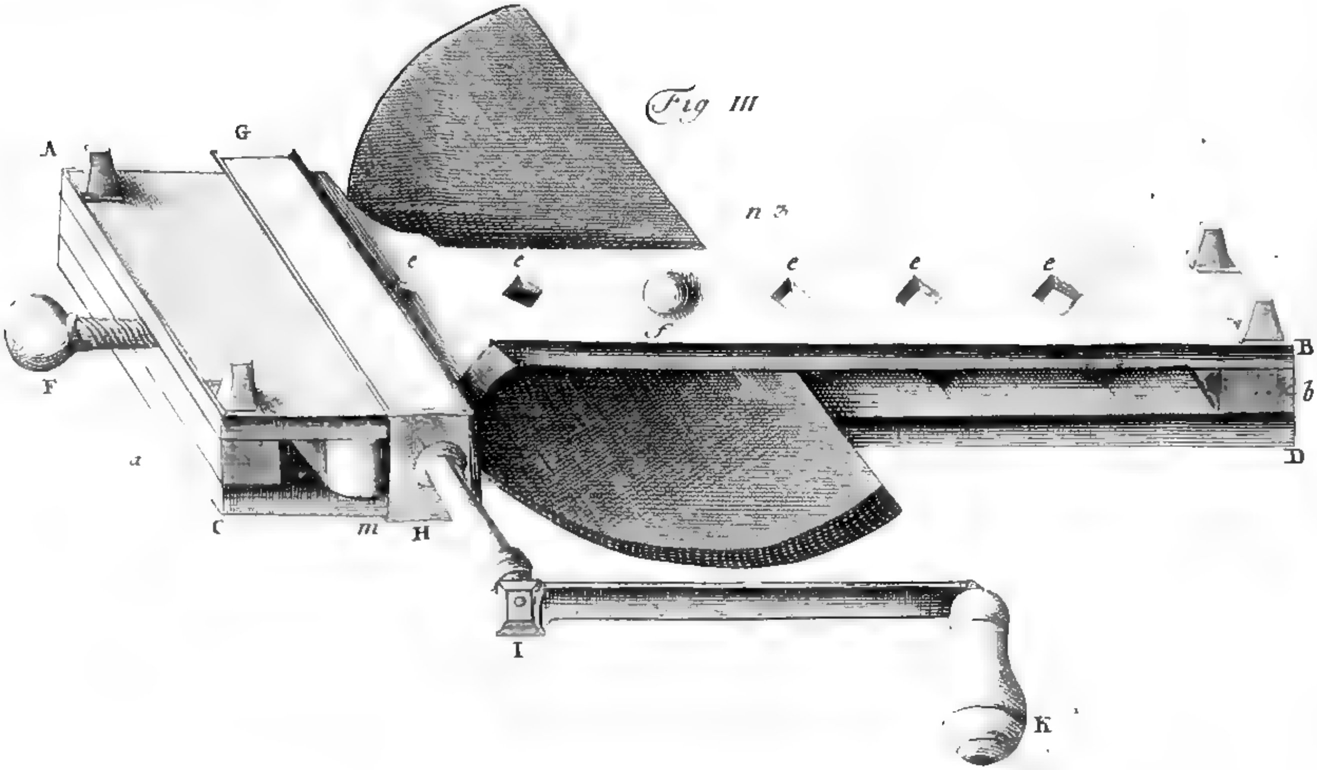
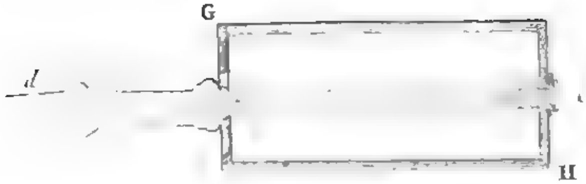


Fig III



n 4



n 5

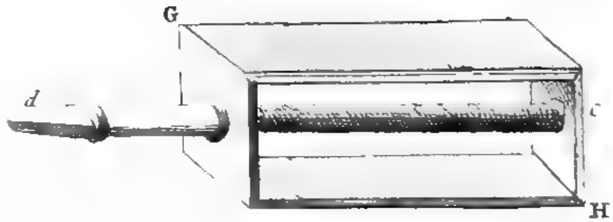


Fig. 2.

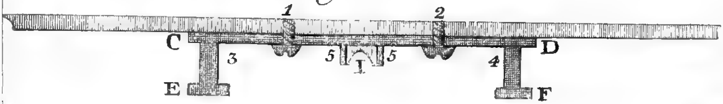


Fig. 1.

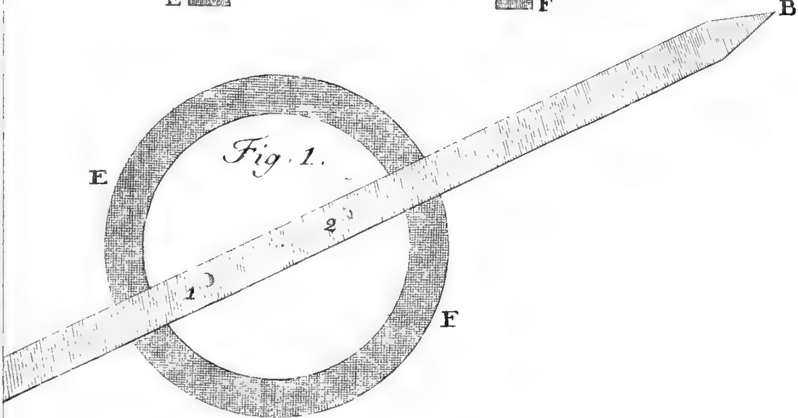


Fig. 3.

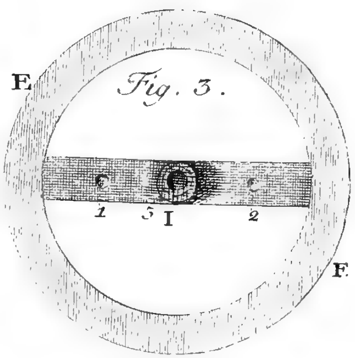


Fig. 4.

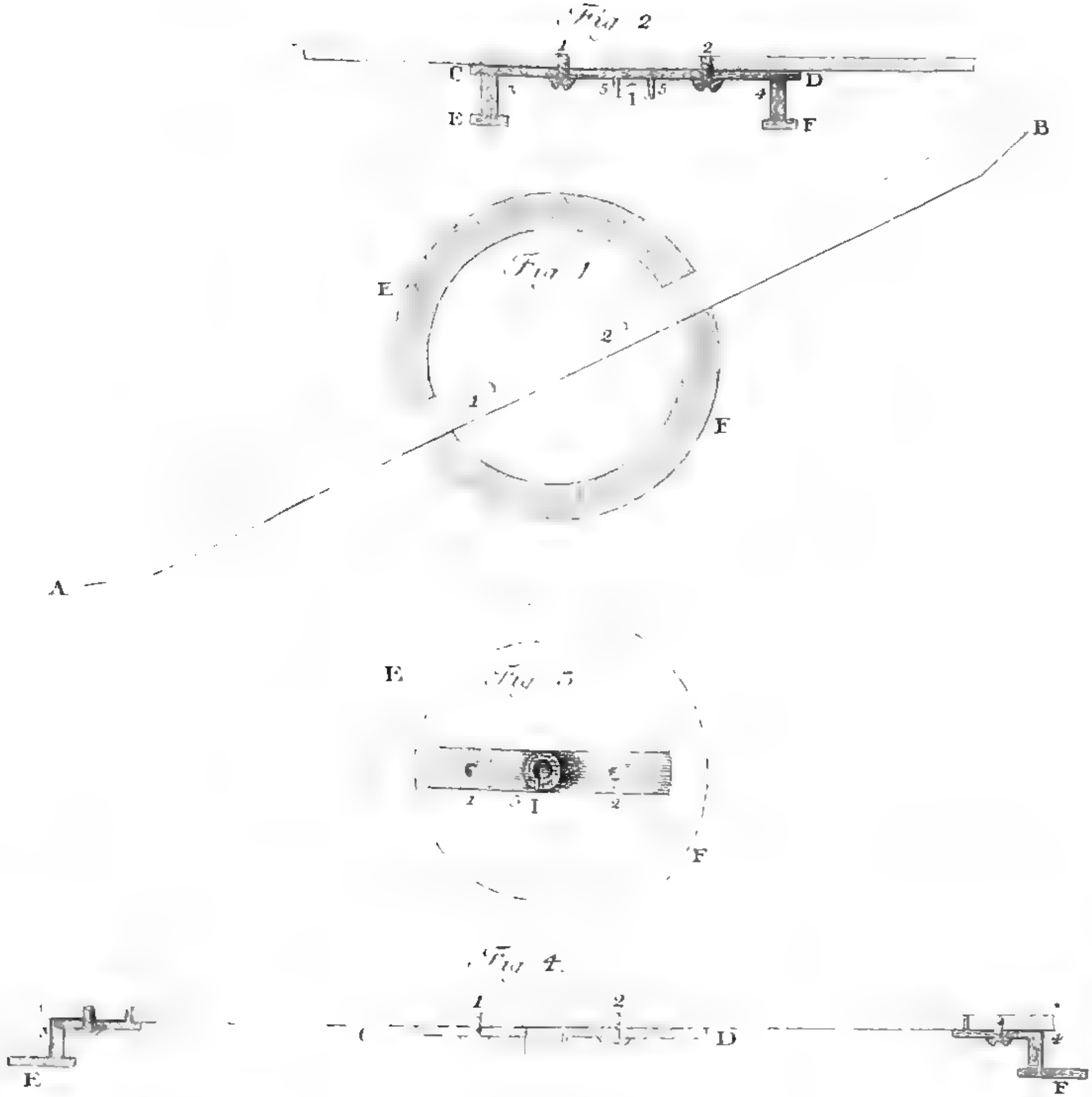


Fig. 2
C
D
E
F
B
Fig. 1
E
F
A
E
Fig. 3
I
F
Fig. 4
E
D
F

Fig. 2.

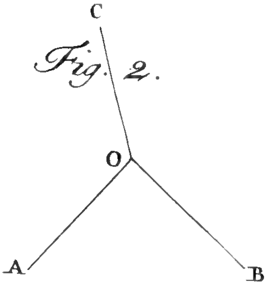


Fig. 3.

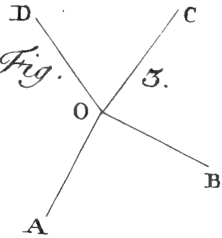
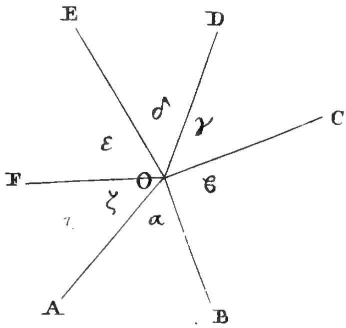


Fig. 5.



…g. 6.

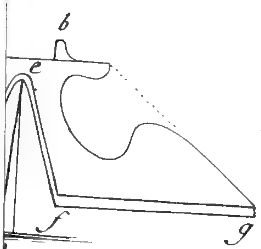


Fig. 7.

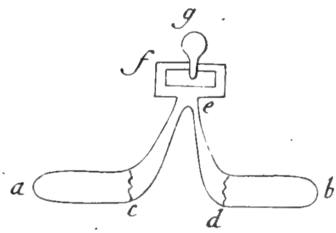


Fig. 1.

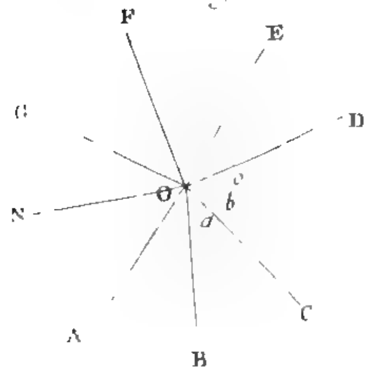


Fig. 2.

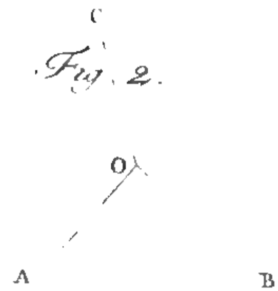


Fig. 3

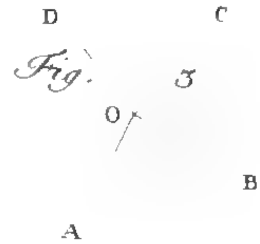


Fig. 4.

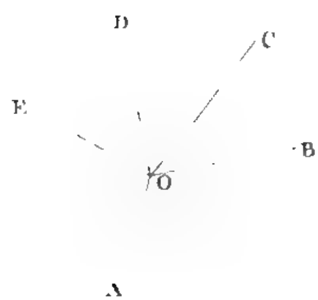


Fig. 5.

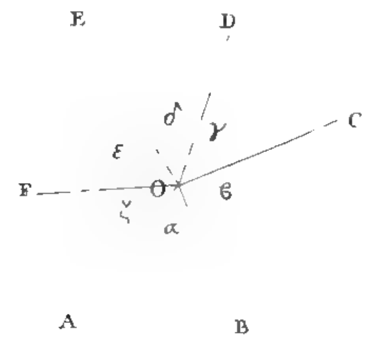


Fig. 6.

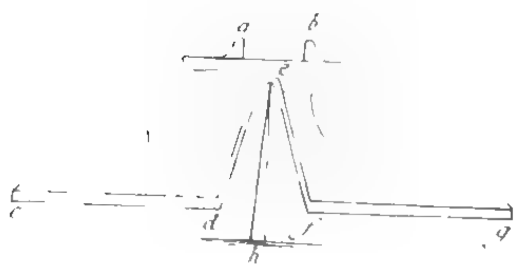


Fig. 7.

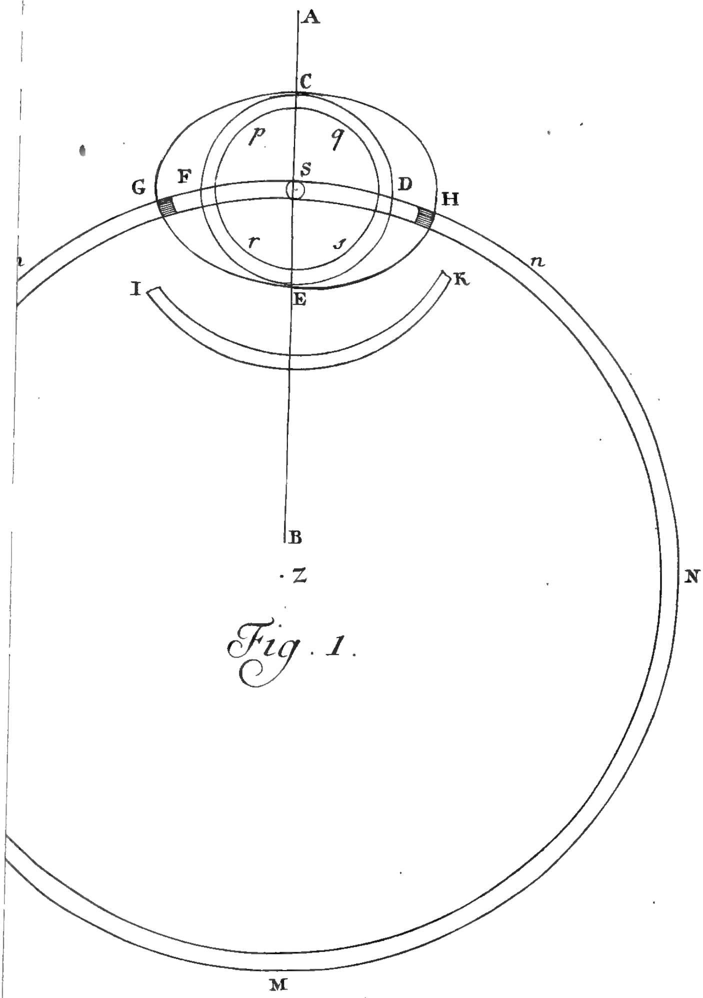


Fig. 1.

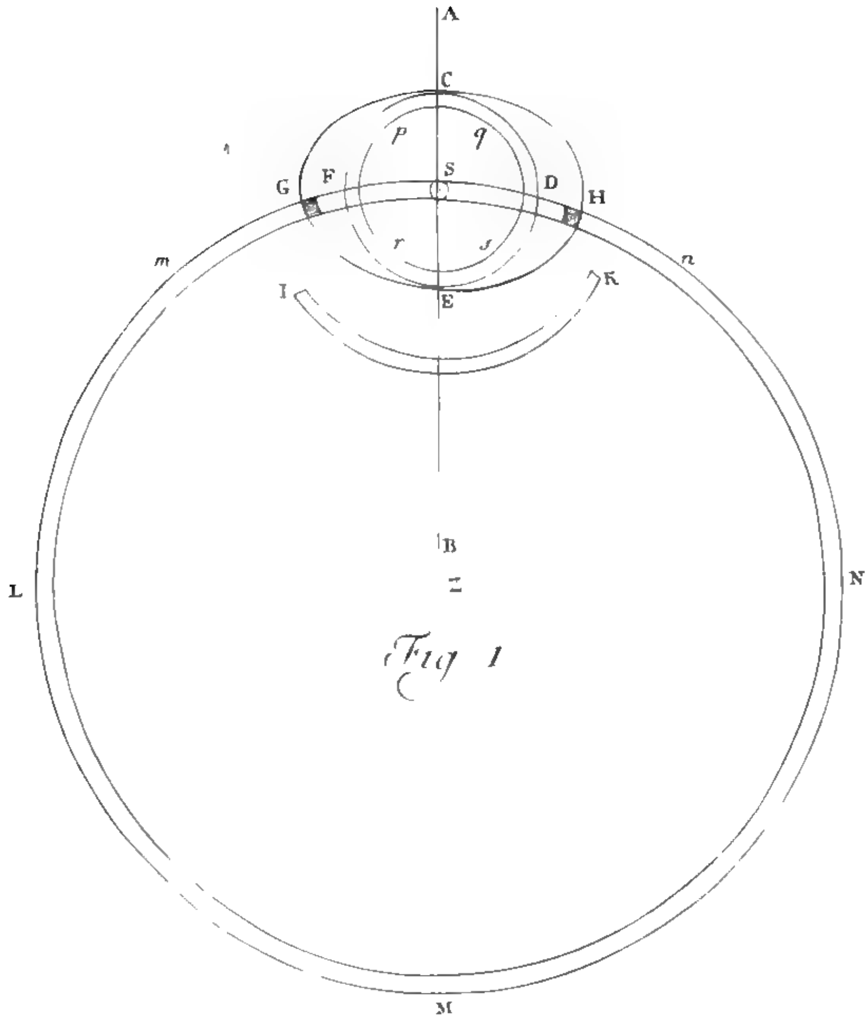


Fig. 1

Messerschmidia

Messerschmidia

Aeschinomene

Aeschinomene

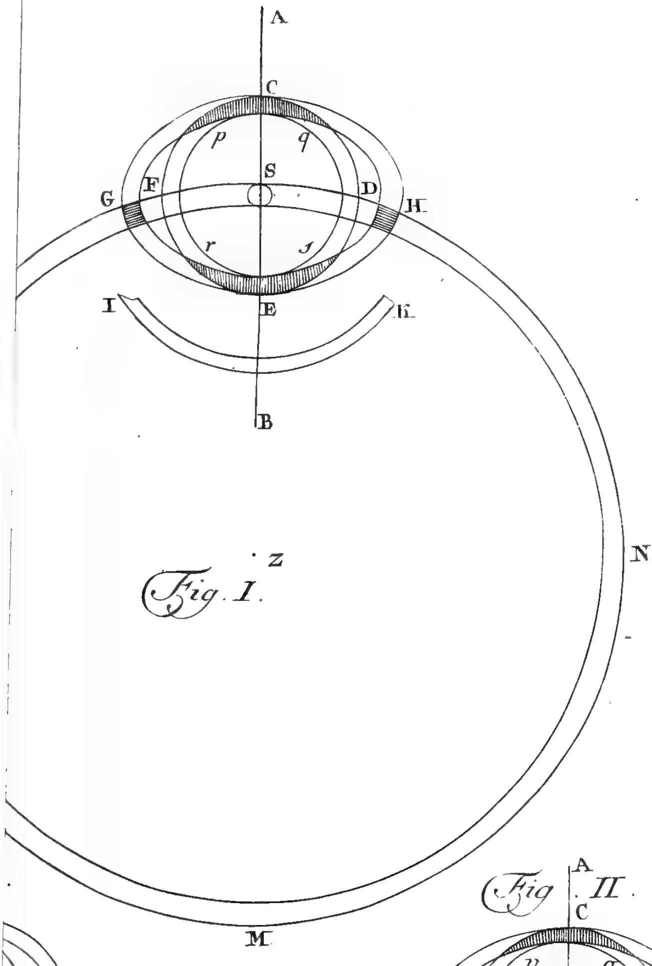


Fig. I.

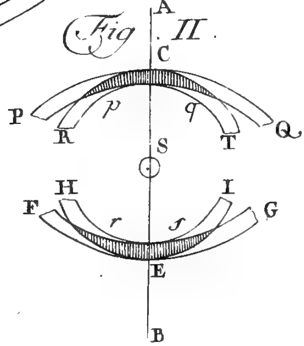
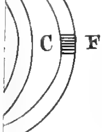


Fig. II.



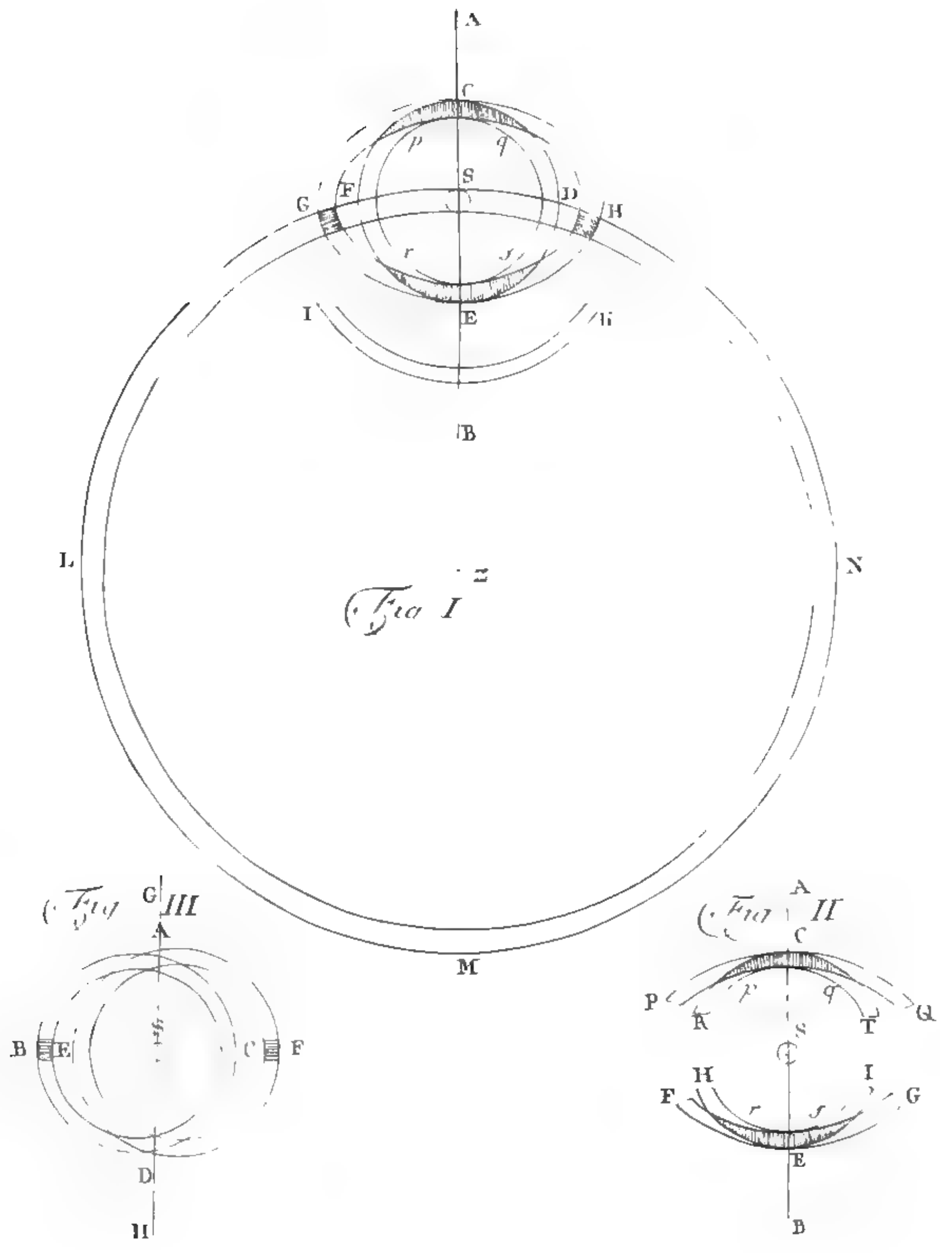
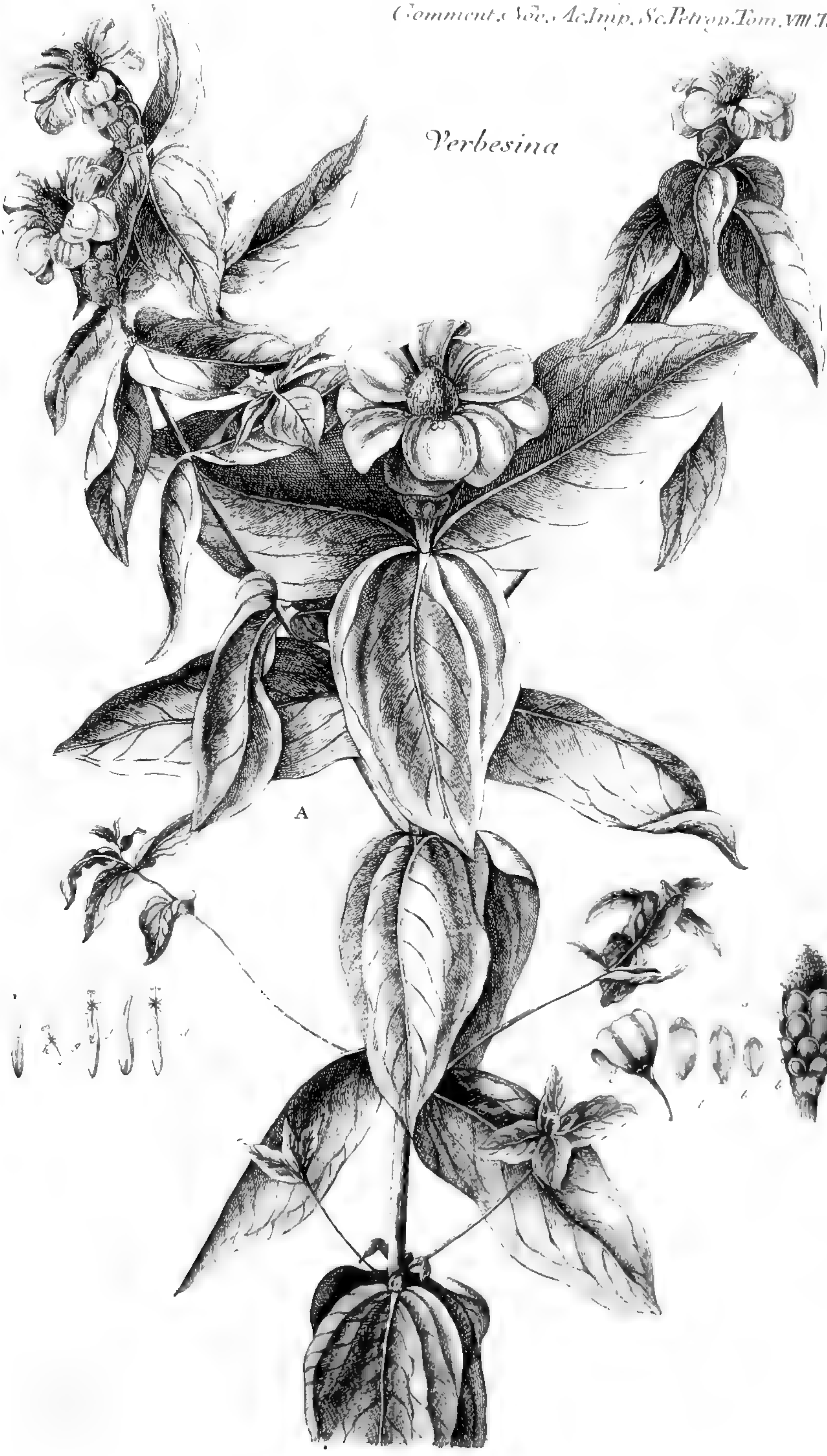


Fig. I
A
C
p
q
S
G
F
D
H
r
s
I
E
K
B
L
z
N
M
Fig. III
G
A
s
B
E
C
F
D
H
Fig. II
A
C
P
p
q
Q
R
T
S
H
I
F
G
r
s
E
B

Verbesina

Verbesina



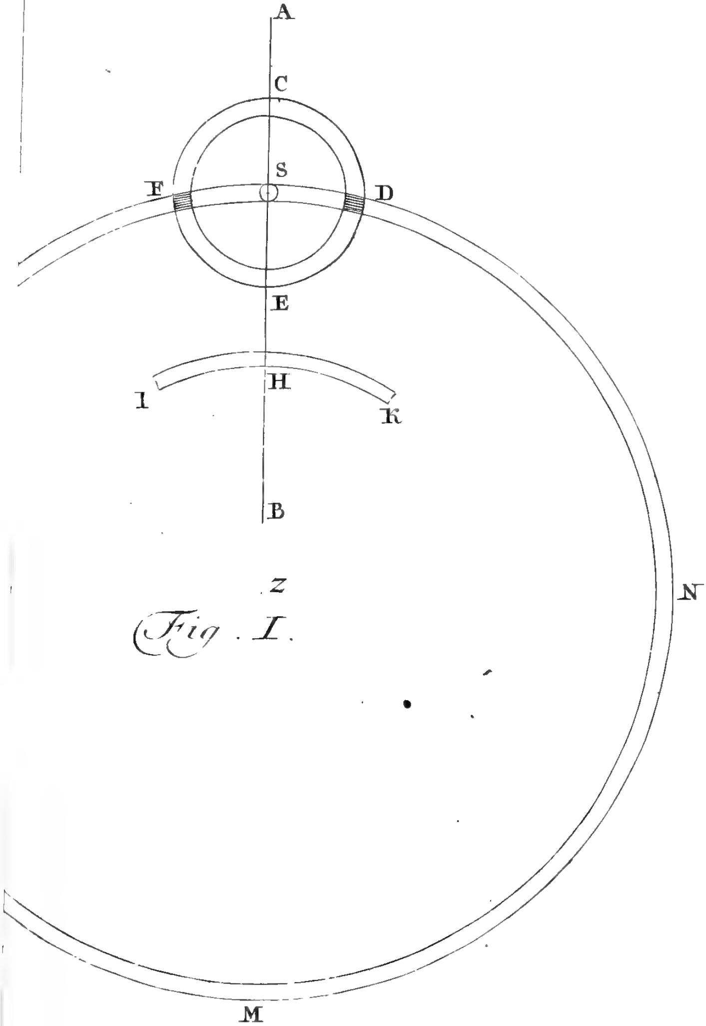


Fig. I.

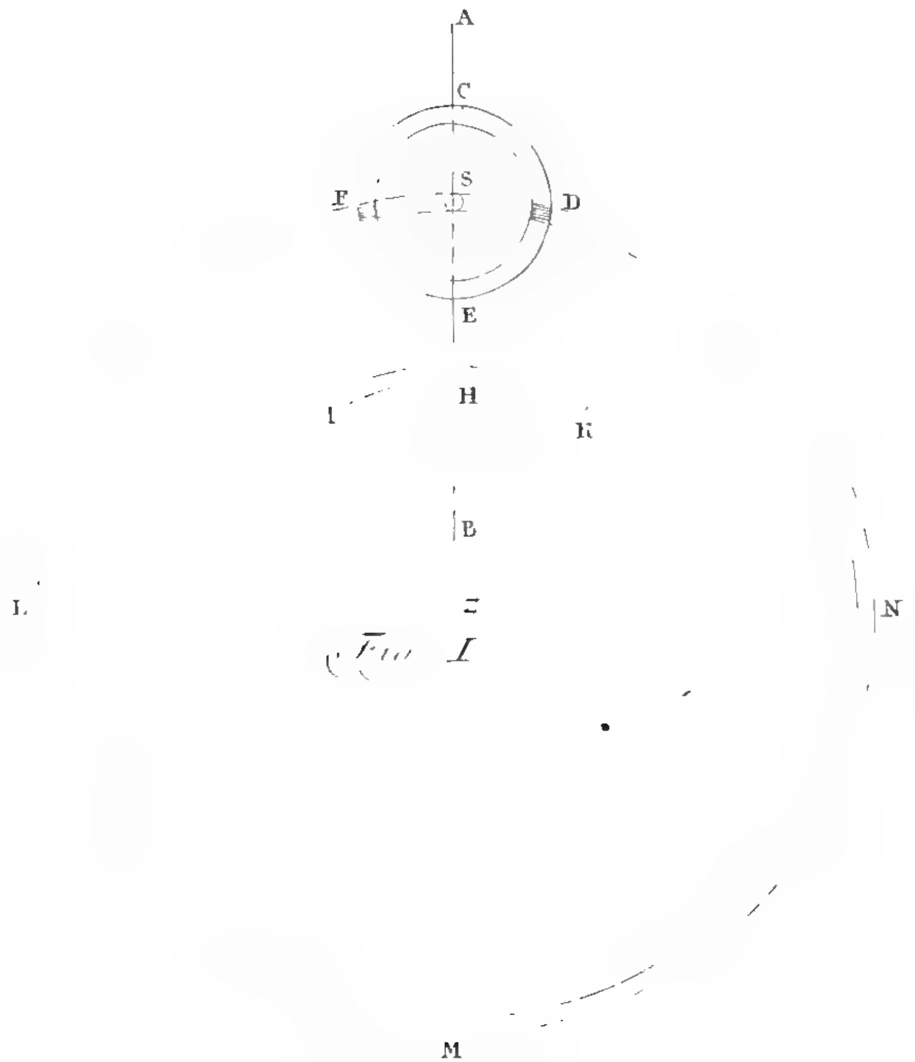


Fig. I.

Fig. II.

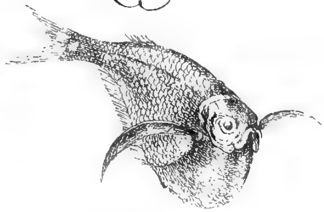


Fig. III.

Fig. IV.

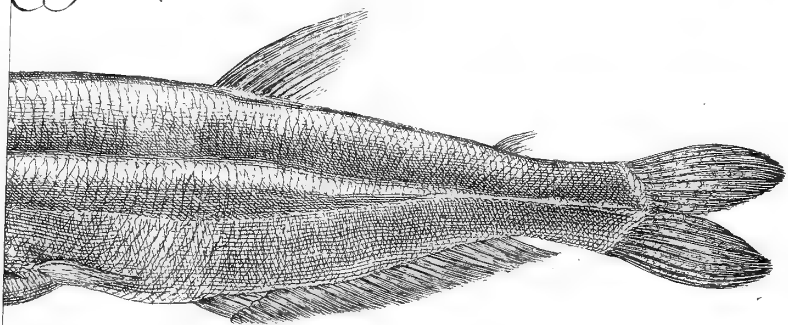


Fig. V.

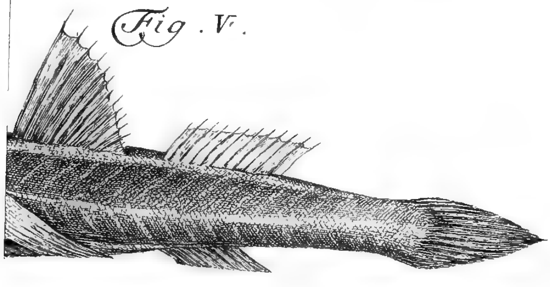


Fig. VI.

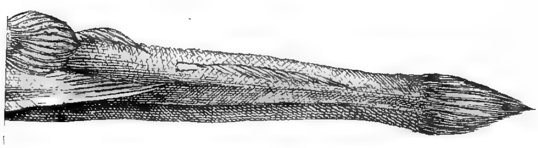


Fig. I

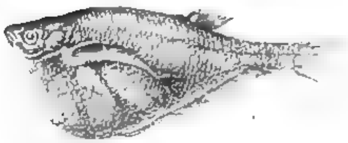


Fig. II

Fig. III

Fig. IV

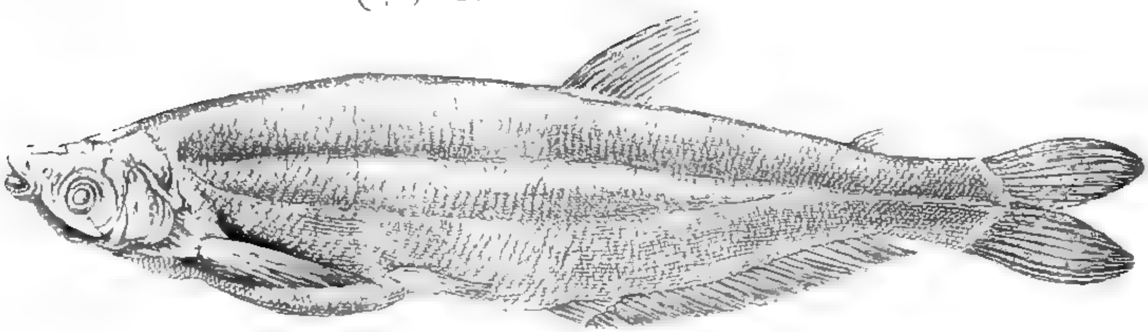


Fig. V

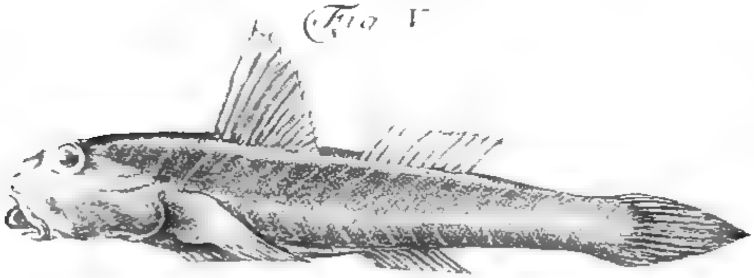


Fig. VI.